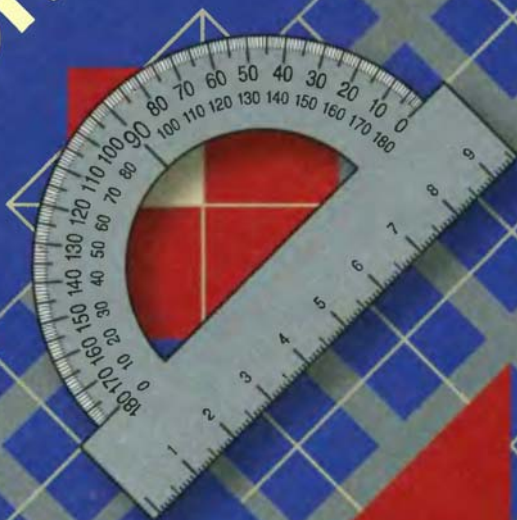


# ГЕОМЕТРИЯ РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ



9



ПРОСВЕЩЕНИЕ  
ИЗДАТЕЛЬСТВО

**СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ ПУНКТАМИ УЧЕБНИКА  
И ЗАДАЧАМИ ТЕТРАДИ**

Номера пунктов учебника	Тема	Номера задач тетради
86 87	Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам Координаты вектора	1—3 4—8
88 89	Связь между координатами вектора и координатами его начала и конца Простейшие задачи в координатах	9—12 13—19
90 91 92	Уравнение линии на плоскости Уравнение окружности Уравнение прямой	20 21—24 25—29
93 94 95	Синус, косинус, тангенс Основное тригонометрическое тождество. Формулы приведения Формулы для вычисления координат точки	30—32 33—35 36, 37
96 97 98 99	Теорема о площади треугольника Теорема синусов Теорема косинусов Решение треугольников	38—40 41—43 44, 45 46—48
101 102 103, 104	Угол между векторами Скалярное произведение векторов Скалярное произведение в координатах. Свойства скалярного произведения векторов	49 50—54 55—60
105 106 107 108	Правильный многоугольник Окружность, описанная около правильного многоугольника Окружность, вписанная в правильный многоугольник Формулы для вычисления площади правильного многоугольника, его стороны и радиуса вписанной окружности	61—64 65—68 69 70, 71
110 111 112	Длина окружности Площадь круга Площадь кругового сектора	72—77 78—82 83—85
113, 114	Отображение плоскости на себя. Понятие движения	86—88
116 117	Параллельный перенос Поворот	89 90—93

# ГЕОМЕТРИЯ



## РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

**9** КЛАСС

Пособие  
для учащихся  
общеобразовательных  
учреждений

10-е издание

Москва  
«Просвещение»  
2010



УДК 373.167.1:514

ББК 22.151я72

Г36

**А в т о р ы:**

**Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, Ю. А. Глазков, И. И. Юдина**

Рабочая тетрадь является дополнением к учебнику «Геометрия, 7—9» авторов Л. С. Атанасяна и др. и предназначена для организации решения задач учащимися на уроке после их ознакомления с новым учебным материалом. На этом этапе учащиеся делают первые шаги по осознанию нового материала, освоению основных действий с изучаемым материалом. Поэтому в тетрадь включены только базовые задачи, обеспечивающие необходимую репродуктивную деятельность в форме внешней речи. Наличие текстовых заготовок облегчает ученику выполнение действий в развернутой письменной форме, а учителю позволяет осуществить во время урока оперативный контроль и коррекцию деятельности учащихся. Использование данной тетради для организации других видов деятельности (самостоятельных работ, повторения, контроля и т. д.) малоэффективно.

Учебное издание

**Атанасян Левон Сергеевич**

**Бутузов Валентин Федорович**

**Глазков Юрий Александрович**

**Юдина Ирина Игоревна**

# **ГЕОМЕТРИЯ**

Рабочая тетрадь

**9** класс

Пособие для учащихся  
общеобразовательных  
учреждений

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*. Редактор *Л. В. Кузнецова*. Младший редактор *Н. В. Ноговицина*. Художники *В. А. Андрианов, О. П. Богомолова, Г. В. Соловьев*. Художественный редактор *О. П. Богомолова*. Компьютерная верстка *Е. А. Стрижевской*.  
Корректор *А. В. Рудакова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000.  
Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 18.05.10. Формат 70×100<sup>1/16</sup>.  
Бумага писчая. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 2,15.  
Доп. тираж 40 000 экз. Заказ № 30183.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».  
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат».  
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. [www.sarpk.ru](http://www.sarpk.ru)

ISBN 978-5-09-024156-4

© Издательство «Просвещение», 2000  
© Художественное оформление.  
Издательство «Просвещение», 2004  
Все права защищены

## § 1

## Координаты вектора

1

Найдите такое число  $q$ , чтобы выполнялось равенство  $\vec{m} = q\vec{n}$ , если: а)  $\vec{m} \uparrow \vec{n}$ ,  $|\vec{m}| = 5$  см,  $|\vec{n}| = 2$  см; б)  $\vec{m} \downarrow \vec{n}$ ,  $|\vec{m}| = 0,7$  м,  $|\vec{n}| = 2$  м.

Решение.

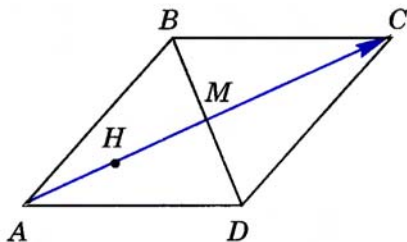
а) По условию  $\vec{m} \uparrow \vec{n}$ , т. е.  $q \geq 0$ ,  $|q| = \frac{|\vec{m}|}{|\vec{n}|} = \frac{5}{2}$ ,  $q = \frac{5}{2}$

б) По условию  $\vec{m} \downarrow \vec{n}$ , т. е.  $q < 0$ ,  $|q| = \frac{0,7}{2} = 0,35$ ,  $q = -0,35$

О т в е т . а)  $\frac{5}{2}$ ; б)  $-0,35$

2

Диагонали параллелограмма  $ABCD$  пересекаются в точке  $M$ , точка  $H$  — середина отрезка  $AM$ . Найдите, если это возможно, такое число  $k$ , чтобы выполнялось равенство: а)  $\vec{AM} = k\vec{AC}$ ; б)  $\vec{MH} = k\vec{AC}$ ; в)  $\vec{DM} = k\vec{AC}$ .



Решение.

а)  $\vec{AM} \uparrow \vec{AC}$ , поэтому искомого число  $k$  существует,  $|k| = \frac{|\vec{AM}|}{|\vec{AC}|}$  и  $k > 0$ . Так как диагонали параллелограмма точкой  $M$  делятся пополам, то  $|k| = \frac{1}{2}$ . Итак,  $k = \frac{1}{2}$

б)  $\vec{MH} \uparrow \vec{AC}$ , поэтому искомого число  $k$  существует,  $|k| = \frac{|\vec{MH}|}{|\vec{AC}|}$  и  $k > 0$ . По условию задачи точка  $H$  — середина отрезка  $AM$ , следовательно,  $MH = \frac{1}{2} AM = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} AC \right) = \frac{1}{4} AC$ , поэтому  $|k| = \frac{1}{4}$ . Итак,  $k = \frac{1}{4}$

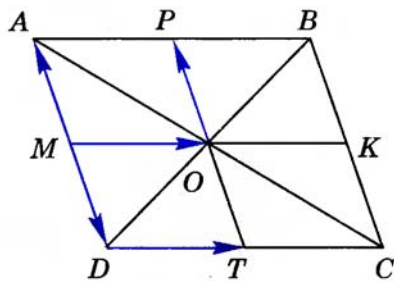
в) Векторы  $\vec{DM}$  и  $\vec{AC}$  не коллинеарны, поэтому искомого значения  $k$  не существует.

