

Grigore Gheba

Exerciții și probleme de matematică

clasele VII — VIII



Editura didactică și pedagogică — București, 1979

**Referenți: Prof. Romeo Munteanu
Prof. Sorin Rădulescu**

**Redactor: Valentin Radu
Tehnoredactor: Ana Țimpău**

P R E F A Ț Ă

În noua ediție am adus îmbunătățiri lucrării care se referă atât la structura cât și la conținutul ei.

Astfel am renunțat la capitolul în care se prezentau elemente teoretice referitoare la mulțimi considerînd că manualele, pe baza noilor programe școlare, abordează suficient de temeinic aceste noțiuni pentru a nu mai fi necesară reluarea lor aici.

Am urmărit realizarea unei mai strînse legături între ordinea problemelor pe capitole sau paragrafe și prevederile programei școlare pentru a veni, în mai mare măsură, în sprijinul elevilor sau al cadrelor didactice care vor găsi, pentru fiecare lecție, aplicațiile necesare aprofundării cunoștințelor. Pentru aceasta unele probleme sau exerciții au căpătat o altă eșalonare, iar la anumite paragrafe am adăugat probleme sau exerciții noi.

La marea majoritate a noilor probleme adăugate enunțul urmărește să-l pună pe rezolvitor ca, în afară de cunoașterea temeinică a elementelor teoretice, să dovedească inventivitate și să încerce un mai mare efort de creație.

Am pus un mai mare accent, atât în enunțuri cât și în indicații, pe stabilirea condițiilor de existență pentru ca elevul să se obișnuiască să precizeze mulțimea valorilor cu care are dreptul să opereze. Aceasta, evident, îi dă posibilitatea să evite

unele concluzii eronate la care ar putea ajunge dacă n-ar lucra riguros.

De asemenea, am adăugat probleme cu un grad mai mare de dificultate pentru elevii cu preocupări mai deosebite la matematică.

În noua formă, consider că lucrarea contribuie în și mai mare măsură la sprijinirea îmbunătățirii procesului de învățare a matematicii în clasele VII—VIII.

Autorul,

Aritmetică

I. Probleme de aritmetică

1. Să se afle două numere, cunoscând că suma lor este 85 și diferența lor este 15.

R. 50; 35.

2. Diferența a două numere este 8, raportul lor este $3 : 2$. Să se afle aceste numere.

R. 24; 16.

3. Să se împartă numărul 46 în două părți, în așa fel ca o treime a părții întii să întreacă cu doi o șeptime a părții a doua.

R. 18; 28.

4. Suma a două numere este 64. Împărțind numărul cel mai mare la cel mai mic, obținem citul 3 și restul 4. Să se găsească cele două numere.

R. 49; 15.

5. Diferența a două numere este 35. Împărțind numărul cel mare la cel mic, obținem citul 4 și restul 2. Să se găsească cele două numere.

R. 46; 11.

6. Avem două rezervoare, dintre care unul conține de două ori mai multă apă decât celălalt. Dacă turnăm din primul rezervor în al doilea 16 hl. ambele rezervoare conțin aceeași cantitate de apă. Câtă apă a fost în fiecare rezervor?

R. 64 hl; 32 hl.

7. În clasele I A și I B ale unei școli au fost înscriși la începutul anului 90 de elevi, clasa I A avînd un număr mai mic de elevi. După un trimestru, doi elevi din clasa I A au fost mutați în clasa I B. Acum raportul dintre numărul elevilor din clasa I A și numărul elevilor din clasa I B este $\frac{7}{8}$.

Cîți elevi au fost în fiecare clasă la începutul anului școlar?

R. 44; 46.

8. În trei coșuri se află 47 de mere. În primele două, numărul merelor este același, iar în al treilea coș sînt cu două mere mai mult decît în fiecare din celelalte. Cîte mere sînt în fiecare coș?

R. 15; 15; 17.

9. Pe trei rafturi se află 63 de cărți; pe primul raft, de trei ori mai multe decît pe al doilea și pe al doilea de două ori mai multe decît pe al treilea. Cîte cărți sînt pe fiecare raft?

R. 42; 14; 7.

10. Din două metale cu densitatea de $7\,200\text{ kg/m}^3$ și $8\,400\text{ kg/m}^3$ s-au fabricat 19 kg de aliaj cu densitatea $7\,600\text{ kg/m}^3$. Cît s-a luat din fiecare metal?

R. $12\frac{2}{3}\text{ kg}$; $6\frac{1}{3}\text{ kg}$.

11. Un număr e format din două cifre. Dacă scădem din el 18, obținem numărul răsturnat. Să se afle numărul știind că suma cifrelor sale este 12.

R. 75.

12. O traversă de fier trebuie tăiată în două părți ale căror lungimi să fie în raport $5 : 3$, iar prima parte trebuie să fie cu 5 dm mai lungă decît $\frac{5}{9}$ din toată traversa. Să se afle lungimile celor două părți.

R. 45 dm ; 27 dm .

13. Dintr-un rezervor s-a scos la început jumătate din apa care se află în el plus $\frac{1}{2}\text{ hl}$, pe urmă jumătate din acest rest plus $\frac{1}{2}\text{ hl}$; în sfîrșit, încă o jumătate din rest plus $\frac{1}{2}\text{ hl}$. După aceste operații, rezervorul mai conține 6 hl de apă. Cîtă apă a fost la început în rezervor?

R. 55 hl .

14. În trei lăzi sînt 300 de mere. Numărul merelor din lada a doua este egal cu $\frac{2}{3}$ din numărul merelor din prima ladă, iar numărul merelor din lada a treia este cît $0,5$ din a doua. Cîte mere sînt în fiecare ladă?

R. 150 de mere; 100 de mere; 50 de mere.

15. Un metrou are patru scări rulante. Cea mai mică scară rulantă are o lungime de 80 m ; această lungime reprezintă $\frac{16}{46}$ din lungimea celei de-a doua scări, $\frac{5}{6}$ din lungimea celei de-a treia și $\frac{5}{7}$ din lungimea celei de-a patra. Să se afle lungimea fiecărei scări rulante.

R. 64 m ; 72 m și 84 m .

16. Distanța între două sate poate fi parcursă într-un timp cunoscut. De cîte ori mai mult sau mai puțin timp va fi necesar ca să se parcurgă o distanță egală cu $\frac{11}{12}$ din prima, dacă se fac de $1\frac{1}{3}$ ori mai mulți pași pe minut decît mai înainte și dacă mărimea pasului va fi de două ori mai mică decît cea precedentă?

R. Timpul al doilea este $\frac{11}{8}$ din primul.

17. Pentru arăturile de toamnă, terenul unei cooperative agricole de producție a fost repartizat la trei brigăzi. Să se afle ariile suprafețelor repartizate

fiecărei brigăzi, dacă $\frac{3}{4}$ din terenul repartizat primei brigăzi reprezintă 0,3 din cel al brigăzii a 2-a și $\frac{1}{8}$ din al brigăzii a 3-a. Aria suprafeței întregului teren este 2 413 ari.

Indicație.

Terenul I reprezintă $\frac{3}{10} : \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$ din terenul II, iar terenul III reprezintă $\frac{3}{10} : \frac{1}{8} = \frac{12}{5}$

din terenul II.

Toate terenurile la un loc reprezintă:

$$\frac{2}{5} + \frac{12}{5} + 1 = \frac{19}{5} \text{ din suprafața terenului II.}$$

$$\text{R. Deci terenul II este } 2\,413 : \frac{19}{5} = \frac{24\,130}{38} = 635 \text{ ari;}$$

$$\text{terenul I} = \frac{2}{5} \cdot 635 = 254 \text{ ari; terenul III} = 1\,524 \text{ ari.}$$

18. O cooperativă agricolă de producție și-a depozitat ovăzul în trei hambare. În primul era $\frac{3}{8}$ din întreaga cantitate de ovăz, în al doilea de $1\frac{2}{3}$ ori mai puțin decât în primul, iar în al treilea restul ovăzului. Când s-au luat $1\frac{1}{2}$ hl din cel de al doilea hambar și 33 hl din al treilea, în fiecare hambar a rămas aceeași cantitate de ovăz.
Cît ovăz a fost în fiecare hambar?

$$\text{R. } \left\{ \begin{array}{l} \text{I. } 67,5 \text{ hl} \\ \text{II. } 40,5 \text{ hl} \\ \text{III. } 72 \text{ hl} \end{array} \right\}$$

19. Într-un atelier al unei cooperative se află două bucăți de stofă de calitate diferite. Prima bucată, cu prețul de $93\frac{3}{4}$ lei metrul, costă cu $187\frac{1}{2}$ lei mai puțin decât a doua, cu toate că este cu $1\frac{1}{2}$ m mai lungă decât bucata a doua, al cărei preț este de $112\frac{1}{2}$ lei metrul. Să se afle lungimea fiecărei bucăți.

$$\text{R. } \left\{ \begin{array}{l} 19 \text{ m.} \\ 17,50 \text{ m.} \end{array} \right\}$$

20. Cinci țărani cooperatori au primit pentru o parte din normele de muncă efectuate 8.594 de lei. Să se afle partea ce s-a convenit fiecăruia, știind că al doilea a primit $\frac{3}{4}$ din ceea ce a primit primul, al treilea $\frac{3}{4}$ din ceea ce a primit al doilea, al patrulea $\frac{3}{4}$ din ceea ce a primit al treilea, iar al cincilea $\frac{3}{4}$ din ceea ce a primit al patrulea.

$$\text{R. I. } 2\,816; \text{ II. } 2\,112; \text{ III. } 1\,584; \\ \text{IV. } 1\,188; \text{ V. } 891 \text{ lei.}$$

21. Într-o ladă se află 0,208 t de mălai, iar în alta 0,01 t. De câte ori trebuie să se adauge în fiecare ladă câte 7 kg pentru ca în prima ladă să fie o cantitate de mălai de patru ori mai mare decât în a doua?

R. De 8 ori.

22. Într-un hambar sint de două ori mai multe cereale decât în altul. Dacă se scot din primul hambar 750 t și se aduc în hambarul al doilea 350 t, amîndouă hambarele conțin aceeași cantitate de cereale. Cîte tone de cereale au fost la început în fiecare hambar?

R. 2 200 t; 1 100 t.

23. Un atelier prelucrează trei bucăți de metal: primele două bucăți au aceeași masă, iar a treia cîntărește cît primele două la un loc. Cîte kilograme cîntărește fiecare bucată, dacă prima și a treia cîntăresc împreună 15 kg?

R. 5 kg; 5 kg; 10 kg.

24. Un copil avea un număr de bile în două cutii, *A* și *B*. Dacă la bilele din cutia *A* s-ar adăuga încă 4, atunci în cutia *B* ar fi de patru ori mai multe decât în *A*; dacă însă la cutia *B* s-ar adăuga 2 bile, atunci în această cutie ar fi de șase ori mai multe bile decât în *A*. Cîte bile au fost în fiecare cutie?

R. 9 și 52.

25. La un centru de pîine, aproape de închidere, vin 5 cumpărători. S-a vîndut primului cumpărător jumătate din cantitatea de pîine pe care o mai avea înainte de închidere și încă o jumătate de pîine; cumpărătorului al doilea i s-a vîndut jumătate din pîinile rămase și încă jumătate de pîine. În același fel s-au vîndut pîinile la încă doi cumpărători. Cînd s-a apropiat al cincilea cumpărător mai rămăsese o singură pîine. Cîte pîini mai avea de vînzare centrul de pîine înainte de închidere?

R. 31 pîini.

26. La o cooperativă agricolă de producție, s-a arat într-o zi cu 20 ha mai mult decât $\frac{2}{5}$ dintr-un lot al cooperativei. Din cauza timpului nefavorabil, în ziua a doua s-a arat cu 10 ha mai puțin decât $\frac{5}{13}$ din ceea ce a rămas, iar în a treia zi $\frac{1}{3}$ din noul rest.

Știind că au mai rămas de arat pentru ziua a patra 60 ha, să se afle cîte hectare are lotul.

R. 250 ha.

27. Un elev a dat din suma pe care a scos-o de la CEC, pentru două cărți, cu un leu mai puțin decât $\frac{1}{2}$ din sumă. Din banii rămași a dat $\frac{5}{7}$ și încă 3 lei pentru abonament pe un an la „Gazeta matematică” și astfel i-au rămas 3 lei. Ce sumă a scos elevul de la CEC?

R. 40 de lei.

28. Un elev a cheltuit o sumă de bani astfel: prima dată jumătate din banii săi și încă un leu, a doua oară jumătate din rest și încă 1 leu, a treia oară $\frac{1}{2}$ din noul rest și încă 3 lei, cheltuind astfel întreaga sumă. Cîți lei a cheltuit?

R. 30 de lei.

29. O cantitate de pește a fost împărțită la trei magazine astfel: prima a primit $\frac{2}{3}$ din întreaga cantitate de pește prins, a doua a primit 0,3 din ceea ce a rămas, iar a treia restul; primul magazin a primit cu 143 kg mai mult pește decât al treilea. Cite kilograme de pește a primit fiecare magazin?

R. I. 220 kg; II. 33 kg; III. 73 kg.

30. Într-o zi s-a scos $\frac{1}{5}$ din griul ce se află într-un hambar, în ziua a doua $\frac{1}{3}$ din rest, în a treia zi s-a scos de 3 ori mai mult griu decât în a patra zi, iar în ziua a patra a fost scoasă toată cantitatea de griu rămasă, adică cu 16 t și 5 q mai puțin decât în prima zi. Cite tone de griu au fost în hambar?

Indicație. În ziua I și a II-a s-a scos din hambar $\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5} + \frac{4}{15} = \frac{7}{15}$, deci pentru a III-a și a IV-a zi au mai rămas $\frac{8}{15}$ din cantitatea inițială. Știind că în ziua a treia s-a scos de 3 ori mai mult decât în a patra zi, rezultă că din cele $\frac{8}{15}$ rămase, s-au scos $\frac{6}{15}$ în ziua a III-a și $\frac{2}{15}$ în ziua a IV-a. Conform enunțului, se deduce că $\frac{1}{15}$ din cantitatea totală reprezintă 16,5 t.

R. 247,5 t.

31. O cooperativă agricolă de producție a semănat un teren astfel: 0,24 din el cu griu, 0,25 din rest cu ovăz, 0,5 din noul rest cu cartofi, iar pe lotul rămas s-a pus floarea-soarelui. Cite hectare avea acel teren, dacă diferența dintre partea semănată cu floarea-soarelui și cea semănată cu ovăz a fost de 50,312 ha?

R. 529,6 ha.

32. Doi taxatori de tramvai, funcționind unul la cl. I și celălalt la cl. a II-a, aveau bilete de valori diferite. $\frac{2}{5}$ din toate biletele erau de 0,25 lei, $\frac{4}{10}$ din numărul rămas de bilete erau de câte 0,35 lei, iar restul erau bilete de câte 0,40 lei și valoarea acestora din urmă era de 144 lei. Cite bilete au avut cei doi taxatori și care este valoarea lor în lei?

R. 1 000 de bilete în valoare de 328 lei.

33. Un tractorist trebuia să are 18 ha și a depășit norma cu un anumit procent. Un al doilea tractorist trebuia să are 24 ha și a depășit norma, procentul de depășire fiind cu 3 unități mai mare decât la primul. Amândoi tractoriștii au arat împreună 44,82 ha. Cu cât la sută a depășit norma primul tractorist?

R. 5%.

34. Trei strungari lucrează într-un atelier, la 3 strunguri cu turații diferite. Primul strung face 360 de rotații pe minut, al doilea 270 de rotații pe minut și al treilea 240 de rotații pe minut. Se întreabă:
a) După cât timp toți strungarii vor termina piesa în același moment?
b) Cite piese produce atelierul în medie pe oră, dacă se știe că pentru o piesă fiecare strung trebuie să facă 900 de turații, iar strungarii lucrează cu același ritm?

- c) Fie P mulțimea ale cărei elemente sînt numărul de piese făcute de cele trei stănguni pe oră și M mulțimea ale cărei elemente sînt trei numere proporționale cu cele trei elemente ale mulțimii P în așa fel ca aceste numere să fie mai mici ca numerele ce sînt elementele mulțimii P și să aparțină numerelor naturale. Scrieți aceste mulțimi.
- d) Determinați $P \cap M$.

R. a) În 30 minute vor face toți un număr întreg de piese și anume 12; 9; 8; b) $19 \frac{1}{3}$ piese; c) $P = \{24; 18; 16\}$; $M = \{12; 9; 8\}$; d) $\emptyset$.

35. Două brigăzi, avînd împreună 25 de tractoriști, ară în 12 zile 2 040 ha. Un tractorist din prima brigadă ară 6 ha pe zi și unul din a doua, 8 ha pe zi.
- a) Câți tractoriști sînt în fiecare brigadă?
- b) Ce economie au realizat cele două brigăzi, dacă prima economisește 2 l de combustibil la ha și a doua, 1,5 l la ha și dacă litrul de combustibil costă 2,20 lei?
- c) Să se scrie mulțimea M ale cărei elemente sînt cifrele ce reprezintă numărul de tractoriști din prima și a doua brigadă.
- d) Fie N mulțimea factorilor primi ai c.m.m.m.c. ai numerelor de tractoriști din cele două brigăzi. Să se scrie relațiile: $M \cup N$ și $M \cap N$.
- e) Ce relații mai puteți pune în evidență între elementele celor două mulțimi?

Indicație. Dacă toți tractoriștii ar fi arat cîte 6 ha pe zi, atunci 25 de tractoriști ar fi arat 150 ha pe zi, iar în 12 zile 1 800 ha. În realitate, ei au lucrat cu $2040 - 1800 = 240$ ha mai mult, ceea ce provine din faptul că tractoriștii din a doua brigadă au arat cu $8 - 6 = 2$ ha mai mult pe zi, prin urmare în 12 zile, cei din a doua brigadă au arat în plus 24 ha.

Observare: Problema se putea rezolva presupunînd că toți tractoriștii ar fi arat cîte 8 ha pe zi.

R. a) 15; 10. b) 7 920 lei. c) $M = \{0; 1; 5\}$.

36. Un lucrător face cîte a piese pe zi, iar un altul cu b piese mai mult pe zi, dar a lucrat cu c zile mai puțin decît primul.

- a) Să se afle cîte zile a muncit fiecare știind că ei au lucrat același număr de piese.
- b) Caz numeric: $2 < a < 25$, $a \in N$ ai cărui divizori scriși în ordinea crescătoare fără extreme, alcătuiesc mulțimea $M = \{3; 4; 6; 12\}$, $b = 4$ și $c = 3$.

Indicație. a) Pentru primul muncitor $\frac{c(a+b)}{b}$ zile.

Numărul de zile lucrate pentru al doilea muncitor $\frac{ac}{b}$.

b) Primul muncitor, lucrînd cîte 24 de piese zilnic, în cele trei zile lucrate în plus a făcut 72 piese. Numărul pieselor lucrate de fiecare dintre cei doi lucrători fiind același, cel de-al doilea lucrător a făcut acest număr de 72 de piese lucrînd mai multe piese în fiecare zi. Știm că a lucrat cu 4 piese pe zi mai multe decît primul; a realizat deci cele 72 de piese în 18 zile.

R. b) 21 zile; 18 zile.

37. O brigadă a unei cooperative agricole de producție trebuia să semene un ogor în 14 zile. Depășind norma cu 2 ha pe zi, a terminat semănatul în 10 zile. Cîte hectare trebuia să semene brigada pe zi și cîte hectare au fost semănate în total?

Indicație. Brigada a lucrat 4 zile mai puțin, deoarece a semănat cîte 2 ha în plus pe zi, deci, în 10 zile a semănat 20 ha în plus față de normă. Pentru cele 20 ha ar mai fi trebuit 4 zile.

R. 70 ha în total.

38. În două depozite s-au adus 4 365 kg de orez. Știind că $\frac{3}{5}$ din cantitatea de orez adus la un depozit împreună cu $\frac{11}{15}$ din cantitatea de orez adus la al doilea depozit reprezintă 2 821 $\frac{2}{5}$ kg. Să se afle cît orez s-a adus la fiecare depozit?

Indicație. Știm că $\frac{9}{15}$ din prima categorie și cu $\frac{11}{15}$ din a doua fac 2 821,40 kg. Așezăm cercurile ce reprezintă grămezile unul sub altul, ca în figura I.1 și apoi grupăm un cerc plin ● cu un cerc ○, așa cum se vede în schemă.

Fiecare grupare ca aceasta reprezintă o cantitate cîntărește, $4\ 365 : 15 = 291$ kg. Însă sînt 9 grupări de acest fel. Ele vor reprezenta $291 \cdot 9 = 2\ 619$ kg.

Dacă din 2 821,40 kg. scădem 2 619 kg., rămîn 202,40 kg. care reprezintă cît cîntăresc cele două grămezi rămase, notate cu 2 cercuri goale. Rezultă că o grămadă reprezentată printr-un cerc gol cîntărește 101,20 kg.

R. 2 847 kg; 1 518 kg.

39. Să se găsească numerele A și B , știind că admit pe 40 ca cel mai mare divizor comun și pe 3 600 ca cel mai mic multiplu comun.

R. O soluție este $A = D = 40$; $B = M = 3\ 600$; putem lua pentru A și B și alte valori, studiind descompunerea în factori a numerelor 40 și 3 600.

40. Doi concurenți, participînd la un concurs, au răspuns corect — primul la 8 întrebări, al doilea la 6 întrebări.

Suma primită de fiecare drept premiu este proporțională cu numărul de întrebări la care a răspuns corect.

a) Că sumă a primit fiecare, dacă $\frac{1}{6}$ din suma primită de al doilea concurent, mărită cu 25% din suma primită de primul, este cu 1 100 de lei mai mică decît sumele primite de ei împreună.

Indicație. Primul a primit 8 părți, iar al doilea, 6 părți. În total 14 părți.

O parte este $\frac{1}{14}$ din întreg. Dacă din tot întregul scădem a 4-a parte din cât a luat primul, adică două părți, și $\frac{1}{6}$ din cât a luat al doilea, adică o parte, în total 3 părți, obținem 1 100 de lei $\Rightarrow$ 11 părți fac 1 100 lei.

R. 800 lei; 600 lei.

41. Trei evidențiați în muncă A , B și C au primit 1 520 de lei. Suma primită de cel de-al doilea reprezintă $\frac{4}{5}$ din suma primită de primul evidențiat, iar suma primită de cel de-al doilea se raportează la suma primită de cel de-al treilea ca numerele $6\frac{1}{2} : 9\frac{1}{8}$.

Să se afle câți lei a primit fiecare evidențiat.

Indicație. Presupunem că A a primit 65 lei, atunci B primește $65 \cdot \frac{4}{5} = 52$ de lei, iar C primește $65 \cdot \frac{73}{65} = 73$ lei.

$1\,520 : 190 = 8$ ori mai mică decât cea din enunț.

Rezultă că sumele primite de cei trei evidențiați vor fi de 8 ori mai mari decât cele presupuse de noi, adică sînt respectiv: 520 de lei, 416 lei, 584 de lei.

R. 520 lei; 416 lei; 584 lei.

42. O coloană de soldați mergea pe o șosea cu viteza de 3 km/oră. Unui biciclist care mergea în același sens, cu viteza de 15 km/oră, i-au trebuit 2 minute pentru a merge de la un capăt la celălalt al coloanei.

Să se afle lungimea coloanei de soldați.

Indicație. În fiecare oră biciclistul va înainta cu $15 - 3 = 12$ km mai mult decât coloana. Într-un minut va înainta cu $12 : 60 = 0,2$ km mai mult decât coloana, iar în două minute cu $0,2 \times 2 = 0,4$ km mai mult. Astfel el ajunge la capătul celălalt al coloanei, care are deci 0,4 km lungime.

R. 0,4 km.

43. Doi drumeți au pornit în același timp pe jos de la sat la oraș. Primul drumeț a sosit la oraș cu 2 ore mai târziu decât al doilea. Viteza primului drumeț este de 4 km/oră, iar viteza celui de-al doilea, de 6 km/oră.

Să se determine distanța de la sat la oraș.

Indicație. Fie s distanța între sat și oraș (în kilometri). Primul drumeț o parcurge într-un timp t_1 :

$$t_1 = \frac{s}{v_1} = \frac{s}{4} \text{ ore};$$

iar cel de-al doilea în timpul

$$t_2 = \frac{s}{v_2} = \frac{s}{6}.$$

R. 24 km.

44. Un călător care mergea într-un tren de persoane, ce avea viteza de 40 km/oră, a observat că un tren accelerat care mergea în sens contrar a trecut pe lângă el în 3 secunde.

Indicație. Viteza personalului (în care se află călătorul) $v_1 = 40$ km/oră.

Viteza aparentă a acceleratului:

$$v_2 = \frac{s}{t} = \frac{75}{3} = 25 \text{ m/s} = \frac{25 \cdot 3\,600}{1\,000} = 90 \text{ km/oră}.$$

Viteza acceleratului:

$$v_a = v_2 - v_1 = 90 - 40 = 50 \text{ km/oră}.$$

Deci acceleratul avea viteza de 50 km/oră.

R. 50 km/oră.

45. O barcă cu visle parcurge o distanță în sensul cursului apei în $4\frac{1}{2}$ ore, iar împotriva curentului apei parcurge aceeași distanță în 6 ore. În câte ore parcurge aceeași distanță o plută minată numai de viteza apei?

Indicație. Considerînd distanța parcursă ca un întreg, drumul parcurs în josul apei, într-o oră, va fi $\frac{1}{4,5}$, iar în susul ei, $\frac{1}{6}$.

R. 36 ore.

46. Dacă înaintea unui număr de o cifră scriem cifra 8, numărul obținut este de $4\frac{1}{2}$ ori mai mare decît acela pe care îl vom obține dacă scriem cifra 8 la sfîrșitul lui. Care este acel număr?

Indicație. Fie a cifra căutată. Dacă așezăm cifra 8 înaintea sa, înseamnă că numărul obținut se va scrie algebric $80 + a$.
(8 fiind cifra zecilor și a fiind cifra unităților).

Dacă scriem acum cifra 8 la dreapta sa, adică numărul scris aritmetic este $\overline{a8}$, înseamnă că cifra zecilor devine a și a unităților simple 8, deci el se scrie algebric $10a + 8$.

Enunțul problemei conduce la ecuația:

$$a + 80 = \frac{9}{2} (10a + 8),$$

cu soluția $a = 1 \Rightarrow$ numărul căutat este 1.

R. 1.

47. O lucrare trebuia să fie terminată de 18 muncitori în 25 de zile. În cât timp a fost terminată lucrarea, dacă doi muncitori au depășit norma cu 25%, iar alți doi muncitori cu 12,5%?

Indicație. Dacă doi muncitori au depășit norma cu 25%, înseamnă că ei au produs în plus, la un loc, cât jumătate din norma unui muncitor; de asemenea, dacă doi muncitori au depășit norma cu 12,5%, ei au produs în plus câte un sfert din norma unui muncitor. Situația este ca și cum s-ar fi efectuat: $18 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 18\frac{3}{4}$ norme. Acum

problema se reduce la o regulă de trei simplă.

Se obține: 24 de zile.

R. 24 zile.

48. Locatarii unei case trebuie să plătească încălzitul. Dacă fiecare dintre ei ar plăti câte 10 lei, ar mai lipsi 88 de lei, iar dacă fiecare ar da câte 10,80 lei, s-ar strînge cu 2,5% mai mult decît trebuie. Cît costă încălzitul casei și cîți locatari sînt în casă?

R. 164 locatari; 1 728 lei.

49. Alama este un aliaj de aramă și zinc. O bucată de alamă cu o masă de 124 g, fiind cufundată în apă, „pierde” din masa sa 15 g. Cîtă aramă și cît zinc conține, știind că 89 g de aramă „pierd” în apă 10 g, iar 7 g de zinc „pierd” 1 g?

Dacă cele 89 g de aramă „pierd” din masă 10 g sub apă, conform principiului lui Arhimede, atunci:

$$1 \text{ g „pierde” } \frac{10}{89} \text{ g,}$$

cele x grame de aramă „pierd” sub apă $\frac{10x}{89}$ g.,

iar dacă cele 7 g de zinc „pierd” 1 g sub apă atunci:

$$1 \text{ g „pierde” } \frac{1}{7} \text{ g,}$$

R. 80 g aramă; 35 g zinc.

50. Un aliaj de aur și aramă are titlul de 0,650 și cîntărește 10 g. Cît aur curat trebuie să-i adăugăm pentru a avea un aliaj cu titlul de 0,950?

Indicație. T = Titlul unui aliaj este raportul dintre masa metalului prețios (m) pe care îl conține și masa totală a aliajului (M),

adică $T = \frac{m}{M}$. Calculăm mai întîi masa aurului corespunzătoare la 10 g aliaj cu titlul de 0,650; se obțin 6,5 g.

R. 60 (grame aur).

51. Un aliaj este format din 10 g aur și 20 grame argint. Cît aur trebuie să-i adăugăm pentru a obține un aliaj cu titlul de 0,800?

R. 70 g aur.

52. Un aliaj de 4 kg cu titlul de 0,900 este făcut dintr-o bucată de aur cu titlul de 0,700 și o alta cu titlul de 0,950. Ce cantitate din fiecare fel de aur a intrat în aliaj?

Rezolvare.

$$\begin{array}{l} 0,950 \setminus \\ 0,700 \setminus \end{array} 0,900 \begin{array}{l} \setminus 0,200 \\ \setminus 0,050 \end{array} \left. \begin{array}{l} 0,200 \\ 0,050 \end{array} \right\} = \frac{20}{5}$$

$$20 + 5 = 25 \text{ părți.}$$

Acum calculăm cantitatea luată din fiecare bucată de aur:

$$\frac{4 \cdot 20}{25} = 3,2 \text{ kg; } \frac{4 \cdot 5}{25} = 0,8 \text{ kg.}$$

R. 3,2 kg; 0,8 kg.

53. Secția de strungărie a unei întreprinderi are ca sarcină lunară de plan confectionarea a 75 000 de piese. Acest număr de piese este repartizat celor trei brigăzi de strungari, compuse din 7,8 și 10 muncitori, proporțional cu numărul lor. Încă din prima lună a anului, cele trei brigăzi au depășit norma lunară respectiv cu 12%, 12,5%, 13%. Să se afle numărul de piese confectionate în această lună de către fiecare brigadă, precum și procentul de depășire a planului întregii secții.

R. 21 000 piese; 24 000 piese; 30 000 piese $\approx$ 12,5% depășire.

54. Un muncitor poate să facă o lucrare în 12 zile. Alt muncitor poate să facă aceeași lucrare în 15 zile. Ei au început să lucreze în același timp și au lucrat împreună un anumit număr de zile, după care primul muncitor a fost mutat la altă lucrare, iar muncitorul al doilea a terminat partea rămasă în 6 zile. Cite zile a lucrat primul muncitor?

R. 4 zile.

55. Două tractoare, lucrând împreună, au arat în 15 ore a 6-a parte dintr-un teren. Dacă primul tractor ar lucra singur 12 ore și pe urmă ar lucra tractorul al doilea 20 de ore, ele ar ara 20% din tot terenul. În cât timp poate ara terenul fiecare tractor lucrând singur?

Indicație. Cele două tractoare lucrând împreună ară într-o singură oră $\frac{1}{6} : 15 = \frac{1}{90}$

din întregul teren.

În 12 ore, lucrând împreună, ele ară $\frac{12}{90} = \frac{2}{15}$ din teren.

Tractorul al doilea ară cu 8 ore mai mult.

În acest timp el ară:

$$\frac{20}{100} - \frac{2}{15} = \frac{1}{15} \text{ din teren.}$$

Rezultă că tractorul al doilea ară întreg terenul în 120 de ore.

Primul tractor ară în 15 ore $\frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$ din teren, iar întregul teren în 360 de ore.

R. 360 ore; 120 ore.

56. Cîțiva excursioniști au angajat o barcă pentru 3 ore și au pornit în sensul curentului apei. Cu cîți km pot să se depărteze ei de la debarcader ca să ajungă înapoi în 3 ore, dacă viteza bărcii în apă stătătoare este de 7,5 km/oră, iar viteza apei este de 2,5 km/oră?

Indicație. Să notăm cu s spațiul parcurs, socotit în kilometri.

$$7,5 + 2,5 = 10 \text{ km/oră} = \text{viteza la dus.}$$

Timpul necesar va fi: $\frac{s}{10}$ ore.

La întoarcere $7,5 - 2,5 = 5 \text{ km/oră}$; $t = \frac{s}{5}$.

Timpul dus-întors este de 3 ore, adică:

$$\frac{s}{10} + \frac{s}{5} = 3,$$

de unde $s = 10 \text{ km}$.

R. 10 km.

57. Lungimea circumferinței roții dinapoi a unei căruțe este de 2 ori mai mare decât lungimea circumferinței roții dinainte. Pe distanța de 300 m roata dinainte a făcut cu 100 de învîrtituri mai multe decât cea dinapoi. Să se afle lungimea circumferinței fiecărei roți.

Indicație. Deoarece lungimea circumferinței roții din față este de 2 ori mai mică, înseamnă că a făcut de 2 ori mai multe învîrtituri decât roata din spate.

Deci, diferența dintre numărul de învîrtituri făcute de cele două roți este egală cu numărul de învîrtituri făcute de roata din spate.

Deci, roata din spate a făcut 100 de învîrtituri $\Rightarrow$ circumferința roții din spate este 3 m. Circumferința roții din față este: $3 : 2 = 1,5 \text{ m}$.

R. 3 m; 1,5 m.

58. Un grup de pionieri pleacă cu bicicletele în excursie de la București spre o pădure situată la o distanță de 40 km de locul de plecare. Odată cu ei, pleacă și un motociclist. Bicicliștii merg cu 12 km/oră, iar motociclistul cu 36 km/oră. Motociclistul ajunge la pădure, unde se odihnește o oră, apoi se întoarce în întâmpinarea bicicliștilor. După cit timp de la plecarea din București întâlnește pe pionieri și la ce distanță de București?

Indicație. Motociclistul, mergînd cu 36 km/oră, a parcurs 40 km în $1\frac{1}{9}$ ore și a mai stat o oră în pădure; deci, în total, s-au scurs de la plecarea lui din București $2\frac{1}{9}$ ore.

În acest răstimp, bicicliștii au parcurs $\left(2\frac{1}{9}\right) \cdot (12) \text{ km}$, adică $25\frac{1}{3} \text{ km}$ și au ajuns în punctul A (v. fig. I.2).

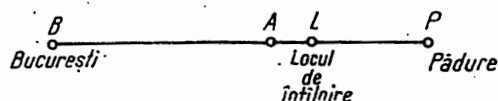


Fig. I.2

Urmează că de la A la pădure sînt: $40 - 25 \frac{1}{3} = 14 \frac{2}{3}$ km. Această distanță o parcurg bicicliștii, de la A către pădure, cu 12 km/oră, iar motociclistul de la P la A , cu o viteză de 36 km/oră, adică de trei ori mai mare, deci în timp ce bicicliștii fac un sfert din distanță AP , motociclistul face trei sferturi. Găsim distanța de la A pînă la locul de întîlnire L , apoi timpul respectiv.

R. a) $\frac{29}{12}$ ore. 29 km. b) $\emptyset$.

59. Tatăl a chemat pe feciorul său cel mare și i-a spus: în sertarul bibliotecii vei găsi o casetă cu o sumă de bani, ce nu depășește 50 lei; să-ți iei partea ta și să lași acolo restul pentru ceilalți doi frați ai tăi, ținînd seama că toți trebuie să primești sume egale. Copilul a putut face acest lucru corect după ce i-a dat 1 leu mamei sale. A chemat apoi pe fiul mijlociu căruia i-a spus același lucru. Acesta crezînd că este primul care împarte suma, a putut face aceasta după ce i-a dat mai întîi și el 1 leu mamei sale. Al treilea fecior crezînd și el că este primul ce împarte suma a făcut și el același lucru ca și frații săi. Ce sumă a fost în sertar inițial și ce sumă a găsit fiecare în sertar?
60. Se dau trei săculețe cu nuci; în fiecare din ele se află un același număr de nuci. Dacă se iau cîte 8 nuci din fiecare săculeț, rămîn în toate cele trei săculețe tot atîtea nuci cîte au fost la început în fiecare săculeț. Cîte nuci sînt în fiecare săculeț?

Indicație. Schița pentru soluția aritmetică este dată în figura I.3.

R. 12 nuci.

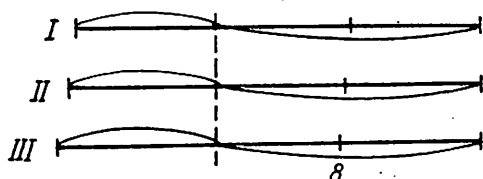


Fig. I.3

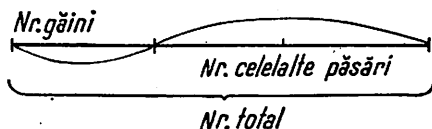


Fig. I.4

61. Într-o curte sînt găini, găște, rațe și curci. Numărul găinilor reprezintă $\frac{1}{2}$ din numărul celorlalte păsări; numărul găștelor reprezintă $\frac{1}{3}$ din numărul celorlalte păsări; numărul rațelor reprezintă $\frac{1}{4}$ din numărul celorlalte păsări. Știînd că numărul curcilor este de 260, să se afle numărul total al păsărilor din aceeași gospodărie.

Indicație. Schița pentru soluția aritmetică este dată în figura I.4.

De fiecare dată se va considera mulțimea formată de celelalte păsări ca un întreg.

R. 1 200 păsări.

62. Mama este mai în vîrstă decît fiica sa de $2 \frac{1}{2}$ ori. Cu 6 ani în urmă, mama era de 4 ori mai în vîrstă decît fiica. Care este vîrsta actuală a celor două persoane?

Indicație. Schița pentru soluția aritmetică este dată în figura I.5.

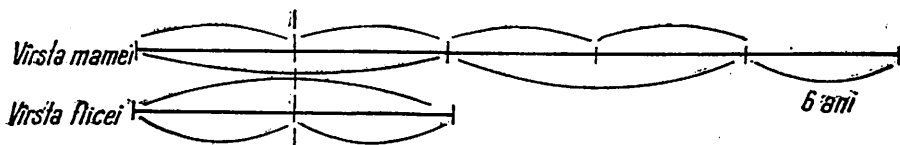


Fig. 1.5

R. 30 ani, 12 ani.

63. Vârsta tatălui reprezintă $1\frac{5}{6}$ din vârsta fiului său. Acum 10 ani vârsta fiului era 44, (4)% din vârsta tatălui. Câți ani are tatăl? Dar fiul?

R. 55 ani; 30 ani.

Indicație. Schița pentru rezolvarea aritmetică este dată în figura 1.6.

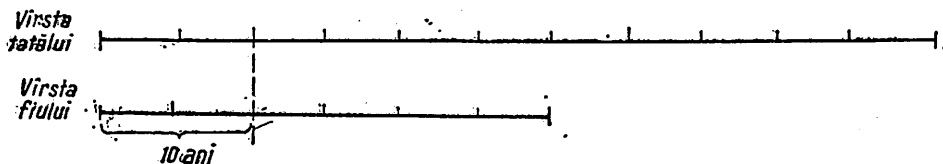


Fig. 1.6

64. O studentă are azi de 5 ori vârsta pe care o avea ea, când fratele ei avea vârsta ei actuală; când ea va avea etatea de azi a fratelui ei, suma vîrstei lor va fi 88 ani. Ce etate are fiecare acum?

R. 20 ani; 36 ani.

Indicație. Schița pentru soluția aritmetică.

	treacut	prezent	vîitor
pentru vârsta studentei	(1) 0	(5) 00000	(9) 000000000
pentru vârsta fratelui ei	(5) 0	(9) 00000	(13) 000000000
	0000	0000	0000
			9 + 13 = 22 părți egale corespund la 88 ani.

65. Să se afle trei numere știind că $\frac{2}{3}$ din primul este cît $\frac{5}{8}$ din al doilea, iar $\frac{5}{12}$ din al doilea valorează cît $\frac{7}{18}$ din al treilea. Suma numerelor este 33,7.

R. 10,5; 11,2; 12.

Indicație. Se presupune că primul număr ar fi 21; atunci, conform enunțului, se găsește că al doilea ar fi 22,4, iar al treilea 24. Suma celor trei numere ar fi atunci 67,4 adică dublul celei din enunț; prin urmare, toate numerele trebuie micșorate de două ori.

66. Dintr-un depozit de lemne se vinde o cantitate de 10 st. Se mai aduce apoi în depozit o cantitate de lemne egală cu ceea ce rămăsese și se vinde o cantitate de 30 st. Se mai aduce în depozit o cantitate de trei ori cît cea rămasă și se face o altă vânzare de 360 st. După aceste operații se află în depozit o cantitate de lemne egală cu cea de la început. Câți steri de lemne au fost la început în acel depozit?

R. 80 st.

Indicație: Se presupune că depozitul avea 200 st. lemne; găsim că atunci ar rămâne, după operațiile indicate, 1.040 st. Dacă se presupune că avea 190 st., găsim restul 960 st, iar pornind de la o cantitate inițială de 180 st ar rămâne 880 st. Restul întrece numerele presupuse cu 840, respectiv 770, 700 st. Deci, cu o diferență de 20 st în minus, ne apropiem cu 70 st. Pentru a ne apropia cu 700 st, vom lua de 10 ori 10 st mai puțin decât ultima presupunere, adică $180 - 10 \times 10 = 80$ st.

67. Într-o echipă de jocuri populare românești se află de 4 ori mai mulți băieți decât fete. Plecând de la un spectacol 4 perechi de dansatori (4 băieți și 4 fete), rămân în echipă de 7 ori mai mulți băieți decât fete. Cîți dansatori avea echipa?

R. 40 dansatori.

Indicație: Se presupune că sînt 12 fete și deci 48 băieți. Plecînd cele 4 perechi, rămîn 8 fete și 44 băieți (în loc de $8 \cdot 7 = 56$), deci o diferență de 12 băieți; trebuie să micșorăm numărul fetelor. Presupunînd că ar fi 11 fete, găsim diferența 9, adică pentru o fată mai puțin, diferența scade cu 3. Diferența de 12 băieți se va anula deci prin 4 diferențe de cîte 3, adică în echipă sînt $12 - 4 = 8$ fete și 32 băieți. Echipa este formată din 40 dansatori.

68. Dintr-o sticlă cu esență de oțet se consumă a treia parte apoi se umple cu apă. După aceea, se consumă a treia parte din amestec și se pune iar la loc apă. După patru asemenea operații, în sticlă se mai află 16 cl esență (restul apă).

Cîtă esență de oțet conținea sticla la început?

Cîtă esență de oțet amestecat cu apă s-a consumat în total?

R. 81 cl esență; 108 cl consum total.

Indicație:

	rest	consumat	la începutul operației
prin operația IV	16 cl. esență.	8 cl. esență.	$16 + 8 = 24$ cl. esență
prin operația III	24 cl. esență.	12 cl. esență.	$24 + 12 = 36$ cl. esență
prin operația II	36 cl. esență.	18 cl. esență.	$36 + 18 = 54$ cl. esență
prin operația I	54 cl. esență.	27 cl. esență.	$54 + 27 = 81$ cl. esență

De fiecare dată s-a consumat $\frac{1}{3}$ din 81 cl = 27 cl.

În total s-au consumat $27 \times 4 = 108$ cl amestec.

69. Pe două rafturi ale unui dulap cu cărți se află 48 volume. Se trece din raftul I în raftul II un număr de cărți cîte erau în raftul II; în felul acesta în raftul II sînt acum mai multe cărți. Se repetă operația în sens invers, din raftul II spre raftul I. După aceste două mutări, în ambele rafturi se află același număr de volume. Cîte volume erau la început în fiecare raft?

R. 30; 18.

Indicație:

	pe raftul I	pe raftul II
Situația finală	24	24
Înainte de mutarea II	$24 - 12 = 12$	$24 + 12 = 36$
Înainte de mutarea I	$12 + 18 = 30$	$36 - 18 = 18$
(adică la început)		

70. Un copil nu are 100 de nuci, ci îi lipsesc atâtea nuci câte ar avea peste 100, dacă ar avea de 9 ori câte are acum. Câte nuci are acel copil?

R. 20 nuci.

Indicație. Schița pentru soluție este dată în figura I.7.

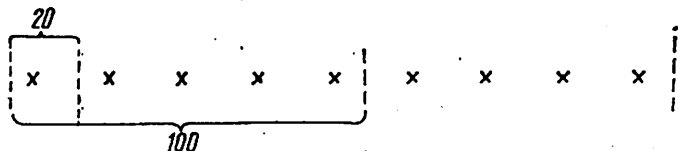


Fig. I.7

71. Se repartizează 22 000 volume pentru bibliotecile de la 3 licee, 2 școli generale și o școală profesională. Fiecare liceu primește de 3 ori mai multe cărți decât școala profesională, iar școala profesională primește de două ori mai multe cărți decât fiecare școală generală. Câte cărți primește fiecare școală din cele trei categorii?

R. 6 000 vol.; 1 000 vol.; 2 000 vol.

Indicație. Schița pentru soluție este dată în figura I.8.

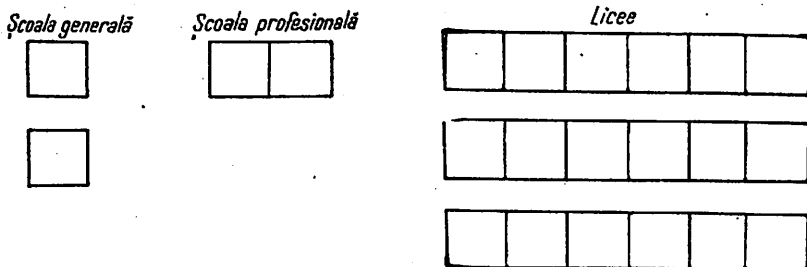


Fig. I.8

72. Două ateliere care produc piese metalice au randamente diferite: dacă fiecare ar realiza 1 000 piese mai mult pe lună, atunci producția primului atelier ar fi de trei ori mai mare decât producția celui de-al doilea atelier, iar dacă fiecare ar lucra 1 000 piese mai puțin pe lună producția primului atelier ar fi de 5 ori mai mare decât a celui de-al doilea atelier. Câte piese produce lunar fiecare dintre cele două ateliere?

R. 11 000 piese; 3 000 piese.

Indicație. Schița pentru soluție este dată în figura I.9. Reprezentăm producția celui de-al doilea atelier prin AB ; după creșterea cu 1 000 piese, producția devine AC , iar producția primului atelier o reprezentăm prin $A'C' = 3AC$. ($A'M = MN = NC' = AC$). Notăm micșorarea de 1 000 piese cu $BP = B'P'$; rezultă $AP = NP'$. Dar $A'P'$ trebuie să fie de 5 ori cât AP , deci AP se cuprinde în $A'N$ de 4 ori și în AC de 2 ori, adică $AP = PC$ și corespunde cu 2 000 piese, de unde rezultă că AB corespunde unei producții de 3 000 piese. Producțiile sînt de 11 000 piese, respectiv 3 000 piese lunar.

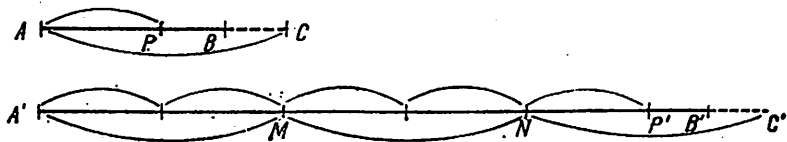


Fig. I.9

73. Din producția unei grădini de zarzavat s-a vîndut o dată $21/40$ cu un cîștig de 30% față de cheltuieli, iar restul s-a vîndut cu suma de 2 270 lei. În acest fel s-a realizat un beneficiu total de 25% față de cheltuieli. Ce sumă s-a încasat din această vînzare?

R. 5 000 de lei.

Indicație pentru soluția aritmetică

Să presupunem că prețul de cost ar fi fost 100 lei. Se găsește că pentru prima parte, vîndută cu un beneficiu de 30%, s-ar fi încasat 68,25 lei; dar cum întreaga cantitate s-a vîndut cu un beneficiu de 25%, adică s-ar fi încasat 125 lei, rezultă că pentru a doua parte a vînzării, s-ar fi încasat $125 - 68,25 = 56,75$ lei. În realitate s-au încasat pentru partea a doua 2 270 lei, adică de 40 de ori mai mult ($2\,270 : 56,75 = 40$) decît prin presupunerea noastră. Aceasta înseamnă că prețul de cost a fost $100 \times 40 = 4\,000$ lei, iar suma încasată prin vînzare a fost 5 000 lei.

74. Să se împartă 232 în trei părți, astfel că, dacă la prima parte se adaugă jumătate din suma celorlalte două, la a doua se adaugă a treia parte din suma celorlalte două, iar la a treia a patra parte din suma celorlalte două, rezultatele să fie egale între ele.

R. 40, 88 și 104.

75. Într-o pivniță sint trei butoaie. Dacă s-ar umple primul butoi cu apă și s-ar turna din el în butoiul al doilea pînă ce acesta s-ar umple, în primul butoi ar rămîne $\frac{2}{7}$ din apa care era în el; dar dacă butoaiele al doilea și al treilea, fiind pline, le-am deșerta în primul butoi, ar mai lipsi 10 litri ca acesta din urmă să se umple. Cîți litri de apă conține fiecare dintre aceste butoaie, dacă în toate trei încap 270 litri?

R. 140 litri; 100 l; 30 l.

76. Perimetrul unui triunghi este de 36 m. Raportul dintre latura cea mai mică și cea mai mare a acestui triunghi este $\frac{3}{5}$ iar diferența dintre latura cea mai mare și cea mijlocie este 3 m. Să se afle laturile triunghiului.

R. 9 m; 12 m; 15 m.

77. Să se împartă numărul 49 în trei părți, astfel încît dacă adăugăm primei părți o treime din suma celorlalte două, celei de-a doua $\frac{1}{4}$ din suma celorlalte două și celei de-a treia $\frac{1}{5}$ din suma celorlalte două, să obținem numere egale.

R. 13; 17; 19.

78. O marfă se vinde cu un cîștig de 0,11 din prețul ei de cost; dar acest cîștig este mai mic cu 181,50 lei decît 0,11 din întreaga sumă încasată prin vînzarea mărfii.

Care este prețul de cost al mărfii, dar prețul de vînzare?

R. 15 000 lei; 16 650 lei.

Indicație pentru soluția aritmetică

Să presupunem că prețul de cost al mărfii ar fi fost 100 lei; atunci cîștigul ar fi fost, conform condițiilor din enunț, de 11 lei, deci suma încasată din vînzare ar fi fost 111 lei. Frația 0,11 din întreaga sumă încasată este atunci $0,11 \times 111 = 12,21$ lei, față de care cîștigul este mai mic cu 1,21 lei. Cum cîștigul real este mai mic

cu 184,50 lei. Decît fracția $0,14$ din suma de vânzare, rezultă că adevăratul preț de cost este mai mare decît cel presupus și anume de atîtea ori mai mare de cîte cuprinderi de cîte $1,21$ sînt în 184,50. Numărul acestor cuprinderi fiind 150 înseamnă că prețul real de cost este $100 \times 150 = 15.000$ lei.

79. Dacă un kg de fructe s-ar vinde cu 2,80 lei s-ar pierde $6\frac{2}{3}\%$ din prețul său de cost; dacă aceleași fructe s-ar vinde cu prețul de 3,30 lei/kg atunci s-ar cîștiga la întreaga cantitate vîndută 36 lei.
Care este prețul de cost al întregii cantități de fructe?

R. 360 lei.

80. Trei cooperative agricole de producție s-au înțeles să împartă cheltuielile pentru construcția unui pod, proporțional cu numărul de membri ai gospodăriilor și invers proporțional cu distanța cooperativelor pînă la pod. Podul costă 55 320 lei, cooperativele au respectiv, 84 membri, 156 membri, 56 membri; iar distanțele pînă la pod sînt, respectiv, de 3 km, $2\frac{1}{6}$ km și $1\frac{3}{4}$ km.

Ce sumă va plăti fiecare cooperativă?

R. 12 908 lei; 27 660 lei; 14 752 lei.

81. La un atelier de confecții s-au cumpărat 140 metri de stofă de trei feluri plătindu-se sumele de 9 000 lei, 6 600 lei și 4 000 lei, respectiv pentru cele trei calități. Cîți metri de stofă are fiecare bucată, dacă se știe că 1,1 m din prima calitate costă tot atît cît 1,8 m din calitatea a doua, iar $6\frac{2}{3}$ m din a doua costă tot atît cît $5\frac{1}{2}$ m din calitatea a treia.

R. 50 m; 60 m; 30 m.

Indicație:

Judecăm astfel: Dacă prima bucată de stofă ar avea 20 m, atunci 1 m ar costa 450 lei. Potrivit relațiilor date între prețuri ar rezulta că 1 m din bucată a doua costă 275 lei și deci această bucată ar avea $6\,600 : 275 = 24$ m.

Judecînd la fel pentru bucată a treia, se găsește că un metru costă $333\frac{1}{3}$ lei și ar fi 12 m. Numărul total de m ar fi astfel: $20 + 24 + 12 = 56$ m (față de 140 m dați în enunț). Cantitățile trebuie majorate de 2,5 ori ($140 : 56 = 2,5$).

82. Un biciclist mergînd dintr-un sat spre oraș, parcurge această distanță cu viteza de 8 km/h, la dus și cu viteza de 12 km/h la întors. El a mers în total 10 ore. Care este distanța de la sat la oraș? Să se dea și soluția aritmetică.

R. 48 km.

Indicație pentru soluția aritmetică:

Se va calcula timpul necesar parcurgerii unui km, atît la dus, cît și la întors, spre a putea deduce drumul străbătut în cele 10 ore de mers.

83. Un biciclist a parcurs distanța de la A la B astfel: În prima etapă a parcurs $\frac{1}{5}$ din distanța de la A la B plus 20 km. În altă etapă a parcurs $\frac{1}{6}$ din rest plus 50 km și astfel a parcurs toată distanța de la A la B. Cîți km sînt de la A la B?

R. 100 km.

84. O cooperativă agricolă de producție a vândut 3 000 q de cereale și anume: orz, secară și grâu, primind: pentru orz 140 000 de lei, pentru secară 120 000 de lei și pentru grâu 84 000 de lei. Știind că 6 q de orz costă cît 5 q de secară și că 7 q de secară costă cît 6 q de grâu, să se afle cantitatea de chintale și costul unui chintal pentru fiecare fel de cereale.

Indicație. Să notăm cu x, y, z numerele ce reprezintă cantitățile în chintale de orz, secară și grâu vândute de cooperativă $x + y + z = 3\ 000$.

Scriem acum că 6 q de orz costă cît 5 q de secară.

$$\frac{6 \cdot 140\ 000}{x} = \frac{5 \cdot 120\ 000}{y}$$

Apoi, scriem că 7 q de secară costă cît 6 q de grâu:

$$\frac{7 \cdot 120\ 000}{y} = \frac{6 \cdot 84\ 000}{z}$$

$$x = 1\ 400, y = 1\ 000, z = 600.$$

R. 100 lei; 120 lei; 140 lei.

85. Două robinete, cîndînd împreună, pot umple un bazin în 8 ore. Cele două robinete au fost deschise timp de 2 ore, apoi s-a închis primul robinet și bazinul s-a umplut în 18 ore de la închiderea primului robinet.

a) În cît timp poate să umple bazinul fiecare robinet?

b) Se consideră cifrele scrise în ordinea crescătoare a numerelor ce exprimă timpul în care cele două robinete umple bazinul, elementele mulțimilor A respectiv B . Să se determine $A - B$ și $A \cap B$.

Indicație. Într-o oră ele umplu $\frac{1}{8}$ din bazin. În două ore robinetele au umplut

$$2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}. \text{ Cel de-al doilea robinet a umplut în 18 ore } 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ din bazin și,}$$

$$\text{prin urmare, întregul bazin îl umple în } 18 : \frac{3}{4} = 24 \text{ ore.}$$

Deoarece al doilea robinet a umplut $\frac{1}{24}$ din bazin într-o oră primul va umple

$$\text{într-o oră } \frac{1}{8} - \frac{1}{24} = \frac{1}{12} \text{ din bazin și prin urmare va umple tot bazinul în 12 ore.}$$

R. 12 ore și 24 ore.

86. O cadă este alimentată de două robinete: prin unul curge apă la 15°C prin celălalt la 60°C . Dacă robinetele sînt deschise amîndouă odată, apa din cadă este la temperatura de 30°C . Primul robinet umple singur cada într-o oră. În cît timp se umple cada dacă ambele robinete sînt deschise?

Indicație. La robinetul cu apă rece se cîștigă 15°C , iar la robinetul cu apă caldă se pierde 30°C . Pentru ca să se compenseze pierderea, primul robinet are un debit dublu. Ținînd seama de debitul pe oră rezultă relația:

$$\frac{1}{60} + \frac{1}{120} = \frac{1}{40}$$

R. 40 minute.

Algebra

II. Exerciții și probleme

1. Exerciții și probleme cu numere întregi

1. Să se determine mulțimea divizorilor, numere naturale, a numărului 16.
2. Să se determine mulțimea multiplilor numărului 3 cuprinși între 8 și 25 și sint numere naturale.
3. Fie M mulțimea divizorilor, numere naturale, ai numărului 20 și $N = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$. Să se compare aceste mulțimi.

R. $M = N$.

4. Fie $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ și $x \in A$. Să se determine x pentru fiecare din egalitățile următoare astfel încît următoarele propoziții să fie adevărate:

$$x^2 - 4 = 0; \quad x^2 - 1 = 0; \quad 2x + 2 = 0; \quad 3x + 1 = 7.$$

5. Să se determine numerele naturale x și y astfel încît următoarele propoziții să fie simultan adevărate

$$5x + 2y = 19, \quad 2x + y = 16.$$

6. Fie $A = \{1; 8; 9; 10\}$. Să se determine x, y și z știind că: $x - y + 2z = 4$, $2x + y + 4z = 32$; ($x \in A$; $y \in A$; $z \in A$) să fie simultan adevărate.

R. $x = 10$; $y = 8$; $z = 1$.

7. Fie mulțimile $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $A\{x \in N \mid 2x + 3 = 9\}$ și $B = \{x \in N \mid x^2 = 9\}$. $x \in M$?
8. Să se calculeze numărul x definit prin egalitatea $x = a - b - c$ știind că $a = -2$; $b = +4$; $c = -3$.

9. Să se calculeze numerele x și y definite de formulele:

$$x = abc; \quad y = ab - bc - ac \text{ pentru } a = 3; \quad b = -5; \quad c = -2.$$

10. a) Din relația $X \cup A = Y \cup A$ rezultă $X = Y$?
b) Din relația $X \cap A = Y \cap A$ rezultă $X = Y$?

11. Să se scrie prescurtat cu ajutorul coeficienților următoarele expresii:

$$\begin{array}{ll} x + x + y + y + y; & \frac{m + m}{n + n + n}; \\ a + a + b + a + b + a; & \frac{d + d + 2d}{2c + c + 3c + c}; \\ \frac{a}{3} + \frac{a}{3} + \frac{a}{3}; & \end{array}$$

$$\frac{x}{100} + \frac{3x}{100} + \frac{x}{100} - \frac{z}{10} - \frac{z}{10} - \frac{2z}{10}.$$

12. Să se scrie prescurtat cu ajutorul coeficienților, următoarele expresii:

a) $ab + ab$; b) $abc + abc$; c) $\frac{ab + ab}{cd + cd + cd}$;

d) $xy + xy + xy + xy + xy$; e) $bcd + bcd + bcd$;

f) $\frac{abc + abc + abc}{3}$; h) $\frac{k + k - mn - mn - mn}{k + k + k + mn + mn}$;

i) $\frac{xyz}{4} + \frac{xyz}{4} + \frac{xyz}{4}$; j) $(a - b) + (a - b) + (a - b)$;

l) $(a + b) + (a + b) - (m - n) - (m - n) - (m - n)$.

13. Să se afle aria a șase loturi de grădină egale de formă dreptunghiulară cu laturile de m metri și n metri.

14. O cameră are următoarele dimensiuni: lungimea a metri, lățimea b metri și înălțimea h metri. Să se exprime volumul a 4 camere de același fel. Să se calculeze volumul pentru:

$$a = 5; b = 4 \text{ și } h = 2,5.$$

15. Să se scrie formulele generale;
a numerelor pare, a numerelor impare, a multiplilor lui 5 și a multiplilor comuni ai numerelor 2 și 3.

16. Să se restrângă următoarele expresii folosind exponenții:

$$3.3.a.a.a; b.b.b.... b \text{ (de } n \text{ ori)};$$

$$(a + b)(a + b)(x - y)(x - y)(x - y);$$

$$(a + x)(a + x)(a + x) \dots (a + x) \text{ (de } n \text{ ori)}.$$

17. Fie mulțimea M ale cărei elemente sînt numerele sub formă de produse de puteri de factori primi ai numerelor 128; 1 728; 1 000 și mulțimea Q care are ca elemente numerele de produse de puteri de factori primi ai numerelor 384; 512; 640. Să se afle $(M \cup Q) \cap Q$.

18. Să se restrângă următoarele expresii cu ajutorul unor coeficienți și exponenți $a^3 + a^3 + a^3$; $y^3 + y^3 + y^3 + y^3$; $x^2y + x^2y + x^2y$.

$$\frac{a \cdot a \cdot a + a \cdot a \cdot a + a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b + b \cdot b \cdot b + b \cdot b \cdot b}.$$

Să se utilizeze metoda grafică la rezolvarea următoarelor trei probleme:

19. Dacă mărim de 3 ori un număr și adăugăm la rezultat $\frac{1}{3}$ din el, obținem numărul a . Să se afle numărul.

R. $\frac{3a}{10}$.

20. Dacă mărim de 4 ori un număr și scădem din rezultat $\frac{1}{4}$ din el obținem numărul b . Să se afle numărul.

$$R. \frac{4b}{15}.$$

21. Dacă micșorăm un număr de 2 ori și scădem din rezultat $\frac{1}{5}$ din el obținem a . Să se afle numărul necunoscut.

$$R. \frac{10a}{3}.$$

22. Dacă împărțim numărul a la numărul x și se adaugă la rezultat b obținem numărul y . Să se determine x .

$$R. x = \frac{a}{y - b}.$$

23. Dacă împărțim numărul a la un număr x și scădem din rezultat numărul y obținem 0. Să se afle numărul necunoscut x .

$$R. x = \frac{a}{y}.$$

24. În doi saci sint a kg de făină; în primul sac sint cu b kg mai mult decît în al doilea. Să se exprime cîte kg de făină sint în fiecare sac?

$$R. \frac{a - b}{2}; \frac{a + b}{2}.$$

25. O mamă este mai în vîrstă decît fiul său cu x ani și mai tînăra decît tatăl cu y ani. Știind că toți trei au împreună z ani să se exprime vîrsta fiecărui.

$$R. \begin{cases} \text{fiul: } \frac{z - (2x + y)}{3}; \\ \text{mama: } \frac{z - (2x + y)}{3} + x; \\ \text{tatăl: } \frac{x + 2y + z}{3}. \end{cases}$$

26. Suma a două numere este a iar raportul lor este $\frac{c}{b}$. Să se determine aceste numere:

$$R. \frac{ac}{c + b}; \frac{ab}{c + b}.$$

27. Diferența a două numere este a iar raportul lor este $\frac{m}{n}$; $n > m$. Să se determine aceste numere.

$$R. \frac{am}{n - m}; \frac{an}{n - m}.$$

28. Să se împartă numărul m în părți proporționale cu numerele a, b, c .

$$\text{R. } \frac{am}{a+b+c}; \frac{bm}{a+b+c}; \frac{cm}{a+b+c}.$$

29. Laturile a, b, c , ale unui triunghi cu perimetrul de m cm sînt invers proporționale cu numerele $2; \frac{3}{4}; \frac{2}{3}$.

Să se determine laturile triunghiului în funcție de m ?

$$\text{R. } a = \frac{3m}{20}; b = \frac{8m}{20}; c = \frac{9m}{20}.$$

30. Cele trei dimensiuni L, l, i , ale unui paralelipiped dreptunghic, sînt proporționale cu numerele $2; \frac{2}{3}; \frac{1}{2}$. Lungimea este mai mare decît lățimea cu 18 cm.

Să se calculeze volumul paralelipipedului în dm^3 .

$$\text{R. } 1,156 \text{ dm}^3.$$

2. Valoarea numerică a unei expresii algebrice

Să se afle valorile numerice ale expresiilor algebrice:

1. $2a - 3bc$ cînd $a = 5, b = 1, c = \frac{1}{2}$.

$$\text{R. } 8 \frac{1}{2}.$$

2. $5(x - y)$ cînd $x = 14,2; y = 6,8$.

$$\text{R. } 37.$$

3. $3(x^2 + y^2), 3(x + y)^2, [3(x + y)]^2$ cînd $x = 6, y = 8$.

$$\text{R. } 300; 588; 1764.$$

4. $2(x^2 - y^2), 2(x - y)^2$ și $[2(x - y)]^2$ cînd $x = 10, y = 7$.

$$\text{R. } 102; 18; 36.$$

5. $(a + b)(a - b)$ cînd $a = 8, b = 5$.

$$\text{R. } 39.$$

6. $(a + b)(c - d)$ cînd $a = 10, b = 4, c = 1,1(6), d = \frac{3}{4}$.

$$\text{R. } 4 \frac{1}{6}.$$

7. $(a - b)c + d$ cînd $a = 10, b = 3, c = \frac{2}{7}, d = \frac{3}{5}$.

$$\text{R. } 2 \frac{3}{5}.$$

8. $a + b(c + d)$ cînd $a = 10, b = 14, c = \frac{2}{7}, d = \frac{3}{5}$.

$$\text{R. } 22 \frac{2}{5}.$$

9. $(2x + y)^2$ cind $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{5}{8}$.

R. $4 \frac{33}{64}$.

10. $2xy^2$ cind $x = 0,75$, $y = \frac{5}{8}$.

R. $\frac{75}{128}$.

11. $2a^3 + 3a^2 - 5a + 6$ cind $a = 2$, $a = \frac{1}{2}$, $a = 1 \frac{2}{3}$.

R. 24; $4 \frac{1}{2}$; $15 \frac{7}{27}$.

12. $5 + 4x + 3x^2 + 2x^3$ cind $x = 3$, $x = 0,1$, $x = \frac{1}{2}$.

R. 98; 5,432; 8.

13. $\frac{1 + a + a^2}{1 + a - a^2}$ cind $a = \frac{1}{2}$.

R. $1 \frac{2}{5}$.

14. $m(m - n) + 2n$ cind $m = 5,4$; $n = 3,9$.

R. 15,9.

15. $a^2(2a + b) + 3a$ cind $a = 1,5$; $b = 4$.

R. 20,25.

16. $\frac{a}{m} - \left(\frac{a^2}{m^2} - 2\right)$ cind $a = 2 \frac{1}{2}$, $m = 1,4$.

R. $\frac{117}{196}$.

17. $3(a^2 - b^2) - 4(a + b)$ cind $a = -0,5$; $b = 0,1$.

R. 2,32.

18. Să se afle lungimea unei circumferințe (C) în care d este diametrul, iar $\pi = 3,14$. Se va calcula cu aproximație de 0,1 prin lipsă.

d (centimetri)	15	20	18,5	10,5	0,36	1,05	3,25	2,75
$C = \pi d$								

19. Să se afle aria unui cerc A în care R este raza cercului și $\pi = 3,14$. Se va calcula cu o aproximație de 0,1 prin adaos.

R (metri)	8,25	2,1	2,6	1,2
$A = \pi R^2$				

20. Să se afle volumul cilindrului V cu R raza bazei și H înălțimea.

R (metri)	2,4	1,01	0,01
H (metri)	5,2	1,5	1,1(6)
$V = \pi R^2 H$			

21. Să se arate că împărțind suma cuburilor numerelor a și b la cubul numărului a obținem $1 + \frac{b^3}{a^3}$.

22. a) Să se figureze, în raport cu un sistem de axe perpendiculare, punctele care au coordonatele $x = 5, y = 3; x = -3, y = -4; x = -4, y = 6; x = 5, y = -2$. b) Să se figureze punctele care au următoarele coordonate $x = 8\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}; x = -6,5, y = 4,5$; c) Să se figureze punctele:

$$A\left(-3\frac{3}{4}; 5\frac{1}{2}\right); B(-0,8; -1,4).$$

23. a) Să se construiască triunghiul ale cărui vîrfuri A, B, C au coordonatele $A(4; 5), B(8; 2), C(-6; 3)$. b) Să se construiască patrulaterul ale cărui vîrfuri A, B, C, D au coordonatele: $A(-3; 8); B(10; 6); C(5; -5); D(-7; -9)$.

24. Tabelul de mai jos indică temperaturile medii din luna noiembrie.

Data	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Temperatura	+3°	+5°	+6°	+5°	0°	-3°	-6°	-7°	-8°

a) Să se reprezinte sub formă de grafic variația temperaturii.

b) Cum se determină pe grafic temperatura cea mai mare și cea mai mică a aerului din cele 9 zile ale lunii?

25. Nivelul apei unui rîu a variat de la 1 pînă la 15 mai, în comparație cu cel mijlociu în felul următor:

Data	Nivelul apei în cm	Data	Nivelul apei în cm	Data	Nivelul apei în cm
1	10	6	20	11	0
2	12	7	17	12	-3
3	15	8	14	13	-3
4	18	9	10	14	-5
5	22	10	5	15	-8

a) Să se facă graficul variației nivelului apei din rîu în acest interval de timp.

b) Să se arate pe grafic nivelul cel mai ridicat și cel mai scăzut al apei din acest timp.

26. Figura 1.10 reprezintă graficul variației drumului S în funcție de durata mișcării t în cazul unui drumet, care are o mișcare uniformă. Să se afle, cu ajutorul graficului, drumul S făcut în timp de 2 ore; $2\frac{1}{2}$ ore; 3 ore; $3\frac{1}{2}$ ore; 4 ore; $4\frac{1}{2}$ ore.

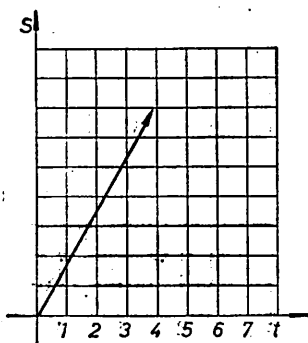


Fig. 1.10

27. Pentru măsurat stofele se utilizează cotul, înainte de introducerea metrului. Știind că 1 cot = 0,64 m să se construiască graficul pentru transformarea metrilor în coți și invers.
Să se transforme după grafic:
- în coți: 2 m, $2\frac{1}{2}$ m; $3\frac{1}{2}$ m.
 - în metri: 2 coți; 3 coți; 4 coți.
28. Să se arate că produsul a două numere consecutive este divizibil cu 2 și produsul a trei numere consecutive este divizibil cu 3.
29. Numărul x este mai mare decât numărul y cu 8. Să se scrie aceasta în trei feluri sub formă de egalități.
30. Să se afle mulțimea valorilor lui $x \in R$ pentru care expresia $2x - 1 \leq 4$ și $2x - 1 > 4$.
- $$R. \left(-\infty; \frac{5}{2}\right]; \left(\frac{5}{2}; +\infty\right).$$
31. Pentru ce valori ale lui a și b avem:
- $$a = 5a; a = a^2; a^3 < a^2; a^3 = a^2; \frac{a}{b} = 1; \frac{a}{b} < 1; \frac{a}{b} > 1; ab = a; ab < a; ab > a?$$
32. Este expresia $2k$ totdeauna un număr cu soț? Să se scrie forma generală a multiplilor lui 7. Să se scrie forma generală a numerelor care împărțite la 3 dau restul 2. Muchia unui cub este a centimetri. Să se afle aria totală a cubului și volumul său.
- $$R. 6a^2; a^3.$$
33. Să se scrie sub formă de puteri ale numărului 10 numerele următoare: 10 000; 100 000; 1 000 000; 1 000 000 000.
34. Să se calculeze: $5 \cdot 10^4$; $8 \cdot 10^6$; $6 \cdot 10^{12}$ și să se scrie prescurtat folosind puterile lui 10 următoarele numere 90 000; 500 000; 300 000; 2 000 000 000; 450 000 000 000.
35. În ce condiții este fracția $\frac{a}{b}$ un număr pozitiv; un număr negativ; egală cu zero; fără sens?
36. În ce condiții suma $a + b$ este:
- $$a + b = a - b; (a + b)^2 = a + b; a + b = 0.$$
37. Pentru ce valori ale lui a sunt adevărate relațiile:
- $$a < 2a; a = 2a; a > 2a?$$

38. Să se arate în ce condiții suma a doi termeni este:
a) egală cu unul din termeni; b) mai mică decât unul din ei.
39. Pentru ce valori ale lui x următoarele propoziții sînt adevărate: $\frac{x-1}{2} > 0$;
 $\frac{x-1}{2} < 0$; $\frac{x-1}{2} = 0$.
40. Care din următoarele expresii sînt egale între ele?
 $-a^2$ și $(-a)^2$; $-a^5$ și $(-a)^5$.
41. Pentru ce valori ale lui x , expresia $(x+2)^2$ este 0.
42. Pentru ce valori ale lui x expresiile:
 $\frac{5}{x-1}$; $\frac{7}{x-3}$; $\frac{2}{x+5}$; $\frac{1}{x+1}$ sînt pozitive, negative, fără sens.
43. Dacă $a \in N$ și $b \in N$ se poate afirma că rădăcina ecuației $x - a = b$ este întotdeauna un număr natural?
44. Dacă $a \in N^*$ și $b \in N^*$, care din ecuațiile $x : a = b$; $ax = b$; $x + a = b$; $x - a = b$ nu au întotdeauna o soluție în mulțimea numerelor naturale?
45. Care este valoarea cea mai mică pe care poate s-o aibă expresia $1 + x^2$?
46. Poate expresia $\frac{1}{1+x^2}$ să fie mai mare ca unitatea?
47. Într-un vas se găsește apă la temperatura de 0° . Vasul fiind pus pe foc temperatura apei se schimbă în funcție de durata încălzirii astfel:

Timpul în minute	x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Temperatura apei în grade	y	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

- a) Să se afle raportul a două valori oarecare ale lui x și să se compare acest raport cu raportul valorilor corespunzătoare ale lui y .
- b) Să se formeze cîteva proporții cu valorile lui x și y date în tabelul de mărime.
- c) Să se scrie formula care exprimă pe y în funcție de x .
- d) Să se calculeze temperatura apei din vas, cînd $x = 15^\circ$ admitînd că încălzirea se face uniform.
- e) Pe baza datelor din tabel să se facă graficul variației temperaturii apei din vas.
48. Din două orașe care se găsesc la distanțe de m kilometri unul de altul, pornesc în același timp două trenuri, unul către altul. Viteza primului tren este de a km pe oră, iar viteza celui de-al doilea, de b km/oră. Peste cîte ore se vor întîlni trenurile?

$$R: t = \frac{m}{a+b}.$$

49. Dintr-un depozit de lemne s-au scos $a \text{ m}^3$ de lemne, ceea ce reprezintă $p\%$ din toată rezerva de lemne. Să se afle care este rezerva de lemne?

$$\text{R. } \frac{100 \ a}{p} \text{ m}^3.$$

50. Pentru încălzirea unei clădiri s-au rezervat a tone de cărbuni. Din această rezervă s-au întrebuințat b tone. Cîte kg de cărbuni trebuie să se ardă în medie, pe zi, așa încît cărbunii rămași, să ajungă pentru t zile?

$$\text{R. } \frac{(a - b) \ 1 \ 000}{t} \text{ kg.}$$

51. Un teren de formă dreptunghiulară are lungimea de $3 \frac{1}{2}$ ori mai mare decît lățimea și perimetrul de 360 dam. Terenul s-a amenajat pentru cultivat cartofi și varză. Ariile suprafețelor cultivate cu cartofi și varză sînt invers proporționale cu numerele $\frac{1}{6}$ și $\frac{1}{4}$.

Să se afle cîte hectare s-au cultivat cu cartofi și cîte cu varză.

$$\text{R. } 33,6 \text{ ha; } 22,4 \text{ ha.}$$

52. Din două unghiuri adiacente suplimentare unul este $\frac{4}{5}$ din celălalt. Să se afle unghiurile?

$$\text{R. } 80^\circ; 100^\circ.$$

53. Perimetrul unui triunghi isoscel este de 48 cm. Baza lui este cu 12 cm mai mică decît una din laturile egale. Să se afle laturile triunghiului.

$$\text{R. } 20 \text{ cm; } 8 \text{ cm.}$$

54. Una din laturile egale ale unui triunghi isoscel este de $3 \frac{1}{3}$ ori mai mare decît baza lui. Perimetrul triunghiului este de 48 m. Să se afle laturile triunghiului.

$$\text{R. } 21 \text{ m, } 6 \text{ m.}$$

55. Într-o ladă sînt a kg de zahăr, în alta b kg. Dacă mutăm din prima ladă în lada a doua c kg obținem în amîndouă lăzile aceeași cantitate de zahăr. Să se scrie sub formă de egalitate, operațiile efectuate.

$$\text{R. } a - c = b + c.$$

56. Viteza unui vapor în apă stătătoare este de v km pe oră, iar viteza apei este de n km pe oră. În cîte ore va parcurge vaporul distanța de m km:

a) mergînd în sensul curentului, b) împotriva curentului?

$$\text{R. a) } \frac{m}{v + n} \text{ ore, b) } \frac{m}{v - n} \text{ ore.}$$

57. O bară în formă de paralelipiped are lungimea de a cm și lățimea de b cm iar înălțimea de c cm. Să se afle greutatea barei știind că densitatea barei este q .

$$\text{R. } abcq.$$

58. Un teren de n hectare este arat cu tractorul în a zile. Dacă aceeași suprafață ar fi arată cu plugul tras de vite, aratul s-ar efectua în b zile. Să se afle cu cât se ara mai repede într-o zi cu tractorul decât cu plugul tras de vite.

$$R. \frac{n}{a} - \frac{n}{b}.$$

59. Un bazin este umplut de un robinet în a ore și de altul în b ore. A câta parte a bazinului o va umple fiecare robinet într-o oră?

$$R. \frac{1}{a}; \frac{1}{b}.$$

3. Operații cu numere reale

1. $(-219) + (-7) + (319) + (-13)$;
2. $(10\ 009) + (-3\ 111) + (991) - (889)$;
3. $(-1\ 009) + (981) + (-991) + (19)$;
4. $(3\ 908) + (-2\ 345) + (-1\ 902) + (-635)$;
5. $\left(-2\frac{3}{5}\right) + (1,625) + \left(-8\frac{2}{5}\right) + \left(9\frac{3}{8}\right)$;
6. $\left(5\frac{3}{4}\right) + (-4,125) + (-5,75) + \left(-5\frac{7}{8}\right)$;
7. $[-2,(3)] + (5,375) + \left(-7\frac{2}{3}\right) + \left(4\frac{5}{8}\right)$;
8. $[(1,1(6))] + \left(-8\frac{2}{5}\right) + \left(-5\frac{1}{6}\right) + (4,2)$;
9. $(3,6) + (-8,25) + \left(-4\frac{1}{3}\right) + \left(-2\frac{3}{4}\right)$;
10. $(-261) - (-314) - (+139) - (-186)$;
11. $(235) - (+881) - (-675) - (119)$;
12. $\left(-3\frac{3}{4}\right) - (3,75) - \left(12\frac{3}{8}\right) + (-8,625)$;
13. $5,1(6) - [-8,2(2)] - \left(7\frac{3}{5}\right) + \left(-2\frac{3}{4}\right)$;
14. $\left(-1\frac{2}{5}\right) - \left(-3\frac{3}{4}\right) - \left(4\frac{3}{4}\right) - (-3,75)$;
15. $\left(-9\frac{5}{8}\right) - \left(-2\frac{2}{3}\right) - (-9,625) - \left(-7\frac{1}{3}\right)$;
16. $\left(-1\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-3\frac{3}{4}\right) + \left(-3\frac{2}{5}\right) \cdot \left(1\frac{1}{6}\right) - [(-3,3(3))]$;

$$17. (8,75) \cdot \left(-3 \frac{2}{5}\right) - \left(-3 \frac{2}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{15}\right) + 6,2(1);$$

$$18. [\sqrt{8} - (-8\sqrt{2})] \cdot 3\sqrt{2} + (\sqrt{27} - 2\sqrt{3}) \cdot 4\sqrt{3};$$

R. 72.

$$19. [\sqrt{125} - (-3\sqrt{5})] \cdot (-4\sqrt{5}) + 160;$$

R. 0.

$$20. \{[\sqrt{54} + 7\sqrt{6}] \cdot (10\sqrt{6}) - (-400)\} \cdot 10^{17};$$

R. 10²⁰.

$$21. \left[\sqrt{216} - 5,125 + 4\sqrt{6} - \left(-5 \frac{1}{8}\right)\right] \cdot \sqrt{24};$$

R. 120.

$$22. \left[-5,1(9) + \sqrt{125} - \left(-\frac{26}{5}\right) - 4\sqrt{5}\right] \cdot 2\sqrt{5} - 10;$$

R. 0.

$$23. \left[\left(5 \frac{3}{\sqrt{8}} - 8,9(9) - (12) - 5 \frac{5}{2\sqrt{2}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{20}}\right)^2\right];$$

R. 1.

$$24. \left[3 \frac{3}{\sqrt{75}} - 8 \frac{2}{\sqrt{98}} - \left(-7 \frac{2}{5\sqrt{3}}\right) + 8 \frac{2}{7\sqrt{2}}\right] \cdot \frac{5\sqrt{3}}{10\sqrt{3} + 1};$$

R. 5.

$$25. \frac{\left(3 \frac{2}{3\sqrt{7}} - 20 \frac{4}{3\sqrt{7}} + 17 \frac{2}{\sqrt{63}}\right) : \left(\frac{-2 \ 360 \ 789}{2 \ 345}\right) + \sqrt{363}}{11\sqrt{3}};$$

R. 1.

$$26. \left[\frac{8}{3\sqrt{6}} - \left(-\frac{4}{3\sqrt{11}}\right) - \frac{8}{\sqrt{54}} + \frac{6}{\sqrt{99}}\right] : \left(-\frac{5}{3\sqrt{11}}\right);$$

R. 2.

$$27. \frac{\sqrt{25,9(9)} : (-\sqrt{8}) \cdot -\frac{\sqrt{2}}{5}}{(\sqrt{68} - \sqrt{17}) : (\sqrt{4 \ 914})} \cdot \frac{1}{2};$$

R. 17.

$$28. \frac{\left[\sqrt{1,0816} - \left(-\frac{24}{25}\right)\right] : \sqrt{48} + \frac{7}{8\sqrt{3}}}{-\sqrt{108} - 5\sqrt{3}};$$

R. $-\frac{1}{24}$.

$$29. \frac{\left[\sqrt{9,030025} - \left(-7 \frac{99}{200}\right)\right] : \left(-10 \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{245} : (-7\sqrt{5})};$$

R. 1.

30. $\frac{\left[\frac{\sqrt{3^3 \cdot 2^3 \cdot 5^7}}{125\sqrt{5}} - \left(-4\sqrt{6}\right)\right] : 10\sqrt{6} + \sqrt{\frac{2}{5}}}{(\sqrt{5} + \sqrt{2}) : \sqrt{5}};$ R. 1.
31. $\left[\frac{\sqrt{(3^3 \cdot 5^3 \cdot 4^4 \cdot 9^{10}) : (27 \cdot 125 \cdot 4^5 \cdot 9^9)}}{1,5} - 1 + \sqrt{2}\right] : \sqrt{2};$ R. 1.
32. $\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{4}\right) - \left(\frac{1}{-5}\right)\left(\frac{-3}{2}\right) + \left(\frac{-2}{-5}\right)\left(\frac{4}{-3}\right) - (-2 + 5);$ R. $-\frac{83}{24}.$
33. $\frac{-3 + (-5)^2}{2 - 9} + \frac{(+6) - (+4)}{(+3)(+2) - (-2)^2} + \frac{(+3)^2 - (-2)^3}{21 - (+2)^2};$ R. $-1\frac{1}{7}.$
34. $\left(-3 - 5 - \frac{1}{2}\right)^2 + (-1 - 2)^2\left(-1 + 5 + \frac{1}{2}\right) + (-1 + 2)^3;$ R. $113\frac{3}{4}.$
35. $(-1 + 2 - 3)^2 + (-2 + 1 - 3)^2(-3 + 2 - 1) + (1 - 2)^2;$ R. -27.
36. $\frac{(-1)(-2)}{3} + \frac{(-2)^3}{-1} + \frac{(-1)^3}{-2} + \frac{1}{-1} + \frac{1}{-2} + \frac{1}{3};$ R. 8.
37. $\frac{(-3)(-1)^2(-2)^3 - (-5)^3(-2)^3 + (+4)^2}{[(+7) - (-2) - (+1)](-5)^2};$ R. $-4\frac{4}{5}.$
38. $(-1)^2(1 + 2 - 3) - (2 + 3)(3 - 1 - 5) + (-2 + 1)^2(9 - 2 + 1);$ R. 23.
39. $[15^2 - (-8)^2]^2 - [15^2 + (-8)^2]^2 + 4 \cdot 15^2(-8)^2;$ R. 0.
40. $[(4 - 3)(2 + 1) - (4 - 2)(3 - 1)](4 - 1);$ R. -3.
41. $\frac{-3^3 - (-5)^3}{3^2 + 5^2 - 5 \cdot 3} + \frac{15 - 10}{6 - (-1)^3} + \frac{(-5)^2 - (-1)^2}{-6 - 2 + (-1)} - 5\frac{3}{19} - \frac{5}{7};$ R. $-\frac{8}{3}.$
42. $\frac{-2\frac{29}{30}}{\left(6 - 2\frac{1}{3} - \frac{2}{\frac{4}{3}}\right) : (-0,125)} - \frac{339}{250};$ R. -1.
43. $\frac{(-5)^3 - 3^3}{(-5)^2 - 5 \cdot 3 + 3^2} + \frac{-10 + 15}{6 - (-1)} + \frac{(-5)^2 - (-1)^2}{-5 - 6 + (-1)};$ R. $-9\frac{2}{7}.$
44. $\left(\frac{81 - 9}{71 + 1}\right)\left(\frac{-9}{9 - 1} - \frac{1}{-9 + 1}\right);$ R. -1.
45. $\frac{12 + 4\sqrt{5}}{48 + 16\sqrt{5}} + \left(\frac{-3}{4}\right)\left(-\frac{2}{9}\right) + \frac{5}{6};$ R. $1\frac{1}{4}.$

$$46. \frac{(-2)}{-3} + \frac{(-2)(+3)}{-1} + \frac{(-3)}{-2} + 1 + \frac{1}{-2} + \frac{1}{-3}; \quad \text{R. } 8\frac{1}{3}.$$

$$47. \left[\left(-1\frac{5}{6} \right) + (2,5) + 5 \right] - 8 + \left(-\frac{3}{4} \right) + \left[\left(-3\frac{1}{2} \right) + 9 \right]; \quad \text{R. } 2\frac{5}{12}.$$

$$48. \frac{(3) + (-7) + (-5) + (10) + (-4) + (+4)}{(-5) + (-7) - (+4) + (+10) + (-2)}; \quad \text{R. } -\frac{1}{8}.$$

$$49. \frac{7 + (-2) - (-3) - 4 + (+5) - (-1)}{(-3)(-2)(-1)}; \quad \text{R. } -1\frac{2}{3}.$$

$$50. \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{3}{4} \right) : \left[\left(\frac{5}{6} \right) \left(-\frac{2}{3} \right) \left(\frac{-3}{5} \right) (-3) \right]; \quad \text{R. } \frac{-3}{8}.$$

$$51. \frac{(-5) : (+5) + (+3) : \left(+\frac{3}{5} \right)}{\frac{3}{5} : \left(\frac{-2}{5} \right)}; \quad \text{R. } -2\frac{2}{3}.$$

$$52. \frac{16 + 8\sqrt{5} - 4 - 4\sqrt{5}}{56 + 24\sqrt{5} - 24 - 8\sqrt{5} + 16}; \quad \text{R. } \frac{1}{4}.$$

$$53. \frac{-\sqrt{27} + 2\sqrt{75} - 9\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}}; \quad \text{R. } 1.$$

$$54. \frac{\left[(-5) - (-0,25) + \left(-2\frac{1}{4} \right) \right] \sqrt{7}}{(-6\sqrt{7}) + (\sqrt{343})}; \quad \text{R. } -7.$$

$$55. \frac{\left[\left(\frac{-2}{5} \right) + (+1,5) - \left(-\frac{9}{10} \right) + (-1) \right]^2}{\frac{1}{2} + 2\sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt{\frac{5}{4}} \cdot \frac{1}{4} : \sqrt{\frac{5}{3}}}; \quad \text{R. } 1.$$

$$56. \frac{\left[\left(\frac{-2}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{-3} \right)^2 - \left(-\frac{4}{9} \right) + (-2)^2 \right]^3}{\left(-\frac{5}{6} \right)^3 - (-1)^3 - 1}. \quad \text{R. } = -216.$$

Să se determine x din următoarele proporții:

$$57. \frac{\sqrt{\frac{867}{75}} - \left(-\frac{3}{5} \right)}{x} = \frac{\sqrt{841} \cdot 12}{\sqrt{2523} \cdot \sqrt{3}}; \quad \text{R. } x = 1.$$

$$58. \frac{3\sqrt{722} \cdot \sqrt{2}}{38\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{598}}{x}; \quad \text{R. } x = 11\frac{1}{3}.$$

$$59. \frac{\frac{\sqrt{845}}{13} - \left(-\frac{7\sqrt{5}}{7} \right)}{7\sqrt{5}} = \frac{x}{10}; \quad \text{R. } x = 20.$$

$$60. x \left[\frac{\sqrt{5^3 \cdot 8^2 \cdot 3^2}}{\sqrt{375 \cdot 192}} (-6) \right] = \frac{1 - \frac{1}{2 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}}}}{\sqrt{968} : 88 \sqrt{2}}; \quad \text{R. } \frac{8}{75}.$$

$$61. \frac{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}}}{1,1(6)} = 1 \frac{5}{7}; \quad \text{R. } x = -\frac{1}{2}.$$

$$62. \frac{1 + \frac{1}{-2 - \frac{1}{-1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{5}}}}}{5 : 19x} - \frac{1 - \frac{1}{x - \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}}}{(30x - 43) : (30x - 13)} = 1. \quad \text{R. } x = 2.$$

Geometrie

III. Probleme de geometrie plană

1. Cercul

Poziția a două cercuri; intersecția unei drepte cu un cerc; tangenta la cerc; construcții în cerc.

1. Însemnind cu R și r razele a două cercuri, iar cu D distanța centrelor lor, să se spună ce poziție au aceste cercuri, dacă:

$$R = 5 \text{ dm}, \quad r = 3 \text{ dm}, \quad D = 10 \text{ cm};$$

$$R = 7 \text{ dm}, \quad r = 4 \text{ dm}, \quad D = 9 \text{ cm};$$

$$R = 6 \text{ dm}, \quad r = 2 \text{ dm}, \quad D = 8 \text{ cm}$$

$$R = 9 \text{ dm}, \quad r = 3 \text{ dm}, \quad D = 6 \text{ cm};$$

$$R = 5 \text{ dm}, \quad r = 2 \text{ dm}, \quad D = 2 \text{ cm}.$$

2. Prin extremitățile unui diametru al unui cerc se duc două coarde paralele. Să se arate că aceste două coarde sînt egale.

3. Printr-un punct în interiorul unui cerc, să se ducă o coardă care să aibă mijlocul în acest punct.

R. Perpendiculara pe diametru ce trece prin acest punct.

4. Printr-un punct oarecare se duc într-un cerc două coarde egale. Să se arate că ele sînt simetrice față de diametrul care trece prin acest punct.

Indicație: Se va observa că distanțele de la corzi la centru sînt egale.

5. Să se ducă printr-un punct în interiorul unui cerc, două corzi egale și perpendiculare.

Indicație: Se va arăta că cele două corzi fac unghiuri de 45° cu diametrul ce trece prin acest punct.

6. Se dă cercul O în care se duce diametrul AB ; fie CD coarda perpendiculară pe acest diametru în mijlocul razei OB . a) Să se arate că triunghiul DCB este isoscel; b) patrulaterul $ODBC$ este romb.

Indicație: Triunghiurile $OA'B$, $OA'C$ sînt echilaterale. Unghiul $\widehat{BOC} = 120^\circ$ și arcul $\widehat{BAC} = 120^\circ$; arcele egale $\widehat{AB}$ și $\widehat{AC}$ au tot cîte 120° .

7. Se dă un punct în interiorul unui cerc. Să se arate că, dintre toate coardele ce se pot duce prin acest punct, cea mai scurtă este aceea care este perpendiculară pe diametrul ce trece prin acel punct.

Indicație: Se arată că această coardă este cea mai depărtată de centru, față de toate coardele duse prin acest punct.

8. Să se construiască o dreaptă care să taie două cercuri date sub unghiuri egale.

Indicație: Se duc două raze paralele în cele două cercuri și se unesc extremitățile lor. Se va cerceta cazul cînd razele sînt în același sens sau în sens contrar.

9. Fie două cercuri secante de raze R și r . Să se arate că paralelele duse din punctele de intersecție a celor două cercuri și mărginite de aceste cercuri, sînt egale.

10. Fie un punct M în interiorul unui cerc. Să se ducă prin M o coardă al cărui mijloc să fie punctul M și să se arate că această coardă este cea mai scurtă din toate coardele, ce ar trece prin M .

11. Fie cercul O și N un punct în interiorul cercului. Să se arate cum se poate obține cea mai mare coardă și cea mai mică, care trece prin punctul N . Justificați răspunsul.

12. Fie cercul O și două corzi ale cercului $AB = DC$ astfel ca $AB \cap DC = \{N\}$. Să se arate că AB și DC sînt diagonalele unui trapez înscris în cercul O .

Indicație: Din arcele subîntinse de coarde se scoate partea comună.

13. Să se ducă printr-un punct din interiorul unui cerc, două coarde egale și perpendiculare.

Indicație: Se va demonstra mai întîi că cele două coarde subîntind unghiuri de 45° cu diametrul ce trece prin acel punct.

14. Fie AOB un unghi la centrul cercului O și $A'OB'$ un alt unghi la centru cu laturile respectiv perpendiculare pe ale primului unghi. Să se demonstreze că dreptele AB , $A'B'$ sînt sau perpendiculare sau paralele, după cum unghiurile indicate sînt ambele de același fel, sau unul ascuțit iar celălalt obtuz.

Indicație: Se va arăta că perpendicularele duse din O pe AB , $A'B'$ sînt sau perpendiculare, sau în prelungire.

15. Se dă cercul O în care se duce diametrul AA' ; fie BC coarda perpendiculară pe diametrul dat în mijlocul razei OA' . Să se demonstreze că triunghiul ABC este echilateral.

Indicație: Triunghiurile $OA'B$, $OA'C$ sînt isoscele.

16. Se dă un cerc O de rază R și un punct A în același plan. Se unește A cu centrul O și cu un punct variabil B de pe cerc. Se notează cu D mijlocul lui AO și cu C mijlocul lui AB . Care este figura determinată de punctul C ale cărei puncte au aceeași proprietate?

R. Un cerc cu centrul în D și cu raza $\frac{R}{2}$.

17. Se dau două cercuri concentrice avînd centrul în O . Se duce o dreaptă care determină pe cele două cercuri coardele AB și CD . Să se arate că triunghiurile OAC și OBD sînt egale.

18. În planul unui cerc, se dă un punct fix și se duc prin el două coarde mobile perpendiculare. Să se arate că dreapta care unește mijloacele acestor două coarde este o lungime constantă.

Indicație: Centrul cercului, punctul fix și mijloacele celor două coarde sînt vîrfurile unui dreptunghi.

19. Se dă un cerc C și un punct A pe el; pe tangenta în punctul A luăm un punct C' și considerăm cercul cu centrul în C' și cu raza $C'A$. Ambele cercuri se mai taie în B . Să se arate că punctele A , B , C , C' sînt așezate pe un cerc căruia i se va determina centrul și raza.

20. Fie cercul O și un punct A în exteriorul cercului în primul caz și în interiorul cercului în al doilea caz. Să se determine punctul B pe cerc, care este cel mai apropiat și cel mai depărtat de punctul A , în ambele cazuri.

21. La un cerc dat să se ducă o tangentă perpendiculară pe o dreaptă dată.

22. La un cerc dat să se ducă o tangentă care să facă cu o dreaptă dată un unghi dat α .

23. Să se construiască un cerc de rază R , trecînd printr-un punct dat A și tangent unei drepte date.

24. Să se construiască un cerc de rază dată, trecînd printr-un punct dat, și tangent la un cerc dat.

25. Se unește un punct fix A cu un punct mobil B de pe cercul dat O . Să se determine figura F descrisă de mijlocul M al segmentului AB .

Indicație: Fie I mijlocul lui OA iar $OB = R = \text{constantă}$. Din triunghiul OAB avem: $IM = \frac{OB}{2} = \frac{R}{2} = \text{constantă}$.

Figura F este un cerc cu centrul în I și raza $\frac{R}{2}$.

26. Fie un cerc O și un diametru fix AB . Se duce coarda CD paralelă cu acest diametru. Se notează cu M intersecția dreptelor CB și DA ; iar $AC \cap BD = \{N\}$. Ce figură descriu punctele M și N când coarda variază.

R. Perpendiculara ridicată în O pe AB .

27. Fie AB și CD două coarde ale unui cerc; $AB = CD$ și $AB \cap CD = M$. Să se arate că segmentele cuprinse între punctul M și extremitățile coardelor sînt egale.
28. Care este cea mai mică coardă a unui cerc ce se poate duce printr-un punct din interiorul cercului?
29. Care este cel mai mare și cel mai mic segment de dreaptă care se poate așeza cu extremitățile sale pe două cercuri exterioare?
30. Perpendiculara pe mijlocul razei OB a cercului O intersectează cercul de diametru AB în punctul N . Se cere: a) să se determine arcul BN , b) dacă M este simetricul lui N față de AB , să se arate că $MBNO$ este romb.

R. a) 60° .

2. Măsura unghiurilor

31. Se dă un patrulater $ABCD$ înscris în cercul de centru O . Latura AB corespunde unui arc de 60° , latura CD la un arc de 120° și diagonala $BD = a$, corespunde unui unghi la centru de 120° .
a) Să se calculeze unghiurile formate de intersecția diagonalelor.
b) Să se calculeze perimetrul triunghiului BCD .

R. 90° ; $3a$.

32. Se dă triunghiul ABC cu înălțimile BB' și CC' ($B' \in AC$ și $C' \in AB$).
a) Să se arate că patrulaterul $BCC'B'$ este inscriptibil, b) M fiind un punct la mijlocul lui BC , și dacă $\hat{B} = 60^\circ$, să se arate că triunghiul $MC'B$ este echilateral.
33. Fie M un punct oarecare pe înălțimea AA' a triunghiului ABC . Din M se duc perpendicularele MB' și MC' pe laturile AB și AC . Să se arate că unghiul $\hat{C} = \widehat{AB'C'}$.

Indicație: $AC'MB'$ și $CC'MA'$ inscriptibile $\widehat{AMB'} = \widehat{AC'B'}$.

34. Fie AC tangenta în A a cercului cu diametrul AB și raza R ; ($AC = 2R$); CB intersectează cercul în D . Să se arate că triunghiul ADC este isoscel.

35. Fie ABC un triunghi înscris în cercul O . Prin mijlocul M al arcului AC , se duce o coardă $MN \parallel AB$, $MN \cap BC = \{I\}$.
Se cere să se arate că:

- a) Arcele $\widehat{MCN}$ și $\widehat{BNC}$ sint egale.
b) $MN = BC$.

36. Se dă un unghi $\widehat{BAC}$ înscris în cercul O . Fie MN dreapta care unește mijloacele coardelor AB și AC și care taie arcele AB și AC respectiv în D și E .

Se știe că $\widehat{DB} = \frac{\widehat{EAD}}{3}$; $\widehat{AE} = 112^\circ$ și $\widehat{BAC} = 220^\circ$. Să se afle unghiurile triunghiului BAC .

R. 70° ; 78° ; 32° .

37. Bisectoarele unghiurilor ascuțite ale unui triunghi dreptunghic ABC se intersectează în O , iar prelungirile lor intersectează pe AC și AB , respectiv, în M și N . Cercul de diametru MN intersectează bisectoarele BM și CN în P și Q .
Să se arate că arcul $PQ = 90^\circ$.

38. Prin punctele de intersecție A și B a două cercuri secante se duc două secante oarecare. Să se arate că coardele care unesc noile intersecții ale acestor secante cu cercurile sint paralele.

Indicație: Se duce coarda comună.

39. Într-un cerc O se ia un unghi la centru AOB , apoi se construiește un alt unghi la centru cu laturile respectiv perpendiculare pe ale primului unghi ($A'OB'$).

Se cere:

- a) Să se arate în ce caz $\widehat{AB} + \widehat{A'B'} = 90^\circ$ și $ABB'A'$ este trapez isoscel.
b) Să se arate că AB și $A'B'$ sint paralele sau perpendiculare.

Indicație: Perpendicularele duse din O pe $AB, A'B'$ sint sau perpendiculare sau în prelungire.

40. Se dau două cercuri concentrice O și O' ale căror raze sint în raportul de $\frac{1}{2}$. Fie un punct A al cercului exterior din care se duc coardele AB și AC care sint tangente la cercul O' interior, în B' și C' .
Să se arate că și coarda BC este tangentă la cercul O' și $BCC'B'$ este inscripțibil.

