Adrian Ciobanu

MATEMATICĂ

PREGĂTIRE PENTRU

EXAMENUL DE ABSOLVIRE

A GIMNAZIULUI

CONFORM CURRICULUMULUI MEC

CURRICULUM

CONFORM CURRICULUMULUI MEC

Teorie explicată detaliat și exerciții rezolvate

40 DE TESTE DE VERIFICARE

clasa a IX-a

DORINȚA

Adrian CIOBANU

MATEMATICĂ

pregătire pentru examenul de absolvire a gimnaziului

DORINȚA

Redactor lingvistic: Diana Dobrovolschi
Tehnoredactor: Liudmila Culicova
Coperta: Andrei Jugaru

Chișinău, Poligraf-Design SRL, 2026
www.dorinta.md; e-mail: info@dorinta.md

DESCRIEREA CIP A CAMEREI NAȚIONALE A CĂRȚII DIN REPUBLICA MOLDOVA
Ciobanu, Adrian.
Matematică : pregătire pentru examenul de absolvire a gimnaziului : [clasa a 9-a] / Adrian Ciobanu. – Chișinău : Dorința, 2026 (Poligraf-Design). – 384 p. : fig.
[500] ex.
ISBN 978-5-36240-468-0.
51(075.3)
C 51

Cuvânt-înainte

Salutare, drag elev!

Dacă ții această carte în mână, înseamnă că ești pregătit să faci un pas important spre succesul la primul tău mare examen – cel de absolvire a gimnaziului. Știu ce emoții pot apărea în această perioadă. Uneori, matematica pare un labirint nesfârșit de formule și reguli greu de înțeles. Dar adevărul este altul: matematica nu este dificilă, trebuie doar să fie explicată pe înțelesul tău.

Am scris această lucrare gândindu-mă la parcursul meu, de la băncile gimnaziului din Volodeni până la studiile universitare în Matematică și Economie, la Iași. Mi-am dorit să creez pentru tine resursa care mie mi-a lipsit: un ghid care să îți fie sprijin la fiecare pas, care să îți explice nu doar ce trebuie făcut, ci mai ales *de ce* și *cum*.

Ce vei găsi în această carte?

- **Toată materia explicată simplu și clar.** Am transformat conceptele abstracte în exemple concrete, astfel încât să înțelegi logica din spatele fiecărei teme, nu doar să memorezi formule.
- **Exerciții rezolvate pas cu pas.** Nu te las singur în fața problemelor. Îți arăt drumul complet: de la înțelegerea enunțului până la obținerea rezultatului final.
- **40 de teste de verificare.** Acestea sunt concepute strict după **noul model de examen din 2026** (incluzând noutățile apărute în testele de exersare și pretestare), astfel încât în ziua examenului să nu existe nicio „surpriză".

Fie că ești în clasa a VIII-a și vrei să construiești o bază solidă, fie că ești în clasa a IX-a și te pregătești pentru „focul" examenului, această carte îți va fi un adevărat antrenor personal.

Sub numele de **matematica_adrian**, am încercat mereu, în mediul online, să arăt că cifrele pot deveni prietenoase. Acum ai în față versiunea completă, care te va conduce spre nota pe care ți-o dorești.

Ai încredere în tine, lucrează constant și nu uita: fiecare exercițiu rezolvat te aduce mai aproape de liceul la care visezi!

Mult succes,
Adrian Ciobanu

Cuprins

Algebră

Geometrie

Teste

ALGEBRĂ

Mulțimi speciale de numere

$\mathbb{N}$ – mulțimea numerelor naturale.
$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
$\mathbb{Z}$ – mulțimea numerelor întregi.
$\mathbb{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Q}$ – mulțimea numerelor raționale.
$\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \}$
I – mulțimea numerelor iraționale.
Numerele iraționale pot fi scrise ca numere zecimale infinite neperiodice.

Observație.
Nu există niciun număr care poate fi în același timp și rațional, și irațional.

$\mathbb{R}$ – mulțimea numerelor reale.

Un număr real este rațional sau irațional.

Mulțimi. Operații cu mulțimi

Mulțimea reprezintă un ansamblu de obiecte distincte și bine determinate, numite **elementele** mulțimii. Elementele unei mulțimi pot fi de orice natură: numere, litere, simboluri, cuvinte, alte mulțimi etc. Tradițional, notăm mulțimile cu litere mari ale alfabetului latin: A, B, C, D etc.

Elementele unei mulțimi se scriu între acolade:
$A = \{ a, b, c, d, e, f, g \}$

Definiție.
Se numește **mulțime vidă** mulțimea care nu are niciun element și se notează cu $\varnothing$.

Definiție.
Cardinalul unei mulțimi reprezintă numărul de elemente ale unei mulțimi.

Exemple:

$B = \{ k, l, m, n, o, p, q \}$
card $B = 7$
$C = \{$ pix, creion, radieră, ascuțitoare, riglă $\}$
card $C = 5$
card $\varnothing = 0$

Două sau mai multe mulțimi sunt egale dacă și numai dacă au aceleași elemente.

Exemplu:

$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$; $B = \{ 3, 1, 5, 2, 6, 4 \}$

$A = B$

Observație.

Faptul că un element x aparține unei mulțimi A, se va nota prin $x \in A$, în caz contrar $x \notin A$.

Definiție.

Mulțimea A se numește **submulțime** a mulțimii B dacă orice element al mulțimii A este element și al mulțimii B.

Exemple:

Fie $M = \{ Li, Na, K, Rb, Cs, Fr \}$ mulțimea metalelor alcaline și P mulțimea tuturor elementelor din sistemul periodic.

Vom scrie $M \subset P$.

Vom citi: *„Mulțimea M este submulțime a mulțimii P”* sau *„Mulțimea M se include în mulțimea P”.*

Observație.

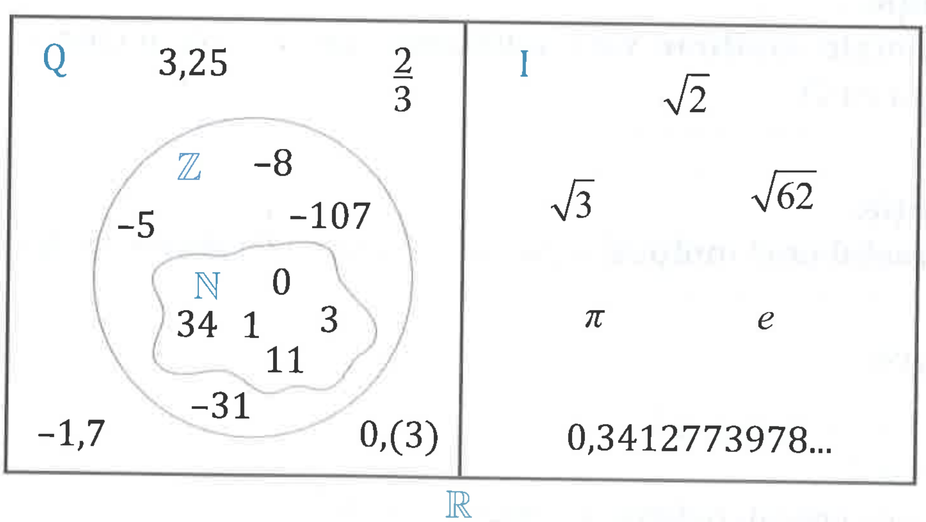
→ Orice număr natural este și număr întreg.

→ Orice număr întreg este și număr rațional.

→ Orice număr rațional este și număr real.

→ Reciprocele nu mereu funcționează, deoarece nu orice număr întreg este natural sau nu orice număr rațional este întreg.

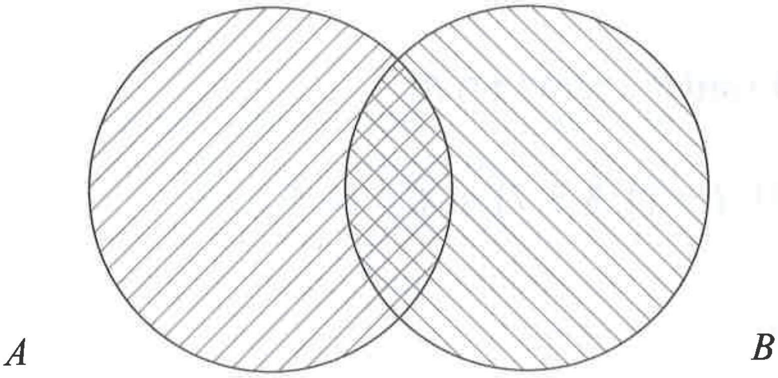
Analizați schema!



Matematic putem scrie:

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ $\qquad$ $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$.

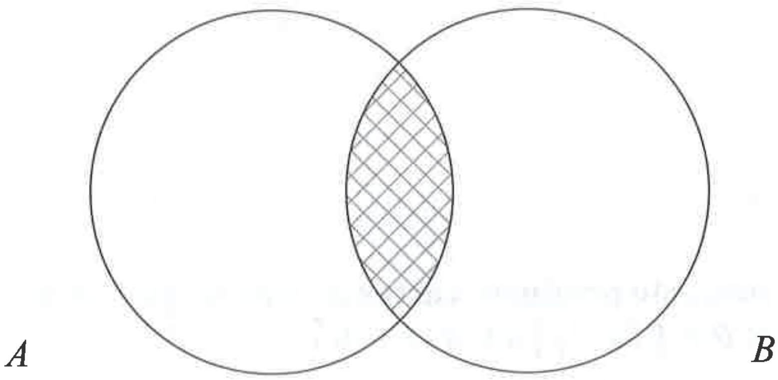
Reuniunea mulțimilor A și B este o nouă mulțime $A \cup B$ ce conține elemente care aparțin cel puțin uneia dintre mulțimile A sau B.



$\leftarrow A \cup B$

$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ sau } x \in B \}$

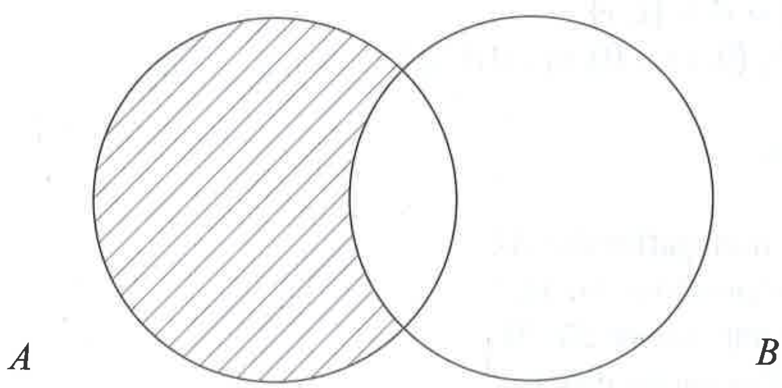
Intersecția mulțimilor A și B este o nouă mulțime $A \cap B$ ce conține elemente comune ale mulțimilor A și B.



$\leftarrow A \cap B$

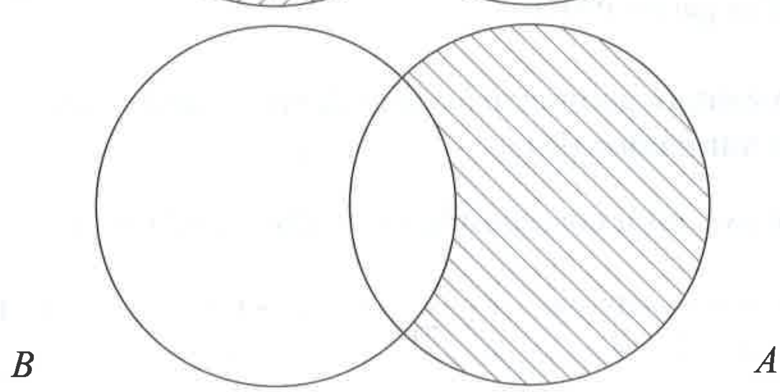
$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ și } x \in B \}$

Diferența mulțimilor A și B este o nouă mulțime $A \setminus B$ care este alcătuită din toate elementele ce aparțin mulțimii A și nu aparțin mulțimii B.



$\rightarrow A \setminus B$

$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \text{ și } x \notin B \}$



$\rightarrow B \setminus A$

$B \setminus A = \{ x \mid x \in B \text{ și } x \notin A \}$

Observație.

→ $A \cup B = B \cup A$

→ $A \cap B = B \cap A$

→ $A \setminus B \neq B \setminus A$

→ $\text{card}\,(A \cup B) = \text{card}\,A + \text{card}\,B - \text{card}\,(A \cap B)$

Exemple:

Fie mulțimile $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$ și $C = \{2, 4, 6, 8\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

$B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$A \cap B = \{1, 3\}$

$B \cap C = \emptyset$

$A \cap C = \{2, 4\}$

$A \setminus B = \{2, 4\}$

$B \setminus A = \{5, 7\}$

$B \setminus C = B$

$C \setminus B = C$

Definiție.

Fie A și B două mulțimi. Se numește **produsul cartezian** dintre mulțimea A și mulțimea B, mulțimea $A \times B = \{\, (a, b) \mid a \in A,\, b \in B \,\}$

Exemplu:

Fie mulțimile $A = \{8, 9, 10\}$ și $B = \{x, y\}$

$A \times B = \{\, (8, x), (8, y), (9, x), (9, y), (10, x), (10, y) \,\}$

Fie M o mulțime de numere.

$M^* = M \setminus \{0\}$

M_+ → mulțimea numerelor nenegative din M.

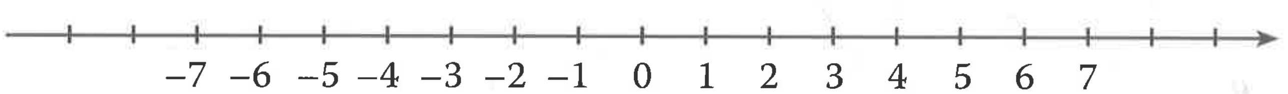
M_+^* → mulțimea numerelor pozitive din M.

M_- → mulțimea numerelor nepozitive din M.

M_-^* → mulțimea numerelor negative din M.

Axa numerelor este o reprezentare geometrică a unei drepte care servește ca abstractizare pentru mulțimea numerelor ($\mathbb{R}$).

Oricare ar fi un punct de pe axă, lui îi corespunde un singur număr real.



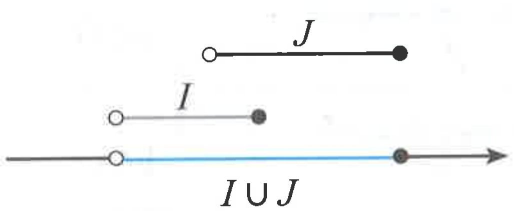
Observație.
Pentru a compara două sau mai multe numere reale, ne folosim de axa numerelor. Mai mare va fi acel număr care este poziționat mai în dreapta față de celelalte.

Intervalul numeric este o mulțime nemărginită sau mărginită care conține toate numerele reale situate între două numere reale date.

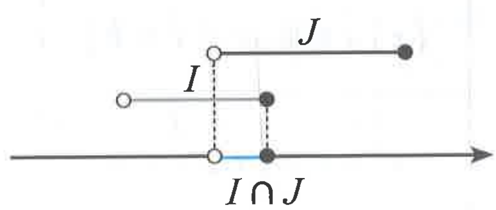
Intervalele numerice sunt mulțimi de numere reale, deci toate operațiile care se pot efectua cu mulțimi (reuniunea, intersecția, diferența) se pot efectua și cu intervale.

Fie I și J două intervale de numere reale. Atunci, $I \cup J = \{x \mid x \in I \text{ sau } x \in J\}$ și $I \cap J = \{x \mid x \in I \text{ și } x \in J\}$.

- **Reuniunea intervalelor:**
$I \cup J = \{x \mid x \in I \text{ sau } x \in J\}$

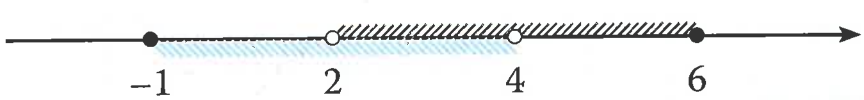


- **Reuniunea intervalelor:**
$I \cap J = \{x \mid x \in I \text{ și } x \in J\}$



Exemple:

1) Fie intervalele $I = (2, 6]$ și $J = [-1, 4)$. Le vom reprezenta pe axă hașurând primul interval sus și al doilea jos.



$I \cup J = [-1, 6]$ $\quad$ $I \setminus J = [-1, 2]$

$I \cap J = (2, 4)$ $\quad$ $J \setminus I = [4, 6]$

2) Fie $I = [-4, 3)$ și $J = (-2, 0]$

$I \cup J = [-4, 3) = I$

$I \cap J = (-2, 0] = J$

Observație.

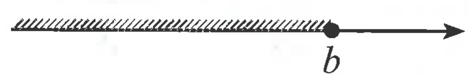
Dacă orice element din intervalul J se regăsește și în intervalul I, atunci vom spune că J este un subinterval al lui I.

$$J \subset I$$

3) Fie $I = (-3,\ 5]$ și $J = (8,\ 10]$

$$I \cup J = (-3,\ 5] \cup (8,\ 10]$$
$$I \cap J = \varnothing$$

Fie $a,\ b \in \mathbb{R}$ și $a < b$.

Mulțimea	**Intervalul numeric**	
	Reprezentarea pe axă	**Notarea**
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$		$[a;\ b]$
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$		$[a;\ b)$
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$		$(a;\ b]$
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$		$(a;\ b)$
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x > a\}$		$(a;\ +\infty)$
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$		$[a;\ +\infty)$
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x < b\}$		$(-\infty;\ b)$
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq b\}$		$(-\infty;\ b]$
$\mathbb{R}$		$(-\infty;\ +\infty)$

Definiție.
Modulul sau **valoarea absolută** a numărului real a se notează cu $|a|$ și reprezintă distanța de la numărul a până la origine pe axa numerelor.

Se definește în felul următor: $|a| = \begin{cases} a, \text{dacă } a > 0 \\ 0, \text{dacă } a = 0 \\ -a, \text{dacă } a < 0 \end{cases}$

Proprietățile modulului:

Pentru orice numere reale a și b:

1° $|a| \geq 0$

2° $|a| \geq a$

3° $|a| = |a|^2 = |-a|^2 = a^2$

4° $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

5° $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq o$

• Adunarea

Operația de adunare pe $\mathbb{R}$ este operație de ordinul I și asociază oricărei perechi (a, b) de numere reale un unic număr real, pe care îl notăm cu $a + b$ și îl numim **suma** lui a cu b. Operația inversă a adunării se numește **scădere**.

Proprietăți.
Pentru orice numere reale a, b, c avem:

1° **Comutativitatea:**
$a + b = b + a$ *Ex.:* $2 + 3 = 3 + 2$
$7 - 3 = -3 + 7$

2° **Asociativitatea:**
$(a + b) + c = a + (b + c)$ *Ex.:* $(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)$
$(4 - 5) - 6 = 4 + (-5 - 6)$

3° Zero este **element neutru** la adunare:
$a + 0 = 0 + a = a$ *Ex.:* $3 + 0 = 0 + 3 = 3$

4° $-a$ este numărul **opus** al lui a:
$a + (-a) = -a + a = 0$ *Ex.:* $4 + (-4) = -4 + 4 = 0$

• Înmulțirea

Operația de înmulțire pe $\mathbb{R}$ este operație de ordinul II și asociază oricărei perechi (a, b) de numere reale un unic număr real, pe care îl notăm $a \cdot b$ sau ab și îl numim **produsul** lui a cu b. Operația inversă a înmulțirii este **împărțirea**.

Proprietăți.

Pentru orice numere reale a, b, c au loc proprietățile:

1° **Comutativitatea:**

$a \cdot b = b \cdot a$ *Ex.:* $2 \cdot 7 = 7 \cdot 2$

$-3 \cdot 2 = 2 \cdot (-3)$

2° **Asociativitatea:**

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ *Ex.:* $(2 \cdot 3) \cdot 4 = 2 \cdot (3 \cdot 4)$

$(2 \cdot 4) \cdot (-5) = 2 \cdot [(4 \cdot (-5))]$

3° Unu este **element neutru** la înmulțire:

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ *Ex.:* $31 \cdot 1 = 1 \cdot 31 = 31$

4° $\frac{1}{a}$ este numărul **invers** al lui $a \neq 0$

$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$ *Ex.:* $5 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \cdot 5 = 1$

Operațiile de mai sus alcătuiesc împreună proprietatea de **distributivitate** a înmulțirii față de adunare:

$a\,(b + c) = ab + ac$ *Ex.:* $2\,(3 + 4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$

$a\,(b - c) = ab - ac$ $5\,(x - 2) = 5x - 5 \cdot 2$

◆ Regula semnelor la adunare

Fie a și b două numere reale nenule.

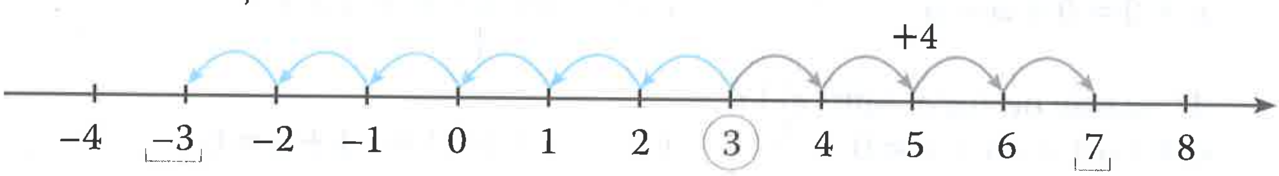
■ Dacă $a > 0$ și $b > 0$, atunci suma lor este suma modulelor sale, precedată de semnul „+".

■ Dacă $a < 0$ și $b < 0$, atunci suma lor este suma modulelor sale, precedată de semnul „–".

■ Dacă $a < 0$ și $b > 0$, atunci suma lor este diferența modulelor, precedată de semnul numărului cu modulul mai mare, în cazul în care modulele sunt diferite. În cazul în care modulele sunt egale, suma va fi zero.

Putem interpreta adunarea a două numere reale și cu ajutorul axei numerelor, după exemplul următor:

$3 + 4 = 7$ și $3 - 6 = -3$

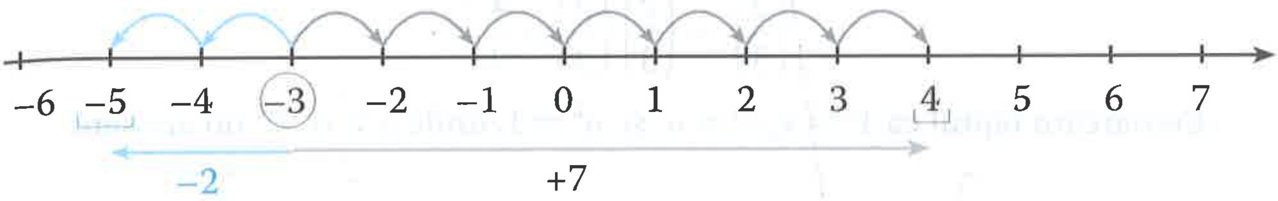


Explicație.

Fixăm primul termen pe axă (în cazul nostru, 3). Dacă adunăm 4, atunci ne vom deplasa în dreapta cu 4 unități; dacă scădem 6, atunci ne vom deplasa în stânga cu 6 unități și vom obține rezultatele 7, și respectiv –3.

Analizăm încă un exemplu:

$-3 + 7 = 4$ $\qquad\qquad$ $-3 - 2 = -5$



Regula semnelor la înmulțire

Fie a și b două numere reale nenule.

■ Dacă $a > 0$ și $b > 0$, atunci produsul lor este produsul modulelor sale, precedat de semnul „+".

■ Dacă $a < 0$ și $b < 0$, atunci produsul lor este produsul modulelor sale, precedat de semnul „+".

■ Dacă $a < 0$ și $b > 0$, atunci produsul lor este produsul modulelor sale, precedat de semnul „–".

Tabelul semnelor.

Semnul numărului a	Semnul numărului b	Semnul numărului $a \cdot b$
+	+	+
+	–	–
–	+	–
–	–	+

Puteri

Definiție.
Ridicarea la putere cu exponent natural $n > 1$ a unui număr real a se numește înmulțirea a n factori, fiecare egal cu a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ ori}}$$

Se citește „a la puterea n" și a se numește **baza**, iar n se numește **exponent**.
Ridicarea la putere este operație de ordinul III.

Exemple:

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$
$$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$$

Remarcăm faptul că $1^n = 1$, $a^1 = a$ și $a^0 = 1$, unde $a \neq 0$. 0^0 nu are sens.

• Proprietățile puterilor cu exponent întreg

Pentru $a, b \in \mathbb{R}^*$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

1° $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ *Exemplu:* $3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$

$2^5 \cdot 2^{-3} = 2^{5+(-3)} = 2^{5-3} = 2^2$

2° $a^m : a^n = a^{m-n}$ *Exemplu:* $2^6 : 2^4 = 2^{6-4} = 2^2$

$\frac{3^7}{3^{-3}} = 3^{7-(-3)} = 3^{7+3} = 3^{10}$

3° $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$ *Exemplu:* $2^4 \cdot 3^4 = (2 \cdot 3)^4 = 6^4$

$15^2 = (3 \cdot 5)^2 = 3^2 \cdot 5^2$

4° $a^m : b^m = (a : b)^m$ *Exemplu:* $18^3 : 9^3 = (18 : 9)^3 = 2^3$

$\frac{28^3}{4^3} = \left(\frac{28}{4}\right)^3 = 7^3$

5° $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ *Exemplu:* $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$

$16^3 = (2^4)^3 = 2^{4 \cdot 3} = 2^{12}$

$125^2 = (5^3)^2 = 5^{3 \cdot 2} = 5^6$

6° $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ *Exemplu:* $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

$4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$

Observație.
În cazul în care un număr negativ se ridică la o putere impară, el va rămâne număr negativ, iar dacă se ridică la o putere pară, atunci răspunsul va fi număr pozitiv.
Acest lucru poate fi explicat cu regula semnelor la înmulțire.

Exemple:
$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9$, deoarece $(-) \cdot (-) = (+)$
$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = (+4) \cdot (-2) = -8$, deoarece $(+) \cdot (-) = (-)$

Observație.

$(-5)^2 \neq -5^2$

$(-5)^2 = [(-1) \cdot 5]^2 = (-1)^2 \cdot 5^2 = 1 \cdot 25 = 25$

$-5^2 = (-1) \cdot 5^2 = (-1) \cdot 25 = -25$

Definiție.
Se numesc **pătrate perfecte** acele numere naturale care pot fi scrise ca puterea a doua a unui număr natural.

Exemplu:
64 este pătrat perfect, deoarece îl putem scrie ca 8 ridicat la puterea a doua și obținem 64.

Definiție.
Se numesc **cuburi perfecte** acele numere naturale care pot fi scrise ca puterea a treia a unui număr natural.

Exemplu:
216 este cub perfect, deoarece îl putem scrie ca 6 ridicat la puterea a treia și obținem 216.

Fiecare elev trebuie să cunoască ca pe tabla înmulțirii următoarele puteri:

$4 = 2^2$	$256 = 2^8$	$243 = 3^5$	$25 = 5^2$
$8 = 2^3$	$512 = 2^9$	$729 = 3^6$	$125 = 5^3$
$16 = 2^4$	$1024 = 2^{10}$	$16 = 4^2$	$625 = 5^4$
$32 = 2^5$	$9 = 3^2$	$64 = 4^3$	$49 = 7^2$
$64 = 2^6$	$27 = 3^3$	$256 = 4^4$	$343 = 7^3$
$128 = 2^7$	$81 = 3^4$	$1024 = 4^5$	

• Puterile lui 10

$0{,}001 = 10^{-3}$ $\quad$ $10 = 10^1$

$0{,}01 = 10^{-2}$ $\quad$ $100 = 10^2$

$0{,}1 = 10^{-1}$ $\quad$ $1000 = 10^3$

$1 = 10^0$ $\quad$ $1000000 = 10^6$

Exercițiu rezolvat din pretestare (februarie 2025)

Calculați valoarea expresiei: $\dfrac{7^{-14}\cdot 49^5}{7^{-3}}:\dfrac{1}{7}$

Rezolvare:

$49^5 = (7^2)^5 = 7^{2\cdot 5} = 7^{10}$

$7^{-14}\cdot 7^{10} = 7^{-14+10} = 7^{-4}$

$\dfrac{7^{-4}}{7^{-3}}:\dfrac{1}{7} = 7^{-4-(-3)}\cdot 7 = 7^{-4+3+1} = 7^0 = 1$

Exercițiu rezolvat din testul nr. 2 (februarie 2022)

Calculați valoarea expresiei: $\dfrac{15^5\cdot 9^{-2}}{25^2}$.

Rezolvare:

$15^5 = (3\cdot 5)^5 = 3^5\cdot 5^5$

$9^{-2} = (3^2)^{-2} = 3^{-4}$

$25^2 = (5^2)^2 = 5^{2\cdot 2} = 5^4$

$\dfrac{3^5\cdot 5^5\cdot 3^{-4}}{5^4} = 3^{5-4}\cdot 5^{5-4} = 3\cdot 5 = 15$

Exercițiu rezolvat din testul nr. 1 (februarie 2019)

Calculați valoarea expresiei: $\dfrac{15}{124\cdot 3^4+3^4}$.

Rezolvare:

$15^4 = (3\cdot 5)^4 = 3^4\cdot 5^4$

La numitor vom da factor comun pe 3^4.

$124\cdot 3^4 + 3^4 = 3^4(124+1) = 3^4\cdot 125 = 3^4\cdot 5^3$

$\dfrac{\cancel{3^4}\cdot 5^4}{\cancel{3^4}\cdot 5^3} = 5^{4-3} = 5$

Radicali

Dacă a este pătrat perfect și b este număr natural astfel încât $a = b^2$, atunci spunem că b este **rădăcina pătrată** a lui a.

Se scrie $b=\sqrt{a}$, se citește *„b egal cu radical din a"*.

Pătrat perfect	**Rădăcină pătrată**
$1^2 = 1$	$\sqrt{1}=1$
$2^2 = 4$	$\sqrt{4}=2$
$3^2 = 9$	$\sqrt{9}=3$
$4^2 = 16$	$\sqrt{16}=4$
$5^2 = 25$	$\sqrt{25}=5$
$6^2 = 36$	$\sqrt{36}=6$
$7^2 = 49$	$\sqrt{49}=7$
$8^2 = 64$	$\sqrt{64}=8$
$9^2 = 81$	$\sqrt{81}=9$
$10^2 = 100$	$\sqrt{100}=10$
$11^2 = 121$	$\sqrt{121}=11$
$12^2 = 144$	$\sqrt{144}=12$
$13^2 = 169$	$\sqrt{169}=13$
$14^2 = 196$	$\sqrt{196}=14$
$15^2 = 225$	$\sqrt{225}=15$
$16^2 = 256$	$\sqrt{256}=16$
$17^2 = 289$	$\sqrt{289}=17$
$18^2 = 324$	$\sqrt{324}=18$
$19^2 = 361$	$\sqrt{361}=19$
$20^2 = 400$	$\sqrt{400}=20$
$25^2 = 625$	$\sqrt{625}=25$
$30^2 = 900$	$\sqrt{900}=30$
$40^2 = 1600$	$\sqrt{1600}=40$
$50^2 = 2500$	$\sqrt{2500}=50$

Radicalul este operație de ordinul III.

• Proprietățile radicalilor

Pentru orice numere reale a și b:

1° $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$, unde $a\geq 0$, $b\geq 0$

Exemplu: $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{3\cdot 2}=\sqrt{6}$

2° $\sqrt{a}:\sqrt{b}=\sqrt{a:b}$, unde $a\geq 0$, $b\geq 0$

Exemplu: $\sqrt{20}:\sqrt{5}=\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{20}{5}}=\sqrt{4}=2$

3° $\sqrt{a^2}=|a|$, $a\in\mathbb{R}$

Exemple: $\sqrt{5^2}=|5|=5$

$\sqrt{(-3)^2}=|-3|=3$

Introducerea factorului sub radical

$$a\sqrt{b}=\begin{cases}\sqrt{a^2b}, \text{dacă } a\geq \text{ și } b\geq 0\\ -\sqrt{a^2b}, \text{dacă } a<0 \text{ și } b\geq 0\end{cases}$$

Exemple: $2\sqrt{5}=\sqrt{2^2\cdot 5}=\sqrt{4\cdot 5}=\sqrt{20}$

$-6\sqrt{3}=-\sqrt{6^2\cdot 3}=-\sqrt{36\cdot 3}=-\sqrt{108}$

Scoaterea factorului de sub radical

$\sqrt{a^2b}=|a|\sqrt{b}$, dacă $a\in\mathbb{R}$ și $b\geq 0$

Exemple: $\sqrt{2^2\cdot 3}=|2|\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

$\sqrt{(-3)^2\cdot 2}=|-3|\cdot\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

$\sqrt{48}=\sqrt{16\cdot 3}=\sqrt{4^2\cdot 3}=4\sqrt{3}$

Atenție!

$\sqrt{2}+\sqrt{3}\neq\sqrt{5}$, nu avem vreo proprietate care să ne permită egalitatea, iar dacă obținem la un răspuns $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, atunci așa va rămâne.

Numerele $a\sqrt{c}$ și $b\sqrt{c}$, unde a, $b\in\mathbb{R}^*$, $c\in\mathbb{R}_+$ se numesc **radicali asemenea**.

Avem voie să reducem radicalii asemenea, bazându-ne pe proprietatea de distributivitate a înmulțirii față de adunare.

$$a\sqrt{c}+b\sqrt{c}=(a+b)\sqrt{c}$$
$$a\sqrt{c}-b\sqrt{c}=(a-b)\sqrt{c}$$

Exemple: $2\sqrt{3}+\sqrt{3}=(2+1)\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

$5\sqrt{2}+2\sqrt{2}-8\sqrt{2}=(5+2-8)\sqrt{2}=-\sqrt{2}$

• Ordinea efectuării operațiilor

① Dacă într-un exercițiu există operații de același ordin, acestea vor fi efectuate în ordinea în care sunt scrise, de la stânga la dreapta.

② Dacă într-un exercițiu există operații de ordin diferit, atunci mai întâi se efectuează cele de ordinul III (*ridicarea la putere și extragerea radicalului*), apoi cele de ordinul II (*înmulțirea* și *împărțirea*) și, la final, cele de ordinul I (*adunarea* și *scăderea*). Se va respecta ordinea în care sunt scrise, de la stânga la dreapta.

③ Dacă într-un exercițiu există paranteze, se vor efectua mai întâi operațiile din parantezele rotunde, apoi cele din parantezele pătrate, apoi cele din acolade (dacă există) și, la final, operațiile care se află în afara parantezelor. Se va respecta ordinea în care au fost scrise, de la stânga la dreapta.

Exemplu: $13+2\left[\left(5+2^3-\sqrt{16}\right)-4\cdot3+\sqrt{18}\right]-1=$

$=13+2\left[\left(5+8-\sqrt{16}\right)-4\cdot3+\sqrt{18}\right]-1=$

$=13+2\left[(5+8-4)-4\cdot3+\sqrt{18}\right]-1=$

$=13+2\left[(13-4)-4\cdot3+\sqrt{18}\right]-1=$

$=13+2\left(9-4\cdot3+\sqrt{18}\right)-1=$

Avem voie să transformăm paranteza pătrată în paranteză rotundă, după ce vor dispărea parantezele din interiorul parantezei pătrate.

$=13+2\left(9-4\cdot3+3\sqrt{2}\right)-1=$

$=13+2\left(9-12+3\sqrt{2}\right)-1=$

$=13+2\left(-3+3\sqrt{2}\right)-1=$

$=13+2(-3)+2\cdot3\sqrt{2}-1=$

$=13-6+6\sqrt{2}-1=$

$=7+6\sqrt{2}-1=6+6\sqrt{2}=6\left(1+\sqrt{2}\right)$

Observație.
Putem efectua mai multe operații în același timp; este important însă să ținem cont de regulile de mai sus și să utilizăm proprietățile adunării și înmulțirii.

Divizibilitate

Numărul natural b este divizor al numărului natural a, dacă și numai dacă există $c \in \mathbb{N}$, astfel încât $a = b \cdot c$, iar numărul natural a este multiplul numărului b.

Se scrie: $a \vdots b$ – se citește *„a este multiplul lui b”* sau *„a este divizibil cu b”*.

Se scrie: $b \mid a$ – se citește *„b este divizorul lui a”* sau *„b divide pe a”*.

Exemple:
- 24 este multiplul lui 6, deoarece $24 : 6 = 4$ rest 0.
Scriem: $24 \vdots 6$

- 9 divide pe 72, deoarece $72 : 9 = 8$ rest 0.
Scriem: $9 \mid 72$.

Mulțimea divizorilor unui număr natural nenul n este finită și se notează D_n.

Mulțimea multiplilor unui număr natural nenul n este infinită și se notează M_n.

Exemple: $D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
$M_{18} = \{0, 18, 36, 54, 72, 90, \ldots\}$

Observație.
Orice număr natural nenul n se divide cu 1 și cu n. Numerele 1 și n se numesc **divizori improprii** ai numărului n, ceilalți se numesc **divizori proprii** (în cazul în care sunt).

Definiție.
Dacă un număr natural nenul, diferit de 1, nu are divizori proprii, atunci el se numește **număr prim**.

Șirul numerelor prime:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 91, 97, ...

Definiție.
Numărul care are divizori proprii se numește **număr compus**.

Criterii de divizibilitate

■ Un număr natural este divizibil cu 2 dacă și numai dacă este par, adică cifra unităților este 0, 2, 4, 6 sau 8.

■ Un număr natural este divizibil cu 3 dacă și numai dacă suma cifrelor sale este un multiplu de 3.

■ Un număr natural este divizibil cu 4 dacă și numai dacă cifra zecilor, împreună cu cifra unităților, formează un număr divizibil cu 4.

■ Un număr natural este divizibil cu 5 dacă și numai dacă cifra unităților este 0 sau 5.

■ Un număr natural este divizibil cu 9 dacă și numai dacă suma cifrelor sale este un multiplu de 9.

■ Un număr natural este divizibil cu 10 dacă și numai dacă cifra unităților este 0.

Exemple: $2025 \not\vdots\, 2$, deoarece cifra unităților este 5

$2025 \vdots\, 3$, deoarece $2 + 0 + 2 + 5 = 9$ și $9 \vdots\, 3$

$2025 \not\vdots\, 4$, deoarece $25 \not\vdots\, 4$

$2025 \vdots\, 5$, deoarece cifra unităților este 5

$2025 \vdots\, 9$, deoarece $2 + 0 + 2 + 5 = 9$ și $9 \vdots\, 9$

$2025 \not\vdots\, 10$, deoarece cifra unităților este 0

$2024 \vdots\, 2$, deoarece este număr par

$2024 \vdots\, 4$, deoarece $24 \vdots\, 4$

$2024 \not\vdots\, 3$, deoarece $2 + 0 + 2 + 4 = 8$ și $8 \not\vdots\, 3$

Observație.
Dacă numărul natural a este multiplul numărului b, atunci a este multiplu și pentru orice divizor al lui b.
Dacă numărul natural b este divizorul numărului a, atunci b este divizor și pentru orice multiplu al lui a.

Descompunerea în factori primi

Metoda 1

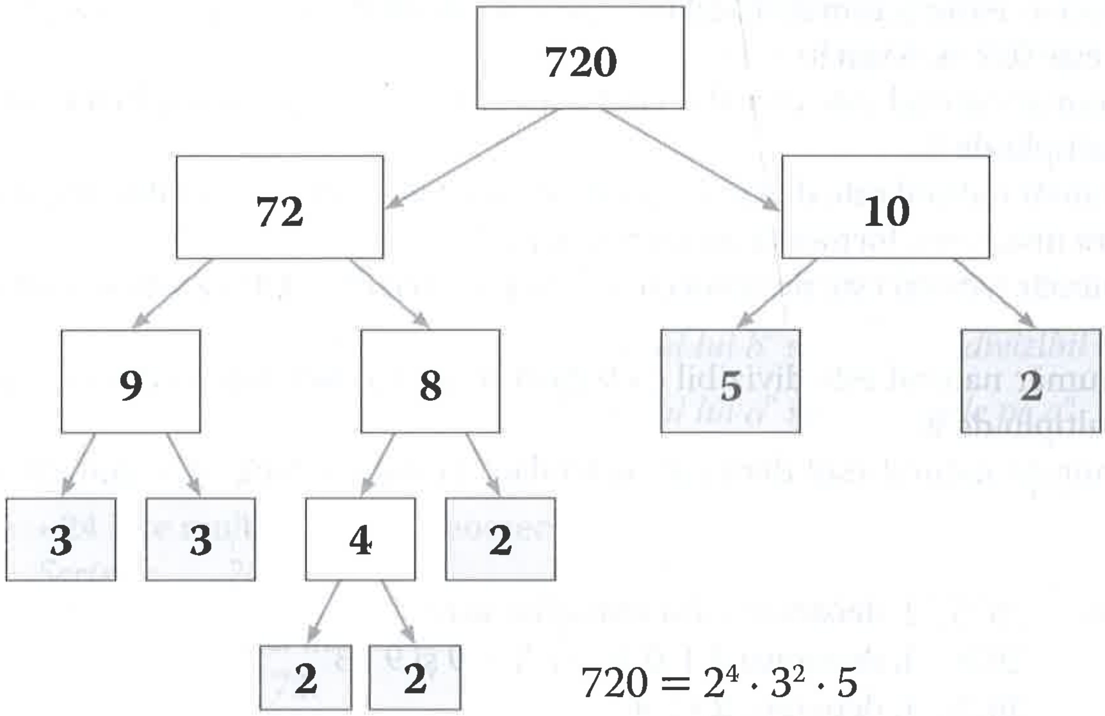
$$\begin{array}{r|l} 720 & 2 \\ 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Se împarte numărul din stânga la cel mai mic număr prim posibil, apoi se scrie câtul obținut sub deîmpărțit. Se va repeta primul pas până când se va obține câtul 1.

Numărul de pași este întotdeauna finit.

$$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Metoda ②



$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$

Definiție.
Cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c.) al numerelor naturale a și b este cel mai mare număr natural la care se împarte exact fiecare dintre numerele a și b.
Se notează: (a, b)
Numerele a și b se numesc **numere prime între ele** dacă $(a, b) = 1$.

Pentru a afla cel mai mare divizor comun a două sau mai multe numere naturale, se descompun acestea în factori primi, apoi se identifică toți factorii primi comuni din descompunerile obținute și se efectuează produsul dintre factorii primi comuni, luați cu cei mai mici exponenți ai puterilor.

$(144, 168) = 2^3 \cdot 3 = 8 \cdot 3 = 24$

$$\begin{array}{r|l} 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 168 & 2 \\ 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$144 = 2^4 \cdot 3^2$
$168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$

Observație.
Folosim cel mai mare divizor comun la factorizări:
Exemplu: $144\sqrt{2} + 168\sqrt{3} = 24 \cdot 6\sqrt{2} + 24 \cdot 7\sqrt{3} = 24\left(6\sqrt{2} + 7\sqrt{3}\right)$

Definiție.
Cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c.) al numerelor naturale a și b este cel mai mic număr natural nenul care se împarte exact la fiecare dintre numerele a și b.
Se notează: $[a, b]$

Pentru a afla cel mai mic multiplu comun a două sau mai multe numere naturale, se vor descompune toate în factori primi, apoi se calculează produsul factorilor primi care au cei mai mari exponenți ai puterilor și sunt prezenți în cel puțin una dintre descompuneri.
$[27, 45] = 3^3 \cdot 5 = 27 \cdot 5 = 135$

$$\begin{array}{r|l} 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 27 = 3^3 \\ 45 = 3^2 \cdot 5 \end{array}$$

Observație.
Folosim cel mai mic multiplu comun la adunarea și scăderea fracțiilor pentru a găsi numitorul comun.

Exemplu: $\frac{^{5)}2}{27} - \frac{^{3)}2}{45} = \frac{10}{135} - \frac{6}{135} = \frac{4}{135}$

• Înmulțirea numerelor reale cu multiplii lui 10

■ Dacă înmulțim un număr real cu 10^n, $n \in \mathbb{Z}_+^*$, atunci virgula se va deplasa cu n unități în dreapta.

■ Dacă înmulțim un număr real cu 10^n, $n \in \mathbb{Z}_-^*$, atunci virgula se va deplasa cu n unități în stânga.

Exemple:

$$12{,}2456 \cdot 10^3 = 12{,}2456 \cdot 1000 = 12245{,}6$$

$$241{,}38 \cdot 10^{-2} = 241{,}38 : 100 = 2{,}4138$$

• Transformarea fracțiilor zecimale în fracții ordinare

Pentru a transforma un număr zecimal în fracție ordinară, va trebui să scriem la numărător același număr inițial fără virgulă, iar la numitor punem 10^n, unde n semnifică numărul de cifre de după virgulă al numărului inițial.

Exemple:

$0,24=\dfrac{24}{100}$ *(am pus doi de 0 la numitor, deoarece avem două cifre după virgulă)*

$1,4=\dfrac{14}{10}$

$32,5=\dfrac{325}{10}$

$52,128=\dfrac{52128}{1000}$

De obicei, rezultatele trebuie aduse la o formă ireductibilă.

$$2,64=\frac{264^{(2}}{100}=\frac{132^{(2}}{50}=\frac{66}{25}$$

Transformarea fracțiilor ordinare în fracții zecimale

Pentru a scrie o fracție sub formă de fracție zecimală, va trebui ca, prin amplificări sau simplificări, să transformăm fracția astfel încât aceasta să aibă la numitor o putere a lui 10, apoi să aplicăm regula învățată anterior.

Exemple:

$$\frac{^{5)}5}{2}=\frac{25}{10}=2,5$$

$$\frac{^{25)}3}{4}=\frac{75}{100}=0,75$$

$$\frac{^{5)}3}{20}=\frac{15}{100}=0,15$$

$$\frac{^{125)}5}{8}=\frac{625}{1000}=0,625$$

O altă metodă ar fi să transformăm fracția în formă ireductibilă și să efectuăm împărțirea în coloniță.

Exemple: $\dfrac{5}{8}=0,625$ $\qquad$ $\dfrac{13}{4}=3,25$

$$\begin{array}{rl}
5,000000 & |\,8 \\
-48 & |\,0,625 \\
\hline
20 & \\
-16 & \\
\hline
40 & \\
-40 & \\
\hline
0 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rl}
13,00000 & |\,4 \\
-12 & |\,3,25 \\
\hline
10 & \\
-8 & \\
\hline
20 & \\
-20 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

• Numerele periodice

Numerele periodice sunt numere raționale care au, după virgulă, o cifră sau un grup de cifre care se repetă la nesfârșit.

Exemple:

$$0,(3) = 0,3333333333333\ldots$$

$$1,3(2) = 1,322222222222\ldots$$

$$21,0(24) = 21,02424242424\ldots$$

Orice fracție zecimală periodică poate fi transformată într-o fracție ordinară.

La numărător scriem numărul inițial fără virgulă, din care scădem numărul întreg format din cifrele care nu sunt în perioadă. La numitor se scrie un număr format din atâția de „9" câte cifre sunt în perioadă, urmând să punem atâția de „0" câte cifre sunt după virgulă și nu sunt în perioadă.

$$a_0,a_1a_2\ldots a_n\left(a_{n+1}a_{n+2}\ldots a_m\right)=\frac{\overline{a_0a_1a_2\ldots a_m}-\overline{a_0a_1a_2\ldots a_n}}{\underbrace{99\ldots9}_{m-n\text{ ori}}\;\underbrace{00\ldots0}_{n\text{ ori}}}$$

Exemple:

$$0,(5)=\frac{5}{9} \qquad 1,(3)=\frac{13-1}{9}=\frac{12^{(3}}{9}=\frac{4}{3} \qquad 0,1(6)=\frac{16-1}{90}=\frac{15^{(15}}{90}=\frac{1}{6}$$

$$0,(31)=\frac{31}{99} \qquad 21,(5)=\frac{215-21}{9}=\frac{194}{9} \qquad 3,4(3)=\frac{343-34}{90}=\frac{309^{(3}}{90}=\frac{103}{30}$$

$$0,(249)=\frac{249}{999} \qquad 3,(28)=\frac{328-3}{99}=\frac{325}{99} \qquad 0,53(1)=\frac{531-53}{900}=\frac{478^{(2}}{900}=\frac{239}{450}$$

Observație.
Dacă întâlnim exerciții cu mai multe operații în care există cel puțin un număr periodic, se recomandă transformarea tuturor numerelor zecimale în fracții ordinare.

• Ecuații

O **ecuație** este o propoziție logică care presupune o relație de echivalență între două expresii matematice ce conțin cel puțin o necunoscută *(variabilă).*

Se numesc **soluții** valorile necunoscutelor pentru care valoarea de adevăr a egalității este pozitivă.

Ecuație	**Soluție**
$x + a = b$	$x = b - a$
$x - a = b$	$x = b + a$
$a - x = b$	$x = a - b$
$a \cdot x = b$	$x = b : a$
$x : a = b, a \neq 0$	$x = a \cdot b$
$a : x = b$	$x = a : b$
$x^2 = a, a > 0$	$x = \pm\sqrt{a}$

În tabelul de mai sus avem $a, b \in \mathbb{R}$ și x este necunoscuta pe care trebuie să o aflăm utilizând regulile de calcul cunoscute.

Exemple:

$x + 5 = 8$, $x = 8 - 5$, $x = 3$

$x - 3 = 5$, $x = 5 + 3$, $x = 8$

$8 - x = 3$, $x = 8 - 3$, $x = 5$

$3x = 18$, $x = 18 : 3$, $x = 6$

$x : 7 = 4$, $x = 4 \cdot 7$, $x = 28$

$35 : x = 7$, $x = 35 : 7$, $x = 5$

$x^2 = 9$, $x = \pm\sqrt{9}$, $x = \pm 3$

Ecuația de gradul I sau ecuația liniară este o ecuație polinomială de forma: $ax + b = 0$ și $a \neq 0$.

Soluția ecuației de gradul I este $x=\frac{-b}{a}$

Exemple:

Rezolvăm $3x + 5 = 0$.

Observăm că $a = 3$ și $b = 5$, dacă $x=\frac{-b}{a}$, atunci $x=\frac{-5}{3}$ este soluția și se scrie $S=\left\{\frac{-5}{3}\right\}$

Rezolvăm $2x - 7 = 0$.

Observăm că $a = 2$ și $b = -7$, dacă $x=\frac{-b}{a}$, atunci $x=\frac{-(-7)}{2} \Leftrightarrow x=\frac{7}{2}$ este soluția și se scrie $S=\left\{\frac{7}{2}\right\}$

Ecuația de gradul II cu o necunoscută este o ecuație polinomială de forma: $ax^2 + bx + c = 0$ și $a \neq 0$. Spunem că a este coeficientul superior, iar c este termenul liber.

Observație.
Dacă cel puțin unul dintre coeficienții b și c ai ecuației este nul, atunci ecuația este la **forma incompletă**.

Pentru $b = 0$ și $c \neq 0$, avem $ax^2 + c = 0$, iar soluția va fi:

$$ax^2=-c \Leftrightarrow x^2=\frac{-c}{a} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}} \quad \left(\frac{-c}{a}\in[0,+\infty)\right)$$

Exercițiu:

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

$x^2 - 16 = 0$
$x^2 = 16$
$x_1=\sqrt{16} \Leftrightarrow x_1=4$
$x_2=-\sqrt{16} \Leftrightarrow x_2=-4$
$S=\{-4, 4\}$

$x^2 - 20 = 0$
$x^2 = 20$
$x_1=\sqrt{20} \Leftrightarrow x_1=2\sqrt{5}$
$x_2=-\sqrt{20} \Leftrightarrow x_2=-2\sqrt{5}$
$S=\{-2\sqrt{5}, 2\sqrt{5}\}$

$49x^2 - 50 = 0$
$49x^2 = 50$
$x^2=\frac{50}{49}$
$x_1=\sqrt{\frac{50}{49}} \Leftrightarrow x_1=\frac{5\sqrt{2}}{7}$
$x_2=-\sqrt{\frac{50}{49}} \Leftrightarrow x_2=-\frac{5\sqrt{2}}{7}$
$S=\left\{-\frac{5\sqrt{2}}{7}, \frac{5\sqrt{2}}{7}\right\}$

Pentru $b \neq 0$ și $c = 0$, avem $ax^2 + bx = 0$, iar soluția va fi:

$$x(ax + b) = 0 \text{ și } x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{b}{a}$$

Pentru $b = 0$ și $c = 0$, avem $ax^2 = 0$, iar soluția va fi: $x = 0$

Exercițiu rezolvat din modelul nr. 1 (februarie 2025)

Determinați inversul soluției reale nenule a ecuației $4x^2 - 3x = 0$.

Rezolvare:

Dăm factor comun pe x.

$x(4x - 3) = 0$

$x = 0$

$4x - 3 = 0$

$4x = 3$

$x = \frac{3}{4}$ este a doua soluție și este nenulă.

Inversul lui $\frac{3}{4}$ este $\frac{4}{3}$

Răspuns: $\frac{4}{3}$

Fie ecuația $ax^2 + bx + c = 0$, o ecuație de gradul II oarecare.
Pentru a o rezolva, putem folosi **discriminantul (Δ)**.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Dacă $\Delta < 0$, atunci $S = \emptyset$.
- Dacă $\Delta = 0$, atunci $S = \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$.
- Dacă $\Delta > 0$, atunci $S = \left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$.

Ecuație rezolvată:

$x^2 + 2x - 15 = 0$

Mai întâi analizăm și scriem cine sunt a, b și c:

$a = 1$; $b = 2$; $c = -15$.

Calculăm discriminantul:

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 4 + 60 = 64$

■ Dacă $\Delta > 0$, atunci avem:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2-\sqrt{64}}{2\cdot 1}=\frac{-2-8}{2}=\frac{-10}{2}=-5.$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2+\sqrt{64}}{2\cdot 1}=\frac{-2+8}{2}=\frac{6}{2}=3.$$

$S = \{-5, 3\}$

Dacă vom simplifica toată ecuația cu primul coeficient, vom obține **forma redusă**:

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow \frac{a}{a}x^2+\underbrace{\frac{b}{a}}_{p}x+\underbrace{\frac{c}{a}}_{q}=0,$$

$a \neq 0$ și $a, b, c \in \mathbb{R}$

$x^2 + px + q = 0.$

• Relațiile lui Viète

Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{N}$,

atunci $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$

Pentru ecuația de gradul II, forma redusă, $x^2 + px + q = 0$,

vom spune că: $\begin{cases} x_1+x_2=-p \\ x_1\cdot x_2=q \end{cases}$

Exercițiu rezolvat din sesiunea suplimentară (iulie 2023)

Fie x_1 și x_2 soluțiile reale ale ecuației $2x^2 - 3x + 1 = 0$.

Determinați valoarea expresiei $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$

Rezolvare:

$a = 2,\ b = -3,\ c = 1$

$$x_1+x_2=\frac{-b}{a}=\frac{-(-3)}{2}=\frac{3}{2}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{^{x_2)}1}{x_1}+\frac{^{x_1)}1}{x_2}=\frac{x_2}{x_1x_2}+\frac{x_1}{x_1x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{3}{2}:\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{1}=\frac{3}{1}=3$$

Răspuns: 3

Descompunerea în factori a expresiilor de forma $ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$.

■ Dacă $\Delta \geq 0$, atunci $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, unde x_1 și x_2 sunt soluții ale ecuației și $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exemplu:

Să se descompună în factori expresiile:

$x^2 + x - 6 = \ldots$

$a = 1,\ b = 1,\ c = -6$

Rezolvăm ecuația și obținem $x_1 = -3$ și $x_2 = 2$

$$x^2+x-6=1(x-(-3))(x-2)=(x+3)(x-2)$$

$2x^2 - 5x + 3 = \ldots$

$a = 2,\ b = -5,\ c = 3$

Rezolvăm ecuația și obținem $x_1 = 1$ și $x_2 = \frac{3}{2}$

$$2x^2-5x+3=2(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)=(x-1)(2x-3)$$

Ecuația de gradul I cu două necunoscute este o ecuație de forma

$$ax + by + c = 0 \text{ cu } a \neq 0 \text{ și } b \neq 0, \text{ iar } c \in \mathbb{R}.$$

Această ecuație are o infinitate de soluții. Pentru a determina câteva dintre acestea, se atribuie unei necunoscute o valoare oarecare, urmând să se calculeze cealaltă necunoscută.

Exemplu:

Fie ecuația $2x - y + 5 = 0$.

Dacă $x = 1$, atunci $2\cdot1-y+5=0 \Leftrightarrow -y=-5-2 \Leftrightarrow y=7$.

Perechea $(1, 7)$ este soluție a ecuației.

Dacă $x = 2$, atunci $2 \cdot 2 - y + 5 = 0 \Leftrightarrow -y = -5 - 4 \Leftrightarrow y = 9$.

Perechea (2, 9) este soluție a ecuației.

Dacă $y = 3$, atunci $2x - 3 + 5 = 0 \Leftrightarrow 2x = -5 + 3 \Leftrightarrow 2x = -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-2}{2} \Leftrightarrow x = -1$. Perechea (–1, 3) este soluție a ecuației.

Sistemul de forma $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$

unde $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ se numește **sistem de ecuații de gradul I cu două necunoscute**.

Două sau mai multe sisteme de ecuații se numesc echivalente dacă mulțimile soluțiilor lor sunt egale.

Perechea ordonată de valori ale variabilelor x și y pentru care orice ecuație din sistem reprezintă o propoziție adevărată se numește **soluție a sistemului de ecuații cu două necunoscute**.

Observație.

- Dacă sistemul de ecuații nu are soluție, atunci spunem că este sistem **incompatibil**.
- Dacă sistemul de ecuații are o singură soluție, atunci spunem că este sistem **compatibil determinat**.
- Dacă sistemul de ecuații are o infinitate de soluții, atunci spunem că este sistem **compatibil nedeterminat**.

Metoda substituției

Vom selecta una dintre variabilele care au coeficientul 1 și o vom exprima prin cealaltă variabilă.

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 3x - 5y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - x \\ 3x - 5y = 2 \end{cases}$$

Vom substitui în ecuația a doua pe y cu $6-x$ ca să obținem o ecuație de gradul I cu o necunoscută.

$$\begin{cases} y=6-x \\ 3x-5(6-x)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6-x \\ 3x-30+5x=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=6-x \\ 3x+5x=2+30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6-x \\ 8x=32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6-x \\ x=32:8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=6-x \\ x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6-4 \\ x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases} \quad S=\{(4,2)\}$$

Observație.

① La soluție mereu în pereche primul număr este x și al doilea y.

② Noi am putut exprima absolut orice necunoscută prin cealaltă, dar am ales varianta cea mai scurtă.

• Metoda reducerii

$$\begin{cases} 3x+2y=19 \\ x+5y=15 \quad /-3 \end{cases}$$

Vom amplifica a doua ecuație cu -3 pentru a obține $-3x$, astfel încât, prin adunarea ecuațiilor, termenul în x să se anuleze.

$$\begin{cases} 3x+2y=19 \\ -3x-15y=-45 \end{cases}_{+} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y-15y=19-45 \\ x+5y=15 \end{cases}$$

După ce adunăm ecuațiile, va trebui să adăugăm în sistem una dintre ecuațiile precedente, la alegere.

$$\begin{cases} -13y=-26 \\ x+5y=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-26}{-13} \\ x+5y=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x+5\cdot 2=15 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=15-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=5 \end{cases} \quad S=\{(5,2)\}$$

Observație.

■ În general, există o infinitate de posibilități de amplificare pentru a obține coeficienți opuși în dreptul aceleiași variabile.

Rezolvăm același sistem cu metoda reducerii, doar că de această dată vom reduce variabila y:

$$\begin{cases} 3x+2y=19 \ / \cdot 5 \\ x+5y=15 \ / \cdot (-2) \end{cases}$$

Analizăm coeficienții lui y și căutăm c.m.m.m.c. al numerelor 2 și 5, care este 10. Deoarece dorim ca ecuațiile să conțină termenii $10y$ și $-10y$, vom alege semnele corespunzătoare. Astfel, amplificăm prima ecuație cu 5 și pe a doua cu -2.

$$\underline{\begin{cases} 15x+10y=95 \\ -2x=10y=-30 \end{cases}} + \Leftrightarrow \begin{cases} 13x=65 \\ x+5y=15 \end{cases} \Leftrightarrow$$

După ce adunăm ecuațiile, va trebui să adăugăm în sistem una dintre ecuațiile precedente, la alegere.

$$\begin{cases} x=65:13 \\ x+5y=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ 5+5y=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ 5y=15-5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ 5y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=10:5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow S=\{(5,2)\}$$

Exercițiu rezolvat din examen (iunie 2025)

În 3 mere și 2 lămâi se conțin 130 mg de vitamina C. Determinați câte miligrame de vitamina C conține un măr și câte miligrame de vitamina C conține o lămâie, dacă se cunoaște că într-o lămâie se conțin cu 40 mg de vitamina C mai mult decât într-un măr.

Rezolvare:

Notații: $\begin{cases} x = \text{ cantitatea de vitamina C din măr} \\ y = \text{ cantitatea de vitamina C din lămâie} \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x+2y=130 \\ x+40=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2(x+40)=130 \\ y=x+40 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3x+2x+80=130 \\ y=x+40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x=130-80 \\ y=x+40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x=50 \\ y=x+40 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=50:5 \\ y=x+40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=10+40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=50 \end{cases}$$

Răspuns: Un măr conține 10 mg de vitamina C, iar o lămâie conține 50 mg de vitamina C.

Exercițiu rezolvat din pretestare (februarie 2025)

Două grupuri de tineri și-au propus să sădească împreună în vacanța de toamnă 1000 de puieți. Un grup a sădit de două ori mai mulți puieți decât și-a propus, iar celălalt grup – de două ori mai puțini puieți decât și-a propus. În total ei au sădit 1100 de puieți. Determinați câți puieți și-a propus să sădească fiecare grup.

Rezolvare:

Notații: $\begin{cases} x = & \text{nr. de puieți pe care trebuia să-i sădească primul grup} \\ y = & \text{nr. de puieți pe care trebuia să-i sădească al doilea grup} \end{cases}$

$$\begin{cases} x+y=1000 \\ 2x+\dfrac{y}{2}=1100 \,|\cdot 2 \end{cases}$$

Pentru a scăpa de fracție, vom amplifica a doua ecuație cu numitorul fracției, adică cu 2.

$$\begin{cases} x+y=1000 \\ 4x+y=2200 \end{cases} \quad -$$

În cazul metodei reducerii, putem, de asemenea, să scădem cele două ecuații membru cu membru, nu doar să le adunăm.

$$\begin{cases} (4x+y)-(x+y)=2200-1000 \\ x+y=1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+\cancel{y}-x-\cancel{y}=1200 \\ x+y=1000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x=1200 \\ x+y=1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1200:3 \\ y=1000-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=400 \\ y=1000-400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=400 \\ y=600 \end{cases}$$

Răspuns: 400 de puieți și 600 de puieți.

La următoarele probleme este explicat doar cum se formează sistemul.

Exercițiu din testul nr. 2 (februarie 2025)

Suma vârstelor Anei și Mariei este egală cu 32 de ani. Șase ani în urmă vârsta Anei era de 3 ori mai mare decât a Mariei. Determinați câți ani are Ana și câți ani are Maria.

Rezolvare:

Notații: $\begin{cases} x = \text{vârsta Anei} \\ y = \text{vârsta Mariei} \end{cases}$

$$\begin{cases} x+y=32 \\ x-6=3(y-6) \end{cases}$$

Explicație:

Cu 6 ani în urmă fetele aveau $x - 6$ și $y - 6$ ani. Dacă Ana era de 3 ori mai mare, atunci, ca să putem egala vârstele, trebuie să înmulțim vârsta Mariei cu 3.

Exercițiu din pretestare (martie 2023)

La o grădiniță, educatoarea vrea să împartă copiilor din grupă nuci dintr-un coș. Dacă educatoarea ar repartiza fiecărui copil câte 2 nuci, i-ar rămâne 20 de nuci, iar dacă ar repartiza câte 3 nuci, atunci un copil nu ar primi nicio nucă. Determinați câte nuci sunt în coș și câți copii sunt în grupă.

Rezolvare:

Notații: $\begin{cases} x = \text{ numărul de nuci} \\ y = \text{ numărul de copii} \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 2y + 20 \\ x = 3(y-1) \end{cases}$$

Pentru a număra nucile cât mai simplu, înmulțim cu 2 numărul de copii, apoi adunăm cu nucile rămase în prima situație.

La a doua ecuație, dacă un copil rămâne fără nuci, va trebui să înmulțim 3 cu $y - 1$, unde $y - 1$ reprezintă toți copiii, în afară de unul.

Exercițiu din testul nr. 2 (februarie 2019)

Raportul a două numere naturale este egal cu $\frac{3}{4}$. Suma dintre dublul celui mai mic număr și triplul celui mai mare număr este egală cu 72. Determinați aceste numere.

Rezolvare:

Notații: $\begin{cases} x = \text{ numărul mai mic} \\ y = \text{ numărul mai mare} \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{3}{4} \\ 2x + 3y = 72 \end{cases}$$

Raportul dintre x și y nu poate fi scris invers, deoarece $\frac{3}{4}$ este o fracție subunitară și dacă noi am ales x numărul mai mic, atunci suntem obligați să scriem $\frac{x}{y}$ ca să fie tot o fracție subunitară.

$2x$ înseamnă dublul primului număr.
$3y$ înseamnă triplul numărului al doilea.

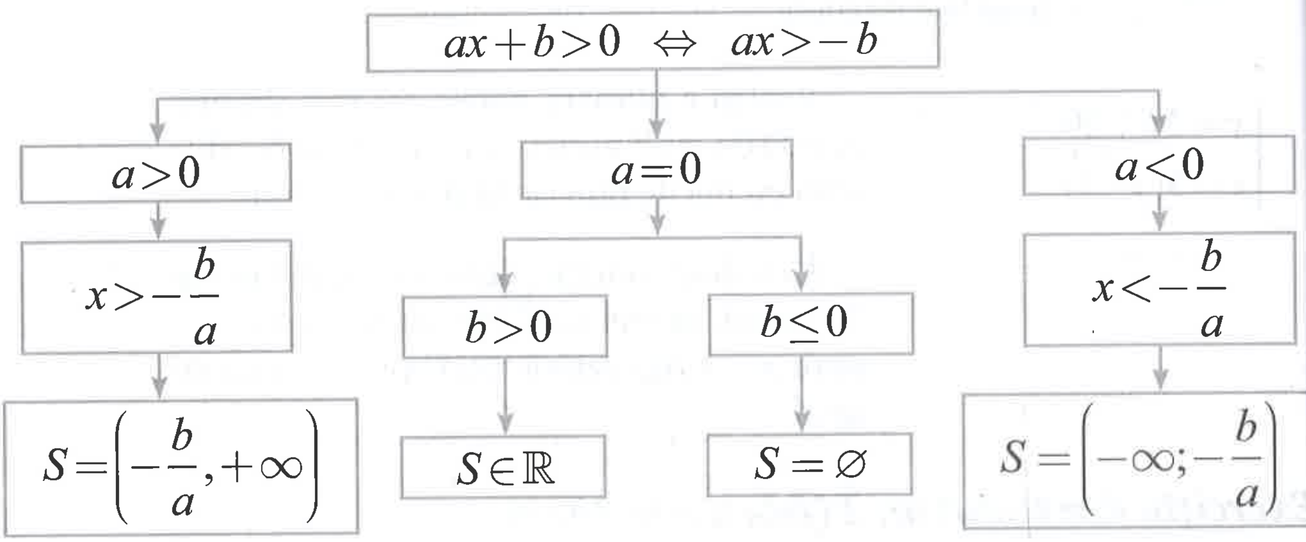
Definiție.

Se numește **inegalitate de gradul I cu o necunoscută** o inecuație de forma $ax + b > 0,\ ax + b < 0,\ ax + b \geq 0,\ ax + b \leq 0,\ a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$

Definiție.

Mulțimea valorilor necunoscutei care transformă inecuația într-o inegalitate adevărată se numește **soluție a inecuației cu o necunoscută.**

Schemă de rezolvare a inecuației:



Exemple:

$3x-12\leq 0 \Leftrightarrow$

$3x\leq 12 \Leftrightarrow$

$x\leq \frac{12}{3} \Leftrightarrow$

$x\leq 4 \Leftrightarrow$

$S\in(-\infty,4]$

$-4x+7>15 \Leftrightarrow$

$-4x>15-7 \Leftrightarrow$

$-4x>8 \Leftrightarrow$

$x<\frac{8}{-4} \Leftrightarrow$

$x<-2 \Leftrightarrow$

$S\in(-\infty,-2)$

Observație.

Dacă o inecuație întreagă este înmulțită sau împărțită la un număr negativ, atunci va trebui să inversăm simbolul inegalității!

Reținem!

Pentru orice $a > 0$, au loc echivalențele:

$|x| = a$ echivalent cu $x \in \{-a, a\}$

$|x| < a$ echivalent cu $x \in (-a, a)$

$|x| \leq a$ echivalent cu $x \in [-a, a]$

$|x| > a$ echivalent cu $x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$

$|x| \geq a$ echivalent cu $x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$

Exercițiu rezolvat din testul nr. 1 (februarie 2026)

Determinați cel mai mic număr întreg care verifică inegalitatea

$$x^2 - 5x \leq (x+2)(x+1).$$

Rezolvare:

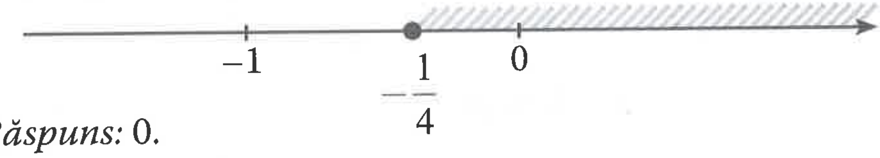
$x^2 - 5x \leq x^2 + 2x + x + 2$

$\cancel{x^2} - 5x - \cancel{x^2} - 2x - x \leq 2$

$-8x \leq 2$

$x \geq \dfrac{2}{-8}$

$x \geq -\dfrac{1}{4}$



Răspuns: 0.