О т в е т . а)  $k = \frac{1}{2}$ ; б)  $k = \frac{1}{4}$ ; в) не существует.

В параллелограмме  $ABCD$ , изображенном на рисунке,  $MK \parallel DC$  и  $PT \parallel DA$ .

1) Разложите по векторам  $\vec{a} = \vec{DT}$  и  $\vec{b} = \vec{DA}$  векторы: а)  $\vec{DO}$ ; б)  $\vec{DB}$ .

2) Разложите вектор  $\vec{OB}$  по векторам: а)  $\vec{m} = \vec{MO}$  и  $\vec{c} = \vec{OP}$ ; б)  $\vec{m} = \vec{MO}$  и  $\vec{n} = \vec{AD}$ .



Решение.

1) По условию задачи  $MK \parallel \underline{\hspace{2cm}}$ , поэтому  $\angle BOK \underline{\hspace{1cm}} \angle BDC$ . В треугольниках  $BOK$  и  $BDC$  угол  $\underline{\hspace{1cm}}$  общий,  $\angle BOK = \angle \underline{\hspace{1cm}}$ , следовательно,  $\triangle BOK \underline{\hspace{1cm}} \triangle BDC$ . Так как  $BO = \underline{\hspace{1cm}} BD$ , то  $BK = \frac{1}{2} \underline{\hspace{1cm}}$ , следовательно, точка  $K$  — середина стороны  $\underline{\hspace{2cm}}$  параллелограмма. Аналогично точки  $M$ ,  $P$  и  $T$  —  $\underline{\hspace{4cm}}$  сторон данного параллелограмма.

а) По правилу параллелограмма получаем:  $\vec{DO} = \vec{DT} \underline{\hspace{1cm}} \vec{DM}$ , но  $\vec{DT} \underline{\hspace{1cm}} \vec{a}$ ,  $\vec{DM} = \underline{\hspace{1cm}} \vec{DA} = \underline{\hspace{1cm}} \vec{b}$ . Итак,  $\vec{DO} = \vec{a} + \underline{\hspace{1cm}} \vec{b}$ .

б)  $\vec{DB} = \vec{DC} + \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} \vec{DT} + \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} + \vec{b}$ .

2) а) По правилу параллелограмма  $\vec{OB} = \vec{OK} + \underline{\hspace{1cm}} = \vec{MO} + \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} + \vec{c}$ .

б)  $\vec{OB} = \underline{\hspace{1cm}} + \vec{OP} = \underline{\hspace{1cm}} + (\underline{\hspace{1cm}}) \vec{AD} = \underline{\hspace{1cm}}$

Ответ.

1) а)  $\vec{DO} = \underline{\hspace{2cm}}$ ; б)  $\underline{\hspace{2cm}}$

2) а)  $\vec{OB} = \underline{\hspace{2cm}}$ ; б)  $\underline{\hspace{2cm}}$

Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  не коллинеарны. Найдите числа  $x$  и  $y$  такие, что:  
а)  $2\vec{a} + x\vec{b} = y\vec{a} - \vec{b}$ ; б)  $x\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{a} + 4y\vec{b} = \vec{0}$ ; в)  $4x\vec{a} - \vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$ .

Решение.

а) В левой и  $\underline{\hspace{2cm}}$  частях данного равенства записаны разложения некоторого вектора по двум неколлинеарным  $\underline{\hspace{2cm}} \vec{a}$  и  $\underline{\hspace{1cm}}$ . Поскольку такое разложение единственно, то коэффициенты перед вектором  $\vec{a}$  равны, следовательно,  $y = \underline{\hspace{1cm}}$ . Аналогично  $x = \underline{\hspace{1cm}}$

б) Запишем данное равенство в виде  $(x - 3)\vec{a} + (1 + \dots)\vec{b} = 0\vec{a} + 0\vec{b}$ . Так как разложение вектора по двум \_\_\_\_\_ векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  единственно, то  $x - \dots = 0$  и  $\dots + 4y = \dots$ . Отсюда получаем:  $x = \dots$ ,  $y = \dots$

в) В силу единственности разложения \_\_\_\_\_ по двум \_\_\_\_\_ векторам получаем:  $4x - \dots = 0$  и  $y = \dots$ . Следовательно,  $x = \dots$ ,  $y = \dots$

О т в е т.

а)  $x = \dots$ ,  $y = \dots$ ; б) \_\_\_\_\_ ; в) \_\_\_\_\_

## 5

а) Какой из данных на рисунке векторов равен вектору  $4\vec{i} - 2\vec{j}$ ?

б) Напишите разложение вектора  $\vec{OE}$  по координатным векторам  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$ .

в) Найдите координаты вектора  $\vec{OA}$ .

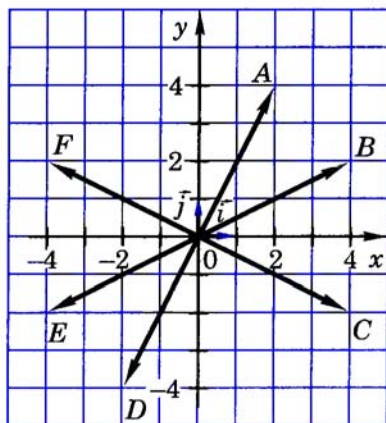
г) Напишите, какой вектор имеет координаты  $\{-4; 2\}$ .

д) Отложите от точки  $O$  вектор с координатами  $\{2; -4\}$ .

О т в е т.

а) \_\_\_\_\_ ; б)  $\vec{OE} = \dots$  ;

в)  $\vec{OA} \{ \dots ; \dots \}$ ; г) \_\_\_\_\_



## 6

Выпишите координаты вектора: а)  $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$ ; б)  $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$ ; в)  $\vec{c} = -\vec{j}$ .

Р е ш е н и е.

Координатами вектора называются \_\_\_\_\_ его разложения по координатным \_\_\_\_\_

а) По условию задачи  $\vec{a} = 3\vec{i} - \dots\vec{j}$ . Следовательно, коэффициенты разложения вектора  $\vec{a}$  по координатным \_\_\_\_\_  $\vec{i}$  и \_\_\_\_\_ равны 3 и \_\_\_\_\_, т. е.  $\vec{a} \{ \dots ; \dots \}$ .

б)  $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} = 1\vec{i} + \dots\vec{j}$ , следовательно,  $\vec{b} \{ \dots ; \dots \}$ .

в)  $\vec{c} = -\vec{j} = \dots\vec{i} + (\dots)\vec{j}$ , т. е.  $\vec{c} \{ \dots ; \dots \}$ .

Запишите разложение по координатным векторам  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$  вектора:  
 а)  $\vec{m} \{-2; 3\}$ ; б)  $\vec{n} \{0; -3\}$ ; в)  $\vec{k} \{-1; 0\}$ .

Р е ш е н и е.

Координаты вектора — это коэффициенты его \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_ по координатным векторам. Поэтому: а)  $\vec{m} = -2\vec{i} + \underline{\quad} \vec{j}$ ;  
 б)  $\vec{n} = \underline{\quad} \vec{i} + (\underline{\quad}) \vec{j} = \underline{\quad}$ ; в)  $\vec{k} = \underline{\quad} = \underline{\quad}$

О т в е т.