Indicație: Se demonstrează că triunghiul ABC este echilateral.

41. Înălțimile CC' și BB' ale triunghiului ABC înscris într-un cerc se intersectează în punctul D . Se cere: a) să se construiască cercurile ce au ca punct comun D , iar vîrfurile triunghiului ABC aparțin respectiv cercurilor construite. b) să se arate că unghiurile BAC și $B'DC$ sint egale.

42. Fie triunghiul ABC înscris în cercul O . Unghiul $\widehat{B}$ al triunghiului ABC este de 80 de grade. Bisectoarea unghiului $\widehat{B}$ este perpendiculară pe

diametrul care trece prin C . Să se arate că raportul arcelor $\widehat{BC}$ și $\widehat{AB}$ este $\frac{2}{3}$.

Să se afle unghiurile triunghiului.

R. 80° ; 40° ; 60° .

43. În cercul O se înscrie triunghiul ABC și fie D punctul diametral opus al lui A , H ortocentrul (punctul de întâlnire al înălțimilor triunghiului ABC), iar A' mijlocul laturii BC . Să se arate că H , A' și D sînt coliniare.

Indicație: $BH \parallel CD$; de asemenea $CH \parallel BD$; $HBDC$ paralelogram.

44. Pe latura BC a triunghiului ABC se ia un punct oarecare M , tangentele duse din B și C la cercurile circumscrise triunghiurilor ABM și ACM se intersectează în punctul N .

Să se arate că punctul N aparține cercului circumscris triunghiului ABC .

Indicație: $\widehat{NCB} = \widehat{MAB}$ și $\widehat{NCB} = \widehat{MAC} \Rightarrow \widehat{BNC} = 180^\circ - (\widehat{NBC} + \widehat{NCB}) = 180^\circ - \widehat{A}$.

45. În triunghiul ABC , unghiul $A = 60^\circ$; bisectoarele interioare BB' , CC' se intersectează în I . Să se demonstreze că patrulaterul $AB'IC'$ este inscriptibil.

46. Două cercuri se taie în A și B . Tangentele în A la cele două cercuri intersectează din nou cercurile în punctele C și D . Să se arate că AB este bisectoarea unghiului CBD .

Indicație: $\widehat{CAB} = \widehat{ADB}$; $\widehat{ACB} = \widehat{DAB} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ABD}$.

47. Într-un cerc se duc două coarde AB , AC apoi se mai duc coardele BB' , CC' respectiv paralele cu coardele AC , AB . Să se demonstreze că triunghiul $AB'C'$ este isoscel.

Indicație: Patrulateralele $AB'BC$ și $AC'CB$ sînt trapeze isoscele; $\Rightarrow AB' = AC' = BC$.

48. Se dă un semicerc AD . Se iau arcele AB și BC a căror măsură este $\pi/5$ radiani. Fie O centrul cercului, iar intersecția dintre CB și OA să fie T .

a) Să se arate că triunghiurile TAB și TOC sînt isoscele; b) $TB = OA$;
c) Proiecția lui BC pe raza OA este egală cu jumătatea razei.

Indicație: $\widehat{CTD} = \frac{\widehat{CD} - \widehat{AB}}{2}$.

49. Pe prelungirea unei coarde AB a unui cerc O se ia lungimea BC egală cu raza cercului și apoi se duce secanta COE , unde E e punctul cel mai depărtat de C . Să se arate că $\widehat{AOE} = 3\widehat{ACO}$.

50. Prin punctul A al unui cerc se duce o coardă AB și tangenta în punctul B ; diametrul perpendicular pe raza OA întâlnește tangenta și coarda (sau prelungirea ei) respectiv în punctele C și D . Să se demonstreze că $BC = CD$.

51. Pe un cerc se iau patru puncte oarecare A, B, C, D . Fie M, N, P, Q respectiv mijloacele arcelor AB, BC, CD, DA . Să se demonstreze că dreptele MP și NQ sînt perpendiculare.

Indicație: Se găsește că măsura unghiului format de drepte este jumătate de semicerc.

52. Se duce o rază BO perpendiculară pe un diametru al cercului O . Se unește B cu un punct A al diametrului și BA taie cercul în P . Tangenta în P taie prelungirea diametrului în C . Să se demonstreze că $CA = CP$.

Indicație: Se arată că $\widehat{APC} = \widehat{CAP}$.

53. Într-un cerc O se duce diametrul AB ; din B se construiesc de o parte și de alta a diametrului, două coarde oarecare, care intersectează cercul în C și D . Cunoscînd că BD intersectează tangenta la cerc dusă în A în punctul E , să se arate că $\widehat{BCD} = \widehat{AEB}$.

Indicație: $\widehat{BD} = \widehat{AB} - \widehat{AD}$.

54. Circumferința unei roți de transmisie este de 810 mm. Cureaua de transmisie este în contact cu roata de-a lungul unui arc ce are lungimea de 200 mm. Să se calculeze unghiul corespunzător acestui arc.

R. $88^{\circ}53'20''$.

55. Pe laturile AB și BC ale unui triunghi ABC , se construiesc în exterior pătratele $ABMN$ și $BCQP$. Fie O_1 și O_2 centrele acestor pătrate și K, L mijloacele laturilor AC respectiv MP . $AP \cap MC = D$.

Se cere:

- a) $\triangle MBC = \triangle ABP$; b) $AMBD$ inscriptibil; c) O_1LO_2K pătrat.

Indicație: Se arată că $MC \perp AP$ folosind patrulaterul inscriptibil.

3. Figuri asemenea

Segmente proporționale

56. Să se împartă segmentul de 12 cm în părți proporționale cu numerele 2, 5, 6, 8.
57. Se dau trei segmente de: 4 cm; 7 cm; 9 cm. Să se afle, prin construcție grafică, a patra proporțională prin două metode (a paralelelor și dreptelor ce pleacă din același punct).
58. Să se afle pe cale grafică: $\sqrt{12}$; $\sqrt{15}$; $\sqrt{28}$. Se vor folosi mai multe metode.
59. Să se afle pe cale grafică $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{11}$.
60. Să se împartă segmentul AB în cinci părți egale. (Construcție grafică.)
61. Fie a, b, c segmente date. Să se împartă segmentul AB în părți proporționale cu a, b, c .

62. Pe segmentul $AB = 70$ mm, să se găsească un punct M astfel ca: $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{5}$ apoi un punct M' astfel ca: $\frac{M'A}{M'B} = \frac{5}{3}$.
Cum sint așezate M și M' față de extremitățile segmentului?
63. Se prelungesc medianele BB' , CC' ale triunghiului ABC cu $B'B'' = BB'$, $C'C'' = CC'$. Să se arate că punctele A , B'' , C'' sint coliniare.
64. Într-un trapez dreapta care unește mijloacele laturilor neoparalele, este paralelă cu bazele și trece prin mijloacele diagonalelor.
65. Să se construiască un triunghi, cunoscînd unghiul A , lungimea bisectoarei unghiului A și raportul laturilor $\frac{AB}{AC} = a$.
66. Să se demonstreze, bazîndu-se pe egalități de triunghiuri, că dreapta care unește mijloacele a două laturi ale unui triunghi este paralelă cu a treia și egală cu jumătatea ei.
67. Fie ABC un triunghi oarecare și D un punct situat pe prelungirea lui AC , astfel ca $\widehat{BAC} = \widehat{CBD}$. Să se demonstreze că BD este medie proporțională între AD și CD .
68. Să se demonstreze că diametrul EF al cercului înscris într-un trapez isoscel $ABCD$ este medie proporțională între cele două baze ale acestuia.
Indicație: Centrul cercului O este la intersecția bisectoarelor unghiurilor trapezului.
69. Să se construiască media proporțională între două segmente a și b de lungime: $a = 20$ mm, $b = 45$ mm, folosind teorema catetei și apoi a înălțimii. Să se afle prin calcul media proporțională a acestor lungimi și să se verifice concordanța celor trei rezultate.
70. Să se afle, prin desen, valoarea mediei proporționale a numerelor 37 și 54 și să se verifice rezultatul prin calcul.
Indicație: Se construiește grafic media proporțională între 37 mm și 54 mm și apoi se măsoară segmentul obținut.
71. Să se deseneze un dreptunghi oarecare. Apoi să se construiască fără calcul sau măsurători, un pătrat echivalent cu dreptunghiul inițial.
72. Pe laturile unui romb $ABCD$ se iau punctele M , N , P , Q astfel ca $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{ND} = \frac{CP}{PD} = \frac{CQ}{QB} = 2$. Să se găsească valoarea raportului dintre aria rombului și aria dreptunghiului $MNPQ$.

$$R. \frac{9}{4}.$$

4. Asemănarea

73. Pe catetele AB și AC ale unui triunghi dreptunghic se construiesc în exterior pătratele $ABDE$ și $ACFG$. $AC \cap BF = \{K\}$ și $AB \cap DC = \{H\}$. Să se arate că triunghiul AHK este isoscel.

Indicație: Se observă că triunghiurile $CAH \sim CDE$ și $ABK \sim BGF$.

$$\text{Dacă notăm } |AC| = b; |AB| = c \text{ obținem } |AH| = \frac{bc}{b+c} \text{ și } |AK| = \frac{bc}{b+c}.$$

74. Să se arate că mijloacele laturilor unui triunghi oarecare și piciorul uneia din înălțimile triunghiului sînt vîrfurile unui trapez isoscel.

Indicație: Se aplică teorema referitoare la linia mijlocie într-un triunghi și teorema referitoare la mediana corespunzătoare ipotenuzei într-un triunghi dreptunghic.

75. Să se demonstreze că suma distanțelor vîrfurilor unui triunghi la o dreaptă exterioară triunghiului este egală cu suma distanțelor mijloacelor laturilor triunghiului la aceeași dreaptă.

Indicație: Se va aplica teorema referitoare la linia mijlocie în trapez.

76. Fie M și N mijloacele laturilor neoparalele ale unui trapez, iar P și Q mijloacele diagonalelor sale. Să se arate că segmentele MN și PQ au același mijloc.

Indicație: Se aplică teoremele referitoare la linia mijlocie în triunghi și în trapez.

77. În triunghiul dreptunghic ABC , cu unghiul drept în A , avem $AC = 2AB$.

Să se ia pe cateta AC un punct D , astfel ca $\widehat{BDA} = 90^\circ - \widehat{C}$.

Să se arate că $DC = 3AD$.

Indicație: Înlocuind pe AC cu valoarea sa din enunțul problemei obținem din asemănarea triunghiurilor ABC și ABD :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{2AB}{AB}, \text{ de unde } AB = 2AD$$

și fiindcă prin ipoteză $AC = 2AB$ deducem, ținînd seama de cele de mai sus, că: $AC = 4AD$.

78. Fie D un punct oarecare pe baza BC a unui triunghi ABC . Prin vîrfurile B și C ducem paralele la AD . Acestea întîlnesc prelungirea lui AC în M și prelungirea lui AB în N . Să se arate că: $MB \cdot DC = NC \cdot DB$.

79. O paralelă la mediana AD a triunghiului ABC întîlnește respectiv laturile AB , AC , în E și F . Să se demonstreze că:

$$\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}.$$

Indicație: Ducînd $GE \parallel BC$ se obține $\triangle AEG \sim \triangle ABC$ (fig. I. 11).

80. Produsul a două laturi AB , AC ale unui triunghi ABC este egal cu produsul diametrului cercului circumscris triunghiului prin înălțimea AA' , dusă din vîrfurile A .

Indicație: $\triangle ADC \sim \triangle ABA'$ (fig. I. 12).

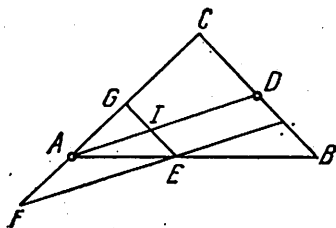


Fig. I.11

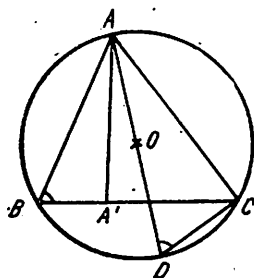


Fig. I.12

81. Se dă un punct M pe diagonala AC a unui patrulater oarecare $ABCD$. Se duce MP paralelă la AB și MQ paralelă cu CD ($P \in BC$ iar $Q \in AD$). Să se demonstreze că:

$$\frac{MP}{AB} + \frac{MQ}{CD} = 1.$$

Indicație: $\left\{ \begin{array}{l} \text{triunghiul } MPC \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{MP}{AB} = \frac{MC}{AC}, \\ \text{triunghiul } AMQ \sim \triangle ACD \Rightarrow \frac{MQ}{CD} = \frac{AM}{AC}. \end{array} \right.$

Adunăm membru cu membru egalitățile de mai sus și obținem 1.

82. Pe bisectoarea unui unghi drept xOy , se consideră un punct fix A . O secantă variabilă ce trece prin A taie pe Ox în M și pe Oy în N . Să se arate că suma:

$$\frac{1}{OM} + \frac{1}{ON}$$

are aceeași valoare, oricare ar fi poziția secantei.

Indicație: Ducem din A perpendicularele AP și AQ pe Ox și Oy . Triunghiurile AQN și MON sint asemenea.

$$\Rightarrow \frac{QA}{OM} + \frac{OQ}{ON} = 1.$$

Sau, vom scrie că suma ariilor triunghiurilor OAN și OAM este egală cu aria triunghiului OMN .

83. Latura pătratului $ABCD$ este egală cu a . Pe diagonala AC se ia punctul P , astfel încît $PC = \frac{AC}{4}$. Notez $PB \cap CD = \{E\}$, O centrul pătratului, OU perpendiculară din O pe BC și $BP \cap OU = \{M\}$.

a) Să se determine CE .

b) Să se arate că triunghiul BCM este isoscel.

Indicație: Dreapta OU este paralelă cu AB , ambele fiind perpendiculare pe BC . Triunghiurile PAB și POM sint asemenea. Scriind proporționalitatea laturilor omoloage, avem:

$$\frac{OM}{AB} = \frac{PM}{PB} = \frac{PO}{PA} = \frac{1}{3} \Rightarrow OM = \frac{a}{3}.$$

Pe de altă parte triunghiurile OPM și PEC sint egale; patrulaterul $ECMO$ este un paralelogram.

84. Fie ABC un triunghi echilateral înscris într-un cerc. Din centrul O al cercului ducem $OD \parallel BC$, $D \in AC$. Să se determine mărimile segmentelor AD și DC , cunoscînd că lungimea l_3 a laturii triunghiului ABC este de $12\sqrt{3}$ cm.

$$R. 8\sqrt{3}; 4\sqrt{3} \text{ cm.}$$

85. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic în A . Cercul ce are ca diametru latura oblică taie latura opusă AD în M și N . Să se arate că fiecare

din produsele $MA \cdot MD$ și $NA \cdot ND$ este egal cu produsul bazelor trapezului.

Indicație: Triunghiurile MDC și MBA sînt dreptunghice în D și A ; $\widehat{DCM} = \widehat{AMB}$, ca unghiuri cu laturi perpendiculare $\Rightarrow \triangle MDC \sim \triangle MBA$.
Analog:

$$\begin{aligned}\triangle NDC &\sim \triangle NBA \\ \Rightarrow ND \cdot NA &= DC \cdot AB \\ \Rightarrow MA \cdot MD &= NA \cdot ND = AB \cdot DC\end{aligned}$$

86. Se dă un paralelogram $ABCD$. Fie F un punct pe prelungirea laturii AB , iar $FD \cap AC = \{E\}$. Să se determine lungimea segmentului BF știind că

$$\frac{AE}{EC} = \frac{m}{n} \text{ și } BA = a.$$

Indicație: $\triangle AEF \sim \triangle CED$.

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AF}{DC}$$

Înlocuind primul raport cu $\frac{m}{n}$, iar pe $AF = a + BF$, cunoscute, obținem:

$$\frac{m}{n} = \frac{a + BF}{a} \Rightarrow \frac{m - n}{n} = \frac{BF}{a}.$$

$$R. BF = \frac{a(m - n)}{n}.$$

87. În trapezul dreptunghic $ABCD$, avînd ca baze AB baza mică și CD baza mare, fie E mijlocul înălțimii AD și $AD = DC$. Să se arate că, dacă BE este perpendiculară pe EC atunci aria trapezului $ABCD$ este egală cu $10 \cdot AB^2$.

Indicație: $\widehat{ABE} = \widehat{DEC}$ ca avînd laturile perpendiculare $\Rightarrow$ triunghiurile ABE și DEC sînt asemenea. E este mijlocul lui AD și $DC = AD$ prin ipoteză,

$$\Rightarrow \frac{AE}{2AE} = \frac{AB}{AE}$$

de unde: $AE = 2AB \Rightarrow DC = AD = 2AE = 4AB$,

$$AD = 4AB.$$

Acum este suficient să înlocuim în formula ariei trapezului.

88. Să se arate că paralela EF dusă la bazele unui trapez $ABCD$ prin punctul M de întîlnire al diagonalelor, este împărțită în două părți egale de acest punct.

Indicație: Se folosește asemănarea triunghiurilor formate.

89. Să se demonstreze că într-un triunghi dreptunghic mediana și înălțimea duse din vîrfurile unghiului drept formează între ele un unghi egal cu diferența unghiurilor ascuțite ale triunghiului.

90. Fie triunghiul ABC și $DE \parallel BC$; ($D \in AB$; $E \in AC$) și înălțimea AA' ($A' \in BC$) și $AA' \cap DE = \{F\}$. Paralela din F la AB și paralela din A' la AC se intersectează în P . Să se arate că punctele B, P, E sînt coliniare.
91. În triunghiul dreptunghic ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) se duce mediana AM ($M \in BC$). Fie D un punct oarecare pe BM ; N mijlocul lui AD și P simetricul punctului M în raport cu N . $PD \cap AC = \{O\}$ și $PD \cap AB = \{Q\}$. Să se arate că $QD = DB$; și $\triangle ODC$ este isoscel; $OQ = 2AP$.
92. Să se arate că dreapta care unește două din picioarele înălțimilor unui triunghi dat formează un alt triunghi asemenea cu primul.
- Indicație:* Se va ține seama că picioarele celor două înălțimi sînt pe același cerc cu două vîrfuri ale triunghiului dat și se va deduce egalitatea unghiurilor celor două triunghiuri.
93. Se dau două cercuri secante în punctele P și Q . În primul cerc O_1 se înscrie un triunghi ABC . Dreptele AP, BP, CP întîlnesc din nou cercul al doilea O_2 respectiv în punctele A', B', C' . Să se arate că triunghiul $A'B'C'$ este asemenea cu triunghiul ABC . Justificați (vezi figura I.13).

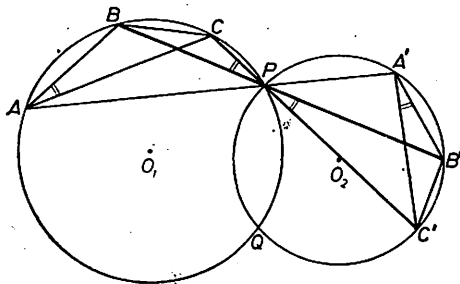


Fig. I.13

94. Pe laturile Ox și Oy ale unui unghi, se iau punctele A și B respectiv C și D astfel încît $OA \cdot OB = OD \cdot OC$. Să se arate că patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil.
- Indicație:* $\triangle OCA \sim \triangle OBD$; din egalitatea $\widehat{OAC}$ și $\widehat{ODB}$, rezultă că $ABCD$ este inscriptibil.
95. În dreptunghiul $ABCD$, $AB = 2AD$. Pe latura DC se ia punctul M și pe latura AD punctul N astfel încît $AN = 2DM$. Să se arate că $AM \perp BN$.
- Indicație:* $\triangle ANB \sim \triangle ADM$; din egalitatea unghiurilor celor două triunghiuri, rezultă că unghiul dreptelor AM și $BN = 90^\circ$.
96. Se prelungesc laturile AB și DC , în același sens, ale unui pătrat de latură „ a ” cu lungimile $BE = \frac{a}{2}$ și $CF = a$. Să se demonstreze că $AF \perp CE$. Să se arate că punctul lor de intersecție M , se află pe cercul circumscris pătratului.
- Indicație:* a) Se va proceda ca la problema precedentă; b) Se observă că $\widehat{CMA} = 90^\circ \Rightarrow M$ se află pe cercul de diametru AC .

97. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic, $\hat{A} = 90^\circ$; $\hat{B} = 90^\circ$, iar intersecția diagonalelor în O . Paralela dusă prin O la baze, se intersectează cu AB în E .

Să se arate că EO este bisectoarea unghiului $\widehat{DEC}$.

Indicație: $\triangle AOD \sim \triangle BOC$ (din proporționalitatea laturilor și Tales) rezultă că $\triangle ADE \sim \triangle BEC$. Se observă că $\widehat{DEO} = \widehat{OEC}$ (se poate aplica și reciproca teoremei bisectoarei).

5. Relații metrice

98. Triunghiul isoscel ABC , $AB = AC = 8$ cm și înălțimea $AD = 6,4$ cm este înscris într-un cerc O .

- Să se calculeze raza cercului.
- Să se determine raza cercului dacă $AB = a$ și $AD = b$.
- Să se determine aria triunghiului ABC .

R. a) $r = 5$ cm;

b) $r = \frac{a^2}{2b}$;

c) $b\sqrt{a^2 - b^2}$.

99. Catetele AB și AC ale unui triunghi ABC sînt respectiv de 15 și 20 de unități de lungime. Să se determine mărimea înălțimii AP duse din virful unghiului drept pe ipotenuză și cele două segmente PB și PC determinate de aceasta pe ipotenuză.

R. $AP = 12$; $PB = 9$;
 $PC = 16$.

100. Catetele unui triunghi dreptunghic au 8 și 15 unități de lungime. Cît de mare este raza cercului înscris în acel triunghi?

R. 3.

101. Într-un triunghi isoscel obtuzunghic ABC ($AB = AC$), baza $BC = 32$ m, iar laturile egale sînt de 20 m. Din punctul A se duce o perpendiculară pe BC ($AE \cap BC = \{E\}$). Să se calculeze lungimea segmentelor AE și CE .

Indicație: $AD^2 + DE^2 = AE^2$, dar $AE^2 = BE \cdot DE$, deci
 $BE \cdot DE = AD^2 + DE^2$.

R. 15 m și 7 m.

102. Trebuie frezată o piesă pătratică cu latura 32 mm. Care este cel mai mic diametru pe care trebuie să-l aibă o bucată rotundă de fier pentru acest scop?

R. ≈ 45 mm.

103. Diametrul unei birne este de 12 cm. Se poate ciopli din ea o grindă pătratică cu latura de 10 cm?

R. Nu.

104. Catetele unui triunghi dreptunghic sînt de 8 dm și 18 cm. Să se determine raza cercului circumscris.

R. 41 cm.

105. Să se afle aria cercului înscris într-un triunghi echilateral ABC cu latura de 6 cm.

R. $3\pi \text{ cm}^2$.

106. Razele a două cercuri sînt de 27 cm și 13 cm, iar distanța dintre centrele lor este de 50 cm. Să se determine lungimea unei tangente exterioare și a uneia interioare (comune).

R. tg. ext. = 48 cm;
tg. int. = 30 cm.

107. Într-un cerc O cu raza de 10 m se duce o coardă MN de 16 m și diametrul AB , perpendicular pe această coardă. Să se calculeze:

- a) distanța de la centrul cercului la coarda MN ;
b) cele două segmente ale diametrului determinate de coardă.

R. a) 6 m; b) 4 m; 16 m.

108. Să se determine aria unui paralelogram știind că una dintre laturile sale este de 51 cm, iar diagonalele sînt de 40 cm și 74 cm.

R. $1\,224 \text{ cm}^2$.

109. Fundul circular al unui butoi este format din 4 scînduri de aceeași lățime. Raza cercului fiind de 30 cm, să se afle aria fiecărei scînduri.

R. două scînduri a câte $552,75 \text{ cm}^2$, alte două scînduri de câte $860,25 \text{ cm}^2$.

110. Arcul descris din vîrfurile A al unghiului drept al unui triunghi dreptunghic ABC , cu o rază egală cu cateta cea mai mică $AB = c$, taie ipotenuza BC în D . Se dau lungimile segmentelor $BD = p$, $DC = q$. Să se determine mărimile $b = AC$ și $c = AB$ ale celor două catete. Să se verifice apoi rezultatul aflat, aplicînd teorema lui Pitagora în triunghiul ABC (fig. I.14).

Indicație: $\triangle ABD$ este isoscel și deci AE înălțimea este și mediană $\Rightarrow BE = ED = \frac{p}{2}$, $EC = \frac{p}{2} + q$. În $\triangle ABC$ aplicînd teorema înălțimii: $\frac{p^2 + 2pq}{4} = AE^2$.

Apoi din $\triangle ABE$ deducem:

$$c^2 = \frac{p^2 + pq}{2}; \text{ și din } \triangle \text{drept } AEC \quad c^2 = \frac{p^2 + 3pq + 2q^2}{2}.$$

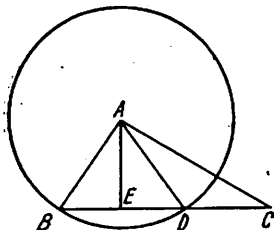


Fig. I.14

111. Perimetrul unui dreptunghi $ABCD$ este de $18\frac{2}{3} \text{ cm}$. Raportul dintre dimensiunile dreptunghiului este $\frac{3}{4}$. Din vîrfurile A al dreptunghiului se duce o perpendiculară pe diagonala BD care intersectează pe BD în O și pe BC în F .
Se cere:

- 1) Perimetrul $\triangle BOF$.
- 2) Valoarea raportului $\frac{OF}{OA}$.
- 3) Aria $AFCD$.

Indicație: $AB^2 = BD \cdot BO$.

- R. 1) 7,2 cm;
 2) $\frac{9}{16}$;
 3) $15 \frac{1}{3} \text{ cm}^2$.

6. Poligoane

112. Se dă un triunghi oarecare ABC . Ducem înălțimea AD ($D \in BC$) iar din D ducem o perpendiculară pe AC , care întâlnește bisectoarea unghiului DAC în O . Să se arate că triunghiul DOM (M fiind piciorul bisectoarei) este isoscel (fig. I.15).

113. Pe cercul circumscris unui triunghi echilateral ABC se ia un punct oarecare M . Să se demonstreze că cel mai mare dintre segmentele MA , MB , MC este egal cu suma celorlalte două.

Indicație: Luăm pe MC punctul D astfel ca $MB = MD$; $\triangle DMB$ este echilateral. Se compară $\triangle AMB$ și $\triangle BDC$ (fig. I.16).

$$\widehat{ABM} = \widehat{BCD} = 60^\circ - \widehat{ABD}$$

$\Rightarrow DC = AM$ (se opun la unghiuri egale în triunghiuri egale).

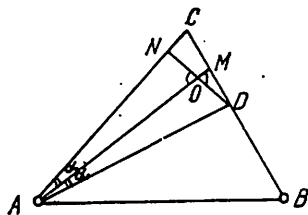


Fig. I.15

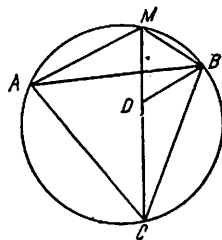


Fig. I.16

114. Să se demonstreze că:

- a) Într-un triunghi dreptunghic lungimea mediane relative la ipotenuză este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.
- b) Dacă un unghi ascuțit are 30° , cateta opusă lui este egală cu jumătate din ipotenuză.

115. Latura l_3 a unui triunghi echilateral este egală cu 10 cm. Să se calculeze care este raza unui cerc a cărui arie este a patra parte din aria cercului în care se poate înscrie triunghiul dat.

R. $\frac{5}{2\sqrt{3}} \text{ cm}$.

116. Se consideră un triunghi dreptunghic ABC cu $\hat{C} = 30^\circ$ și fie O centrul cercului circumscris acestui triunghi. Cateta AB este latura unui triunghi echilateral ABD , înscris în cercul O_1 , secant cu cercul O în A și B . Cateta AC este latura pătratului înscris în cercul O_2 secant cu cercul O în A și C . Să se demonstreze că înălțimea triunghiului echilateral ABD este egală cu apotema pătratului din figură, iar latura pătratului este egală cu latura triunghiului echilateral înscris în cercul O (fig. I. 17).

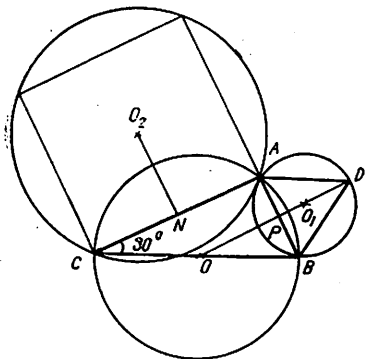


Fig. I. 17

Indicație: Patrulaterul $ACOD$ este un paralelogram
 $\Rightarrow AD = R$; unde R este raza cercului O , iar $AP = \frac{R}{2}$.

În triunghiul dreptunghic ADP avem:

$$DP = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Dar $\triangle BDP = \triangle BOP$, deci: $DO = 2 DP = AC =$
 $=$ latura pătratului din figură. Însă și $NO_2 = \frac{AC}{2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow DP = NO_2$, iar pentru mărimea laturii pătratului
 se observă că subîntinde un arc de 120° în cercul
 inițial adică este tocmai latura triunghiului echilate-
 ral înscris în cercul O .

117. Ce diametru trebuie să aibă un copac, pentru ca prin cioplire să se poată scoate din el un stîlp prismatic cu baza un pătrat a cărui latură să fie de 3 dm?

$$R. 3\sqrt{2} \approx 4,23 \text{ dm.}$$

118. Ce diametru trebuie să aibă un copac, pentru ca prin cioplire să se poată scoate din el un stîlp prismatic cu baza un triunghi echilateral, a cărui latură să fie 4 dm?

$$R. \approx 4,62 \text{ dm.}$$

119. Prin virfurile unui triunghi ABC se duc paralele la fiecare latură. Fie A', B', C' punctele opuse respectiv lui A, B, C . Se unește B cu B' și C cu C' ; $BB' \cap AC = \{E\}$ și $CC' \cap AB = \{D\}$. Să se arate că triunghiul CEB este echivalent cu triunghiul BCD .

Indicație: Se arată că triunghiurile CEB și BDC au aceeași înălțime și au bază comună. Pe de altă parte patrulateralele $ABCB'$ și $ACBC'$ sînt paralelograme.

120. Să se calculeze latura unui triunghi echilateral știind că diferența dintre raza cercului circumscris și a celui înscris este de 24 mm.

$$R. 48\sqrt{3} \text{ mm.}$$

121. Un triunghi echilateral este tăiat prin paralele duse la laturi la $\frac{1}{3}$ din înălțimea socotită de la virf. Să se demonstreze că figura obținută în interiorul triunghiului este un hexagon regulat și să se afle aria acestui hexagon, știind că latura triunghiului dat este de 120 mm.

$$R. 4152 \text{ mm}^2.$$

122. Să se calculeze aria unui triunghi cu laturile de 65 cm, 40 cm și 87 cm.

Indicație: Se aplică de două ori teorema lui Pitagora pentru aflarea înălțimii.

R. 1 224 cm².

123. Capătul unei tije cilindrice cu diametrul de 48 mm trebuie cioplit astfel încât secțiunea să fie pătratul cu latura cea mai mare posibilă. Să se calculeze latura pătratului.

R. ≈ 34 mm.

124. Unui cerc cu raza de 16 cm i se circumscrie un triunghi echilateral, un pătrat și un hexagon regulat. Să se determine lungimile laturilor acestor poligoane cu o precizie de 1 mm.

Indicație: Pentru aflarea laturii triunghiului se vor uni punctele de contact ale laturilor triunghiului cu cercul și se vor folosi proprietățile liniei mijlocii.

R. 55,3 cm; 32 cm; 18,4 cm.

125. Într-un cerc cu raza de 4 cm se înscriu un triunghi echilateral, un pătrat și un hexagon regulat. Să se afle raportul dintre suma laturilor acestor poligoane și suma celor trei apoteme. Să se arate că acest raport nu depinde de raza cercului.

$$R. l_3 + l_4 + l_6 = R(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1),$$

$$a_3 + a_4 + a_6 = R\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Valoarea raportului este totdeauna 2.

126. Latura unui triunghi echilateral este de 6 cm. Să se găsească aria triunghiului și raza cercului circumscris.

R. 15,57 cm²; 3,46 cm.

127. O sală trebuie pardosită cu plăci în forma unui hexagon regulat cu latura de 12 cm. Sala are 7,48 m lungime și 3,25 m lățime. Să se determine numărul de plăci necesare pentru pardosire.

R. 650 de plăci.

128. O tablă de oțel în formă de hexagon regulat cu latura de 60 cm trebuie vopsită pe ambele părți. Să se calculeze cantitatea de vopsea necesară, dacă pentru 6,5 cm² se consumă 1,5 g de vopsea.

R. 4,312 kg.

129. În triunghiul dreptunghic $ABC(\hat{A} = 90^\circ)$, unghiul $B = 60^\circ$ se duce AM mediană, ($M \in BC$). Din M se duc perpendicularele pe AM și pe BC astfel $MN \cap AC = \{N\}$ și $ME \cap AC = \{E\}$.

1) Ce fel de triunghiuri sînt AMN și MEN ?

2) Să se arate că $NE = \frac{AC}{3}$.

130. În triunghiul ABC se duc perpendiculare din A pe bisectoarele interioare și exterioare ale unghiurilor B și C și obținem punctele E, D, N, M . Să se arate că aceste puncte sînt coliniare.

Indicație: Se vor observa dreptunghiurile ce se formează.

131. Elementele poligoanelor regulate înscrise în cerc (hexagon, triunghi, pătrat)

	latura	apotema	aria	aria
triunghi	$R\sqrt{3}$	$\frac{R}{2}$	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$	$\frac{l_3^2\sqrt{3}}{4}$
pătrat	$R\sqrt{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$	$2R^2$	l_4^2
hexagon	R	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3l_6^2\sqrt{3}}{2}$

7. Trigonometrie

132. Valorile funcțiilor trigonometrice ale unghiurilor de 30° , 45° și 60° ; (fig. I.18).

α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Fig. I.18

133. Pe un teren înclinat al unei cooperative agricole de producție trebuie să se planteze pomi care să aibă între ei o distanță de 5 m. La ce distanță trebuie săpate gropile pentru sădirea pomilor dacă panta are o înclinare de 31° față de orizontală?

R. 5,83 m.

134. Un coș de fabrică înalt de 30 m lasă o umbră de 45 m. Să se afle înălțimea soarelui deasupra orizontului, în momentul cînd s-a măsurat umbra.

R. $\approx 33^\circ 30'$.

135. Cîtă tablă este necesară pentru confecționarea unui acoperiș cu două pante al unei hale dreptunghiulare de 30 m lungime și 10 m lățime, știind că panta acoperișului este de 40° și că pentru încheierea tablei se mai adaugă 5% material.

Indicație. Fiecare pantă formează un dreptunghi (fig. I.19) cu dimensiunile $a = 30$ m și b , care se poate calcula din triunghiul dreptunghic ABC (hașurat), în care avem: $BC = 5$ m și unghiul $ACB = 40^\circ$.

$$R. 2 \cdot 195,6 + \frac{5}{100} (2 \cdot 195,6) \approx 411 \text{ m}^2.$$

136. Un vagonet cîntărește încărcat 300 kg. Cu ce forță trebuie împins vagonetul pe un plan înclinat cu 17° față de sol pentru ca vagonetul să se urnească din loc?

$$R. 8,76 \text{ N}.$$

137. Dintr-un punct aflat la distanța $a = 86,6$ m de centrul bazei unui turn vizăm turnul sub unghiul $22^\circ 30'$. Să se calculeze înălțimea turnului.

$$R. 35,8 \text{ m}.$$

138. O cale ferată se ridică la fiecare 30 m de șine cu o cotă de 1 m. Să se afle unghiul de urcare.

$$R. \approx 2^\circ.$$

139. Un elicopter se află la 1 700 m deasupra unei ținte a cărei poziție o semnalează aeroportul. În acel moment observatorul citește unghiul direcției elicopterului cu orizontul de 35° . Să se afle distanța (în linie orizontală) de la aeroport la elicopter.

$$R. 2\,427,6 \text{ m}.$$

140. În capătul A al unei macarale de perete este atârnată o greutate P de 900 N. Barele AB și AC ale macaralei formează un unghi de 40° (fig. I. 20). Să se determine efortul din bare.

Indicație. Forța P se descompune în două componente după direcțiile barelor P_1 (forța ce întinde bara AB), P_2 (forța ce comprimă bara AC).

$$R. P_1 = P \operatorname{ctg} 40^\circ = 1\,073 \text{ N}; P_2 = 1\,400 \text{ N}.$$

141. Să se afle lungimea proiecției unui segment. $AB = a$ pe o dreaptă $x'x$, care face cu AB un unghi dat α . (Aplicație $a = 21$ m, $\alpha = 25^\circ$.)

$$R. A'B' = 21 \cos 25^\circ = 21 \cdot 0,906 = 19,03 \text{ m}.$$

142. O scară de piatră este formată din trepte care au lățimea $l = 27$ cm și înălțimea $a = 18$ cm. Să se calculeze unghiul pe care îl face scara cu direcția orizontului.

$$R. \approx 33^\circ 30'.$$

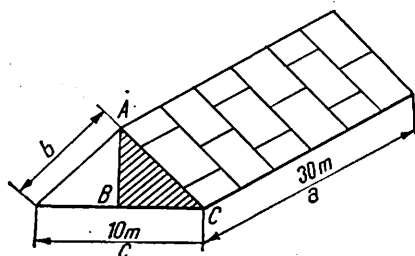


Fig. I.19

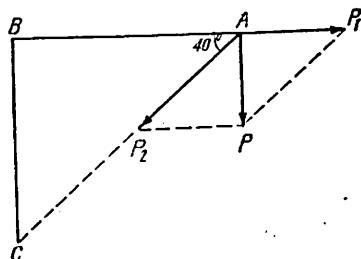


Fig. I.20

143. Într-un trapez isoscel, diferența bazelor este de 2 cm, iar linia mijlocie este de 6 cm. Latura ne paralelă face cu baza un unghi de 60° . Să se calculeze:
 1) Bazele trapezului.
 2) Aria trapezului.

R. 7 cm; 5 cm; $6\sqrt{3}$ cm².

144. Un cerc cu raza R este circumscris unui pentagon regulat. Să se afle latura, apotema și aria pentagonului.

Indicație: Se folosește triunghiul dreptunghic care are ipotenuza R , iar catete apotema poligonului și jumătatea laturii.

R. Notînd cu l_5 , a_5 , A_5 elementele cerute, obținem:

$$l_5 = 2R \sin 36^\circ;$$

$$a_5 = R \cos 36^\circ;$$

$$A_5 = 5R^2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ.$$

145. I. Două terenuri în formă de dreptunghi au fost inundate parțial, așa cum se vede în figura I.21 *a* și *b*. Bazele fiind inaccesibile, s-a putut măsura la primul teren lățimea de 180 m, care se vede din punctul A sub unghiul de $32^\circ 30'$. II. La terenul al doilea s-a putut măsura lungimea de 160 m, care este văzută tot din punctul A sub unghiul de 34° . Să se afle aria celor două terenuri.

R. I. 50 862,60 m²; II. 17 254,40 m².

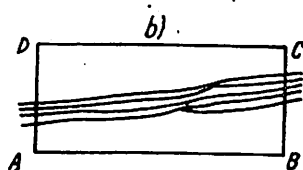
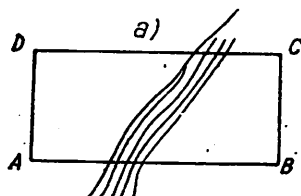


Fig. I.21

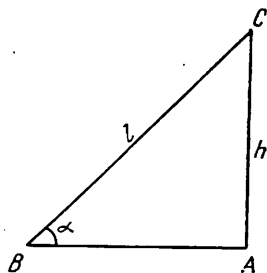


Fig. I.22

146. O scindură lungă de 42,6 dm este sprijinită pe un prag înalt de 180 cm spre a servi ca plan înclinat pentru rostogolirea pe ea a unui butoi greu, care trebuie ridicat peste prag. Să se determine unghiul ce-l face scindura cu pavajul orizontal al curții.

R. 25° .

147. O scară BC de lungime dată L este rezemată de o podea orizontală AB și de un perete vertical AC (fig. I.22). Se cunoaște unghiul α pe care scara BC îl face cu orizontala AB . Se cere să se afle înălțimea $AC = h$ pe care o putem atinge cu această scară, precum și distanța $AB = k$ a extremității B a scării de la piciorul A al zidului. (Aplicație numerică: $L = 5,20$ m; $\alpha = 68^\circ 30'$.)

R. $h = 4,836$ m; $k = 1,908$ m.

142. Un drum în linie dreaptă este înclinat față de orizontala AB cu unghiul α . Se cere să se calculeze lungimea acestui drum și înclinarea sa α deasupra orizontalei, când se cunoaște $AB = 589$ m; $h = 121,5$ m (fig. I.23).

$$R. \alpha \approx 11^\circ 30';$$

$$L = 601,4 \text{ m.}$$

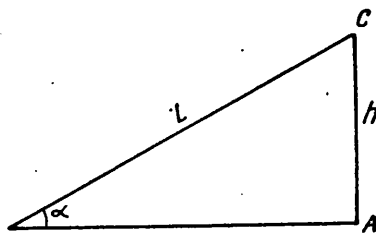


Fig. I.23

8. Arit

148. Fie ABC un triunghi echilateral și M un punct arbitrar pe latura BC , ($M \in BC$). Fie ME și MF distanțele de la punctul M la laturile AB și AC . Să se arate că suma $ME + MF$ este constantă și egală cu înălțimea triunghiului dat (fig. I.24).

Indicație: Să unim pe M cu A și să scriem că

$$\text{aria } \triangle(CMA) + \text{aria } \triangle(BMA) = \text{aria } \triangle(ABC)$$

$$\Rightarrow \frac{AC \cdot ME}{2} + \frac{AB \cdot MF}{2} = \frac{AC \cdot BH}{2},$$

unde H este piciorul perpendicularei pe AC din B .

Observare. Considerațiile de mai sus rămân valabile și în cazul triunghiului isoscel (când $AB = AC$); atunci valoarea constantei este egală cu una dintre cele două înălțimi ce se pot duce din vîrful unghiurilor egale ale triunghiului.

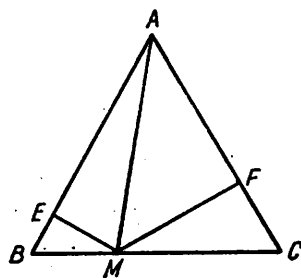


Fig. I.24

149. Se consideră un hexagon regulat $ABCDEF$ de latură l . Se construiește pe fiecare latură a sa, în exterior, câte un triunghi echilateral. Se obține în modul acesta un poligon cu 12 laturi în formă de stea. Se cere să i se afle aria. Să se afle apoi latura unui alt hexagon care are aria egală cu aria poligonului cu 12 laturi.

Indicație: Aria poligonului în formă de stea se compune din aria hexagonului de latură 1 și ariile a șase triunghiuri echilaterale de aceeași latură.

Observații. Latura noului hexagon este cit latura unui pătrat înscris în același cerc în care se poate înscrie hexagonul $ABCDEF$, ceea ce ne permite să-l construim cu rigla și cu compasul.

$$R. \text{ Aria poligonului cu 12 laturi este } 3l^2\sqrt{3}.$$

150. Să se arate că aria unui hexagon regulat este dublul ariei triunghiului echilateral înscris în același cerc cu el. Presupunind că latura triunghiului echilateral este de 3 cm, cit este de mărimea ariei pătratului înscris în același cerc?

$$R. A_4 = 6 \text{ cm}^2.$$

151. Se dă un octogon regulat $ABCDEFGH$. Să se calculeze aria cuprinsă între acest octogon și pătratul $BDFH$, presupunind că se cunoaște raza R a cercului circumscris octogonului.

Indicație: Pentru a înscrie un octogon într-un cerc, înscriem în prealabil un pătrat $BDFH$ și prelungim apotemele acestuia până taie cercul. Se obțin astfel 4 puncte care împreună cu virfurile pătratului determină virfurile octogonului regulat.

$$R. 2(\sqrt{2} - 1)R^2.$$

152. Se împart laturile unui pătrat $ABCD$ cu latura l în cîte patru părți egale și se taie colțurile pe la primele diviziuni; se obține un octogon (fig. I.25).

Se cere:

- Să se calculeze aria și perimetrul.
- Cît este de mare înălțimea ce pleacă din virful unghiului obtuz al unui triunghi arătat în figură prin RPM unde R este mijlocul laturii PQ a octogonului?

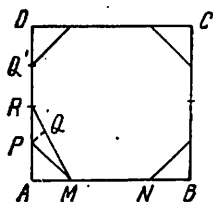


Fig. I.25

Indicație: Cele patru triunghiuri tăiate de la colțuri sînt dreptunghice isoscele egale. Deci este suficient să calculăm, de exemplu, aria triunghiului dreptunghic isoscel PMA cu catetele egale cu $\frac{l}{4}$.

Apoi perimetrul căutat va fi:

$$P = 4MN + 4MP = l(2 + \sqrt{2}).$$

Pentru calculul înălțimii PQ ne vom folosi de aria triunghiului RPM . Aria unui triunghi de felul lui RPM se află, luînd ca bază, de exemplu, RP și ca înălțime pe MA . Aceeași arie se poate afla luînd ca bază pe MR și ca înălțime pe PQ .

$$RM = \sqrt{AR^2 + AM^2} = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{16}} = \frac{l\sqrt{5}}{4}.$$

Prin compararea ariilor

$$\Rightarrow PQ = \frac{1}{4\sqrt{5}}.$$

$$R. 1) \frac{7l^2}{8}; l(2 + \sqrt{2}); 2) \frac{l}{4\sqrt{5}}.$$

153. La o cooperativă agricolă de producție s-a obținut, folosindu-se îngrășămintă chimice, un spor de recoltă de 360 kg de porumb la hectar. În prealabil s-a făcut experiență pe o tarla ce avea formă de trapez isoscel, cu laturile $AB = 70$ m, $AC = BD = 280$ m și $CD = 406$ m. Care a fost sporul de porumb obținut pe această tarla?

Indicație: Fie AE și BF înălțimile trapezului duse din A și B pe baza mare CD ; $CE + FD = 406 - 70 = 336$ m. Cum $CE = FD \Rightarrow$ că fiecare din acestea au o lungime de $\frac{336}{2} = 168$ m.

$$AE^2 = 280^2 - 168^2 = (280 - 160)(280 + 168) = 112 \cdot 448$$

Observăm că $448 = 4 \cdot 112$, astfel că putem scrie:

$$AE^2 = 112 \cdot 112 \cdot 4; AE = 224.$$

$$R. 1\ 919,232 \text{ kg porumb.}$$

154. a) Să se afle perimetrul și aria unui romb, $ABCD$, ale cărui diagonale sînt $AC = 60$ cm și $BD = 80$ cm. Să se afle distanța dintre laturile paralele ale rombului.

b) Fie A mulțimea ale cărei elemente sînt factorii primi ai c.m.m.m.c. ai numerelor ce reprezintă diagonalele și distanța cerută mai sus. Fie B și C mulțimile ale căror elemente sînt factorii primi ai numerelor ce reprezintă diagonala mare și diagonala mică. Să se determine $C_A B = A - B$. Să se determine $(A \cap B) \cup C$ și $(A \cup C) \cap B$.

R. a) $P = 200$ cm; 48 cm;
b) $\{3\}$; $\{2; 3; 5\}$; $\{2; 5\}$.
Aria = 2 400 cm².

155. Un teren de sport este format dintr-un dreptunghi $ABCD$ și două semicercuri cu diametrul cit lățimea dreptunghiului. Lungimea dreptunghiului este de 172 m, iar lungimea unui semicerc este de 329,70 m. Cîtă sămînță de iarbă este necesară pentru a însămînța tot terenul dacă la 1 m pătrat se folosesc 12 g de sămînță?

R. 848 862 g.

156. a) Să se calculeze aria unui cerc O , în care o coardă AB are lungimea de 8 cm și săgeata sa CD e lungă de 3 cm.

b) Fie $\{m, n, p\}$ trei puncte distincte pe OC și $\{a, b, c\}$ trei puncte pe DC . Să se pună în evidență proprietatea comună a acestor puncte.

R. a) $\frac{625\pi}{36}$ cm².

b) Toate punctele sînt egal depărtate de A și B .

157. Distanța dintre centrele O_1 și O_2 a două cercuri egale este egală cu raza R a cercurilor. Să se calculeze aria comună a celor două cercuri în funcție de R . Aplicație: $R = 6$ cm.

Indicație: Fie C și C_1 cele două cercuri $C \cap C_1 = \{A, B\}$.

Fie I punctul unde coarda comună taie linia centrelor O_1, O_2 . Cum ariile segmentelor de cerc O_1AB și O_2AB sînt egale, problema revine la a calcula una din ele. Aria sectorului circular AO_1B este a treia parte din aria cercului:

$$\text{rezultă: } A_{\text{segm}} = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = R^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

iar aria comună celor două cercuri este $2A_{\text{segm}} = R^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.

În particular, dacă $R = 6$ cm;

$$2A = (24\pi - 18\sqrt{3}) \text{ cm}^2.$$

158. Să se împartă prin cercuri concentrice, un cerc cu raza r în patru părți echivalente (de aceeași arie) (fig. I. 26).

Indicație: Să notăm cu x, y, z razele OE, OD, OB ale celor trei cercuri concentrice cerute. Ariile acestor cercuri sînt: $\pi x^2, \pi y^2, \pi z^2$. Se vor studia relațiile dintre ele.

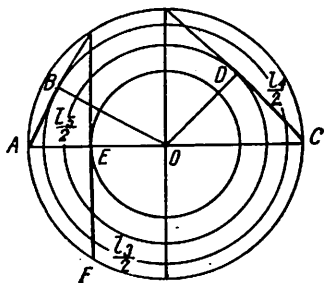


Fig. I.26

159. Se dă un triunghi dreptunghic cu catetele c și b iar ipotenuza a . Să se afle ariile triunghiurilor ABD și BDC obținute prin ducerea bisectoarei BD a unghiului ascuțit B .

Indicație: Aria ABD = aria ABC - aria BDC = $\frac{bc}{2} - \frac{ac(a-c)}{2b} =$
 $= \frac{b^2c - ac(a-c)}{2b} = \frac{c(b^2 - a^2 + ac)}{2b}$.

160. Într-un cerc cu raza de 6,5 m se duce un diametru AB , pe care se ia distanța $AM = 4$ m, iar din M se ridică o perpendiculară care întâlnește cercul într-un punct N . Să se calculeze aria triunghiului NAB .

R. 39 cm².

161. Să se construiască un hexagon regulat cu latura de 2 cm și pe fiecare latură a lui să se construiască, în afară, câte un pătrat. Se unesc virfurile pătratelor necomune cu hexagonul și se obține un poligon cu 12 laturi. Să se arate că este regulat și să i se calculeze aria.

Indicație: Aria cerută se compune din aria hexagonului cu latura de 2 cm, la care se adaugă aria a șase pătrate egale, având latura de câte 2 cm, și aria a șase triunghiuri echilaterale având latura de 2 cm.

R. $12(2 + \sqrt{3})$ cm².

162. Latura BC a unui triunghi ABC cu aria de 240 cm², se împarte în 6 părți egale astfel: BM, MN, NP, PD, DE și EC . Latura AC se împarte în 4 părți egale, astfel: AF, FG, GH, HC . Să se afle aria patrulaterului $GHEP$.

R. 50 cm².

163. Să se calculeze apăsarea exercitată de abur asupra pistonului unei mașini, știind că diametrul pistonului este de 9 cm și că presiunea medie este de 3 at (presiunea de 1 at este egală cu 1 kgf/cm²).

R. 190,75 kgf.

164. O persoană, care face 150 de pași pe minut, a parcurs diagonala unei piețe publice, în formă de pătrat, în 40 secunde. Care este aria pieței? Care ar fi latura unei piețe de aceeași arie cu aceasta, însă având forma unui hexagon regulat? (Se va socoti că la 125 de pași corespunde 1 hm.)

R. 3 200 m²; $\frac{80}{\sqrt{3}\sqrt{3}}$.

165. Fie D și d diagonalele unui romb de latură l , ce are un unghi de 150°. Să se arate că în acest romb există relația: $l^2 = D \cdot d$.

166. Laturile consecutive ale unui paralelogram sînt de 5 cm și 6 cm iar aria lui este de 24 cm². a) Să se afle cu cît la sută crește aria acestui paralelogram, dacă laturile consecutive ale acestui paralelogram cresc fiecare cu câte 5 cm. b) Să se arate că diagonala paralelogramului inițial este egală cu una din laturile paralelogramului.

R. 267% prin adaos.

IV. Probleme și exerciții recapitulative

1. Care este unghiul al cărui suplement este de n ori mai mare decât complementul său. Cazuri particulare: $n = 4$, $n = 5$.

$$R. \frac{90(n-2)}{n-1}; 60^\circ; 67^\circ 30'.$$

2. Dintre cele trei unghiuri ale unui triunghi ABC , al doilea îl întrece pe cel dintâi cu 40° și al treilea pe cel de-al doilea cu aceeași cantitate. Se cer unghiurile triunghiului.

$$R. A = 20^\circ; B = 60^\circ; C = 100^\circ.$$

3. Unul din unghiurile unui triunghi este de n° , iar diferența celorlalte unghiuri este de m° . Să se determine unghiurile triunghiului. Caz particular: $n^\circ = 40^\circ$; $m^\circ = 18^\circ$.

$$R. A = 40^\circ; B = 79^\circ; C = 61^\circ.$$

4. Laturile unui triunghi sînt de 3 m, 4 m și 6 m. Perimetrul unui alt triunghi asemenea cu primul este de 26 m. Să se determine lungimile laturilor acestui triunghi.

$$R. 6 \text{ m}; 8 \text{ m}; 12 \text{ m}.$$

5. Lungimea unui dreptunghi este cu un metru mai mare decât lățimea lui. Micșorînd amîndouă dimensiunile cu cîte un metru, aria dreptunghiului scade cu 12 metri pătrați. Se cer dimensiunile dreptunghiului.

$$R. 6 \text{ m}; 7 \text{ m}$$

6. Să se calculeze dimensiunile unui dreptunghi știind că, dacă mărim baza cu 2 cm și micșorăm înălțimea cu 1 cm, aria se mărește cu 2 cm^2 , iar dacă micșorăm baza cu 1 cm și mărim înălțimea cu 1 cm, aria să rămîne neschimbată.

$$R. 6 \text{ cm}; 5 \text{ cm}.$$

7. Cît de mare trebuie să fie înălțimea unui dreptunghi, pentru ca aria lui să crească cu 16 m^2 , dacă mărim baza cu o cantitate egală cu înălțimea?

$$R. 4 \text{ m}.$$

8. Se dau două dreptunghiuri. Baza unuia este de 5 cm, iar a celuilalt este de 4 cm. Suma ariilor lor este de 42 cm^2 . Dacă mărim baza primului dreptunghi de două ori, iar baza dreptunghiului al doilea cu 1 cm, fără să schimbăm înălțimile lor, suma ariilor dreptunghiurilor obținute este cu 33 cm^2 mai mare decât suma ariilor dreptunghiurilor inițiale. Să se afle înălțimea fiecăruia din aceste dreptunghiuri.

$$R. 6 \text{ cm}; 3 \text{ cm}.$$

9. Să se determine dimensiunile unui dreptunghi cunoscînd mărimea $2p$ a perimetrului său și raportul $\frac{m}{n}$ dintre baza și înălțimea sa.

$$R. \frac{pm}{m+n}; \frac{pn}{m+n}$$

10. Două laturi omoloage a două poligoane asemenea sînt respectiv de 15 m și 5 m, iar diferența dintre perimetrele lor este de 60 m. Să se determine perimetrele celor două poligoane.

R. 30 m; 90 m.

11. Raportul dintre lungimile b și c ale celor două catete AC și AB ale unui triunghi dreptunghic este $\frac{5}{6}$, iar ipotenuza BC are lungimea de 122 cm. Să se afle lungimea segmentelor determinate de înălțimea AD pe ipotenuză.

R. 72 cm; 50 cm.

12. Raportul catetelor unui triunghi dreptunghic este $\frac{3}{4}$, iar lungimea ipotenuzei este de 175 cm.

Să se afle lungimile celor două catete și diferența dintre cele două segmente determinate pe ipotenuză de înălțimea ce pleacă din vârful unghiului drept.

R. 140 cm; 105 cm; 49 cm.

13. Să se înscrie un pătrat $EFGH$ într-un triunghi ABC , a cărui bază BC este = 10 cm, iar înălțimea este de 6 cm astfel ca virfurile E și F ale pătratului să fie pe latura BC a triunghiului iar virfurile G și H pe laturile AC și AB .

R. $l_4 = 3,75$ cm.

14. Un trapez are bazele de 8 m și 26 m; înălțimea de 3 m. La o distanță de 2 m de baza mare se duce o paralelă EF la baza mare, care determină două trapeze. Să se afle ariile celor două trapeze.

R. 40 m²; 11 m².

15. Distanța cea mai mare dintre punctele a două cercuri concentrice este de a cm, iar distanța cea mai mică este de b cm. Să se determine razele celor două cercuri. Caz numeric $a = 18$ cm; $b = 10$ cm.

R. 14 cm; 4 cm.

16. Dacă între mulțimile A, B, C avem relația $A \subset B \subset C$, să se arate că:

a) $A \cup (B \cap C) = B \cup (A \cap C)$; $B \cap (A \cup C) = C \cap (A \cup B)$;

b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

c) $C \cup (A \cap B) = (C \cup A) \cap (C \cup B)$.

17. Să se determine numărul laturilor pe care trebuie să le aibă un poligon pentru ca suma unghiurilor lui să fie de patru ori mai mare decît aceea a unui alt poligon, care are un număr de laturi de două ori mai mic decît primul.

R. 6 laturi.

18. O catetă a unui triunghi dreptunghic este de 15 m. Să se afle ipotenuza presupunînd: 1) că a doua catetă este cu 5 m mai scurtă decît ipotenuza; 2) că ea este $\frac{4}{5}$ din ipotenuză.

R. 25 m.

19. Se dă un triunghi dreptunghic ABC cu catetele de 3 cm și 4 cm. Se duce bisectoarea unghiului drept A care taie ipotenuza în D . Să se calculeze lungimile segmentelor BD și DC .

$$R. \frac{20}{7} \text{ și } \frac{15}{7} \text{ cm.}$$

20. Într-un triunghi isoscel ($AB = AC$), înălțimea dusă din A pe baza BC este de 4 m, iar înălțimea dusă din vârful B pe AC este de 4,8 m. Să se determine laturile triunghiului.

$$R. 5 \text{ m; } 6 \text{ m.}$$

21. Se dă triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$), cu baza $BC = 8$ cm și înălțimea $AD = 3$ cm. Din piciorul D al înălțimii duse din A se duc $DE \parallel AB$ și $DF \parallel AC$, $E \in AC$, $F \in AB$. Diagonalele paralelogramului $AFDE$ se taie în O . a) Să se arate că înălțimea BM dusă din B pe AC este de patru ori mai mare decât distanța OH de la O la latura AC . b) Să se calculeze lungimea lui OH .

Indicații:

- a) Se folosește proprietatea liniei mijlocii a triunghiului;
b) Se folosește asemănarea triunghiurilor AHO și ACD .

$$R. b) OH = \frac{6}{5}.$$

22. Un trapez $ABCD$ are bazele $AB = 24$ m, $CD = 15$ m, iar înălțimea 6 m. Se cere: a) înălțimea triunghiului CED format din baza mică a trapezului cu prelungirea laturilor neoparalele ale acestuia; b) să se deducă în ce raport trebuie să fie bazele unui trapez pentru ca înălțimea triunghiului considerat să fie un sfert din înălțimea trapezului.

$$R. a) 10 \text{ m; } b) \frac{1}{5}.$$

23. Perimetrul unui triunghi este $\frac{11}{13}$ din perimetrul unui alt triunghi asemenea cu el. Diferența dintre două laturi omoloage este de 1 m. Să se determine aceste laturi.

$$R. 6,5 \text{ m și } 5,5 \text{ m.}$$

24. Raportul dintre catetele unui triunghi dreptunghic este $3 : 2$, iar înălțimea împarte ipotenuza în două segmente, din care unul este cu 2 m mai mare decât celălalt. Să se determine ipotenuza.

$$R. 5,2 \text{ m.}$$

25. Perimetrul unui dreptunghi este 40 m. Știind că lungimea este cu 5 m mai mare decât lățimea, să se calculeze lungimea dreptunghiului.

$$R. 12,5 \text{ m.}$$

26. Perimetrul unui dreptunghi este egal cu p , iar diferența laturilor neegale este egală cu d . Să se determine laturile dreptunghiului. Aplicație numerică: $p = 60$, $d = 20$.

$$R. 25; 5.$$

27. Laturile unui patrulater oarecare sînt proporționale cu numerele $1; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}$ și 2. Perimetrul unui patrulater asemenea cu el este de 75 m. Să se determine laturile patrulaterului al doilea.

R. 18; 9; 12; 36.

28. Laturile unui patrulater sînt de 10 dm, 15 dm, 20 dm, 25 dm. Într-un patrulater asemenea cu el, latura cea mai mare adăugată la cea mai mică ne dă 28 dm.

Să se determine mărimile laturilor celui de-al doilea patrulater.

R. 8; 12; 16; 20 dm.

29. Una din bazele unui trapez este egală cu 10 m, înălțimea este de 4 m, iar aria de 32 m^2 . La o distanță de 1 m de baza dată, se duce o paralelă cu ea între cele două baze. Se cere lungimea acestei paralele.

R. 9 m.

30. Raza unui cerc este de 25 cm; două coarde paralele sînt de 14 cm și 40 cm. Să se determine distanța dintre ele. Se vor considera două cazuri:

- a) coarde de aceeași parte a centrului și
b) opuse față de centru.

R. 9 cm; 39 cm

31. Aria laterală a unui paralelipiped dreptunghic este de 72 m^2 . Înălțimea lui este de 60 dm, iar una din dimensiunile dreptunghiului de bază este de $\frac{1}{2}$ din cealaltă. Să se afle dimensiunile bazelor acestui paralelipiped.

R. $\begin{cases} 2 \text{ m} \\ 4 \text{ m} \end{cases}$

32. Să se construiască triunghiul ABC cînd se cunosc:

- a) Înălțimea $AD (D \in BC)$;
b) Distanța DE a punctului D la latura AC ;
c) Ortocentrul H al triunghiului.

33. Să se arate că: $12012_3 + 12302_4 + 11034_5 + 1555_6 = 1774_{10}$.

34. Să se calculeze aria unui triunghi dreptunghic, știind că o catetă este egală cu 27 m, iar cealaltă este cu 9 m mai mică decît ipotenuza.

R. $A = 486 \text{ m}^2$.

35. Un trapez are baza mare de 32 m, baza mică de 24 m și înălțimea de 15 m. Să se calculeze aria triunghiului format din baza mică și prelungirea laturilor neparalele.

R. $A = 540 \text{ m}^2$.

36. Într-un trapez cu baza mare de 35 m, baza mică de 20 m și înălțimea de 12 m se duce o dreaptă lungă de 31 m, paralelă cu bazele, limitată de laturile neparalele. Să se calculeze distanța de la această dreaptă la baza mare.

R. 3,20 m.

37. Se dă triunghiul dreptunghic ABC (unghiul drept în A) în care unghiul C are 60° . În punctul C se duce dreapta (d) perpendiculară pe BC . Prelungirea laturii AB întâlnește această dreaptă în C' iar perpendiculara în B pe AB întâlnește dreapta d în C'' . Segmentul CC'' este de $12\sqrt{3}$ cm. Să se afle: Aria patrulaterului $C'BC''B'$ (B' fiind simetricul lui B față de dreapta (d)).

$$R. 1728\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

38. În triunghiul ABC , latura $AC = 12,5$ cm, iar înălțimea $AD = 10$ cm. Pe latura AB se ia un punct M astfel încît să avem $BM : MA = \frac{1}{4}$.

Prin M se duce paralela la AC și perpendiculara pe BC , care determină pe BC , respectiv, punctele N și P . Fie P' simetricul lui P față de N . Paralela la MP' dusă prin P taie dreapta MN în Q .

- Să se arate că patrulaterul $MPQP'$ este paralelogram;
- Să se calculeze lungimile laturilor și diagonalelor paralelogramului $MPQP'$;
- Prelungirea dreptei NM întâlnește tangenta în A la cercul circumscris triunghiului ABC , în punctul T . Să se arate că triunghiurile ATM și ABC sînt asemenea.

$$R. \text{ b) } MP = QP' = 2; PQ = P'M = \sqrt{13}; PP' = 3; MQ = 5.$$

39. Fie triunghiul dreptunghic ABD ($A = 90^\circ$) în care sînt date AD de 15 cm și tangenta unghiului B de $3/4$.

Înălțimea corespunzătoare ipotenuzei întâlnește paralela dusă prin B la cateta AD în C și ipotenuza în I . Paralela dusă prin I la AD întâlnește pe AB și CD respectiv în M și N .

- Să se afle laturile și diagonalele trapezului $ABCD$.
- Să se arate că $MI = IN$.

$$R. BC = 80/3 \text{ cm}; AB = 20 \text{ cm}; BD = 25 \text{ cm};$$

$$CD = 5\sqrt{139}/3 \text{ cm}; AC = 33\frac{1}{3} \text{ cm}.$$

40. Într-un trapez $ABCD$ raportul dintre baza mică și baza mare este de $1/3$, iar înălțimea este de 6 cm. Laturile neparalele prelungite se întîlesc în punctul F . Să se afle distanța de la acest punct la fiecare bază.

$$R. 3; 9.$$

41. Fie paralelogramul $ABCD$ în care $AB = 2 \cdot BC$ și unghiul $A = 60^\circ$. Notăm cu M mijlocul laturii CD . Dreapta AM intersectează diagonala DB în E .

Se cere:

- Să se demonstreze că triunghiul BCM este echilateral.
- Să se arate că $ABDM$ este un trapez înscris în cercul de diametru AB .
- Triunghiurile ADB și AMB sînt dreptunghice egale.
- Dacă $DB = 5\sqrt{3}$ cm, să se afle perimetrul triunghiului DEM .

$$R. \text{ d) } \frac{5}{3}(3 + 2\sqrt{3}) \text{ cm}.$$

42. Fie cercul de centru O și rază R în care se construiește diametrul CD și perpendiculara în P (mijlocul lui OD) pe CD intersectează cercul în A și B .

a) Să se arate că coarda AD este egală cu raza R .

b) Să se arate că $AP = \frac{BC}{2}$.

c) Să se arate că $AD + PD = PC$.

d) Să se calculeze raportul $\frac{BC}{AD}$.

e) Să se arate că $(\sin \widehat{PCB})^2 + (\sin \widehat{PDA})^2 = 1$.

f) Dacă M este mijlocul lui BC și E este proiecția lui P pe AD , atunci punctele M , P și E sint coliniare.

R. d) $\frac{BC}{AD} = 2$.

43. Se dă ecuația: $(5x - 6)^{371} \cdot (6x - 7)^{370} \cdot (7x - 8)^{369} = 1$ și mulțimea $A = \{2; 3; 4\}$.

Care din valorile lui x , $x \in A$ sint soluții ale ecuației date?

44. Se consideră un triunghi ABC în care $AB + AC = 12$ cm și $\widehat{BAC} = 48^\circ$. Fie D simetricul punctului B față de dreapta AC și E simetricul punctului C față de dreapta AB .

a) Să se afle lungimea liniei frunte EAD .

b) Să se afle unghiul EAD .

c) Cite grade trebuie să aibă unghiul ACB pentru ca semidreptele AE și AD să fie în prelungire?

R. 12 cm; 144° ; 60° .

45. Prin vârful A al unui triunghi isoscel ($AB = AC$) se duce o dreaptă (D) care taie pe BC în M și cercul circumscris triunghiului în N .

Să se arate că:

a) Triunghiurile ABM și MCN sint asemenea.

b) AB este medie geometrică a segmentelor AM și AN .

c) $\frac{AM}{NA} = \left(\frac{CM}{CN}\right)^2$ și $\frac{AM \cdot AN}{CN^2} = \left(\frac{MB}{MN}\right)^2$.

46. Se consideră triunghiul oarecare ABC . Fie M un punct oarecare în interiorul segmentului BC . Perpendicularele în B și C respectiv pe BC taie perpendiculara dusă în A pe AM respectiv în B' și C' . Să se arate că triunghiurile ABC și $B'MC'$ sint asemenea.

47. Se dă triunghiul dreptunghic ABC cu catetele $AB = c$ cm și $AC = b$ cm. Notăm cu O mijlocul laturii BC . Paralelele la AO duse respectiv prin B și C întîlnesc perpendiculara din A pe AO respectiv în B' și C' .

a) Să se arate că AC este bisectoarea unghiului OCC' iar AB bisectoarea unghiului OBB' .

b) Să se arate că AB' este medie proporțională între segmentele CC' și BB' . Care triunghiuri formate sint asemenea între ele?

c) Să se calculeze perimetrul patrulaterului $B'BCC'$ în cazul cînd

$AB = 12$ cm și $AC = 18$ cm.

R. c) 59,2 cm.

48. Se dă: $f(x) = 8 : \left(\sqrt{\frac{245}{5}} \cdot \frac{4}{7} - x \right)$.

Să se determine mulțimea M , unde $M = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ și } f(x) \in \mathbb{Z}\}$.

R. $M = \{+12; +8; +6; +5; +3; -12; 0\}$.

49. În triunghiul ABC , unghiurile sînt proporționale cu numerele 2, 3, 13.

a) Să se calculeze unghiurile și să se construiască triunghiul știind că latura $AB = 12$ cm.

b) În acest triunghi se duce bisectoarea unghiului $\widehat{ABC}$ la înălțimea din A , care se întîlnesc în punctul D . Să se calculeze unghiurile triunghiului ADB .

c) Fie F simetricul punctului A față de dreapta BC . Să se calculeze laturile triunghiului ABF .

d) Să se arate că triunghiul ABC este echivalent cu triunghiul BCF .

R. a) $20^\circ; 30^\circ; 130^\circ$; b) $15^\circ; 60^\circ; 105^\circ$;

c) echilateral; $l = 12$ cm.

50. Din punctul P exterior cercului (O) , se duc tangentele PA și PB astfel că triunghiul PAB este echilateral.

a) Să se calculeze unghiurile patrulaterului $PAOB$ și să se exprime perimetrul lui în funcție de raza R a cercului (O) .

b) Să se demonstreze că cercul circumscris triunghiului PAB este egal cu cercul (O) și apoi să se facă construcția grafică a întregii figuri (folosind numai compasul și rigla negradată).

R. $P = 60^\circ$; $D = 120^\circ$; $2R(\sqrt{3} + 1)$.

51. Se consideră două cercuri tangente — exterioare în A . Notăm cu O_1 și O_2 centrele celor două cercuri și cu R și r razele lor (R mai mare ca r). Fie apoi B și C punctele de contact ale unei tangente comune exterioare și O mijlocul segmentului BC . Paralela dusă prin O_2 la BC taie raza O_1B în D . Se cere:

a) Să se arate că patrulaterul BCO_2D este dreptunghi și să se deducă apoi că avem $BC = 2\sqrt{Rr}$.

b) Să se arate că triunghiurile ABC și OO_1O_2 sînt dreptunghice și asemenea între ele.

c) Folosind asemănarea precedentă să se calculeze laturile triunghiului ABC în funcție de razele R și r ale celor două cercuri.

d) Aplicație numerică $R = 9$, $r = 4$.

R. d) $AB = \frac{36\sqrt{13}}{13}$, $AC = \frac{24\sqrt{13}}{13}$; $BC = 12$.

52. Se dă $f(x) = \frac{9}{x+1}$, $x \in \mathbb{Z}$.

Să se determine mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid f(x) \in \mathbb{Z}\}$.

R. $A = \{-10; -4; -2; 0; 2; 8\}$.

53. Fie M un punct pe diagonala AC a trapezului $ABCD$ (AB baza mare) și MP , MN paralele duse la AB , respectiv AD . ($N \in DC$ și $P \in BC$.)

- a) Să se arate că unghiurile $\widehat{CNP}$ și $\widehat{ABD}$ sînt egale.
b) Paralela din N la BC taie pe BD în R . Să se arate că punctele B , N și mijlocul Q al segmentului RP sînt coliniare.

- c) Care trebuie să fie valoarea raportului $\frac{MC}{MA}$ astfel ca să aibă loc relația $NP = \frac{2}{3} DB$?

R. c) $\frac{MC}{MA} = 2$.

54. Se dă paralelogramul $ABCD$ în care unghiul $ABC = 150^\circ$ și diagonala BD perpendiculară pe AB . Fie E proiecția lui C pe AD și F intersecția laturii BC cu cercul circumscris triunghiului DEC , avînd centrul O .

- a) Să se arate că DF este perpendiculară pe BC .
b) Să se arate că punctele E , O , F sînt coliniare.
c) Să se arate că BD este tangentă la cercul circumscris triunghiului DEC .
d) Să se demonstreze că $BD^2 = BF \cdot AD$.
e) Dacă $AB = 2a$, ($a > 0$), să se calculeze perimetrul patrulaterului $BDEF$.

R. e) $2a(\sqrt{3} + 1)$.

55. Fie mulțimile M , N , P , Q în care există relația $M \subset N$; $N \subset P$; $P \subset Q$; $Q \subset M$. Să se arate că $M = N = P = Q$.

56. Mulțimea M are ca elemente divizorii numărului de 2 cifre (cel mai mic) $x \in N$ egal cu $\frac{4}{7}$ din răsturnatul său, iar mulțimea N are ca elemente divizorii numărului de 2 cifre $y \in N$ egal cu $\frac{2}{9}$ din răsturnatul său. Să se determine $(M \cap N)$.

R. 4.

57. Într-un romb latura este medie proporțională (geometrică) a diagonalelor. Să se afle unghiul ascuțit.

R. 30° .

58. a) Să se demonstreze că într-un triunghi dreptunghic isoscel raportul dintre suma catetelor și ipotenuză este $\sqrt{2}$.
b) Reciproc, dacă într-un triunghi dreptunghic raportul dintre suma catetelor și ipotenuză este $\sqrt{2}$, triunghiul este isoscel. Demonstrați.
c) Fie b și c catetele, iar a ipotenuza unui triunghi dreptunghic $b = c$. Raportul $\frac{b+c}{a}$ poate fi mai mare decît $\sqrt{2}$? De ce?

Să se înlocuiască în propoziția următoare punctele prin: „egal”, „cel puțin egal” sau „cel mult egal”: Într-un triunghi dreptunghic raportul dintre suma catetelor și ipotenuză este... cu $\sqrt{2}$.

59. Într-un cerc cu diametrul BC se duce o rază $OA \perp BC$ (O este centrul cercului) și se ia un punct oarecare M situat pe același cerc. Să se spună care linie frântă are lungimea mai mare: BAC sau BMC ?

60. Pe un cerc cu diametrul BC se iau două puncte M și N situate de o parte și de alta a lui BC . Cum trebuie alese punctele M și N ca patrulaterul $BMCN$ să aibă un perimetru cât mai mare? Ce fel de patrulater este în acest caz $BMCN$?

61. Se dau segmentele AB și CD . Să se determine un punct M , astfel încît $\widehat{AMB} = \widehat{CMD} = 90^\circ$. Discuție.

Indicație: Se consideră semicercurile care au ca diametru segmentele date.

62. Fie mulțimea $M = \left\{ x \in N \mid \frac{6}{x+2} \in z \right\}$,

$$P = \left\{ x \in N \mid \frac{8}{x-2} \in z \right\}.$$

Să se determine $(M \cup P) \cap P$.

$$R. M \cup P = \{0, 1, 4, 6, 10, 3\},$$

$$(M \cup P) \cap P = \{0, 1, 4, 3, 6, 10\}.$$

63. Să se arate că dacă un triunghi are unghiurile proporționale cu numerele 5, 4, 9 atunci triunghiul este dreptunghic.

Indicație: se ține seamă că dacă suma a două unghiuri dintr-un triunghi este egală cu unghiul al treilea, triunghiul este dreptunghic.

64. În paralelogramul $ABCD$, M și N sînt mijloacele laturilor opuse AD și BC .

Să se arate că BM și ND împarte diagonala AC în trei părți egale.

Indicație: se aplică proprietatea liniei mijlocii în triunghi.

65. Se dă triunghiul ABC în care CAB este de 60° . Înălțimile BB' și CC' se intersectează în H , iar bisectoarea unghiului CAB intersectează cele două înălțimi BB' și CC' în O și E .

Să se demonstreze că $\triangle OEA$ este echilateral.

66. În dreptunghiul $ABCD$, bisectoarea unghiului B și diagonala ce pleacă din acest vîrf, fac între ele un unghi de 15° . Bisectoarea întîlnește diagonala AC în P , latura DC în E iar pe AD în M . Să se arate că $\triangle DEM$ este isoscel.

67. Se dă dreptunghiul $ABCD$. Fie E piciorul perpendicularei dusă din A pe diagonala BD . Se prelungește AE cu segmentul $EF = AE$. Să se arate că $\triangle AFB$ este isoscel și $\triangle DBF$ este triunghi dreptunghic.

68. Se dă triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$). Se prelungește BA cu segmentul $AM = AB$.

Pe latura AC se ia un punct D astfel ca $AD = \frac{AC}{3}$. Fie O mijlocul lui BC .

a) Să se arate că $MC \perp BC$; b) $AOD \sim DCM$; c) M, D, O coliniare.

I. Exerciții de calcul algebric

1. Sume algebrice

$$1. (-7ab) + (6ab) + (-2ab) + (-3ab) + (-ab). \quad \text{R. } -7ab.$$

$$2. (-7a^2b) + (8a^2b) + (-2a^2b) + (a^2b). \quad \text{R. } 0.$$

$$3. (-10a^2b) + (-5a^3) + (-12a^2b) + (5a^3) + (21a^2b). \quad \text{R. } -a^2b.$$

$$4. 2ab^3 + (-7ab^3) + (+3ab^3) + (-ab^3). \quad \text{R. } -3ab^3.$$

$$5. 2ab^4 + (-3ab^4) + (-5a^2b^3) + (-3ab^4) + (+3a^2b^3). \quad \text{R. } -4ab^4 + 2a^2b^3.$$

$$6. \left(-\frac{3}{4}ab\right) + \left(+\frac{2}{3}a^2b\right) + (+ab) + \left(-\frac{5}{6}a^2b\right) + \left(-\frac{1}{2}ab\right). \\ \text{R. } -\frac{1}{4}ab - \frac{1}{6}a^2b.$$

$$7. 7ax^2 - 3by + 5a - 2ax^2 - 7a. \quad \text{R. } 5ax^2 - 3by - 2a.$$

$$8. a^3 + 2ab^2 - a^2b + ab^2 - 2a^2b - b^3. \quad \text{R. } a^3 + 3ab^2 - 3a^2b - b^3.$$

$$9. x^3 - ax^2 + a^2x + ax^2 - a^2x + a^3. \quad \text{R. } x^3 + a^3.$$

$$10. \frac{3}{5}a + 2ay - \frac{7}{2}ay + 4a. \quad \text{R. } \frac{23}{5}a - \frac{3}{2}ay.$$

$$11. \frac{3}{2}a^2b + 4b^2x - 5a^2b - \frac{5}{2}b^2x. \quad \text{R. } \frac{3}{2}b^2x - \frac{7}{2}a^2b.$$

$$12. 2,3 m^2n - 5an + 4m^2n - 1,7 an. \quad \text{R. } 6,3m^2n - 6,7 an.$$

$$13. 0,7 ax - 0,04 ax - 0,2 ax - 0,16 ax. \quad \text{R. } 0,3ax.$$

$$14. \frac{0,5}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + x^2 + \frac{0,3}{4}x + 5. \quad \text{R. } \frac{2,5}{2}x^2 - \frac{5,7}{4}x + 5.$$

$$15. \frac{2}{0,5}bxy - \frac{0,3}{2}x^2y - 0,7x^2y - \frac{7}{2}bxy. \quad \text{R. } 0,5bxy - 0,85x^2y.$$

$$16. \frac{1}{0,2}x + 0,3x - \frac{0,5}{2}x - 0,13x - 0,02x. \quad \text{R. } 4,9x.$$

$$17. 0,3y - \frac{0,7}{2}y + \frac{3}{0,2}x - \frac{5}{4}x + y. \quad \text{R. } \frac{1,9}{2}y + \frac{11}{0,8}x.$$

18. $\frac{5}{3}ax + \frac{1}{2}ax - \frac{2}{3}ax - \frac{3}{2}ax.$ R. 0.
19. $\frac{2}{5}by - \frac{5}{2}by + by + 1,1by.$ R. 0.
20. $7a^2b - 11\frac{2}{3}a^2b + 3\frac{1}{2}a^2b - 2\frac{5}{6}a^2b.$ R. $-4a^2b.$
21. $0,27ab^2 + 0,23ab^2 - \frac{2}{5}ab^2 + \frac{1}{2}ab^2.$ R. $0,6ab^2.$
22. $-1,25a^3 + \frac{3}{4}a^3 + 2,5a^3 - \frac{2}{3}a^3.$ R. $1\frac{1}{3}a^3.$
23. $3(a+b)^3 + 7(a+b)^2 + (a+b)^2.$ R. $11(a+b)^2.$
24. $4(a-b)^2 + 2(a-b)^2 + (a-b)^2.$ R. $7(a-b)^2.$
25. $5(a-b)^3 + 7(a-b)^3 + (a-b)^3.$ R. $13(a-b)^3.$
26. $2(a+b)^3 + 7(a+b)^3 + (a+b)^3.$ R. $10(a+b)^3.$
27. $15a^3b^2 - (+8a^3b^2).$ R. $7a^3b^2.$
28. $0,75a - (-1,25a).$ R. $2a.$
29. $-4a^2 - (-2,5a^2).$ R. $-1,5a^2.$
30. $-0,2x^a - (+0,05x^a).$ R. $-0,25x^a.$
31. $6,3a^3b^2c - \left(+\frac{11}{2}a^3b^2c\right).$ R. $0,8a^3b^2c.$
32. $-21x^2 - (-7x^2 + 2) - 8 + 10 + 14x^2.$ R. 0.
33. $(a + 2b - 6a) - (3b - 6a + 6b).$ R. $a - 7b.$
34. $a - [b - (c - d)].$ R. $a - b + c - d.$
35. $(x + y - z) - (x - y + z) + (-x + y + z) + (x + y - z).$ R. $2(2y - z).$
36. $(4x^3 - 2x^2 + x + 1) - (3x^3 - x^2 - x - 7) - (x^3 - 4x^2 + 2x + 8).$ R. $3x^2.$
37. $5a + \{3b + [6c - 2a - (a - c)]\} - [9a - (7b + c)].$ R. $-7a + 10b + 8c.$
38. $x + (y - x) - (y - z).$ R. $z.$
39. $(a + b - c) - (-b + 3c).$ R. $a + 2b - 4c.$
40. $44x + 48y - (6z + 3y - 7x) + 4z - [48y - 8x + 2z - (4x + y)].$ R. $63x - 2y - 4z.$
41. $(5a^2 - 3ax + x^2) - 4a^2 + 5ax + (3a^2 - 7ax + 5x^2) - 7x^2.$ R. $4a^2 - 5ax - x^2.$
42. $(6x^2 - 3x + 8) - (4x^2 - 3x + 1) - (2x^2 + 7).$ R. 0.

43. $(a - b) - (b + c - d) + (b + c - d) + (2b - a)$. R. b .
44. $\left(\frac{4}{5}ab + \frac{1}{7}bc - \frac{2}{3}ac\right) - \left(-\frac{4}{5}ab + \frac{3}{14}bc - \frac{1}{5}ac\right)$
R. $ab - \frac{1}{14}bc - \frac{7}{15}ac$.
45. $\left(\frac{1}{2}a^2x + \frac{1}{4}ax^2 + \frac{2}{3}x^2\right) - \left(-\frac{3}{4}a^2x + \frac{1}{3}ax^2 - \frac{5}{8}x^2\right)$.
R. $\frac{5}{4}a^2x - \frac{1}{12}ax^2 + \frac{31}{24}x^2$.
46. Un elev depune la C.E.C. o sumă C în cele trei luni consecutive de la începutul anului. În luna I scoate a lei, în a II-a b lei și în a III-a c lei. Ce sumă i-a mai rămas după trei luni?
R. $C - a - b - c$.
47. Să se exprime că într-un triunghi o latură este mai mare ca diferența celorlalte două.
R. $a > b - c$ sau $b > c - a$ sau $c > a - b$.
48. Suma unghiurilor unui triunghi fiind de 180° , să se exprime valoarea unghiului C , cunoscând pe celelalte două A și B .
R. $C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - A - B$.
49. Însemnind cu $2p$ perimetrul unui triunghi ale cărui laturi sînt a, b, c să se exprime valoarea laturii b în funcție de perimetru și celelalte două laturi.
R. $2p - (a + c) = 2p - a - c$.
50. Un elev are o sumă de bani C din care cheltuiește într-o zi a lei, în altă zi 28 lei și în alta o sumă cit diferența dintre cele două zile. Să se exprime suma rămasă.
R. $C - a - 28 - (a - 28) = C - 2a$.
2. Înmulțirea unui polinom cu un monom
51. $(m - n + p)\left(-\frac{5}{6}a\right)$.
52. $(-5b^2 + 2bc^2 - 4cd) \cdot \frac{1}{2}b^2c^3$.
53. $(-2a^2b^2 + 5ab^3 - 4b^4)(-4ab)$.
54. $13a^3x^3(-4a^2x + 5a^3x^3 - 3ax^2)$.
55. $\frac{1}{2}mn^3\left(\frac{5}{3}m^2 - \frac{2}{3}m^2n + \frac{3}{4}mn^2\right)$.
56. $(6a + 2b - 8c)7a$.
57. $(-5a^2 + 3ab - 8b^2)(-9ab)$.
58. $(4a^3 - 5ax - 1) \cdot 7ax^2$.

59. $(ax - 5b - 2ab)3a^2b$.
 60. $(2a^3b^2 - 4ab^2c + 3x - 2a) \cdot abx$.
 61. $(4m - 2x - 3ab + 9mn)2a^2m^3b$.
 62. $2ab^2xy^3(2ax^2y - 3bxy^2 + axyz - 5ab^2)$.
 63. $(a - b + cn - an^2bc)3a^2b^3cn^2$.

3. Înmulțirea a două polinoame

64. $(x^2 - 3x - 7)(x - 2)$. R. $x^3 - 5x^2 - x + 14$.
 65. $(a^2 - 3x - 7)(a^2 - 1)$. R. $a^4 - 3a^2x - 8a^2 + 3x + 7$.
 66. $(a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2 - 8ab^3 + 16b^4)(a + 2b)$. R. $a^5 + 32b^5$.
 67. $(a^m - b^p - 2c^n)(2a^m - 3b)$.
R. $2a^{2m} + 2a^mb^p - 4a^mc^n - 3a^{2m}b - 3b^{p+1} + 6bc^n$.
 68. $\left(\frac{5}{2}x + 1\right)\left(x + \frac{4}{3}\right)$. R. $\frac{5x^2}{2} + \frac{13x}{3} + \frac{4}{3}$.
 69. $(x^2 + y^2 - xy)(y^2 + x^2 + xy)$. R. $x^4 + x^2y^2 + y^4$.
 70. $(a + b - c)(a - b + c)$. R. $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$.
 71. $(a + 4b - c)(a - 4b + c)$. R. $a^2 - 16b^2 + 8bc - c^2$.
 72. $(a^4 + a^3b + a^2b^2)(a - b)$. R. $a^2(a^3 - b^3)$.
 73. $(a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3)(a - x)$. R. $(a - x)^4$.
 74. $(5a^2 + ab - 3b^2)(3a^2 - 2ab + b^2)$.
R. $15a^4 - 7a^3b - 6a^2b^2 + 7ab^3 - 3b^4$.
 75. $(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5)(a + b)$. R. $a^6 - b^6$.
 76. $(x^5 - ax^4 + a^2x^3 - a^3x^2 + a^4x - a^5)(x + a)$. R. $x^6 - a^6$.
 77. $(a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3)(a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3)$. R. $a^6 - b^6$.
 78. $(y^4 - 2y^3 + y^2 - 4y - 11)(y^2 - 2y + 3)$.
R. $y^6 - 4y^5 + 8y^4 - 12y^3 + 10y - 33$.
 79. $(3x^3 - 8x^2 + 4x - 4)(2x^2 - 4x - 1)$.
R. $6x^5 - 28x^4 + 37x^3 - 16x^2 + 12x + 4$.
 80. $(4x^2 - 12xy + 9y^2)(2x + 3y)(4x^2 + 12xy + 9y^2)(2x - 3y)$.
R. $64x^6 - 432x^4y^2 + 972x^2y^4 - 729y^6$.
 81. $[2x - y - (x + 2y)][3x - 2y - (2x - 3y)]$. R. $x^2 - 2xy - 3y^2$.
 82. $3(x - y)^2(x + y) - 3(x + y)^2(x - y)$. R. $6y(y^2 - x^2)$.
 83. $(2a - b)[(4a + b)a + b(a + b)]x^2$. R. $x^2(8a^3 - b^3)$.
 84. $(a - b)^3 + (a + b)^3 + 3(a + b)(a - b)^2 + 3(a - b)(a + b)^2$.
R. $8a^3$.

4. Împărțirea unui polinom cu un monom

Să se efectueze următoarele împărțiri:

85. $(8ab^4 - 6a^2b^3 + 4a^3b^2) : 2ab$. R. $4b^3 - 3ab^2 + 2a^2b$.
86. $(6a^2x^3y^2 - 12a^4x^2y^3 - 9a^3x^3y^3) : (-3a^2x^2y^2)$. R. $-2x + 4a^2y + 3axy$.
87. $(3a^4x^2 - 5a^3x^3 + 6a^2x^4) : 2a^4x^4$. R. $\frac{3}{2x^2} - \frac{5}{2ax} + \frac{3}{a^2}$.
88. $-(6b^5 + 4b^3 - 5ab^2) : 4b^3$. R. $-\left(\frac{3}{2}b^2 + 1 - \frac{5}{4} \cdot \frac{a}{b}\right)$.
89. $(-5x^3y^2 - 6x^2y^2 - x^4y^4) : (-x^2y^3)$. R. $\frac{5x}{y} + \frac{6}{y} + xy$.
90. $(4a^3b^3 - 6a^3b^2 + 2a^2b) : 2a^2b$. R. $2ab^2 - 3ab + 1$.
91. $(4a^7x^5 - 24a^6x^6 + 36a^5x^7) : (4ax)$. R. $a^4x^4(a - 3x)^3$.
92. $(25a^2 - 10a + 1) : (5a - 1)$. R. $5a - 1$.
93. $(8a^4b^2 - 6a^3b^3 + 4a^2b^4 - 2a^2b^2) : (-2a^2b^2)$. R. $-4a^2 + 3ab - 2b^2 + 1$.
94. $-(15a^4x^2 - 20a^3x^3 + 5a^2x^4) : (-5a^2x^2)$. R. $3a^2 - 4ax + x^2$.
95. $(4m^2 + 6m^2 - m) : \left(-\frac{1}{2}m\right)$. R. $-8m^2 - 12m + 2$.
96. $\left(-4m^5n^2 - \frac{4}{9}m^4n^5 + \frac{2}{3}m^3n^6\right) : \frac{2}{3}m^3n^2$. R. $-6m^2 - \frac{2}{3}mn^3 + n^4$.
97. $\left(\frac{3}{4}a^6x^3 + \frac{6}{5}a^3x^4 - \frac{9}{10}ax^5\right) : \frac{3}{5}ax^3$. R. $\frac{5}{4}a^5 + 2a^2x - \frac{3}{2}x^2$.
98. $(p^4 + 4p^3 - 6p^2 - 8p) : (-0,2p)$. R. $-5p^3 - 20p^2 + 30p + 40$.

5. Împărțirea a două polinoame

99. $(6a^4 + a^2x - 15x^2) : (2a^2 - 3x)$. R. $3a^2 + 5x$.
100. $(6x^2 - 2xy^2 - 28y^4) : (2x + 4y^2)$. R. $3x - 7y^2$.
101. $(4x^3 + 4x^2 - 29x + 21) : (2x - 3)$. R. $2x^2 + 5x - 7$.
102. $(3a^5 + 5a^4b - 33a^3b^2 + 14a^2b^3) : (a^2 + 7ab)$.
R. $3a^3 - 16a^2b + 79ab^2 - 539b^3$; rest $3773ab^4$.
103. $(2a^4 - 13a^3b + 31a^2b^2 - 38ab^3 + 24b^4) : (2a^2 - 3ab + 4b^2)$.
R. $a^2 - 5ab + 6b^2$.
104. $(14a^5 - 27a^4b + 21a^3b^2 - 3a^2b^3 - 2ab^4) : (2a^2 - 3ab + 2b^2)$.
R. $7a^3 - 3a^2b - ab^2$.
105. $(6a^6b^3 - 13a^5b^4 + 28a^4b^5 - 23a^3b^6 + 20a^2b^7) : (2a^2b^2 - 3ab^3 + 4b^4)$.
R. $3a^4b - 2a^3b^2 + 5a^2b^3$.

$$106. (10a^5b - 21a^4b^2 - 56ab^5 - 3a^2b^4 - 40a^3b^3) : (8b^3 - 3ab^2 + 5a^2b).$$

$$R. 2a^3 - 3a^2b - 7ab^2.$$

$$107. \left(x^4 - \frac{13}{6}x^3 + x^2 + \frac{4}{3}x - 2\right) : \left(\frac{4}{3}x - 2\right).$$

$$R. \frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1.$$

$$108. (27x^5 - 9x^4 + 9x^3 - 4x^2 - 14x + 6) : (9x^3 - 6x^2 + 8x - 6).$$

$$R. 3x^2 + x - 1.$$

$$109. (a^4 + 2a^2b^2 + 9b^4) : (a^2 - 2ab + 3b^2).$$

$$R. a^2 + 2ab + 3b^2.$$

$$110. (12 - 22x + 2x^2 - 9x^4 + 27x^5) : (9x^3 + 8x - 6x^2 - 6).$$

$$R. 3x^2 + x - 2.$$

$$111. (3x^2 - 14x + 15) : (x - 3).$$

$$R. 3x - 5.$$

$$112. (4x^5 - 5ax^4 - 20a^2x^3 - 5a^3x^2 + 6a^4x) : (x^3 - 2ax^2 - 3a^2x).$$

$$R. 4x^2 + 3ax - 2a^2.$$

$$113. (x^5 + a^5) : (x + a).$$

$$R. x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4.$$

$$114. (x^5 - a^5) : (x - a).$$

$$R. x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4.$$

$$115. (x^8 - 7^6) : (x + 7).$$

$$R. x^5 - 7x^4 + 7^2x^3 - 7^3x^2 + 7^4x - 7^5.$$

$$116. (x^5 + 1) : (x - 1).$$

$$R. x^4 + x^3 + x^2 + x + 1; \text{ rest } 2.$$

$$117. (6x^5 - 28x^4 + 37x^3 - 16x^2 + 12x + 4) : (3x^3 - 8x^2 + 4x - 4).$$

$$R. 2x^2 - 4x - 1.$$

$$118. (15a^4 - 7a^3b - 6a^2b^2 + 7ab^3 - 3b^4) : (3a^2 + b^2 - 2ab).$$

$$R. 5a^2 + ab - 3b^2.$$

6. Exerciții pentru aplicarea formulelor de calcul prescurtat

$$119. \{[(3x^2y^2 - 3x^2 : (-3) - x^2 + 2y^2) \cdot (3y^2x^2 - 2y^2)]^2 + 72x^4y^8 - 17y^8\} : (9x^4y^4 + y^4).$$

$$R. 9x^4y^4 + y^4.$$

$$120. \{[(12x^2y - 8)(3x^2y + 2) : 4 + 4 - x^2]^2 + 18x^6y^2 - 2x^4\} : (9x^4y^2 - x^2) - 9x^4y^2 - 1.$$

$$R. x^2 - 1.$$

$$121. \left[\left(\frac{4x^2}{9} - 1\right) : \left(\frac{2x}{3} + 1\right) - \frac{2x}{3} - x^2 + 2x\right] : [-(x - 1)].$$

$$R. x - 1.$$

$$122. \{[(36x^4 - 100x^2y^2) : (12x^3 + 20x^2y)]^2 + 30xy - 26y^2\} : (3x - y).$$

$$R. 3x + y.$$

$$123. \left\{[(0,625x^2 - 4)\left(\frac{5x^2}{8} + 4\right) - \frac{24x^4}{64}]^2 + \frac{x^4}{2} - 256\right\} : \frac{x^4}{8^2}.$$

$$R. \frac{x^4}{64}.$$

$$124. [(6x^3 - 9x^2y)(2x^2 + 3xy) : 3x^3 + 9y^2 - 4xy + y^2 - 1] : (2x - y + 1) + y.$$

$$R. 2x - 1.$$

$$125. \left\{ \left[\left(\frac{2a}{5} - 1 \right) \left(\frac{2a}{5} + 1 \right) : 0,04 : (2a - 5) \right]^2 - 25 \right\} : (a + 5) : a^2. \quad \text{R. } \frac{4}{a}.$$

$$126. \{ [(a^4 + a^3b - a^2b^2 - ab^3) : (a^2 - b^2) (a^2 - ab)]^2 + 2a^6b^2 - 2a^4b^4 \} : (a^4 - a^2b^2).$$

$$\text{R. } a^2(a^2 + b^2).$$

$$127. \{ [(x^5 - a^5) : (x - a) - ax^3 - a^2x^2 - a^3x - 2a^4] : (x - a) - ax^2 - a^2x \} : (x + a).$$

$$\text{R. } x^2 - ax + a^2.$$

$$128. \{ [(3 - 6x^2 + 4x^4 - x^6) : (3 - 3x^2 + x^4) (1 + x^2)]^2 - x^2 \} : (1 - x - x^4).$$

$$\text{R. } 1 - x^4 + x.$$

$$129. \{ [(3x^4 + 12x^3y + 12x^2y^2) : 3x^2 - 2xy - 4y^2]^3 - 12x^4y^2 - 6x^5y \} : (x^4 - 2x^3y + 4x^2y^2).$$

$$\text{R. } x(x + 2y).$$

$$130. \{ [(16x^3 - 2) : (2 + 4x + 8x^2)]^3 - 8x^3 + 28x^2 - 14x + 2 \} : (4x - 1).$$

$$\text{R. } 4x - 1.$$

$$131. \{ [(20x^2y^4 - 45) : 5 : (2xy^2 + 3)]^2 - 4x^2y^4 + 9x^2 + 4y^4 - 9 \}^3 : (3x - 2y^2)^3 + 54x^2y^2 - 36xy^4.$$

$$\text{R. } 27x^3 - 8y^9$$

$$132. \{ [(1 - x^3) (1 + x) : (x^2 + x + 1)]^2 + 4x^2 + x^5 + x^3 \} : (x^3 + x^2 + 1).$$

$$\text{R. } 1 + x^2.$$

$$133. \{ [(a^3 - 2a^2 + 2a - 4) : (a^2 + 2)]^2 + a^3 + 5a^2 + 16a + 4 \} : (a + 2)^2 (a - 2) + 4.$$

$$\text{R. } a^2.$$

$$134. [(18a^1x + 3a^2x^2 - 45x^3) : (6a^2x - 9x^2) \cdot (3a^2 - 5x)]^2 + 450a^4x^2 - 80a^8 - 624x^4.$$

$$135. \{ \{ [(24x^4 - 3x) : (6x^2 - 3x) + 2x] : (2x + 1) \}^3 - 6x(2x + 1) \} : (2x + 1) - 2x.$$

$$\text{R. } (2x - 1)^2.$$

$$136. [(2x + 54x^4) : (2x + 6x^2) - 3x] \cdot (1 - 3x)^3 : (1 - 3x)^6 - \frac{1}{1 - 3x}.$$

$$\text{R. } 0.$$

$$137. \left\{ \left[(27a^3 + 54a^2b + 36ab^2 + 8b^3) : (9a^2 + 6ab) - \frac{4b^2}{3a} \right] : (3a + 4b)^2 - 108a^2b - 144ab^2 \right\} : (3a + 4b) - 12ab.$$

$$\text{R. } (3a - 4b)^2.$$

$$138. \{ [(15 - 3x^3 + 5x^2 - 9x) : (5 - 3x) \cdot (x^2 - 3)]^2 + 18x^4 - 80 \}^3 - x^{24} - 3x^{16}.$$

$$\text{R. } 3x^8 + 1.$$

$$139. \{ [(1 + 2m^2 - m + m^4 - m^3) : (1 + m^2 - m) + 2m]^2 - 1 \} : (m^2 + 2m + 2) + 1.$$

$$\text{R. } (m + 1)^2$$

$$140. \{ [(9a^4 - 12a^3 + 10a^2 - 4a + 1) : (3a^2 - 2a + 1) - 3a^2]^2 - 4a^2 \}^3 + 12a - 48a^2 : (1 - 4a) + 4a.$$

$$R. (1 + 4a)^2.$$

$$141. \{ [16x^2 - (3x + 5y)^2] : (7x + 5y)^3 + 15x^2y - 75xy^2 \} : (x - 5y) + 5xy.$$

$$R. (x + 5y)^2.$$

$$142. [4(x + 2)^2 - 9(x - 2)^2] (x^3 - 1000) : [(10 - x)^2 (5x - 2)] - 10x.$$

$$R. -(x + 10)^2.$$

$$143. [(x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3) : (x^2 - x)^2 (x^2 - x)^2 - (x^2 + x)^3] : (3x^2 + 1) + x^4 + x^2.$$

$$R. (x^2 + x)^2.$$

$$144. \{ [(x + 6)^3 - (x - 6)^3] : (x^2 + 12) - 4(3x - 2)^2 \} : (5 - 3x) + 4x^2 + 5.$$

$$R. (2x + 3)^2.$$

$$145. \{ [(x + 2)^2 (x^3 + 8) (x^2 - 2x + 4) (x - 2)] : (x^4 - 4) \} : (x^2 - 2x + 4)^2.$$

$$R. (x + 2)^2.$$

$$146. [(x - 1) (x^3 - 1) (x^2 + x + 1) - (x^3 + 1)^2 + 5x^3 - 6x^2 + 12x - 8.$$

$$R. (x - 2)^3.$$

$$147. \{ [(2x/3 - 0,5)^3 + 2x^2/3 - x/2] : (4x^2/9 + x/3 + 1/4) \} \cdot \frac{4x + 3}{6} + 1/4.$$

$$R. \frac{4x^2}{9}.$$

$$148. \left[(3,375x^3 - 8) : \frac{9x^3 + 12x + 16}{4} \cdot \frac{3x + 4}{2} \right] + 4 - 3x^2 + x^2.$$

$$R. (3x/2 - x)^2.$$

$$149. [x^4 + 4 + y^2 + 4x^2 + 2x^2y + 4y - (x^2 - 2 - y)^2] : (2 + y) - x^2 + x^3 + 3x + 1.$$

$$R. (x + 1)^2.$$

$$150. \{ x^2/36 + 1 + y^2 + x/3 - xy/3 - 2y - [(0,1(6)x - 1 - y)^2] \} : \frac{x - 6y}{3}.$$

$$R. 2.$$

$$151. [(x + y - 2)(x + y + 2) + 4](x + y) - (x - y)^3 + x^3 + 12xy^2 + 8y^3 - 2y^3.$$

$$R. (x + 2y)^3.$$

$$152. \{ [(2x + y - \sqrt{2})(2x + y + \sqrt{2}) + 2 - 2(2x + y) + 1] - (2x + y + 1)^2 \} : (2x + y)$$

$$R. -4.$$

$$153. [(x^2 + 2x\sqrt{2} + 2)(x + \sqrt{2}) - 3x^2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 6x^2 + 6x + 8] : (x + 2)^2.$$

$$R. x + 2.$$

154. $\left\{ \left[\left(\frac{x-y}{2} \right)^2 - (x-y) + 1 \right] \cdot \frac{4}{(x-y-2)^2} - 4(x-y)^2 \right\} : (1+2x-2y) -$
 $- 2y + x^2.$
R. $(1-x)^2.$
155. $\{[(x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1)]^4 : (x^4 + 1) + x^8 - 1\} : (x^8 + x^4).$
R. $x^4 + 3.$
156. $(a+x)^4 - (a-x)^4.$
R. $8ax(a^2 + x^2).$
157. $(a^6 + b^2)^2 - 4a^6b^6.$
R. $(a^3 + b)^2 (a^3 - b)^2.$
158. $4a^6b^4 - (a^6 + b^4)^2.$
R. $-(a^3 + b^2)(a^3 - b^2)^2.$
159. $x^4 + x^2y^2 + y^4.$
R. $(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2).$
160. $3x^4y^4 - x^8 - y^8.$
R. $(x^2y^2 + x^4 - y^4)(x^2y^2 - x^4 + y^4).$
161. $x^8 + x^4 + 1.$
R. $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1).$
162. $3x^6 - x^{12} - 1.$
R. $(x^3 + x^6 - 1)(x^3 - x^6 + 1).$
163. $\{[(a^6 + 3a^4x^2 - a^3x^3 - 3a^5x - 1) : [(a^2 - ax)^3 - 1]] \cdot (a^2 - ax)^2 +$
 $+ 2(a^2 - ax) + 1$
R. $(a^2 - ax + 1)^2.$
164. $4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2.$
R. $(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$
165. $\left\{ \left[\left(\frac{\sqrt{588} + 13\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - x^3 \right) : (x^2 + 3x + 9) \right]^3 - 8x^2 \right\} : (27 + x^2).$
166. $a^2b^2 + c^2d^2 - a^2c^2 - b^2d^2 - 4abcd.$
R. $(ab - cd + ac + bd)(ab - cd - ac - bd).$
167. $a^2c^2 + b^2d^2 - b^2c^2 - a^2d^2 + 4abcd.$
R. $(ac + bd + bc - ad)(ac + bd - bc + ad).$
168. $[(x^{m-1} : x^{n-1} \cdot x^{m+n})^3 : x^{6m} - x^6] : (x^2 - 1) - x^2.$
R. $(x^2 + 1)^2.$
169. $(x^{m+2} : x^{m+1} \cdot x^{m-1}) : x^m \cdot x^2] x - 8\} : (x - 2) + 2x^{m+1} : 2x^m - (x + 2)^2.$
R. 0.
170. Să se afle cel mai mare divizor comun al polinoamelor:
 $P_1(x) = 6x^6 + 12x^5 - 24x^4 - 48x^3;$
 $P_2(x) = 8x^5 + 48x^4 - 96x^3 + 64x^2.$
R. $2x^2(x+2)^2.$
171. Să se afle cel mai mare divizor comun al polinoamelor:
 $P_1(x, y) = 280x^4y - 280x^3y^2 + 70x^2y^3;$
 $P_2(x, y) = 336x^3y^2 - 42y^5.$
R. $14y(2x - y).$

172. Să se afle cel mai mic multiplu comun al polinoamelor:

$$x^2 + 2x + 1; x^2 - 1; x + 1.$$

R. $x^3 + x^2 - x - 1$.

173. Aceeași întrebare pentru polinoamele:

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 1; x^3 + 2x^2 + 2x + 1; x^3 + 1; x^3 - 1; x^2 - 1.$$

R. $x^6 - 1$.

7. Descompunerea în factori

Să se descompună în factori expresiile:

† 174. $5a^2b + 15a - 5$.