Exercițiu rezolvat din testul nr. 2 (februarie 2026)

Determinați cel mai mic pătrat perfect care verifică inegalitatea

$$-x(x+3) < -x^2 + 7x - 20.$$

Rezolvare:

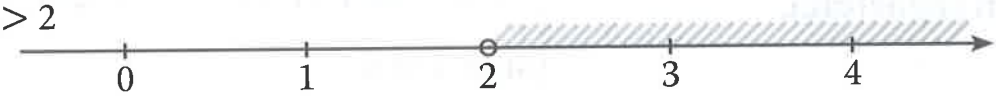
$-x^2 - 3x < -x^2 + 7x - 20$

$-\cancel{x^2} - 3x + \cancel{x^2} - 7x < -20$

$-10x < -20$

$x > \dfrac{-20}{-10}$

$x > 2$



Răspuns: 4.

Forma generală a sistemului de două inecuații de gradul I cu o necunoscută este:

$$\begin{cases} a_1x + b_1 \geq 0,\ a_1 \in \mathbb{R}^*,\ b_1 \in \mathbb{R} \\ a_2x + b_2 \geq 0,\ a_2 \in \mathbb{R}^*,\ b_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

În loc de „ $\geq$ ” poate fi și unul dintre simbolurile „ $\leq$ ”, „ $>$ ”, „ $<$ ”.

Definiție.
Valoarea necunoscutei care transformă fiecare inecuație a sistemului într-o inegalitate adevărată se numește **soluție a unui sistem de inecuații de gradul I cu o necunoscută.**

Exercițiu: $\begin{cases} 3x-2<7 \\ 4-2x \le 3x+14 \end{cases} \Leftrightarrow$

Vom rezolva separat fiecare inecuație, apoi vom face intersecția dintre cele două intervale.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x<7+2 \\ -2x-3x \le 14-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x<9 \\ -5x \le 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<\dfrac{9}{3} \\ x \ge \dfrac{10}{-5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ x \ge -2 \end{cases}$$

Pentru a vedea mai ușor soluția, putem reprezenta cele două intervale pe o axă.

$S=[-2, 3)$

Raportul dintre numărul a și numărul b, $b \neq 0$, se notează $\frac{a}{b}$ și reprezintă câtul $a:b$, adică $\frac{a}{b}=a:b$	Raportul dintre numărul 12 și numărul 3 este $\frac{12}{3}$. Raportul dintre numărul 1 și numărul 8 este $\frac{1}{8}$.
Numerele a și b se numesc **termenii raportului.**	Termenii raportului $\frac{12}{3}$ sunt 12 și 3, iar termenii raportului $\frac{1}{8}$ sunt 1 și 8.
Valoarea câtului $a:b$, $b \neq 0$, se numește **valoarea raportului** $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$	Valoarea raportului $\frac{12}{3}$ este 4, iar valoarea raportului $\frac{1}{8}$ este 0,125.

Definiție.
Egalitatea a două rapoarte se numește **proporție**.

Fie proporția $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, unde $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

Termenii a și d se numesc **extremi**, iar termenii b și c se numesc **mezi.**

Observație.
Produsul extremilor trebuie să fie egal cu produsul mezilor în orice proporție.
Dacă $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, atunci $a\cdot d=b\cdot c$

Pentru a determina un termen necunoscut dintr-o proporție, folosim schema:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{b\cdot c}{d} \\ d=\dfrac{b\cdot c}{a} \\ b=\dfrac{a\cdot d}{c} \\ c=\dfrac{a\cdot d}{b} \end{cases}$$

$$\text{un mez}=\frac{\text{produsul extremilor}}{\text{celălalt mez}}$$

$$\text{un extrem}=\frac{\text{produsul mezilor}}{\text{celălalt extrem}}$$

Exemple: $\frac{25}{4}=\frac{50}{x} \Rightarrow x=\frac{4\cdot 50}{25}=\frac{4\cdot 2}{1}=8$

$$\frac{x+3}{5}=\frac{4}{7} \Rightarrow 7(x+3)=5\cdot 4 \Leftrightarrow 7x+21=20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7x=20-21 \Leftrightarrow 7x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{7}$$

Observație.
Dacă schimbăm mezii între ei sau extremii între ei, vom obține o proporție adevărată.

Exemplu:

$$\frac{2}{5}=\frac{6}{15} \text{ și } \frac{2}{6}=\frac{5}{15} \text{ și } \frac{15}{5}=\frac{6}{2}$$

Dacă $\frac{a_1}{b_1}=k$, $\frac{a_2}{b_2}=k$, $\frac{a_3}{b_3}=k$, ..., $\frac{a_n}{b_n}=k$, atunci aceste n rapoarte formează șirul de rapoarte egale $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=...=\frac{a_n}{b_n}=k$.

Observație.
În cazul de mai sus, $k=\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n}{b_1+b_2+b_3+...+b_n}$.

Exemplu: $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{15}{24}=\frac{30}{40}=0{,}75$

Probleme rezolvate:

1) Prin 4 robinete un rezervor se umple în 9 ore. În cât timp 6 robinete vor umple rezervorul, dacă toate au același debit?

Rezolvare:

Schemă:

4 robinete 9h

6 robinete .... xh

Proporția:

La mărimi invers proporționale, una dintre fracții se scrie normal, iar cealaltă se inversează.

$$\frac{4}{6}=\frac{x}{9}$$

Rezolvarea ecuației:

$4\cdot 9=6\cdot x$

$$x=\frac{4\cdot 9}{6}=\frac{4\cdot 9}{2\cdot 3}=2\cdot 3=6.$$

Răspuns: 6 robinete cu același debit vor umple rezervorul în 6 ore.

2) Numerele a și b sunt invers proporționale cu numerele 0,5 și 2,4. Determinați numerele, știind că suma acestora este 58.

Rezolvare:

$a\cdot 0{,}5=b\cdot 2{,}4=k$ ***(coef. de proporționalitate)***

$$a\cdot\frac{5}{10}=b\cdot\frac{24}{10}=k$$

$$a\cdot\frac{1}{2}=b\cdot\frac{12}{5}=k$$

$$a=k:\frac{1}{2}=k\cdot\frac{2}{1}=2k$$

$$b=k:\frac{12}{5}=k\cdot\frac{5}{12}=\frac{5k}{12}$$

$$a+b=58 \Leftrightarrow 2k+\frac{5}{12}k=58\,|\cdot 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24k+5k=58\cdot 12 \Leftrightarrow 29k=58\cdot 12 \Leftrightarrow$$

$$k=\frac{58\cdot 12}{29}=2\cdot 12=24$$

$a=2k=2\cdot 24=48$

$$b=\frac{5}{12}k=\frac{5}{12}\cdot 24=5\cdot 2=10$$

Definiție.

Un raport de forma $\frac{p}{100}$ se numește **raport procentual.**

Se scrie $p\%$ și se citește *„p la sută”* sau *„p procente”*.

Observație.

Prin amplificări și simplificări, putem exprima orice raport ca un raport procentual. Pentru a determina $p\%$ dintr-un număr natural a, se calculează produsul:

$$\frac{p}{100} \cdot a = \frac{p \cdot a}{100}$$

Reține următoarele date din tabel.

Procente	**Fracție**	**Număr zecimal**
100%	1	1
75%	$\frac{3}{4}$	0,75
66,(6)%	$\frac{2}{3}$	0,(6)
50%	$\frac{1}{2}$	0,5
33,(3)%	$\frac{1}{3}$	0,3
25%	$\frac{1}{4}$	0,25
20%	$\frac{1}{5}$	0,2
12,5%	$\frac{1}{8}$	0,125
10%	$\frac{1}{10}$	0,1
1%	$\frac{1}{100}$	0,01

Problemă rezolvată:

Un telefon costă 4800 de lei. Cu câți lei a scăzut prețul după o ieftinire cu 15%?

Rezolvare:

$$15\% \text{ din } 4800 \iff \frac{15}{100} \cdot 4800 = 15 \cdot 48 = 720$$

Răspuns: Prețul a scăzut cu 720 lei.

Problemă din sesiunea de bază (2021)

În luna aprilie Petru a efectuat în cardul său bancar 120 de tranzacții electronice, iar în luna mai – cu 15% mai multe tranzacții. Determinați câte tranzacții a efectuat Petru în luna mai?

Schemă:
100% .... 120 tranzacții
115% .... x tranzacții
Proporția:

$$\frac{100}{115}=\frac{120}{x}$$

Rezolvăm ecuația:

$$100\cdot x=115\cdot 120$$

$$x=\frac{\overset{23}{\cancel{115}}\cdot 120}{\underset{20}{\cancel{100}}}=23\cdot\frac{120}{20}=23\cdot 6=138$$

Răspuns: În luna mai, Petru a efectuat 138 de tranzacții.

Problemă rezolvată din pretestare (martie 2024)

Într-o zi de primăvară un grup de elevi a plantat 276 de copaci, ceea ce reprezintă cu 15% mai mult decât a reușit să planteze într-o zi de toamnă. Determinați cu câți copaci mai mult au fost plantați în ziua de primăvară decât în ziua de toamnă.

100% + 15% = 115%

Schemă:

276 copaci 115%
x copaci 100%

Rezolvare:

$$\frac{276}{x}=\frac{115}{100}\Leftrightarrow x=\frac{276\cdot \overset{20}{\cancel{100}}}{\underset{23}{\cancel{115}}}$$

$$x=\frac{\overset{12}{\cancel{276}}\cdot 20}{\underset{1}{\cancel{23}}}=12\cdot 20=240$$

276 – 240 = 36

Răspuns: 36 de copaci.

Definiție.

Concentrația unei soluții este cantitatea de substanță dizolvată pentru a obține 100 g de soluție.

Concentrația unei soluții reprezintă raportul dintre masa substanței care se dizolvă și masa soluției.

Problemă rezolvată:

Dacă 500 g de soluție conține 60 g de sare, atunci cu ajutorul regulii de trei simplă, putem calcula concentrația soluției.

Schemă:

500 g de soluție ...... 60 g de sare

100 g de soluție ...... x g sare

Proporția:

$$\frac{500}{100}=\frac{60}{x}$$

Rezolvăm ecuația:

$$500\cdot x=100\cdot 60$$

$$x=\frac{100\cdot 60}{500}=\frac{60}{5}=12$$

Răspuns: Concentrația soluției este de 12%.

Definiție.

Titlul unui aliaj este masa metalului adăugat *(a metalului prețios)* pentru a obține 100 g de aliaj.

Titlul unui aliaj reprezintă raportul dintre masa metalului prețios și masa aliajului.

Problemă rezolvată:

La topirea a 4 g de argint și 16 g de cupru la un loc, se obțin 20 g de aliaj.

Notăm cu m masa aliajului, cu m_{Ag} masa argintului, cu m_{Cu} masa cuprului și obținem $m = m_{Ag} + m_{Cu}$.

Cea mai simplă metodă pentru determinarea titlului aliajului este prin raportul:

$$T=\frac{m_{Ag}}{m}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}=0,2=20\%$$

Răspuns: În 100 g de aliaj se găsesc 20 g de argint.

Definiție.
Scara unei hărți reprezintă raportul dintre distanța măsurată pe hartă și aceeași distanță măsurată în teren cu aceeași unitate de măsură.

Problemă rezolvată:

Să se determine scara unei hărți, dacă se știe că distanța pe hartă de la orașul X până la orașul Y este de 3 cm, iar în realitate distanța este de 30 km.

Rezolvare:

Primul pas este să transformăm în aceeași unitate de măsură:

$$30 \text{ km} = 30 \times 1000 \text{ m} = 30\,000 \text{ m}$$

$$30\,000 \text{ m} = 30\,000 \times 100 \text{ cm} = 3\,000\,000 \text{ cm}$$

Scriem raportul, apoi îl simplificăm:

$$\frac{^{(3}3}{3000000} = \frac{1}{1000000}$$

Răspuns: Scara hărții este 1 : 1 000 000.

Definiție.
Probabilitatea realizării unui eveniment este raportul dintre numărul cazurilor favorabile realizării evenimentului și numărul cazurilor posibile.

$$\mathbb{P} = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}}$$

Observație.
Probabilitatea unui eveniment este un număr rațional pozitiv, având valoarea minimă **0** (atunci când evenimentul este imposibil) și valoarea maximă **1** (atunci când evenimentul este sigur).

Probleme rezolvate:

1) Care este probabilitatea ca, aruncând un zar, să apară pe el un număr de puncte ce reprezintă un divizor al lui 6?

Rezolvare:

Zarul obișnuit are 6 fețe care sunt numerotate de la 1 la 6, deci avem 6 cazuri posibile.

Divizorii lui 6 sunt: $D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$

Observăm că toți cei patru divizori se găsesc pe zar, aceștia reprezintă cazurile favorabile.

$$\mathbb{P} = \frac{^{(2}4}{6} = \frac{2}{3}$$

Răspuns: Probabilitatea este $\frac{2}{3}$

2) Într-o urnă sunt 4 bile albastre, 5 bile galbene și 3 bile roșii. Determinați probabilitatea ca, la extragerea unei bile din urnă, aceasta să nu fie galbenă.

Rezolvare:

Se calculează probabilitatea ($\mathbb{P}_1$) evenimentului contrar celui cerut, adică probabilitatea de a extrage o bilă galbenă:

$$\mathbb{P}_1=\frac{5}{4+3+5}=\frac{5}{12}$$

Pentru a determina probabilitatea ($\mathbb{P}_2$) evenimentului cerut, se efectuează: $\boxed{\mathbb{P}_2=1-\mathbb{P}_1}$

$$\mathbb{P}_2=1-\frac{5}{12}=\frac{12}{12}-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$$

Răspuns: Probabilitatea este $\frac{7}{12}$

Calcul algebric

Definiție.

Expresia sub forma unui produs în care factorii sunt numere și litere se numește **expresie algebrică.**

Expresia	$-5x$	$8a^3$	$-1{,}2ax$	a^4x^2	$\frac{a^2x}{3}$	$-\frac{2x}{5}$	$\sqrt{2}abx$
Coeficient	-5	8	$-1{,}2$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{5}$	$\sqrt{2}$
Partea literală	x	a^3	ax	a^4x^2	a^2x	x	abx

Observație.

- La adunarea a două sau mai multe expresii algebrice se obține o expresie algebrică.
- La înmulțirea a două sau mai multe expresii algebrice se obține o expresie algebrică.
- E^{-1} este expresie algebrică, dacă $E \neq 0$.

Termenii asemenea ai unei expresii algebrice sunt termenii care au aceeași parte literală.

Exemplu:

$$-3-5x+2+x^2+3x+4$$

-3, 2 și 4 sunt termeni asemenea, deoarece nu au parte literală.

$-5x$ și $3x$ sunt termeni asemenea, deoarece ambii îl au pe x ca parte literală.

x^2 nu are termen asemenea în expresia dată, deoarece nu mai avem alți termeni cu partea literală x^2.

Pe baza proprietății de distributivitate a înmulțirii numerelor reale în raport cu adunarea sau scăderea, putem reduce termenii asemenea.

Exemplu:

$7a + 5b - 3a + 2b = (7 - 3)a + (5 + 2)b = 4a + 7b$

$$-\sqrt{2}+3a^2+5\sqrt{2}+5a^2+a=\left(-\sqrt{2}+5\sqrt{2}\right)+(3+5)a^2+a=4\sqrt{2}+8a^2+a$$

Definiție.
Se numesc **variabile** literele dintr-o expresie algebrică; ele pot fi înlocuite cu diverse numere reale.
Notăm cu *E(x)* expresia cu o singură variabilă.

Exemplu:

$E(x) = -2x^3 + 3x - 5.$

Pentru a afla valoarea expresiei algebrice când $x = -2$, se calculează $E(-2)$.

$E(-2) = -2 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2) - 5 = (-2) \cdot (-8) - 6 - 5 = 16 - 6 - 5 = 5.$

Dacă „*x*" (*necunoscuta*) se află la numitorul unei fracții, atunci trebuie să determinăm mulțimea din care face parte *x*, astfel încât numitorul să fie diferit de 0.

Definiție.
Mulțimea valorilor necunoscutei pentru care are sens o expresie sau o ecuație se numește **domeniul valorilor admisibile (DVA).**

Exemple:

- $E(x)=\dfrac{2x+3}{x},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ sau $x\in\mathbb{R}^*$
- $E(x)=\dfrac{x}{2x+3},\ 2x+3\neq 0 \Leftrightarrow 2x\neq -3 \Leftrightarrow x\neq -\dfrac{3}{2} \Rightarrow x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$

Dacă „*x*" (*necunoscuta*) se află sub un radical, atunci trebuie să determinăm mulțimea din care face parte *x*, astfel încât expresia de sub radical să fie mai mare sau egală cu 0.

Exemplu:

$E(x)=\sqrt{2x-3}+4x-5$

$2x-3\geq 0 \Leftrightarrow 2x\geq 3 \Leftrightarrow x\geq \dfrac{3}{2}$

$x\in\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$

Observație.
Dacă radicalul se află la numitorul unei fracții, atunci spunem că expresia de sub acel radical este doar mai mare decât 0.

Exemplu:

$$E(x)=\frac{2x}{\sqrt{6-x}}+\sqrt{x-4}$$

$$\begin{cases}6-x>0\\x-4\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x>-6\\x\geq 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<6\\x\geq 4\end{cases}\Rightarrow \text{DVA}: x\in[4,\,6)$$

Desfacerea parantezelor

Dacă avem un produs dintre două paranteze, la desfacerea lor înmulțim fiecare termen din prima paranteză cu fiecare termen din a doua paranteză.

Exemplu:

$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

$$\left(\sqrt{3}-2\right)\left(3-\sqrt{2}\right)=\sqrt{3}\cdot 3+\sqrt{3}\cdot\left(-\sqrt{2}\right)-2\cdot 3-2\cdot\left(-\sqrt{2}\right)=3\sqrt{3}-\sqrt{6}-6+2\sqrt{2}$$

Formule de calcul prescurtat

1°. $(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=a\cdot a+a\cdot b+b\cdot a+b\cdot b=\boldsymbol{a^2+2ab+b^2}$

2°. $(a-b)^2=(a-b)\cdot(a-b)=a\cdot a-a\cdot b-b\cdot a+b\cdot b=\boldsymbol{a^2-2ab+b^2}$

3°. $(a+b)\cdot(a-b)=a\cdot a-a\cdot b+b\cdot a-b\cdot b=\boldsymbol{a^2-b^2}$

4°. $(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=$
$=(a^2\cdot a+2ab\cdot a+b^2\cdot a+a^2\cdot b+2ab\cdot b+b^2\cdot b)=$
$=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3=\boldsymbol{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$

5°. $(a-b)^3=(a-b)(a-b)(a-b)=(a^2-2ab+b^2)(a-b)=$
$=a^2\cdot a-2ab\cdot a+b^2\cdot a-a^2b+2ab\cdot b-b^2\cdot b=$
$=a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3=\boldsymbol{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$

6°. $a^3+b^3=(a+b)^3-3a^2b-3ab^2=(a+b)^3-3ab(a+b)=$
$=(a+b)[(a+b)^2-3ab]=(a+b)(a^2+2ab+b^2-3ab)=\boldsymbol{(a+b)(a^2-ab+b^2)}$

7°. $a^3-b^3=(a-b)^3+3a^2b-3ab^2=(a-b)^3+3ab(a-b)=$
$=(a-b)[(a-b)^2+3ab]=(a-b)(a^2-2ab+b^2+3ab)=\boldsymbol{(a-b)(a^2+ab+b^2)}$

8°. $(a+b+c)^2=(a+b+c)(a+b+c)=$
$=a\cdot a+a\cdot b+a\cdot c+b\cdot a+b\cdot b+b\cdot c+c\cdot a+c\cdot b+c\cdot c=$
$=a^2+ab+ac+ab+b^2+bc+ac+bc+c^2=\boldsymbol{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac}$

Exemple rezolvate pentru fiecare formulă:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^2 = 2^2 + 2\cdot 2\cdot\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\sqrt{3}$$

$$(x^2 + yz^3)^2 = (x^2)^2 + 2x^2yz^3 + (yz^3)^2 = x^4 + 2x^2yz^3 + y^2z^6$$

$$\left(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x^2\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 2\cdot\frac{1}{2}x\cdot\frac{2}{3}x^2 + \left(\frac{2}{3}x^2\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{9}x^4$$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$\left(2\sqrt{2}-3\right)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 - 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3 + 3^2 = 8 - 12\sqrt{2} + 9 = 17 - 12\sqrt{2}$$

$$\left(t^5 - t^{-3}\right)^2 = \left(t^5\right)^2 - 2t^5\cdot t^{-3} + \left(t^{-3}\right)^2 = t^{10} - 2t^2 + t^{-6}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a - \sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 - 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a\cdot\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{2}a^2 - 2a + 2$$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$$\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right) = \left(\sqrt{5}\right)^2 - 2^2 = 5 - 4 = 1$$

$$(ab^2 - a^2b)(ab^2 + a^2b) = (ab^2)^2 - (a^2b)^2 = a^2b^4 - a^4b^2$$

$$\left(\frac{1}{3}a - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{3}a + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{3}a\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{9} - \frac{27}{4}$$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$(3x + 1)^3 = (3x)^3 + 3(3x)^2\cdot 1 + 3\cdot 3x\cdot 1^2 + 1^3 = 27x^3 + 27x^2 + 9x + 1$$

$$\left(2+3\sqrt{5}\right)^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2\cdot 3\sqrt{5} + 3\cdot 2\left(3\sqrt{5}\right)^2 + \left(3\sqrt{5}\right)^3 =$$

$$= 8 + 36\sqrt{5} + 270 + 135\sqrt{5} = 278 + 171\sqrt{5}$$

$$\left(0,2t^2 + z^4\right)^3 = \left(0,2t^2\right)^3 + 3\left(0,2t^2\right)^2 z^4 + 3\cdot 0,2t^2\left(z^4\right)^2 + \left(z^4\right)^3 =$$

$$= 0,008t^6 + 0,12t^4z^4 + 0,6t^2z^8 + z^{12}$$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$$\left(2\sqrt{2}-3\right)^3=\left(2\sqrt{2}\right)^3-3\cdot\left(2\sqrt{2}\right)^2\cdot 3+3\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3^2-3^3=$$

$$=16\sqrt{2}-72+54\sqrt{2}-27=70\sqrt{2}-99$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x^2-\frac{1}{\sqrt{3}}y\right)^3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x^2\right)^3-3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x^2\right)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}y+3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}x^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}y\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}y\right)^3=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}x^6-\frac{3}{2}x^4\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}y+3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}x^2\cdot\frac{1}{3}y^2-\frac{1}{3\sqrt{3}}y^3=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}x^6-\frac{\sqrt{3}}{2}x^4y+\frac{\sqrt{2}}{2}x^2y^2-\frac{\sqrt{3}}{9}y^3$$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$$1000x^3+64y^3=(10x)^3+(4y)^3=(10x+4y)\left((10x)^2-10x\cdot 4y+(4y)^2\right)=$$

$$=(10x+4y)\left(100x^2-40xy+16y^2\right)$$

$$m^{12}+n^9=\left(m^4\right)^3+\left(n^3\right)^3=\left(m^4+n^3\right)\left[\left(m^4\right)^2-m^4\cdot n^3+\left(n^3\right)^2\right]=$$

$$=\left(m^4+n^3\right)\left(m^8-m^4n^3+n^6\right)$$

$$a^9b^9+1728a^{15}=\left(a^3b^3\right)^3+\left(12a^5\right)^3=$$

$$=\left(a^3b^3+12a^5\right)\left[\left(a^3b^3\right)^2-a^3b^3\cdot 12a^5+\left(12a^5\right)^2\right]=$$

$$=\left(a^3b^3+12a^5\right)\left(a^6b^6-12a^8b^3+144a^{10}\right)$$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$$8-x^3=2^3-x^3=(2-x)\left(2^2+2x+x^2\right)=(2-x)\left(4+2x+x^2\right)$$

$$1331a^6-27b^3=\left(11a^2\right)^3-(3b)^3=$$

$$=\left(11a^2-3b\right)\left[\left(11a^2\right)^2+11a^2\cdot 3b+(3b)^2\right]=\left(11a^2-3b\right)\left(121a^4+33a^2b+9b^2\right)$$

$$3\sqrt{3}t^{18}-2\sqrt{2}z^{27}=\left(\sqrt{3}t^6\right)^3-\left(\sqrt{2}z^9\right)^3=$$

$$=\left(\sqrt{3}t^6-\sqrt{2}z^9\right)\left[\left(\sqrt{3}t^6\right)^2+\sqrt{3}t^6\cdot\sqrt{2}z^9+\left(\sqrt{2}z^9\right)^2\right]=$$

$$=\left(\sqrt{3}t^6-\sqrt{2}z^9\right)\left(3t^{12}+\sqrt{6}t^6z^9+2z^{18}\right)$$

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2+2^2+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{3}\cdot 2+2\cdot\sqrt{2}\cdot 2=$$
$$=2+3+4+2\sqrt{6}+4\sqrt{3}+4\sqrt{2}=9+2\sqrt{6}+4\sqrt{3}+4\sqrt{2}$$

$$\left(a^2-b^3+c^4\right)^2=\left(a^2\right)^2+\left(b^3\right)^2+\left(c^4\right)^2-2a^2b^3-2b^3c^4+2a^2c^4=$$
$$=a^4+b^6+c^8-2a^2b^3-2b^3c^4+2a^2c^4$$

Raționalizarea numitorilor

Pentru $a\in\mathbb{Q}^*$, $b\in\mathbb{Q}_+$, astfel încât $\sqrt{b}\in I$, avem fracția $\dfrac{1}{a+\sqrt{b}}$ al cărei numitor este un număr irațional. Cunoaștem că $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)=a^2-b$, care este un număr rațional.

Amplificăm fracția cu $a-\sqrt{b}$ și obținem
$${}^{a-\sqrt{b})}\frac{1}{a+\sqrt{b}}=\frac{a-\sqrt{b}}{\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)}=\frac{a-\sqrt{b}}{a^2-b}\text{, care are numitorul rațional.}$$
Analog se procedează cu $\dfrac{1}{a-\sqrt{b}}$, pe care o amplificăm cu conjugata $\left(a+\sqrt{b}\right)$ și obținem $\dfrac{a+\sqrt{b}}{a^2-\sqrt{b}}$.

Observație.
La numărătorul fracției poate fi orice alt număr nenul, deoarece nu influențează cu nimic raționalizarea numitorului.

Exemple:
$${}^{4+\sqrt{15})}\frac{3}{4-\sqrt{15}}=\frac{3\left(4+\sqrt{15}\right)}{\left(4-\sqrt{15}\right)\left(4+\sqrt{15}\right)}=\frac{3\left(4+\sqrt{15}\right)}{4^2-\left(\sqrt{15}\right)^2}=\frac{3\left(4+\sqrt{15}\right)}{16-15}=3\left(4+\sqrt{15}\right)$$

$${}^{3-\sqrt{7})}\frac{2\sqrt{3}}{3+\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{3}\left(3-\sqrt{7}\right)}{\left(3+\sqrt{7}\right)\left(3-\sqrt{7}\right)}=\frac{2\sqrt{3}\left(3-\sqrt{7}\right)}{3^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}\left(3-\sqrt{7}\right)}{9-7}=$$
$$=\frac{\cancel{2}\sqrt{3}\left(3-\sqrt{7}\right)}{\cancel{2}}=\sqrt{3}\left(3-\sqrt{7}\right)=3\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}=3\sqrt{3}-\sqrt{21}$$

Recomandare:

Nu desfaceți paranteza de sus până nu ați terminat de lucrat cu numitorul, deoarece des se întâmplă să aveți posibilitatea să simplificați fracția.

Pentru $a \in \mathbb{Q}_+$, $b \in \mathbb{Q}_+$, astfel încât $\sqrt{a}, \sqrt{b} \in I$, avem fracția $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ al cărei numitor este un număr irațional. Cunoaștem că $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=a-b$, care este un număr rațional.

Amplificăm fracția cu $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ și obținem

$$\frac{{}^{\sqrt{a}-\sqrt{b})}1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b},$$

care are numitorul rațional.

Analog se procedează cu $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, pe care o amplificăm cu conjugata $\left(a+\sqrt{b}\right)$ și obținem $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$.

Exemplu:

$$\frac{{}^{\sqrt{3}+\sqrt{7})}4}{\sqrt{3}-\sqrt{7}}=\frac{4\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)}=\frac{4\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{4\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)}{3-7}=$$

$$=\frac{\cancel{4}\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)}{-\cancel{4}}=-\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)=-\sqrt{3}-\sqrt{7}$$

Exercițiu rezolvat din testul nr. 1 (februarie 2022)

Calculați valoarea expresiei:

$$\frac{{}^{\sqrt{7}+\sqrt{5})}\sqrt{20}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}-\sqrt{35}=\frac{\sqrt{20}\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}-\sqrt{35}=\frac{\sqrt{4\cdot 5}\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}-\sqrt{35}=$$

$$=\frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{7-5}-\sqrt{35}=\frac{\cancel{2}\sqrt{5}\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{\cancel{2}}-\sqrt{35}=\sqrt{5}\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)-\sqrt{35}=$$

$$=\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}+\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}-\sqrt{35}=\cancel{\sqrt{35}}+\left(\sqrt{5}\right)^2-\cancel{\sqrt{35}}=5$$

Exercițiu rezolvat din testul nr. 2 (februarie 2015)

Calculați: $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

$$\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}-\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=$$

$$\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{2}\cdot\left(-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=$$

$$\frac{3+\cancel{\sqrt{6}}-\cancel{\sqrt{6}}+2}{3-2}=\frac{3+2}{1}=5$$

Descompunerea în factori a unei expresii algebrice reprezintă scrierea acelei expresii ca produs între două sau mai multe expresii algebrice.

Una dintre metodele de descompunere în factori este scoaterea factorului comun în fața parantezei. La baza acestei metode stă distributivitatea înmulțirii față de adunare și scădere:

$$\boldsymbol{ab + ac = a(b + c)}$$
$$\boldsymbol{ab - ac = a(b - c)}$$

Exemplu:

Să se descompună în factori expresia algebrică:
$E(a, b, c) = 15a^3b^4c - 20a^2b^5 + 25a^4bc^2$.

Avem nevoie de un număr nenul, diferit de 1, la care putem împărți toți coeficienții din expresie. Observăm că numărul căutat este 5.

Avem nevoie de literele care apar în fiecare dintre termeni. Observăm că a și b sunt în fiecare termen și alegem exponentul cel mai mic. Astfel, obținem factorul comun $5a^2b$.

Regulă:

Fiecare termen care rămâne în paranteze se împarte la factorul comun, care se scoate în fața parantezei.

$$15a^3b^4c-20a^2b^5+25a^4bc^2=5a^2b\left(\frac{15a^3b^4c}{5a^2b}-\frac{20a^2b^5}{5a^2b}+\frac{25a^4bc}{5a^2b}\right)=$$

$$=5a^2b\left(3ab^3c-4b^4+5a^2c\right)$$

Observație.
O altă metodă de descompunere în factori este utilizarea formulelor de calcul prescurtat.

Exemplu:

Să se descompună în factori expresia:

$$E(x) = x^2 + 8x + 16$$

Intuitiv, ne dăm seama că aici poate fi vorba despre formula

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \text{ și verificăm.}$$

Dacă x^2 se asociază cu a^2, atunci a corespunde cu x și dacă 16 se asociază cu b^2, atunci b corespunde cu 4. Rămâne să vedem dacă $2ab$ este $8x$ și acest lucru este adevărat.

Observație.
Dacă la verificare nu iese cel puțin un element, atunci expresia nu poate fi descompusă direct prin formula pe care am intuit-o.
Analog se procedează și cu expresiile unde folosim și formula:

$$\boldsymbol{a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2}$$

Încă o metodă de descompunere în factori este **utilizarea grupării termenilor**, pe care o putem realiza prin diverse moduri.

Exemple:
Să se descompună în factori:
a) $\boldsymbol{9m - 9 + xm - x =}$
La primii doi termeni putem da factor comun pe 9, iar la ultimii doi termeni putem da factor comun pe x și obținem:
$\boldsymbol{9(m - 1) + x(m - 1) =}$
Acum observăm că avem doi termeni și factorul comun este $(m - 1)$
$\boldsymbol{(9 + x)(m - 1)}$
Gruparea o putem face și altfel, urmând ca la final să se obțină același rezultat:

$$\boldsymbol{9m - 9 + xm - x = 9m + xm - 9 - x = m(9 + x) - (9 + x) = (9 + x)(m - 1)}$$

b) $x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = x^2(x - 2) + 3(x - 2) = (x - 2)(x^2 + 3)$

c) $a^3 + a^2 + a + 1 = a^3 + a + a^2 + 1 = a(a^2 + 1) + (a^2 + 1) = (a^2 + 1)(a + 1)$

d) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = x^2(x + 2) - 9(x + 2) = (x + 2)(x^2 - 9) =$
$= (x + 2)(x - 3)(x + 3)$

e) $x^4 + 2x^3 - 8x - 16 = x^3(x + 2) - 8(x + 2) = (x + 2)(x^3 - 8) =$
$= (x + 2)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

f) $x^3 - 3x^2 + x - 3 = x^2(x - 3) + (x - 3) = (x - 3)(x^2 + 1)$

g) $x^3 + 2x^2 - 25x - 50 = x^2(x + 2) - 25(x + 2) = (x + 2)(x^2 - 25) =$
$= (x + 2)(x - 5)(x + 5)$

h) $y^3 - 5y^2 - y + 5 = y^2(y - 5) - (y - 5) = (y - 5)(y^2 - 1) = (y - 5)(y - 1)(y + 1)$

i) $x^2 - 6x + 9 - y^2 = (x - 3)^2 - y^2 = (x - 3 - y)(x - 3 + y)$

k) $x^2 - 9y^2 - 6y - 1 = x^2 - (9y^2 + 6y + 1) = x^2 - (3y + 1)^2 =$
$= (x - (3y + 1))(x + (3y + 1)) = (x - 3y - 1)(x + 3y + 1)$

Exemple:

Vom descompune expresiile de mai jos prin 2 metode:

Metoda 1

$E(x) = x^2 + 5x + 6$
$a = 1, b = 5, c = 6$
$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 - 1}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 + 1}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$x^2 + 5x + 6 = 1\,(x - (-3))(x - (-4)) =$
$= (x + 3)(x + 4)$

Metoda 2

$x^2 + 5x + 6 =$
$= x^2 + 2x + 3x + 6 =$
$= x(x + 2) + 3(x + 2) =$
$= (x + 2)(x + 3)$

Explicație:

Căutăm 2 numere pe care le adunăm și obținem termenul b, iar dacă le înmulțim găsim termenul c, apoi descompunem termenul b.

Metoda 1

$E(x) = 2x^2 - 7x + 3$
$a = 2, b = -7, c = 3$
$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 =$
$= 49 - 24 = 25$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) - \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{7 - 5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Metoda 2

$2x^2 - 7x + 3 =$
$= 2x^2 - x - 6x + 3 =$
$= x(2x - 1) - 3(2x - 1) =$
$= (2x - 1)(x - 3)$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7)+\sqrt{25}}{2\cdot 2} = \frac{7+5}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$2x^2 - 7x + 3 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-3)$$

Alte modele de descompunere în factori folosind doar metoda scoaterii factorului comun:

$x^2 - 7x + 12 = x^2 - 3x - 4x + 12 = x(x - 3) - 4(x - 3) = (x - 3)(x - 4)$

$x^2 + x - 30 = x^2 + 6x - 5x - 30 = x(x + 6) - 5(x + 6) = (x + 6)(x - 5)$

$x^2 + 2x - 8 = x^2 + 4x - 2x - 8 = x(x + 4) - 2(x + 4) = (x + 4)(x - 2)$

$x^2 - 8x + 15 = x^2 - 3x - 5x + 15 = x(x - 3) - 5(x - 3) = (x - 3)(x - 5)$

$x^2 - 4x - 45 = x^2 - 9x + 5x - 45 = x(x - 9) + 5(x - 9) = (x - 9)(x + 5)$

$x^2 + 6x - 7 = x^2 + 7x - x - 7 = x(x + 7) - (x + 7) = (x + 7)(x - 1)$

$3x^2 - 7x + 4 = 3x^2 - 3x - 4x + 4 = 3x(x - 1) - 4(x - 1) = (x - 1)(3x - 4)$

Exerciții rezolvate:

Testul nr. 1 pentru exersare (februarie 2022)

Fie expresia $E(x) = \frac{1}{x-4} : \frac{x+4}{4x-16} + \frac{x^2-4x}{x^2-16}$

Arătați că $E(x) = 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4; 4\}$

Rezolvare:

Dacă în enunțul problemei este dat DVA-ul, atunci nu mai este necesar să îl determinăm. În cazul în care DVA-ul lipsește, determinarea lui face parte din rezolvarea problemei.

$$E(x) = \frac{1}{x-4} \cdot \frac{4x-16}{x+4} + \frac{x^2-4x}{x^2-16} =$$

Împărțirea fracțiilor algebrice se face la fel ca împărțirea fracțiilor obișnuite: deîmpărțitul se înmulțește cu inversul împărțitorului.

$$E(x) = \frac{4x-16}{(x-4)(x+4)} + \frac{x^2-4x}{x^2-16} =$$

Observăm că cele două fracții au numitorul comun, deoarece $x^2 - 16$ se descompune cu ajutorul formulei: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$$E(x) = \frac{\cancel{4x} - 16 + x^2 - \cancel{4x}}{(x-4)(x+4)} = \frac{x^2-16}{(x-4)(x+4)} = 1$$

Testul nr. 1 pentru exersare (februarie 2018)

Simplificați și scrieți expresia: $\dfrac{x^3+2x^2+x}{x^3+x^2-x-1}$ sub formă de fracție algebrică ireductibilă pe mulțimea $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$.

Rezolvare:

Descompunem în factori numărătorul:

$$x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x + 1)^2$$

Descompunem în factori numitorul:

$$x^3 + x^2 - x - 1 = x^2(x + 1) - (x + 1) = (x + 1)(x^2 - 1)$$

Fracția algebrică devine:

$$\frac{x(x+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x+1)}(x^2-1)}=\frac{x(x+1)}{x^2-1}=\frac{x\cancel{(x+1)}}{(x-1)\cancel{(x+1)}}=\frac{x}{x-1}$$

• Ecuații raționale

Definiție.
O **ecuație rațională** este o ecuație în care apare cel puțin o fracție care are necunoscute la numitor.

Vom prezenta două metode de rezolvare a ecuațiilor raționale:

Metoda 1

Exercițiu rezolvat din sesiunea suplimentară (iulie 2023)

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $\dfrac{x^2+1}{x^2-x}+\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{3x-1}{x}$

Rezolvare:

Pasul 1. Descompunem numitorii.

$x^2 - x = x(x - 1)$

Pasul 2. Determinăm DVA.

$$x(x-1)\neq 0 \Rightarrow \begin{matrix} x\neq 0 \\ x\neq 1 \end{matrix} \Rightarrow x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$$

Pasul 3. Aducem termenii la un numitor comun.

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)}+\frac{^{x)}2}{x-1}=\frac{^{x-1)}3x-1}{x} \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x(x-1)}+\frac{2x}{x(x-1)}=\frac{(3x-1)(x-1)}{x(x-1)}$$

Pasul 4. Eliminăm numitorii și lucrăm doar cu numărătorii.

$$x^2+1+2x=(3x-1)(x-1) \Leftrightarrow x^2+1+2x=3x^2-3x-x+1 \Leftrightarrow$$

$$x^2-3x^2+2x+3x+x+1-1=0 \Leftrightarrow -2x^2+6x=0 \Leftrightarrow$$

$$-2x(x-3)=0 \Rightarrow \quad x_1=0 \text{ și } x_2=3$$

Pasul 5. Verificăm care dintre soluții aparține DVA.

$x_1=0 \notin \text{DVA}$ și $x_2=3 \in \text{DVA}$

Pasul 6. Scriem soluția.

$S=\{3\}$

Metoda ②

Exercițiu rezolvat din examen (iunie 2022)

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $\dfrac{x^2+5x-9}{5x+15}-\dfrac{x}{x+3}=1.$

Rezolvare:

Pasul 1. Descompunem numitorii.

$5x+15=5(x+3)$

Pasul 2. Determinăm DVA.

$5(x+3)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -3 \Rightarrow x\in\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

Pasul 3. Aducem toți termenii în membrul stâng și egalăm cu zero.

$$\frac{x^2+5x-9}{5x+15}-\frac{x}{x+3}-1=0$$

Pasul 4. Aducem la numitor comun.

$$\frac{x^2+5x-9}{5(x+3)}-\frac{5x}{5(x+3)}-\frac{5(x+3)}{5(x+3)}=0$$

Pasul 5. Formăm o singură fracție, aducem la forma mai simplă.

$$\frac{x^2+\cancel{5x}-9-\cancel{5x}-5x-15}{5(x+3)}=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x-24}{5(x+3)}=0$$

Testul nr. 1 pentru exersare (februarie 2018)

Simplificați și scrieți expresia: $\dfrac{x^3+2x^2+x}{x^3+x^2-x-1}$ sub formă de fracție algebrică ireductibilă pe mulțimea $\mathbb{R}\setminus\{-1; 1\}$.

Rezolvare:

Descompunem în factori numărătorul:

$$x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x + 1)^2$$

Descompunem în factori numitorul:

$$x^3 + x^2 - x - 1 = x^2(x + 1) - (x + 1) = (x + 1)(x^2 - 1)$$

Fracția algebrică devine:

$$\frac{x(x+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x+1)}(x^2-1)}=\frac{x(x+1)}{x^2-1}=\frac{x\cancel{(x+1)}}{(x-1)\cancel{(x+1)}}=\frac{x}{x-1}$$

• Ecuații raționale

Definiție.
O **ecuație rațională** este o ecuație în care apare cel puțin o fracție care are necunoscute la numitor.

Vom prezenta două metode de rezolvare a ecuațiilor raționale:

Metoda 1

Exercițiu rezolvat din sesiunea suplimentară (iulie 2023)

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $\dfrac{x^2+1}{x^2-x}+\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{3x-1}{x}$

Rezolvare:

Pasul 1. Descompunem numitorii.

$x^2 - x = x(x - 1)$

Pasul 2. Determinăm DVA.

$$x(x-1)\neq 0 \Rightarrow \begin{matrix} x\neq 0 \\ x\neq 1 \end{matrix} \Rightarrow x\in\mathbb{R}\setminus\{0, 1\}$$

Pasul 3. Aducem termenii la un numitor comun.

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)}+\frac{^{x)}2}{x-1}=\frac{^{x-1)}3x-1}{x} \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x(x-1)}+\frac{2x}{x(x-1)}=\frac{(3x-1)(x-1)}{x(x-1)}$$

Pasul 4. Eliminăm numitorii și lucrăm doar cu numărătorii.

$x^2+1+2x=(3x-1)(x-1) \Leftrightarrow x^2+1+2x=3x^2-3x-x+1 \Leftrightarrow$

$x^2-3x^2+2x+3x+x+1-1=0 \Leftrightarrow -2x^2+6x=0 \Leftrightarrow$

$-2x(x-3)=0 \Rightarrow \quad x_1=0$ și $x_2=3$

Pasul 5. Verificăm care dintre soluții aparține DVA.

$x_1=0 \notin DVA$ și $x_2=3 \in DVA$

Pasul 6. Scriem soluția.

$S=\{3\}$

Metoda ②

Exercițiu rezolvat din examen (iunie 2022)

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $\dfrac{x^2+5x-9}{5x+15}-\dfrac{x}{x+3}=1.$

Rezolvare:

Pasul 1. Descompunem numitorii.

$5x+15=5(x+3)$

Pasul 2. Determinăm DVA.

$5(x+3)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -3 \Rightarrow x\in\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

Pasul 3. Aducem toți termenii în membrul stâng și egalăm cu zero.

$$\frac{x^2+5x-9}{5x+15}-\frac{x}{x+3}-1=0$$

Pasul 4. Aducem la numitor comun.

$$\frac{x^2+5x-9}{5(x+3)}-\frac{5x}{5(x+3)}-\frac{5(x+3)}{5(x+3)}=0$$

Pasul 5. Formăm o singură fracție, aducem la forma mai simplă.

$$\frac{x^2+\cancel{5x}-9-\cancel{5x}-5x-15}{5(x+3)}=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x-24}{5(x+3)}=0$$

Pasul 6. Egalăm numărătorul cu zero și rezolvăm.

$x^2 - 5x - 24 = 0$

$x^2 - 8x + 3x - 24 = 0$

$x(x - 8) + 3(x - 8) = 0$

$(x - 8)(x + 3) = 0$

$x - 8 = 0 \Rightarrow x_1 = 8 \in \text{DVA}$

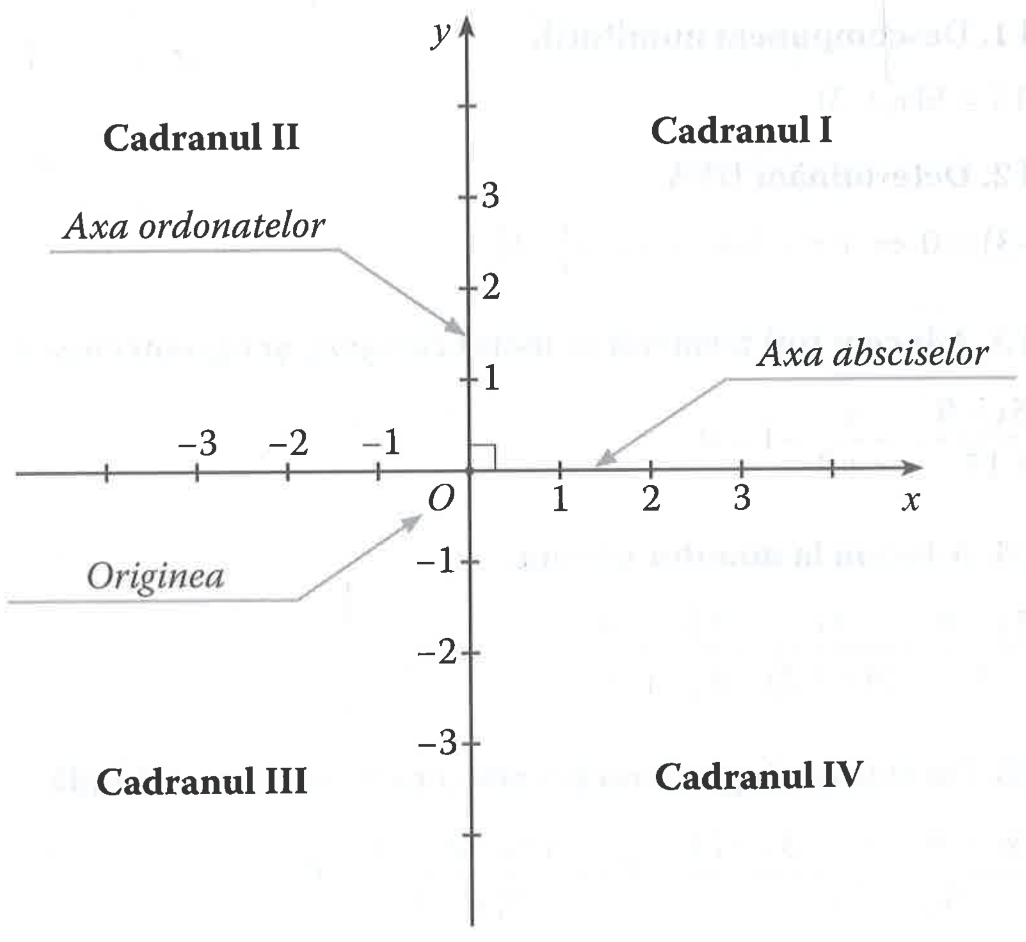
$x + 3 = 0 \Rightarrow x_2 = -3 \notin \text{DVA}$

Pasul 7. Scriem soluția.

$S = \{8\}$

Sistemul de axe ortogonale

Dacă orice număr real îl putem reprezenta pe o dreaptă numită **axa numerelor**, atunci pentru reprezentarea elementelor produsului cartezian $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, avem nevoie de două axe perpendiculare.



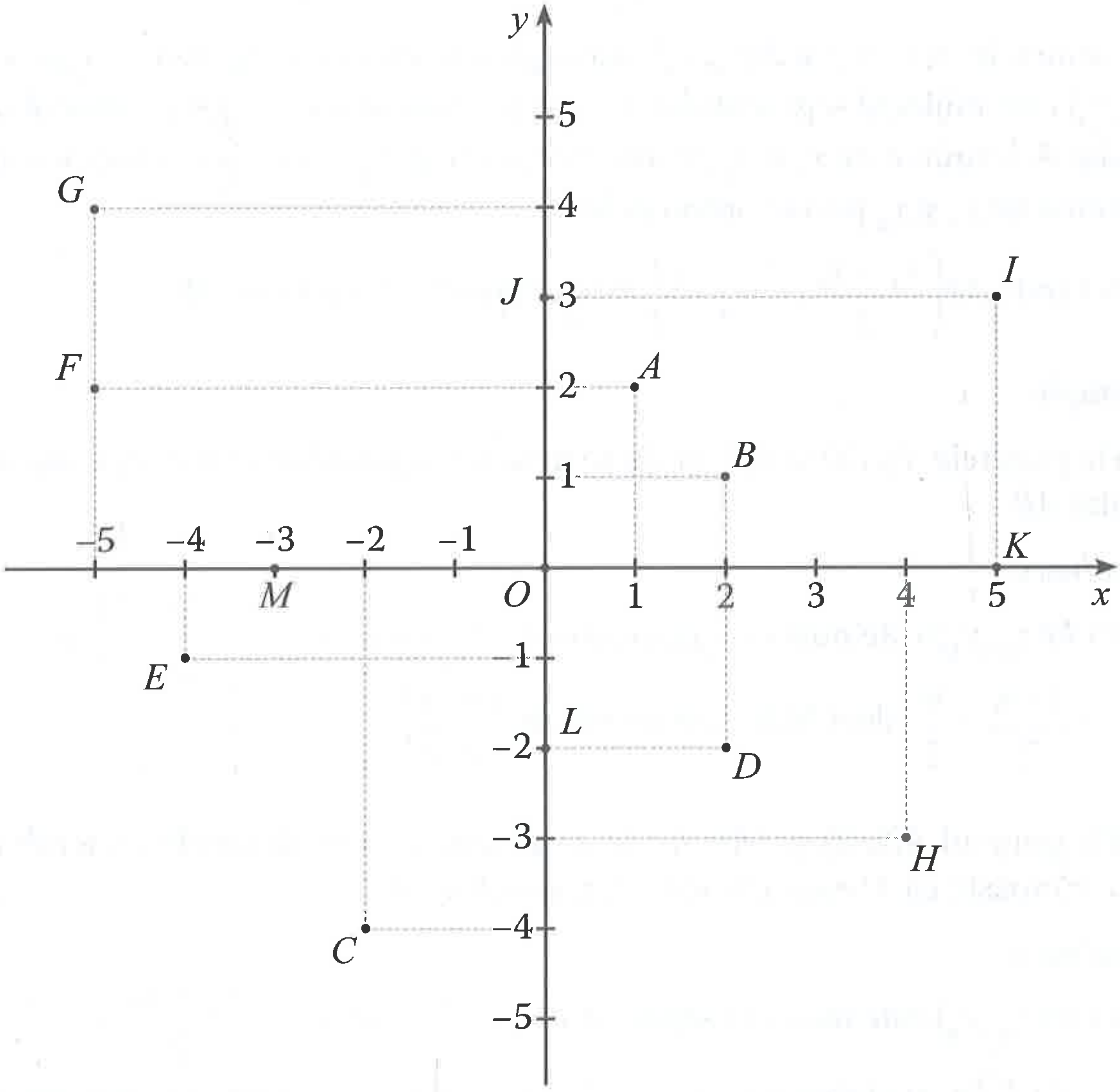
Axa orizontală (Ox) se numește **axa absciselor**.

Axa verticală (Oy) se numește **axa ordonatelor**.

Axele Ox și Oy sunt perpendiculare în punctul O, care se numește **originea** sistemului de axe ortogonale.

Orice punct din sistemul de axe ortogonale are o pereche de coordonate: prima coordonată se află mereu pe axa Ox și a doua pe axa Oy.

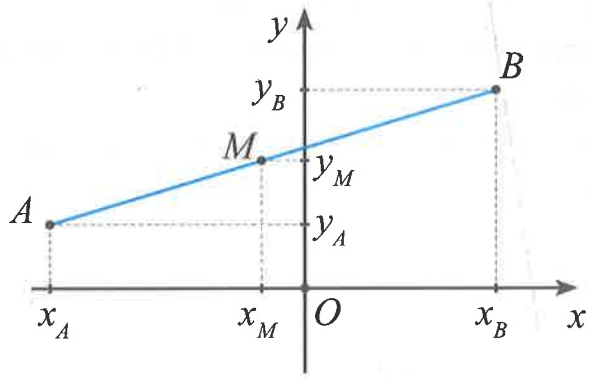
Exemplu:



Coordonatele punctelor din desenul de mai sus sunt:
$A(1, 2)$; $B(2, 1)$; $C(-2, -4)$; $D(2, -2)$; $E(-4, -1)$; $F(-5, 2)$; $G(-5, 4)$; $H(4, -3)$; $I(5, 3)$; $K(5, 0)$; $L(0, -2)$; $J(0, 3)$; $M(-3, 0)$; $O(0, 0)$.

Observație.
Orice punct de pe axa absciselor are mereu ordonata nulă.
Orice punct de pe axa ordonatelor are mereu abscisa nulă.

• Mijlocul unui segment și lungimea unui segment



Fie punctele $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$, două puncte distincte. Spunem că punctul $M(x_M, y_M)$ este mijlocul segmentului AB, dacă și numai dacă x_M este mijlocul segmentului determinat de x_A și x_B pe axa absciselor și y_M este mijlocul segmentului determinat de y_A și y_B pe axa ordonatelor.

Altfel spus $M\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}, \dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$ este mijlocul segmentului AB.

Exemplu:

1) Fie punctele $A(2, 3)$ și $B(5, 6)$. Să se determine coordonatele mijlocului segmentului AB.

Rezolvare:

Dacă $M(x_M, y_M)$ este mijlocul segmentului AB, atunci $x_M = \dfrac{2+5}{2} = \dfrac{7}{2}$ și

$y_M = \dfrac{3+6}{2} = \dfrac{9}{2}$, deci M are coordonatele $\left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{9}{2}\right)$.

2) Fie punctul $A(2, 3)$ și $M(4, 4)$. Să se determine coordonatele punctului B, dacă se cunoaște că M este mijlocul segmentului AB.

Rezolvare:

Dacă $M(x_M, y_M)$ este mijlocul segmentului AB, atunci $x_M = \dfrac{x_A+x_B}{2}$ și

$y_M = \dfrac{y_A+y_B}{2}$ și obținem două ecuații simple ale căror necunoscute sunt coordonatele punctului B.

$$x_M = \frac{x_A+x_B}{2} \Leftrightarrow 4 = \frac{2+x_B}{2} \Leftrightarrow 4 \cdot 2 = 2 + x_B \Leftrightarrow x_B = 8-2 \Rightarrow x_B = 6$$

$$y_B = \frac{y_A+y_B}{2} \Leftrightarrow 4 = \frac{3+y_B}{2} \Leftrightarrow 4 \cdot 2 = 3 + y_B \Leftrightarrow y_B = 8-3 \Rightarrow y_B = 5$$

Concluzie: Punctul B are coordonatele $(6, 5)$.

Regulă:

Pentru a determina lungimea unui segment, folosim următoarea regulă:
Fie $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$ oricare două puncte distincte din sistemul de axe ortogonale.

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Exemplu:

Fie punctele $A(2, 1)$, $B(6, 3)$, $C(0, 5)$.
Să se determine lungimea segmentelor AB, BC și AC.

Rezolvare:

$$AB = \sqrt{(2-6)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{(6-0)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$AC = \sqrt{(2-0)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Noțiunea de funcție

Definiție.
Funcția este un triplet (A, B, f) format din două mulțimi nevide A și B și o lege de corespondență f, prin care fiecărui element din mulțimea A i se asociază un element și numai unul din mulțimea B.

Elementele funcției:

$$f : A \to B$$

Corespondența *(legea, procedeul)*

Domeniul de definiție al funcției *(se notează D(f))*

Domeniul de valori sau ***codomeniul*** funcției *(se notează E(f))*

Fie funcția $f : A \to B$ și X un element oarecare al mulțimii A.
Dacă există $y \in B$, astfel încât funcția f asociază elementului x elementul y, spunem că x este **argumentul** (sau **variabila independentă**) **funcției**, iar y este **valoarea funcției** f **în punctul** x.

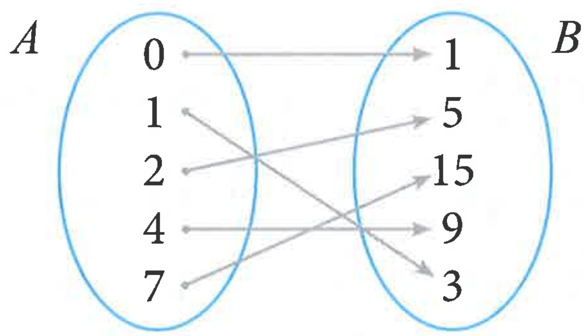
Se scrie $f(x) = y$, se citește *„f de x este egal cu y”*.

Fie funcția $f:\{0,1,2,4,7\} \to \{1,3,5,9,15\}$, $f(x)=2x+1$.

Ea este definită printr-o **formulă** prin care este descrisă legea de corespondență, datorită căreia oricărui element din mulțimea {0, 1, 2, 4, 7} i se asociază un element din mulțimea {1, 3, 5, 9, 15}.

(În acest exemplu, lui x i se asociază dublul său adunat cu 1.)

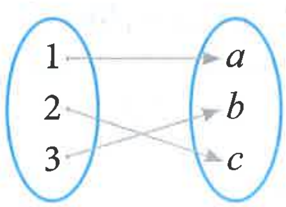
Putem defini aceeași funcție printr-o **diagramă** în care, cu ajutorul săgeților, sunt evidențiate elementele corespunzătoare fiecărui element din domeniul de definiție, conform legii de corespondență f.



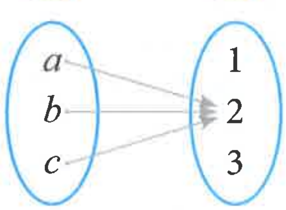
Putem defini aceeași funcție și printr-un **tabel**, în care pe prima linie se trec elementele din domeniul de definiție, iar pe a doua linie, sub fiecare element din domeniul de definiție, se scrie elementul corespunzător din codomeniu, conform legii de corespondență f.

x	0	1	2	4	7
$f(x)$	1	3	5	9	15

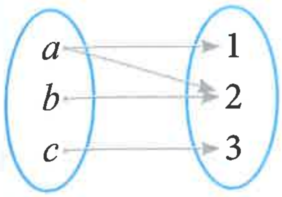
Explicăm dacă următoarele diagrame reprezintă sau nu o funcție:



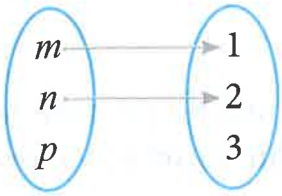
Reprezintă o funcție, deoarece oricărui element din prima mulțime îi corespunde un unic element din a doua mulțime.



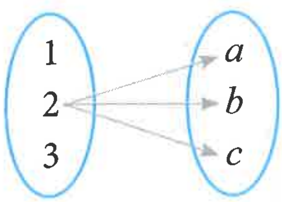
Reprezintă o funcție, deoarece fiecărui element din prima mulțime îi corespunde un singur element din a doua mulțime și nu contează că elementele „1” și „3” din a doua mulțime nu au fost asociate cu nimic.



Nu este o funcție, deoarece în prima mulțime există elementul „*a*” căruia îi corespund două elemente din a doua mulțime.



Nu este o funcție, deoarece în prima mulțime există un element care nu este asociat cu niciun element din a doua mulțime.



Nu este o funcție, deoarece unui element din prima mulțime îi corespund mai multe elemente din a doua mulțime. Nu este o funcție și din cauză că există elementele „1” și „3” care nu sunt asociate cu niciun element din cealaltă mulțime.

Definiție.
Funcțiile al căror domeniu și codomeniu sunt mulțimi de numere reale se numesc **funcții numerice**.

Graficul funcției numerice $f: A \to B$ este figura alcătuită din punctele (x, y) reprezentate în sistemul de axe ortogonale, unde $x \in A$ și $y = f(x) \in B$.

$$G_f = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

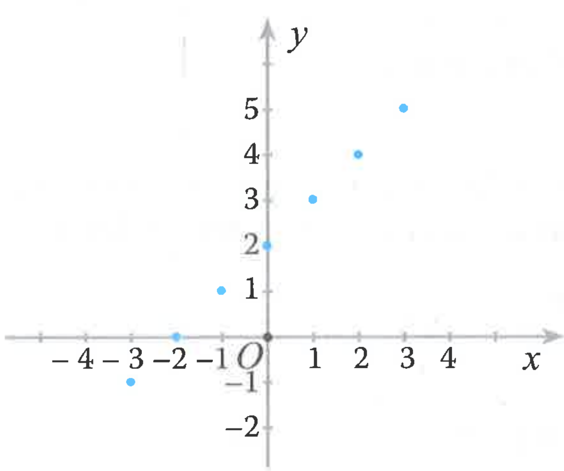
Exemple:

Fie $f: \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \to \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $f(x) = x + 2$

Avem tabelul:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-1	0	1	2	3	4	5

Punctele marcate în sistemul de axe ortogonale reprezintă graficul funcției de mai sus.

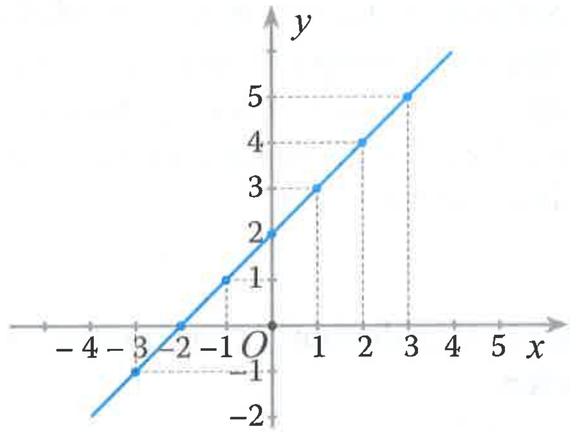


Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+2$

Avem tabelul:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-1	0	1	2	3	4	5

Dacă domeniul și codomeniul funcției este $\mathbb{R}$, atunci punctele pe care le reprezentăm în sistemul de axe ortogonale pot fi unite prin linii, astfel se va forma o dreaptă.



Observație.
Dacă graficul funcției este o dreaptă, atunci funcția este de gradul I.

Definiție.
Funcția de forma $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b$, unde $a\neq 0$ și $a,b\in\mathbb{R}$ se numește **funcție de gradul I**.

• Proprietățile funcției de gradul I

(1) **Panta** (sau *coeficientul unghiular*)
Coeficientul lui x, adică numărul a, este panta graficului funcției.

Exemple:

Fie funcțiile $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-x+3,\ g(x)=\sqrt{3}x+2,\ h(x)=\dfrac{5-2x}{3}$
Determinați panta fiecărei funcții.

Rezolvare:
La funcția f panta este -1, iar la funcția g panta este $\sqrt{3}$.
La funcția h va trebui să descompunem fracția în două:

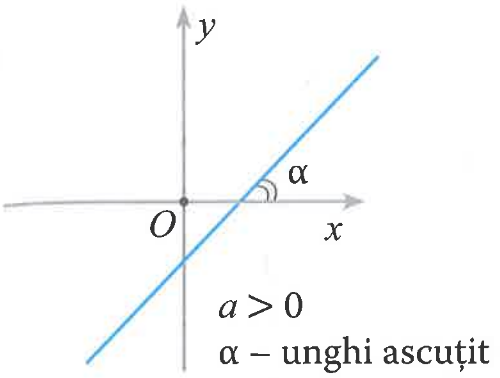
$$h(x)=\frac{5-2x}{3}=\frac{5}{3}-\frac{2x}{3}=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$$

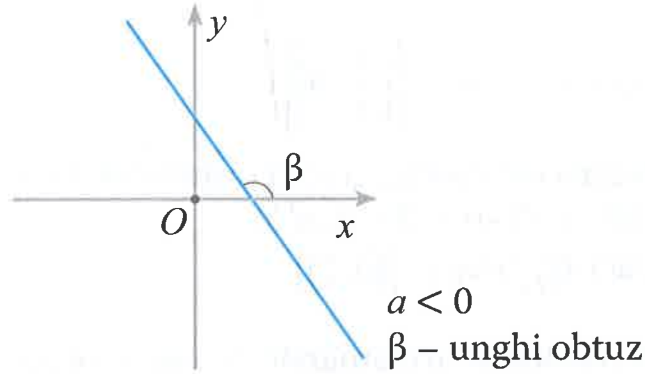
Acum observăm că panta este $-\dfrac{2}{3}$

② Monotonia funcției *(crescătoare sau descrescătoare)*

• Dacă panta „a” este număr pozitiv, atunci funcția este strict crescătoare, iar unghiul pe care îl formează graficul funcției cu axa absciselor este ascuțit.

• Dacă panta „a” este număr negativ, atunci funcția este strict descrescătoare, iar unghiul pe care îl formează graficul funcției cu axa absciselor este obtuz.





Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Dacă pentru oricare x_1 și x_2 din domeniul funcției f și $x_1 < x_2$ avem $f(x_1) < f(x_2)$, atunci funcția f este **strict crescătoare**.

Dacă pentru oricare x_1 și x_2 din domeniul funcției f și $x_1 < x_2$ avem $f(x_1) > f(x_2)$, atunci funcția f este **strict descrescătoare**.

③ Zeroul funcției

Definiție.
Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
Valoarea variabilei x pentru care $f(x) = 0$ se numește **zerou** al funcției f.
Zeroul funcției se notează de obicei cu x_0.
Dacă $f(x) = ax + b$, atunci $x_0 = -\dfrac{b}{a}$

Exemplu:
Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$. Să se afle zeroul funcției f.

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x_0=\frac{1}{2}$$

④ Intersecția cu axele

$$G_f \cap Ox = \{(x_0, 0)\}$$
$$G_f \cap Oy = \{(0, b)\}$$

Exemplu:

1) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-3x+2$. Să se determine coordonatele punctelor de intersecție cu axele.

Pentru intersecția cu axa absciselor calculăm zeroul:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow -3x+2=0 \Leftrightarrow -3x=-2 \Leftrightarrow x_0=\frac{-2}{-3} \Leftrightarrow x_0=\frac{2}{3}$$

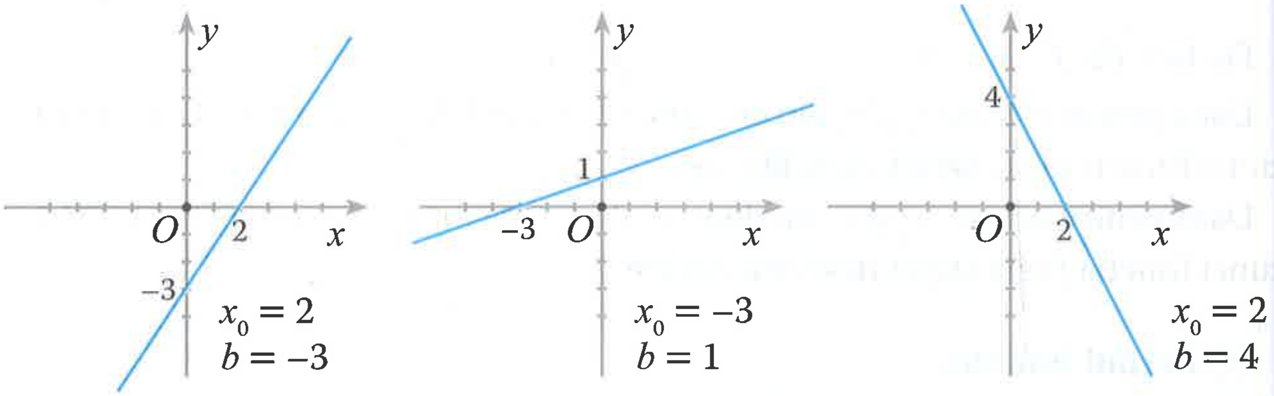
Deci $G_f \cap Ox=\left\{\left(\frac{2}{3},\ 0\right)\right\}$

Pentru intersecția cu axa ordonatelor calculăm:

$f(0)=-3\cdot 0+2=2=b$.

Deci $G_f \cap Oy=\{(0,2)\}$

2) Analizăm următoarele desene și observăm x_0 și b:



Exercițiu rezolvat din testul nr. 1 (februarie 2024)

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+m-1, m\in\mathbb{R}$. Graficul funcției f intersectează axa Oy într-un punct cu ordonata egală cu -3. Determinați zeroul funcției f.