а)  $\vec{m} = \underline{\quad}$

б)  $\underline{\quad}$

в)  $\underline{\quad}$

## 8

Даны векторы  $\vec{a} \{2; -3\}$  и  $\vec{b} \{-1; 5\}$ .

Найдите координаты векторов: а)  $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}$ ; б)  $\vec{n} = 4\vec{a}$ ; в)  $\vec{k} = -\vec{b}$ ;  
 г)  $\vec{p} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$ .

Р е ш е н и е.

Используя утверждения о координатах суммы векторов и произведения вектора на число, получаем:

а)  $\vec{m} \{2+(-1); -3 + \underline{\quad}\}$ , т. е.  $\vec{m} \{\underline{\quad}; \underline{\quad}\}$ .

б)  $\vec{n} \{4 \cdot 2; 4 \cdot (\underline{\quad})\}$ , т. е.  $\vec{n} \{\underline{\quad}; \underline{\quad}\}$ .

в)  $\vec{k} \{-(-1); -\underline{\quad}\}$ , т. е.  $\vec{k} \{\underline{\quad}\}$ .

г) Обозначим через  $x_1$  и  $y_1$  абсциссу и ординату вектора  $\vec{a}$ , через  $x_2$  и  $y_2$  — абсциссу и \_\_\_\_\_ вектора  $\vec{b}$ , буквами  $x$  и  $y$  — \_\_\_\_\_ и ординату вектора  $\vec{p}$ .

Тогда  $x = 4x_1 - 3 \underline{\quad} = 4 \cdot \underline{\quad} - 3 \cdot (-1) = \underline{\quad}$ ,  $y = 4 \underline{\quad} - 3 \underline{\quad} = \underline{\quad}$

Следовательно,  $\vec{p} \{\underline{\quad}\}$ .

О т в е т.

а)  $\vec{m} \{\underline{\quad}\}$

б)  $\underline{\quad}$

в)  $\underline{\quad}$

г)  $\underline{\quad}$

## 9

Точка  $A$  лежит на положительной полуоси  $Ox$ , а точка  $B$  — на положительной полуоси  $Oy$ ;  $OA = 5$ ,  $OB = 12$ . Найдите координаты: а) вершин прямоугольника  $OAMB$ ; б) радиус-векторов точек  $A$ ,  $B$  и  $M$ ; в) вектора  $\vec{AB}$ ; г) векторов  $\vec{OC}$  и  $\vec{BC}$ , если  $C$  — точка пересечения диагоналей прямоугольника  $OAMB$ .

Решение.

а)  $O$  (\_\_\_; \_\_\_),  $A$  (5; \_\_\_),  $M$  (\_\_\_; \_\_\_), \_\_\_\_\_

б) Радиус-вектором точки  $A$  называется вектор, начало которого совпадает с \_\_\_\_\_ координат, а его конец — точка \_\_\_\_\_. Координаты радиус-вектора точки  $A$  равны соответствующим \_\_\_\_\_ точки \_\_\_\_\_. Поэтому  $\vec{OA} \{ \text{___}; \text{___} \}$ ,  $\vec{OB} \{ \text{___}; \text{___} \}$ ,  $\vec{OM}$  \_\_\_\_\_

в) Каждая координата вектора  $\vec{AB}$  равна \_\_\_\_\_ соответствующих координат его конца (точки \_\_\_\_\_) и \_\_\_\_\_ (точки  $A$ ). Так как  $A$  (\_\_\_; \_\_\_),  $B$  (\_\_\_; \_\_\_), то  $\vec{AB} \{ \text{___}; \text{___} \}$ .

г) Точка пересечения диагоналей прямоугольника является \_\_\_\_\_ диагонали  $OM$ , следовательно,  $\vec{OC} = \text{___} \vec{OM}$ . Так как  $\vec{OM} \{ \text{___}; \text{___} \}$ , то  $\vec{OC} \{ \text{___}; \text{___} \}$ .

Каждая координата вектора  $\vec{BC}$  равна \_\_\_\_\_ соответствующих \_\_\_\_\_ его конца (точки \_\_\_\_\_) и \_\_\_\_\_ (точки \_\_\_\_\_). Координаты точки  $C$  равны соответствующим координатам ее радиус-вектора  $\vec{OC}$ , т. е.  $C$  (\_\_\_; \_\_\_), координаты точки  $B$  равны (\_\_\_\_\_), поэтому  $\vec{BC} \{ \text{___}; \text{___} \}$ .

## 10

Заполните таблицу:

$K$	(5; -2)	(___; ___)	(-3; 0)
$M$	(3; 0)	(-2; 1)	
$\vec{KM}$	{ ___; ___ }	{ 8; 0 }	
$2\vec{KM}$			{ 6; 4 }
$-0,5\vec{KM}$			

## 11

Найдите координаты вершины  $B$  параллелограмма  $ABCD$ , если  $A(0; 0)$ ,  $C(5; 7)$ ,  $D(3; 0)$ .

Решение.

1) Четырехугольник  $ABCD$  — \_\_\_\_\_, следовательно,  $\vec{AB} = \vec{DC}$ . Так как  $C(5; \quad)$ ,  $D(\quad; \quad)$ , то  $\vec{DC} \{ \quad; \quad \}$ , поэтому  $\vec{AB} \{ \quad; \quad \}$ .

2) Так как  $A(0; \quad)$ ,  $\vec{AB} \{ \quad; \quad \}$ , то  $B(\quad; \quad)$ .

Ответ. \_\_\_\_\_

## 12

Даны точки:  $A(2; -1)$ ,  $B(5; -3)$ ,  $C(-2; 11)$ ,  $D(-5; 13)$ . Докажите, что они являются вершинами параллелограмма.

Доказательство.

Воспользуемся признаком параллелограмма: если в четырехугольнике две стороны равны и \_\_\_\_\_, то этот \_\_\_\_\_ является \_\_\_\_\_

В силу этого признака достаточно показать, что: а)  $\vec{AB} = \vec{DC}$ ; б) точки  $A$ ,  $B$  и  $D$  не лежат на одной прямой.

а) Так как  $A(2; -1)$ ,  $B(\quad)$ , то  $\vec{AB} \{ \quad; \quad \}$ ; так как  $C(-2; 11)$ ,  $D(\quad)$ , то  $\vec{DC} \{ \quad; \quad \}$ . Итак,  $\vec{AB} = \vec{DC}$ .

б) Точки  $A$ ,  $B$  и  $D$  лежат на одной \_\_\_\_\_, если координаты векторов  $\vec{AB}$  и  $\vec{AD}$  пропорциональны. Так как  $\vec{AB} \{ \quad; \quad \}$  и  $\vec{AD} \{ \quad; \quad \}$ , то координаты векторов  $\vec{AB}$  и  $\vec{AD}$  \_\_\_\_\_, поэтому эти векторы не коллинеарны и, следовательно, точки  $A$ ,  $B$  и  $D$  \_\_\_\_\_ на одной прямой. Итак, четырехугольник  $ABCD$  — \_\_\_\_\_, что и требовалось доказать.

## 13

Заполните таблицу, если точка  $K$  — середина отрезка  $BC$ .

$B$	$(3; -1)$	$(0; 5)$	
$C$	$(7; 3)$		$(4; 0)$
$K$		$(-2; 1)$	$(6; -2)$



Найдите длины сторон  $AB$  и  $BC$  и длину медианы  $BK$  треугольника  $ABC$ , если  $A(-2; 4)$ ,  $B(10; -1)$ ,  $C(6; -4)$ .