R. $5(a^2b + 3a - 1)$.

175. $8a^3 - 12a^2b^2 + 4a^2c$.

R. $4a^2(2a - 3b^2 + c)$.

176. $a^3b + a^2b^3 + a^2b$.

R. $a^2b(a + b^2 + 1)$.

177. $-10a^3 - 6ab + 2a$.

R. $-2a(5a^2 + 3b - 1)$.

178. $2m^3 - 4m^5 + 6m^2n + 2m^2$.

R. $2m^2(m - 2m^3 + 3n + 1)$.

179. $54a^8b^5 - 42a^5c^3 - 24a^4b^7$.

R. $6a^4(9a^4b^5 - 7ac^3 - 4b^7)$.

180. $a^2(a + x) + x^2(a + x)$.

R. $(a + x)(a^2 + x^2)$.

† 181. $2p(p - q) + 3q(p - q)$.

R. $(p - q)(2p + 3q)$.

182. $a(x + 1) - 2x(x + 1)$.

R. $(x + 1)(a - 2x)$.

183. $2(p - 1)^2 - 4q(p - 1)$.

R. $2(p - 1)(p - 2q - 1)$.

184. $mn(m^2 + n^2) - n^2(m^2 + n^2)$.

R. $n(m^2 + n^2)(m - n)$.

185. $4m^2(n^2 - 2) + 2mn(n^2 - 2)$.

R. $2m(n^2 - 2)(2m + n)$.

186. $9(b^3 + b^2 - b) + b^3 + b^2 - b$.

R. $10b(b^2 + b - 1)$.

† 187. $2(p - q)^2 - 5q(q - p)$.

R. $(p - q)(2p + 3q)$.

188. $a(b - 1) + c(1 - b) - b + 1$.

R. $(a - c - 1)(b - 1)$.

189. $a(2 - x^2) + b(x^2 - 2) - 2 + x^2$.

R. $(a - b - 1)(2 - x^2)$.

190. $(4a - 5b)(3m - 2p) + (4b - a)(3m - 2p)$.

R. $(3m - 2p)(3a - b)$.

191. $(4a + 5b)(3p - 2m) - (4b + a)(3p - 2m)$.

R. $(3p - 2m)(3a + b)$.

† 192. $(5a - 2b)(2m + 3p) - (2a - 7b)(2m + 3p)$.

R. $(2m + 3p)(3a + 5b)$.

† 193. $(2a - 5b)(2p + 3m) + (3a - 7b)(2p + 3m)$.

R. $(2p + 3m)(5a - 12b)$.

194. $(7a - 3x)(5c - 2d) - (6a - 2x)(5c - 2d)$.

R. $(5c - 2d)(a - x)$.

195. $ac + ad + bc + bd$. R. $(a + b)(c + d)$.
196. $ac - ad + bc - bd$. R. $(a + b)(c - d)$.
197. $x^3 + x^2z + 2xz^2 + 2z^3$. R. $(x^2 + 2z^2)(x + z)$.
198. $x^3 - x^2z + 2xz^2 - 2z^3$. R. $(x - z)(x^2 + 2z^2)$.
199. $x^3 + x^2z - 2xz^2 - 2z^3$. R. $(x^2 - 2z^2)(x + z)$.
200. $a^3 + 2a^2 + 2a + 4$. R. $(a + 2)(a^2 + 2)$.
201. $a^3 - 2a^2 + 2a - 4$. R. $(a^2 + 2)(a - 2)$.
202. $12x^2y - 20y^4 + 3x^2 - 5y^3 - 3x^2y^2 + 5y^5$. R. $(4y - y^2 + 1)(3x^2 - 5y^3)$.
203. $(m^2 + 4m)^2 - 4$. R. $(m^2 + 4m + 2)(m^2 + 4m - 2)$.
204. $9 - (m^2 + 6m)^2$. R. $(3 + 6m + m^2)(3 - 6m - m^2)$.
205. $(2a - 3b)^2 - 4b^2$. R. $(2a - 5b)(2a - b)$.
206. $9a^2 - (2a + 3b)^2$. R. $(a - 3b)(5a + 3b)$.
207. $16c^2 - (3c + 5d)^2$. R. $(c - 5d)(7c + 5d)$.
208. $(5c - 3d)^2 - 25d^2$. R. $(5c - 8d)(5c + 2d)$.
209. $9(5m - 4p)^2 - 64m^2$. R. $(23m - 12p)(7m - 12p)$.
210. $100m^2 - 9(3m - 2p)^2$. R. $(m + 6p)(19m - 6p)$.
211. $16(n + q)^2 - (39 - n)^2$. R. $(5n + 4q - 39)(3n + 4q + 39)$.
212. $(n + 3q)^2 - 4(q - n)^2$. R. $(5q - n)(q + 3n)$.
213. $m^8 - 6m^4y^3 + 9y^6$. R. $(m^4 - 3y^3)^2$.
214. $4p^{12} - 20p^6z^5 + 25z^{10}$. R. $(2p^6 - 5z^5)^2$.
215. $a^2 + 6a + 9$. R. $(a + 3)^2$.
216. $-30ab^2 + 25b^4 + 9a^2$. R. $(5b^2 - 3a)^2$.
217. $-6a^2b^3 + 1 + 9a^4b^6$. R. $(3a^2b^3 - 1)^2$.
218. $3x + 18x^3y^3 + 27x^5y^6$. R. $3x(1 + 3x^2y^3)^2$.
219. $9x^4 - 12x^3 + 10x^2 - 4x + 1$. R. $(3x^2 - 2x + 1)^2$.
220. $x^4 + 6x^3 + 19x^2 + 30x + 25$. R. $(x^2 + 3x + 5)^2$.
221. $4x^6 - 20x^5 + 25x^4 - 12x^3 + 30x^2 + 9$. R. $(2x^3 - 5x^2 - 3)^2$.
222. $16 - 4x^2 - 4a^2 + a^2x^2$. R. $(2 - a)(2 + a)(2 - x)(2 + x)$.
223. $3x^2 - 12 + x^2 - 4$. R. $4(x - 2)(x + 2)$.
224. $x^4 - 9x^2 - x^2 + 9$. R. $(x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3)$.
225. $25a^2 - a^4 - 25b^2 + a^2b^2$. R. $(a - b)(a + b)(5 - a)(5 + a)$.
226. $9a^4 + 45a^2 - 4a^2 - 20$. R. $(3a - 2)(3a + 2)(a^2 + 5)$.
227. $36x - 4xy^2 + 9 - y^2$. R. $(4x + 1)(3 - y)(3 + y)$.

228. $a^2b^2 - 36a^2 + b^4 - 36b^2 - b^2 + 36$. R. $(a^2 + b^2 - 1)(b - 6)(b + 6)$.
229. $a^3b^2 - 100a - a^2b^3 + 100b + a^2b^2c - 100c$. R. $(a - b + c)(ab - 10)(ab + 10)$.
230. $4a - 16ac^2 - a^2 + 4a^2c^2 - 4 + 16c^2$. R. $-(a - 2)^2(1 - 2c)(1 + 2c)$.
231. $3a^6x^{10} + 30a^4x^5y^2 + 75a^2y^4$. R. $3a^2(a^2x^5 + 5y^2)^2$.
232. $36a^{n+2} + 16a^{n-2}b^2 + 48a^nb$. R. $4a^{n-2}(3a^2 + 2b)^2$.
233. $x^2 + 2xy + y^2 - z^2$. R. $(x + y + z)(x + y - z)$.
234. $9 - y^2 - 6yz - 9z^2$. R. $(3 + y + 3z)(3 - y - 3z)$.
235. $25z^2 - 4x^2 + 12xy - 9y^2$. R. $(5z + 2x - 3y)(5z - 2x + 2y)$.
236. $4y^2 - 20yz + 25z^2 - 36$. R. $(2y - 5z + 6)(2y - 5z - 6)$.
237. $a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$. R. $(a + b)^2(a - b)$.
238. $4a^2m^2 - 64a^2n^2 - m^2 + 16n^2$. R. $(2a - 1)(2a + 1)(m - 4n)(m + 4n)$.
239. $3x^5 - 192x - 4x^4 + 256$. R. $(3x - 4)(x^2 - 8)(x^2 + 8)$.
240. $28x^3 - 8x^2y - 7x + 2y$. R. $(2x + 1)(2x - 1)(7x - 2y)$.
241. $2ac + a^2 + c^2 - b^2$. R. $(a + c - b)(a + c + b)$.
242. $4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$. R. $(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)$.
243. $6a^3b + a^2 - 6ab^3 - b^2$. R. $(a + b)(a - b)(6ab + 1)$.
244. $8a^3 - 12a^2b - 8a^2 + 12ab + 2a - 3b$. R. $(2a - 1)^2(2a - 3b)$.
245. $4a^2 - 24a^3 + 48a^4 - 32a^5 - (1 - 2a)^3$. R. $(2a + 1)(2a - 1)(1 - 2a)^3$.
246. $a^2 - (a + b)^2 - 2a^2 - ab$. R. $-(a + b)(2a + b)$.
247. $4x^2 - (a^2 + b^2)^2 + 2a^2b^2 + b^4$. R. $(2x - a^2)(2x + a^2)$.
248. $x^4 + y^4 - (x^2 - y^2)^2 + x^2 + y^2 - (x - y)^2$. R. $2xy(xy + 1)$.
249. $4x^4 - y^2 - 4x^2 + 1$. R. $(2x^2 - 1 - y)(2x^2 - 1 + y)$.
250. $4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 - y^2(x - 1)^3$. R. $(2 - y)(2 + y)(x - 1)^3$.
251. $a^4 - b^2(2a - b)^2$. R. $(a - b)^2(a^2 + 2ab - b^2)$.
252. $a^4 - 16c^2(c - a)^2$. R. $(a - 2c)^2(a^2 + 4ac - 4c^2)$.
253. $(a - 2b)^2 + 2b(a - 2b) + b^2$. R. $(a - b)^2$.
254. $(2a - b)^2 - 2b(b - 2a) + b^2$. R. $4a^2$.
255. $(m^2 + 1)^2 - 4m^2$. R. $(m + 1)^2(m - 1)^2$.
256. $36m^2 - (m^2 + 9)^2$. R. $-(m + 3)^2(m - 3)^2$.
257. $(p + q)^3 - 3(p + q)^2(p - q) + 3(p + q)(p - q)^2 - (p - q)^3$. R. $8q^3$.
258. $ac^2 - ab^2 + b^2c - c^3$. R. $(c + b)(c - b)(a - c)$.

$$259. (a - b) (a^2 - c^2) - (a - c) (a^2 - b^2).$$

$$R. (a - b) (a - c) (c - b).$$

$$260. a^2b^4c^2 - a^2b^2c^4 + a^4b^2c^2 - a^4c^4.$$

$$R. a^2c^2(b + c) (b - c) (a^2 + b^2).$$

$$261. a^2 - ab - b - 1.$$

$$R. (a + 1) (a - b - 1).$$

$$262. 4(n - 2)^2 + 9 + 12(n - 2).$$

$$R. (2n - 1)^2.$$

8. Simplificarea fracțiilor algebrice

La începutul acestui capitol se impune, din nou, următoarea recomandare: la toate exercițiile cu fracții algebrice (adică avind litere la numitor) se va preciza, în primul rind, mulțimea valorilor cu care e pot face operațiile, astfel ca fracțiile să aibă sens.

Să se simplifice

$$263. \frac{2x^4 - 8x^3y + 8x^2y^2}{x^4 - 2x^3y} \quad R. \frac{2(x - 2y)}{x}.$$

$$264. \frac{20a^5x^2 + 16a^3bx^2}{75a^4b + 120a^2b^2 + 48b^3} \quad R. \frac{4a^3x^2}{3b(5a^2 + 4b)}.$$

$$265. \frac{25ab^2 + 15b^2 - 30bc}{20a^3b + 12a^2b - 24a^2c} \quad R. \frac{5b}{4a^2}.$$

$$266. \frac{65x^3y - 60x^2y^2}{39x^2y^3 - 36xy^4} \quad R. \frac{5x}{3y^2}.$$

$$267. \frac{12x^5 - 27x^3y^2}{8x^3y - 12x^2y^2} \quad R. \frac{3x(2x + 3y)}{4y}.$$

$$268. \frac{72a^2b^2c + 16ab^3c - 24ab^2c}{27a^3c^2 + 6a^4bc^2 - 9a^4c^2} \quad R. \frac{8b^2}{3a^3c}.$$

$$269. \frac{3x^4c + 5x^3yc - y^2x^3c^2}{2xy^2c^2 - 3x^2y^2c - 5xy^3c} \quad R. \frac{-x^2}{y^2}.$$

$$270. \frac{12x^2 - 8xy - 4x(3x - 2y)}{9x^2 + 4y^2 - 12xy} \quad R. 0.$$

$$271. \frac{y + 5}{7y + xy + 35 + 5x} \quad R. \frac{1}{x + 7}.$$

$$272. \frac{14x^2 - 7ax + 2xy - ay}{4x^3 - 4ax^2 + a^2x} \quad R. \frac{7x + y}{x(2x - a)}.$$

$$273. \frac{ax - 6 + 3x - 2a}{ax + 6 - 3x - 2a} \quad R. \frac{a + 3}{a - 3}.$$

$$274. \frac{1 \frac{1}{8} a^4b^2 - 0,125a^4b^2 - b^2}{a^2b - b} \quad R. b(a^2 + 1).$$

$$275. \frac{3ac^2 + 3bc^2 - 3ab^2 - 3b^3}{6ac^2 + 6bc^2 - 6ab^2 - 6b^3} \quad R. \frac{1}{2}.$$

$$276. \frac{\left(\frac{2xy}{3} - 2y^2\right) \left(2xy + \frac{2x^2}{3}\right)}{4xy} \quad R. \frac{x^2}{9} - y^2.$$

277. $\frac{4\left(\frac{3x^2}{4} + 1\frac{1}{2}xy + 0,75y^2\right)}{3x + 3y}$. R. $x + y$.
278. $\frac{18x^4 - 8x^6 : 4x^2 - 1}{(2x - 1)(4x^2 + 1)}$. R. $2x + 1$.
279. $\frac{\left[(4x^4 - 7x : 14x^2)\left(4x^4 + \frac{1}{2x}\right)\right]^2 - \frac{1}{16x^4}}{32x^{10} - 1}$. R. $8x^6$.
280. $\frac{4a^4 - 2a^4 : a^2 - 2a^2 + 1 - b^2}{2a^2 - b - 1}$. R. $2a^2 + b - 1$.
281. $\frac{(x^2y + xy^2)^2 - (x + y)^2}{x^3y + 2x^2y^2 + xy^3 + (x + y)^2}$. R. $xy - 1$.
282. $\frac{x^2 - y^2}{xz - yz - xy + y^2}$. R. $\frac{x + y}{z - y}$.
283. $\frac{(x^3 - x^2 - 9x + 9)(x^2 - 3x + xy - 3y)}{(x^2 - 4x + 3)(x + y)}$. R. $x^2 - 9$.
284. $\frac{x^2 + 2xy + y^2 - z^2}{(x + y + z)a + (x + y + z)z}$. R. $\frac{x + y - z}{a + z}$.
285. $\frac{243a^6b^6 - 1425b^9a^3}{9a^9b^6(9a^2 + 15ab + 25b^2)}$. R. $3a - 5b$.
286. $\frac{[(0,04x^2 - 0,25y^2) : (0,2x + 0,5y)]^2}{\frac{2x - 5y}{10}}$. R. $\frac{x}{5} \frac{y}{2}$.
287. $\frac{\sqrt{0,3y^2 + 5y^2} \times \frac{\sqrt{3}}{y} - 9y^2 + (2 + 3y)3y}{2 + 3y}$. R. 2.
288. $\frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2xz + 2xy - 2yz}{x^2 - y^2 - z^2 + 2yz}$. R. $\frac{x + y - z}{y - y + z}$.
289. $\frac{(x + b)^2 - (a + c)^2}{(a + x)^2 - (b + c)^2}$. R. $\frac{x - a + b - c}{x + a - b - c}$.
290. $\frac{(ax - x)(x - a)}{a^3x - ax^3 - a^2x + x^3}$. R. $\frac{-1}{a + x}$.
291. $\frac{a^2x^2 - x^2b^2 + 2a^2x - 2b^2x + a^2 - b^2}{(a - b)(x + 1)}$. R. $(x + 1)(a + b)$.
292. $\frac{-a^2 - ab - ac - bc}{ab + b^2 + a(a + b)}$. R. $\frac{-(a + c)}{a + b}$.
293. $\frac{\left[\left(\frac{3}{5}a - 0,625b\right)\left(\frac{5}{8}b + 0,6a\right)\right]^2 + \frac{9a^2b^2}{32} - \frac{626b^4}{64^2}}{\left(\frac{3a}{5} - \frac{b}{8}\right)\left(\frac{9a^2}{25} + \frac{b^2}{64}\right)}$. R. $\frac{24a + 5b}{40}$.

294. $\frac{\left(20 \frac{1}{25} x^2 - \sqrt{401,6016}\right) \frac{y^2}{501}}{\frac{xy^2 - y^2}{5}}.$ R. $\frac{x+1}{5}.$
295. $\frac{\frac{4a^3b^4}{19} : \frac{2}{133ab^2} - 10a^4b^3 - 1}{2a^2b^3 + 1}.$ R. $2a^2b^3 - 1.$
296. $\frac{[(2ab - c)(2ab + c)]^2 + 8a^2b^2c^2 - 2c^4}{2ab - c}.$ R. $(2ab + c)(4a^2b^2 + c^2).$
297. $\frac{(6x^2y^2 - 15x^2 : 5x)(2xy^2 + 1)}{12x^2y^4 - 3x}.$ R. 1.
298. $\frac{3a^2x^2 + 3b^2 - 6abx + 9a^2x - 9ab}{(a^3x^3 - ab^2x)(ax - b + 3a)}.$ R. $\frac{3}{ax(ax + b)}.$
299. $\frac{2a^3 + 3a^2b - 2a - 3b}{2a^2 - 2a + 3b(a - 1)}.$ R. $a + 1.$
300. $\frac{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{ab}\right) \cdot a^5b^2 - a^5 - a^5b}{a^4b}.$ R. $a + b.$
301. $\frac{\left(\frac{1}{a} - \frac{x}{ab} + \frac{1}{b}\right) - \frac{1}{ab}(a + b + x) + \frac{x^2 + 1}{ab}}{abx - ab}.$ R. $\frac{x - 1}{a^2b^2}.$
302. $\frac{4a^2y^4 - 4ay^3 + y^2 + (2ay - 1)^2}{(y^2 - 1)(2ay - 1)^2}.$ R. $\frac{1}{y^2 - 1}.$
303. $\frac{x^5 - x^2 - x + 1}{x^5 - 2x^2 + x}.$ R. $\frac{1}{x(x + 1)}.$
304. $\frac{x^2 + 4 - 4x}{x^3 + 2 - 2x^2 - x}.$ R. $\frac{x - 2}{x^2 - 1}.$
305. $\frac{ax + 1 - a - x}{ax - 1 - a + x}.$ R. $\frac{a - 1}{a + 1}.$
306. $\frac{xy^3 + 2x^2y^2 + x^3y + xy^2(x + y)^2}{xy^2 - x - y(1 - y^2)}.$ R. $\frac{xy(x + y)}{y - 1}.$
307. $\frac{a^2 - b^2 + ac - bc}{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}.$ R. $\frac{a - b}{a + b - c}.$
308. $\frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{a^2 + 2ab - c^2 + b^2}.$ R. $\frac{a - b - c}{a + b + c}.$
309. $\frac{0,125x^2a^2 - a^2 - \frac{x^2b^2}{8} + b^2}{(a + b)(0,125x^2 - 1)}.$ R. $a - b.$
310. $\frac{ax^3 - a\sqrt{0,0256} + \frac{4b}{25} - x^2b}{(0,4 + x)(a - b)}.$ R. $x - \frac{2}{5}.$

311. $\frac{ax^2 + 0,1(6)x^2 - a - \frac{1}{6}}{(x-1)\left(a + \frac{1}{6}\right)}$. R. $x + 1$.
312. $\frac{2(x^2 + y^2) - 4xy + 6(x-y)^2}{2(x^2 - y^2)(x-y)}$. R. $\frac{4}{x+y}$.
313. $\frac{4x^2 + 12x + 9 - 2b^2x - 3b^2}{2x + 3 - b^2}$. R. $2x + 3$.
314. $\frac{a^3 - a^2b - 4a + 4b}{(a^2 - b^2)(a-2)}$. R. $\frac{a+2}{a+b}$.
315. $\frac{4x^2 - 1}{y(2x+1) - 4x - 2}$. R. $\frac{2x-1}{y-2}$.
316. $\frac{x^3 + bx^2 + ax + ab}{x^2 - ax + bx - ab}$. R. $\frac{x^2 + a}{x-a}$.
317. $\frac{a^4 : 25 - 0,04b^4 - (a^2b^2 - b^4) : 25}{(a^3 - a^2b) : 5}$. R. $\frac{a+b}{5}$.
318. $\frac{\frac{17}{12}x^2 - 1,41(6) - x^2 + 1}{\frac{x-1}{12}}$. R. $5(x+1)$.
319. $\frac{ac + ad + bc + bd - a(c+d)}{ac^2 - ad^2 + bc^2 - bd^2}$. R. $\frac{b}{(a+b)(c-d)}$.
320. $\frac{a^2x - a^2 - b^2x + b^2}{ax - a + bx - b}$. R. $a - b$.
321. $\frac{a^3 - 2a^2 + 9a - 18 + 6a(a-2)}{a^2 - 2a + 3a - 6}$. R. $a + 3$.
322. $\frac{7 + x^3 - 7x^2 - x}{(x-1)(x-7)}$. R. $x + 1$.
323. $\frac{(1-ab)^2 - (a-b)^2}{a^3b^2 - a^5b^2}$. R. $\frac{1-b^2}{a^3b^2}$.
324. $\frac{3a^3 + ab^2 - 6a^2b - 2b^3}{9a^5 - ab^4 - 18a^4b + 2b^5}$. R. $\frac{1}{3a^2 - b^2}$.
325. $\frac{a^5 - ba^4 - ab^4 + b^5}{a^4 - ba^3 - a^2b^2 + ab^3}$. R. $\frac{a^2 + b^2}{a}$.
326. $\frac{x^3 + x^2y - x - y}{(x^2 + 2xy + y^2)(x-1)}$. R. $\frac{x+1}{x+y}$.
327. $\frac{a^4 - b^4 + 2ab(a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2 + 2ab)(a-b)}$. R. $a + b$.
328. $\frac{xy(a^2 - b^2) + abx^2 - aby^2}{abx^2 + aby^2 + xy(a^2 + b^2)}$. R. $\frac{ax - by}{ax + by}$.

329. $\frac{2x^4 + 4x^3y + 2x^2y^2 + 4x^2yz + 2x^2z^2 + 4x^3z}{x^3 - xy^2 - xz^2 - 2xyz}$.
330. $\frac{2(x^2 + y^2) + 4xy - 2z^2}{4z(z + 2x) + 4x^2 - 4y^2}$.
331. $\frac{2ax^3 + a^2x^2 + x^4 - b^4}{x^2(2b^2 - a^2) + x^4 + b^4}$.
332. $\frac{2b^2 + a^2 - 3ab + ac - 2bc}{2bc + a^2 - b^2 - c^2}$.
333. $\frac{x^2(x^2 + a^2)^2}{\frac{x^{10} - a^{10}}{x^2 - a^2} - \frac{x^{12} + a^{12}}{x^4 + a^4}}$.
334. $\frac{x^3 + y^3}{2(x + y)}$.
335. $\frac{a^3 + b^3 + (a + b)^3}{2(a + b)}$.
336. $\frac{(x^2 - y^2)(x^3 - y^3)}{(x - y)(x^3 + y^3)}$.
337. $\frac{3x^3 + 24}{2x + 4 - 5(x + 2)}$.
338. $\frac{x^2 - 3xy + xz + 2y^2 - 2yz}{x^3 - y^2 + 2yz - z^2}$.
339. $\frac{a^3 - 3a^2b - b^3 + 3ab^2 + x(a - b)^3}{(1 + x)(a^2 - 2ab + b^2)}$.
340. $\frac{a^3x^3 + b^3x^3 + 27(a^3 + b^3)}{(x + 3)(a + b)}$.
341. $\frac{a^3x^2 + b^3x^2 + 3abx^2(a + b) + (a + b)^3}{a^2x^2 + 2abx^2 + b^2x^2 + (a + b)^2}$.
342. $\frac{8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3 - 1}{(2a - 3b)^2 + 2a - 3b + 1}$.
343. $\frac{a^5 + b^5 - a^2b^3 - a^3b^2}{(a - b)^2(a^2 + ab + b^2)}$.
344. $\frac{27a^3x + 54a^2bx + 36ab^2x + 8b^3x - (3a + 2b)^3}{(x^2 - 1)(3a + 2b)^2}$.
345. $\frac{8ax^3 + ay^3 + 8bx^3 + by^3}{4x^2 - 2xy + y^2}$.
346. $\frac{(x^3 - 1 - 3x^2 + 3x)(x - 1)^2(x - 1) - 1}{(x - 1)^3 + 1}$.
347. $\frac{a^3x - a^3y - 3a^2x^2 + 3a^2xy + 3ax^3 - 3ax^2y + x^3y - x^4}{(x - y)(a - x)^2}$.
- R. $\frac{2x(x + y + z)}{x - y - z}$.
- R. $\frac{x + y - z}{2(x - y + z)}$.
- R. $\frac{x^2 + ax - b^2}{x^2 + b^2 - ax}$.
- R. $\frac{a - 2b}{a + b - c}$.
- R. $\frac{1}{a^2}$.
- R. $\frac{x^2 - xy + y^2}{2}$.
- R. $\frac{2(a^2 + b^2) + ab}{2}$.
- R. $\frac{x^3 - y^3}{x^2 - xy + y^2}$.
- R. $-x^2 + 2x - 4$.
- R. $\frac{x - 2y}{x + y - z}$.
- R. $a - b$.
- R. $(x^2 - 3x + 9)(a^2 - ab + b^2)$.
- R. $a + b$.
- R. $2a - 3b - 1$.
- R. $a + b$.
- R. $\frac{3a + 2b}{x + 1}$.
- R. $(2x + y)(a + b)$.
- R. $(x - 1)^3 - 1$.
- R. $a - x$.

$$\begin{aligned}
 348. & \frac{0,125x^3 - 1 + \frac{x^3y}{8} - y}{0,25(x^2 + 2x + 4)(y + 1)} & \text{R. } \frac{x-2}{2}. \\
 349. & \frac{0,027x^3 + 8 - \frac{27x^3y^3}{1000} - 8y^3}{(0,09x^2 - 0,6x + 4)(y^2 + y + 1)} & \text{R. } (1-y) \left(\frac{3x}{10} + 2 \right). \\
 350. & \frac{6a^2b^2 - 3a^3b - 3ab^3 + (a-b)(a^3 - b^3)}{(b-a)(a^2 + b^2 - 2ab)} & \text{R. } b - a. \\
 351. & \frac{x^3y^2 - x^3y^2 + y^2(1-x^2)}{[(1-xy)^2 - (x-y)^2](x^2 - x + 1)} & \text{R. } \frac{y^2(x+1)}{1-y^2}. \\
 352. & \frac{x^4 + ax^3 - a^2x^4}{x^4 - a^4x^4 + 2ax^3 + a^2x^2} & \text{R. } \frac{x}{x+a+a^2x}. \\
 353. & \frac{a^2 + 2a + 2}{(a+1)^4 - 1} \cdot \frac{a^2}{a+2} & \text{R. } \frac{a}{(a+2)^2}. \\
 354. & \frac{x^2 + 6x + 5}{x^3 + 5x^2 - x - 5} & \text{R. } \frac{1}{x-1}. \\
 355. & \frac{x^4 - 7x^2 + 6}{(x^2 - 6)(x+1)} & \text{R. } x - 1.
 \end{aligned}$$

9. Operații cu fracții algebrice

$$\begin{aligned}
 356. & \frac{a-b}{a} - \frac{a+b}{b} + \frac{3a^2+b^2}{2ab} & \text{R. } \frac{a^2-b^2}{2ab}. \\
 357. & \frac{a+b}{a} + \frac{a-b}{b} + 2. & \text{R. } \frac{(a+b)^2}{ab}. \\
 358. & \left(\frac{a+b}{a^2b} + \frac{a-b}{ab^2} + \frac{2ab}{a^2b^2} \right) \cdot \frac{a}{a+b} & \text{R. } \frac{a+b}{ab^2}. \\
 359. & \frac{1}{(a-b)^2} - \frac{b}{(b-a)^3} & \text{R. } \frac{a}{(a-b)^3}. \\
 360. & \frac{3}{x+2} - \frac{4}{x-2} + \frac{2x}{x^2+4x+4} & \text{R. } \frac{x^2-20x-28}{(x+2)^2(x-2)}. \\
 361. & \frac{1}{p-3} - \frac{3}{2p+6} - \frac{p}{2p^2-12p+18} & \text{R. } \frac{-2p^2+15p-45}{2(p-3)^2(p+3)}. \\
 362. & \frac{a+b}{ab} + \frac{b+c}{bc} + \frac{c+a}{ac} & \text{R. } \frac{2(ab+bc+ca)}{abc}. \\
 363. & \left(\frac{c^2-b^2-a^2}{2ab} + 1 \right) \cdot \frac{2a}{a+c-b} & \text{R. } \frac{c-a+b}{b}. \\
 364. & \frac{a^2-x^2-y^2}{2xy} - 1. & \text{R. } \frac{(a+x+y)(a-x-y)}{2xy}. \\
 365. & \frac{[(2a-3)(2a+3)]^2 + 72a^2 - 82}{8} \cdot \frac{4a^2+1}{4} \cdot \frac{2a-1}{2} - 2a & \text{R. } 1.
 \end{aligned}$$

366. $\left(\frac{2a-1}{4} - \frac{a+1}{3} + \frac{a^2+8}{12}\right) : \frac{a+1}{6} + \frac{a^2+a}{2}$. R. $\frac{(a+1)^2}{2}$.
367. $\left(\frac{4a^3-8a^2}{8a^2} - \frac{a^2-4}{4a}\right) : \frac{a-2}{2} + 0,5$. R. $\frac{a-1}{a}$.
368. $\left(\frac{4a^2-16}{6} : \frac{a+2}{3} - \frac{a-4}{4}\right) \cdot \frac{4}{7a-12}$. R. 1.
369. $\left\{\frac{[(2a-3)(2a+3)]^2 + 72a^2 - 85}{8} : \frac{2a^2+1}{4} - 3a^2 + 1\right\} \cdot \frac{1}{(a+1)^2}$. R. $\frac{a-1}{a+1}$.
370. $\left[\frac{(19^2 : 21^3) \cdot (21^2 : 19^3) \cdot 399}{4} - a^2\right] : \left(\frac{1}{2} + a\right) + a$. R. $\frac{1}{2}$.
371. $\left[\frac{(3^2 \cdot 5^6 \cdot a^2) : (5^4 \cdot b^2 \cdot 3^4)}{5^2} - \frac{3^2}{b^2}\right] : \left(\frac{a}{3b} - \frac{3}{b}\right) - \frac{3}{b}$. R. $\frac{a}{3b}$.
372. $\left(0,1(6)x^2 - \frac{a^2}{6}\right) : \frac{x-a}{3} + \frac{a-x}{2}$. R. a .
373. $\frac{25x^2-7x:28x^3}{5x-\frac{1}{2x}} - \frac{10x^2-1}{2x} - \frac{1}{x}$. R. 0.
374. $\left\{\frac{\left[\frac{4x^2-1,1(3)+\frac{2}{15}}{2x}\right] : (2x+1)}{2x} + \frac{1}{2x} - x^2\right\} : (1-x) - x$. R. 1.
375. $\frac{6x^2-4x^2:6x^3+\frac{2}{3x}+3x^2-1}{6x-2} - \frac{2x-2}{4}$. R. $x+1$.
376. $\left[\left(\frac{72x^3-2x}{48x^2+8x}\right)^2 + \frac{3x}{4} - \frac{1}{8}\right] : \frac{(6x-1)}{4} - \frac{3x}{2}$. R. $\frac{1}{4}$.
377. $\left(\frac{4x^2-8xy}{x} + \frac{2x^4-8x^3y+8x^2y^2}{x^4-2x^3y}\right) : \frac{x-2y}{x} - 4x$. R. 2.
378. $\left(\frac{65x^2y-60x^2y^2}{39x^2y^2-36xy^3} \cdot \frac{5x}{3y^2} - 1\right) : \frac{5x-3y^2}{3y^2} - \frac{5x}{3y^2}$. R. 1.
379. $\left[\frac{x^2+xy}{2x} + \frac{4(3x^2+3xy+0,75y^2)}{2x+y}\right] \cdot \frac{2}{13x+7y}$. R. 1.
380. $\left(\sqrt{\frac{27 \cdot 8a^3}{3^4 \cdot 2^2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2a}} \cdot \frac{3}{2} - x^2\right) : \left(\frac{a-x}{2}\right) - 2x - a$. R. a .
381. $\left[\frac{ax^3+x^2-4a-4}{4a+4} \cdot \frac{16}{x+2} - x^2(x-2)\right] : (x^2-4) + x$. R. 2.
382. $\left[\left(\frac{\sqrt{343}}{11} \cdot \frac{\sqrt{847}}{7}\right)^2 - \frac{x^2}{25}\right] : \left(7 + \frac{x}{5}\right) + \frac{x}{5}$. R. 7.
383. $\left(\frac{a^2x-a^2y-b^2x+b^2y}{4(ax-ay+bx-by)} \cdot \frac{a-b}{4} - 1\right) : \left(\frac{a-b}{4} + 1\right) - \frac{a-b}{4}$. R. -1.

$$384. \left[\left(\frac{a^2x^2 - 4a^2 + x^2 - 4}{a^2x^2 + x^2} \cdot \frac{x}{x+2} \right)^2 - 1 \right] : \left(\frac{x-1}{x} \right) + \frac{4}{x}. \quad \text{R. } 0.$$

$$385. \left[\frac{a^4 + 2a^3 + a^2}{(a+1)^2} - 9 \right] \cdot \frac{1}{3a-9} - \frac{a}{3}. \quad \text{R. } 1.$$

$$386. \left[\left(\frac{9a^2 - x^2 - 2x - 1}{3a - x - 1} - 3a \right)^2 + 2(x+1) + 1 \right] : (x+2). \quad \text{R. } x+2.$$

$$387. \left(\frac{b^2 - 2b + 1 - 4a^2}{2a + b - 1} + 2a \right)^2 + 2(b-1) + 1 - b^2. \quad \text{R. } 0.$$

$$388. \frac{4a^2 - 4ax + x^2 - (2b+x)^2}{2a+2b} \cdot \frac{1}{a-x-b} - 2. \quad \text{R. } 0.$$

$$389. \left(\frac{x^2 + 3x - x^1 - 3x^3}{x^2 + 3x} \cdot \frac{1}{1-x} \right)^2 + 2(x+1) + 1 : (x+2)^2 - 1 \quad \text{R. } 0.$$

$$390. \left[\left(\frac{3x^2 - 2xy - y^2}{3x+y} \right)^2 - (x-y)^2 + x^2 + y^2 \right] : (x^2 + y^2)^2 \quad \text{R. } \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

$$391. \frac{1}{b^3c^2a} + \frac{1}{c^3a^2b} + \frac{1}{a^3b^2c}. \quad \text{R. } \frac{a^2c + b^2a + c^2b}{a^3b^3c^3}.$$

$$392. \frac{a-b-c}{bc} + \frac{b+c+a}{ca} + \frac{c+a-b}{ab}. \quad \text{R. } \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}.$$

$$393. \frac{a^2 + ab + b^2}{ab} + \frac{b^2 + bc + c^2}{bc} + \frac{c^2 + ac + a^2}{ac} - 1. \quad \text{R. } \frac{(b+c)(a+b)(c+a)}{abc}.$$

$$394. \frac{a^2 + ab + b^2}{a^2} + \frac{a^2 - ab - b^2}{ab} + \frac{a^2 - ab - b^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2}. \quad \text{R. } \frac{a^2 - b^2}{b^2}.$$

$$395. \frac{a+2b}{a+b} - \frac{(3a+2b)b}{(a+b)^2}. \quad \text{R. } \frac{a^2}{(a+b)^2}.$$

$$396. \frac{7}{2n-m} - \frac{6}{m+2n} - \frac{12m}{4n^2-m^2}. \quad \text{R. } \frac{1}{2n-m}.$$

$$397. \frac{3x+2}{x^2-2x+1} - \frac{6}{x^2-1} - \frac{3x-2}{x^2+2x+1}. \quad \text{R. } \frac{10(x^2+1)}{(x-1)^2(x+1)^2}.$$

$$398. \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} + \frac{2ab}{a^2-b^2}. \quad \text{R. } \frac{a+b}{a-b}.$$

$$399. \frac{ax}{a^2-x^2} + \frac{a-x}{a+x} + \frac{a+x}{a-x}. \quad \text{R. } \frac{2(a^2+x^2)+ax}{a^2-x^2}.$$

$$400. \frac{x}{x+y} - \frac{y}{x-y} - \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}. \quad \text{R. } \frac{2y}{y-x}.$$

$$401. \frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{2a-b}{a^2+ab}. \quad \text{R. } \frac{4}{a+b}.$$

$$402. \frac{1}{x-y} + \frac{x+2y}{x^2-xy} + \frac{x-y}{x^2}. \quad \text{R. } \frac{3x^2+y^2}{x^2(x-y)}.$$

$$403. \frac{a+x}{a-x} + \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2} - \frac{a-x}{a+x}. \quad \text{R. } \frac{a^2+4ax+x^2}{a^2-x^2}.$$

404. $\frac{x^2 + y^2}{xy} - \frac{x^2}{xy + y^2} - \frac{x^2}{x^2 + xy}$. R. $\frac{y}{x}$.
405. $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{ab}} (a + b)^2$. R. $(a + b)^3$.
406. $\left[\left(\frac{a}{2} - 1\right)^2 + a\right]\left(\frac{a^2}{4} - 1\right)$. R. $\frac{a^4}{16} - 1$.
407. $\left[\left(\frac{2a}{b} - \frac{b}{2a}\right)^2 + 2\right]\left(\frac{ab}{16a^4 + b^4}\right)$. R. $\frac{1}{2ab}$.
408. $\left[\left(\frac{a^2x}{2} - \frac{3}{ax^2}\right)^2 - \frac{a^4x^2}{4}\right] \times \frac{x}{a^3x^3 - 3} : \frac{3}{a^2x^3}$. R. -1 .
409. $\frac{1-a}{3b^2} \cdot \frac{b^3}{1-a^2} + 1 - a - \frac{b}{3(1+a)}$. R. $1 - a$.
410. $\frac{x+y}{4y^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} (2xy - 2y^2)$. R. $\frac{x^2+y^2}{2y}$.
411. $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \cdot \left(-\frac{3a^2}{4a-4b}\right) \frac{4}{a^2+ab}$. R. $-\frac{3a}{a^2+b^2}$.
412. $\left[\left(\frac{a}{m+1} - d + \frac{a}{m-1}\right)(m^2-1) - 2am\right] : (m+1)$. R. $-d(m-1)$.
413. $-\frac{b^2-a^2}{a} \cdot \left(-\frac{b^2+a^2}{5a+5b}\right)$. R. $\frac{(b-a)(b^2+a^2)}{5a}$.
414. $\left(\frac{2ab}{a^2-b^2} + \frac{b}{a^2+ab} - \frac{a+b}{a^2-ab} + \frac{1}{a}\right) \cdot \frac{a^2-b^2}{2a^2-a-3b}$. R. $\frac{b}{a}$.
415. $\left(\frac{1}{1-a} - 1\right) : \left(a - \frac{1-2a^2}{1-a} + 1\right)$. R. $\frac{1}{a}$.
416. $\left(m+1 - \frac{1}{1-m}\right) : \left(m - \frac{m^2}{m-1}\right)$. R. $-m$.
417. $\left(a - \frac{1}{1-a}\right) : \frac{a^2-a-1}{a^2-2a+1}$. R. $a-1$.
418. $\left(\frac{4c^2+21}{2-2c} - 6\right) : \frac{2cn+3n-4c-6}{2-2c^2}$. R. $\frac{(2c+3)(1+c)}{n-2}$.
419. $\left(\frac{2ab+4b-3a-6}{2-2b^2}\right) : \left(\frac{4b^2+21}{2+2b} - 6\right)$. R. $\frac{a+2}{(1-b)(2b-3)}$.
420. $\frac{3x^2y^3-12x^2y^5}{3(1-4y^2)} - x^2y^3 + \frac{0,04x^2-1}{\frac{x}{5}+1}$. R. $\frac{x}{5} - 1$.
421. $\left[\frac{3}{2}\left(\frac{a}{3} + \frac{b}{6}\right) : (2a+b) - 0,125\right] : 0,25a^2$. R. $\frac{1}{2a^2}$.

422. $\frac{\left(\frac{5x}{2a} - \frac{4x}{3a} + \frac{x}{a}\right)6a}{9ax}$. R. $\frac{13}{9a}$.
423. $\left(\frac{4a}{9b^3} - \frac{5b}{6a^3} + \frac{c}{10a^2b^2}\right)\left(\frac{90a^3b^3}{40a^4 - 75b^4 + 9abc}\right)$. R. 1.
424. $\left(\frac{20a^2b + c^2}{10a^3b^2} + 2ab^2 - \frac{3}{2ab}\right) \cdot \frac{10a^2b^2}{5a^2b(1 + 4a^2b^3) + c^2}$. R. 1.
425. $\frac{\frac{6-a^2}{6a} + \frac{a}{2} + \frac{2}{a} - \left(\frac{a}{3} + \frac{3}{a}\right)}{12a^2b^3} + 2$. R. 2.
426. $\left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{a+b}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right] : \frac{(a+b)^2}{ab}$. R. $\frac{1}{ab}$.
427. $\left[\frac{p-q\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)}{pq}\right] : \left[\frac{p^2+q^2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)}{pq}\right]$. R. $\frac{-(p+q)}{p^2+q^2}$.
428. $\left(\frac{a+1}{2a-2} + \frac{16}{2a^2-2} - \frac{a+3}{2a+2}\right) \cdot \frac{4a^2-4}{3}$. R. $13\frac{1}{3}$.
429. $\left(\frac{3a}{1-3a} + \frac{2a}{3a+1}\right) : \frac{6a^2+10a}{1-6a+9a^2}$. R. $\frac{1-3a}{2(1+3a)}$.
430. $\left(\frac{5a}{a+x} + \frac{5x}{a-x} + \frac{10ax}{a^2-x^2}\right) : \left(\frac{a}{a+x} + \frac{x}{a-x} + \frac{2ax}{a^2-x^2}\right)$. R. 5.
431. $\left(\frac{b}{a^2+ab} - \frac{2}{a+b} + \frac{a}{b^2+ab}\right) : \left(\frac{b}{a} - 2 + \frac{a}{b}\right)$. R. $\frac{1}{a+b}$.
432. $\left(\frac{a^2}{a+n} - \frac{a^3}{a^2+n^2+2an}\right) : \left(\frac{a}{a+n} - \frac{a^2}{a^2-n^2}\right)$. R. $\frac{a(n-a)}{n+a}$.
433. $\left(\frac{2a}{a+1} + \frac{2}{a-1} + \frac{4a}{a^2-1}\right) : \left(\frac{2a}{a+1} + \frac{2}{a-1} - \frac{4a}{a^2-1}\right)$. R. 4.
434. $\left(\frac{2ab}{4a^2-9b^2} + \frac{b}{3b-2a}\right) : \left(1 - \frac{2a-3b}{2a+3b}\right)$. R. $\frac{b}{2(3b-2a)}$.
435. $\left(\frac{p}{p^2-4} + \frac{2}{2-p} + \frac{1}{p+2}\right) : \left(p - 2 + \frac{10-p^2}{p+2}\right)$. R. $\frac{1}{2-p}$.
436. $\left(\frac{2a}{2a+b} - \frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right) : \left(\frac{2a}{4a^2-b^2} + \frac{1}{b-2a}\right)$. R. $\frac{2a(b-2a)}{b+2a}$.
437. $\left(\frac{8+a^3}{x^2-y^2} : \frac{4-2a+a^2}{x-y}\right) : \left(x + \frac{xy+y^2}{x+y}\right)$. R. $\frac{a+2}{(x+y)^2}$.
438. $\left(x - \frac{4xy}{x+y} + y\right) : \left(\frac{x}{x+y} - \frac{y}{y-x} - \frac{2xy}{x^2-y^2}\right)$. R. $x-y$.
439. $\left(\frac{b^2}{a^3-ab^3} + \frac{1}{a+b}\right) : \left(\frac{a-b}{a^2+ab} - \frac{a}{b^2+ab}\right)$. R. $\frac{b}{b-a}$.
440. $\left(\frac{3a+2}{3a^2+1} - \frac{18a^3-a-9}{9a^4-1} + \frac{3a-2}{3a^2-1}\right) : \frac{a^2+10a+25}{9a^4-1}$. R. $\frac{1}{a+5}$.

441. $\left(\frac{x+1}{1-x} - \frac{1-x}{1+x} - \frac{4x^2}{x^2-1}\right) : \left[-2\left(\frac{1}{x^3+x^2} - \frac{1-x}{x^2} - 1\right)\right]$. R. $\frac{2(x+1)}{1-x}$.
442. $\left(\frac{1+2n}{4+2n} - \frac{n}{3n-6} + \frac{\frac{2}{3}n^2}{4-n^2}\right) \frac{24-12n}{6+13n}$. R. $\frac{2}{2+n}$.
443. $\left[\frac{a+b}{2(a-b)} - \frac{a-b}{2(a+b)} - \frac{2b^2}{b^2-a^2}\right] \cdot \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$. R. $\frac{2}{a}$.
444. $\left(\frac{5}{2a+3} + \frac{2}{3-2a} + \frac{2a+9}{4a^2-9}\right) : \frac{8}{4a^2+12a+9}$. R. $a+1.5$.
445. $\left(\frac{1}{2a-b} + \frac{3b}{b^2-4a^2} - \frac{2}{2a+b}\right) : \left(\frac{4a^2+b^2}{4a^2-b^2} + 1\right)$. R. $-\frac{1}{4a}$.
446. $\left(\frac{1}{p-2q} + \frac{6q}{4q^2-p^2} - \frac{2}{p+2q}\right) : \left(\frac{p^2+4q^2}{p^2-4q^2} + 1\right)$. R. $-\frac{1}{2p}$.
447. $\left[\frac{a^2}{a^2-b^2} - \frac{a^2b}{a^2+b^2} \cdot \left(\frac{a}{ab+b^2} + \frac{b}{a^2+ab}\right)\right] : \frac{b}{a-b}$. R. $\frac{a}{a+b}$.
448. $\left(a - \frac{4ab}{a+b} + b\right) : \left(\frac{a}{a+b} - \frac{b}{b-a} - \frac{2ab}{a^2-b^2}\right)$. R. $a-b$.
449. $\left(\frac{a^2+b^2}{ab} - 2\right) : \left(\frac{2a^2+2ab}{a^2+2ab+b^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b}\right)$. R. $\frac{2}{b}$.
450. $\left[\frac{(a+b)^2+2b^2}{a^3-b^3} - \frac{1}{a-b} + \frac{a+b}{a^2+ab+b^2}\right] \cdot \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$. R. $\frac{1}{ab}$.
451. $2 \frac{a^2x-ax^2}{a^2-x^2} + \frac{a^3+a^2x}{a^2+2ax+x^2} + \frac{ax^2-x^3}{a^2-x^2}$. R. $a+x$.
452. $\frac{1}{x^2-ax+a^2} + \frac{1}{x^2+ax+a^2} + \frac{2ax}{x^4+a^2x^2+a^4}$. R. $\frac{2}{x^2-ax+a^2}$.
453. $1 - \frac{8}{a^2-4} \left[\left(1 - \frac{a^2+4}{4a}\right) : \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2}\right)\right]$. R. $\frac{a-2}{a+2}$.
454. $\left(\frac{1+a^2}{1-a^2} - \frac{1-a^2}{1+a^2}\right) : \left(\frac{1+a}{1-a} - \frac{1-a}{1+a}\right)$. R. $\frac{a}{1+a^2}$.
455. $\left(\frac{a+b}{b} - \frac{2b}{b-a}\right) \times \frac{b-a}{a^2+b^2} + \left(\frac{a^2+1}{2a-1} - \frac{a}{2}\right) : \frac{2+a}{1-2a}$. R. $-\frac{2+b}{2b}$.
456. $\frac{4a^2}{a^4+a^3+a+1} : \left(\frac{1}{a^2+2a+1} - \frac{2}{a+1} \cdot \frac{1}{1-a} + \frac{1}{a^2-2a+1}\right)$. R. $\frac{(a-1)^2}{a^2-a+1}$.
457. $\frac{a-2n}{a^3+n^3} - \frac{a-n}{a^2n-an^2+n^3} - \frac{1}{an+n^2}$. R. $-\frac{2}{n(a+n)}$.
458. $\frac{1}{n-x} - \frac{3nx}{n^3-x^3} + \frac{x-n}{n^2+nx+x^2}$. R. 0.

$$459. \frac{a}{b+x} - \frac{bx}{b^2+x^2} + \frac{x^2}{b^2-x^2} - \frac{2bx^3}{b^4-x^4}. \quad \text{R. } \frac{a-x}{b+x}.$$

$$460. \left[\frac{a-1}{3a+(a-1)^2} - \frac{1-3a+a^2}{a^3-1} - \frac{1}{a-1} \right] : \frac{a^2+1}{1-a} \quad \text{R. } \frac{1}{a^2+a+1}.$$

10. Valoarea numerică a unei expresii algebrice

461. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{1 - \frac{3x^2}{1-x^2}}{1 + \frac{x}{1+x}}; \quad E_2 = \left(\frac{2x^3+2x}{4x^2} - 1 \right) \cdot \frac{2x-2}{x^2-x}.$$

- 1) Să se calculeze valoarea lui E_1 și E_2 pentru $x = \frac{1}{4}$.
 2) Să se calculeze valoarea lui E_1 pentru $x = 1,41(6)$.
 3) Să se calculeze media proporțională a valorilor lui E_1 și E_2 , aflate la 1).

$$\text{R. 1) } E_1 = \frac{2}{3}; E_2 = 9; \quad 2) E_1 = \frac{22}{5};$$

3) media proporțională a lui E_1 și E_2 este $\sqrt{6}$.

462. Se dau expresiile:

$$a = 4x^2 + (8x^3 - 1) \cdot \left(\frac{2x+4x^2}{4x^2-1} - \frac{2x+1}{2x-1} \right)$$

și

$$b = \left(\frac{x^2-x}{x^2+1} + \frac{2x^2}{x^3-x^2+x-1} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2} \right).$$

- 1) Să se aducă la forma cea mai simplă.
 2) Să se arate apoi că:

$$ab - a + b + 1 = 0,$$

pentru orice valoare a lui x pentru care a și b au sens.

$$\text{R. } -2x - 1; \quad \frac{x+1}{x}.$$

463. Se dau expresiile:

$$A = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{\frac{1}{x}-1}; \quad B = \frac{\frac{x+1}{2}}{\frac{x+1}{2}-1}; \quad C = x - \frac{1-2x^2}{1-x} + 1.$$

- 1) Să se aducă la forma cea mai simplă.
 2) Să se calculeze media lor aritmetică.
 3) Să se calculeze valoarea numerică a mediei aritmetice găsite pentru

$$x = \frac{1,5 - \frac{1}{4}}{\sqrt{1,5625}} \cdot 1,1(6).$$

$$\text{R. 1) } A = \frac{1+x}{1-x}; \quad B = \frac{x+1}{x-1}; \quad C = \frac{x^2}{1-x};$$

$$2) \frac{x^2}{3(1-x)}; \quad 3) -\frac{49}{18}.$$

464. Se dă expresia:

$$\frac{x^3 - y^3}{x^2 + 2xy + y^2} : \frac{x^3 + xy^2}{x + y}.$$

Să se aducă la forma cea mai simplă și apoi să se calculeze valoarea numerică pentru:

$$x = \left(1,75 : \frac{2}{3} - 1,75 \cdot 1 \frac{1}{8}\right) : \frac{7}{16} \text{ și } y = \frac{8}{5} \sqrt{\frac{225}{4096}}.$$

$$\text{R. } \frac{x-y}{x}; \frac{3}{4}.$$

465. Să se afle valoarea numerică a expresiei:

$$\frac{2(7,125 + x) - \frac{1}{21} \sqrt{7056}}{\left(3x + 1 \frac{7}{8}\right) : 3}$$

$$\text{pentru } x = \frac{\left(\frac{5}{8} \cdot 3 + 3 \frac{5}{8}\right) : \frac{4}{19}}{2^2 \cdot 3^2 - 5^2}.$$

R. 5.

466. Se dă expresia:

$$F(x) = \left[\left(\frac{x}{x+1} - \frac{x^2}{x^2 + 2x + 1}\right) : \left(\frac{x}{x^2 - 1} - \frac{1}{x+1}\right)\right] \cdot \frac{x+1}{x}.$$

a. Să se aducă la forma cea mai simplă.

b. Să se calculeze valoarea numerică pentru:

$$x = \left[\frac{\left(0,15 \cdot 10 + 2 \frac{2}{3} + 3 \frac{3}{4}\right) \cdot 3,6}{14 - 15 \frac{1}{8} : 2} + \frac{59}{103}\right] \cdot \left(2,4 + 2 \frac{2}{11} \cdot \frac{\sqrt{10,89}}{3}\right).$$

R. a) $x = 1$; b) 23.

467. Se dă expresia:

$$F(x) = \left(\frac{x}{x+2} + \frac{1}{x^2 - 4}\right) \left(\frac{x+1}{x-1} + \frac{2x+5}{1-x^2}\right) : \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x}\right).$$

a. Să se restringă expresia.

b. Să se afle valoarea numerică pentru:

$$x = \frac{\left(0,305 : 10 - 0,00205 \cdot 10 + 2 \frac{1}{25} : 51\right) \cdot 13 \frac{1}{3}}{(11,9 - \sqrt{108,16}) : 0,75} + 1 \frac{2}{3}.$$

R. a) $2x$; b) 4.

468. Să se aducă expresia de mai jos la forma cea mai simplă și să se afle valoarea ei numerică pentru $u = -0,5$.

$$\left(\frac{u+2}{u-2}\right)^3 : \frac{u^3 + 4u^2 + 4u}{3u^2 - 12u + 12} \cdot \frac{u}{3}.$$

R. $\frac{u+2}{u-2}$; -0,6.

469. Se dau expresiile algebrice:

$$E_1 = 10x^3 + 5x^2 - 4x^2(2x + 1) + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$E_2 = x^2 + 2x + 1 - 2x^2(x + 1)^2.$$

- 1) Să se ordoneze după puterile descrescătoare ale lui x .
- 2) Să se scrie fiecare expresie sub formă de produs.
- 3) Să se simplifice fracția algebrică

$$\frac{E_1}{E_2}$$

și să se calculeze valoarea numerică a fracției obținute după simplificare pentru:

$$x = -\frac{1}{2} \text{ și } x = -3\frac{1}{2}.$$

$$\text{R. 2) } E_1 = (x + 1)^2(2x + 1);$$

$$E_2 = (1 - 2x^2)(x + 1)^2.$$

$$3) \frac{E_1}{E_2} = \frac{2x + 1}{1 - 2x^2}; 0; \frac{12}{47}.$$

11. Exerciții și probleme de sinteză

Să se efectueze:

$$470. \left[(\sqrt{(867)^3})^2 : (\sqrt{27 \cdot 17^{12}}) \cdot \frac{(\sqrt{289})^3}{3\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{15}}{2601} + 4\frac{1}{3} \right] \cdot (-2)^0 \cdot (-5)^0.$$

R. 10.

$$471. \left[(\sqrt{0,625})^2 : \frac{5^6}{2^{20}} \right]^3 \cdot \frac{8}{125} \cdot \frac{1}{5^{36}} : \left(\frac{2}{5} \right)^{54} + (13)^0 - 3.$$

R. -1.

$$472. \left\{ \frac{\left[\left(\frac{16}{125} \right)^5 \cdot (0,4)^8 \right]^3}{\left(\frac{2}{5} \right)^{69}} - 2^{15} + (\sqrt{0,125})^4 : \frac{1}{16} \right\} : \frac{1}{2^{10}} - (-1).$$

R. 2.

$$473. \left[\sqrt{(0,75)^5} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} + 0,125 \right]^5 \cdot \frac{125}{8} : \left(\frac{5}{2} \right)^8 \cdot \frac{2^5}{5^7} + \frac{4}{5^7} - \frac{6}{5^6}.$$

R. $-\frac{1}{5^5}.$

$$474. \left\{ \left[\frac{2(x - y)^2 - 5y(y - x)}{2x + 3y} \right]^2 (x + y) \right\} : (x - y) - 2xy + 2y^2.$$

R. $(x - y)^2$

$$475. \left\{ \left[\frac{x(y - 1) + z(1 - y) - y + 1}{x - z - 1} \right]^2 (y + 1) \right\} : (y - 1) + 2y + 2.$$

R. $(y + 1)^2.$

$$476. \left\{ \left[\frac{y(2 - x^2) + z(x^2 - 2) - 2 + x^2}{y - z - 1} (x^2 + 2) \right]^2 - 16 - x^4 \right\} : (x^4 - 3x^2).$$

R. $x^4 + 3x^2.$

$$477. \left[\frac{9(a^3 + a^2 - a) + a^3 + a^2 - a}{a^2 + a - 1} - a^2 - 2a - 16 \right] : (a - 4).$$

R. $4 - a$.

$$478. \left\{ \left[\frac{x(1 - y + y^2) - 1 + y - y^2}{1 - y + y^2} \right]^2 (x + 1) \right\} : (x - 1) + 2(x + 1).$$

R. $(x + 1)^2$.

$$479. \left\{ \left[\frac{(x^2 + 4x)^2 - 4}{x^2 + 4x + 2} + 6 \right] - xy - 2y + x^2 + 2x \right\} : [2(x + 1) - y].$$

R. $x + 2$.

$$480. \left\{ \left[\frac{9a^2 - (2a + 3b)^2}{5a + 3b} (a + 3b) \right]^2 + 18a^2b^2 + a^4x^2 + 81b^4x^2 \right\} : (1 + x^2).$$

R. $a^4 + 81b^4$.

$$481. \left\{ \left[\frac{(x + 3y)^2 - 4(y - x)^2}{5y - x} - 3x^3 - x^2y \right] : (1 - x) \right\} : (3x + y).$$

R. $1 + x$.

$$482. \left\{ \left[\frac{a(x - 1)^2 - x^2 + x + ax - a}{a - 1} \right]^2 + 2x^3 \right\} \cdot [x^2(x^2 - 1)] + x^9 - x^5 : (x^8 - x^4).$$

R. $x + 1$.

$$483. \left\{ \left[\frac{(x + 3y)^2 - 12(xy + 3x^2)}{5x + 3y} \right]^2 - 9y^2 \right\} \cdot (7x - 6y).$$

R. $7x$.

$$484. \left\{ \left[\frac{(4x^2 + 8x + 4)(2x - 2)}{8(x + 1)} \right]^2 + 2x^2 \right\} : (x^4 + 1).$$

R. 1 .

$$485. \left\{ \left[\frac{(4x^2 - 12xy + 9y^2)(2x + 3y)}{2x - 3y} \right]^2 + 72x^2y^2 - 82y^4 \right\} : (4x^2 + y^2).$$

R. $4x^2 - y^2$.

$$486. \left\{ \left[\frac{(27x^5y^2 - 36x^4y + 12x^3)(3x^2y + 2x)}{9x^5y - 6x^4} \right]^2 + 72x^2y^2 - 17 \right\} : (9x^2y^2 + 1).$$

R. $9x^2y^2 - 1$.

$$487. \left\{ \left[\frac{(75x^4y^2 - 30x^2y + 3)(5x^2y + 1)}{25x^4y^2 - 1} \right]^2 + 90x^2y \right\} : 9.$$

R. $25x^4y^2 + 1$.

$$488. \left\{ \left[\frac{(98x^5y^2 - 56x^4y + 8x^3)(7x^2y + 2x)}{14x^5y - 4x^4} \right]^2 + 392x^2y^2 - 20 \right\} : (49x^2y^2 + 2).$$

R. $49x^2y^2 - 2$.

$$489. \left\{ \left[\frac{(27x^5y^2 + 36x^4y + 12x^3) : 3x^2}{3x^2y + 2x} \right] (2x^2y - 2x) \right\}^2 + 72x^6y^2 - 17x^4.$$

R. $81x^3y^4 - x^4$.

$$490. \left\{ \left[\frac{[(16x^6y^4 - 8x^4y^3 + x^2y^2) : x^2y^2](4x^2y + 1)}{4x^2y - 1} \right]^2 - 257x^8y^4 + 32x^4y^2 \right\} : (1 - x^4y^2).$$

R. $1 + x^4y^2$.

$$491. \left\{ \left[\frac{3x^2 - 6x + 3}{3x - 3} \right]^2 + 2x^2 - 2 \right\} : (x^2 + 1) - 2x + 2.$$

$$R. (x - 1)^2.$$

$$492. \frac{[(12x^2y - 8)(3x^2y + 2) : 4 + 4 - x^2]^2 + 18x^2y^2 - 2x^4}{9x^4y^2 - x^2 - 9x^2y^2 + 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^4}.$$

$$R. 9x^2y^2 + 1.$$

$$493. \left\{ \left[\frac{2(x - y)^2 + 8y(y - x)}{2x - 10y} \right]^3 : (x - y) \right\} + 2x - 2y + 1.$$

$$R. (x - y + 1)^2.$$

$$494. E = \left[\frac{x^2(y - 1) + 2x(1 - y) + y - 1}{x - 1} \right]^2 : [(y - 1)^2 (x - 1)] : 8.$$

Pentru ce valori întregi date lui x , E este un număr întreg?

$$R. x = 8k + 1; k \in \mathbb{Z}.$$

$$495. \frac{6x^3 + 5xy + y^2}{2x + y}.$$

$$R. 3x + y.$$

$$496. \frac{3 - x^2 - 2x}{x + 3}.$$

$$R. (1 - x).$$

$$497. \frac{3x^3 + 2xy - y^2}{3x - y}.$$

$$R. x + y.$$

$$498. \frac{x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 6x + 3}{x^5 + x^4 - 9x - 9} + \frac{x^2 + x}{x^2 - 3}.$$

$$R. \frac{(x + 1)^2}{x^2 - 3}.$$

$$499. \frac{x^3 + y^2 + 1 - 2xy + 2x - 2y}{x^2 - y^2 - 1 + 2y}.$$

$$R. \frac{x - y + 1}{x + y - 1}.$$

$$500. \frac{a^6 + 2a^4 - 2a^5 - 2a^3 + a^2}{a^5 - a^4 + a^3 - a^2}.$$

$$R. (a - 1).$$

$$501. \frac{a^4 - 8a^3 + 13a^2 - 6a}{(a^2 - 6a)(a - 1)} + a^2 - 3a + 2.$$

$$R. (a - 1)^2.$$

$$502. \left[\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - x + 1} \cdot (x - 1) \right] : (x^3 - 1).$$

$$R. 1.$$

$$503. a^2b^2 + \frac{a^8 - 3a^4b^4 + b^8}{a^4 + a^2b^2 - b^4} - a^4.$$

$$R. -b^4.$$

$$504. \frac{x^2 + 2ax + a^2 - (b + c)^2}{(x + b)^2 - (a + c)^2} - 1.$$

$$R. \frac{2(a - b)}{x - a + b - c}.$$

$$505. \frac{[(1 + x - y - xy - yz + z) : (1 + x + z)(1 + y)]^3 - 3y^2(y^2 - 1)}{(1 - y)(1 + y^2 + y)}.$$

$$R. 1 + y^3.$$

$$506. \left[\frac{(x - xy + xy^2 - y^2 + y - 1)(y + 1)}{x - 1} + 3y^2 + 3y - 1 \right] : (3 + 3y + y^2).$$

$$R. y.$$

$$507. \left\{ \left[\frac{2(x-y)^2 - 5y^2 + 3xy}{2x - 3y} \right]^3 - 3xy(x+y) \right\} : (x^2 + y^2 - xy).$$

R. $x + y$.

$$508. \left[\left(\frac{3x^6 - x^{12} - 1}{x^3 - x^6 + 1} - x^3 \right) : (x^3 + 1) - 3x^2 + 3x \right] : (1 - 2x + x^2).$$

R. $x - 1$.

$$509. \frac{2x^5 + 4ax^4 + 2x^3(a^2 + b) + 4abx^3 + 2a^2bx}{x^6 + ax^5 - b^2x^2 - b^2ax} : \frac{2}{x^2 - b}.$$

R. $a + x$.

$$510. \left[1 + \frac{(a^4 + a^2b^2 + b^4)(a - b)}{a^3 + b^2 - ab} + b^3 \right] (a^3 - 1) - a^6.$$

R. -1 .

$$511. \frac{ax^2 + bx^2 - bx - ax + cx^2 - cx}{a + b + c} + 3x + 1.$$

R. $(x + 1)^2$.

$$512. \frac{a^2 - 3ab + ac + 2b^2 - 2bc}{a^2 - b^2 + 2bc - c^3} : (a - 2b).$$

R. $\frac{1}{a + b - c}$.

$$513. \frac{x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 6x + 3}{x^5 + x^4 - 9x - 9}.$$

R. $\frac{x + 1}{x^2 - 3}$.

$$514. \frac{a^3c - 2a^2c^2 + ac^3 - ab^2c}{(a^2 + c^2 - b^2)^2 - 4a^2c^2}.$$

R. $\frac{ac}{(a + c)^2 - b^2}$.

515. Să se aducă expresia la forma cea mai simplă, apoi să se afle pentru ce valoare a lui x expresia are valoare $3/5$.

$$\left\{ \left[\left(\frac{x}{x+1} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{x^2-1} \right) \left(\frac{x-1}{x+1} - \frac{2x-2}{x+1} + 1 \right) - 1 \right] : \frac{x+3}{x+1} \right\}.$$

R. $\frac{1-x}{1+x}; \frac{1}{4}$.

516. Să se aducă expresia la forma cea mai simplă, apoi să se afle pentru ce valoare a lui x expresia este egală cu 4.

$$\frac{x^4 + 3x^3 + 4}{x^2 - x + 2} + x - 1.$$

R. $(x + 1)^2; 1$ și -3 .

$$517. \frac{x^3 + x^5 + x}{x^5 + x^3 + x} (x^2 + 1).$$

R. $x^6 + 1$.

$$518. \frac{x^4 - 3x^2y^2 + y^4}{x^4 - x^2y^2 - x^3y + x^2 - y^2 - xy}.$$

R. $\frac{x^2 - y^2 + xy}{x^2 + 1}$.

$$519. \frac{x^3 - 8 - 6x^2 + 12x}{x^2 - 4x + 4} (x + 2).$$

R. $x^3 - 4$.

$$520. \frac{a^2 + 1 + b^2 - 2ab + 2a - 2b}{a^2 - 1 - b^2 + 2b} : \frac{(a - b + 1)^2}{-a + b - 1}.$$

R. $\frac{-1}{a + b - 1}$.

$$521. \left\{ \left[\left(\frac{6a^4 - 5a^3x + a^2(6a - 5x)}{6(a^3x + a^2x) - 6a^2 - 6a} \cdot \frac{6}{a} \cdot \frac{ax - 1}{6a - 5x} \right) - 3x \right]^3 + 9x - 27x^2 \right\} : (1 + 3x + 9x^2).$$

R. $1 - 3x$.

522. Să se figureze în raport cu două axe ortogonale punctele următoare:
 $A(3,2)$; $B(3,4)$; $C(-1,2)$; $D(5,3)$; $M(5,0)$; $N(-5,0)$; $P(0,-4)$; $Q(0,3)$
 $O(0,0)$; $L(-3,-2)$; $E(4,4)$; $G(-6,6)$.

523. Se consideră punctele $A(3,4)$, $B(1,0)$, $C(-3,-4)$, $D(0,-2)$, $E(-1,0)$.
 Să se figureze aceste puncte și simetricile lor în raport cu axa xx' ,
 cu axa yy' și în raport cu originea.

524. Să se calculeze distanța de la origine până la punctul $M(3,4)$.

525. Să se figureze, prin diagrame, funcțiile definite pe E cu valori în F :

- a) $E = \{a, b, c\}$, $F = \{1, 5\}$;
 b) $E = \{1, 3, 4, 8\}$, $F = \{1, 3, 4, 8\}$;
 c) $E = \{m, n\}$, $F = \{x, y, z, t\}$.

526. Care dintre punctele mulțimii:

$$M = \{(1,5); (0,1); (-2,-4); (-1,6)\}$$

se află pe dreapta $y = 3x + 2$.

527. Se dă $f(x) = -2x + 5$.

Determinați coordonatele a trei puncte situate pe dreapta dată.

528. Se consideră următoarele puncte într-un sistem de axe ortogonale:
 $A(3,0)$, $B(1,5)$, $C(0,6)$, $D(-4,-1)$.

Care dintre ele aparțin dreptei reprezentată prin

$$f(x) = -x + 6.$$

529. Să se reprezinte grafic:

$$y = x + 1; y = 3 + x; x = y + 3; y = 2x - 3;$$

$$x + y = 6; y = \frac{1}{2}x + 3; y = x - 1; y = \frac{3}{5}x - \frac{3}{8};$$

$$y = -2x + 1; y = 0,7x + 2; x - y = 6.$$

530. Să se construiască dreptele:

$$3y + x = 0; y = \frac{1}{2}x - 2; y = \frac{1}{2}x - 1;$$

$$y = \frac{1}{2}x + 1; y = \frac{1}{2}x + 2; x + y + 3 = 0;$$

$$4x + 3y = 18.$$

531. Să se verifice pe cale grafică dacă dreptele ce au ecuațiile: $5x - y = 7$,
 $x - 4y + 10 = 0$, $2x + 3y = 13$ sînt concurente.

532. Fie $f: R \rightarrow R$ prin relația $f(x) = ax + b$.

Să se determine a și b , știind că punctele $A(2,7)$ și $B(1,5)$ aparțin grafi-
 cului funcției $f(x)$.

$$R. a = 2, b = 3.$$

533. Se consideră funcția $f: R \rightarrow R$ dată prin $f(x) = ax + b$, $a, b \in R$.
Se cere:

1) Să se determine a și b astfel ca: $f(1) = 2$ și $f(-1) = 6$

2) Să se reprezinte grafic funcția $f: R \rightarrow R$ dată prin

$$f(x) = -2x + 4.$$

3) Se consideră funcția $f: R \rightarrow R$ dată prin $f(x) = -2x + 4$. Care sint valorile lui x pentru care $f(x)$ aparține intervalului $(4, 6)$.

R. 1) $a = -2$; $b = 4$;

3) $-1 < x < 0$.

534. Să se afle punctele de intersecție cu axele de coordonate ale dreptei ce trece prin punctele $A(2, 3)$ și $B(-1, -4)$.

$$R. \left(0, -\frac{5}{3}\right), \left(\frac{5}{7}, 0\right).$$

535. Se consideră funcția $f: R \rightarrow R$ unde $f(x) = ax + b$; $a, b \in R$.

Se cere să se determine a și b astfel ca $f(1) = 1$, $f(-2) = 7$.

R. $a = -2$, $b = 3$.

536. Folosind tabelul de variație, să se studieze monotonia funcției $y = 2x - 4$, apoi să se afle valorile funcției la extremitățile intervalului $[-1, 3]$.

R. (funcția este strict crescătoare)

-6 ; 2 .

537. Să se studieze semnul funcției $y = -3x + 1$, folosind tabelul de variație. Același lucru pentru $f(x) = 5x - 6$.

538. Să se determine a și b din $f(x) = ax - b$, știind că dreapta corespunzătoare are ordonata la origine de 2 unități și unghiul pe care îl face cu xx' este de 30° .

Aceeași întrebare dacă unghiul are 45° sau 60° sau 0° .

R. pentru 30° : $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $b = 2$;

„ 45° : $a = 1$, $b = 2$;

„ 60° : $a = \sqrt{3}$, $b = 2$;

„ 0° : $a = 0$, $b = 2$.

539. Fie funcția $f: R \rightarrow R$, de forma $f(x) = \frac{1}{5-x}$.

a) Este această exprimare corectă?

Să se studieze monotonia acestei funcții pentru $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ și $x \in \{8, 9, 10\}$

540. Fie funcția $f: R \rightarrow R$, de forma $f(x) = \frac{8x-2}{4x+1}$.

- a) Este această exprimare corectă?
- b) Pentru ce valori reale ale lui x , $f(x)$ devine 0?
- c) Pentru ce valori reale ale lui x , $f(x) \in Z$?

R. b) $x = \frac{1}{4}$,

c) $x = \left\{ -\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4} \right\}$.

541. Se consideră $f(x) = \frac{3}{4x^2-9}$.

- a) Să se afle domeniul de definiție al acestei funcții;
- b) Pentru ce valoare a variabilei x funcția $f(x)$ devine zero?

R. a) $E = R \setminus \left\{ +\frac{3}{2} \right\}$;

b) $\emptyset$.

542. În tabelul următor se află corespondența dintre două valori ale lui x și două valori ale lui y dintr-o funcție $f(x) = ax + b$.

- 1) Să se determine $f(x)$;
- 2) Să se completeze tabelul.

x	-2	0	1	4	5
y	-11	-5			

R. $f(x) = 3x - 5$

543. Se consideră $f(x) = ax - 3$. ($a \in R$).

- a) Să se arate că dreapta corespunzătoare lui $f(x)$ trece prin punctul $(0, -3)$, oricare ar fi a .
- b) Pentru ce valori ale lui a dreapta trece prin punctul $(1, 8)$?

R. b) $a = 11$.

544. Într-un triunghi dreptunghic ABC cu ipotenuza BC de 12 cm se duc paralele cu ipotenuza la distanțe de câte 1 cm.

Să se înscrie într-un tabel corespondența dintre distanțele variabile și lungimile paralelelor (mărginite la catetele triunghiului dreptunghic).

545. Să se reprezinte grafic variația lungimii unui cerc în funcție de raza cercului ($\pi = 3,14$), luând pentru R valorile 1, 2, 3, 4, 5, cm.

546. Un dreptunghi are baza de 3 m și înălțimea variabilă.

Să se reprezinte grafic variația ariei dreptunghiului în funcție de înălțime.

547. Un pieton a plecat din oraş la ora 12 şi a mers cu o viteză constantă de 3 km pe oră. La ora 14 pleacă pe acelaşi drum un alt pieton care merge cu o viteză de 4,5 km pe oră.
La ce oră şi la ce distanţă de oraş ajunge al doilea pieton pe cel dintii.
(Soluţie grafică.)

548. Un cilindru are raza de 3 cm şi înălţimea de 10 cm. Pe axa lui se ia un punct M situat la o distanţă x de la baza cilindrului şi se scoate conul care are ca bază, baza cilindrului şi vârful în M .

- 1) Să se exprime în funcţie de x volumul corpului rămas după această scoatere;
- 2) Să se alcătuiască tabloul de variaţie al funcţiei;
- 3) Să se construiască graficul acestei funcţii (se vor lua ca unităţi, pe axa absciselor, cîte 1 cm pentru fiecare cm de înălţime, pe axa ordonatelor cîte 1 cm pentru 10π cm³).
- 4) Să se determine x astfel încît corpul rămas să aibă un volum dat a cm³. Între ce limite trebuie să fie cuprins numărul a pentru ca problema să fie posibilă în cazul dimensiunilor date în enunţul problemei?

Indicaţie. Prezentăm tabelul de variaţie pentru cîteva valori:

x	0	2	4	—	—	—	10
V	90π	84π	78π	—	—	—	60π

R. 1) $V = 90\pi - 3\pi x$; $x \in [0, 10]$.

- 2) Funcţia este descrescătoare, avînd maximul său pentru $x = 0$ cînd corpul rămîne cilindric şi minimul pentru $x = 10$, cînd conul ajunge cu vârful în centrul celeilalte baze a cilindrului.
- 4) cu condiţia $0 \leq x \leq 10$ se obţine $60\pi \leq a \leq 90\pi$

649. Un buştean cilindric cu raza de 12 cm şi înălţimea de 3 m se ciopleşte la un capăt astfel încît să aibă un vîrf conic, înălţimea conului fiind x cm.

- 1) Să se exprime în funcţie de x volumul corpului obţinut prin cioplire;
- 2) Să se alcătuiască tabelul de variaţie al acestei funcţii;
- 3) Să se construiască graficul funcţiei.

R. 1) $V = 12\pi(3\ 600 - 8x)$:

- 2) Volumul are un maxim pentru $x = 0$, cînd corpul rămîne cilindric ($V = 43\ 200\pi$ cm³) şi un minim pentru $x = 300$, cînd corpul capătă forma de con ($V = 14\ 400\pi$ cm³).

550. Pe o sferă cu raza de 2 dm se consideră o calotă de înălţime x .

- 1) Să se exprime aria calotei în funcţie de x ;
- 2) Între ce limite poate varia înălţimea x ?
- 3) Între ce limite poate varia aria calotei?
- 4) Să se alcătuiască tabelul de variaţie şi să se facă graficul acestei funcţii;

5) Să se determine x astfel ca aria calotei să fie egală cu un număr dat a ; între ce limite poate fi cuprins numărul a , pentru ca problema să fie posibilă?

R. 1) $A = 4\pi x$; 2) $0 \leq x \leq 4$; 3) $0 \leq A \leq 16\pi$;

4) Funcția este crescătoare, avînd un minim 0, pentru $x = 0$, și un maxim pentru $x = 4$, în valoare de 16π ;

5) $x = a/4\pi$; $0 \leq a \leq 16\pi$.

551. Un cilindru are înălțimea de 10 cm, iar raza x variabilă.

1) Să se exprime aria sa laterală în funcție de x și să se construiască graficul acestei funcții, cînd x variază de la 0 la 5 ($x \in N$). (Pe axa absciselor se ia ca unitate 1 cm, pe axa ordonatelor se ia ca unitate $20\pi \text{ cm}^2$).

2) Să se exprime volumul său ca funcție de x și să se construiască graficul acestei funcții cînd x variază de la 0 la 5.

(Pe axa absciselor — aceeași unitate ca mai înainte; pe axa ordonatelor se ia ca unitate $10\pi \text{ cm}^3$.)

R. 1) $20\pi x \text{ cm}^2$; 2) $10\pi x^2 \text{ cm}^3$.

552. Un triunghi ABC are vîrfurile în punctele $A(2,0)$, $B(6,0)$, $C(x,5)$. Știind că $0 \leq x \leq 6$ și $x \in Z$, să se studieze:

a) variația înălțimii triunghiului dusă din vîrfurile C ;

b) variația ariei triunghiului ABC . (unitățile în cm)

R. a) $h = 5 \text{ cm}$ (constantă)

b) $A = 10 \text{ cm}^2$

553. Într-un sistem de axe rectangulare se consideră punctele:

$$M(x+1, 0), N(x+4, 0), P(2, 4).$$

Dacă $x \in [0, 3]$ și $x \in N$, să se afle:

a) cum variază baza triunghiului MNP ?

b) care este variația înălțimii duse din vîrfurile P al triunghiului?

c) care este variația ariei acestui triunghi (dimensiunile în dm)?

R. a) bază triunghiului = 3 dm (constantă)

b) înălțimea triunghiului = 4 dm (constantă)

c) Aria = 6 dm² (constantă)

12. Ecuații de gr. I cu o necunoscută

Să se rezolve următoarele ecuații de gr. I sau care conduc la ecuații de gr. I.

$$1. \frac{1}{x^2 + 2x + 1} + \frac{4}{x + 2x^2 + x^3} = \frac{5}{2x + 2x^2}.$$

R. $x = 1$.

$$2. \frac{7}{x^2 - 1} + \frac{8}{x^2 - 2x + 1} = \frac{37 - 9x}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

R. $x = 1 \frac{1}{2}$.

$$3. (x-1)(x-2) = (x-3)(x-4). \quad \text{R. } x = 2\frac{1}{2}.$$

$$4. \frac{x - \frac{1}{0,3}}{2 + \frac{1}{0,5}} - \frac{1-x}{3 + \frac{1}{5}} = \frac{3 - \frac{x}{0,2}}{0,6} + 7\frac{19}{96}. \quad \text{R. } x = 1\frac{1}{2}.$$

$$5. \frac{x-3}{2} - \frac{2(1-3x)}{0,2} + 1 = \frac{3\left(1 - \frac{x}{2}\right)}{2} - 7. \quad \text{R. } x = \frac{4}{25}.$$

$$6. x + \frac{1}{2} \left[\frac{2(x+1)}{3} + \frac{4(x+2)}{5} \right] = \frac{x-1}{2} + \frac{2}{3} \left[\frac{3(x-1)}{4} - \frac{6(x-1)}{5} \right]. \quad \text{R. } x = -\frac{20}{23}.$$

$$7. \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} x - 1 \right) - 1 \right] - 1 \right\} - 1 = 0. \quad \text{R. } x = 30.$$

$$8. \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} x - 1\frac{1}{2} \right) - 1\frac{1}{2} \right] - 1\frac{1}{2} \right\} - 1\frac{1}{2} = 0. \quad \text{R. } x = 45.$$

$$9. \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} x - 2\frac{1}{2} \right) - 2\frac{1}{2} \right] - 2\frac{1}{2} \right\} - 2\frac{1}{2} = 0. \quad \text{R. } x = 75.$$

$$10. \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} x + 2 \right) + 2 \right] + 2 \right\} - 1 = 0. \quad \text{R. } x = 3.$$

Să se rezolve ecuațiile următoare în care necunoscuta este x .

$$11. \frac{16a^2x^2 - 48ax + 36}{8ax - 12} - \frac{ax - 5}{5} - \frac{3ax}{2} - \frac{3ax}{10} = 2 - x. \quad \text{R. } x = 4.$$

$$12. \frac{36 - x^2}{x + 6} - \frac{12x^2 + 36x + 27}{3(2x + 3)} = \frac{2x - 1}{5}. \quad \text{R. } x = \frac{16}{17}.$$

$$13. \left(\frac{a^2 + x^2}{2ax} - 1 \right) : (a - x) = \frac{1}{2x} - \frac{2}{a} + \frac{1}{ax}. \quad \text{R. } x = \frac{2}{3}.$$

$$14. \left(\frac{x^2 + b^2}{2bx} - 1 \right) : (x - b) = \frac{1}{2b} - \frac{1}{2x} + \frac{4}{2bx} - \frac{4}{2ab} - \frac{4a - 8}{2abx}. \quad \text{R. } x = 2.$$

$$15. \frac{1 - 36x^2}{6x + 1} \cdot \frac{1 - 6x}{0,25(4x^2 - 16)} : \frac{1 - 12x + 36x^2}{x - 2} = 1. \quad \text{R. } x = -1.$$

$$16. \frac{108 - 3x^2}{18 + 3x} - \frac{12x^2 + 36x + 27}{12x + 18} = \frac{2x + 3}{2}. \quad \text{R. } x = 1.$$

$$17. \frac{x^2 + 2ax}{x^3 - a^3} + \frac{x}{(x+a)^2 - ax} = \frac{1}{x-a}, \quad x \neq a. \quad \text{R. } x = -a.$$

18. Să se rezolve ecuația în care necunoscuta este a .

$$\frac{4a^2 - 1}{1 + 2a} + \frac{a^2 + 9 + 6a}{(3+a)^2} = 8. \quad \text{R. } a = 4.$$

$$19. \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x+1} - \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x-1} = \frac{1,5x-2}{x^2-1}. \quad \text{R. } x = 1 \frac{1}{3}.$$

$$20. -4x - \{5x - [6x - (7x - (8x - 9))]\} = -10. \quad \text{R. } x = \frac{1}{2}.$$

$$21. \frac{2x^2 + 2x + 1}{(x+1)(x+2)} + \frac{2x^2 + 2x + 3}{(x+1)(x+3)} = \frac{2x^2 + 2}{(x+2)(x+3)} + 2. \quad \text{R. } x = -\frac{1}{2}.$$

$$22. \frac{1}{9} \left\{ \frac{1}{7} \left[\frac{1}{5} \left(\frac{1}{3} (x+2) + 4 \right) + 6 \right] + 8 \right\} = 1. \quad \text{R. } x = 1.$$

$$23. \frac{3x}{a^2 + 4n(a+n)} - \frac{2(a-n)x - a^2 + 4n^2}{a^3 + 4a^2n + 4an^2} = \frac{1}{a}. \quad \text{R. } x = 4n.$$

$$24. \frac{x+a}{a-b} + \frac{x-a}{a+b} = \frac{x+b}{a+b} + \frac{2(x-b)}{a-b}. \quad \text{R. } x = 3b.$$

$$25. \frac{x-a}{x+b} = \frac{x-2a-b}{x+a+2b}. \quad \text{R. } x = \frac{a-b}{2}.$$

$$26. (a+b+c)x - \frac{a^2+b^2}{a-b} = \frac{2abx}{a+b} + \frac{a+b}{a-b} \cdot c. \quad \text{R. } x = \frac{a+b}{a-b}.$$

$$27. \frac{3abc}{a+b} + \frac{a^2b^2}{(a+b)^3} + \frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2} = 3cx + \frac{bx}{a}. \quad \text{R. } x = \frac{ab}{a+b}.$$

$$28. x \left(\frac{x-2a}{x+a} \right)^3 + a \left(\frac{2x-a}{x+a} \right)^3 = x^2 - a^2. \quad \text{R. } x = 1 - a.$$

$$29. \frac{(a-x)^2 + (x-b)^2}{(a-x)^2 - (x-b)^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}. \quad \text{R. } x = \frac{2ab}{a+b}.$$

$$30. \frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3} = \frac{a(x-b^2) + b(a^2-x)}{a(x-b^2) - b(a^2-x)}. \quad \text{R. } x = a^2 + b^2.$$

$$31. \frac{a^2 - x}{x - 2a} = \frac{2a + x}{a^2 - x} + \frac{a^4}{a^2x + 2ax - 2a^3 - x^2}. \quad \text{R. } x = 2.$$

$$32. \frac{a^2 + x}{b^2 - x} - \frac{a^2 - x}{b^2 + x} = \frac{4abx + 2a^2 - 2b^2}{b^4 - x^2}. \quad \text{R. } x = \frac{a+b}{a-b}.$$

$$33. \frac{a^2 + ax + x^2}{a^3 + a^2x + ax^2 + x^3} - \frac{a^2 - a^2x - ax^2 - x^3}{a^4 - x^4} = \frac{1}{a-x}.$$

R. Nu are soluție în R , dar are în C , $x_{1,2} = a \pm \frac{a\sqrt{-3}}{2}$.

$$34. \frac{2(x-a)}{a^2 - c^2 - 2ax + x^2} + \frac{c-x}{a^2 - ac + cx - 2ax + x^2} = \frac{1}{x-a}. \quad \text{R. } x = \frac{a(a-c)}{a-2c}.$$

Să se verifice identitățile

$$35. \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab.$$

$$36. \pi h \left(\frac{R+r}{2}\right)^2 + \frac{\pi h}{3} \left(\frac{R-r}{2}\right)^2 = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr).$$

$$37. (a+b+c)^2 + (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

$$38. \left(\frac{m^2-1}{m^2+1}\right)^2 + \left(\frac{2m}{m^2+1}\right)^2 = 1.$$

$$39. \frac{1-ax+(a+x)x}{2ax-a^2x^2-1} : \left[1 + \frac{a^2+2ax+x^2}{(1-ax)^2}\right] = -\frac{1}{1+a^2}.$$

Indicație. Avem succesiv:

$$\frac{1-ax+ax+x^2}{-(a^2x^2-2ax+1)} : \frac{1-2ax+a^2x^2+a^2+2ax+x^2}{(1-ax)^2} = -\frac{1}{1+a^2}.$$

$$40. x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(x^2+3x+1)^2.$$

$$41. (1+y+y^2+y^3)^2=1+2y+3y^2+4y^3+3y^4+2y^5+y^6.$$

13. Inegalități și inecuații

42. O brigadă de tractoriști trebuie să are după plan câte 50 ha pe zi. Cu cât trebuie să-și mărească norma zilnică pentru a ara în trei zile mai mult de 210 ha?

Dacă notăm cu x creșterea zilnică a normei, în cele trei zile brigada va ara $3(50+x)$ ha și trebuie ca $3(50+x) > 210$.

Rezolvăm inecuația. Împărțim ambii membri cu 3 și găsim:

$$50+x > 70, \text{ de unde } x > 70-50; x > 20.$$

Brigada va trebui să are zilnic cu mai mult de 20 ha peste normă.

Exerciții cu inegalități

43. Să se adune inegalitățile următoare:

$$5 > -3; 8 > 5.$$

$$\text{R. } 13 > 2.$$

$$2 < 5; -7 < -3.$$

$$\text{R. } -5 < 2.$$

$$x^2 > a+1; 2x > a-5.$$

$$\text{R. } x^2+2x > 2a-4.$$

$$3x+y < 2a+1; 3y-2x < 14-2a.$$

$$\text{R. } 4y+x < 15$$

44. În exemplele următoare să se scadă inegalitatea a doua din prima:

$$16 > 13; 2 < 5.$$

$$R. 14 > 0.$$

$$-8 < -5; -2 > -7.$$

$$R. -6 < 2.$$

$$2x > b^2; a^2 < 9 - x.$$

$$R. x - a^2 > b^2 - 9.$$

$$(a - b)^2 < 2; (a + b)^2 > 8.$$

$$R. 2ab > 3.$$

45. Să se înmulțească ambii membri ai inegalităților următoare cu factorul indicat:

$$5 > -2 \text{ cu } 5.$$

$$R. 25 > -10.$$

$$-7 < -5 \text{ cu } -2.$$

$$R. 14 > 10.$$

$$a^2 > b \text{ cu } -b.$$

$$R. \text{ Dacă } b > 0, -a^2b < -b^2.$$

$$\text{Dacă } b < 0, -a^2b > -b^2.$$

$$a - 1 < b \text{ cu } -m.$$

$$R. \text{ Dacă } m > 0, m - ma > -mb.$$

$$\text{Dacă } m < 0, m - ma < -mb.$$

46. Să se împartă ambii membri ai inegalităților următoare cu numărul indicat:

$$-6 < 9 \text{ cu } 3.$$

$$R. -2 < 3.$$

$$-15 > -35 \text{ cu } -5.$$

$$R. 3 < 7.$$

$$a^3 < a^2 \text{ cu } -a.$$

$$R. \text{ Dacă } 0 < a < 1, -a^2 > -a.$$

$$\text{Dacă } a < 0, -a^2 < -a.$$

$$(a - b)^3 > (a - b)^2 \text{ cu } (a - b).$$

$$R. \text{ Dacă } a - b > 1, (a - b)^2 > a - b.$$

Să se rezolve inecuațiile următoare:

$$47. x + 4 > 2 - 3x.$$

$$R. x > -\frac{1}{2} \text{ sau } x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

$$48. 4(x - 1) > 2 + 7x.$$

$$R. x < -2 \text{ sau } x \in (-\infty, -2).$$

$$49. \frac{3x}{2} - \frac{3}{5} \leq 4x - 3.$$

$$R. x \geq \frac{24}{25} \text{ sau } x \in \left[\frac{24}{25}, +\infty\right).$$

$$50. \frac{37 - 2t}{3} + 9 < \frac{3t - 8}{4} - t.$$

$$R. t > 56 \text{ sau } t \in (56, +\infty).$$

$$51. (x - 1)^2 + 7 > (x + 4)^2.$$

$$R. x < -\frac{4}{5} \text{ sau } x \in \left(-\infty, -\frac{4}{5}\right).$$

$$52. \frac{7 - 6x}{2} + 12 \leq \frac{8x + 1}{3} - 10x.$$

$$R. x \leq -3,5 \text{ sau } x \in (-\infty, -3,5].$$

$$53. \frac{y - 2}{2} \geq \frac{1 - 3y}{3}.$$

$$R. y \geq \frac{8}{9} \text{ sau } y \in \left[\frac{8}{9}, +\infty\right).$$

$$54. \frac{7x + 5}{3} > 4x + \frac{1}{5}.$$

$$R. x < \frac{22}{25} \text{ sau } x \in \left(-\infty, \frac{22}{25}\right).$$

$$55. \frac{z}{8} + \frac{1}{2} \geq \frac{5(z+4)}{8}.$$

$$R. z \leq -4 \text{ sau } z \in (-\infty, -4].$$

$$56. \frac{x}{3} - 2 \geq \frac{3-5x}{4} + 2.$$

$$R. x \geq 3 \text{ sau } x \in [3, +\infty).$$

$$57. (3a-8)(5-a) > 0.$$

$$R. 2 \frac{2}{3} < a < 5 \text{ sau } a \in \left(2 \frac{2}{3}, 5\right).$$

$$58. (2-3a)(2a+7) > 0.$$

$$R. -\frac{7}{2} < a < \frac{2}{3} \text{ sau } a \in \left(-\frac{7}{2}, \frac{2}{3}\right).$$

Să se afle valorile lui $y \in \mathbb{R}$ care fac fracția pozitivă:

$$59. \frac{3y-7}{2-5y}.$$

$$R. \frac{2}{5} < y < 2 \frac{1}{3} \text{ sau } y \in \left(\frac{2}{5}, 2 \frac{1}{3}\right) \text{ deci soluțiile sînt } 1 \text{ și } 2.$$

Să se afle pentru ce valori ale lui a fracțiile următoare sînt negative (soluția grafică):

$$60. \frac{8-3a}{7a-2}.$$

$$R. a < \frac{2}{7} \text{ și } a > \frac{8}{3} \text{ sau } a \in \left(-\infty, \frac{2}{7}\right) \cup \left(\frac{8}{3}, +\infty\right).$$

$$61. \frac{5a+8}{3a-7}.$$

$$R. -1 \frac{3}{5} < a < 2 \frac{1}{3} \text{ sau } a \in \left(-1 \frac{3}{5}, 2 \frac{1}{3}\right).$$

62. Pornind de la inegalitatea $(a-b)^2 > 0$, să se demonstreze că suma pătratelor a două numere neegale este totdeauna mai mare decît dublul produsului aceluiași numere.

63. Să se arate că într-un triunghi oarecare jumătatea perimetrului este mai mare decît orice latură.

Indicație. a, b și c fiind laturile unui triunghi, se folosește relația $a < b + c$ și se ține seama că se poate aduna a în ambii membri ai inegalității.

64. Să se arate că în orice triunghi dreptunghic cu catetele neegale înălțimea coborîtă pe ipotenuză este mai mică decît jumătate din ipotenuză.