Rezolvare:

$$G_f \cap O_y=\{(0,-3)\} \Rightarrow f(0)=-3$$

$$f(0)=2\cdot 0+m-1=-3 \Rightarrow$$

$$m-1=-3 \Leftrightarrow m=-3+1 \Leftrightarrow m=-2$$

Scriem funcția:

$f(x)=2x-2-1=2x-3$

Calculăm zeroul ($f(x)=0$)

$$2x-3=0 \Leftrightarrow 2x=3 \Leftrightarrow x_0=\frac{3}{2}$$

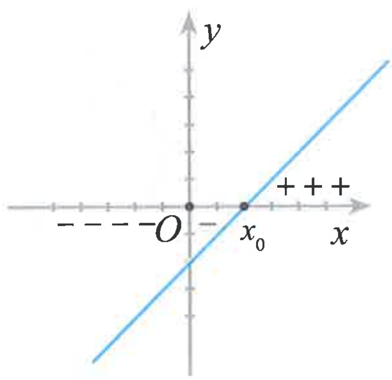
Răspuns: zeroul este $\frac{3}{2}$

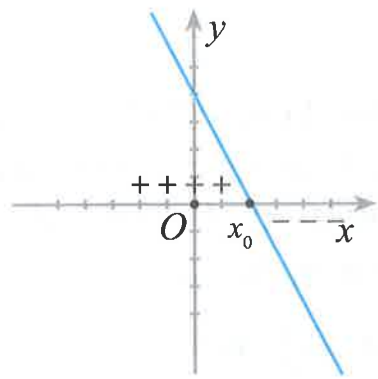
⑤ Semnul funcției

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b$, unde $a\neq 0$ și $a,b\in\mathbb{R}$ și $x_0=-\dfrac{b}{a}$ zeroul acestei funcții.

Dacă $a>0$, atunci $f(x)<0$ pentru orice $x\in(-\infty,x_0)$ și $f(x)>0$ pentru orice $x\in(x_0,+\infty)$.

Dacă $a<0$, atunci $f(x)>0$ pentru orice $x\in(-\infty,x_0)$ și $f(x)<0$ pentru orice $x\in(x_0,+\infty)$.





Exemplu:

Fie funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+3$ și $g(x)=-3x-2$
Să se determine semnul funcțiilor.

Rezolvare:

Pentru funcția f determinăm zeroul, apoi semnul.

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 2x+3=0 \Leftrightarrow 2x=-3 \Leftrightarrow x_0=-\frac{3}{2}$$

$$f(x)>0,\text{pentru } x\in\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)$$

$$f(x)<0,\text{pentru } x\in\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$$

Pentru funcția g determinăm zeroul, apoi semnul.

$$g(x)=0 \Leftrightarrow -3x-2=0 \Leftrightarrow -3x=2 \Leftrightarrow x_0=-\frac{2}{3}$$

$$g(x)>0,\text{pentru } x\in\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$$

$$g(x)<0,\text{pentru } x\in\left(-\frac{2}{3},+\infty\right)$$

Exercițiu:

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x-4$

a) Determinați panta funcției;

b) Determinați monotonia funcției;

c) Determinați zeroul funcției;

d) Scrieți coordonatele punctelor de intersecție cu axele;

e) Definiți funcția printr-un tabel;

f) Trasați graficul funcției;

g) Determinați semnul funcției.

Rezolvare:

a) Panta funcției $a=2$ este număr pozitiv.

b) Funcția f este strict crescătoare.
Unghiul dintre axa Ox și G_f va fi ascuțit.

c) $f(x)=0 \Leftrightarrow 2x-4=0 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x_0=2$

d) $G_f \cap Ox=\{(2,0)\}$

$G_f \cap Oy=\{(0,-4)\}$

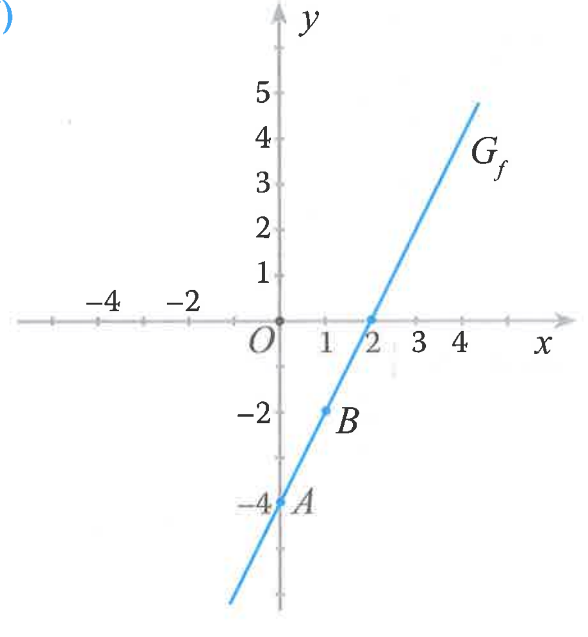
e)

x	0	1
$f(x)$	-4	-2

$f(0)=2\cdot 0-4=-4$
$f(1)=2\cdot 1-4=-2$

Din tabel obținem:
$A(0,-4)\in G_f$ și
$B(1,-2)\in G_f$

f)



Pentru a trasa graficul unei funcții de gradul I, este suficient să avem două puncte prin care trece graficul.

g) $f(x)>0$, pentru $x\in(2,+\infty)$

$f(x)<0$, pentru $x\in(-\infty,2)$

Exercițiu rezolvat din testul nr. 2 (februarie 2024)

Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -3x + 2$.

Scrieți în casetă un număr real, astfel încât punctul $A(\boxed{}, 5)$ să aparțină graficului funcției f.

$f(x) = 5$

$-3x + 2 = 5 \Leftrightarrow -3x = 5 - 2 \Leftrightarrow$

$-3x = 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{-3} \Leftrightarrow x = -1$

Deci, în casetă scriem -1.

Verificare:

Dacă $A(-1, 5) \in G_f$, atunci $f(-1) = 5$

$f(-1) = -3 \cdot (-1) + 2 = 3 + 2 = 5$.

Exercițiu rezolvat din examen (iunie 2025)

Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (m - 2)x + 3$, astfel încât punctul $A(1, 2m)$ aparține graficului funcției f. Determinați monotonia funcției f.

Rezolvare:

Dacă $A(1, 2m) \in G_f$, atunci $f(1) = 2m$.

$f(1) = (m - 2) \cdot 1 + 3 = 2m$

$m - 2 + 3 = 2m \Leftrightarrow m - 2m = 2 - 3 \Leftrightarrow$

$-m = -1 \Leftrightarrow m = 1$

Înlocuim în funcție:

$f(x) = (1 - 2)x + 3 = -x + 3$

Panta este „-1”, rezultă că funcția este strict descrescătoare.

Exercițiu rezolvat din examen (iunie 2021)

Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -mx + m^2$, $m \neq 0$. Determinați valorile reale ale lui m, pentru care funcția f este monoton crescătoare și graficul funcției f intersectează axa Oy într-un punct cu ordonata egală cu 4.

Rezolvare:

Dacă f este monoton crescătoare, atunci $-m > 0 \Leftrightarrow m < 0$

$G_f \cap Oy = \{(0, 4)\} \Rightarrow f(0) = 4$

$f(0) = -m \cdot 0 + m^2 = 4$

$m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (m - 2)(m + 2) = 0$

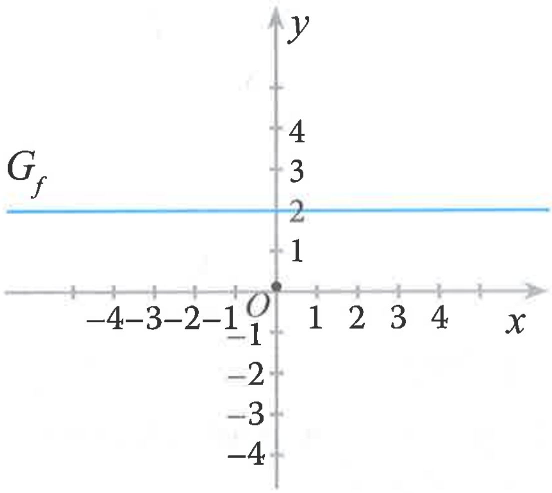
$m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$

$m + 2 = 0 \Rightarrow m = -2$

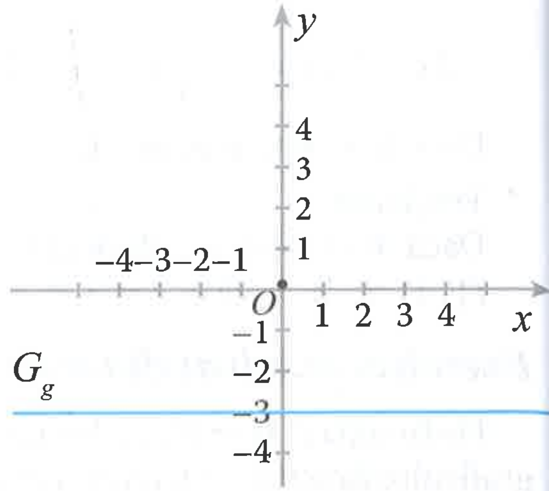
Răspuns: $m = -2$.

Definiție.
Funcția de forma $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=b,$ unde $b\in\mathbb{R}$, se numește **funcție constantă.**
Graficul funcției constante este o **dreaptă paralelă cu axa absciselor.**

Exemplu:

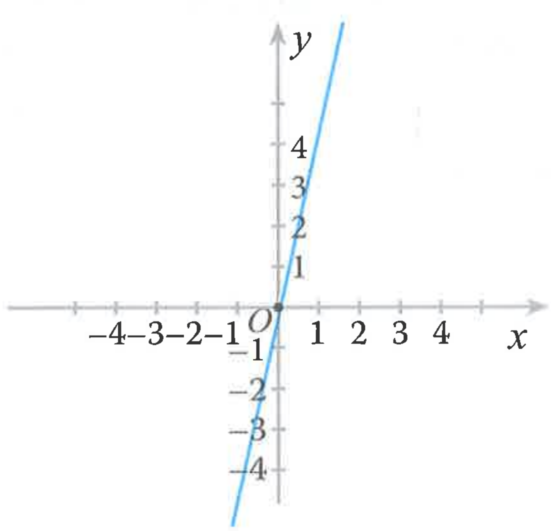


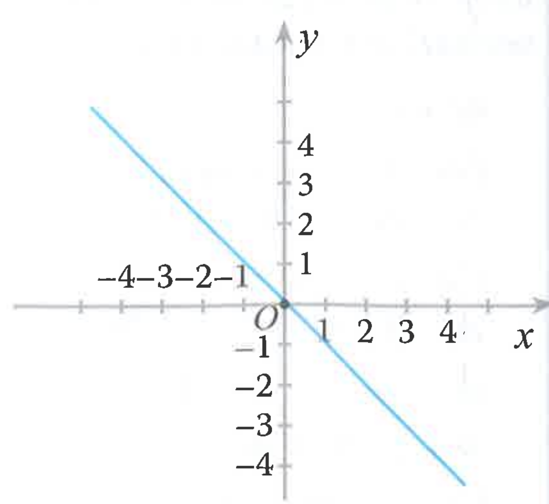
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2$



$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=-3$

Definiție.
Funcția de forma $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax$, unde $a\in\mathbb{R}^*$, se numește **proporționalitate directă.**
Numărul a se numește **coeficient de proporționalitate.**
Această funcție este un caz particular al funcției de gradul I și posedă aceleași proprietăți.
Graficul acestei funcții mereu va conține originea sistemului de axe ortogonale.





Definiție.
Fie funcția $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x)=\frac{k}{x}$, unde $k\in\mathbb{R}^*$ se numește **proporționalitate inversă.**
Graficul proporționalității inverse se numește **hiperbolă** și are două ramuri.

Definiție.
Funcția $f:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x)=\sqrt{x}$ se numește **funcția rădăcină pătrată**.

Definiție.
Se numește **șir de numere reale** o funcție $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$; pentru orice $n\in\mathbb{N}$ există numărul $a_n=f(n)\in\mathbb{R}$, numit termenul general al șirului sau termenul al cărui rang este n.
De regulă, șirul se notează cu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, iar mulțimea termenilor șirului se scrie $\{a\in\mathbb{R}:\exists n\in\mathbb{N}, a=a_n\}$

- Dacă fiecare termen al unui șir numeric este mai mare decât predecesorul său, atunci șirul este strict crescător. ($a_{n+1} > a_n$)

- Dacă fiecare termen al unui șir numeric nu este mai mic decât predecesorul său, atunci șirul este crescător. ($a_{n+1} \geq a_n$)

- Dacă fiecare termen al unui șir numeric este mai mic decât predecesorul său, atunci șirul este strict descrescător. ($a_{n+1} < a_n$)

- Dacă fiecare termen al unui șir numeric nu este mai mare decât predecesorul său, atunci șirul este descrescător. ($a_{n+1} \leq a_n$)

- Dacă fiecare termen al unui șir numeric este egal cu predecesorul său, atunci șirul este constant. ($a_{n+1} = a_n$)

- Șirurile se numesc monotone dacă sunt șiruri numerice crescătoare, strict crescătoare, descrescătoare sau strict descrescătoare.

Exemplu:

Fie șirul numeric $(a_n)n \geq 1$, definit prin formula termenului general:
$an = n^2 - 4n - 5$.
a) Să se determine suma primilor 4 termeni.
b) Să se determine rangul termenului egal cu 27 al acestui șir.

Rezolvare:

a) Primii patru termeni sunt a_1, a_2, a_3 și a_4

$a_1 = 1^2 - 4 \cdot 1 - 5 = 1 - 4 - 5 = -8$

$a_2 = 2^2 - 4 \cdot 2 - 5 = 4 - 8 - 5 = -9$

$a_3 = 3^2 - 4 \cdot 3 - 5 = 9 - 12 - 5 = -8$

$a_4 = 4^2 - 4 \cdot 4 - 5 = 16 - 16 - 5 = -5$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = -8 + (-9) + (-8) + (-5) = -30$

b) $n^2 - 4n - 5 = 27$

$n^2 - 4n - 5 - 27 = 0$

$n^2 - 4n - 32 = 0$

$n^2 - 8n + 4n - 32 = 0$

$n(n - 8) + 4(n - 8) = 0$

$(n - 8)(n + 4) = 0$

$n_1 = 8 \in \mathbb{N}$

$n_2 = -4 \notin \mathbb{N}$

Singura soluție este $n = 8$.

• Funcția de gradul II

O funcție de gradul II este de forma:

$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \in \mathbb{R}^*$ și $b, c \in \mathbb{R}$

- a este coeficientul termenului de gradul II
- b este coeficientul termenului de gradul I
- c este termenul liber

Graficul funcției de gradul II reprezintă o **parabolă** a cărei **axă de simetrie** este paralelă cu axa ordonatelor.

Dacă $a > 0$, atunci ramurile parabolei sunt orientate în sus.

Dacă $a < 0$, atunci ramurile parabolei sunt orientate în jos.

Numărul zerourilor (punctele de intersecție cu Ox) depinde de discriminantul ecuației de gradul II care stă la baza funcției.

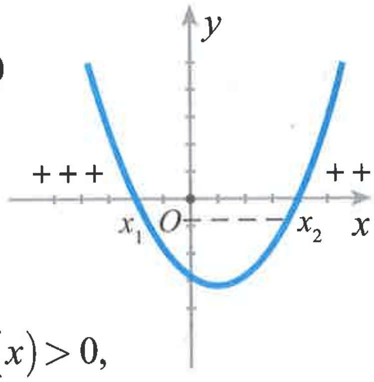
Dacă $\Delta > 0$, atunci ecuația are două rădăcini distincte

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ și $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ care sunt zerourile funcției.

Dacă $\Delta = 0$, atunci ecuația are rădăcină dublă $x = \dfrac{-b}{2a}$ care este singurul zerou al funcției.

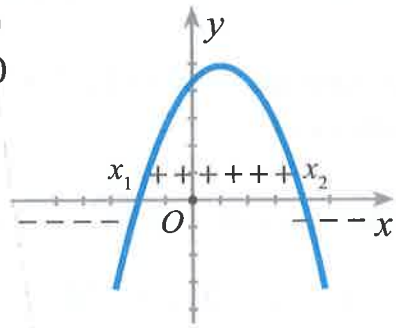
Dacă $\Delta < 0$, atunci ecuația nu are rădăcini reale, iar funcția nu are zerouri.

$a > 0$
$\Delta > 0$



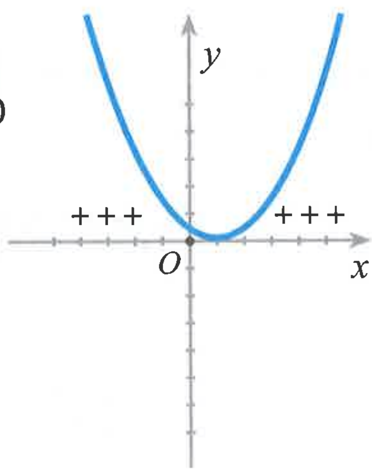
$f(x) > 0$,
pentru $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$
$f(x) < 0$,
pentru $x \in (x_1, x_2)$

$a < 0$
$\Delta > 0$



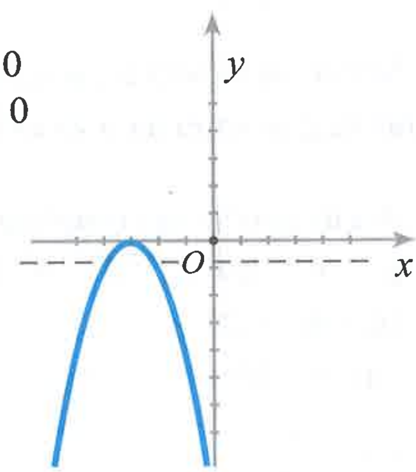
$f(x) > 0$,
pentru $x \in (x_1, x_2)$
$f(x) < 0$,
pentru $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$

$a > 0$
$\Delta = 0$



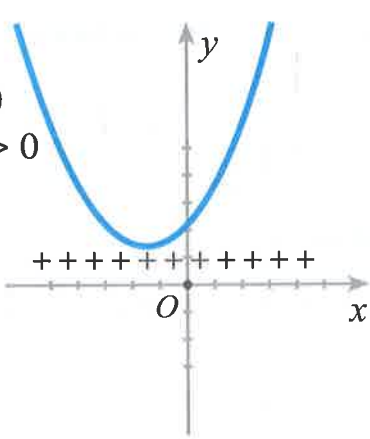
$f(x) > 0$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$

$a < 0$
$\Delta = 0$

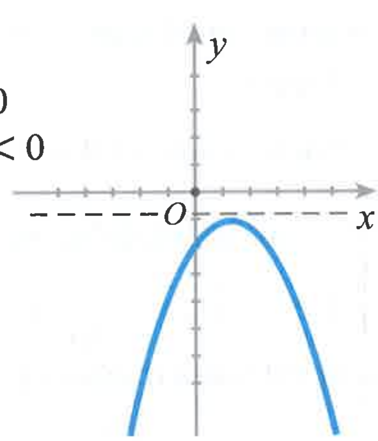


$f(x) < 0$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$

$a > 0$
$\Delta < 0$
$f(x) > 0$



$a < 0$
$\Delta < 0$
$f(x) < 0$



Exercițiu rezolvat din examen (iunie 2025)

Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x - 4$. Scrieți în casetă numărul de zerouri ale funcției f.

„Numărul de zerouri ale funcției f este egal cu $\boxed{}$."

$a = 1,\ b = -2,\ c = -4$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)$

$\Delta = 4 + 16 = 20 > 0$

$\Rightarrow$ funcția f are 2 zerouri.

Exercițiu rezolvat din testul nr. 1 (februarie 2025)

Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + \boxed{}$.

Scrieți în casetă un număr real, astfel încât parabola, care reprezintă graficul funcției f, să intersecteze axa Ox în două puncte.

Avem nevoie să completăm cu un număr, astfel încât Δ să fie pozitiv.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c$

$16 - 4c > 0$

$-4c > -16$

$c < \dfrac{-16}{-4}$

$c < 4$

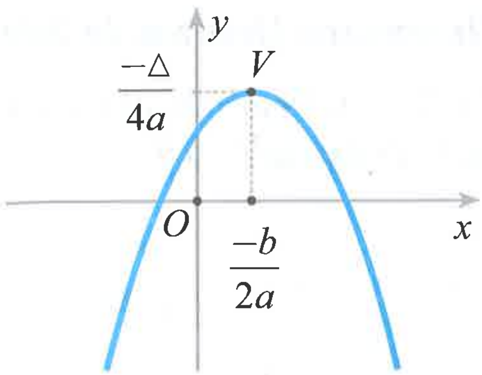
Concluzie: În casetă se poate scrie orice număr real mai mic decât 4.

Definiție.

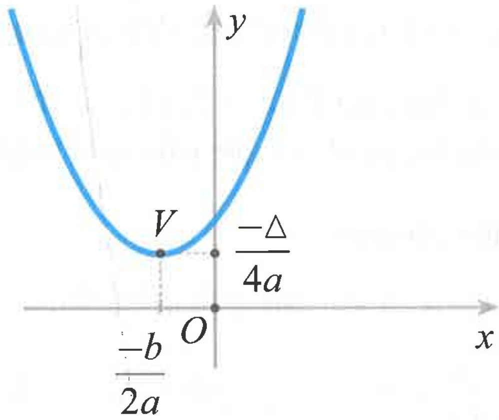
Vârful parabolei este punctul unde funcția atinge valoarea maximă sau minimă.

Coordonatele vârfului sunt: $V\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$ sau $V\left(\dfrac{-b}{2a}, f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)\right)$

- x_V abscisa vârfului, ne indică **axa de simetrie**;
- $y_V = f(x_V) = \dfrac{-\Delta}{4a}$, reprezintă valoarea maximă a funcției dacă $a < 0$ sau valoarea minimă a funcției dacă $a > 0$.



V este punct de maxim local



V este punct de minim local

Intersecția cu axele:

$$G_f \cap Oy = \{(0,c)\}$$

$$G_f \cap Ox = \begin{cases} (x_1,0) \text{ și } (x_2,0), \text{ dacă } \Delta > 0 \\ (x_V,0), \text{ dacă } \Delta = 0 \\ \varnothing, \text{ dacă } \Delta < 0 \end{cases}$$

Exercițiu rezolvat din sesiunea suplimentară (iulie 2025)

Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + mx + m^2 + 1$, $m \in \mathbb{R}$. Abscisa vârfului parabolei, care reprezintă graficul funcției f, este egală cu 1. Determinați valoarea minimă a funcției f.

Rezolvare:

$a = 1, b = m, c = m^2 + 1$

$$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

$$\frac{-b}{2a} = 1 \Leftrightarrow \frac{-m}{2} = 1 \Leftrightarrow -m = 2$$

$$\Rightarrow m = -2 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x + 5$$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16$

$$\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-16)}{4} = 4$$

Sau calculăm $f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 5 = 4$.

Exercițiu rezolvat din sesiunea suplimentară (februarie 2021)

Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2mx + m^2 + 5m - 1$. Determinați valorile reale ale lui m, pentru care valoarea minimă a funcției f este egală cu 9.

Rezolvare:

$a = 1, b = -2m, c = m^2 + 5m - 1$

$$\frac{-\Delta}{4a} = 9 \Leftrightarrow -\Delta = 36 \Leftrightarrow \Delta = -36$$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m^2 + 5m - 1) =$

$$\cancel{4m^2} - \cancel{4m^2} - 20m + 4 = -20m + 4.$$

$$-20m + 4 = -36 \Leftrightarrow -20m = -36 - 4 \Leftrightarrow$$

$$-20m = -40 \Leftrightarrow m = \frac{-40}{-20} \Leftrightarrow m = 2$$

• Monotonia funcției de gradul II

Dacă $a > 0$, atunci f este strict crescătoare pentru $x \in [x_V, +\infty)$ și strict descrescătoare pentru $x \in (-\infty, x_V]$.

Dacă $a < 0$, atunci f este strict crescătoare pentru $x \in (-\infty, x_V]$ și strict descrescătoare pentru $x \in [x_V, +\infty)$.

• Semnul funcției de gradul II

Dacă $a > 0$ și $\Delta < 0$, atunci $f(x) > 0$ pentru $x \in \mathbb{R}$ și $f(x) < 0$ pentru $x \in \varnothing$.

Dacă $a > 0$ și $\Delta = 0$, atunci $f(x) > 0$ pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_V\}$ și $f(x) < 0$ pentru $x \in \varnothing$.

Dacă $a > 0$ și $\Delta > 0$, atunci $f(x) > 0$ pentru $x \in \left(-\infty, \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cup \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, +\infty\right)$ și $f(x) < 0$ pentru $x \in \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$.

Dacă $a < 0$ și $\Delta < 0$, atunci $f(x) < 0$ pentru $x \in \mathbb{R}$ și $f(x) > 0$ pentru $x \in \varnothing$.

Dacă $a < 0$ și $\Delta = 0$, atunci $f(x) < 0$ pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_V\}$ și $f(x) > 0$ pentru $x \in \varnothing$.

Dacă $a<0$ și $\Delta>0$, atunci $f(x)<0$ pentru $x\in\left(-\infty,\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\cup\left(\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},+\infty\right)$

și $f(x)>0$ pentru $x\in\left(\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$.

Exercițiu rezolvat din testul nr. 1 (februarie 2018)

Fie funcția $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2ax+a^2-a$.
Determinați valorile reale ale lui a, pentru care $f(x)>0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Rezolvare:

$a=1$, $b=2a$, $c=a^2-a$

Dacă $f(x)>0$, atunci $a>0$ și $\Delta<0$.

$\Delta=b^2-4ac=(2a)^2-4(a^2-a)=4a^2-4a^2+4a=4a$

$4a<0\Rightarrow a<0\Rightarrow a\in(-\infty,0)$

Exerciții:

Fie funcția $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=x^2-6x+5$

a) Determinați coordonatele vârfului parabolei.
b) Determinați zerourile funcției.
c) Definiți funcția printr-un tabel.
d) Trasați graficul funcției.
e) Determinați intervalele de monotonie.
f) Determinați semnul funcției.

Rezolvare:

a) $a=1$, $b=-6$, $c=5$

$$x_V=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-6)}{2\cdot1}=\frac{6}{2}=3$$

$y_V=f(x_V)=f(3)=3^2-6\cdot3+5=9-18+5=-4$

sau

$$y_V=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-16}{4\cdot1}=\frac{-16}{4}=-4$$

$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\cdot1\cdot5=36-20=16$

Vârful parabolei este punctul $V(3,-4)$

b) $f(x) = 0$

$x^2 - 6x + 5 = 0$

$\Delta = 16 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6)-\sqrt{16}}{2\cdot 1} = \frac{6-4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6)+\sqrt{16}}{2\cdot 1} = \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

c)

x	3	1	5	2	4	0	6
$f(x)$	–1	0	0	–3	–3	5	5

Se recomandă să introducem în tabel coordonatele vârfului și zerourile funcției, apoi vecinii lui x_V. Cu cât introducem mai multe valori în tabel, cu atât mai exactă va deveni parabola când o trasăm.

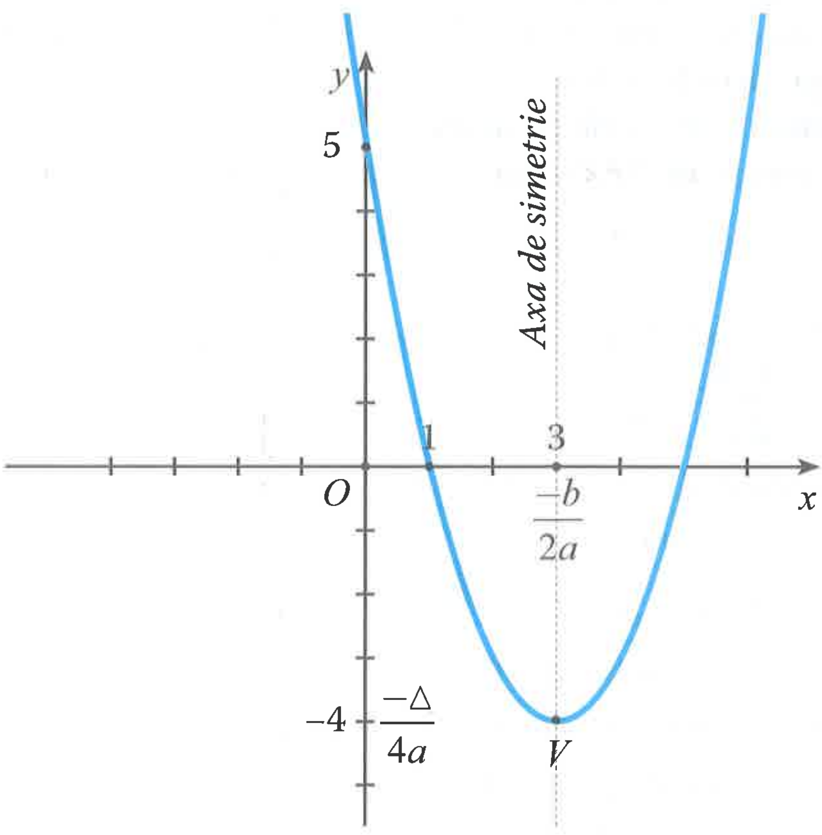
$f(2) = 2^2 - 6 \cdot 2 + 5 = 4 - 12 + 5 = -3$

$f(4) = 4^2 - 6 \cdot 4 + 5 = 16 - 24 + 5 = -8 + 5 = -3$

$f(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 5 = 5$

$f(6) = 6^2 - 6 \cdot 6 + 5 = 5$

d)



e) Funcția f este strict descrescătoare pentru $x \in (-\infty, 3]$ și strict crescătoare pentru $x \in [3, +\infty)$.

f)

$f(x) > 0$, pentru $x \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$

$f(x) < 0$, pentru $x \in (1, 5)$

Intersecția graficelor funcțiilor

Punctele de intersecție dintre graficele a două funcții f și g sunt perechile (x, y) pentru care $f(x) = g(x) = y$.

Exemplu:

Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 3x + 2$ și $g(x) = x + 2$

Să se determine coordonatele punctelor de intersecție a graficelor.

Rezolvare:

$f(x) = g(x)$

$x^2 - 3x + 2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ și $x_2 = 4$

$f(x_1) = y_1 \Rightarrow f(0) = 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$

$g(x_1) = y_1 \Rightarrow g(0) = 0 + 2 = 2$

$f(x_2) = y_2 \Rightarrow f(4) = 4^2 - 3 \cdot 4 + 2 = 16 - 12 + 2 = 6$

$g(x_2) = y_2 \Rightarrow g(4) = 4 + 2 = 6$

$G_f \cap G_g = \{(0,2);(4,6)\}$

Exercițiu rezolvat din testul nr. 2 (februarie 2022)

Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + m^2 - 2m$, $g(x) = x + 2$. Determinați valorile reale ale lui m, pentru care graficele funcțiilor f și g se intersectează în punctul de abscisă $x = 2$, iar funcția f este strict descrescătoare.

Rezolvare:

Dacă f este strict descrescătoare, atunci panta este negativă ($m < 0$).

$$f(2)=g(2) \Leftrightarrow m\cdot 2+m^2-2m=2+2 \Leftrightarrow$$

$$m^2=4 \Rightarrow m_1=\sqrt{4}=2 \text{ și } m_2=-\sqrt{4}=-2$$

Răspuns: $m = -2$

Exercițiu rezolvat din testul nr. 2 (februarie 2021)

Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$, $g(x) = 2x - m + 4$. Determinați valorile reale ale lui m, pentru care punctul de intersecție al graficului funcției f cu axa ordonatelor aparține graficului funcției g.

Rezolvare:

Dacă f și g se intersectează pe Oy, atunci $f(0) = g(0)$.

$$0+3=2\cdot 0-m+4 \Leftrightarrow 3=-m+4 \Leftrightarrow$$

$$m=4-3 \Leftrightarrow m=1$$

Răspuns: m = 1

Exercițiu rezolvat din testul nr. 2 (februarie 2020)

Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - m$, $g(x) = 2x - m - 3$. Determinați valorile reale ale lui m, pentru care punctul de intersecție al graficului funcției f cu axa absciselor aparține graficului funcției g.

Rezolvare:

Dacă funcțiile f și g se intersectează pe Ox, atunci au același zerou.
$f(x) = g(x) = 0$.

Putem rezolva ca sistem:

$$\begin{cases} x-m=0 \\ 2x-m-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=m \\ 2m-m-3=0 \end{cases} \Rightarrow \quad m-3=0 \Leftrightarrow m=3$$

Exercițiu rezolvat din testul nr. 1 (februarie 2021)

Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2mx + m^2$, $g(x) = 2x$. Determinați valorile reale ale lui m, pentru care graficele funcțiilor f și g se intersectează într-un singur punct.

Rezolvare:

Dacă graficele au un singur punct comun, atunci ecuația $f(x) = g(x)$ are o singură soluție ($\Delta = 0$).

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 2mx + m^2 = 2x \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2mx - 2x + m^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (2m-2)x + m^2 = 0$$

$$\Rightarrow a = 1,\ b = 2m-2,\ c = m^2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2m-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m^2 =$$
$$= 4m^2 - 8m + 4 - 4m^2$$
$$= -8m + 4$$

$$-8m + 4 = 0 \Leftrightarrow -8m = -4 \Leftrightarrow$$

$$m = \frac{-4}{-8} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

• Inecuații de gradul II

Se numește **inecuație de gradul II cu o necunoscută** o inecuație de forma $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, $a \in \mathbb{R}^*, b, c \in \mathbb{R}$.

Exerciții:

1) Rezolvați inecuația $6x^2 - 7x + 2 > 0$ în $\mathbb{R}$ cu ajutorul curbei semnelor.

Rezolvare:

Asociem inecuația cu funcția de gradul II, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 6x^2 - 7x + 2$ și determinăm zerourile.

$6x^2 - 7x + 2 = 0$

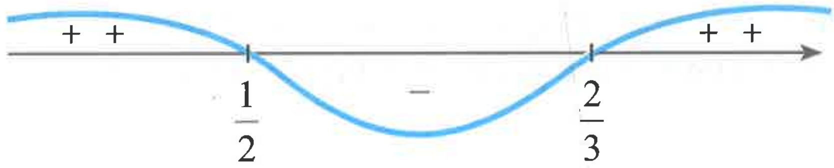
$a = 6, b = -7, c = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2 = 49 - 48 = 1$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) - \sqrt{1}}{2 \cdot 6} = \frac{7-1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) + \sqrt{1}}{2 \cdot 6} = \frac{7+1}{12} = \frac{{}^{(4}8}{12} = \frac{2}{3}$$

Punem zerourile pe o axă:



Curba semnelor se asociază cu parabola funcției. Deoarece $a > 0$, ramurile parabolei sunt orientate în sus. Folosim semnele funcției pentru a determina soluția inecuației.

$$S = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$$

Dacă inecuația ar fi arătat: $6x^2 - 7x + 2 \geq 0$, s-ar fi rezolvat la fel, doar că soluția ar fi fost

$$S = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$$

Pentru inecuația $6x^2 - 7x + 2 < 0$, avem soluția $S = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$, iar pentru inecuația $6x^2 - 7x + 2 \leq 0$, avem soluția $S = \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$.

2) Rezolvați inecuația $x^2 + 3x - 40 < 0$ în $\mathbb{R}$ cu ajutorul tabelului semnelor.

Rezolvare:

Trebuie să descompunem în factori expresia. Folosim metoda grupării:

$$x^2 + 3x - 40 < 0 \Leftrightarrow x^2 + 8x - 5x - 40 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x+8) - 5(x+8) < 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+8) < 0$$

Fie funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x - 5$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x + 8$.

Alcătuim tabelul de variație al semnelor funcțiilor.

x	$-\infty$			-8			5				$+\infty$
$f(x)$		−	−	−	−	−	0	+	+	+	
$g(x)$		−	−	0	+	+	+	+	+	+	
$f(x) \cdot g(x)$		+	+	0	−	−	0	+	+	+	

Din tabel rezultă că:

$x^2 + 3x - 40 < 0$, pentru $x \in (-8, -5)$

$x^2 + 3x - 40 > 0$, pentru $x \in (-\infty, -8) \cup (5, +\infty)$

Exerciții cu funcții și inecuații

Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 3$ și $g(x) = 4x - 1$

Cerința problemei	**Limbaj matematic**
Determinați valorile reale ale lui x, pentru care valoarea funcției f este mai mare decât 5.	$f(x) > 5 \Leftrightarrow$ $-2x + 3 > 5$
Determinați valorile reale ale lui x, pentru care valoarea funcției f nu este mai mare decât 5.	$f(x) \leq 5 \Leftrightarrow$ $-2x + 3 \leq 5$
Determinați valorile reale ale lui x, pentru care valoarea funcției f este mai mică decât -4.	$f(x) < -4 \Leftrightarrow$ $-2x + 3 < -4$
Determinați valorile reale ale lui x, pentru care valoarea funcției f nu este mai mare decât valoarea funcției g.	$f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow$ $-2x + 3 \leq 4x - 1$
Determinați valorile reale ale lui x, pentru care valoarea funcției f este cel mult egală cu 1.	$f(x) \leq 1 \Leftrightarrow$ $-2x + 3 \leq 1$
Determinați valorile reale ale lui x, pentru care funcția f ia valori pozitive.	$f(x) > 0 \Leftrightarrow$ $-2x + 3 > 0$
Determinați valorile reale ale lui x, pentru care funcția f ia valori negative.	$f(x) < 0 \Leftrightarrow$ $-2x + 3 < 0$
Determinați valorile reale ale lui x, pentru care funcția f ia valori nepozitive.	$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow$ $-2x + 3 \leq 0$
Determinați valorile reale ale lui x, pentru care funcția f ia valori nenegative.	$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow$ $-2x + 3 \geq 0$
Determinați valorile reale ale lui x, pentru care valoarea funcției f este mai mică decât triplul valorii respective a funcției g.	$f(x) < 3g(x) \Leftrightarrow$ $-2x + 3 < 3(4x - 1)$
Determinați valorile reale ale lui x, care sunt cel puțin egale cu valorile respective ale funcției f.	$x \geq f(x) \Leftrightarrow$ $x \geq -2x + 3$
Determinați valorile reale ale lui x, care nu sunt mai mari decât dublul valorii respective a funcției g.	$x \leq 2f(x) \Leftrightarrow$ $x \leq 2(-2x + 3)$

Determinați valorile pozitive ale lui x, pentru care valorile corespunzătoare ale funcției f sunt nenegative.	$\begin{cases} x>0 \\ f(x)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ -2x+3\geq 0 \end{cases}$
Determinați valorile negative ale lui x, pentru care valoarea respectivă a funcției f nu este mai mică decât cel mai mare număr întreg negativ.	$\begin{cases} x<0 \\ f(x)\geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \\ -2x+3\geq -1 \end{cases}$
Determinați valorile reale ale lui x, care sunt mai mari decât -3, pentru care valoarea funcției g nu este mai mare decât -3.	$\begin{cases} x>-3 \\ g(x)\leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3 \\ 4x-1\leq -3 \end{cases}$

Exerciții cu domeniul de definiție

Fie funcția $f: D \to \mathbb{R}$	**Sistemul**	**Domeniul de f**
$f(x)=\sqrt{5x-1}+\sqrt{2-4x}$	$\begin{cases} 5x-1\geq 0 \\ 2-4x\geq 0 \end{cases}$	$D_f=\left[\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right]$
$f(x)=\sqrt{5x-1}+\frac{2x}{\sqrt{2-4x}}$	$\begin{cases} 5x-1\geq 0 \\ 2-4x>0 \end{cases}$	$D_f=\left[\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right)$
$f(x)=\frac{3}{\sqrt{5x-1}}+\frac{2x}{\sqrt{2-4x}}$	$\begin{cases} 5x-1>0 \\ 2-4x>0 \end{cases}$	$D_f=\left(\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right)$
$f(x)=\sqrt{5x-1}+\frac{3x}{2-4x}$	$\begin{cases} 5x-1\geq 0 \\ 2-4x\neq 0 \end{cases}$	$D_f=\left[\frac{1}{5},+\infty\right)\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$
$f(x)=\frac{5x-1}{\sqrt{2-4x}}$	$2-4x>0$	$D_f=\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$
$f(x)=\frac{\sqrt{5x-1}}{2-4x}$	$\begin{cases} 5x-1\geq 0 \\ 2-4x\neq 0 \end{cases}$	$D_f=\left[\frac{1}{5},+\infty\right)\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$
$f(x)=\frac{1}{5x-1}+\sqrt{2-4x}$	$\begin{cases} 5x-1\neq 0 \\ 2-4x\geq 0 \end{cases}$	$D_f=\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]\setminus\left\{\frac{1}{5}\right\}$
$f(x)=\frac{3x}{\sqrt{5x-1}-3}$	$\begin{cases} 5x-1>0 \\ \sqrt{5x-1}-3\neq 0 \end{cases}$	$D_f=\left(\frac{1}{5},+\infty\right)\setminus\{2\}$

Exerciții pentru rezolvare individuală

1. Determinați domeniul de definiție al funcției $f: D \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{-4x+3} + x^2$.

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -3x+8$. Determinați valorile reale ale lui x, pentru care $2 - f(x) \geq f(x) - 5$.

3. Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -4x+1, g(x) = 3x-10$. Determinați valorile reale ale lui x, pentru care $f(x) > g(x)$.

4. Fie funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 3x-4$. Determinați valorile reale ale lui x, pentru care valorile funcției g nu sunt mai mari decât 11.

5. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x+5$. Determinați valorile reale ale lui x, pentru care valorile funcției f sunt mai mari decât $f(0) + 3$.

6. Să se determine domeniul de definiție al funcției
$f: D \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{7-2x} - \sqrt{2x-1}$.

7. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x-2$. Determinați valorile reale ale lui x, pentru care $5f(x) \geq 2x + f(-1)$.

8. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x+4$. Determinați cea mai mare valoare întreagă, pentru care expresia $3 - f(x)$ ia valori pozitive.

9. Fie funcția $f: D \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{-7x+28}$. Determinați valorile naturale ale lui x, care aparțin domeniului de definiție.

10. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -5x-6$. Determinați cea mai mică valoare întreagă, pentru care valoarea funcției f nu este mai mare decât -2.

11. Determinați domeniul de definiție al funcției $f: D \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{5-2x}} - 1$.

12. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2+5x$. Determinați valorile reale ale lui x, care sunt mai mari decât triplul valorii corespunzătoare a funcției f.

13. Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + 1, g(x) = x - 5$. Determinați valorile reale ale lui x, pentru care valoarea funcției f este mai mică decât dublul valorii respective a funcției g.

14. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{2} + 1$. Determinați valorile reale ale lui x, pentru care $2f(x) \geq 3f(2) - x$.

15. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -2x + 7$. Determinați valorile nenegative ale lui x, pentru care $f(x) > 1$.

16. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 10 - 3x$. Determinați valorile reale ale lui x, pentru care $f(x) - f(2) \geq 5x$.

17. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x - 5}{3}$. Determinați valorile reale ale lui x, pentru care valorile funcției nu sunt mai mari decât 3.

18. Fie funcția $f: D \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{5 - 3x} - \frac{x^2 - 5}{5 + x}$. Determinați domeniul de definiție al funcției.

19. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x - 2, g(x) = 1 - x$. Determinați cea mai mare valoare întreagă pentru x, astfel încât $\frac{f(x)}{2} \leq g(x)$.

20. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2 - 9x$. Determinați valorile reale ale lui x, care nu sunt mai mari decât triplul valorii respective a funcției f.

21. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 4x + 1$. Determinați valorile negative ale lui x, care sunt mai mici decât jumătate din valoarea corespunzătoare a funcției f.

22. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -2x + 7$. Determinați valorile reale ale lui x, care nu sunt mai mici sau egale cu 2s și pentru care $x < 5 + f(x)$.

23. Fie funcțiile $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{2 - x}$, $g: D_2 \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{-3x + 8} + 2x$. Determinați mulțimea $D_1 \cap D_2$.

24. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3 - 4x$. Să se determine valorile reale ale lui x, pentru care $f(x + 1) + f(x - 1) \geq f(x)$.

25. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -2x + 11$. Determinați valorile pozitive ale lui x, pentru care valoarea respectivă a funcției f sunt mai mari decât -2.

26. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -5x + 20$. Determinați valorile reale nenegative ale lui x, pentru care valorile respective ale funcției f sunt pozitive.

27. Fie funcția $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}-10}{\sqrt{5-x}}$.
Determinați domeniul de definiție al funcției f.

28. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 2$. Să se determine valorile reale ale lui x, pentru care $3f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)\leq f(x-2)$.

29. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -2{,}5x + 0{,}8$. Determinați valorile reale ale lui x, pentru care valorile respective ale funcției f nu sunt mai mici decât 1,3.

30. Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -5x + 2, g(x) = 2x - 9$. Determinați valorile reale ale lui x, pentru care valoarea expresiei $f(x) - g(x)$ este nepozitivă.

31. Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x - 5$ și $g(x) = 10 - 2x$. Determinați valorile reale ale lui x care satisfac simultan ambele condiții: $f(x) \geq 1$ și $g(x) > 0$.

32. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -2x + 11$. Determinați valorile întregi pozitive ale lui x, pentru care valoarea funcției f este mai mare decât 4,5.

33. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1-4x}{3}$ și $g(x)=\frac{3+x}{6}$. Să se afle valorile reale ale lui x, pentru care $f(x) + g(x) \lesssim 2$.

34. Fie funcția $f: D \to \mathbb{R}, f(x)=\sqrt{\frac{1}{x+3}}+\frac{1}{x}$. Să se determine domeniul de definiție al funcției f.

35. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 1$. Determinați valorile nenegative ale lui x, care sunt mai mari decât jumătate din valorile corespunzătoare ale lui $f(x)$.

36. Determinați domeniul de definiție al funcției $f: D \to \mathbb{R}$,
$$f(x)=\sqrt{16-x^2}+\frac{1}{x+1}.$$

37. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x-4}{3}+1$. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ și x mai mic decât 5, pentru care funcția f obține valori pozitive.

38. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -2x^2 - x + 1$. Determinați valorile întregi ale lui x, pentru care valoarea funcției este cel puțin egală cu -2.

39. Fie funcția $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{8-2x}-\frac{5}{|3x|-12}$. Să se determine domeniul de definiție al funcției f.

40. Fie $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{5-3x}{\sqrt{(4-5x)\sqrt{1+4x+4x^2}}}$. Determinați domeniul de definiție al funcției.

Răspunsuri

1. $D=\left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$. **2.** $x\in\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$. **3.** $x\in\left(-\infty, \frac{11}{7}\right)$. **4.** $x\in(-\infty, 5]$. **5.** $x\in\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

6. $D=\left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right]$. **7.** $x\in\left[\frac{5}{13}, +\infty\right)$. **8.** -1. **9.** 0, 1, 2, 3 și 4. **10.** 0. **11.** $D=\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$.

12. $x\in\left(-\infty, -\frac{3}{7}\right)$. **13.** $x \in (-\infty, -11)$. **14.** $x \in [2, +\infty)$. **15.** $x \in [0, 3)$.

16. $x\in\left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$. **17.** $x \in (-\infty, 7]$. **18.** $D=\left(-\infty, \frac{5}{3}\right]\setminus\{-5\}$. **19.** 0. **20.** $x\in\left(-\infty, \frac{3}{14}\right]$.

21. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. **22.** $x \in (2, 4)$. **23.** $x\in\left(-\infty, \frac{8}{3}\right]\setminus\{2\}$. **24.** $x\in\left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$. **25.** $x\in\left(0, \frac{13}{2}\right)$.

26. $x \in [0, 4)$. **27.** $D = [-2, 5)$. **28.** $x \in (-\infty, -1]$. **29.** $x \in (-\infty, -0{,}2]$.

30. $x\in\left[\frac{11}{7}, +\infty\right)$. **31.** $x\in[2, 5)$. **32.** $x\in\{1, 2, 3\}$. **33.** $x \in [-1, +\infty)$.

34. $D_f = (-3, 0) \cup (0, +\infty)$. **35.** $x\in[0, 1)$. **36.** $D_f=[-4, -1)\cup(-1, 4]$. **37.** $x\in\left(\frac{1}{2}, 5\right)$.

38. $x \in \{-1, 0, 1\}$. **39.** $D_f = (-\infty, -4) \cup (-4, 4)$. **40.** $D=\left(-\infty, \frac{4}{5}\right)\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

GEOMETRIE

P

O
fiind
pătu

P
Dacă
sau
num

T
mari

C
U
A
S

D
zintă
D
D
două

E
C
drea

D

C
I
C

Punctul este cea mai simplă figură geometrică.

Orice figură geometrică este compusă din puncte. Punctul poate fi descris ca fiind urma lăsată pe hârtie de vârful unui creion foarte bine ascuțit sau ca înțepătura unui vârf de ac.

Punctul nu are dimensiuni (lungime, lățime, grosime), el are doar poziție. Dacă două puncte ocupă aceeași poziție, atunci ele se numesc **puncte identice** sau **puncte confundate**. Dacă două puncte ocupă poziții diferite, atunci ele se numesc **puncte distincte**.

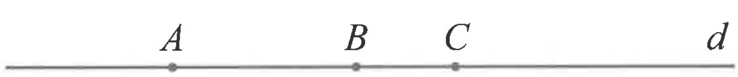
Tradițional, punctele pe desen se reprezintă cu • sau **x** și se notează cu litere mari de tipar.

Observație.
Uneori, punctele pot fi notate cu aceeași literă, dar cu indici diferiți:
A_1 („*A unu*”), A_2 („*A doi*”)...
Sau le putem nota cu: A' („*A prim*”) , A'' („*A secund*”)...

Dreapta este o figură geometrică fundamentală în plan și în spațiu. Ea reprezintă o mulțime de puncte aliniate până la infinit în ambele direcții ale sale.
Dreapta nu are grosime, are doar lungime. (1D)
Dreapta poate fi notată cu litere mici ale alfabetului latin sau cu ajutorul a două puncte situate pe ea.

Reprezentăm	Notăm	Citim
	d	dreapta *d*
 *A* *B*	*AB* sau *BA*	dreapta *AB* sau dreapta *BA*

Exemplu:
Observăm figura de mai jos și toate variantele posibile prin care putem nota dreapta:



Dreapta poate fi notată : *d*, *AB*, *AC*, *BC*, *BA*, *CA* sau *CB*.

Observație.
Fiind nemărginită, dreapta nu poate fi reprezentată integral într-un desen, dar putem arăta o porțiune a dreptei cu ajutorul riglei.

Fie dreptele a și b, spunem că sunt **identice** sau **confundate**, dacă au toate punctele comune.

Dacă a și b sunt identice, atunci scriem $a = b$.

În caz contrar, dacă dreptele a și b nu sunt identice, atunci dreptele sunt **distincte**.

Dacă a și b sunt distincte, atunci scriem $a \neq b$.

Semidreapta este o porțiune dintr-o dreaptă, limitată doar la un capăt, numit originea semidreptei.

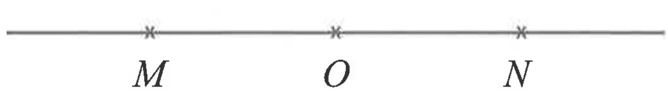
Chiar dacă este mărginită la un capăt, semidreapta nu poate fi măsurată din cauza nelimitării celuilalt capăt.

Semidreapta de mai sus se notează $[OM$ și nu o putem nota $[MO$, deoarece prima literă trebuie să fie, în mod obligatoriu, originea semidreptei, iar a doua literă indică direcția și sensul acesteia.

Definiție.
Se numesc **semidrepte opuse**, oricare două semidrepte pentru care sunt îndeplinite simultan condițiile:
i) sunt situate pe aceeași dreaptă;
ii) originea lor este comună;
iii) nu există un alt punct comun în afară de origine.

Definiție.
Se numesc **semidrepte identice (confundate)** oricare două semidrepte pentru care sunt îndeplinite simultan condițiile:
i) sunt situate pe aceeași dreaptă;
ii) originea lor este comună;
iii) orice punct al lor este comun.

Exemplu:



$[MO$ și $[MN$ sunt semidrepte identice.

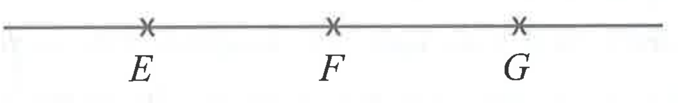
$[NO$ și $[NM$ sunt semidrepte identice.

$[OM$ și $[ON$ sunt semidrepte opuse.

Definiție.
Semidreptele [MO și [ON nu sunt nici identice, nici opuse, ele se numesc **semidrepte diferite**.

Definiție.
Se numește **segment** o porțiune a dreptei, limitată în ambele părți.
Punctele care mărginesc segmentul se numesc **extremități** sau **capete**.

Exemplu:



În imagine avem 3 segmente: $[EF]$, $[FG]$ și $[EG]$.
$[EF]$ și $[FE]$ reprezintă același segment.

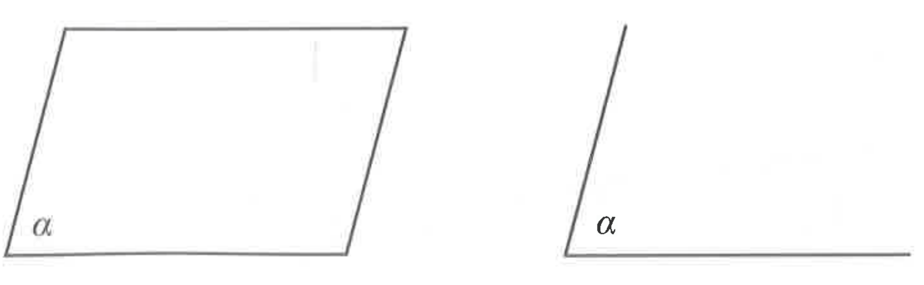
Planul este o altă noțiune fundamentală a geometriei. El poate fi comparat cu suprafața unui lac liniștit, cu suprafața tablei din clasă, cu suprafața unei mese sau a unei foi de hârtie, în fiecare caz, imaginându-ne că acestea sunt prelungite la infinit în toate părțile.

Observație.
Sistemul de axe ortogonale, studiat în partea de algebră, reprezintă un plan.

Planul nu are grosime, el are doar lungime și lățime. (2D)

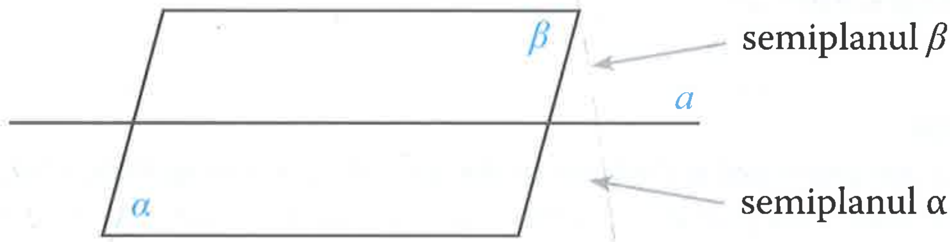
Notăm planul cu litere mici din alfabetul grecesc: α (*alfa*), β (*beta*), π (*pi*).

Exemple:



Planul α poate fi reprezentat în ambele moduri.

Dacă pe suprafața unui plan vom trasa o dreaptă, atunci aceasta va împărți planul în două **semiplane** diferite, iar dreapta respectivă se numește **frontieră**.



Toate obiectele din plan se numesc **figuri geometrice**.

Spațiul este tot ceea ce ne înconjoară.

În spațiu putem măsura trei dimensiuni: lungime, lățime și înălțime. (3D)

Se numesc **corpuri geometrice** toate obiectele din spațiu.

Dacă un punct A se află pe o dreaptă d, atunci spunem că **punctul A aparține dreptei d** și notăm $A \in d$ sau spunem că dreapta d trece prin punctul A.

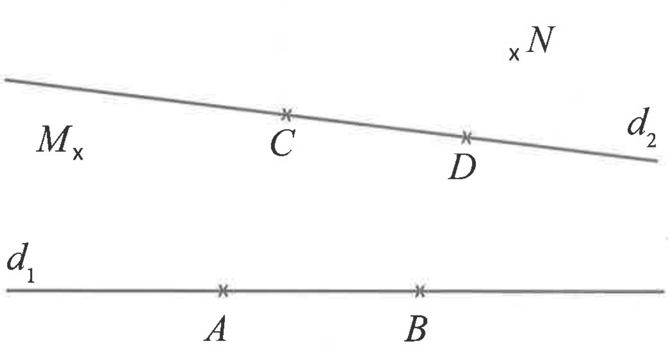
$A \in d$

Dacă un punct A nu se află pe dreapta d, atunci spunem că **punctul A nu aparține dreptei d** și notăm $A \notin d$ sau spunem că punctul A este exterior dreptei d.

$A \notin d$

Exemplu:

Să se analizeze desenul de mai jos și să se stabilească pozițiile punctelor față de drepte.

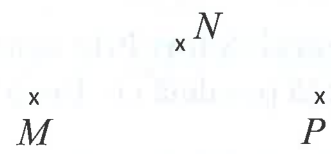


Punctele A și B aparțin dreptei d_1.
Punctele M, N, C și D nu aparțin dreptei d_1.
Punctele C și D aparțin dreptei d_2.
Punctele A, B, M, N nu aparțin dreptei d_2.

Definiție.
Se numesc **puncte coliniare** oricare trei sau mai multe puncte situate pe aceeași dreaptă.
Se numesc **puncte necoliniare** oricare trei puncte pe care nu le putem uni cu aceeași dreaptă.

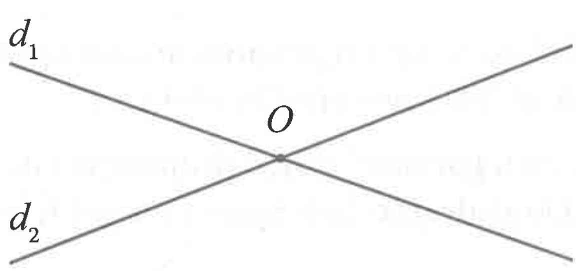
Exemple:

Puncte coliniare



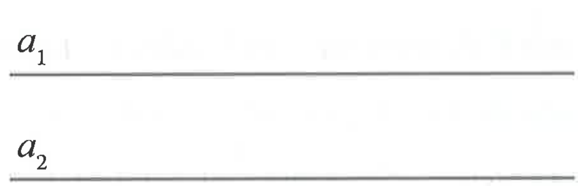
Puncte necoliniare

Definiție.
Se numesc **drepte concurente** oricare două drepte care se intersectează, adică au un punct comun.



Notăm:
$d_1 \cap d_2 = \{O\}$

Definiție.
Se numesc **drepte paralele** oricare două drepte situate în același plan, care nu au niciun punct comun.



Notăm:
$a_1 \cap a_2 = \varnothing$
sau
$a_1 \parallel a_2$

Definiție.
O **propoziție matematică** este o expresie sau o afirmație despre care putem spune cu certitudine dacă este adevărată sau falsă.

Definiție.
Se numește **axiomă** o propoziție matematică considerată adevărată, fără a fi necesară o demonstrație.

Exemple:

Axioma dreptei: Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una.

Axioma paralelelor: Prin orice punct exterior unei drepte se poate construi o unică dreaptă paralelă cu dreapta dată.

Oricărei propoziții îi corespunde o altă propoziție, pe care o numim **negația propoziției** date și care se obține prin adăugarea cuvântului **nu** înaintea verbului.

Observație.
O propoziție și negația ei au valori de adevăr diferite.

Exemple:

„Numărul 2025 este divizibil cu 3” este o propoziție adevărată, iar negația sa este o propoziție falsă: „Numărul 2025 nu este divizibil cu 3”.

„Două drepte concurente pot fi paralele” este o propoziție falsă, iar negația sa este o propoziție adevărată: „Două drepte concurente nu pot fi paralele”.

Definiție.
Se numește **teoremă** o propoziție matematică care este întotdeauna adevărată și care necesită o demonstrație bazată pe definiții, axiome sau alte teoreme deja demonstrate.

Structura unei teoreme poate fi exprimată astfel: „Dacă I, atunci C”.

Propoziția I se numește **ipoteză**, iar propoziția C se numește **concluzie**.

Ipoteza teoremei este o propoziție adevărată, iar concluzia teoremei este o propoziție al cărei adevăr trebuie demonstrat.

Definiție.
Dacă schimbăm cu locurile ipoteza și concluzia teoremei, vom obține o nouă propoziție, numită **reciproca teoremei** date.

Observație.
Reciproca unei teoreme poate fi uneori falsă.

Exemplu:

- „Dacă un număr natural se divide cu 6, atunci el se divide și cu 3."
Această teoremă este adevărată, iar reciproca sa nu este adevărată.
- „Dacă un număr natural se divide cu 3, atunci el se divide și cu 6."

Pentru a demonstra că o propoziție este falsă, este suficient să identificăm un **contraexemplu** (*exemplu care contrazice propoziția*).

În cazul nostru, reciproca teoremei este o propoziție falsă, deoarece avem numărul 15 care se divide cu 3, dar nu se divide cu 6.

În unele cazuri, este mai ușor să demonstrăm că propoziția C nu poate fi falsă, decât să demonstrăm că este adevărată.

Propoziția „Dacă I, atunci C" este o propoziție adevărată dacă și numai dacă este adevărată și propoziția „Dacă **negația lui C**, atunci **negația lui I**". (*)

• Etapele demonstrației prin metoda reducerii la absurd

1. Presupunem că C este o propoziție falsă, adică negația concluziei este adevărată.

2. Ținând cont de presupunerea făcută, se duce un raționament logic până în momentul în care se ajunge la o contradicție sau până când se arată că I este falsă, adică negația ipotezei este adevărată.

3. Conform afirmației (*), concluzia teoremei este adevărată.

Exemplu:

Să se demonstreze că propoziția de mai jos este adevărată:

„Dacă $a \neq b$, atunci $\frac{2a+3}{5} \neq \frac{2b+3}{5}$, oricare ar fi numerele reale a și b."

Rezolvare:

Presupunem prin reducere la absurd că există două numere reale distincte a și b pentru care $\frac{2a+3}{5} = \frac{2b+3}{5}$.

$$\frac{2a+3}{5}=\frac{2b+3}{5}/\cdot 5 \Leftrightarrow$$

$$2a+3=2b+3/-3 \Leftrightarrow$$

$$2a=2b/:2 \Leftrightarrow$$

$a = b \Rightarrow$ am obținut o contradicție, expresia dedusă ne arată că ipoteza este o propoziție falsă.

Prin urmare, propoziția de mai sus este una adevărată.

• Unități de măsură

O **unitate de măsură** este o valoare convențională utilizată cu scopul de a exprima cantitatea unei mărimi fizice. De regulă, unitatea de măsură reprezintă un standard acceptat la nivel internațional pentru exprimarea măsurătorilor acelei mărimi și pentru a le putea compara.

A măsura înseamnă a determina cantitatea unei mărimi fizice folosind o unitate de măsură standardizată. Procesul presupune compararea mărimilor necunoscute cu o unitate de măsură cunoscută și stabilirea valorii acestui raport cu unitatea respectivă.

Etapele procesului de măsurare.

1. Alegerea unității de măsură corespunzătoare (*de exemplu, metri pentru lungime sau kilograme pentru masă*).
2. Utilizarea unui instrument de măsură adecvat (*de exemplu, rigla pentru lungime, balanța pentru masă*).
3. Obținerea valorii măsurate și exprimarea acesteia într-o unitate de măsură standard.

Unitatea de măsură pentru lungime în Sistemul Internațional de unități de măsură (*SI*) este **metrul**.

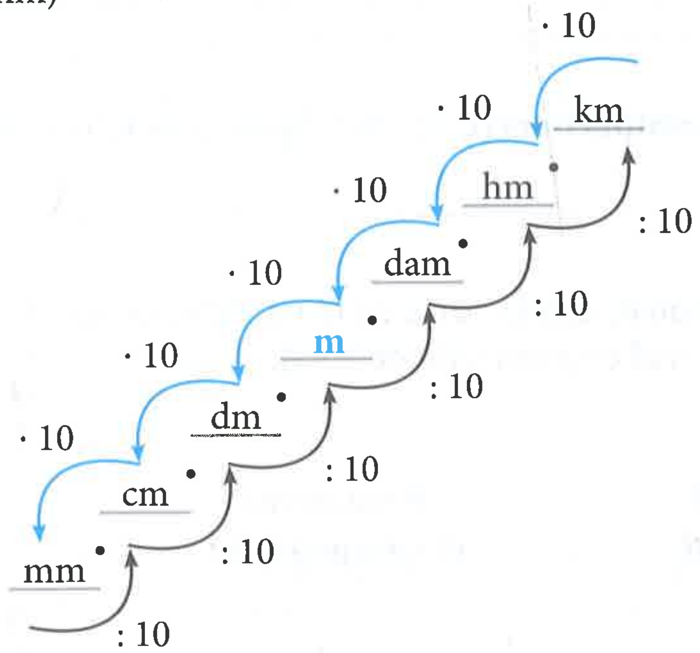
Instrumente cu care putem măsura lungimea: rigla gradată, ruleta, metrul de croitorie, metrul de tâmplărie, șublerul, micrometrul.

În viața cotidiană avem nevoie să măsurăm lungimi diferite, cum ar fi distanța de la Edineț până la Chișinău, distanța de la Pământ la Soare, dimensiunile unui apartament, lungimea unei table. Din cauză că dimensiunile sunt foarte diferite, a apărut necesitatea introducerii multiplilor și submultiplilor metrului.

Multiplii metrului sunt:

- decametrul (dam)
- hectometrul (hm)
- kilometrul (km)

Submultiplii metrului sunt:
- decimetrul (dm)
- centimetrul (cm)
- milimetrul (mm)



Prefixul pentru multiplu ne indică de câte ori este mai mare unitatea de măsură față de unitatea de bază:
- ⇨ kilo (k) înseamnă de 1000 de ori mai mare;
- ⇨ hecto (h) înseamnă de 100 de ori mai mare;
- ⇨ deca (da) înseamnă de 10 ori mai mare.

Prefixul pentru submultiplu ne arată de câte ori este mai mică unitatea de măsură față de unitatea de bază:
- ⇨ deci (d) înseamnă de 10 ori mai mic;
- ⇨ centi (c) înseamnă de 100 de ori mai mic;
- ⇨ mili (m) înseamnă de 1000 de ori mai mic.

Următoarele relații ne vor ajuta să facem diverse transformări:

$1 \text{ m} = 10 \text{ dm} = 100 \text{ cm} = 1000 \text{ mm}$

$1 \text{ m} = 0{,}1 \text{ dam} = 0{,}01 \text{ hm} = 0{,}001 \text{ km}$

$1 \text{ km} = 10 \text{ hm} = 100 \text{ dam} = 1000 \text{ m} = 10000 \text{ dm} = 100\,000 \text{ cm}$

$1 \text{ km} = 1\,000\,000 \text{ mm} = 10^6 \text{ mm}$

$1 \text{ mm} = 0{,}1 \text{ cm} = 0{,}01 \text{ dm} = 0{,}001 \text{ m} = 0{,}0001 \text{ dam} = 0{,}00001 \text{ hm}$

$1 \text{ mm} = 0{,}000001 \text{ km} = \dfrac{1}{10^6} \text{ km} = 10^{-6} \text{ km}$

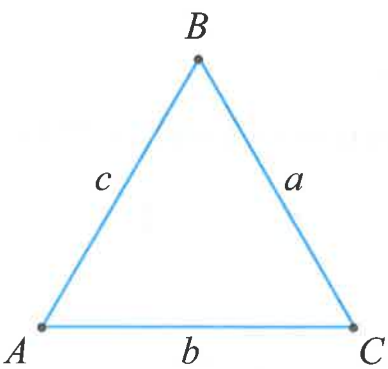
Definiție.
Se numește **perimetru** suma lungimilor laturilor unei figuri geometrice, exprimată în aceeași unitate de măsură.

Definiție.
Se numește **semiperimetru** al unei figuri geometrice jumătate din perimetrul său.

Observație.
În mod tradițional, notăm perimetrul cu P (*literă mare*) și semiperimetrul cu p sau s (*litere mici*).

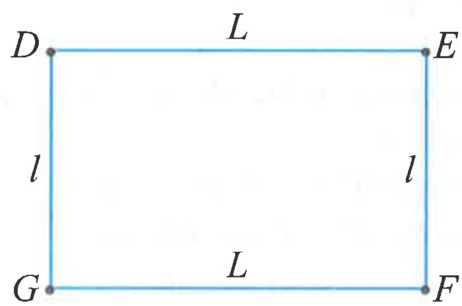
Exemple:

Perimetrul triunghiului



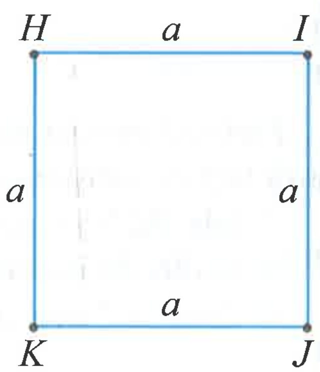
$P = AB + BC + AC$
$P = a + b + c$

Perimetrul dreptunghiului



$P = L + l + L + l$
$P = 2L + 2l$
$P = 2\,(L + l)$
$P = DE + EF + FG + GD$

Perimetrul pătratului

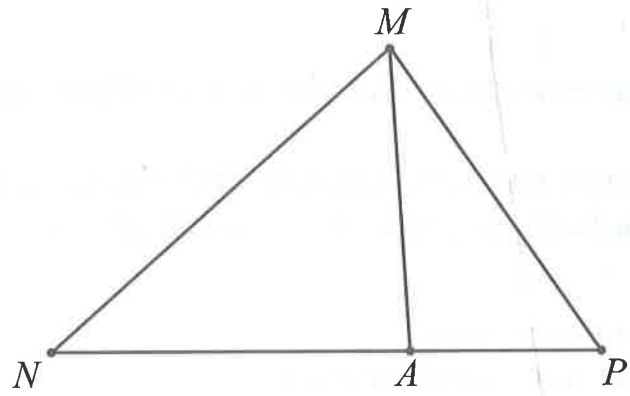


$P = HI + IJ + JK + KH$
$P = 4a$

Observație.
Perimetrul triunghiului ABC poate fi notat P_{ABC}
Notația este importantă, deoarece vor fi desene în care vom avea mai multe figuri geometrice al căror perimetru va trebui aflat.