Решение.

$$а) AB = \sqrt{(10+2)^2 + \underline{\hspace{2cm}}} = \sqrt{\underline{\hspace{2cm}}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$б) BC = \underline{\hspace{4cm}}$$

в) Так как отрезок  $BK$  —  $\underline{\hspace{4cm}}$  треугольника  $ABC$ , то точка  $K$  является  $\underline{\hspace{4cm}}$  стороны  $AC$ , следовательно,

$$K(\underline{\hspace{1cm}}; \underline{\hspace{1cm}}). \text{ Поэтому } BK = \sqrt{\underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}} = \sqrt{\underline{\hspace{2cm}}}$$

$$\text{О т в е т. } AB = \underline{\hspace{1cm}}; BC = \underline{\hspace{1cm}}; BK = \underline{\hspace{1cm}}$$

Докажите, что четырехугольник  $ABCD$  является ромбом, и найдите его площадь, если  $A(-3; 4)$ ,  $B(7; 9)$ ,  $C(5; -2)$ ,  $D(-5; -7)$ .

Решение.

Четырехугольник является ромбом, если все его стороны  $\underline{\hspace{4cm}}$ . Действительно, если в четырехугольнике противоположные стороны попарно  $\underline{\hspace{4cm}}$ , то этот четырехугольник является  $\underline{\hspace{4cm}}$ . А параллелограмм, у которого  $\underline{\hspace{2cm}}$  стороны  $\underline{\hspace{2cm}}$ , называется ромбом.

Сравним длины  $\underline{\hspace{4cm}}$  данного четырехугольника:

$$AB^2 = (7+3)^2 + (\underline{\hspace{2cm}})^2 = \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$BC^2 = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$CD^2 = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$DA^2 = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$\text{Следовательно, } AB^2 \underline{\hspace{1cm}} BC^2 \underline{\hspace{1cm}} CD^2 \underline{\hspace{1cm}} DA^2, \text{ откуда } AB = BC = \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$$

Итак, четырехугольник  $ABCD$  является  $\underline{\hspace{4cm}}$ , поэтому его площадь равна половине  $\underline{\hspace{4cm}}$  его диагоналей.

$$AC^2 = (-3-5)^2 + \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{1cm}}, \text{ следовательно, } AC = \underline{\hspace{1cm}};$$

$$BD^2 = \underline{\hspace{4cm}}, \text{ следовательно, } BD = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$S_{ABCD} = 0,5AC \cdot \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$\text{О т в е т. } \underline{\hspace{4cm}}$$

Даны точки  $A(-2; -3)$ ,  $B(-3; 4)$ ,  $C(4; 5)$ .

1) Докажите, что в треугольнике  $ABC$  углы  $A$  и  $C$  равны.

2) Найдите площадь треугольника  $ABC$ .

**Решение.**

1) В треугольнике  $ABC$  углы  $A$  и  $C$  равны, если  $BC = BA$ . Так как  $BC^2 = (-3-4)^2 + \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $BA^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ , то  $BC = BA$ . Следовательно,  $\angle A = \angle C$ .

2) В данном равнобедренном треугольнике  $ABC$  основанием служит сторона  $\underline{\hspace{2cm}}$ , следовательно, медиана, проведенная из вершины  $\underline{\hspace{2cm}}$ , является  $\underline{\hspace{2cm}}$  треугольника. Найдем

$AC$  и медиану  $BM$ .  $AC = \sqrt{(-2-4)^2 + \underline{\hspace{2cm}}} = \sqrt{\underline{\hspace{2cm}}} = \underline{\hspace{2cm}}$

Так как точка  $M$  — середина стороны  $AC$ , то  $M(\underline{\hspace{1cm}}; \underline{\hspace{1cm}})$  и поэтому  $BM = \sqrt{\underline{\hspace{2cm}}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

Итак,  $S_{ABC} = 0,5AC \cdot \underline{\hspace{2cm}} = 0,5 \cdot \underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

**Ответ.**  $\underline{\hspace{2cm}}$

## § 3

### Уравнение окружности и прямой

#### 20

Даны точки  $A(-1; 2)$ ,  $B(0; \sqrt{3})$ ,  $C(1; -2)$ ,  $D(2; -1)$ . Какие из этих точек лежат на линии  $L$ , заданной уравнением  $x^2 - 2x + y^2 - 3 = 0$ ?

**Решение.** Точка лежит на линии, заданной уравнением с двумя переменными  $x$  и  $y$ , если ее  $\underline{\hspace{2cm}}$  удовлетворяют этому уравнению, и не лежит на линии, если ее координаты  $\underline{\hspace{2cm}}$  уравнению линии. Подставим  $\underline{\hspace{2cm}}$

$\underline{\hspace{2cm}}$  данных точек в уравнение  $x^2 - 2x + \underline{\hspace{2cm}}$  :

$(-1)^2 - 2(-1) + \underline{\hspace{2cm}} = 1 + \underline{\hspace{2cm}} - 3 = 0$ . Координаты точки  $A$  не удовлетворяют данному  $\underline{\hspace{2cm}}$ , следовательно, точка  $A$   $\underline{\hspace{2cm}}$  на линии  $L$ :  $A \notin \underline{\hspace{2cm}}$

$0^2 - 2 \cdot 0 + \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = 0$ . Следовательно,  $B \underline{\hspace{2cm}} L$ .  
 $\underline{\hspace{2cm}}$ . Следовательно,  $C \underline{\hspace{2cm}} L$ .

**Ответ.**  $\underline{\hspace{2cm}}$

Какие из следующих уравнений задают окружность:

а)  $x^2 + (y - 1)^2 = 25$ ;

б)  $4x^2 + 4y^2 = 9$ ;

в)  $2x^2 + 2y^2 = 0$ ;

г)  $x^2 + y^2 + 1 = 0$ ;

д)  $(x + 2)^2 + y^2 - 0,01 = 0$ ;

е)  $x^2 - 2x + y^2 = 3$ ?

Р е ш е н и е.

а) Уравнение  $x^2 + (y - 1)^2 = 25$  имеет вид  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ , где  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $r = 5 \neq 0$ , следовательно, это уравнение \_\_\_\_\_ окружность.

б) Разделив обе части уравнения  $4x^2 + 4y^2 = 9$  на 4, получим уравнение  $x^2 + y^2 = \frac{9}{4}$ , которое имеет вид  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ , где  $a = 0$ ,  $b = 0$ ,  $r = \frac{3}{2} \neq 0$ . Следовательно, это уравнение \_\_\_\_\_ окружность.

в) Равенство  $2x^2 + 2y^2 = 0$  выполняется только при  $x = 0$ ,  $y = 0$ , т. е. данному уравнению удовлетворяют координаты только одной \_\_\_\_\_ (0; 0). Следовательно, это уравнение \_\_\_\_\_ окружность.

г) Левая часть уравнения  $x^2 + y^2 + 1 = 0$  при любых значениях  $x$  и  $y$  \_\_\_\_\_ нуля, а правая часть равна \_\_\_\_\_. Поэтому точек, \_\_\_\_\_ которых удовлетворяют данному \_\_\_\_\_, не существует. Следовательно, уравнение  $x^2 + y^2 + 1 = 0$  \_\_\_\_\_ окружность.

д) Перенеся слагаемое  $-0,01$  в \_\_\_\_\_ часть уравнения  $(x + 2)^2 + y^2 - 0,01 = 0$ , получим уравнение \_\_\_\_\_, которое имеет вид  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ , где  $a = -2$ ,  $b = 0$ ,  $r = 0,1 \neq 0$ . Следовательно, уравнение  $(x + 2)^2 + y^2 - 0,01 = 0$  \_\_\_\_\_ окружность.