65. Într-un vas sînt 4 l de apă cu temperatura de 13°C . Pînă la ce temperatură t trebuie să încălzim 5 l de apă pentru ca, prin amestecul cu apa din primul vas, să obținem apa cu o temperatură de cel puțin 25°C și cel mult 30°C ?

$$R. 34,6^\circ < t < 43,6^\circ \text{ sau } t \in (34,6^\circ; 43,6^\circ).$$

66. Să se arate pentru ce valori ale lui $x \in \mathbb{N}$ expresiile următoare sînt: pozitive, negative, n-au sens.

$$\frac{3}{x+4}; \frac{x+8}{8}; \frac{-6}{x+5}; \frac{2x-4}{-9}; \frac{-(x+4)}{-8}.$$

14. Sisteme de ecuații de gradul întîi cu două sau trei necunoscute

Să se rezolve următoarele sisteme de două ecuații cu două necunoscute:

$$1. \begin{cases} 2(x+1) = 3(y-1) + 14 \\ 4x - 3(2x+y-1) = 2(-x+y) + 8. \end{cases}$$

$$R. (3; -1).$$

$$2. \begin{cases} 2(x + 2y) - 3(x + 3y) = 5 \\ x = 1 - 2y. \end{cases} \quad \text{R. } (5; -2).$$

$$3. \begin{cases} 4(0,1x + 1) + 5 = 1,1y \\ \frac{11 + 0,3y - x}{5} - 5 = 4\left(\frac{1}{5} - 1\right). \end{cases} \quad \text{R. } (5; 10).$$

$$4. \begin{cases} \frac{x+1}{y+2} = 5 \\ 3(2x - 5) - 4(3y + 4) = 5. \end{cases} \quad \text{R. } (4; -1).$$

$$5. \begin{cases} \frac{2x+3}{3y-2} = 1 \\ x(2y - 5) - 2y(x + 3) = 2x + 1. \end{cases} \quad \text{R. } (-1; 1).$$

$$6. \begin{cases} \frac{x+1}{3} - \frac{y+2}{4} = \frac{2(x-y)}{5} \\ \frac{x-3}{4} - \frac{y-3}{3} = 2y - x. \end{cases} \quad \text{R. } (11; 6).$$

Să se rezolve cu ajutorul proporțiilor derivate următoarele sisteme

$$7. \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{3}{4}; \\ y - x = 7,2 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{3}{4}; \\ 2x + 3y = 246 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x}{4} = \frac{y}{2,25}; \\ x + 4y = 14 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 8; \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Să se rezolve grafic sistemele:

$$8. \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1 \\ \frac{2x-1}{2} - \frac{3y-1}{3} = \frac{5}{6}. \end{cases} \quad \text{R. } (4; 3).$$

$$9. \begin{cases} \frac{3x-1}{5} + 3y - 4 = 15 \\ \frac{3y-5}{6} + 2x - 8 = \frac{23}{3}. \end{cases} \quad \text{R. } (7; 5).$$

$$10. \begin{cases} 2x + y = -\frac{2a}{3} \\ x - \frac{y}{2} = -\frac{2a}{3}. \end{cases} \quad \text{R. } \left(-\frac{a}{2}; \frac{a}{3}\right).$$

$$11. \begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ \frac{(x-3)^2}{2} = 10 + \frac{(1-x)^2}{2} - y. \end{cases} \quad \text{R. } (-2; 2).$$

Să se rezolve:

$$12. \begin{cases} \frac{x-1}{y-1} = \frac{1}{5} \\ \frac{x+4}{y+4} = \frac{2}{5} \end{cases} \quad \text{R. (4; 16).}$$

$$13. \begin{cases} 0,25x + 0,04y = 2 \\ 4x + 25y = 641 \end{cases} \quad \text{R. (4; 25).}$$

$$14. \begin{cases} x + \frac{5y-1}{3} = -\frac{2}{3} \\ 3y - \frac{2x+3}{2} = -\frac{21}{2} \end{cases} \quad \text{R. (3; -2).}$$

$$15. \begin{cases} \frac{5}{x-1} : \frac{4}{y-1} = 25 : 24 \\ \frac{2}{x+1} : \frac{3}{y+1} = 7 : 12 \end{cases} \quad \text{R. (7; 6).}$$

$$16. \begin{cases} \frac{x+y}{3} + x = 15 \\ y - \frac{y-x}{5} = 6 \end{cases} \quad \text{R. (10; 5).}$$

$$17. \begin{cases} \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{3} = 8 \\ \frac{x+y}{3} + \frac{x-y}{4} = 11 \end{cases} \quad \text{R. (18; 6).}$$

$$18. \begin{cases} \frac{3x-5y}{2} + 3 = \frac{2x+y}{5} \\ 8 - \frac{x-2y}{5} = \frac{x}{2} + \frac{y}{3} \end{cases} \quad \text{R. (12; 6).}$$

$$19. \begin{cases} \frac{5}{x+4} = \frac{2}{y-1} \\ \frac{3}{x+2} = \frac{4}{y+1} \end{cases} \quad \text{R. (1; 3).}$$

$$20. \begin{cases} x - y = \frac{1}{12} \\ 18x - 5y = 4\frac{3}{4} \end{cases} \quad \text{R. } \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{4} \right).$$

$$21. \begin{cases} \frac{ay}{bx} = \frac{d}{c} \\ bx + ay = d + c \end{cases} \quad \text{R. } \left(\frac{c}{b}; \frac{d}{a} \right).$$

$$22. \begin{cases} \frac{1}{2}y - 3x = 2 \\ y = 14x. \end{cases} \quad \text{R. } \left(\frac{1}{2}; 7\right).$$

$$23. \begin{cases} \frac{9x - y}{8} = 1 \\ 7(x - 1) = \frac{1}{9}(1 - y). \end{cases} \quad \text{R. } (1; 1).$$

$$24. \begin{cases} x(y - 1) - y(3 + x) = 4 \\ \frac{x + 2y - 3}{y - x + 2} = \frac{2}{3}. \end{cases} \quad \text{R. } (5, -3).$$

$$25. \begin{cases} 5 + 4(0,1x + 1) = 1,1y \\ 5 + 4\left(\frac{1}{x} - 1\right) = \frac{11 + 0,3y - x}{x}. \end{cases} \quad \text{R. determinat; } (5; 10).$$

$$26. \begin{cases} \frac{x - y + 1}{y - x + 1} = \frac{-3}{5} \\ \frac{2x + 3y - 5}{6 + 2y - x} = -\frac{1}{4}. \end{cases} \quad \text{R. determinat; } (-2; 2).$$

$$27. \begin{cases} 2x - \frac{11y}{3} + \frac{5}{3} = 0 \\ 48x - 88y = -15. \end{cases} \quad \text{R. incompatibil.}$$

$$28. \begin{cases} 8 - \frac{x - 2y}{5} = \frac{z}{2} + \frac{y}{3} \\ 2y - 21z + 240 = 0. \end{cases} \quad \text{R. nedeterminat.}$$

Să se rezolve următoarele sisteme de ecuații, în care a , b și c reprezintă numere date.

$$29. \begin{cases} (a + c)x - by = bc \\ x + y = a + b. \end{cases} \quad \text{R. } (b; a).$$

$$30. \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = c \\ \frac{x}{b} - \frac{y}{a} = 0. \end{cases} \quad \text{R. } \left(\frac{ab^2c}{a^2 + b^2}; \frac{a^2bc}{a^2 + b^2}\right).$$

$$31. \begin{cases} \frac{x + y - a}{x + y + a} = \frac{2}{3} \\ 2x - 3y = -5a. \end{cases} \quad \text{R. } (2a; 3a).$$

$$32. \begin{cases} a(x + y) + b(x - y) = 1 \\ a(x - y) + b(x + y) = 1. \end{cases} \quad \text{R. } \left(\frac{1}{a + b}; 0\right).$$

$$33. \begin{cases} \frac{x-a}{b} + \frac{y-b}{a} = 0 \\ \frac{x+y-b}{a} + \frac{x-y-a}{b} = 0. \end{cases} \quad \text{R. } (a; b).$$

$$34. \begin{cases} (a+b)x - (a-b)y = 4ab \\ (a-b)x + (a+b)y = 2a^2 - 2b^2. \end{cases} \quad \text{R. } (a+b); (a-b).$$

$$35. \begin{cases} \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = 2a \\ \frac{x-y}{2ab} = \frac{x+y}{a^2+b^2}. \end{cases} \quad \text{R. } (a+b)^2; (a-b)^2.$$

$$36. \begin{cases} (a+b)x + (a-b)y = 2ab \\ (a+c)x + (a-c)y = 2ac. \end{cases} \quad \text{R. } (a; -a).$$

$$37. \begin{cases} (a+2b)x - (a-2b)y = 6ac \\ (a+3c)y - (a-3c)x = 4ab. \end{cases} \quad \text{R. } (a-2b+3c); (a+2b-3c).$$

$$38. \begin{cases} \frac{x+a}{y-b} = \frac{2a+b}{a-2b} \\ \frac{x+5-y}{y-x+3} = \frac{2b+5}{3-2b}. \end{cases} \quad \text{R. } (a+b); (a-b).$$

$$39. \begin{cases} \frac{a-x}{b} - \frac{b-y}{a} = \frac{a^2-b^2}{ab} \\ \frac{a-x}{b} + \frac{b-y}{a} = \frac{(a-b)^2}{ab}. \end{cases} \quad \text{R. } (b; a).$$

$$40. \begin{cases} \frac{a^2-b^2}{x} + \frac{b^2}{y} = a \\ \frac{a+b}{x} + \frac{b}{y} = 2. \end{cases} \quad \text{R. } (a+b; b).$$

$$41. \begin{cases} ax + by = 2(a^2 - b^2) \\ \frac{y}{a-b} - \frac{x}{a+b} = \frac{a^2+b^2}{ab}. \end{cases} \quad \text{R. } \frac{a^2-b^2}{a}; \frac{a^2-b^2}{b}.$$

$$42. \begin{cases} \frac{1}{x-a} + \frac{1}{y+b} = \frac{a+b}{ab} \\ \frac{a}{x-a} - \frac{b}{y+b} = \frac{a^2-b^2}{ab}. \end{cases} \quad \text{R. } (a+b); (a-b).$$

Indicație. Se vor lua ca necunoscute $\frac{1}{x-a}$ și $\frac{1}{y+b}$.

$$43. \begin{cases} x - a(1-y) = 0 \\ a(x-a) + y = \frac{1}{a}. \end{cases} \quad \text{R. } \left(\frac{a^3-a+1}{a^2-1}; \frac{1}{a(1-a^2)} \right).$$

$$44. \begin{cases} a\left(x - \frac{1}{b}\right) = b\left(y + \frac{1}{a}\right) \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}. \end{cases}$$

$$R. \left(\frac{a+b}{ab}; \frac{a-b}{ab}\right).$$

$$45. \begin{cases} \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = a+b \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2a. \end{cases}$$

$$R. a(a+b); b(a-b).$$

$$46. \begin{cases} \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a-b} \\ \frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b}. \end{cases}$$

$$R. \frac{a}{a-b}; \frac{b}{a+b}.$$

Indicație. Luăm ca necunoscute $\frac{x}{a+b}$ și $\frac{y}{a-b}$.

$$47. \begin{cases} \frac{x}{a-b} + \frac{y}{a} = a \\ \frac{x}{b} - \frac{y}{a-b} = -b. \end{cases}$$

$$R. b(a-b); a(a-b).$$

$$48. \begin{cases} \frac{x}{a-b} + \frac{y}{a+b} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \\ \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = 1. \end{cases}$$

$$R. \frac{a+b}{2}; \frac{a-b}{2}.$$

$$49. \begin{cases} \frac{x}{2a-b} - \frac{y}{2a+b} = \frac{8ab}{4a^2-b^2} \\ \frac{x}{2a-b} + \frac{y}{2a+b} = \frac{8a^2+2b^2}{4a^2-b^2}. \end{cases}$$

$$R. (2a+b); 2a-b.$$

Indicație. Se vor lua ca necunoscute $\frac{x}{2a-b}$ și $\frac{y}{2a+b}$.

Să se rezolve prin metoda reducerii

$$50. \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 61 \\ 3x + 2y + z = 54 \\ 5x - 4y + 3z = 44. \end{cases}$$

$$R. (12, 7; 4)$$

Să se rezolve prin metoda substituției

$$51. \begin{cases} 5x - 3y + 2z = -7 \\ 7x + 5y - 4z = -5 \\ x + y - z = -1. \end{cases}$$

$$R. (-1; 2; 2).$$

Să se rezolve sistemele următoare

$$52. \begin{cases} 2x - 3z - 4y = -1 \\ 3y + z - x = 6 \\ 5z - 3x + 2y = -13. \end{cases} \quad \text{R. } (-2; 3; -5).$$

$$53. \begin{cases} x + y - z = -6 \\ z - 3x + 2y = 1 \\ 3y + 2z - x = -5. \end{cases} \quad \text{R. } (-2; -3; 1).$$

$$54. \begin{cases} x - y + 2z = 6 \\ z - y - 2x = -\frac{1}{2} \\ 2x + 3y - z = -\frac{11}{2}. \end{cases} \quad \text{R. } \left(2; -3; \frac{1}{2}\right).$$

$$55. \begin{cases} x - y + z = 7 \\ x + y - z = 1 \\ y + z - x = 3. \end{cases} \quad \text{R. } (4; 2; 5).$$

$$56. \begin{cases} 2x + 5y + 4z = 17 \\ 3x + 2y - z = 2 \\ 5x + 3y - 2z = 2. \end{cases} \quad \text{R. } (-1; 3; 1).$$

$$57. \begin{cases} x + y - 6z = 9 \\ x - y + 4z = 5 \\ 3y - 2x - z = 4. \end{cases} \quad \text{R. } (8; 7; 1).$$

$$58. \begin{cases} 2x + 3y - z = 13 \\ 3x + 2y - 2z = 13 \\ 5x - 4y - 2z = 11. \end{cases} \quad \text{R. } (5; 2; 3).$$

$$59. \begin{cases} 4x - 3y + 2z = 28 \\ 3x + 2y - 5z = 16 \\ 2x + y - 3z = 10. \end{cases} \quad \text{R. } (10; 8; 6).$$

$$60. \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 53 \\ 3x + 5y - 4z = 2 \\ 4x + 7y - 2z = 31. \end{cases} \quad \text{R. } (3; 5; 8).$$

$$61. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 8 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 13 \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 11. \end{cases} \quad \text{R. } \left(\frac{1}{5}; \frac{1}{3}; \frac{1}{8}\right).$$

$$62. \begin{cases} \frac{xy}{x+y} = \frac{1}{5} \\ \frac{xz}{x+z} = \frac{1}{6} \\ \frac{yz}{y+z} = \frac{1}{7} \end{cases} \quad \text{R. } \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4} \right).$$

$$63. \begin{cases} x+y+z=99 \\ \frac{x}{y} = \frac{5}{3} \\ \frac{y}{z} = \frac{3}{1} \end{cases} \quad \text{R. } (55; 33; 11).$$

$$64. \begin{cases} \frac{1}{x+y} = 1 \\ \frac{2}{x+z} = 1 \\ \frac{3}{x+y} = 1 \end{cases} \quad \text{R. } (0; 1; 2).$$

$$65. \begin{cases} \frac{3x+y}{x+1} = 2 \\ \frac{3y+z}{x+1} = 2 \\ \frac{3z+x}{y+1} = 2 \end{cases} \quad \text{R. } (1; 1; 1).$$

$$66. \begin{cases} \frac{xy}{4y-3x} = 20 \\ \frac{xz}{2x-3z} = 18 \\ \frac{yz}{4y-5z} = 12 \end{cases} \quad \text{R. } (5; 4; 3).$$

$$67. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{20} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{15} \end{cases} \quad \text{R. } (20; 80; 60).$$

Indicație. Se folosește substituția $\frac{1}{x} = u$; $\frac{1}{y} = v$; $\frac{1}{z} = t$.

$$68. \begin{cases} \frac{x}{6} = \frac{y}{3} = \frac{z}{18} \\ 3x + 5y + z = 34 \end{cases} \quad \text{R. } (4; 2; 12).$$

Indicație. Se amplifică primul raport cu 3, al doilea cu 5 și se aplică apoi proprietatea șirului de rapoarte egale.

$$69. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{3} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{32}{15} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{17}{15} \end{cases} \quad \text{R. } \left(\frac{3}{4}; 3; 1 \frac{1}{4} \right).$$

$$70. \begin{cases} 2x + \frac{3}{y} - \frac{4}{z} = 4 \\ \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{17}{12} \\ x + \frac{4}{y} = \frac{10}{3} \end{cases} \quad \text{R. } (2; 3; 4).$$

$$71. \begin{cases} (x+2)(2y+1) = (2x+7)y \\ (x-2)(3z+1) = (x+3)(3z-1) \\ (y+1)(z+2) = (y+3)(z+1) \end{cases} \quad \text{R. } (7; 3; 1).$$

Să se determine x , y și z din sistemele:

$$72. \begin{cases} x + y - z = a \\ x + z - y = b \\ y + z - x = c \end{cases} \quad \text{R. } \left(\frac{1}{2}(a+b); \frac{1}{2}(c+a); \frac{1}{2}(b+c) \right)$$

$$73. \begin{cases} ax + by - bz = c \\ ay + bx - bz = c \\ az + by - bx = c \end{cases} \quad \text{R. } \left(\frac{c}{a}; \frac{c}{a}; \frac{c}{a} \right).$$

$$74. \begin{cases} x - 3y + z = b \\ x - y + 3z = c \\ 3x - y + z = a \end{cases} \quad \text{R. } \left(\frac{4a-b-c}{10}; \frac{-4b+c+a}{10}; \frac{4c-a-b}{10} \right).$$

$$75. \begin{cases} ax + by - cz = 2ab \\ by + cz - ax = 2bc \\ cz + ax - by = 2ac \end{cases} \quad \text{R. } (b+c; c+a; a+b).$$

$$76. \begin{cases} ax + by - cz = b^2 \\ bx - cy + az = a^2 \\ cx + ay - bz = c^2 \end{cases} \quad \text{R. } (c; b; a).$$

$$77. \begin{cases} a^2x + b^2y + c^2z = 3abc \\ abx - bcy = b^2c - ac^2 \\ bcy - acz = ac^2 - a^2b \end{cases} \quad \text{R. } \left(\frac{bc}{a}; \frac{ca}{b}; \frac{ab}{c} \right).$$

$$78. \begin{cases} ax + by = a^2 + b(a + c) \\ ay - cz = 0 \\ z - x = -b. \end{cases} \quad \text{R. } (a + b; c; a).$$

$$79. \begin{cases} \frac{x - 2(z - 1)}{(a + b)^2} = \frac{1}{ab} \\ x - y + z = 5 \\ \frac{a}{b} - \frac{1}{2}(x + y) + \frac{b}{a} = 0. \end{cases} \quad \text{R. } \left(\frac{(a + b)^2}{ab}; \frac{(a - b)^2}{ab}; 1 \right).$$

15. Sisteme de inecuații de gradul I

Să se rezolve următoarele sisteme de inecuații de gradul I:

$$80. \begin{cases} \frac{x + 0,5}{9} + \frac{1}{2} < 3x + 1 \\ 12x - 1 > 10x + 3. \end{cases} \quad \text{R. } x > 2 \text{ sau } x \in (2, +\infty).$$

$$81. \begin{cases} \frac{1 + x}{\frac{1}{2}} < \frac{x}{3} + 1 \\ \frac{3x + 2}{2} \leq \frac{2x + 1}{4} + \frac{3}{2}. \end{cases} \quad \text{R. } x < -\frac{3}{5} \text{ sau } x \in \left(-\infty, -\frac{3}{5}\right).$$

$$82. \begin{cases} \frac{2x - 1}{5} \geq \frac{x + 1}{2} - \frac{23}{5} \\ \frac{3x + 2}{7} < \frac{x}{3,5} + 6. \end{cases} \quad \text{R. } x \leq 39 \text{ sau } x \in (-\infty; 39].$$

$$83. \begin{cases} \frac{3 - x}{2} < \frac{x}{5} \\ 4x < 3x + 1. \end{cases} \quad \text{R. Nu are soluții.}$$

$$84. \begin{cases} 5a - 3 > 1 + a \\ \frac{1}{2} - 3a \leq \frac{2}{3}a - 5. \end{cases} \quad \text{R. } a \geq \frac{3}{2} \text{ sau } a \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right).$$

$$85. \begin{cases} 2(x - 3) - 1 < 5 \\ \frac{3x}{8} - 7 > \frac{x}{12}. \end{cases} \quad \text{R. Nu are soluții.}$$

Să se rezolve următoarele inecuații simultane cu metoda grafică:

$$86. \begin{cases} 2x > 4x + 6 \\ 4x + 3 > 5x + 1. \end{cases} \quad \text{R. } x < -3 \text{ sau } x \in (-\infty, -3).$$

$$87. \begin{cases} 5x - 3 > 1 + x \\ 0,5 - 3x \leq \frac{2}{3}x - 5. \end{cases} \quad \text{R. } x \geq 1,5 \text{ sau } x \in [1, 5, +\infty).$$

$$88. \begin{cases} 4x + 7 > 2x + 13 \\ 3x - 18 \leq 2x + 1. \end{cases} \quad \text{R. } 3 < x \leq 19 \text{ sau } x \in (3, 19].$$

$$89. \begin{cases} 6x - 7 > 5x - 1 \\ 3x + 6 > 8x - 4. \end{cases} \quad \text{R. Nu are soluții.}$$

Să se afle valorile întregi ale lui x care satisfac simultan inecuațiile

$$90. \begin{cases} 3x + 7 > 7x - 9 \\ x - 3 > -3x + 1. \end{cases} \quad \text{R. } x \in (1, 4) \text{ deci soluțiile sînt 2 și 3.}$$

Să se afle pentru ce valori ale lui a produsul următor este pozitiv.
Să se folosească metoda grafică.

$$91. (2a - 3)(3a - 2). \quad \text{R. } a < \frac{2}{3} \text{ și } a > \frac{3}{2} \text{ sau } a \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right).$$

16 Exerciții recapitulative

1. Fie mulțimea $M = \{0; 1; 2; 3\}$

a) Să se determine mulțimile:

$$A = \{x \in N \mid x = 143a - 17, a \in M\}; B = \{x \in N \mid x = 139b - 13, b \in M\};$$

$$C = \{x \in N \mid x = 126 - 12c, c \in M \text{ și } c < 1\}.$$

b) Să se arate că $A \cap B = C$.

$$\text{R. a) } \begin{aligned} A &= \{126; 269; 412\}; \\ B &= \{126; 265; 404\}; \\ C &= \{126\}. \end{aligned}$$

$$\text{b) } A \cap B = \{126\} \Rightarrow A \cap B = C.$$

2. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$\frac{1 + 3 \left[\frac{x^2 - y^2}{(x + y)^2} \right]^2 - \left[\frac{x^2 - y^2}{(x + y)^2} \right]^3 - 3 \frac{x^2 - y^2}{(x + y)^2}}{3 \frac{x + y}{x - y} - 3 \left(\frac{x + y}{x - y} \right)^2 + \left(\frac{x + y}{x - y} \right)^3 - 1}.$$

$$\text{R. } \left(\frac{x - y}{x + y} \right)^3.$$

3. Să se aducă expresia la forma cea mai simplă, apoi să se afle pentru ce valoare a lui x expresia devine egală cu 3.

$$\frac{x^5 + x^3 + x}{x^3 - x^2 + x}$$

$$\text{R. } (x^2 + x + 1); x \in \{-2; 1\}.$$

4. Să se arate în care sistem de numerație există relația:

$$\left(\frac{4}{14} + \frac{1}{10} \right) \cdot \frac{140}{104} = 1.$$

Indicație.

$$\left(\frac{4}{x+4} + \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x^2 + 4x}{x^3 + 4} = 1.$$

R. 5.

5. Se dă polinomul $E_1 = 9x^3 + 18x^2 - 3x - 7$.

- 1) Să se afle restul împărțirii prin $x + 2$ fără a efectua împărțirea.
- 2) Cu ce polinom a fost împărțit E_1 , știind că s-a obținut citul $x + 2$ și restul $x + 1$?

R. 1) -1 ; 2) $9x^2 - 4$.

6. Să se determine mulțimea și să se afle cardinalul ei:

$$M = \{x \in N \mid x = 2y, y \in N, 5 < x < 9\}.$$

R. $M = \{6; 8\}$; Card $M = 2$.

7. Se consideră fracția algebrică:

$$\frac{ax^2 + x^2 - 2ax - 2x + a + 1}{x - 1}.$$

- 1) a fiind număr real să se afle domeniul de existență a fracției privitor la variabila x .
- 2) Să se simplifice fracția.
- 3) Să se determine valoarea lui x pentru ca expresia simplificată să devină $a + 1$.

R. 1) $x \in R - \{1\}$; 2) $(x - 1)(a + 1)$; 3) 2.

8. Se consideră fracția algebrică:

$$\frac{a^5 + 2a^3 - 2a^4 - 2a^2 + a}{a(2a^2 - 2)(a^2 + 1)}.$$

- 1) Pentru ce valori ale lui a fracția are sens?
- 2) Să se simplifice fracția.
- 3) Să se determine valoarea lui a pentru ca fracția să ia valoarea -1 .

R. 1) $a \in R - \{-1; 0; 1\}$; 2) $\frac{a - 1}{2(a + 1)}$; 3) $a = -\frac{1}{3}$.

9. Se dă expresia:

$$\left[\left(\frac{8x^3 - 1}{2x - 1} - 6x\right) \frac{4x^2 - 1}{2x + 1} - (8x^3 - 1)\right] \cdot \frac{1}{1 - 2x}.$$

Se cere:

- 1) Pentru ce valori ale lui x expresia are sens?
- 2) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă.
- 3) Să se afle valoarea numerică a expresiei pentru

$$x = \frac{\sqrt{1,0404} + \frac{49}{50} - 1,1(6) \cdot \frac{3}{7}}{1 : (394 \cdot 19 + 2\,606 \cdot 19 - 2\,999 \cdot 19)} \cdot \frac{1}{19}.$$

R. 1) $x \in R - \left\{\pm \frac{1}{2}\right\}$;

2) $E = 6x$;

3) 9.

10. Fie mulțimea $A = \{x \in N \mid x < 11\}$. Să se determine mulțimile

a) $M = \{x \in N \mid x = 2n, n \in A\}$

b) $P = \{x \in N \mid x = 3p, p \in A\}$

R. $A = \{0; 1; 2; 3 \dots 10\}$

a) $M = \{0; 2; 4 \dots 20\}$ (numere pare)

b) $P = \{0; 3; 6 \dots 30\}$ (multipli de 3).

11. Se consideră expresia:

$$E = \left[(2 + 2x) \left(\frac{4x^2 + 21}{2 + 2x} - 6 \right) + \frac{8x^3 - 27}{4x^2 + 6x + 9} \right] \frac{1}{2x - 2}$$

1) Pentru ce valori ale lui x expresia are sens?

2) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă.

3) Să se calculeze valoarea expresiei pentru:

$$x = \frac{\sqrt{1,0816} + \frac{24}{25} + 1}{\frac{1}{2} + \frac{3}{8} : 0,25 - 0,1(6) \cdot \frac{3}{2} + 0,75}$$

R. 1) $x \in R - \{\pm 1\}$; 2) $2x - 3$; 3) $-\frac{3}{5}$.

12. Se consideră expresia:

$$E = \left[\left(\frac{125x^3 + 1}{1 + 5x} - 5x - \frac{15x - 75x^2}{5x - 1} - 15x \right) + 2(5x - 1) \right] \cdot \frac{1}{5x - 1}.$$

1) Pentru ce valori atribuite lui x expresia dată are sens?

2) Să se simplifice expresia.

3) Să se calculeze valoarea expresiei pentru

$$x = \frac{\sqrt{1,1025} + \frac{19}{20} - 1,0(5) + \frac{1}{18}}{120 : 20 \cdot 5 \cdot 0,04 - 1,18}$$

R. 1) $x \in R - \left\{ \pm \frac{1}{5} \right\}$; 2) $5x + 1$; 3) 251.

13. Se dă expresia:

$$\left\{ \frac{1}{a + b} - \frac{1}{a^2 - b^2} \left[\frac{a^3 - b^3 - 3ab(a - b)}{a^2 - ab + b^2} \right] \right\} : \frac{ab}{a^3 - ab + b^3}$$

în care cantitățile a și b îndeplinesc condițiile $a \neq \pm b$ și se cere:

1) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă.

2) Să se calculeze valoarea numerică a expresiei, dacă

$$a = \frac{(8^4 \cdot 3^5 \cdot 9^7) : (9^6 \cdot 8^3 \cdot 3^6) + 16 : 3 - \frac{1}{3} + 1}{\sqrt{1,004004} + \frac{499}{500} + 28}$$

$$b = -10$$

R. 1) $\frac{1}{a + b}$; 2) $-\frac{1}{9}$.

$$20. \left(\frac{x^2 - xy}{x^2y + y^2} - \frac{2x^2}{y^3 - xy^2 + x^2y - x^3} \right) \left(1 - \frac{y-1}{x} - \frac{y}{x^2} \right) \cdot xy(x-5).$$

1) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă.

2) Pentru ce valori ale lui x expresia este negativă?

R. 1) $(x+1)(x-5)$; 2) $-1 < x < 5$ sau $x \in (-1, 5)$.

$$21. \text{ Fie } E = \frac{x^2 - 2x + 6}{x^2 - 2x + 4}. \text{ Să se arate că } \forall x \in \mathbb{R}. E \text{ este pozitivă.}$$

$$\text{Indicație: } E = 1 + \frac{2}{(x-1)^2 + 2}.$$

22. Se dau expresiile:

$$A(x) = 1 + \frac{2x}{3 + \frac{4x}{5}}; \quad B(x) = 9 - \frac{4 - \frac{15}{x}}{2}.$$

Să se calculeze:

$$1) E_1 = \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) A,$$

$$2) E_2 = \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) B.$$

$$3) \text{ Să se rezolve ecuația: } \left(2E_1 - E_2 + \frac{13}{4x+15} \right) = 1.$$

$$\text{R. 1) } E_1 = \frac{15+6x}{15+4x}; \quad 2) E_2 = \frac{15+2x}{2x}$$

$$3) 8x^2 - 30x - 225 = 0; \quad x_1 = \frac{15}{2}; \quad x_2 = -\frac{15}{4} \text{ (nu convine).}$$

23. Se dă ecuația:

$$\left[\left(\frac{a+2}{a-2} \right)^3 : \frac{a^3 + 4a^2 + 4a}{3a^2 - 12a + 12} \cdot \frac{a}{3} \right] x + \left[6a + \frac{a}{a-2} - \frac{a}{a+2} \right] : \frac{4a}{a^4 - 2a^3 + 8a - 16} \Big] x = a^3 + 6a^2 + 12a + \frac{a+2}{a-2} x.$$

1) Ce valoare trebuie să aibă a ca ecuația propusă să aibă sens?

2) Să se rezolve ecuația.

$$\text{R. 1) } a \neq -2; 0; 2; \quad 2) x = \frac{a(a^2 + 6a + 12)}{(a+2)^2}.$$

$$24. \text{ Fie } F = \frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 + 4x - 5}. \text{ Pentru ce valori ale lui } x \in \mathbb{N}, F \text{ este un număr natural.}$$

R. $\{2, 3\}$

25. Se dau expresiile:

$$m_1 = \frac{ax^4 - 4ax^2 - 5ax^3 + 12ax}{ax}$$

$$m_2 = \frac{a^2x^5 - 9x^3a^2 + 2a^4x^2 - 18a^2x^2}{a^2x^3}$$

$$m_3 = \frac{a^3x - 4x^4a^3 + 3x^5a^3 - 12a^3x^3}{a^3x^3}$$

- 1) Să se găsească: c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c.
- 2) Să se determine x din ecuația:

$$\left[\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_3} (2 - x) \right] (x + 3) - 1 = 0$$

R. 1) $x + 2$; $(x^2 - 9)(x^2 - 4)$
 2) $x_1 = -2$; $x_2 = 3$.

26. Se dă fracția:

$$\frac{x^2 - 4x + 6x\sqrt{y} + 9y - 12\sqrt{y}}{x^2 - 2x + 3x\sqrt{y} - 6\sqrt{y}}$$

- 1) Să se aducă la forma cea mai simplă.
- 2) Ce valoare numerică are fracția dată pentru $y = \frac{4}{9}$?

R. 1) $\frac{x + 3\sqrt{y} - 4}{x - 2}$; 2) 1.

27. Se dau expresiile:

$$f(x) = x^2 + 2x - 15, f_1(x) = x^2 - 6x + 9, f_2(x) = x^2 + 10x + 25.$$

- 1) Să se arate că $f(x)$ este medie proporțională între $f_1(x)$ și $f_2(x)$.
- 2) Să se simplifice fracția:

$$E = \frac{f_2(x) + f(x)}{f_2(x) - f(x)}$$

R. $\frac{x + 1}{4}$.

28. Să se simplifice fracția:

$$\frac{3x^2 + 2xy - y^2}{6x^3 + x^2y - 4xy^2 + y^3}$$

Dacă $y = 6$, să se arate pentru ce valori ale lui x expresia nu are sens.

R. $\frac{1}{2x - y}$; $x \neq 2; 3; -6$.

Indicație. Se va ține seamă de factorii obținuți la numărător și scriind unul din termenii de la numitor sub formă de sumă a trei termeni se obține ușor gruparea termenilor, sau se va scrie: $-4xy^2 = -5xy^2 + xy^2$ și $6x^3$ sub formă de sumă a doi termeni și apoi gruparea termenilor este evidentă.

29. Se dau mulțimile:

$$A = \{x \in N \mid x < 6\}; B = \{x \in N \mid x \leq 4\}.$$

- a) Să se enumere elementele celor două mulțimi.
 - b) Sînt echipotente mulțimile A și B ?
 - c) Să se determine mulțimea: $M = \{x \in A \mid y \in B \text{ astfel încît } x < y\}$.
- R. a) $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$;
 $B = \{0; 1; 2; 3; 4\}$
 b) Nu, căci Card $A = 6$ și Card $B = 5$.
 c) $M = \{0; 1; 2; 3\}$.

30. Perimetrul bazei unui paralelipiped dreptunghic este 8a, iar raportul dimensiunilor bazei este:

$$\frac{x}{y} = \frac{2a+b}{2a-b} (a > 0; b > 0)$$

- 1) Să se calculeze aria bazei.
- 2) Să se afle înălțimea paralelipipedului știind că

$$V = 8a^2b - 4a^3 + ab^2 - 2b^3.$$

- 3) Să se calculeze diagonala paralelipipedului când $a = 4$ și $b = 3$.

$$\text{R. 1) } 4a^2 - b^2; 2) 2b - a; 3) 5\sqrt{6}.$$

31. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{4x^2 - 4}{x^2 - 2x^2 - x + 2} - \frac{(x^3 + 8)(x^2 - 1)}{x^4 - 5x^2 + 4} = 0.$$

lit. 0.

32. Să se rezolve ecuația:

$$\left[\frac{x^2 - 6xy + y^2}{(x+y)^2 - 8xy} - x^3 \right] : (1-x) + x = 9.$$

$$\text{R. } x_1 = 2; x_2 = -4.$$

33. Se dau expresiile:

$$E_1 = x^4 - 4x^3 + 12x - 9,$$

$$E_2 = \frac{(x-1)(x-3)}{x^2-3}.$$

Se cere:

- 1) Să se descompună în factori E_1 .
- 2) Să se arate că $E_1 \times E_2$ și $\frac{E_1}{E_2}$ sînt pătrate perfecte.

$$\text{R. 1) } E_1 = (x^2 - 3)(x - 3)(x - 1); 2) E_1 \cdot E_2 = (x - 1)^2(x - 3)^2; \frac{E_1}{E_2} = (x^2 - 3)^2.$$

34. Se dă expresia:

$$E_1 = \left(\frac{2x^4 + x^3 - 2x^2y + x^2 - 2y - 4xy}{4(4x^3 - 8y)} + 1 + \frac{2x+2}{4} \right) : (x+5).$$

- 1) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă.
- 2) Pentru ce valori întregi ale lui x expresia E_1 este un număr întreg.
- 3) Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} E_1 \cdot \sqrt{256} < 2x - 3, \\ \frac{x}{3} - 2 > \frac{3-5x}{4} + 2. \end{cases}$$

$$\text{R. 1) } \frac{x+5}{16}; 2) x = k16 - 5; 3) x \in (8; +\infty). \quad (k \in \mathbb{Z})$$

35. Se dă expresia:

$$f(x) = \frac{7x+6}{8x+5} \text{ și mulțimile } A = \{2; 3; 13; 14\}; B = \{5; 6; 13\}.$$

Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției $p: A \cap B$ conține elemente prin care $f(x)$ se simplifică, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$.

R. adevărată.

36. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 5a + 2}{(a^2 + a + 1)(a + 1)^2};$$

$$E_2 = \frac{a^4 - 2a^3 + a}{(a^2 - 1)(a^2 - a - 1)}.$$

Se cere:

1) Să se aducă expresiile la forma cea mai simplă.

2) Pentru ce valoare a lui a avem $\frac{E_1 + E_2}{a + 1} < 2$.

3) Să se rezolve ecuația:

$$\frac{E_1}{E_2} = a + 2.$$

$$\text{R. 1) } E_1 = \frac{a+2}{a+1}; E_2 = \frac{a}{a+1}$$

$$2) a \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty);$$

$$3) a_1 = -2, a_2 = 1.$$

37. Se dau expresiile:

$$E_1 = \left\{ \left[\frac{(8+x^3)(x-2)}{x^4 - 2x^3 + 4x^2} \right]^2 + \frac{2x^2 - 8}{x^2} + 1 \right\} \cdot \frac{2x^2 - 4}{x^4}$$

$$E_2 = \left\{ \left(\frac{1 - 8x^3}{4x^4 + 2x^3 + x^2} \cdot \frac{1 + 2x}{x^2} \right)^3 + \frac{12x^2 - 48x^4}{x^{12}} \right\} \cdot \frac{x^{12}}{1 + 4x^2 + 16x^4}.$$

Se cere:

1) Să se aducă E_1 și E_2 la forma cea mai simplă.

2) Să se rezolve inecuația: $\frac{E_1 + E_2 + 2x^2 + x}{x + 2} < -4$

3) Să se rezolve ecuația: $\frac{E_2}{E_1} \cdot \frac{2}{1 - 2x} - 1 = 0$.

$$\text{R. 1) } E_1 = 2x^2 - 4; 1 - 4x^2 = E_2; 2) -2 < x < -1; 3) x_1 = 3; x_2 = -1.$$

38. Se dă polinomul $E = 1 + x + x^2 + 2x^3$.

Prin ce polinom a fost împărțit E , știind că s-a obținut citul $11 + 5x + 2x^2$ și restul 23.

$$\text{R. } x - 2.$$

39. Se dau expresiile:

$$E_1 = \left[\left(\frac{x^2 - 2x + 4}{x^3 - 2x^2 - x + 2} - \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 - 4x - 4} \right) : \frac{9}{(x^2 - 4)(x - 1)} \right]^2 - \frac{2}{x + 1} + 1.$$

$$E_2 = \left\{ \left[\frac{64 - 8x^3}{4x^2 + 8x + 16} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) : \frac{2}{x} \right]^2 + \frac{2x - 2x^2 + 4}{x} + 1 \right\} \cdot \frac{x}{2x - x^2 + 2} + x.$$

Se cere:

- 1) Să se aducă E_1 și E_2 la forma cea mai simplă.
- 2) Care sînt valorile lui x pentru care E_1 și E_2 au sens (studiul se face pe forma simplificată).
- 3) Să se rezolve ecuația: $(E_1 \cdot E_2 - 1) \cdot (x + 1) = 0$.

$$\text{R. 1) } \left(\frac{x}{x+1} \right)^2; \frac{2(x+1)}{x}; \text{ 2) } x \neq -1; x \neq 0; \text{ 3) } x = 1.$$

40. Se dă mulțimea: $P = \{x \in N \mid x = 2y - 4, y \in N, 12 < x \leq 18\}$.

Să se determine mulțimea și să se afle cardinalul acestei mulțimi.

$$\text{R. } P = \{14; 16; 18\}; 3.$$

41. Se dau expresiile:

$$E_1 = \left[\left(\frac{x-1}{x+1} \right)^2 + 1 + \frac{2x-2}{x+1} \right] \cdot \frac{(x+1)^3}{16x^2}$$

$$E_2 = \frac{(x^3 - 1 - 3x^2 + 3x)(x-1)^2(x-1) - 1}{x^4 + 3x^2 - 3x^3 - 2x}.$$

Se cere:

- 1) Să se aducă E_1 și E_2 la forma cea mai simplă.
- 2) Pentru ce valori (numere întregi) atribuite lui x , expresia E_1 devine număr întreg.
- 3) Să se rezolve ecuația: $\frac{E_1 E_2}{x-1} = 0$.

$$\text{R. 1) } E_1 = \frac{x+1}{4}; E_2 = x^2 - 3x + 3;$$

$$\text{2) } x = 4k - 1, k \in \mathbb{Z}; \text{ 3) } x = -1.$$

42. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{3}{2}, \\ x - y = 6. \end{cases}$$

$$\text{R. } x = 8; y = 2.$$

43. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{x^3 - 4ax^2 + 5a^2x - 2a^3}{x^2 - 3ax + 2a^2},$$

$$E_2 = \frac{x^3 + ax^2 - a^2x - a^3}{x + a}.$$

Se cere:

- 1) Să se aducă E_1 și E_2 la forma cea mai simplă.
 - 2) Să se rezolve ecuația: $\frac{E_1 + E_2}{1 + a + x}(x + b) = 0$.
- (după ce în prealabil s-a simplificat fracția).

$$\text{R. 1) } E_1 = x - a; E_2 = x^2 - a^2.$$

$$\text{2) } x_1 = a; x_2 = -b.$$

44. Să se simplifice fracția:

$$\frac{2x^3 - 6x^2 + 6x - 4}{2x^2 - 2x + 2}.$$

R. $x - 2$.

45. Se dă mulțimea $A = \{2; 3; 4\}$. Care sînt numerele de pe tricourile unor sportivi, ce se pot forma, folosind elementele mulțimii A , dacă fiecare număr are numai două cifre.

Indicație. Se folosește scrierea elementelor produsului cartezian $A \times A$.

R. 22; 23; 24; 32; 33; 34; 42; 43; 44.

46. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{x^3 - 4ax^2 + 5a^2x - 2a^3}{(x-a)(x-2a)},$$

$$E_2 = \frac{x^3 - 2ax^2 - a^2x + 2a^3}{x - 2a}.$$

Se cere:

1) Să se aducă la forma cea mai simplă E_1 și E_2 .

2) Să se găsească valorile întregi atribuite lui x astfel ca expresia:

$$\left(\frac{E_1 - E_2}{E_1} + ax^2 \right) : (1 - a - ax) \left(-\frac{2}{9} \right) \text{ să fie număr întreg.}$$

R. 1) $E_1 = x - a$, $E_2 = x^2 - a^2$.

2) $x = \frac{9k+2}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

47. Se dau polinoamele:

$$E_1 = 2x^3 + 7x^2 - 2x^2y - 7xy + 6x - 6y;$$

$$E_2 = 2x^3 - x^2 - 2x^2y + xy - 6x + 6y.$$

Se cere:

1) Să se transforme E_1 și E_2 într-un produs de factori.

2) Să se efectueze:

$$\frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + 2x + 4} - \frac{x^3 + 9}{x^3 - 8}.$$

3) Pentru ce valoare a lui x avem $\frac{E_1}{E_2} > 1$.

R. 1) $E_1 = (x-y)(x+2)(2x+3)$,
 $E_2 = (x-2)(2x+3)(x-y)$;

2) $\frac{-1}{x^3 - 8}$; 3) $x > 2$.

48. Să se aducă la forma cea mai simplă expresiile:

$$E_1 = \frac{\left(1 - \frac{2y}{x} + \frac{y^2}{x^2}\right) \left(\frac{y^3}{x^2} + \frac{2y^2}{x} + y\right) \cdot \frac{x^4}{y} + 2(x^2 - y^2) + 1}{x^2 - y^2 + 1},$$

$$E_2 = \frac{x^2 - y^2 + 2y - 1}{x - y + 1}.$$

Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \frac{E_1^2 - E_2^2}{(x^2 - y^2 - x - y + 2)(x - y + 1)} = 6. \\ x^2 - y^2 = 60. \end{cases}$$

$$R. \begin{cases} E_1 = x^2 - y^2 + 1. \\ E_2 = x + y - 1. \\ x = 8, \\ y = -2. \end{cases}$$

49. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{4x^2 - 20x + 9}{(2x - 1)^2 + (1 - 2x)} \cdot \frac{x - 1}{2x - 9}.$$

$$E_2 = \left[\frac{z - y}{(x - y)(x - z)} + \frac{y + z}{(y - z)(y - x)} + \frac{y + z}{(z - x)(z - y)} \right] \cdot \frac{z - x}{y}.$$

Se cere:

- 1) Să se aducă la forma cea mai simplă E_1 și E_2
- 2) Pentru ce valori ale lui $x \in Z$ avem:

$$\left(E_1 \cdot E_2 + \frac{1}{x + y} \right) \frac{x^2 - y^2}{x(x + 2)} \text{ este întreg.}$$

$$R. 1) E_1 = \frac{1}{2}; E_2 = \frac{2}{x - y}; x \in \{-1, -3, -4\}.$$

50. Se dă mulțimea $A = \{x \in N \mid 0 < x < 8\}$.

- a) Să se determine mulțimile $M = \{x \in A \mid \text{există } y \in A, x + y = 6\}$.
- b) Să se scrie $C_A M$.
- c) Să se scrie $M \cap C_A M$.
- d) Să se găsească $\text{Card } A - \text{Card } M$.

$$R. a) A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}; M \subset A = \{1; 2; 4; 5\}.$$

$$b) \{3; 6; 7\}.$$

$$c) \emptyset.$$

$$d) \text{Card } C_A M = 3.$$

51. Se dau expresiile:

$$A = 4yz; B = x^2 - y^2 - 4z^2; C = x^2 - y^2 + 4z(z + x).$$

Se cere:

- 1) Să se calculeze $A^2 - B^2$ și să se descompună expresia obținută în factori;

$$\frac{A^2 - B^2}{C^2}$$

- 2) Să se simplifice fracția: $\frac{A^2 - B^2}{(x + y - 2z)}.$

$$R. 1) (x + y + 2z)(x - y + 2z)(x + y - 2z)(-x + y + 2z);$$

$$2) y + 2z - x.$$

52. Să se rezolve ecuația (după simplificarea fracțiilor):

$$\frac{2x - 1 + (1 - 2x)^2 + (2x - 1)^3}{8x^2 + 1} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

Să se determine valoarea numerică a lui x pentru:

$$a = \sqrt[3]{\frac{125}{108} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}} + 1,1(6) - \frac{2}{3};$$

$$b = \left(\sqrt{1,0201} + \frac{9}{100} \right) : \frac{1}{10}.$$

$$\text{R. } \frac{a^2}{2b^2}; \frac{9}{242}.$$

53. c.m.m.d.c. al două numere naturale este 2. c.m.m.m.c. al acestor numere este 60, iar raportul lor este $\frac{5}{6}$. Să se găsească aceste numere.

$$\text{R. } \{10; 12\}.$$

54. Să se determine x din ecuația

$$\frac{x^3 - x - 2}{x^3 - 2x^2 - x + 2} - \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^4 - 5x^2 + 4} + \frac{3 - 2x - x^2}{(x+3)(x^2-1)} = \frac{1}{x-1}.$$

R. nu are soluție.

55. Să se rezolve ecuația:

$$\left\{ \left[\left(\frac{3x+6}{3x-6} \right)^2 - \frac{2x+4}{x-2} + 1 \right] - 1 \right\} : \frac{1}{(x-2)^2} = 0.$$

$$\text{R. } \begin{cases} x_1 = -2, \\ x_2 = 6. \end{cases}$$

56. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} (x-2)(y-3) = 1, \\ (x-2) : (y-3) = 1. \end{cases}$$

$$\text{R. } \begin{cases} x = 3, \\ y = 4. \end{cases}$$

57. Să se determine mulțimea A ale cărei elemente sînt valorile lui $x \in N$ pentru care fracția $\frac{3x+2}{2x-3}$ se simplifică.

$$\text{R. } A = \{M13 - 5; 1; 2\}.$$

58. Se dă expresia:

$$E = \frac{(2x-3)^2 + 4x^2 + 4x - 15}{8x^3 - 12x^2 - 12x(2x-3) + 18x - 27}.$$

Se cere:

- 1) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă.
- 2) Pentru ce valori ale lui x se obține:

$$\frac{4(2x-3)}{2x+1} < 3.$$

3) Pentru ce valori întregi ale lui x expresia

$$\frac{E \cdot 4(2x - 3)}{2x + 1}$$

este un număr întreg.

$$\text{R. 1) } E = \frac{2(2x + 1)}{(2x - 3)^2};$$

$$2) x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{15}{2}\right);$$

$$3) 1, 2.$$

59. Să se determine mulțimea $A = \{(x, y) \in N \times N \mid xy = 8\}$.

60. Se dă fracția:

$$E = \frac{6x^2(y + z)^2 - 24x^2yz}{3y^4 - 6y^3z - 6yz^3 + 6y^2z^2 + 3z^4}.$$

Se cere:

1) Să se aducă la forma cea mai simplă.

2) Să se arate că dacă $E = 2$, atunci x, y, z , pot fi laturile unui triunghi dreptunghic.

$$\text{R. } E = \frac{2x^2}{y^2 + z^2}.$$

61. Dacă numerele a și b sînt prime între ele, să se cerceteze dacă sumele $a + b$ și $a^2 + b^2$ sînt prime între ele?

Indicație. Putem scrie $a^2 + b^2 = (a + b)(a + b) - 2ab$. În baza acestei egalități orice număr care divide pe $a^2 + b^2$ și pe $(a + b)$ trebuie să dividă și pe $2ab$. Întrucît a și b sînt numere prime între ele suma lor $a + b$ și produsul lor ab sînt prime între ele, deci 2 este singurul divizor al lui $2ab$, comun pentru $a^2 + b^2$ și $a + b$.

62. Să se simplifice fracția:

$$E = \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 7}{x^2 + 5x + 7}.$$

Să se determine valorile lui x (numere întregi) ca să avem:

$$\frac{E}{x - 2} \geq 3.$$

$$\text{R. } E = x + 1; x = 3.$$

$$x \in \left(2; \frac{7}{2}\right].$$

63. Se dau expresiile:

$$E_1 = \left\{ \left[\frac{m^2x + 2mx + x - 3m^2 - 6m - 3}{(m + 1)(9 - 6x + x^2)} \right]^2 - 1 \right\} \cdot \frac{m + x - 2}{x - 3}.$$

$$E_2 = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x(x - 3) + x - 3}{(x^2 - 27)(x + 1)}.$$

Se cere:

- 1) Să se aducă la forma cea mai simplă E_1 și E_2 .
- 2) Pentru ce valoare a lui x expresia $(E_1 + 1) \cdot \frac{x+2}{m+1}$ este negativă.
- 3) Pentru ce valoare a lui x expresiile E_1 și E_2 nu au sens.

$$R. 1) \begin{cases} E_1 = \frac{m-x+4}{x-3}, \\ E_2 = \frac{x+1}{x^2+3x+9}. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} -2 < x < 3 \\ \text{sau } x \in (-2, 3) \end{cases}$$

$$3) x = -1 \text{ și } x = 3.$$

64. Se consideră mulțimea $A = \{x \in N \mid x = 2n + 1, n \in N\}$.
Să se scrie din această mulțime primele cinci elemente.

$$R. \{1; 3; 5; 7; 9\}$$

65. Se dă expresia

$$f(x) = \frac{ax^2 + x^2 - 2ax + a - 2x + 1}{a+1}, a \neq -1.$$

Să se arate că oricare ar fi $x \in R$, $f(x)$ este pozitivă.

66. Se dau expresiile:

$$E_1 = \left[\left(\frac{27 - 125x^3}{50x^2 + 30x + 18} \right)^2 - \frac{10x-6}{2} + 1,1(6) - \frac{1}{6} \right] \cdot \frac{4}{25}.$$

$$E_2 = \frac{\left[\left(\frac{4x^2 + 4x}{4x^2} \right)^2 + \frac{4x^2 + 4x}{2x^2} + \sqrt{4,1616} - 1 \frac{1}{25} \right] - 1}{\frac{3x+1}{x}}.$$

Se cere:

- 1) Să se aducă E_1 și E_2 la forma cea mai simplă.
- 2) Pentru ce valori întregi ale lui x expresia $E_1 \cdot E_2 \cdot \frac{-2x}{3-3x^2}$ este un număr întreg?

$$R. 1) \begin{cases} E_1 = (1-x)^2, \\ E_2 = \frac{x+1}{x}. \end{cases}$$

$$2) x = \frac{3k+2}{2}; k \in Z.$$

67. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{\left(\frac{1}{a^3 - ab^2} + \frac{1}{a^2b + 2ab^2 + b^3} \right) : \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \left(\frac{a^2}{b} - 2a + b \right)}{(a-b)^2 : (a+b)^2}$$

$$E_2 = \left[\frac{1}{b^4} + \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a-b^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b^2} \right) \right] : \frac{2ab^2 - a^2 - b^4}{ab^2}.$$

Se cere:

1) Să se aducă E_1 și E_2 la forma cea mai simplă.

2) Pentru ce valori ale lui a expresia $E_1 \cdot E_2 \cdot \frac{b^2(b-a)(a-2)}{8}$ este negativă.

$$\text{R. 1) } E_1 = \frac{a}{a-b}; \quad -\frac{1}{ab^2} = E_2; \quad 2) \quad a < 2 \text{ sau } a \in (-\infty, 2).$$

68. Se dă expresia:

$$\frac{a^3 + a^2(1-b) - b^2(1+a) + b^3}{a^3 + a^2(1+b) - b^2(1+a) - b^3} = \frac{A}{B}.$$

Se cere:

1) Să se simplifice fracția $\frac{A}{B}$.

2) Să se rezolve sistemul:

$$A = \frac{2y+x}{x}, \quad B = \frac{2x+y}{y},$$

în care A și B sînt termenii fracției, iar necunoscutele sînt a și b .

$$\text{R. } \left\{ \begin{array}{l} 1) \quad \frac{A}{B} = \frac{a-b+1}{a+b+1} \\ 2) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{x^2+y^2}{xy} \\ b = \frac{x^2-y^2}{xy} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

69. Se dă expresia:

$$E = \left(\frac{x^4 - 2x^2 + 2x^2y^2 - 2y^2 + y^4 + 1}{x^2 + y^2 - 1} - x^2y \right) : (x^2 - y - 1).$$

1) Să se aducă E la forma cea mai simplă.

2) Să se rezolve inecuația: $\frac{E}{y+1} < -3$.

$$\text{R. 1) } E = 1 - y; \quad 2) \quad y \in (-2, -1).$$

70. Se dau expresiile:

$$E_1 = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1,$$

$$E_2 = x^3 - 8x^2 + 13x - 6.$$

Se cere:

1) Să se descompună în factori E_1 și E_2 .

2) Să se simplifice expresia $\frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{x-6}{x^2+1}$.

$$\text{R. 1) } \left\{ \begin{array}{l} E_1 = (x^2+1)(x+1)^2 \\ E_2 = (x-1)^2(x-6) \end{array} \right. \\ 2) \quad \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2$$

71. Să se arate că dacă x, y, z sînt laturile unui triunghi, atunci avem:

$$\left(1 + \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{x}{z}\right) < 3 + \frac{x+y}{z} + \frac{x+z}{y}.$$

72. Să se aducă la forma cea mai simplă fracția:

$$E = \frac{\left[\left(\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y}\right) \cdot \left(\frac{x^2+y^2}{2xy} + 1\right) \frac{xy}{x^2+y^2}\right]^2 + \frac{2x+2y}{x-y} + 1}{\frac{4x^2}{(x-y)^2}}.$$

R. 1.

73. Se dă expresia $f(x) = \frac{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$.

a) Să se arate că oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$, $f(x)$ este pozitivă.

b) Se dă mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x < 5\}$. Să se arate că ecuația $f(x) = 9$, are soluții în mulțimea A .

74. Să se simplifice fracția:

$$\frac{3x^2 + 1 + 2x^3 + 3x}{x^2 + x + 1}$$

R. $2x + 1$.

75. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{x^3 - 6ax^2 + 12a^2x + 56a^3}{x^2 + 28a^2 - 8ax}$$

$$E_2 = \frac{x^3 + 6ax^2 + 12a^2x + 72a^3}{x^2 + 12a^2}$$

Se cere:

1) Să se aducă E_1 și E_2 la forma cea mai simplă.

2) Să se rezolve ecuația (după ce s-a simplificat fracția):

$$\frac{E_1 \cdot E_2 + 4a^2 + 2x + 8a + 1}{(x + 4a + 1)^2} = x^2$$

$$\text{R. 1) } \begin{cases} E_1 = x + 2a, \\ E_2 = x + 6a; \end{cases}$$

$$2) \quad x = \pm 1.$$

76. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{x(x+1)^2 \cdot (x^2+1) + 1}{x^3 + x^2 + 1}$$

$$E_2 = \frac{x^6 + 2x^5 + x^3 - 2x^2 - 2}{x^3 + 2x^2 + 2}$$

Se cere:

1) Să se aducă la forma cea mai simplă E_1 și E_2 .

2) Să se rezolve ecuația:

$$\left[\frac{E_1(x-1)}{E_2} + x\right](2-x) = 0.$$

$$\text{R. 1) } \begin{cases} E_1 = x^2 + x + 1 \\ E_2 = x^3 - 1. \end{cases}$$

$$2) \quad x_1 = -1; \quad x_2 = +2.$$

77. Se dau expresiile:

$$E = \frac{(x-1)^3 + (x+y)^2 + (y-1)^2 - 4}{x^2 + y^2 - xy + 3}$$

$$E_1 = \frac{x^3 + x^2y - 2x^2 - x - y + 2}{x^2 - 1}$$

Se cere:

1) Să se aducă la forma cea mai simplă E și E_1

2) Pentru ce valoare a lui x expresia

$\left(\frac{E}{E_1} - x^3\right) : (x^2 + x + 1)(x + 3)$ este negativă?

3) Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \frac{E \cdot E_1 - 2xy - 4 - 2y^2}{x - y - 4} = 1. \\ x^2 - y^2 = 7 \end{cases}$$

$$\text{R. 1) } \begin{cases} x + y - 2 = E, & 2) \ x \in (\infty; -3) \cup (1; \infty); \\ x + y - 2 = E_1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = -3 \end{cases} \begin{cases} x_2 = \frac{23}{8} \\ y_2 = -\frac{9}{8} \end{cases}$$

78. Să se simplifice fracția:

$$\frac{x^5 + 6x^5 + 9x^4 - 9x^2 - 6x - 1}{x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 6x + 1}$$

$$\text{R. } x^2 - 1.$$

79. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{(x^4 - x^3 + 8x^2 - 2x + 12)(x + 2)}{(-8x^2 - 16)(x^2 - x + 6)}$$

$$E_2 = \frac{6 + 6x + 5x^2 + 3x^3 + x^4}{(x^2 + 2)(x^2 + 3x + 3)}$$

Se cere:

1) Să se aducă E_1 și E_2 la forma cea mai simplă.

2) Pentru ce valoare a lui x expresia $E_1 \cdot \frac{E_2}{x - 1}$ este negativă?

3) Care sînt numerele întregi atribuite lui x pentru ca E_1 să fie număr întreg?

$$\text{R. 1) } E_1 = \frac{x + 2}{-8}; E_2 = 1; 2) \ x \in (-\infty; -2) \cup (1, \infty).$$

$$3) \ x = 8k - 2, (k \in \mathbb{Z})$$

80. Să se aducă fracția la forma ireductibilă:

$$E(x) = \frac{4x^2 - 4x - 15}{8x^2 - 24x + 10}$$

2) Pentru ce valoare a lui x expresia $E(x) < -4$.

$$\text{R. } 1) \frac{2x+3}{2(2x-1)}, \quad 2) x \in \left(\frac{5}{18}; \frac{1}{2}\right).$$

81. Se dau expresiile:

$$E_1 = \left[\left(\frac{5x+5}{5x} \right)^2 + \frac{2x+2}{x} - \frac{2x+1}{x} + 1 \right] : \frac{2x+1}{x^2},$$

$$E_2 = \left(\frac{8x^3 - 2 + 4x^2}{2x^2 + 2x + 1} \right)^2 + 2(4x - 2) + 1.$$

Se cere:

1) Să se aducă aceste expresii la forma cea mai simplă.

2) Pentru ce valoare a lui x avem: $\frac{E_2 - 16x^2}{E_1} < 0$.

$$\text{R. } 1) \begin{cases} E_1 = x + 1 \\ E_2 = (4x - 1)^2 \end{cases}$$

$$2) x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{8}; \infty\right).$$

82. Să se afle în ce sistem de numerație este adevărată egalitatea:

$$\left(\frac{20}{120} + \frac{1}{10}\right) \cdot \frac{1}{1020} = 1.$$

R. baza = 3.

83. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{a+b-\sqrt{a^2-b^2}}{a+b+\sqrt{a^2-b^2}} + \frac{a+b+\sqrt{a^2-b^2}}{a+b-\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$E_2 = \left[1 + \left(\frac{a+b}{a-b} \right)^2 + \frac{2a+2b}{a-b} - 1 \right] \frac{(a-b)^2}{3a-b}$$

Se cere:

1) Să se aducă la forma cea mai simplă E_1 și E_2 .

2) Să se rezolve ecuația

$$\left(\frac{E_1}{E_2} + \frac{a^2}{b^2(a+b)} + \frac{1}{a+b} \right) \cdot b^2 = ax^2 + bx^2.$$

$$\text{R. } E_1 = \frac{2a}{b}; \quad E_2 = (a+b); \quad x = \pm 1.$$

84. Se dau expresiile:

$$E_1 = \left(\frac{x^2 - xy}{x^2y + y^3} - \frac{2x^2}{y^3 - xy^2 + x^2y - x^3} \right) \cdot \frac{(x-y)(x+1)}{x}$$

$$E_2 = \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{x-y} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) \right] \cdot \frac{xy}{(x-y)^2}$$

Se cere:

1) Să se aducă la forma cea mai simplă E_1 și E_2

2) Să se rezolve ecuația: $\frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{1}{x} \cdot (x-2) = 0$.

3) Pentru ce valoare a lui x expresia $\frac{E_1 \cdot E_2}{x} \cdot (x - 4)$ este negativă?

4) Pentru ce valori întregi atribuite lui x expresia:

$$E_1 \cdot \frac{24y}{x^2 - 3x - 4} \text{ este un număr întreg?}$$

$$\text{R. 1) } \begin{cases} E_1 = \frac{x+1}{y} \\ E_2 = \frac{1}{xy}; \end{cases}$$

$$2) x_1 = 2, x_2 = -1; 3) -1 < x < 4;$$

$$4) \begin{cases} \text{Toate valorile care fac ca numitorul să fie} \\ \text{divizorul lui 24 cu excepția } x = 4 \text{ și } x = -1. \end{cases}$$

85. Fie fracțiile:

$$\text{a) } \frac{4x+3}{5x+2}; \text{ b) } \frac{3x+2}{4x+1}; \text{ c) } \frac{5x+4}{6x+3}.$$

Să se afle valorile lui x pentru care fracțiile se pot simplifica ($x \in N$).

Indicație. Orice divizor comun al celor două numere ce formează fracția întii este și divizorul expresiei:

$$(5x+2) - (4x+3) = x-1;$$

$$x = M7 + 1. \text{ Verificare } M7 = 14.$$

$$\frac{(14+1)4+3}{5(14+1)+2} = \frac{63}{77} \text{ au divizor comun pe 7 și fracția se poate simplifica.}$$

$$\text{R. a) } M_7 + 1; \text{ b) } M_5 + 1; \text{ c) } M_9 + 1.$$

86. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{2(x-y)^2 - 5y^2 + 3xy}{2x-3y} + \frac{3x^2 + 2xy - y^2}{3x-y},$$

$$E_2 = \left[\left(\frac{x+y}{x-y} \right)^2 + 1 + \frac{2x+2y}{x-y} \right] \cdot \frac{(x-y)^2}{-16x^2}.$$

Se cere:

1) Să se aducă la forma cea mai simplă expresiile E_1 și E_2 .

2) Pentru ce numere întregi atribuite lui x expresia:

$$E_1 \cdot E_2 \cdot \frac{x+1}{x+y} \text{ este un număr întreg.}$$

3) Pentru ce valoare a lui x se obține:

$$E_1 \cdot E_2 : (x+y) \cdot \frac{x+1}{x-1} < -4.$$

$$\text{R. 1) } E_1 = 2(x+y); E_2 = \frac{-1}{4}; 2) x = 2k - 1 (k \in \mathbb{Z});$$

$$3) 1 < x < \frac{9}{7}.$$

17. Probleme care conduc la sisteme de ecuații de gradul întâi cu una, două și trei necunoscute

1. La o întreprindere muncitorii lucrind cîte 15 piese pe zi, depășeau norma zilnică cu 0,25 din ea. Dacă numărul muncitorilor s-ar micșora cu $\frac{1}{5}$ din numărul lor și fiecare muncitor și-ar depăși norma zilnică cu 10 piese, atelierul ar realiza 2 800 de piese mai mult decît prevedea planul inițial. Cîți muncitori erau inițial în atelier și care era planul pe zi?

R. 500 de muncitori; 6 000 de piese pe zi.

2. Două brigăzi ale unei secții de strungărie trebuia să lucreze zilnic, conform planului, un număr de piese care se găsesc în raportul de $\frac{3}{4}$. Prima brigadă a depășit planul cu 15%, iar a doua cu $\frac{3}{20}$ din norma de zi. Știind că în felul acesta au lucrat împreună 805 piese zilnic să se afle cîte piese trebuia să lucreze fiecare după plan și care a fost realizarea în procente, față de plan?

R. 300 și 400 de piese; 115% realizare.

3. La un magazin de legume și fructe s-au adus de la o cooperativă agricolă de producție cireșe socotite la doi lei kg și căpșuni socotite la 3 lei kg, în valoare totală de 2 600 de lei.

Cireșele au avut un scăzămînt de 5%, iar căpșunile 10%. Pentru a se recupera scăzămîntul, s-a mărit prețul pe kg cu procentele scăzămîntelor respective. Din vînzare s-a încasat pe căpșuni cu 984 de lei mai mult decît de pe cireșe.

1) Cîte kg de cireșe și de căpșuni s-au luat de la cooperativa agricolă de producție?

2) Ce procent reprezintă scăzămîntul cireșelor față de cel al căpșunilor?

Indicație. Se va calcula aritmetic noul preț pe kg al cireșelor și al căpșunilor.

R. 600 kg căpșuni; 400 kg cireșe; 33%.

4. Pentru construcția a două clădiri trebuiau transportate cantități egale de ciment, cu două camioane. Un camion transporta ciment pentru clădirea mai apropiată și la fiecare drum ducea 1,5 t; celălalt transporta ciment pentru clădirea mai depărtată și la fiecare drum ducea cu $\frac{2}{3}$ t mai mult decît primul. Pînă la amiază camionul al doilea a făcut 3 drumuri mai puțin decît primul și au rămas netransportate $3\frac{1}{2}$ t de ciment pentru clădirea apropiată și 2 t pentru clădirea mai depărtată.

a) Cîte tone de ciment trebuiau transportate pentru fiecare clădire?

b) Cîte drumuri a făcut fiecare camion?

R. a) 17 t; b) 9 drumuri; 6 drumuri.

5. O brigadă de țărani cooperatori și-a propus să termine prășitul unei parcele de floarea-soarelui într-un anumit număr de zile. Dacă s-ar fi prășit cîte 12 ha pe zi, ar fi rămas 8 ha neprășite față de plan. Prășind însă cu cîte 4 ha mai mult pe zi, s-a terminat prășitul parcelei cu o zi mai devreme față de plan. În cîte zile trebuia terminat prășitul după plan?

R. 6 zile.

6. Un grup de pionieri din București au organizat prin O.N.T. o excursie la Tușnad, dînd fiecare cîte 50 de lei. Înaintea plecării s-au mai înscris 3 pionieri, plătînd și ei cîte 50 de lei și după ce au convenit să mai dea fiecare cîte 5 lei, realizîndu-se un plus de 315 lei, excursia s-a prelungit pînă la Borsec. Cîți excursioniști au fost inițial și care a fost costul total al excursiei la Tușnad?

R. 30 de pionieri; 1 500 de lei.

7. Cooperatorii unei cooperative agricole de producție aveau de recoltat 380 de ha grîu și 230 ha secară în timp de două săptămîni. În prima săptămîină s-au recoltat de două ori mai multe ha de grîu decît de secară, iar în săptămîina a doua de două ori și jumătate mai multe ha de secară decît de grîu. Cîte ha de grîu au fost recoltate în prima săptămîină?

R. 360 ha.

8. Două secții ale unei uzine au produs împreună într-un an 8 900 piese. În anul următor, producția primei secții a crescut cu 12% iar a celei de-a doua cu 10%, așa încît cea de a doua secție a produs cu 2 686 mai multe piese decît prima secție. Cîte piese a produs fiecare secție în primul an?

R. 3 200 piese; 5 700 de piese.

9. În două silozuri s-au înmagazinat 186 t cereale. Din primul siloz s-au scos 60% din cantitatea înmagazinată, iar din al doilea $\frac{5}{6}$ și a mai rămas în primul siloz de 12 ori mai mult decît în al doilea. Cîte tone au fost în fiecare siloz?

R. 155 t; 31 t.

10. Doi muncitori lucrînd împreună, pot să facă o anumită lucrare în 12 zile; dacă primul muncitor ar lucra 2 zile, iar muncitorul al doilea 3 zile, atunci ei ar face numai 20% din lucrarea întreagă. În cîte zile poate să facă lucrarea fiecare muncitor lucrînd singur?

Indicație. Notăm cu x partea din lucrare, făcută de primul muncitor într-o zi, singur, și cu y partea executată de-al doilea muncitor într-o zi dacă ar lucra singur; se găsește

$$x = \frac{1}{20}; \quad y = \frac{1}{30}.$$

R. 20 zile; 30 zile.

11. Pentru executarea unei comenzi, o fabrică a întrebuințat două tipuri de strunguri: 12 strunguri de tipul A și alte 12 de tipul B și a terminat comanda în 8 zile. Se știe că 3 strunguri de tipul A pot strunji într-o oră aceeași cantitate de piese cît strunjesc două strunguri de tipul B . În cît timp se va efectua o altă comandă la fel de mare dacă la ea lucrează 9 strunguri de tipul A și 4 strunguri de tipul B ?

R. 16 zile.

12. Un detașament de pionieri a organizat o excursie la hidrocentrala de la Bicaz. Dacă fiecare participant ar contribui la cheltuielile pentru transport cu cîte 25 de lei, suma adunată de la toți pionierii ar fi mai mică cu 200 de lei decît cea necesară; dacă fiecare pionier ar contribui cu cîte 32 de lei, suma adunată ar acoperi cheltuielile și ar mai rămîne 24 de lei. Cîți pionieri erau în detașament?

R. 32 de pionieri.

13. Cîțiva turiști au luat masa la o cabană. Dacă ar fi fost cu 5 mai mulți și dacă costul total al mesei ar fi fost cu 60 de lei mai mare, fiecare ar fi plătit cu 2 lei mai mult, iar dacă ar fi fost 15 turiști în plus și masa ar fi costat cu 40 de lei mai mult, fiecare ar fi plătit 2 lei mai puțin. Cîți turiști au luat masa la cabană și cît a plătit fiecare pentru masă?

R. 10 turiști; 6 lei.

14. Pentru două școli care s-au construit în Calafat, au fost necesare cantități egale de ciment. De la depozit, cimentul a fost cărat de 2 camioane. Pentru școala cea mai apropiată un camion a transportat $2\frac{1}{2}$ t la fiecare drum; pentru școala mai îndepărtată, celălalt camion a transportat 3,5 t la fiecare drum. Pînă la amiază camionul al doilea a făcut cu 3 drumuri mai puțin decît primul și au rămas netransportate $65\frac{1}{2}$ t pentru școala apropiată și 69 t pentru cea depărtată. Cîte tone de ciment au fost necesare pentru fiecare școală?

R. 83 tone.

15. O cooperativă agricolă de producție a pregătit fin pentru hrana unei cirezi de vaci. Dacă vinde 20 de vaci, atunci va hrăni restul de vaci cu 10 zile mai mult decît timpul prevăzut la început; dacă însă va mai cumpăra 80 de vaci, rezerva de fin însă se va consuma cu 20 de zile mai devreme decît termenul fixat.

Pentru cîte vaci și pentru cîte zile s-a făcut rezervă de fin?

R. 120 de vaci; 50 de zile.

16. Mai mulți pionieri au vrut să cumpere un joc de șah. Dacă fiecare ar fi dat cîte 5 lei, nu le-ar fi ajuns pentru a cumpăra șahul o sumă de două ori mai mică decît costul șahului. Doi dintre pionieri au renunțat să mai ia parte la cumpărarea șahului, și atunci, dînd fiecare cîte 20 de lei, le-a mai rămas o sumă egală cu 20% din costul șahului, care reprezintă costul a 5 piese de rezervă pentru șah.

1) Cît a costat jocul de șah?

2) Cîți pionieri au fost inițial?

3) Cît costă o piesă de rezervă?

R. 50 de lei costă șahul; 5 pionieri; o piesă de rezervă 2 lei.

17. Terenul unei cooperative agricole de producție a fost repartizat la trei brigăzi astfel: 0,75 din terenul primei brigăzi reprezintă 0,3 din terenul repartizat brigăzii a doua și $\frac{1}{8}$ din terenul brigăzii a treia.

Aria terenului fiind de 2 413 ari, să se afle suprafața repartizată fiecărei brigăzi.

R. 2,54 ha; 6,35 ha; 15,24 ha.

18. Trei brigăzi de muncitori ar fi executat aceeași lucrare astfel: prima ar fi terminat-o în 9 zile, a doua în 10 zile și a treia în 12 zile. S-a alcătuit o brigadă din $\frac{1}{4}$ din efectivul brigăzii întîi, $\frac{1}{3}$ din efectivul brigăzii a doua și $\frac{1}{2}$ din efectivul celei de-a treia. În cîte zile s-a executat aceeași lucrare cu brigada astfel alcătuită?

R. 10 zile.

19. Trei brigăzi de muncitori au primit pentru o lucrare suma de 34 200 lei. Prima brigadă de 8 oameni a lucrat 5 zile, a doua compusă din 7 membri a lucrat 8 zile, iar brigada a treia compusă din 12 oameni a lucrat 4 zile. Calificarea fiind aceeași pentru membrii tuturor brigăzilor, să se afle ce sumă revine de plată fiecărei brigăzi?

R. 9 500 lei; 13 300 lei; 11 400 lei.

20. O roată dințată A are 60 de dinți și face 80 rotații pe minut. O altă roată B , angrenată cu prima, are 48 de dinți. Câte rotații face roata B pe minut? Dacă, la un moment dat, un dinte a al roții A este angrenat cu un dinte b al roții B , peste cât timp dinții a și b se angrenează iarăși?

R. 100 rotații; 3 s.

21. Într-o excursie timpul coborîrii de pe un munte a fost cu 1,2 ori mai mic decît timpul necesar urcușului. Care este distanța parcursă pînă la virful muntelui știind că la urcarea pe munte s-a parcurs, în medie, 106,2 m în $1/5$ oră, iar timpul necesar coborîrii a fost $3/5$ din cel necesar urcușului.

R. 1 592 m.

22. Dacă un tren ar merge cu viteza de 54 km/h, ar străbate distanța dintre două localități într-un timp mai mic cu jumătate de oră decît cel programat, iar dacă ar merge cu viteza de 36 km/h, i-ar trebui 1 oră și $1/2$ mai mult decît timpul programat pentru străbaterea acelei distanțe. Care este viteza programată a celui tren?
(Se presupune mișcarea uniformă.)

R. 48 km/h.

23. Luni, la ora 5 dimineața a plecat un vapor de pasageri dintr-un port spre un alt port; în același timp, a plecat de la al doilea port către primul, un șlep care are viteza $1/2$ din viteza vaporului. Cele două nave s-au întîlnit la ora 11 noaptea. Cînd va ajunge fiecare dintre ele la destinație?

R. marți la ora 8; miercuri la ora 11.

24. Vitezele a trei trenuri: unul de marfă, altul personal și al treilea rapid sînt proporționale cu numerele 1; $1\frac{1}{2}$; 3. Știind că pentru o aceeași distanță trenul de marfă folosește o oră și 20 minute mai mult decît personalul, să se afle în cât timp a parcurs acea distanță fiecare din cele trei trenuri.

R. 240 min; 160 min; 80 min.

25. Într-o lună, două echipe de muncitori aveau de efectuat, după plan, 2 750 de piese. Prima echipă a depășit planul cu 20%, iar a doua echipă cu 15%. Știind că în acest caz prima echipă a efectuat în acea lună cu 480 de piese mai mult decît a doua echipă, să se calculeze:

- a) numărul de piese planificate inițial pentru fiecare echipă;
b) numărul de piese efectuate peste plan de către fiecare echipă.

R. a) I. 1 550; II. 1 200 de piese;

b) 310 ; 180 de piese efectuate peste plan.

26. Din două calități de produse cu prețul de 5 lei și 3 lei kg, s-a făcut un amestec de 18 kg. Dacă acest amestec s-ar vinde cu 3,90 lei kg, s-ar pierde 3,80 lei. Cite kg de produse din fiecare cantitate s-au luat pentru amestec?

R. 10 kg de calitatea I; 8 kg de calitatea a II-a.

27. Trei brigăzi ale unei cooperative agricole de producție au cultivat zarzavaturi astfel: 20% din lotul primei brigăzi împreună cu 25% din lotul celei de-a treia brigăzi fac cît $\frac{1}{3}$ din lotul brigăzii a doua. Loturile au fost repartizate proporțional cu numărul de tractoare al fiecărei brigăzi. Știind că prima brigadă a avut 10 tractoare, a doua 15 tractoare și a treia 12 tractoare, să se afle cîte hectare a cultivat fiecare brigadă.

R. 100 ha; 150 ha; 120 ha.

28. Pentru rezultatele deosebite în muncă, trei muncitori au primit drept primă suma de 3 000 lei. 75% din prima primită de primul muncitor este cu 100 de lei mai mare decît suma primită de al doilea muncitor, iar raportul dintre suma primului muncitor și a celui de-al treilea este de $\frac{6}{5}$. Să se afle sumele primite de fiecare muncitor.

R. 1 200; 800; 1 000 de lei.

29. Într-un an, o cooperativă agricolă de producție a recoltat de pe două loturi semănate unul cu grîu și celălalt cu orz 1 370 q de cereale. În anul al doilea, folosind îngrășăminte chimice, recolta de pe lotul semănat cu grîu s-a mărit cu 15%, iar cea de pe lotul semănat cu orz s-a mărit cu 10%, obținîndu-se astfel de pe ambele loturi 1 551 q de cereale. Cît s-a recoltat pe fiecare lot în anul următor?

R. 1 012 q; 539 q.

30. Avem două bucăți de aliaj, dintre care prima bucată conține 270 g de aur și 30 g de aramă, iar bucata a doua conține 400 g de aur și 100 g de aramă. Cît trebuie luat din fiecare bucată de aliaj, pentru a obține 400 g de aliaj cu titlul de 0,825?

R. 100 g; 300 g.

31. Două aliaje de aur și aramă, dintre care unul cu proba de 950, iar celălalt cu proba de 800, se topesc împreună cu 2 g de aur curat și se obține un aliaj nou cu masa de 25 g și cu proba de 906. Să se afle masa celor două aliaje date. (Se numește proba unui aliaj, de 1 000 ori titlul lui.)

R. 15 g; 8 g.

32. Pentru 5 kilograme de cafea de două calități s-au plătit 760 de lei. Un kilogram de cafea de prima calitate costă 160 de lei, iar un kilogram de calitatea a doua costă 140 de lei. Cîte kg de cafea de fiecare calitate s-au cumpărat?

R. 3 kg; 2 kg.

33. Un aliaj de aur și argint cu masa de 1,06 kg, fiind introdus în apă, „pierde” 70 g. Cît aur și cît argint este în acest aliaj, dacă aurul „pierde” în apă $\frac{1}{19}$ din masă, iar argintul „pierde” 0,1 din masă?

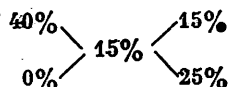
R. 760 g; 300 g.

34. Se cîntărește o medalie în apă și se găsește că are 22,5 g, iar în aer 25 g. Medalia fiind un aliaj de cupru și argint, să se afle ce cantitate din fiecare metal cuprinde, știind că densitatea argintului este de 10 450 kg/m³, iar a cuprului 8 800 kg/m³.

R. Ag 19 g; Cu 6 g.

35. Se amestecă 15 kg acid sulfuric de 40% cu apă și se obține o soluție cu o concentrație de 15%. Să se calculeze masa amestecului obținut.

Indicație. Pentru rezolvarea aritmetică



Raportul părților este $15/25 = 3/5$; noul amestec conține în total $3 + 5 = 8$ părți egale, dintre care 3 corespund la 15 kg. O singură parte conține 5 kg, iar amestecul total va avea 40 kg.

R. 40 de kg.

36. Pentru a prepara 40 kg acid cu tăria de 20% se amestecă acid de 80% cu acid de 15%. Ce cantități de acid se vor folosi din fiecare fel?

R. 3,07 kg; 36,93 kg.

37. Din două calități de grâu de 4 lei/kg și 3 lei/kg trebuie făcut un amestec de 350 kg spre a fi vândut cu 3,40 lei/kg (fără câștig sau pierdere). Ce cantitate de grâu trebuie să se ia din fiecare cantitate?

Indicație pentru rezolvarea aritmetică: dacă tot grâul ar fi de 3 lei/kg, atunci costul a 350 kg ar fi 1 050 lei; dar grâul amestecat este vândut cu $3,40 \times 350 = 1 190$ lei. Diferența de 140 de lei provine de la 140 kg grâu de calitate 4 lei/kg și restul (210 kg) cuprinde grâul de calitate 3 lei/kg.

Se poate utiliza și metoda obișnuită pentru problemele de amestec.

R. 140 kg; 210 kg.

38. Un aliaj de aur de 2 kg cu titlul de 0,910 s-a obținut dintr-o bucată de aliaj de aur cu titlul de 0,800 și alta cu titlul de 0,950. Ce cantitate din fiecare fel s-a folosit pentru noul aliaj?

R. 0,533 kg; 1,467 kg.

39. Cifra zecilor unui număr de două cifre este de două ori mai mică decât cifra unităților. Dacă schimbăm ordinea cifrelor acestui număr, obținem un număr cu 27 de unități mai mare decât cel de la început. Să se afle numărul.

R. 36.

40. Cifra zecilor unui număr de două cifre este de trei ori mai mare decât cifra unităților. Dacă schimbăm ordinea cifrelor acestui număr, obținem un număr cu 36 de unități mai mic decât numărul de la început. Să se afle numărul.

R. 62.

41. Suma cifrelor unui număr de două cifre este 11. Dacă adăugăm la acest număr 63, obținem un număr format din aceleași cifre, dar așezate în ordine inversă. Să se afle numărul.

R. 29.

42. Să se găsească două numere știind că unul este mai mare decât celălalt cu 14 unități, iar dacă se împarte cel mai mare la 5 și cel mai mic la 8, diferența citurilor obținute este 4.

R. 30; 16.

Probleme de mișcare

43. Pentru a ajunge din sat la oraș în timpul stabilit, un drumeț trebuia să meargă cu viteza de 4 km/h. El merge jumătate din drum cu viteza stabilită, iar restul cu un autocamion care merge cu 20 km/h. El sosește în oraș cu două ore înaintea timpului stabilit. Să se afle distanța de la sat până la oraș.
- R. 20 km.
44. Un drumeț a socotit că, făcând câte 3 km pe oră, va sosi din sat la oraș la o anumită oră. După ce a făcut jumătate din drum cu viteza stabilită, el s-a oprit pentru o oră și apoi a trebuit să-și mărească viteza, pentru partea de drum rămasă, cu 1 km pe oră. Să se afle distanța de la sat la oraș.
- R. 24 km.
45. Roata din față a unei trăsuri are circumferința de 30 dm, iar roata din spate, de 40 dm. Pe distanța de la A la B , roata din față a făcut cu 30 de învîrtituri mai mult decît roata din spate. Să se afle distanța de la A pînă la B .
- R. 360 m.
46. Pe aceeași distanță, roata din față a unei trăsuri face 240 de învîrtituri, iar cea din spate, a cărei circumferință este cu 0,6 m mai mare, face 180 de învîrtituri. Să se afle lungimea circumferinței fiecărei din aceste roți.
- R. 1,8 m; 2,4 m.
47. Roata din față a unei căruțe a făcut pe o anumită distanță cu 15 învîrtituri mai mult decît cea din spate. Circumferința roții din față este de 2,5 m iar a celei din spate, de 4 m. Cîte învîrtituri a făcut fiecare roată și ce distanță a parcurs căruța?
- R. 40; 25; 100 m.
48. Cu cîți km poate să se îndepărteze de la debarcader o barcă care merge împotriva curentului, pentru ca să se întoarcă înapoi în 4 ore, dacă viteza apei este de 2 km/h și viteza bărcii în apă stătătoare este de 8 km/h?
- R. 15 km.
49. Un curier a parcurs pe bicicletă un drum cu viteza medie de 8 km/h. El s-a înapoiat pe alt drum, cu 3 km mai lung decît primul. La întoarcere curierul a mers cu o viteză medie de 9 km/h și a făcut cu $\frac{1}{8}$ oră mai mult decît la dus. Să se afle lungimea fiecărui drum.
- R. 15 km; 18 km.
50. Un călător trebuie să străbată într-un timp stabilit distanța dintre orașul A și orașul B ; dacă el ar face acest drum cu o motocicletă, parcurgînd cîte 35 km/oră, ar întirzia cu 2 ore, iar dacă ar face acest drum cu un automobil parcurgînd cîte 50 km/oră, ar sosi cu o oră mai devreme. Să se afle distanța dintre orașele A și B și în cîte ore trebuia să ajungă călătorul în orașul B .
- R. $AB = 350$ km; 8 ore.
51. Doi turiști merg unul către celălalt din două orașe A și B , situate la o distanță de 30 km unul de celălalt. Dacă primul turist pornește cu 2 ore înaintea celui de-al doilea, ei se întîlnesc după $2\frac{1}{2}$ ore de la plecarea turistului

al doilea, iar dacă turistul al doilea pornește cu 2 ore înaintea primului, ei se întâlnesc după trei ore de la plecarea primului turist. Cîți kilometri pe oră face fiecare turist?

R. 5 km/oră; 3 km/oră.

52. Un călăreț și un pieton pornesc din același punct A spre punctul B . Călărețul, ajungînd în B cu 50 minute înaintea pietonului, se reîntoarce imediat spre A și se întâlnește cu pietonul la o distanță de 2 km de B . Pentru tot drumul de la A la B și înapoi i-a trebuit călărețului 1 oră 40 minute. Să se afle distanța de la A la B , viteza călărețului și a pietonului.

Indicație pentru metoda aritmetică.

Se deduce ușor că distanța AB a fost parcursă de călăreț în 50 min. Dacă pietonul a sosit în B la 50 minute după călăreț, înseamnă că în același moment călărețul ajunsese din nou în A , deci viteza pietonului este de două ori mai mică decît a călărețului și, prin urmare, cînd călărețul sosise în B , pietonul era la jumătatea drumului. La întoarcere călărețul face 2 km pînă îl întâlnește pe pieton, care, în acest timp, mergînd cu o viteză de două ori mai mică, a parcurs un km de la jumătatea drumului; aceasta înseamnă că jumătatea distanței dintre A și B este $1 + 2 = 3$ km. Acum se poate afla distanța AB , apoi vitezele.

R. 6 km; 7,2 km/oră; 3,6 km/oră.

53. Un înotător înoată pe fluviul Neva împotriva curentului. Lîngă Podul Republicii pierde o ploscă goală. După ce mai înoată 20 de minute împotriva curentului, observă pierderea, se întoarce și ajunge plosca lîngă podul Schmidt. Să se afle cu ce viteză curge Neva, știind că distanța dintre poduri este de 2 km.

Culegere U.R.S.S.

Rezolvare. Să notăm cu x viteza cu care curge Neva exprimată în km pe oră. Pentru a lucra cu aceleași unități de măsură, vom transforma în prealabil cele 20 de

minute în ore, adică 20 de minute $= \frac{20}{60}$ ore $= \frac{1}{3}$ ore. Să notăm cu A punctul

unde înotătorul a observat că a pierdut plosca.

De la Podul Republicii pînă la A el a parcurs distanța împotriva curentului deci viteza lui față de țărmlul apei a fost diferența dintre viteza v (viteza proprie a înotătorului) și viteza apei, adică $v - x$, fiindcă el a parcurs distanța VA în $\frac{1}{3}$ ore, avem

$$VA = \frac{1}{3} (v - x).$$

Întorcîndu-se de la A la V , el parcurge această distanță cu o viteză egală cu $v + x$ întrucît la viteza sa proprie se adaugă viteza apei. Ca să ajungă plosca, el mai parcurge încă o distanță VS dintre poduri care este de 2 km, avînd o viteză tot de $v + x$.

Deci, drumul total parcurs în sensul curentului va fi:

$$AV + VS = \frac{1}{3} (v - x) + 2.$$

Prin urmare, timpul necesar ca să parcurgă acest spațiu, adică să ajungă plosca, este:

$$\frac{\frac{1}{3} (v - x) + 2}{v + x}$$

Dacă la acest timp adăugăm cele 20 minute = $\frac{1}{3}$ ore, de când a pierdut plosca, înseamnă că pentru ca s-o prindă s-a scurs un timp egal cu:

$$\frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{3}(v-x) + 2}{v+x}.$$

Acest timp trebuie să fie egal cu acela necesar pentru ca plosca să parcurgă cei 2 km cu viteza x a apei, întrucât ea nu a avut o viteză proprie, adică cu $\frac{2}{x}$.

Ecuația problemei este așadar:

$$\frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{3}(v-x) + 2}{v+x} = \frac{2}{x}.$$

de unde:

$$\frac{1}{3} + \frac{6+v-x}{3} \cdot \frac{1}{v+x} = \frac{2}{x}.$$

Înmulțind ambii membri cu cel mai mic multiplu comun al numitorilor, $3x(v+x)$ care este diferit de zero obținem:

$$x^2 + vx + 6x + vx - x^2 = 6x + 6v,$$

sau, după reducerea termenilor, $2vx - 6x = 0$

$$2v(x-3) = 0.$$

Cum v este diferit de zero, deoarece reprezintă în problema noastră viteza înotătorului, urmează că: $x-3=0$,

deci: $x=3$.

Prin urmare, viteza Nevei este de 3 km/oră. Ecuația (1) ne arată că viteza înotătorului nu joacă nici un rol în problemă.

54. Două bucăți de zefir pentru cămăși, de aceeași calitate, valorează una 238 de lei și alta 182 de lei; dacă prețul metrului s-ar micșora cu 2 lei, prima bucată ar costa cu 48 de lei mai mult decât a doua.

Care este prețul unui metru de zefir și câți metri are fiecare bucată?

R. 17 m; 13 m; 14 lei metrul.

55. O cooperativă agricolă de producție a contractat cu statul 800 q de grâu și 300 q de ovăz, pe care le-a dat în două tranșe. Prima dată a dat de 3 ori mai mult grâu decât ovăz, iar a doua oară a dat de 2 ori mai mult grâu decât ovăz. Să se afle cantitățile predate în fiecare tranșă.

Se obține ecuația: $800 - 3x = 2(300 - x)$.

R. I. 600 q grâu; 200 q ovăz.

II. 200 q grâu; 100 q ovăz.

56. Pentru reparația unui imobil, întreprinderea de administrație locativă a plătit unor zugravi și dulgheri 31 900 de lei. Zidarii au primit câte 500 de

lei fiecare, iar dulgherii câte 600 de lei fiecare. Toți dulgherii împreună au primit cu 3 100 de lei mai puțin decât zidarii.
Câți zidari și câți dulgheri au fost?

Indicații. Din întreaga sumă scoatem 3 100 lei: $31\ 900 \text{ lei} - 3\ 100 \text{ lei} = 28\ 800$. Acum părțile sînt egale pentru amîndouă echipele. O echipă va primi $28\ 800 : 2 = 14\ 400$ lei. A doua echipă va primi $14\ 400 + 3\ 100 = 17\ 500$ lei.

R. 35 zidari; 24 dulgheri.

57. Producția zilnică a unei echipe de muncitori era, după plan, de 19 800 de piese. Introducerea de utilaj modern a făcut ca productivitatea să crească astfel că, dacă ar fi fost cu 18 muncitori mai puțin în echipă, s-ar fi produs tot atît cît înainte de introducerea utilajului. Aplicîndu-se apoi o inovație, productivitatea fiecărui muncitor a crescut din nou cu același număr de unități, astfel că dacă ar fi fost cu 33 de muncitori mai puțini în echipă, față de numărul inițial, s-ar fi produs tot atît cît se producea la început.
- a) Câți muncitori au fost la început și care era norma?
b) Cu cît s-a mărit norma de fiecare dată?

R. a) 198 muncitori; 100 piese; b) cu 10 piese.

58. Dacă pentru îndeplinirea unui angajament o uzină ar face zilnic câte 20 de tractoare, ar lipsi la termenul stabilit 100 de tractoare, iar dacă uzina ar face zilnic câte 23 de tractoare ar preda la termenul stabilit cu 20 de tractoare mai mult decît prevede angajamentul. Cîte tractoare au fost comandate și ce termen a fost stabilit pentru îndeplinirea angajamentului? Ce relație se poate stabili între 900 de tractoare și 900 de tractoriști dacă pe fiecare tractor lucrează câte un tractorist?

Indicație: Dacă, în loc de 20 de tractoare, uzina ar face 23 de tractoare pe zi, există un plus de $100 + 20 = 120$ de tractoare, care provin de la surplusul zilnic de 3 tractoare (40) zile; $40 \cdot 20 + 100 = 900$ tractoare.

R. 900 de tractoriști; 40 de zile.

59. Să se găsească un număr de trei cifre, divizibil cu 9, astfel încît cifra sutelor să fie de trei ori mai mică decît a unităților, iar dacă îi adăugăm 594 să obținem răsturnatul lui.

Indicație. Numărul se scrie algebric. $100x + 10y + z$ răsturnatul lui $100z + 10y + x$.

R. 369.

60. Să se determine un număr cuprins între 400 și 500, știind că suma cifrelor sale este 9 și că răsturnatul numărului este $36/47$ din el.

Indicație. Numărul căutat fiind cuprins între 400 și 500, cifra sutelor este 4; suma celorlalte două cifre este deci 5.

R. 423.

61. Prima cifră a unui număr de șase cifre este 9. Dacă se ia această cifră de la început și se așază la sfârșitul numărului, se obține sfertul primului număr. Care este acel număr?

Indicații: Tăiem pe 9. Această operație este echivalentă cu a scădea 900 000 din numărul dat, și obținem:

$$(1)x - 900\,000.$$

Acest număr are cinci cifre. Vom adăuga apoi cifra 0 la sfârșitul său. El recapătă 6 cifre. Operațiunea este echivalentă cu înmulțirea numărului (1) cu 10:

$$10(x - 900\,000).$$

În fine, în ultima etapă, adăugăm acestui număr cifra 9 la sfârșit:

$$10(x - 900\,000) + 9.$$

Acum scriem că numărul astfel obținut este $\frac{1}{4}$ din numărul inițial adică

$$10(x - 900\,000) + 9 = \frac{x}{4}$$

R. 923 076.

62. Un număr de 6 cifre are ultima cifră 7. Dacă se taie de la urmă cifra 7 și se mută în fața numărului, vom obține un număr de 5 ori mai mare decât numărul dat. Să se afle primul număr.

Indicație: Scădem din acest număr pe 7, adică ultima sa cifră. Atunci, toate cifrele lui rămân la fel ca și înainte, dar ultima devine zero. Dacă acum tăiem pe acest zero de la sfârșit, numărul s-a împărțit cu 10, adică a devenit cu 5 cifre și se va scrie

$$\frac{x - 7}{10} \quad (1)$$

Luăm cifra 7 și o punem acum în fața numărului. Atunci, numărul are din nou șase cifre, iar cifra sutelor de mii este 7. Aceasta echivalează cu a adăuga 700 000 la numărul (1); numărul astfel obținut se va scrie:

$$700\,000 + \frac{x - 7}{10}$$

El trebuie să fie egal cu de 5 ori numărul căutat, de unde ecuația problemei:

$$700\,000 + \frac{x - 7}{10} = 5x$$

a cărei soluție este $x = 142\,857$.

R. 142 857.

63. Atelierul unei cooperative de croitorie a primit postav de două calități și anume: din calitatea întâi 240 m și din a doua 360 m, în valoare totală de 103 200 lei.

Pentru confecționarea unor paltoane, atelierul a întrebuințat 30% din prima calitate și 45% din a doua calitate.

Știind că postavul de calitate a doua întrebuințat pentru paltoane a costat cu 1 440 de lei mai mult decât postavul de calitate întâi întrebuințat, se cere:

Să se afle costul unui metru de postav din fiecare calitate.

R. a) 250 de lei; 120 lei.

64. Pentru a se hrăni 10 cai și 14 vaci se dădeau câte 180 kg de fin pe zi. Mărindu-se rația de fin pentru cai cu 25% iar pentru vaci cu $33\frac{1}{3}\%$, s-au dat câte 232 kg de fin pe zi. Câte kg de fin se dădeau pe zi la început pentru un cal și câte pentru o vacă?

R. 9,6 kg; 6 kg.

65. Un muncitor a economisit 1 600 lei pentru cumpărarea unui covor și a unui pardesiu. În urma reducerilor de prețuri, covoarele s-au ieftinit cu 38%, iar pardesiurile cu 24%. Cumpărând la prețurile reduse un covor și două pardesiuri, i-au mai rămas 68 de lei din suma pe care a avut-o. Să se afle prețul unui covor și al unui pardesiu, înainte și după reducerea de prețuri.

R. 1 000 lei și 600 lei.

66. Două secții ale unei fabrici de încălțăminte trebuiau să lucreze, conform planului, 4 000 de perechi de pantofi într-o lună. Depășindu-se planul de către prima secție cu 12% și de către a doua cu 8% pe lună, după 3 luni, a doua secție a făcut cu 1 080 de perechi de pantofi mai mult decât prima. Care este planul lunar pentru fiecare?

R. 1 800 perechi; 2 200 perechi.

67. În primul an de existență o cooperativă agricolă de producție a recoltat, de pe un loc de 20 ha semănat cu grâu și 30 ha semănat cu porumb, 1 180 q de cereale. În al doilea an, folosind noi metode agrotehnice înaintate, producția de grâu la ha s-a mărit cu 20%, iar cea de porumb cu 2 q la hectar. În aceste condiții, recolta de pe trei hectare semănat cu grâu întrece cu 1,2 q recolta culeasă de pe două hectare semănat cu porumb. Să se calculeze recolta de grâu și porumb la hectar în fiecare din cei doi ani.

R. I. 17 q grâu și 28 q porumb. II. 20 q grâu și 30 q porumb.

68. Un obiect care are masa de 300 g este alcătuit din aur și argint. În apă el cântărește cu 20 g mai puțin. Să se afle cantitatea de aur și argint din acel obiect, știind că densitatea aurului este de $19\,200\text{ kg/m}^3$ și a argintului de $10\,500\text{ kg/m}^3$.

Indicație: Fie x și y numerele ce ne arată masa în grame a aurului și a argintului considerat: $x + y = 300$.

Obiectul cufundat în apă este împins de jos în sus cu o forță egală cu greutatea volumului de apă dezlăcuit (principiul lui Arhimede); aceasta va fi de 20 de grame. Pe de altă parte raportul dintre masa unui corp și densitatea sa este egală cu volumul său, deci putem scrie ecuația:

$$\frac{x}{19,2} + \frac{y}{10,5} = 20,$$

unde $\frac{x}{19,2}$ și $\frac{y}{10,5}$ sint respectiv, volumele aurului și argintului.

$$R. x = 198,62 \text{ g}; y = 101,38 \text{ g}.$$

69. Pentru scopuri tehnice, s-au amestecat 5 l de spirt, de o calitate, cu 7 l de spirt de o altă calitate și s-a obținut spirt de tăria de 65°. Dacă s-ar lua 20 de litri de spirt de prima calitate și 4 l de calitatea a doua amestecul ar avea tăria de 70%.

Să se determine tăria spirtului de fiecare calitate.

Indicații: Fie x și y tăriile spirtului de prima, respectiv a doua calitate. Atunci 5 l de spirt de prima calitate conțin $\frac{5x}{100}$ l de alcool pur, 7 l din calitatea a doua conțin $\frac{7y}{100}$ l de alcool pur, iar amestecul lor conține $\frac{12 \cdot 65}{100}$ alcool curat.

(1)

Apoi, 20 l de spirt de prima calitate conțin $\frac{20x}{100}$ alcool, iar 4 l de calitatea a doua conțin $\frac{4y}{100}$.

$$R. 72^\circ; 60^\circ.$$

70. O cooperativă agricolă de producție a vîndut 3 000 q de cereale și anume: orz, secară și grîu, primind: pentru orz 140 000 de lei, pentru secară 120 000 de lei și pentru grîu 84 000 de lei. Știînd că 6 q de orz costă cît 5 q de secară și că 7 q de secară costă cît 6 q de grîu, să se afle cantitatea de chintale și costul unui chintal pentru fiecare fel de cereale.

Rezolvare: Să notăm cu x , y , z numerele ce reprezintă cantitățile în chintale de orz, secară și grîu vîndute de cooperativă, obținem ecuația $x + y + z = 3\,000$. Scriem acum că 6 q de orz costă cît 5 q de secară.

$$\frac{6 \cdot 140\,000}{x} = \frac{5 \cdot 120\,000}{y}$$

Apoi, scriem că 7 q de secară costă cît 6 q de grîu:

$$\frac{7 \cdot 120\,000}{y} = \frac{6 \cdot 84\,000}{z},$$

$$x = 1\,400, y = 1\,000, z = 600.$$

$$R. 100 \text{ lei}; 120 \text{ lei}; 140 \text{ lei}.$$

71. Două robinete, curgînd împreună, pot umple un bazin în 8 ore. Cele două robinete au fost deschise timp de 2 ore, apoi s-a închis primul robinet și bazinul s-a umplut în 18 ore de la închiderea primului robinet. În cît timp poate să umple bazinul fiecare robinet?