Exercițiu rezolvat:

În desenul alăturat este reprezentat triunghiul MNP, al cărui perimetru este 16 dm. Punctul A este situat pe latura NP, astfel încât perimetrul triunghiului MNA este 100 cm, iar perimetrul triunghiului MAP este 92 cm. Să se determine lungimea segmentului MA.



Rezolvare:

Scriem perimetrele pentru fiecare dintre cele trei triunghiuri:
$P_{MNP} = MN + NP + PM$
$P_{MNA} = MN + NA + AM$
$P_{MAP} = MA + AP + PM$

Observăm că perimetrul triunghiului mare este exprimat în decimetri, de aceea va trebui să aducem toate mărimile la aceeași unitate de măsură.
16 dm = 160 cm

Înlocuim valorile din enunț și obținem:
$MN + NP + PM = 160$ cm
$MN + NA + AM = 100$ cm
$MA + AP + PM = 92$ cm

Adunăm ultimele două relații:
$MN + NA + AM + MA + AP + PM = 100 + 92 = 192$ cm
Observăm că $NA + AP = NP$ și înlocuind în relația de mai sus, obținem:
$MN + NP + PM + 2MA = 192$.

Observăm că primii trei termeni reprezintă perimetrul triunghiului mare.

$P_{MNP} + 2MA = 192 \Leftrightarrow 160 + 2MA = 192 \Leftrightarrow$
$2MA = 192 - 160 = 32 \Leftrightarrow MA = 32 : 2 = 16\,\text{cm}$

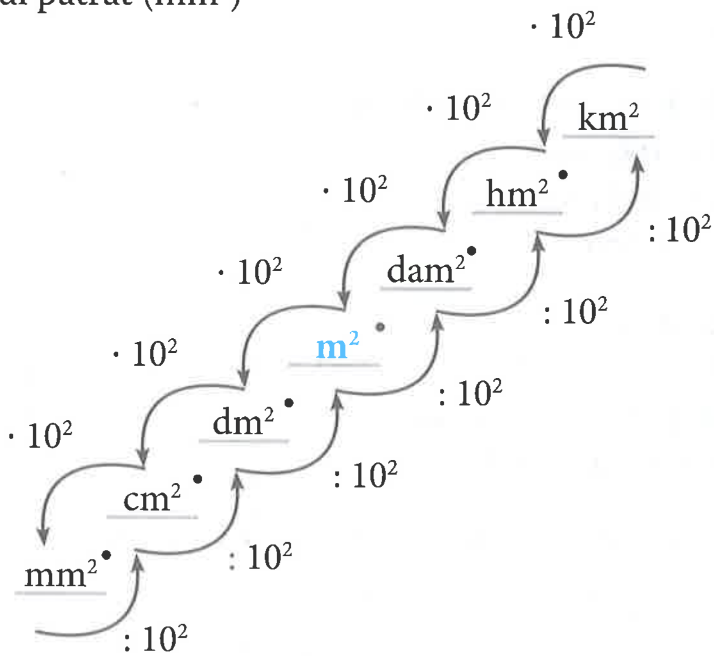
Definiție.
Aria este o mărime care exprimă cât de mare este o suprafață a unui plan închis sau delimitat. Altfel spus, aria măsoară spațiul interior al unei figuri geometrice.
În Sistemul Internațional de unități de măsură, unitatea principală pentru arie este **metrul pătrat (m^2)**.
Metrul pătrat este suprafața pe care o ocupă un pătrat cu latura de un metru.

Definiție.
Se numesc **figuri geometrice echivalente** două figuri geometrice care au aceeași arie.
Dacă avem de măsurat aria unei suprafețe de dimensiuni mai mari, precum ar fi o țară, atunci folosim multiplii metrului pătrat.

Multiplii metrului pătrat sunt:
➪ decametrul pătrat sau arul (dam^2 / ar)
➪ hectometrul pătrat sau hectarul (hm^2 / ha)
➪ kilometrul pătrat (km^2)

Dacă avem de măsurat aria unei suprafețe de dimensiuni mai mici, precum ar fi suprafața unui televizor sau a unei mese, atunci folosim submultiplii metrului pătrat.

Submultiplii metrului pătrat sunt:
➪ decimetrul pătrat (dm^2)
➪ centimetrul pătrat (cm^2)
➪ milimetrul pătrat (mm^2)



Următoarele relații ne vor ajuta să facem diverse transformări:

$1\ m^2 = 100\ dm^2 = 10\ 000\ cm^2 = 1\ 000\ 000\ mm^2$

$1\ m^2 = 0{,}01\ dam^2 = 0{,}0001\ hm^2 = 0{,}000001\ km^2$

$1\ km^2 = 100\ hm^2 = 10000\ dam^2 = 1\ 000\ 000\ m^2$

$1\ hm^2 = 100\ dam^2 = 10000\ m^2 = 1\ ha$

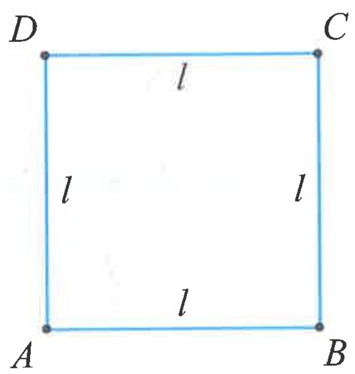
$1\ dam^2 = 100\ m^2 = 1\ ar$

$1\ dm^2 = 0{,}01\ m^2 = 100\ cm^2$

$1\ mm^2 = 0{,}01\ cm^2 = 0{,}0001\ dm^2 = 0{,}000001\ m^2$

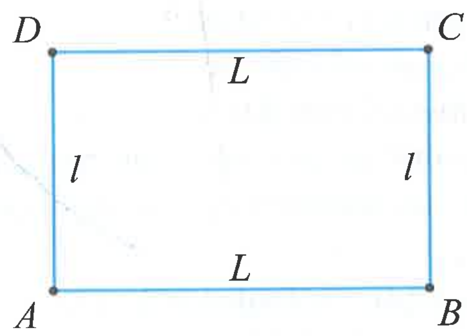
Observație.
La adunare sau la scădere trebuie să ne asigurăm că ariile sunt exprimate în aceeași unitate de măsură.

Aria pătratului



$A = l^2$
$A = AB^2$

Aria dreptunghiului



$A = L \cdot l$
$A = AB \cdot BC$

Exercițiu rezolvat:

Lungimea unui dreptunghi este de 36 cm, iar lățimea lui este de 20 cm. Să se determine a cui arie este mai mare: a acestui dreptunghi sau a unui pătrat care are același perimetru.

Rezolvare:

Determinăm perimetrul dreptunghiului:
$P = 2(L + l) = 2(36 + 20) = 2 \cdot 56 = 112$ cm
Dacă pătratul are același perimetru, atunci aflăm lungimea laturii pătratului:
$P = 4\,l = 112$ cm $\Rightarrow l = 112 : 4 = 28$ cm
Aflăm aria dreptunghiului:
$A = L \cdot l = 36 \cdot 20 = 720$ cm^2
Aflăm aria pătratului:
$A = l^2 = 28^2 = 784$ cm^2

Răspuns: Aria pătratului este mai mare.

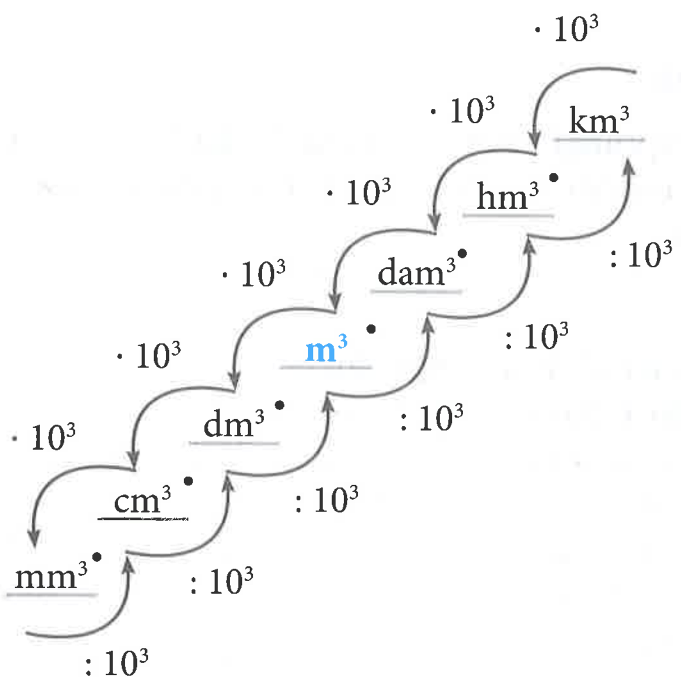
Definiție.
Volumul reprezintă mărimea spațiului ocupat de un corp. Oricărui corp îi putem asocia un număr care să arate de câte ori un corp ales de noi, numit unitate de volum, se cuprinde în corpul dat.
În Sistemul Internațional de unități de măsură, unitatea principală pentru volum este **metrul cub (m³)**.

Definiție.
Metrul cub este spațiul ocupat de un cub cu muchia de un metru.
Dacă avem de măsurat volumul unor corpuri de dimensiuni foarte mari, atunci folosim multiplii metrului cub.

Multiplii metrului cub sunt:
- decametrul cub (dam^3)
- hectometrul cub (hm^3)
- kilometrul cub (km^3)

Dacă avem de măsurat volumul unor corpuri de dimensiuni foarte mici, atunci folosim submultiplii metrului cub.

Submultiplii metrului cub sunt:
- decimetrul cub (dm^3)
- centimetrul cub (cm^3)
- milimetrul cub (mm^3)



Următoarele relații ne vor ajuta să facem diverse transformări:

$1\ m^3 = 10^3\ dm^3 = 10^6\ cm^3 = 10^9\ mm^3$

$1\ m^3 = 10^{-3}\ dam^3 = 10^{-6}\ hm^3 = 10^{-9}\ km^3$

$1\ km^3 = 1000\ hm^3 = 1\ 000\ 000\ dam^3 = 1\ 000\ 000\ 000\ m^3$

$1\ dm^3 = 10^{-3}\ m^3 = 10^3\ cm^3$

$1\ cm^3 = 10^{-3}\ dm^3 = 10^{-6}\ m^3 = 0{,}000001\ m^3$

$1\ mm^3 = 10^{-3}\ cm^3 = 10^{-6}\ dm^3 = 10^{-9}\ m^3$

Definiție.
Cubul este un corp geometric mărginit de 6 fețe în formă de pătrat. Având cele trei dimensiuni egale între ele, vom nota lungimea lor cu l.

$$\boldsymbol{l = \text{lungime} = \text{lățime} = \text{înălțime}}$$

Volumul cubului se calculează cu formula:

$$V = l^3$$

Definiție.
Paralelipipedul dreptunghic este un corp geometric mărginit de 6 fețe în formă de dreptunghi. Fețele opuse sunt identice, două câte două. Dimensiunile le notăm cu d_1, d_2 și d_3 sau cu L (*lungimea*), l (*lățimea*) și h (*înălțimea*).

Observație.
Dimensiunile paralelipipedului trebuie să fie exprimate în aceeași unitate de măsură înainte de a calcula volumul.

Exercițiu rezolvat:

O cutie a cărei formă este un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile $L = 3$ dm, $l = 2$ dm și $h = 4$ dm. Aceasta se umple cu alte cutii mai mici în formă de cub cu muchia de 4 cm. Să se determine numărul cutiilor mai mici care încap în cutia cea mare.

Rezolvare:

Vom afla volumul paralelipipedului dreptunghic:
$V_p = L \cdot l \cdot h = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 24 \text{ dm}^3$

Aflăm volumul cubului:
$V_c = l^3 = 4^3 = 64 \text{ cm}^3$

Trebuie să le aducem la aceeași unitate de măsură:
$1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3 \Rightarrow 24 \text{ dm}^3 = 24\,000 \text{ cm}^3$

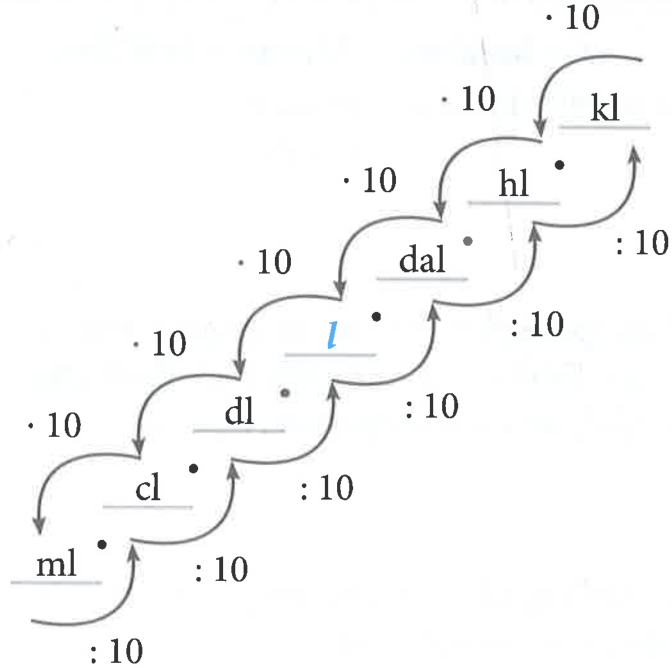
Aflăm numărul de cutii mai mici:
$V_p : V_c = 24\,000 : 64 = 375$

Răspuns: În cutia mai mare pot încăpea 375 cutii mai mici.

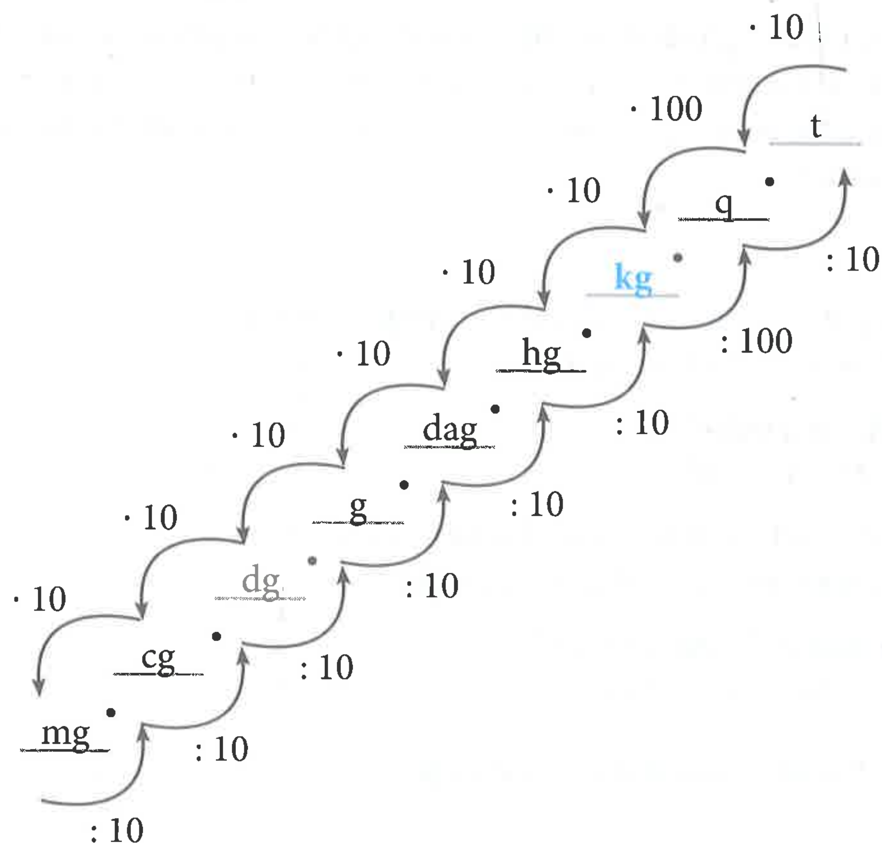
Observație.
Într-un cub cu latura de 1 dm încape 1 litru de apă:
$\mathbf{1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ l}}$

• Unități de măsură pentru capacitate

Unitatea principală de măsură a capacității vaselor este **litrul**.



• Unități de măsură pentru masă



Unitatea de măsură standard pentru masă este **kilogramul**, singura unitate fundamentală formată cu ajutorul unui prefix.

Multiplii kilogramului sunt:

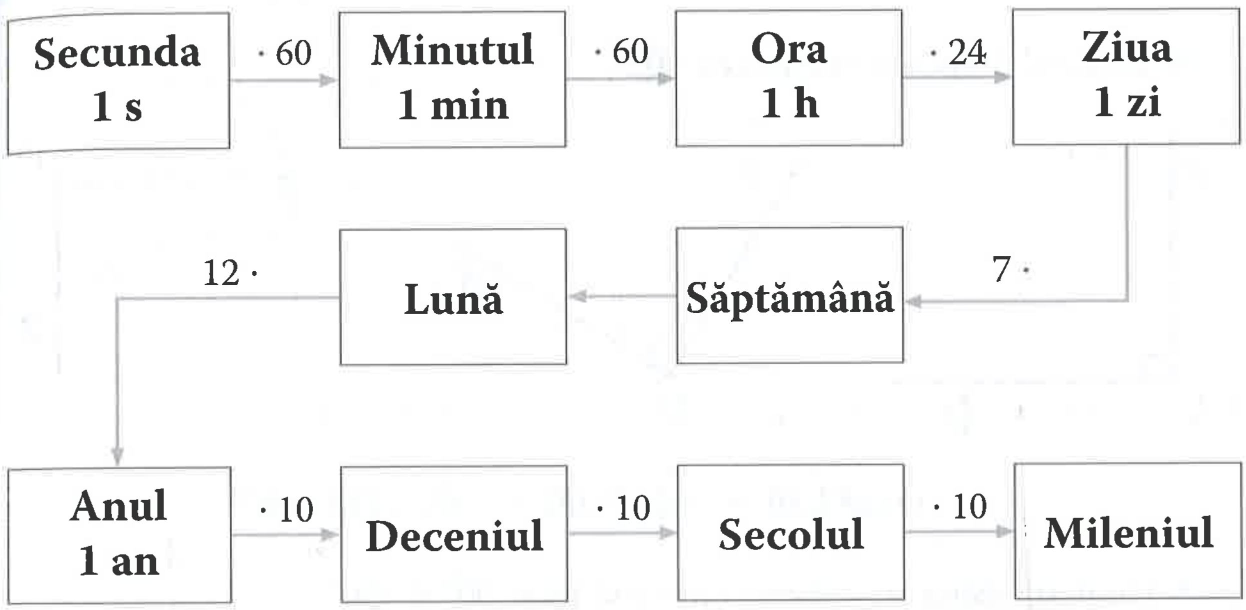
➪ chintalul (q) $1\ q = 100\ kg$

➪ tona (t) $1\ t = 1000\ kg$

Celelalte unități din desenul de mai sus sunt submultiplii kilogramului.

Unități de măsură pentru timp

Unitatea de măsură standard pentru timp este **secunda** (s).



Definiție.
Unghiul este o figură geometrică formată din două semidrepte (laturile unghiului) cu originea comună (vârful unghiului).

Dacă semidreptele $[AB$ și $[AC$ formează un unghi, atunci el se notează cu $\angle BAC$ sau $\angle CAB$.

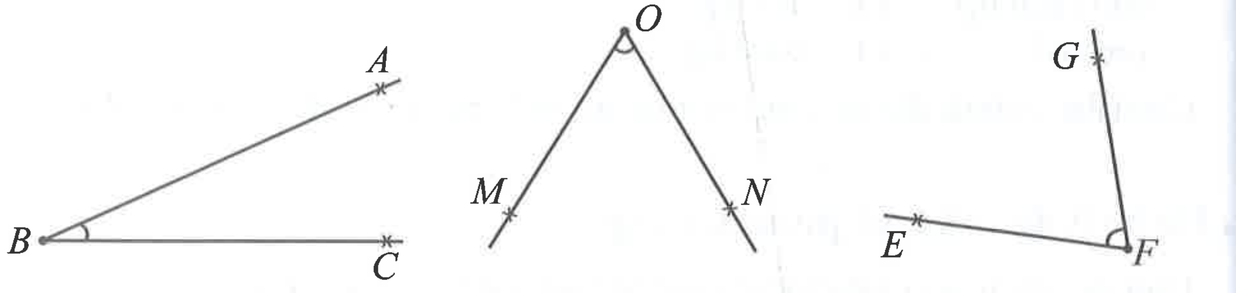
Mulțimea punctelor care sunt situate între laturile unui unghi formează **interiorul unghiului**, iar restul punctelor formează **exteriorul unghiului**.

Clasificarea unghiurilor

■ Unghiul nul are măsura de 0°.

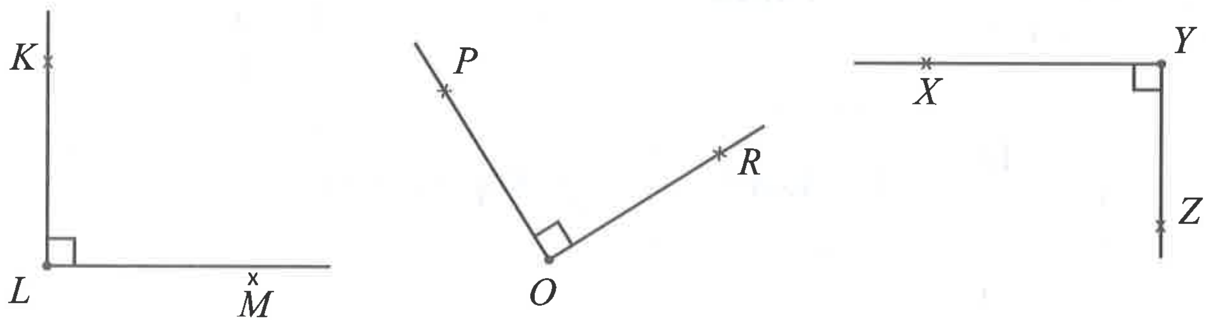
$m(\angle BAC) = 0°$

■ Unghiul ascuțit are măsura cuprinsă între 0° și 90°.



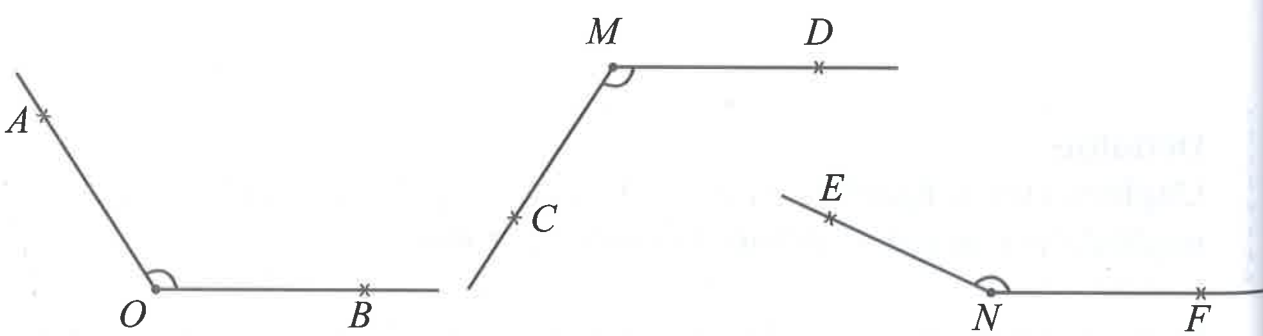
$0° < m(\angle ABC) < 90°$ $\quad$ $0° < m(\angle MON) < 90°$ $\quad$ $0° < m(\angle EFG) < 90°$

■ Unghiul drept are măsura de 90°.



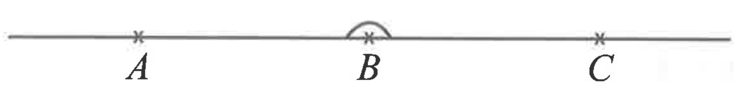
$m(\angle KLM) = m(\angle POR) = m(\angle XYZ) = 90°$

■ Unghiul obtuz are măsura cuprinsă între 90° și 180°.



$90° < m(\angle AOB) < 180°$ $\quad$ $90° < m(\angle CMD) < 180°$ $\quad$ $90° < m(\angle ENF) < 180°$

■ Unghiul alungit are măsura de 180°.



$m(\angle ABC) = 180°$

Observație.
Dacă două unghiuri au măsuri egale, atunci putem spune că sunt **unghiuri congruente**.

Un grad poate fi împărțit în 60 minute (*se notează cu* $'$), iar un minut poate fi împărțit în 60 secunde (*se indică* $''$).

Aceste unități de măsură au fost introduse cu scopul de a măsura mai exact unghiurile.

Exemple:

$1° = 60'$ $\quad$ $1' = 60''$

$2{,}5° = 2° + 0{,}5° = 2° + (60 \cdot 0{,}5)' = 2°30'$

$23{,}25° = 23° + 0{,}25° = 23° + (60 \cdot 0{,}25)' = 23°15'$

$31{,}16° = 31° + 0{,}16° = 31° + (60 \cdot 0{,}16)' = 31° + 9{,}6' = 31° + 9' + 0{,}6' =$

$= 31° + 9' + (60 \cdot 0{,}6)'' = 31° + 9' + 36'' = 31°9'36''$

Exerciții:

a) $32°28' + 15°25' = 47°53'$

Adunăm gradele între ele și minutele între ele.

b) $63°56' + 21°48' = 84°104' = 85°44'$

De regulă, nu se lasă la răspuns minute sau secunde mai multe de 60, astfel se aplică transformări într-o unitate de măsură mai mare.

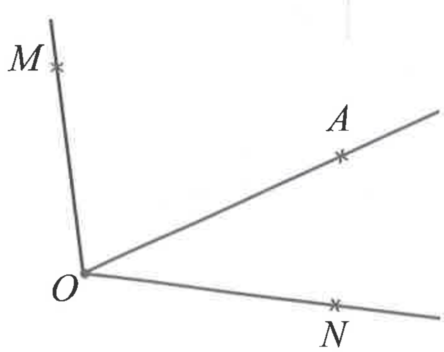
c) $24°15' - 14°50' = ?$

Nu putem scădea din $15'$ un număr mai mare de minute cum ar fi 50. Pentru asta va trebui să împrumutăm $1°$ de la $24°$ și să-l transformăm în $60'$.

$24°15' - 14°50' = 23°75' - 14°50' = 9°25'$

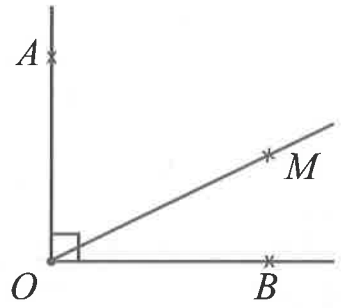
d) $68° - 39°42'5'' = 67°60' - 39°42'5'' = 67°59'60'' - 39°42'5'' = 28°17'55''$

Definiție.
Unghiurile adiacente sunt două unghiuri coplanare care au același vârf și o latură comună, pe care o găsim între celelalte două laturi ale unghiurilor.



$\angle MOA$ și $\angle AON$ sunt adiacente

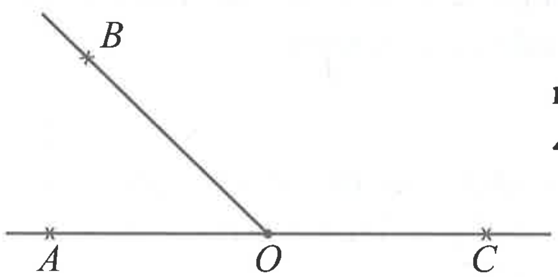
Definiție.
Unghiuri complementare sunt două unghiuri a căror sumă a măsurilor este 90°.



$m(\angle AOM) + m(\angle MOB) = 90°$
$\angle AOM$ și $\angle MOB$ sunt complementare

$\angle AOM$ este complementul unghiului MOB și reciproc.

Definiție.
Unghiuri suplementare sunt două unghiuri a căror sumă a măsurilor este 180°.

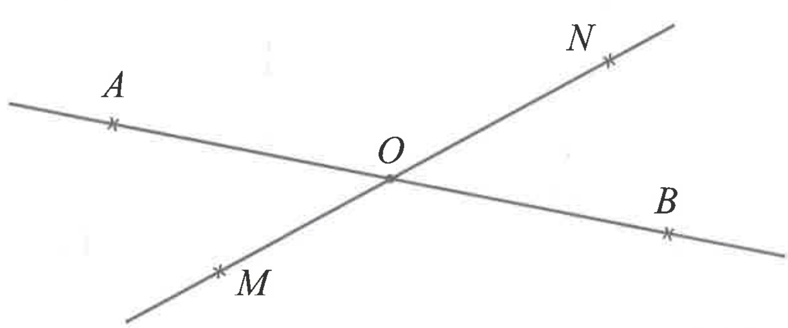


$m(\angle AOB) + m(\angle BOC) = 180°$
$\angle AOB$ și $\angle BOC$ sunt suplementare

$\angle AOB$ este suplementul unghiului BOC și reciproc.

La intersecția a două drepte se formează **unghiuri opuse la vârf,** astfel ele au vârful comun și laturile lor sunt semidrepte opuse.

Observație.
Unghiurile opuse la vârf sunt congruente.



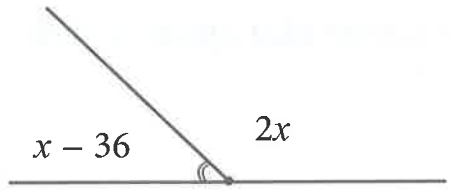
$\angle AOM$ și $\angle NOB$ sunt opuse la vârf.
$\angle AON$ și $\angle MOB$ sunt opuse la vârf.

Definiție.
Bisectoarea unghiului este semidreapta care începe din vârful unghiului și îl împarte în două unghiuri congruente.

Exerciții:

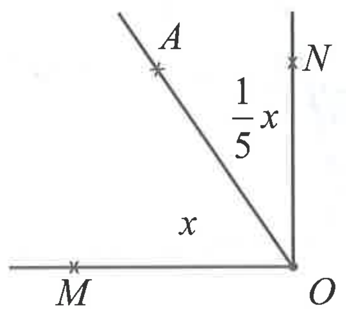
- Studiați desenul, apoi aflați necunoscuta.

a)



Observăm că unghiurile din imagine sunt suplementare, formăm ecuația:
$(x - 36°) + 2x = 180°$
$3x - 36° = 180°$
$3x = 180° + 36°$
$3x = 216°$
$x = 216° : 3$
$x = 72°$

b)



Observăm că unghiurile din imagine sunt complementare:
$m(\angle MOA) + m(\angle AON) = 90°$

$$x + \frac{1}{5}x = 90°$$

$$\left(1 + \frac{1}{5}\right)x = 90$$

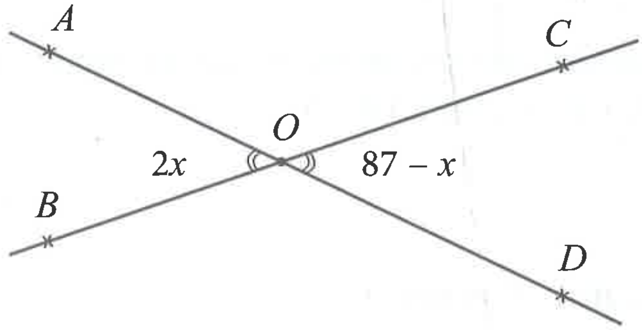
$$\frac{6}{5}x = 90$$

$$x = 90 : \frac{6}{5}$$

$$x = \frac{90}{1} \cdot \frac{5}{6}$$

$x = 15 \cdot 5 = 75$

c)



Observăm că unghiurile din imagine sunt opuse la vârf:

$m(\angle AOB) = m(\angle COD)$

$2x = 87 - x$

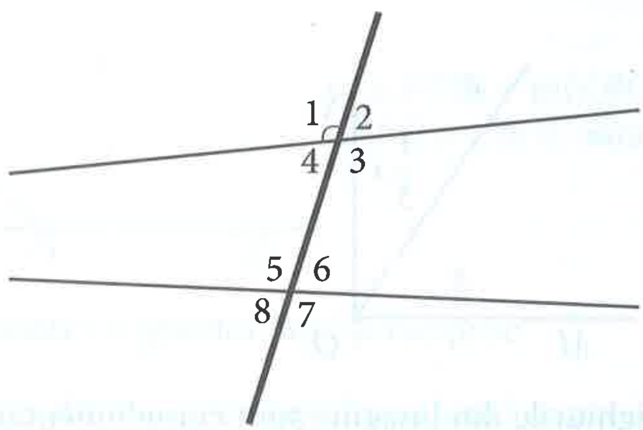
$2x + x = 87$

$3x = 87$

$x = 87 : 3$

$x = 29$

Definiție.
Dreapta care intersectează două drepte coplanare se numește **secantă**.



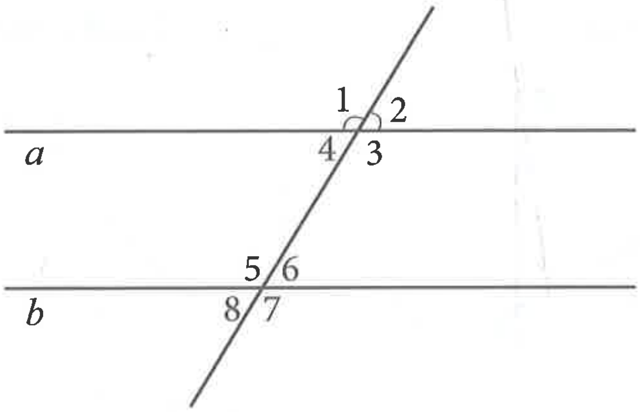
Două drepte împreună cu o secantă formează 8 unghiuri:

- Unghiuri **alterne interne** ($\angle 4$ și $\angle 6$); ($\angle 3$ și $\angle 5$)
- Unghiuri **alterne externe** ($\angle 1$ și $\angle 7$); ($\angle 2$ și $\angle 8$)
- Unghiuri **interne de aceeași parte a secantei** ($\angle 4$; $\angle 5$); ($\angle 3$; $\angle 6$)
- Unghiuri **externe de aceeași parte a secantei** ($\angle 1$; $\angle 8$); ($\angle 2$; $\angle 7$)
- Unghiuri **corespondente** ($\angle 1$; $\angle 5$); ($\angle 4$; $\angle 8$); ($\angle 2$; $\angle 6$); ($\angle 3$; $\angle 7$)

Dacă avem două drepte paralele și o secantă, atunci sunt adevărate următoarele propoziții:

- Unghiurile alterne interne sunt congruente.
- Unghiurile alterne externe sunt congruente.
- Unghiurile interne de aceeași parte a secantei sunt suplementare.

- Unghiurile externe de aceeași parte a secantei sunt suplementare.
- Unghiurile corespondente sunt congruente.



Fie $a \parallel b$ și c secantă.

Putem afirma cu certitudine că toate unghiurile ascuțite sunt congruente între ele și unghiurile obtuze sunt congruente între ele.

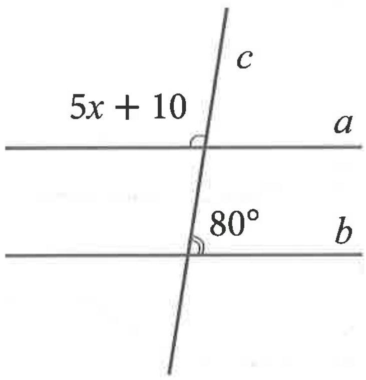
$\angle 1 \equiv \angle 3 \equiv \angle 5 \equiv \angle 7$

$\angle 2 \equiv \angle 4 \equiv \angle 6 \equiv \angle 8$

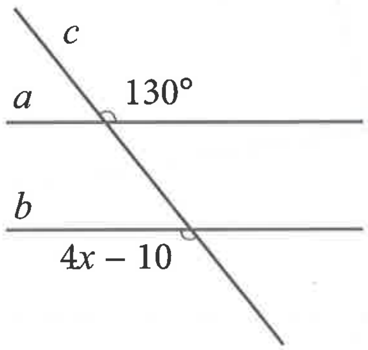
Exercițiu:

Determinați x, dacă dreptele a și b din desen sunt paralele.

a)



b)



Rezolvare:

$5x + 10° + 80° = 180°$

$5x + 90° = 180°$

$5x = 180° - 90°$

$5x = 90°$

$x = \frac{90°}{5}$

$x = 18°$

Rezolvare:

$4x - 10° = 130°$

$4x = 130° + 10°$

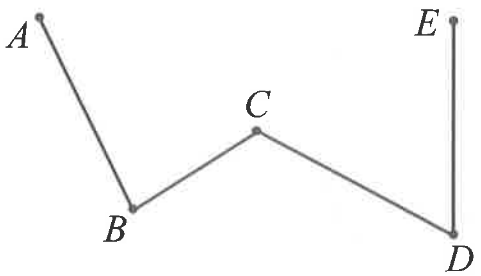
$4x = 140°$

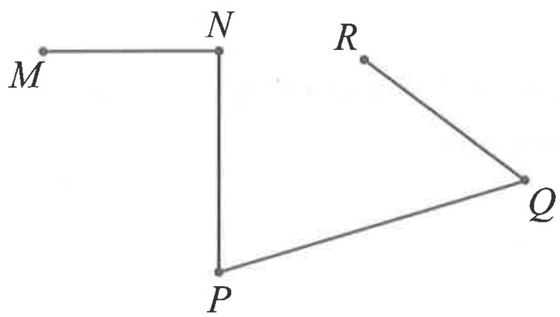
$x = \frac{140°}{4}$

$x = 35°$

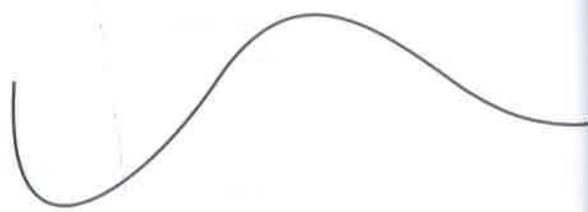
Ne reamintim

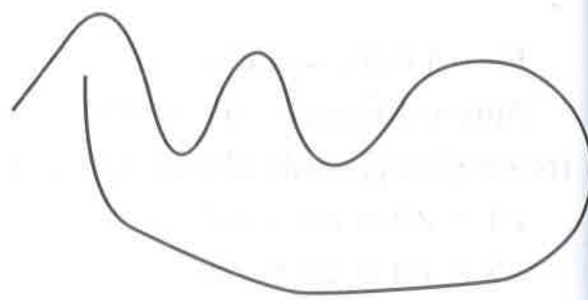
Linii frânte deschise



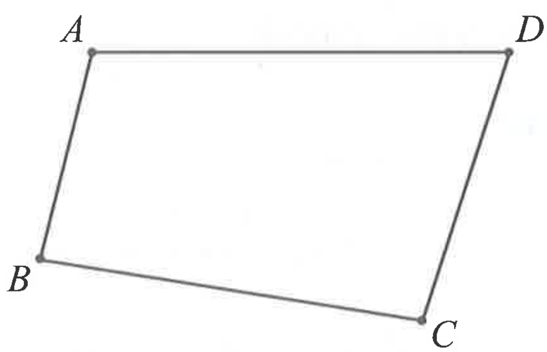


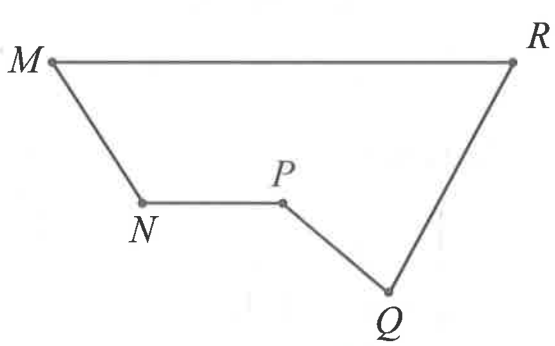
Linii curbe deschise



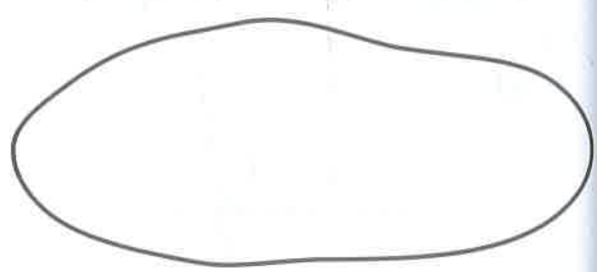


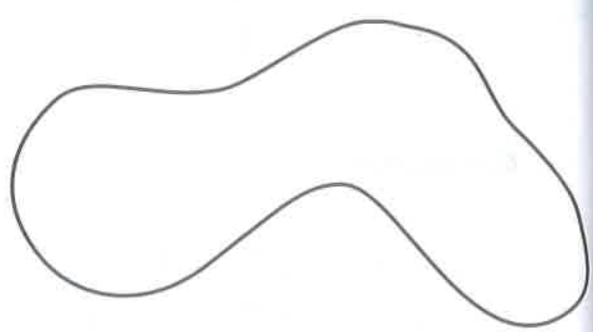
Linii frânte închise





Linii curbe închise





Definiție.
Poligonul este o linie frântă închisă, formată dintr-un număr finit de segmente numite laturi, iar punctele în care două laturi se întâlnesc se numesc vârfuri.

Observație.

Un poligon se desenează scriind vârfurile sale în ordine, astfel încât să se vadă cum sunt unite prin laturi. Se scrie fiecare vârf o singură dată, începând de la un punct și continuând cu celelalte, până se revine la punctul de plecare.

Definiție.
Diagonala unui poligon este segmentul care unește două vârfuri ale poligonului care nu sunt consecutive.

Observație.

- Dacă luăm 2 vârfuri vecine și le unim, vom obține o latură.
- Dacă luăm 2 vârfuri ce nu sunt vecine și le unim, vom obține o diagonală.
- Dacă un poligon convex are n laturi, atunci:
  a) dintr-un vârf al lui pot fi construite $n-3$ diagonale;
  b) el are $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonale;
  c) suma măsurilor unghiurilor sale este egală cu $180°(n-2)$

Definiție.
Poligonul regulat este un poligon convex care are toate laturile de dimensiuni egale și unghiurile de aceeași măsură.

Exemple:

Triunghiul echilateral este un poligon regulat cu 3 laturi.

Pătratul este un poligon regulat cu 4 laturi.

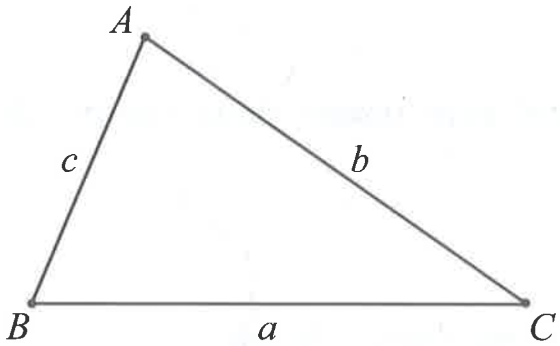
Unghiul interior al unui poligon regulat cu n laturi se calculează cu formula

$$\alpha = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$$

Poligoanele regulate pot fi înscrise într-un cerc (*toate vârfurile se găsesc pe același cerc*).

Triunghiul

Definiție.
Triunghiul este o figură geometrică plană formată din trei puncte necoliniare și cele trei segmente de dreaptă care le unesc.



Elementele triunghiului ABC.

Punctele A, B, C sunt **vârfuri**.

Segmentele AB, BC, CA sunt **laturi**.

Laturile pot fi notate și cu a, b, c.

Observație.
Unghiurile unui triunghi notat ABC se citesc folosind o singură literă numai dacă nu se produce confuzie.

$\angle A$ va fi citit $\angle BAC$ sau $\angle CAB$

$\angle B$ va fi citit $\angle ABC$ sau $\angle CBA$

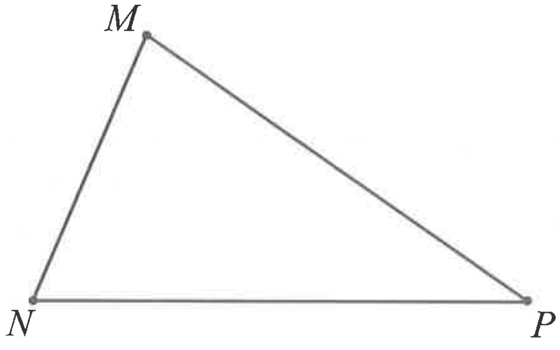
$\angle C$ va fi citit $\angle BCA$ sau $\angle ACB$

- Dacă latura AB este cea mai scurtă, atunci unghiul opus C are cea mai mică măsură.
- Dacă latura AC este cea mai lungă, atunci unghiul opus B are cea mai mare măsură.

Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi mereu este 180°

$$\mathbf{m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) = 180^\circ}$$

Un triunghi poate să existe dacă și numai dacă suma lungimilor oricăror două laturi va fi mai mare decât lungimea laturii a treia.



$MN + NP > PM$

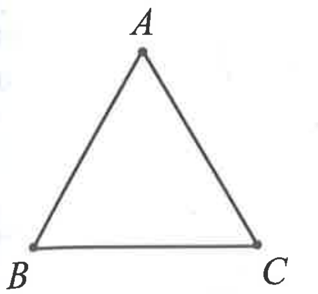
$MN + MP > NP$

$MP + NP > MN$

Clasificarea triunghiului

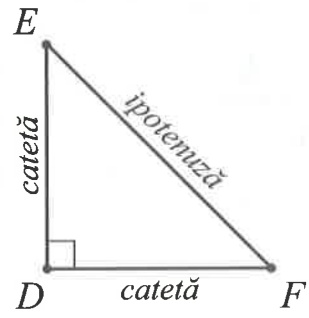
După măsurile unghiurilor sale, un triunghi poate fi:

- **ascuțitunghic**



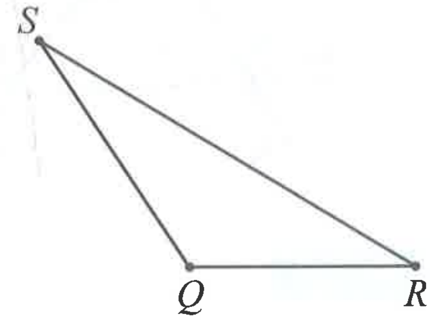
Are toate unghiurile ascuțite.

- **dreptunghic**



Are un unghi drept.

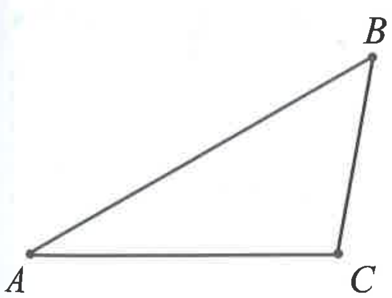
- **obtuzunghic**



Are un unghi obtuz.

După lungimile laturilor, un triunghi poate fi:

- **scalen**

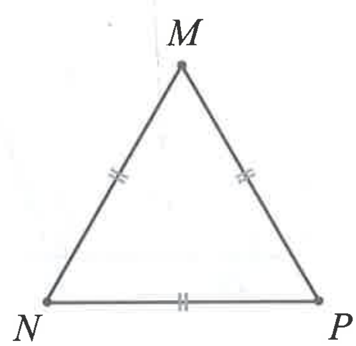


Are toate laturile diferite.

- **isoscel**

Are două laturi congruente.

- **echilateral**



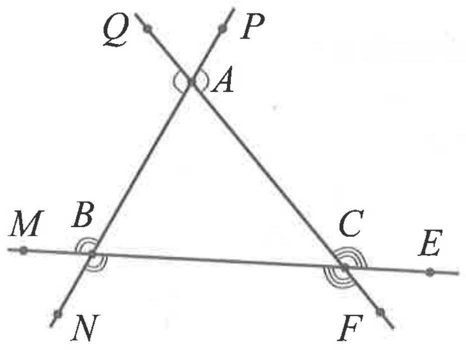
Are toate laturile congruente.

La triunghiul dreptunghic, laturile care formează unghiul drept se numesc **catete**, iar latura opusă unghiului drept se numește **ipotenuză**.

Triunghiul scalen se mai numește triunghi **oarecare**.

La triunghiul isoscel, unghiurile de la bază sunt congruente.

Definiție.
Un unghi adiacent și suplementar cu unul dintre unghiurile unui triunghi se numește **unghi exterior triunghiului**.



Unghiurile exterioare sunt:

$\angle ABM$
$\angle NBC$
$\angle BCF$
$\angle ECA$
$\angle CAP$
$\angle QAB$

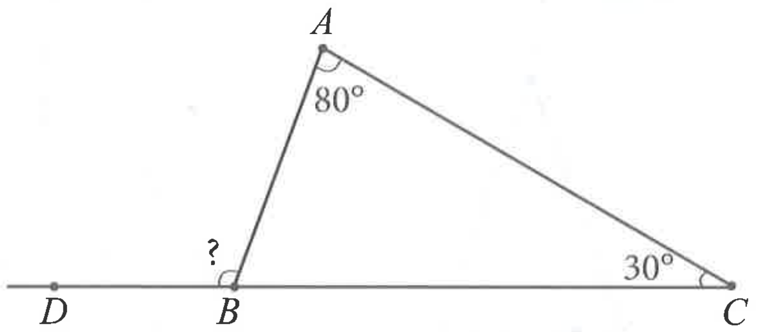
Teoremă

Măsura unui unghi exterior al unui triunghi este egală cu suma măsurilor unghiurilor triunghiului neadiacente cu el.

Exercițiu:

Determinați măsura unghiului exterior ABD, studiind datele din desen.

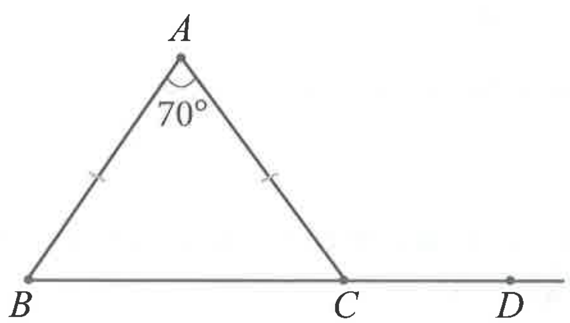
a)



Unghiurile interioare neadiacente cu $\angle ABD$ sunt $\angle BAC$ și $\angle BCA$.
$m(\angle ABD) = m(\angle BAC) + m(\angle BCA) = 80° + 30° = 110°$

Exercițiu rezolvat din testul nr. 2 (februarie 2021)

În desenul alăturat ABC este un triunghi, în care $AB = AC$, $m(\angle BAC) = 70°$. Scrieți în casetă măsura în grade a unghiului ACD exterior triunghiului ABC.



$m(\angle ACD) = \boxed{}$

Rezolvare:

Observăm că $\angle ABC$ este isoscel, deoarece laturile AB și AC sunt marcate cu câte o liniuță, rezultă că $\angle ABC \equiv \angle ACB$.

Știind că suma unghiurilor în triunghi este 180°, vom scădea unghiul opus bazei (pe care îl cunoaștem) și rezultatul îl împărțim la 2, astfel aflăm măsura unghiurilor de la bază.

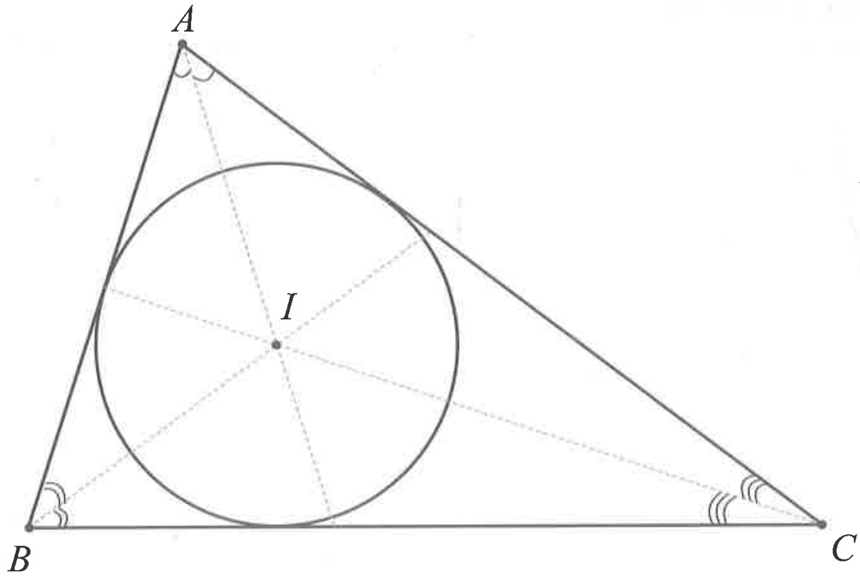
$$m(\angle ABC) = m(\angle ACB) = \frac{180° - m(\angle BAC)}{2} = \frac{180° - 70°}{2} = \frac{110°}{2} = 55°$$

Aflăm $\angle ACB$ folosind teorema:
$m(\angle ACD) = m(\angle ABC) + m(\angle BAC) = 55° + 70° = 125°$

Dar există și altă metodă de rezolvare: putem afla unghiul interior adiacent cu unghiul exterior, apoi, știind că sunt suplementare, calculăm măsura unghiului exterior.
$m(\angle ACD) = 180° - m(\angle ACB) = 180° - 55° = 125°$

Linii importante în triunghi

Definiție.
Bisectoarea unui triunghi este bisectoarea unui unghi din triunghiul respectiv. Având trei unghiuri, orice triunghi poate avea trei bisectoare, care sunt concurente într-un singur punct numit **centrul cercului înscris**.

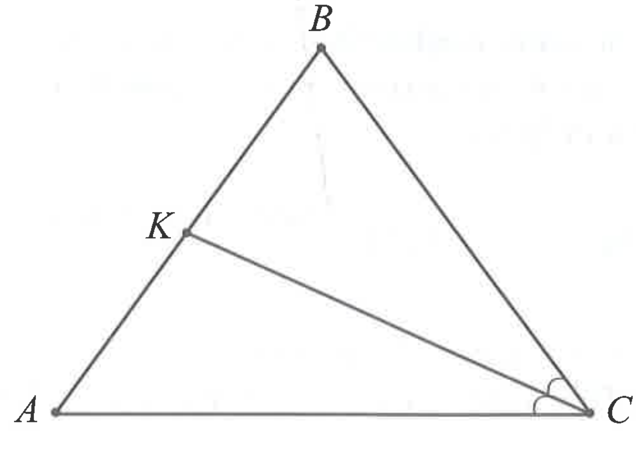


$\angle BAI \equiv \angle IAC$
$\angle ABI \equiv \angle IBC$
$\angle ACI \equiv \angle BCI$

Exercițiu rezolvat din testul nr. 1 (februarie 2022)

În desenul alăturat este reprezentat triunghiul ABC, în care $AB = BC$, $m(\angle ABC) = 100°$, iar CK este bisectoare. Scrieți în casetă măsura în grade a unghiului ACK.

$m(\angle ACK) = \boxed{}$



Rezolvare:

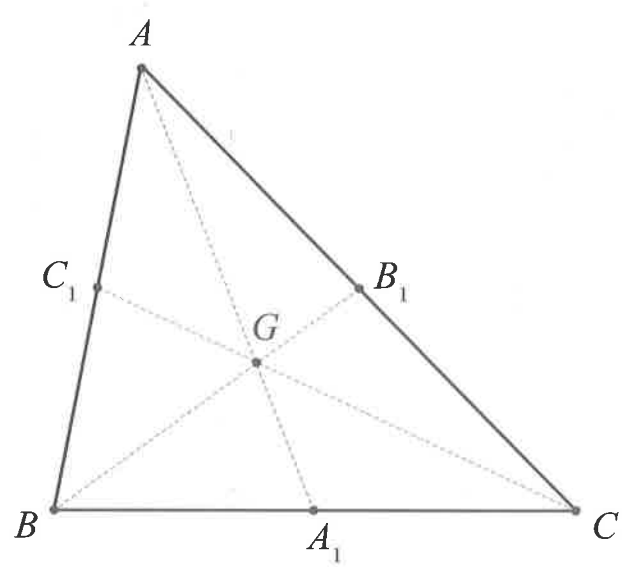
Dacă $AB = BC$, atunci ΔABC este isoscel și are unghiurile de la baza AC congruente.

$$m(\angle BAC) = m(\angle BCA) = \frac{180° - 100°}{2} = \frac{80°}{2} = 40°$$

Dacă CK este bisectoare, atunci $\angle ACK \equiv \angle BCK$ și

$$m(\angle ACK) = \frac{m(\angle ACB)}{2} = \frac{40°}{2} = 20°$$

Definiție.
Mediana unui triunghi este segmentul determinat de vârful unui triunghi și mijlocul laturii opuse.
În orice triunghi avem trei mediane, care se intersectează într-un singur punct numit **centrul de greutate**.



Centrul de greutate al unui triunghi se află pe fiecare mediană, la două treimi de vârf și o treime de bază.

$$AG = \frac{2}{3}AA_1 \qquad GA_1 = \frac{1}{3}AA_1 \qquad AG = 2GA_1$$

$$BG = \frac{2}{3}BB_1 \quad \text{și} \quad GB_1 = \frac{1}{3}BB_1 \quad \text{rezultă} \quad BG = 2GB_1$$

$$CG = \frac{2}{3}CC_1 \qquad GC_1 = \frac{1}{3}CC_1 \qquad CG = 2CC_1$$

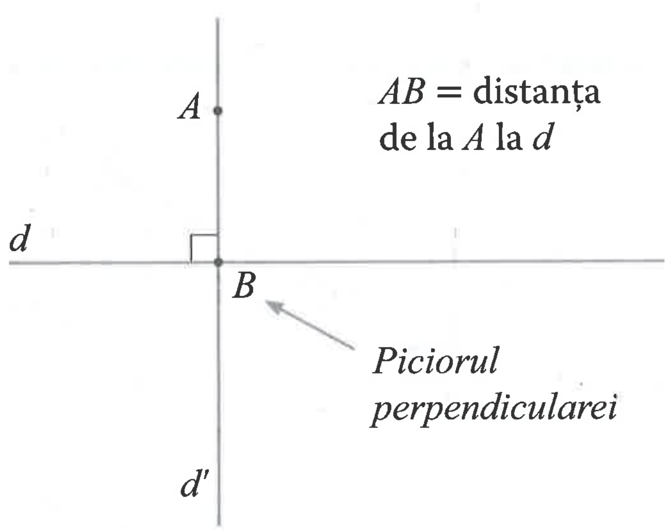
Observație.

Mediana împarte triunghiul în două triunghiuri care au aceeași arie.

$$A_{ABA_1} = A_{ACA_1},\ A_{CAC_1} = A_{CBC_1},\ A_{BAB_1} = A_{BCB_1}$$

Definiție.

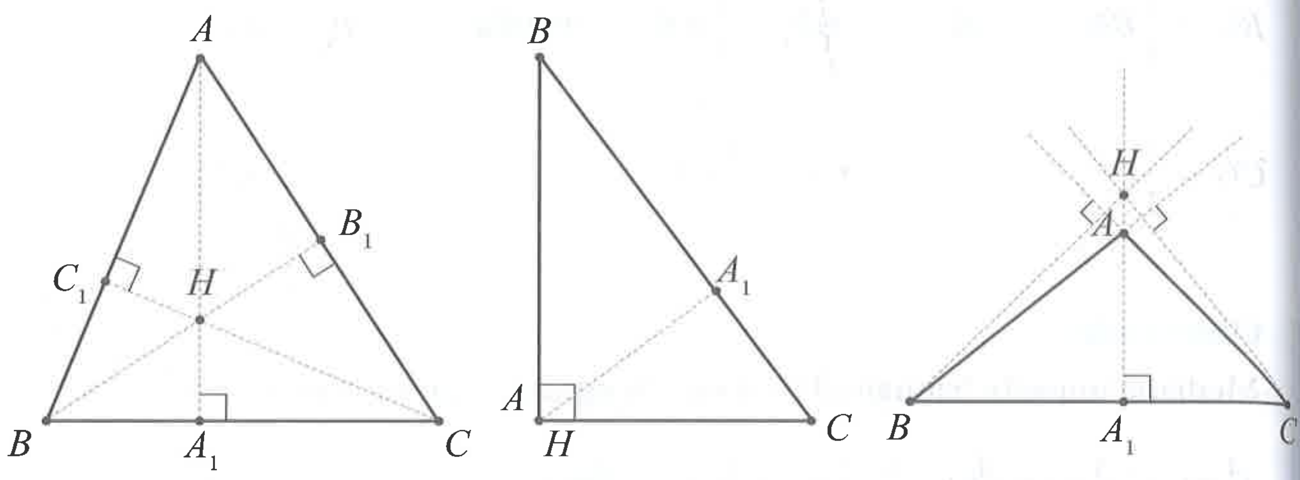
Dacă A este un punct exterior dreptei d, se numește **distanța** de la punctul A la dreapta d lungimea segmentului AB, unde B este piciorul perpendicularei din A pe d.



Dacă $A \in d$,
atunci distanța
de la A la d este 0
$d(A, d) = 0$

Definiție.
Numărul real pozitiv egal cu distanța de la unul dintre vârfurile triunghiului la latura opusă reprezintă **înălțimea triunghiului**.

Înălțimea în triunghi este lungimea segmentului determinat de un vârf al triunghiului cu piciorul perpendicularei din acel vârf pe latura opusă.



Δ ascuțitunghic
$H \in$ Int (ΔABC)

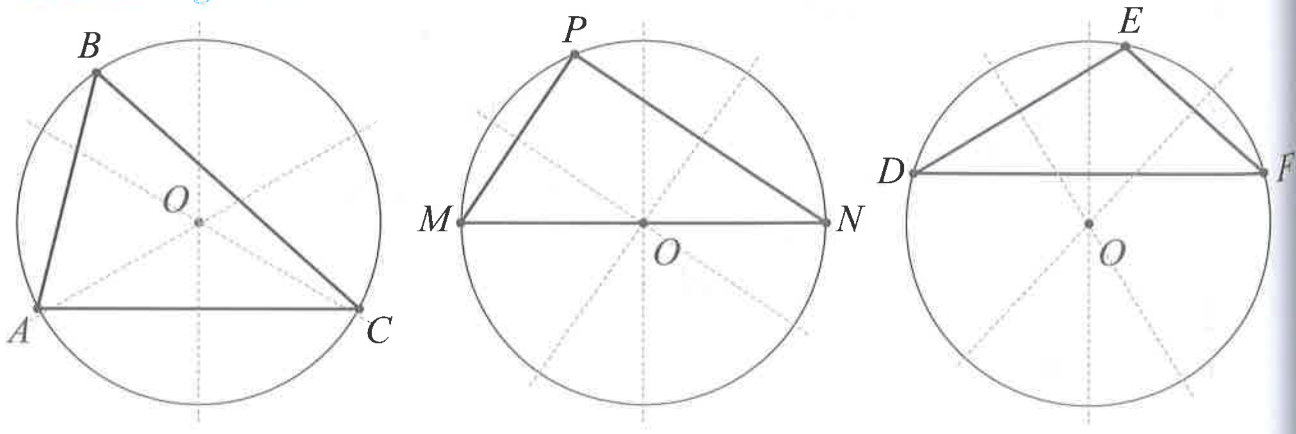
Δ dreptunghic
H coincide cu A

Δ obtuzunghic
$H \in$ Ext (ΔABC)

Punctul de intersecție al înălțimilor triunghiului este **ortocentrul**.

Definiție.
Mediatoarea segmentului AB este dreapta perpendiculară pe AB, care conține mijlocul acesteia.
Orice punct de pe mediatoarea unui segment este egal depărtat de extremitățile acelui segment.

Triunghiul are trei mediatoare și se intersectează în **centrul cercului circumscris triunghiului.**



Δ ascuțitunghic
$O \in$ Int (ΔABC)

Δ dreptunghic
O coincide în mijlocul ipotenuzei

Δ obtuzunghic
$O \in$ Ext (ΔDEF)

Definiție.
Linia mijlocie a triunghiului este segmentul determinat de mijloacele a două laturi.

Teoremă

Linia mijlocie a unui triunghi este paralelă cu o latură a triunghiului și are lungimea de două ori mai mică decât lungimea acestei laturi.

Reciproca teoremei

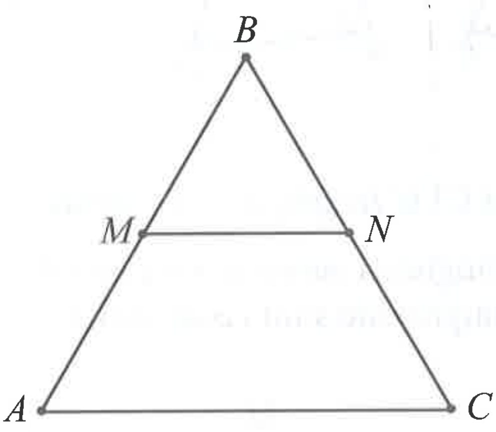
Paralela dusă prin mijlocul unei laturi la o altă latură a triunghiului trece prin mijlocul laturii a treia.

Exercițiu rezolvat din testul nr. 1 (februarie 2015)

În desenul alăturat este reprezentat triunghiul echilateral ABC, în care lungimea liniei mijlocii MN este egală cu 1 cm.

Scrieți în casetă perimetrul triunghiului ABC.

$P_{ABC} = \boxed{}$ cm



Rezolvare:

Dacă MN este linie mijlocie, atunci este jumătate din latura cu care este paralelă, deci $MN = \dfrac{AC}{2}$, rezultă că $AC = 2 \cdot MN = 2 \cdot 1 = 2$ cm.

La triunghiul echilateral, toate laturile sunt egale și perimetrul este suma laturilor.

$P_{ABC} = 3 \cdot AC = 3 \cdot 2 = 6$ cm

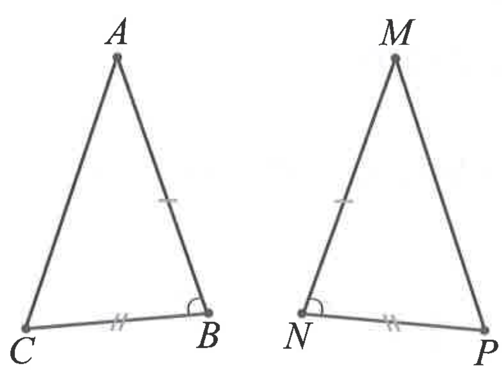
Triunghiuri congruente

Definiție.
Două triunghiuri se numesc **triunghiuri congruente** dacă au laturile și unghiurile respectiv congruente.
Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$, atunci $\angle A \equiv \angle M$, $\angle B \equiv \angle N$, $\angle C \equiv \angle P$, $AB \equiv MN$, $BC \equiv NP$ și $AC \equiv MP$.

Criterii de congruență

Criteriul LUL *(latură, unghi, latură)*

Două triunghiuri oarecare care au câte două laturi și unghiul cuprins între ele respectiv congruente sunt congruente.

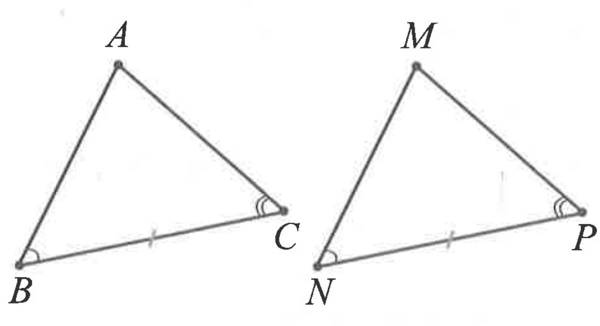


Ipoteză: *Concluzie:*

$$\left.\begin{array}{l} AB \equiv MN \\ \angle ABC \equiv \angle MNP \\ BC \equiv NP \end{array}\right\} \overset{\text{LUL}}{\Rightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta MNP$$

Criteriul ULU *(unghi, latură, unghi)*

Două triunghiuri oarecare care au câte o latură și unghiurile alăturate acesteia respectiv congruente sunt congruente.

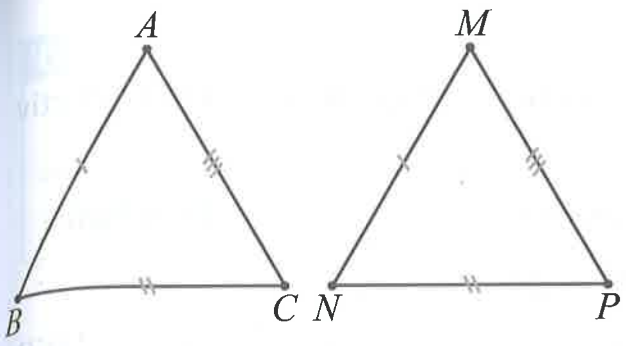


Ipoteză: *Concluzie:*

$$\left.\begin{array}{l} \angle ABC \equiv \angle MNP \\ BC \equiv NP \\ \angle BCA \equiv \angle NPM \end{array}\right\} \overset{\text{ULU}}{\Rightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta MNP$$

Criteriul LLL *(latură, latură, latură)*

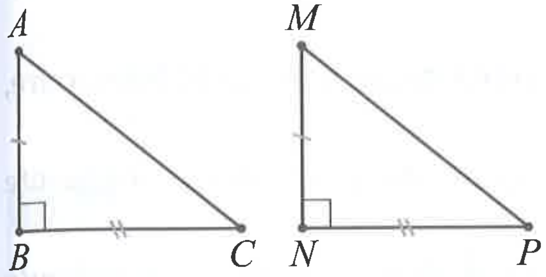
Două triunghiuri oarecare care au laturile respectiv congruente sunt congruente.