е) Прибавив к обеим частям уравнения  $x^2 - 2x + y^2 = 3$  число 1, получим уравнение  $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4$ , которое можно записать в виде  $(x - 1)^2 + (y - 0)^2 = 4$ , т. е. в виде  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ , где  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $r = 2 \neq 0$ . Следовательно, данное уравнение \_\_\_\_\_ окружность.

О т в е т.

Окружность задают уравнения а), \_\_\_\_\_

Постройте окружность, заданную уравнением:

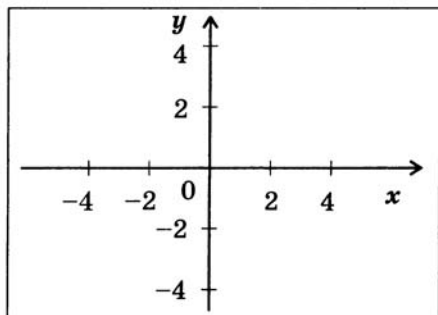
а)  $x^2 + y^2 = 16$ ; б)  $(x - 1)^2 + y^2 = 4$ ; в)  $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 4$ .

Р е ш е н и е.

Для построения окружности надо знать ее радиус и координаты \_\_\_\_\_ . Если уравнение окружности имеет вид  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ , то ее радиус равен \_\_\_\_\_, а центром является точка с координатами (\_\_\_\_; \_\_\_\_).

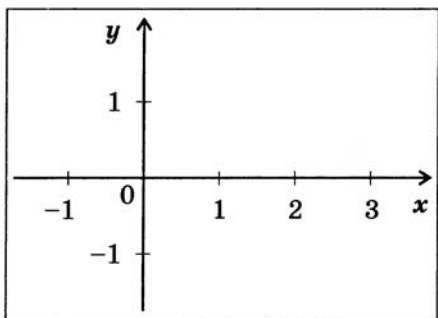
а) Уравнение  $x^2 + y^2 = 16$  запишем в виде  $(x - 0)^2 + (\text{_____})^2 = \text{_____}$ . Отсюда следует, что центр окружности — точка (\_\_\_\_; \_\_\_\_), а радиус равен \_\_\_\_\_

Построим искомую окружность, заданную уравнением  $x^2 + y^2 = 16$ .



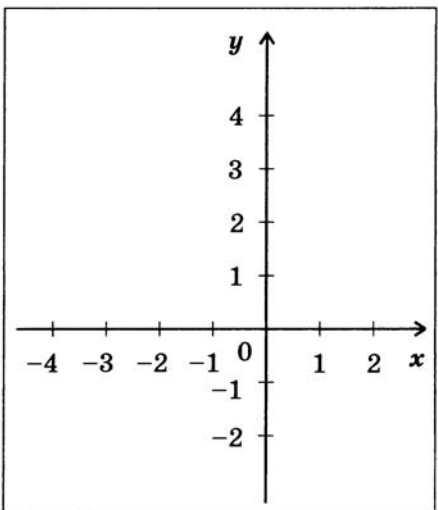
б) Уравнение  $(x - 1)^2 + \text{_____}$  представим в виде  $(x - \text{_____})^2 + (y - 0)^2 = \text{_____}$ . Следовательно, центр окружности — точка (\_\_\_\_; \_\_\_\_), а радиус равен \_\_\_\_\_

Построим искомую окружность, заданную уравнением  $(x - 1)^2 + y^2 = 4$ .



в) Чтобы выделить квадрат двучлена с переменной  $x$  и квадрат \_\_\_\_\_ с переменной  $y$ , прибавим к обеим частям уравнения  $x^2 + 2x + \text{_____}$  слагаемые 1 и 4. Получим уравнение  $(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - \text{_____} + 4) = 4 + \text{_____} + \text{_____}$ , которое запишем в виде  $(x + 1)^2 + (y - \text{_____})^2 = \text{_____}$ . Значит, центр окружности — точка (\_\_\_\_), а радиус равен \_\_\_\_\_

Построим искомую окружность, заданную уравнением  $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 4$ .



Окружность задана уравнением  $(x+1)^2+(y-2)^2=25$ . Не пользуясь чертежом, установите, какие из точек  $A(3; -2)$ ,  $B(-4; 6)$  и  $C(3; -1)$  лежат на окружности.

**Решение.**

*Первый способ.* Выясним, координаты каких точек удовлетворяют \_\_\_\_\_ окружности.

$(3+1)^2 + (\text{_____})^2 = 4^2 + \text{_____} = \text{_____} \neq 25$ . Итак, координаты точки  $A$  \_\_\_\_\_ данному уравнению, следовательно, точка  $A$  \_\_\_\_\_ на окружности.

$(-4+\text{_____})^2 + \text{_____} = \text{_____} = \text{_____}$ . Итак, \_\_\_\_\_ точки  $B$  \_\_\_\_\_ данному уравнению, следовательно, точка \_\_\_\_\_

$(3+1)^2 + \text{_____}$ . Итак, точка  $C$  \_\_\_\_\_ на окружности.

*Второй способ.* Центр данной окружности — точка с координатами  $(\text{_____}; \text{_____})$ , а радиус окружности равен \_\_\_\_\_. Найдем расстояния от центра данной \_\_\_\_\_ до каждой из данных точек и сравним их с \_\_\_\_\_ окружности. Обозначим центр окружности буквой  $M$ , тогда:

$AM = \sqrt{(-1-)^2 + \text{_____}} = \sqrt{\text{_____}} \neq 5$ , следовательно, точка  $A$  \_\_\_\_\_ на окружности.

$BM = \text{_____}$ , следовательно,

$CM = \text{_____}$

**О т в е т.** На данной окружности лежат точки \_\_\_\_\_

Напишите уравнение окружности радиуса  $r$  с центром в точке  $C$ , если: а)  $r = 2$  и  $C(3; 0)$ ; б)  $r = 3$  и  $C(0; -2)$ ; в)  $r = \sqrt{5}$  и  $C(-2; 3)$ .

**О т в е т.**

а)  $(x-3)^2 + \text{_____} = 4$ ;

б) \_\_\_\_\_

в) \_\_\_\_\_

Напишите уравнение серединного перпендикуляра к отрезку  $AB$ , если  $A(-3; 4)$ ,  $B(1; -2)$ .

**Решение.** Если точка  $M(x; y)$  лежит на серединном \_\_\_\_\_ к отрезку  $AB$ , то  $AM = BM$ , и поэтому  $AM^2 = BM^2$ . Запишем это равенство в координатах:  $(x+3)^2 + \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_ + (y+2)^2$ . Раскрыв скобки, получим:  $x^2 + 6x + \_\_\_\_\_\_ = x^2 - 2x + \_\_\_\_\_\_$ . Перенесем все слагаемые из правой части в левую \_\_\_\_\_ равенства:  $x^2 + 6x + \_\_\_\_\_\_ - 4y - 4 = 0$ . Приведем подобные члены:  $8x - \_\_\_\_\_\_ = 0$ . Разделив обе части уравнения на 4, получим  $2x - \_\_\_\_\_\_ = 0$ .

Если точка  $M(x; y)$  лежит на серединном \_\_\_\_\_ к отрезку  $AB$ , то ее координаты удовлетворяют уравнению  $2x - \_\_\_\_\_\_ = 0$ . Если же точка  $M(x; y)$  не лежит на \_\_\_\_\_ к отрезку  $AB$ , то  $AM^2 \neq \_\_\_\_\_\_$ , и поэтому ее \_\_\_\_\_ не удовлетворяют полученному уравнению.