Indicație: Într-o oră ele umplu $\frac{1}{8}$ din bazin. În două ore robinetele au umplut $2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.

Cel de-al doilea robinet a umplut în 18 ore $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ din bazin și, prin urmare, întregul bazin îl umple în $18 : \frac{3}{4} = 24$ ore.

Deoarece al doilea robinet a umplut $\frac{1}{24}$ din bazin într-o oră primul va umple într-o oră $\frac{1}{8} - \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$ din bazin și prin urmare va umple tot bazinul în 12 ore.

R. 12 ore și 24 ore.

72. Un număr de camioane trebuie să transporte o anumită cantitate de materiale, într-un timp stabilit.

Dacă ar fi fost cu 2 camioane mai puțin, ar fi trebuit pentru transportul materialelor cu 2 ore mai mult; dacă ar fi fost cu 4 camioane mai mult lucrul s-ar fi terminat cu 2 ore înainte de timpul stabilit. Câte camioane au fost planificate inițial și în cât timp putem executa lucrarea?

Indicație: Notăm cu x numărul de camioane planificate și cu y numărul de ore necesare și procedăm ca în problema precedentă.

R. 8 camioane; 6 ore.

73. Un vapor face pe Dunăre o distanță de 60 km, în susul apei, în 4 ore, iar în jos, aceeași distanță și cu aceeași putere a mașinii, în 3 ore. Care ar fi viteza vaporului dacă nu ar fi curentul apei și care este viteza apei?

Indicație: Scriind de fiecare dată ecuația de mișcare $s = vt$, avem pe rând:

$$60 = 4(x - y)$$

$$60 = 3(x + y).$$

R. 17,5 km/oră; 2,5 km/oră.

Geometrie în spațiu

II. Probleme de geometrie în spațiu

1. Drepte și plane

1. Fie triunghiul echilateral cu aria de 692 cm^2 ce are ca proiecție pe un plan un triunghi isoscel cu aria 346 cm^2 . Știind că două din vîrfurile triunghiului echilateral sînt situate în plan, să se afle distanța vîrfului al treilea al triunghiului echilateral la planul de proiecție (se va lua $\sqrt{3} = 1,73$).

R. distanța de 30 cm.

2. Catetele unui triunghi dreptunghic ABC sînt 12 cm și 16 cm. Din vîrfurile unghiului drept A este dusă pe planul triunghiului perpendiculara AD , lungă de 28 cm.
Să se afle aria triunghiului BCD .

Indicație: Înălțimea triunghiului BCD se poate afla folosind teorema celor trei perpendiculare.

R. Aria $BCD = 296 \text{ cm}^2$.

3. O placă în formă de triunghi isoscel ABC stă înclinată față de un plan, astfel că BC (baza triunghiului) de 50 cm se află în plan, iar vîrfurile A se găsește la distanța de 24 cm de plan.
Să se afle aria acestei plăci, știind că distanța de la piciorul perpendicularei coborîte din vîrfurile A al triunghiului pe plan la baza BC a triunghiului este de 10 cm.

Indicație: Prin teorema celor trei perpendiculare se află înălțimea triunghiului.

R. 650 cm^2

4. În punctul A al unui triunghi dreptunghic ABC , $\hat{A} = 90^\circ$; $\hat{C} = 15^\circ$ și $BC = 4a \text{ cm}$, se ridică o perpendiculară AM astfel încît planele MBC și BCA formează un unghi diedru de 45° . Să se determine distanța de la punctul M la BC .

R. $a\sqrt{2} \text{ cm}$.

5. În triunghiul dreptunghic ABC , $\hat{A} = 90^\circ$ bisectoarea CN ($N \in AB$) intersectează înălțimea dusă din A pe BC în O . În punctul N se ridică perpendiculara ND egală cu AO , egală cu a . Să se determine distanța dusă din D pe AC .

R. $a\sqrt{2}$.

6. În paralelogramul $ABCD$, laturile sînt egale cu 30 cm și 24 cm. În vîrfurile B , al unghiului mai mare, pe planul paralelogramului se ridică o perpendiculară $BM = 12 \text{ cm}$.
Să se determine distanța de la punctul M la latura mică a paralelogramului, dacă M este depărtat de latura mare a paralelogramului la 20 cm.

R. $4\sqrt{34} \text{ cm}$.

7. Diagonalele unui romb sînt de 30 cm și 40 cm. Vîrfurile unghiului mare al rombului este piciorul unei perpendiculare pe planul rombului a cărei lungime este de 7 cm. Să se determine lungimea de la a doua extremitate a perpendicularei la latura rombului.

R. 25 cm.

8. În triunghiul ABC , $AB = 10 \text{ cm}$, $BC = 6\sqrt{2} \text{ cm}$, $AC = 4 \text{ cm}$. În vîrfurile C pe planul triunghiului se ridică o perpendiculară $CM = 3 \text{ cm}$. Se unește M cu B și A . Să se afle aria triunghiului MBA .

R. 9 cm^2 .

9. Triunghiul dreptunghic ABC , $B = 90^\circ$ este inclus în planul P . Latura AB a triunghiului este de 5 cm iar unghiul $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Din punctul M în afara planului dat, se duce perpendiculara MO , $O \in AC$ pe planul triunghiului astfel ca $MA = MC = 10 \text{ cm}$.

Se cere:

- 1) Distanța de la punctul M la planul triunghiului ABC .
- 2) Să se arate că $MB = AC$.
- 3) Să se calculeze raza cercului înscris în triunghiul AOB .
- 4) Să se arate că ariile triunghiurilor AOB și MAC sînt în raportul $1/4$.

R. 1) $5\sqrt{3}$ cm, 3) $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ cm.

10. În paralelogramul $ABCD$ cu latura mică $AD = 6$ cm, bisectoarele interioare ale unghiurilor consecutive A și B se intersectează în $M \in DC$. Unghiul diedru format de planul determinat de DC și un punct N exterior planului a cărui proiecție pe planul $ABCD$ este punctul O este de 60° . Cunoscînd că $NC = 12$ cm. a) Să se determine distanța de la punctul N la planul $ABCD$, știind că planul NAB este perpendicular pe $ABCD$ și că O este mijlocul lui AB . b) Să se determine unghiul $\widehat{ANO}$. ($AO > OB$).

R. a) 9 cm, b) 45° .

11. Se dă planul P reprezentat prin pătratul $ABCD$ cu latura de $4a\sqrt{2}$ cm. La extremitățile diagonalei AC se duc perpendicularele $AN = 4a$ cm, respectiv $CM = a\sqrt{2}$ cm. Unghiul diedru al planelor MBD și NBD este de 90° ?

R. Nu.

12. Suma bazelor unui trapez isoscel cu baza mică AB circumscris unui cerc O cu raza de 4,8 cm este de 20 cm. În punctul O se ridică o perpendiculară $OM = 6$ cm. Să se determine proiecția dreptei MB din planul MBC pe dreapta BC .

R. 3,6 cm.

2. Prisma

13. Un paralelipiped dreptunghic are volumul de 480 dm^3 , lungimea și lățimea bazei respectiv de 8 dm și 6 dm. Să se calculeze: 1) aria totală; 2) diagonala paralelipipedului; 3) să se afle cîte grade are unghiul dintre diagonala bazei și diagonala paralelipipedului.

R. 376 dm^2 ; $10\sqrt{2}$ dm; 45° .

14. Un perete are forma unui paralelipiped dreptunghic lung de 12 m, înalt de 3 m și gros de 0,3 m. Acest perete are o ușă largă de 1,20 m și înaltă de 1,90 m. Să se afle volumul zidăriei peretelui.

Indicație: $V_{\text{zid}} = V_1 - V_2$, unde am notat

V_1 — volumul prisme cu dimensiunile 3 m; 12 m; 0,30 m;

V_2 — volumul prisme cu dimensiunile 1,20 m; 1,90 m; 0,30 m.

R. Volumul peretelui = $10,116 \text{ m}^3$.

15. Dintr-o groapă de var adîncă de 3 m, lungă de 5,2 m și lată de 4,5 m se scoate varul și se transportă cu o căruță avînd forma unei prisme cu baza un trapez. Căruța e lungă de 2 m, bazele trapezului sînt de 0,8 m și 0,4 m și înălțimea bazei de 0,5 m. Cîte căruțe sînt necesare?

R. 117 căruțe.

16. Dintr-un trunchi de arbore, lung de 4 m, avînd secțiunea un cerc de diametru de 3 dm, s-a cioplit un paralelipiped avînd ca bază un pătrat cu diagonala cît diametrul trunchiului. Să se afle volumul paralelipipedului, știind că din lungimea trunchiului nu s-a cioplit nimic.

R. 180 dm^3 .

17. Dintr-un bazin prismatic cu baza în formă de hexagon regulat cu latura de 2 m, plin cu petrol pînă la o înălțime de 1,8 m, se scurge petrolul în alt bazin în formă de paralelipiped cu baza un pătrat, avînd latura de 2,4 m. Pînă la ce înălțime se va ridica petrolul în bazinul al doilea?

R. $1,875 \sqrt{3} \text{ m}$.

18. Cele trei dimensiuni AB , BC și CC' ale unui paralelipiped dreptunghic sînt proporționale cu numerele 5; 2 și 4, iar suma lor este de 27,5 cm. Să se afle aria laterală și volumul lui.

R. $Al = 350 \text{ cm}^2$,
 $V = 625 \text{ cm}^3$.

19. Care este masa unei grinzi de fier în formă de prismă, lungă de 1,50 m și avînd secțiunea un pătrat cu diagonala de $4\sqrt{2} \text{ cm}$? Densitatea fierului este de 7800 kg/m^3 .

R. $18,72 \text{ kg}$.

20. O prismă hexagonală regulată are înălțimea de 3 m și latura bazei de 2 m. Să se afle lungimea celei mai mari diagonale a prisme, aria totală și volumul ei.

R. diagonala = 5 m; aria bazei = $6\sqrt{3} \approx 10,38 \text{ m}^2$;
aria totală = $36 + 2 \cdot 10,38 = 56,76 \text{ m}^2$; volumul = $18\sqrt{3} \text{ m}^3$.

21. Să se afle raportul între volumele a două paralelipiede cu baza pătrată, știind că fiecare are înălțimea cît latura bazei celuilalt. Aceeași problemă pentru prisme hexagonale regulate.

R. Raportul $\frac{l_1}{l_2}$ al laturilor.

22. O cutie are forma de prismă hexagonală regulată. Latura hexagonului este de 2 dm, iar muchia laterală este de 5 dm. Să se afle aria laterală și volumul cutiei.

R. 60 dm^2 și $30\sqrt{3} \text{ dm}^3$.

23. Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sînt: 15 m, 50 m și 36 m. Să se afle muchia cubului echivalent lui (avînd același volum).

Indicație: Se află volumul paralelipipedului, se observă că rezultatul este un cub perfect.

R. $L = 30 \text{ m}$.

24. O prismă hexagonală regulată are latura bazei de 18 cm, înălțimea prisme fiind $\frac{2}{3}$ din apotema poligonului de bază. Care este volumul prisme?

R. 8748 cm^3 .

25. O prismă hexagonală regulată are aria laterală de $480\sqrt{3} \text{ cm}^2$, iar înălțimea de $10\sqrt{3} \text{ cm}$. Să se afle volumul prisme.

R. 2880 cm^3 .

26. Volumul unei prisme hexagonale regulate este de $2\,160\sqrt{3}\text{ cm}^3$, iar latura bazei de 12 cm. Să se afle aria laterală?
R. $A_l = 720\text{ cm}^2$.
27. O prismă triunghiulară regulată are aria laterală de $144\sqrt{3}\text{ cm}^2$ iar înălțimea de 8 cm. Să se afle volumul prisme.
R. $V = 216\sqrt{3}\text{ cm}^3$.
28. O plută este formată din 16 grinzi cu secțiunea dreptunghiulară, fiecare avînd lungimea de 3,6 m, lățimea de 2 dm și grosimea de 25 cm. Care este volumul și masa plutei, știind că densitatea lemnului este de 600 kg/m^3 .
R. $V = 2,88\text{ m}^3$; $G = 1\,728\text{ kg}$.
29. Pe o suprafață dreptunghiulară cu lungimea de 4,5 m și lățimea de $\frac{2}{3}$ din lungime se instalează un rezervor pentru apă cu o capacitate de 540 hl. Să se afle înălțimea rezervorului.
R. $I = 4\text{ m}$.
30. O prismă de lemn are ca bază un pătrat cu diagonalele de $12\sqrt{2}\text{ cm}$. Știind că masa prisme este de 30,240 kg, iar densitatea sa este de 600 kg/m^3 , să se afle înălțimea prisme.
R. $I = 3,5\text{ m}$.
31. O prismă dreaptă are ca bază un triunghi dreptunghic cu ipotenuza de 26 cm și o catetă de 10 cm. Știind că aria laterală a prisme este de $1\,800\text{ cm}^2$, să se afle volumul prisme.
R. $3\,600\text{ cm}^3$.
32. Un vas de fier are forma unei prisme hexagonale regulate. Latura bazei este de 0,6 m, iar înălțimea bazei de $0,25\sqrt{3}\text{ m}$. Printr-un orificiu făcut la baza prisme, se scurge lichidul din el. Dacă în fiecare minut se scurg în medie 5 litri, în cît timp se golește vasul (presupus plin)?
R. 81 min.
33. Un jgheab are secțiunea în formă de trapez cu bazele de 20 cm și de 30 cm, iar înălțimea de 40 cm. Să se calculeze debitul maxim de apă al acestui jgheab în metri cubi pe minut, știind că viteza maximă a apei în jgheab este de 2 m/s.
Indicație: Jgheabul varsă pe secundă un volum de apă egal cu volumul unei prisme a cărei bază este egală cu secțiunea jgheabului și a cărei înălțime este. distanța parcursă de apă pe secundă.
R. $12\text{ m}^3/\text{min}$.
34. Cîți lucrători sînt necesari pentru a săpa în șase ore un șanț de scurgere a apei lung de 25 m, avînd drept secțiune un trapez cu bazele de 1,10 m și 0,70 m, iar înălțimea de 0,60 m, dacă un lucrător sapă într-o oră $0,75\text{ m}^3$?
R. 3 lucrători.
35. Un vagonet pentru cărat cărbuni cu lungimea de 2,75 m are secțiunea în formă de trapez isoscel, cu bazele de 0,60 m și 1,15 m, iar înălțimea de 1 m. Ce cantitate de cărbuni poate transporta dacă 1 m^3 de cărbune cîntărește aproximativ 700 kg?
R. 1 684 kg.

3. Piramida

36. Acoperișul unui turn are forma unei piramide regulate hexagonale, cu latura bazei de 4m, iar muchia laterală de 4,8 m. Pentru a înveli acoperișul se folosesc foi de tablă dreptunghiulare, cu dimensiunile de 80 cm și 60 cm; știind că pierderea (deșeurile) reprezintă 25% din suprafața acoperișului, să se afle câte foi de tablă sînt necesare.

R. 137 de foi.

37. O piramidă regulată are ca bază un triunghi înscris într-un cerc cu raza de 12 cm, iar aria laterală este de 1 080 cm². Să se afle volumul piramidei.

R. 216 $\sqrt{97}$ cm³.

38. O piramidă triunghiulară regulată are latura bazei de 6 dm. Înălțimea piramidei este cît înălțimea triunghiului de bază. Să se calculeze volumul acestei piramide.

Indicație: Înălțimea triunghiului de bază = $3\sqrt{3}$ dm. Aria Bazei = $9\sqrt{3}$ dm².

R. Volumul piramidei = 27 dm³.

39. O piramidă regulată are ca bază un pătrat cu diagonala de $30\sqrt{2}$ cm, iar înălțimea de două ori cît apotema bazei. Să se afle volumul piramidei.

R. $V = 9\,000$ cm³.

40. O piramidă regulată hexagonală are latura bazei de 8 cm. Știind că înălțimea este triplul apotemei bazei, să se afle volumul piramidei.

R. $V = 1\,152$ cm³.

41. O piramidă are ca bază un pătrat înscris într-un cerc cu raza $15\sqrt{2}$ cm, iar aria ei laterală este de 1 500 cm². Să se afle volumul piramidei.

R. $V = 6\,000$ cm³.

42. Într-o piramidă regulată pătratică, latura bazei este de 1 m, iar aria laterală este de 260 dm². Se cere: 1) apotema; 2) muchia; 3) volumul piramidei.

R. apotema = 13 dm, muchia = 13,92 dm, volumul = 400 dm³.

43. Latura unei piramide triunghiulare regulate este de $6\sqrt{3}$ cm, iar muchia laterală formează cu planul bazei un unghi de 45°. Să se afle volumul piramidei.

Indicație: Se va calcula raza cercului circumscris. Se va considera triunghiul dreptunghic format de muchia, înălțimea piramidei și raza cercului circumscris.

R. $V = 54\sqrt{3}$ cm³.

44. Într-o piramidă patrulateră regulată aria laterală este de 960 cm², iar aria totală de 1 536 cm². Să se calculeze volumul piramidei.

R. $V = 3\,072$ cm³.

45. Într-o piramidă patrulateră regulată muchia laterală este de 25 m iar latura bazei de 30 m. Să se afle aria laterală și volumul ei.

R. $A_l = 1\,200$ m²; $V = 1\,500\sqrt{7}$ m³.

46. O piramidă patrulateră regulată are volumul de $18\,432\sqrt{7}\text{ cm}^3$, iar latura bazei de 48 cm. Să se afle aria laterală.

$$\text{R. } At = 4\,608\sqrt{2}\text{ cm}^2.$$

47. Un cort militar are forma unei prisme patrulatere regulate, iar deasupra o piramidă regulată. Latura bazei este de 4 m, înălțimea piramidei de 1,5 m. Pinza folosită pentru acest cort are lățimea de 0,80 m. Câți metri de pinză se vor folosi?

$$\text{R. } 89\text{ m.}$$

48. Latura unei piramide hexagonale regulate este de 6 cm. Unghiul diedru format de o față laterală cu baza este de 45° . Să se afle volumul piramidei.

$$\text{R. } V = 162\text{ cm}^3.$$

49. Baza unei piramide este un romb cu latura de 25 dm și diagonala mică de 30 dm. Înălțimea piramidei cade în centrul rombului și este egală cu diagonala mare a rombului. Să se afle volumul piramidei.

$$\text{R. } V = 8\text{ m}^3.$$

50. Se dă o prismă hexagonală regulată. Diagonala unei fețe laterale este egală cu $2a$ cm și face cu muchia laterală un unghi de 30° .

a) Să se calculeze volumul prisme.

b) Să se calculeze aria laterală și volumul piramidei înscrise în prismă, care are ca bază una din bazele prisme, iar vârful în centrul celeilalte baze.

c) Se duce un plan P de secțiune, paralel cu bazele, la o distanță egală cu $\frac{2}{3}$ din înălțimea prisme față de baza piramidei. Să se afle raportul dintre ariile obținute prin secțiunea prisme și a piramidei cu planul P .

$$\text{R. a) volumul prisme} = \frac{9a^3}{2}\text{ cm}^3;$$

$$\text{b) aria laterală a piramidei} = \frac{3a^2\sqrt{15}}{2}\text{ cm}^2;$$

$$\text{volumul piramidei} = \frac{3a^3}{2}\text{ cm}^3;$$

$$\text{c) } \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{9}.$$

I. Trunchiul de piramidă

51. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are laturile bazelor de 4 cm și 6 cm. Volumul său este de 44 cm^3 . Să se calculeze aria totală.

$$\text{R. } At = 92\text{ cm}^2.$$

52. Se dă un trunchi de piramidă cu bazele triunghiuri dreptunghice (ABC și $A'B'C'$ cu unghiul drept în A și A'). Știind că $AB = 24\text{ cm}$, $AC = 54\text{ cm}$, $A'B' = 6\text{ cm}$, iar înălțimea $I = 45\text{ cm}$, să se determine volumul trunchiului.

$$\text{R. } V = 12\,757,5\text{ cm}^3.$$

53. Să se afle numărul de puieți sădiți de elevii unei școli într-o grădină, știind că au săpat un volum de $127,4 \text{ m}^3$ de pământ și că o groapă are forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată, cu laturile bazelor de 50 cm și 30 cm, iar înălțimea trunchiului de 39 cm.

R. 2 000 de puieți.

54. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are laturile bazelor de 90 cm și 30 cm. Știind că volumul trunchiului este de $156\,000 \text{ cm}^3$ să se calculeze aria laterală.

R. $Al = 12\,000 \text{ cm}^2$.

55. Un trunchi de piramidă $ABCD A' B' C' D'$ cu baze pătrate, are $L_4 = 7/\sqrt{2} \text{ cm}$, $l_4 = 2/\sqrt{2} \text{ cm}$ și muchia $CC' = 2,5 \text{ cm}$. Să se determine înălțimea, apotema și diagonala trunchiului.

R. 2 cm; $\frac{\sqrt{41}}{2\sqrt{2}}$ și diagonala $\approx 10,9 \text{ cm}$.

56. Un trunchi de piramidă a cărui diagonală este de 10 cm are ca baze dreptunghiuri a căror dimensiuni sînt: 8 cm, 6 cm, respectiv 4 și $2\sqrt{5} \text{ cm}$. Să se determine apotema și înălțimea trunchiului.

R. $2\sqrt{10} \text{ cm}$; 6 cm.

57. Un rezervor are forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată. Adîncimea rezervorului este de 5 m, latura bazei mari de 8,5 m, a bazei mici de 6 m. Cîte tone de păcură poate cuprinde acest rezervor dacă densitatea păcurii este de 880 kg/m^3 .

R. 234 t.

58. Să se calculeze lucrul mecanic făcut de o macara care ridică la o înălțime de 4 m un bloc de fontă în formă de trunchi de piramidă. Bazele acestui bloc sînt pătrate, cu laturile respectiv de 1 m și 0,75 m, iar înălțimea sa este 1,6 m ($d = 7\,800 \text{ kg/m}^3$).

Indicație: Formula lucrului mecanic este $L = mgh$, în care m = masa corpului, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ și h = înălțimea la care se ridică corpul.

R. 377 002 g.

5. Cilindrul

59. Aria laterală a unei coloane cilindrice cu înălțimea de 10 m este de $31,40 \text{ m}^2$. Să se afle volumul și masa coloanei, știind că este făcută din piatră, cu densitatea $3\,000 \text{ kg/m}^3$.

R. $V = 2,5 \pi \text{ m}^3$; $G = 23,55 \text{ t}$.

60. Secțiunea axială a unui cilindru este un pătrat cu diagonala de $6\sqrt{2} \text{ cm}$. Să se calculeze volumul și aria laterală a cilindriului.

R. Latura pătratului bazei = 6 cm;
volumul = $54\pi \text{ cm}^3$;
aria laterală = $36\pi \text{ cm}^2$.

61. Pe coșul cilindric al unei fabrici înalt de 15 m și cu diametrul de 1 m, s-a depus un strat de funingine gros de 5 cm. Ce volum de funingine se scoate la curățarea coșului?

R. 2,237 m³.

62. Un cazan de apă în formă de cilindru are diametrul de 50 cm, iar lungimea lui este de 3,6 m. Cât de mare este presiunea vaporilor pe suprafața totală a cazanului, dacă pe un centimetru pătrat presiunea vaporilor este de 10 kg.

Indicație: Se va calcula aria totală în centimetri pătrați, apoi presiunea vaporilor.

R. Aria totală = 6,0445 m².

Presiunea = 604 450 kg.

63. Un dreptunghi are lungimea a și lățimea b . Să se afle raportul volumelor celor 2 cilindri obținuți când se rotește dreptunghiul în jurul lungimii și apoi în jurul lățimii sale.

$$R. \frac{V_2}{V_1} = \frac{\pi ab^2}{\pi a^2 b} = \frac{b}{a}.$$

64. Un puț adânc de 10 m are căptușeala formată dintr-o zidărie cilindrică groasă de 50 cm.

Dacă diametrul interior este de 3 m, care este volumul zidăriei?

Indicație: Se va calcula: Raza interioară, raza exterioară, aria bazei (având forma unei coloane circulare), apoi volumul.

R. $V = 17,5 \text{ m}^3$.

65. Într-un cilindru, raza bazei este de 2 cm, iar înălțimea de 7 cm. Să se determine raza unui cerc a cărui arie este echivalentă cu aria totală a cilindrului.

R. 6 cm.

66. Să se calculeze volumul unui cilindru a cărui arie laterală este de $100 \pi \text{ cm}^2$, știind că secțiunea axială este un pătrat.

R. $V = 250\pi \text{ cm}^3$.

67. Aria laterală a unui cilindru fiind de $72 \pi \text{ cm}^2$, care este volumul său dacă înălțimea este dublul diametrului bazei?

R. $V = 108\pi \text{ cm}^3$.

68. Dintr-o bucată de lemn în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile bazei de 2,4 m, 1,5 m și înălțimea de 0,6 m, se scot forme cilindrice cu diametrul de 30 cm, având aceeași înălțime ca bucata de lemn. Câte forme se pot scoate din această bucată de lemn și ce cantitate de lemn se pierde?

R. 40 de forme;

$V = 0,47 \text{ m}^3$.

69. Cablul telefonic este îmbrăcat într-un înveliș de plumb. Știind că diametrul cablului este de 2 cm, iar grosimea învelișului de 2 mm să se afle masa plumbului pentru un cablu de 10 km lungime, știind că densitatea plumbului este $11\,400 \text{ kg/m}^3$.

Indicație: Se va calcula aria coroanei circulare, volumul și apoi masa.

R. Masa = 157,5 tone.

61. O coloană are forma unui cilindru de 7 m înălțime. Lungimea bazei este de 12,56 m. Cât va costa vopsirea cu ulei a acestei coloane știind că 1 kg de ulei costă 20 de lei, că pentru vopsirea unui metru pătrat trebuie 300 g, iar pentru lucru se plătește 5 lei/m²?

R. 967,1 lei.

6. Conul

71. Raza bazei unui con circular drept este 3 m. Secțiunea sa paralelă la bază la o distanță de 3 m de vîrf are raza de 2 m. Să se afle volumul și aria laterală a conului.

$$R. V = 42,390 \text{ m}^3, \\ Al = 50,8680 \text{ m}^2.$$

72. Se dă un con cu raza de 15 cm; la distanța de 24 cm de vîrf se face o secțiune paralelă cu baza. Generatoarea conului obținut este de 26 cm. Care este volumul conului inițial?

$$R. V = 2\,700 \pi \text{ cm}^3.$$

73. La o cooperativă agricolă de producție, după ce grîul a fost treierat, a fost așezat la arie într-o grămadă de formă conică, cu lungimea cercului de bază de 10,99 m și generatoarea de 2,94 m. Câți saci de cîte un hectolitru se vor umple cu acest grîu?

R. Se pot umple 75 de saci și încă unul cu 0,64 hl.

74. Înălțimea unui con este de 12 cm, iar volumul său este de $1\,024 \pi \text{ cm}^3$. Să se afle aria laterală și aria totală a acestui con.

$$R. Al = 320 \pi \text{ cm}^2, \\ At = 576 \pi \text{ cm}^2.$$

75. Un con avînd aria laterală de $540 \pi \text{ cm}^2$ și raza de 18 cm, este tăiat printr-un plan paralel cu baza, la o distanță de 16 cm de vîrf. Care este raza cercului de secțiune, generatoarea conului astfel format, aria laterală și volumul acestui con?

$$R. r = 12 \text{ cm}; g = 20 \text{ cm}; Al = 240 \pi \text{ cm}^2; \\ V = 768 \pi \text{ cm}^3.$$

76. Un con avînd volumul de $324 \pi \text{ cm}^3$, iar înălțimea de 12 cm, este tăiat printr-un plan paralel cu baza și dus la o distanță de 8 cm de vîrf. Să se afle aria laterală și volumul conului astfel format.

$$R. Al = 60 \pi \text{ cm}^2; V = 96 \pi \text{ cm}^3.$$

77. Jumătate din înălțimea unui con întrece cu 1 cm a treia parte a razei cercului de bază, iar suma razei și înălțimii este 7 cm. Să se afle elementele conului (raza, înălțimea, generatoarea), aria laterală și volumul conului.

$$R. R = 3 \text{ cm}; l = 4 \text{ cm}; G = 5 \text{ cm}; \\ Al = 15 \pi \text{ cm}^2; V = 12 \pi \text{ cm}^3.$$

78. O grămadă de piatră spartă are forma conică cu raza de 2,8 m și generatoarea de 3,5 m. Cîte căruțe trebuie pentru a transporta piatra spartă, depozitată în 10 grămezi, știind că un metru cub de piatră cîntărește 3 t, iar într-o căruță se încarcă 500 kg?

R. 1 034 de căruțe.

79. Într-o mină s-a întrebuințat un explozibil care a produs în pământ, prin explozie, o pilnie cu un diametru de 4 m, adâncimea pilniei fiind de 1,5 m. Ce cantitate de pământ se aruncă, știind că un metru cub de pământ cântărește 1650 kg?

R. 10,362 tone.

7. Trunchiul de con

80. Un trunchi de con în care suma razelor este cit raza unui cerc cu aria de $625 \pi \text{ cm}^2$ are înălțimea de 7 cm și generatoarea de $7\sqrt{2}$ cm. Să se afle volumul trunchiului.

$$\text{R. } R = 16 \text{ cm}; r = 9 \text{ cm}; V = \frac{3367 \pi}{3} \text{ cm}^3.$$

81. Într-un trunchi de con, înălțimea este de 8 m. Ea este media aritmetică a celor două raze. Să se afle volumul trunchiului știind că generatoarea este de $8\sqrt{2}$ cm.

$$\text{R. } R = 12 \text{ cm}; r = 4 \text{ cm}; V = \frac{1664 \pi}{3} \text{ cm}^3.$$

82. Fie $ABCD$ un trapez isoscel, în care AB este baza mică și CD cea mare ($BC = AD$). Considerăm punctele M și N așezate respectiv la mijloacele laturilor BC și AD . Se dă $MN = 13$ dm și diferența bazelor de 10 dm. Din învîrtirea trapezului în jurul dreptei care unește mijloacele bazelor rezultă un trunchi de con. Știind că generatoarea lui este medie proporțională între razele cercurilor de bază, se cere volumul trunchiului de con.

Indicație: MN = semisuma bazelor trapezului. Din rezolvarea unui sistem de ecuații se găsește că bazele trapezului sînt de 8 dm și 18 dm. Razele bazelor trunchiului de con sînt: $R = 9$ dm și $r = 4$ dm. De aici se deduce generatoarea de 6 dm și apoi înălțimea.

$$\text{R. } V = \frac{133\sqrt{11} \pi}{3} \text{ dm}^3 \approx 461 \text{ dm}^3.$$

83. Într-un trunchi de con, razele sînt proporționale cu numerele 3 și 2, iar $\frac{1}{3}$ din raza mare întrece cu 2 cm $\frac{1}{4}$ din raza mică. Generatoarea trunchiului face cu planul bazei mari un unghi de 45° . Să se afle aria laterală și volumul trunchiului de con.

$$\text{R. } Al = 80\sqrt{2} \pi \text{ cm}^2; V = \frac{1216 \pi}{3} \text{ cm}^3.$$

84. Suma celor două raze ale unui trunchi de con este de 25 cm, iar diferența lor 9 cm. Știind că generatoarea formează cu planul bazei un unghi de 45° , să se afle cele două raze și volumul trunchiului de con.

$$\text{R. } R = 17 \text{ cm}; r = 8 \text{ cm}; \\ V = 1467 \pi \text{ cm}^3.$$

85. Un trunchi de con cu înălțimea de 18 cm are suma razelor bazelor de 16 cm, iar $\frac{3}{11}$ din raza mare este cu 2 cm mai mică decât raza mică. Înălțimea este împărțită în 3 părți egale și prin punctele de diviziune se fac două secțiuni paralele cu bazele. Să se afle ariile acestor două secțiuni.

$$R. 49 \pi \text{ cm}^2; 81 \pi \text{ cm}^2.$$

86. Într-un trunchi de con raza mică este cu 2 cm mai mică decât raza mare, iar media aritmetică a celor două raze este 0,004 dam; înălțimea trunchiului este de 12 cm. Din acest trunchi se taie două conuri care au ca bază bazele trunchiului dat, iar generatoarele unuia sînt în continuarea generatoarelor celuilalt. În ce raport se află volumele celor două conuri astfel obținute?

$$R. \frac{V_1}{V_2} = \frac{27}{125}.$$

87. Raza mică a unui trunchi de con este cu 1 cm mai mare decât $33\frac{1}{3}\%$ din raza mare. Înălțimea conului ce se formează prin prelungirea generatoarelor trunchiului dat este de 9 cm, iar înălțimea trunchiului este de 5 cm. Să se afle:

- Aria laterală a trunchiului;
- Volumul trunchiului de con;
- Unghiul ce-l formează generatoarea cu planul bazei mari.

$$R. A = 65\sqrt{2} \pi \text{ cm}^2,$$

$$V = \frac{665 \pi}{3} \text{ cm}^3; 45^\circ.$$

88. Un trunchi de con și un con au generatoarele și ariile lor laterale egale. Raza mică a trunchiului de con mărită cu 1 cm și apoi micșorată de 2 ori este tot atît cît 20% din raza mare a trunchiului mărită cu $\frac{1}{10}$ dm.

Raportul razelor trunchiului de con este exprimat prin $2\frac{1}{2} : 4\frac{1}{6}$.

Să se calculeze raza conului.

$$R. R = 8 \text{ cm}.$$

89. Un trapez dreptunghic în care baza mică este egală cu înălțimea se rotește complet în jurul laturii perpendiculare pe bază. Să se afle aria laterală a corpului format prin această rotație, știind că 20% din latura oblică față de baze este cu 2 cm mai mică decât 50% din înălțimea trapezului, iar suma acestor lungimi este de 18 cm.

$$R. \text{Aria laterală} = 220 \pi \text{ cm}^2.$$

90. Se circumscrie unui trunchi de piramidă regulată, cu bazele pătrate un trunchi de con. Să se determine aria laterală, aria totală și volumul trunchiului de con, știind că laturile pătratelor de bază ale trunchiului de piramidă sînt egale respectiv cu 70 cm și 40 cm, iar apotema de 20 cm.

$$R. A_l \approx 6088 \text{ cm}^2; A_t \approx 16292 \text{ cm}^2.$$

$$V \approx 65603,8 \text{ cm}^3.$$

91. Aria secțiunii axiale a unui trunchi de con este egală cu diferența ariilor bazelor, iar razele bazelor sînt R și r . Să se exprime în funcție de R și r , volumul trunchiului de con.

Indicație: notînd cu h înălțimea trunchiului, obținem:

$$\pi(R + r)h = \pi(R^2 - r^2) \Rightarrow h = (R - r).$$

$$R. V = \frac{\pi^2}{3} (R^3 - r^3).$$

92. Din două foi de tablă galvanizată trebuie confecționată o pîlnie cu diametrul superior de 100 mm, cel inferior de 20 mm și înălțimea de 50 mm. Cît material se consumă, dacă pentru încheieturi se adaugă 3%?

$$R. \approx 124,20 \text{ cm}^2.$$

93. Un coș de fabrică, în formă de trunchi de con, înalt de 30 m, are diametrul exterior la bază de 3,6 m și la vîrf de 2,4 m. Diametrul interior al coșului este (pe toată înălțimea) de 1,6 m. Să se afle greutatea acestui coș, știind că 1 m³ de zidărie cîntărește 1 800 kg.

$$R. 278 \text{ t.}$$

94. Într-un triunghi dreptunghic ABC , $\hat{A} = 90^\circ$, $BC = 45 \text{ cm}$ și $AC = 27 \text{ cm}$ se duce o paralelă MN la AB la $\frac{5}{9}$ din AC . Să se afle ariile laterale ale corpurilor ce se formează prin rotația în jurul catetei AC și a lui $AMNB$ în jurul segmentului $MA (M \in AC)$.

$$R. Al = 5'086,8 \text{ cm}^2;$$

$$Al \text{ a trunchiului de con } 1'300 \pi \text{ cm}^2.$$

95. O coloană de beton în formă de trunchi de con are diametrele bazelor, respectiv de 50 cm și 30 cm, iar înălțimea de 6 m. Să se determine masa coloanei, știind că densitatea betonului este de 2 200 kg/m³.

$$R. 1'692,46 \text{ kg.}$$

96. Se dă un trapez isoscel care se rotește în jurul dreptei ce unește mijloacele laturilor paralele; cunoscînd că laturile paralele sînt egale, respectiv cu 24 și 36 cm și laturile neparalele sînt de cîte 20 cm, să se determine aria laterală, totală și volumul corpului generat prin rotație.

$$R. Al = 1'884 \text{ cm}^2;$$

$$At = 3'353,52 \text{ cm}^2;$$

$$V = 13'638,276 \text{ cm}^3.$$

97. Un trapez isoscel $ABCD$ se rotește pe rînd în jurul bazelor sale. a) Să se determine aria și volumul corpurilor generate prin rotație știind că laturile paralele sînt egale, respectiv, cu 24 cm și 36 cm, iar laturile neparalele sînt egale cu 10 cm. b) Să se menționeze corpurile ce se formează prin rotația trapezului în jurul laturii neparalele și să se facă schița.

$$R. \begin{cases} \text{Aria corp.} = 544 \pi \text{ cm}^2; \\ \text{a) } \begin{cases} V = 1792 \pi \text{ cm}^3; \\ \text{aria corp.} = 736 \pi \text{ cm}^2; \\ V = 2'048 \pi \text{ cm}^3. \end{cases} \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \text{două conuri și un trunchi} \\ \text{de con.} \end{cases}$$

8. Sfera

98. O parte din acoperișul unui ateneu avind forma unei jumătăți de sferă este învelit cu tablă groasă de 3 mm. Ce masă are tabla întrebuințată, știind că densitatea tablei este de $8\,500\text{ kg/m}^3$, iar raza sferei este de $3,6\text{ m}$?

Indicație: Se va calcula volumul interior și exterior.

R. Masa $\approx 2\text{ t}$.

99. Un cazan pentru păcură are forma de cilindru, prevăzut la capete cu cîte o jumătate de sferă. Lungimea cazanului (partea cilindrică) este de 10 m , iar diametrul lui este de 4 m . Să se afle capacitatea lui. Cîte cazane sînt necesare pentru a umple un rezervor mare cilindric, înalt de 20 m și cu lungimea cercului de bază de $40\pi\text{ m}$?

Indicație: Pentru a afla capacitatea cazanului se află întîi volumul și apoi se ține seama de relația: 1 m^3 corespunde 10 hl .

R. $\frac{1\,520\pi}{3}\text{ hl}$; 16 cazane.

100. Într-o sferă cu diametrul de $12\sqrt{2}\text{ cm}$ este înscris un cilindru. Să se calculeze raza și înălțimea cilindrului, aria laterală și volumul lui, știind că secțiunea axială a cilindrului este un pătrat.

R. $r = 6\text{ cm}$; $l = 12\text{ cm}$;
 $Al = 144\pi\text{ cm}^2$; $V = 432\pi\text{ cm}^3$.

101. Într-o sferă cu raza de 6 cm este înscris un con echilateral. Să se afle elementele conului (raza, generatoarea, înălțimea), aria laterală și volumul lui.

R. $R = 3\sqrt{3}\text{ cm}$; $G = 6\sqrt{3}\text{ cm}$;
 $l^2 = (6\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{3})^2 = 108 - 27 = 81$;
 $l = 9\text{ cm}$; $Al = 54\pi\text{ cm}^2$; $V = 81\pi\text{ cm}^3$.

102. Unui cub cu muchia de 8 cm i se circumscrie o sferă. Să se afle aria sferei.

R. Aria sferei = $192\pi\text{ cm}^2$.

103. Care este raportul dintre aria Pămîntului și aceea a Lunii, știind că diametrul Pămîntului este egal cu $3\frac{2}{3}$ ori diametrul Lunii?

R. $\frac{121}{9}$.

104. O sferă are raza de 5 cm ; se duce o secțiune la 3 cm de centru. Să se afle volumul conului care are vîrfurile în centrul sferei, iar ca bază secțiunea obținută.

R. $V = 50,240\text{ cm}^3$.

105. Într-un con, $0,125$ din înălțime este cu 3 cm mai mică decît $\frac{2}{5}$ din generatoarea sa, iar diferența dintre generatoare și înălțime este $0,2\text{ dm}$. Să se afle volumul sferei înscrisă în acel con.

R. $V = 36\pi\text{ cm}^3$.

106. O sferă cu diametrul de 20 cm este încărcată cu o sarcină electrică de 314 coulombi. Să se calculeze densitatea superficială a sarcinii, știind că ea este egală cu raportul dintre sarcină și aria pe care este distribuită și că se exprimă în coulombi pe cm pătrat.

R. 0,25 C/cm².

107. Într-o sferă cu raza de 8,5 cm se duce o secțiune plană cu raza de 3 cm. Să se calculeze ariile calotelor determinate de această secțiune.

R. $S_1 = 29,36 \text{ cm}^2$; $S_2 = 878,10 \text{ cm}^2$.

108. Se dă o sferă cu diametrul de 240 cm care se intersectează cu două plane paralele. Să se afle aria zonei sferice determinate, știind că unul din plane trece prin centrul sferei, iar celălalt la distanța de 30 cm de centrul sferei.

R. 22 608 cm²; 110 222 cm².

III. Probleme diverse

1. Se dă un trapez isoscel în care diferența bazelor este de 2 cm iar dreapta care unește mijloacele laturilor neperalele este de 6 cm; latura neperalelă face cu baza un unghi de 60°. Să se calculeze bazele trapezului și aria trapezului.

R. $B = 7 \text{ cm}$; $b = 5 \text{ cm}$;
aria = $6\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

2. Să se găsească pe latura AD a triunghiului ADE un punct I , astfel ca paralela IM la baza DE a triunghiului să fie egală cu ID .

3. Un trapez are baza mare de 23 m, baza mică de 14 m și înălțimea de 12 m. Să se calculeze lungimea dreptei duse în interiorul trapezului, paralelă cu bazele și la distanță de 4 m de baza cea mare.

R. 20 m.

4. Se dă dreptunghiul $ABCD$, în care $AD = 15 \text{ m}$ și $AB = 18 \text{ m}$. Să se construiască un dreptunghi $A'B'C'D'$ cu virfurile situate respectiv pe laturile AB , BC , CD și DA , astfel ca raportul $\frac{A'B'}{A'D'} = \frac{1}{2}$.

Indicație: Se vor lua următoarele necunoscute:

$AA' = x$, $AD' = y$. Se observă că $\widehat{AD'A'} = \widehat{BA'B'}$ având laturile perpendiculare. Rezultă $\triangle AA'D' \sim \triangle BB'A'$; $\triangle AD'A' = \triangle CB'C'$ și $\triangle DC'D' = \triangle BA'B'$.

Se găsește

$$x = 8, y = 14.$$

5. Baza unui triunghi este $AB = 14 \text{ m}$. Celelalte două laturi sînt $AC = 15 \text{ m}$ și $BC = 13 \text{ m}$. Se duce o paralelă MN la bază ($M \in AC$, $N \in BC$) astfel încît $AM + BN = MN$. Să se afle cele două segmente, AM și BN .

Indicație: Notăm cele două segmente cu x și y .

$$MN = x + y, MC = 15 - x, NC = 13 - y.$$

R. 5 m; $4\frac{1}{3} \text{ m}$.

6. Un paralelipiped dreptunghic are aria laterală de 450 cm^2 și înălțimea de 9 cm . Știind că $\frac{1}{3}$ din lungimea bazei este egală cu $\frac{1}{2}$ din lățimea ei, să se afle volumul și masa, cunoscind că $\rho = 7,8 \text{ g/cm}^3$.

$$\text{R. } L = 15 \text{ cm}; l = 10 \text{ cm};$$

$$V = 1350 \text{ cm}^3; m = 10,530 \text{ kg}.$$

7. Un paralelipiped dreptunghic are înălțimea de 5 cm iar aria laterală de 160 cm^2 . Știind că $\frac{1}{2}$ din lungimea bazei plus $\frac{1}{3}$ din lățime fac împreună 7 cm , să se afle laturile bazei și volumul paralelipipedului dreptunghic.

$$\text{R. } L = 10 \text{ cm}; l = 6 \text{ cm};$$

$$V = 300 \text{ cm}^3.$$

8. Aria laterală a unui paralelipiped dreptunghic este de 72 m^2 , înălțimea lui este de 6 m . Dimensiunile dreptunghiului de la bază sînt în raport de $\frac{1}{2}$.

a) să se afle dimensiunile dreptunghiului de bază.

b) Aceeași chestiune în cazul cînd raportul dimensiunilor este de $\frac{3}{5}$, aria laterală 256 m^2 și înălțimea de 8 m .

$$\text{R. a) } l = 2 \text{ m}; L = 4 \text{ m};$$

$$\text{b) } l = 6 \text{ m}; L = 10 \text{ m}.$$

9. Un rezervor de benzină de forma unui paralelipiped dreptunghic are diagonala bazei de 10 m și această diagonală formează cu una din laturi un unghi de $40^\circ 30'$. Diagonala paralelipipedului formează cu diagonala bazei un unghi de 75° . Să se calculeze volumul și aria laterală a rezervorului.

Indicație: Se aplică pe rînd funcțiile trigonometrice în cele două triunghiuri dreptunghice ce se formează cu cele două diagonale.

$$\text{R. } L = 7,6 \text{ m}; l = 6,5 \text{ m};$$

$$I = 37,3 \text{ m}; V \approx 1843 \text{ m}^3;$$

$$Al \approx 1052 \text{ m}^2.$$

10. Baza unui paralelipiped este un romb. Secțiunile diagonale sînt perpendiculare pe planul bazei, avînd respectiv ariile de 100 cm^2 și 105 cm^2 , iar lungimea liniei intersecției lor este egală cu 10 cm . Să se determine:

a) Volumul acestui paralelipiped.

b) Aria laterală.

c) Aria totală.

Indicație: Fețele laterale sînt dreptunghiuri cu bază cît latura rombului și înălțimea de 10 cm . Se obține: $l = \sqrt{52,5625} = 7,25 \text{ cm}$.

$$\text{R. a) } V = 525 \text{ cm}^3; \text{ b) } Al = 290 \text{ cm}^2;$$

$$\text{c) } At = 398 \text{ cm}^2.$$

11. Într-un paralelipiped cu baza un dreptunghi, diferența dintre pătratul diagonalei dreptunghiului de bază și pătratul unei laturi a dreptunghiului este de 65 , iar suma acestor două lungimi (diagonala bazei și una din

laturile dreptunghiului) este de 13 cm. Înălțimea paralelipipedului este media proporțională a acelorasi lungimi. Să se calculeze diagonala paralelipipedului.

R. $3\sqrt{13}$ cm.

12. O cutie de sticlă (transparentă) are formă de paralelipiped dreptunghic. Una dintre muchiile sale este de 12 cm, iar celelalte sint necunoscute. Cutia conține o cantitate de apă. Dacă așezăm cutia astfel ca fața cu dimensiunile necunoscute să fie baza, apa se ridică pînă la o înălțime de 2 cm; dacă o așezăm astfel ca una sau alta dintre fețele ei să fie orizontală, apa se ridică odată pînă la înălțimea de 3 cm și a doua oară pînă la înălțimea de 4 cm.

a) Să se afle dimensiunile cutiei.

b) Cîtă apă conține cutia?

c) Cîtă apă ar conține cutia dacă ar fi plină?

R. a) 12 cm; 18 cm; 24 cm; b) 864 cm³; c) 5 184 cm³.

13. Secțiunea transversală printr-o grindă de forma unei prisme drepte avînd lungimea L este un trapez dreptunghic cu perimetrul p și suma laturilor neparalele S . Să se calculeze ariile fețelor laterale paralele ale grinzii, știind că diferența acestor arii este d .

Aplicație numerică:

$$L = 8 \text{ m}; p = 1,6 \text{ m}; S = 0,8 \text{ m}; d = 3,2 \text{ m}^2.$$

Indicație: Se notează cu x și y bazele trapezului și se obține sistemul:

$$\begin{cases} p = x + y + S, \\ Ly - Lx = d. \end{cases}$$

R. $x = 0,2 \text{ m}; y = 0,6 \text{ m};$

$$\text{Aria}_1 = xL = 0,2 \cdot 8 = 1,6 \text{ m}^2;$$

$$\text{Aria}_2 = yL = 0,6 \cdot 8 = 4,8 \text{ m}^2.$$

14. Un bazin de înot are forma de paralelipiped dreptunghic. La un moment dat, bazinul cuprinde o anumită cantitate de apă. După un timp oarecare bazinul pierde prin evaporare o cantitate Q m³ de apă. Să se calculeze nivelul inițial și cel final din bazin, precum și volumul de apă inițial, știind că aria fundului bazinului este S , iar nivelul la care ar ajunge apa, dacă peste cantitatea inițială s-ar adăuga cea rămasă după evaporare, ar fi de L m.

Aplicație numerică: $Q = 600 \text{ m}^3; S = 1 500 \text{ m}^2; L = 3 \text{ m}.$

Indicație: Notînd cu x înălțimea inițială a apei și cu y înălțimea finală a apei obținem:

$$\begin{cases} x - y = \frac{Q}{S}, \\ x + y = L. \end{cases}$$

R. $x = 1,7 \text{ m}; y = 1,3 \text{ m};$

$$V \text{ inițial} = 1500 \cdot 1,7 = 2550 \text{ m}^3.$$

15. Într-o piramidă cu baza un dreptunghi, lungimea bazei este cu 4 cm mai mare decît lățimea. Dacă mărim lungimea bazei cu 2 cm, iar lățimea cu 2 cm, aria bazei crește cu 44 cm². Știind că fețele laterale mai mici fac cu baza un unghi de 45°, să se afle laturile bazei și volumul piramidei.

R. $L = 12 \text{ cm}; l = 8 \text{ cm};$

$$V = 192 \text{ cm}^3.$$

16. O piramidă are ca bază un dreptunghi cu perimetrul de 40 cm. Dacă mărim lungimea bazei cu 3 cm și micșorăm lățimea bazei cu 2 cm, aria bazei se micșorează cu 6 cm². Știind că înălțimea piramidei este cît $\frac{1}{2}$ din lungimea bazei, să se afle laturile bazei, aria laterală și volumul piramidei. Virful piramidei se proiectează în punctul de intersecție al diagonalelor.

$$R. Al = (48\sqrt{2} + 24\sqrt{13}) \text{ cm}^2; V = 192 \text{ cm}^3.$$

17. Diferența între apotema și înălțimea unei piramide hexagonale regulate este de 8 cm. Știind că apotema poligonului de bază este de 20 cm, să se afle volumul piramidei, aria laterală și totală (exprimate în dm).

$$R. V = 9,68 \text{ dm}^3; Al \approx 20,10 \text{ dm}^2; At \approx 33,95 \text{ dm}^2.$$

18. O piramidă are baza un trapez isoscel $ABCD$, în care CD este baza mică, AB este baza mare și $BC = AD$. Înălțimea trapezului este de 15 cm, iar înălțimea piramidei de 1 m. Știind că înălțimea piramidei cade în mijlocul M al bazei mari, iar laturile CD și AB sînt respectiv egale cu cantitățile x și y date de sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{363}x + \sqrt{300}y}{\sqrt{3}} = 580, \\ \frac{\sqrt{52}x - \sqrt{13}y}{\sqrt{13}} = 4. \end{cases}$$

Se cere să se afle volumul piramidei și lungimile muchiilor piramidei.

$$\begin{aligned} R. AB &= 36 \text{ cm}; CD = 20 \text{ cm}; \\ BC &= 17 \text{ cm}; V = 14 \text{ dm}^3; \\ VA &= VB \approx 101,6 \text{ cm}; \\ VC &= VD \approx 101,6 \text{ cm}. \end{aligned}$$

19. O piramidă are ca bază un triunghi dreptunghic în care una din catete este de 15 cm, iar cealaltă catetă este cu 5 cm mai mică decît ipotenuza. Înălțimea piramidei este cu 20% mai mare decît ipotenuza triunghiului de bază.

a) Să se afle aria secțiunii făcute în această piramidă printr-un plan paralel cu baza făcute la $\frac{2}{3}$ din înălțime față de planul bazei.

b) Să se afle volumul piramidei care are ca bază secțiunea aceasta și virful comun cu virful piramidei date.

$$R. A = 16 \frac{2}{3} \text{ cm}^2; V = 55 \frac{5}{9} \text{ cm}^3.$$

20. O piramidă are ca bază un triunghi dreptunghic ale cărui catete sînt în raportul $\frac{3}{2}$, iar diferența dintre segmentele determinate de înălțimea triunghiului pe ipotenuză este de 2 cm. Să se afle volumul piramidei, știind că înălțimea ei este de $2\frac{1}{2}$ ori mai mare decît ipotenuza triunghiului de bază.

$$R. V = 27,04 \text{ cm}^3.$$

21. Un elev își construiește o piramidă triunghiulară regulată, cu muchiile din si mă. Pentru confecționarea piramidei a folosit 1,08 m sîrmă. Știind că muchia laterală este cu 16 cm mai mare decît latura bazei, să se afle latura triunghiului de bază, muchia piramidei și înălțimea corpului construit.

$$R. 10 \text{ cm}; 26 \text{ cm}; \sqrt{1928/3} \text{ cm}.$$

22. Într-un trunchi de piramidă patrulateră regulată, aria laterală este de 480 cm^2 , iar apotema trunchiului 8 cm. Știind că $\frac{1}{3}$ din latura bazei mari întrece cu 3 cm $\frac{1}{4}$ din latura bazei mici, să se afle laturile celor două baze și volumul trunchiului de piramidă.

$$R. L_4 = 18 \text{ cm}; l_4 = 12 \text{ cm};$$

$$V = \frac{\sqrt{55}}{3} (324 + 216 + 144) \text{ cm}^3.$$

23. Un dig de beton armat are secțiunea un trapez cu baza mică de 3 m, înălțimea de 2 m, iar laturile neperalele ale trapezului fac cu planul bazei unghiuri de 30° și 45° . Lungimea digului este 100 m. Cîți metri cubi de beton sînt necesari pentru construirea digului și ce greutate are acest dig, cunoscînd că densitatea betonului este 2500 kg/m^3 .

$$R. V = 1146 \text{ m}^3; m = 2865 \text{ t}.$$

24. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are apotema de 17 cm iar aria laterală de 1904 cm^2 . Diferența dintre ariile celor două baze este de 896 cm^2 . Să se afle volumul trunchiului de piramidă.

Indicație: x și y laturile pătratelor. Se găsește un sistem

$$x = 36 \text{ cm}; y = 20 \text{ cm}.$$

$$R. V = 12080 \text{ cm}^3.$$

25. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are latura pătratului bazei mari de 20 cm, iar 25% din apotema trunchiului este cu $1\frac{1}{6} \text{ cm}$ mai mare decît 0,1(6) din înălțimea lui. Diferența dintre apotemă și înălțime fiind de 0,2 dm, să se afle aria laterală a trunchiului.

$$R. Al = 560 \text{ cm}^2.$$

26. Un trunchi de piramidă are bazele dreptunghiulare; dimensiunile bazei mari sînt în raport de $\frac{3}{4}$, iar diferența acestor dimensiuni este de 4 cm. Știind că raportul perimetrelor celor două baze este $\frac{1}{4}$, iar diagonala trunchiului este de 2,05 dm, să se afle aria secțiunii diagonale a trunchiului de piramidă.

$$R. A \approx 203,10 \text{ cm}^2.$$

27. Într-un trunchi de piramidă hexagonală regulată se cunosc următoarele date:

a) media aritmetică dintre latura bazei mari și latura bazei mici este de 7 cm;

b) $\frac{1}{3}$ din apotema bazei mici este egală cu $\frac{1}{4}$ din apotema bazei mari;

c) apotema trunchiului de piramidă este medie proporțională între cele două apoteme ale bazelor.
Să se calculeze cît la sută din apotema trunchiului de piramidă reprezintă înălțimea corpului.

$$R. L_6 = 8 \text{ cm}; l_6 = 6 \text{ cm}; 96,8\%.$$

28. Laturile bazelor unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată sînt în raportul de $\frac{1}{2}$. Latura bazei mici micșorată de trei ori și apoi mărită cu 2 cm este cît $\frac{1}{2}$ din latura bazei mari. Fețele laterale ale trunchiului formează un unghi de 60° cu planul bazei. Să se afle volumul trunchiului.

$$R. V = \frac{63\sqrt{3}}{8} \text{ cm}^3.$$

29. Diferența laturilor de bază ale unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată este de 2 dm, apotema trunchiului este de 40 dm, iar aria laterală este de 2 400 dm². Să se afle ariile triunghiurilor de bază ale trunchiului, apoi să se compare raportul acestor arii cu raportul dintre laturile triunghiurilor de bază.

$$R. \text{Aria}_1 = \frac{441\sqrt{3}}{4} \text{ dm}^2;$$

$$\text{Aria}_2 = \frac{361\sqrt{3}}{4} \text{ dm}^2.$$

30. Un elev își construiește, din sîrmă, un model de trunchi de piramidă patrulateră regulată, folosind 156 cm de sîrmă. Știind că perimetrul unei fețe laterale este de 48 cm, iar latura bazei mici este de $\frac{2}{3}$ din latura bazei mari, să se afle laturile celor două baze și muchia laterală a trunchiului de piramidă.

$$R. L = 18 \text{ cm}; l = 12 \text{ cm}; \\ m = 9 \text{ cm}.$$

31. Un dreptunghi cu perimetrul de 34 cm se rotește în jurul laturii mici. Se știe că lungimea întrece cu 7 cm lățimea. Se cere:

a) Volumul și aria corpului generat.

b) Volumul și aria prisme patrulatere regulate înscrise în cilindrul rezultat.

$$R. 1) V = 2\,260,80 \text{ cm}^3;$$

$$A = 1\,281,12 \text{ cm}^2.$$

$$2) V = 1\,440 \text{ cm}^3,$$

$$A = 914,40 \text{ cm}^2.$$

32. Un rezervor de benzină cu forma unui paralelipiped dreptunghic are dimensiunile bazei în raportul de $\frac{10}{15,7}$, diferența acestor dimensiuni este de 5,7 m, iar înălțimea de 8 m. Cîte cisterne în formă de cilindru sînt necesare pentru a umple acest rezervor, știind că cisterna are diametrul de 3 m, iar lungimea de 4 m.

$$R. 44 \text{ de cisterne}.$$

33. Să se determine R și G ale unui cilindru drept, știind că înălțimea este cu 5 cm mai mare decît raza, iar raportul lor este de $\frac{7}{2}$.

$$R. R = 2 \text{ cm}; G = 7 \text{ cm}.$$

34. Să se afle aria laterală și volumul unui cilindru circular drept știind că raza cilindrului este cu 1 cm mai mare decât $\frac{1}{3}$ din generatoare, iar media aritmetică între înălțime și rază este 6,5 m.

$$\text{R. } Al = 72\pi \text{ cm}^2; V = 144\pi \text{ cm}^3.$$

35. Un tub cilindric confecționat din cupru, avind densitatea de $\rho \text{ kg/m}^3$ are masa de $m \text{ kg}$.

a) Să se calculeze diametrul interior și diametrul exterior al tubului, știind că suma lor este S , iar lungimea tubului este L .

b) Să se calculeze diferența dintre aria suprafeței laterale exterioare și aria suprafeței interioare.

Aplicație numerică:

$$S = 0,2 \text{ m}; L = 12 \text{ m}; \rho = 8900 \text{ kg/m}^3; m = 134,14 \text{ kg}.$$

Indicație: Dacă notăm razele cu x și y , se obține sistemul:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{m}{\pi \rho L}, \\ x + y = S. \end{cases}$$

$$\text{R. } x = 1,01 \text{ dm}; y = 0,99 \text{ dm}; \approx 15 \text{ dm}^2.$$

36. Să se calculeze volumul unui con circular drept, știind că aria laterală este de patru ori mai mare decât aria bazei, iar înălțimea cu 5 cm mai mare ca raza.

Indicație: Notind $R = x$, $I = y$, se obține din datele problemei:

$$G = \sqrt{I^2 + R^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = 4x.$$

$$y - x = 5.$$

$$\text{R. } \left\{ \frac{\pi}{3} \cdot \frac{125\sqrt{15}}{(\sqrt{15} - 1)^3} \approx 19 \text{ cm}^3. \right.$$

37. Într-un con este înscris un cilindru care are aria totală echivalentă cu aria laterală a conului. Unghiul maxim dintre două generatoare de la virful conului este drept. Să se demonstreze că distanța de la virful conului pînă la baza superioară a cilindrului este egală cu jumătate din generatoarea conului.

Indicație: Se notează raza cilindrului cu r , iar raza conului cu $(r + x)$, generatoarea conului cu G și din echivalența ariilor se scoate:

$$\pi G(r + x) = 2\pi r(r + x); \text{ apoi } G = 2r.$$

38. Un trapez dreptunghic are baza mică egală cu înălțimea. Aceasta este cu 12 cm mai mică decât baza mare, iar latura oblică este de 15 cm. Trapezul se rotește în jurul bazei mari, dînd naștere unui corp al cărui volum și arie se cer.

$$\text{R. } V = 3\,306,420 \text{ cm}^3;$$

$$A = 1\,186,92 \text{ cm}^2.$$

39. Raza unui con circular drept este de 3 dm, iar raza cercului determinat de un plan de secțiune dus la 1 dm de bază este de 10 cm. Să se afle înălțimea și generatoarea conului.

$$\text{R. } G = 3,35 \text{ dm}; I = 1,5 \text{ dm}.$$

40. Înălțimea unui trapez dreptunghic este: jumătate din baza mică, de $3\frac{1}{3}$ ori mai mică decât baza mare și cu 2 cm mai mică decât latura neparalelă a trapezului. Știind că perimetrul trapezului este de 24 cm, să se afle aria laterală a corpului format prin rotirea în jurul laturii perpendiculare pe bază.

R. $251,20 \text{ cm}^2$.

41. Raza unui con circular drept este de 4 ori mai mare decât $0,3$ din înălțimea lui, iar diferența dintre raza și înălțimea conului este de 2 cm. La $\frac{2}{3}$ din înălțime față de baza conului se face o secțiune paralelă cu baza. Să se afle raportul ariilor laterale ale corpurilor formate: con și trunchi de con. Cât la sută reprezintă aria laterală a trunchiului de con?

R. $\frac{1}{8}$; $12,5\%$.

42. Un triunghi dreptunghic are o catetă de 12 cm, iar suma dintre ipotenuză și cealaltă catetă este de 24 cm. Să se afle volumul corpului format prin rotația completă a triunghiului dreptunghic în jurul ipotenuzei.

R. $V = 259,2\pi \text{ cm}^3$.

43. Baza mică a unui trapez dreptunghic mărită cu o treime a ei este tot atît cît 25% din baza mare, mărită cu lungimea bazei mici. Înălțimea trapezului este de 4 cm, iar diferența bazelor este de 3 cm. Să se afle volumul corpului format prin rotația completă a trapezului dreptunghic în jurul bazei mici.

R. $V = 176\pi \text{ cm}^3$.

44. Un turn de formă cilindrică are un vîrf conic a cărui bază este egală cu baza conului.

a) Să se calculeze înălțimea totală a turnului, știind că ea este de n ori mai mare decât înălțimea părții cilindrice.

b) Volumul total al turnului fiind V , iar raza R , să se calculeze aria turnului.

Aplicație numerică:

$$n = 6; \quad R = 3 \text{ cm}; \quad V = 150,72 \text{ m}^3.$$

R. a) Înălțimea totală = 12 m;

b) aria turnului $\approx 135 \text{ m}^2$.

45. Capsula de protecție a aparatului instalat în vîrfurile unei rachete meteorologice are forma din figura II.1, a—b. Știind că ea are masa de m kg și este confecționată dintr-un aliaj special, avînd densitatea de $\rho \text{ kg/m}^3$, să se calculeze înălțimea. Raza bazei este de R cm, iar raportul dintre lungimea porțiunii de metal și lungimea porțiunii goale de-a lungul axei de simetrie a capsulei este K .

Aplicație numerică:

$$m = 5,338 \text{ kg}; \quad R = 10 \text{ cm}; \quad \rho = 8\,500 \text{ kg/m}^3; \quad K = \frac{1}{5}. \quad \text{R. } \approx 35 \text{ cm.}$$

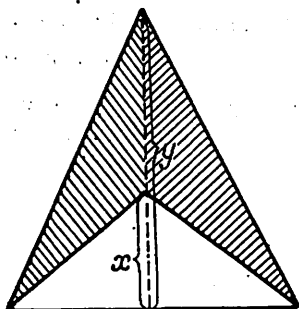


Fig. II.1, a

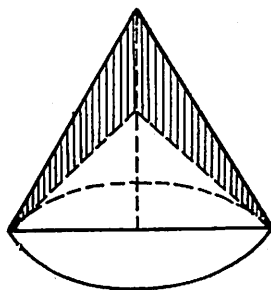


Fig. II.1, b

46. Într-un trunchi de con, razele sînt proporționale cu numerele 3 și 2, iar $\frac{1}{3}$ din raza mare întrece cu 2 cm $\frac{1}{4}$ din raza mică. Generatoarea trunchiului este egală cu 5 cm . Să se afle aria laterală și volumul trunchiului.

R. $Al = 100\pi\text{ cm}^2$; $V = 304\pi\text{ cm}^3$.

47. Într-un trunchi de con suma razelor este egală cu raza unei sfere avînd aria de $400\pi\text{ cm}^2$. Știînd că raza mare întrece cu 1 cm dublul razei mici, iar înălțimea este cît raza mare, să se afle cele două raze, aria laterală și volumul trunchiului de con.

R. $R = 7\text{ cm}$; $r = 3\text{ cm}$; $Al = 10\sqrt{65}\pi\text{ cm}^2$.

$V = \frac{553\pi}{3}\text{ cm}^3$.

IV. Probleme recapitulative de geometrie plană și în spațiu

Geometrie plană

1. În triunghiul ABC se duc înălțimile AA' și BB' ce se intersectează în H și fac cu AB unghiurile de 50° și respectiv de 10° .

Se cere:

- 1) Unghiurile triunghiului ABC .

Să se arate că

2) $AC + BC = 2(A'C + B'C)$

3) $A'H^2 + A'C^2 = \frac{BH^2 + AC^2}{4}$.

R. 1) $A = 80^\circ$; $B = 40^\circ$; $C = 60^\circ$.

2. Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC se construiesc, în exterior, pătratele $ABDE$ și $ACFG$. BG se intersectează cu EC în P .

Să se demonstreze că:

1) $EC = BG$.

2) AP este bisectoarea unghiului EPG .

3) Să se arate că triunghiul EPG este dreptunghic.

3. Se dă trapezul isoscel $ABCD$ ($AB = DC$). Pe baza mare BC se iau segmentele $MB = CN$ în sensuri opuse. Fie Q intersecția segmentelor AN și MD .

Se cere:

- 1) Să se arate că $MD = AN$.
 - 2) Triunghiul MQN este isoscel.
 - 3) Notînd cu P intersecția prelungirii laturilor egale a trapezului isoscel să se arate că PQ este bisectoarea unghiului P .
 - 4) Să se arate că $\triangle PMN$ este isoscel.
4. Într-un cerc cu diametrul $AB = 24$ cm se înscrie un trapez isoscel $ABCD$. Latura BC formează cu diametrul un unghi de 60° . Pe semicercul opus celui în care este înscris trapezul, se consideră un punct M din care se coboară perpendiculara MP pe AB .

Se cere:

- 1) Perimetrul poligonului $AMB CD$ știind că unghiul format de coarda MB cu diametrul AB este de 30° .
- 2) Să se determine poziția lui M pe semicerc, astfel încît perimetrul poligonului să fie minim.
- 3) Să se calculeze în acest caz perimetrul poligonului.

$$R. \begin{cases} 1) 12(4 + \sqrt{3}) \text{ cm.} \\ 3) \text{ Per. minim} = 5R. \end{cases}$$

5. Laturile unui paralelogram $ABCD$ sînt $AB = 10$ cm; $AD = 9$ cm. Diagonalele $BD \cap AC = \{O\}$. Aria $\triangle AOB = 18 \text{ cm}^2$.

Se cere:

- 1) Să se calculeze diagonalele paralelogramului.
- 2) Să se construiască paralelogramul $ABCD$.

$$R. 1) BD = 17 \text{ cm}; AC = \sqrt{73} \text{ cm.}$$

6. În $\triangle$ isoscel ABC una din laturile egale $AB = a$. Fie E mijlocul lui BC și FE mediatoarea laturii AB astfel încît $FE \cap BC = \{E\}$.

- 1) Să se arate că CE este cît apotema unui pătrat înscris într-un cerc de rază a .

- 2) Să se arate că există relația $\frac{AB}{BC} = \frac{AF}{AE}$.

$$R. EC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

7. Se dă paralelogramul $ABCD$. Din A se duce perpendiculara AA' pe latura BC iar din B se duce perpendiculara BB' pe CD .

Se cere:

- 1) Să se arate că există relația

$$\frac{AB}{BC + AB} = \frac{A'B}{B'C + A'B}.$$

8. Se dă triunghiul ABC , cu unghiurile $A = 60^\circ$ și $B < 60^\circ$. Fie D simetricul lui C față de latura AB , iar $E = AC \cap BD$. Să se arate că dacă BF , unde $F \in AC$, este bisectoarea unghiului $\widehat{ABD}$, atunci și DF este bisectoarea unghiului $\widehat{ADE}$.

9. Perpendicularele pe diagonala BD a dreptunghiului $ABCD$ duse în B și D intersectează laturile DC și BC în M și N .

Să se arate că:

- 1) $BC^2 + CD^2 = BC \cdot CN + MC \cdot CD$
- 2) $AB \cdot AC = CN \cdot BM$

$$3) BD^2 = \frac{BN \cdot BC + CD \cdot MD}{2}.$$

4) Cunoscând că diagonala dreptunghiului este 8 cm iar proiecția ei pe BC este de 6,4 cm, să se calculeze perimetrul triunghiului MND .

R. $\approx 33,2$ cm.

10. Se dă patrulaterul $ABCD$ înscris în cercul O cu diagonalele BD și AC ; $BD \cap AC = \{N\}$.

Se cere:

Să se determine diagonala BD a patrulaterului știind că $BC = 12$ cm, $AD = 6$ cm, $BN = 8$ cm și $AC = 9$ cm.

Indicație. Se va observa că triunghiurile BNC și NAD sînt asemenea.

R. $BD = 10,5$ cm.

11. În $\triangle$ isoscel ABC , $AB = AC$ și $\hat{A} < 60^\circ$; fie MD mediatoarea laturii AB și BD bisectoarea unghiului B . ($M \in AB$ și $D \in AC$); AP bisectoarea unghiului $\hat{A}$; $P \in BD$; $AP \cap MD = \{N\}$ și $AP \cap BD = \{P\}$.

1) Să se calculeze unghiurile triunghiului ABC .

2) Să se arate că $\triangle NPD$ este isoscel.

3) Se prelungește $\overline{BA}$ cu segmentul $\overline{AA'}$ și $\overline{DB}$ cu $\overline{BB'}$ așa fel încît $\overline{AA'} = \overline{BB'}$. Să se arate că $\triangle AA'C = \triangle ABB'$.

R. $A = 36^\circ$; $B = 72^\circ$.

12. În triunghiul dreptunghic ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) se cunoaște că $\overline{AB} = 3$ cm și $\overline{AC} = 6$ cm. Fie M mijlocul laturii AC . Se împarte BC în 5 părți egale prin punctele D, E, F, G pornind de la B .

Se cere:

1) Să se calculeze segmentul MF .

2) Să se arate că $\triangle ABE$ este isoscel.

R. 1) $MF = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ cm.

13. În cercul O este înscris un triunghi ABC cu unghiul $\hat{B} = 48^\circ$. Bisectoarea unghiului $\hat{B}$ este perpendiculară pe diametrul care trece prin C . Să se afle unghiurile triunghiului ABC .

R. $(108^\circ; 24^\circ)$.

14. Laturile unui triunghi oarecare ABC sînt invers proporționale cu numerele $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$. Latura cea mai mare $\overline{AB}$ este cu 3 cm mai mare decît latura cea mai mică AC .

Perpendiculara dusă în B pe BC intersectează perpendicularele în A pe AB și în C pe AC , în M și N . $AM \cap CN = \{P\}$; $MN = 15$ cm.

Se cere:

1) Perimetrul triunghiului ABC .

2) Să se calculeze laturile triunghiului MNP .

Indicație.

$\triangle ABC \sim \triangle MNP$.

R. 1) 14 cm; 2) 18 cm; 15 cm; 9 cm.

15. Într-un triunghi ABC unghiul $\hat{C} = 30^\circ$. Înălțimea dusă din B determină pe AC segmentele AD și DC care sînt invers proporționale cu numerele 1 și $\frac{1}{12}$, iar latura $AC = 26$ cm. Se cere:

- 1) Laturile triunghiului ABC .
- 2) Aria triunghiului ABC .
- 3) Aria triunghiului BDC .
- 4) Unghiurile triunghiului ABC .

R. 1) $AB = 14$ cm; $BC = 16\sqrt{3}$ cm; $AC = 24$ cm.

2) $104\sqrt{3}$ cm².

3) $96\sqrt{3}$ cm².

4) $\hat{A} \approx 81^\circ 50'$; $\hat{B} \approx 68^\circ 10'$; $\hat{C} = 30^\circ$.

16. Fie punctele B și C pe segmentul $AD = 18$ cm, BC este media aritmetică între AB și CD și $\frac{AC}{2} = BD$.

În punctul B se ridică o perpendiculară pe AD , ($BE = 6$ cm) iar în punctul D perpendiculara $DF = 12$ cm, de aceeași parte cu BE . Paralela dusă din E la AB întâlnește perpendiculara dusă din A în punctul G . Se cere:

- 1) Lungimea segmentelor AB , BC și CD ;
- 2) Să se arate că triunghiul GEF este isoscel.

R. $AB = 10$ cm; $BC = 6$ cm; $CD = 2$ cm.

17. În $\triangle$ isoscel ABC ($AB = AC$); $\hat{A} = 40^\circ$. BD bisectoarea unghiului B taie latura AC în D . Simetricul punctului D față de AB este punctul E , iar simetricul punctului D față de BC este F ; $EF \cap AB = \{P\}$ și $EF \cap BC = \{G\}$.

Se cere:

- 1) Să se arate că triunghiul DEF este isoscel și să se calculeze unghiurile lui.
- 2) Să se arate că $EF \perp BD$.
- 3) Să se calculeze unghiurile poligonului $MPGND$, M și N fiind proiecțiile lui D pe AB și respectiv PC .

R. 1) $\hat{D} = 110^\circ$; $\hat{E} = \hat{F} = 35^\circ$;

3) $\hat{G} = \hat{P} = 125^\circ$; $\hat{M} = \hat{N} = 90^\circ$.

18. ABC este $\triangle$ dreptunghic ($\hat{A} = 90^\circ$); $BC = 15$ cm, iar $AB = \frac{4}{5}$ din BC . Punctul M aparține lui AC ; $AM = 3$ cm. Se duce $MN \parallel AB$; ($MN \cap BC = \{N\}$). Din M se duce $MG \perp BC$; $MG \cap BC = \{G\}$.

- 1) Să se calculeze aria $\triangle MGC$.
- 2) Să se calculeze perimetrul $\triangle MNG$.

R. 1) $8,64$ cm²; 2) $19,2$ cm.

19. Într-un triunghi ABC ($\hat{A} = 90^\circ$), în care AB și AC sînt invers proporționale cu $\frac{1}{3}$ și $\frac{1}{4}$ iar diferența catetelor este de 6 cm, se duce înălțimea AD și mediana AM ($D \in BC$, $M \in BC$). Din M se duce perpendiculara MN pe AM astfel încît $MN \cap AD = \{N\}$.

- 1) Să se calculeze perimetrul triunghiului ABD .
- 2) Să se afle aria triunghiului ANM .
- 3) Să se afle aria patrulaterului $ABNM$.

R. 1) 43,2 cm; 2) $32 \frac{13}{16} \text{ cm}^2$; 3) $117 \frac{3}{16} \text{ cm}^2$.

20. $ABC \triangle$ dreptunghic ($\hat{A} = 90^\circ$). Punctul $D \in AC$; se duce $DE \parallel BC$; $E \in AB$. Fie M mijlocul segmentului DE ; $AM \cap BC = \{N\}$. Se cere:

- 1) Să se arate că $BN = NC$.
- 2) Să se arate că $AN < \frac{AB + AC}{2}$.

21. Diagonalele dreptunghiului $ABCD$ se intersectează sub un unghi de 110° . Se duce o perpendiculară din B pe AC în E , care intersectează pe AD în F .

Să se arate că: $AF \cdot AD = BF \cdot BE$;
Să se calculeze unghiurile patrulaterului $EFDO$ (O fiind intersecția diagonalelor).

Indicație. $\triangle ABF \sim \triangle BCE$.

R. 110° ; 35° ; 90° ; 125° .

22. Într-un trapez dreptunghic $ABCD$, diagonala $AC \perp CB$; $BC = AC$. Înălțimea AD a trapezului este egală cu a . Se cere:

- 1) Aria trapezului.
- 2) Unghiurile trapezului.
- 3) Aria triunghiului dreptunghic ce se formează prin prelungirea laturilor neparalele ale trapezului.

R. 1) $\frac{3a^2}{2}$; 2) $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$; $\hat{B} = 45^\circ$ și $\hat{C} = 135^\circ$; 3) $2a^2$.

23. Fie cercul C de centru O și razele OB și OA ce formează $\widehat{AOB} = 90^\circ$. Se duc tangente prin punctele A și B și se intersectează în Q .

Se cere:

- 1) Să se arate că OQ este bisectoarea unghiului AOB .
- 2) Să se arate că diagonalele patrulaterului $OBQA$ sînt perpendiculare.

24. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB = AC$). Punctul O este la intersecția mediatoarelor laturilor egale. Perpendiculara dusă din B pe BC intersectează mediatoarea OE în M , ($E \in AB$), iar paralela dusă din C la AB intersectează mediatoarea OD în N . Unghiul MAN este de 150° . ($D \in AC$).

Se cere:

- 1) Să se afle unghiurile triunghiului ABC .
- 2) Cunoscînd $AB = 4a$ cm, să se exprime în funcție de „ a ” aria triunghiului ABC .

R. 1) $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$;
2) aria = $4a^2 \sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$.

25. În $\triangle ABC$ se duce bisectoarea AD ($D \in BC$). Simetricile punctului D față de AC și AB sînt respectiv M și N .

Se cere:

- 1) Să se arate că $\triangle DMN$ este isoscel.
- 2) Unghiul $NDM = \hat{B} + \hat{C}$.
- 3) $AD \perp MN$.

26. Un trapez isoscel are baza mare de 8 cm, baza mică de 2 cm și un unghi de 45° . Să se afle aria acestui trapez cu ajutorul unei construcții ajutoare (nu se vor utiliza relațiile metrice, funcțiile trigonometrice sau proprietatea triunghiului dreptunghic isoscel).

27. Se dă un pătrat $ABCD$. Se construiește pe latura BC un triunghi isoscel OBC avînd unghiurile de la bază de 15° . Să se arate că $\triangle AOD$ este echilateral.

Indicație. Se va lua în considerație particularitatea ce o are un $\triangle$ dreptunghic cu un unghi de 15° . (Înălțimea dusă din unghiul drept pe ipotenuză este $1/4$ din ipotenuză.)

28. Se dă patrulaterul $ABCD$ în care $AD = CB = a$. Se prelungesc segmentele AD și BC ; ($AD \cap BC = \{M\}$). Fie MH bisectoarea unghiului M care intersectează pe DC în H . Se consideră N și G mijloacele segmentelor DC și AB . Să se arate că: $MH \cap NG = \emptyset$.

Indicație. Din N se duc paralele la AD și CB egale cu a .

29. Avem $\triangle$ dreptunghic ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) și punctul $M \in BC$. Simetricul lui M față de AC este punctul N , simetricul lui M față de AB este punctul P , iar D și E sînt proiecțiile lui M pe AB și pe AC .

1) Să se arate că triunghiurile AEN și ADP sînt egale.

2) Să se demonstreze că punctele N , A și P sînt coliniare.

3) $NC \cap MP = \{G\}$. Să se arate că triunghiul MGC este isoscel.

4) Să se arate că există relația:

$$\frac{AD}{AB + AD} = \frac{CM}{CB + CM}.$$

30. Într-un triunghi ABC unghiul exterior B este de trei ori mai mare decît unghiul A al triunghiului și cu $\frac{4}{9}$ dr mai mare decît unghiul C al triunghiului.

Prin vîrfurile A al triunghiului se duce o paralelă la baza BC .

Bisectoarea interioară a unghiului B întîlnește această paralelă în punctul M iar latura AC a triunghiului în punctul N .

1) Să se calculeze unghiurile triunghiului ABC .

2) Să se arate că triunghiurile ABN și MNC sînt echivalente.

3) Să se arate că există relația $AB \cdot NB = MN \cdot BC$.

$$R. \hat{A} = 40^\circ; \hat{B} = 60^\circ; \hat{C} = 80^\circ.$$

31. Aria unui trapez este de 48 cm^2 , raportul bazelor este $\frac{3}{5}$, iar înălțimea lui este de 6 cm.

1) Să se afle bazele trapezului.

2) Cît la sută din aria trapezului reprezintă aria triunghiului ce se formează prin prelungirea laturilor neparalele ale trapezului și avînd ca bază, baza mică a trapezului.

$$R. B = 10 \text{ cm}; b = 6 \text{ cm}; 56,25\%.$$

32. Într-un trapez diferența bazelor este 20 cm, iar linia mijlocie a trapezului este de $66,6\%$ din baza mare. Una din laturile neparalele și cu baza mare determină un unghi de 60° , cealaltă latură neparalelă este de 20 cm.

La distanța de $4\sqrt{3}$ cm de baza mare se duce o paralelă la baze.

- 1) Ce fel de trapez este în condițiile problemei?
- 2) Să se calculeze înălțimea trapezului.
- 3) Să se afle lungimea paralelei dusă la baza mare.

R. 1) Trapezul este isoscel;
2) $10\sqrt{3}$ cm; 3) 22 cm.

33. În triunghiul ABC unghiul A are 60° iar unghiul B are 45° . Bisectoarea unghiului A întâlnește latura BC în D , apoi se duce $DN \perp AB$ și se prelungește această perpendiculară pînă se taie cu prelungirea laturii AC în M . Să se arate că:

- 1) $AD = \frac{2}{3} \cdot MN$.
- 2) $AD^2 = CM \cdot AB$.
- 3) $AN^2 = DN \cdot MN$.

34. Într-un paralelogram $ABCD$ bisectoarele unghiurilor consecutive A și B se întâlnesc pe latura CD în punctul E ($E \in CD$).

- 1) Să se arate că triunghiul BCE este isoscel.
- 2) Știind că bisectoarele AE și BE sînt în raportul de $4/3$ iar diferența proiecțiilor lor pe latura AB este de 2,8 cm să se afle aria paralelogramului și lungimea segmentelor AE și EB .

R. 1) Aria paralelogramului = 48 cm²;
2) $AE = 8$ cm; $BE = 6$ cm.

35. Într-un triunghi dreptunghic isoscel ABC se înscrie un dreptunghi ce are două vîrfuri pe ipotenuza triunghiului, iar celelalte două vîrfuri pe catetele triunghiului. Raportul dimensiunilor dreptunghiului este de $2/5$, iar ipotenuza triunghiului dreptunghic este de 45 cm.

- 1) Să se afle dimensiunile dreptunghiului.
- 2) Cît la sută reprezintă lățimea dreptunghiului din înălțimea triunghiului dat?

R. 1) 10 cm și 25 cm; 2) $44\frac{4}{9}\%$.

36. Se dă triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$) cu înălțimea AD , fie E și F simetricele punctului D față de laturile egale ale triunghiului, $EF \cap AC = \{M\}$; $EF \cap AD = \{O\}$; $EF \cap AB = \{N\}$.

- 1) Să se arate că patrulaterul $BCEF$ este un trapez isoscel. (Se pot folosi cunoștințe diferite și se pot da cel puțin trei demonstrații diferite.)
- 2) Să se determine natura patrulaterului $DCEM$ și să se arate că este echivalent cu patrulaterul $BDNF$.
- 3) Să se demonstreze că AD este bisectoare pentru un unghi al triunghiului AEF ; la fel pentru un unghi al triunghiului EDF .
- 4) Să se studieze natura și elementele patrulaterului $ADEF$.
- 5) Să se arate că există relația:

$$\frac{AN + AM}{AB + AC} = \frac{AO + ON}{AD + BD} = \frac{AN}{AC}.$$

37. Într-un trapez isoscel $ABCD$, cu baza mare $BC = 0,20$ m se înscrie un dreptunghi a cărui arie este de 48 cm², lungimea dreptunghiului fiind baza mică (AD) a trapezului. $BA \cap CD = \{E\}$. Perpendiculara dusă din E pe AD este de 4 cm.

Se cere:

1) Aria trapezului $ABCD$.

2) Să se demonstreze $\triangle BDE = \triangle CAE$.

3) Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului EBC .

4) Să se arate că aria triunghiului EAD este a treia parte din aria dreptunghiului înscris, iar raportul dintre aria dreptunghiului și aceea a trapezului este de $4/7$.

5) Cum se poate construi (fără calcule sau măsurători) un dreptunghi a cărui arie este jumătate din aria trapezului?

R. 1) aria trapezului este de 84 cm^2 ;

3) raza cercului este de 10 cm .

38. Raportul bazelor unui trapez $ABCD$ este de $2/5$. Latura ne paralelă BC are 12 cm și face cu baza mare (AB) un unghi de 60° iar latura ne paralelă AD face cu baza mare un unghi de 30° .

Să se calculeze:

1) aria $\triangle MDC$ ($AB \cap CD = \{M\}$);

2) aria $\triangle ACD$;

3) raportul ariilor $\triangle BCD$ și $\triangle MAB$;

4) să se arate că $\triangle MAC \Leftrightarrow \triangle MBD$;

5) O fiind punctul de intersecție al diagonalelor trapezului, să se arate că $\triangle AOD$ este echivalent cu $\triangle BOC$.

R. 1) $32\sqrt{3} \text{ cm}^2$; 2) $48\sqrt{3} \text{ cm}^2$; 3) $6/25$.

39. Pe latura AD a unui dreptunghi $ABCD$ se ia un punct N așa fel încît $\frac{NA}{ND} = 4$; pe latura BC a dreptunghiului se ia un alt punct M așa fel

încît $\frac{MB}{MC} = \frac{2}{3}$. Perimetrul dreptunghiului este de 52 cm , iar raportul dintre cele două dimensiuni ale dreptunghiului este $3/10$.

1) Să se calculeze lungimea segmentului MN .

2) Să se arate că prelungirile segmentului MN în ambele sensuri, pînă la intersecția cu prelungirile laturilor AB și CD sînt două segmente, unul egal cu MN și altul $\frac{MN}{2}$.

R. $MN = 10 \text{ cm}$.

40. Într-un paralelogram $ABCD$ cu unghiul ascuțit în $\hat{A}$ se prelungeste AB (latura mai mică a paralelogramului cu un segment BF ; $FD \cap AC = \{E\}$). Latura AB este cu 1 cm mai mică decît suma segmentelor AE și EC de pe diagonala AC și cu 1 cm mai mare decît segmentul AE ; se mai știe că $\frac{AE}{EC} = \frac{3}{2}$.

Să se afle:

1) segmentul BF ;

2) lungimea laturii AB ;

3) mărimea raportului $\frac{AF}{CD}$;

4) să se arate că există relația: $\frac{EC \cdot BF}{AE - EC} = AB$.

R. 1) $BF = 2 \text{ cm}$; 2) $AB = 4 \text{ cm}$; 3) $\frac{AF}{CD} = \frac{3}{2}$.

41. Un trapez dreptunghic $ABCD$ are baza mare CD egală cu înălțimea AD iar baza mică AB de 5 cm; se ia un punct E la mijlocul înălțimii AD .
 1) Știind că triunghiul BCE este dreptunghic în E să se arate că aria trapezului, în acest caz, este de 250 cm^2 și latura BC a trapezului este de 25 cm.

2) Să se arate că jumătate din înălțimea trapezului este medie proporțională între baza mică și înălțimea trapezului.

3) Să se demonstreze că există relația:

$$\frac{AE - AB}{AB} = \frac{CD - DE}{DE}.$$

42. Raportul bazelor unui trapez este $1/3$. Latura ne paralelă $BC = 6\sqrt{2} \text{ cm}$ face cu baza mare AB un unghi de 45° , iar diferența bazelor este de 8 cm. Să se calculeze:

1) aria $\triangle MAB$ cunoscând că $AD \cap BC = \{M\}$.

2) raportul ariilor $\triangle DCB$ și $\triangle MAB$;

3) aria $\triangle ADC$;

4) să se arate că $\triangle MAC \Leftrightarrow \triangle MBD$;

5) să se arate că $\triangle AOD \Leftrightarrow \triangle BOC$ știind că $AC \cap BD = \{O\}$.

R. 1) 54 cm^2 ; 2) $2/9$; 3) 12 cm^2

43. Într-un triunghi dreptunghic ABC raportul catetelor $\frac{AB}{AC} = \frac{7,8}{10,4}$ și diferența proiecțiilor lor pe ipotenuză este de 2,8 cm. Bisectoarea unghiului $\hat{B}$ intersectează cateta AC în D ($D \in AC$). Să se afle:

1) perimetrul triunghiului ABC ;

2) raportul ariilor celor două triunghiuri formate în triunghiul ABC prin ducerea bisectoarei AD ;

3) aria patrulaterului $ABED$ (E fiind piciorul perpendicularei dusă din A pe BC).

R. 1) 24 cm ; 2) $3/5$; 3) $14,60 \text{ cm}^2$.

44. Un triunghi isoscel obtuzunghi ABC are perimetrul de 72 cm și $0,125$ din baza BC a triunghiului este de 5 ori mai mică decât una din laturile egale ale triunghiului. Prin vârful A al triunghiului se duce o perpendiculară pe AB ($AB \cap BC = \{E\}$). Să se afle:

1) laturile triunghiului ABC ;

2) lungimea segmentelor AE și EC ;

3) cât la sută reprezintă baza triunghiului isoscel din ipotenuza triunghiului dreptunghic ABE .

R. 1) 20 cm , 20 cm , 32 cm ;

2) $AE = 15 \text{ cm}$, $EC = 7 \text{ cm}$;

3) 128% .

45. În triunghiul dreptunghic ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) AB micșorată cu $3\frac{1}{3}\%$ din ea este de două ori mai mare decât $0,25$ din cateta AC , iar cateta AC mărită cu $0,75$ din ea este cu 8 cm mai mare decât AB . Se duce biseectoarea BE ($E \in AC$) și mediana AG ($G \in BC$); $BE \cap AG = \{I\}$. Să se afle:

- 1) raportul catetelor triunghiului ABC ;
- 2) aria triunghiului AGC ;
- 3) considerînd $\angle B = 60^\circ$ să se demonstreze că triunghiul BIG este dreptunghic în I și să se afle raportul dintre EG și BE ;
- 4) În acest caz particular cit la sută reprezintă aria triunghiului BIG din aria triunghiului ABC ?

R. 1) $3/4$; 2) 12 cm^2 ; 3) $1/2$; 4) 25% .

46. Într-un triunghi dreptunghic ABC cu ipotenuza $BC = 2a$ linia centrelor O și O' ale cercurilor înscris și circumscris acestui triunghi este egală cu segmentul AO ce unește vîrfurile unghiului drept cu centrul cercului înscris în triunghi.

Să se afle:

- 1) unghiurile triunghiului ABC ;
- 2) raportul catetelor;
- 3) raportul proiecțiilor catetelor pe ipotenuză;
- 4) raportul ariilor cercurilor înscris și circumscris.

R. 1) $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$;

2) $\sqrt{3}$; 3) 3 ;

4) $\frac{2 - \sqrt{3}}{2}$.

47. Un triunghi ABC are aria de 360 cm^2 . Pe baza BC se ia un punct oarecare D și un alt punct M la mijlocul segmentului AD . Se cere:

- 1) aria triunghiului MBC ;
- 2) valoarea raportului ariilor triunghiului ABM și BMD ;
- 3) să se demonstreze că:

$$\frac{\text{aria } \triangle ABM + \text{aria } \triangle AMC}{\text{aria } \triangle MBD + \text{aria } \triangle MCD} = 1.$$

- 4) cit la sută reprezintă aria triunghiului CMD din aria triunghiului AMC ?

R. 1) 180 cm^2 ; 2) 1 ; 3) 100% .

48. În triunghiul dreptunghic ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) bisectoarea unghiului C intersectează înălțimea AD în E și latura AB în F iar bisectoarea unghiului B intersectează latura AC în P .

Se cere:

- 1) Să se arate că bisectoarele se intersectează sub un unghi de 45° .
 - 2) Considerînd FP diametrul unui cerc să se arate că arcul $\widehat{MN}$ cuprins între punctele de intersecție a cercului cu cele două bisectoare este de 90° .
- Să se arate că AFE este isoscel.

Geometrie în spațiu

1. Fie planul P și un punct $A \notin P$, se duc: perpendiculara AM pe plan și oblicele egale AB și AC , astfel ca unghiul BMC să fie drept. Presupunînd că AM este egal cu 2 cm , iar unghiul $BAM = 60^\circ$, să se calculeze distanța BC dintre picioarele B și C ale oblicelor (fig. II.2).

R. $BC = 2\sqrt{6} \text{ cm}$.

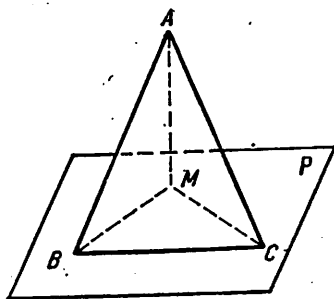


Fig. II.2

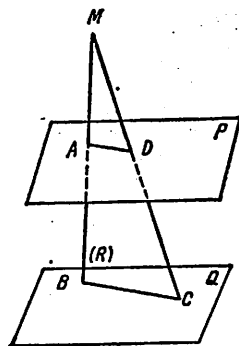


Fig. II.3

2. Se dă un punct M la distanța $MA = 3$ cm de un plan P și la distanța $MB = 8$ cm de un alt plan Q , paralel cu primul. Segmentul $BC = 6$ cm. $C \in Q$. MC intersectează planul P în D . Să se afle perimetrul triunghiului MAD (fig. II.3).

R. 9 cm.

3. Un vas de formă cubică, plin cu alcool cîntărește 52,688 kg, iar vasul gol cîntărește 2 kg. Să se afle adîncimea vasului, știind că densitatea alcoolului este de 792 kg/m^3 .

Indicație. Vom afla, în prealabil, masa netă a alcoolului. Volumul alcoolului din vas se va obține împărțind masa sa la densitate. Dacă masa este dată în kg volumul se obține în decimetri cubi.

Găsim:

$$V = \frac{50 \cdot 688}{0,792} = 64 \cdot \text{dm}^3.$$

R. Înălțimea = 4 dm.

4. Se dă un cub $ABCD A'B'C'D'$ a cărui muchie are lungimea a .
a) Să se calculeze distanța AP de la virful A la diagonala CA' a cubului.

Indicație. Observăm că triunghiul $A'AC$ este dreptunghic în A , muchia $A'A$ a cubului fiind perpendiculară pe planul bazei, este perpendiculară pe toate dreptele din plan.

Scriem în două moduri deosebite dublul ariei triunghiului $A'AC$ și avem

$$AP = \frac{AC \cdot AA'}{A'C}.$$

Mărimea segmentului AC se deduce din triunghiul dreptunghic CDA ; $AC = a\sqrt{2}$.

$$\text{R. } PA = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Observație. Se înțelege că aceeași valoare se obține pentru oricare din distanțele de la un virf al cubului la o diagonală a acestuia.

5. Se dă o prismă patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$. Latura pătratului bazei este de 2 dm, iar diagonala AC' a prisme de 4 dm.

1. Să se arate că triunghiul ACC' este isoscel.
2. Să se calculeze aria totală a prisme.

3. Presupunem că prisma este metalică și după ce o topim, vrem să confectionăm alta care are baza un dreptunghi cu lungimea de 2 dm și lățimea $\sqrt{2}$ dm.

Să se arate că înălțimea prisme confectionate este egală cu diagonala prisme inițiale.

Indicație. 1. $AC = 2\sqrt{2}$. Triunghiul $C'CA$ este dreptunghic în C .

$$C'C = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

2. Aria totală se compune din aria a două pătrate $ABCD$ și $A'B'C'D'$ la care se adaugă patru fețe dreptunghiulare, fiecare având dimensiunile 2 dm și $2\sqrt{2}$ dm, adică o arie laterală de $16\sqrt{2}$ dm²; aria totală = $8(1 + 2\sqrt{2})$ dm².
3. Volumul prisme inițiale = $8\sqrt{2}$ dm³. Prin topire, volumul rămâne același, numai forma se schimbă. Dacă vrem să facem din același metal o altă prismă dreptunghiulară, cu dimensiunile bazei de 2 dm și $\sqrt{2}$ dm, având deci o arie de $2\sqrt{2}$ dm², ea va trebui să aibă o înălțime egală cu:

$$\frac{V}{2\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 4 \text{ dm, adică cu diagonala prisme inițiale.}$$

$$\text{R. 2) } 8(1 + 2\sqrt{2}) \text{ dm}^2.$$

6. O groapă prismatică, cu baza un triunghi echilateral, cu latura de 2 m și adâncă de 4 m, este plină cu îngrășămintă animale. Aceste îngrășămintă se împrăstie pe suprafața unui lot de flori în formă de hexagon cu latura de 10 m. Ce grosime are stratul de îngrășămintă?

$$\text{R. } \approx 0,026 \text{ m.}$$

7. Fie $ABCD A'B'C'D'$ un vas paralelipipedic închis, având dimensiunile 2 dm, 3 dm, 4 dm. El conține apă, care ocupă $\frac{3}{8}$ din volumul său.

Se cere înălțimea pină la care se ridică lichidul când culcăm vasul, pe rind, pe cite una din fețele sale.

$$\text{R. } 1,125 \text{ dm; } 1,5 \text{ dm; } 0,75 \text{ dm.}$$

8. Un cub $ABCD A'B'C'D'$ este înscris într-o sferă cu raza de 2 cm. Să se afle volumul cubului.

Indicație. Diagonalele cubului trec prin centrul O al sferei.

Fie a lungimea laturii cubului. Triunghiul ACC' este dreptunghic.

$$(1) a^2 + AC^2 = AC'^2,$$

$$(2) AC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2.$$

Înlocuind această valoare a lui AC^2 în (1) și ținând seama că $AC' = 4$, volumul cubului va fi $\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^3 \approx 12,331$; cm³;

$$\text{R. } V \approx 12,331 \text{ cm}^3.$$

9. O prismă dreaptă, cu baza un triunghi echilateral, are volumul $27\sqrt{3}$ cm³ și înălțimea de 12 cm. Să se afle suma tuturor muchiilor.

$$\text{R. } 54 \text{ cm.}$$

10. Se dă o prismă dreaptă $ABCD A' B' C' D'$ cu baza $ABCD$, un romb. Diagonalele $A'C$ și $B'D$ ale prisme au lungimile $A'C = 8$ cm, $B'D = 5$ cm, iar muchiile laterale ale prisme sînt de 2 cm. Să se calculeze latura rombului de bază și aria sa.

$$R. l = \frac{9}{2} \text{ cm}; 3\sqrt{35} \text{ cm}^2.$$

11. O piramidă pătratică regulată are apotema de 12 cm și muchia laterală de 13 cm.

a) Să i se calculeze volumul și aria totală.

$$R. a) V \approx 363 \text{ cm}^3; \text{ aria totală} = 340 \text{ cm}^2.$$

12. Într-o piramidă patrulateră regulată, latura bazei este 1 m, iar aria laterală este de 260 dm^2 . Se cere: 1) apotema; 2) muchia; 3) volumul piramidei.

Indicație. Aria laterală cunoscută se compune din patru triunghiuri egale.

Se obține valoarea apotemei piramidei 13 dm.

Aplicînd teorema lui Pitagora, se obține și lungimea unei muchii.

$$R. 1) 13 \text{ dm}; 2) 13,92 \text{ dm}; 3) 400 \text{ dm}^3.$$

13. Să se afle volumul unui tetraedru regulat $ABCD$ a cărui muchie are lungimea l . Aplicație numerică: $l = 10$ cm.

$$V = \frac{l^3 \sqrt{2}}{12}$$

$$R. V \approx 117,450 \text{ cm}^3.$$

14. O piramidă $VABC$ are ca bază un triunghi dreptunghic ABC , cu catetele $AB = 30$ cm și $AC = 40$ cm. Muchia laterală VA are 32 cm și este perpendiculară pe planul bazei. Se cere:

1) Lungimile înălțimilor BB' și CC' ale piramidei coborîte din B pe fața VAC și din C pe fața VAB .