Ipoteză: $\left.\begin{cases} AB \equiv MN \\ BC \equiv NP \\ AC \equiv MP \end{cases}\right\} \overset{\textbf{LLL}}{\Rightarrow}$ *Concluzie:* $\triangle ABC \equiv \triangle MNP$

Criteriul CC *(catetă, catetă)*

Două triunghiuri dreptunghice care au catetele respectiv congruente sunt congruente.

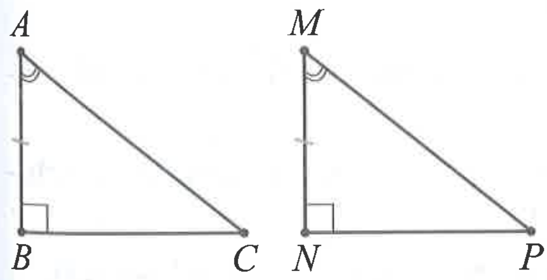


Ipoteză: $\begin{cases} AB \equiv MN \\ BC \equiv NP \end{cases}$ $\overset{\textbf{CC}}{\Rightarrow}$ *Concluzie:* $\triangle ABC \equiv \triangle MNP$

$\mathrm{m}(\angle B) = \mathrm{m}(\angle N) = 90°$

Criteriul CU *(catetă, unghi ascuțit)*

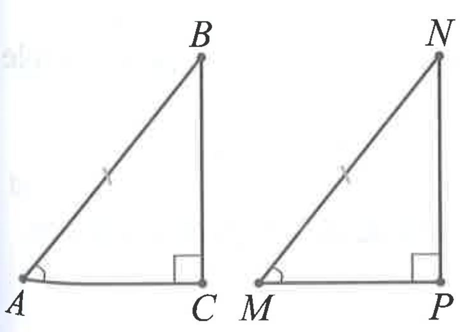
Două triunghiuri dreptunghice care au câte o catetă și unghiul ascuțit alăturat acesteia respectiv congruente sunt congruente.



Ipoteză: $\begin{cases} \angle BAC \equiv \angle NMP \\ AB \equiv MN \\ \mathrm{m}(\angle B) \equiv \mathrm{m}(\angle N) = 90° \end{cases}$ $\overset{\textbf{CU}}{\Rightarrow}$ *Concluzie:* $\triangle ABC \equiv \triangle MNP$

Criteriul IU *(ipotenuză, unghi ascuțit)*

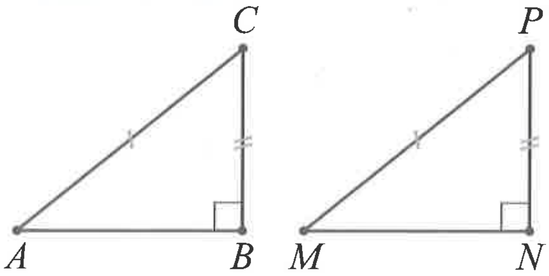
Două triunghiuri dreptunghice care au ipotenuzele și un unghi ascuțit respectiv congruente sunt congruente.



Ipoteză: $\begin{cases} AB \equiv MN \\ \angle BAC \equiv \angle NMP \\ \mathrm{m}(\angle C) = \mathrm{m}(\angle P) = 90° \end{cases}$ $\overset{\textbf{IU}}{\Rightarrow}$ *Concluzie:* $\triangle ABC \equiv \triangle MNP$

Criteriul CI *(catetă, ipotenuză)*

Două triunghiuri dreptunghice care au ipotenuzele și câte o catetă respectiv congruente sunt congruente.



Ipoteză: *Concluzie:*

$$\begin{cases} AC \equiv MP \\ CB \equiv PN \\ m(\angle B) = m(\angle N) = 90^\circ \end{cases} \overset{\textbf{CI}}{\Rightarrow} \triangle ABC \equiv \triangle MNP$$

Proprietățile triunghiului isoscel

- În orice triunghi isoscel, mediana corespunzătoare bazei este bisectoare, înălțime și mediatoare în triunghi.
- În orice triunghi isoscel, medianele corespunzătoare laturilor congruente sunt congruente.
- În orice triunghi isoscel, înălțimile corespunzătoare laturilor congruente sunt congruente.
- Dacă un triunghi are două mediane sau două înălțimi congruente, atunci triunghiul este isoscel.

Proprietățile triunghiului echilateral

- Triunghiul echilateral are toate unghiurile congruente, fiecare având măsura de 60°.
- Dacă un triunghi are toate unghiurile congruente, atunci acesta este echilateral.
- Dacă un triunghi isoscel are un unghi cu măsura de 60°, este echilateral.
- Într-un triunghi echilateral, mediana, înălțimea, mediatoarea și bisectoarea unui unghi coincid.

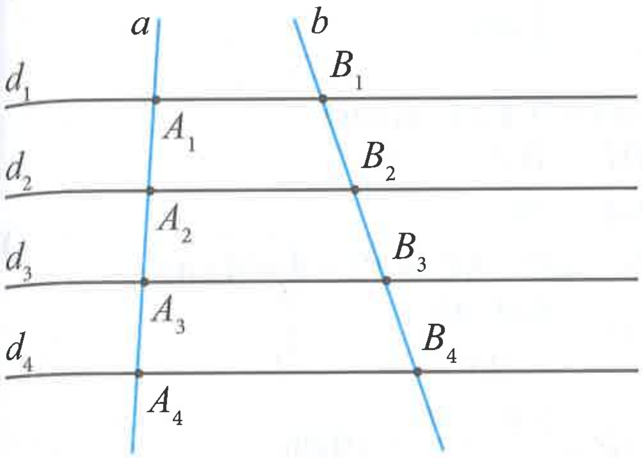
• Triunghiuri asemenea

Spunem că segmentele $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ sunt proporționale cu segmentele $C_1D_1, C_2D_2, \ldots, C_nD_n$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, dacă

$$\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{A_2B_2}{C_2D_2} = \ldots = \frac{A_nB_n}{C_nD_n} = k,$$ unde k este ***coeficientul de proporționalitate***.

Teorema paralelelor echidistante

Dacă dreptele paralele $d_1, d_2, ..., d_n \ (n \geq 3, n \in \mathbb{N})$ determină pe o secantă segmente congruente, atunci ele determină pe oricare altă secantă segmente congruente.



Exemplu:

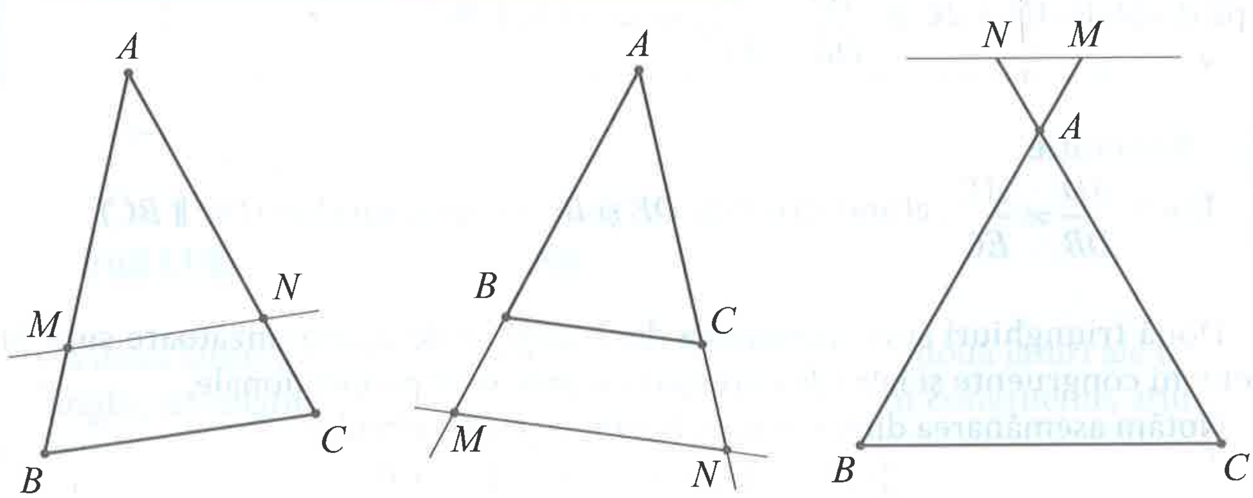
Fie $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4$

Dacă $A_1A_2 \equiv A_2A_3 \equiv A_3A_4$

atunci $B_1B_2 \equiv B_2B_3 \equiv B_3B_4$

Teorema lui Thales

O paralelă la una dintre laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi (sau pe prelungirile acestora) segmente proporționale.



Cele 3 cazuri pentru Teorema lui Thales:

$$\triangle ABC, MN \parallel BC, M \in AB, N \in AC \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

Folosind proporțiile obținute din teorema lui Thales, se pot deduce următoarele consecințe:

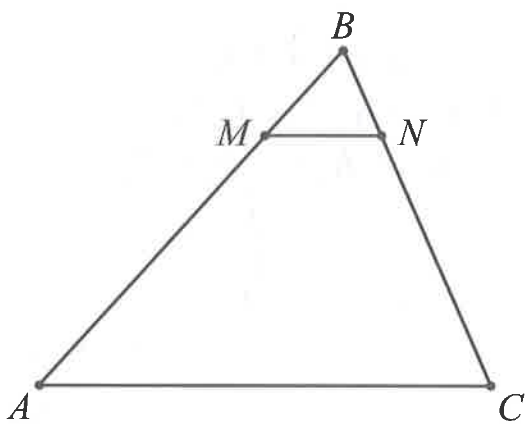
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \text{ sau } \frac{MB}{MA} = \frac{NC}{NA} \text{ sau } \frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC}$$

Exercițiu rezolvat din pretestare (28 martie 2024)

În desenul alăturat este reprezentat triunghiul ABC, în care $MN \parallel AC$, $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $BC = 12$ cm, $NC = 8$ cm, $BM = 5$ cm.

Scrieți în casete lungimile segmentelor BN și AM.

a) $BN = \boxed{}$ cm b) $AM = \boxed{}$ cm



Dacă $MN \parallel AC$, atunci

$$\frac{BM}{AM} = \frac{BN}{NC}$$

$$BN = BC - NC = 12 - 8 = 4 \text{ cm}$$

$$AM = \frac{BM \cdot NC}{BN}$$

$$AM = \frac{5 \cdot 8}{4} = \frac{40}{4} = 10 \text{ cm}$$

Reciproca Teoremei lui Thales

Dacă, în raport cu triunghiul ABC, punctele D și E ocupă poziții omoloage pe dreptele AB și AC și $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$, atunci $DE \parallel BC$.

Observație.

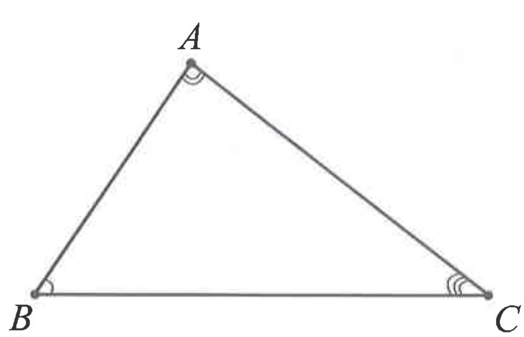
Dacă $\dfrac{AD}{DB} \neq \dfrac{AE}{EC}$, atunci dreptele DE și BC nu sunt paralele ($DE \nparallel BC$).

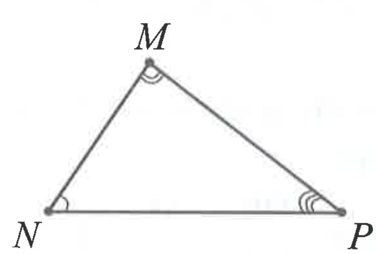
Două triunghiuri sunt **asemenea** dacă unghiurile corespunzătoare sunt în perechi congruente și laturile corespunzătoare sunt proporționale.

Notăm asemănarea dintre două triunghiuri cu simbolul ~

$$\triangle ABC \sim \triangle MNP \Leftrightarrow \begin{cases} \angle A \equiv \angle M,\ \angle B \equiv \angle N,\ \angle C \equiv \angle P \\ \dfrac{AB}{MN} = \dfrac{AC}{MP} = \dfrac{BC}{NP} = K \end{cases}$$

K – raport de asemănare





Teorema fundamentală a asemănării (TFA)

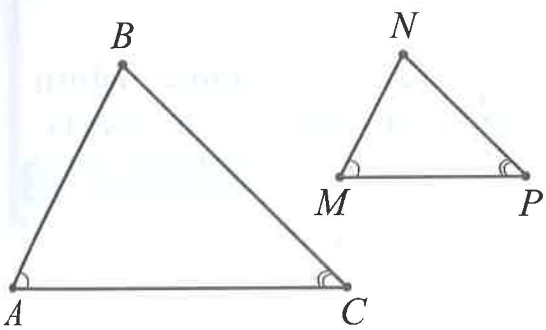
O paralelă dusă la una dintre laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi (sau pe prelungirile acestora) un triunghi asemenea cu cel dat.

Observație.
Teorema fundamentală a asemănării completează teorema lui Thales, având aceeași ipoteză și doar concluzia este diferită, deoarece se referă la toate laturile triunghiului.

Criterii de asemănare

Criteriul UU *(unghi, unghi)*

Dacă două triunghiuri au două perechi de unghiuri respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt asemenea.

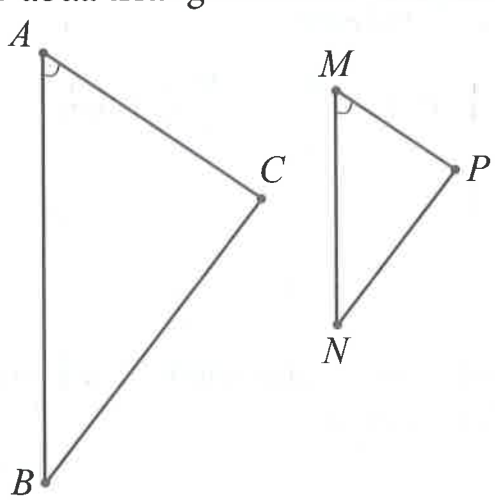


Ipoteză: — **UU** — *Concluzie:*

$$\begin{cases} \angle BAC \equiv \angle NMP \\ \angle ACB \equiv \angle MPN \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MNP$$

Criteriul LUL *(latură, unghi, latură)*

Dacă două laturi ale unui triunghi sunt proporționale cu două laturi ale unui alt triunghi, iar unghiurile determinate de aceste laturi sunt congruente, atunci cele două triunghiuri sunt asemenea.

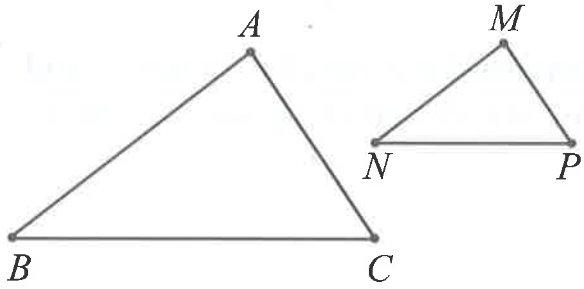


Ipoteză: — **LUL** — *Concluzie:*

$$\begin{cases} \dfrac{AB}{MN} = \dfrac{AC}{MP} \\ \angle BAC \equiv \angle NMP \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MNP$$

Criteriul LLL

Dacă laturile unui triunghi sunt proporționale cu laturile altui triunghi, atunci cele două triunghiuri sunt asemenea.



Ipoteză: $\left\{\frac{AB}{MN}=\frac{BC}{NP}=\frac{AC}{MP}\right.$ $\xRightarrow{\textbf{LLL}}$ *Concluzie:* $\triangle ABC \sim \triangle MNP$

Teorema medianei

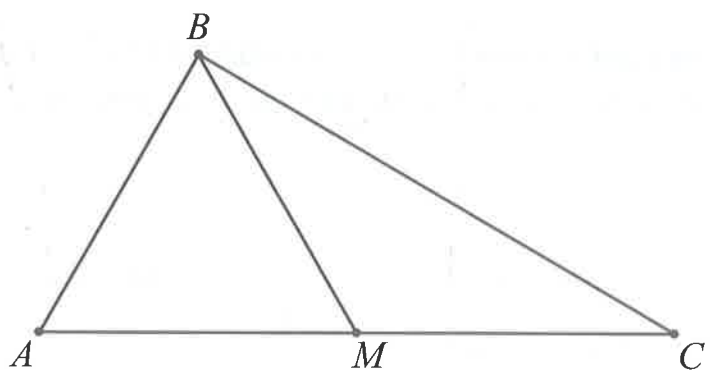
Într-un triunghi dreptunghic, lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.

Reciproca teoremei medianei

Dacă mediana unui triunghi este egală cu jumătate din lungimea laturii corespunzătoare, atunci triunghiul este dreptunghic, iar ipotenuza lui este latura corespunzătoare medianei.

Exemplu:

În desenul alăturat, ABC este un triunghi dreptunghic în B, cu lungimea ipotenuzei AC de 20 cm. Scrieți în casetă lungimea medianei dusă din vârful drept.



$BM = \boxed{}$ cm

Rezolvare:

$$BM=\frac{AC}{2}=\frac{20}{2}=10\,\text{cm}$$

Teorema unghiului de 30°

Într-un triunghi dreptunghic, lungimea catetei opuse unghiului cu măsura egală cu 30° este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.

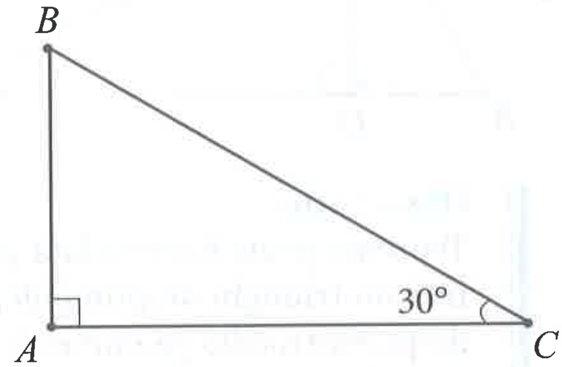
Reciproca teoremei unghiului de 30°

Dacă într-un triunghi dreptunghic o catetă are lungimea egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei, atunci unghiul care se opune acestei catete are măsura egală cu 30°.

Exercițiu rezolvat din pretestare (aprilie 2016)

În desenul alăturat, ABC este un triunghi dreptunghic în A cu $BC = 8$ cm și $m(\angle BCA) = 30°$. Scrieți în casetă lungimea catetei AB.

$AB = \boxed{}$ cm



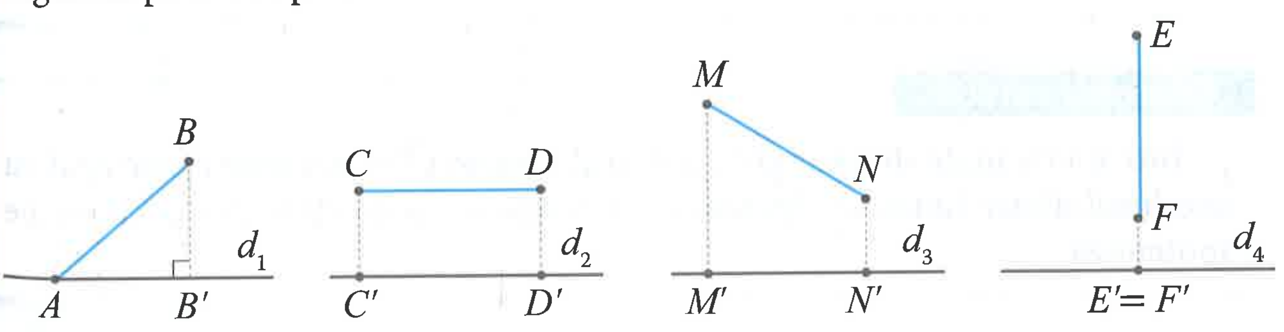
Cateta AB este opusă unghiului de 30°, deci lungimea laturii AB este jumătate din BC.

$$AB = \frac{BC}{2} = \frac{8}{2} = 4\,\text{cm}$$

Teoremă

Proiecția unui segment pe o dreaptă este un segment sau un punct.

Mai jos sunt prezentate diferite situații în care se poate realiza proiecția unui segment pe o dreaptă.

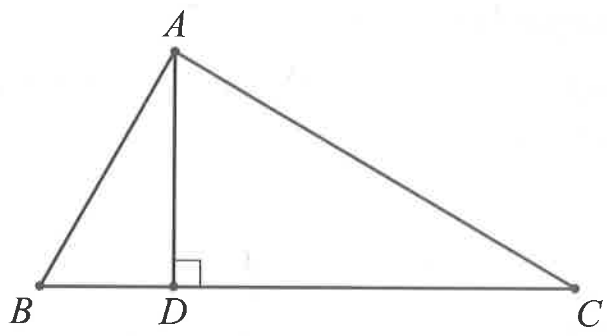


$\text{pr}_{d_1} AB = AB'$ $\quad$ $\text{pr}_{d_2} CD = C'D'$ $\quad$ $\text{pr}_{d_3} MN = M'N'$ $\quad$ $\text{pr}_{d_4} EF = E'$

Observație.
Proiecția unui segment pe o dreaptă are lungimea mai mică sau egală cu lungimea segmentului.

Teorema înălțimii

Într-un triunghi dreptunghic, pătratul lungimii înălțimii corespunzătoare ipotenuzei este egal cu produsul lungimilor proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.



Ipoteză:
$\triangle ABC, \angle A = 90°$
$AD \perp BC, D \in BC$

Concluzie:
$AD^2 = BD \cdot CD$

Observație.
Teorema poate fi formulată și altfel:
Într-un triunghi dreptunghic, lungimea înălțimii corespunzătoare unghiului drept este media geometrică (media proporțională) a lungimilor proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.

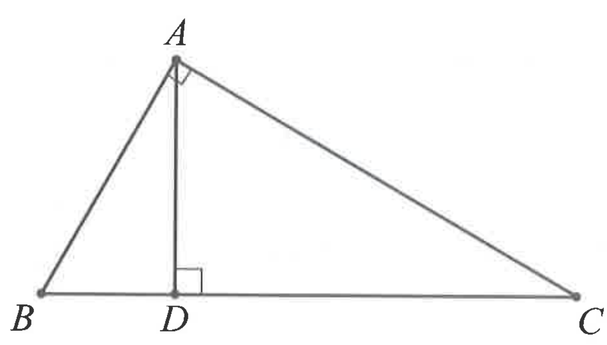
$$AD = \sqrt{BD \cdot DC}$$

Reciproca teoremei înălțimii

Fie triunghiul ABC și punctul D în interiorul laturii BC, astfel încât $AD \perp BC$ și $AD^2 = BD \cdot CD$
Atunci triunghiul ABC este dreptunghic în A.

Teorema catetei

Într-un triunghi dreptunghic, pătratul lungimii fiecărei catete este egal cu produsul dintre lungimea ipotenuzei și lungimea proiecției acestei catete pe ipotenuză.



Ipoteză:
$\triangle ABC, \angle A = 90°$
$AD \perp BC, D \in BC$

Concluzie:
$AB^2 = BC \cdot BD$
$AC^2 = BC \cdot DC$

Observație.
Teorema poate fi formulată și altfel:
Într-un triunghi dreptunghic, lungimea unei catete este media geometrică între lungimea ipotenuzei și a proiecției acestei catete pe ipotenuză.

$$AB = \sqrt{BC \cdot BD}$$

$$AC = \sqrt{BC \cdot DC}$$

Prima reciprocă a teoremei catetei

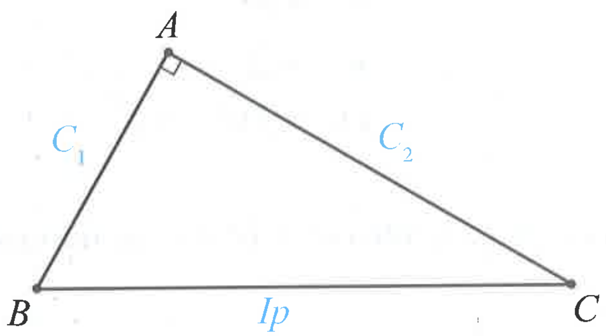
Într-un triunghi ABC, dacă D este un punct pe segmentul BC astfel încât $AD \perp BC$ și are loc una dintre egalitățile:
$AB^2 = BC \cdot BD$ sau $AC^2 = BC \cdot CD$, atunci $m(\angle BAC) = 90°$.

A doua reciprocă a teoremei catetei

Într-un triunghi ABC, dacă D este un punct pe segmentul BC astfel încât au loc simultan relațiile:
$AB^2 = BC \cdot BD$ și $AC^2 = BC \cdot CD$, atunci $m(\angle BAC) = 90°$ și $AD \perp BC$.

Teorema lui Pitagora

Într-un triunghi dreptunghic, suma pătratelor lungimilor catetelor este egală cu pătratul lungimii ipotenuzei.



Ipoteză:
ΔABC, $m(\angle A) = 90°$

Concluzie:
$BC^2 = AB^2 + AC^2$

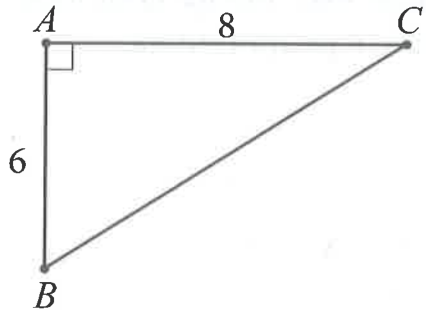
Observație.
Putem scrie $C_1^2 + C_2^2 = Ip^2$, unde C_1 și C_2 sunt catetele, iar Ip este ipotenuza.

Reciproca teoremei lui Pitagora

Dacă într-un triunghi suma pătratelor lungimilor a două laturi este egală cu pătratul lungimii celei de-a treia laturi, atunci triunghiul este dreptunghic.

Exerciții rezolvate:

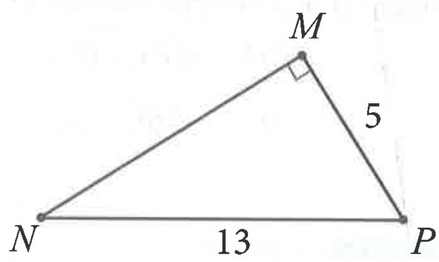
Aplicați teorema lui Pitagora și aflați laturile necunoscute ale triunghiurilor.



Se știe:
ΔABC dreptunghic
$AB = 6$ cm
$AC = 8$ cm

Se cere:
$BC = ?$

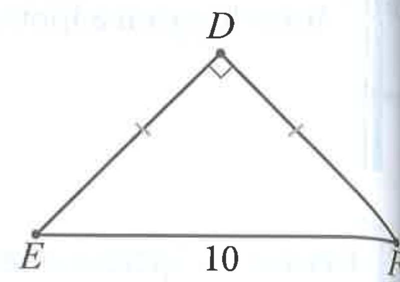
Aplicăm T. lui Pitagora:
$BC^2 = AB^2 + AC^2$
$BC^2 = 6^2 + 8^2$
$BC^2 = 36 + 64$
$BC^2 = 100$
$BC = \sqrt{100}$
$BC = 10$ cm



Se știe:
ΔMNP dreptunghic
$MP = 5$ cm
$NP = 13$ cm

Se cere:
$MN = ?$

Aplicăm T. lui Pitagora:
$MN^2 + MP^2 = NP^2$
$MN^2 + 5^2 = 13^2$
$MN^2 = 13^2 - 5^2$
$MN^2 = 169 - 25$
$MN^2 = 144$
$MN = \sqrt{144}$
$MN = 12$ cm



Se știe:
ΔDEF dreptunghic
$DE = DF$
$EF = 10$ cm

Se cere:
$DE = ?$

Aplicăm T. lui Pitagora:
Notăm $DE = DF = x$
$DE^2 + DF^2 = EF^2$
$x^2 + x^2 = 10^2$
$2x^2 = 100$
$x^2 = \dfrac{100}{2}$
$x^2 = 50$
$x = \sqrt{50}$
$x = 5\sqrt{2}$
$DE = DF = 5\sqrt{2}$

• Numere pitagoreice

Tripletele de numere naturale (a, b, c) cu proprietatea $a^2 + b^2 = c^2$ se numesc **triplete de numere pitagoreice**.

Exemple: (Triplete primitive)

Triplet	Verificare
(3, 4, 5)	$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$
(5, 12, 13)	$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$
(8, 15, 17)	$8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 = 17^2$
(7, 24, 25)	$7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 = 25^2$
(9, 40, 41)	$9^2 + 40^2 = 81 + 1600 = 1681 = 41^2$

Se numesc **triplete primitive**, deoarece numerele naturale a, b și c nu au divizor comun mai mare decât 1.

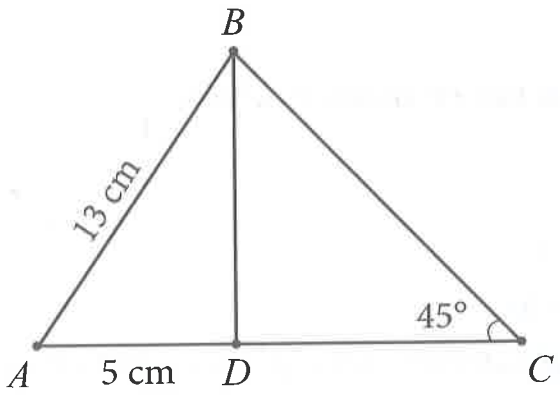
Exemple: (Triplete neprimitive)

Se obțin prin înmulțirea unui triplet primitiv cu un număr natural $k > 1$:
(ka, kb, kc)
Din (3, 4, 5) obținem (6, 8, 10), (9, 12, 15), (12, 16, 20).
Din (5, 12, 13) obținem (10, 24, 26), (15, 36, 39).

Exercițiu rezolvat din sesiunea de bază (iunie 2019)

Fie triunghiul ascuțitunghic ABC, în care $AB = 13$ cm, $m(\angle ACB) = 45°$ și $AD = 5$ cm, unde D este piciorul înălțimii BD.

Determinați lungimea laturii AC.



Rezolvare:

Aplicăm Teorema lui Pitagora (ΔABD) –> este important să menționăm în care triunghi lucrăm.

$AD^2 + BD^2 = AB^2$

$5^2 + BD^2 = 13^2$

$BD^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$

$BD = \sqrt{144} = 12\,\text{cm}$

$m(\angle DBC) = 180° - m(\angle BDC) - m(\angle DCB) = 180° - 90° - 45° = 45°$

Dacă $\angle DBC \equiv \angle DCB$, atunci ΔBDC isoscel și $DB = DC = 12$ cm

$AC = AD + DC = 5 + 12 = 17$ cm

Răspuns: 17 cm.

Noțiuni trigonometrice

Pentru un unghi ascuțit de măsura α într-un triunghi dreptunghic, definim următoarele rapoarte de lungimi de segmente.

	Raportul	Citim	Reprezintă
1.	$\sin\alpha = \dfrac{\text{cateta opusă}}{\text{ipotenuză}}$	sinus de alfa	sinusul unghiului α
2.	$\cos\alpha = \dfrac{\text{cateta alăturată}}{\text{ipotenuză}}$	cosinus de alfa	cosinusul unghiului α
3.	$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\text{cateta opusă}}{\text{cateta alăturată}}$	tangentă de alfa	tangenta unghiului α
4.	$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\text{cateta alăturată}}{\text{cateta opusă}}$	cotangentă de alfa	cotangenta unghiului α

Proprietăți:

Pentru orice unghi ascuțit de măsura α, avem:

1° $0 < \sin\alpha < 1$

2° $0 < \cos\alpha < 1$

3° $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

4° $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$,
sinusul unui unghi ascuțit este egal cu cosinusul complementului său.

5° $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$,
cosinusul unui unghi ascuțit este egal cu sinusul complementului său.

6° $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}(90° - \alpha)$,
tangenta unui unghi ascuțit este egală cu cotangenta complementului său.

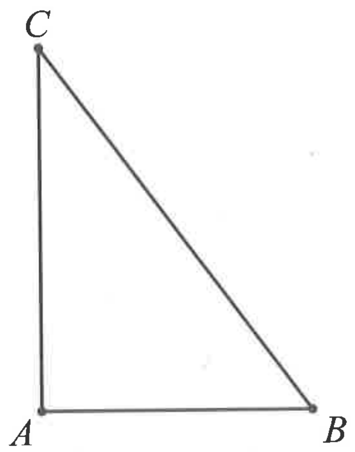
7° $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(90° - \alpha)$,
cotangenta unui unghi ascuțit este egală cu tangenta complementului său.

8° $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$

9° $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

Exemplu:

Fie ABC un triunghi dreptunghic în A cu $AB = 3$ cm și $AC = 4$ cm.
Aplicând teorema lui Pitagora, putem obține ipotenuza $BC = 5$ cm.



$$\sin B=\frac{AC}{BC}=\frac{4}{5} \qquad \sin C=\frac{AB}{BC}=\frac{3}{5}$$

$$\cos B=\frac{AB}{BC}=\frac{3}{5} \qquad \cos C=\frac{AC}{BC}=\frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg} B=\frac{AC}{AB}=\frac{4}{3} \qquad \operatorname{tg} C=\frac{AB}{AC}=\frac{3}{4}$$

$$\operatorname{ctg} B=\frac{AB}{AC}=\frac{3}{4} \qquad \operatorname{ctg} C=\frac{AC}{AB}=\frac{4}{3}$$

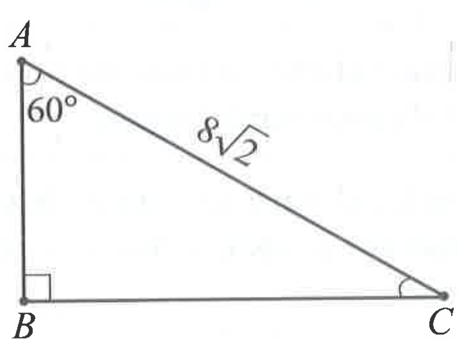
Tabelul trigonometric

	0°	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	
ctg		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Explicăm de ce avem nevoie de trigonometrie.

Exercițiu rezolvat:

Aplicând datele din desen, aflați *BC*.



Rezolvare cu trigonometrie:

Dacă cunoaștem că $\angle A$ are 60° și știm ipotenuza, putem utiliza $\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$ și $\sin A=\frac{BC}{AC}$.

Rezultă că: $\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{BC}{AC}$

$$BC=\frac{AC\sqrt{3}}{2}=\frac{8\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2}$$

$$BC=4\sqrt{6}$$

Rezolvare fără trigonometrie:

Arătăm că avem ∠ de 30°

$m(\angle BCA) = 180° - m(\angle ABC) - m(\angle BAC)$

$m(\angle BCA) = 180° - 90° - 60° = 30°$

Aplicăm teorema ∠ 30°

$$AB = \frac{AC}{2} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

Teorema lui Pitagora:

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

$BC^2 = AC^2 - AB^2$

$$BC^2 = \left(8\sqrt{2}\right)^2 - \left(4\sqrt{2}\right)^2$$

$BC^2 = 128 - 32 = 96$

$BC = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$

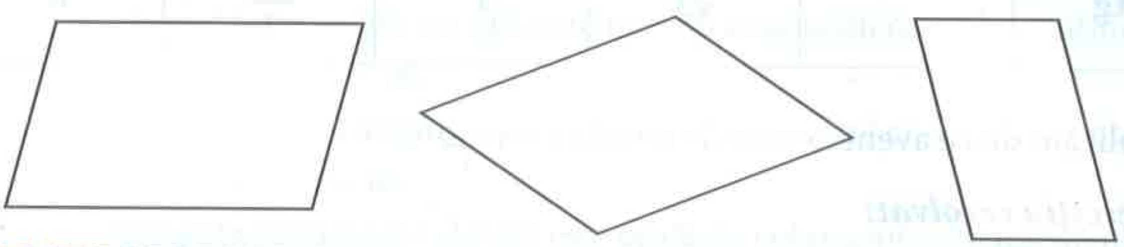
Am obținut același rezultat, dar am folosit mai puțini pași în rezolvare, aplicând trigonometria.

Patrulatere

• Paralelogramul

Definiție.

Patrulaterul cu două perechi de laturi paralele se numește **paralelogram**.

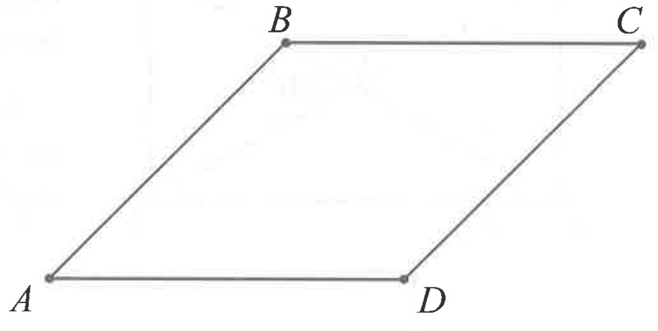


Teoremă	Teoremă reciprocă
Laturile opuse ale unui paralelogram sunt congruente.	Patrulaterul care are laturile opuse congruente este paralelogram.
Două laturi opuse ale unui paralelogram sunt paralele și congruente.	Patrulaterul care are două laturi opuse paralele și congruente este paralelogram.
Unghiurile opuse ale unui paralelogram sunt congruente.	Patrulaterul care are unghiurile opuse congruente este paralelogram.

Unghiurile alăturate ale unui paralelogram sunt suplementare.	Patrulaterul care are unghiurile alăturate suplementare este paralelogram.
Diagonalele unui paralelogram au același mijloc.	Patrulaterul ale cărui diagonale au același mijloc este paralelogram.

Exercițiu rezolvat din sesiunea de bază (iunie 2018)

În desenul alăturat $ABCD$ este un paralelogram, în care $m(\angle A) = 45°$. Scrieți în casetă măsura în grade a unghiului B.



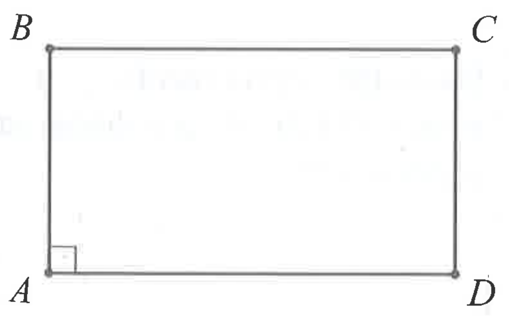
$m(\angle B) = \boxed{}$

Unghiurile A și B sunt alăturate, rezultă că sunt suplementare.

$m(\angle B) = 180° - m(\angle A) = 180° - 45° = 135°$

• Dreptunghiul

Definiție.
Se numește **dreptunghi** paralelogramul cu un unghi drept.



Dacă $ABCD$ este dreptunghi, atunci $ABCD$ este paralelogram și $m(\angle A) = 90°$

Teoremă

Diagonalele unui dreptunghi sunt congruente.

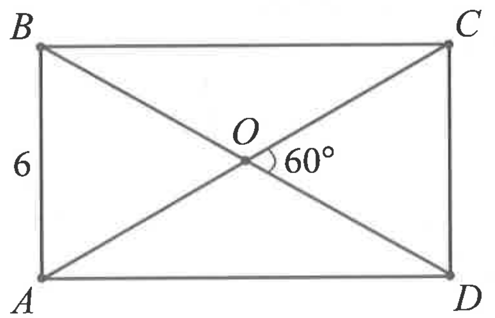
Reciproca teoremei

Dacă un paralelogram are diagonalele congruente, atunci paralelogramul este dreptunghi.

Observație.
Diagonalele paralelogramului se înjumătățesc în punctul lor de intersecție și formează 4 segmente congruente.

Exercițiu rezolvat:

Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $AB = 6$ cm și $m(\angle COD) = 60°$, unde $AC \cap BD = \{O\}$. Determinați lungimea diagonalei.



Rezolvare:

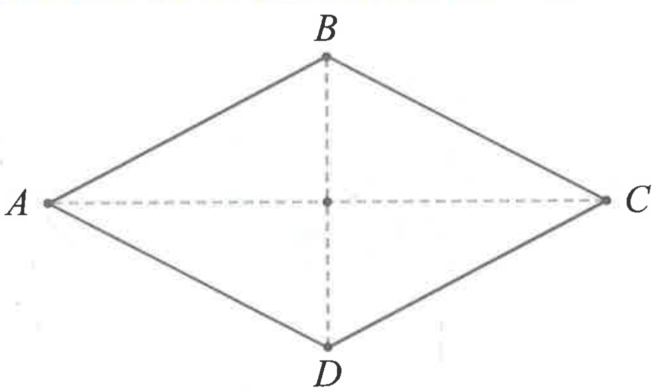
La dreptunghi laturile opuse sunt egale, deci $CD = 6$ cm. Diagonalele se înjumătățesc în punctul O și rezultă $AO = OB = OC = OD$

Observăm că ΔDOC are $DO \equiv OC$ și $m(\angle DOC) = 60° \Rightarrow \Delta COD$ este echilateral și $OC = CD = 6$ cm

Aflăm diagonala:
$AC = 2OC = 2 \cdot 6 = 12$ cm

Rombul

Definiție.
Se numește **romb** paralelogramul cu două laturi alăturate congruente.



Dacă $ABCD$ este romb, atunci $ABCD$ este paralelogram și $AB \equiv AD$.

Teoremă

Laturile rombului sunt congruente.

Teoremă

Diagonalele rombului sunt perpendiculare.

Reciproca teoremei

Dacă un paralelogram are diagonalele perpendiculare, atunci paralelogramul este romb.

Teoremă

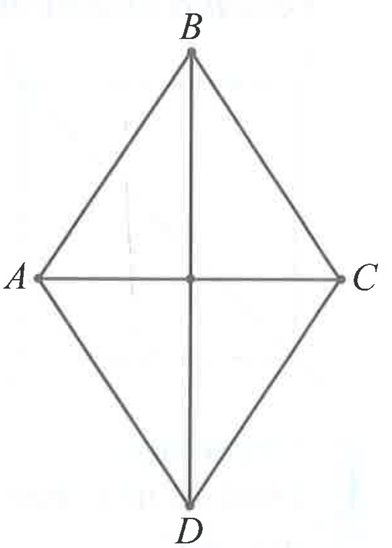
Diagonalele rombului sunt bisectoarele unghiurilor acestuia.

Reciproca teoremei

Dacă o diagonală a unui paralelogram este bisectoarea unuia dintre unghiurile acestuia, atunci paralelogramul este romb.

Exercițiu rezolvat din sesiunea suplimentară (iulie 2018)

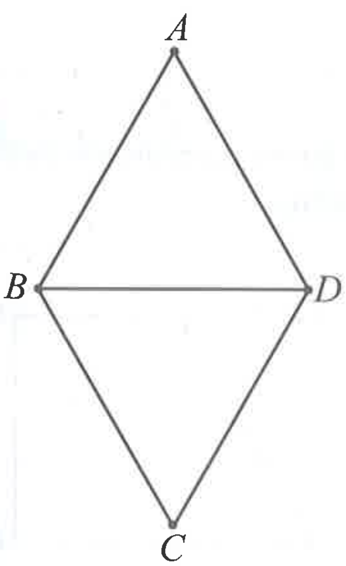
În desenul alăturat $ABCD$ este un romb, în care $m(\angle DBC) = 20°$. Scrieți în casetă măsura în grade a unghiului ABC.



$m(\angle ABC) = \boxed{}$

Dacă BD este diagonală în romb, atunci e bisectoarea $\angle ABC$, prin urmare $m(\angle ABD) = m(\angle DBC) = 20°$
$\Rightarrow m(\angle ABC) = 2 \cdot 20° = 40°$

• Caz particular *(des întâlnit în probleme)*



Dacă într-un romb un unghi are măsura de 60°, sau dacă una dintre diagonale este congruentă cu latura rombului, atunci acest romb poate fi împărțit de către diagonala mai mică în două triunghiuri echilaterale.

$m(\angle A) = m(\angle C) = 60°$
$m(\angle ABC) = m(\angle ADC) = 120°$
BD – bisectoare

$m(\angle ABD) = m(\angle CBD) = 60°$
$m(\angle ADB) = m(\angle CDB) = 60°$
$AB = AD = BD = BC = CD$
ΔABD și ΔCBD echilaterale

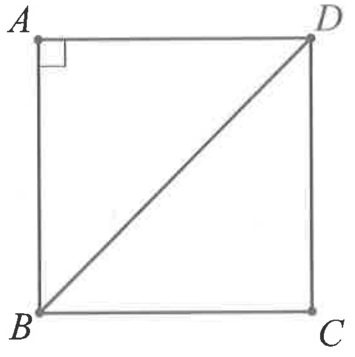
Pătratul

Definiție.
Patrulaterul convex care este și dreptunghi, și romb se numește **pătrat**.

Proprietățile pătratului:

1° Are toate laturile congruente.
2° Are toate unghiurile drepte.
3° Are diagonalele congruente și perpendiculare.
4° Diagonalele sunt bisectoarele unghiurilor.
5° Are exact 4 axe de simetrie și anume: cele două diagonale și cele două mediatoare ale laturilor sale.

Formula diagonalei pătratului:



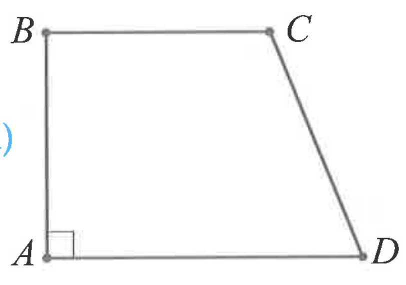
$$d = l\sqrt{2}$$

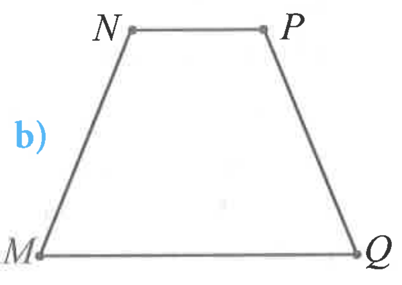
$$BD = AB\sqrt{2}$$

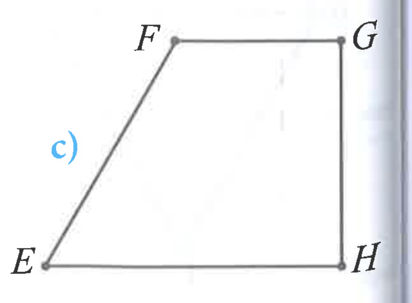
Observație.
Dacă ați uitat formula pentru diagonală, puteți aplica teorema lui Pitagora în ΔABD.
$BD^2 = AB^2 + AD^2$

Trapezul

Definiție.
Se numește **trapez** patrulaterul convex care are două laturi paralele și două neparalele. Laturile paralele se numesc **bazele trapezului**.

a)


b)


c)


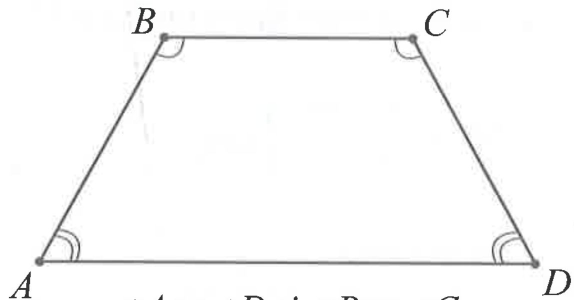
a) Trapezul dreptunghic este trapezul în care una dintre laturile neparalele este perpendiculară pe baze.

b) Trapezul isoscel este trapezul în care laturile neparalele sunt congruente.

c) Trapezul oarecare este trapezul care nu este nici dreptunghic, nici isoscel.

Teoremă

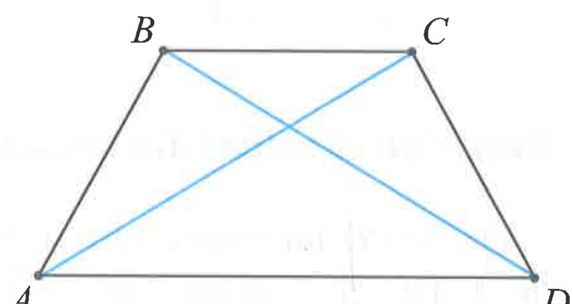
Un trapez este isoscel dacă și numai dacă unghiurile alăturate unei baze sunt congruente.



$\angle A \equiv \angle D$ și $\angle B \equiv \angle C$

Teoremă

Un trapez este isoscel dacă și numai dacă are diagonalele congruente.

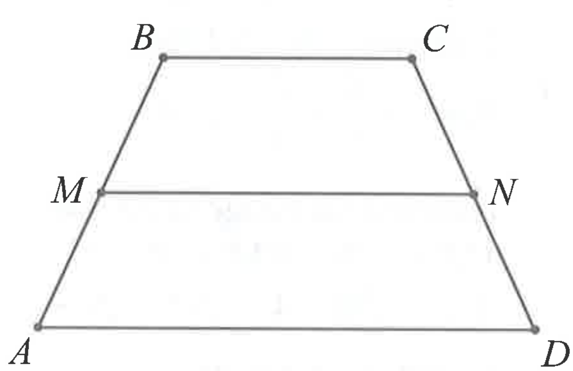


$AC \equiv BD$

Definiție.
Segmentul care unește mijloacele laturilor neparalele ale unui trapez se numește **linie mijlocie**.

Teoremă

Într-un trapez, linia mijlocie este paralelă cu bazele și are lungimea egală cu semisuma lungimilor acestora.

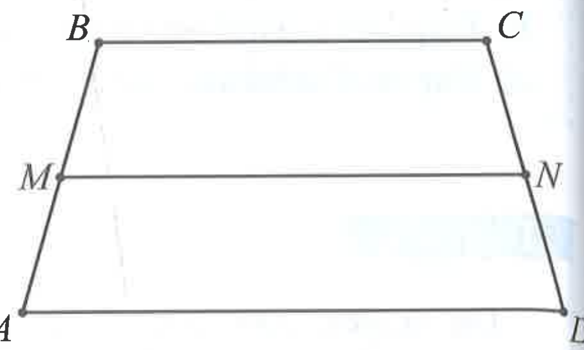


$$lm = \frac{B+b}{2}$$

$$MN = \frac{AD+BC}{2}$$

Exercițiu rezolvat din testul nr. 1 (februarie 2019)

În desenul alăturat MN e linia mijlocie a trapezului $ABCD$ cu bazele $AD = 10$ cm și $BC = 4$ cm. Scrieți în casetă lungimea liniei mijlocii MN.



$MN = \boxed{}$ cm

Rezolvare:

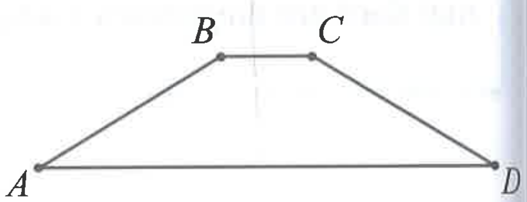
Linia mijlocie reprezintă media aritmetică a lungimilor bazelor trapezului.

$$lm = \frac{B+l}{2} = \frac{BC+AD}{2} = \frac{4+10}{2} = \frac{14}{2} = 7\,\text{cm}$$

Exercițiu rezolvat din sesiunea suplimentară (iulie 2018)

Fie $ABCD$ un trapez isoscel, în care $BC \parallel AD$, $AB = 4$ cm, $BC = \sqrt{3}$ cm și $m(\angle A) = 30°$.

Determinați lungimea bazei AD.



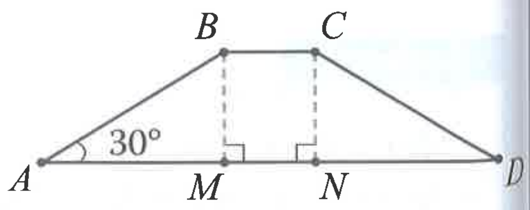
Rezolvare:

În primul rând, vom trasa înălțimile trapezului duse din vârfurile B și C pe baza mare.

$BCNM$ este dreptunghi $\Rightarrow\ BC = MN = \sqrt{3}$

Teorema $\angle 30°$ (ΔABM)

$$BM = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2\,\text{cm}$$



Teorema lui Pitagora ΔABM

$AM^2 = AB^2 - BM^2 = 4^2 - 2^2$

$AM = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\Delta AMB \equiv \Delta DNC$ (Criteriul CU)

$AM = ND = 2\sqrt{3}$

$AD = AM + MN + ND$

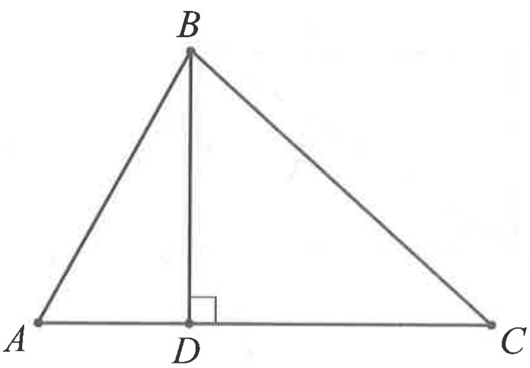
$AD = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} + 2\sqrt{3}$

$AD = 5\sqrt{3}$

Răspuns: $5\sqrt{3}$ cm

TABELUL CU ARII

<table>
<tr><th>Figura geometrică</th><th>Formule pentru arie</th></tr>
<tr><td>



ΔABC, $BD = h$ înălțime
AC –> baza corespunzătoare înălțimii AD.

</td><td>

① $A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot h \cdot b = \frac{1}{2} BD \cdot AC$

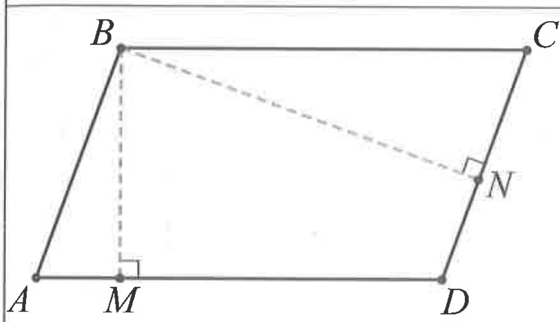
② $A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A$

③ $A_\Delta = \sqrt{s(s-AB)(s-BC)(s-AC)}$,
unde s este semiperimetrul.

④ $A_\Delta = \frac{C_1 \cdot C_2}{2}$, dacă Δ este dreptunghic și catetele sunt C_1 și C_2

⑤ $A_\Delta = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, dacă Δ este echilateral

</td></tr>
<tr><td>



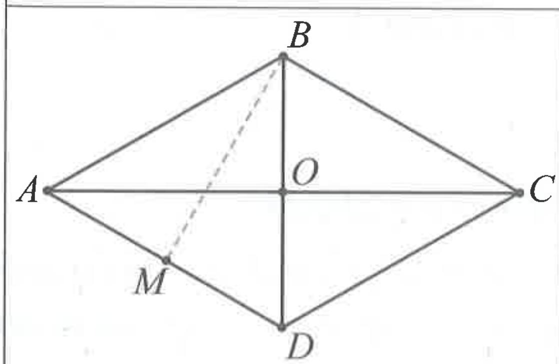
BM –> înălțimea corespunzătoare bazei AD
BN –> înălțimea corespunzătoare bazei DC

</td><td>

① $A = b \cdot h$
$A = BM \cdot AD$
$A = BN \cdot DC$

② $A = AB \cdot \mathrm{AD} \cdot \sin A$

</td></tr>
<tr><td>



AC, BD –> diagonale
BM –> înălțimea corespunzătoare bazei AD

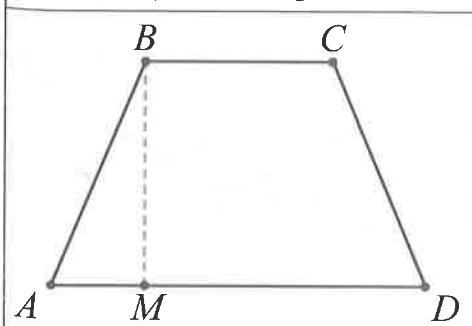
</td><td>

① $A = h \cdot b = BM \cdot AD$

② $A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{AC \cdot BD}{2}$

③ $A = AB^2 \cdot \sin A$

</td></tr>
<tr><td>



</td><td>

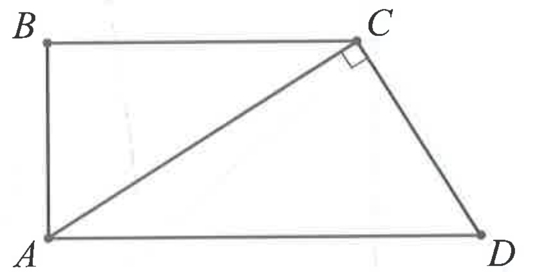
① $A = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$

$A = \frac{(AD+BC) \cdot BM}{2}$

</td></tr>
</table>

Exercițiu rezolvat din testul nr. 2 (februarie 2019)

Fie trapezul dreptunghic $ABCD$, în care $AD \parallel BC$, $m(\angle ABC) = 90°$, $m(\angle ADC) = 30°$, $AC = 4$ cm. Diagonala AC este perpendiculară pe latura CD. Determinați aria trapezului $ABCD$.



Rezolvare:

Teorema $\angle 30°$ (ΔACD)

$$AC = \frac{AD}{2}$$

$AD = 2 \cdot AC = 2 \cdot 4 = 8$ cm

$m(\angle BCD) = 180° - m(\angle ADC) = 180° - 30° = 150°$

$m(\angle BCA) = m(\angle BCD) - m(\angle ACD) = 150° - 90° = 60°$

$m(\angle BAC) = 180° - m(\angle B) - m(\angle ACD) = 180° - 90° - 60° = 30°$

Teorema $\angle 30°$ (ΔABC)

$$BC = \frac{AC}{2} = \frac{4}{2} = 2\,\text{cm}$$

Teorema lui Pitagora (ΔABC)

$AB^2 = AC^2 - BC^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$

$$AB = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}\,(\text{cm})$$

$$A_{trap} = \frac{(B+b)h}{2}$$

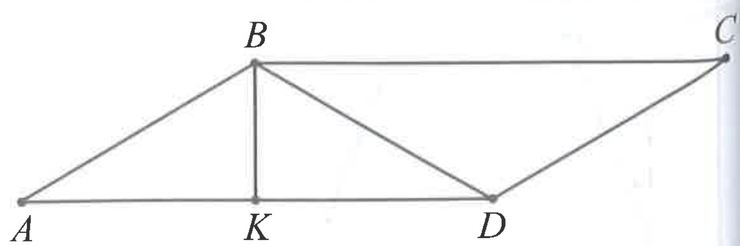
$$A_{ABCD} = \frac{(AD+BC)\cdot AB}{2} = \frac{(8+2)\cdot \cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{2}} = 10\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$$

Răspuns: $10\sqrt{3}\,\text{cm}^2$

Exercițiu rezolvat din testul nr. 1 (februarie 2022)

Fie $ABCD$ un paralelogram, în care $m(\angle BAD) = 30°$, iar înălțimea BK este de $3\sqrt{3}$ cm și împarte latura AD în două segmente congruente. Determinați aria paralelogramului $ABCD$.

Rezolvare:



Teorema $\angle 30°$ (ΔABK)

$$BK = \frac{AB}{2}$$

$$AB = 2\cdot BK = 2\cdot 3\sqrt{3}$$

$$AB = 6\sqrt{3}\,(\text{cm})$$

Teorema lui Pitagora (ΔABK)

$$AK^2 = AB^2 - BK^2 = \left(6\sqrt{3}\right)^2 - \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 108 - 27 = 81$$

$$AK = \sqrt{81} = 9(\text{cm})$$

Dacă K este mijlocul AD, atunci $AK = KD = 9$ cm $\Rightarrow AD = 2 \cdot 9 = 18$ cm

$$A_{ABCD} = h \cdot b = BK \cdot AD = 3\sqrt{3} \cdot 18 = 54\sqrt{3}$$

Putem calcula aria paralelogramului și altfel:

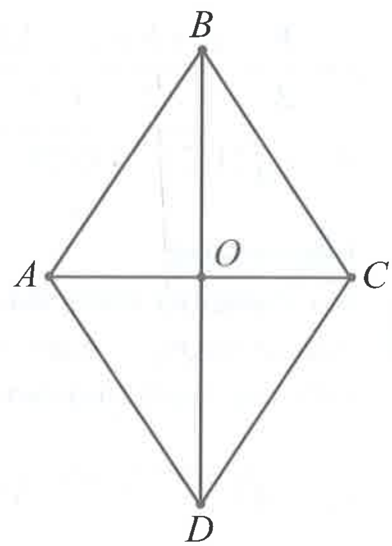
$$A_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin A = 6\sqrt{3} \cdot 18 \cdot \sin 30^\circ = 6\sqrt{3} \cdot \cancel{18} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = 6\sqrt{3} \cdot 9 = 54\sqrt{3}$$

Răspuns: $54\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

Exercițiu rezolvat din pretestare (martie 2024)

Într-un romb, un unghi este de 60°, iar diagonala mică este de 4 cm. Determinați aria rombului.

Rezolvare:



Notăm vârfurile cu A, B, C și D

$m(\angle B) = m(\angle D) = 60^\circ$

$m(\angle BAD) = 180^\circ - m(\angle B) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

Metoda (1)

Dacă AC este diagonala, atunci este și bisectoarea $\angle BAD$, rezultă $m(\angle BAD) = m(\angle DAC) = 60^\circ$

Trasăm diagonala BD și notăm cu O intersecția diagonalelor.

$$AO = OC = \frac{AC}{2} = \frac{4}{2} = 2\,\text{cm}$$

Teorema lui Pitagora (ΔAOB)

$AO^2 = AB^2 - BO^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$

$$AO = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}\,\text{cm} \Rightarrow AC = 2 \cdot AO = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\,\text{cm}$$

$$A_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{4 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}\,\text{cm}^2$$

Metoda (2)

Dacă $AB \equiv BC$ și $m(\angle B) = 60^\circ$, atunci ΔABC este echilateral și analog arătăm că ΔADC este echilateral congruent cu ΔABC.

$$A_{ABCD} = 2 \cdot A_{ABC} = 2 \cdot \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2}{4} \cdot 4^2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}\,\text{cm}^2$$

Metoda ③

Arătăm că ΔABC este echilateral cum am făcut la metoda 2.

$$A_{ABCD} = AB^2 \cdot \sin B = 4^2 \cdot \sin 60^\circ = 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}\,\text{cm}^2$$

Exercițiu rezolvat:

Determinați aria unui triunghi cu laturile a = 13 cm, b = 14 cm, c = 15 cm, folosind formula lui Heron.

Observație.
Vom utiliza formula lui Heron în triunghiurile ale căror laturi sunt cunoscute și lungimile sunt numere naturale, pentru o rezolvare mai simplă.

$$A_\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$s = \frac{P}{2} = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = \frac{42}{2} = 21\,\text{cm}$$

$$A_\Delta = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}$$

Observație.
Nu înmulțiți numerele de sub radical, ca după să extrageți radical dintr-un număr mare, deoarece se consumă mult timp.
Este mai ușor să descompunem numerele de sub radical.

$$A_\Delta = \sqrt{3 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt{3^2 \cdot 7^2 \cdot 4 \cdot 2^2} = 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 = 84\,\text{cm}^2$$

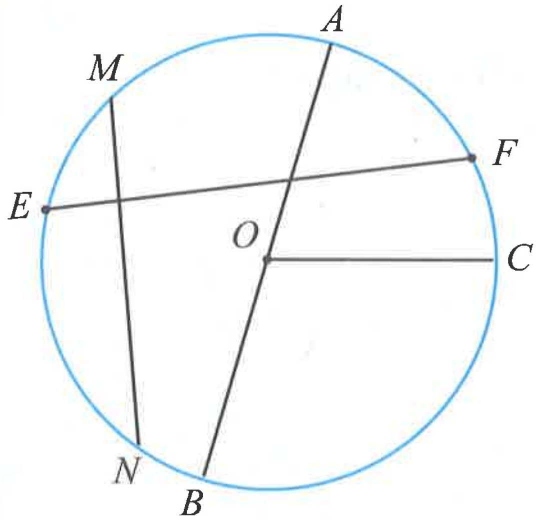
Răspuns: $84\,\text{cm}^2$

Cercul

Definiție.
Fie O un punct fix, oarecare, în plan și r un număr pozitiv. Se numește **cerc** de centru O și rază r mulțimea punctelor situate la distanța r de punctul O.

Notăm: $\mathscr{C}(O, r)$

Citim: Cercul de centru O și raza r.



Elementele cercului:

AB – diametru
AO, OC, OB – raze
MN, EF – coarde

Observăm că:
$AB = 2 \cdot AO = 2OB$
$d = 2 \cdot r$

Definiție.
Segmentul care unește două puncte de pe cerc se numește **coardă**.

Definiție.
Coarda care conține centrul cercului se numește **diametru**.

Definiție.
Cercul împreună cu interiorul său se numește **disc**.

Raportul dintre lungimea unui cerc și diametrul său este un număr constant irațional, notat cu litera grecească π (*se citește „pi”*) – $\pi \approx 3,1416$.

Lungimea cercului *(circumferința)* reprezintă mărimea conturului cercului și se obține înmulțind diametrul cu numărul π.

$$L = d \cdot \pi = 2\pi r$$

Aria discului reprezintă suprafața cuprinsă în interiorul cercului și se calculează cu formula:

$$A = \pi \cdot r^2$$

Exercițiu rezolvat din testul nr. 2 (februarie 2020)

Aria discului, mărginit de un cerc, este egală cu 4π cm^2.
Scrieți în casetă lungimea cercului.

$l_{cerc} = \boxed{}$ cm

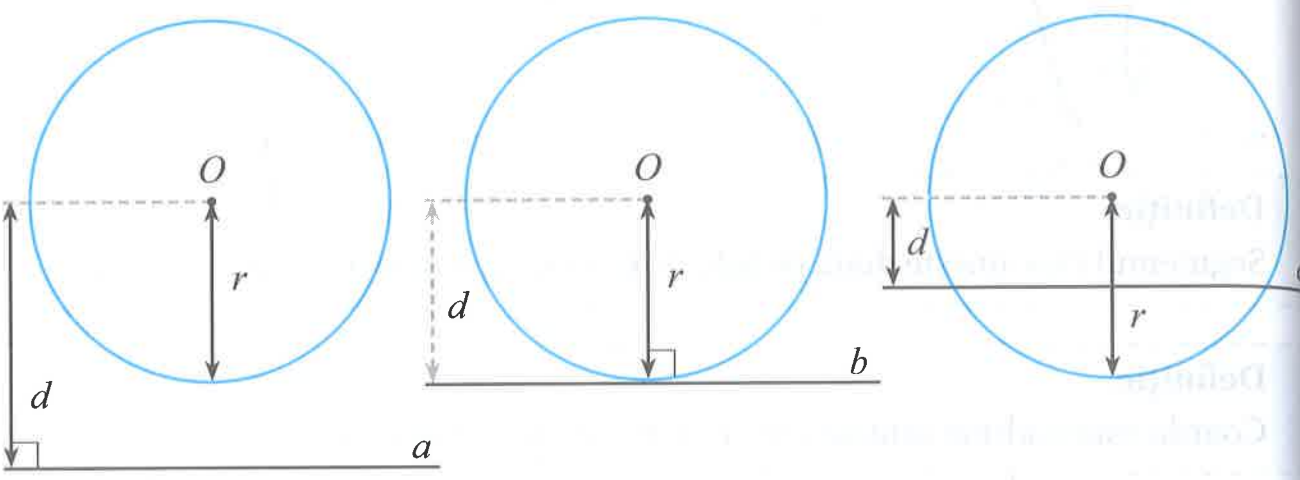
Rezolvare:

$$A_d = \pi \cdot r^2 = 4\pi\left(\text{cm}^2\right) \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = \sqrt{4} = 2(\text{cm})$$

$$l_{\text{cerc}} = 2\pi \cdot r = 2\pi \cdot 2 = 4\pi\ (\text{cm})$$

Răspuns: 4π cm

Pozițiile unei drepte față de cerc



• a este dreaptă exterioară cercului • Nu are puncte de intersecție cu cercul. • $d > r$	• b este dreaptă tangentă cercului • Are un singur punct de intersecție cu cercul. • $d = r$	• c este dreaptă secantă cercului • Are două puncte de intersecție cu cercul. • $d < r$

Exercițiu rezolvat din testul nr. 2 (februarie 2018)

Raza unui cerc de centru O este de 5 cm. La distanța de 3 cm de punctul O se consideră dreapta a.

Completați caseta cu una dintre expresiile: *„este tangentă la cerc”*, *„este secantă la cerc”* sau *„nu intersectează cercul”*, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată.

Dreapta a ☐

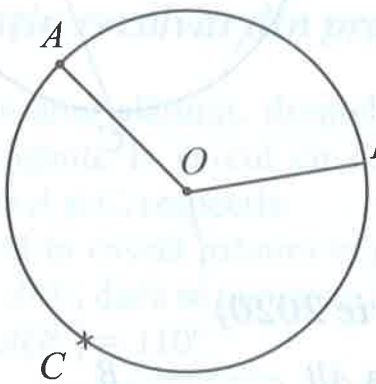
Explicație:

Trebuie să comparăm lungimea razei cu distanța de la centrul cercului până la dreaptă și observăm că $d < r$.

Suntem în al treilea caz prezentat mai sus, deci avem 2 puncte de intersecție și dreapta este secantă la cerc.

Definiții.

- Se numește **unghi la centru** unghiul cu vârful în centrul unui cerc.
- Partea cercului situată în interiorul unghiului la centru se numește **arc mic** al cercului.
- Partea cercului situată în exteriorul unghiului la centru se numește **arc mare** al cercului.



$\angle AOB$ este unghi la centru.

$\overset{\frown}{AB}$ este arcul mic.

$\overset{\frown}{ACB}$ este arcul mare.

A și B sunt **capetele arcelor**.

$\overset{\frown}{AB}$ și $\overset{\frown}{ACB}$ sunt **arce complementare**.