Итак, уравнение  $2x - \_\_\_\_\_\_ = 0$  является уравнением серединного \_\_\_\_\_ к отрезку  $AB$ .

О т в е т. \_\_\_\_\_

Напишите уравнение прямой, проходящей через точки  $A(-1; 2)$  и  $B(2; -3)$ .

**Решение.** Уравнение прямой имеет вид  $ax + \_\_\_\_\_\_ + c = 0$ . Точки  $A$  и \_\_\_\_\_ лежат на прямой, т. е. их координаты \_\_\_\_\_ этому уравнению. Подставив координаты точек  $A$  и \_\_\_\_\_ в уравнение, получим:  $a \cdot (-1) + \_\_\_\_\_\_ + c = 0$ ;  $\_\_\_\_\_\_ + b \cdot (-3) + c = 0$ .

Выразим отсюда  $a$  и  $b$  через  $c$ :  $a = \_\_\_\_\_\_ c$  и  $b = \_\_\_\_\_\_ c$ . Подставив полученные значения  $a$  и \_\_\_\_\_ в уравнение  $ax + by + \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$ , приходим к уравнению:  $-5cx + (\_\_\_\_\_\_) y + \_\_\_\_\_\_ = 0$ . При любом  $c \neq 0$  это уравнение является \_\_\_\_\_ прямой  $AB$ . Сократив на  $-c$ , получим искомого \_\_\_\_\_ прямой \_\_\_\_\_ в виде:  $\_\_\_\_\_\_ + 3y - 1 = 0$ .

О т в е т. \_\_\_\_\_

Даны координаты вершин треугольника:  $A(-3; 0)$ ,  $B(1; 4)$ ,  $C(3; 0)$ . Напишите уравнение прямой, содержащей среднюю линию треугольника, параллельную стороне  $AB$ .

**Решение.**

Обозначим середины сторон  $BC$  и  $AC$  буквами  $K$  и  $M$  соответственно. Тогда  $K(2; \underline{\quad})$ ,  $M(\underline{\quad}; \underline{\quad})$ , а прямая  $KM$  — искомая. Запишем ее уравнение в виде  $ax + \underline{\quad} = 0$ . Подставив координаты точек  $K$  и  $\underline{\quad}$  в это уравнение, получим систему:

$$\begin{aligned} 2a + \underline{\quad} + c &= 0 \\ \underline{\quad} &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует:  $c = \underline{\quad}$  и  $b = \underline{\quad} - a$ , и поэтому искомое уравнение принимает вид:  $\underline{\quad} - ay = 0$  или  $x - \underline{\quad} = 0$ .

**Ответ.**  $\underline{\quad}$

Прямые заданы уравнениями  $x + y = 0$  и  $2x - y + 3 = 0$ .

- а) Найдите координаты точки пересечения данных прямых.  
 б) Напишите уравнение прямой, проходящей через найденную точку и параллельной оси ординат.

**Решение.**

а) Искомая точка лежит на данных прямых, следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнениям этих  $\underline{\quad}$ , т. е. являются решением  $\underline{\quad}$  уравнений:

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2x - \underline{\quad} &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда находим:  $x = \underline{\quad}$  и  $y = \underline{\quad}$

б) Уравнение прямой, проходящей через  $\underline{\quad}$   $M_0(x_0; y_0)$  параллельно  $\underline{\quad}$  ординат, имеет вид:  $x = \underline{\quad}$ . Учитывая, что  $M_0(-1; \underline{\quad})$ , получаем искомое уравнение:  $x = \underline{\quad}$

**Ответ.**

а)  $(\underline{\quad}; \underline{\quad})$ ;

б)  $\underline{\quad}$

Окружность и прямая заданы уравнениями  $x^2 + (y - 4)^2 = 25$  и  $x - 7y + 3 = 0$ . Найдите длину хорды, отсекаемой окружностью на прямой.

**Решение.**

Чтобы найти координаты \_\_\_\_\_ пересечения окружности и \_\_\_\_\_, решим систему уравнений:

$$\begin{aligned}x^2 + (\text{_____})^2 &= 25 \\x - \text{_____} + 3 &= 0.\end{aligned}$$

Последовательно получаем:

$$x = 7y - \text{_____}; \quad (7y - 3)^2 + (y - \text{_____})^2 = 25;$$

$$49y^2 - 42y + \text{_____} = 25;$$

$$50y^2 - \text{_____} = 0; \quad y_1 = \text{_____}, \quad y_2 = \text{_____}$$

Соответственно находим  $x_1 = \text{_____}$  и  $x_2 = \text{_____}$

Итак, данные окружность и прямая пересекаются в точках  $(\text{_____}; \text{_____})$  и  $(\text{_____}; \text{_____})$ .

Искомая длина хорды равна:

$$\sqrt{(-3 - 4)^2 + (\text{_____})^2} = \sqrt{\text{_____} + \text{_____}} = \sqrt{\text{_____}} = \text{_____}\sqrt{2}.$$

О т в е т. \_\_\_\_\_

## Соотношения между сторонами и углами треугольника.

## Скалярное произведение векторов

## § 1

## Синус, косинус, тангенс угла

## 30

Найдите по рисунку синус, косинус и тангенс угла:

а)  $\angle AOM$ ; б)  $\angle AOK$ ; в)  $\angle AOC$ ; г)  $\angle AOB$ .

Решение.

а) Угол  $\angle AOM$  образован лучом  $OM$  и положительной \_\_\_\_\_ абсцисс, точка  $M$  лежит на единичной \_\_\_\_\_ . Значит,

синус угла  $\angle AOM$  равен \_\_\_\_\_

точки  $M$ , т. е.  $\sin \angle AOM =$  \_\_\_\_\_ ;

косинус угла  $\angle AOM$  равен \_\_\_\_\_ точки \_\_\_\_\_ , т. е.

$\cos \angle AOM =$  \_\_\_\_\_ ; тангенс угла  $\angle AOM$  равен отношению  $\frac{\sin \angle AOM}{\cos \angle AOM}$ ,

т. е.  $\operatorname{tg} \angle AOM =$  \_\_\_\_\_ : \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_

б) синус угла  $\angle AOK$  равен \_\_\_\_\_ точки \_\_\_\_\_ ,

т. е.  $\sin \angle AOK =$  \_\_\_\_\_ ; косинус угла \_\_\_\_\_ равен \_\_\_\_\_

точки \_\_\_\_\_ , т. е.  $\cos \angle AOK =$  \_\_\_\_\_ ; тангенс угла  $\angle AOK$  равен \_\_\_\_\_

в)  $\sin \angle AOC =$  \_\_\_\_\_ ;  $\cos \angle AOC =$  \_\_\_\_\_ ; \_\_\_\_\_

г) \_\_\_\_\_ ;  $\cos \angle AOB =$  \_\_\_\_\_ ; тангенс угла  $\angle AOB$  не \_\_\_\_\_ , так как  $\cos \angle AOB =$  \_\_\_\_\_

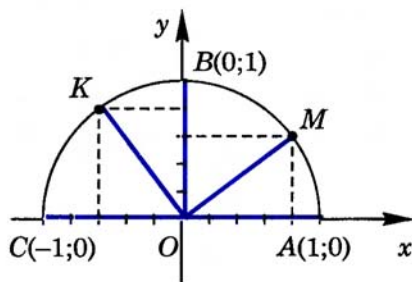
О т в е т .