2) Aria totală a piramidei.

$$R. 1) 30 \text{ cm}; 40 \text{ cm}; 2) 2720 \text{ cm}^2.$$

15. S-au construit 10 corturi pentru o tabără de pionieri. Fiecare cort avea forma unui paralelipiped drept, cu baza un pătrat, cu latura de 4 metri și acoperișul în formă de piramidă regulată, cu înălțimea egală cu aceea a paralelipipedului și egală cu diagonala pătratului de bază. Pentru fixarea unui cort se leagă virful piramidei cu frîngii trase în prelungirea muchiilor laterale ale ei și fixate apoi cu cîte un țaruş în pămînt.

Se cere:

a) Să se calculeze cîți metri pătrați de pînză trebuie pentru aceste corturi.

$$R. 1382,4 \text{ m}^2.$$

16. Un cristal de cuarț este format dintr-o prismă hexagonală regulată și două piramide regulate, cu virfurile în S și S' . Știind că cele două piramide sînt egale, că cristalul cîntărește 15,6 g, că densitatea sa este de $2\,600\text{ kg/m}^3$, că latura hexagonului este 1 cm, iar înălțimea prisme este jumătate din distanța dintre virfurile piramidelor, să se calculeze distanța SS' .

R. $\approx 3,44\text{ cm}$.

17. Un cub are muchia egală cu a . Să se determine aria laterală a unei piramide care are virful în centrul bazei superioare, iar baza piramidei are virfurile în mijloacele laturilor bazei inferioare.
Aplicație numerică: $a = 3\text{ cm}$.

R. $13,5\text{ cm}^2$.

18. Înălțimea unei piramide triunghiulare regulate $VABC$ este egală cu 10 m, aria bazei este egală cu $75\sqrt{3}\text{ m}^2$. La distanța $2\sqrt{3}\text{ m}$ de virf facem o secțiune DEF paralelă cu baza. Să se afle volumul piramidei formate $VDEF$.

R. 48 m^3 .

19. Într-o piramidă patrulateră regulată este înscris un cub astfel încît patru virfuri ale sale se află pe muchiile laterale ale piramidei, iar celelalte patru virfuri se află în planul bazei. Să se determine volumul cubului dacă latura bazei piramidei este $a = 4\text{ cm}$, iar înălțimea este de $h = 8\text{ cm}$ (fig. II.4).

Indicație.

$$\triangle VO'N \sim \triangle VOD.$$

(1)

Dar: (x fiind muchia cubului)

$$O'N = \frac{x\sqrt{2}}{2}, \quad OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$VO = h, \quad VO' = h - x \rightarrow \frac{x}{a} = \frac{h - x}{h},$$

$$x = \frac{ah}{h + a} = \frac{8}{3}\text{ cm}, \quad V = l^3 = \left(\frac{8}{3}\right)^3\text{ cm}^3.$$

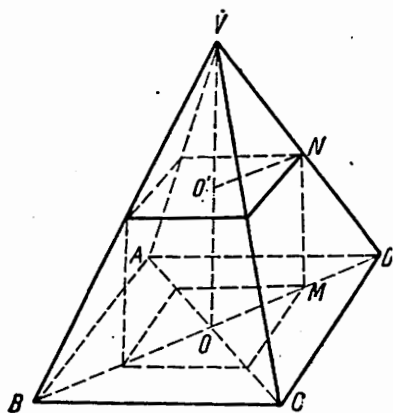


Fig. II.4

20. O piramidă hexagonală regulată are înălțimea de 9 m. La 3 m de virf se duce o secțiune paralelă cu baza, avînd aria de $24\sqrt{3}\text{ m}^2$. Să se determine raportul volumelor celor două piramide, cea dată și cea obținută prin secțiune.

R. $\frac{27}{1}$.

21. Să se determine volumul piramidei octogonale regulate cu latura bazei de 6 dm și cu muchiile laterale înclinate pe planul bazei cu un unghi de 60° .

Indicație. Se calculează R cercului circumscris octogonului, apoi muchia piramidei prin trigonometrie.

R. $V \approx 790\text{ dm}^3$.

22. Într-un trunchi de con $R = 13$ cm, $r = 5$ cm, iar generatoarea este înclinată pe bază cu un unghi de 45° . Să se afle: aria laterală a trunchiului de con, aria totală și volumul.

$$\text{R. Aria laterală} = 144\sqrt{2}\pi \text{ cm}^2; \text{Aria totală} = \pi(144\sqrt{2} + 169 + 25) \text{ cm}^2.$$

$$\text{Volumul} = \frac{8\pi}{3} (169 + 25 + 65) \text{ cm}^3.$$

23. Să se determine aria totală și volumul piramidei patrulatere regulate care are muchia laterală $M = 12$ dm, știind că muchia este înclinată pe planul bazei cu un unghi de 60° .

Indicație: Aflăm înălțimea piramidei $I = 12 \sin 60^\circ = 6\sqrt{3}$, apoi apotema piramidei $A = 3\sqrt{14}$. Aria laterală ≈ 190 dm². Aria totală ≈ 262 dm².

$$\text{R. } V = 144\sqrt{3} \text{ dm}^3.$$

24. Un vas cilindric închis, avînd raza de 10 cm și generatoarea de 15 cm, conține lichid cît $\frac{1}{3}$ din volumul său. Să se afle aria porțiunii din capacele vasului care este acoperită de lichid, vasul fiind în poziție orizontală.

Indicație. Volumul lichidului este a treia parte din volumul vasului, întrucît cînd s-a întors vasul nu s-a introdus, nici nu s-a scos nimic din lichid:

$$\frac{1}{3} 500\pi \text{ cm}^3 = 500\pi \text{ cm}^3.$$

Volumul lichidului se obține înmulțind aria A a segmentului de cerc cu înălțimea cilindrului, de unde avem:

$$A = \frac{500\pi}{15} = \frac{100\pi}{3} \approx 104,7 \text{ cm}^2.$$

$$\text{R. } \approx 104,7 \text{ cm}^2.$$

25. Un rezervor cilindric de fontă cu raza de 7 m, iar înălțimea de 12 m, este plin cu benzină, a cărei densitate este de 700 kg/m^3 . Să se afle în cîte vagoane-cisternă se va putea încărca toată benzina din acel rezervor, știind că, într-un vagon încap 10 000 kg de benzină.

$$\text{R. } \approx 129 \text{ vagoane.}$$

26. Un tub cilindric de sticlă cîntărește 80 g cînd este gol și 140 g cînd se introduce în el mercur pînă la o înălțime de 4 cm. Densitatea mercurului fiind de $13\,600 \text{ kg/m}^3$, să se afle diametrul interior al tubului.

Indicație. Masa mercurului este $140 - 80 = 60$ g,

iar $V = \frac{m}{\rho}$. În cazul de față masa fiind dată în grame, volumul se va afla în centimetri cubi:

$$V = \frac{60}{13,6} \approx 4,4 \text{ cm}^3.$$

$$\text{R. } \approx 1,18 \text{ cm.}$$

27. Un vagon-cisternă plin cu ulei este format dintr-o parte cilindrică, avînd lungimea de 5 m, și din două emisfere avînd raza egală cu 1,20 m (ca și partea cilindrică). Să se afle masa uleiului din acest vagon, densitatea uleiului fiind de 920 kg/m^3 .

$$\text{R. } 31,6 \text{ t.}$$

28. Un ax de oțel cu lungimea de 1,40 m și diametrul de 84 mm se strunjește astfel, încât diametrul să se reducă la 80 mm. Să se calculeze cit la sută din masa inițială se pierde prin strunjire.

Indicație. Volumul pierdut prin strunjire va fi:

$$V_1 - V_2 = 1\,400(42^2 - 40^2) \text{ mm}^3.$$

Dacă notăm cu ρ densitatea oțelului, masa axului nestrunjit va fi $V_1\rho$ mg, a axului strunjit $V_2\rho$ mg, iar a oțelului pierdut prin strunjire $(V_1 - V_2)\rho$ mg.

Raționăm astfel: dacă la o masă egală cu $V_1\rho$ mg se pierde $(V_1 - V_2)\rho$ mg, atunci la 100 mg se vor pierde:

$$\frac{100(V_1\rho - V_2\rho)}{V_1\rho} = \frac{100(V_1 - V_2)}{V_1}.$$

$$R. \approx 9,29\%.$$

29. Aria totală a unui cilindru este de două ori aria unui cerc cu raza R . Știind că diametrul cilindrului este egal cu înălțimea lui, să se calculeze volumul în funcție de R .

$$R. \approx 1,2 R^3.$$

30. Un cilindru circular drept are generatoarea G egală cu diametrul $2R$ al bazei. Să se determine G și R , știind că aria totală a cilindrului este egală cu de patru ori aria unei sfere cu raza de 0,25 m.

$$R. \approx 0,41 \text{ m}; \approx 0,82 \text{ m}.$$

31. Într-un cilindru circular drept se duce un plan paralel cu axa cilindrului care taie din cercul bazei un arc de 120° . Înălțimea cilindrului este de 10 cm, iar distanța OI , de la centrul cercului de bază, la planul secant, este de 2 cm.

Să se determine aria secțiunii.

Indicație. Secțiunea paralelă cu axa cilindrului este un dreptunghi $ABCD$, a căruia înălțime AD este chiar $OO' = 10$ cm. Baza sa este o coardă AB care subîntinde 120° . AB fiind coardă subîntinsă de arcul de 120° , este latura triunghiului echilateral înscris în cerc.

$$R. 40\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

32. Aria laterală a unui con este de 10 cm^2 . Dacă îl desfășurăm, obținem un sector circular cu unghiul la centru de 36° . Se cere aria totală a conului.

$$R. 11 \text{ cm}^2.$$

33. Un pionier a confecționat un con dintr-o bucată de carton avînd forma unui sfert de cerc, a cărui arie este de $9\pi \text{ cm}^2$. Să se calculeze volumul conului astfel obținut.

$$R. \frac{9\pi\sqrt{15}}{16} \text{ cm}^3.$$

34. Secțiunea axială VAB făcută într-un vas de formă conică este un triunghi dreptunghic isoscel, a cărui arie este de 18 cm^2 . Printr-un mic orificiu în V se toarnă mercur pînă la jumătate din înălțimea vasului. Ce masă va avea mercurul din vas, știind că densitatea mercurului este de $13\,600 \text{ kg/m}^3$.

Indicație. Mercurul din vas ia forma vasului. Volumul său va fi diferența dintre V_1 al vasului, adică a conului mare cu vârful V , și al volumului V_2 al conului mic cu același vîrf și care reprezintă partea goală din vas.

R. $m \approx 942$ g.

35. Astupăm vârful unei pîlnii înalte de 12 cm și turnăm în ea 301,44 ml apă. Apa se ridică la o înălțime de 8 cm. Care este capacitatea pîlniei?

R. ≈ 1 litru.

36. Un triunghi dreptunghic ABC are ipotenuza $BC = a$ și catetele $AC = b$, $AB = c$, astfel ca $c < b$. Se rotește acest triunghi pe rînd în jurul celor două catete. Să se afle ariile laterale ale corpurilor astfel obținute, și să se spună care e mai mare dintre ele. Același lucru pentru volume. Să se afle și volumul corpului obținut prin rotirea triunghiului în jurul ipotenuzei.

Caz numeric: $c = 9$ cm; $b = 12$ cm.

Indicație. Deoarece a este lungimea ipotenuzei, putem scrie:

$$(1) \quad c < b < a.$$

Prin rotirea în jurul catetei AB , obținem un con cu raza bazei b , înălțimea c și generatoarea a ; iar prin rotirea în jurul catetei AC , un alt con cu raza bazei c , înălțimea b și generatoarea a . Notînd cu A_{AB} și A_{AC} ariile laterale ale celor două conuri, avem:

$$(2) \quad A_{AB} = \pi b a; \quad A_{AC} = \pi c a.$$

Comparînd valorile lui A_{AB} și A_{AC} se vede că $A_{AB} > A_{AC}$.

Tot astfel, notînd cu V_{AB} și V_{AC} volumele celor două conuri și fiindcă $c < b$, rezultă $V_{AB} < V_{AC}$.

$$A_{BC} = \frac{\pi b c (b + c)}{a}, \quad V_{BC} = \frac{1}{3} \frac{\pi b^2 c^2}{a}.$$

În cazul numeric:

$$A_{AB} = 180\pi \text{ cm}^2, \quad A_{AC} = 135\pi \text{ cm}^2, \quad A_{BC} = 151,2\pi \text{ cm}^2,$$

$$V_{AB} = 432\pi \text{ cm}^3, \quad V_{AC} = 324\pi \text{ cm}^3, \quad V_{BC} = 259,200\pi \text{ cm}^3.$$

37. Să se calculeze raza sferei circumscrise unui con drept cu generatoarea de 37 cm și raza bazei de 12 cm.

R. $\approx 19,5$ cm.

38. Înălțimea VO a unui con este de 8 m, iar generatoarea sa VA este de 10 m.

a) Să se afle volumul sferei S înscrise în con.

b) Punctul $M \in VA$, simetricul lui M față de OA este M' iar față de VO este M'' . Să se arate că $O \in M'M''$.

R. a) $36\pi \text{ m}^3$.

39. Cite bile avînd diametrul de 10 mm putem confecționa din 5 kg de plumb?

Cite kg de alamă ne trebuie pentru a confecționa un număr egal de bile? (Densitatea plumbului este $11\,350 \text{ kg/m}^3$, iar densitatea alamei este $8\,400 \text{ kg/m}^3$.)

Indicație. Volumul unei bile cu diametrul de $10 \text{ mm} = 1 \text{ cm}$ este:

$$V = \frac{\pi}{6} \text{ cm}^3.$$

Dacă bila este de plumb, va avea o masă m_p :

$$(1) \quad m_p = \frac{11,35\pi}{6} \text{ g},$$

iar dacă este de alamă va avea o masă m_A :

$$(2) \quad m_A = \frac{8,4\pi}{6} \text{ g}.$$

(Masa a fost obținută în grame, deoarece volumul s-a calculat în centimetri cubi.)
Găsim numărul n de bile de plumb ce se pot confecționa din 5 kg.

$$(3) \quad n = 5\,000 : \frac{11,35\pi}{6} \approx 841.$$

Cum fiecare bilă de alamă ar cântări m_A g, pentru a vedea câtă alamă ne trebuie pentru ca să confecționăm tot n bile, vom înmulți m_A cu n , adică:

$$m_A \cdot n = \frac{5 \cdot 8,4}{11,35} \text{ kg} = 3,70 \text{ kg de alamă}.$$

R. 841 bile; 3,70 kg de alamă.

40. O bilă de cupru goală în interior cântărește $2,5344 \pi$ kg. Raza ei interioară este de 3 cm. Cât este de mare raza exterioară, știind că densitatea cuprului este $8\,800 \text{ kg/m}^3$?

Indicație. Fie R raza bilei. Va trebui ca:

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = 324\pi,$$

$$R^3 = 243 = 3^5 = 3^3 \cdot 3^2 \rightarrow R = 3 \sqrt[3]{3^2} \text{ cm}.$$

41. Dintr-un cub de fildeș cu muchia $l = 6$ cm, vrem să tăiem o sferă, astfel ca partea pierdută să fie cât mai mică posibil. Cât la sută se pierde? Care este masa părții pierdute, dacă densitatea fildeșului este $1\,920 \text{ kg/dm}^3$.

Indicație. Pentru ca partea pierdută să fie cât mai mică, trebuie să tăiem din cub numai atît cît să ajungem la sfera înscrisă în el, adică la sfera de diametru egal cu muchia l a cubului.

Volumul V al părții pierdute va fi diferența dintre volumul cubului și al sferei înscrise:

$$V = l^3 - \frac{4}{3} \pi \left(\frac{l}{2}\right)^3 = l^3 \left(1 - \frac{\pi}{6}\right).$$

Volumul cubului fiind l^3 , vom lucra prin regula de trei simplă și vom găsi pierderea în procente:

$$\frac{100l^3 \left(1 - \frac{\pi}{6}\right)}{l^3} = 100 \left(1 - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{50(6 - \pi)}{3}.$$

Obținem o pierdere de 47,66%. Masa părții pierdute este:

$$m = V\rho \approx 197,68 \text{ g}.$$

Observare. Mărimea muchiei l a cubului s-a eliminat din calculul procentual ceea ce era natural deoarece în această problemă volumul cubului nu influențează asupra procentului de pierdere.

R. 47,66%; $m \approx 197,68 \text{ g}$.

42. Se strunjește o sferă metalică cu raza $R = 100$ mm, până când i se micșorează raza cu 10 mm. Se topesc resturile de la strunjire și se confecționează din ele un obiect de formă conică, avînd raza bazei egală cu raza sferei inițiale. Ce înălțime are conul obținut?

R. 108,4 mm.

43. Considerăm un cilindru și un con echilateral, circumscrise unei sfere. Să se arate că: 1) aria totală a cilindrului este medie proporțională între aria sferei și aria totală a conului; 2) volumul cilindrului este medie proporțională între celelalte două volume; 3) raportul fiecărui volum la aria sa totală este egal cu o treime din rază.

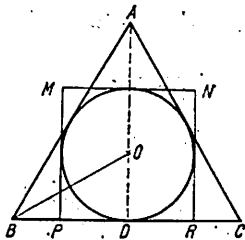


Fig. II.5

Indicație. Un plan secant dus prin axa conului ne dă un cerc mare al sferei, înscris în același timp într-un pătrat (care reprezintă secțiunea făcută în cilindru) și un triunghi echilateral (care reprezintă secțiunea din con) (fig. II.5).

Notînd cu R raza sferei, $OD = R$.

Avem $OB = 2 \cdot R$ și cum $OB = OA \Rightarrow OA = 2R$ și deci $AD = 3R$.

Avem $6\pi R^2 =$ aria totală a cilindrului.

Pentru aflarea ariei laterale a conului, cunoaștem înălțimea conului:

$AD = 3R$; $AB = BC = 2BD$; dar $BD^2 = AB^2 - AD^2 \Rightarrow 3BD^2 = 9R^2$, $BD = R\sqrt{3}$.

Rezultă că aria laterală a conului $= \pi BD \cdot AB = \pi R\sqrt{3} \cdot 2R\sqrt{3} = 6\pi R^2$.

Aria bazei conului $= \pi BD^2 = \pi (R\sqrt{3})^2 = 3\pi R^2$.

Aria totală $= 6\pi R^2 + 3\pi R^2 = 9\pi R^2$.

1) Pentru a răspunde la prima întrebare trebuie să arătăm că:

$$(A_t \text{ cil})^2 = A_{sf} \cdot A_t \text{ con.}$$

Înlocuind obținem:

$$(6\pi R^2)^2 = 4\pi R^2 \cdot 9\pi R^2; 36\pi^2 R^4 = 36\pi^2 R^4.$$

2) Pentru volumul corpurilor avem:

$$\text{Volumul sferei} = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

$$\text{Volumul cilindrului} = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3.$$

$$\text{Volumul conului} = \frac{1}{3} \cdot 3\pi R^2 \cdot 3R = 3\pi R^3.$$

Demonstrăm ușor egalitatea

$$(V \text{ cil})^2 = V_{sf} \cdot V \text{ con,}$$

adică:

$$(2\pi R^3)^2 = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot 3\pi R^3.$$

3)

$$\frac{\text{Volumul sferei}}{\text{Aria sferei}} = \frac{\frac{4}{3} \pi R^3}{4\pi R^2} = \frac{1}{3} R.$$

$$\frac{\text{Volumul cilindrului}}{\text{Aria totală a cilindrului}} = \frac{2\pi R^3}{6\pi R^2} = \frac{1}{3} R$$

$$\frac{\text{Volumul conului}}{\text{Aria totală a conului}} = \frac{3\pi R^3}{9\pi R^2} = \frac{1}{3} R.$$

44. Să se afle raza unei sfere de fontă care cîntărește 10 kg, cunoscînd că densitatea fontei este $7\,200\text{ kg/m}^3$.

R. $\approx 0,7\text{ dm}$.

45. Generatoarea unui cilindru este $\frac{3}{4}$ din raza cercului de bază. Știînd că acest cilindru are aria totală de $56\pi\text{ cm}^2$, să se afle volumul. Din acest cilindru facem o prismă hexagonală regulată maximă. Cît la sută din volum s-a pierdut.

Indicație.

$$\text{Pierdere} = \pi r^2 h - \frac{3r^2\sqrt{3}}{2} \cdot h = r^2 h \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) \approx r^2 h \cdot 0,55 = 26,40\text{ cm}^2.$$

$$\frac{V_{\text{pierd}}}{V_{\text{cil}}} = \frac{48 \cdot 0,55}{48\pi} = \frac{0,55}{3,14} = 0,175; \quad 0,175 \cdot 100 = 17,5\%.$$

R. $V = 48\pi\text{ cm}^3$; $\approx 17,5\%$ pierdere.

46. Să se afle volumul corpului de rotație, obținut prin rotirea unui hexagon regulat în jurul unei diagonale. Să se compare acest volum cu volumul sferei circumscrise lui. Se dă $l_6 = a$.

Indicație. Volumul acestui corp este format din volumul a două conuri și al unui cilindru.

$$R_{\text{con}} = R_{\text{cil}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad I_{\text{con}} = \frac{a}{2}; \quad I_{\text{cil}} = a.$$

$$V = \pi \frac{3a^2}{4} \cdot \frac{4a}{3} = \pi a^3.$$

$$V_{\text{sferii}} = \frac{4\pi a^3}{3}; \quad \frac{V_{\text{sferii}}}{V_{\text{corp}}} = \frac{\frac{4\pi a^3}{3}}{\pi a^3} = \frac{4}{3}.$$

$$\text{R. } V = \pi a^3 \cdot \frac{V_{\text{sf}}}{V_{\text{corp}}} = \frac{4}{3}.$$

47. Un cilindru are raza R . Să se calculeze: aria totală, volumul cilindrului și diagonala secțiunii axiale știînd că secțiunea este un pătrat.

$$\text{Indicație. } A_t = 2\pi R(R + G) = 2\pi R(R + 2R) = 6\pi R^2,$$

$$V = \pi R^2 G = \pi R^2 \cdot 2\bar{R} = 2\pi R^3.$$

R. $6\pi R^2$; $2\pi R^3$; $2R\sqrt{2}$.

48. Soclul unei statui are forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată. Latura pătratului bazei mari este de 0,84 m, înălțimea trunchiului este de 1,18 m și apotema de 1,2 m. Să se afle aria laterală.

R. $\approx 3\text{ m}^2$.

49. Să se afle volumul trunchiului de piramidă patrulateră regulată, dacă diagonalele lui sînt de 9 cm, iar laturile bazelor sînt de 7 cm și 5 cm.

R. 109 cm³.

50. Laturile bazelor unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată sînt de 2 cm și 6 cm. Fața laterală formează cu planul bazei un unghi de 60°. Să se afle volumul trunchiului.

R. $\frac{26\sqrt{3}}{3}$ cm³.

51. Raza bazei unui con circular drept este 3 m. Secțiunea paralelă la bază la o distanță de 3 m de vîrf are raza de 2 m. Să se afle volumul și aria laterală a conului.

R. 42,390 m³; 50,8690 m².

52. Un vas are formă de con cu vîrf D în jos. Secțiunea axială este un triunghi echilateral. În el se lasă să cadă o sferă de rază r . În vas se toarnă apă, astfel încît suprafața apei formează un plan tangent la sferă.

Care este adîncimea apei după ce se scoate sfera?

Indicație. Pentru a putea calcula adîncimea apei după ce scoatem sfera, va trebui să scoatem volumul sferei din volumul conului care conține lichid pînă la suprafața sferei, deci volumul ABD .

Notăm: V = volumul conului ABD ; H = înălțimea conului ABD ; i și r_1 înălțimea și raza conului de apă fără sferă; V_1 = volumul conului de apă fără sferă.

Secțiunea este un triunghi echilateral $\Rightarrow \hat{D}_1 = 30^\circ$. Cunoaștem de asemenea raza sferei = r ; $\Rightarrow OD = 2r$ și, ținînd seama că $OC = r$, $\Rightarrow H = 3r$.

Notăm raza conului (CB) cu x , conform aceleiași teoreme $BD = 2x$.

Din triunghiul DBC , avem:

$$4x^2 - x^2 = 9r^2; 3x^2 = 9r^2, x^2 = 3r^2 = R^2; R = r\sqrt{3};$$

$$V = 3\pi r^3,$$

$$V_1 = 3\pi r^3 - \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{5\pi r^3}{3}.$$

Scoțînd sfera din apă, nivelul apei scade și urmează să calculăm înălțimea conului nou format:

$$V = \frac{\pi r_1^2 i}{3}.$$

Nu cunoaștem pe r_1 și pe i , pe care le putem determina din triunghiul dreptunghic $DD'N$, unde D' este centrul bazei conului obținut după scoaterea sferei, iar N intersecția diametrului cu generatoarea. Notînd $DD' = i = y$, avem: $\text{tg } 30^\circ = \frac{ND'}{DD'}$, de unde $ND' = r_1 = y \text{ tg } 30^\circ = \frac{y}{\sqrt{3}}$;

$$\text{Volumul apei va fi } \frac{\pi r^2}{3} \cdot i = \frac{\pi \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot y}{3} = \frac{\pi y^3}{9}.$$

Volumele $\frac{5\pi r^3}{3}$ și $\frac{\pi y^3}{9}$ sînt egale, deci

$$\frac{5\pi r^3}{3} = \frac{\pi y^3}{9}, \text{ de unde: } y^3 = 15r^3.$$

Adîncimea apei $i = \sqrt[3]{15}r$.

R. $\sqrt[3]{15}r$.

53. Într-un vas în formă de con, cu virful în jos cu înălțimea de 12 dm, baza conului fiind orizontală, se toarnă 301,44 l de apă. Apa se urcă în vas pînă la 8 dm. Să se afle capacitatea vasului întreg.

R. 324π litri.

54. Înălțimea unui con este de 8 m, iar generatoarea de 10 m. Conul este înscris într-o sferă. Să se calculeze volumul sferei.

R. $\frac{253\pi}{48} \text{ m}^3$.

55. Înălțimea unui con este de 8 m, iar generatoarea de 10 m. Să se afle volumul sferei înscrise în con.

R. $36\pi \text{ m}^3$.

56. Un con circular drept are baza de 40 cm și generatoarea de 50 cm. La depărtare de 10 cm de virf se face o tăietură printr-un plan paralel cu baza. Să se afle aria totală și volumul conului care are ca bază cercul de secțiune și virful în centrul bazei conului dat.

R. $At \approx 4689 \text{ cm}^2$ $V \approx 3722 \text{ cm}^3$.

57. Un con circular drept are volumul $12,56 \text{ dm}^3$ și lungimea cercului de bază 12,56 dm. Să se afle aria totală.

R. $At \approx 35,17 \text{ dm}^2$.

58. Un triunghi dreptunghic cu ipotenuza de 15 cm și o catetă de 12 cm se rotește în jurul ipotenuzei. Să se calculeze volumul și aria corpului format.

R. $151,20\pi \text{ cm}^3$; $259,200\pi \text{ cm}^2$.

59. Să se afle volumul sferei circumscrise paralelipipedului dreptunghic cu dimensiunile 2 cm, 3 cm, 4 cm.

Indicație. Dacă se notează cu a ; b ; c dimensiunile paralelipipedului, diagonala d este dată de relația:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

și pentru raza sferei circumscrise:

$$R = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2},$$

R. $V = \frac{29\pi\sqrt{29}}{6} \text{ cm}^3$.

60. Într-o sferă de rază r se face o secțiune cu un plan la distanța d de centru. Să se afle raportul ariilor calotelor formate și aria cercului de secțiune.

Indicație.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{2\pi r(r-d)}{2\pi r(r+d)} = \frac{r-d}{r+d}.$$

$$A_{\text{cercului}} = \pi(r^2 - d^2).$$

Aria celei de-a doua calote se poate afla scăzând din aria sferei aria primei calote:

$$A_2 = A_{sf} - A_1 = 4\pi r^2 - 2\pi r(r-d) = 2\pi r(r+d).$$

61. Într-o sferă cu raza de 14 cm este înscrisă o prismă triunghiulară regulată, care are diagonalele unei fețe laterale de 26 cm. Să se afle latura bazei prisme (fig. II.6).

Indicație. Metoda 1. Avem $A'B$ = diagonala unei fețe: $A'B = 26$; AA' = înălțimea prisme, pe care o notăm cu x .

$MO = \frac{x}{2}$; OB = raza cercului circumscris triunghiului ABC ; MB = raza sferei = 14.

Din $\triangle MOB \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 = R^2 - r^2$; $\frac{x^2}{4} = R^2 - r^2$, adică $x^2 = 4R^2 - 4r^2$

$$(1) \quad x^2 = 4 \cdot 196 - 4r^2.$$

Din $\triangle ABA'$ avem:

$$x^2 = A'B^2 - AB^2 = 26^2 - AB^2 = 676 - AB^2,$$

dar $AB = l_3 = r\sqrt{3}$, deci:

$$(2) \quad x^2 = 676 - 3r^2.$$

Din relațiile (1) și (2) avem: $676 - 3r^2 = 4 \cdot 196 - 4r^2$; $r = 6\sqrt{3}$, de unde $l_3 = r\sqrt{3} = 18$ cm.

Metoda a 2-a. $A'B = 26$ cm = diagonala feței; $MO = x$; $A'A$ = înălțimea prisme = $2x$; MB = raza sferei = 14 cm; $OB = y$ = raza cercului circumscris triunghiului de bază al prisme.

Din triunghiul dreptunghic MOB avem:

$$(1) \quad MO^2 + OB^2 = MB^2$$

sau:

$$(1) \quad x^2 + y^2 = 196.$$

Din triunghiul dreptunghic $A'AB$ avem:

$$(2) \quad A'A^2 + AB^2 = A'B^2$$

$$(2) \quad 4x^2 + 3y^2 = 676 \text{ (fiindcă } AB = l_3 = r\sqrt{3}).$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 196 \\ 4x^2 + 3y^2 = 676. \end{cases}$$

Obținem $y^2 = 108$, de unde $AB^2 = 3y^2 = 324$, iar $AB = 18$.

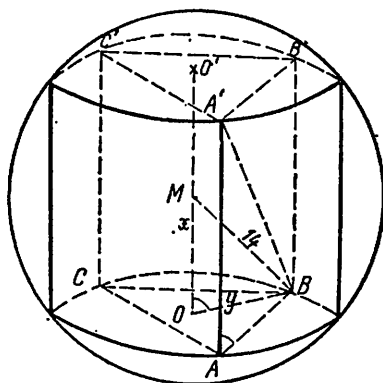


Fig. II.6

62. O piesă este compusă dintr-un vas cilindric $ABCD$ (secțiune) cu diametrul de 0,20 m, care este introdus într-un alt vas de forma unui trunchi de con, $ABFE$ (secțiune) ce are generatoarea de 0,9 m (fig. II.7).

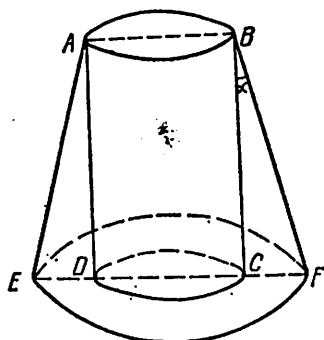


Fig. II.7

Știind că generatoarea trunchiului de con face cu înălțimea cilindrului un unghi de 10° , să se afle capacitatea vasului în formă de trunchi de con.

Indicație. $CF = 0,9 \cdot (\sin 10^\circ) = 0,9 \cdot 0,174 = 0,15$;
 EF (diametrul mare) $= DC + 2CF = 0,20 + 0,30 = 0,50$ m.

$R = 0,25$ m, $I = BC = 0,9 \cos 10^\circ = 0,88$;

$$V \text{ (trunchiul de con)} = \frac{\pi \cdot I}{3} (R^2 + r^2 + Rr) = \\ = \frac{3,14 \cdot 0,88}{3} (0,0625 + 0,01 + 0,025).$$

Volumul aflat în m^3 se transformă în dm^3 și se află astfel capacitatea ținând seama că $1 dm^3 = 1 l$.

Se obține $V = 89 dm^3 \Rightarrow$ capacitatea $\approx 90 l$.

63. Un buștean lung de 5 m ce are un cubaj de $1,6 m^3$ se taie printr-o secțiune paralelă cu baza, dusă pe la mijlocul lungimii sale. Să se afle diametrul secțiunii.

Indicație. Folosim formula

$V = C^2 L \cdot \frac{1}{4\pi}$, unde C este lungimea cercului mijlociu, iar $\frac{1}{4\pi}$ are valoarea aproximativă 0,08, deci $1,6 = C^2 \cdot 5 \cdot 0,08$, de unde $C^2 = 1,6 : 0,4 = 4$, iar $C = 2$ m. Diametrul va fi $2 : 3,14 \approx 0,64$ m.

R. $D \approx 0,64$ m.

64. Un trunchi de con circular drept are $r = 3$ cm, $R = 8$ cm și înălțimea de 12 cm.

Să se calculeze volumul și aria laterală.

R. $388\pi cm^3$; $143\pi cm^2$.

65. Un trunchi de con are generatoarea de 26 cm, raza mare de 15 cm și înălțimea de 24 cm. Să se calculeze volumul conului complet.

R. $2700\pi cm^3$.

66. Într-un trunchi de con se dau raza mare de 5 cm, raza mică de 3 cm, iar înălțimea de 12 cm. Din el sînt tăiate două conuri, astfel încît generatoarele unuia sînt în continuare cu generatoarele celuilalt. Să se determine volumul părții rămase (fig. II.8).

Indicație. Notăm cu i înălțimea conului ABE și cu I înălțimea conului DEC .

Din figură avem $i + I = H$, iar din asemănarea triunghiurilor AGE și EFC obținem:

$$\frac{r}{R} = \frac{i}{I}.$$

Ținînd seama de proprietatea proporțiilor, obținem:

$$\frac{r}{R+r} = \frac{i}{I+i}$$

dar $I + i = H$; atunci:

$$\frac{r}{R+r} = \frac{i}{H}, \text{ de unde } i = 4,5 \text{ cm,}$$

$$\text{apoi } I = H - i = H - \frac{rH}{R+r} = \frac{60}{8} = 7,5 \text{ cm.}$$

Cunoaștem elementele conurilor, necesare pentru aflarea volumelor.
Din volumul trunchiului scădem suma volumelor celor două conuri:

$$V_{tr.} = \frac{12\pi}{3}(25 + 9 + 15) = 196\pi \text{ cm}^3.$$

$$V_1 = \frac{25\pi}{3} \cdot 7,5 = 62,500 \pi \text{ cm}^3; V_2 = \frac{9\pi}{3} \cdot 4,5 = 13,5\pi \text{ cm}^3.$$

$$V_1 + V_2 = 76\pi \text{ cm}^3.$$

$$\text{Partea rămasă} = 196\pi - 76\pi = 120\pi \text{ cm}^3.$$

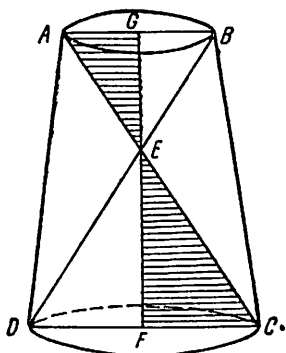


Fig. 11.8

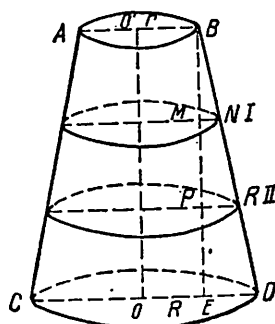


Fig. 11.9

67. Un trunchi de con are înălțimea de 18 cm, iar razele bazelor de 5 cm și 11 cm. Înălțimea este împărțită în trei părți egale de către două plane paralele cu bazele. Să se afle ariile secțiunilor (fig. 11.9).

Indicație. Secționând trunchiul cu un plan axial, obținem trapezul ABCD. Coborând înălțimea din B pe DC, se formează triunghiurile dreptunghice:

- 1) $BED \sim BMN$; 2) $BED \sim BPR$.

Se obțin razele secțiunilor și ariile lor.

$$\text{R. } 49\pi \text{ cm}^2; 81\pi \text{ cm}^2.$$

68. Trunchiul de con cu razele de 3 m și 5 m și un con de aceeași înălțime au volumele egale. Să se afle raza bazei conului.

$$\text{R. } 7 \text{ cm.}$$

69. Să se afle volumul solidului născut prin rotația completă a unui hexagon regulat cu latura de 2 cm în jurul unei laturi (fig. 11.10).

Rezolvare. 1° Trunchiul de con $ABB'A'$ născut din rotirea laturii AB are

$$\text{Raza cercului mare } R = BF = l_3 = AB\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ cm.}$$

$$\text{Raza cercului mic } r = AM = LF = \frac{2\sqrt{3}}{2} \text{ cm} = \sqrt{3} \text{ cm; } h = MF = AL = 1 \text{ cm.}$$

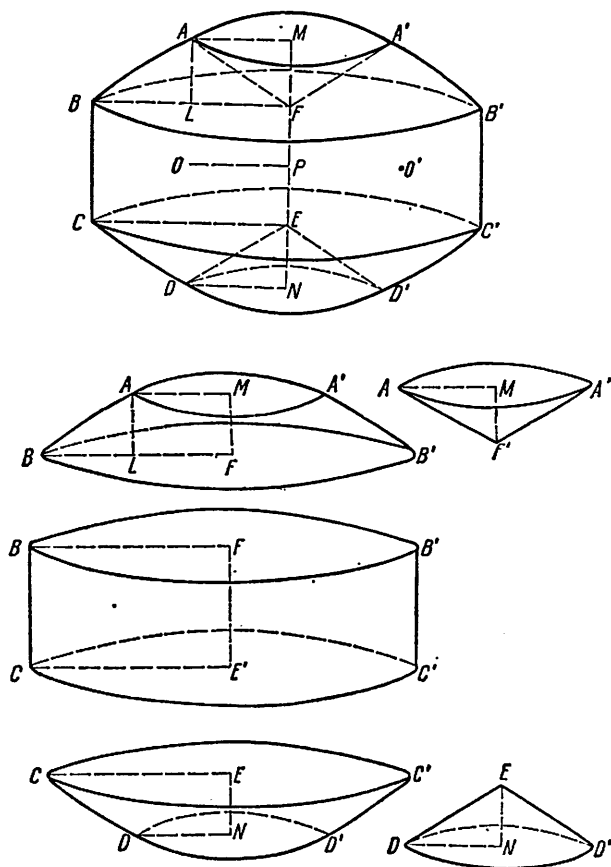


Fig. II.10

Volumul $V_1 = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr) = \frac{\pi \cdot 1}{3} (12 + 3 + 6) = 7\pi \text{ cm}^3$.

2° Cilindrul $BCB'C'$ născut din rotirea laturii BC are raza

$R = BF = 2\sqrt{3} \text{ cm}$, înălțimea $H = EF = BC = 2 \text{ cm}$, iar volumul:

$$V_2 = \pi R^2 \cdot H = 24\pi \text{ cm}^3.$$

3° Volumul conului FAA' născut din rotirea laturii AF are

raza cercului de bază $r = AM = \sqrt{3} \text{ cm}$. Înălțimea $FM = 1 \text{ cm}$, deci volumul

$$V_3 = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi 3 \cdot 1}{3} = \pi \text{ cm}^3.$$

4° Corpul născut prin rotirea hexagonului este format astfel:

$$V = 2 \cdot V_1 + V_2 - 2V_3 = 14\pi + 24\pi - 2\pi = 36\pi \text{ cm}^3 \approx 113,04 \text{ cm}^3.$$

70. Pe laturile AB și BC ale pătratului $ABCD$ se găsesc punctele E și F astfel încît $\frac{AE}{EB} = \frac{BF}{FC} = \frac{3}{4}$.

Cunoscînd că aria triunghiului EFD este de 74 m^2 să se calculeze volumul piramidei care are ca bază pătratul $ABCD$ și înălțimea $6/7$ din latura pătratului de bază.

2) Se face în piramidă o secțiune paralelă cu baza ce împarte înălțimea în raportul de $1/3$ față de vîrf. Să se afle aria laterală a trunchiului de piramidă ce se formează.

R. 784 m^2 .

71. Într-un triunghi dreptunghic isoscel ABC ($\hat{A} = 90^\circ$). Se duce bisectoarea $AD = a$ ($D \in BC$) și din D se duce bisectoarea DE a unghiului ADC ($E \in AC$). Se cere:

1) Perimetrul patrulaterului $ABDE$.

2) Să se arate că $AB \parallel DE$.

3) Să se calculeze volumul corpului format prin rotirea completă a triunghiului ABC în jurul lui BC .

R. 1) $a(1 + 2\sqrt{2})$

3) $\frac{2\pi a^3}{3}$.

72. Pentru construcția unui pilon de beton necesar la podul de peste Dunăre s-au întrebuințat următoarele materiale:

a) cimentul reprezintă $\frac{1}{4}$ din masa lui și încă 500 chintale;

b) pietrișul și nisipul reprezintă $\frac{2}{5}$ din masa pilonului și încă 800 chintale exceptînd masa cimentului;

c) fier beton cu masa de 2 500 chintale.

Pilonul are forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată avînd raportul laturilor bazelor $\frac{1}{3}$, aria totală 210 m^2 și aria laterală 120 m^2 .

Se cere:

1) Să se calculeze masa totală a pilonului.

2) Volumul acestui pilon.

R. $\approx 10\,857$ chintale, 156 m^3 .

73. Un teren de forma unui triunghi dreptunghic cu latura cea mai mare de 24 dam era folosit astfel:

$\frac{1}{3}$ din el și încă 10 dam² pentru teren de sport;

$\frac{2}{9}$ din restul terenului pentru parcat mașinile agricole.

Restul de 0,42 hectare pentru cultivat zarzavaturi.

Terenul a fost amenajat pentru construcția unei școli ce ocupă o suprafață pătratică cu două vîrfuri pe catetele triunghiului dreptunghic și două vîrfuri pe ipotenuză.

Se cere:

1) Să se afle aria întregului teren.

2) Suprafața ocupată de clădirea școlii.

3) Cît la sută reprezintă suprafața ocupată de școală din suprafața ce era ocupată inițial de terenul de sport.

4) Clădirea școlii fiind de forma unui paralelipiped cu aria laterală de $2\,940 \text{ m}^2$, să se afle volumul școlii.

R. 1) 96 dam², 3) $\approx 85\%$,

2) 36 dam², 4) 44 100 cm³.

74. Un teren în forma unui triunghi dreptunghic avînd latura cea mai mică de 25 m a fost folosit astfel:

$\frac{1}{3}$ din suprafața terenului și încă 10 m² pentru un teren de sport,

$\frac{2}{7}$ din suprafața rămasă, pentru parcat mașinile agricole, iar 350 m²

s-au folosit pentru cultivat diverse zarzavaturi. S-a amenajat acest teren pentru a se construi pe el o creșă de forma unui cub avînd unul din colțuri comun cu unghiul drept al terenului, iar un colț al clădirii pe ipotenuza triunghiului dreptunghic.

Se cere:

1) Aria terenului și perimetrul lui.

2) Cît la sută reprezintă suprafața ocupată de clădire din suprafața întregului teren.

3) Volumul clădirii.

R. 1) 750 m², 150 m; 2) $\approx 41,5\%$; 3) $\approx 5\,495\text{ m}^3$.

75. O locuință personală de forma unui paralelipiped dreptunghic s-a construit pe un teren de forma unui triunghi isoscel, avînd un unghi comun, iar una din muchiile clădirii pe lungimea cea mai mare a terenului. Înălțimea clădirii este de $\frac{2}{5}$ din perimetrul bazei clădirii. Înainte de construcția clădirii, terenul era folosit pentru cultivat zarzavaturi, astfel:

$\frac{1}{4}$ din suprafață și încă 9 m² pentru cultivat ceapă, $0,3$ din terenul rămas cultivat cu roșii, iar restul terenului de 94 m² era cultivat cu cartofi.

Se cere:

1) Aria terenului.

2) Aria laterală a clădirii.

R. 1) 200 m²;

2) 640 m².

76. Un teren de forma unui trapez isoscel, cu baza mare 54 m, baza mică 24 m a fost împrejmuit cu gard astfel:

În prima zi cu 4 m mai puțin decît 25% din perimetrul lui;
a doua zi 50% din perimetrul rămas; iar a treia zi, restul de 50 m. Suprafața terenului a fost împărțită în trei parcele invers proporționale cu numerele 6; $\frac{2}{3}$ și 0,375.

Pe cele două parcele mai mici s-au cultivat zarzavaturi iar pe parcela cea mai mare s-a construit o cisternă, pentru apă, de forma unui trunchi de con cu aria totală de 108 πm^2 , aria laterală de 50 πm^2 , iar raportul razelor bazelor sale de $\frac{3}{7}$ (cisterna-trunchi de con este cu baza mică în sus).

Se cere:

1) Aria terenului;

2) Aria celor trei parcele;

3) Câți litri de apă s-au pompat în cisternă, dacă apa s-a ridicat pînă la 75% din înălțimea ei, față de bază.

R. 1) 780 m²,

2) 30 m², 270 m², 480 m²,

3) 219 125 litri.

77. Un triunghi dreptunghic ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) are $AB = 6$ cm și $BC = 12$ cm. Se duce mediana AM . Înălțimea BP a triunghiului ABM intersectează pe AC în D , iar prelungirea lui MD taie pe AB în N . Se cunoaște că $\frac{PD}{BP} = \frac{1}{3}$.

Se cere:

1) Aria triunghiului MNB .

2) Să se arate că aria triunghiului MDC este a treia parte din aria triunghiului ABC .

3) Să se arate că $\triangle NDC$ este isoscel.

4) Să se arate că $\triangle BNC$ este echilateral.

5) Volumul corpului format din rotația completă a triunghiului ABC în jurul lui BC .

R. 1) $18\sqrt{3}$ cm²,

5) 108π cm³.

78. Un teren agricol de formă dreptunghiulară are lungimea cu 1 km mai mare decît lățimea, iar perimetrul lui este egal cu perimetrul unui alt teren de forma unui pătrat cu aria 15 625 ha.

Terenul se împarte în trei parcele astfel încît raportul primelor două este de $\frac{3}{4}$, iar al ultimelor două $\frac{4}{5}$.

Pe parcela cea mai mică s-au cultivat roșii, cartofi și mazăre, proporțional cu numerele $\frac{1}{3}$; 0,(6) și $\frac{4}{9}$. Parcela cea mai mare a fost cultivată cu grâu, iar cealaltă cultivată cu porumb.

Se cere:

1) Ariile celor trei parcele.

2) Suprafețele cultivate cu roșii, cartofi, mazăre.

3) Cît la sută din suprafața totală reprezintă suprafața ocupată prin construirea unui siloz de forma unui paralelipiped dreptunghic cu înălțimea cît $\frac{5}{3}$ din lățime, lățimea $\frac{3}{4}$ din lungime și suma tuturor muchiilor sale egale cu suma muchiilor unui cub cu aria totală de 96 dam².

4) Să se calculeze volumul silozului.

R. 1) 39 km²; 52 km²; 65 km²;

2) 9 km²; 18 km²; 12 km²;

3) $\frac{1}{1\ 300}\%$;

4) 60 dam³.

79. Pe două semidrepte Ox și Oy făcînd un unghi $xOy = 120^\circ$ se iau două segmente egale $OA = OB = a$, iar pe perpendiculara în O pe planul xOy se ia un segment OC egal cu diagonala pătratului de latură a .
- 1) Să se demonstreze că ABC e echilateral;
 - 2) Să se afle aria totală și volumul piramidei $COAB$;
 - 3) Aria triunghiului ABP (P fiind mijlocul segmentului OC);
 - 4) Aria și volumul corpului obținut prin rotația completă a triunghiului ABP în jurul lui AB (a se socotește exprimat în cm).

$$R. 2) \text{ Aria tot.} = a^2 (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \text{ cm}^2.$$

$$\text{Vol.} = \frac{a^3 \cdot \sqrt{6}}{12} \text{ cm}^3.$$

$$3) \text{ Aria } (ABP) = \frac{3a^2}{4} \text{ cm}^2.$$

$$4) \text{ Aria solid.} = \frac{3\sqrt{2} \pi a^2}{2} \text{ cm}^2.$$

$$\text{Vol.} = \frac{\sqrt{3} \pi a^3}{4} \text{ cm}^3.$$

80. Un trunchi de con cu aria laterală de $100 \pi \text{ cm}^2$ este circumscris unei sfere cu raza de 4 cm.

Se cere aria totală a cilindrului înscris în trunchiul de con cu una din baze comună cu baza mică a trunchiului de con și cu aceeași înălțime ca și trunchiul de con.

$$R. 40\pi \text{ cm}^2.$$

81. O piramidă cu vârful în V are ca bază un romb $ABCD$ cu unghiul $\hat{A} = 60^\circ$ și diagonala $BD = 4a$. Înălțimea $VO = 2a\sqrt{3}$ (O centrul rombului). Din această piramidă se scoate un con circular drept cu același vîrf, iar baza un cerc cu centrul O , raza conului fiind jumătate din raza cercului înscris în romb (a este socotit în cm).

Se cere:

- 1) Volumul și aria laterală a piramidei;
- 2) Cît la sută reprezintă volumul conului din volumul piramidei;
- 3) Lungimile muchiilor VA și VB ;
- 4) Unghiul format de muchiile VA și VB cu planul bazei.

$$R. 1) 16a^3 \text{ cm}^3; \text{ Aria lat.} = 8a^2 \sqrt{15} \text{ cm}^2;$$

$$2) \approx 17\%;$$

$$3) VA = 2a\sqrt{6} \text{ cm}; VB = 4a \text{ cm};$$

$$4) 45^\circ; 60^\circ.$$

82. Un trapez $ABCD$ are baza mare $BC = 30 \text{ cm}$, baza mică $AD = 9 \text{ cm}$, $AB = 10 \text{ cm}$ și $CD = 17 \text{ cm}$.

Se cere:

- 1) Aria trapezului.
- 2) Să se construiască acest trapez.
- 3) Să se afle aria triunghiului ce se formează prin prelungirea laturilor neoparalele avînd ca bază baza mare a trapezului.
- 4) Să se afle volumul corpului format prin rotația completă a trapezului în jurul bazei mari.

$$R. 1) 156 \text{ cm}^2;$$

$$3) 171 \frac{3}{7} \text{ cm}^2;$$

$$4) V = 1024\pi \text{ cm}^3.$$

83. O cisternă de formă sferică pentru vin este montată într-un suport de beton de formă conică, așa fel încît cisterna este tangentă la generatoarele și baza conului.

Generatoarea conului este de 25% din înălțimea lui plus 8 m, iar raportul acestora este de $\frac{5}{4}$.

Pentru a umple vasul cu vin era necesar un număr de pompe ce trebuiau să funcționeze un anumit număr de ore.

S-au adus încă 4 pompe în plus și vasul s-a umplut cu 2 ore mai devreme. Dacă inițial ar fi fost cu 2 pompe mai puțin decît în plan atunci vasul s-ar fi umplut cu două ore mai tîrziu.

Se cere:

- 1) Capacitatea cisternei.
- 2) Cite pompe erau necesare pentru a umple vasul conform planului și în cîte ore.

R. 1) 36π Kl.

2) 8 pompe; 6 ore.

84. Aria secțiunii axiale a unui trunchi de con este de $5\,500\text{ cm}^2$; $3\frac{1}{3}\%$

din raza bazei mici este cu 79 cm mai mică decît raza bazei mari, iar diferența acestor raze este de 50 cm.

Se cere:

1) La ce distanță de planul bazei mici se întîlnește generatoarea cu axa conului din care face parte trunchiul.

2) Să se determine unghiul format de generatoare cu planul bazei mari și de asemenea să se calculeze unghiul ce se formează la vîrfurile conului din care face parte trunchiul.

3) Turnînd apă într-un vas de forma și dimensiunile trunchiului de con considerat, pînă la o înălțime egală cu 40% din înălțimea trunchiului de con față de baza mare, să se calculeze ce cantitate de apă în litri este turnată în vas.

R. 1) 30 cm; 2) 38,726 l.

85. Secțiunea axială a unui trunchi de con este un trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare.

Razele bazelor sînt în raport de $\frac{1}{2}$, iar suma lor este de 12 cm.

Se cere:

1) Să se calculeze aria laterală a trunchiului de con.

2) Să se calculeze volumul conului întreg din care face parte trunchiul dat.

R. 1) $48\sqrt{10}\text{ cm}^2$,

2) $512\pi\text{ cm}^3$.

86. Un teren în formă de dreptunghi $ABCD$ este folosit astfel: $0,375$ din suprafața lui și încă 10 m^2 pentru teren de sport; $\frac{2}{5}$ din restul suprafe-

ței, și încă 4 m^2 pentru răsaduri de flori. Restul terenului de 140 m^2 este folosit pentru parcat mașinile agricole.

Se face pe acest teren un șanț de canalizare pe direcția bisectoarei dusă din B care intersectează latura AD în punctul P . Se știe că raportul ariilor ABP și $ABCD$ este $\frac{1}{4}$.

Se cere:

- 1) Aria terenului.
- 2) Să se calculeze dimensiunile terenului.
- 3) Să se calculeze lungimea șanțului.

R. 1) 400 m^2 ;
2) $10\sqrt{2} \text{ m}$; $20\sqrt{2} \text{ m}$;
3) 20 m .

87. Într-o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ latura bazei este cît media proporțională a numerelor 6 și $8\frac{1}{6}$. În această piramidă se face o secțiune $A'B'C'D'$ paralelă cu baza avînd latura de 5 cm. Diagonala BD' a trunchiului de piramidă ce se formează este cît baza de numerație a numărului 65 care scris în baza zece este 59.

Se cere:

- 1) Aria secțiunii diagonale $B'D'BD$.
- 2) Volumul piramidei.

R. 1) $18\sqrt{2} \text{ cm}^2$;
2) $V = 171,5 \text{ cm}^3$

88. Pe un teren de forma unui trapez isoscel cu perimetrul de 48 m și baza mică de 6 m s-a construit o cisternă cilindrică avînd baza tangentă la laturile trapezului. Înălțimea cisternei este $\frac{2}{\sqrt{3}}$ din raza cercului.

Să se afle:

- 1) Aria terenului.
- 2) Volumul cisternei.

R. $72\sqrt{3} \text{ cm}^2$; $162 \pi \text{ m}^3$.

89. Media aritmetică a dimensiunilor bazei unui paralelipiped dreptunghic este 20 cm; $\frac{2}{3}$ din dimensiunea cea mai mare a bazei, micșorată apoi cu 25% din ea este cît dimensiunea cea mai mică a bazei paralelipipedului micșorată cu 6 cm. Muchia paralelipipedului este — în cm — media proporțională a numerelor 20 și 5. Pe lungimea AD a dreptunghiului $ABCD$, baza paralelipipedului, se ia un punct N așa fel încît $NA/ND = 7$, iar pe lungimea BC , opusă lui AD se ia un alt punct M așa fel încît $MB/MC = 3/5$. Să se calculeze:

- 1) dimensiunile paralelipipedului;
- 2) cît la sută reprezintă dimensiunea cea mai mare din dimensiunea cea mai mică a bazei paralelipipedului;
- 3) diagonala paralelipipedului (cu aproximație în minus de o zecime);
- 4) lungimea segmentului MN ;
- 5) cu cît trebuie prelungite laturile dreptunghiului pentru a intersecta prelungirile segmentului MN în ambele sensuri.

R. 1) 24 cm, 16 cm, 10 cm;
2) 150%; 3) 30,5 cm.
4) $MN = 20 \text{ cm}$;
5) 4 cm; 12 cm.

90. Baza unei piramide este un triunghi ale cărui laturi sînt invers proporționale cu numerele $\frac{1}{40}$, $\frac{1}{74}$ și $\frac{1}{102}$, iar diferența dintre latura cea mai mare și cea mai mică a triunghiului este 31 cm; înălțimea piramidei este cu 25% mai mare decît înălțimea triunghiului de bază referitoare la latura cea mai mare a triunghiului. Se face o secțiune paralelă cu baza piramidei, secțiune al cărei perimetru este 0,54 m.

Să se calculeze:

- 1) laturile triunghiului de bază a piramidei;
- 2) laturile triunghiului de secțiune;
- 3) cît la sută reprezintă latura cea mai mică a triunghiului de bază din latura cea mai mică a secțiunii;
- 4) să se afle volumul piramidei inițiale.

R. 1) 20 cm, 37 cm, 51 cm;
2) 10 cm, 18,5 cm, 25,5 cm;
3) 200%; 4) 1 530 cm³.

91. Perimetrul bazei unei piramide triunghiulare regulate este de $18\sqrt{3}$ cm iar muchia laterală formează cu planul bazei un unghi de 45°. La $\frac{2}{3}$ din înălțime față de bază se face o secțiune paralelă cu baza piramidei. Să se calculeze:

- 1) media aritmetică între latura bazei piramidei și înălțimea piramidei;
- 2) volumul piramidei;
- 3) volumul piramidei avînd ca bază secțiunea efectuată;
- 4) raportul volumelor celor două piramide;
- 5) cît la sută reprezintă aria bazei piramidei inițiale din aria bazei piramidei a doua?

R. 1) $3(\sqrt{3} + 1)$; 2) $54\sqrt{3}$ cm³; 3) $2\sqrt{3}$ cm³;
4) $\frac{1}{27}$; 5) 900%.

92. O piramidă are ca bază un triunghi ABC ale cărui laturi sînt proporționale cu numerele 12, 16, 20, iar diferența dintre latura cea mai mare și cea mai mică este 2 cm; înălțimea piramidei este cu 0,8(3) cm mai mare decît înălțimea triunghiului de bază referitoare la latura cea mai mare a triunghiului. Se face o secțiune paralelă cu baza piramidei al cărei perimetru este 0,04 m.

Să se calculeze:

- 1) laturile triunghiului de bază a piramidei;
- 2) laturile triunghiului de secțiune făcută în piramidă;
- 3) înălțimea triunghiului de bază referitoare la latura cea mai mare;
- 4) volumul piramidei inițiale;
- 5) cît la sută reprezintă latura cea mai mică a triunghiului de bază din latura cea mai mică a triunghiului de secțiune?

R. 1) 3 cm, 4 cm, 5 cm;
2) 1 cm; $1\frac{1}{3}$ cm; $1\frac{2}{3}$ cm;
3) 2,4 cm; 4) 6,5 cm³; 5) 300%.

93. O piramidă are ca bază un triunghi al cărui perimetru este 15 cm laturile lui sînt trei numere consecutive. Se face o secțiune paralelă cu baza, avînd latura cea mai mare a triunghiului de secțiune de 1,5 cm. Să se calculeze:

- 1) laturile bazei piramidei;
- 2) perimetrul triunghiului de secțiune;
- 3) media proporțională între laturile mijlocii ale triunghiului de bază și cel de secțiune.

R. 1) 4 cm, 5 cm, 6 cm;

2) 3,75 cm; 3) 2,5.

94. O prismă dreaptă are ca bază un dreptunghi $ABCD$ cu lungimea AB egală cu 133,(3)% din lățimea BC , iar înălțimea prisme este cu 25% mai mare decât dimensiunea cea mai mare a bazei. 0,125 din lungimea dreptunghiului este cu 1 cm mai mică decât $33\frac{1}{3}\%$ din lățimea lui. Din punctele A și C se duce câte o perpendiculară pe diagonala BD a dreptunghiului. Figura $AA'CC'$ este baza unei alte prisme drepte cu aceeași înălțime ca și prima prismă (A' și C' sint picioarele perpendicularelor duse pe diagonala BD , A' și $C' \in BD$). Să se afle:

- 1) volumul prisme inițiale;
- 2) să se arate că $AA'CC'$ este un paralelogram;
- 3) să se determine laturile și diagonalele paralelogramului $AA'CC'$;
- 4) să se calculeze unghiul format de diagonala prisme inițiale cu planul bazei.

R. 1) $V = 480 \text{ cm}^3$;

3) $AA' = 4,8 \text{ cm}$; $AC' = \sqrt{30,28} \text{ cm}$;

$AC = 10 \text{ cm}$; $A'C' = 2,8 \text{ cm}$;

4) 45° .

95. Latura bazei unei piramide patrulatere regulate este $a \text{ cm}$; muchia piramidei face cu planul bazei un unghi de 60° . Se face o secțiune paralelă cu baza pe la mijlocul înălțimii. Să se afle raportul volumelor celor două corpuri formate prin această secțiune.

R. $\frac{1}{7}$.

96. $\frac{2}{7}$ din latura unei piramide patrulatere regulate este cu 2 cm mai mare decât 0,2 din latura unei prisme patrulatere regulate înscrisă în piramidă, cu baza pe planul bazei piramidei. Raportul dintre latura bazei piramidei micșorată cu un sfert din dublul laturii piramidei și latura prisme micșorată cu 3 cm este 1. Diagonala trunchiului de piramidă ce se formează prin înscrierea prisme este — în cm — media proporțională a numerelor 40,5 și 8. Să se afle:

- 1) volumul piramidei;
- 2) aria laterală a prisme.

R. 1) $V = 1\,372 \text{ cm}^3$; 2) Aria laterală = 240 cm^2 .

97. 25% din înălțimea unui con mărită cu 2 cm este cît 0,6 din generatoarea lui micșorată cu 2 cm, iar media lor aritmetică mărită cu 1 cm este cît cea mai mare dintre ele. Să se calculeze:

- 1) cît la sută reprezintă raza conului din raza unei sfere înscrisă în acest con;

- 2) volumul sferei înscrisă în con;
- 3) aria laterală a conului;
- 4) raportul volumelor sferei și conului.

R. 1) 200%; 2) $36\pi \text{ cm}^2$;
3) $60\pi \text{ cm}^2$; 4) $\frac{3}{8}$.

98. $\frac{1}{11}$ din raza bazei unui con este cu 8 cm mai mică decât raza unui cerc de secțiune paralelă cu baza conului făcută la o distanță de bază, egală cu media proporțională între numerele 144 și 9 (socotită în cm). Raportul razelor trunchiului de con format prin planul de secțiune este $\frac{5}{11}$, iar înălțimea trunchiului este împărțită de două plane de secțiune paralele cu bazele în trei părți egale. Să se afle razele cercurilor de secțiune.

R. (raza conului = 32 cm) 10 cm; 14 cm; 18 cm.

99. Să se afle aria unei sfere circumscrise paralelipipedului dreptunghic, cu dimensiunile invers proporționale cu numerele $0,25, \frac{1}{6}$ și $0,125$, iar diferența dintre suma dimensiunilor bazei paralelipipedului și muchia lui este de 1 cm.

Să se determine raportul dintre numărul care exprimă raza sferei și media proporțională dintre numerele 29 și 4.

R. $29\pi \text{ cm}^2$; $\frac{1}{4}$.

100. Suma dintre diagonalele unui paralelogram și una dintre laturile sale este 165 cm. Suma diagonalelor întrece cu 12 cm dublul acestei laturi a paralelogramului, iar diferența dintre această latură a paralelogramului și diagonala cea mai mică este de 11 cm.

1) Să se afle volumul piramidei care are ca bază acest paralelogram, iar înălțimea cît $33\frac{1}{3}\%$ din latura paralelogramului.

2) Cît la sută reprezintă diagonala mică a paralelogramului din înălțimea lui?

R. 1) $6\,936 \text{ cm}^3$; 2) $166,6\%$.

101. Într-o prismă cu baza un triunghi dreptunghic în care raportul catetelor este $\frac{3}{4}$ iar diferența dintre proiecțiile lor pe ipotenuză este de 2,8 cm, se înscrie un cilindru cu aceeași înălțime ca și prisma.

1) Să se calculeze raportul volumelor cilindrului și al prisme în care este înscris cilindrul.

2) Să se calculeze a patra proporțională între raza cilindrului, înălțimea triunghiului dreptunghic dusă din vârful unghiului drept și cateta cea mai mică.

R. 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) 14,4.

102. Un cub este înscris într-o piramidă patrulateră regulată astfel încît patru virfuri ale sale se află pe muchiile laterale ale piramidei, iar celelalte patru virfuri se află pe planul bazei.

- 1) Să se determine aria totală a cubului știind că 0,75 din latura bazei piramidei întrece cu 2 cm 0,125 din înălțimea ei, iar raportul acestora este $1/2$.
- 2) Să se arate că numărul care exprimă volumul piramidei este același cu cel ce exprimă aria totală a cubului.
- 3) În ce raport se află ariile bazelor cubului și piramidei?

$$R. \ 1) \ 42 \frac{2}{3} \text{ m}^2; \ 2) \ 42 \frac{2}{3} \text{ m}^3; \ 3) \ \frac{4}{9}.$$

103. Într-un con cu unghiul din vîrf de 90° se înscrie un cilindru. Diagonala secțiunii axiale (un pătrat) a cilindrului este $a\sqrt{2}$ cm. Baza cilindrului este pe planul bazei conului iar generatoarele lui întîlnesc generatoarele conului respectiv. Să se determine raportul dintre aria totală a cilindrului și aria laterală a conului.

$$R. \ \frac{2}{3\sqrt{2}}.$$

104. Într-un trunchi de con, diferența pătratelor celor două raze este 16, iar suma lor este 8 cm. Diferența razelor reprezintă 16,(6)% din înălțimea trunchiului. Din el se taie două conuri ce au ca baze, bazele trunchiului, iar generatoarele unuia sînt în prelungirea generatoarelor celuilalt. Să se determine:

- 1) Volumul trunchiului de con;
- 2) Cît la sută reprezintă înălțimea conului celui mare din înălțimea conului mic;
- 3) Raportul înălțimilor celor două conuri;
- 4) Să se determine raportul dintre volumul părții rămase după scoaterea celor două conuri și volumul trunchiului de con.

$$R. \ 1) \ 196\pi \text{ cm}^3; \ 2) \ 166,(6)\%;$$

$$3) \ \frac{3}{5}; \ 4) \ \frac{30}{49}.$$

105. Într-un triunghi ABC , $1/9$ din AC este cît $0,1$ din latura AB și $3/5$ din AB este cu 3 cm mai mare decît $0,3(3)$ din AC . Înălțimea BD este de 8 cm. Să se afle:

- 1) Perimetrul triunghiului ABC ;
- 2) Înălțimea dusă din vîrf C în triunghiul ABC ;
- 3) Triunghiul ABC este baza unei piramide cu înălțimea VA , această înălțime fiind cu 25% mai mare decît înălțimea BD a triunghiului de bază. Să se afle unghiul format de muchia VB cu latura AB a triunghiului de bază;
- 4) Să se afle volumul piramidei $VABC$.

$$R. \ 1) \ (19 + \sqrt{73}) \text{ cm}; \ 2) \ 7,2 \text{ cm}; \ 3) \ 45^\circ; \ 4) \ 120 \text{ cm}^3.$$

106. Baza unei prisme este un triunghi dreptunghic ABC ($\angle A = 90^\circ$) în care cateta AB este $0,75$ din AC iar de patru ori AC micșorată cu 7 cm este de trei ori mai mare decît AB . Înălțimea prisme întrece înălțimea AD a triunghiului de bază ($D \in BC$) de cinci ori. Se face o secțiune în prismă printr-un plan care trece prin muchia laterală BB' a prisme și prin bisectoarea BE a unghiului B al triunghiului de bază ($E \in AC$). Să se afle:

- 1) perimetrul triunghiului ABC ;
- 2) proiecțiile catetelor pe ipotenuza BC ;
- 3) volumul prisme cu baza BEC și cu aceeași înălțime ca și prisma inițială.

R. 1) 12 cm; 2) 1,8 cm; 3,2 cm; 3) 45 cm³.

107. O piramidă $VABC$ are ca bază un triunghi echilateral (ABC) și ca înălțime una dintre muchiile sale laterale VA . Suma muchiilor egale împreună cu perimetrul triunghiului de bază este 139,5 cm, iar raportul dintre latura triunghiului de bază și una din muchiile laterale egale este $\frac{2,5}{4}$. Pe latura AB a triunghiului de bază se ia un punct M ($M \in AB$) care împarte latura AB în raportul $2/7$. Din M se duce o paralelă la muchia VB , care taie înălțimea piramidei în N ($N \in VA$) și o paralelă MG la BC latura triunghiului de bază care taie latura AC a triunghiului în punctul G ($G \in AC$). Să se calculeze:

- 1) aria triunghiului MNG ;
- 2) volumul piramidei $VABC$.

R. 1) ≈ 19 cm²; 2) $V \approx 2\,050$ cm³.

108. Mediana BE dusă pe una din laturile egale ale unui triunghi isoscel ABC (cu baza BC) împarte perimetrul triunghiului în două părți: $AB + BE$ și $BC + CE$. Prima parte este mai mică decât a doua și raportul celor două părți este $\frac{7\frac{1}{2}}{8,5}$. Se cunoaște că $1/3$ din partea cea mai mică mărită cu $1/5$ din ea este cu 9 cm mai mică decât partea cea mai mare. Înălțimea AD și mediana BE se taie în G ($D \in BC$). Să se calculeze:

- 1) aria triunghiului ABC ;
- 2) să se demonstreze că patrulaterul $GECD$ este echivalent cu triunghiul ABG ;
- 3) să se calculeze înălțimea triunghiului AGE corespunzătoare laturii AE ;
- 4) să se calculeze aria și volumul corpului format prin rotația completă a triunghiului isoscel în jurul uneia dintre laturile egale.

R. 1) 48 cm²; 2) 16 cm²; 3) 3,2 cm;
4) $211,2\pi$ cm²; $307,2\pi$ cm³.

109. Într-un triunghi dreptunghic ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) cateta AB mărită cu 25% din ea este cu 13 cm mai mică decât suma catetelor triunghiului iar $0,125$ din AB este de 15 ori mai mică decât AC . Triunghiul ABC este baza unei piramide a cărei înălțime VA este $\frac{17}{60}$ din înălțimea AD a triunghiului ABC ($D \in BC$).

Se face o secțiune printr-un plan paralel cu baza la distanța de $17/20$ din înălțimea piramidei față de vîrf și o altă secțiune prin muchia VA și mediana AE relativă la ipotenuză ($E \in BC$). Să se afle:

- 1) Volumul trunchiului de piramidă format prin prima secțiune;
- 2) Aria triunghiului din secțiunea VAE .

R. 1) ≈ 70 cm³; 2) $38\frac{1}{2}$ cm².

110. Într-un romb $ABCD$ diagonala mică AC este $2\sqrt{5}$ cm iar suma dintre latura rombului și proiecția ei pe diagonala mare este de $5 + 2\sqrt{5}$ cm. Fie AN înălțimea dusă din A pe CD și AM înălțimea dusă din A pe BC ; apoi $AM \cap BD = \{E\}$ și $AN \cap BD = \{F\}$.

Să se calculeze:

- 1) aria rombului;
- 2) mărimea înălțimii rombului AM (sau AN), apoi valoarea rapoartelor AF/FN și OF/FD ;
- 3) să se arate că patrulaterul $MCNA$ este inscriptibil;
- 4) cât la sută reprezintă aria pentagonului $MCNFE$ din aria patrulaterului $MCNA$?
- 5) să se afle volumul piramidei ce are ca bază rombul $ABCD$ știind că muchia SA a piramidei este perpendiculară pe planul bazei și formează cu muchia SC a piramidei un unghi de 30° .

$$\text{R. } 1) 20 \text{ cm}^2; 2) AM = 4 \text{ cm}; \frac{AF}{FN} = \frac{5}{3}; \frac{OF}{FD} = \frac{1}{3};$$

$$4) 68,75\%; 5) \frac{40\sqrt{15}}{3} \text{ cm}^3.$$

111. Baza unei prisme drepte este un triunghi ABC . Pe prelungirea laturii AC se ia un punct D astfel ca $\angle BAC = \angle CBD$. Segmentul AD este de $2\frac{1}{2}$ ori mai mare decât segmentul CD , iar $AD + CD = 13$ cm. Latura BC a triunghiului ABC este de 2 cm, iar înălțimea prisme este $\sqrt{65}$ cm.

- 1) Să se arate că BD este media proporțională a segmentelor AD și CD .
- 2) Să se afle laturile triunghiului ABC .
- 3) Să se afle aria laterală a prisme.

$$\text{R. } 2) AB = \sqrt{10} \text{ cm}; AC = 5\frac{4}{7} \text{ cm};$$

$$3) \frac{53 + 7\sqrt{10}}{7} \cdot \sqrt{65} \text{ cm}^2.$$

112. Într-un cilindru circular drept este înscrisă o prismă cu baza un triunghi echilateral ABC având latura de $12\sqrt{3}$ cm. Din centrul O al bazei cilindrului se duce o paralelă OD la latura BC a triunghiului ($D \in AC$). Înălțimea prisme este $12\sqrt{3}$ cm și este egală cu înălțimea cilindrului. Să se afle:

- 1) volumul cilindrului;
- 2) volumul prisme cu baza ABC ;
- 3) notînd cu M piciorul perpendicularei dusă din O pe latura BC ($M \in BC$) să se afle volumul prisme avînd ca bază patrulaterul $ODCM$ și aceeași înălțime ca și cilindrul.

$$\text{R. } 1) 1728\sqrt{3} \pi \text{ cm}^3; 2) 3888 \text{ cm}^3; 3) 1080 \text{ cm}^3.$$

113. Una din laturile unui paralelogram este cu 11 cm mai mare decât diagonala mică a lui și 0,5 din diagonala mare micșorată cu 25% din diagonala mică este 27 cm. Suma dintre diferența menționată mai sus și latura considerată este 78 cm. Paralelogramul este baza unei piramide în care se face o secțiune paralelă cu baza ce împarte înălțimea

piramidei în raportul de $3/5$ socotit de la vîrf. Se știe că înălțimea piramidei este cu 25% mai mică decît diagonală mică a paralelogramului. Să se calculeze:

- 1) diagonalele paralelogramului;
- 2) volumul piramidei;
- 3) volumul piramidei care are ca bază secțiunea făcută în piramida inițială și vîrfurile comune.

R. 1) 40 cm, 74 cm; 2) 12 240 cm³;
3) 645,46875 cm³.

114. Într-un trapez dreptunghic $ABCD$ (BC baza mare) diagonală BD este perpendiculară pe latura ne paralelă CD . $0,125$ din înălțimea AB a trapezului este cu 1 cm mai mică decît 20% din CD . Raportul acestora este $4/5$ ($AB/CD = 4/5$). Se cere:

- 1) perimetrul trapezului $ABCD$;
- 2) aria triunghiului ACD ;
- 3) aria triunghiului DCE (E fiind punctul de intersecție al paralelei dusă din C la AB și prelungirea diagonalei mici BD);
- 4) distanța punctului A la latura CD ;
- 5) aria și volumul corpului format prin rotația completă a trapezului $ABCD$ în jurul bazei mici.

R. 1) $45\frac{1}{3}$ cm; 2) $42\frac{2}{3}$ cm²;

3) 37,5 cm²; 4) $8\frac{8}{15}$ cm;

5) $\frac{1\ 232\pi}{3}$ cm²; $\frac{2\ 816\pi}{3}$ cm³.

115. Într-o prismă dreptunghiulară oblică înălțimea $A'M$ a feței laterale $ABB'A'$ este și înălțimea prismei ($M \in AB$), iar $\frac{MA}{MB} = 1$. Lățimea dreptunghiului de bază este de 6 cm iar diferența dintre diagonală și lungimea dreptunghiului este de 2 cm. Segmentul ce unește vîrfurile A' cu O (punctul de intersecție al diagonalelor bazei) este de 5 cm. Să se afle:

- 1) volumul prisme;
- 2) unghiul format de muchia AA' cu latura AB a dreptunghiului de bază;
- 3) aria triunghiului AMO ;
- 4) volumul piramidei ce are ca bază triunghiul AMO și vîrfurile în A' .

R. 1) 192 cm³; 2) 45°; 3) 6 cm²; 4) 8 cm³.

116. Într-o piramidă dreptunghiulară cu muchiile laterale egale se cunosc următoarele date: 40% din diagonală bazei micșorată cu $0,1(6)$ din lățimea bazei este de două ori mai mică decît lățimea, iar diferența dintre diagonală și lățime este de 4 cm. Muchia piramidei face cu planul bazei un unghi de 60° . Se face o secțiune paralelă cu baza al cărei perimetru este de 7 cm. Să se afle:

- 1) cît la sută reprezintă diagonală bazei din lungimea bazei?
- 2) volumul piramidei inițiale;
- 3) volumul trunchiului de piramidă obținut prin secțiunea dată;

- 4) aria secțiunii diagonale a trunchiului de piramidă;
 5) diagonala trunchiului de piramidă.

R. 1) 125%; 2) $80\sqrt{3}$ cm³; 3) $\frac{315\sqrt{3}}{4}$ cm³;

4) $\frac{12,5 \cdot 15\sqrt{3}}{8}$ cm²; 5) $\frac{5\sqrt{13}}{2}$ cm.

117. Un turn de formă cilindrică are un acoperiș de formă unei piramide hexagonale regulate cu baza $ABCDEF$ și vârful V . Înălțimea cilindrului este de 20 m. Triunghiul VAD este echilateral. Baza superioară a cilindrului este un cerc înscris în hexagonul $ABCDEF$. Muchia laterală a piramidei este de $4\sqrt{3}$ m. Să se afle volumul cilindrului.

R. 180π m³.

118. Baza unei piramide este un triunghi dreptunghic ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) în care cunoaștem următoarele: bisectoarea unghiului B întâlnește cateta AC în E și este perpendiculară pe mediana AD ($D \in BC$), segmentul AE este de 6 cm. Înălțimea piramidei este muchia $VA = 10\sqrt{3}$ cm. Să se afle:

- 1) perimetrul triunghiului dreptunghic ABC ;
- 2) volumul piramidei $VABC$;
- 3) volumul piramidei $VABD$ (are ca bază triunghiul ABD și același vîrf ca și prima piramidă);
- 4) să se arate că jumătate din ipotenuza triunghiului ABC este medie proporțională între cateta cea mai mare a triunghiului și proiecția bisectoarei BE pe această catetă.

R. 1) $18(\sqrt{3} + 1)$ cm; 2) 540 cm³;
 3) 270 cm³.

119. Într-o prismă cu baza un trapez isoscel $ABCD$, în care linia mijlocie este de 6,5 cm și cu 2,5 cm mai mică decît baza mare, se înscrie un cilindru a cărui înălțime este egală cu 10 cm și egală cu înălțimea prisme. Se consideră apoi prisma care are ca bază triunghiul BOC (O fiind centrul cercului de bază a cilindrului) și aceeași înălțime cu prisma inițială, precum și corpul care are ca bază sectorul MON și aceeași înălțime ca a prisme (sau a cilindrului). Să se afle:

- 1) volumul prisme cu baza $ABCD$;
- 2) volumul cilindrului înscris;
- 3) volumul prisme cu baza BOC ;
- 4) volumul corpului care are ca bază sectorul MON .

R. 1) 390 cm³; 2) 90π cm³;
 3) 97,5 cm³; 4) $22,5\pi$ cm³.

120. O piramidă are ca bază un triunghi ABC în care $BC = 16$ cm, $AB = 10$ cm, iar înălțimea $AD = 8$ cm ($D \in BC$). Înălțimea piramidei este de 30 cm. Fie E, F, G respectiv mijloacele laturilor AB, AC și BC ale triunghiului ABC . Să se afle volumul piramidei care are ca bază patrulaterul $DEFG$ și același vîrf cu prima piramidă.

R. 200 cm³.

121. Un triunghi isoscel ABC ($AB = AC$) este înscris în cercul O a cărui rază mărită cu 20% este cît una din laturile egale ale triunghiului isoscel micșorată cu 25%, iar dublul razei cercului mărită cu 2 cm și apoi

împărțită la lungimea laturii considerate a triunghiului micșorată cu 2 cm dă citul 2. Fie BM înălțimea dusă din B pe AC și AE bisectoarea dusă din A pe BC ; $BM \cap AE = \{N\}$. Paralela dusă din A la BC intersectează perpendiculara dusă din B pe BC în D ; $BD \cap AD = \{D\}$. Se cere:

- 1) perimetrul patrulaterului $ABCD$;
- 2) înălțimea BM ;

$$3) \text{ să se demonstreze că } \frac{\hat{A}}{2} = \widehat{ABD} = \frac{\widehat{BOC}}{4};$$

$$4) \text{ să se arate că } BE^2 = \frac{BM \cdot BN}{2};$$

- 5) să se calculeze volumul corpului format prin rotația completă a triunghiului ABC în jurul laturii BC .

R. 1) 28,8 cm; 2) 7,68 cm; 5) $131, 072\pi \text{ cm}^3$.

122. Aria unui triunghi ABC este de 24 cm^2 . Punctul $D \in BC$ și M este mijlocul lui AD . Fie E și F simetricele punctului M față de AB și AC , $ME \cap AB = \{H\}$ și $MF \cap AC = \{N\}$. Proiecția laturii AB pe latura BC a triunghiului este segmentul BG ($G \in BC$). Se cunoaște că $2/3$ din lungimea BC este cu 0,5 dm mai mare decât segmentul BG și $4/3$ din BG este cit jumătate din BC micșorată cu $\frac{1}{6}$ din aceasta.

Se cere:

- 1) să se arate că aria $AMB + \text{aria } AMC = 1/2$ aria ABC ;
- 2) să se arate că aria patrulaterului $ANMH$ este $\frac{1}{2}$ din aria patrulaterului $AEMF$;
- 3) să se calculeze volumul corpului format prin rotația completă a triunghiului ABC în jurul laturii BC .

R. 3) $64\pi \text{ cm}^3$.

123. Într-un trapez $ABCD$ ($AB = \text{baza mare}$) diagonalele AC și BD se întâlnesc în punctul O . Aria triunghiului AOB este de 60 cm^2 . Se știe că 0,125 din baza mică este cu 0,3 dm mai mică decât 20% din baza mare, iar raportul mărimilor celor două baze este $5/2$. Se cere:

- 1) lungimea liniei mijlocii a trapezului;
- 2) să se demonstreze că triunghiurile AOD și BOC sint echivalente; la fel pentru triunghiurile ADC și DBC ;
- 3) aria trapezului;
- 4) volumul corpului format prin rotația completă a triunghiului AOB în jurul laturii AB (baza mare a trapezului);
- 5) să se construiască un dreptunghi echivalent cu trapezul $ABCD$;
- 6) printr-un punct M situat pe baza mică a trapezului să se ducă o dreaptă în interiorul trapezului așa fel ca să-l împartă în două părți echivalente.

R. 1) 14 cm; 3) $117,6 \text{ cm}^2$; 4) $240\pi \text{ cm}^3$.

124. Se dă un trapez isoscel $ABCD$ (AB este baza mare) circumscris unui cerc O a cărui rază este cu 3,5 cm mai mică decât linia mijlocie a trapezului și 0,3 din raza cercului mărită cu $2/3$ din ea este cu 1,7 cm mai mare decât 20% din linia mijlocie a trapezului. Raportul bazelor trapezului este $2/2,5$. Se cere:

- 1) aria trapezului $ABCD$;
- 2) să se arate (fără calcul) că linia mijlocie a trapezului este egală cu una din laturile neparalele ale trapezului;
- 3) să se arate că triunghiul COB este dreptunghic și aria lui este $1/4$ din aria trapezului;
- 4) notind cu M , respectiv N , mijloacele bazelor DC și AB ale trapezului să se arate că triunghiurile MOC și NOB sint asemenea;
- 5) să se arate că $MN^2 = DC \cdot AB$;
- 6) să se calculeze volumul corpului format prin rotația completă a trapezului în jurul bazei mari AB .

$$R. 1) 39 \text{ cm}^2; 6) \frac{676}{3} \pi \text{ cm}^2.$$

125. Într-un triunghi dreptunghic ABC ($\hat{A} = 90^\circ$; $\hat{B} > \hat{C}$) bisectoarea unghiului B taie mediana AD în M , iar cateta AC în N ($D \in BC$) și $0,6$ din unghiul B micșorat cu 25% din el este de 5 ori mai mare decât $1/6$ din unghiul C al triunghiului. Se cere:

- 1) lungimea laturilor triunghiului ABC cunoscind ipotenuza de $6\sqrt{3}$ cm;
- 2) să se arate că triunghiurile AMB și AMC sint echivalente;
- 3) să se arate că triunghiul ABD este echilateral, triunghiul BND este dreptunghic și triunghiul AND este isoscel;
- 4) să se afle volumul corpului format prin rotația completă a triunghiului ABC în jurul catetei AC .

$$R. 1) BC = 6\sqrt{3} \text{ cm}; AB = 3\sqrt{3} \text{ cm}; AC = 9 \text{ cm}; \\ 4) 81\pi \text{ cm}^3.$$

126. Într-un triunghi isoscel ABC ($AB = AC$) se cunoaște că $0,375$ din una din laturile egale ale triunghiului este cu 2 cm mai mare decât 20% din raza cercului O circumscris triunghiului și raportul dintre raza cercului și una din laturile egale este $2,5/4$. Fie AD înălțimea triunghiului isoscel. Prin O (centrul cercului), se duce o paralelă la AB care întâlnește pe BC în N iar pe AC în M ; fie M' simetricul punctului M față de BC și A' punctul de intersecție obținut prin prelungirea laturii AB și a dreptei pe care se află segmentul MM' . Se cere:

- 1) să se arate că triunghiul $AA'M$ este isoscel;
- 2) punctele N , D și M' sint coliniare;
- 3) cit la sută reprezintă mărimea razei cercului O din lungimea laturii AB a triunghiului isoscel?
- 3) volumul piramidei ce are ca bază triunghiul ABC știind că înălțimea piramidei este egală cu înălțimea AD a triunghiului ABC .

$$R. 3) 62,5\%; 4) 8,192 \text{ cm}^3.$$

127. Ipotenuza BC a unui triunghi dreptunghic ABC ($A = 90^\circ$) se împarte în opt părți egale și se notează cu M punctul cel mai apropiat de C . Se împarte cateta AC în 3 părți egale și se notează cu N punctul cel mai apropiat de C și cu D punctul cel mai apropiat de A . Prin D se duce o paralelă la BC , care taie pe AB în E ($E \in AB$). Se cunoaște că diferența dintre $0,4$ din ipotenuza BC și 25% din AC este 2 cm, iar triplul catetei AC comparată cu 20% din ipotenuza BC formează raportul $24/2$. Se cere:

- 1) a cîta parte din aria triunghiului ABC este aria triunghiurilor MNC și AED ?
- 2) să se demonstreze că triunghiul ADM este echivalent cu triunghiul MNC iar aria triunghiului AMC este cît întreitul ariei triunghiului MND ;
- 3) a cîta parte din aria triunghiului ABC este aria pentagonului $BMNDE$?
- 4) volumul corpului format prin rotația completă a triunghiului ABC în jurul ipotenuzei BC .

$$\text{R. 1) } \frac{1}{24} \text{ și } \frac{1}{9}; \text{ 3) } \frac{61}{72}; \text{ 4) } v = \frac{4,8^2 \pi 10}{3} \text{ cm}^3.$$

128. În trapezul $ABCD$ cu aria de 48 cm^2 , avînd baza mică AD , se duce $AE \parallel DC$, ($E \in BC$) astfel încît $\frac{CE}{EB} = \frac{1}{2}$. Se duce $DF \parallel AB$, ($F \in BC$); $DF \cap AE = \{M\}$. $DF \perp AE$ și punctul M este mijlocul segmentului DF . Se cunoaște că $2\sqrt{5}$ din baza mică este cu 1 cm mai mică decît 0,125 din perimetrul triunghiului ABE , iar dublul bazei mici mărită cu 2 cm este în raport de $1/2$ față de perimetrul triunghiului ABE . Se cere:

- 1) perimetrul trapezului;
- 2) să se arate că triunghiul ABE este dreptunghic;
- 3) să se arate că patrulaterul $ADEF$ este un romb;
- 4) să se arate că triunghiul ABF este isoscel;
- 5) O fiind punctul de intersecție al diagonalelor trapezului să se demonstreze că triunghiurile AOB și COD sint echivalente;
- 6) să se calculeze volumul și aria corpului format prin rotația triunghiului ABE în jurul laturii BE .

$$\text{R. 1) } 34 \text{ cm}; \text{ 6) } V = 76,8\pi \text{ cm}^3; \text{ aria} = 67,2\pi \text{ cm}^2.$$

129. Se consideră $ABCD$ romb (diagonala mare BD); latura AB mărită cu $\frac{3}{5}$ din ea este cu 5 cm mai mare decît BD micșorată cu 0,125 din ea. 25% din BD mărită de 3 ori comparată cu AB mărită cu 20% din ea dă raportul a cărui valoare este 1. Se duce $AM \perp BC$, ($M \in BC$) și $AN \perp CD$, ($N \in CD$) $AM \cap BD = \{E\}$ și $AN \cap BD = \{F\}$. Se cere:

- 1) a patra proporțională între diagonalele AC , BD și latura rombului;
- 2) O fiind punctul de intersecție al diagonalelor rombului să se arate că există relația:

$$\frac{2AO}{AM + AN} = \frac{OE + OF}{2CM}$$

- 3) aria și volumul corpului format prin rotația completă a triunghiului AOB în jurul laturii AB a rombului;
- 4) rombul dat fiind baza unei piramide a cărui înălțime este VO , să se calculeze volumul piramidei $VABCD$ știind că muchia VA este de 25 cm;
- 5) se face o secțiune $A'B'C'D'$ paralelă cu baza $ABCD$ la $3/4$ din înălțime față de bază, în piramida $VABCD$. Să se calculeze volumul piramidei $VA'B'C'D'$.

$$\text{R. 1) } \frac{100}{3} \text{ 3) } 420\pi \text{ cm}^2; \text{ 1 } 200\pi \text{ cm}^3; \\ \text{4) } 4\,000 \text{ cm}^3; \text{ 5) } 62,5 \text{ cm}^3$$

130. Fie punctele $A(0; -7)$ și $B(0; 5)$ într-un sistem de axe de coordonate ortogonale.

Prin A și B se duc dreptele d_1 și d_2 care fac cu sensul pozitiv al axei xx' unghiuri de 30° și respectiv de 120° ; $d_1 \cap d_2 = \{M\}$.

Triunghiul ABM este baza unei piramide $SABM$, în care $SA = SB = SM = x$ și unghiul ASB are 120° .

Să se afle: a) coordonatele punctului M ; b) suma muchiilor piramidei; c) volumul piramidei. (Dimensiunile în cm.)

$$\begin{aligned} \text{R.} \quad & \text{a) } M(2; 3\sqrt{3}) \\ & \text{b) } (18 + 18\sqrt{3}) \text{ cm;} \\ & \text{c) } 36 \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

131. Într-un plan P se dau două drepte perpendiculare d_1 și d_2 care se intersectează în O . Distanțele de la un punct M , nesituat în planul P , la dreptele d_1 și d_2 sînt egale cu $3a$ respectiv $4a$, iar distanța de la M la O este de $3a\sqrt{2}$.

Să se calculeze distanța de la M la planul P în funcție de a .

Indicație: Fie B proiecția lui M la planul P și A și C proiecțiile lui M pe d_1 și d_2 . Conform teoremei celor trei perpendiculare $BA \perp d_1$ și $BC \perp d_2$ și astfel $OABC$ este dreptunghi.

$$\text{R. } MB = a\sqrt{7}.$$

132. Într-un trunchi de con aria laterală este de $4\pi a^2$, înălțimea de a iar generatoarea sa este cît suma razelor bazelor. Să se calculeze în funcție de a razele bazelor și aria laterală a conului din care provine trunchiul.

Indicație: Se obține sistemul: $R + r = 2a$ și $R - r = a\sqrt{3}$.

$$\text{R. } R = a\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \quad r = a\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \quad Al = \frac{\pi a^2}{6} (12 + 7\sqrt{3}).$$

133. Într-o emisferă cu raza R se înscrie un con circular drept. a) La ce distanță x de bază trebuie dus un plan paralel cu baza astfel încît aria zonei sferice să fie egală cu aria laterală a trunchiului de con tăiat de conul înscris în emisferă. b) Să se indice o metodă grafică pentru construcția segmentului x .

Indicație: b) Se ridică o perpendiculară pe diametrul emisferei egală cu diametrul și din ea vom scădea apoi latura pătratului înscris în cercul de rază R și vom obține astfel segmentul x .

$$\text{R. a) } x = R(2 - \sqrt{2}).$$

V. Exerciții și probleme recapitulative

1. Dacă aria unui paralelipiped dreptunghic este egală cu dublul pătratului diagonalei sale, atunci el este un cub.

Indicație. $2(ab + ac + bc) = 2(a^2 + b^2 + c^2)$.

2. Se dă un con circular drept cu diametrul bazei de 12 cm și înălțimea egală cu $\frac{2}{3}$ din diametru.

- 1) Să se afle aria totală, aria laterală și volumul conului.
- 2) Se desfășoară suprafața laterală a conului, obținându-se astfel un sector de cerc. Cite grade are unghiul acestui sector?
- 3) La ce distanță de vârful conului trebuie făcută o secțiune printr-un plan paralel cu baza astfel ca lungimea cercului de secțiune să fie $9\pi\text{cm}$?

R. 1) $60\pi\text{ cm}^2$; $96\pi\text{ cm}^2$; $96\pi\text{ cm}^3$ 2) 216° 3) 6 cm .

3. Se da expresia:

$$E = \left(\frac{4x^2}{2x-1} - \frac{8}{4x^2-1} + \frac{8x-7}{1-2x} \right) : \frac{1-2x}{2x+1}.$$

- 1) Să se arate că forma cea mai simplă la care poate fi adusă este $E = -2x + 1$; să se stabilească mulțimea valorilor lui x , pentru care expresia dată nu are sens.
- 2) Să se afle mulțimea numerelor reale pozitive pentru care $-2x + 1 \geq \frac{2}{3}$.

$$\text{R. } \begin{cases} 1) \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\} \\ x \in \left[0, \frac{1}{6} \right]. \end{cases}$$

4. Se dau mulțimile $A = \{x; 1; 4; 5\}$; $B = \{3; 6; 1; 4; 5\}$, în care $x \in N$ și x este baza sistemului de numerație din relația:

$$\frac{20}{120} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1000}{120} = 1. \text{ Să se determine:}$$

a) $C_A B$; b) $B - A$; c) $A \cup B \cap A$ și $A \cap B \cup B$

R. a) $C_A B = \emptyset$; b) $B - A = \{6\}$.

5. Dacă x și y sînt două numere strict pozitive atunci $xy \leq \left(\frac{x+y}{2} \right)^2$. Să se arate că dacă $x + y = K$, cea mai mare valoare a produsului xy este $\frac{K^2}{4}$.
- b) În aceleași condiții să se arate că cea mai mică valoare a lui $x^2 + y^2$ este $\frac{K^2}{2}$.

Indicație: inegalitatea se mai poate scrie:

$$\text{a) } (x+y)^2 \geq 4xy \Rightarrow (x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{K^2}{4}; \text{ max. } xy = \frac{K^2}{4}.$$

$$\text{b) } x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy \geq K^2 - 2 \cdot \frac{K^2}{4} \Rightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{K^2}{2} \text{ adică cea mai mică valoare a lui } x^2 + y^2 \text{ este } \frac{K^2}{2}.$$

6. Într-o piramidă $VABC$ cu baza un triunghi dreptunghic ABC , $\hat{A} = 90^\circ$, muchia CV este perpendiculară pe planul bazei. Din punctul C se duc perpendicularele CD și CE pe VA respectiv VB . Să se arate că există relația: $\frac{AC^2}{BC^2} = \frac{VE}{BE} \cdot \frac{AD}{VD}$.

7. Pe un cerc cu diametrul BC se iau două puncte M și N situate de o parte și de alta a lui BC . Cum trebuie alese punctele M și N ca patrulaterul $BMCN$ să aibă un perimetru cât mai mare? Ce fel de patrulater este în acest caz $BMCN$?

R. Patrulaterul $BMCN$ este un pătrat.

8. Să se afle valoarea maximă a funcției $f(x) = \frac{3x^2 - 12x + 22}{x^2 - 4x + 6}$; ($x \in \mathbb{N}$)

$$\text{Indicație: } f(x) = 3 + \frac{4}{x^2 - 4x + 6} = 3 + \frac{4}{(x-2)^2 + 2}$$

R. 5.

9. Se consideră $f(x) = 4x^4 - 4x^3 + x^2 + 1$. a) Să se afle citul și restul împărțirii lui $f(x)$ la $(2x^2 - x)^2$ fără a efectua împărțirea. b) Să se arate care din următoarele afirmații este adevărată, $f(x) < 0$; $f(x) = 0$; $f(x) > 0$; pentru $x \in \mathbb{R}$. c) Pentru ce valori ale lui x , $f(x)$ ia cea mai mică valoare $x \in \mathbb{N}$.

R. $\begin{cases} \text{a) Citul este 1; restul este 1;} \\ \text{c) } x = 0. \end{cases}$

10. Să se demonstreze că dacă $a > 0$; $b > 0$ și $a + b = 1$ atunci $0 \leq ab \leq \frac{1}{4}$ și $\frac{1}{2} \leq a^2 + b^2 \leq 1$.

Indicație: $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab \geq 0$; $(a + b) = 1$ și $a^2 + b^2 + 2ab = 1$.

11. Pentru ce valori ale lui $x \in [-4, 4]$ și $x \in \mathbb{Z}$ expresia $x^4 - 5x^2 + 4$ este divizibilă cu 5.

Indicație: cel puțin unul din factorii expresiei date, trebuie să fie divizibil cu 5.

R. ± 3 ; ± 4 ; ± 1 ; ± 2 .

12. Se dau polinoamele: $P(x) = 2x^3 + x^2 - xm - 1$; $Q(x) = 2x^3 + 3x^2 + nx + 1$. a) Să se determine m, n astfel ca $P(x)$ să se dividă cu $2x - 1$ iar $Q(x)$ să se dividă cu $2x + 1$. b) Cu valorile aflate pentru m și n să se simplifice fracția $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

R. a) $m = -1$; $n = 3$; b) $\frac{2x-1}{2x+1}$.

13. Să se găsească cel mai mic număr natural n pentru care fracția $\left(\frac{5}{4}\right)^n > 2$.

Indicație: n fiind minim, se înlocuiește cu 1, 2, 3, 4.

R. $n = 4$.

14. Să se afle valoarea maximă a funcției $f(x) = \frac{3x^6 + 6x^3 + 10}{x^6 + 2x^3 + 2}$. Să se determine valoarea lui $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $f(x)$ este maximă. b) Să se afle valoarea maximă a lui $f(x)$.

R. a) $x = -1$, b) $f(x) = 7$.

15. Să se afle volumul și aria laterală a unui con înscris într-un tetraedru regulat de muchie „ a ”.

R. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{108}$; Aria laterală = $\frac{\pi (a\sqrt{3})}{6} \cdot \frac{(a\sqrt{3})}{2} = \frac{\pi a^2}{4}$.

16. Fie M un punct pe diagonala AC a trapezului $ABCD$ (AB bază mare) și MP , MN paralele duse la AB , respectiv AD . ($N \in DC$ și $P \in BC$.)

- Să se arate că unghiurile $\widehat{CNP}$ și $\widehat{ABD}$ sînt egale.
- Paralela din N la BC taie pe BD în R . Să se arate că punctele B , N și mijlocul Q al segmentului RP sînt coliniare.
- Care trebuie să fie valoarea raportului $\frac{MC}{MA}$ astfel ca să aibă loc relația $NP = \frac{2}{3} DB$?

R. c) $\frac{MC}{MA} = 2$.

17. Se dă paralelogramul $ABCD$ în care unghiul $ABC = 150^\circ$ și diagonala BD perpendiculară pe AB . Fie E proiecția lui C pe AD și F intersecția laturii BC cu cercul circumscris triunghiului DEC , avînd centrul O .

- Să se arate că DF este perpendiculară pe BC .
- Să se arate că punctele E , O , F sînt coliniare.
- Să se arate că BD este tangentă la cercul circumscris triunghiului DEC .
- Să se demonstreze că $BD^2 = BF \cdot AD$.
- Dacă $AB = 2a$, ($a > 0$), să se calculeze perimetrul patrulaterului $BDEF$.

R. 5) $2a(\sqrt{3} + 1)$.

18. Să se demonstreze că expresia $E = x^2y + xy^2 + x^2 + y^2 + 2xy + x + y$ este divizibilă cu 2 oricare ar fi x și y numere naturale.

Indicație: $E = (x + y)(x + 1)(y + 1)$; considerăm toate cazurile: x par, y impar etc.

19. Se dă $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}$. Să se determine $x \in R$ pentru care $f(x) > 0$.

R. $x \in R$.

20. Fie a un număr natural, $a \in N$. Să se găsească o mulțime de patru numere naturale: x , y , z , t , așa încît efectuînd operațiile:

$$x + a; y - a; za; t : a$$

să obținem același rezultat numeric.

Indicație. Fie m rezultatul comun; astfel obținem: $x = m - a$; $y = m + a$; $z = m/a$; $t = am$; $m \geq a$.

Dacă notăm cu n un număr natural arbitrar, obținem: $x = a(n - 1)$ ș.a.m.d.

R. $E_n = \{a(n - 1); a(n + 1); n; a^2n\}$, (o infinitate de soluții pentru un a dat).

21. Fie $F(x) = \frac{6x^2 + 4x^2\sqrt{2} - 4}{2x + 2 + x\sqrt{2}}$.

Să se aducă $F(x)$ la forma cea mai simplă.

R. $2x + x\sqrt{2} - 2$.

22. Fie $f(x) = \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 5x + 6}$.

a) Să se aducă $f(x)$ la forma cea mai simplă.

b) Pentru ce valori ale lui x , $f(x) < 0$.

c) Să se determine mulțimea valorilor ale lui $x \in N$ pentru care $f(x)$ este număr întreg.