$m(\overset{\frown}{AB}) + m(\overset{\frown}{ACB}) = 360^\circ$

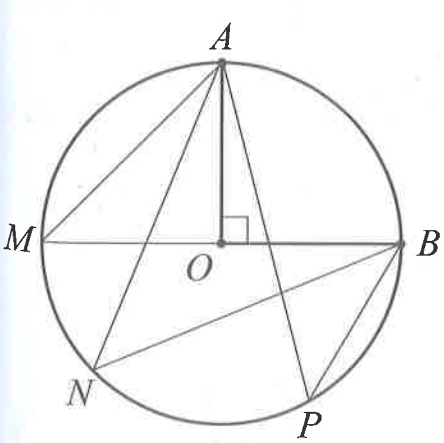
- Măsura unui arc mic este egală cu măsura unghiului la centru corespunzător arcului.

$$m\left(\overset{\frown}{AB}\right) = m(\angle AOB)$$

Teoremă

Măsura unui unghi înscris în cerc este jumătate din măsura arcului de cerc cuprins între laturile sale.

Exemplu:



$$m(\angle AOB) = m(\angle AB) = 90^\circ$$

$$m(\angle AMB) = \frac{m\left(\overset{\frown}{AB}\right)}{2} = 45^\circ$$

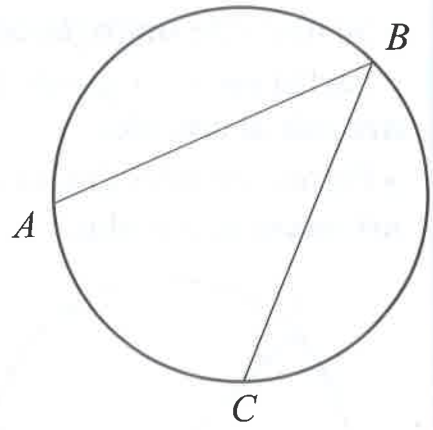
$$m(\angle ANB) = \frac{m\left(\overset{\frown}{AB}\right)}{2} = 45^\circ$$

$$m(\angle APB) = \frac{m\left(\overset{\frown}{AB}\right)}{2} = 45^\circ$$

$\angle AMB \equiv \angle ANB \equiv \angle APB$, deoarece toate aceste unghiuri sunt înscrise în cerc și sunt determinate de arcul AB.

Exercițiu rezolvat din testul nr. 1 (februarie 2018)

În desenul alăturat punctele A, B și C aparțin unui cerc, astfel încât $m(\angle ABC) = 45°$. Scrieți în casetă măsura în grade a arcului mic AC.



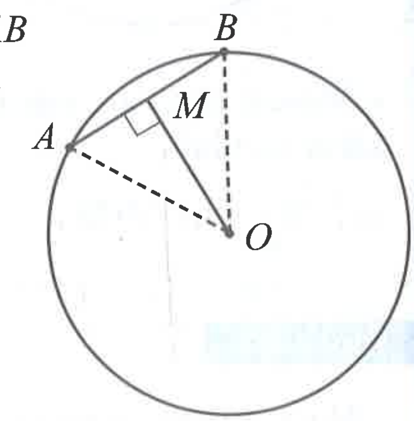
$m(\overset{\frown}{AC}) = \boxed{\quad\quad}$

$$m(\angle ABC) = \frac{m\left(\overset{\frown}{AC}\right)}{2}$$

$m(\overset{\frown}{AB}) = 2 \cdot m(\angle ABC) = 2 \cdot 45° = 90°$

Exercițiu rezolvat din testul nr. 1 (februarie 2020)

Într-un cerc de centru O și rază de 6 cm, coarda AB este congruentă cu raza. Determinați distanța de la punctul O la coarda AB.



Rezolvare:

$AO = OB = r = 6$ cm

Dacă $AB \equiv AO$, atunci ΔAOB este echilateral.

Fie M mijlocul laturii AB.

Dacă OM este mediană în Δ echilateral, atunci este și înălțime și rezultă că ΔAOM și ΔMOB sunt dreptunghice.

$OM \rightarrow$ distanța de la coarda AB la centrul cercului.

$$AM = MB = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3\,\text{cm}.$$

Teorema lui Pitagora (ΔAMO)

$MO^2 = AO^2 - AM^2 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27$

$MO = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

Răspuns: $3\sqrt{3}$ cm

Teoremă

Dacă o dreaptă este tangentă la un cerc, atunci ea este perpendiculară pe raza dusă în punctul de tangență.

Observație.

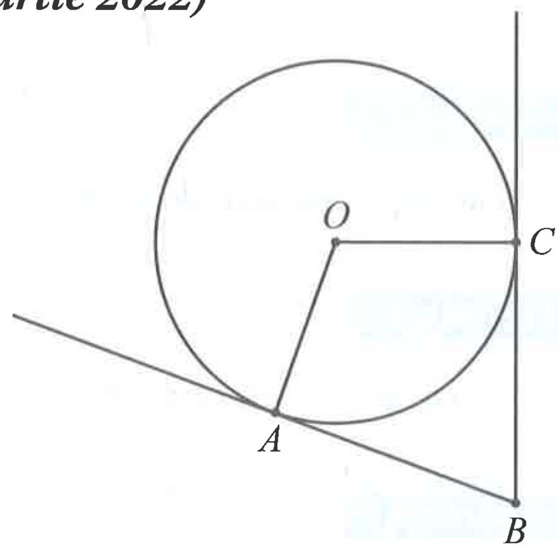
- Două tangente la același cerc, duse dintr-un punct exterior cercului, determină punctele de tangență a două segmente congruente.
- Semidreapta cu originea într-un punct exterior, care trece prin centrul cercului, este bisectoarea unghiului format de tangentele duse din acest punct la cerc.

Exercițiu rezolvat din pretestare (martie 2022)

În desenul alăturat, dreptele BA și BC sunt tangente la cercul cu centrul O în punctele A și C, respectiv.

Scrieți în casetă măsura în grade a unghiului ABC, dacă se cunoaște că $m(\angle AOC) = 110°$.

$m(\angle ABC) = \boxed{}$



Observăm că $BC \perp CO$ și $BA \perp AO$.

$ABCO$ este patrulater convex, deci suma unghiurilor este $360°$.

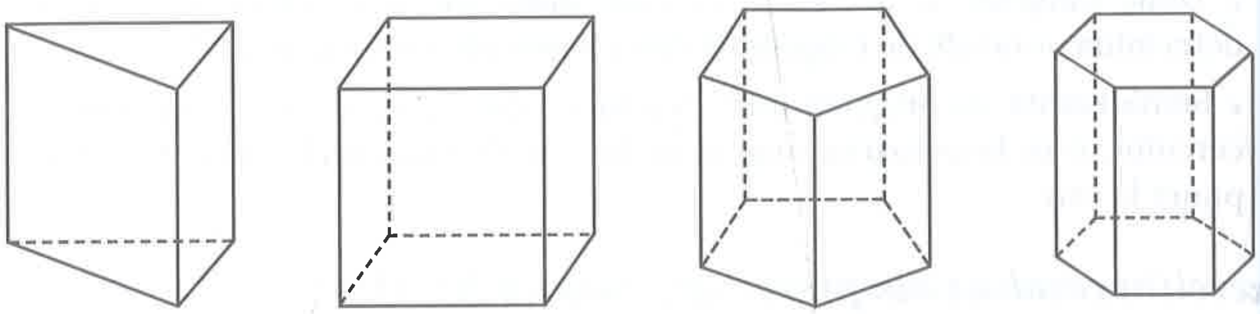
$m(\angle ABC) = 360° - m(\angle OAB) - m(\angle AOC) - m(\angle OCB) =$
$= 360° - 90° - 110° - 90° = 70°$

Poliedre

Definiție.

- **Poliedrul** este un corp geometric mărginit doar de suprafețe poligonale.
- Suprafețele poligonale ale poliedrului se numesc **fețe**, laturile fețelor sunt **muchii**, iar vârfurile muchiilor se numesc **vârfuri** ale poliedrului.
- Segmentul care unește două vârfuri ce nu aparțin aceleiași fețe se numește **diagonală** a poliedrului.
- **Prisma** este un poliedru format din două fețe congruente paralele, numite **baze**, și din toate segmentele cu extremitățile aparținând acestor baze. Celelalte fețe ale prismei se numesc **fețe laterale**. Laturile fețelor laterale se numesc **muchii laterale** ale prismei.
- Mulțimea punctelor prismei care nu aparțin bazelor și nici fețelor laterale se numește **interiorul prismei**.

Exemple de prisme:



Teoremă

Laturile omoloage ale bazelor prismei sunt paralele și congruente.

Teoremă

Fețele laterale ale prismei sunt paralelograme.

Teoremă

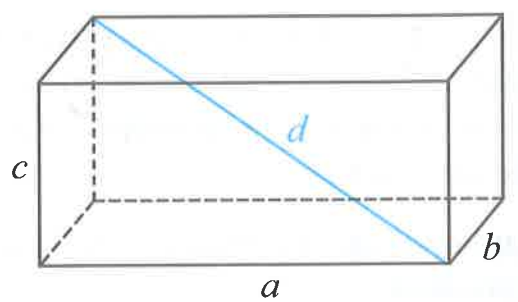
Muchiile laterale ale prismei sunt paralele și congruente.

Definiție.
O **dreaptă este perpendiculară pe un plan** dacă ea este perpendiculară pe două drepte concurente ale acestui plan.

Teoremă

Pătratul diagonalei unui paralelipiped dreptunghic este egal cu suma pătratelor celor trei dimensiuni liniare ale acestuia:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$



Observație.

1. Formula poate fi scrisă și altfel:

$$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

2. La cub toate muchiile sunt congruente, deci diagonala se va calcula cu formula:

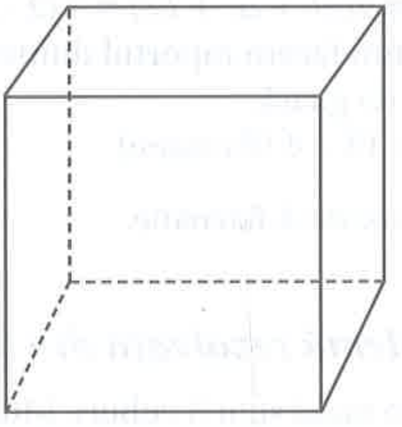
$$d^2=a^2+a^2+a^2$$

$$d^2=3a^2 \Rightarrow d=\sqrt{3a^2}=a\sqrt{3}$$

Exercițiu rezolvat din testul nr. 1 (februarie 2020)

Diagonala unui cub este egală cu $3\sqrt{11}$ cm.
Determinați lungimea muchiei cubului.

Rezolvare:



Formula diagonalei la cub:

$$d=a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a=\frac{d}{\sqrt{3}}=\frac{^{\sqrt{3})}3\sqrt{11}}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}\sqrt{11}}{\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$a=\frac{\cancel{3}\sqrt{3\cdot 11}}{\cancel{3}}=\sqrt{33}\text{ cm}.$$

Teoremă

Aria totală a unui paralelipiped dreptunghic este

$\boldsymbol{A_t=2(ab+ac+bc)}$, unde a, b, c sunt dimensiunile.

Teoremă

Aria totală a unui cub este $A_t=6\cdot A_f$, unde A_f este aria unei fețe (pătrat).

Putem scrie altfel: $\boldsymbol{A_t=6\cdot a^2}$

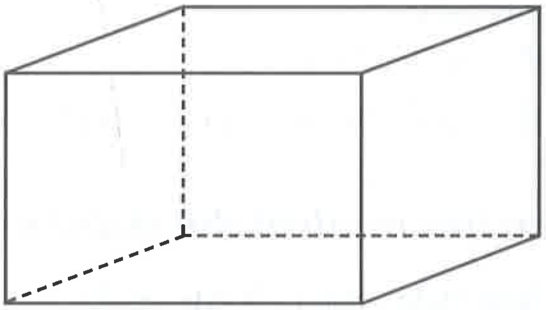
Teoremă

Aria laterală a unei prisme drepte este egală cu produsul dintre perimetrul bazei și înălțimea prismei:

$$\boldsymbol{A_l=P_b\cdot h}$$

Exercițiu rezolvat din testul nr. 2 (februarie 2015)

O cutie cu capac are forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 20 cm, 30 cm și 40 cm. Determinați numărul de flacoane cu guașă, necesare pentru a vopsi pe exterior toate fețele cutiei, dacă un flacon ajunge pentru a vopsi o suprafață de 13 dm^2.



Rezolvare:

Vom aduce toate dimensiunile la aceeași unitate de măsură.

10 cm = 1 dm

Dimensiunile paralelipipedului sunt 2 dm, 3 dm și 4 dm.

$A_t = 2(ab + ac + bc) = 2\,(2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4) = 2(6 + 8 + 12) = 2 \cdot 26 = 52\ dm^2$

Acum facem raportul dintre aria totală și suprafața pe care o poate vopsi flaconul de guașă.

52 : 13 = 4 (flacoane)

Răspuns: 4 flacoane.

Problemă rezolvată din testul nr. 2 (februarie 2013)

Pe o masă sunt 3 cuburi. Muchiile a două dintre ele sunt de 5 cm și 12 cm. Determinați lungimea muchiei celui de-al treilea cub, dacă știm că pentru a vopsi suprafața celui de-al treilea cub se folosește aceeași cantitate de vopsea câtă ar fi necesară pentru a vopsi suprafața celorlalte două cuburi.

Rezolvare:

Notăm cu A_1 și A_2 ariile totale la cuburile mai mici și A_3 aria totală a cubului mai mare.

Formulă pentru aria cubului:

$A_{cub} = 6 \cdot A_f = 6 \cdot a^2$

Dacă pentru cuburile mai mici s-a folosit aceeași cantitate de vopsea câtă a fost folosită la al treilea cub, atunci:

$A_1 + A_2 = A_3$

$6 \cdot 5^2 + 6 \cdot 12^2 = 6 \cdot a^2$, unde a este muchia celui de-al treilea cub.

Observăm că toată ecuația poate fi împărțită la 6 și vom obține:

$5^2 + 12^2 = a^2$

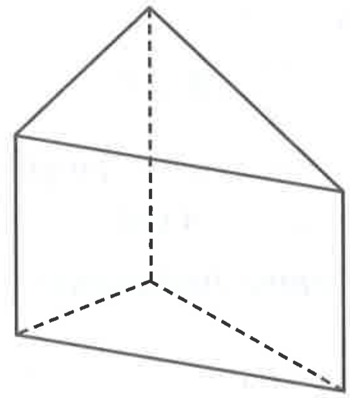
$25 + 144 = 169 = 13^2 = a^2$

$\Rightarrow a = 13$

Răspuns: Muchia celui de-al treilea cub este 13 cm.

Exerciţiu rezolvat din testul nr. 1 (februarie 2025)

O prismă dreaptă are baza un triunghi dreptunghic cu catetele de 3 cm și 4 cm. Aria laterală a prismei este egală cu 24 cm^2. Determinați înălțimea prismei.



Rezolvare:

Pornim de la formula pentru aria laterală a prismei:

$A_l = P_b \cdot h$

Observăm că putem deduce înălțimea prismei din această formulă $h = \frac{A_l}{P_b}$, dar mai întâi vom afla perimetrul bazei.

Teorema lui Pitagora (triunghiul de la bază)

$C_1^2 + C_2^2 = Ip^2$

$3^2 + 4^2 = Ip^2$

$9 + 16 = Ip^2$

$25 = Ip^2$

$Ip = \sqrt{25} = 5$

Perimetrul bazei este $C_1 + C_2 + Ip = 3 + 4 + 5 = 12$ cm.

Acum aflăm înălțimea prismei:

$$h = \frac{24}{12} = 2\,\text{cm}$$

Răspuns: 2 cm.

Teoremă

Volumul prismei este egal cu produsul dintre aria bazei și înălțimea prismei:

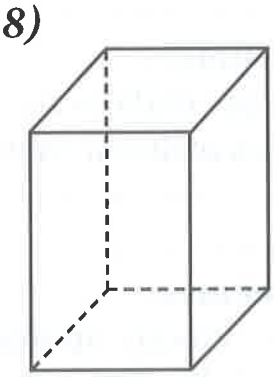
$$\boldsymbol{V = A_b \cdot h}$$

Exerciţiu rezolvat din testul nr. 1 (februarie 2018)

Lungimea înălțimii unei prisme patrulatere regulate este de două ori mai mare decât lungimea laturii bazei prismei.

Volumul prismei este egal cu 16 cm^3.

Determinați lungimea înălțimii prismei.



Rezolvare:

Notăm lungimea muchiei cu x și lungimea înălțimii notăm cu $2x$.

Dacă prisma este patrulateră regulată, atunci baza este pătrat și aria bazei este x^2.

$V = A_b \cdot h$

$16 = x^2 \cdot 2x$

$16 = 2x^3$

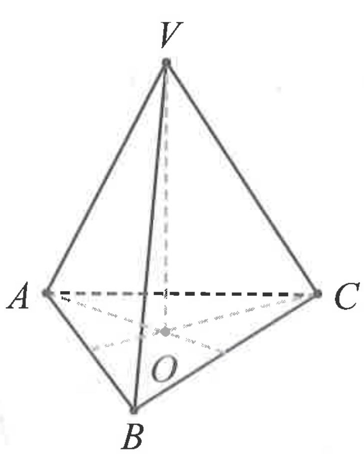
$x^3 = \dfrac{16}{2} = 8 = 2^3$

$\Rightarrow x = 2$ cm $\rightarrow$ lungimea muchiei

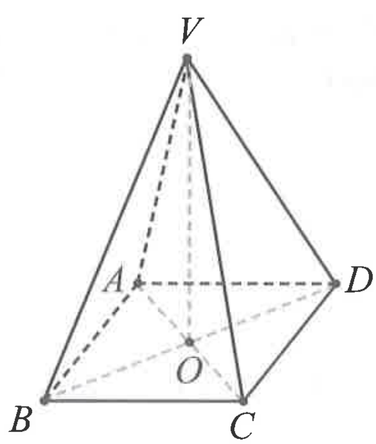
$h = 2 \cdot 2 = 4$ cm

Răspuns: Înălțimea prismei este de 4 cm.

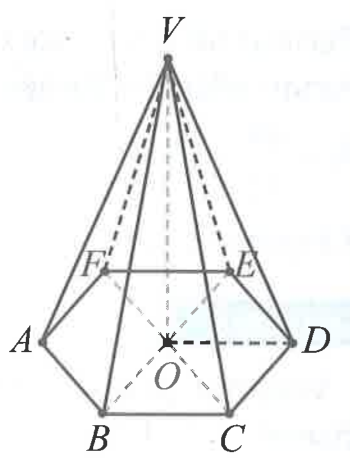
Definiție.
Piramida este un poliedru format dintr-o suprafață poligonală, numită **baza piramidei**, un punct care nu aparține bazei, numit **vârful piramidei**, și toate segmentele cu o extremitate în vârful piramidei, iar cealaltă extremitate aparținând bazei.



Piramidă triunghiulară



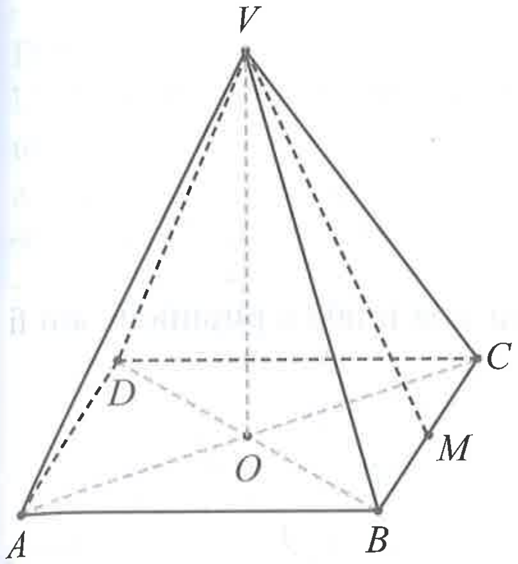
Piramidă patrulateră



Piramidă hexagonală

Definiție.
O piramidă se numește **regulată**, dacă baza ei este un poligon regulat, iar baza înălțimii coincide cu centrul acestui poligon.

Definiție.
Se numește **apotemă** a unei piramide regulate înălțimea unei fețe laterale dusă din vârful piramidei.



$V \rightarrow$ vârful piramidei
$VA, VB, VC, VD \rightarrow$ muchii laterale
$\Delta AVS, \Delta BVC, \Delta CVD, \Delta AVD \rightarrow$ fețe laterale
$AB, BC, CD, AD \rightarrow$ muchiile bazei
$ABCD \rightarrow$ baza
$VO \rightarrow$ înălțimea piramidei
$VM \rightarrow$ apotemă

Definiție.
Piramidele triunghiulare se numesc **tetraedre**, iar dacă toate muchiile unui tetraedru sunt congruente, atunci acesta se numește **tetraedru regulat**.

Teoremă

Aria laterală a unei piramide regulate este egală cu semiprodusul dintre perimetrul bazei și apotema piramidei.

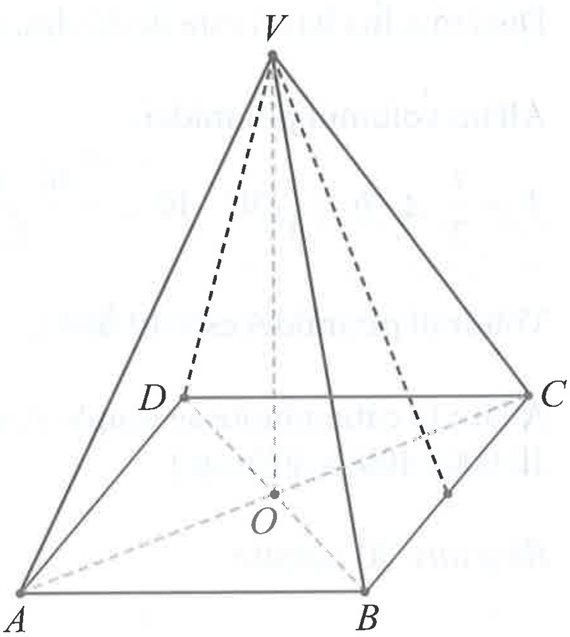
$A_l = \dfrac{1}{2} P \cdot a_p$, unde P este perimetrul bazei și a_p este apotema.

Exercițiu rezolvat din testul nr. 2 (februarie 2022)

Aria bazei unei piramide patrulatere regulate este egală cu 25 cm². Determinați aria laterală, dacă se cunoaște că apotema piramidei este de trei ori mai mare decât latura bazei.

Rezolvare:
Aria bazei este l^2, deoarece baza are formă de pătrat:
$l = \sqrt{A_b} = \sqrt{25} = 5\,\text{cm}$

Aflăm perimetrul bazei:
$P = 4 \cdot l = 4 \cdot 5 = 20\,\text{cm}$
Aflăm apotema piramidei:
$a_p = 3 \cdot l = 3 \cdot 5 = 15\,\text{cm}$



Aflăm aria laterală:

$$A_l = \frac{1}{2} \cdot P \cdot a_p = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 15 = 10 \cdot 15 = 150 \text{ cm}^2$$

Răspuns: 150 cm²

Observație.

Dacă în problema precedentă ni s-ar fi cerut aria totală a piramidei, am fi calculat:

$A_t = A_l + A_b = 150\,\text{cm}^2 + 25\,\text{cm}^2 = 175\,\text{cm}^2$

Teoremă

Volumul piramidei este egal cu o treime din produsul dintre aria bazei și înălțimea piramidei:

$$V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$$

Problemă rezolvată din pretestare (februarie 2025)

Un rezervor de forma unei piramide patrulatere regulate cu muchia bazei de 3 m și înălțimea de 4 m, este umplut cu apă printr-o conductă cu debitul de 400 l/min.

Determinați în câte minute se va umple rezervorul.

Rezolvare:

Cunoaștem că $1l = 1\text{ dm}^3$, vom transforma dimensiunile piramidei în decimetri. Deci muchia bazei este de 30 dm, iar înălțimea de 40 dm.

Aflăm volumul piramidei:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 30^2 \cdot 40 = \frac{{}^{10}\cancel{30} \cdot 30 \cdot 40}{\cancel{3}_1} = 12000 \text{ dm}^3$$

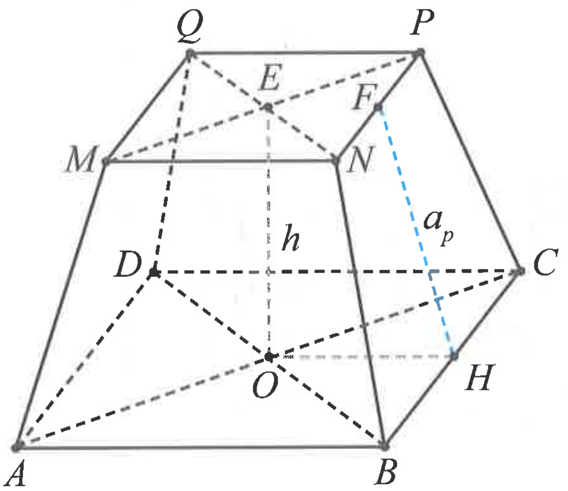
Volumul piramidei este 12 000 l.

Aflăm în câte minute se umple rezervorul:

12 000 : 400 = 30 (min.)

Răspuns: 30 minute

Definiție.
Un **trunchi de piramidă** este un corp geometric obținut prin secționarea unei piramide cu un plan paralel cu baza, situat între baza piramidei și vârful acesteia. Corpul rezultat este mărginit de două poligoane asemenea (bazele), situate în plane paralele, și de fețe laterale care sunt trapeze.



P_B: Perimetrul bazei mari

P_b: Perimetrul bazei mici

A_B: Aria bazei mari

A_b: Aria bazei mici

h: Înălțimea trunchiului

a_p: Apotema trunchiului

Formule importante pentru trunchiul de piramidă

- **Aria laterală** (A_l)

$$A_l = \frac{(P_B + P_b) \cdot a_p}{2}$$

- **Aria totală** (A_t)

$$A_t = A_l + A_B + A_b$$

- **Volumul** (V)

$$V = \frac{h}{3}\left(A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b}\right)$$

Exercițiu rezolvat:

Un arhitect proiectează o vază decorativă în formă de trunchi de piramidă triunghiulară regulată cu latura bazei mari de 24 cm, latura bazei mici de 12 cm, înălțimea vazei este 30 cm. Arhitectul dorește să afle câți litri de apă încap în această vază.

Rezolvare:

La început calculăm ariile bazelor cu ajutorul formulei ariei unui triunghi echilateral cu latura *a:*

$$A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Aflăm aria bazei mari:

$$A_B = \frac{L^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{24^2\sqrt{3}}{4} = \frac{576\sqrt{3}}{4} = 144\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

Aflăm aria bazei mici:

$$A_b = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{12^2\sqrt{3}}{4} = \frac{144\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

Aflăm volumul:

$$V = \frac{h}{3}\left(A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b}\right)$$

$$V = \frac{30}{3}\left(144\sqrt{3} + 36\sqrt{3} + \sqrt{144\sqrt{3}\cdot 36\sqrt{3}}\right)$$

$$V = 10\left(180\sqrt{3} + 72\sqrt{3}\right) = 2520\sqrt{3}\ \text{cm}^3$$

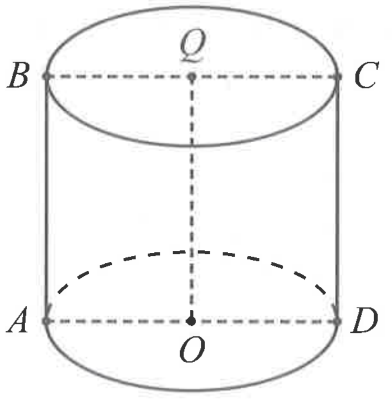
Știm că 1000 cm³ = 1 dm³ = 1*l*

Răspuns: $2{,}52\sqrt{3}\, l$

Corpuri rotunde

Definiție.
Corpul geometric format din două discuri congruente, situate în plane paralele, și din toate segmentele cu extremitățile aparținând acestor discuri se numește **cilindru circular**.
Cele două discuri ale cilindrului circular se numesc **baze ale cilindrului**.

Definiție.
Corpul geometric obținut prin rotația completă a unei suprafețe dreptunghiulare în jurul uneia dintre laturile sale se numește **cilindru circular drept**.



BC: Diametrul bazei (*d*)
AD: Diametrul bazei (*d*)
OQ: Înălțimea (*h*)
AB: Generatoare (*g*)
CD: Generatoare (*g*)
AO: Raza bazei (*r*)

Observație.

Suprafața dreptunghiulară $ABCD$ se numește **secțiune axială** a cilindrului, iar dreapta OQ este **axa de simetrie** a cilindrului.

Formule importante pentru cilindrul circular drept

- **Aria laterală (A_l)**

$$A_l = 2\pi rh$$

- **Aria totală (A_t)**

$$A_t = A_l + 2A_b = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$

- **Volumul cilindrului (V_{cil})**

$$V_{cil} = A_b \cdot h = \pi r^2 h$$

Exercițiu rezolvat din sesiunea de bază (iunie 2017)

Ion și doi prieteni ai săi au hotărât să bea câte un pahar cu suc. Determinați dacă un litru de suc este suficient pentru a umple trei pahare de forma unui cilindru circular drept cu raza bazei de 3 cm și înălțimea de 10 cm.

Rezolvare:

Aflăm volumul unui pahar cu formula volumului cilindrului:

$V_{cil} = \pi r^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 10 = 90\pi \text{ cm}^3$

Aflăm volumul la 3 pahare:

$3 \cdot V_{cil} = 3 \cdot 90\pi = 270\pi = 270 \cdot 3{,}14 = 847{,}8 \text{ cm}^3$

Transformăm un litru în cm^3:

$1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$

Observăm că volumul la 3 pahare este mai mic decât 1 L, rezultă că sucul va fi suficient.

Exercițiu rezolvat din pretestare (aprilie 2016)

O cisternă are forma unui cilindru circular drept cu raza bazei de 1 m și înălțimea de 3 m. Determinați dacă 4 cutii cu vopsea vor fi suficiente pentru vopsirea suprafeței totale a cisternei, dacă se știe că suprafața care poate fi vopsită cu conținutul unei cutii este de 6 m^2.

Rezolvare:

Aflăm suprafața cisternei cu ajutorul formulei pentru suprafața totală a cilindrului:

$A_t = A_l + 2A_b = 2\pi r(h + r) = 2 \cdot \pi \cdot 1(3 + 1)$

$A_t = 8\pi = 8 \cdot 3{,}14 = 25{,}12\ m^2$

Aflăm ce suprafață putem vopsi cu 4 cutii cu vopsea:

$4 \cdot 6\ m^2 = 24\ m^2$

Răspuns: Cu cele 4 cutii cu vopsea nu putem vopsi întreaga suprafață a cisternei, deoarece este mai mare.

Con circular drept

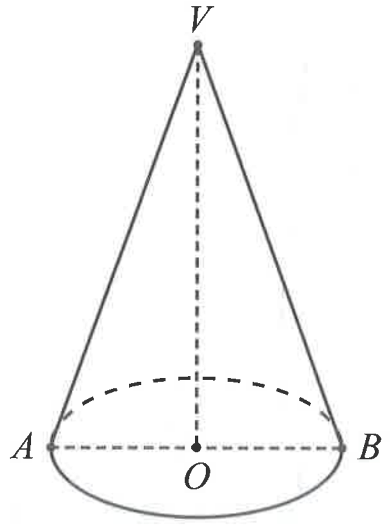
Definiție.

Fie D un disc și V un punct care nu aparține planului discului.

- Corpul geometric format din toate segmentele cu o extremitate V și cealaltă aparținând discului D se numește **con circular**.
- Discul D se numește **baza** conului, iar punctul V este **vârful** conului.
- Segmentele cu o extremitate V și cealaltă aparținând cercului care mărginește baza conului se numesc **generatoare**.

Definiție.

Corpul geometric obținut prin rotația completă a unei suprafețe triunghiulare, mărginită de un triunghi, în jurul uneia dintre laturile sale se numește **con circular drept**.



AB: Diametrul bazei (d)

VO: Înălțimea (h)

AV: Generatoarea (g)

AO: Raza bazei (r)

Observație.

Suprafața triunghiului ABV se numește **secțiune axială** a conului, iar VO este **axa de simetrie**.

Formule importante pentru conul circular drept

- **Aria laterală (A_l)**

$$A_l = \pi \cdot gr$$

- **Aria totală (A_t)**

$$A_t = A_l + A_b = \pi gr + \pi r^2 = \pi r(g + r)$$

- **Volumul conului (V_{con})**

$$V_{con} = \frac{1}{3} A_b \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

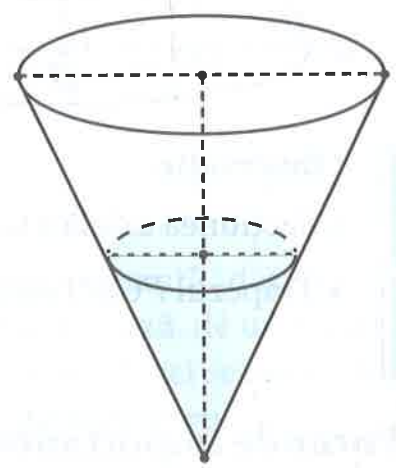
Observație.

La conul circular drept, înălțimea, generatoarea și raza formează un triunghi dreptunghic în punctul care coincide cu centrul bazei.
Dacă aplicăm teorema lui Pitagora în acel triunghi, vom obține:

$$g^2 = r^2 + h^2$$

Exercițiu rezolvat din sesiunea suplimentară (iulie 2018)

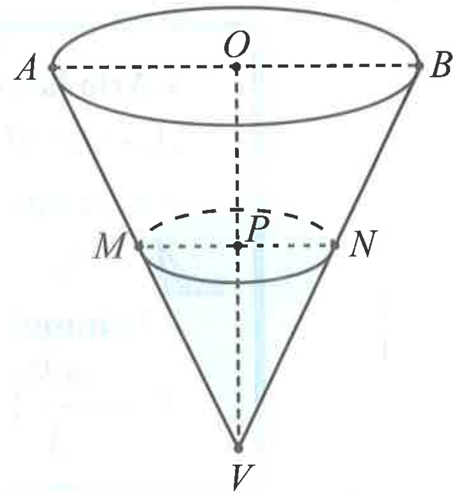
Pentru un experiment chimic un elev are nevoie de 20 cm^3 de alcool etilic. El a turnat alcool etilic într-un recipient de forma unui con circular drept cu raza bazei de 6 cm și înălțimea de 4 cm, umplând recipientul până la jumătate din înălțimea lui (*vedeți desenul*).



Determinați dacă elevul a turnat în recipient suficient alcool etilic.

Rezolvare:

Notăm pe desen punctele importante cu litere.



Avem:

$AO = OB = 6 \text{ cm} = r$

$VO = h = 4 \text{ cm}$

$$\left.\begin{array}{l} BO \perp OV \\ NP \perp OV \end{array}\right\} \Rightarrow OB \parallel PN$$

Dacă P e mijlocul OV și $OB \parallel PN$, atunci PN este linie mijlocie în ΔVBO.

$$\Rightarrow PN = \frac{OB}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$$

$$VP = OV : 2 = 4 : 2 = 2 \text{ cm}$$

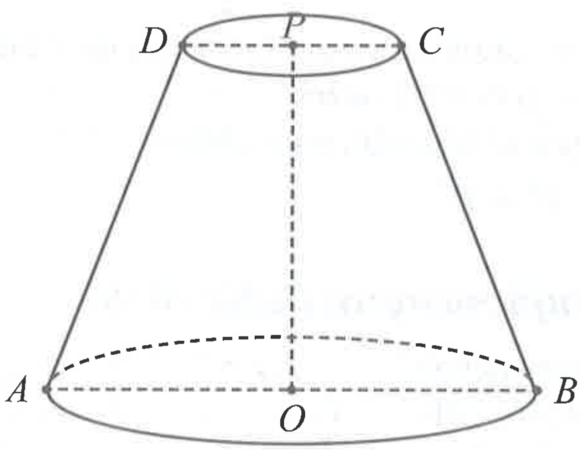
Aflăm volumul alcoolului etilic din recipient:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 3^2 \cdot 2 = 6\pi = 6 \cdot 3{,}14 \simeq 18{,}84 \text{ cm}^3$$

Rezultatul obținut este mai mic decât cantitatea de alcool necesară pentru experiment.

Răspuns: Nu este suficient alcool în recipient.

Definiție.
Un **trunchi de con** este corpul geometric obținut prin secționarea unui con cu un plan paralel cu baza, păstrând partea dintre planul de secționare și baza inițială.



$DP = PC = r \rightarrow$ raza bazei mici

$AO = OB = R \rightarrow$ raza bazei mari

$DC \rightarrow$ diametrul bazei mici

$AB \rightarrow$ diametrul bazei mari

$OP = h \rightarrow$ înălțimea trunchiului

$AD = CB = g \rightarrow$ generatoarea

Observație.

- Secțiunea axială a unui trunchi de con circular drept este un **trapez isoscel**.
- Trapezul *PCBO* este dreptunghic și putem deduce formula:

$$G^2 = h^2 + (R - r)^2$$

Formule importante pentru trunchiul de con

- **Aria laterală (A_l)**

$$A_l = \pi \cdot g(R + r)$$

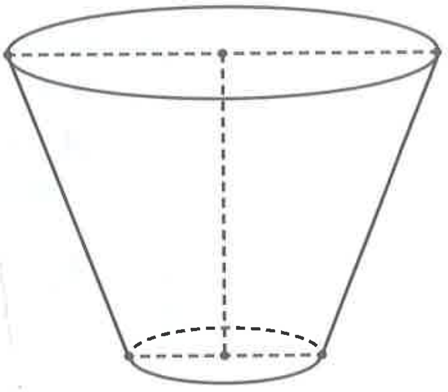
- **Aria totală (A_t)**

$$A_t = A_l + A_b + A_B = \pi g(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2$$

- **Volumul (V)**

$$V = \frac{\pi R}{3}\left(R^2 + r^2 + R \cdot r\right)$$

Exercițiu rezolvat din pretestare (martie 2023)



O găleată fără capac are forma unui trunchi de con circular drept cu razele bazelor de 10 cm și 15 cm și generatoarea de 25 cm. Determinați dacă 3 flacoane cu vopsea vor fi suficiente pentru a vopsi suprafața exterioară a găleții, dacă se cunoaște că vopseaua dintr-un flacon ajunge pentru a vopsi o suprafață de 725 cm^2.

Rezolvare:

Aflăm aria laterală a găleții:

$A_l = \pi(R + r) \cdot g = \pi(15 + 10) \cdot 25 = \pi \cdot 25^2 = 625\pi$ (cm^2)

Aflăm aria bazei mici:

$A_b = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 10^2 = 100\pi$ (cm^2)

Dacă găleata nu are capac, atunci aria suprafeței vopsite este alcătuită din aria laterală și aria bazei mici.

$A_t = 625\pi + 100\pi = 725\pi = 725 \cdot 3{,}14 \simeq 2276{,}5$ cm^2

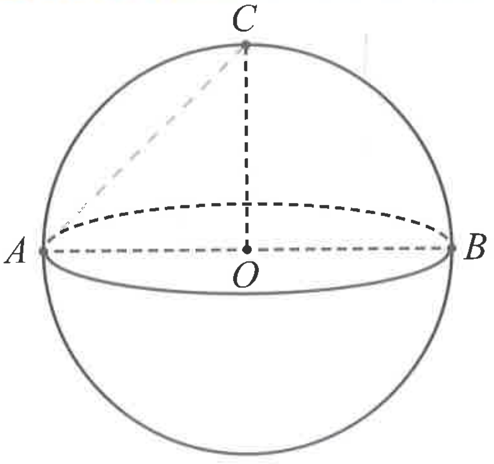
Aflăm ce suprafață poate fi vopsită cu 3 flacoane:

$3 \cdot 725 = 2175$ cm^2

Răspuns: Cele 3 flacoane nu sunt suficiente pentru a vopsi găleata.

• Sfera

Definiție.
Sfera este o suprafață geometrică tridimensională, formată din toate punctele din spațiu care se află la aceeași distanță, numită **rază**, de un punct fix, numit **centru**. Segmentul care unește două puncte ale sferei se numește **coardă**, iar coarda ce conține centrul sferei se numește **diametru**.
Sfera împreună cu interiorul ei se numește **bilă**.



$AB \to$ diametru

$AO = OC = OB \to$ raze

$AC \to$ coardă

Formule importante pentru sferă

- **Aria sferei (A_s)**

$$A_s = 4\pi r^2$$

- **Volumul corpului sferic (V_s)**

$$V_s = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Exercițiu rezolvat din sesiunea suplimentară (iulie 2015)

O bilă din metal cu forma unui corp sferic cu raza de 5 cm se retopește în bile cu raza de 5 mm. Determinați numărul de bile obținute după topire.

Rezolvare:

Fie V_M volumul bilei mari, V_M volumul bilei mici și n numărul de bile mici obținute.

Avem relația:

$$V_M = n \cdot V_M$$

Calculăm numărul de bile noi obținute:

$$n = \frac{V_M}{V_m} = \frac{4\pi R^3}{3} : \frac{4\pi r^3}{3}$$

$$n = \frac{\cancel{4\pi} R^3}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{4\pi} r^3} = \frac{R^3}{r^3} = \left(\frac{R}{r}\right)^3 = \left(\frac{5\ \text{cm}}{5\ \text{cm}}\right)^3$$

$$n = \left(\frac{50\ \text{mm}}{5\ \text{mm}}\right)^3 = 10^3 = 1000$$

Răspuns: După topire se vor obține 1000 de bile mai mici.

TESTE

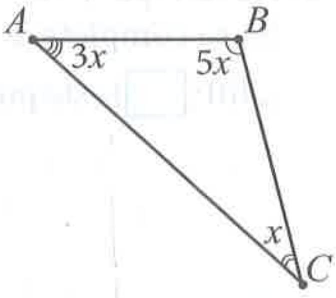
Testul 1

1. Fie $a = \frac{81}{2} \cdot \frac{8}{27}$ și $b = 3 - 7$. Completați casetele cu numere întregi, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată.

$a = \boxed{}$, $b = \boxed{}$, $\frac{a}{b} = \boxed{}$

2. În desenul alăturat este reprezentat triunghiul ABC. Utilizând datele din desen, determinați și scrieți în casă valoarea lui x.

$x = \boxed{}$



3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x^2 + x - 20 = 0$.

4. În timpul unei promoții, o carte s-a ieftinit cu 35%. Să se determine noul preț, dacă se cunoaște că cel inițial era de 180 lei.

5. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-3x+3$.

Să se completeze caseta, astfel încât să se obțină o propoziție adevărată:

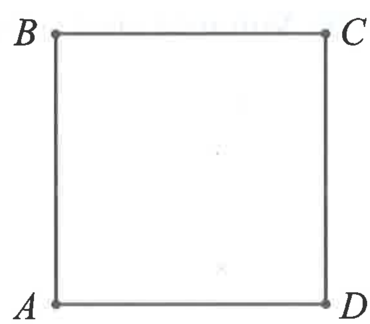
„$A(0;\boxed{})$ este punctul de intersecție al graficului funcției f cu axa ordonatelor"

6. Determinați cel mai mare număr întreg care verifică inegalitatea:

$$2x^2+x \geq (x+3)(1+2x)$$

7. Calculați valoarea expresiei: $\dfrac{5^6 : 25^2}{125}$.

8. Fie pătratul $ABCD$ cu perimetrul de 36 cm și $M \in (AD)$, astfel încât $\dfrac{AM}{MD} = \dfrac{1}{2}$. Determinați lungimea segmentului CM.



9. Pe o tablă sunt desenate triunghiuri și romburi. Să se determine numărul de romburi, dacă se cunoaște că pe tablă sunt 16 figuri distincte și în total 57 de laturi.

10. Volumul unui cub este 343 cm^3. Să se determine aria totală a cubului.

11. Determinați DVA și simplificați fracția $\frac{x^3-x^2}{x^2-2x+1}$.

12. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=mx^2-3x-4+m^2, m\neq 0$. Determinați valorile reale ale lui m, pentru care graficul funcției f este o parabolă cu ramurile în sus, ce trece prin originea sistemului de coordonate.

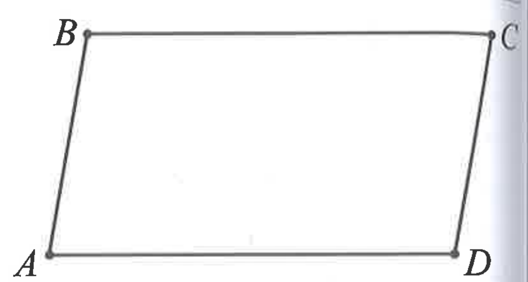
Testul 2

1. Fie $a = -7 + 11$ și $b = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{9}$. Completați casetele cu numere reale, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată.

$a = \boxed{}$, $b = \boxed{}$, $a \cdot b = \boxed{}$

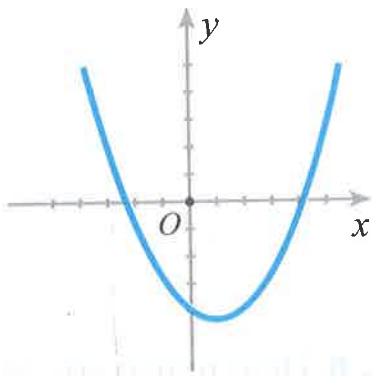
2. În desenul alăturat $ABCD$ este un paralelogram, în care $m(\angle ABC) = 111^\circ$. Scrieți în casetă măsura unghiului BCD.

$m(\angle BCD) = \boxed{}$



3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2x^2 - 13x + 6 = 0$.

4. O roată a făcut 120 de rotații în 18 secunde. Determinați peste câte secunde roata va ajunge la 340 de rotații.



5. În desenul alăturat este reprezentat graficul funcției

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$$

Utilizând desenul, scrieți în casetă unul dintre semnele „ > ”, „ < ” sau „ = ”, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată.

$$\Delta \ \boxed{} \ c$$

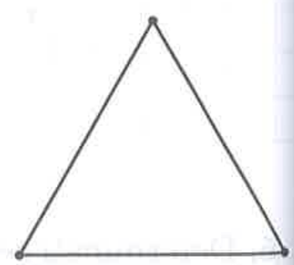
6. Determinați cel mai mic număr întreg care verifică inegalitatea:

$$6x^2 + x < (2x + 3)(2 + 3x)$$

Teste

7. Arătați că valoarea expresiei $\left(2-\sqrt{18}\right)^2+6\sqrt{8}$ este un număr natural.

8. Determinați aria triunghiului echilateral dacă se cunoaște că linia mijlocie este de $3\sqrt{3}$ cm.



9. La concursul de informatică, Ștefan a răspuns la cele 12 întrebări și a acumulat 21 de puncte. Determinați câte răspunsuri corecte a dat, știind că pentru fiecare răspuns corect se acordă 4 puncte, iar pentru fiecare răspuns greșit se scad 5 puncte.

10. Un corp din metal de forma unui cub a fost obținut după topirea a 8 cuburi identice cu muchia de 5 cm. Determinați lungimea muchiei corpului obținut.

11. Fie expresia $E(x)=\left(x+\frac{1}{x-1}\right):\frac{x^2-x+1}{x^2-2x+1}$. Arătați că valoarea expresiei este un număr natural pentru oricare ar fi $x\in\mathbb{N}^*$.

12. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(m+1)x+3m-4, m\in\mathbb{R}$. Graficul funcției f intersectează axa Oy într-un punct cu ordonata egală cu 5. Determinați zeroul funcției f.

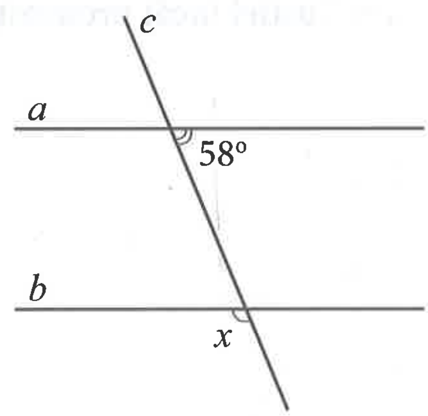
Testul 3

1. Completați caseta, astfel încât să se obțină o propoziție adevărată.

„Dacă $a = -7 + 12$ și $b = \frac{10}{3} \cdot \frac{3}{2}$, atunci valoarea raportului $\frac{a}{b}$ este egal cu numărul $\boxed{}$."

2. În desenul alăturat, dreptele a și b sunt paralele, iar c este secantă. Utilizând datele din desen, determinați și scrieți în casetă valoarea lui x.

$x = \boxed{}$

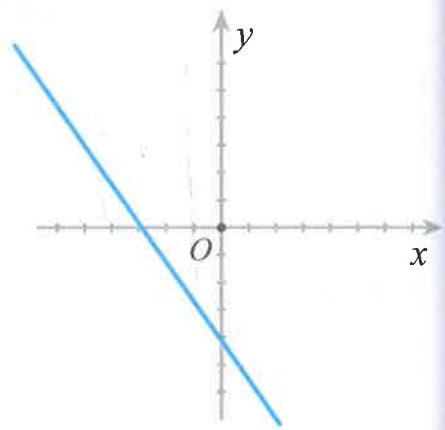


3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2x^2 - 7x + 3 = 0$.

4. Pe un raft s-au aranjat 65% dintre cărțile unei biblioteci, ceea ce reprezintă 260 de cărți. Determinați numărul total de cărți ale bibliotecii.

5. În desenul alăturat este reprezentat graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b$. Utilizând datele din desen, scrieți în casetă unul dintre semnele „ > ”, „ < ” sau „ = ”, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată.

$$\frac{a}{b}\ \boxed{}\ 0$$

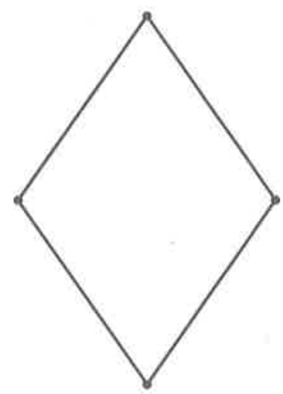


6. Determinați numerele naturale care verifică inegalitatea:

$$(2x-1)(2x+1)-(2x-3)^2 \leq 10$$

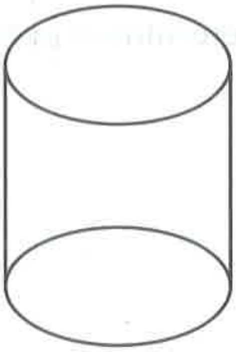
7. Calculați valoarea expresiei: $\frac{7\sqrt{6}+18}{\sqrt{6}}-\sqrt{54}$.

8. Determinați perimetrul rombului cu diagonalele de 10 cm și 24 cm.



9. Suma a două numere este 65, iar raportul lor este $\frac{5}{8}$. Determinați cele două numere.

10. Secțiunea axială a unui cilindru circular drept este un pătrat cu aria egală cu 100 cm^2. Să se determine aria totală a cilindrului.



11. Determinați valorile reale ale lui x, pentru care $\frac{3}{x+1}+\frac{2}{x}=\frac{2x+3}{x^2+x}$.

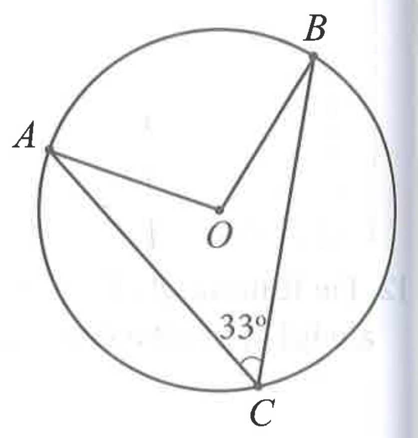
12. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax^2-6x+a,\ a\neq 0$. Determinați valorile reale ale lui a, pentru care valoarea maximă a funcției este zero.

Testul 4

1. Completați caseta, astfel încât să se obțină o propoziție adevărată. „Dacă $a = -5 + 4$ și $b = \frac{6}{7} : \frac{2}{7}$, atunci valoarea produsului $a \cdot b$ este numărul $\boxed{}$."

2. În desenul alăturat, punctele A, B, C aparțin cercului cu centrul O. Utilizând datele din desen, scrieți în casetă măsura în grade a unghiului AOB.

$$m(\angle AOB) = \boxed{}$$



3. Determinați numărul soluțiilor reale nenule a ecuației $9x^2 - 15x = 0$.

4. Să se determine cât reprezintă 45% din n, dacă se cunoaște că 20% din n este 80.

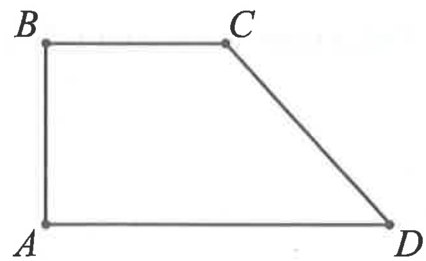
5. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x^2+8x+8$. Completați caseta, astfel încât să se obțină o propoziție adevărată:
„Numărul punctelor de intersecție cu axa absciselor este egal cu $\boxed{}$."

6. Determinați cel mai mic număr natural care nu verifică inegalitatea:

$$\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)-x\left(x-4\right)<6$$

7. Calculați valoarea expresiei: $\sqrt{2\frac{1}{4}-2^{-9}\cdot 2^{7}+0,75}$

8. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic în care $AD \parallel BC$, $m(\angle A) = 90°$, $m(\angle D) = 45°$, $AB = BC$ și $CD = 5\sqrt{2}$ cm. Determinați lungimea laturii AD.



9. Un magazin de haine a vândut, într-o singură zi, 2 rochii și 6 cămăși, încasând o sumă totală de 8 400 de lei. Să se determine prețul unei cămăși și prețul unei rochii, dacă se cunoaște că o rochie a fost vândută cu 600 de lei mai mult decât o cămașă.

10. Lungimea înălțimii unei prisme patrulatere regulate este de trei ori mai mare decât lungimea laturii bazei prismei. Determinați aria laterală a prismei, dacă volumul ei este egal cu 24 cm^3.

11. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{x}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}\right):\frac{2}{9-x^2}$. Arătați că $E(x)$ are valoare constantă, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3, 3\}$.

12. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(2-a)x+a^2$. Determinați valorile reale ale lui a pentru care graficul funcției f intersectează axa Oy într-un punct a cărui ordonată este egală cu 16 și formează cu axa Ox un unghi ascuțit.

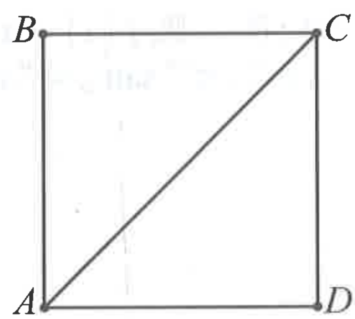
Testul 5

1. Fie $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ și $b = 2 : \frac{1}{2}$. Completați casetele cu numere reale, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată.

$$a = \boxed{}, \quad b = \boxed{}, \quad a \cdot b = \boxed{}$$

2. În desenul alăturat este reprezentat pătratul $ABCD$, care are perimetrul egal cu 28 cm. Determinați aria triunghiului ABC și scrieți în casetă:

$$A_{ABC} = \boxed{} \text{ cm}^2$$

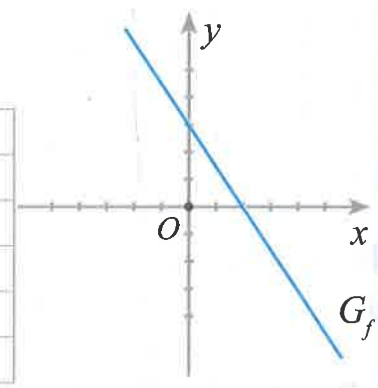


3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $4x^2 + 5x + 1 = 0$.

4. Un autoturism consumă 42 de litri de benzină pentru a parcurge o distanță de 504 km. Determinați câți litri de benzină va consuma autoturismul pentru a parcurge 720 km, în aceleași condiții de drum.

5. În desenul alăturat este reprezentat graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b,\ a\neq 0$. Completați caseta cu unul dintre semnele „ > ”, „ < ” sau „ = ”, astfel încât să se obțină o propoziție adevărată.

$$a\cdot b \ \boxed{}\ 0$$

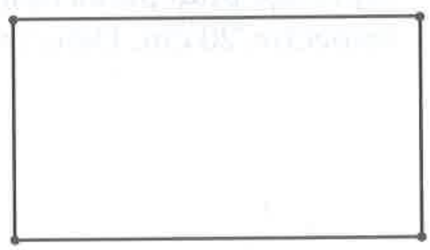


6. Determinați cel mai mare număr întreg care nu satisface inegalitatea:

$$5x(1+x)\leq(3x+1)^2-4x^2$$

7. Calculați: $\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}} - \dfrac{2^{-1}}{4^{-2}}$

8. Într-un dreptunghi cu lățimea de 4 cm, diagonala formează cu una dintre laturi un unghi de 30°. Să se afle aria dreptunghiului.



9. Patru cutii cu mere și șase cutii cu pere au masa totală de 84 de kg. Determinați câte kg cântărește o cutie cu mere și câte kg cântărește o cutie cu pere, dacă se cunoaște că o cutie cu pere este cu 2 kg mai grea decât o cutie cu mere.

10. Patricia a vopsit suprafața unui cub cu muchia de 4 dm, iar Laurenția a vopsit suprafața unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 80 cm, 30 cm și, respectiv, 20 cm. Determinați cine a vopsit o suprafață de arie mai mare.

11. Fie expresia $E(x)=x(x+3)-(x+1)^2+10$.

Determinați valorile reale ale lui x, pentru care $\dfrac{E(x)}{x+2}=7$.

12. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x^2+px+q$. Determinați valorile reale ale lui p și q, știind că vârful parabolei asociate este punctul $V(0;4)$.

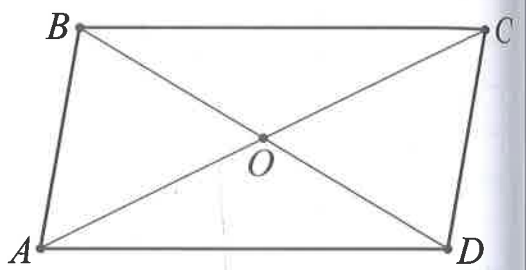
Testul 6

1. Fie $a = \frac{3}{21} \cdot \frac{7}{5}$ și $b = -8 + 7$. Completați casetele cu numere, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată.

$$a = \boxed{}, \quad b = \boxed{}, \quad a^b = \boxed{}$$

2. În desenul alăturat avem paralelogramul $ABCD$, astfel încât $AC \cap BD = \{O\}$ și aria paralelogramului este 80 cm^2. Determinați aria triunghiului BOC și completați caseta.

„Aria triunghiului BOC este egală cu $\boxed{}$ cm^2."

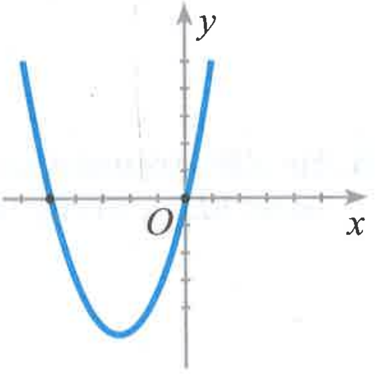


3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $3x^2 - 5x - 2 = 0$.

4. Victoria a început să citească romanul „Baltagul" și, după ce a citit 60% din el, a constatat că mai are de citit 118 pagini. Determinați câte pagini are romanul.

5. În desenul alăturat este reprezentat graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$. Folosind desenul, scrieți în casetă un număr, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată.

„Produsul zerourilor este $\boxed{\quad}$".

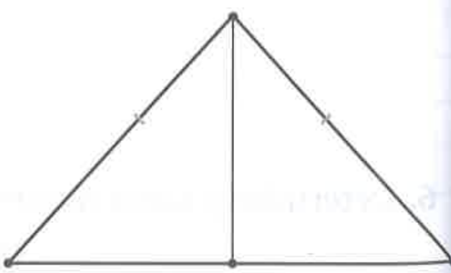


6. Determinați suma numerelor naturale care verifică inegalitatea:

$$16-(x-3)(3+x)\geq 6x-x^2$$

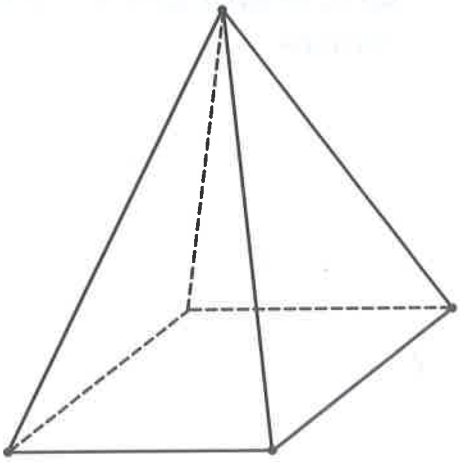
7. Calculați valoarea expresiei: $\sqrt{3-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2\sqrt{2}+3}$

8. Fie ABC triunghi isoscel cu baza $AC = 30$ cm și înălțimea corespunzătoare bazei $BD = 20$ cm. Determinați perimetrul triunghiului ABC.



9. Într-o școală există 27 de săli de clasă care au câte 3 sau 2 geamuri. Determinați câte săli de fiecare tip sunt, dacă în total în școală se găsesc 80 de geamuri, dintre care 11 sunt pe holuri.

10. Perimetrul bazei unei piramide patrulatere regulate este de 48 cm, iar înălțimea piramidei este cu 3 cm mai scurtă decât muchia bazei. Determinați volumul piramidei.



11. Aflați valorile reale ale lui x, pentru care suma rapoartelor algebrice $\frac{3}{x-7}$ și $\frac{x}{x+4}$ să fie egală cu produsul acestor rapoarte.

12. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+a^2-15$. Determinați valorile reale ale lui a, pentru care $x = 2$ este zerou al funcției f și funcția f este strict descrescătoare.

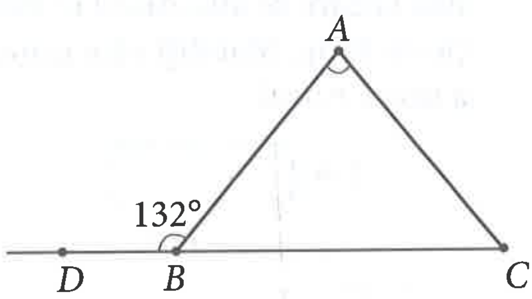
Testul 7

1. Fie $a = -5 + 5$ și $b = \frac{21}{32} \cdot \frac{16}{7}$. Completați casetele cu numere reale, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată.

$a = \boxed{}$, $b = \boxed{}$, $b^a = \boxed{}$

2. În desenul alăturat, ABC este un triunghi în care $AB = AC$ și măsura unghiului exterior DBA este 132°. Scrieți în casetă măsura în grade a unghiului BAC.

$m(\angle BAC) = \boxed{}$

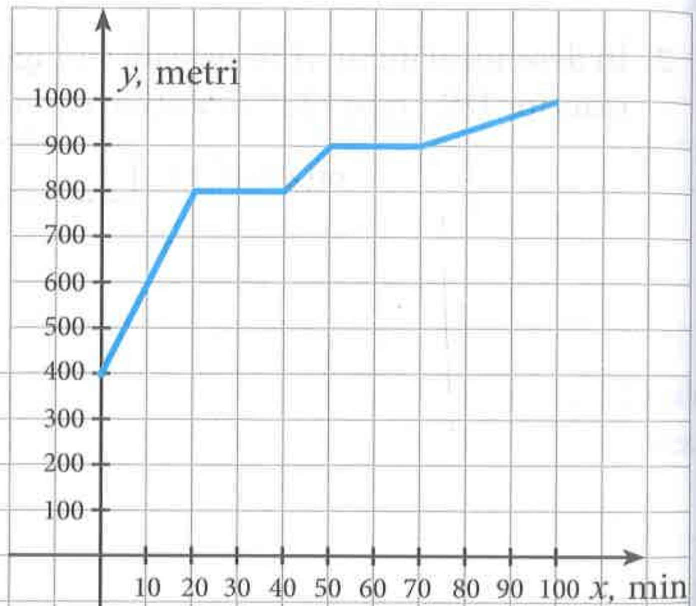


3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x^2 - x - 12 = 0$.

4. Se consideră o hartă cu scara de 1 : 1 000 000. Determinați distanța dintre orașele Bălți și Chișinău pe hartă, știind că în realitate sunt 135 km.

5. Aurel urcă pe un munte. Graficul alăturat reprezintă altitudinea la care se află Aurel în funcție de timp. Stabiliți câte minute a urcat Aurel.

$t =$ ☐

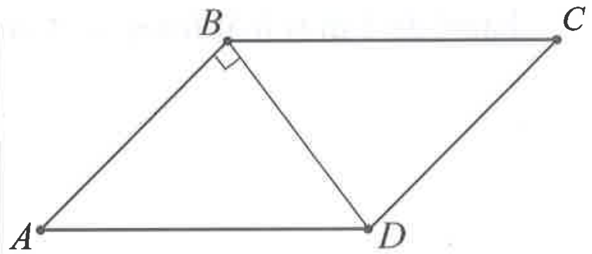


6. Determinați inversul celui mai mare număr rațional care verifică inegalitatea:

$$3x(4 - x) \leq 5 - 3(x^2 - 3x)$$

7. Calculați valoarea expresiei: $\dfrac{3^8+9}{3^6}-\dfrac{1}{81}$.

8. Fie $ABCD$ un paralelogram în care $m(\angle A) = 45°$, iar diagonala $BD = 5$ cm și este perpendiculară laturii AB. Determinați aria paralelogramului $ABCD$.



9. La un cinematograf s-au vândut 100 de bilete la filmul „Copacul Evei". Prețul unui bilet pentru adulți este de 90 lei, iar prețul unui bilet pentru copii este de 70 lei. Știind că încasările totale din vânzarea biletelor pentru film au fost 8 200 lei, să se determine câți adulți și câți copii au venit la film.

10. O piscină are forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 10 m, 5 m și 2 m. Sunt suficiente 10 cisterne pline cu apă de formă cilindrică cu raza bazei de 1 m și înălțimea de 3 m pentru a umple piscina?

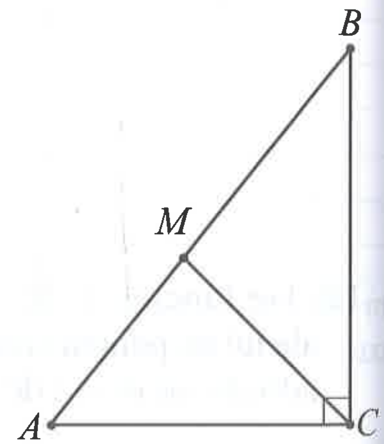
11. Simplificați fracția $\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^3-x}$.

12. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=mx^2+x+m^2-9$. Determinați valorile reale ale lui *m*, pentru care graficul funcției *f* trece prin punctul *A* (1, –2) și funcția *f* admite un punct de minim.

Testul 8

1. Fie $a = \frac{12}{49} : \frac{24}{7}$ și $b = -5 - 2$. Completați casetele, astfel încât să obțineți o propoziție adevărată: $a = \square$, $b = \square$, $\frac{b}{a} = \square$.

2. În desenul alăturat este reprezentat triunghiul ABC dreptunghic în C, în care M este mijlocul laturii AB, iar $BM = 18$ cm. Completați casetele cu valorile corespunzătoare $AB = \square$ $MC = \square$



3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2x^2 - 3x - 2 = 0$.

4. Pentru a vopsi 5 fețe ale unui cub, Irina folosește 450 g de vopsea. Determinați ce cantitate de vopsea este necesară pentru a vopsi 2 cuburi identice.

5. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(3-a)x^2+3x-3$. Scrieți în casetă o valoare reală pentru a, astfel încât parabola să fie cu ramurile în jos.

$a = \boxed{}$

6. Determinați cel mai mic pătrat perfect care verifică inegalitatea:

$$2x^2 - 2(x - 5) < 11x - (1 - 2x)(x - 4)$$

7. Arătați că valoarea expresiei $\left(2\sqrt{3}-1\right)^2+\left(\sqrt{3}+2\right)^2$ este un număr natural.

8. Fie trapezul isoscel $ABCD$ cu baza mare $[AD]$. Determinați perimetrul trapezului, dacă $AD=25\text{ cm}$, $BC=15\text{ cm}$ și $[AC$ este bisectoarea unghiului BAD.

9. Marius și Damian au cules împreună 96 de mere. Pentru a avea un număr egal de mere, Marius i-a dat lui Damian 9 mere. Determinați câte mere a cules fiecare băiat.

10. Într-un acvariu de forma unui cub s-au turnat 3 litri de apă. Determinați până la ce înălțime s-a ridicat apa, dacă cubul are muchia de 20 cm.

11. Fie expresia $E(x)=\frac{x^2+5x+6}{x^2-9}+\frac{x-1}{x-3}$. Determinați valorile reale ale lui x, pentru care $E(x)=3$.

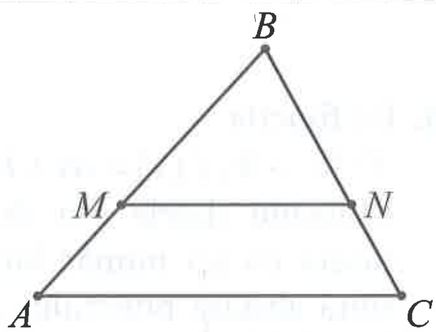
12. Fie funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^2+4$ și $g(x)=(2m-1)x+5$, $m\in\mathbb{R}$. Graficele funcțiilor f și g se intersectează în punctul de abscisă $x=-1$. Să se determine monotonia funcției g.