а)  $\sin \angle AOM =$  \_\_\_\_\_ ; \_\_\_\_\_

б) \_\_\_\_\_

в) \_\_\_\_\_

г) \_\_\_\_\_



Принадлежит ли единичной полуокружности точка:

а)  $P(-0,6; 0,8)$ ; б)  $T \frac{1}{4}; \frac{3}{4}$ ; в)  $H \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{\sqrt{2}}$  ?

Решение.

Точка с координатами  $(x; y)$  принадлежит \_\_\_\_\_ полуокружности, если выполнены два условия: 1)  $0 \leq x \leq 1$ ,  $-1 \leq y \leq 1$  и 2)  $x^2 + y^2 = 1$ . Рассмотрим данные точки.

а) Точка  $P$ :  $x = -0,6$ ,  $y = 0,8$  удовлетворяют первому условию:  $-0,6 \leq x \leq 1$ ,  $0,8 \leq y \leq 1$ ;  $x^2 + y^2 = (0,6)^2 + 0,8^2 = 0,36 + 0,64 = 1$ , следовательно,  $P$  удовлетворяет второму условию. Поэтому точка  $P$  принадлежит единичной полуокружности.

б) Точка  $T$ :  $x = \frac{1}{4}$ ,  $y = \frac{3}{4}$ , следовательно,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ . Итак, первое условие выполнено.  $x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} + \frac{9}{16} = \frac{10}{16} \neq 1$ . Следовательно, второе условие не выполнено. Поэтому точка  $T$  не принадлежит единичной полуокружности.

в) Точка  $H$ :  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ , следовательно,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ . Итак, первое условие выполнено.  $x^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{2}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ . Следовательно, второе условие выполнено. Поэтому точка  $H$  принадлежит единичной полуокружности.

О т в е т.

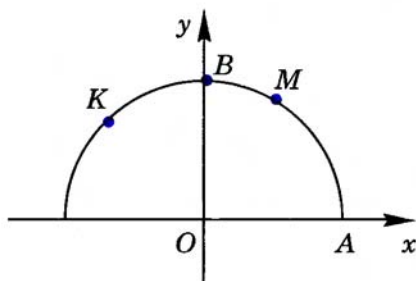
а) Принадлежит.

б) \_\_\_\_\_

в) \_\_\_\_\_

Выпишите значения синуса, косинуса и тангенса углов  $AOM$ ,  $AOB$  и  $AOK$ , если  $M \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ,  $B(0; 1)$ ,  $K \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .

Решение. Синус угла  $AOM$  — это \_\_\_\_\_ точки  $M$ , т. е.  $\sin \angle AOM = \frac{\sqrt{3}}{2}$



Косинус угла  $AOM$  — это \_\_\_\_\_ точки  $M$ ,  
т. е. \_\_\_\_\_

$$\operatorname{tg} \angle AOM = \frac{\text{_____}}{\cos \angle AOM}, \text{ т. е. } \operatorname{tg} \angle AOM = \text{_____} : \text{_____} = \text{_____}$$

$$\sin \angle AOB = \text{_____}, \cos \angle AOB = \text{_____}, \text{_____}$$

$$\sin \angle AOK = \text{_____}, \text{_____}$$

О т в е т.

$$\sin \angle AOM = \text{_____}, \text{_____}$$

$$\text{_____}$$

### 33

Найдите  $\sin \alpha$  и  $\operatorname{tg} \alpha$ , если  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Р е ш е н и е.

1) Используя основное тригонометрическое тождество  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \text{_____}$ , получаем:  $\sin^2 \alpha + \frac{\sqrt{3}^2}{2^2} = \text{_____}$ , откуда  $\sin^2 \alpha = \text{_____} - \text{_____} = \text{_____}$ . Так как  $\text{_____} \leq \sin \alpha \leq \text{_____}$ , то  $\sin \alpha = \text{_____}$

2) По определению  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ , поэтому  $\operatorname{tg} \alpha = \text{_____} : \text{_____} = \text{_____}$

О т в е т.  $\sin \alpha = \text{_____}$ ; \_\_\_\_\_

### 34

Найдите  $\cos \alpha$  и  $\operatorname{tg} \alpha$ , если  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Р е ш е н и е.

1) Используя основное тригонометрическое \_\_\_\_\_  
 $\sin^2 \alpha + \text{_____} = 1$ , получаем:  $\frac{\sqrt{2}^2}{2^2} + \text{_____} = 1$ , откуда  $\cos^2 \alpha = \text{_____} - \text{_____} = \text{_____}$ . Так как  $\text{_____} \leq \cos \alpha \leq \text{_____}$ , то находим два значения косинуса: \_\_\_\_\_ и \_\_\_\_\_

2) По \_\_\_\_\_  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{_____}}{\cos \alpha}$ .

Если  $\cos \alpha = \text{_____}$ , то  $\operatorname{tg} \alpha = \text{_____} : \text{_____} = \text{_____}$

Если  $\cos \alpha = \text{_____}$ , то  $\operatorname{tg} \alpha = \text{_____} : \text{_____} = \text{_____}$

О т в е т.

$\cos \alpha = \text{_____}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \text{_____}$  или  $\cos \alpha = \text{_____}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \text{_____}$

**35**

Вычислите  $\cos 120^\circ$ ,  $\sin 150^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 135^\circ$ .

Решение. Используя формулу приведения  $\cos(180^\circ - \alpha) =$   
 $=$  \_\_\_\_\_, получаем:  $\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - \text{_____}) = \text{_____} 60^\circ = \text{_____}$

Используя формулу \_\_\_\_\_  $\sin(180^\circ - \alpha) =$  \_\_\_\_\_,  
 получаем:  $\sin 150^\circ = \sin(\text{_____} - \text{_____}) = \text{_____} 30^\circ = \text{_____}$

Используя формулы приведения  $\sin(180^\circ - \alpha) =$  \_\_\_\_\_ и  
 $\cos(180^\circ - \text{_____}) =$  \_\_\_\_\_, получаем:

$$\operatorname{tg} 135^\circ = \frac{\sin 135^\circ}{\cos(180^\circ - \text{_____})} = \frac{\sin 45^\circ}{\text{_____}} = -\operatorname{tg} \text{_____} = \text{_____}$$

О т в е т. \_\_\_\_\_; \_\_\_\_\_; \_\_\_\_\_

**36**

Найдите координаты точки  $A$ , если: а)  $\alpha = 60^\circ$ ,  $OA = 4$ ; б)  $\alpha = 150^\circ$ ,  
 $OA = 6$  ( $\alpha$  — угол между лучом  $OA$  и положительной полуосью  $Ox$ ).

Решение. Координаты  $x$  и  $y$  точки  $A$  можно вычислить по фор-  
 мулам: \_\_\_\_\_ =  $OA \cos \alpha$ ,  $y =$  \_\_\_\_\_, где  $OA$  — \_\_\_\_\_ отрезка  
 $OA$ ,  $\alpha$  — \_\_\_\_\_ между лучом \_\_\_\_\_ и положительной \_\_\_\_\_  $Ox$ .

а)  $x = 4 \cos 60^\circ = \text{_____} = \text{_____}$ ;  $y = 4 \text{_____} = \text{_____} = \text{_____}$

б)  $x = \text{_____}$ ;  $y = \text{_____}$

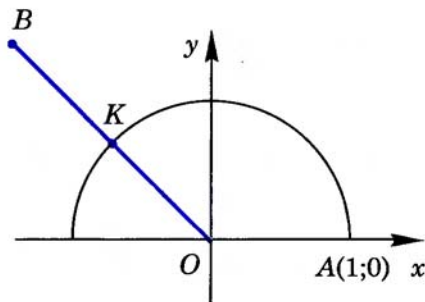
О т в е т. а)  $A$  (\_\_\_\_\_ ; \_\_\_\_\_); б)  $A$  (\_\_\_\_\_ ; \_\_\_\_\_).