R. a) $\frac{x - 4}{x + 2}$; b) $-2 < x < 4$; c) $\{0, 1, 4\}$.

23. Se dă $f(x) = \frac{a^4(x + a)^3}{a^4(a^2 + x^2) + 2a^5x} \cdot \left\{ 2(x - a) : \left[\frac{ax - 2x - a^2 + 2a}{ax} : \left(\frac{x(a - 2)}{a} - \frac{a - 2}{x} \right) : \frac{1 - \frac{2}{a} : \frac{x}{2a}}{a - 2} + \frac{a - 2}{a} \right] + 2a - x - 2 \right\}$.

Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției $p : f(x) \in N$

R. $f(x) = 1$.

24. a) Să se rezolve ecuația: $\frac{a^2(b + c)}{a - x} = \frac{b^2(a + c)}{b - x}$,

unde necunoscuta este x iar a , b și c sînt constante diferite de 0.

b) Să se verifice că rădăcina ecuației de la punctul a) este și rădăcina ecuației: $\frac{b^2(a + c)}{b - x} = \frac{c^2(a + b)}{c - x}$ (în aceleași condiții).

R. a) $x = \frac{abc}{ab + bc + ca}$.

25. Să se aducă următoarea expresie la forma cea mai simplă:

$$P(y) = \frac{a(9y^4 - 16)}{y + \frac{4}{3y}} + 9y^3 - 7 + \frac{\frac{3}{y} - 2}{\frac{1}{ay}}; \quad (a \neq 0; y \neq 0)$$

și apoi să se determine a astfel ca polinomul obținut să fie de gradul întâi în y .
Care este acest polinom?

$$\mathbf{R.} \begin{cases} P(y) = 14y - 10 \\ \text{pentru } a = -1. \end{cases}$$

26. Să se rezolve inecuația:

$$\frac{7y-5}{y+4} \leq 3$$

și apoi să se determine mulțimea numerelor întregi care o verifică.

$$\mathbf{R.} \text{ Toate numerele întregi din intervalul } \left[-4; \frac{17}{4}\right].$$

27. Se dau expresiile:

$$A(x) = \frac{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{4}{x^2-1}}; \quad B(x) = \left(\frac{x}{x-5} + \frac{x-5}{x} - 2\right) \cdot \frac{25}{x}.$$

a) Să se aducă $A(x)$ și $B(x)$ la forma cea mai simplă.

b) Să se rezolve ecuația $A(x) + B(x) + \frac{3x^2 A(x) \cdot B(x)}{4} = 0$.

c) Să se reprezinte grafic funcția: $y = \frac{1}{A(x)} + \frac{1}{B(x)}$.

d) Să se calculeze valorile numerice ale lui

$$A(x) \text{ și } B(x) \text{ pentru } x = 2\frac{1}{2} + \frac{1}{1\frac{1}{3}} - \sqrt{3,8025} + 3,1(6).$$

e) Dacă $y \neq 1$ și $x = \frac{y}{y-1}$ să se arate că:

$$[(x+y)^3 - x^3 - y^3][(x+y)^5 - x^5 - y^5] = 15x^5y^5(xy-1).$$

$$\mathbf{R.} \begin{cases} \text{a) } A(x) = \frac{1}{x-2}; \quad B(x) = \frac{1}{x-5}; \\ \text{b) } x_1 = -\frac{14}{3}; \quad x_2 = 2 \text{ (nu convine)} \\ \text{d) } \frac{15}{37}; \quad -1\frac{7}{8}. \end{cases}$$

28. Se dă expresia: $f(x) = [x^8 - x^8(4 \cdot 4^{99} - 4^{100} + 2^{24} - 4^{12}) - x^5] + x^5 \cdot (4^{27} - 2^{54})^3 - x^3 + 1$, $x \in R$; $x \neq 1$.

a) Să se arate că $f(x)$ este pozitivă. b) Să se arate că $f(x)$ se divide prin: $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. c) Să se verifice că $f(x) + x^5 - 2x^4 + x^3 \geq 0$.

29. Se dă inecuația:

$$\frac{2x-1}{6} - \frac{x+4}{2} > \frac{x-1}{9} \text{ definită pe mulțimea:}$$

$$A = \{2; -2; 3; -3; 5\}$$

Să se determine mulțimea $x \in Z$ ce satisface inecuația.

R. $\{-3\}$.

30. Se dă rombul $ABCD$ unde unghiul $A = 60^\circ$, O este intersecția diagonalelor, E simetricul lui O față de AD și M intersecția dreptelor OE și AD .

Se cere:

1) Să se arate că punctele C , D și E sînt pe aceeași dreaptă (coliniare).

2) Să se arate că patrulaterul $ABCE$ este trapez dreptunghic.

3) Dacă N este piciorul perpendicularei din O pe AE să se arate că $AN = NM = OM$ și că MN este paralelă cu AO .

4) Să se arate că patrulaterul $ANMO$ poate fi înscris într-un cerc. Care este centrul?

5) Să se arate că $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{4}$.

31. Se dă expresia: $f(x) = x^4 - x^4(4 \cdot 2^{99} + 2 \cdot 8^{33} - 6 \cdot 2^{99})^3 - x^3 + x^3 \cdot [(x^{100} - 3x^{99} - x^{99}(x-3)) - x + 1]$.

Să se verifice că $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in R$.

32. Se consideră expresia:

$$E(x, y) = x(x+2y)^2 - (x-y)(x^2+xy+y^2) - 4x^2y.$$

a) Să se aducă la forma cea mai simplă și să se descompună rezultatul în factori.

b) Să se afle valoarea numerică a expresiei date pentru:

$$x = 2 \text{ și } y = -\frac{31}{2} : 5,1(6) + 3,5.$$

$$\text{R. a) } y^2(4x+y); \text{ b) } 2\frac{1}{8}.$$

33. Să se arate că:

$$(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)(x^{16}+1) + 2(x^{16}+1)$$

este pătratul unui binom.

$$\text{R. } (x^{16}+1)^2$$

34. Să se arate că suma pătratelor a trei numere consecutive mărită cu 1 este un număr divizibil cu 3.

35. Fie $E = \frac{x^2 + 2x + 11}{x^2 + 2x + 6}$. Să se afle valoarea maximă a lui E .

Indicație. $E = 1 + \frac{5}{(x+1)^2 + 5}$.

R. $E = 2$.

36. Patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil. Se duc perpendicularele AA' și BB' pe diagonalele BD și AC . Să se arate că $A'B' \parallel CD$.

Indicație: Se observă că patrulaterul $ABA'B'$ este inscriptibil.

37. Să se afle valoarea minimă a fracției $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 3}$

Indicație. $x^2 - 2x + 1 = x^2 - 2x + 1 + 2 - 2$

R. 0.

38. Se dă un triunghi ABC în care $AB = AC = 6$ cm și $A = 120^\circ$. Fie O centrul cercului circumscris acestui triunghi și D punctul diametral opus lui A .

a) Să se arate că triunghiul BCD este echilateral.

b) Fie (Δ) perpendiculara în O pe planul triunghiului BCD și un punct M pe (Δ) . Să se arate că $MB = MC = MD$.

c) Se consideră tetraedrul $MBCD$. Să se arate că muchiile opuse sînt perpendiculare ($MB \perp CD$).

d) Să se calculeze volumul tetraedrului știind că $MB = 6\sqrt{3}$ cm.

R. d) $54\sqrt{6}$ cm³.

39. Se consideră două conuri avînd ca axă de rotație dreapta (Δ) . Baza unui con este cercul circumscris triunghiului echilateral BCD , iar baza celuilalt con este cercul înscris în același triunghi.

a) Care este raportul volumelor celor două conuri dacă înălțimile lor sînt egale?

b) Care este raportul volumelor celor două conuri dacă secțiunile lor axiale sînt triunghiuri echilaterale?

$$\text{R. } \begin{cases} \text{a) } \frac{4}{1} \\ \text{b) } \frac{8}{1} \end{cases}$$

40. Fie piramida $VABCD$ cu baza dreptunghiul $ABCD$ în care $AB = 16$ cm; $BC = 12$ cm iar M și N mijloacele lui AB respectiv BC și Q mijlocul muchiei $VA = VB = VC = VD$. Să se determine raportul volumelor piramidelor $QMNB$ și $VABCD$.

R. $\frac{1}{16}$.

41. Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sînt invers proporționale cu: 0,1(6); 0,125; 0,1 iar diagonala paralelipipedului este de 10 cm. Să se afle dimensiunile acestui paralelipiped.

R. $3\sqrt{2}$ cm; $4\sqrt{2}$ cm; $5\sqrt{2}$ cm.

42. Se dă șirul de rapoarte egale $\frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{4}{c} = \frac{8}{d}$ și $ab = d = 2c$. a) Să se calculeze a , b , c , d

b) Dacă șirul de rapoarte egale este $\frac{1}{a} = \frac{4}{b} = \frac{8}{c} = \frac{2}{d}$ și $ab = c = d^2$ să se calculeze în acest caz a, b, c, d .

R. a) 4; 8; 16; 32; b) 2; 8; 16; 4.

43. Se dă ecuația $\left[\left(\frac{3x^6 - x^{12} - 1}{x^3 - x^9 + 1} - x^3\right) : (x^2 + x + 1) - x^4 + x^3\right] = 1$ și mulțimile $A = \{1; 2; 3; 4\}$; $B = \{x; 1; 3; 4\}$; $x \in N \mid x$ este rădăcina ecuației date și $x \in B$.

Să se arate valoarea de adevăr a propoziției $p : (C_A B = C_B A = \{2\})$.

R. falsă.

44. Care este numărul de două cifre care micșorat cu 5 să fie egal cu triplul răsturnatului său.

R. 92.

45. Pe un șantier, prin săparea unor fundații s-au format trei grămezi de pământ în formă de con circular drept. Suma dintre lungimea cercului de bază și generatoarea primei grămezi este egală cu 30,12 m. Diferența dintre diametrul cercului de bază și generatoarea aceleiași grămezi este egală cu 3 m.

Volumul celei de-a două grămezi reprezintă $1\frac{1}{8}$ din volumul primei grămezi iar a treia grămadă are volumul cu $3\pi m^3$ mai mare decît prima grămadă. Se cere:

a) Să se afle volumul total al celor trei grămezi de pământ.

b) Cîte camioane cu capacitatea de $2 m^3$ sînt necesare pentru transportul pămîntului din cele trei grămezi în timp de o zi, știind că fiecare camion face zilnic opt transporturi.

R. a) $V = 53\pi m^3$; ($V_1 = 16\pi m^3$; $V_2 = 18\pi m^3$;
 $V_3 = 19\pi m^3$);

b) ≈ 10 camioane.

46. Se dă fracția:

$$E(x) = \frac{8x^3 + 12x^2 + 50x + 75 - 20x(2x + 3)}{4x^2 - 4x - 15}.$$

a) Să se aducă la forma cea mai simplă.

b) Să se afle valoarea numerică a expresiei $E(x)$ pentru

$$x = \frac{6,8(3) - 5\frac{5}{6}}{1,0816 + 0,9184}.$$

R. a) $2x - 5$; b) -4 .

47. Un lăcătuș vrea să-și construiască dintr-o bară metalică o piesă care să aibă forma unei prisme drepte, avînd ca baze triunghiuri dreptunghice cu ipotenuza de 10 cm; proiecția uneia din catete pe ipotenuză este egală cu 3,6 cm, iar înălțimea prismei în centimetri egală cu $\frac{3}{8}$ din numărul care exprimă mărimea ariei triunghiului de bază.

Știind că bara metalică are formă de cilindru, la care se cunoaște că raportul dintre aria laterală și aria totală este $\frac{9}{14}$, că diametrul cercului

de bază este cu 1 cm mai lung decît înălțimea cilindrului și că densitatea metalului din care este construită bara cilindrică este de $7,8 g/cm^3$, se cere:

1) Greutatea barei metalice.

2) Să se dovedească că se poate construi piesa din bară folosind operația de pilire și tăiere.

3) Să se afle greutatea metalului înlăturat din bară la construirea piesei.

$$\text{R. } (V_1 = 216 \text{ cm}^3; V_2 = 706,500 \text{ cm}^3);$$

$$1) G_1 = 5\,510,70 \text{ g};$$

$$3) G_2 = 3\,825,90 \text{ g}.$$

48. Se dă expresia $f(x) = (x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1)$. Să se arate că dacă $x = 2k + 1$ cu $k \in N$ $f(x)$ nu se poate termina cu 5.

49. Să se arate că expresia $F = 7^{2n+1} + 2^{3n+5} + 2 \cdot 2^{3n}$ este divizibilă cu 44.

$$\text{Indicație: } 49^n \cdot 7 + 8^n \cdot 32 + 2 \cdot 8^n + 7 \cdot 8^n - 7 \cdot 8^n = F.$$

50. Aria unui teren în formă de trapez este de 5 500 m². Știind că înălțimea este de 50 m și baza mică întrece cu 10 m jumătatea bazei mari să se afle bazele trapezului.

$$\text{R. } B = 140 \text{ m}; b = 80 \text{ m}.$$

51. Să se treacă numărul 5 211₇ în baza 10.

$$\text{R. } 1\,821_{10}.$$

52. Un siloz în formă de cilindru circular drept are diametrul interior egal cu jumătate din înălțime, iar suma dintre rază și înălțime este egală cu 15 m. Se cere:

a) Volumul părții interioare a silozului.

b) Ce greutate are grîul ce se poate depozita în acest siloz dacă 1 hl de grîu cîntărește 78 kg?

$$\text{R. a) } 108\pi \text{ m}^3 \approx 339,12 \text{ m}^3;$$

$$\text{b) } 264\,513,6 \text{ kg} \cdot 9,8 \approx 2\,592\,233 \text{ N}.$$

53. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{x^2y + y^2x - 2x - 2y - xy + 2}{xy - 2}$$

$$E_2 = \frac{x^2 - y^2 - 2y - 1}{x - y - 1}$$

Se cere:

1) Să se aducă E_1 și E_2 la forma cea mai simplă.

2) Să se rezolve ecuația:

$$\left(\frac{E_1 + E_2}{x + y} - x\right)(x + 1) = 0.$$

$$\text{R. } 1) E_1 = x + y - 1; E_2 = x + y + 1;$$

$$2) x_1 = 2, x_2 = -1.$$

54. Diagonalele unui trapez isoscel se intersectează în punctul O .

1) Să se afle distanțele de la O la baza mare și la baza mică a trapezului, știind că aceste distanțe sînt direct proporționale cu numerele 8,5 și 3,5 și că $\frac{2}{5}$ din distanța la baza mare este cu 4 cm mai mare decît 40% din distanța la baza mică.

2) Dacă baza mică a trapezului este 14 cm, latura neperalelă 26 cm și perimetrul de 100 cm, să se afle unghiul format de o diagonală cu baza mare și să se deducă apoi că diagonalele sînt perpendiculare.

3) Pe perpendiculara în O pe planul trapezului se ia un punct V așa încît $OV = 40$ cm. Să se afle volumul piramidei care are ca bază trapezul dat și ca vîrf punctul V .

R. 1) 17; 2) 45° ; 3) $V = 7\,680$ cm³.

55. Se dă expresia: $f(x) = \left(\frac{x^2 - xy}{x^2y + y^3} - \frac{2x^3}{y^3 + x^2y - x^3 - xy^2} \right) \cdot \frac{y(x-y)}{x} + 53$ și mulțimea $A = \{x \in N \mid x \text{ s\ddot{a} se divid\ddot{a} cu } 2 \text{ \textit{și} cu } 9 \text{ \textit{și} } 29 < x < 90\}$. Să se afle valoarea de adevăr a propoziției $p : f(x)$ este un element al mulțimii A .

R. $f(x) = 54$; p adevărată.

56. Se dă expresia: $\frac{(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3}{ab+bc+ac+c^2}$. Să se arate că această expresie este divizibilă cu 3; a, b, c diferite de 0; a, b, c , aparțin lui N .

57. Se dă expresia: $E = \frac{y^3 + 3y^2 + 3y + 2}{y^3 - y^2 - y - 2}$. Să se determine mulțimea valorilor lui $y \in N$, pentru care E este un număr întreg.

R. $y \in \{0, 1, 3, 4, 6\}$.

58. Într-o prismă dreaptă în care bazele sînt pătratele $ABCD$ și $A'B'C'D'$ se cunoaște că perimetrul bazei $ABCD$ este $\frac{3}{4}$ din perimetrul secțiunii $A'D'CB$ (în formă de dreptunghi) iar $A'B$ este cu 4 cm mai mare ca latura AB .

Să se calculeze lungimea laturii pătratului $ABCD$, aria secțiunii $A'D'CB$, înălțimea prisme, aria totală și volumul prisme.

R. 6 cm; 60 cm²; 8 cm; $At = 264$ cm²; $V = 288$ cm³.

59. Să se aducă la forma cea mai simplă.

$$E = \left(\frac{y-x}{x^4 - x^2y^2} + \frac{1}{x^3 - x^2y + y^3 - xy^3} \right) \cdot \left(\frac{x^7 - x^5y^2 - x^4y^3 + x^2y^5}{8x^3y - y^4} \right) \cdot \frac{4x^3 + 2xy + y^2}{3x^2 + xy}.$$

R. 1.

60. Se dă un triunghi ABC în care unghiul $\hat{A} = \widehat{2B}$ și $AB = 6$ cm. Bisectoarea unghiului A taie pe BC în D . Se cunoaște că $AD = 5$ cm și $\frac{DB}{DC} = \frac{5}{7}$.

Bisectoarea unghiului ADC taie pe AC în N .

Se cere:

1) Înălțimea $\triangle ABC$ dusă din $\hat{A}$ pe BC .

2) Dacă $VD = 3$ cm este înălțimea piramidei cu baza ABD să se afle aria totală a acestei piramide.

$$R. \begin{cases} 1) \frac{24}{5} \text{ cm.} \\ 2) 42 \text{ cm}^2. \end{cases}$$

61. Se dă expresia:

$$E = \left[\left(\frac{x^3 - \sqrt{2,0(3) + 61 \frac{29}{30}}}{x^2 + 2x + 4} \right)^3 + 1 \right] : \frac{x^2 - 5x + 7}{x + 2}.$$

Să se aducă la forma cea mai simplă.
Pentru ce valoare a lui x , $E < -2$.

$$R. \begin{cases} E = (x - 1)(x + 2) \\ -1 < x < 0. \end{cases}$$

62. Se dă $f(x) = \frac{(x^2 + 2x - 3)^2}{(x + 3)(x - 1)}$.

Să se determine mulțimea valorilor lui $x \in Z$ pentru ca $f(x) < 0$.

$$R. -3 < x < 1.$$

63. Un con este înscris într-un cilindru cu aceeași bază și aceeași înălțime; generatoarele lor fac un unghi de 30° . În con este înscrisă o sferă.
Se cere:

1) Să se exprime volumul acestor corpuri în funcție de raza bazei cilindrului.

2) Să se arate că volumele menționate sînt invers proporționale cu $3; 1; \frac{27}{4}$.

3) Considerînd suma între generatoare și raza cînului egală cu 45 cm, să se afle aria laterală a cînului.

$$R. 1) \pi R^3 \sqrt{3}; \frac{\pi R^3 \sqrt{3}}{3}; \frac{4\pi R^3 \sqrt{3}}{27}.$$

$$3) 450\pi \text{ cm}^2.$$

64. Să se efectueze:

$$\left(\frac{x^4 + 3x^2 + 2}{x^4 - x^2 - 2} \right)^2 + \frac{2x^2 + 4}{x^2 - 2} + 1$$

$$R. \frac{4x^4}{(x^2 - 2)^2}.$$

65. Laturile bazei unei piramide triunghiulare sînt invers proporționale cu $\frac{1}{6\sqrt{2}}; \frac{1}{10}; \frac{1}{14}$, iar diferența dintre laturile cele mai mari ale triunghiului este de 2 cm.

Înălțimea piramidei este cu 20% mai mare decît latura cea mai mare a bazei. Se cere volumul piramidei

$$R. V = 29,4 \text{ cm}^3.$$

66. Să se rezolve ecuația:

$$\left\{ \left[\left(\frac{2^2 \cdot 3^5 \cdot 3^2 \cdot 2^5 \cdot 5^0}{2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^3} + x^3 \right) \cdot \frac{25x}{5x+2} \right] - 1 \right\} \cdot \left(\frac{x}{5} + 1 \right) = 0.$$

$$\text{R. } = \pm 5.$$

67. O gospodină a cumpărat cu suma de 111 lei linguri de 5 lei bucata și cuțite cu 27 lei bucata. Cite linguri și cite cuțite s-au cumpărat?

R. 6 linguri și 3 cuțite.

68. Se dă ecuația:

$$\frac{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 1)(x - 1)^2} = x - 3 \text{ definită pe mulțimea } A = \{3; 4; 5; 6\}.$$

Să se determine valoarea de adevăr a propoziției $r: \{x \in N \mid x \text{ o soluție a ecuației este un element al mulțimii } A\}$.

R. propoziția r este adevărată.

69. Se dă sistemul:

$$\begin{cases} \frac{x}{a+2} - \frac{y}{a-2} = 1 \\ 3x + 2y = a - 1 \end{cases}$$

Să se discute sistemul în funcție de a .

$$\text{R. } \begin{cases} a \neq -\frac{2}{5} \text{ sistem compatibil și determinat.} \\ a = -\frac{2}{5} \text{ sistem incompatibil.} \end{cases}$$

70. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \frac{x^3 + x^2y - 2x^2 - 2xy + x + y}{xy(x-1)^2} = 5 \\ \frac{xz}{x+z} = \frac{1}{6}; \quad \frac{yz}{y+z} = \frac{1}{7}. \end{cases}$$

$$\text{R. } \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4} \right).$$

71. O piramidă are ca bază un trapez dreptunghic $ABCD$ în care $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$.

Fața piramidei VBC este un triunghi echilateral și este perpendiculară pe planul bazei.

Se știe că $AB = AD = 3 \text{ cm}$ și $DC = 6 \text{ cm}$.

Se cere:

- 1) Volumul piramidei.
- 2) Unghiurile trapezului de bază.

$$\mathbf{R.} \begin{cases} 1) \frac{27\sqrt{6}}{4} \text{ cm}^3; \\ 2) \hat{B} = 135^\circ; \hat{C} = 45^\circ. \end{cases}$$

72. Să se aducă expresia la forma cea mai simplă:

$$\left(1 : \frac{x-2}{x^2 - \frac{4b+4a}{a+b}}\right)^2 - \frac{2}{x^2-4} \cdot \left[\frac{(x^3-8)(x+2)^2}{x^2+2x+4}\right] + 1.$$

$$\mathbf{R.} = (x+1)^2.$$

73. a) Să se afle valoarea maximă a expresiei $E = \frac{4y^2 - 16y + 24}{y^2 - 4y + 5}$.

b) Pentru ce valori ale lui $y \in N$, E este un număr întreg.

$$\mathbf{R.} \text{ a) } 8; \text{ b) } y \in \{1, 2, 3\}$$

74. Se dă ecuația:

$$\frac{16x^4 - y + 8x^3y - 2x}{(4x^2 + 2x + 1)(2x + y)} = 3.$$

După simplificarea fracției să se rezolve ecuația.

$$\mathbf{R.} \ x = 2.$$

75. Aria totală a unei prisme patrulatere regulate este de 1 602 cm² iar latura bazei este de 9 cm.

Să se calculeze diagonala unei fețe laterale a prisme.

$$\mathbf{R.} \ 41 \text{ cm.}$$

76. Să se efectueze

$$\left(\frac{\frac{\sqrt{108} + \sqrt{300}}{\sqrt{3}} - x^4}{2+x} + 8x - 4x^2\right) : (x+2)^2$$

$$\mathbf{R.} \ 2 - x.$$

77. Se dă mulțimea $A = \{2; 3\}$ și $f(x) = \frac{6}{2x-3}$.

Să se determine $x \in A$ pentru care $f(x)$ este un număr întreg pozitiv.

$$\mathbf{R.} \text{ a) } x = \{2; 3\}.$$

78. a) Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$f(x) = \frac{x-1}{2} - \frac{x-1}{x+1} \left(x - \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x+1}}\right) - \frac{x^2+x+1}{x^4-x^3-x+1} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

- b) Să se stabilească domeniul de definiție a lui x pentru ca $f(x) < 2$.
 c) Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției $p : \{x \in N \mid 2 < x < 3\}$.

$$R. \begin{cases} a) \frac{x-1}{x+1} \\ b) x \in (-\infty; -3) \cup (-1, \infty) \\ c) \text{ falsă.} \end{cases}$$

79. Într-un trunchi de con este înscris un cilindru avînd aceeași înălțime și una din baze comună. Generatoarele celor două corpuri sînt invers proporționale cu numerele 0,25 și 0,20 iar diferența lor este de 2 cm. Aria laterală a trunchiului de con este cu $60\pi \text{ cm}^2$ mai mare decît aria totală a cilindrului.

Se cere înălțimea conului ce se formează prin prelungirea generatoarelor trunchiului de con dat, avînd ca bază, baza cea mică a trunchiului de con.

$$R. \frac{8}{3} \text{ cm.}$$

80. Dacă a, b, c sînt laturile unui triunghi dreptunghic cu unghiul drept în A să se arate că:

$$(a + b + c)^2 = 2(a + b)(a + c) > 8bc.$$

Indicație. $2(a + b)(a + c) > 8bc; a^2 + ac + ab > 3bc =$
 $= a^2 - bc + ac - bc + ab - bc > 0.$

81. Se dă ecuația:

$$\frac{\frac{x^6 + 6x^5 + 9x^4 - 9x^2 - 6x - 1}{x^2 - 1} - 10x^2 - 2}{x^2 + 6x - 1} = 10$$

definită pe mulțimea $A = \{-5; -4; -3; +3; +4; +5\}$. Să se arate că soluțiile ecuației aparțin lui A .

$$R. x = \{-3; 3\}, \text{ deci } x \in A.$$

82. Dacă un muncitor ar lucra 8 zile la o lucrare, al doilea ar termina-o în 18 zile. Dacă primul ar lucra 10 zile, atunci al doilea ar termina-o în 15 zile.

În cîte zile ar termina lucrarea dacă ar lucra împreună?

$$R. 12 \text{ zile.}$$

83. Unghiul la centru al unui sector de cerc este 60° . Raza cercului este de 9 cm. Să se calculeze raza cercului înscris în sectorul de cerc.

$$R. 3 \text{ cm.}$$

84. Două brigăzi ale unei cooperative agricole de producție seamănă sfeclă-de-zahăr pe o tarla în formă de triunghi ce are baza de 16 km. Pentru efectuarea lucrării se împarte tarla în două parcele proporționale cu numărul lucrătorilor din fiecare brigadă. Știînd că împărțirea s-a făcut printr-o dreaptă paralelă cu baza, dreaptă care are o lungime de 12 km

și este dusă la o distanță de 750 de metri de bază, iar numărul lucrătorilor este de 96, să se afle:

a) Aria fiecărei parcele.

b) Numărul lucrătorilor din fiecare brigadă.

R. a) Aria tarlalei = 24 km^2 ; Aria I = $13,5 \text{ km}^2$;
aria a II-a = $10,5 \text{ km}^2$

b) numărul lucrătorilor este 54 și 42.

85. Se dă ecuația:

$$\frac{8x^3y + 16x^4 - y - 2x}{(2x + 4x^2 + 1)(2x + y)} = 7 \text{ definită pe mulțimea } A = \{2; 3; 4; 5\}.$$

După simplificarea fracției să se rezolve ecuația.

R. $x = 4$ deci $x \in A$.

86. Să se rezolve ecuația

$$\frac{1}{1+ax} \cdot \sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}} \cdot \frac{\sqrt{1-b^2x^2}}{1+ax} \cdot \frac{(1+ax)^2}{1+bx} = x.$$

R. $x = 1$.

87. O piramidă are ca bază un trapez isoscel în care se cunoaște $AD = BC = 10 \text{ cm}$, baza mare $AB = 15 \text{ cm}$. Bisectoarea unghiului A intersectează diagonala BD în O . Fie VO înălțimea piramidei egală cu 8 cm și $OB = 9 \text{ cm}$.

Să se afle perimetrul triunghiului VOD .

R. 24 cm .

88. Raportul dintre aria laterală și cea totală a unui cilindru circular drept este $\frac{4}{7}$, iar diametrul bazei cilindrului este cu 4 cm mai mare ca generatoarea.

Să se afle volumul cilindrului.

R. 288 cm^3 .

89. Să se arate că expresia $y^2 - 3y + 2$ este divizibilă prin 2 dacă $y \in \mathbb{N}$.

R. $(y - 1)(y - 2)$ este produsul a două numere consecutive.

90. O grămadă de pietriș are forma conică cu raza bazei de 2 m și generatoarea de $2,5 \text{ m}$. Câte căruțe trebuie pentru a transporta pietrișul depozitat în 10 grămezi? 1 m^3 de pietriș cântărește 3 t , iar într-o căruță se încarcă $0,5 \text{ t}$.

R. 377 căruțe.

91. Să se construiască un pătrat cunoscându-se suma dintre diagonală și latura sa.

92. Perimetrul unui dreptunghi este de 120 cm , iar dimensiunile sale sînt direct proporționale cu numerele 9 și 11.

1) Să se calculeze dimensiunile dreptunghiului.

2) Să se afle aria laterală și volumul conului cu raza egală cu baza dreptunghiului și cu înălțimea egală cu înălțimea dreptunghiului.

R. 1) 33 cm ; 27 cm ;

$$2) \begin{cases} A_l = 99\pi\sqrt{202} \approx 1\,405,8\pi \text{ cm}^2 \approx 4\,414,21 \text{ cm}^2; \\ V = 9\,801\pi \text{ cm}^3. \end{cases}$$

93. Să se verifice că sistemul:

$$\begin{cases} \frac{y^3 + x^2 + xy^2 - y^2 - x - y}{y^2 - 1 + x - y} = 4 \\ x^2 - y^2 = 8 \end{cases}$$

admite o soluție $x = 3$ și $y = 1$.

94. Într-un atelier mecanic s-a cerut unor lucrători să execute din bare cilindrice de metal niște piese care să aibă forme de prisme drepte cu baza pătrat.

Cunoscându-se că diametrul bazei $D = 2$ dm și generatoarea $G = 3$ dm și că diagonala pătratului bazei prisme trebuie să fie egală cu diametrul cercului de bază al cilindrului, iar înălțimea prisme egală cu generatoarea barei cilindrice, se cere:

- 1) Să se afle latura pătratului de bază a prisme.
- 2) Să se arate cât la sută din greutatea barei cilindrice se înalătură în obținerea unei singure piese cerute.
- 3) Știind că trei muncitori pot lucra 24 de piese în patru ore, cite piese pot lucra 5 muncitori în două ore?

R. 1) $L_4 = \sqrt{2}$ dm; 2) 36% (cu aproximație);
3) 20 de piese.

95. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{x^4 + x - 2x^3}{x^3 - x^2 - x}; \quad E_2 = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}.$$

- 1) Să se aducă la forma cea mai simplă E_1 și E_2 .
- 2) Să se rezolve ecuația $E_1 \cdot E_2 + 2(x - 1) + 1 = 9a^2$ în care x este necunoscută.
- 3) Să se arate că ecuația $E_1 + E_2 + \frac{(x - 1)^2}{4} + 1 = 1$ are ca soluție unul din elementele mulțimii $A = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3\}$.

R. 1) $x - 1; x - 1;$
2) $x = \pm 3a;$
3) $x \in A; x = 1.$

96. Să se arate că fracția $\frac{x + 1}{2x + 1}$ este ireductibilă oricare ar fi valoarea lui $x \in N$.

Indicație: $2x + 1 - (x + 1) = x$ dar x și $x + 1$ sînt numere consecutive și au divizor comun numai pe 1.

97. Aria secțiunii diagonale care trece prin două muchii laterale opuse ale unui paralelipiped dreptunghic este egală cu aria unui pătrat de 1 681 cm². Diagonala bazei paralelipipedului este egală cu latura acelui pătrat și lungimea dreptunghiului de bază a paralelipipedului este de 40 cm.

Se cere:

- 1) Aria laterală a paralelipipedului.
- 2) Să se determine unghiul format de diagonala paralelipipedului cu planul bazei.

R. 4 018 cm²; 45°.

98. Fie ecuația:

$$\left[\frac{2x - 2y + (y - x)^2 + 1}{x - y + 1} + x^2 - y^2 - 1 \right] : (x + y + 1) + y = 4$$

definită pe mulțimea $A = \{3; 4; 5\}$. După simplificări în condiții posibile, să se arate că mulțimea soluțiilor este inclusă în A .

R. $x = 4 \in A$.

99. Se dă o prismă oblică $ABCD A'B'C'D'$ cu baza un pătrat.

Proiecția muchiei $B'C'$ este muchia AD , muchia $AB = 3$ cm iar $AA' = 6$ cm.

Se cere:

1) Volumul prisme.

2) Aria totală a prisme.

R. 1) $27\sqrt{3}$ cm³; 2) $18(3 + \sqrt{3})$ cm².

100. Să se arate că $x = 4$ și $y = 3$ este o soluție a sistemului

$$\begin{cases} \left[\left(\frac{2xy + 3x^2 - y^2}{3x - y} \right)^2 - y^2 \right] : (x + 2y) = 4 \\ \frac{2x + 3y}{2(x - y)^2 - 5y(y - x)} = 1 \end{cases}$$

101. Dacă a, b, c sînt laturile unui triunghi să se arate că există relația:

$$a^2 < 2(b^2 + c^2)$$

Indicație: $2bc < b^2 + c^2$.

102. O piramidă are la bază un trapez isoscel cu perimetrul de 16 cm. Ra-

portul bazelor trapezului este de $\frac{4}{7}$ iar suma acestora este de 11 cm.

Înălțimea piramidei este cu 25% mai mare decît înălțimea trapezului de bază.

Se cere volumul piramidei.

$$R. V = \frac{27,5}{3} \text{ cm}^3.$$

103. Se dă ecuația:

$$\frac{(x^6 + x^4y - y^3 - x^2y^2)(x - 2)}{(x^2 - 3x + 2)(x^2 + y)^2} \cdot \frac{1}{x^2 - y} = \frac{x}{x - 1}$$

După simplificări posibile să se determine mulțimea soluțiilor $x \in N$.

R. Nu are soluție.

104. Într-o piramidă cu baza un trapez dreptunghic $ABCD$ se dă: ($\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$); $AB = 36$ cm; $AD = 15$ cm.

Diagonala mare BD este împărțită de diagonala mică AC în raportul de $\frac{3}{10}$.

Înălțimea piramidei $VO = 40$ cm, O fiind punctul de intersecție a diagonalelor bazei.

Se cere perimetrul triunghiului VOD și volumul piramidei.

R. 90 cm; 4 680 cm³.

105. Se consideră funcția $f: R \setminus \{1\} \rightarrow R$ dată prin

$$f(y) = \frac{12 - 4y + y^2 - y^3}{6 + y + y^2} \cdot \frac{1}{1 - y}.$$

Să se determine mulțimea $A = \{y \in N \mid f(y) < 0\}$.

R. $A = \emptyset$.

106. Laturile bazelor unui paralelipiped dreptunghic sînt $AB = x$ și $BC = y$. Să se determine înălțimea paralelipipedului cunoscînd că diagonala paralelipipedului este de $x + y$.

R. $\sqrt{2xy}$.

107. Să se rezolve ecuația:

$$\left(\frac{\sqrt{28}}{x} \cdot \frac{\sqrt{7}}{x^2} - \sqrt{3}\right) (2x + \sqrt{3}) - 3x + 2 = 0$$

definită pe mulțimea $A = \left\{1; \frac{2}{3}; -\frac{1}{4}; 3\right\}$.

Să se găsească mulțimea soluțiilor $x \in A$.

R. $S = \left\{1; -\frac{1}{4}\right\}$.

108. Se dă ecuația:

$$\frac{(x^2 + 1)^2 (x^2 + x + 1)}{x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1} = 10 \text{ definită pe mulțimea } A = \{2; 3; 4; 6\}.$$

Să se arate că printre soluțiile ecuației sînt elemente ale mulțimii A .

R. $x = 3$.

109. Să se arate care elemente ale mulțimii $\{2; 3; 4; 6\}$ aparțin următoarelor mulțimi:

$$A = \{x \mid x^3 = 6x^2 - 27\},$$

$$B = \{x \mid x^4 = 3x + 10\}.$$

R. $3 \in A; 2 \in B$.

110. Dintr-o prismă de metal, triunghiulară regulată, cu latura bazei 3 dm și înălțimea de 6 dm, se scoate o piramidă cu aceeași bază și aceeași înălțime cu prisma. Din metalul rămas se toarnă prin topire, o nouă prismă triunghiulară regulată cu înălțimea de 1 dm. Se cere:

a) Latura bazei prisme obținute.

b) Dacă noua prismă se taie printr-un plan care trece printr-o muchie a bazei și prin mijlocul muchiei laterale opuse, se cere aria secțiunii obținute.

$$\text{R. } \begin{cases} \text{a) } 6 \text{ dm} \\ \text{b) } \frac{3\sqrt{109}}{2} \text{ dm}^2. \end{cases}$$

111. Să se aducă expresia $f(x)$ la forma cea mai simplă

$$f(x) = \frac{x^4 + y^4 - 3x^2y^2}{x^4 + x^2 - x^2y^2 - x^3y - y^2 - xy} \cdot \frac{x^2 - y^2 + xy}{x^2 + 1} + 2$$

R. $f(x) = 3$.

112. Să se afle c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. al polinoamelor:

$$E_1 = x^3 + 2x^2 + 2x + 4,$$

$$E_2 = x^2 - 4,$$

$$E_3 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 8x + 8.$$

$$\text{R. C.m.m.d.c.} = x + 2,$$

$$\text{C.m.m.m.c} = (x + 2)^2 (x^2 + 2) (x - 2).$$

113. Se dă mulțimea $A = \{1; 10; 7; 8\}$ și o submulțime B a mulțimii A cu două elemente.

Dacă $B = \{x; 7\}$ să se găsească valoarea de adevăr a propozițiilor p :

$C_B A = \emptyset$; $r: A - B = A \cap B$ știind că

$\{x \in N \text{ și este o rădăcină a ecuației}\}.$

$$\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - x + 1} \cdot (x - 1) : (x^3 - 1) = x.$$

R. p : adevărată; $A - B = \{8; 10\}$; $A \cap B = \{1; 7\} \Rightarrow A - B \neq A \cap B$.

114. Se dau mulțimile $A = \{x \in N \mid 42 < x < 93\}$, $B = \{x \in N \mid x \mid 2\}$.

Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției $p: A \cap B = A \cup B$.

R. p : falsă ($A \cap B \neq A \cup B$).

115. Într-o piramidă cu baza un trapez dreptunghic $ABCD$ se dă: $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$; $AD = DC = a$; unghiul $ABC = 45^\circ$.

Înălțimea piramidei este $VC = a\sqrt{2}$.

Se cere:

1. Să se arate că $AC = BC$.

2. Să se afle aria laterală și volumul tetraedrului $VABC$.

$$\text{R.} \begin{cases} 2) a^2(2 + \sqrt{3}) \\ \frac{a^3 \sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

116. Un cilindru circular drept și un con circular drept au aceeași bază și aceeași înălțime, conul fiind înscris în cilindru. În con este înscris un alt cilindru avînd una din baze la $\frac{3}{8}$ din înălțimea conului, față de vârful lui.

Suma dintre generatoarea conului și raza cilindrului mare este de 16 cm, iar generatoarea cilindrului în care este înscris conul este de 8 cm.

Se cere: raportul dintre aria laterală a cilindrului mic și aria totală a cilindrului mare.

$$\text{R.} \frac{15}{112}.$$

117. Fie

$$\left(\frac{3\sqrt{7} \sqrt{\frac{245x^4}{80}}}{\frac{\sqrt{343x^2}}{4}} - x \right)^2 - 16 = 0$$

definită pe mulțimea $A = \{\pm 3; \pm 2; \pm 4; 5\}$. Să se stabilească valoarea de adevăr $p: (x_1; x_2)$ elemente ale mulțimii A .

R. p : adevărată; $S = \{\pm 2\}$.

118. Se dă expresia:

$$f(x, y) = \left[\left(\frac{x}{xy - y^2} - \frac{y}{xy - x^2} + \frac{2}{y - x} \right)^2 + \frac{2x^2y - 2xy^2}{x^2y^2} + 1 \right] \cdot \frac{x^2y^2}{x - y + xy} \cdot \frac{1}{x - y + xy}$$

și mulțimile $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{2; 3; 4\}$.

Să se arate valoarea de adevăr a propoziției $a: C_A B = f(x, y) = \{1\} = A - B$.

R. Propoziția este adevărată.

119. Se dă expresia: $f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{2-x}}$. Să se afle mulțimea valorilor lui x pentru care $f(x)$ este mai mare ca 1.

$$\text{R. } \left\{ \frac{3}{4} < x < 2 \right\} \\ \text{sau } x \in \left(\frac{3}{4}; 2 \right).$$

120. Într-o sferă se înscrie un con cu secțiunea axială triunghi isoscel ABC ($AB = AC = 17$ cm). Prin A se duce $AM = 10$ cm, $AM \cap BC = \{M\}$, și AM taie sfera în N ($BM < MC$). Se cunoaște că $MB = 9$ cm și $NC = 35,7$ cm.

Să se afle volumul conului înscris în sferă.

Să se calculeze perimetrul patrulaterului $ABNC$.

Să se calculeze diametrul sferei.

$$\text{R. } 600 \pi \text{ cm}^3; 85 \text{ cm}; 36 \frac{1}{8} \text{ cm.}$$

121. Să se efectueze:

$$\left[\left(1 : \frac{\frac{x^4 + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} - x\sqrt{2} - 2}{x^6 - 1} \right) + x^6 \right] : (x^4 + 1)$$

$$\text{R. } x^2 + 1.$$

122. Să se determine x și y numere naturale astfel ca $2x + 3y = 16$

Indicație: $16 - 3y > 0$ rezultă că $y < 5$; dar y este un multiplu de 2 căci $2x = M2$.

$$\text{R. } x = 2; y = 4; x = 5; y = 2; x = 8, y = 0.$$

123. Să se arate pentru ce valori ale lui $x \in R$ inegalitatea

$$\frac{\left(\frac{4x^2 + 12x + 9 - 2b^2x - 3b^2}{2x + 3 - b^2} \right)^3 - 8x^3 - 36x^2 - x^3(2x + 1)}{(3 - x)(2x + 1)} : (x - 1) \leq 1$$

este adevărată.

$$\text{R. } -5 < x < 1.$$

124. Se dă un tetraedru $VABC$ în care avem $VC = VB = 30$ cm și $BC = 36$ cm. Muchiile VA, AB, AC se împart în 3 părți egale și se notează cu M, N, P punctele cele mai apropiate de A .

Se cere aria secțiunii MNP și să se arate că aria acestei secțiuni este $\frac{1}{9}$ din aria feței laterale VBC .

R. 48 cm².

125. Să se afle aria totală și volumul unei prisme triunghiulare regulate cu latura bazei egală cu a cm, avînd înălțimea cît dublul laturii bazei sale.

$$R. \frac{a^2}{2}(12 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2; \frac{a^3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^3.$$

126. Să se efectueze:

$$2 \cdot \left(\frac{\sqrt{19 \cdot 16} + 11 \cdot 16 - 14 \cdot 16}{x^2} - 1 \right) : \left(\frac{4}{x} + 1 \right) + \left(\frac{4-x}{x} \right)^2 + 1.$$

$$R. \frac{16}{x^2}.$$

127. O piramidă are ca bază un triunghi ABC , $AB = 10$ cm; $AC = 14$ cm și $BC = 12$ cm.

Pe latura AB se ia un punct D și se duce paralela DE la BC ($E \in AC$) așa fel încît perimetrul triunghiului ADE să fie egal cu perimetrul trapezului $BDEC$. Înălțimea piramidei VD este de 40 cm. Se cere perimetrul secțiunii VDE .

R. 90 cm.

128. Un turist pleacă dintr-un sat la oraș. Dacă merge cu 4 kilometri mai mult pe zi față de viteza planificată sosește la oraș cu o zi mai devreme față de timpul stabilit. Dacă însă merge cu 5 km mai puțin pe zi față de viteza planificată inițial, atunci sosește la oraș cu 2 zile mai târziu. Care este distanța între sat și oraș și în cite zile trebuia să fie parcursă această distanță după plan?

R. 120 km; 6 zile.

129. Să se arate că numărul $1947 = 2\,200\,010_3$ și că $5\,211_7 = 1\,821$.

130. Două robinete curgînd împreună pot umple un bazin în 1 oră și 20 de minute; dacă se deschide primul robinet pentru 10 minute, iar al doilea pentru 12 minute, se umple $\frac{2}{15}$ din bazin.

În cît timp umple bazinul fiecare robinet singur?

R. 120 minute și 240 minute.

131. Se dă expresia:

$$\frac{\left[\frac{x^2 - 4}{(x+2)^2} \right]^2 + \frac{2x - 4}{x+2} + 1}{8x^2} \cdot (x+2)^3$$

Pentru ce valori ale lui x expresia este un număr întreg?

R. $x = 2k$, ($k \in \mathbb{Z}$).

132. Se dă expresia:

$$(3x^3 + 8x^2 + 5x + 2) : (x + 2).$$

Să se găsească restul împărțirii fără a efectua operația.

R. 0

133. Se dă expresia $f(x) = \frac{x^6 + x^4 + 1}{x^4 + x^2 + 1}$, $x \in N$. Să se arate că dacă $x = 2K$, $f(x)$ nu se poate termina cu numărul 6.

134. Fie $E = \frac{4x^2 - x - 3}{5x^2 - 3x - 2}$.

- a) Pentru ce valori ale lui x , ($x \in N$) E se simplifică?
b) Pentru ce valori ale lui x , E este negativă?

R. a) $x = 7k + 1$, b) $\frac{-3}{4} < x < \frac{-2}{5}$.

135. Se dă expresia $f(x) = \frac{9x + 8}{10x + 7}$. Să se determine valoarea lui x ca $f(x)$ să se simplifice, ($x \in N$).

R. $x = 17k + 1$.

136. Se dă trapezul dreptunghic cu baza mare $AB = 16$ cm, baza mică $CD = 9$ cm și înălțimea $AD = 12$ cm și diagonalele $BD \cap AC = \{0\}$.
a) Să se arate că $BD \perp AC$.
b) Să se arate că $\triangle ADC$ și $\triangle DOC$ sint echivalente.

137. Se dă ecuația:

$$\left\{ \left[\frac{(\sqrt{1,0201} + 0,99)^2 - \frac{x^2}{4}}{2 + \frac{x}{2}} \right] - 1 \right\} \cdot \frac{8}{x^2 - 7x + 10} = -\frac{4}{25}$$

definită pe mulțimea $A = \{12; 15; 22; 30; 31\}$.

Să se găsească mulțimea soluțiilor $\{x \in N \mid x \text{ element al mulțimii } A\}$.

R. $x = 30 \in A$.

138. Într-un trapez dreptunghic $ABCD$ cu baza mare AB și unghiurile drepte $\hat{A}$ și $\hat{D}$, unghiul $\widehat{ACD}$ este egal cu unghiul $\widehat{ABC}$. Se duce perpendiculara din vârful D pe diagonala AC și se notează cu E piciorul acestei perpendiculare.

Se dau: $AD = 5$ dm și $CD = \frac{15}{4}$ dm.

- 1) Să se afle lungimea segmentului DE .
2) Să se calculeze perimetrul și aria trapezului $ABCD$.
3) Se rotește trapezul $ABCD$ în jurul bazei mari. Să se afle aria totală și volumul corpului astfel format.

R. 1) $DE = 8$ dm; 2) $P = 22,5$ dm; $A = 28,125$ dm².

139. Se dă expresia:

$$E = \frac{\frac{(x+y)^2}{xy}}{\frac{y}{x} + \frac{x}{y} + 1} \cdot \frac{1}{\frac{y^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}$$

unde

$$y = \frac{12}{25} + \frac{0,1 + \frac{\sqrt{1,0404}}{10,2} \left(2,2 + \frac{54 \cdot 4}{2^3} \right)}{\left(4,4 : \frac{1}{5} \right) + 129}.$$

Se cere:

1) Să se afle numărul y .

2) Să se arate că forma cea mai simplă pentru E este $(x + y)$; pentru ce valori ale lui x expresia E nu are sens?

3) Să se afle mulțimea numerelor x întregi pentru care expresia $x + \frac{1}{2}$ este mai mare decât (-7) și mai mică decât (-2) .

R. 1) $\frac{1}{2}$

2) $x = y$ și $x = -y$

$x = 0$ și $y = 0$

3) $\{-7; -6; -5; -4; -3\}$.

140. Trei copii au vîrstele de 8, 13 și 14 ani. Tatăl lor a hotărît să le depună cite o parte din suma de 23 000 lei la CEC, astfel ca pînă la vîrsta de 18 ani, cînd devin majori, capitalurile împreună cu dobînzile de 5% anual, socrîte față de primul an, să crească devenind egale. Ce sumă va depune pentru fiecare?

Indicație: x, y, z sumele depuse cu 5% pe an; se va stringe: $\frac{3x}{2}; \frac{5y}{4}; \frac{6z}{5}$ și cum aceste sume trebuie să fie egale se ajunge la o proporție.

R. 6 666 $\frac{2}{3}$; 8 000; 8 333 $\frac{1}{3}$.

141. Fie ecuația $\frac{x(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2)}{(x^2 + x + 2)(x^2 + x + 1)} = 4$ definită pe mulțimea $A = \{2, 3, 4\}$. Fie $B = \{2, 3, 5, 6\}$. Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției $p : C_A B = x$ una din soluțiile ecuației.

R. p este adevărată.

142. Se dă expresia:

$$F = \frac{(x^2y + x^2 + xy^2 + y^2 + x + y + 2xy)(1 - x)(x + 3)}{3 - x^2 - 2x}.$$

1) Să se aducă F la forma cea mai simplă.

2) Să se arate că F adusă la forma cea mai simplă este divizibilă prin 2 pentru orice $x \in N$ și $y \in N$.

Indicație. După simplificare obținem $F = (x + y)(x + 1)(y + 1)$

2) F este divizibilă prin 2 dacă unul din factorii lui F este divizibil prin 2.

Dacă x și y sînt numere pare $(x + 1)$ și $(y + 1)$ sînt impare, dar suma $(x + y)$ este pară $\Rightarrow F$ este divizibil prin 2.

Dacă x este par și y este impar sau invers, avem unul din factori par $\Rightarrow F$ este divizibil prin 2.

Dacă x și y sînt impare $\Rightarrow x + 1$ și $y + 1$ sînt pare deci F este divizibil prin 2.

R. 1) $(x + y)(x + 1)(y + 1)$.

143. Un trapez isoscel $ABCD$ ($BC > AD$, $BC = 2a$, $AD = 2b$) este circumscris unui cerc de centru O . Fie M și N punctele în care CD , respectiv AB sînt tangente cercului și E punctul de intersecție al diagonalelor.

1) Să se calculeze raza cercului în funcție de a și b .

2) Să se arate că punctele M , E și N sînt coliniare.

3) Să se calculeze ME (tot în funcție de a și b).

4) Paralela din O la bază taie pe CD în P .

Din compararea segmentelor OP , OM și EM să se deducă inegalitățile dintre media aritmetică, media geometrică și media armonică a numerelor pozitive a și b , înțelegîndu-se prin media armonică numărul x , unde $\frac{2}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Indicație. Se ține seama că laturile neparalele ale trapezului sînt egale cu semisuma bazelor și că înălțimea este diametrul cercului.

Se studiază asemănarea triunghiurilor formate din care se deduce raportul lor de asemănare; rezultă ME și $NE \parallel BC$.

Se ține seama de proprietatea liniei mijlocii a unui trapez, de mărimea razei aflate la punctul 1) și se calculează EM .

$$\text{R. 1) } R = \sqrt{ab}; \text{ 3) } ME = \frac{2ab}{a+b}.$$

144. Se consideră ecuațiile:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x^2 - (a^2 + 1)x + 3a = 0$$

unde a este număr real. Pentru ce valori ale lui a ecuațiile au o rădăcină comună?

Indicație. Prima ecuație are două rădăcini numerice. Pe rînd se pune condiția ca una din ele să verifice ecuația a doua. Se obțin două ecuații de gradul II în a care dau 4 soluții pentru parametrul a .

$$\text{R. } \{-1; 0; 2; 3\}.$$

145. a) Să se afle două numere naturale b și c astfel încît pentru orice k natural par să avem:

$$b(1-c)(-1)^{k+1} - (b+c)(-1)^{k+2} + 1 = 0$$

G.M.

Indicație. Se ține seama de puterile numărului -1 și egalitatea devine:

$$-b(1-c) - (b+c) + 1 = 0$$

de unde $b = \frac{c-1}{c-2}$ cu condiția $c \neq 2$, $b = 1 + \frac{1}{c-2}$.

$$\text{R. } b = 2; c = 3.$$

b) Să se găsească minimul expresiei $E = a^2 + b^2 - 3a - 3b$ unde a și b sînt numere reale.

c) Dacă $a > 3$, $b > 3$ să se arate că $E > 0$.

Indicație. Formăm pătrate perfecte (al căror minim este zero)

$$E = a^2 - 3a + \frac{9}{4} + b^2 - 3b + \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = \left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}.$$

Minimul este $-4, 5$ pentru $a = b = \frac{3}{2}$.

Dacă $a > 3 \Rightarrow a^2 > 3a \Rightarrow a^2 - 3a > 0$; $b > 3 \Rightarrow b^2 > 3b \Rightarrow b^2 - 3b > 0$,
deci $E = a^2 + b^2 - 3a - 3b = a^2 - 3a + b^2 - 3b > 0$.

146. Se consideră un trapez:

a) Rotim trapezul în jurul bazei mici.

b) Rotim trapezul în jurul bazei mari.

Cînd este mai mare volumul obținut, în cazul a) sau în cazul b)? Volumele pot fi egale?

R. Volumul mai mare corespunde cazului a).
Volumele nu pot deveni egale.

147. Care sînt singurele poligoane regulate ce se pot obține prin secționarea unui cub cu un plan? Justificați răspunsul.

R. Triunghiul echilateral, pătratul și hexagonul regulat.

148. Dintr-o piesă uzată în formă de con circular drept cu raza bazei de 2 dm și înălțimea de $2\sqrt{2}$ dm se taie un corp în formă de cub cu una din fețe așezată pe baza conului, de volum maxim. Să se arate că în felul acesta se folosește mai puțin de un sfert din material.

Indicație. Problema revine la înscrierea unui cub într-un con dat.

Se va afla muchia cubului, apoi se compară volumul cubului cu volumul conului.

149. Se consideră:

$$A(x) = (1 - 2x)^{244} \cdot (2 - 3x^2)^{247} \cdot (3 - 4x^2)^{248}; (x \in R)$$

1) După efectuarea ridicărilor la putere, a înmulțirilor, a reducerilor se poate obține polinomul $A(x)$ ordonat după puterile lui x . Fără a face aceste calcule, să se afle suma coeficienților polinomului ordonat după puterile lui x .

2) Să se arate că:

$$A(x) \cdot [a(-1)^{k+1} + a(-1)^{k+2} + (-1)^{k+2} + (-1)^{k+3}] = 0$$

pentru orice a și x reali și orice k natural.

Indicație. Se știe că se poate obține suma coeficienților unui polinom $P(x)$ dacă se face $P(1)$.

Se vor considera cazurile pentru k par și impar și se va ține seamă de puterile numărului -1 .

G.M.

$$R. 1) (+1) \cdot (-1) \cdot (+1) = -1.$$

150. Se dă prisma hexagonală $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ cu toate muchiile egale cu a . Să se determine forma și aria secțiunii determinate de planul $BDA'E'$.

R. dreptunghi; $a^2\sqrt{6}$.

151. Notăm produsele

$$A = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \left(1 - \frac{1}{8}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{100}\right);$$

$$B = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{99}\right);$$

$$C = \left(1 - \frac{1}{101}\right) B. \text{ Să se arate că:}$$

a) $A < B$;

b) $A < \frac{1}{10} < B$;

c) $A < C < B$.

Indicație. Se compară factorii produselor.

Se face produsul $A \times B$ și se găsește $A \times B = \frac{1}{100} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}$ dar cum $A < B \Rightarrow \Rightarrow A < \frac{1}{10} ; B > \frac{1}{10}$.

G.M.

152. Un dreptunghi $ABCD$ cu laturile $AB = 4$ m și $AD = 3$ m se rotește în jurul unei drepte care trece prin A și este paralelă cu diagonala BD .

a) Care este aria corpului de rotație obținut?

b) Care este volumul corpului de rotație obținut prin rotirea dreptunghiului dat în jurul unei axe dusă din A perpendiculară pe AC ?

Indicație. Aria corpului se compune din aria laterală a trunchiului de con cu BC generatoare plus aria laterală a trunchiului de con cu DC generatoare plus aria laterală a conurilor cu generatoarele AD și AB .

$$\text{R. a) } \frac{336\pi}{5} \text{ m}^2; \text{ b) } 60\pi \text{ m}^3.$$

153. a) Să se găsească două polinoame de gradul II, $P(x)$ și $Q(x)$ astfel ca

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x - 1}{x + 2}.$$

b) Să se arate că $P(x) - 2Q(x)$ este de gradul I.

c) Polinomul $R(x) = P^2(x) + Q^2(x)$ se divide prin $(x^2 + 1)$.

Indicație. Polinoamele $P(x)$ și $Q(x)$ trebuie să conțină un același factor liniar, deci vor fi de forma:

$$P(x) = (2x - 1)(ax + b)$$

$$Q(x) = (x + 2)(ax + b).$$

154. Pentru vopsirea unui cub sînt necesare 6 kg de vopsea.

a) Dacă, după ce am vopsit cubul îl tăiem în cubulețe cu latura de 2 ori mai mică, de cîte kg mai avem nevoie pentru a vopsi și părțile neacoperite încă de culoare?

b) Dar dacă tăiem cubul în cubulețe cu latura de trei ori mai mică vopsea mai este necesară?

Indicație. a) Se formează opt cuburi prin 3 secțiuni mari cît o față a cubului inițial.

$$\text{R. a) } 6 \text{ kg; b) } 12 \text{ kg.}$$

155. Să se rezolve ecuația:

$$Y \cup \{1; 2\} = \{1; 2; 8\}$$

Indicații: din $Y \cup \{1; 2\} = \{1; 2; 8\} \Rightarrow 8 \in Y \Rightarrow Y$ nu poate conține nici un alt element diferit de 1; 2; 8 căci ar apărea în reuniune $\Rightarrow Y$ va fi oricare din submulțimile lui $\{1; 2; 8\}$ care îl conține pe 8.

R. $Y = \{8\}$ sau $\{1; 8\}$ sau $\{2; 8\}$ sau $\{1; 2; 8\}$.

156. Pentru ce valori ale lui x expresia

$$F = \frac{(x-3)(x-4) - (3-x)(6-x) - 4 + (x-1)^2}{5(x-3) - (x-1)(x-3)}$$

este mai mică decât -1 .

R. $x > 6$.

157. Să se construiască pe același grafic dreptele (d_1) și (d_2) reprezentate de funcțiile $y = x + 3$ și $y = 4 - x$.

158. Doi stâlpi verticali sînt înfipti într-un plan orizontal A și C fiind respectiv bazele lor; $AB = CD = 16$ dm.

Stîlpul CD este ancorat cu două cabluri: unul fixat în punctul E , situat în plan orizontal, astfel încît $EC = 12$ dm și al doilea fixat în punctul A astfel încît cablul $AD = 5\sqrt{17}$ dm.

Stîlpul AB este ancorat cu un singur cablu din punctul E , astfel încît $AE = 5$ dm.

a) Din triunghiul ACE să se calculeze $\widehat{AEC}$.

b) Se cer unghiurile BEC și DEA .

c) Se cere tangenta trigonometrică a unghiului DAE .

Indicație. a) Se calculează AC și se deduce că triunghiul ACE este dreptunghic.

b) Se folosește una din reciprocele teoremei celor trei perpendiculare.

R. a) $\widehat{AEC} = 90^\circ$.

b) $\widehat{BEC} = \widehat{DEA} = 90^\circ$.

c) $\operatorname{tg} \widehat{DAE} = 4$.

159. Să se determine A, B, C, D numere întregi pare și diferite între ele, astfel încît suma

$$\frac{1}{A} + \frac{9}{B} + \frac{7}{C} + \frac{4}{D} \text{ să fie cît mai mare posibilă.}$$

Indicație. Numărătorii fiind dați, fracțiile vor avea valoarea cea mai mare, dacă au numitorii cei mai mici posibili. Cu numerele pare cele mai mici se formează fracții convenabile.

160. Se dă expresia $f(x) = \frac{x+13}{x-7}$ și mulțimile $M = \{x \in N \mid 0 < x < 30\}$,

valorile lui x fiind două numere consecutive neprime pentru care $f(x)$ este un număr întreg și mulțimea $N = \{\text{divizorii unui număr de două cifre care este } 3/8 \text{ din răsturnatul său}\}$. Să se arate că $M \cap N = 9$ și $M - N = 8$.

161. Să se construiască un triunghi ABC în care $\hat{B} = 90^\circ$; $\hat{C} = 45^\circ$ și perimetrul 21 cm

Indicație: la extremitățile segmentului de 21 cm se construiesc unghiuri egale cu $22^\circ 30'$ și apoi se folosește proprietatea mediatoarei.

162. O piramidă triunghiulară $VABC$ are înălțimea de 9 cm. În triunghiul ABC care este baza piramidei, înălțimea CD împarte latura AB astfel: $\frac{AD}{BD} = \frac{2}{7}$. Aria triunghiului ACD este de 40 cm^2 . La $\frac{2}{3}$ de bază se face secțiunea $A'B'C'$ paralelă cu baza. Să se calculeze volumul piramidei $VA'B'C'$.

R. 20 cm^3 .

163. Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC se ridică perpendiculare în punctul A și se ia $AB' = AB$, $AC' = AC$. Să se demonstreze că mediana AD a triunghiului ABC , prelungită, este perpendiculară pe $B'C'$.

Indicație. Fie A' simetricul punctului A în raport cu D , se formează paralelogramul $ABA'C'$; se studiază unghiurile acestui paralelogram în legătură cu unghiurile triunghiului $AB'C'$.

164. Fie a, b, c numere reale pozitive care satisfac egalitatea:

$$(b + c + a)(b + c - a) = 2bc.$$

Să se arate că a, b, c sînt laturile unui triunghi dreptunghic.

165. Se dă un cub cu muchia a . Să se calculeze distanțele de la punctele A, C și B' la diagonala BD . Să se arate că aceste trei segmente sînt concurente, într-un punct T . Să se arate că $\frac{BT}{TD} = \frac{1}{2}$. Să se determine unghiul dintre AB' și AC .

Indicație. Vezi $\triangle CBD'$ în care $CO \perp BD'$; $O \in BD'$.

R. a) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$; d) 60° .

VI. Exerciții și probleme propuse în vederea pregătirii pentru olimpiadele de matematică

1. Fie mulțimile:

$M = \{x; y; z \text{ trei numere consecutive neprime, astfel ca } xyz < 990\}$.

$N = \{a; b; c \text{ trei numere naturale consecutive astfel ca } abc = 336\}$.

a) Să se determine $M \cap N$.

b) Să se arate că oricare ar fi $a; b; c$ trei numere naturale consecutive, avem abc divizibil prin 6.

R. $M = \{8; 9; 10\}$.

$N = \{6; 7; 8\}$.

a) $M \cap N = \{8\}$.

2. Se dă mulțimea $A = \{a; b \mid a \in N; b \in N \text{ prime între ele}\}$. În ce caz $a + b$ și $a - b$ sînt prime între ele?

R. $a = 2K; b = 2K + 1$; sau

$b = 2K; a = 2K + 1$.

3. Să se arate că fracția $\frac{x^3 + 1}{x^3 + 3x^2 + 2x}$, $x \in N$, este periodică.

4. Să se determine mulțimea C ale cărei elemente sînt valorile lui $x \in Z$ pentru care expresia $-8 + \frac{8}{x+3}$ este un număr în Z .

$$R. C = \{-1; 1; -2; -4; 5; -5; -7; -11\}.$$

5. Fie fracția: $\frac{6x^2 - 12x + 6}{2x^2 - 7x + 5}$. Să se afle mulțimea

$$M = \left\{ x \in N \mid \frac{6x^2 - 12x + 6}{2x^2 - 7x + 5} \in N \right\}.$$

$$Indicație: F = 3 + \frac{9}{2x - 5},$$

$$R. M = \{1, 2, 3, 4, 7\}$$

6. Să se arate că dacă $x \in N$ atunci expresia $x(2x^2 + 1)$ este divizibilă prin 3.

Indicație. Se substituie x pe rînd cu $K3$; $K3 + 1$ și $K3 - 1$; unul din factorii expresiei devine multiplu de 3.

7. Să se arate că dacă x este un număr natural cu soț, atunci expresiile $E_1 = (x^2 + 4)x$ și $E_2 = x(x^2 - 4)$ sînt divizibile prin 8.

$$Indicație: x = 2K.$$

$$E_1 = x(x^2 + 4) = 2K(4K^2 + 4) = 8K(K^2 + 1) = \text{multiplu de } 8;$$

$$E_2 = x(x^2 - 4) = 2K(4K^2 - 4) = 8K(K^2 - 1) = \text{multiplu de } 8.$$

8. Dacă x este un număr natural oarecare, expresia $E = x(x + 1)(2x + 1)$ este totdeauna divizibilă prin 6.

Indicație: $x(x + 1)$ este întotdeauna divizibilă cu 2. Numărul x împărțit la 3 poate da resturile 0, 1 sau 2 adică x poate fi $M3$, $M3 + 1$ sau $M3 + 2$.

Vom avea:

dacă $x = M3$, E fiind și $M2$, este $M6$;

dacă $x = M3 + 1$ atunci $2x + 1 = M3$ și $E = M6$;

dacă $x = M3 + 2$ atunci $x + 1 = M3$ și $E = M6$.

9. Fie x un număr fără soț, $x \in Z$.

Să se arate că $E = x^2 - 1$ este divizibil cu 8.

Indicație: Un număr x fără soț este de forma $2K \pm 1$ deci avem $x^2 = (2K \pm 1)^2 = 4K^2 \pm 4K + 1 = 4(K^2 \pm K) + 1 = M8 + 1$ și deci $E = x^2 - 1 = (M8 + 1) - 1 = M8$.

10. Să se determine mulțimea M ale cărei elemente sînt valorile lui $x \in N$ astfel ca $\frac{x^2 + 2x + 8}{x + 2}$ să fie un număr natural

$$Indicație: \frac{x^2 + 2x + 8}{x + 2} = x + \frac{8}{x + 2}.$$

$$R. M = \{0; 2; 6\}.$$

11. Fie $ABCD$ un trapez (AD și BC respectiv baza mare și baza mică). Paralela dusă prin C la AB taie diagonală BD în M și paralela tot la AB dusă prin D taie diagonală AC în N . Să se arate că AB este medie geometrică a segmentelor CM și DN .

Indicație: fie O punctul de intersecție al diagonalelor. Se cunoaște că diagonalele unui trapez se taie într-un raport egal cu raportul bazelor lui. Se scriu relațiile din trapezele $ABCD$, $ABCM$ și $ABND$ și se ține seamă că $\frac{OC}{OA} = \frac{OB}{OD}$.

12. Să se determine mulțimea C ale cărei elemente sînt valorile lui $x \in \mathbb{Z}$ astfel ca $\frac{x^2 + 4x + 9}{x + 4}$ să fie un număr în $\mathbb{Z}$.

Indicație:

$$\frac{x^2 + 4x + 9}{x + 4} = x + \frac{9}{x + 4}$$

$$\text{R. } C = \{-13; -7; -5; -3; -1; 5\}.$$

13. Se dă mulțimea A ale cărei elemente sînt valorile lui $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $\frac{(x+1)(x+5)}{x+6} \in \mathbb{Z}$ și mulțimea B ale cărei elemente sînt valorile lui $x \in \mathbb{Z}$ astfel ca $\frac{2x^2 - 8x + 6}{x + 4} \in \mathbb{Z}$. Să se determine $A \cap B$; $A - B$; $A \cup B$.

Indicație:

$$\frac{x^2 + 6x + 5}{x + 6} = x + \frac{5}{x + 6}$$

$$\text{și } \frac{2x^2 - 8x + 6}{x + 4} = 2x + \frac{6}{x - 4}$$

$$\text{R. } A = \{-1; -5; -11; -7\};$$

$$B = \{-2; 1; 2; 3; 5; 6; 7; 10\};$$

$$A \cap B = \{\emptyset\};$$

$$A - B = A.$$

14. Să se determine mulțimea B ale cărei elemente sînt valorile lui $x \in \mathbb{Z}$ pentru care expresia $\frac{(x+6)(x-12)}{x-6} \in \mathbb{N}$.

$$\text{R. } B = \{-6, -3, -2, 0, 2, 3, 4, 5, 12, 14, 24, 30, 78\}.$$

15. Dacă x este un număr impar să se arate că expresia $E = x^{12} - x^8 - x^4 + 1$ este divizibilă cu 512.

Indicație: $512 = 2^9$; $E = x^8(x^4 - 1) - (x^4 - 1) = (x^4 + 1)(x^2 + 1)(x^2 + 1)(x + 1)(x + 1)(x - 1)(x - 1)$.

Dacă x este prin ipoteză fără soț deci x^4 și x^2 sînt tot fără soț astfel cei 7 factori sînt toți numere cu soț.

Pe lângă aceasta unul din factorii $x + 1$ și $x - 1$ este divizibil cu $4 = 2^2$, dar ei figurează de câte 2 ori.

$$E = \text{multiplu de } 2^9 = \text{multiplu de } 512.$$

16. Fie mulțimea M ale cărei elemente sînt trei numere consecutive x ; y ; $z \in \mathbb{N}$ neprime, astfel că $x + y + z < 28$.

Să se determine elementele acestei mulțimi și să se arate că expresia

$E = \frac{(x+y)(y+z)(z+x) + xyz}{xy + yz + zx}$ în care x, y, z sînt elementele mulțimii M este divizibilă cu 3.

$$R. E = x + y + z.$$

$$M = \{8; 9; 10\}.$$

17. Să se determine mulțimea G ale cărei elemente x sînt numere întregi ($x \in Z$) astfel ca valoarea fracției:

$$F(x) = \frac{x^2 + x - 6}{(x^2 - x - 2) : (x + 1)}$$
 să fie cuprinsă între -1 și 5 .

$$R. G = \{-3; -2; 0; 1\}.$$

18. Să se arate că expresia $E = \frac{a^6 + a^4b^2 + a^2b^4}{a^4 - a^3b + a^2b^2} + ab + b^2$ este pozitivă oricare ar fi a și $b \in R - \{0\}$.

$$R. E = (a + b)^2 + b^2.$$

19. Se dă tetraedrul $VABC$ cu baza un triunghi ABC ale cărui laturi sînt $AC < AB < BC$. Se cunoaște că $AB + BC + AC = 3(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)$ cm și $AB + AC = 3(1 + \sqrt{2})$ cm.

Muchiile $VA = VB = VC$ și $\widehat{AVB} = 90^\circ$; $\widehat{AVC} = 60^\circ$; $\widehat{BVC} = 120^\circ$. Se cere:

- a) Să se demonstreze că triunghiurile VBC și VAC sînt echivalente.
b) Aria laterală și volumul tetraedrului.

$$R. \begin{cases} Al. = \frac{9(\sqrt{3} + 1)}{2} \text{ cm}^2, \\ b) \left\{ \begin{aligned} V &= \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^3. \end{aligned} \right.$$

20. Să se determine mulțimea A ale cărei elemente sînt valorile lui $x \in Z$ astfel ca valoarea fracției:

$$F(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 3x + 2}$$
 să fie cuprinsă între -3 și 2 .

$$Indicație: F(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)}$$

$$R. A = \{3; 4\}.$$

21. Fie a, b, c laturile unui triunghi ABC . Să se calculeze volumul piramidei $SABC$ știind că $\widehat{BSC} = \widehat{CSA} = \widehat{ASB} = 90^\circ$.

Indicație: Fie $SA = x$; $SB = y$; $SC = z$.

$$V = \frac{xyz}{6} \text{ însă } x = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 - a^2}}{2}; y = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{2}; z = \frac{\sqrt{a^2 + c^2 - b^2}}{2};$$

$$V = \frac{\sqrt{(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)}}{48}.$$

22. Pe planul dreptunghiului $ABCD$ cu dimensiunile $a/\sqrt{7}$ și $a/\sqrt{5}$ se ridică perpendicularele $AN = a/\sqrt{2}$ și $CM = 3a/\sqrt{2}$. Fie O intersecția diagonalelor dreptunghiului $ABCD$ (dimensiunile în cm).

a) Să se determine perimetrul triunghiului MNO .

b) Să se afle volumul poliedrului $MNABCD$.

Indicație: Vezi piramida cu vârful în B și baza $AMNC$ din figura III.1.

R. a) $a(3\sqrt{5} + \sqrt{21})$ cm

b) $8a^3\sqrt{2}$ cm³

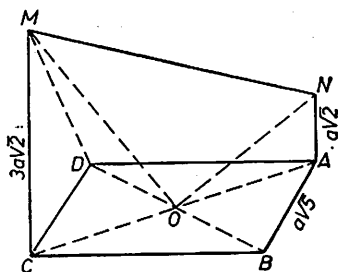


Fig. III.1

23. Se dă fracția:

$$F(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 5x + 6}.$$

Se cere:

a) Să se determine mulțimea B ale cărei elemente sunt valorile lui $x \in Z$ pentru care valoarea lui $F(x)$ este cuprinsă între -2 și 5 .

b) Pentru ce valori ale lui $x \in Z$ expresia $F(x)$ este negativă.

c) Să se determine mulțimea C ale cărei elemente sunt valorile lui $x \in Z$ pentru ca $F(x) \cdot \frac{x-2}{8} \in Z$.

d) Pentru ce valori ale lui x expresia $F(x) \cdot \frac{8}{x+4}$ este un număr întreg.

R. a) $B = \left\{ x \in Z \mid x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{7}{2}, \infty\right) \right\};$

b) $-4 < x < 2; \{-3; -2; -1; 0; 1\};$

c) $x = 18 - 4$

d) $\{-10; -6; -3; -1; 0; 6\}.$

24. Baza piramidei $SABCD$ este un dreptunghi $ABCD$ cu lungimea de 16 cm, lățimea $BC = 12$ cm și înălțimea piramidei cade în centrul bazei.

La mijlocul muchiei SB se ia un punct M , iar pe mijloacele laturilor AB și BC punctele N , respectiv P . Unghiul $\widehat{MNP} = 60^\circ$.

Se cere:

a) Volumul solidului $BNPM$.

b) Volumul piramidei $SABCD$.

R. a) $V = 40\sqrt{3}$ cm³,

b) $V = 640\sqrt{3}$ cm³.

25. O piramidă cu vârful S are ca bază triunghiul dreptunghic ABC ($\widehat{A} = 90^\circ$) iar înălțimea ei cade în A . Ipotenuza este de 25 cm, o catetă este cu 5 cm mai mare decât cealaltă și înălțimea piramidei este egală cu suma catetelor.

a) Să se afle aria laterală și totală și volumul piramidei.

b) Dacă notăm unghiul muchiei SB cu planul bazei cu α și al muchiei CS cu planul bazei cu β , să se demonstreze relația

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = 1$$

R. $\begin{cases} Al = 1\,075 \text{ cm}^2, \\ a) \begin{cases} At = 1\,225 \text{ cm}^2, \\ V = 1\,750 \text{ cm}^3. \end{cases} \end{cases}$

26. Să se determine a și b astfel încît polinomul $P(x) = x^4 + ax^3 - x^2 + bx + 3$ împărțit la $x - 2$ să dea restul 3 și împărțit cu $x - 1$ să dea tot restul 3.

R. $a = -2$; $b = 2$.

27. Un cilindru cu înălțimea de 10 cm are baza înscrisă într-un trapez isoscel al cărui perimetru este de 40 cm, iar baza mică de 8 cm. Pe axa cilindrului se ia un punct N situat la distanța x de baza cilindrului și se scoate conul care are ca bază baza cilindrului și vîrf în N .

1) Să se exprime în funcție de x volumul corpului rămas după scoaterea conului menționat.

2) Să se alcătuiască tabloul de variație al funcției.

3) Să se construiască graficul acestei funcții. (Se va lua 1 cm pentru 10π cm.)

4) Să se determine x astfel încît corpul rămas să aibă un volum dat b cm³.

5) Între ce limite trebuie cuprins numărul b pentru ca problema să fie posibilă?

R. 1) $V = 240\pi - 8\pi x$; $x \in [0, 10]$.

5) $0 \leq x \leq 10$ se obține $160\pi \leq b \leq 240\pi$.

28. Să se discute sistemul

$$\begin{cases} \frac{x}{m-1} + \frac{y}{m} = 2, \\ 2x + 3y = 5m - 2. \end{cases}$$

2) Să se găsească soluția sistemului în cazul cînd sistemul este compatibil și determinat.

3) Pentru ce valori ale lui m , x și y reprezentînd soluția sistemului, rădăcinile sînt invers proporționale cu numerele 2 și $\frac{3}{2}$?

R. 1) $m \neq 0$ și $m \neq 1$ fracțiunile să aibă sens.

Pentru $m \neq -2$ sistemul este compatibil și determinat.

Pentru $m = -2$ sistemul este nedeterminat.

$$2) \begin{cases} x = m - 1; \\ y = m. \end{cases} \quad 3) m = 4.$$

29. Se dă paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ în care $AB = AD = a$ și $\widehat{CAC'} = 45^\circ$. La ce distanță de A se găsesc proiecțiile ortogonale ale punctelor B , C , D pe diagonala AC' ?

Indicație. Se observă triunghiurile ABC' și ACC' . Fie I proiecția lui B pe AC' .

$$AI = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$$

D și B fiind simetrice în raport cu planul ACC' proiecția lui D pe AC' coincide cu I . Fie K proiecția lui C pe AC' ; $AK = a$.

30. Știind că $x + y = a$ și $xy = b$, să se calculeze în funcție de a și b expresiile:

a) $x^2 + y^2$,

b) $x^3 + y^3$,

c) $x^4 + y^4$.

R. a) $a^2 - 2b$,

b) $a^3 - 3ab$,

c) $(a^2 - 2b)^2 - 2b^2$.

31. Baza tetraedrului $SABC$ este triunghiul ABC în care latura BC este egală cu înălțimea $AD = a$.

a) La ce distanță de vârful A trebuie să se ducă o paralelă MN la BC pentru ca aria trapezului $MNCB$ să fie de trei ori mai mare decât aria triunghiului AMN .

b) Fie SA înălțimea tetraedrului $= 2a$ și $\widehat{ASD} = \alpha$. Să se arate că $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 2\sqrt{2}$.

c) Să se determine volumul tetraedrului dat.

$$\text{R. } \frac{a^3}{3}.$$

32. Se dă expresia:

$$f(x) = \frac{8(2x^3 - 6x^2 + 6x - 4)}{(2x^2 - 2x + 2)(x - 2)^2}.$$

a) Să se determine mulțimea A ale cărei elemente sînt valorile lui $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $f(x)$ este cuprinsă între -5 și 9 .

b) Pentru ce valori ale elementelor mulțimii, $f(x)$ este un număr întreg.

$$\text{R. } x \in \left(-\infty, \frac{2}{5}\right) \cup \left(\frac{26}{9}, \infty\right)$$

$$M = \{-6; -2; 0; 1; 3; 4; 6; 10\}.$$

33. Un paralelipiped dreptunghic are înălțimea egală cu b și bazele $ABCD$ (respectiv $A'B'C'D'$) pătrate de latură a . Pe muchiile BB' și DD' se iau segmentele BM , respectiv BN de lungime x . Să se găsească forma secțiunii definite de planul AMN în paralelipiped în funcție de x .

Indicație: Pentru $x \leq \frac{b}{2}$ secțiunea este un romb;

$\frac{b}{2} < x < b$ (pentagon) dacă $x = b$ secțiunea este un triunghi isoscel.

34. Să se determine a și b numere naturale știind că:

$$(1 + a)(1 - b) = 10 - 2ab.$$

$$\text{R. } a = 3; b = 3.$$

35. Să se determine valoarea numerică a expresiei

$$y^2 - 1 + 4x^4y^2 - 4x^2y^2 \text{ știind că } x^2 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{R. } -1.$$

36. Să se determine x și y (numere naturale) știind că:

$$(2 - x)(2 + y) + 3xy = 12$$

$$\text{R. } x = 2; y = 2;$$

$$x = 0, y = 4.$$

37. Se dă o piramidă pătratică regulată cu vârful V și baza $ABCD$ ($VA = VB = VC = VD = a$) și unghiurile de la vîrf ale fețelor laterale sînt de 30° . Se consideră linia ce pornește din vârful A și merge pe toate fețele laterale pînă revine în punctul A (traseul se compune din segmente de dreaptă). Se notează cu B', C', D' punctele unde linia traversează respectiv muchiile VB, VC, VD . Se cere:

a) Să se desfășoare pe un plan suprafața laterală a piramidei și să se traseze pe ea linia parcursă;

b) Cînd este drumul acesta cel mai scurt și în acest caz să se afle lungimea lui;

c) Unghiurile sub care linia trasată taie muchiile laterale.

R. b) $a\sqrt{3}$;

c) $120^\circ; 90^\circ; 60^\circ$.

38. Să se arate în ce condiții produsul a 3 numere consecutive este divizibil cu 24?

Indicație: Se ține seamă că $n(n+1)(n+2)$ este divizibil cu 6 și $2K(2K+1)(2K+2)$ se mai poate scrie $4K(K+1)(2K+1)$; $K \in \mathbb{N}$.

R. Primul număr să fie de forma $2K$.

39. Să se găsească toate numerele naturale x pentru care numărul $x^4 + 4$ este prim.

Indicație: Se va descompune expresia în doi factori și se va pune condiția ca unul din factori să fie 1; se găsește că $x = 1$.

40. Considerăm rotația completă a unui trunghi ABC în jurul tangentei în A la cercul circumscris. Să se exprime aria născută de BC cu ajutorul laturilor a, b, c ale triunghiului.

Indicație: Se naște din BC un trunchi de con; ducînd înălțimea din A , se formează două triunghiuri asemenea cu triunghiurile formate de perpendicularele coborîte din B și C pe tangentă cu laturile AB și AC . Se găsește:

Aria laterală tr. con = $\frac{2\pi S(b^2 + c^2)}{bc}$; ($S = \text{aria } \triangle ABC$).

Dacă $\hat{A} = 90^\circ$ atunci aria descrisă de BC este $a^2\pi$.

41. Se consideră polinomul cu coeficienți întregi

$$P(x) = ax^2 + bx + c.$$

Să se arate că dacă pentru orice număr întreg m , restul împărțirii polinomului $P(x)$ prin $x - m$ este un multiplu de 3, atunci numerele a, b, c se divid prin 3.

42. a) Să se arate că expresia:

$E = xy(xy - 9) + 2(x^2 + y^2) + (x - y)(3xy - 6)$ este divizibilă prin 4 oricare ar fi x și y numere întregi.

b) Să se simplifice fracția: $\frac{E + 4}{y^2 + 3y + 2}$.

c) Să se arate că $\frac{E + 4}{x^2 - 3x + 2} \cdot \frac{E + 4}{y^2 + 3y + 2}$ este divizibilă prin 4.

d) Să se verifice identitatea: $\frac{E + 4}{(x - 1)(x - 2)} = (y + 1)(y + 2)$.

Indicație: După desfacerea parantezelor se adaugă și se scade 4; se obține:

$$x^2y^2 + 3x^2y + 2y^2 - 3xy^2 - 9xy - 6x + 2x^2 + 6y + 4 - 4.$$

Expresia se poate scrie: $(x-1)(x-2)(y+1)(y+2) - 4$, care este divizibilă prin patru, fiindcă prima parte este produs de cîte 2 numere consecutive, deci se divide cu 4 și 4 este și el divizibil prin el însuși.

R. b) $(x-1)(x-2)$.

43. Să se arate că suma formată dintr-un număr pozitiv oarecare (diferit de 1) și inversul său este mai mare decît 2.

44. Să se determine mulțimea A ale cărei elemente sînt valorile lui x pentru care $f(x) = \frac{2x^2 + 16x - 18}{x^2 + 5x - 6}$ este un număr întreg și pozitiv.

$$\text{Indicație: } f(x) = \frac{2(x+9)}{x+6} = \frac{2x+18}{x+6} = \frac{2x+12+6}{x+6} = \frac{2(x+6)+6}{x+6} = 2 + \frac{6}{x+6}.$$

R. $A = \{-12; -5; -4; -3; 0\}$.

45. Se dă expresia:

$$f(x) = \frac{1 + \frac{x}{2 + \frac{1}{x}}}{x^4 + 4x^2 + 1} \cdot 8(x-1)^2$$

Să se arate că $f(x)$; $(x \in \mathbb{N})$ este ireductibilă.

46. Să se efectueze:

$$\frac{a^2 + b + 1 - 2a\sqrt{b} + 2a - 2\sqrt{b}}{a^2 - b - 1 + 2\sqrt{b}} - \frac{a - \sqrt{b} + 1}{a + \sqrt{b} - 1}.$$

Indicație: Se transformă mai întîi termenii primei fracții în produse de factori.

R. 0.

47. Fie b aria bazei unei piramide, h înălțimea și b' aria secțiunii făcută printr-un plan paralel cu baza, la o distanță de vîrf egală cu o treime din înălțime. Să se demonstreze că volumul piramidei se poate exprima astfel.

$$V = \frac{h(b + 3b')}{4}.$$

Indicație:

$$b' = \frac{b}{9}.$$

48. Să se simplifice:

$$\frac{x^2 + 2x + 2x\sqrt{y} + y + 2\sqrt{y}}{x^2 - x + x\sqrt{y} - \sqrt{y}} \cdot \frac{x-1}{x + \sqrt{y} + 2}$$

R. 1.

49. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 30 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \end{cases}$$

Indicație: $\frac{x+y}{xy} = \frac{5}{6}$.

R. $\begin{cases} x=2; y=3; x=3; y=2 \\ x=1; y=-6; x=-6; y=1. \end{cases}$

50. Să se arate că:

$$\frac{a^5 + b^5 + 2a^4b + 2ab^4 + a^3b^2 + a^2b^3}{(a+b)^2} > a^2b + ab^2$$

pentru $a > 0$ și $b > 0$.

Indicație: Se împart ambii membri cu $(a+b)$.

51. Să se demonstreze că dacă $a > 0$; $b > 0$; $c > 0$ atunci.

a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$

b) $\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$.

c) $ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) \geq 6abc$.

Indicație:

Se împarte cu abc și se știe că $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

52. Într-un triunghi isoscel ABC ($AB = AC$) construim $AD \perp BC$ ($D \in BC$) și $DM \perp AC$ ($M \in AC$). Fie G mijlocul lui DM ; $BM \cap AG = \{N\}$. Să se arate că $AN \perp BM$.

Indicație: Fie P mijlocul lui MC . Se observă cele trei înălțimi ale triunghiului ADP și se ține seamă că $DP \parallel BM$ și este linia mijlocie în triunghiul BMC .

53. Să se demonstreze următoarea inegalitate

$$a^2 - ab + b^2 > 0 \quad \text{cu condiția } a > 0; b > 0.$$

Indicație: $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$.

54. Se dă expresia:

$$f(x) = \frac{x^5 + x + 1}{x^2 + x + 1} - x^3 + 2x^2 + 2x.$$

Să se arate că oricare ar fi $x \in R$, $f(x)$ este pozitivă.

Indicație: Se efectuează împărțirea și se observă citul și împărțitorul.

55. Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC se construiesc în exterior, pătratele $ACDE$ și $ABGF$. Fie AN mediană în triunghiul ABC ($N \in BC$), $NA \cap EF = M$. Să se arate că $MN \perp FE$.

Indicație: Fie A' simetricul punctului A în raport cu N ; se formează paralelogramul $ABA'C$; se studiază triunghiurile AEF și $A'CA$ care sînt egale; $\angle BAC + \angle PAE = 180^\circ$.

56. Se dă un pătrat $ABCD$. Se construiește pe latura BC ca bază, în interiorul pătratului, un triunghi isoscel OBC , avînd unghiurile egale de 15° (fig. III.2).

Să se demonstreze că triunghiul OAD este echilateral.

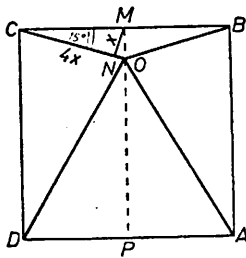


Fig. III.2

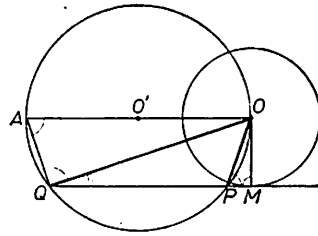


Fig. III.3

Indicație:

a) În triunghiul dreptunghic OMC , înălțimea $MN = x$ este a patra parte din $OC = 4x$.

b) Se exprimă în două moduri OM din care rezultă $16x^2 - \frac{a^2}{4} = OM^2 = 4x \cdot ON$;

dar $ON = 4x - NC$ și $NC^2 = \frac{a^2}{4} - x^2$; reiese că $OP = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; rezultă că triunghiul AOD este echilateral.

Observare: Se poate demonstra și aplicind metoda reducerii la absurd, aceasta este însă mai puțin elegantă.

57. Să se arate că dacă există relațiile:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

$$x + y + z = 1$$

atunci $xy + yz + zx = 0$.

58. Se dau două cercuri de raze r_1 și r_2 , unul din ele avînd centrul O pe celălalt cerc. Tangenta într-un punct M , variabil pe cercul O , taie al doilea cerc în P și Q . Să se demonstreze că $2r_1r_2 = OQ \cdot OP$ (fig. III.3).

59. Dîndu-se relațiile:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1,$$

$$x + y + z = 1.$$

Să se arate că există egalitatea $(1 - x)(1 - y)(1 - z) = 0$.

Indicație: $(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y)(x + z)(y + z)$.

60. Dacă $a + b + c = 0$ atunci avem:

$$c^2 - a^2 - b^2 = 2ab.$$

61. Într-un tetraedru regulat $SABC$ de muchie a și virful S se face o secțiune printr-un plan, ce trece prin A , P , Q (P și Q sînt situate pe SC respectiv SB) astfel încît $SP = 2PC$ și $SQ = 2QB$. Să se afle aria secțiunii PAQ și volumul piramidei $ABCPQ$ cu virful în A .

$$\text{R. a) } \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \text{ cm}^2, \quad \text{b) } \frac{2a^3\sqrt{2}}{27} \text{ cm}^3.$$

62. Fie piramida $VABCD$ cu baza un trapez $ABCD$, ($AD = BC = 10$ cm și baza mare $AB = 15$ cm). Bisectoarea unghiului $\hat{A}$ intersectează diagonala BD în O . $VO = 3$ cm este perpendiculară pe planul $ABCD$; $BO = 6$ cm. Să se calculeze perimetrul tr. VOD .

R. 12 cm.

63. Laturile unui triunghi dreptunghic sînt: a, b, c (a fiind ipotenuza, iar h înălțimea dusă din vârful unghiului drept). Dacă relația $a^2 - 4ah + h^2 = 0$ satisface un triunghi dreptunghic, atunci și relația $b^4 - 4b^3c + 3b^2c^2 - 4bc^3 + c^4 = 0$ satisface triunghiul dat.

64. Într-un triunghi ABC se duce prin B și prin mijlocul O al medianei AD o dreaptă care taie pe AC în E . Să se arate că

$$\frac{AE}{EC} = \frac{1}{2} \quad \text{și} \quad \frac{OE}{OB} = \frac{1}{3}.$$

Indicație: Din D se duce paralela la BE .

65. Să se arate că dacă a, b, c sînt laturile unui triunghi oarecare atunci există relația:

$$4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 > 0.$$

66. Să se discute sistemul:

$$\begin{cases} \frac{x}{a-1} + \frac{y}{2a+1} = 1 & a \neq 1 \text{ și } a \neq -\frac{1}{2} \\ 4(x+y) = -12 \end{cases}$$

R. $a \neq -2$ sistem compatibil și determinat
 $a = -2$ sistemul este nedeterminat

67. Se dă o prismă ce are ca bază paralelogramul $ABCD$ cu perimetrul de 30 cm. Bisectoarele unghiurilor consecutive $\hat{A}$ și $\hat{B}$ ale paralelogramului se intersectează în M ($M \in DC$). Se știe că MB și MA sînt exprimate prin două numere naturale. Se mai știe că muchia prisme drepte este 3,6 cm, egală cu VM înălțimea piramidei ce are ca bază triunghiul AMB .

Se cere:

- a) Volumul prisme.
 b) Aria laterală a piramidei $VMAB$.

Indicație: $\triangle AMB$ dreptunghic are ipotenuza $AB = 10$ cm. Notăm $MA = x$; $MB = y \Rightarrow 100 - x^2 = y^2 \Rightarrow (10 - x)(10 + x) = y^2$, dar $x < 10 \Rightarrow (10 - x) \in N$ este cuprins între 1 și 9, iar $(10 + x)$, $x \in N$, cuprins între 9 și 19; Prin încercări numai 6 și 8 dă un pătrat perfect.

R. $V = 172,8$ cm³,

b) $Al = 74,4$ cm².

68. Să se arate că dacă într-un triunghi ABC , două drepte BM și CN ($M \in AC$); ($N \in AB$) se intersectează pe înălțimea AD ($D \in BC$), atunci această înălțime este bisectoarea unghiului $\widehat{MDN}$.

Indicație: $NN' \perp BC$; $MM' \perp BC$; $\triangle NN'D \sim \triangle MM'D$.

69. Se dă expresia:

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{x}}}}$$

- a) Să se determine $x \in R$ pentru care fracția dată este negativă.
b) Să se determine x pentru care fracția dată este un număr întreg negativ.

R. a) $\frac{3}{4} < x < \frac{4}{5}$; b) $\emptyset$.

- 70*. Se dă polinomul $P(x) = 12x^3 - 40x^2 + 27x - 5$. a) Să se determine a, b, c astfel încât $P(x)$ să poată fi pus sub forma $(3x - 1)(ax^2 + bx + c)$. b) Să se determine mulțimea valorilor lui x pentru care $P(x) = 0$.

R. a) $a = 4$; $b = -12$; $c = 5$; b) $\left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right\}$.

71. Să se determine un polinom $P(x)$ de gradul trei în care x are coeficientul 1, știind că împărțind $P(x)$ la $x - 1$; $x - 2$; $x - 3$ dă de fiecare dată restul 6.

R. $x^3 - 6x^2 + 11x$.

72. Să se demonstreze că un tetraedru regulat are două muchii perpendiculare.

73. Laturile unui triunghi cu un unghi de 60° sint a, b, c . Să se arate că în acest caz există relația: $a^2 + b^2 - c^2 = ab$.

74. Să se determine x, y, z numere naturale care verifică egalitatea: $x^{y^z} = 8$.

Indicație: dacă $x = 1$ egalitatea este imposibilă; dacă $x \geq 2 \Rightarrow y^z \leq 3 \Rightarrow y^z \in \{1, 2, 3\}$

R. $(8, 4, 1)$ și $(2, 3, 1)$.

75. Se dă sectorul circular cu raza de 27 cm și unghiul la centru de 60° . Se cere volumul conului ce are ca bază cercul înscris în sectorul dat și înălțimea mai mare ca diametrul cercului de bază cu 0,1(6) din acesta.

R. $V = 576\pi \text{ cm}^3$.

76. Se dă polinomul $f(x, y) = 9x^4 + 12x^2y + 6y^2 - y^4 - 1$. Ce devine polinomul $f(x, y)$ dacă $3x^2 + 2y + y^2 = 1$.

R. $= 0$.

77. Se dă un polinom $P(x)$ a cărui sumă a coeficienților este 0 și un alt polinom de gradul 1000 a cărui sumă a coeficienților este 200. Să se afle suma coeficienților restului împărțirii polinomului de gradul 1000 la $P(x)$.

Indicație. Un polinom de o variabilă se reduce la suma coeficienților săi dacă înlocuim variabila cu 1.

O.M. R. 200.

78. În triunghiul dreptunghic ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) se știe că $BC = 2AC$. Să se arate că $\frac{(\sin B + \cos B)^2}{\operatorname{ctg} C} - \frac{6 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \cos C + \sin B$.

79. Fiind dată mulțimea $M = \{0; 2; 3; 4; 5; 6\}$ și polinomul $f(a, b) = a^4 - b^4 - 4a^2b + 2b^2 - 1$. Să se arate că dacă $a - b = 1$ atunci valoarea numerică a polinomului $f(a, b) \in M$.

Indicație: Se descompune $f(a, b)$ într-un produs de trei factori.

R. $f(a, b) = 0$.

80. Într-un triunghi dreptunghic ABC , notăm cu O mijlocul ipotenuzei BC . Unghiul $B > C$. Dreapta BC intersectează perpendiculara din A pe OA în D . Pe dreapta BD luăm segmentul $DE = AD$ (D este situat între E și B).

a) Să se determine unghiul $\widehat{CAE}$.

b) Să se arate că perpendiculara în A pe AE este bisectoarea unghiului BAC .

R. $\widehat{CAE} = 135^\circ$.

81. Fiind dată egalitatea $3x + 6y = 95$. Să se arate că nu există soluții în mulțimea numerelor naturale care să satisfacă egalitatea:

Indicație: Se va studia expresia $3(x + 2y) = 95$.

82. Să se determine mulțimile A și B care îndeplinesc condițiile:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$(B - A) \times (A - B) = \{(1, 6); (1, 8); (1, 9); (5, 6); (5, 8); (5, 9); (7, 6); (7, 8); (7, 9)\}.$$

G.M.

Indicație: $B - A = \{1, 5, 7\}$; $A - B = \{6, 8, 9\}$. Dacă $B - A = \{1, 5, 7\} \Rightarrow \{1, 5, 7\} \subset B$ și $1 \notin A$. Dacă $A - B = \{6, 8, 9\} \Rightarrow \{6, 8, 9\} \subset A$ și $2 \notin B$ nu conține nici unul din aceste elemente. Să cercetăm cui aparțin 2 și 3. Dacă $2 \in A$ și $2 \notin B \Rightarrow 2 \in A - B$ fals. Dacă $2 \notin A$ și $2 \in B \Rightarrow 2 \in B - A$.

Dacă $2 \in A$ și $2 \notin B \Rightarrow 2 \in A - B$ și dacă $2 \notin B - A \Rightarrow 2 \in A \cap B$. Se cercetează analog și pentru 3; $3 \in A \cap B$.

R. $A = \{2, 3, 6, 8, 9\}$; $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$.

83. Dacă $a > 0$; $b > 0$ și $a + b = 1$, să se arate că $0 \leq ab \leq \frac{1}{4}$.

Indicație $(a - b)^2 \geq 0$; $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$.

84. Să se arate că polinomul $16x^4 + 2^{99} - 8^{33} - 16x^2 - 3^{69} + 27^{23} + 3^{27} : 27^9 + 23 \geq 20$ oricare ar fi $x \in R$.

85. Un loc de formă circulară cu diametrul de 16 m este împărțit în 4 fișii de aceeași lățime. Pe cele două fișii din mijloc s-au plantat pomi iar pe celelalte două s-au semănat flori.
Se cere:

- 1) Prin cuplarea celor două fișii semănate cu flori s-ar obține un teren de forma unui cerc? Justificați răspunsul.
 2) Să se calculeze aria fiecărei fișii de teren.

R. Două fișii de câte 39, 68 m². Două fișii de câte 60,80 m².

86. Să se arate că fracția $f(x) = \frac{x^4 + 5x^2 + 4}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}$; $x \in N$, este periodică

Indicație:

$f(x) = \frac{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}{(x + 1)(x + 2)(x + 3)}$ din care se vede că numitorul este un multiplu de 3; și ca $f(x)$ să fie periodică trebuie ca numărătorul să nu fie $M3$.

87. Aria totală a unui con este egală cu aria laterală a unui cilindru a cărui rază este $\frac{11\pi}{9}$ din generatoarea sa.

Conul a cărui arie laterală este de 10 cm² este obținut dintr-un sector de cerc cu unghiul la centru de 36°.

Să se calculeze aria totală a cilindrului.

$$R. \left(11 + \frac{11^2\pi}{9} \right) \text{ cm}^2.$$

88. Se dă expresia:

$$f(x) = \frac{\left(\frac{x^2 - x}{x^2 + 1} + \frac{2x^2}{x^3 + x - x^2 - 1} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)}{(27 - 125x^3) : (25x^2 + 9 + 15x)}.$$

Să se afle pentru ce valori ale lui x expresia $f(x) \leq -1$.

$$R. x \in \left[-\frac{1}{5}; 0 \right) \cup \left(\frac{3}{5}; 1 \right].$$

89. Fie cercul O și o coardă AB . Prin punctul M , mijlocul arcului AB se duc două coarde arbitrare care intersectează coarda AB respectiv în E și C iar cercul în D și F .

Să se arate că patrulaterul $DFEC$ este inscripțibil.

Indicație: $\widehat{MFD} + \widehat{DCE} = 180^\circ$.

90. Să se arate că triunghiul ale cărui laturi x, y, z satisfac relația:

$$\frac{z-y}{x} + \frac{x-z}{y} - \frac{y-x}{z} = 0 \text{ este isoscel.}$$

91. Fie mulțimile:

$$A = [-6, 0) \cup [5, 9),$$

$$B = (-4, 5] \cup (8, 20].$$

Să se determine: $A \cap B$; $A \cup B$.