Testul 9

1. Fie $a = -3 - 7$ și $b = (-3)^2$. Completați casetele cu numere întregi, care reprezintă valorile expresiilor.

$a = \square$, $b = \square$, $a + b = \square$

2. În desenul alăturat este reprezentat triunghiul ABC, în care $MN \parallel AC$, $BM = 9$ cm, $BC = 8$ cm și $NC = 2$ cm. Completați casetele cu numerele corespunzătoare problemei.



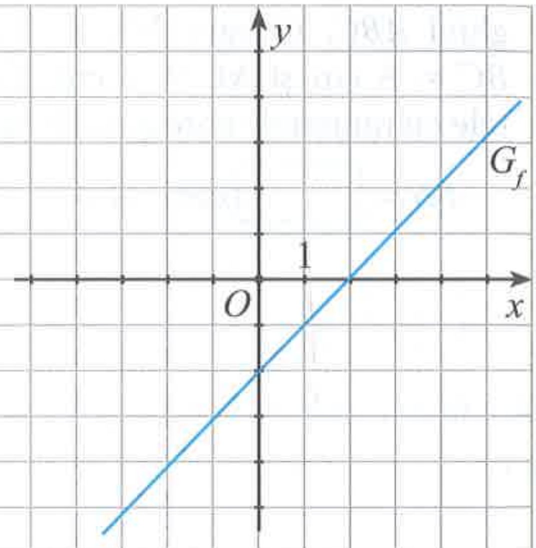
$BN = \square$ cm $AM = \square$ cm

3. Determinați soluția reală mai mică decât $\sqrt{7}$ a ecuației $x^2 - 5x + 6 = 0$.

4. Raportul dintre numărul de mango și numărul de avocado dintr-un coș este $\frac{3}{7}$. Știind că în coș sunt 21 de mango, calculați numărul de avocado.

5. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b,\ a\neq 0$. Utilizând datele din desen, completați caseta cu un număr întreg, care reprezintă abscisa punctului A de pe graficul funcției f.

$A(\boxed{}, 1)$



6. Determinați cel mai mic număr prim care verifică inegalitatea:

$$4x^2-5x\leq(2x+5)(2x-1)$$

7. Calculați valoarea expresiei: $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{2\sqrt{6}}{3}-\sqrt{6}$.

8. Calculați perimetrul unui dreptunghi, știind că lungimea acestuia este de 4 ori mai mare decât lățimea și aria dreptunghiului este egală cu aria unui pătrat care are perimetrul egal cu 64 cm.

9. Diferenţa a două numere naturale este 14. Determinaţi cele două numere, dacă se ştie că suma dintre o cincime din primul număr şi o pătrime din al doilea număr este 10.

10. Un corp metalic în formă de cub, cu muchia de 4 cm, se topeşte şi se toarnă într-un corp de forma unei piramide patrulatere regulate cu înălţimea de 8 cm. Determinaţi lungimea laturii de la baza piramidei.

11. Fie $E(x)=\frac{x^3}{x-1}\cdot\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)-\frac{x+3}{x}$. Aduceți expresia la o formă mai simplă și determinați numerele întregi x, pentru care valoarea expresiei $E(x)$ este la fel număr întreg.

12. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=mx^2-5mx+25, m\neq 0$. Determinați valorile reale nenule ale lui m, pentru care graficul funcției f este o parabolă tangentă la axa absciselor.

Testul 10

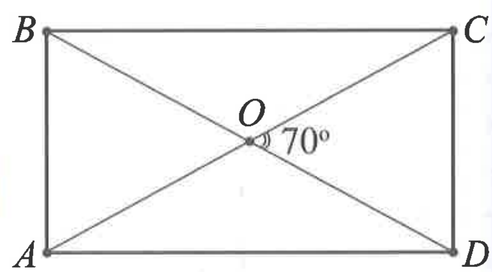
1. Fie $a = -11 + 7$ și $b = \left(-\frac{1}{2}\right)^2$. Completați casetele cu numerele pozitive, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată.

$$a = \square, \quad b = \square, \quad \frac{a}{b} = \square$$

2. Fie $ABCD$ un dreptunghi și $AC \cap BD = \{O\}$. Analizați desenul și completați casetele, astfel încât să obțineți propoziții adevărate.

$m(\angle AOB) = \square$ $\quad m(\angle AOD) = \square$

$m(\angle ADO) = \square$

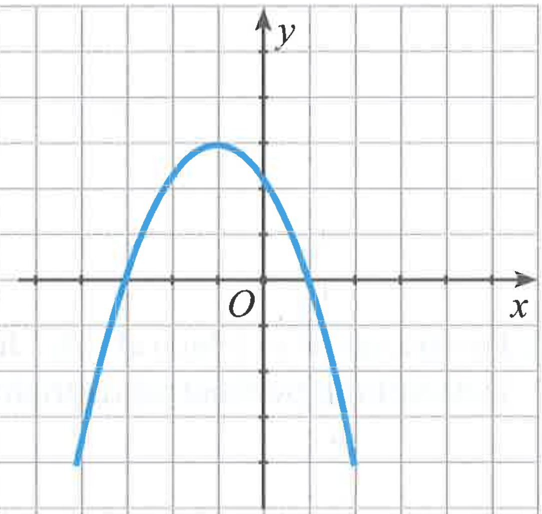


3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $3x^2 - x - 10 = 0$.

4. Nelu a arat 210 ha în două săptămâni. Determinați cât la sută a arat Nelu în prima săptămână, dacă în săptămâna următoare a arat 126 ha.

5. Fie funcția
$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0.$
Analizați datele din desen și scrieți în casete coordonatele vârfului parabolei.

$V($ ______ , ______ $)$

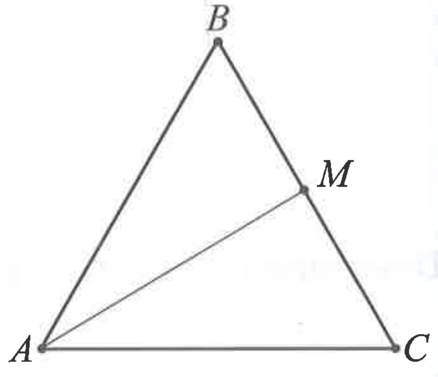


6. Determinați valorile nenegative ale lui x care verifică inegalitatea:

$$-x^2+4x-1<(2-x)(x+5)$$

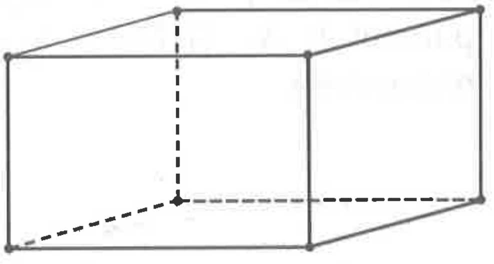
7. Calculați valoarea expresiei: $\frac{32^{-2} \cdot 128}{2^{-5}}$.

8. Fie triunghiul echilateral ABC, în care mediana AM are lungimea de $5\sqrt{3}$ cm. Determinați perimetrul triunghiului.



9. La ziua pârjoalelor, dacă fiecare invitat ar consuma câte 2 bucăți, atunci ar mai rămâne 4 pârjoale. Dar dacă fiecare invitat ar consuma câte 3 bucăți, atunci 4 invitați nu ar mai gusta pârjoalele. Determinați numărul de invitați și numărul de pârjoale.

10. Se cunoaște că lungimea unui paralelipiped dreptunghic este de 8 cm, iar lățimea este de 6 cm. Determinați volumul paralelipipedului, dacă diagonala este $2\sqrt{29}$ cm.



11. Fie $E(x)=\left(\frac{2}{x-2}+\frac{x}{2+x}\right):\frac{4+x^2}{x^2-x-2}$. Aduceți expresia la o formă mai simplă, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1,2\}$.

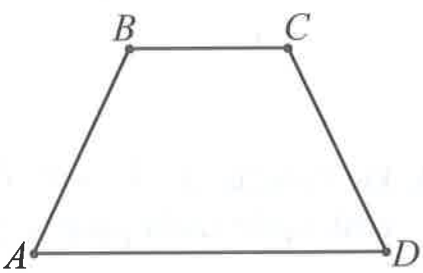
12. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x-m+7,\ m\in\mathbb{R}$, graficul căreia trece prin punctul $A(-3, -4)$. Determinați coordonatele punctului de intersecție cu axa ordonatelor.

Testul 11

1. Fie $a = -3 - 6$ și $b = -3^2$. Completați casetele cu numerele potrivite pentru a obține propoziții adevărate.

$$a = \boxed{}, \quad b = \boxed{}, \quad \frac{a}{b} = \boxed{}$$

2. În figura alăturată este desenat un trapez isoscel $ABCD$ cu baza mare AD, și se știe că $m(\angle A) + m(\angle D) = 140^\circ$. Completați caseta cu măsura unghiului ABC.



$$m(\angle ABC) = \boxed{}$$

3. Determinați inversul soluției mai mici a ecuației $x^2 - 8x + 15 = 0$.

4. Viorel a cumpărat două mingi de fotbal identice: prima la prețul normal de 550 de lei, iar a doua cu reducere. Determinați cu ce procent a fost redus prețul celei de-a doua mingi, știind că Viorel a plătit în total 1001 lei.

5. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(a+2)x+5$. Completați caseta cu un număr real, astfel încât propoziția să fie adevărată.

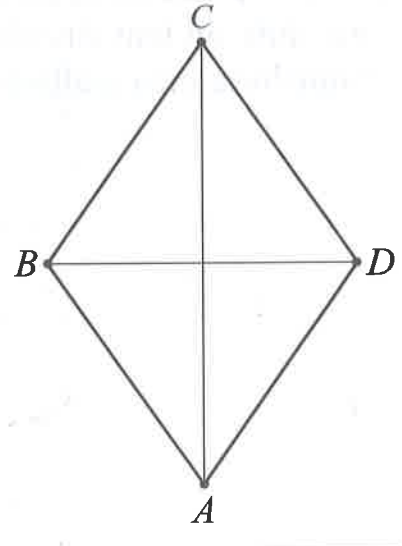
„Dacă $x=-2$ este zerou al funcției f, atunci $a=\boxed{}$".

6. Determinați valorile nepozitive ale lui x care verifică inegalitatea:

$$(x-4)^2-(x-2)^2<25$$

7. Arătați că valoarea expresiei este un număr natural: $\frac{1}{3-\sqrt{7}}+\frac{1}{3+\sqrt{7}}$.

8. Aria unui romb este de 48 cm^2, iar lungimea unei diagonale este de 8 cm. Determinați perimetrul rombului.



9. Într-o cofetărie, două prăjituri și o cafea costă împreună 25 de lei. Gabriela a cumpărat o prăjitură și două cafele, plătind în total 29 de lei. Determinați prețul unei prăjituri și prețul unei cafele.

10. Un corp din metal de forma unei sfere cu raza de 3 cm a fost topit și transformat într-un con circular drept. Raza bazei conului este de 6 cm. Să se determine lungimea înălțimii conului.

11. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\frac{x}{x^2-9}+\frac{1}{x-3}=\frac{2}{x+3}$.

12. Fie funcția $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=5-x^2$. Determinați valorile reale ale lui m, pentru care $A(m\,;-1)$ aparține graficului funcției f și este situat în cadranul al III-lea.

Testul 12

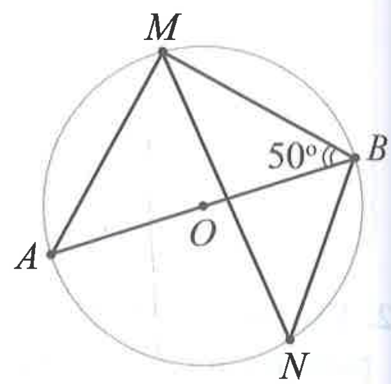
1. Fie $a = 17 - (-13)$ și $b = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$. Completați casetele cu numerele potrivite pentru a obține o propoziție adevărată.

$a = \boxed{}$, $b = \boxed{}$, $a \cdot b = \boxed{}$

2. Examinați desenul și completați casetele, astfel încât să obțineți propoziții adevărate.

$m(\angle MAB) = \boxed{}$

$m(\angle MNB) = \boxed{}$



3. Rezolvați ecuația $x^2 + x - 2 = 0$, apoi calculați: $x_1^{x_2} + x_2^{x_1}$.

4. Câte grame de zahăr se conțin în 450 de grame de sirop de zahăr cu concentrația de 30%?

5. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-2x^2+ax-3$. Dacă $x_1 = 1$ este zerou al funcției f, scrieți în casetă celălalt zerou al funcției f.

$$x_2 = \boxed{}$$

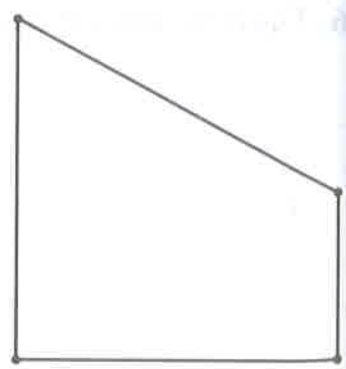
6. Determinați cel mai mare număr pozitiv par care verifică inegalitatea:

$$4x^2 - 10 < (2x + 1)^2 - 6x$$

7. Scrieți în casetă unul dintre semnele „ < ”, „ > ” sau „ = ”, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată, prezentând calculele complete.

$$\sqrt{\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} - 4,25\right] \cdot \frac{1}{8}} \; \square \; \frac{1}{3}$$

8. Doi stâlpi de electricitate sunt amplasați la distanța de 12 metri unul de celălalt; înălțimea primului stâlp este 10 m, iar a celui de-al doilea este de 5 m. Determinați distanța dintre vârfurile celor doi stâlpi.



9. Marin are în curte găini și iepuri. În total sunt 35 de capete și 94 de picioare. Determinați câte găini și câți iepuri sunt în curtea lui Marin.

10. Secțiunea diagonală a unei prisme patrulatere regulate este un pătrat cu latura de lungime 8 cm. Să se afle aria totală a prismei.

11. Determinați DVA, apoi simplificați fracția: $\dfrac{x^2-5x+6}{3x-6}$.

12. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-mx-m^2+5, m\neq 0$. Determinați valorile reale ale lui *m*, pentru care graficul funcției *f* intersectează *Oy* într-un punct cu ordonata egală cu –4, și formează cu axa *Ox* un unghi ascuțit.

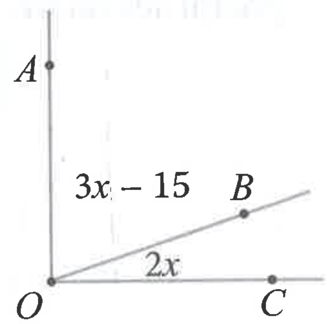
Testul 13

1. Fie $a = -2 \cdot (-3)$ și $b = \frac{25}{16} : \frac{50}{32}$. Completați caseta cu unul dintre semnele „ $>$ ”, „ $<$ ” sau „ $=$ ”, astfel încât să obținem o propoziție adevărată.

$$a \ \boxed{} \ b$$

2. În desenul alăturat $\angle AOB$ și $\angle BOC$ sunt adiacente și complementare. Examinați desenul și completați caseta cu o valoare potrivită.

$$x = \boxed{}$$

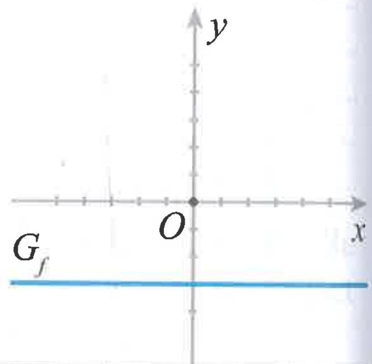


3. Fie A mulțimea soluțiilor ecuației: $x^2 - 10x + 25 = 0$. Determinați $A \cap \mathbb{N}$.

4. Fie $\frac{2a}{3b}=1$. Aflați valoarea expresiei $\frac{5a-4b}{2a+b}$.

5. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b$. Examinați desenul alăturat și completați caseta cu unul dintre semnele „ = ”, „ > ”, „ < ”, astfel încât să obțineți propoziții adevărate.

$a \ \boxed{}\ 0$ $\qquad$ $b \ \boxed{}\ 0$

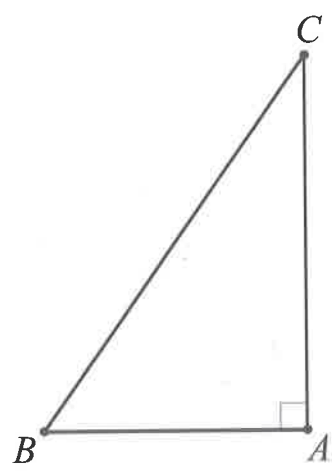


6. Determinați cel mai mic număr întreg care verifică inegalitatea:

$$-5x - x(2+x) \leq 31 - (x^2 + x)$$

7. Calculați valoarea expresiei: $\dfrac{10^5 \cdot 4^{-2}}{5^4}$.

8. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A cu $AB = 5$ cm și $BC = 13$ cm, M este punctul de mijloc al catetei AC. Determinați aria triunghiului ABM.



9. Într-o parcare sunt mașini și motociclete. În total sunt 40 de vehicule și 146 de roți. Determinați câte mașini și câte motociclete sunt în parcare.

10. Nichita vopsește suprafața totală a unei piramide patrulatere regulate care are latura bazei de 6 cm și apotema de 13 cm. Dumitru vopsește suprafața totală a unei sfere cu raza de 5 cm. Determinați cine a vopsit o suprafață de arie mai mare.

11. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right):\frac{1}{x^2+x}$. Arătați că $E(x) = 1$.

12. Fie funcția $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=mx^2-2x+3-m^2$. Determinați valorile reale ale lui m, pentru care graficul funcției f este o parabolă cu ramurile în jos și trece prin $A(1, -1)$.

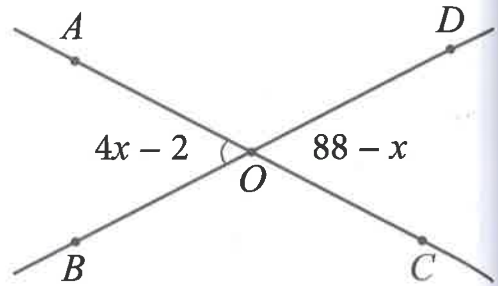
Testul 14

1. Fie $a = 8 - 10$ și $b = \frac{2}{5} + \frac{1}{3}$. Completați casetele cu numere potrivite pentru a obține propoziții adevărate.

$a = \boxed{}$, $b = \boxed{}$, $b - a = \boxed{}$

2. În desenul alăturat, unghiurile AOB și COD sunt opuse la vârf. Examinați desenul și completați caseta cu măsura unghiului AOD.

$m(\angle AOD) = \boxed{}$

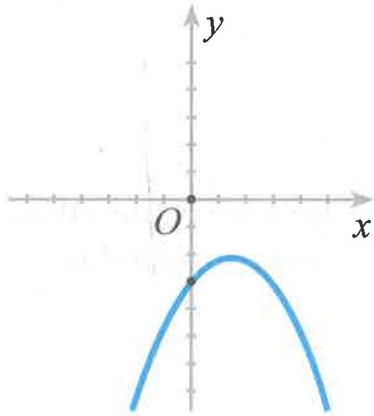


3. Determinați suma pătratelor soluțiilor reale ale ecuației: $x^2 - x - 6 = 0$.

4. Arina a cumpărat un atlas care s-a scumpit cu 15% față de prețul inițial de 160 de lei. Câți lei a plătit Arina pentru atlas?

5. Fie funcția $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$. Completați casetele cu unul dintre semnele „ $<$ ”, „ $>$ ”, „ $=$ ”, astfel încât să obțineți propoziții adevărate pe baza desenului.

$a \;\boxed{}\; 0 \qquad f(x) \;\boxed{}\; 0 \qquad \Delta \;\boxed{}\; 0$

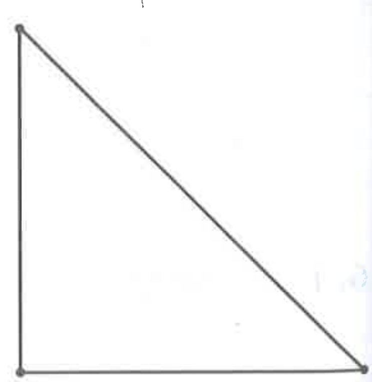


6. Determinați care este cel mai mic cub perfect care verifică inegalitatea:

$$(x+5)(x-4) \geq (x+4)(x-5)$$

7. Calculați valoarea expresiei: $\dfrac{12}{3+\sqrt{3}}-6+2\sqrt{3}$.

8. Ipotenuza unui triunghi dreptunghic isoscel are lungimea de 10 cm. Să se afle aria triunghiului.



9. Numerele a și b sunt direct proporționale cu numerele 2 și 5. Să se determine numerele a și b, dacă $2a + 3b = 95$.

10. Pe o masă sunt 4 cuburi. Muchiile a trei dintre ele sunt de 4 cm, 2 cm și 2 cm. Determinați lungimea muchiei celui de-al patrulea cub, știind că pentru a vopsi suprafața celui de-al patrulea cub se folosește aceeași cantitate de vopsea câtă ar fi necesară pentru a vopsi suprafețele celorlalte 3 cuburi adunate.

11. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{x}{x-2}+\frac{4}{2x-x^2}\right):\frac{x+2}{x}$. Arătați că $E(x) = 1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,0,2\}$.

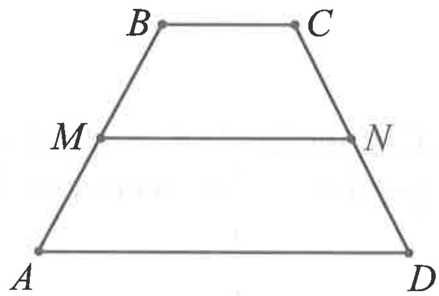
12. Fie funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=mx+m^2+5m, g(x)=-4x-3$. Determinați valorile reale ale lui m, pentru care G_f și G_g se intersectează în punctul de abscisă $x = 3$, iar f este strict descrescătoare.

Testul 15

1. Fie $a = 0{,}25 : 0{,}5$ și $b = -12 + (-13)$. Completați casetele cu numere potrivite pentru a obține propoziții adevărate.

$a = \boxed{}$, $b = \boxed{}$, $a : b = \boxed{}$

2. În desenul alăturat avem trapezul $ABCD$ cu $AD \parallel BC$ și MN linie mijlocie, astfel încât $M \in (AB), N \in (CD)$, $BC = 12$ cm și $AD = 20$ cm. Completați în casetă lungimea liniei mijlocii $MN = \boxed{}$ cm.



3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2x^2 + x - 1 = 0$.

4. Nicoleta își sărbătorește ziua de naștere la un restaurant, având în total 24 de invitați. Câte fete vor veni la aniversare, știind că probabilitatea ca primul invitat care sosește să fie băiat este $\frac{3}{8}$?

5. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-ax+6,\ a\neq 0$. Completați caseta cu un număr potrivit, astfel încât să fie funcția strict crescătoare.

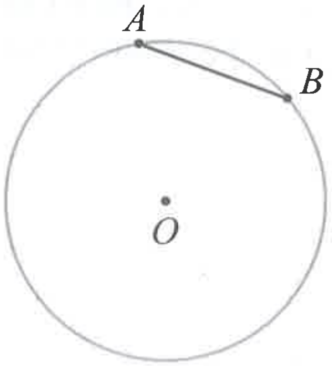
$$a = \boxed{}$$

6. Determinați cardinalul mulțimii formate din numerele naturale nenule care verifică inegalitatea:

$$(1-x)^2 + 3x^2 < (2x-1)^2 + 10$$

7. Calculați valoarea expresiei: $\left(\sqrt{7}+3\right)^2-\sqrt{6}\cdot\sqrt{1{,}5}-6\sqrt{7}$

8. Într-un cerc de centru O și raza de 12 cm, coarda AB este congruentă cu raza. Determinați aria ΔABC.



9. Diferența a două numere naturale este egală cu 21, iar raportul lor este egal cu $\frac{2}{5}$. Determinați aceste numere.

10. Un corp de forma unui con circular drept are raza bazei de 15 cm și înălțimea de 20 cm. Determinați masa conului, dacă densitatea specifică a cuprului este egală cu 8960 kg/m^3. Rotunjiți rezultatul până la unități.

11. Simplificați fracția $\dfrac{x^3 - 2x^2 + 9x - 18}{27 + 3x^2}$.

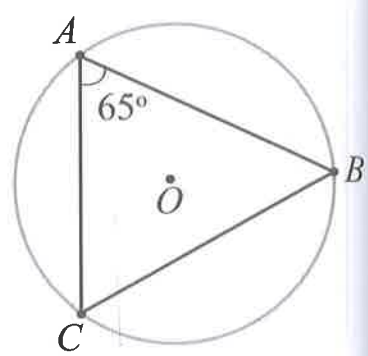
12. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 - (m+2)x + 1$ unde m este număr real. Aflați valoarea lui m pentru care dreapta de ecuație $x = 3$ este axa de simetrie a graficului funcției f. Scrieți și coordonatele vârfului parabolei.

Testul 16

1. Fie $a = 1 - 9$ și $b = 0{,}1 \cdot 20$. Completați casetele cu numere întregi care reprezintă valorile expresiilor.

$$a = \boxed{}, \quad b = \boxed{}, \quad \frac{a}{b} = \boxed{}$$

2. Punctele A, B, C aparțin cercului de centru O, astfel încât triunghiul ABC este isoscel cu $AB = BC$ și $m(\angle BAC) = 65°$. Scrieți în casetă măsura în grade a arcului mic AC.

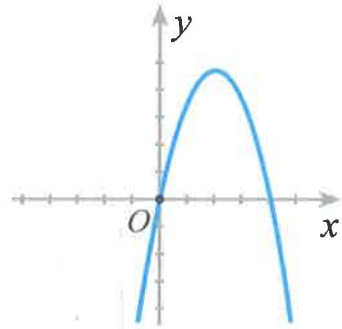


$$m\left(\overset{\frown}{AC}\right) = \boxed{}$$

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $6 - (x + 1)x = 0$.

4. Dragoș a reușit să facă 21 l de must din 28 kg de struguri. Determinați de câte kg de struguri are nevoie pentru a face 30 l de must.

5. În desenul alăturat este reprezentat graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$. Folosind desenul, scrieți în casetă unul dintre semnele „ < ”, „ = ” sau „ > ”, astfel încât să obțineți o propoziție adevărată.



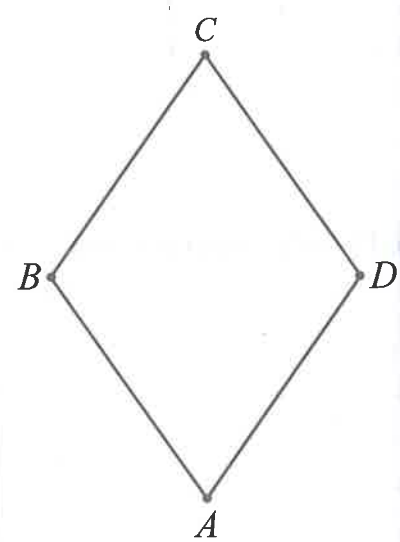
$$a\cdot c\cdot \Delta \ \boxed{}\ 0.$$

6. Determinați cel mai mic număr impar care verifică inegalitatea:

$$(1-x)(x-4)+x>(x+2)(3-x)-x$$

7. Calculați valoarea expresiei: $\dfrac{81^{-2} \cdot 27}{3^{-6}}$.

8. Perimetrul unui romb este de 100 cm, iar lungimea unei diagonale este de 48 cm. Determinați aria rombului.



9. Elevii unei clase au de recitat la un concurs poemul „Luceafărul". Dacă fiecare elev ar recita câte 5 strofe, atunci ar mai rămâne 3 strofe nerecitate. Determinați numărul de elevi ai clasei, știind că dacă ar spune fiecare câte 7 strofe, atunci 5 elevi nu ar mai primi nicio strofă pentru a o recita.

10. Baza unei prisme drepte este un triunghi cu laturile de 9 cm, 10 cm și 17 cm. Determinați aria laterală, dacă se cunoaște că volumul prismei este 108 cm^3.

11. Determinați soluția reală a ecuației: $\frac{x}{x^2-x-2}-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x+1}$.

12. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(3a-1)x-2$. Determinați valorile reale ale lui a, pentru care graficul funcției f trece prin $A(a; 2a^2)$ și f este monoton descrescătoare.

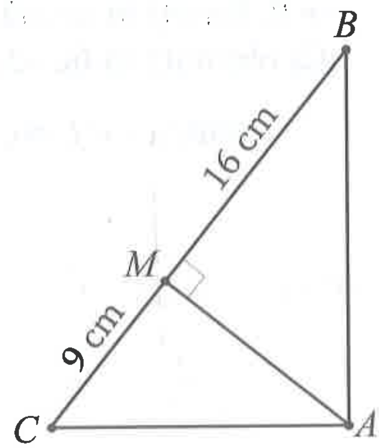
Testul 17

1. Fie $a = 0{,}4 \cdot 10$ și $b = -3 - 5$. Completați casetele cu numere întregi, care reprezintă valorile expresiilor.

$$a = \boxed{}, \quad b = \boxed{}, \quad \frac{b}{a} = \boxed{}$$

2. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A. Înălțimea AM împarte ipotenuza în segmentele $BM = 16$ cm, $MC = 9$ cm. Completați caseta cu lungimea segmentului AM.

$$AM = \boxed{} \text{ cm.}$$

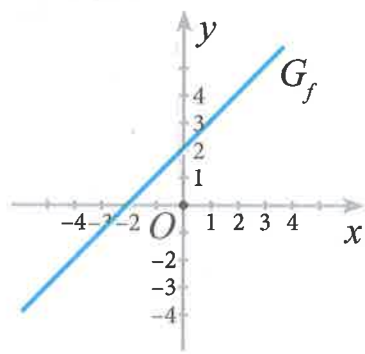


3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $4x^2 - x - 5 = 0$.

4. În luna mai, Nicu a plătit pentru o bicicletă 2720 lei, ceea ce reprezintă cu 15% mai puțin decât prețul din luna februarie. Câți bani a economisit Nicu?

5. În desenul alăturat este reprezentat graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Scrieți în casetă unul dintre semnele „ > ” sau „ < ”, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată.

Pentru $x \in (-\infty, -2), f(x)$ $\boxed{}$ 0.

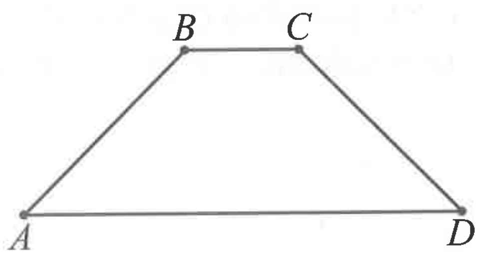


6. Determinați cel mai mic pătrat perfect care satisface inegalitatea:

$$-0{,}2x(x + 10) < -0{,}2x^2 + 3{,}2x - 26$$

7. Calculați valoarea expresiei: $\sqrt{\left(\sqrt{15}-4\right)^2}+\left|\sqrt{15}-3\right|$.

8. Fie trapezul isoscel $ABCD$, în care $AB=3\sqrt{2}$, $m(\angle ADC)=45°$ și aria trapezului este 24 cm^2. Aflați lungimea liniei mijlocii.



9. La o florărie prețul unui trandafir alb este 40 de lei, iar prețul unui trandafir roșu este 50 de lei. Mihai a cumpărat pentru mama sa, cu ocazia zilei de naștere, un buchet din 45 de trandafiri. Determinați câți trandafiri albi și câți roșii sunt în buchet, dacă a costat 2000 lei.

10. Volumul unui cilindru circular drept este 288π cm^3. Determinați aria secțiunii axiale dacă se știe că lungimea cercului la baza cilindrului este de 12π cm.

11. Fie expresia $E(x)=\left(\dfrac{x^2+4x}{x^2-16}+\dfrac{x-2}{4-x}\right)\cdot\dfrac{x-4}{2}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-4, 4\}$. Arătați că $E(x) = 1$.

12. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 2x^2-(m+3)x+1$ și $m\in\mathbb{R}$. Abscisa vârfului parabolei, care reprezintă graficul funcției f este egală cu 3. Determinați ordonata vârfului parabolei.

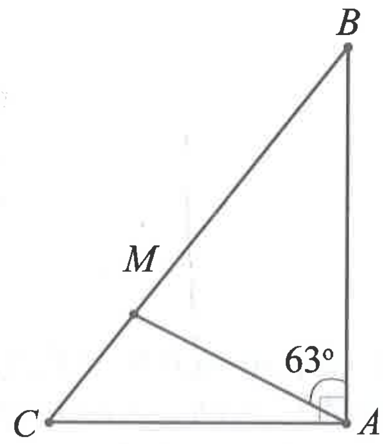
Testul 18

1. Fie $a = 1 - 5$ și $b = \frac{1}{2} \cdot 6$. Completați casetele cu numere potrivite pentru a obține o propoziție adevărată.

$$a = \boxed{}, \quad b = \boxed{}, \quad a \cdot b = \boxed{}$$

2. În desenul alăturat este reprezentat triunghiul dreptunghic ABC, în care $m(\angle BAC) = 90°$, AM este înălțime, iar $m(\angle BAM) = 63°$. Scrieți în casetă măsura în grade a unghiului MCA.

$$m(\angle MCA) = \boxed{}$$



3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $2x^2 - 14x + 24 = 0$. Calculați suma dintre inversul soluției mai mici și opusul soluției mai mari.

4. Victoria a rezolvat examenul la matematică dat anul precedent în 2 h și 15 min. Ea a folosit 40% din timpul total pentru a rezolva primele 6 exerciții. Determinați în cât timp a rezolvat ultimele 6 exerciții.

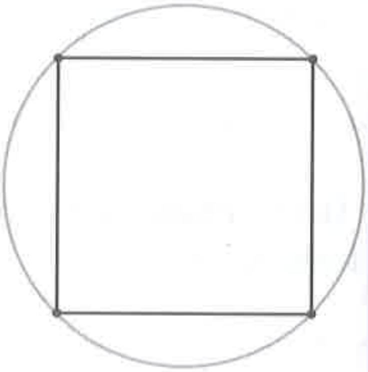
5. Scrieți în casetă un număr real nenul, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată. „Graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \boxed{}\, x^2 - 16x + 4$, este o parabolă tangentă la axa Ox."

6. Determinați suma numerelor întregi negative și impare care verifică inegalitatea:

$$-x(x+4) < 10 - 2x - x^2$$

7. Calculați valoarea expresiei: $\sqrt{5}\left(\sqrt{60}-2\right)-\sqrt{2}\left(5\sqrt{6}-\sqrt{10}\right)$.

8. Fie pătratul *ABCD* înscris într-un cerc. Determinați aria discului mărginit de cercul dat, dacă se cunoaște că perimetrul pătratului este $8\sqrt{2}$ cm.



9. Distanța dintre orașul Edineț și orașul Bălți este de 70 km. Două automobile au pornit unul în întâmpinarea celuilalt și s-au întâlnit peste 30 min. Determinați viteza fiecărui automobil, dacă se cunoaște că unul dintre ele se deplasează cu 20 km/h mai lent.

10. Volumul unui paralelipiped dreptunghic este egal cu 1920 cm^3. Determinați dimensiunile paralelipipedului, dacă acestea sunt direct proporționale cu 2, 3 și 5.

11. Fie expresia $E(x)=\dfrac{x^4-1}{x^3-x^2+x-1}$. Arătați că pentru orice număr întreg x, avem $E(x) \in \mathbb{Z}$.

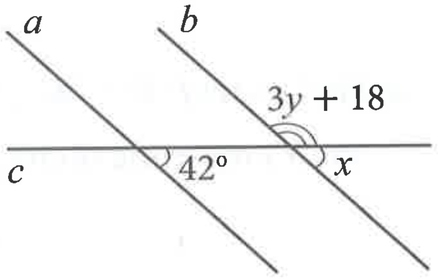
12. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -mx + 3m - 2, m \in \mathbb{R}^*$. Graficul funcției f trece prin punctul $A(5, -3)$. Stabiliți monotonia funcției f.

Testul 19

1. Fie $a = -3^2$ și $b = 0,(1)$. Completați casetele cu numere potrivite, astfel încât să se obțină o propoziție adevărată.

$a = \boxed{}$, $b = \boxed{}$, $a : b = \boxed{}$

2. În desenul alăturat, dreptele a și b sunt paralele, iar c este secantă. Completați casetele cu numere potrivite, astfel încât să se obțină o propoziție adevărată.



$x = \boxed{}$, $y = \boxed{}$

3. Fie A mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $5x^2 + 3x - 2 = 0$. Determinați mulțimea $A \cap \mathbb{Z}$.

4. Se știe că $\frac{a}{b} = 0,75$. Aflați $A = \frac{8a+3b}{5b}$.

5. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x-5}{3} + 1$. Scrieți în casetă un număr real, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată.

„Panta funcției este $\boxed{}$."

6. Determinați numerele reale care sunt cel puțin egale cu 2 și verifică inegalitatea:

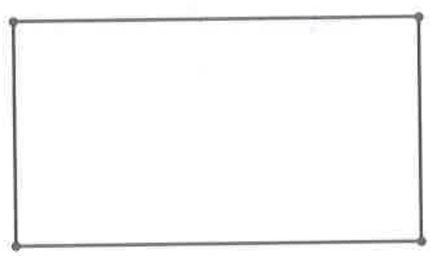
$$5x - (2 + x)^2 < 1 - x^2$$

7. Ca

8. F
ș

7. Calculați valoarea expresiei: $\dfrac{128-2}{2^7}+\dfrac{128^0}{2^6}$.

8. Fie E mijlocul laturii CD a dreptunghiului $ABCD$, astfel încât $m(\angle BEC) = 60^\circ$ și $BE = 10$ cm. Determinați aria dreptunghiului.



9. Andreea și Valerica au mâncat împreună 33 de bucăți de sushi. Determinați câte bucăți a mâncat fiecare, dacă se cunoaște că triplul bucăților servite de Andreea sunt cu 9 mai multe decât dublul celor servite de Valerica.

10. Determinați volumul și aria unei sfere, dacă se cunoaște că raportul dintre volum și arie este 4 cm.

11. Fie $E(x)=\left(\frac{3}{x+1}+\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{1-x}\right):\frac{4}{x+1}$. Determinați numerele întregi x pentru care $E(x)$ este număr întreg.

12. Aflați numărul real m pentru care graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (m+2)x^2 - 2mx + 3 + m$ intersectează axa Ox cu două puncte distincte.

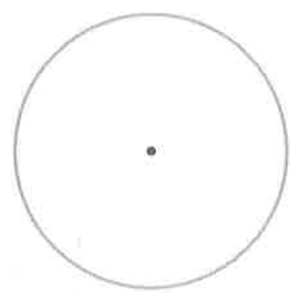
Testul 20

1. Fie $a = 3 - 21$ și $b = 12 \cdot 0{,}25$. Completați casetele cu numere potrivite, astfel încât să se obțină o propoziție adevărată.

$$a = \square, \quad b = \square, \quad \frac{a}{b} = \square$$

2. Lungimea cercului de centru O, reprezentat în desenul alăturat, este egală cu 20π cm. Scrieți în casetă aria discului.

$$A_d = \square.$$



3. Fie A mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $4x^2 - 7x + 3 = 0$. Determinați mulțimea $A \cap \left(\frac{8}{10}, 2\right)$.

4. Determinați prețul inițial al unei cărți știind că, după două scumpiri de 10%, costul cărții a devenit 242 lei.

5. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2$. Completați caseta, astfel încât să obțineți o propoziție adevărată.

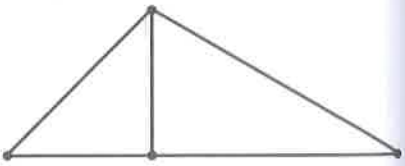
„Ordonata vârfului parabolei este egală cu $\boxed{}$."

6. Determinați numerele naturale formate dintr-o cifră care verifică inegalitatea:

$$(x - 1)^2 + 2x < x^2 + x - 5$$

7. Calculați valoarea expresiei: $6\sqrt{7}+\dfrac{9}{5-2\sqrt{7}}$

8. În triunghiul ABC se cunoaște că $BD=4\sqrt{3}$ cm, $m(\angle ABD) = 30°$, $m(\angle ACD) = 45°$. Determinați lungimea laturii AC, dacă $AD \perp BC$ și $D \in (BC)$.



9. La o nuntă au fost invitate 75 de perechi. Determinați numărul de invitați din partea mirelui, știind că dacă din partea miresei ar fi venit cu 15 oaspeți mai puțini, iar din partea mirelui cu 15 oaspeți mai mulți, atunci din partea miresei ar fi de 2 ori mai puțini oaspeți.

10. Volumul unui trunchi de con circular drept este de 124π cm^3. Determinați aria laterală dacă diametrul bazei mici este 8 cm, iar diametrul bazei mari este 14 cm.

11. Fie $E(x)=\left(\frac{x}{x+3}-\frac{3}{3-x}\right):\frac{9+x^2}{x^2+6x+9}$. Simplificați expresia și determinați valorile lui $x\in\mathbb{Z}\setminus\{-3, 3\}$ pentru care valorile lui $E(x)$ sunt numere întregi.

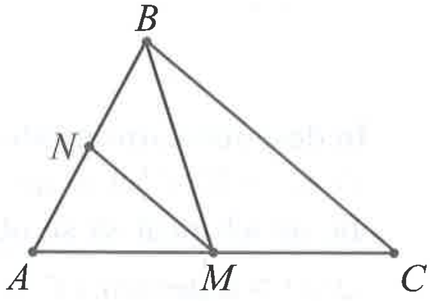
12. Fie funcțiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-4$ și $g(x)=3x+m-2$. Determinați valorile reale ale lui m, pentru care punctul de intersecție al graficului funcției f cu axa absciselor aparține și graficului funcției g.

Testul 21

1. Completați caseta pentru a obține o propoziție adevărată: „Dacă $x = -5 + 3$ și $y = \frac{2}{3} : \frac{4}{9}$, atunci valoarea produsului $x \cdot y$ este numărul $\boxed{}$".

2. În desenul alăturat este reprezentat triunghiul ABC cu aria de 100 cm^2. Punctele M și N sunt mijloacele laturilor AC și AB. Completați casetele, astfel încât să se obțină propoziții adevărate:

$A_{BMC} = \boxed{}$ cm^2 și $A_{AMN} = \boxed{}$ cm^2

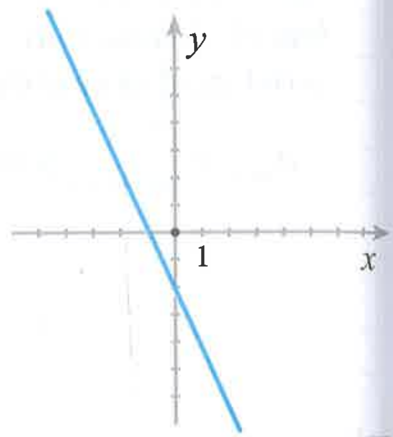


3. Determinați modulul diferenței soluțiilor reale ale ecuației: $x^2 + 13x + 42 = 0$.

4. La o fabrică, 5 roboți asamblează o mașină în 30 de minute. Câți roboți sunt necesari pentru a asambla aceeași mașină în 6 minute?

5. În desenul alăturat este reprezentat graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$. Să se completeze caseta, astfel încât să se obțină o propoziție adevărată:

„$f(x) > 0$ pentru $x \in \boxed{}$".

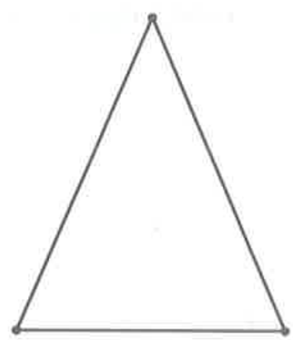


6. Determinați cardinalul mulțimii formate din numerele întregi negative care verifică inegalitatea:

$$(x-4)(4+x)-(x-2)^2 < 8\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

7. Calculați valoarea expresiei: $\frac{4^{-4}}{32^{-2}} - \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}}$.

8. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic isoscel, în care $AB = BC$ și înălțimea AK este de 12 cm. Determinați perimetrul triunghiului ABC, dacă aria lui este egală cu 120 cm^2.



9. Suma vârstelor a doi frați este de 30 de ani. În urmă cu 6 ani, vârsta fratelui mai mare era de două ori mai mare decât vârsta fratelui mai mic. Determinați vârstele lor actuale.

10. Aria totală a unei prisme patrulatere regulate este 126 cm^2. Determinați volumul prismei, dacă se cunoaște că lungimea muchiei bazei este o treime din înălțimea prismei.

11. Determinați valorile reale ale lui x, pentru care $\frac{3x-6}{x^2+x}=\frac{x-2}{x+1}-\frac{1}{x}$.

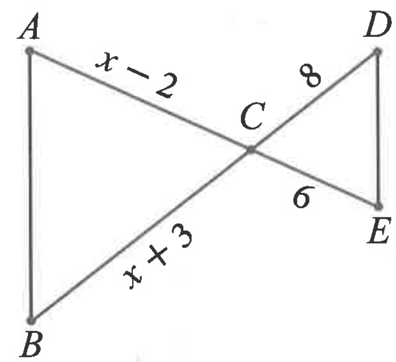
12. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=mx^2+(m+3)x+1-4m$, $m\neq 0$, pentru care $x=1$ este zerou. Să se determine monotonia funcției.

Testul 22

1. Completați caseta pentru a obține o propoziție adevărată. „Dacă $a = 10 - (-2)$ și $b = 2\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{3}$, atunci valoarea raportului $\frac{b}{a}$ este numărul $\boxed{}$."

2. În figura alăturată $AB \parallel DE$. Utilizând datele din desen, completați caseta, astfel încât să obținem o propoziție adevărată.

$x = \boxed{}$



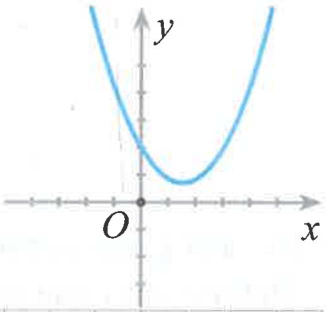
3. Determinați cel mai mare număr întreg situat între soluțiile ecuației:

$$5x^2 + 14x - 3 = 0.$$

4. Mircea parcurge într-o zi 20% din drumul total de 45 km. Dacă în a doua zi parcurge 16 km, câți km trebuie să parcurgă în a treia zi pentru a termina drumul?

5. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0$. Utilizând desenul, completați caseta, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată.

Numărul de soluții ale ecuației $f(x)=0$ este egal cu $\boxed{}$.



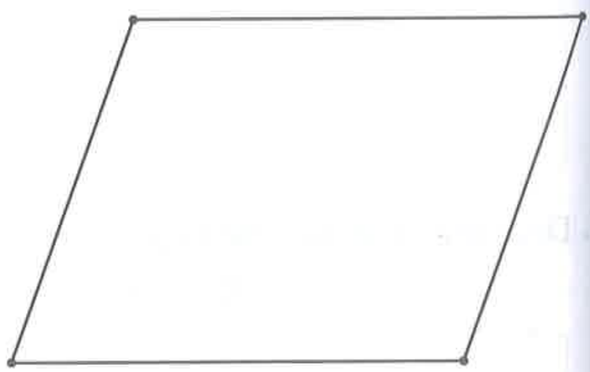
6. Determinați numerele întregi mai mari decât $\sqrt{8}$ care verifică inegalitatea:

$$(1{,}5-x)(x+1{,}5)-0{,}3x>0{,}6-x^2$$

7. Arătați că valoarea expresiei este un număr natural:

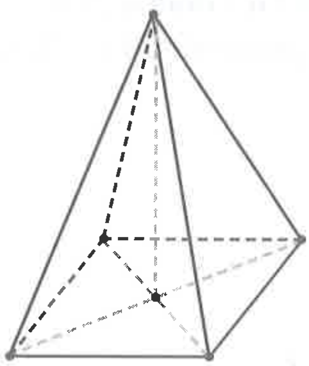
$$\frac{3}{3-2\sqrt{2}}-\frac{2}{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{200}.$$

8. Fie $ABCD$ un paralelogram cu $AD = 4$ cm, $AB = 5$ cm și $m(\angle BAD) = 135°$. Determinați aria paralelogramului.



9. Ana și Delia au împreună 400 de lei. Dacă Ana i-ar da Deliei o cincime din suma pe care o are, atunci ele vor avea sume egale. Să se afle ce sumă avea fiecare la început.

10. Într-o piramidă patrulateră regulată înălțimea este de 12 cm și apotema este de 15 cm. Determinați volumul piramidei.



11. Fie $E(x)=\dfrac{3-9x}{2-5x-3x^2}$. Determinați pentru care $x \in \mathbb{Z}$, valoarea lui $E(x)$ este număr natural.

12. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b, a\neq 0$. Să se determine a și b, astfel încât punctele $A(2, -2)$ și $B(4, 4)$ aparțin lui G_f.

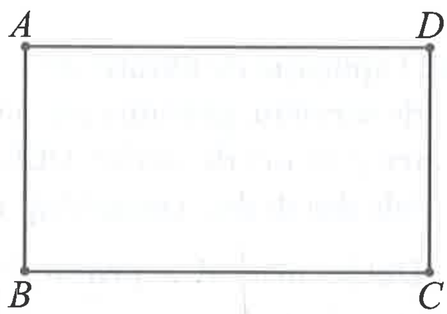
Testul 23

1. Fie $a = 4 : \dfrac{2}{7}$ și $b = -2^4$. Completați casetele cu numere reale, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată.

$$a = \boxed{},\quad b = \boxed{},\quad a + b = \boxed{}$$

2. În desenul alăturat avem dreptunghiul $ABCD$ cu perimetrul de 42 cm și $AB < BC$. Determinați lungimea și lățimea dreptunghiului, dacă lungimea este de 2 ori mai mare decât lățimea.

$AB = \boxed{}$ cm, $BC = \boxed{}$ cm.

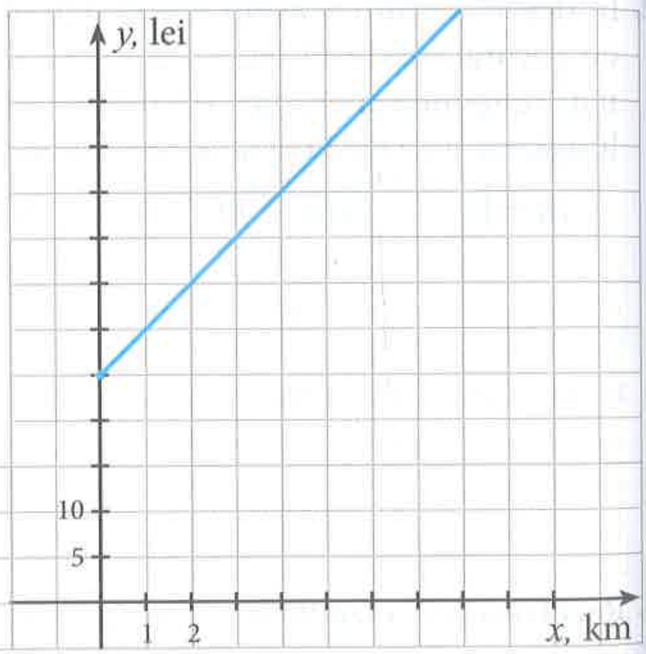


3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $1 - (x + 3)^2 = 0$.

4. Pentru luna decembrie, Raia a primit o factură de 2800 lei, corespunzătoare unui consum de 700 kWh de electricitate. Care este valoarea facturii primite în noiembrie pentru un consum de 950 kWh?

5. O aplicație de livrare are o taxă fixă de serviciu, plus un cost pe kilometru parcurs de curier. Utilizând datele din desen, completați casetele.

Dacă curierul a primit 55 de lei, atunci el a parcurs $\boxed{}$ km și costul pentru un kilometru este de $\boxed{}$ lei.

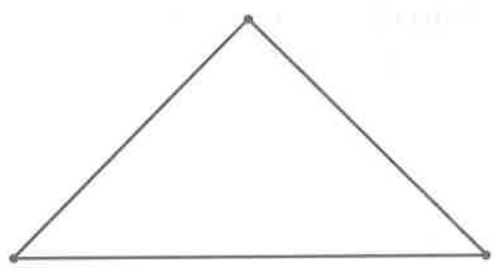


6. Determinați numerele subunitare care verifică inegalitatea:

$$(2x-1)^2 - 7x(x-3) \geq (3x+2)(1-x)$$

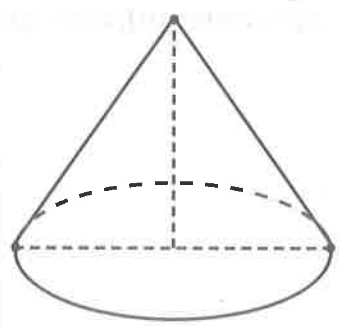
7. Calculați valoarea expresiei: $\sqrt{\frac{9}{4}+\sqrt{3\frac{1}{16}}}+\frac{5^{-7}\cdot 25^{2}}{125^{-1}}$.

8. Determinați perimetrul unui triunghi isoscel care are aria de 48 cm^2 și înălțimea corespunzătoare bazei este 6 cm.



9. Media aritmetică a două numere naturale este 30. Împărțind numărul mai mare la cel mai mic se obține câtul 7 și restul 4.

10. Generatoarea unui con circular drept este de 6 cm. Determinați volumul conului, dacă se cunoaște că secțiunea axială este un triunghi dreptunghic isoscel.



11. Se consideră raportul algebric $E(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 16x + 16}{x^3 + 3x^2 - 16x - 48}$. Să se afle $x \in \mathbb{N}$, pentru care $E(x) \in \mathbb{Z}$.

12. Messi și Ronaldo execută câte o lovitură liberă. Înălțimea mingii (h, în metri) în funcție de timpul scurs (t, în secunde) este dată de: $h_M(t) = 8t - t^2$ și $h_R(t) = 12t - 2t^2$. Determinați care jucător a trimis mingea mai sus și a cui lovitură a zburat cel mai mult.

Testul 24

1. Fie $a = \frac{5}{9} : \frac{5}{3}$ și $b = -7 + 5$. Completați casetele cu numere reale, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată.

$$a = \boxed{},\quad b = \boxed{},\quad a^b = \boxed{}$$

2. Fie $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$. Se cunoaște că $m(\angle A) = 35°$ și $m(\angle P) = 56°$. Completați casetele cu numere reale, astfel încât să obțineți propoziții adevărate:

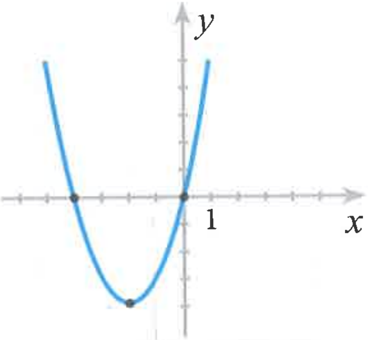
$$m(\angle C) = \boxed{},\quad m(\angle B) = \boxed{}.$$

3. Determinați un număr rațional cuprins între soluțiile ecuației $4x^2 - 7x + 3 = 0$.

4. Un pepene verde conține 92% apă. Dacă partea solidă a pepenelui cântărește 1,2 kg, care este masa totală a lui?

5. În desenul alăturat este reprezentat graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$. Utilizând datele din desen, scrieți în casetă una dintre expresiile „strict crescătoare" sau „strict descrescătoare", astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:
„Pe intervalul $(-\infty;-2)$ funcția f este

______ ".

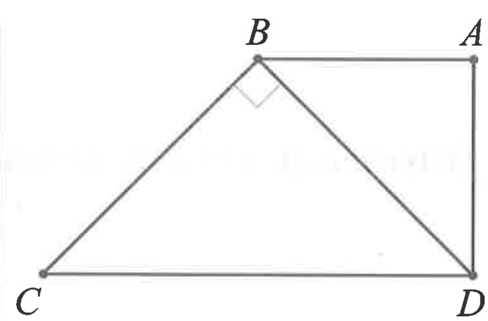


6. Determinați cel mai mare număr întreg nenul care verifică inegalitatea:

$$\frac{x(x+4)}{2} < \frac{2x^2+5}{4}$$

7. Calculați valoarea expresiei: $\sqrt{(-3)^2}+\sqrt{\left(2\sqrt{3}-4\right)^2}+\sqrt{12}$.

8. În trapezul $ABCD$ dreptunghic în A cu baza mare CD și $BD \perp BC$, avem $BC = 10$ cm și $CD = 25$ cm. Determinați baza mică.



9. Suma a două numere naturale este egală cu 150, iar raportul dintre primul număr micșorat cu 8 și al doilea număr mărit cu 12 are valoarea 1. Care este diferența numerelor?

10. Un cilindru din metal cu înălțimea de 4 cm și raza bazei de 3 cm se topește și se confecționează o sferă. Determinați raza sferei.

11. Fie $E(x)=\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)^2:\frac{6x^2+4x}{x^4-2x^2+1}$. Determinați numerele întregi n pentru care $E(n) \in \mathbb{N}$.

12. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(a-1)x+a^2-1$. Să se determine valorile parametrului real a, știind că abscisa punctului de intersecție cu Ox este -1, iar ordonata punctului de intersecție al graficului funcției cu Oy este un număr negativ.

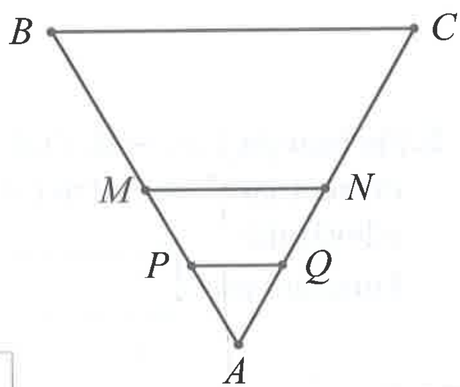
Testul 25

1. Fie a = 1–3 și $b=\frac{16}{3}:\frac{8}{9}$. Completați casetele cu numere reale, astfel încît propoziția obținută să fie adevărată.

$a=$ ☐, $b=$ ☐, $a\cdot b=$ ☐

2. În desenul alăturat este reprezentat triunghiul ABC și punctele M, N, P, Q sunt mijloacele segmentelor AB, AC, AM și AN respectiv. Scrieți în casetă lungimea segmentului PQ, dacă se cunoaște că $BC = 32$ cm.

$PQ=$ ☐ cm.



3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{2}x^2+\sqrt{18}x-\sqrt{32}=0$.

4. Un tren parcurge o distanță între două orașe în 4 ore, mergând cu o viteză medie de 80 km/h. Cu ce viteză medie ar trebui să circule acest tren pentru a parcurge aceeași distanță în 2,5 ore?

5. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 5 - x$. Scrieți în casetă una dintre expresiile „strict crescătoare" sau „strict descrescătoare", astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

Funcția f este ______.

6. Determinați cel mai mic număr natural care verifică inegalitatea de mai jos, apoi media aritmetică a numărului aflat și 10.

$$-x(x + 1) < -x^2 + 4x - 15$$

7. Calculați: $\dfrac{2-2\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}-1+\sqrt{20}$.

8. Un romb are un unghi cu măsura de 120°, iar diagonala mică este de 20 cm. Determinați perimetrul și aria rombului.

9. Dacă într-o clasă ar veni 3 fete și ar pleca 2 băieți, numărul fetelor ar deveni egal cu triplul numărului băieților, iar dacă ar pleca 6 fete și ar veni 5 băieți, atunci numărul fetelor ar deveni o doime din numărul băieților. Determinați numărul elevilor din clasă.

10. Dintr-o bucată de plastic în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 3 cm, 4 cm și 6 cm, un copil a confecționat o piramidă patrulateră regulată cu latura bazei de 6 cm. Determinați înălțimea piramidei obținute.

11. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{x}{x-1}-\frac{2}{1-x^2}+\frac{1}{x+1}\right):\frac{x^3+x^2}{x^2-x}$. Aduceți expresia la o formă mai simplă.

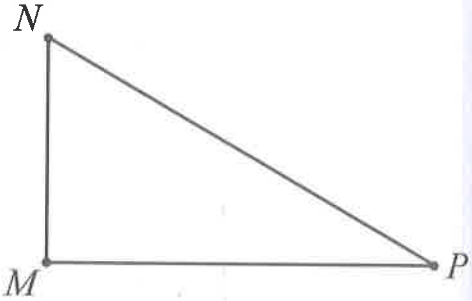
12. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=m^2x^2+2mx+5$. Determinați valorile reale ale lui m, pentru care graficul funcției f trece prin punctul $A(1, 8)$ și funcția f admite un punct de minim.

Testul 26

1. Fie $a = \frac{9}{5} \cdot \frac{25}{3}$ și $b = -8 + 3$. Completați casetele cu numere reale, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată.

$$a = \boxed{}, \quad b = \boxed{}, \quad \frac{a}{b} = \boxed{}$$

2. În desenul alăturat avem reprezentat triunghiul MNP dreptunghic în M, $MN = 5$ cm, $MP = 12$ cm, $NP = 13$ cm. Completați caseta cu numerele potrivite:



$$\sin(\angle N) = \boxed{}, \quad \cos(\angle N) = \boxed{}.$$

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x + (2x + 4)^2 - 12 = 0$.

4. Populația unui oraș a crescut cu 5% într-un an. Dacă populația după această creștere este de 39 900 de locuitori, care a fost populația inițială a orașului înainte de creștere?

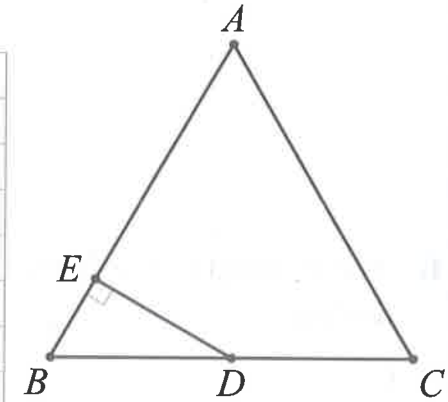
5. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 4x + 4$. Scrieți în casetă valoarea de adevăr a propoziției de mai jos: „Punctul $A(0; 4)$ este punctul de intersecție cu axa ordonatelor."

6. Determinați trei cele mai mari numere întregi consecutive care verifică inegalitatea:

$$(x + 1)(x^2 - x + 1) > x^3 + 5x + 3$$

7. Calculați valoarea expresiei: $\sqrt{3\frac{1}{16}-\left(8^{-3}\cdot 16^{2}+2^{-2}\right)}$.

8. Fie ABC un triunghi isoscel și D este mijlocul bazei BC. Se duce $DE \perp AB$, unde $E \in (AB)$. Calculați aria triunghiului ABC, știind că $AE = 8$ cm și $EB = 2$ cm.



9. Maxim a cumpărat 40 de acțiuni: o parte dintre acestea la o fabrică textilă, cu 21 de euro bucata, iar altele, la o fabrică de pâine, cu 18 euro bucata, achitând în total 750 de euro. Câte acțiuni de fiecare fel a cumpărat?

10. Un obiect metalic din bronz în formă de con circular drept, cu raza bazei de 16 cm și înălțimea de 8 cm, este topit și transformat în mai multe fire metalice cilindrice identice, fiecare având forma unui cilindru circular drept cu raza bazei de 0,3 cm și înălțimea de 100 cm. Determinați câte fire metalice se obțin.

11. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\frac{x^2+4}{x^2-x}=\frac{x-1}{x}-\frac{1}{x+1}$.

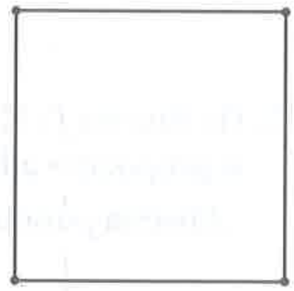
12. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(2-m)x+m^2-16$. Determinați $m\in\mathbb{R}$, pentru care funcția f este strict descrescătoare și trece prin originea sistemului de axe ortogonale.

Testul 27

1. Fie $a = 1{,}5^2$ și $b = 13 - 17$. Completați casetele cu numere reale, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată.

$$a = \boxed{}, \quad b = \boxed{}, \quad a \cdot b = \boxed{}$$

2. În desenul alăturat avem un pătrat cu diagonala de 10 cm. Determinați aria acestui pătrat și completați caseta de mai jos.



$$A = \boxed{}$$

3. Determinați care dintre soluțiile ecuației $6x^2 - 13x + 6 = 0$ este număr periodic.

4. Dintr-o cantitate de 800 kg de mere se obțin 480 l de suc. Câte kg de mere sunt necesare pentru a obține 1200 l de suc?

5. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 4x - 2$. Completați caseta, astfel încât să obțineți o propoziție adevărată.

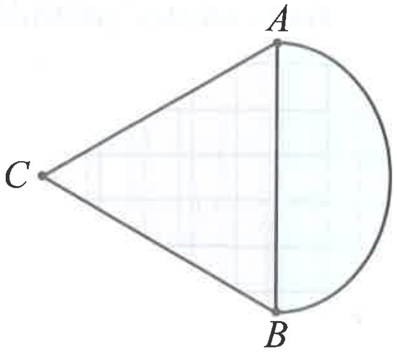
„Abscisa punctului în care graficul funcției f intersectează axa Ox este $\boxed{}$."

6. Determinați suma tuturor numerelor întregi care verifică simultan $|x| \leq 4$ și inegalitatea:

$$10 + x^2 \geq (3 + x)^2 - 5x$$

7. Calculați valoarea expresiei: $-\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2}-\sqrt{108}$.

8. În figura alăturată avem reprezentat un parc. Triunghiul ABC este echilateral cu perimetrul egal cu 450 m și reprezintă zona verde a parcului, iar semidiscul colorat albastru are AB ca diametru. Dacă s-ar plasa un gard în jurul întregii suprafețe din imagine, ce lungime ar avea gardul?



9. Un tractor transportă remorci cu cereale, toate remorcile având aceeași masă. Când tractorul este atașat la 3 remorci, masa totală este de 7000 kg, iar atunci când este atașat la 5 remorci, masa totală este de 10 000 kg. Determinați masa tractorului și masa unei remorci încărcate.

10. Diagonala bazei unei piramide patrulatere regulate este de 20 cm. Determinați volumul piramidei, dacă se știe că înălțimea este 15 cm.

11. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{2x}{x^2-9}-\frac{1}{x+3}\right):\frac{x}{6-2x}+\frac{2}{x}$. Arătați că $E(x) = 0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3, 0, 3\}$.

12. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = ax^2 - 2x + a + 1$, $a \neq 0$. Aflați coordonatele punctului de intersecție cu axa ordonatelor, dacă se știe că f este strict crescătoare pe $(1, +\infty]$ și strict descrescătoare pe $(-\infty, 1]$.

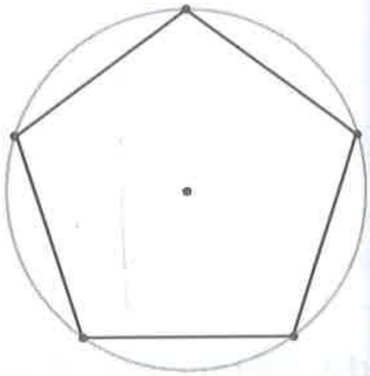
Testul 28

1. Fie $a = \frac{1}{3} - 1$ și $b = -1 - 2$. Completați casetele cu numere reale, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată.

$a = \square$, $b = \square$, $a \cdot b = \square$

2. Fie $ABCDE$ un pentagon regulat înscris în cercul de centru O. Scrieți în casetă măsura în grade al arcului ABC.

$m\left(\overset{\frown}{ABC}\right) = \square$



3. Să se determine soluțiile iraționale ale ecuației $x^4 - 6x^2 + 5 = 0$.

4. Concentrația unei soluții de apă cu zahăr este de 12%. Aflați cantitatea totală de soluție ce s-a obținut, utilizând 36 g de zahăr.

5. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + 4x - 3$, $a \neq 0$. Dacă $x = 3$ este zerou al funcției f, scrieți în casetă una dintre expresiile „cu ramurile în sus” sau „cu ramurile în jos”, astfel încât să se obțină o propoziție adevărată.

„Graficul funcției f este o parabolă cu $\boxed{}$.”

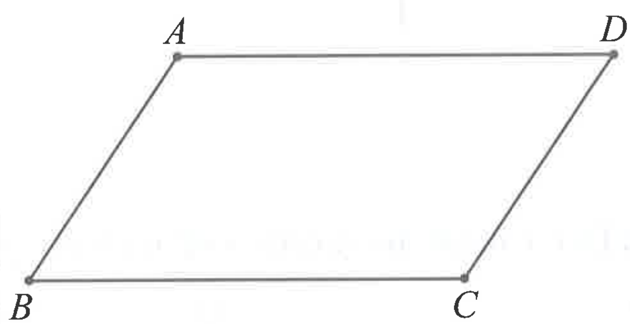
6. Determinați un număr irațional care verifică inegalitatea:

$$\frac{(x+2)^2}{2} - \frac{x^2+4}{2} \leq 3x - 2$$

7. Scrieți în casetă unul dintre semnele: „ < ”, „ > ” sau „ = ”, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată, prezentând calculele complete.

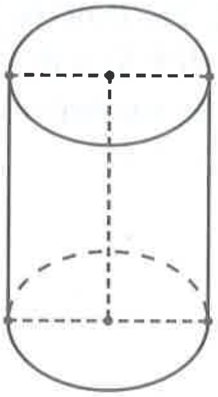
$$\sqrt{98}-\frac{\sqrt{50}}{10}-2\sqrt{8}\ \boxed{}\ 3,5$$

8. Fie $ABCD$ paralelogram cu $AB = 9$ cm și $AC = 12$ cm. Determinați aria acestui paralelogram știind că $BA \perp AC$.