Soluția grafică

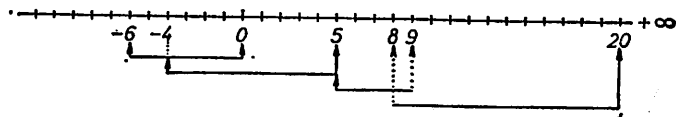


Fig. III.4

$$A \cap B = (-4, 0) \cup \{5\} \cup (8, 9),$$

$$A \cup B = [-6, 20] \text{ (fig. III.4)}$$

92. În cercul O se duce diametrul AB ; pe tangenta în A , se ia de o parte și de alta a punctului A , două puncte arbitrare C și D . Dreptele BC , BD taie cercul în punctele E și F . Să se arate că patrulaterul $CDFE$ este inscriptibil.

Indicații: $\widehat{BCD} = \widehat{BFE}$ (au aceeași măsură).

93. La o împărțire deîmpărțitul a fost 11 897 și restul 279. Se mai știe că primul rest parțial este 247. Să se reconstituie împărțirea.

G.M.

Indicație: Primul rest fiind 247, înseamnă că primul deîmpărțit parțial este 1189, deci al doilea deîmpărțit parțial este 2477 și efectuând împărțirea obținem a doua cifră a citului și restul 279.

$2477 - 279 = 2198$ care este divizibil cu împărțitorul, b fiind a doua cifră a citului, una din cifrele de la 1 până la 9. Se verifică ușor că $b = 7$ și $i = 314$.

Acum e ușor de aflat prima cifră a citului a , deci $\overline{ab} = 37$ și împărțitorul 314.

94. Să se determine $x \in R$ pentru care expresia

$$f(x) = \left[\left(\frac{2x-1}{x+1} \right)^2 + 1 + \frac{4x-2}{x+1} \right] \cdot \frac{2x^2+x-1}{9x^2} \text{ este negativă}$$

Indicație: $2x^2 + x - 1 = 2x^2 + 2x - x - 1$.

$$R. -1 < x < \frac{1}{2}.$$

95. Două cercuri se taie în A și B . Tangentele în A la cele două cercuri le reiaie în punctele C și D . Cunoscând că $AD = 10$ cm; $BD = 8$ cm și $BC = 2$ cm, să se calculeze AC .

Indicație: $\triangle ABC \sim \triangle ABD$.

$$R. AC = 5 \text{ cm.}$$

96. Se dă polinomul $f(x, y) = x^6 y^2 + 2x^4 y - 2x^3 y^2 - 2xy + y^2 - 3x^3$. Să se determine valoarea numerică a lui $f(x, y)$ pentru $x^3 - 1 = 0$.

Indicație: $f(x, y) = (x^3 y - y + 3x)(x^3 y - x - y)$.

$$R. f(x, y) = -3.$$

97. Se dau polinoamele: $E_1 = 2a^4x + 8x(b^2 + 1) + a^4 + 4b^2 + 4$; $E_2 = (2ax + 2b)^2 - (x + 2)^2$

$$a \in R; b \in R; x \in R.$$

- a) Să se arate că oricare ar fi a și b , E_1 depinde numai de x dacă $E_1 = 0$.
b) Oricare ar fi x , să se determine a și b pentru care $E_2 = 0$.

Indicație: $E_1 = (2x + 1)(a^4 + 4b^2 + 4)$ dar $a^4 + 4b^2 + 4 \neq 0$; $E_2 = [x(2a + 1) + 2b + 2][x(2a - 1) + 2b - 2]$

$$R. E_2 = 0 \Rightarrow b = 1; a = \frac{1}{2} \text{ sau } a = -\frac{1}{2}, b = -1.$$

98. Se dă $f(x) = \frac{3x^2 - 4x - 4}{4x^2 - 7x - 2}$ a) Pentru ce valori ale lui x , $f(x)$ se simplifică

$$R. M_5 + 1$$

99. Să se determine $x \in N$ pentru care expresia $\frac{6x + 5}{7x + 4}$ se simplifică.

Indicație: Dacă două numere naturale au un divizor comun și diferența lor are acel divizor.

$$\begin{cases} 7x + 4 - 6x - 5 = x - 1 \\ 42x + 35 - 42x - 24 = 11 \end{cases} \Rightarrow \frac{x - 1}{11} \text{ ca să fie un număr întreg } x - 1 = M_{11} \Rightarrow x = M_{11} + 1.$$

$$Verificare: 121 + 1 = 122.$$

$$\frac{6 \cdot 122 + 5}{7 \cdot 122 + 4} = \frac{737}{858} = \frac{67}{78}.$$

100. * Să se verifice egalitățile:

$$1) M - (N \cup C) = (M - N) \cap (M - C),$$

$$2) M - (N \cap C) = (M - N) \cup (M - C)$$

$$M = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\};$$

$$\text{pentru } N = \{2; 4; 6; 8; 10\};$$

$$C = \{3, 6, 9\}.$$

G.M.

$$\text{Indicații: } 1) N \cup C = \{2; 3; 4; 6; 8; 9; 10\},$$

$$M - (N \cup C) = \{1; 5; 7\},$$

$$M - N = \{1; 3; 5; 7; 9\},$$

$$M - C = \{1; 2; 4; 5; 7; 8; 10\}.$$

$$\text{Deci } M - (N \cup C) = (M - N) \cap (M - C) = \{1, 5, 7\}$$

$$2) N \cap C = \{6\}; (M - N) \cup (M - C) = \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 8; 9; 10\}.$$

$$M - (N \cap C) = M - \{6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$$

$$\text{Se verifică că } M - (N \cap C) = (M - N) \cup (M - C) = \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 8; 9; 10\}.$$

101. Se dă polinomul $f(a, b) = 16a^4 - 8a^2b^2 - 4b^2 + b^4 - 4b - 1$.

Să se calculeze valoarea polinomului $f(a, b)$ pentru $2a - b = 1$.

R. 0.

102. Se dă expresia $f(x) = \frac{3x + 10}{2x + 1}$

Să se determine mulțimea M ale cărei elemente sînt valorile lui $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $f(x)$ se simplifică.

Indicație: dacă numărătorul și numitorul lui $f(x)$ au un divizor comun și diferența lor are același divizor.

R. $M = 17 - 9$.

103. Să se stabilească domeniul pe care inegalitatea este adevărată:

$$\left[\frac{x^4}{(x^2 - 1)^2} + \frac{2x^2}{1 - x} \cdot \frac{x^2 - 1}{x} \cdot \frac{x}{x^3 - x + x^2 - 1} + 1 \right] : \frac{1}{x^4 - 2x^3 + 2x - 1} < 0.$$

R. $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$.

104. Se dă prisma $ABCD A'B'C'D'$ cu baza un dreptunghi ale cărui dimensiuni sînt invers proporționale cu numerele $3/2$ și 2 . Lungimea dreptunghiului AB este cu $0,5$ cm mai mare decît lățimea.

Știind că planul $ABC'D'$ face cu planul bazei un unghi de 60° , să se afle volumul prisme.

R. $V = \frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^3$.

105. Dintr-un sector circular se confecționează un con cu unghiul de la vîrf de 90° în care $\frac{5}{4\sqrt{2}}$ din aria laterală este echivalentă cu aria totală a unui cilindru înscris în con a cărui rază este de 5 cm. Să se determine elementele sectorului de cerc din care s-a confecționat conul.

R. $\begin{cases} \text{Unghiul la centru de } 180 \sqrt{2}^\circ. \\ \text{Raza cercului} = 8 \sqrt{2} \text{ cm.} \\ \text{Lungimea arcului de cerc } 16\pi \text{ cm.} \end{cases}$

106. Pentru ce valori ale lui $x \in \mathbb{R}$ expresia:

$$f(x) = \left[\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{(x^2 - 1)(x + 1)} + \frac{1}{x} \right] \cdot \frac{x}{x^2 + 1} \cdot \frac{(8 + x^3)^3}{x^4 - 2x^3 + 4x^2} : \frac{x + 2}{x^2}$$

R. $x \in (-\infty; -1) \cup \{-2\}$.

este negativă.

107. Fie trapezul $ABCD$ cu unghiurile de la bază de 30° și 45° . Se știe că jumătate din înălțimea trapezului este cu 1 cm mai mică decît $2/3$ din baza mică și raportul dintre baza mică și înălțime este $3/2$. Să se pună în evidență (schită) corpurile ce se formează prin rotația trapezului în jurul laturii neperalele, corespunzătoare unghiului de 30° și să se calculeze elementele acestor corpuri.

108. Se dau expresiile:

$$A = \left(\frac{2x^2}{x^3 - x^2 + x - 1} + \frac{x^2 - x}{x^2 + 1} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2} \right),$$

$$B = \left[\frac{x}{x+1} - \frac{x^3}{x-1} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} \right) \right] \cdot \frac{x^2}{2x+1}.$$

Să se arate că $A/B < 0$, oricare ar fi $x \in R$.

Indicație. Se obține $A = \frac{x+1}{x}$;

$$R. B = \frac{-x}{x+1}.$$

109. Dintr-un sector circular cu aria de $240 \pi \text{ cm}^2$ și unghiul la centru de 216° se confecționează un con. La $3/4$ din înălțimea conului față de vîrf se face o secțiune paralelă cu baza.

Să se calculeze aria sferei înscrisă în conul ce are ca bază cercul de secțiune.

$$R. 81\pi \text{ cm}^2.$$

110. Să se determine mulțimea M ale cărei elemente $x, y \in N$ știind că x și y sînt numere consecutive neprime, astfel încît $xy < 80$.

$$R. M = \{8; 9\}.$$

111. Să se determine mulțimile A și B cunoscînd că:

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

$$A \cap B = \{2, 3, 4, 5\},$$

$$7 \notin A - B,$$

$$6 \notin B - A.$$

$$R. A = \{2, 3, 4, 5, 6\}.$$

$$B = \{2, 3, 4, 5, 7\}.$$

112. Să se arate că dacă între laturile unui triunghi a, b, c există relația:
 $b^2(c^4 + a^4 - b^4) = c^2(a^4 + b^4 - c^4)$ atunci triunghiul este dreptunghic sau isoscel.

Indicație: Relația se mai poate scrie:

$$b^6 - c^6 - a^4(b^2 - c^2) + b^2c^2(b^2 - c^2) = 0.$$

$$\text{sau } (b^2 - c^2)[(b^2 + c^2)^2 - a^4] = 0.$$

113. Se consideră polinoamele:

$$P(x) = x^4 + 4ax^3 + 6bx^2 + 4cx + d,$$

$$Q(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx + c.$$

Dacă $P(x) : Q(x)$ să se arate că $P(x)$ este un pătrat perfect, iar $Q(x)$ un cub.

Indicație: Dacă $P(x) : Q(x)$ va rezulta un cît de gradul I, de exemplu $(x+m)$ și va trebui să avem:

$$(x+m)(x^2 + 3ax^2 + 3bx + c) = P(x).$$

O.M.

Se compară coeficienții și se obține:

$$m = a; b = a^2; c = a^3$$

$P(x)$ devine: $x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4 = (x + a)^4$ iar $Q(x) = x^3 + 3a^2x^2 + 3a^2x + a^3 = (x + a)^3$ ceea ce trebuia demonstrat.

114. Să se arate că inegalitățile următoare nu pot fi simultan adevărate:

$$\begin{cases} a + 4 < 2b + c, \\ a + 2 > b, \\ b + c < 1. \end{cases}$$

Indicație: Se folosesc proprietățile inegalităților.

115. Să se arate că inegalitățile următoare nu pot fi simultan adevărate:

$$\begin{cases} x + 3 < 2y + 2z, \\ x - 4 > y, \\ y + 2z < 3. \end{cases}$$

(vezi exercițiul precedent)

116. Să se determine mulțimile:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + |x| - 12 = 0\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - |x| - 6 = 0\}.$$

$$\text{R. } A = B = \{-3; 3\}.$$

117. Se dă inegalitatea următoare (în care $x \in \mathbb{N}$ și $y \in \mathbb{N}$):

$$\frac{1}{xy^2} + \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^4} + \frac{2}{x-y^2} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y^2}\right)}{(2xy^2 - x^2 - y^4) : xy^2} \geq \frac{3 - x^2 - 2x}{x + 3}.$$

Să se arate în ce condiții inegalitatea este adevărată.

$$\text{R. } x \geq 1.$$

118. Să se arate că fracția $E = \frac{x^4 + 3x^2 + 2}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}$ este periodică, $x \in \mathbb{N}^*$.

119. Un teren de forma unui triunghi dreptunghic cu un unghi de 15° este folosit astfel: $2/9$ din suprafața lui și încă un ar s-a amenajat pentru teren de sport, $5/13$ din suprafața rămasă pentru construcții și restul de 0,08 ha pentru cultivat zarzavaturi.

Se cere:

- Să se determine câți metri pătrați a acoperit terenurile pentru sport și construcții;
- perimetrul terenului;

c) știind că terenul rezervat pentru sport s-a amenajat pentru tenis și pentru fotbal astfel încît suprafețele lor sînt invers proporționale cu numerele 5 și respectiv 5/9, să se calculeze suprafețele acestor terenuri.

R. a) 500 m²; 500 m².

b) $P \approx 267$ m.

c) 50 m² și 450 m²

120. Să se determine $x \in N$ pentru care propoziția următoare este adevărată:

$$\frac{x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1}{(x^2 + x + 1)^2} \geq \frac{3x^3 - x^{12} - 1}{x^3 - x^5 + 1} - x^6.$$

R. $x = 0$.

121. Dacă $x \in N$ să se arate că produsul fracțiilor:

$$\frac{x+2}{2}; \frac{x^3+x^2}{x^2+3x+2}; \frac{x+1}{x} \text{ este un număr natural.}$$

Indicație: $x^2 + 3x + 2 = x^2 + 2x + x + 1 + 1$; produsul devine $\frac{x(x+1)}{2}$.

122. Se dă inegalitatea:

$$\frac{x^4 + y^4 - 3x^2y^2}{2x^2 - 2xy - 2y^2} - \frac{xy - 2y^2}{2} > \sqrt{x^2y^2}.$$

Să se arate că oricare ar fi $x \in R_+$ și $y \in R_+$ inegalitatea este întotdeauna adevărată.

R. $(x - y)^2 > 0$.

123. Se dă propoziția: $10x + 12y = 140$.

Să se determine numerele naturale x și y astfel încît propoziția dată să fie adevărată.

R. $x = 2$, $y = 10$;

$x = 8$, $y = 5$.

124. Fie propoziția $2x + 5y = 40$.

Să se determine x și y (numere naturale) astfel ca propoziția să fie adevărată.

R. $x = 0$; $y = 8$;

$x = 5$; $y = 6$;

$x = 10$; $y = 4$;

$x = 15$; $y = 2$;

$x = 20$; $y = 0$.

125. Să se arate că oricare ar fi $a \in R_+$ și $b \in R_+$ propoziția următoare:

$$\frac{2a^4b + 6a^3\sqrt{b^3} + 6a^2b^2 + 2a\sqrt{b^5}}{(a + \sqrt{b})^3 (a + b)} < \sqrt{ab}$$

este adevărată.

Indicație: După simplificare se împarte în ambii membri cu $\sqrt{ab}$.

R. $(a - b)^2 > 0$.

126. Să se determine mulțimile A și B , cunoscând că:

$$A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\},$$

$$A \cap B = \{3, 4, 5\},$$

$$A - B = \{6, 8\}.$$

$$\begin{aligned} \text{R. } A &= \{3, 4, 5, 6, 8\}, \\ B &= \{3, 4, 5, 7\}. \end{aligned}$$

127. Să se afle valoarea maximă a fracției: $y = \frac{3x^2 - 6x + 7}{x^2 - 2x + 2}$.

Indicație: (se scrie $7 = 6 + 1$ și $2 = 1 + 1$) și se obține $y = 3 + \frac{1}{(x-1)^2 + 1}$

y va fi maxim cind $(x-1)^2 + 1$ este minim, adică pentru $x = 1$;

R. Valoarea maximă este 4.

128. Se dă egalitatea $\sqrt{\frac{x^4 + 3y^2 + 2x^2y\sqrt{3} - y^4}{x^2 - y^2 + y\sqrt{3}}} = 1$. Să se arate că dacă $\sqrt{3} + y = 0$ atunci $x = \pm 1$.

129. Fie $f(x) = \frac{2x^2 - 8x + 20}{x^2 - 4x + 8}$ a) Să se arate că $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)$ este pozitivă.

b) Să se determine valoarea maximă a lui $f(x)$, $x \in \mathbb{N}$

R. 3.

130. Să se arate că oricare ar fi a, b, c (numere reale pozitive) inegalitatea:

$$\frac{a^5 + b^5 + a^3b^2 + a^2b^3 + a^2b^3 + b^3c^2}{a^3 + b^3} > ab + ac + bc$$

este adevărată.

Indicație: Se folosește inegalitatea $\frac{a^2 + b^2}{2} > ab$.

131. Într-un trapez dreptunghic $ABCD$ se cunoaște baza mare $AB = 5\sqrt{3}$ cm; $AD/BC = 1/2$; fie MB proiecția lui BC pe AB astfel ca $MB/DC = 1/4$.

Se cere:

a) Să se construiască (schița) corpurilor ce se formează prin rotația completă a trapezului în jurul laturii neperalele BC ;

b) Să se calculeze elementele acestor corpuri.

$$\begin{aligned} \text{R. Conul } AA'B \quad & \begin{cases} \text{conul } DD'C \\ G = 5\sqrt{3} \text{ cm}, \\ R = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ cm}, \\ I = 7,5 \text{ cm} \end{cases} \quad \begin{cases} G = 4\sqrt{3} \text{ cm.} \\ R = 2\sqrt{3} \text{ cm} \\ I = 6 \text{ cm} \end{cases} \end{aligned}$$

TRUNCHI con $ADD'A'$

$$\begin{cases} R = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ cm} \\ r = 2\sqrt{3} \text{ cm} \\ G = 1 \text{ cm} \\ I = 0,5 \text{ cm.} \end{cases}$$

132. Se dă piramida $VABCD$ cu baza paralelogramul $ABCD$ ale cărui diagonale $AC = 20$ m și $BD = 16$ m se intersectează în O sub unghi de 135° . Înălțimea piramidei VO este de $4\sqrt{2}$ m. Să se calculeze volumul piramidei.

$$R. V = 213 \frac{1}{3} \text{ m}^3.$$

133. Să se determine valoarea maximă a expresiei

$$E = \frac{2x^2 + 4x + 6}{x^2 + 2x + 3}.$$

$$R. E = 2.$$

134. Să se determine numerele naturale x și y , astfel încît inegalitatea

$$\frac{x^3 + x^2(1+y) - y^2(1+x) - y^3}{x+y+1} : \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) > 2$$

să fie adevărată.

Indicație: Expresia devine $(x+y)xy > 2$.

$$R. x > 1; y > 1.$$

135. Se dă un con de rază 2 cm confecționat dintr-un sector de cerc cu un unghi la centru de 180° .

Se cere:

- Să se arate că acest con este echilateral;
- Raportul ariilor sferelor înscrise și circumscrise conului;
- Aria calotei sferice determinată de o secțiune printr-un plan paralel cu baza conului la $\frac{\sqrt{3}}{8}$ cm de centrul sferei circumscrise;
- volumul conului cu vârful în centrul sferei avînd ca bază cercul de secțiune a calotei.

$$R. b) \frac{1}{4}, c) \frac{29\pi}{3} \text{ cm}^2,$$

$$d) \frac{1015\sqrt{3}\pi}{8 \cdot 9 \cdot 64} \text{ cm}^3.$$

136. Aria unui sector de cerc cu unghiul de 180° este de $450\pi \text{ cm}^2$.

Se cere:

- Să se arate că, conul format din acest sector este echilateral.
- Să se calculeze aria sferei înscrise în acest con.
- Fără calcule să se demonstreze că raza sferei înscrise în conul menționat este a treia parte din înălțimea conului.

$$R. b) 300\pi \text{ cm}^2.$$

137. Să se găsească cifra x care verifică relația:

$$\frac{\overline{1xx}}{\overline{xx5}} = \frac{1}{5} \text{ unde } \overline{1xx} \text{ și } \overline{xx5} \text{ sînt numere scrise în baza } 10.$$

$$\text{Indicație: } \frac{\overline{1xx}}{\overline{xx5}} = \frac{100 + 10x + x}{100x + 10x + 5} = \frac{1}{5}.$$

$$R. x = 9. \\ G.M.$$

138. Să se arate că oricare ar fi a și b numere reale, pozitive, inegalitatea

$$\frac{(a+b)^2 + a(b+1)^2 + b(1-a)^2}{a+b+ab+1} \geq \sqrt{4ab}$$

este adevărată.

R. $(a-b)^2$.

139. Se dă expresia:

$$f(x) = \frac{\frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{x}{2 - \frac{x}{1 + \frac{x}{2}}}}}}{16 - 4x^2 + x^4} \cdot \left(2 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}}} \right) \cdot \frac{(5x-4) : (4x-3)}{(5x-4) : (4x-3)}$$

Să se arate că oricare ar fi $x \in N$, $f(x)$ este pozitivă.

$$R. f(x) = \frac{1}{x(x^3 + 8)}.$$

140. Să se determine valoarea expresiei:

$$3x^4 - 4x^2y + y^2 + 2x^2 - 1 \text{ dacă } x \text{ și } y \text{ verifică relația } x^2 - y = -1.$$

R. 0.

141. Se dă o prismă dreaptă $ABCD A' B' C' D'$ cu baza paralelogram. Diagonala BD a bazei cu lungimea de a cm este perpendiculară pe latura AD , iar unghiul $\hat{B} = 150^\circ$. Planul determinat de muchiile opuse AB și $C'D'$ formează cu planul bazei un unghi de 60° . Să se afle:

- Diagonalele prismei.
- Raportul dintre aria bazei $ABCD$ și aria secțiunii $ABD'C'$.
- Aria și volumul prismei.

$$R. a) \frac{a\sqrt{61}}{2} \text{ cm}; \frac{a\sqrt{13}}{2} \text{ cm}$$

$$b) \frac{1}{2}$$

$$c) a^2(6 + 5\sqrt{3}) \text{ cm}^2; \frac{3\sqrt{3}a^3}{2} \text{ cm}^3.$$

142. Să se determine mulțimea:

$$M = \{a \in Z \text{ și } b \in Z \text{ astfel încît } a^2 - b^2 + 2 = 0\}.$$

Indicație. $a^2 - b^2 + 2 = 0$ se poate scrie $b^2 - a^2 = 2$;

$$(b-a)(b+a) = 2.$$

Divizorii lui 2 în Z sînt ± 1 ; ± 2 . Formăm sistemele de ecuații determinate de condițiile $(b-a)(b+a) = 2$.

$$\begin{array}{llll} b-a=1 & b-a=2 & b-a=-1 & b-a=-2 \\ b+a=2 & b+a=1 & b+a=-2 & b+a=-1 \end{array}$$

S constată că în toate situațiile $a \notin Z$ și nici $b \notin Z$, rezultă că $M = \emptyset$.

143. Se consideră expresiile:

$$E_1 = \frac{x^2 + 1}{2}; \quad E_2 = \frac{x^2 - 1}{2}; \quad E_3 = x.$$

- a) Să se arate că $E_1 \geq E_3$ pentru orice $x \in R$.
 b) Pentru ce valori ale lui x , E_1 , E_2 , E_3 pot reprezenta măsurile laturilor unui triunghi dreptunghic?

144. Se dă $E = \frac{x^3 + 5x^2 + x\sqrt{2} + 5\sqrt{2}}{x^3 - 2x^2 + x\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}$ a) Pentru ce valori ale lui x , $x \in N$ E — este un număr întreg; b) Să se afle valoarea minimă a lui E .

R. a) $x = \{3, 9\}$ b) 2.

145. Să se determine numerele naturale x și y care satisfac egalitatea

$$\frac{4(x+y)}{(x+y)^2 - (x-y)^2} = 1.$$

R. $x = y = 2$.

146. Se dă un tetraedru regulat de muchie a .

- 1) Să se determine înălțimea, apotema (piramidei) și valoarea cosinului unghiului dintre două fețe ale tetraedrului.
 2) Să se determine distanțele unui punct oarecare de pe înălțimea tetraedrului la fețele laterale în funcție de distanța x a acestuia la planul bazei.

a) Să se deducă de aici că suma distanțelor oricărui punct de pe înălțime la fețele tetraedrului este constantă.

b) Să se determine punctul de pe înălțime, egal depărtat de toate fețele tetraedrului.

3) Să se arate că două muchii neașezate pe aceeași față sînt perpendiculare.

R. 1) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ = apotema, $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ = înălțimea;
 $\frac{1}{3}$ = cosinusul unghiului diedru.

2) $\frac{a\sqrt{6} - 3x}{9}$ b) punctul de concurență a înălțimilor tetraedrului.

147. Să se arate că inegalitatea următoare este adevărată pentru orice a și b reali, pozitivi și $a \neq b\sqrt{2}$.

$$\left[\frac{a^2(a^3 - 3a^2b\sqrt{2} + 6ab^2 - 2b^3\sqrt{2})}{a^2 - 2ab\sqrt{2} + 2b^2} + b\sqrt{2} \right] + b^3 \geq a^2b + ab^2.$$

148. Pe planul pătratului $ABCD$ cu latura a se ridică perpendicularele $AM = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ și $CP = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Se unește M cu P .

1) Să se demonstreze că planele triunghiurilor MBD și PBD sînt perpendiculare.

2) Să se calculeze volumul poliedrului $ABCDMP$.

3) Să se determine latura pătratului, notată cu a , știind că prin rotirea triunghiului COP (O fiind centrul pătratului $ABCD$), în jurul lui CP partea din con exterioară poliedrului $ABCDMP$ are volumul egal cu $4\pi\sqrt{6}$ (unități de volum).

$$R. 2) V = \frac{2a^3\sqrt{6}}{9}; 3) a = 4.$$

149. Se dă piramida $SABC$ astfel ca $SA = SB = SC = a$; $\widehat{ASB} = 60^\circ$; $\widehat{ASC} = 90^\circ$; $\widehat{BSC} = 120^\circ$.

Se cere:

- 1) Perimetrul triunghiului ABC .
- 2) Să se arate că $\triangle ABC$ este dreptunghic.
- 3) Aria totală a piramidei.
- 4) Volumul piramidei ce se formează făcând o secțiune paralelă cu baza la distanța de $\frac{1}{4}$ din înălțime față de vîrf.
- 5) Raportul volumelor celor două corpuri obținute.

$$R. 3) \begin{cases} 1) a(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) \\ \text{Aria } ASB = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \\ \text{Aria } ASC = \frac{a^2}{2} \\ \text{Aria } BSC = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \\ \text{Aria } ABC = \frac{a^2\sqrt{2}}{2} \\ \text{Aria } At = \frac{a^2}{2}(\sqrt{3} + 1 + \sqrt{2}) \\ 4) V = \frac{a^3\sqrt{2}}{768}; 5) \frac{1}{63}. \end{cases}$$

150. Să se găsească un polinom $P(x)$ de gradul doi știind că $P(0) = 3$; $P(-1) = 8$; $P(1) = 4$

$$R. 3x^2 - 2x + 3$$

151. Fie M și N mulțimile ale căror elemente sînt soluțiile pentru $a \in N$ și $b \in N$ din egalitatea:

$$(a + 2)(b + 3) = 2ab.$$

Să se determine $M \cap N$.

Indicație: Egalitatea devine $ab - 3a - 2b - 6 = 0$

(în membrul întîi al ecuației este necesar să obținem un produs de factori iar în membrul doi un număr natural).

Se adaugă și se scade numărul 12 și obținem

$$(b - 3)(a - 2) = 12.$$

Divizorii lui 12 în N sînt: 1, 2, 3, 4, 6, 12; și astfel obținem

$$\begin{cases} b - 3 = 12 \\ a - 2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} b - 3 = 1 \\ a - 12 = 12 \end{cases} \text{ și așa mai departe.}$$

$$R. M \cap N = \{4; 5; 6\}.$$

152. Să se determine cele mai mici baze de numerație x, y, z astfel încît să avem $144_x = 169_y = 484_z$.

Indicație: din egalitățile date rezultă $x > y > z > 4$; $x^2 + 4x + 4 = y^2 + 6y + 9 = 4z^2 + 8z + 4$; $x + 2 = y + 3 = 2z + 2$.

R. $x = 10$; $y = 9$; $z = 5$.

153. Să se determine x, y, z astfel încît $\overline{xyz}_5 - \overline{xy}_6 - \overline{yz}_7 - \overline{zx}_8 = 0$.

G.M.

Indicație: se obține $18x - 3y = 8z$ dar din egalitatea inițială rezultă că x, y, z sînt numere mai mici ca 5; $8z$ trebuie să admită ca divizor pe 3 de unde rezultă că $z = 3$; $18x - 3y = 24$; sau $6x - y = 8$; procedînd analog obținem $6x - 8 = y$. din care rezultă că y are divizori pe 2 și 1; $y = 4$; $x = 2$.

R. $x = 2$; $y = 4$; $z = 3$.

154. Fie paralelogramul $ABCD$ cu $\hat{A} = 60^\circ$; $AB = 2AD$; M, N respectiv mijloacele laturilor AB și DC . Fie P piciorul perpendicularei din B pe DC și Q punctul de concurență al segmentelor AN și BC .

a) Să se arate că AN, MP, BC sînt concurente; b) M, P, Q coliniare.

Indicație: $MCQN$ paralelogram și P este mijlocul lui NC .

155. Se dau expresiile: $A = 1964^3 + 1965^3 + 1966^3 - 1967^3$; $B = 1998^3 + 1997^3 + 1998^2 + 1999$.

Să se arate că $A + B$ este divizibil prin 2 și $A \cdot B$ este divizibil prin 4.

Indicație: Se vor exprima algebric expresiile, apoi se vor observa numerele pare și impare.

156. Fie A și B două submulțimi ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ și $A \cap B = \{4, 6, 9\}$; $A \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$; $B \cup \{4, 8, 9\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Să se determine submulțimile A și B .

R. $A = \{1, 4, 6, 9, 8\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$

Mai sînt și alte soluții?

157. Cu suma de 129 lei s-a cumpărat 18 caiete de 4 lei bucata, 7 lei bucata și 18 lei bucata. Cîte caiete s-au cumpărat de fiecare fel?

Indicație: $129 - 18 \times 4 = 57$ lei, reprezintă diferențele de la 4 lei la 7 lei și la 18 lei. Se ține apoi seama că $57 - 12c > 0$.

R. 10 caiete de 4 lei, 5 caiete de 7 lei, 3 caiete de 18 lei.

158. Se dă fracția $f(x) = \frac{x^{12} + x^8 + x^5 + x^3}{x^{10} - x^9 + x^8 - x^7 + x^6 - x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2}$.

Să se arate că dacă $x \in N^*$ atunci $f(x)$ este divizibil cu 2.

Indicație: se adună și se scade aceeași expresie la numărător, pentru a se obține factor comun $x^3 + 1$; sau se ține seama că $x^6 + 1 = (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$.

159. Se dă polinomul $f(n, y) = n^2y^4 - 2ny^6 - n^2 + 2n + y^8$.

Să se determine valoarea numerică a lui $f(n, y)$ pentru $n - y^2 = 1$.

R. $f(n, y) = 1$.

160. Fie $P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ în care $x \in N$. Să se arate că $P(x)$ este divizibil cu 6.

Indicație: Se descompune $P(x)$ în produs de factori scriînd: $P(x) = x^3 + 3x^2 + 3x^2 + 2x + 9x + 6$ sau se va observa că $P(x)$ se divide prin $x + 1$ și dă citul $(x + 2)(x + 3)$.

161. Se dă expresia $f(x) = ax^2 + bx + c$. Să se arate că dacă $a + b + c = 0$ atunci $f(x)$ se divide cu $x - 1$.

162. Fiind dată expresia $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ în care $x \in N$, să se arate că $f(x)$ este impar.

Indicație: se va studia $f(x)$ când $x = 2K$ și $x = 2K + 1$.

163. Fără a se efectua împărțirea să se determine citul și restul împărțirii $(x^3 + 2x^2 + x + 5) : (x^2 + 1)$.

Indicație: se va studia deîmpărțitul scris sub forma $x^3 + 2x^2 + x + 2 + 3$.

R. $x + 2$ rest 3.

164. Se dă expresia $f(x) = x^3 + 8x^2 + 17x + 10$. Să se descompună în factori $f(x)$, folosind teorema lui Bézout, și să se arate că $f(x)$ este divizibil cu 2 dacă $x \in N$.

R. $(x + 1)(x + 2)(x + 5)$.

165. Se dă expresia $f(x) = 9x^4 - 6x^3 + x^2 + 1$ în care $x \in N$.

a) Să se afle citul și restul lui $f(x)$, prin împărțirea la $3x^2 - x$ fără a efectua împărțirea.

b) Să se arate că $f(x)$ este pozitiv când $x \in R$.

Indicație: se studiază expresia $9x^4 - 6x^3 + x^2$.

R. a) Citul este $3x^2 - x$ rest 1.

166. Să se arate că expresia $f(x, y) = (x^3 + x^2 + y^4)(x^3 + x^2 + y^4 + 4) + 4$ este un pătrat perfect oricare ar fi x și y numere naturale.

167. Fie trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCD A' B' C' D'$. Să se afle aria secțiunii, $ABC' D'$, știind că $AB = 3a$; $A' B' = a$ iar înălțimea trunchiului de piramidă $OO' = 2a$.

R. $4a^2 \sqrt{2}$

168. a) Să se arate că orice număr natural diferit de 1, impar, este diferența pătratelor a două numere întregi.

b) Să se arate că diferența cuburilor a două numere naturale consecutive, este întotdeauna un număr impar.

c) Cunoscind că, k este număr natural să se calculeze $(-1)^k + (-1)^{k+2}$

R. c) 2; -2.

Indicație: a) $2k + 1 = (k + 1)^2 - k^2$; b) $(k + 1)^3 - k^3 = 3k(k + 1) + 1$.

169. În triunghiul dreptunghic ABC ; $A = 90^\circ$ cu laturile $AB = c$; $BC = a$; $AC = b$ să se arate că $\sin^n B + \cos^n B < 1$ dacă $n > 2$.

Indicație. Dacă $n > 2$, $\sin^n B < \sin^2 B$; $\cos^n B < \cos^2 B$.

170. Într-un săculeț sînt 10 bile albe, 12 bile negre și 16 bile roșii. Care este numărul cel mai mic de bile pe care trebuie să-l scoatem din săculeț fără a ne uita la săculeț, pentru ca să avem certitudinea că am scos trei bile de aceeași culoare.

R. 7 bile.

171. Se dă polinomul $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - cx - 6$.

Să se determine a, b, c , $\in R$ astfel ca $f(x)$ să fie divizibil cu $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$.

G M.

Indicație: se va folosi teorema lui Bézout sau metoda coeficienților nedeterminați.

R. $a = b = c = 5$.

172. Se dă pătratul cu latura de a , și 5 puncte oarecare în interiorul acestui pătrat. Să se arate că există cel puțin două puncte a căror distanță este mai mică decât $a/\sqrt{2}$.

Indicație: împărțim pătratul în patru pătrățele egale și repartizăm punctele în cele 4 pătrățele.

173. Fie un cub cu latura de 1. Să se arate că oricum am alege 28 de puncte interioare, cel puțin două dintre ele au distanța mai mică decât $\frac{\sqrt{3}}{3}$ sau egală cu $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Indicație. Împărțim fiecare muchie a cubului în cîte 3 părți egale și prin punctele de diviziune ducem plane paralele cu fețele cubului obținînd 27 cubulețe.

G.M.

174. Se dă expresia $f(x) = \frac{(x^2 + 2x + 3)^3 - 1}{(x^2 + 2x + 4)^3 + 1}$. Să se arate că $f(x) \geq \frac{1}{4} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Indicație: $x^2 + 2x + 3 = y$; $x^2 + 2x + 4 = x^2 + 2x + 3 + 1$; $x^2 + 2x + 3 + 2 = (x + 1)^2 + 4$ ce are ca minim valoarea 4.

175. Se dau mulțimile: $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Să se determine mulțimea X astfel ca să avem $(A - X) \cup (X - A) = B$.

Indicație: $A \cap B = \{3, 4\} \subset A$ și de asemenea $\subset B \Rightarrow$ nu aparțin lui X ca să satisfacă relația dată; $1, 2 \notin B$ dar $\in A \Rightarrow \in X$ ca să satisfacă relația. Elementele 5 și 6 $\in B$ dar $\notin A \Rightarrow$ aparțin lui X .

R. $X = \{1, 2, 5, 6\}$

G.M.

VII. Teme pentru cercuri de matematică

1. Sisteme de numerație

Sistemul de numerație obișnuit este sistemul zecimal. Zece unități de un ordin formează o unitate de ordin imediat superior.

Pentru scrierea numerelor din acest sistem se folosesc zece cifre 0, 1, 2, 3, ..., 9.

Dar se pot folosi și alte sisteme de numerație, în care o unitate de un ordin oarecare să fie formată din două, trei... unități ale ordinului imediat inferior; avem atunci, de exemplu, un sistem cu baza 2 (binar), cu baza 3, baza 8, baza 16, ...

Numărul cifrelor necesare într-un sistem este egal cu baza. Astfel în sistemul cu baza trei se vor întrebuița trei cifre 0, 1 și 2; în sistemul cu baza 7 se vor întrebuița 7 cifre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. În sistemul cu baza 2, se folosesc numai cifrele 0 și 1. Acest sistem este folosit la mașinile electronice de calcul.

Trecerea de la o bază de numerație la alta.

1. Să se scrie $N = 325_6$ în sistemul zecimal;

$$N = 3 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6 + 5 = 108 + 12 + 5 = 125_{10}$$

$$N = 325_6 = 125_{10} = 125^*.$$

* Cînd numărul este scris în baza 10, nu vom mai indica baza.

2. Să se scrie $N = 125$ în sistemul cu baza 6:

$$\begin{array}{r|l} 125 & 6 \\ \hline 5 & 20 \end{array}; \begin{array}{r|l} 20 & 6 \\ \hline 2 & 3 \end{array}$$

$$N = 125 = 325_6.$$

3. Să se scrie $N = 4215_6$ în baza 5:
il trecem pe N în baza 10, apoi în baza 5:

$$4215_6 = 4 \cdot 6^3 + 2 \cdot 6^2 + 1 \cdot 6 + 5 = 864 + 72 + 6 + 5 = 947$$

$$\begin{array}{r|l} 947 & 5 \\ \hline 2 & 189 \end{array}; \begin{array}{r|l} 189 & 5 \\ \hline 4 & 37 \end{array}; \begin{array}{r|l} 37 & 5 \\ \hline 2 & 7 \end{array}; \begin{array}{r|l} 7 & 5 \\ \hline 2 & 1 \end{array}$$

$$N = 4215_6 = 947 = 12242_5$$

4. Să se scrie în sistemul cu baza 6 numărul 358, scris în sistemul zecimal.

$$\text{R. } 1354_6.$$

5. Să se scrie în sistemul cu baza 5 numărul 99, scris în sistemul zecimal.

$$\text{R. } 344_5.$$

6. Să se scrie în sistemul cu baza 2 numărul 401, scris în sistemul zecimal.

$$\text{R. } 110010001_2.$$

7. Să se scrie în sistemul cu baza 8 numărul 1004, scris în sistemul zecimal.

$$\text{R. } 1754_8.$$

8. Să se scrie în sistemul cu baza 10 următoarele numere scrise în diferite baze:

$$N_1 = 3428_9; N_2 = 450_8; N_3 = 1101001_2; N_4 = 1022_3$$

$$\text{R. } 3428_9 = 2537; 450_8 = 296; 1101001_2 = 105; 1022_3 = 35.$$

9. Să se scrie în sistemul cu baza 5 numărul 458 scris în baza 9.

$$\text{R. } 458_9 = 377 = 30025_5$$

10. Să se scrie în sistemul cu baza 3 numărul 505 scris în baza 8.

$$\text{R. } 505_8 = 325 = 110001_3.$$

11. Să se scrie în sistemul cu baza 2 numărul 40 scris în baza 7.

$$\text{R. } 40_7 = 28 = 11100_2.$$

12. Să se scrie în sistemul cu baza 6 numărul 10010000 scris în baza 2.

$$\text{R. } 10010000_2 = 144 = 400_6.$$

13. Să se simplifice fracția următoare, scriind rezultatul în sistemul zecimal.

$$\frac{143 + 220_3 + 10000_2}{11_7}.$$

$$\text{R. } 11.$$

14. Să se simplifice fracția următoare, scriind rezultatul în sistemul zecimal.

$$\frac{236_7 + 113_4 - 16}{202_3}.$$

$$\text{R. } \frac{33}{5}.$$

15. Să se simplifice fracția, scriind rezultatul în baza 2.

$$\frac{451_a - 6_{10} + 10002_3}{100_2}$$

R. 111111₂.

16. Să se simplifice fracția următoare, scriind rezultatul în baza 8 de numerație.

$$\frac{142_3 + 1111_2 + 5001_4 - 3_{10}}{42_{10} - 53_7}$$

R. 435₈.

17. Să se verifice dacă egalitatea următoare este adevărată, numerele fiind scrise în baza 6 de numerație:

$$\left(30 \times 40 - \frac{1220}{2}\right) \cdot 5 = 10310.$$

18. Idem, numerele fiind scrise în baza 3 de numerație.

$$2 \left[(120 \times 100) + \frac{22 \times 10}{2} - (101 \times 11) \right] = 21221.$$

19. Idem, numerele fiind scrise în baza 9 de numerație:

$$(3^2 + 4^2 + 12^2) \cdot (30 - 16) = 2356.$$

20. Idem, numerele fiind scrise în sistemul binar:

$$(1 + 10 + 11 + 100) \cdot \frac{10\,000}{10} = 1\,010\,000.$$

21. În care sistem de numerație avem egalitatea următoare:

$$22 \times 160 = 3740.$$

Indicație. Pentru baza b trebuie să avem $2 < b < 10$.

R. baza este 8.

22. În care sistem de numerație avem egalitatea următoare:

$$5 \times 61 = 425$$

R. baza este 7.

23. Să se rezolve ecuația:

$$x + \frac{3x - 100_3}{101_2} = 11_3 - \frac{5x - 15_7}{3},$$

în care numerele fără indici sînt considerate în baza 10 de numerație.

R. $x = 3$.

24. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{1}{12} (3x - 4) + \frac{1}{3} (10x + 3) = 133 - 10x$$

toate numerele fiind scrise în baza 5, să se dea răspunsul în baza 5, apoi în sistemul binar.

R. $x = 11_5 = 110_2$.

25. Să se rezolve ecuația:

$$x^2 - 12x + \sqrt{1100} = 0$$

numerele fiind scrise în sistemul trinar, soluțiile se vor da în aceeași bază.

$$R. x' = 2; x'' = 10.$$

26. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{12_3}{x^2 - 1} + \frac{1000_2}{x^2 - 2x + 1} = \frac{1101_3 - 10_9x}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

Soluția se va scrie în baza 10

$$R. x = \frac{3}{2}.$$

27. Un număr scris în baza 2 este $N = 10110001$; în ce bază același număr se scrie $N = 342$.

Indicație. În sistemul zecimal, să scriem un număr punind în evidență puterile lui 10, adică puterile bazei, de exemplu:

$$\begin{aligned} 7542 &= 7 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 2 \\ &= 7 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 2 \end{aligned}$$

deci $N = 342$ se poate scrie $3x^2 + 4x + 2$ în care s-a notat cu x baza necunoscută a sistemului nou de numerație.

R. baza este 7.

28. Să se rezolve ecuația următoare, în care necunoscuta este baza unui sistem de numerație:

$$110110_2 = 312_x$$

R. baza este 4, $x = 4$.

29. Să se rezolve ecuația:

$$91_3 - 1020_x + 88_9 = 100100_2$$

R. $x = 2$.

30. Să se aducă expresia următoare la forma cea mai simplă (indicii x și y sint baze de numerație, iar numerele fără indici se consideră în sistemul zecimal)

$$\frac{11_x}{11_y} : \left(1 - \frac{1}{12_x}\right) \cdot 7(11_y).$$

R. $7(x + 2)$.

2. Generalizarea și discuția problemelor

La rezolvarea problemelor de matematici, elevii se mulțumesc — de multe ori — să considere ca juste soluțiile găsite pentru necunoscutele problemei, fără a analiza dacă rezultatele sint posibile, dacă aceste rezultate pot ocaziona unele interpretări sau generalizări.

Pentru a înlătura această tendință cit și pentru a forma deprinderea de a generaliza și discuta problemele, vom da câteva exemple de generalizare și discuție a problemelor.

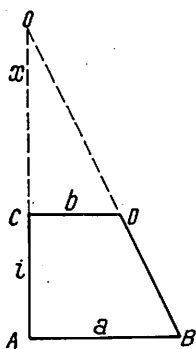


Fig. IV.1

1. Se dă un trapez $ABCD$, în care unghiurile A și C sînt drepte (fig. IV.1); se prelungesc laturile AC și BD pînă se întîlnesc în O . Se cere distanța $CO = x$ știind că

$$AB = a, \quad CD = b, \quad AC = i$$

obținem $x = \frac{bi}{a-b}$.

— Dacă $a = b$, valoarea lui x devine:

$$x = \frac{bi}{0},$$

conducînd la o operație fără sens; în acest caz trapezul devine un dreptunghi și laturile AC și BD sînt paralele.

— Dacă $b = 0$, vom avea $x = 0$, atunci trapezul se schimbă într-un triunghi și prin urmare distanța de la C la punctul de întîlnire este 0.

2. Peste cîți ani vîrsta tatălui va fi de trei ori cît vîrsta fiului, dacă acum tatăl are 56 de ani și fiul 30 de ani?

Notăm cu x numărul de ani peste care vîrsta tatălui va fi de trei ori cît a fiului.

Ecuția problemei este:

$$56 + x = 3(30 + x).$$

$$R. x = -17$$

Răspunsul arată că fenomenul a avut loc în trecut, acum 17 ani. În adevăr, atunci tatăl avea 39 ani, fiul 13 ani și vîrsta tatălui era întreiul vîrstei fiului.

Cazul general

Peste cîți ani vîrsta tatălui va fi de n ori vîrsta fiului, dacă acum tatăl are a ani și fiul are b ani în (ipoteza $n > 1$).

Ecuția problemei este:

$$a + x = n(b + x),$$

cu soluția: $x = \frac{a - nb}{n - 1}$, și putem avea trei cazuri.

- 1) dacă $a - nb > 0$, atunci $x > 0$ și fenomenul va avea loc în viitor;
- 2) dacă $a - nb < 0$, atunci $x < 0$; adică fenomenul a avut loc în trecut (ca în exemplul numeric de mai sus);
- 3) dacă $a - nb = 0$, $x = 0$ în prezent, vîrsta tatălui este de n ori vîrsta fiului.

3. Doi curieri merg pe distanța de la X la Y cu mișcare uniformă, unul avînd viteza v și altul v' . Într-un moment oarecare, cel dintîi se află în punctul A și cel de-al doilea în punctul B (fig. IV.2). Se întrebă la ce depărtare de punctul B se vor întîlni.

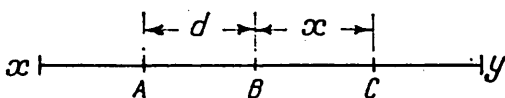


Fig. IV.2

Pentru a pune problema în ecuație, să presupunem că ei merg amândoi în același sens și fie C punctul unde se întâlnesc; notăm prin x distanța BC și prin d distanța fixă cunoscută AB .
 v fiind viteza primului curier și t timpul necesar sosirii în C , și astfel avem $d + x = vt \Rightarrow t = \frac{d+x}{v}$. Cel de-al doilea curier ajunge în C în același timp t , arătând viteza lui cu v' obținem

$$x = v't \Rightarrow \frac{x}{v'} = \frac{d+x}{v} \Rightarrow x = \frac{dv'}{v-v'}$$

Discuție.

b) Presupunem că $v < v'$; formula dă în acest caz pentru x o valoare negativă, ce arată că întâlnirea a avut loc înainte de a ajunge curierii în A și B , adică în partea stângă a punctului B , căci din momentul ce ei sînt în A și B , cel de-al doilea mergînd mai repede se va depărta mereu de cel dintîi, așa că ei nu se pot întîlni la dreapta lui B .

c) Dacă $v = v'$, valoarea lui x în acest caz devine $\frac{dv'}{0}$, ceea ce conduce la o imposibilitate; cei doi curieri nu se întîlnesc niciodată. Aceasta este evident, deoarece ambii deplasîndu-se în aceeași direcție, cu aceeași viteză, distanța dintre ei rămîne mereu d .

d) Dacă $v = v'$ și presupunem $d = 0$, în această situație valoarea lui x are forma $\frac{0}{0}$, adică este un caz de nedeterminare, ceea ce se înțelege, căci ei, aflîndu-se în același punct într-un moment dat și avînd aceeași viteză, se găsesc mereu împreună.

e) Dacă $v \neq v'$ și $d = 0$, avem $x = \frac{0}{v-v'} = 0$. În acest caz, punctul lor de întîlnire este în B , care devine punct comun de plecare.

f) Dacă ei ar fi mers în sens contrar (unul către altul), atunci întîlnirea s-ar face între A și B , și dacă se înseamnă ca și mai sus cu x distanța de la B la punctul de întîlnire, obținem ecuația:

$$(2) \quad \frac{d-x}{v} = \frac{x}{v'} \text{ și } x = \frac{dv'}{v+v'}$$

Considerînd viteza v' ca pozitivă, cînd mișcarea celui de-al doilea se face spre dreapta și ca negativă cînd mișcarea se face în sens opus și dacă luăm distanța socotită spre dreapta punctului B ca pozitivă și cele socotite spre stînga ca negative, vom recunoaște că formula (2) este conținută în formula (1).

Prin urmare, formula $x = \frac{dv'}{v-v'}$ se aplică în ambele cazuri ale problemei. De aici se poate vedea cum, introducînd cantitățile negative ca

date ale unor probleme, putem să generalizăm problemele, adică cu o singură formulă, găsită pentru unul din cazurile problemei, putem să studiem toate celelalte cazuri ce le-ar putea prezenta ea, dacă atribuim citimilor cunoscute atit valori pozitive cit și negative.

4. *Circumferința roții din față a unei trăsură este k metri, circumferința roții din spate este de l metri.*

Pe ce distanță va face roata din față cu u învîrtituri mai mult decît cea din spate?

Notăm distanța parcursă cu x . Ecuația problemei este:

$$\frac{x}{k} - u = \frac{x}{l},$$

de unde

$$x = \frac{lku}{l - k}.$$

a) Ce fel de mărimi sînt l , k și u ?

Dacă $x < 0$ cînd $l - k < 0$, deci $l < k$, ce putem spune despre raza roții din spate în raport cu cea din față? Discuția rămîne pe seama cititorului.

5. Un trapez dreptunghic cu bazele a și b ($a > b$) și înălțimea i se rotește în jurul bazei mici, apoi în jurul bazei mari.

1) Să se calculeze raportul dintre volumele acestor corpuri, stabilind dacă acest raport este mai mare sau mai mic decît 1.

2) Ce relație trebuie să existe între a și b ca acest raport să fie $3/2$?

3) În ce caz este acest raport egal cu 1? Interpretați geometric rezultatul.

4) În ce caz este acest raport egal cu 2? Interpretați geometric.

R. 1) Raportul este $\frac{2a + b}{a + 2b}$; 2) $a = 4b$;

3) $a = b$, atunci trapezul devine dreptunghi și este indiferent în jurul cărei laturi de bază se rotește; 4) $b = 0$, trapezul se reduce la un triunghi.

3. Probleme de coliniaritate

Printre problemele de geometrie plană, interesante sînt problemele de coliniaritate. Metodele de rezolvare folosite la aceste probleme sînt variate și se utilizează proprietăți ale figurilor geometrice și teoreme din diferite capitole.

În cele ce urmează prezentăm cîteva probleme de coliniaritate rezolvate.

1. Să se demonstreze că simetricile vîrfurilor B și C ale unui triunghi ABC față de mijloacele laturilor AC și AB (respectiv) sînt coliniare cu vîrfurile A .

Rezolvare. Fie B'' și C'' simetricile vîrfurilor B și C față de mijloacele B' și C' ale laturilor AC și AB (fig. IV.3). Patrulaterul $ABCB''$ este paralelogram, deoarece diagonalele AC și BB'' se taie în părți egale, conform construcției. Rezultă că $AB'' \parallel BC$. În mod analog se demonstrează că patrulaterul $ACBC''$ este paralelogram și rezultă $AC'' \parallel BC$. Prin urmare, prin vîrfurile A trec două paralele cu BC și anume AB'' și AC'' . Ele nu pot fi diferite, ca direcție, conform *postulatului lui Euclid*; aceasta înseamnă că punctele C'' , A și B'' sînt coliniare.

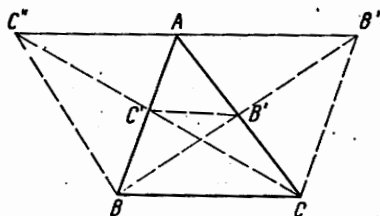


Fig. IV.3

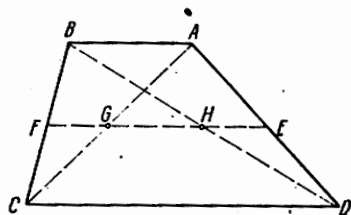


Fig. IV.4

2. Să se arate că mijloacele laturilor neparalele ale unui trapez și mijloacele diagonalelor sînt patru puncte coliniare.

Rezolvare. În triunghiul ABC , FG fiind linie mijlocie avem $FG \parallel AB$ (fig. IV.4). În triunghiul BCD , FH este linie mijlocie și avem: $FH \parallel CD$. Bazele trapezului fiind paralele rezultă că prin punctul F trec două paralele la aceeași direcție; ele nu pot fi diferite conform *postulatului lui Euclid*, deci punctele F , G și H sînt coliniare. Cu o demonstrație analoagă obținem că și punctul E se găsește pe aceeași dreaptă cu primele trei puncte, adică cele patru puncte considerate sînt coliniare.

3. Două cercuri O și O' sînt secante în A și B . Prin A se duc diametrele AC și AD ale celor două cercuri. Să se demonstreze că punctele C , B și D sînt coliniare.

Rezolvare. Unghiul ABC este drept fiind înscris într-un semicerc; aceeași observație pentru unghiul ABD (fig. IV.5). Unghiurile adiacente ABC și ABD fiind suplementare rezultă că au laturile necomune în prelungire, adică punctele C , B și D sînt coliniare.

4. Se consideră un trapez isoscel $ABCD$. Să se demonstreze că punctul de intersecție al diagonalelor, centrul cercului circumscris și punctul de intersecție al laturilor neparalele ale trapezului sînt trei puncte coliniare.

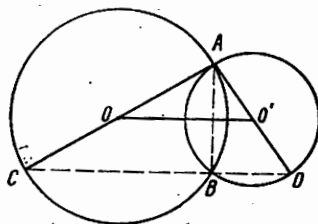


Fig. IV.5

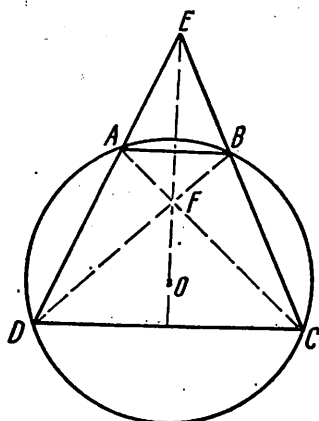


Fig. IV.6

Rezolvare. Se analizează proprietatea fiecărui punct și se observă o însușire comună; într-adevăr:

1) centrul O al cercului circumscris este echidistant de punctele C și D (situat pe cerc) (fig. IV.6);

2) punctul F de intersecție al diagonalelor este echidistant de punctele C și D (proprietatea diagonalelor trapezului isoscel);

3) punctul E de intersecție al prelungirilor neparalele este echidistant de punctele C și D , deoarece triunghiul CDE este isoscel. Prin urmare, punctele O, E și F aparțin medietoarei segmentului CD care este locul geometric al tuturor punctelor cu această proprietate.

S-a recunoscut o dreaptă — loc geometric care conține cele trei puncte considerate, adică punctele sînt coliniare.

5. Să se demonstreze că dacă se proiectează unul dintre vîrfurile unui triunghi pe bisectoarele interioare și exterioare ale unghiurilor corespunzătoare celorlalte două vîrfuri ale triunghiului se obțin, pe aceste bisectoare, patru puncte coliniare.

Rezolvare. Patrulaterul $ADBF$ este dreptunghi, conform enunțului, și centrul său de simetrie (M) este la mijlocul laturii AB (fig. IV.7). Se demonstrează că diagonală DF a dreptunghiului este paralelă cu BC și deoarece această diagonală trece prin mijlocul laturii AB rezultă că DF are direcția liniei mijlocii a triunghiului ABC . Analog pentru EG , diagonală dreptunghiului $AECG$. Prin urmare, punctele D, E, F și G sînt situate pe o aceeași paralelă cu BC , adică sînt coliniare. S-a folosit unicitatea liniei mijlocii, adică postulatul lui Euclid.

6. Pe două laturi consecutive ale unui pătrat $ABCD$ se construiesc triunghiurile echilaterale ABE și BCF (primul interior și celălalt exterior pătratului). Să se demonstreze că punctele D, E, F sînt coliniare.

Rezolvare. În triunghiul isoscel ADE (deoarece $AD = AE$) avem $\angle 1 = 30^\circ$; rezultă $\angle 2 = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$ (fig. IV.8);

— în triunghiul echilateral ABE : $\angle 3 = 60^\circ$;

— în triunghiul dreptunghic isoscel BEF : $\angle 4 = 45^\circ$.

Unghiurile 2, 3 și 4 adiacente — consecutive însumează 180° , deci ele sînt situate de aceeași parte a unei drepte; urmează că punctele D, E și F sînt coliniare.

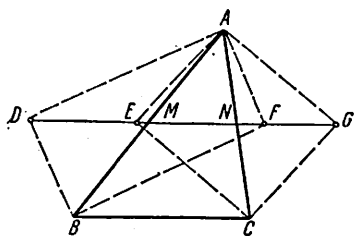


Fig. IV.7

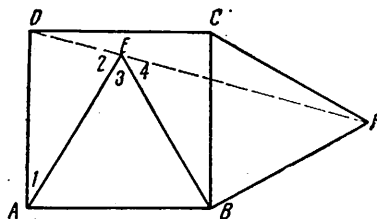


Fig. IV.8

7. În patrulaterul $ABCD$ se consideră M și N mijloacele laturilor opuse AB și CD . Prin M ducem MP paralelă cu BC și MQ paralelă cu AD , iar prin vîrfurile C și D ducem o paralelă cu AB . Se formează astfel paralelogramele $BCPM$ și $ADQM$. Să se arate că vîrfurile P și Q ale acestor paralelograme sînt coliniare cu punctul N .

Rezolvare. Se compară triunghiurile CNP și DNQ (fig. IV.9); ele au:

$$CP = DQ = \frac{AB}{2}, \quad CN = DN = \frac{CD}{2}$$

$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ ca alterne interne formate de paralelele CP și DQ cu secanta CD .

Din egalitatea acestor triunghiuri rezultă $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$. Aceste două unghiuri egale sînt situate de o parte și de alta a dreptei CD ; rezultă că ele sînt opuse la vîrf; atunci laturile PN și NQ sînt în prelungire și punctele P, N, Q sînt coliniare.

S-a utilizat teorema: dacă două unghiuri egale au vîrful comun, o latură comună și sînt așezate de o parte și de alta a laturii comune, atunci ele sînt opuse la vîrf.

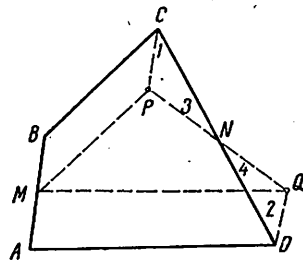


Fig. IV.9

8. Două cercuri O_1 și O_2 sînt tangente exterior în punctul T . O secantă dusă prin T taie cercurile în A și B . Se consideră diametrele AC și BD ale cercurilor O_1 și O_2 , respectiv. Să se demonstreze că punctele C și D sînt coliniare cu punctul T de tangență.

Rezolvare. Unghiurile ATC și BTB sînt drepte ca unghiuri înscrise într-un semicerc (fig. IV.10). Aceste unghiuri egale au vîrful comun și sînt situate de o parte și de alta a unei laturi comune (AB); ele sînt unghiuri opuse la vîrf, adică laturile CT și DT sînt în prelungire; prin urmare punctele C, T și D sînt coliniare.

9. Se consideră un triunghi oarecare ABC . Să se demonstreze că ortocentrul acestui triunghi (H), centrul de greutate și centrul cercului circumscris triunghiului sînt trei puncte coliniare.

Rezolvare. Fie AD diametrul cercului circumscris ce trece prin vîrful A al triunghiului (fig. IV.11). Se demonstrează că patrulaterul $BHCD$ este paralelogram. Diagonalele sale sînt BC și HD , deci A'' este centrul de simetrie al paralelogramului; rezultă că:

AA'' este o mediană a triunghiului ABC ; OA'' este perpendiculară pe BC ; OA'' este paralelă cu înălțimea AA' a triunghiului; OA'' este linie mijlocie în triunghiul ADH $\Rightarrow$

$$\Rightarrow OA'' = \frac{AH}{2}.$$

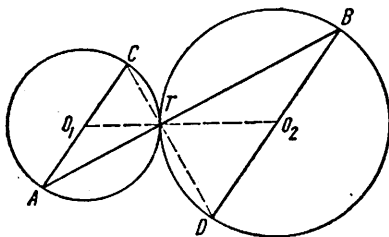


Fig. IV.10

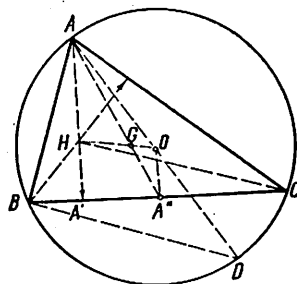


Fig. IV.11

Se unește H cu O . Se demonstrează că triunghiurile A^*OG și AGH sînt asemenea, raportul lor de asemănare fiind $1/2$; adică pe mediana AA'' există un punct care determină raportul $\frac{GA''}{GA} = \frac{1}{2}$. Rezultă că G este centrul de greutate al triunghiului,

adică centrul de greutate se află pe linia care unește ortocentrul cu centrul cercului circumscris. Cele trei puncte H, G și O sînt coliniare.

Am utilizat, în ultima parte a demonstrației, *asemănarea a două triunghiuri* cu interpretarea raportului lor de asemănare.

10. Se dă triunghiul ABC . Să se demonstreze că picioarele perpendicularelor duse dintr-un punct oarecare al cercului circumscris triunghiului pe laturile triunghiului sînt trei puncte coliniare.

Rezolvare. Demonstrația se face pe baza proprietăților patrulaterului inscriptibil. Notăm cu D, E și F picioarele perpendicularelor duse dintr-un punct oarecare M al cercului respectiv pe laturile BC, AB și AC ale triunghiului (fig. IV. 12).

Patrulaterul $BEMD$ este inscriptibil avînd două unghiuri opuse suplementare (unghiurile din D și E) $\Rightarrow \sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$.

Patrulaterul $DMCF$ este inscriptibil deoarece diagonalele (CD și FM) fac unghiuri egale cu laturile opuse DM și CF ale patrulaterului $\Rightarrow \sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$.

Pe de altă parte în triunghiurile dreptunghice BEM și CFM avem $\sphericalangle EBM = \sphericalangle MCF$ pe baza proprietății unghiului exterior al patrulaterului înscris $ABMC \Rightarrow \sphericalangle 2 = \sphericalangle 4$ fiind complemente de unghiuri egale. De aici rezultă egalitatea unghiurilor 1 și 3 care au vîrfurile comune D , o latură comună (latura BC), fiind așezate de o parte și de alta a acestei laturi.

Același raționament ca și în cazul problemelor 7 și 8 conduce la concluzia că punctele D, E, F sînt coliniare și dreapta pe care se află ele situate este numită în geometrie *dreapta lui Simson*.

11. Două cercuri egale se taie în punctele A și B . Din A drept centru și cu o rază arbitrară se descrie un alt cerc care le taie pe primele două în patru puncte. Să se demonstreze că punctul B și două dintre punctele de intersecție ale cercului al treilea sînt coliniare.

Rezolvare. $AC = AD$ ca raze în cercul al treilea (fig. IV.13). Aceste raze egale sînt coarde egale în cercurile egale O_1 și $O_2 \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{AD}$ și deci arcele au aceeași măsură. Rezultă că unghiul ABD (înscris în cercul O_1) are aceeași mărime ca și unghiul ABC (înscris în cercul O_2). Aceste unghiuri egale au vîrfurile comune (B), o latură comună (AB) și sînt așezate de aceeași parte a laturii comune, deci laturile BC și BD se suprapun rezultînd că punctele B, D și C sînt coliniare.

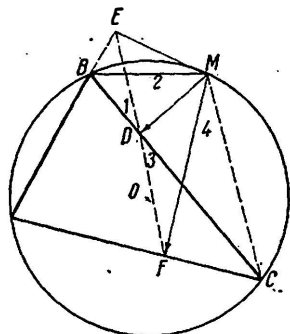


Fig. IV.12

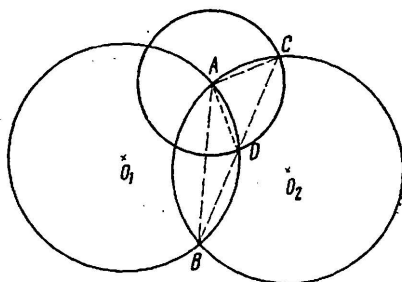


Fig. IV.13

12. Dintr-un punct situat pe un cerc se duc trei coarde și pe aceste coarde ca diametre se descriu trei cercuri. Să se demonstreze că aceste trei cercuri care au un punct comun se taie două câte două în alte trei puncte coliniare.

Rezolvare. Pe cercul O considerăm punctul M prin care trec cele trei coarde MA , MB , MC și dreapta lui Simson a punctului M față de triunghiul ABC determinat de extremitățile celor trei coarde (fig. IV.14). Vom demonstra că această dreaptă conține punctele de intersecție ale cercurilor ce ar fi descrise pe coardele considerate ca diametre.

Într-adevăr, perpendiculara MD dusă din M pe latura AB a triunghiului ABC este coarda comună a cercurilor descrise pe MA și MB cu diametre deoarecece $\angle ADM = \angle BDM = 90^\circ$ reprezintă unghiuri drepte înscrise în semicercurile corespunzătoare cu diametrele MA și MB . Să recunoaștem că — prin construcție — D este un punct al dreptei lui Simson.

Analog se demonstrează pentru punctele E și F , picioarele perpendicularelor duse din M pe laturile AC și respectiv BC .

Dreapta lui Simson care trece prin D, E, F este dreapta cerută.

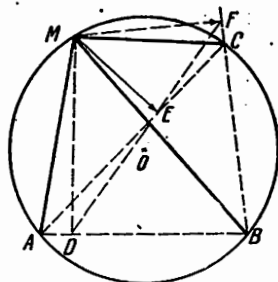


Fig. IV.14

4. Probleme de construcții geometrice

a) Probleme rezolvate

1. Să se construiască un triunghi dreptunghic cînd cunoaștem suma catetelor și ipotenuza: $a + b$ (suma catetelor), c (ipotenuza).

Rezolvare. 1) Considerăm problema rezolvată și fie GEP triunghiul căutat (fig. IV.15). Construim triunghiul dreptunghic isoscel DEP , în care $EP = ED$.

Analizăm triunghiul PGD și deducem modul de construcție.

2) Construcția figurii. Pe segmentul $DG = a + b$ (suma catetelor), în punctul D , se construiește un unghi de 45° .

Din G se duce un arc de cerc cu raza cît ipotenuza dată c . Triunghiul cerut este GEP (fig. IV.16).

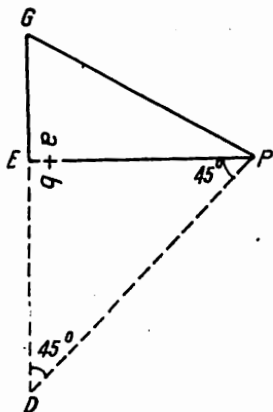


Fig. IV.15

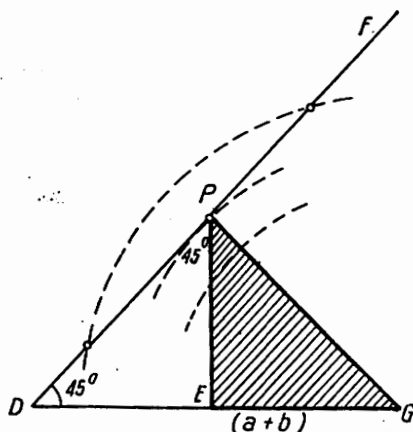


Fig. IV.16

3) *Discuție.* Dacă arcul de cerc taie DF într-un punct, avem o soluție; dacă taie pe DF în două puncte, avem două soluții. Dacă arcul de cerc nu taie pe DF , nu avem nici o soluție.

2. Să se construiască un triunghi ABC , când se cunoaște: $AB = c = 7,8$ cm, înălțimea coborită din C pe AB , $h_c = 4,3$ cm și unghiul $ABC = \beta = 50^\circ$.

Rezolvare. **Metoda 1.** Într-un punct arbitrar E , luat pe $AB = 7,8$ cm, ridicăm o perpendiculară, pe care luăm o lungime $EF = h_c = 4,3$ cm, și prin F ducem o paralelă la AB . Aceasta taie dreapta BB' care trece prin B și face cu AB unghiul $\beta = 50^\circ$, în punctul C , care este al treilea vîrf al triunghiului ABC .

Metoda 2-a. Vom căuta la început să construim triunghiul DCB . Pentru aceasta, luăm un segment de dreaptă $DC = h_c = 4,3$ cm (fig. IV.17).

În punctul C ducem o dreaptă CB astfel ca $DCB = 90^\circ - \beta = 40^\circ$, iar în D ducem o perpendiculară DB pe latura DC .

Obținem la intersecția acestor două drepte vîrfurile B al triunghiului.

Apoi este suficient să luăm o lungime $BA = c = 7,8$ cm și obținem și al treilea vîrf al triunghiului ABC .

3. Să se construiască un trapez $ABCD$ cunoscîndu-i lungimea bazei mari $AB = a$, a bazei mici $CD = b$ și lungimile $AC = d_1$, $BC = d_2$ ale celor două diagonale.

Rezolvare. Presupunem trapezul construit (fig. IV.18). Prelungim AB cu segmentul $BE = CD = b$. Patrulaterul $BEDC$ este un paralelogram, avînd laturile opuse BE și CD egale și paralele. Rezultă că $BD = CE$.

După aceste observații putem deduce construcția cerută, și anume:

Vom construi în prealabil triunghiul AEC , căruia îi cunoaștem toate cele trei laturi: $AE = a + b$, $AC = d_1$, $CE = d_2$ (observînd că punctul C se va afla la întretăierea arcelor de cerc descrise din A și E cu raze egale cu d_1 și d_2).

Odată C aflat, determinăm vîrfurile D , ducînd $DC \parallel AE$ și egal cu b . Acesta este și un vîrf al trapezului. În ceea ce privește vîrfurile B , el se află pe AE astfel că $AB = a$.

Discuție. Pentru ca problema să fie posibilă, trebuie să putem construi triunghiul ACE și aceasta se poate face dacă cele patru lungimi, a , b , d_1 , d_2 satisfac inegalitățile:

$$a + b < d_1 + d_2, \quad a + b > d_1 - d_2,$$

căci într-un triunghi o latură este mai mică decît suma celorlalte două, dar mai mare decît diferența lor.

4. Să se construiască un triunghi ABC , când cunoaștem lungimile a două laturi $AB = c$, $AC = b$ și unghiul $ABC = \beta$, opus uneia dintre ele. Caz particular: $c = 5$ cm, $b = 3$ cm, $\beta = 25^\circ$.

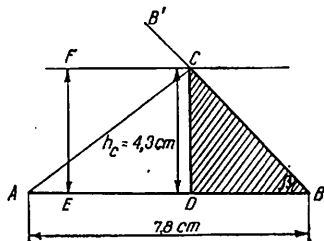


Fig. IV.17

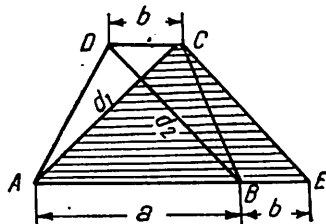


Fig. IV.18

Rezolvare. Să presupunem triunghiul ABC construit. Observăm că punctele A și B sînt capetele unui segment de dreaptă AB , de lungime cunoscută c (fig. IV.19). Toată problema constă în a observa cum se găsește virful C .

Constatăm că:

- 1) C se află pe semidreapta BD , care face un unghi β cu AB .
- 2) C se află pe un arc de cerc cu centrul în A și de rază AC , cunoscută și egală cu b .

Urmează de aici construcția.

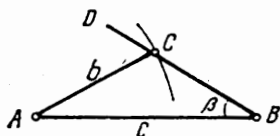


Fig. IV.19

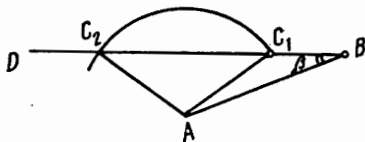


Fig. IV.20

În cazul particular al problemei se consideră un segment de dreaptă $AB = c = 5$ cm. În B ducem o semidreaptă BD , care face un unghi $\beta = 25^\circ$ cu AB (fig. IV.20). Cu centrul în A și cu o rază egală cu $b = 3$ cm descriem un arc de cerc care intersectează dreapta BD în două puncte: C_1 și C_2 .

Am obținut astfel două triunghiuri, ABC_1 și ABC_2 , care răspund problemei noastre.

Discuție. Să judecăm dacă problema este totdeauna posibilă, adică dacă putem face construcția triunghiului cu orice date.

— Latura AB , alăturată unghiului cunoscut, o putem construi întotdeauna, oricare ar fi mărimea ei.

— Unghiul ABC poate fi construit cu virful în B , oricare ar fi mărimea lui (în afară de cazul cînd $\beta = 0$ sau 180°).

— Cînd luăm în compas mărimea laturii AC , opusă unghiului dat, și descriem cercul cu centrul în virful A , trebuie ca acest cerc să taie a doua latură a unghiului B , pentru a putea determina virful al treilea al triunghiului; adică lungimea acestei laturi trebuie să fie mai mare sau cel puțin egală cu distanța virfului A la latura BD . Deducem de aici că sînt posibile mai multe cazuri.

1) Dacă latura opusă unghiului dat este egală cu această distanță, cercul atinge latura BD într-un singur punct. Avem o singură soluție, și anume un triunghi dreptunghic.

2) Dacă latura opusă unghiului dat este mai mare decît această distanță, avem două soluții diferite (așa cum s-a întîmplat cu datele de mai sus), dar avem de observat că $AC_1 = AC_2$.

3) Dacă latura opusă unghiului dat este mai mică decît această distanță, triunghiul nu se închide și construcția nu se poate face.

5. Să se ducă într-un cerc o coardă paralelă cu o dreaptă dată și care să aibă o lungime dată l .

Rezolvare. Fie Δ dreapta dată (fig. IV.21). Dintr-un punct arbitrar M , luat pe cercul O , descriem un arc de cerc cu raza l . Fie N unul din punctele unde acest arc de cerc taie cercul O .

Am fixat astfel pe cercul O o coardă MN a cărei lungime este l . Ea nu este însă paralelă cu Δ .

Acum trebuie să o așezăm astfel ca să fie paralelă cu Δ .

Dacă ducem din O o perpendiculară OP pe MN și din O ca centru descriem un cerc cu raza OP observăm că

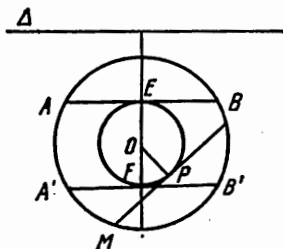


Fig. IV.21

coarda MN este tangentă la acest cerc și că orice coardă a primului cerc tangentă la cel de-al doilea are aceeași lungime l .

Atunci nu avem decît să construim o tangentă la cercul interior, paralelă cu dreapta Δ , construcție care se face ușor. Din O ducem o perpendiculară pe Δ . Ea va tăia cercul interior în punctele E și F .

Tangentele în E și F la cercul cel mic răspund problemei noastre, adică problema admite două soluții.

Pentru ca problema să fie posibilă, trebuie să ni se dea lungimea l mai mică decît diametrul cercului mare, fiindcă într-un cerc cea mai mare coardă este diametrul său.

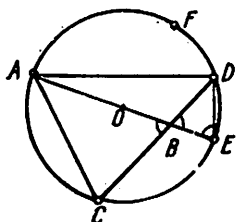


Fig. IV.22

6. Fie AD o coardă în cercul de centru O ; o altă coardă, DC taie diametrul ce trece prin A în punctul B . Cum trebuie dusă coarda DC pentru ca $AB = AC$? Problema este totdeauna posibilă?

Rezolvare. Fie E punctul diametral opus lui A (fig. IV.22). Presupunem problema rezolvată, adică am dus coarda DC astfel ca $AB = AC$. Atunci, triunghiul ABC este isoscel, de unde:

$$(1) \widehat{ACB} = \widehat{ABC}.$$

Însă, $\widehat{ABC} = \widehat{DBE}$ ca opuse la vîrf; iar

$$(2) \widehat{ACD} = \widehat{BED} \text{ ca unghiuri cu vîrfurile pe cerc și avînd aceeași măsură } \frac{\widehat{AD}}{2}.$$

Urmează de aici că, dacă triunghiul ABC este isoscel, și triunghiul DBE este isoscel.

Fie acum F un punct pe arcul $\widehat{AD}$, astfel ca $\widehat{DE} = \widehat{DF}$. Însă:

$$\widehat{ABC} = \frac{\widehat{DE}}{2} + \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{\widehat{DF}}{2} + \frac{\widehat{AC}}{2},$$

iar:

$$\widehat{ACD} = \frac{\widehat{DF}}{2} + \frac{\widehat{FA}}{2},$$

de unde reiese că $\widehat{AF} = \widehat{AC}$.

De aici rezultă construcția. Se ia $\widehat{DF} = \widehat{DE}$ și apoi $\widehat{AC} = \widehat{AF}$. Unind punctul C astfel aflat cu D , dreapta DC este coarda căutată. Ea va tăia pe AE în B , așa încît $AB = AC$.

Discuție. Pentru ca problema să fie posibilă, trebuie ca arcul DA să fie mai mare decît arcul DE , căci numai așa F este cuprins între D și A . Cum însă $\widehat{DE} + \widehat{DA} = 180^\circ$, rezultă că lungimea coardei AD trebuie să fie mai mare decît latura pătratului înscris în cercul O . Nici în cazul cînd coarda AB este egală cu latura pătratului problema nu este posibilă, căci atunci punctul F cade chiar în A .

7. Se dau trei drepte (D_1) , (D_2) , (D_3) . Să se găsească pe dreapta (D_1) un punct astfel ca simetricul său față de dreapta (D_2) să fie așezat pe dreapta (D_3) .

Rezolvare. Ducem simetrica dreptei (D_1) față de dreapta (D_2) , găsim dreapta (D_4) , care taie pe (D_3) în punctul M' (fig. VII.23). Simetricul punctului M' față de dreapta (D_2) va fi punctul M așezat pe dreapta (D_1) ; acesta este punctul căutat.

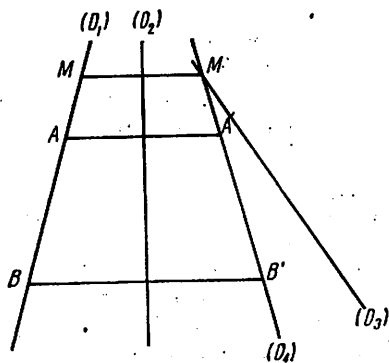


Fig. IV.23

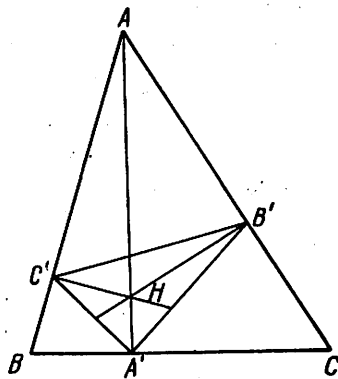


Fig. IV.24

8. Să se construiască un triunghi cunoscând picioarele înălțimilor.

Rezolvare. Presupunem problema rezolvată, A' , B' , C' sînt picioarele celor trei înălțimi (fig. IV.24). Obținem triunghiul $A'B'C'$ ortic triunghiului cerut. Înălțimile AA' , BB' , CC' sînt bisectoarele unghiurilor triunghiului $A'B'C'$. Deducem construcția:

- Se construiește triunghiul $A'B'C'$.
- Bisectoarele celor trei unghiuri A' , B' , C' se întîlnesc în H (ortocentrul).
- În A' , B' , C' ducem perpendiculare la aceste trei bisectoare și obținem astfel vîrfurile A , B , C .

9. Să se construiască un triunghi dreptunghic cînd se cunosc înălțimea și mediana care pleacă din vîrfurile unghiului drept.

Rezolvare.

Presupunem problema rezolvată și analizăm figura IV.25.

În triunghiul ABC cunoaștem înălțimea AD și mediana AA' .

De aici rezultă modul de construcție:

— Putem construi triunghiul dreptunghic ADA' , în care cunoaștem cateta AD și ipotenuza AA' .

— Știm că în orice triunghi dreptunghic mediana $AA' = \frac{BC}{2}$, deci putem construi $A'B$ și $A'C$, fiecare egal cu AA' , obținînd astfel vîrfurile triunghiului.

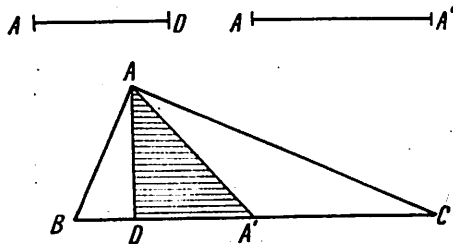


Fig. IV.25

10. Să se construiască triunghiul ABC , cunoscând mijloacele B' , C' ale laturilor AC și AB , precum și piciorul D al înălțimii care cade pe latura BC .

Rezolvare.

Presupunem problema rezolvată și fie ABC , triunghiul cerut (fig. IV.26). În acest triunghi cunoaștem D , piciorul înălțimii AD , B' , mijlocul laturii AC și C' , mijlocul laturii AB . Analizând figura, se vede ușor că A este simetricul lui D față de linia mijlocie $B'C'$.

Din cele constatate deducem modul de construcție:

- Unim B' cu C' .
- Construim punctul A simetric cu D față de $B'C'$.
- Ducem în D o perpendiculară pe AD .
- Dreapta AC' taie această perpendiculară în B .
- Dreapta AB' va tăia această perpendiculară în C .

Triunghiul ABC astfel construit corespunde datelor cerute în problemă.

11. Să se construiască un triunghi cunoscând două unghiuri și înălțimea dusă din vârful unghiului al treilea.

Rezolvare.

În triunghiul ABC (fig. IV.27) cunoaștem unghiul B , unghiul C și înălțimea AA' . Se vede ușor că, ducând înălțimea AA' , obținem două triunghiuri dreptunghice: triunghiul $AA'B$ și triunghiul $AA'C$, cunoscând în fiecare din ele cateta AA' și unghiul B , respectiv unghiul C . De aici deducem modul de construcție:

- Construim unghiul B .
 - Construim o paralelă la una din laturile unghiului, la o distanță cit înălțimea dată care taie a doua latură a unghiului B în vârful A .
 - Perpendiculara AA' va fi înălțimea triunghiului cerut.
 - În punctul M , luat arbitrar pe prima latură a unghiului, construim un unghi egal cu unghiul C .
 - Din A ducem prin mișcare de translație o paralelă la a doua latură a acestui unghi și obținem astfel al treilea vîrf C al triunghiului.
- A, B, C sînt vîrfurile triunghiului cerut.

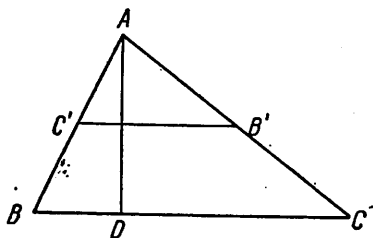


Fig. IV.26

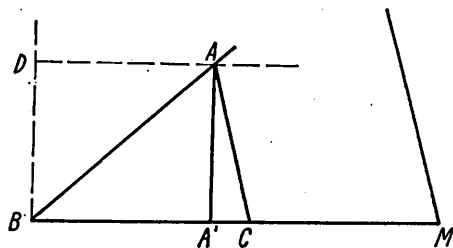


Fig. IV.27

12. Să se construiască un triunghi dreptunghic cunoscând ipotenuza și înălțimea, corespunzătoare ei.

Rezolvare. Construcția figurii fiind ușoară, nu mai este nevoie să presupunem problema rezolvată, ci trecem direct la construcție (fig. IV.28).

- Construim ipotenuza BC (dată).
- Construim un semicerc cu diametrul BC .
- Ducem în B o perpendiculară pe BC .

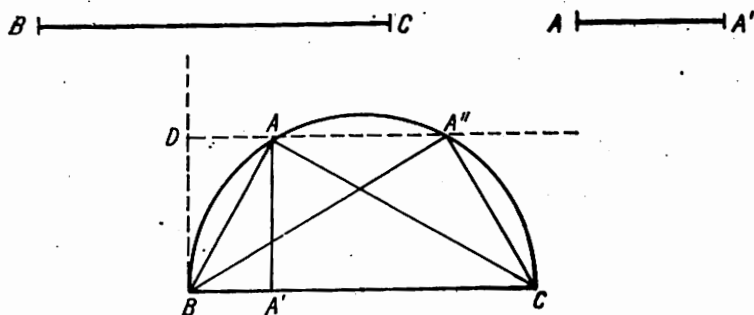


Fig. IV.28

- Luăm $BD = AA'$ (dată).
- Din D ducem o paralelă la BC , care taie cercul în punctele A și A'' .
- Triunghiul BAC și triunghiul $BA''C$ sunt soluțiile problemei.

Discuție. Notăm $R = \frac{BC}{2}$.

Dacă $AA' < R$, avem două soluții.

Dacă $AA' = R$, avem o singură soluție.

Dacă $AA' > R$, triunghiul nu se poate construi.

13. Să se construiască un triunghi ABC , cunoscând mărimile laturilor AB , BC și mediana AA' .

Rezolvare. Presupunem problema rezolvată. La triunghiul ABC (fig. IV.29) cunoaștem AB , BC și mediana AA' .

Din analiza figurii putem vedea modul de construcție:

- Construim triunghiul ABA' , în care cunoaștem AB , $BA' = \frac{BC}{2}$ și AA' deci cele trei laturi.

— $A'C = BA' = \frac{BC}{2}$.

- Unim A cu C , triunghiul astfel construit corespunde condițiilor date.

14. Să se construiască un triunghi cunoscând unghiurile și raza cercului circumscris.

Rezolvare. Presupunem problema rezolvată.

Analizând figura IV.30 se vede ușor că unghiul la centru BOC este dublul unghiului A ; analog pentru celelalte unghiuri.

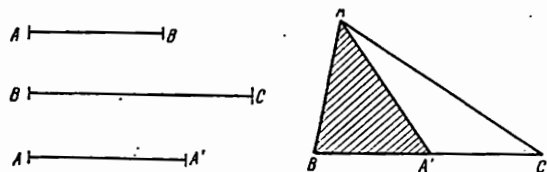


Fig. IV.29

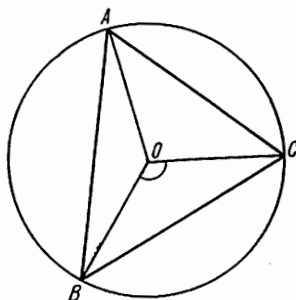


Fig. IV.30

De aici se deduce modul de construcție:

— Construim cercul cu raza dată R .

— Ducem o rază arbitrară QB .

— Construim unghiul la centru, de mărime $2\hat{A}$, și obținem vârful C al triunghiului.

— Construim în continuare al doilea unghi la centru, de mărime $2\hat{B}$, și obținem al treilea vîrf A .

Unim A cu B și cu C și obținem triunghiul cerut.

b) Probleme propuse

15. Se dau două unghiuri ale unui triunghi. Să se construiască cel de-al treilea unghi.
16. Se dă un unghi ascuțit al unui triunghi dreptunghic. Să se construiască celălalt unghi ascuțit.
17. Să se ducă o dreaptă paralelă cu o dreaptă dată, care să fie la o distanță dată de prima dreaptă.
18. Să se împartă în două părți egale un unghi al cărui vîrf nu încapă în cadrul foii de desen.
19. Printr-un punct dat să se ducă o dreaptă care să formeze cu o dreaptă dată un unghi dat.
20. Se iau două drepte xy , $x'y'$ și un punct P ; să se ducă prin acest punct o secantă, astfel încît partea ei cuprinsă între dreptele date să fie împărțită în punctul P în două părți egale.
21. Printr-un punct dat să se ducă o dreaptă astfel încît segmentul ei, cuprins între două drepte paralele date, să fie egal cu un segment dat.
22. Să se așeze un segment de dreaptă de lungime dată între laturile unui unghi ascuțit dat, astfel încît el să fie perpendicular pe una din laturile unghiului.
23. Să se așeze un segment de dreaptă de lungime dată între laturile unui unghi dat, paralel cu o dreaptă dată, care întilnește amîndouă laturile unghiului dat.
24. *Să se așeze un segment de dreaptă de lungime dată între laturile unui unghi dat, astfel încît el să taie pe laturile unghiului segmente egale.
25. Să se construiască un triunghi dreptunghic, cunoscînd un unghi ascuțit și cateta opusă lui.
26. Să se construiască un triunghi, cunoscînd două unghiuri și latura opusă unuia dintre unghiurile cunoscute.
27. Să se construiască un triunghi isoscel, cunoscînd unghiul de la vîrf și baza.
28. Să se construiască un triunghi isoscel, cunoscînd un unghi de la bază și înălțimea coborîtă pe una din laturile egale.
29. Să se construiască un triunghi isoscel, cunoscînd una dintre laturile egale și înălțimea coborîtă pe ea.

30. Să se construiască un triunghi, echilateral, cunoscând înălțimea lui.
31. Să se împartă un unghi drept în trei părți egale (cu alte cuvinte să se construiască un unghi egal cu $\frac{1}{3}$ dr.).

32. Să se construiască un triunghi, cunoscând baza, înălțimea corespunzătoare și o altă latură.

33. Să se construiască un triunghi, cunoscând baza, înălțimea și un unghi de la bază.

34. *Să se construiască un triunghi, cunoscând un unghi și cele două înălțimi coborâte pe laturile lui.

Indicație. Se construiește triunghiul dreptunghic, în care se cunoaște unghiul dat și una din înălțimile triunghiului; cu a doua înălțime ca rază se duce un cerc tangent la ipotenuza triunghiului dreptunghic construit.

35. *Să se construiască un triunghi, cunoscând o latură, suma celorlalte două laturi și înălțimea coborâtă pe una din ele.

Indicație. Se construiește triunghiul dreptunghic care are ca ipotenuză latura cunoscută și o catetă înălțimea dată; prelungim cateta a doua cu un segment astfel ca să obținem suma laturilor date; se folosește apoi mediatoarea pentru virful al treilea.

36. Să se construiască un triunghi, cunoscând înălțimea, perimetrul și un unghi de la bază.

Indicație. Se ia un segment egal cu perimetrul dat; la o distanță egală cu înălțimea dată se duce o paralelă; se construiește triunghiul dreptunghic în care cunoaștem unghiul dat și o catetă egală cu înălțimea dată; se duce apoi mediatoarea segmentului, se unește virful triunghiului dreptunghic cu extremitatea segmentului egal cu perimetrul, determinând astfel al treilea virf al triunghiului.

37. *Să se ducă într-un triunghi o dreaptă paralelă cu baza, astfel încât segmentul cuprins între celelalte două laturi să fie egal cu suma părților acestor laturi alăturate bazei.

Indicație. Se vor duce bisectoarele unghiurilor de la baza triunghiului.

38. Să se determine pe o dreaptă dată un punct care să fie situat la cea mai mică distanță de un cerc dat.

Indicație. Se va duce tangenta paralelă la dreapta dată.

39. *Să se ducă printr-un punct dat, în interiorul unui cerc, o coardă care să fie împărțită de acest punct în două părți egale.

40. Printr-un punct dat, pe latura unui unghi (punct considerat drept centru) să se descrie un cerc care să taie pe cealaltă latură a unghiului o coardă de o lungime dată.

41. Să se construiască un cerc de rază dată, al cărui centru să se afle pe o latură a unui unghi dat și care să taie pe cealaltă latură a unghiului o coardă de o lungime dată.

42. Să se construiască un cerc de rază dată care să fie tangent la o dreaptă dată într-un punct dat.
43. Să se construiască un cerc care să treacă printr-un punct dat A și care să fie tangent la o dreaptă dată într-un punct B al acestei drepte.
44. Să se construiască un cerc tangent la laturile unui unghi dat, iar la una din ele, într-un punct dat.

Indicație. Se va folosi bisectoarea unghiului dat.

45. Se dă un punct situat între două drepte paralele. Să se ducă un cerc care să treacă prin acest punct și să fie tangent la cele două drepte date.
46. Să se ducă o tangentă la un cerc care să taie o dreaptă sub un unghi dat. Cite soluții sînt?
47. Dintr-un punct dat, exterior unui cerc, să se ducă o secantă astfel încît partea ei interioară să fie egală cu un segment dat. Să se facă discuția problemei.
48. Să se construiască un cerc de rază dată, care să treacă printr-un punct dat și să fie tangent la o dreaptă dată. Problema este întotdeauna posibilă?

Indicații. Se duce o paralelă la dreapta dată la o distanță egală cu raza dată. Din punctul dat se descrie un cerc cu raza dată care intersectează paralela ducă determinînd centrul cercului cerut.

49. Să se determine pe o dreaptă dată un punct astfel încît tangentele duse din el la un cerc dat să fie de o lungime dată.
50. Să se construiască un triunghi, cunoscînd un unghi și două înălțimi, dintre care una este dusă din vîrfurile unghiului dat.

Indicație. Se va construi inițial un triunghi dreptunghic care are o catetă egală cu o înălțime dată și un unghi dat.

51. Se dau două puncte; să se ducă o dreaptă astfel încît perpendicularele din aceste puncte, coborîte pe ea, să fie de lungimi date.
52. Să se construiască un cerc care să treacă printr-un punct dat și să fie tangent la un cerc dat, într-un punct dat.
53. Să se construiască un cerc care să fie tangent la două drepte paralele date și la un cerc dat situat între ele.

Indicație. Fie d , distanța între cele două paralele și r raza cercului dat. Se construiește un cerc concentric cu cel dat de rază $R = \frac{d}{2} + r$, ce intersectează paralela ducă între cele două drepte la distanța de $\frac{d}{2}$.

Punctele de intersecție sînt centrele cercului cerut.

54. *Să se construiască un cerc de o rază dată, care să fie tangent la un cerc dat și să treacă printr-un punct dat. Se vor cerceta trei cazuri: 1) punctul dat este exterior cercului; 2) pe cerc; 3) în interiorul cercului.

55. Să se construiască un cerc de rază dată, care să fie tangent la o dreaptă dată și la un cerc dat.

Indicație. Se duce o paralelă la dreapta dată la distanța $d = \text{raza dată} + \text{raza cercului dat}$ și din centrul cercului dat se descrie un cerc cu rază egală cu raza cercului dat plus raza dată. Se determină astfel centrul cercului cerut.

56. *Să se construiască un cerc de rază dată, care să taie pe laturile unui unghi dat coarde de lungimi date.

57. Să se construiască un cerc tangent la un cerc dat, într-un punct dat și la o dreaptă dată (două soluții).

58. *Să se construiască un cerc tangent la o dreaptă dată, într-un punct dat și la un cerc dat (două soluții).

59. Să se construiască un cerc tangent la două cercuri date, punctul de contact cu unul din ele fiind dat. Se vor cerceta trei cazuri:

1) Cercul căutat se află în afara cercurilor date.

2) Unul din cercurile date se află în afara cercului căutat, iar celălalt în interiorul lui.

3) Ambele cercuri date se află în interiorul cercului căutat.

60. *Să se construiască un patrulater cunoscând trei laturi și ambele diagonale.

Indicație. Construim triunghiul format de două laturi consecutive și diagonala dată, apoi se determină al patrulea vîrf al patrulaterului.

61. Să se construiască un paralelogram, cunoscând laturile și una din diagonale.

62. Să se construiască un paralelogram, cunoscând o latură și cele două diagonale.

Indicație. Se construiește triunghiul format de jumătățile diagonalelor și latura dată.

63. Să se construiască un paralelogram, cunoscând cele două diagonale și unghiul dintre ele.

64. Să se construiască un paralelogram, cunoscând baza, înălțimea și o diagonală.

65. Să se construiască un dreptunghi, cunoscând o diagonală și unghiul dintre diagonale.

Indicație. Se construiește triunghiul format de jumătățile diagonalelor și unghiul dat.

66. Să se construiască un romb, cunoscând latura și o diagonală.

67. Să se construiască un romb, cunoscând cele două diagonale.

68. Să se construiască un romb, cunoscând înălțimea și o diagonală.

69. Să se construiască un romb, cunoscând un unghi și diagonala care trece prin virful acestui unghi.

70. Să se construiască un romb, cunoscând o diagonală și unghiul opus ei.

71. Să se construiască un romb, cunoscând suma diagonalelor și unghiul format de o diagonală cu latura rombului.

Indicație. Se reduce la construirea unui triunghi cind se cunoaște suma a două laturi și un unghi.

72. Să se construiască un pătrat, cunoscind diagonala.
73. *Să se construiască un trapez, cunoscind o bază, un unghi alăturat și cele două laturi neparalele (pot fi două soluții, una sau nici una).
74. Să se construiască un trapez, cunoscind diferența bazelor celor două laturi neparalele și o diagonală.
75. Să se construiască un trapez, cunoscind cele patru laturi. Este problema totdeauna posibilă?
76. *Să se construiască un trapez, cunoscind o bază, înălțimea și cele două diagonale.
77. *Să se construiască un pătrat, cunoscind suma formată din latura și diagonala sa.
78. *Să se construiască un pătrat, cunoscind diferența dintre diagonală și latura sa.
79. Să se construiască un paralelogram, cunoscind cele două diagonale și înălțimea.
80. Să se construiască un paralelogram, cunoscind o latură, suma diagonalelor și unghiul dintre ele.
81. Să se construiască un triunghi, cunoscind două laturi și mediana dusă pe latura a treia.
82. Să se construiască un triunghi, cunoscind baza, înălțimea și mediana dusă pe una din celelalte laturi.
83. Să se construiască un triunghi dreptunghic, cunoscind ipotenuza și diferența catetelor.

Cuprins

Clasa a VII-a

Aritmetica

I. Probleme de aritmetică.....	5
--------------------------------	---

Algebra

II. Exerciții și probleme.....	24
1. Exerciții și probleme cu numere întregi.....	24
2. Valoarea numerică a unei expresii algebrice.....	27
3. Operații cu numere.....	33

Geometrie

III. Probleme de geometrie plană.....	37
1. Cercul.....	37
2. Măsura unghiurilor.....	40
3. Figuri asemenea (segmente proporționale).....	43
4. Asemănarea.....	44
5. Relații metrice.....	49
6. Poligoane.....	51
7. Trigonometrie.....	54
8. Arii.....	57
IV. Probleme și exerciții recapitulative.....	61

Clasa a VIII-a

Algebra

I. Exerciții de calcul algebric.....	70
1. Sume algebrice.....	70
2. Înmulțirea unui polinom cu un monom.....	72
3. Înmulțirea a două polinoame.....	73
4. Împărțirea unui polinom cu un monom.....	74
5. Împărțirea a două polinoame.....	74
6. Exerciții de calcul prescurtat.....	(75)
7. Descompunerea în factori.....	79
8. Simplificarea fracțiilor algebrice.....	82
9. Operații cu fracții algebrice.....	87
10. Valoarea numerică a unei expresii algebrice.....	93
11. Exerciții și probleme de sinteză.....	95
12. Ecuații de gradul I cu o necunoscută.....	103
13. Inegalități și inecuații.....	106
14. Sisteme de gradul întâi cu două și trei necunoscute.....	108
15. Sisteme de inecuații de gradul întâi.....	117
16. Exerciții recapitulative.....	118
17. Probleme care conduc la sisteme de ecuații de gradul întâi cu una, două sau trei necunoscute.....	136

Geometrie în spațiu

II. Probleme de geometrie în spațiu.....	149
1. Drepte și plane	149
2. Prisma	151
3. Piramida	154
4. Trunchiul de piramidă.....	155
5. Cilindrul	156
6. Conul	158
7. Trunchiul de con	159
8. Sfera	162
III. Probleme diverse.....	163
IV. Probleme recapitulative de geometrie plană și spațiu.....	171
V. Exerciții și probleme recapitulative.....	214
VI. Exerciții și probleme propuse în vederea pregătirii pentru olimpiade și concursuri de matematică	242
VII. Teme pentru cercuri de matematică.....	270
1. Sisteme de numerație.....	270
2. Generalizarea și discuția problemelor.....	273
3. Probleme de coliniaritate.....	276
4. Probleme de construcții geometrice	281

Nr. colilor de tipar : 18,5
Tiraj : ex. 40 090
Bun de tipar : 6. X. 1979



Com. nr. 80 143/6 321
Combinatul Poligrafic
„CASA ȘCINTEII“
București — R.S.R.