9. Un muncitor trebuie să planteze un set de copaci într-o zi de lucru. Dacă ar planta câte 10 copaci pe oră, atunci i-ar rămâne 4 copaci neplantați la final de zi, iar dacă ar planta câte 14 copaci pe oră, atunci ar finaliza lucrul cu două ore mai devreme. Calculați numărul total de copaci pe care trebuie să-i planteze muncitorul.

10. Secțiunea axială a unui cilindru circular drept este un pătrat cu perimetrul 16 cm. Să se determine aria totală a cilindrului.



11. Fie expresia algebrică $E(x)=2-\frac{2}{x^2-9}\cdot\left[\left(\frac{x^2+9}{6x}-1\right):\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{x}\right)\right]$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3, 0, 3\}$. Să se rezolve ecuația $E(x) = 3$.

12. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = (m - 3)x + 4m$, $m \neq 3$. Se știe că punctele $A(3; 5)$ și $B(-2; 10)$ aparțin graficului funcției f. Verificați dacă punctul $C(1; 4)$ este coliniar cu A și B.

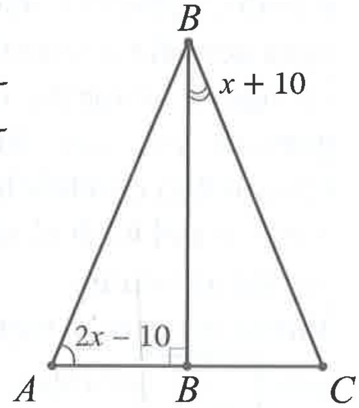
Testul 29

1. Fie $a = (-2) \cdot 5 + 3$ și $b = 2^3$. Completați casetele cu numere reale, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată.

$a = \boxed{}$, $b = \boxed{}$, $a - b = \boxed{}$

2. În desenul alăturat este un triunghi isoscel, în care $[AB] \equiv [BC]$, BM este înălțime. Utilizând desenul, completați caseta astfel încât să obțineți o propoziție adevărată.

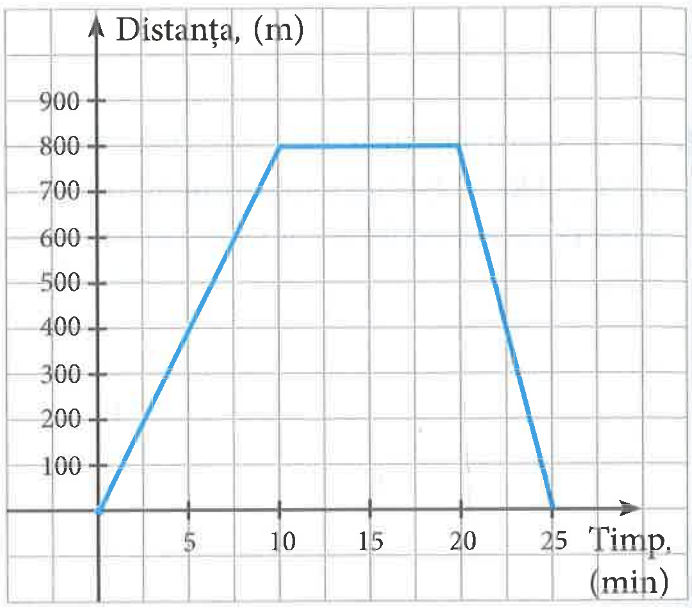
$x = \boxed{}$



3. Fie A mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $10x^2 + 7x - 3 = 0$. Să se determine card $(A \cap \mathbb{Z})$.

4. Un ciclist a parcurs 30 km în 2 h și 30 min. Determinați în cât timp (în ore și minute) va parcurge ciclistul un traseu de 45 km.

5. Alexandrina merge cu bicicleta la bunica sa în vizită. Aceasta o așteaptă cu plăcinte, stau de vorbă, apoi nepoata pornește spre casă. În figura alăturată este ilustrat graficul mișcării Alexandrinei. Completați casetele libere cu numere, astfel încât să obțineți propoziții adevărate.



Viteza cu care a mers la bunica este $\boxed{}$ m/min.

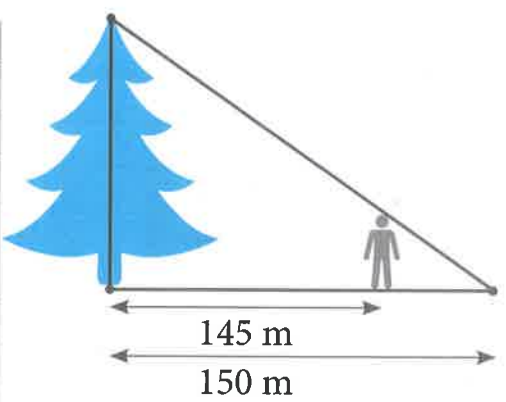
Viteza cu care s-a întors de la bunica este $\boxed{}$ m/min.

6. Determinați două numere întregi, astfel încât unul să verifice inegalitatea de mai jos, iar celălalt nu.

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \leq x^2+\frac{3}{2}x+1$$

7. Calculați și comparați: $\sqrt{\frac{10^2 \cdot 10^{-3}}{0,1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}$ $\square$ 3.

8. În imagine este reprezentat un brad cu înălțimea de 54 m, care lasă o umbră de 150 m. Gheorghe se află la o distanță de 145 m de brad, iar umbra lui se suprapune peste umbra copacului, astfel încât vârful umbrei bradului coincide cu vârful umbrei lui Gheorghe. Determinați înălțimea lui Gheorghe.



9. Într-un vagon de tren, numărul locurilor ocupate este egal cu dublul numărului locurilor libere (nu există persoane care stau în picioare). Dacă la prima stație în vagon ar urca 4 persoane, atunci numărul locurilor ocupate ar deveni de patru ori mai mare. Câte locuri are în total vagonul?

10. Să se determine volumul unei prisme triunghiulare regulate, dacă se cunoaște că aria bazei este $9\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, iar aria laterală este $42\ \text{cm}^2$.

11. Se consideră expresia $E(x)=\frac{3x+7}{x^2-3x}-\frac{21+8x}{x(x-3)(x+3)}-\frac{x+2}{x^2-9}$. Aduceți expresia la o formă mai simplă.

12. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+ax-b$. Determinați parametrii reali a și b, știind că graficul funcției trece prin punctul $A(1, 0)$ și că vârful parabolei se află pe Ox.

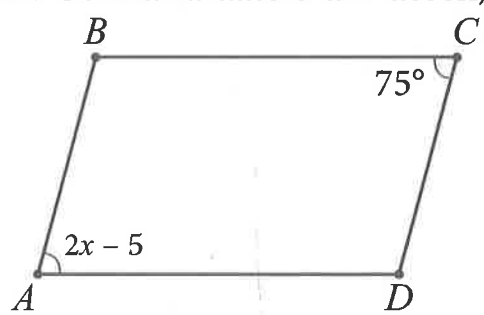
Testul 30

1. Fie $a=\frac{7}{8}:\frac{1}{4}$ și $b=\frac{1}{2}\cdot 3$. Completați casetele cu numere reale, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată.

$a=\boxed{}$, $b=\boxed{}$, $a+b=\boxed{}$

2. În desenul alăturat, $ABCD$ este un paralelogram. Utilizând datele din desen, aflați x.

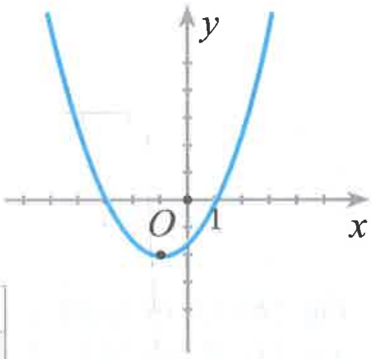
$x=\boxed{}$



3. Fie A mulțimea soluțiilor reale ale ecuației: $-2x^2+13x-15=0$. Determinați mulțimea $A \setminus \mathbb{N}$.

4. Câți lucrători agricoli sunt necesari pentru a recolta un câmp în doar 4 zile, dacă se cunoaște că 24 de lucrători pot recolta același câmp în 7 zile?

5. În desenul alăturat este reprezentat graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0$. Folosind desenul, completați, astfel încât să obțineți o propoziție adevărată.



$$-\frac{\Delta}{4a} \ \boxed{} \ 0$$

6. Determinați cel mai mare număr întreg care verifică inegalitatea:

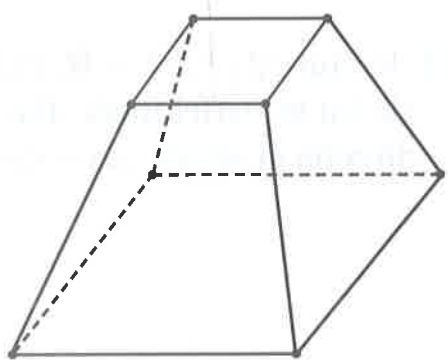
$$-x\left(x+\sqrt{108}\right)\geq -x^2-5x\sqrt{3}-3$$

7. Calculați valoarea expresiei: $\dfrac{27^3 \cdot 9^{-2}}{5 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^2}$.

8. Fie $ABCD$ un romb cu $AB = AC$, iar M și N sunt mijloacele laturilor AB, respectiv AD. Dacă $BD = 8$ cm și $AC < BD$, determinați aria triunghiului MNC.

9. În urmă cu doi ani, vârsta fiului era de 5 ori mai mică decât vârsta tatălui. Peste șase ani, vârsta tatălui va fi de trei ori mai mare decât vârsta fiului. Ce vârstă are fiecare în prezent?

10. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are diagonalele bazelor de $6\sqrt{2}$ cm și $4\sqrt{2}$ cm, iar apotema este de 5 cm. Să se determine aria laterală.



11. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $3x^2 - 3x = \frac{36}{3x^2 - 3x}$.

12. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (2m - 3)x - m^2 - 1$. Determinați valorile reale ale lui m, astfel încât $A(m, 3)$ aparține graficului funcției f, care formează cu direcția pozitivă a axei absciselor un unghi ascuțit.

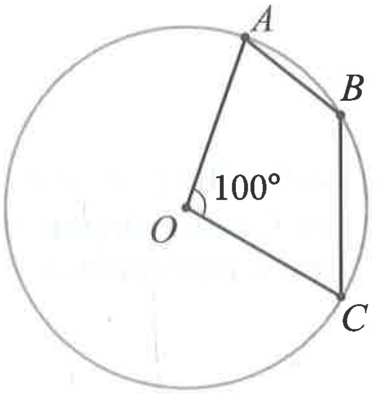
Testul 31

1. Fie $a = 7 + (-4)$ și $b = 0{,}75 \cdot 4$. Completați casetele cu numere reale, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată.

$$a = \boxed{},\quad b = \boxed{},\quad \frac{a}{b} = \boxed{}$$

2. În desenul alăturat este reprezentat cercul de centru O și punctele A, B, C aparțin cercului, astfel încât $m(\angle AOC) = 100°$. Scrieți în casetă măsura în grade a unghiului ABC.

$$m(\angle ABC) = \boxed{}$$



3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x^2\left(3 - \frac{9}{x}\right) + 6 = 0$.

4. Pe stadionul „Allianz Arena” din München, la ultimul meci al echipei Bayern, au rămas 2100 de locuri libere. Determinați cât la sută reprezintă locurile libere, dacă se știe că la meci au fost 67900 de spectatori.

5. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + 2m$. Să se determine coordonatele punctului A, care este punctul de intersecție cu axa ordonatelor, dacă se știe că $x = 2$ este zeroul funcției.

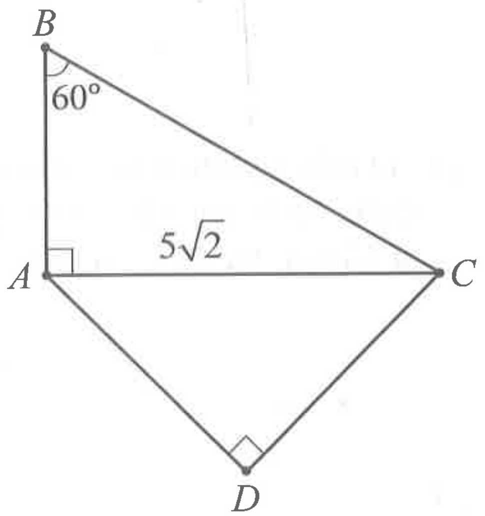
$A(\boxed{}, \boxed{})$

6. Determinați opusul celui mai mic număr întreg care verifică inegalitatea:

$$\frac{x(x-2)}{3} > \frac{4x^2-10x-48}{12}$$

7. Fie $a=\left(1+\sqrt{10}\right)^2-\sqrt{2}\cdot\sqrt{20}+\dfrac{10}{\sqrt{10}}-\sqrt{10}$. Arătați că a este un număr natural.

8. În desenul alăturat avem triunghiul dreptunghic ABC și triunghiul dreptunghic isoscel ADC. Să se determine perimetrul patrulaterului $ABCD$, dacă $m(\angle ABC) = 60°$ și $AC = 5\sqrt{2}$ cm.



9. La un eveniment caritabil participă în total 28 de voluntari. $\frac{3}{4}$ dintre femei și $\frac{5}{6}$ dintre bărbați au mai participat la evenimente similare. Determinați câți bărbați și câte femei sunt în echipa de voluntari, dacă 6 dintre ei participă pentru prima dată la un astfel de eveniment.

10. O bilă metalică are volumul de 288π cm^3. Ea urmează să fie introdusă într-o cutie în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile 10 cm, 12 cm și 15 cm. Va încăpea bila în cutie?

11. Determinați *DVA* și simplificați fracția algebrică $\dfrac{11x-3x^2-6}{3x^2+4-8x}$.

12. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + px + q$. Să se determine valorile reale ale parametrilor p și q, pentru care punctul $A(3, 10) \in G_f$ și $x = -2$ este zerou al funcției.

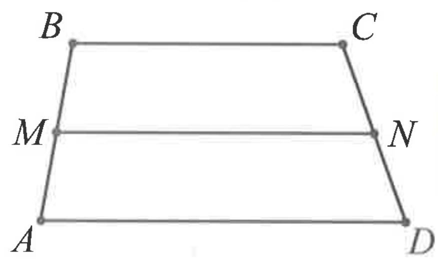
Testul 32

1. Fie $a=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ și $b = 0{,}25 - 1$. Calculați casetele cu numere reale, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată.

$$a = \boxed{},\quad b = \boxed{},\quad \frac{b}{a} = \boxed{}$$

2. Fie trapezul $ABCD$, în care raportul bazelor AD și BC este de $\frac{8}{5}$ și lungimea liniei mijlocii este de 26 cm. Completați în casete, astfel încât să obțineți propoziții adevărate:

$$BC = \boxed{},\ AD = \boxed{}.$$

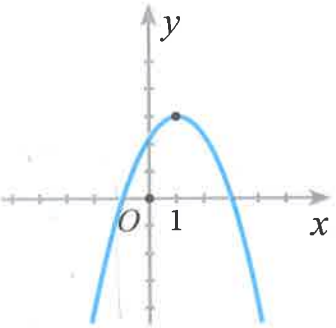


3. Fie S mulțimea soluțiilor reale ale ecuației: $3x^2 - 10x + 3 = 0$. Determinați mulțimea $S \cap \left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

4. Un teren are o suprafață totală de 2400 m^2. Se știe că 40% din suprafață este ocupată de casă, 35% de grădină, iar restul este liber. Câți m^2 reprezintă suprafața liberă?

5. În desenul alăturat este reprezentat graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$. Folosind datele din desen, completați caseta astfel încât să obțineți o propoziție adevărată:

$f(x) > 0$, pentru $x \in$ $\boxed{}$.

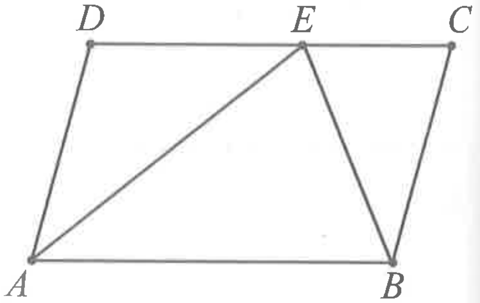


6. Determinați produsul numerelor naturale nenule care verifică inegalitatea:

$$\frac{x^2+6x}{3}-\frac{x(x+2)}{2}<\frac{28-x^2}{6}$$

7. Calculați valoarea expresiei: $\left(\frac{1}{4}\right)^{-15} \cdot 16^{-7} + \left(\frac{1}{5}\right)^{0}$.

8. În figura alăturată avem paralelogramul $ABCD$ cu $AB = 12$ cm. Semidreptele AE și BE sunt bisectoarele unghiurilor DAB, respectiv ABC, iar $E \in (DC)$. Determinați perimetrul paralelogramului.



9. La o paradă, 180 de militari se așază în formație, astfel încât numărul rândurilor este mai mare cu 3 decât numărul militarilor din fiecare rând. Determinați numărul rândurilor.

10. Un bloc de gheață în formă de con circular drept are raza bazei de 6 cm și înălțimea de 24 cm. Prin topire, toată gheața este turnată în opt bile sferice identice. Determinați raza fiecărei bile.

11. Fie expresia $E(x)=\frac{(2x+1)(2x-1)-(x-2)^2-10x+8}{3x^2-15x+12}$. Determinați valorile întregi ale lui x, pentru care $E(x) \in \mathbb{N}$.

12. Nelea se deplasează zilnic la locul de muncă, utilizând fie serviciile de taxi, fie mașina proprie. Suma (în lei) percepută pentru parcurgerea distanței de x km se calculează conform formulei $f(x) = 3{,}5x$ pentru deplasarea cu taxiul, și conform formulei $g(x) = 1{,}5x + 20$ pentru deplasarea cu mașina proprie (unde 20 reprezintă taxa pentru parcare). Determinați distanța, începând cu care deplasarea cu mașina proprie este mai rentabilă decât cu taxiul.

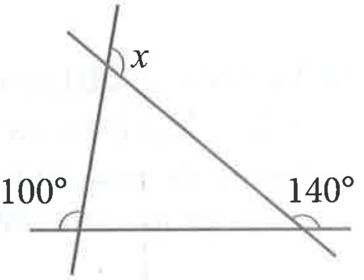
Testul 33

1. Fie $a = \frac{1}{2} - 1$ și $b = 0{,}5 \cdot (-6)$. Completați casetele cu numere reale, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată.

$a = \boxed{}$, $b = \boxed{}$, $a \cdot b = \boxed{}$

2. Utilizând datele din desen, aflați măsura unghiului marcat cu x.

$x = \boxed{}$

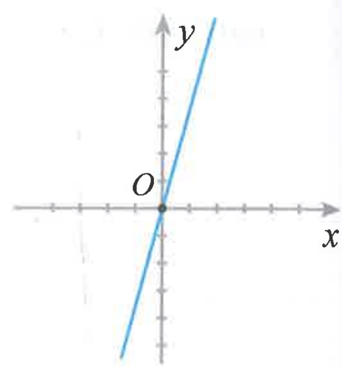


3. Determinați suma pătratelor soluțiilor reale ale ecuației: $-x^2 + 6x - 8 = 0$.

4. O tipografie produce un tiraj de reviste în 4 ore, folosind 6 mașini de tipar. Câte mașini de tipar ar trebui să folosească pentru a finaliza același tiraj în doar 3 ore?

5. În desenul alăturat este reprezentat graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a \neq 0$. Utilizând desenul, scrieți în casetă unul dintre semnele „ < ” , „ > ” sau „ = ”, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată.

$$a \cdot b \; \boxed{} \; 0$$

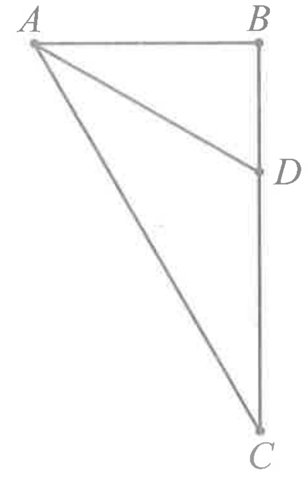


6. Scrieți un număr irațional pozitiv care verifică inegalitatea:

$$(9x - 1)(x - 3) > (3x - 1)(3x + 1)$$

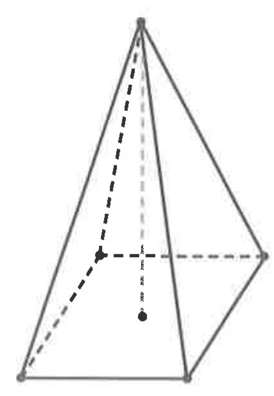
7. Calculați valoarea expresiei: $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$.

8. În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC dreptunghic în B și AD este bisectoarea unghiului BAC, astfel încât $D \in (BC)$. Să se determine AC, dacă se cunoaște că $AD = DC$ și $BD = 2\sqrt{3}$ cm.



9. Într-o competiție de tir cu arcul, Artur a acumulat 36 de puncte după ce a reușit să plaseze 7 săgeți în zona centrală a țintei și 4 săgeți în afara țintei. Igoraș a obținut 47 de puncte din 9 săgeți reușite și 5 eșuate. Câte puncte se acordă pentru o lovitură reușită și câte puncte se scad pentru o lovitură eșuată?

10. Determinați volumul unei piramide patrulatere regulate, dacă se cunoaște că înălțimea ei este de $4\sqrt{3}$ cm și formează cu muchia laterală un unghi de 30°.



11. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\dfrac{3x-1}{x^2-2x-3}=\dfrac{2x+1}{3-x}+\dfrac{x}{x+1}$.

12. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + m$ și $g(x) = 2x - 5$. Determinați valorile reale ale lui m, pentru care graficele funcțiilor f și g au un singur punct de intersecție.

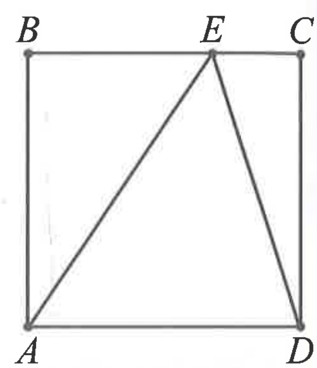
Testul 34

1. Fie $a = \frac{16}{9} : \frac{8}{3}$ și $b = 1 - 4$. Completați casetele cu numere reale, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată.

$a = \boxed{}$, $b = \boxed{}$, $a \cdot b = \boxed{}$

2. În figura alăturată este reprezentat pătratul $ABCD$ și $E \in (BC)$. Să se determine aria pătratului și aria triunghiului AED, dacă se știe că $AB = 18$ cm.

$A_{ABCD} = \boxed{}$ cm^2, $A_{AED} = \boxed{}$ cm^2



3. Determinați un număr irațional cuprins între soluțiile reale ale ecuației:

$$x^2 - 9x + 20 = 0$$

4. La Casa de Cultură din comuna Bleșteni s-a organizat un concert dedicat hramului, unde au fost 280 de spectatori, ceea ce reprezintă 35% din consătenii care nu au fost. Determinați populația totală a comunei Bleșteni.

5. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + m$. Completați caseta cu un număr real, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată.

„Dacă $f(2) = 1$, atunci $f(1) = \boxed{}$"

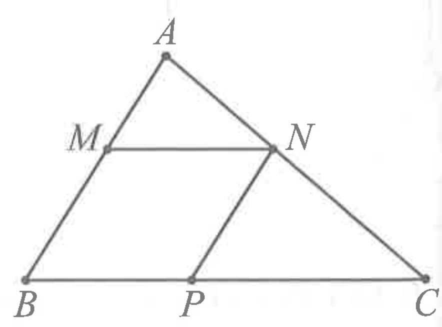
6. Determinați diferența dintre cel mai mic cub perfect și cel mai mic pătrat perfect care verifică inegalitatea:

$$\frac{x+1}{2} - \frac{2x(x-3)}{8} > \frac{21 - x^2 + 3x}{4}$$

7. Arătați că valoarea expresiei de mai jos este un număr natural.

$$\frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}+2\cdot\left|3-2\sqrt{3}\right|$$

8. Fie triunghiul ABC, în care $BC = 24$ cm și $AB = 8$ cm. Punctele M, N, P aparțin laturilor AB, AC și BC respectiv, astfel încât $BMNP$ este romb. Determinați perimetrul rombului.



9. Numerele a și b sunt invers proporționale cu 4 și 6. Să se determine a și b, dacă diferența dintre dublul numărului mai mic și o treime din numărul mai mare este 12.

10. O cutie în forma de paralelipiped dreptunghic are două dimensiuni cunoscute de 2 dm și 1 dm. Se știe că în cutie se pot așeza exact 24 de cuburi de lemn, fiecare având muchia de 5 cm, astfel încât cuburile să fie așezate complet în interior, fără spații libere. Determinați a treia dimensiune a paralelipipedului.

11. Simplificați fracția algebrică $\dfrac{(3x-2)^2-3x(x-4)-10}{(x-1)(x^2+3x+2)}$.

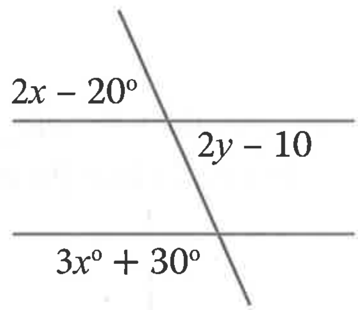
12. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = mx + 2$ și $g(x) = -x^2 + 4x + 1$. Determinați valorile reale ale lui m, pentru care vârful parabolei funcției g aparține graficului funcției f.

Testul 35

1. Fie $a = 10 - 20$ și $b = 0{,}2 \cdot (-10)$. Completați casetele cu numere reale, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată.

$$a = \square, \quad b = \square, \quad \frac{a}{b} = \square$$

2. În figura alăturată dreptele a și b sunt paralele și sunt intersectate de dreapta c. Utilizând datele din desen, aflați x și y.



$$x = \square, \quad y = \square.$$

3. Determinați numerele prime cuprinse între cele două soluții ale ecuației:

$$(x - 5)^2 - 16 = 0$$

4. O barcă cu 12 pescari prinde 204 kg de pește într-o oră. Știind că toți pescarii lucrează cu aceeași eficiență, determinați câți pescari erau în a doua barcă, dacă în 5 ore au prins 425 kg de pește.

5. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (2a - 1)x + 3$. Scrieți în casetă o valoare pentru a, astfel încât funcția să aibă zeroul un număr pozitiv.

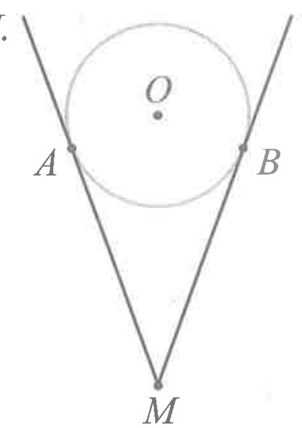
$a = \boxed{}$

6. Determinați al doilea cel mai mic număr întreg care verifică inegalitatea:

$$x^3 + 3x^2 + 3x < (x + 1)^3 + 2x$$

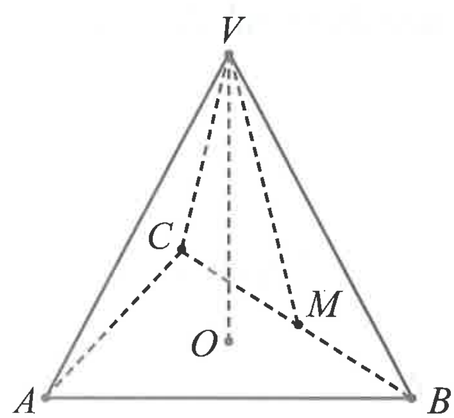
7. Fie $a = (2^{33} - 2^{32} - 2^{31} - 2^{30}) : 2^{29}$. Determinați opusul lui a.

8. În figura alăturată este reprezentat un cerc a cărui lungime este 14π cm. Fie O centrul cercului și M un punct exterior din care se duc tangentele MA și MB astfel încât $m\left(\overset{\frown}{AB}\right) = 120°$. Aflați aria patrulaterului $AOBM$.



9. Natalia a cumpărat un amestec de 1 kg de bomboane. La prețul de 45 lei/kg a cumpărat bomboane cu fructe și la prețul de 65 lei/kg bomboane cu ciocolată. Să se afle câte kg de fiecare fel a cumpărat, dacă în total a plătit 59 lei.

10. În figura alăturată este reprezentată piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu înălțimea $VO = 3$ cm și apotema $VM = 2\sqrt{3}$ cm, $M \in (BC)$. Determinați aria laterală a piramidei.



11. Determinați valorile naturale ale lui x, pentru care expresia $E(x)=\dfrac{8x+2x^2-x^3}{12x-3x^2}$ este o fracție echiunitară.

12. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-2(m+1)x+m^2+2$. Determinați valorile reale ale lui m, pentru care funcția f are cel puțin un zerou.

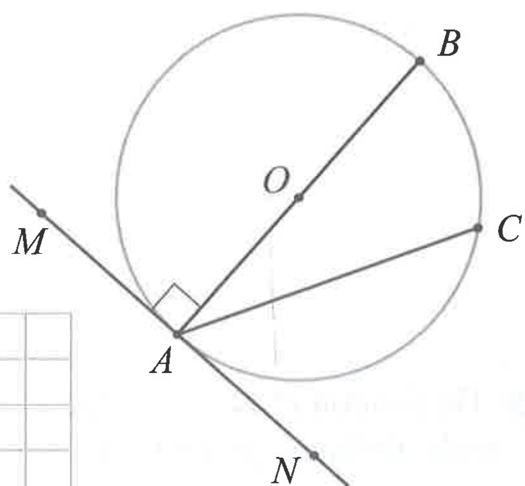
Testul 36

1. Fie $a = -7 - 5$ și $b = 7\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{31}$. Completați casetele cu numere reale, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată.

$$a = \boxed{}, \quad b = \boxed{}, \quad \frac{a}{b} = \boxed{}$$

2. În figura alăturată, AB este diametrul cercului și AC este o coardă. Știind că MN este tangenta la cerc în punctul A și $m\left(\overset{\frown}{BC}\right) = 70°$, să se determine măsura unghiului CAN.

$$m(\angle CAN) = \boxed{}$$



3. Determinați cel mai mare divizor comun al soluțiilor ecuației $x^2 - 36x + 320 = 0$.

4. Ion a observat că producția de energie eoliană a crescut cu 25% într-o perioadă de vânt puternic, iar apoi a scăzut cu 25% din cauza calmului atmosferic. Dacă producția finală este de 450 MWh *(megawatt-oră)*, care a fost producția inițială de energie eoliană?

5. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x^2 - 2x + 3$. Scrieți în casetă ordonata vârfului parabolei ce reprezintă graficul funcției f.

$$y_0 = \boxed{}$$

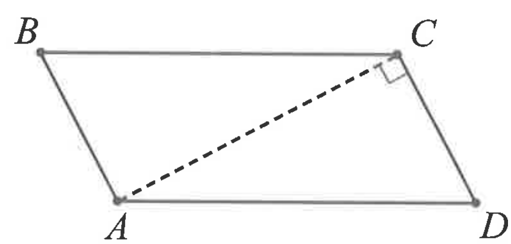
6. Determinați produsul numerelor întregi negative care verifică inegalitatea:

$$10x - x(x + 30) + 2(5x - 10) - 7 < -x^2 - 4x + 6$$

Teste

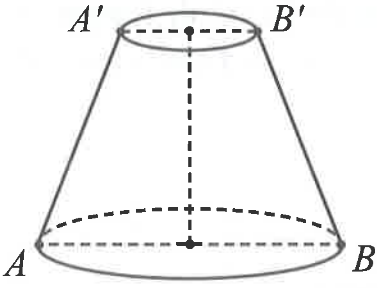
7. Fie $a=\left(\frac{18}{\sqrt{18}}-\frac{8}{\sqrt{8}}+\frac{2}{\sqrt{2}}\right):\frac{\sqrt{2}}{2}$. Determinați inversul lui a.

8. Fie $ABCD$ paralelogram cu aria de $240\ \text{cm}^2$ și $AC = 24$ cm. Determinați perimetrul paralelogramului, dacă $AC \perp CD$.



9. Lucian vrea să obțină 10 litri de soluție de acid sulfuric de 25% pentru curățarea unor piese metalice. El are la dispoziție o soluție diluată de 16% și o soluție mai concentrată de 40%. Ce volum din fiecare trebuie să combine?

10. Un trunchi de con $ABB'A'$ are raza bazei mari egală cu 12 cm, raza bazei mici egală cu 3 cm și aria laterală egală cu 225π cm^2. Să se determine volumul trunchiului.



11. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x}-1\right)\cdot\frac{x^3+x^2}{x^3-x^2+x}$. Rezolvați în $\mathbb{R}$, ecuația $E(x)=-1$.

12. Fie funcțiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^2+2x+3$ și $g(x)=5$. Să se arate că graficul funcției f este situat strict dedesubtul graficului funcției g.

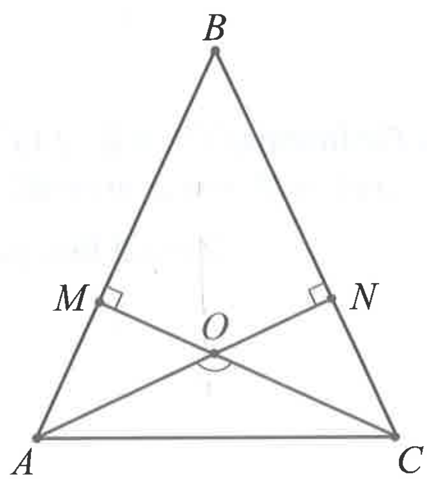
Testul 37

1. Fie $a = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ și $b = 28 : 14 \cdot 2$. Completați casetele cu numere reale, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată.

$a = \boxed{}$, $b = \boxed{}$, $a \cdot b = \boxed{}$

2. În figura alăturată avem triunghiul isoscel ABC cu baza AC. Dacă AN și CM sunt înălțimi și $m(\angle CAN) = 25°$, să se determine măsura în grade a unghiurilor AOC și ABC.

$m(\angle AOC) = \boxed{}$, $m(\angle ABC) = \boxed{}$.



3. Determinați soluțiile reale ale ecuației: $x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{5}{9} = 0$.

4. Într-un laborator, Ludmila amestecă 96 cg de platină și 240 mg de iridiu. Să se determine titlul aliajului obținut, având în vedere că platina este un metal mai prețios.

5. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{18}x+3\sqrt{8}$. Scrieți în casetă una dintre expresiile „rațional” sau „irațional”, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată.

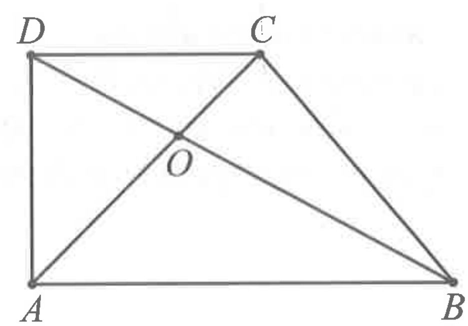
Zeroul funcției f este un număr $\boxed{}$.

6. Determinați numerele întregi care verifică inegalitatea:

$$x(7-2x)>5-x^2+x$$

7. Arătați că valoarea expresiei este un număr natural $E = \frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} + \frac{3\left(\sqrt{3}-2\right)}{\sqrt{3}}$.

8. Fie trapezul dreptunghic $ABCD$, cu baza mare $AB = 16$ cm, baza mică $DC = 8$ cm și înălțimea $AD = 12$ cm. Să se determine OB.



9. Nicolae și Svetlana și-au propus să rezolve împreună, în vacanță, 100 de probleme. Nicolae a rezolvat cu 20% mai multe decât și-a propus, iar Svetlana cu 10% mai puține decât și-a propus, astfel încât la sfârșitul vacanței aveau rezolvate 105 probleme. Câte probleme a rezolvat fiecare?

10. Raisa a turnat apă într-un vas care are forma unui cilindru circular drept, cu raza bazei de 24 cm, lăsând spațiu liber pentru a introduce în vas 5 sfere metalice solide, fiecare cu raza de 12 cm. Determinați cu câți cm se va ridica nivelul apei în vas după scufundarea sferelor, știind că apa nu a curs din vas.

11. Fie expresia $E(x)=\left(2+\frac{1}{x-3}\right):\left[1-\left(\frac{x-2}{x-3}\right)^2\right]$. Arătați că $E(x) \in \mathbb{Z}$, pentru orice număr $x \in \mathbb{Z} \setminus \{2, 3\}$.

12. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + 4x + m$ și $g(x) = x$. Determinați valorile reale ale lui m, pentru care vârful graficului funcției f aparține graficului funcției g.

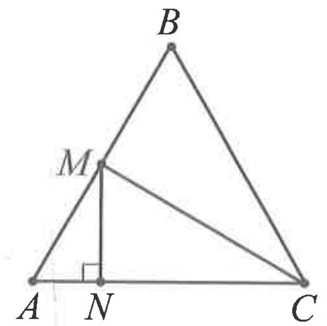
Testul 38

1. Fie $a=\sqrt{\frac{36}{25}}$ și $b=|-2+7|$. Completați casetele cu numere reale, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată.

$a=\boxed{}$, $b=\boxed{}$, $a\cdot b=\boxed{}$

2. În desenul alăturat, triunghiul ABC este echilateral. Să se determine măsura în grade a unghiului CMN dacă se știe că M este mijlocul laturii AB și $MN\perp AC$.

$m(\angle CMN)=\boxed{}$

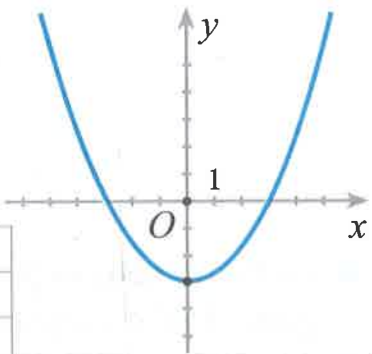


3. Determinați inversul soluției mai mari a ecuației: $20x^2+9x+1=0$.

4. O fabrică a ambalat o cantitate de ulei în 125 de bidoane a câte 15 l fiecare. Câte sticle de 300 ml ar fi necesare pentru a ambala aceeași cantitate totală de ulei?

5. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$. Completați caseta cu unul din semnele „ > ”, „ < ” sau „ = ” astfel încât să obțineți o propoziție adevărată.

$$f(-2) \cdot f(1) \; \boxed{} \; 0$$

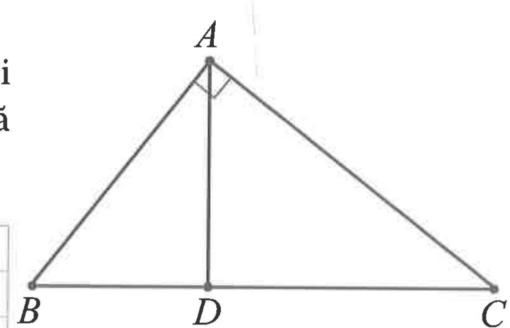


6. Determinați cel mai mare număr par care verifică inegalitatea:

$$(x + 2{,}1)(x + 2) > x^2 + 5{,}1x - 1{,}8$$

7. Calculați valoarea expresiei: $\left(\sqrt{7-2\sqrt{10}}+\sqrt{7+2\sqrt{10}}\right)^2$.

8. În figura alăturată avem triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle BAC) = 90°$. Fie $AD \perp BC$ și $D \in (BC)$. Să se determine BC, dacă se știe că $AD = 4\sqrt{2}$ și $A_{ADC} = 2 \cdot A_{ABD}$



9. Măsura complementului unui unghi este jumătate din măsura unghiului și încă $15°$. Determinați măsura unghiului.

10. O prismă triunghiulară regulată are volumul $20\sqrt{3}\ \text{cm}^3$ și înălțimea de 5 cm. Determinați aria totală a prismei.

11. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{x^2+x+1}{x^3-1}+\frac{1}{1-x}\right):\frac{2x-1}{x^2-x+1}$. Determinați valorile naturale ale lui x, pentru care valoarea expresiei este un număr natural.

12. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2mx + m^2$, $g(x) = 4x + 1$. Determinați valorile reale ale lui m, pentru care graficele funcțiilor f și g se intersectează în cel puțin un punct.

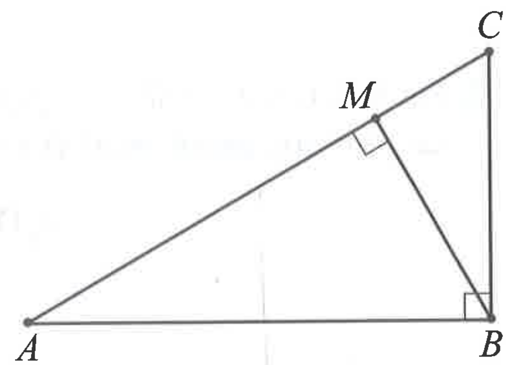
Testul 39

1. Fie $a = \frac{2}{5} + \frac{1}{2}$ și $b = 0{,}1 \cdot 10^2$. Completați casetele cu numere reale, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată.

$a = \boxed{}$, $b = \boxed{}$, $a \cdot b = \boxed{}$

2. Fie triunghiul ABC dreptunghic în B, unde $BM \perp AC$ și $M \in (AC)$. Să se determine CB, știind că $MA = 24$ cm și $AC = 32$ cm.

$CB = \boxed{}$



3. Să se determine modulul diferenței soluțiilor reale ale ecuației: $x^2 - 5x + 7 = 3$.

4. Bateria unui telefon mobil este încărcată la 35%. Dacă mai sunt necesare 7 minute de încărcare rapidă pentru a ajunge la jumătate din capacitate, atunci cât timp durează încărcarea completă a bateriei, de la 0% la 100%?

5. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x - 1$ și $g(x) = -4x + 13$. Completați caseta cu numere, astfel încât să se obțină o propoziție adevărată:

$$G_f \cap G_g = A(\boxed{}, \boxed{}).$$

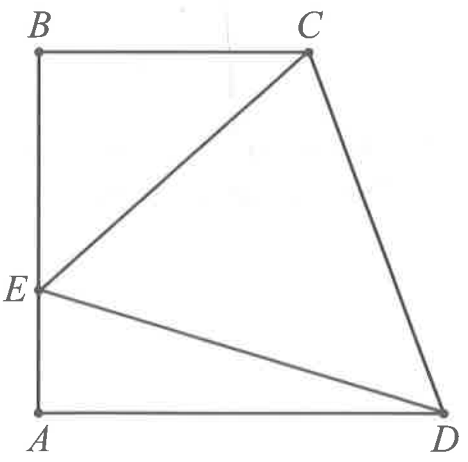
6. Determinați soluția inecuației:

$$11 + 5x^2 \geq (3 + x)^2$$

7.
8.

7. Calculați valoarea expresiei: $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right):\frac{6-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$.

8. În figura alăturată este reprezentat trapezul dreptunghic $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AD > BC$, $m(\angle A) = m(\angle B) = 90°$. Determinați aria triunghiului DEC, dacă se știe că $AD = 20$ cm, $BC = 12$ cm, $AB = 12$ cm și $AE = \frac{1}{2}BE$.



9. Într-o urnă sunt bile albe și negre. Probabilitatea ca la o extragere să se obțină o bilă albă este $\frac{3}{4}$. Determinați numărul bilelor de fiecare culoare, dacă cele albe sunt cu 34 mai multe.

10. Aria totală a unui cilindru circular drept este egală cu triplul ariei bazei. Determinați volumul cilindrului, dacă se știe că raza bazei este 5 cm.

ţină
cele

zei.

11. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $\frac{x^2-3x+2}{x^3-8}=\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x^2+2x+4}$.

12. Fie funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x+10$ şi $g(x)=-x^2+2x+5$. Să se arate că graficul funcţiei f este situat strict deasupra graficului funcţiei g.

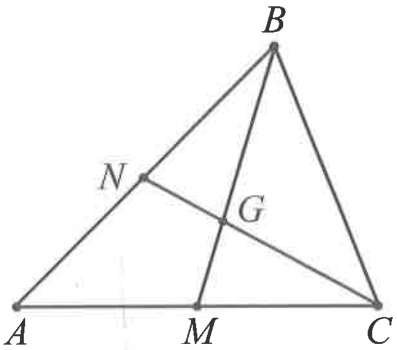
Testul 40

1. Fie $a = \sqrt{0,(4)}$ și $b = 3 + 3 \cdot 3$. Completați casetele cu numere reale, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată.

$a = \boxed{}$, $b = \boxed{}$, $a \cdot b = \boxed{}$

2. În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC, unde M și N sunt mijloacele laturilor AC și AB respectiv. Se știe că $BM \cap CN = \{G\}$ și $BM = 9$ cm, $CN = 12$ cm și $BC = 10$ cm. Determinați perimetrul triunghiului BGC.

$P_{BGC} = \boxed{}$ cm



3. Scrieți numerele întregi cuprinse între soluțiile ecuației:

$$(2x + 1)(1 - 3x) + 6 = 0$$

4. Un rezervor este plin la capacitatea maximă, iar alt rezervor este gol la 60% din capacitatea maximă. Volumul total de lichid din ambele rezervoare este de 420 de litri. Determinați capacitatea maximă a unui singur rezervor.

5. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 5$ și $g(x) = -x + 2$. Completați caseta cu un număr natural, astfel încât să devină o propoziție adevărată.

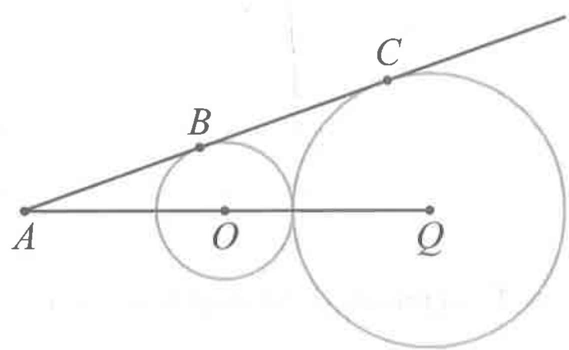
„Numărul punctelor de intersecție ale graficelor funcțiilor f și g este $\boxed{}$."

6. Determinați cel mai mic număr întreg care verifică inegalitatea:

$$\frac{-2x\left(x+\sqrt{8}\right)+x\sqrt{2}}{2} \leq 7-x^2$$

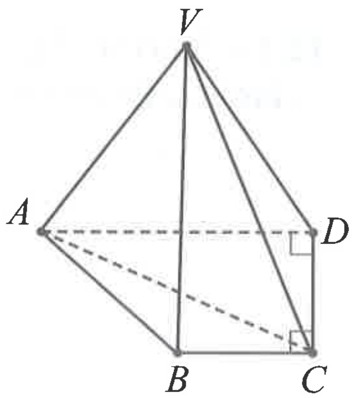
7. Calculați valoarea expresiei: $\dfrac{20^4}{5^4+4\cdot 5^4+3\cdot 5^4}$.

8. În figura alăturată sunt reprezentate cercurile tangente exterior $\mathcal{C}_1(O, 4\text{ cm})$ și $\mathcal{C}_2(Q, 12\text{ cm})$. Punctele B și C aparțin cercurilor $\mathcal{C}_1$ și respectiv $\mathcal{C}_2$, astfel încât dreapta BC este o tangentă comună a acestora. Să se determine lungimea segmentului AC.



9. La o expoziție floristică, dacă s-ar fi pus câte 2 flori în fiecare vază, ar fi rămas 3 flori, iar dacă s-ar fi pus câte 4 flori în vază, ar fi rămas 5 vaze libere și o vază în care stă o singură floare. Câte flori și câte vaze sunt?

10. Baza unei piramide este un trapez dreptunghic cu bazele de 20 cm și 12 cm. Se știe că diagonala bazei corespunzătoare unghiului ascuțit este 25 cm și înălțimea piramidei este 5 cm. Determinați volumul piramidei.



11. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{2}{x+1}-\frac{1}{2+x}\right):\frac{x^2+x-6}{x^3+3x^2-4x-12}$. Aduceți expresia la o formă mai simplă, apoi determinați pentru care valori întregi ale lui x valoarea expresiei este număr întreg.

12. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x^2 - 2x + m$ și $g(x) = 5x - 1$. Determinați valorile reale ale lui m, pentru care vârful funcției f aparține graficului funcției g.

Răspunsuri

Testul 1

1. $a = 12$, $b = -4$, $\frac{a}{b} = -3$. **2.** $20°$. **3.** $S = \{-5, 4\}$. **4.** 117 lei. **5.** 3. **6.** -1. **7.** $\frac{1}{5}$.
8. $3\sqrt{13}$ cm. **9.** 7 triunghiuri și 9 romburi. **10.** 294 cm^2. **11.** $DVA = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\frac{x^2}{x-1}$.
12. $m = 2$.

Testul 2

1. $a = 4$, $b = \frac{1}{12}$, $a \cdot b = \frac{1}{3}$. **2.** $69°$. **3.** $S = \left\{\frac{1}{2}, 6\right\}$. **4.** 33 secunde. **5.** $\Delta > c$. **6.** 0.
7. $22 \in \mathbb{N}$. **8.** $27\sqrt{3}$ cm^2. **9.** 9 răspunsuri corecte și 3 răspunsuri greșite. **10.** 10 cm.
11. $DVA = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $E(x) = x - 1$. **12.** $x_0 = -\frac{5}{4}$.

Testul 3

1. $a = 5$, $b = 5$, $\frac{a}{b} = 1$. **2.** $122°$. **3.** $S = \left\{\frac{1}{2}, 3\right\}$. **4.** 400 cărți. **5.** $>$. **6.** 0 și 1. **7.** 7.
8. 52 cm. **9.** 25 și 40. **10.** 150π cm^2. **11.** $DVA = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$. **12.** $a = -3$.

Testul 4

1. $a = -1$, $b = 3$, $a \cdot b = -3$. **2.** $66°$. **3.** 1. **4.** 180. **5.** 1. **6.** 2. **7.** 2. **8.** 10 cm.
9. 900 lei cămașa și 1500 lei rochia. **10.** 48 cm^2. **11.** $E(x) = \frac{3}{2}$. **12.** $a = -4$.

Testul 5

1. $a = \frac{3}{4}$, $b = 4$, $a \cdot b = 3$. **2.** 24,5 cm^2. **3.** $S = \left\{-1, -\frac{1}{4}\right\}$. **4.** 60. **5.** $<$. **6.** -2.
7. -2. **8.** $16\sqrt{3}$ cm^2. **9.** 7,2 kg cutia cu mere și 9,2 kg cutia cu pere. **10.** Patricia a vopsit o suprafață mai mare. **11.** $DVA = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $S = \left\{-\frac{5}{6}\right\}$. **12.** $p = 0$ și $q = 4$.

Testul 6

1. $a = \frac{1}{5}$, $b = -1$, $a^b = 5$. **2.** 20 cm^2. **3.** $S = \left\{-\frac{1}{3}, 2\right\}$. **4.** 295 pagini. **5.** 0.
6. 10. **7.** 1. **8.** 80 cm. **9.** 12 săli cu 2 geamuri și 15 săli cu 3 geamuri. **10.** 432 cm^3.
11. $DVA = \mathbb{R} \setminus \{-4, 7\}$, $S = \{3, 4\}$. **12.** $a = -5$.

Testul 7

1. $a=0,\ b=\dfrac{3}{2},\ b^a=1$. 2. $84°$. 3. $S=\{-3,\ 4\}$. 4. 13,5 cm. 5. 60 min. 6. $\dfrac{3}{5}$. 7. 9. 8. 25 cm^2. 9. 60 bilete de 90 lei și 40 bilete de 70 lei. 10. Nu sunt suficiente. 11. $DVA=\mathbb{R}\setminus\{-1,\ 0,\ 1\}$, $\dfrac{x+2}{x}$. 12. $m=2$.

Testul 8

1. $a=\dfrac{1}{14}$, $b=-7$, $\dfrac{b}{a}=-98$. 2. $AB=36$ cm, $MC=18$ cm. 3. $S=\left\{-\dfrac{1}{2},\ 2\right\}$. 4. 1080 g. 5. Merge orice număr mai mare decât 3. 6. 4. 7. 20. 8. 70 cm. 9. Marius a cules 57 de mere, iar Damian 39 de mere. 10. 7,5 cm. 11. $DVA=\mathbb{R}\setminus\{-3,\ 3\}$, $x=10$. 12. g este strict crescătoare.

Testul 9

1. $a=-10$, $b=9$, $a+b=-1$. 2. $BN=6$ cm, $AM=3$ cm. 3. 2. 4. 49. 5. 3. 6. 2. 7. 0. 8. 80 cm. 9. 30 și 16. 10. $2\sqrt{6}$ cm. 11. $DVA=\mathbb{R}\setminus\{0,\ 1\}$, $x\in\{-2,\ -1,\ 2\}$. 12. $m=4$.

Testul 10

1. $a=-4$, $b=\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{a}{b}=-16$. 2. $m(\angle AOB)=70°$, $m(\angle AOD)=110°$, $m(\angle ADO)=35°$. 3. $S=\left\{-\dfrac{5}{3},\ 2\right\}$. 4. 40%. 5. $V(-1,\ 3)$. 6. $\left[0,\ \dfrac{11}{7}\right)$. 7. 4. 8. 30 cm. 9. 36 de pârjoale și 16 invitați. 10. 192 cm^3. 11. $\dfrac{x+1}{x+2}$. 12. $(0,\ 2)$.

Testul 11

1. $a=-9$, $b=-9$, $\dfrac{a}{b}=1$. 2. $110°$. 3. $\dfrac{1}{3}$. 4. 18%. 5. $\dfrac{1}{2}$. 6. $\left(-\dfrac{13}{4},\ 0\right]$. 7. $3\in\mathbb{N}$. 8. $8\sqrt{13}$. 9. Prăjitura 7 lei și cafeaua 11 lei. 10. 3 cm. 11. $DVA=\mathbb{R}\setminus\{-3,\ +3\}$, $S=\varnothing$. 12. $m=-\sqrt{6}$.

Testul 12

1. $a=30$, $b=\dfrac{1}{6}$, $a\cdot b=5$. 2. $m(\angle MAB)=40°$, $m(\angle MNB)=40°$. 3. -1. 4. 135 g. 5. $\dfrac{3}{2}$. 6. 4. 7. $>$. 8. 13 cm. 9. 23 găini și 12 iepuri. 10. $64\left(1+2\sqrt{2}\right)$ cm^2. 11. $DVA=\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $\dfrac{x-3}{3}$. 12. $m=-3$.

Testul 13

1. $a > b$. 2. $x = 21$. 3. $\{5\}$. 4. $\frac{7}{8}$. 5. $a = 0$, $b < 0$. 6. -5. 7. 10. 8. 15 cm^2. 9. 33 de mașini și 7 motociclete. 10. Dumitru. 11. $DVA = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. 12. $m = -1$.

Testul 14

1. $a = -2$, $b = \frac{11}{15}$, $b - a = \frac{41}{15}$. 2. $m(\angle AOD) = 110°$. 3. 13. 4. 184 lei. 5. $a < 0$, $f(x) < 0$, $\Delta < 0$. 6. 1. 7. 0. 8. 25 cm^2. 9. $a = 10$ și $b = 25$. 10. $2\sqrt{6}$ cm. 12. $m \in \{-5, -3\}$.

Testul 15

1. $a = 0{,}5$, $b = -25$, $a : b = -0{,}02$. 2. $MN = 16$ cm. 3. $S = \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$. 4. 15 fete. 6. 4. 7. 13. 8. $36\sqrt{3}$ cm^2. 9. 14 și 35. 10. ≈ 42 kg. 11. $DVA = \mathbb{R}$, $\frac{x-2}{3}$. 12. $V(3, -26)$.

Testul 16

1. $a = -8$, $b = 2$, $\frac{a}{b} = -4$. 2. 100°. 3. $S = \{-3, 2\}$. 4. 12 kg de struguri. 5. =. 6. 3. 7. 3. 8. 336 cm^2. 9. 98 de strofe și 19 elevi. 10. 108 cm^2. 11. $DVA = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$, $S = \{1\}$. 12. $a = -1$.

Testul 17

1. $a = 4$, $b = -8$, $\frac{b}{a} = -2$. 2. 12 cm. 3. $S = \left\{-1, \frac{5}{4}\right\}$. 4. 480 lei. 5. <. 6. 9. 7. 1. 8. 8 cm. 9. 25 de trandafiri albi și 20 de trandafiri roșii. 10. 96 cm^2. 12. -17.

Testul 18

1. $a = -4$, $b = 3$, $a \cdot b = -12$. 2. 63°. 3. $-\frac{11}{3}$. 4. 81 min. 5. 16. 6. -4. 7. 0. 8. 4π cm^2. 9. 60 km/h și 80 km/h. 10. 8 cm, 12 cm, 20 cm. 11. $DVA = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $E(x) = x + 1$. 12. f strict descrescătoare.

Testul 19

1. $a = -9$, $b = \frac{1}{9}$, $a : b = -81$. 2. $x = 42$, $y = 40$. 3. $\{-1\}$. 4. 1,8. 5. $\frac{2}{3}$. 6. $[2, 5)$. 7. 1. 8. $50\sqrt{3}$ cm^2. 9. Andreea a servit 15 bucăți și Valerica

18 bucăți. 10. Aria sferei este 576π cm², iar volumul este 2304π cm³. 11. $DVA = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $x \in \{0, 2\}$. 12. $m \in (-\infty, -2) \cup \left(-2, -\frac{6}{5}\right)$.

Testul 20

1. $a = -18$, $b = 3$, $\frac{a}{b} = -6$. 2. 100π cm². 3. $\{1\}$. 4. 200 lei. 5. 2. 6. 7, 8, 9. 7. -15. 8. $4\sqrt{2}$ cm. 9. 85 invitați din partea mirelui și 65 invitați din partea miresei. 10. $A_L = 55\pi$ cm². 11. $x \in \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 9\}$. 12. $m = -10$.

Testul 21

1. -3. 2. $A_{BMC} = 50$ cm² și $A_{AMN} = 25$ cm². 3. 1. 4. 25 roboți. 5. $(-\infty, -1)$. 6. 5. 7. 2. 8. $4\left(10+\sqrt{10}\right)$cm. 9. 18 ani și 12 ani. 10. 81 cm³. 11. $DVA = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, $S = \{1, 5\}$. 12. Funcția f strict crescătoare pe $\left[-\frac{5}{4}, +\infty\right)$ și strict descrescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{5}{4}\right]$.

Testul 22

1. $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$. 2. 17. 3. 0. 4. 20 km. 5. 0. 6. 3, 4 și 5. 7. $3 \in \mathbb{N}$. 8. $10\sqrt{2}$ cm². 9. Ana are 250 lei și Delia 150 lei. 10. 1296 cm³. 11. $DVA = \mathbb{R} \setminus \left\{-2, \frac{1}{3}\right\}$, $x \in \{-1, 1\}$. 12. $a = 3$ și $b = -8$.

Testul 23

1. $a = 14$, $b = -16$, $a + b = -2$. 2. $L = 14$, $l = 7$. 3. $S = \{-4, -2\}$. 4. 3800 lei. 5. 6 km; 5 lei. 6. $\left[\frac{1}{16}, 1\right)$. 7. 3. 8. 36 cm. 9. 53 și 7. 10. $18\sqrt{2}\pi$ cm³. 11. DVA: $\mathbb{R} \setminus \{-4, -3, 4\}$, $x \in \{1\}$. 12. Ronaldo a trimis mingea mai sus (18 m > 16 m).

Lovitura care a zburat cel mai mult îi aparține lui Messi (8 s > 6 s).

Testul 24

1. $a = \frac{1}{3}$, $b = -2$, $a^b = 9$. 2. $m(\angle C) = 56°$, $m(\angle B) = 89°$. 4. 15 kg. 5. Strict descrescătoare. 6. -1. 7. 7. 8. 21 cm. 9. 85 și 65. 10. Raza sferei este 3 cm. 11. $DVA = \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$, $n = -2$. 12. $a = 0$.

Testul 25

1. $a = -2$, $b = 6$, $a \cdot b = -12$. 2. $PQ = 8$ cm. 3. $S = \{-4, 1\}$. 4. 128 km/h. 5. Strict descrescătoare. 6. 7. 7. 3. 8. $P = 80$ cm și $A = 200\sqrt{3}$ cm^2. 9. 12 fete și 7 băieți. 10. 6 cm. 11. $DVA = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, $E(x) = \frac{1}{x}$. 12. $m \in \{-3, 1\}$.

Testul 26

1. a = 15, b = −5, $\frac{a}{b} = -3$. 2. $\sin(\angle N) = \frac{12}{13}$, $\cos(\angle N) = \frac{5}{13}$. 3. $S = \left\{-4, -\frac{1}{4}\right\}$. 4. 38 000 de locuitori. 5. Adevărat. 6. −3, −2 și −1. 7. 1. 8. $A = 40$ cm^2. 9. 10 acțiuni de la fabrica textilă și 30 de acțiuni de la fabrica de pâine. 10. 75 de fire. 11. $DVA = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, $S = \varnothing$. 12. m = 4.

Testul 27

1. $a = 2{,}25$, $b = -4$, $a \cdot b = -9$. 2. 50 cm^2. 3. $\frac{2}{3}$. 4. 2000 kg de mere. 5. $\frac{1}{2}$. 6. −9. 7. 9. 8. 535,5 m. 9. 2500 kg masa tractorului, 1500 masa unei remorci. 10. 1000 cm^3. 12. (0, 2).

Testul 28

1. $a = -\frac{2}{3}$, $b = -3$, $a \cdot b = 2$. 2. 144°. 3. $\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$. 4. 300 g. 5. Cu ramurile în jos. 7. >. 8. 108 cm^2. 9. 84 copaci. 10. $A_t = 24\pi$ cm^2. 11. $S = \{-4\}$. 12. Nu sunt coliniare.

Testul 29

1. $a = -7$, $b = 8$, $a - b = -17$. 2. 30°. 3. 1. 4. 3 h și 45 min. 5. 80 m/min; 160 m/min. 6. −2 și −1. 7. <. 8. 1,8 m. 9. 30. 10. $21\sqrt{3}$ cm^3. 11. $DVA = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$, $E(x) = \frac{2}{x-3}$. 12. $a = -2$, $b = -1$.

Testul 30

1. $a = \frac{7}{2}$, $b = \frac{3}{2}$, $a + b = 5$. 2. 40°. 3. $\frac{3}{2}$. 4. 42. 5. <. 6. 1. 7. 3. 8. $4\sqrt{3}$ cm^2. 9. Tatăl are 42 ani și fiul are 10 ani. 10. 100 cm^2. 11. $S = \{2, -1\}$, $DVA = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. 12. $m = 4$.

Testul 31

1. $a = 3$, $b = 3$, $\frac{a}{b} = 1$. 2. $130°$. 3. $S = \{1, 2\}$, $DVA = \mathbb{R}^*$. 4. 3%. 5. $A(0, -6)$. 6. 23. 7. $a = 11 \in \mathbb{N}$. 8. $10+5\sqrt{6}$ cm. 9. 16 femei și 12 bărbați. 10. Bila nu încape în cutie. 11. $DVA = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}, 2\right\}$, $\frac{3-x}{x-2}$. 12. $p = 1$ și $q = -2$.

Testul 32

1. $a = \frac{3}{4}$, $b = -0{,}75$, $\frac{b}{a} = -1$. 2. $BC = 20$ cm și $AD = 32$ cm. 3. $\varnothing$. 4. 600 m^2. 5. $x \in (-1, 3)$. 6. 24. 7. 5. 8. 36 cm. 9. 15 rânduri de militari. 10. $r = 3$. 11. $DVA = \mathbb{R} \setminus \{1, 4\}$, $x \in \{5, 7\}$. 12. 10 km.

Testul 33

1. $a = -\frac{1}{2}$, $b = -3$, $a \cdot b = \frac{3}{2}$. 2. $120°$. 3. 20. 4. 8 mașini. 5. =. 7. $\frac{1}{2}$. 8. 12 cm. 9. 8 puncte se acordă pentru o lovitură reușită și 5 puncte se scad pentru o lovitură eșuată. 10. $\frac{128\sqrt{3}}{3}$ cm^3. 11. $DVA = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$, $S = \{-9, 0\}$. 12. $m = 4$.

Testul 34

1. $a = \frac{2}{3}$, $b = -3$, $a \cdot b = -2$. 2. $A_{ABCD} = 324$ cm^2, $A_{AED} = 162$ cm^2. 4. 1080 locuitori. 5. 2. 6. 11. 7. $1 \in \mathbb{N}$. 8. 24 cm. 9. $a = 12$ și $b = 8$. 10. 15 cm. 11. $DVA = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}$, $\frac{6}{x+2}$. 12. $m = \frac{3}{2}$.

Testul 35

1. $a = -10$, $b = -2$, $\frac{a}{b} = 5$. 2. $x = 34$ și $y = 29$. 3. $\{2, 3, 5, 7\}$. 4. 5 pescari. 6. 1. 7. -2. 8. $49\sqrt{3}$ cm^3. 9. 0,3 kg bomboane cu fructe și 0,7 kg bomboane cu ciocolată. 10. $18\sqrt{3}$ cm. 11. $DVA = \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$, $E(x) = \frac{x+2}{3}$, $S = \{1\}$. 12. $m \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Testul 36

1. $a = -12$, $b = 2$, $\frac{a}{b} = -6$. 2. $55°$. 3. 4. 4. 480 MWh. 5. 4. 6. -120. 7. $\frac{1}{4}$.

8. 72 cm. 9. 6,25 l din soluția de 16% și 3,75 l din soluția de 40%. 10. 756π cm^3.
11. $DVA = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $S = \{0\}$.

Testul 37

1. $a = 25$, $b = 4$, $a \cdot b = 100$. 2. m($\angle AOC$) = 130°, m($\angle ABC$) = 50°. 3. $S=\left\{-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right\}$. 4. 0,8. 5. Rațional. 6. 2, 3 și 4. 7. $6 \in \mathbb{N}$. 8. $\frac{40}{3}$ cm. 9. Nicolae a rezolvat 60 de probleme, iar Svetlana a rezolvat 45 de probleme. 10. 20 cm. 11. $E(x) = -x + 3$. 12. $m = 1$.

Testul 38

1. $a=\frac{6}{5}$, $b = 5$, $a \cdot b = 6$. 2. 60°. 3. –5. 4. 6250 de sticle. 5. >. 6. 4. 7. 20. 8. 12 cm. 9. 50°. 10. $\left(60+8\sqrt{3}\right)$ cm^2. 11. $DVA=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$, $E(x) = 0$, pentru $x \in DVA$. 12. $m\in\left(-\infty, \frac{5}{4}\right]$.

Testul 39

1. $a=\frac{9}{10}$, $b = 10$, $a \cdot b = 9$. 2. 16 cm. 3. 3. 4. 46 minute și 40 secunde. 5. $A(2, 5)$. 6. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty)$. 7. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 8. 104 cm^2. 9. 51 bile albe și 17 bile negre. 10. $62{,}5\pi$ cm^3. 11. $DVA = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $S = \{-2\}$.

Testul 40

1. $a=\frac{2}{3}$, $b = 12$, $a \cdot b = 8$. 2. 24 cm. 3. –1 și 0. 4. 300 l. 5. 0. 6. –3. 7. 32. 8. $12\sqrt{3}$ cm. 9. 13 vaze și 29 flori. 10. 400 cm^3. 11. $DVA = \mathbb{Z} \setminus \{-3, -2, -1, 2\}$, $x \in \{0, 1\}$. 12. $m = -7$.

Călătoria lui Adrian Ciobanu în lumea cifrelor a început la Gimnaziul Volodeni din raionul Edineț, Republica Moldova, și s-a consolidat la Colegiul Tehnic „Gheorghe Asachi" din Iași, România, locul unde pasiunea pentru științele exacte a prins contur.
Hotărât să exploreze complexitatea logicii, a urmat un parcurs academic ambițios la Universitatea „Alexandru Ioan Cuza" din Iași, unde a studiat simultan la Facultatea de Matematică și la Facultatea de Economie și Administrarea Afacerilor, îmbinând armonios logica matematică și gândirea economică.
Astăzi, este cunoscut în mediul online sub numele **matematica_adrian**, unde promovează cu entuziasm pasiunea pentru matematică și educație.

O zi fără matematică este ca împărțirea la zero – nu are sens.

Republica Moldova

e-mail: info@dorinta.md

LibrariaDorinta

mun. Chișinău
str. I.Creangă 1/3 068 999 932
str. Ceucari 1/2 068 699 969
bd. Mircea cel Bătrân 7 068 999 101
str. N. Zelinski 6/2 068 999 927
bd. Moscova 19 068 999 934
bd. Alba-Iulia 198 (piața "Delfin") 069 169 460 (parteneri)
bd. Ștefan cel Mare 8 ("UNIC") 068 922 228 (parteneri)
str. București 64 (Liceul Gh. Asachi) 069 230 028 (parteneri)

mun. Bălți
str. Ștefan cel Mare 20
068 999 937

or. Anenii Noi
str. A. Suvorov 5/A
068 999 622

or. Cimișlia
str. Ștefan cel Mare 16
068 944 055

or. Fălești
str. Ștefan cel Mare 71
068 999 633

or. Soroca
str. Ștefan cel Mare 110
068 999 936

or. Râșcani
str. Independenței 17/B
068 669 996

or. Drochia
str. 31 august (Autogara)
068 999 924

or. Sîngera
str. 31 August
068 999 935

or. Călărași
str. M.Eminescu 26
0244 2 64 97
str. Biruinței 6
0244 2 30 87 (Autogara)

s. Costești, r-nul Ialoveni
068 430 843 (parteneri)

or. Edineț
str. Independenței 79
069 352 990 (parteneri)

or. Nisporeni
str. Alexandru cel Bun 53
0264 2 62 81 (parteneri)

or. Sângerei
str. Independenței 117
061 091 701 (parteneri)

ROMÂNIA
Distribuit de Editura Dorința SRL
București **+40770224651**
e-mail: info@dorinta.ro

ISBN 978-5-36240-468-0

295[2]