**37**

Луч  $OB$  пересекает единичную полуокружность в точке  $K$ .

Найдите координаты точки  $B$ , если  $OB = 2$ ,  $K \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .

Решение. Так как точка  $K$   
 лежит на \_\_\_\_\_ полуокруж-  
 ности, то абсцисса точки  $K$  является  
 косинусом угла \_\_\_\_\_, ордината —  
 \_\_\_\_\_ угла  $\angle AOK$ , т. е.  $\cos \angle AOK =$   
 $=$  \_\_\_\_\_,  $\sin \angle AOK =$  \_\_\_\_\_. Коор-  
 динаты  $x$  и  $y$  точки  $B$  найдем по фор-  
 мулам  $x = \text{_____} \cos \angle AOK$ ,  $y = OB \times$   
 $\times$  \_\_\_\_\_, т. е.  $x = 2 \text{_____}$ ,  
 $y = \text{_____}$



О т в е т.  $B$  (\_\_\_\_\_ ; \_\_\_\_\_).

## 38

Вычислите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AB = 3$  м,  $BC = 8$  м и  $\angle B = 30^\circ$ .

Решение.

Пусть  $S$  — площадь данного \_\_\_\_\_  $ABC$ , тогда

$$S = \frac{1}{2} \cdot \sin B = \cdot 3 \cdot \cdot = \text{_____} (\text{м}^2).$$

О т в е т. \_\_\_\_\_

## 39

Площадь треугольника  $BCE$  равна  $18\sqrt{2}$  см<sup>2</sup>,  $CE = 2BE$ ,  $\angle E = 45^\circ$ . Найдите сторону  $CE$ .

Решение.

Так как  $S_{BCE} = \frac{1}{2} BE \cdot \text{_____}$  и  $CE = 2 \cdot \text{_____}$ , то

$$S_{BCE} = \frac{1}{2} BE \cdot 2BE \cdot \text{_____} = BE^2 \cdot \text{_____}$$

Отсюда получаем  $BE^2 = S_{BCE} : \text{_____} = 18\sqrt{2} : \text{_____} = \text{_____}$  (см<sup>2</sup>),  
 $BE = \text{_____}$  см,  $CE = \text{_____}$  см.

О т в е т.

$CE = \text{_____}$  см.

## 40

Стороны параллелограмма равны 4 м и 6 м, а один из его углов в два раза меньше другого. Найдите площадь параллелограмма.

Решение.

Пусть дан параллелограмм  $ABCD$ , в котором  $AB = 4$  м,  $AD = 6$  м,  $\angle B = 2\angle A$ . Тогда  $\angle C = \angle A$ ,  $\angle D = \angle \text{_____} = 2\angle \text{_____}$ , откуда  $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 6\angle \text{_____} = 360^\circ$ , откуда  $\angle A = \text{_____}$

Следовательно,  $S = AB \cdot \text{_____} \cdot \sin A = 4 \cdot \text{_____} = \text{_____}$  (м<sup>2</sup>).

О т в е т. \_\_\_\_\_

Дано:  $\triangle ABC$ , где  $AC = \sqrt{2}$  см,  
 $\angle A = 45^\circ$ ,  $\angle B = 30^\circ$ .

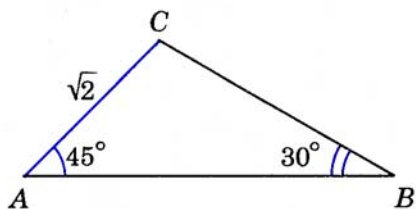
Найти:  $BC$ .

Решение.

По теореме синусов  $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$ ,

откуда получаем:  $BC = \frac{AC}{\sin B} \sin A =$   
 $= (\sqrt{2} : \underline{\quad}) \cdot \underline{\quad} = \underline{\quad}$  (см).

Ответ.  $\underline{\quad}$



Дано:  $\triangle MPT$ , где  $\angle T = 150^\circ$ ,  $TM = 2$  м,  $MP = 6$  м.

Найти:  $\sin P$ .

Решение.

По теореме  $\frac{TM}{\sin T} = \frac{MP}{\sin P}$ . Отсюда получаем:

$\sin P = \frac{TM}{MP} \cdot \frac{\sin T}{\sin P} = \frac{2}{6} \cdot \sin 150^\circ = \underline{\quad}$

Ответ.  $\underline{\quad}$

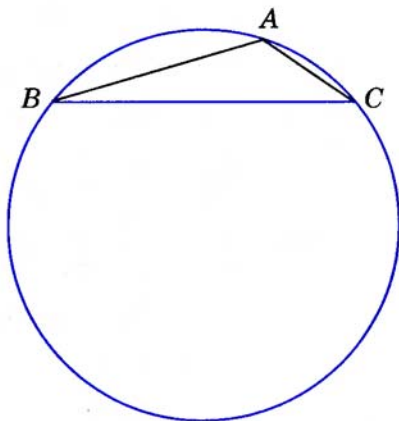
Точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежат на окружности диаметра 12, хорда  $BC$  равна 6. Найдите градусную меру угла  $BAC$ .

Решение.

Из равенства  $\frac{a}{\sin A} = 2R$  получа-

ем:  $\sin A = \frac{a}{2R}$ , т. е.  $\sin A = \frac{6}{12} =$   
 $= \underline{\quad}$ . Так как угол  $A$  тупой, то  
 $\angle A = \underline{\quad}$

Ответ.  $\underline{\quad}$



В параллелограмме  $ABCD$  диагонали  $AC = 12$  м,  $BD = 6$  м,  $\angle AOB = 60^\circ$ . Найдите периметр параллелограмма.

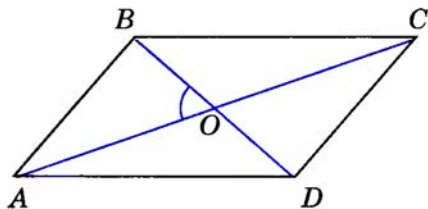
**Решение.** В треугольнике  $AOB$  по теореме косинусов получаем:  $AB^2 = AO^2 + \underline{\hspace{2cm}} - 2 \underline{\hspace{2cm}}$

Так как диагонали параллелограмма точкой пересечения  $\underline{\hspace{2cm}}$  пополам, то  $AO = \underline{\hspace{1cm}}$  м,  $BO = \underline{\hspace{1cm}}$  м. Поэтому  $AB^2 = 6^2 + \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $AB = \underline{\hspace{1cm}}$  м.

Аналогично в треугольнике  $BOC$  получаем:  $BC^2 = OB^2 + \underline{\hspace{2cm}} - \underline{\hspace{2cm}} \cdot \cos \angle BOC$ . Так как  $\angle BOC = 180^\circ - \angle \underline{\hspace{1cm}}$ , то  $\cos \angle BOC = \cos(180^\circ - \angle \underline{\hspace{1cm}}) = -\cos \angle AOB = \underline{\hspace{1cm}}$ . Следовательно,  $BC^2 = 6^2 + \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $BC = \underline{\hspace{1cm}}$  м.

Итак, периметр параллелограмма равен:  $\underline{\hspace{1cm}} (AB + \underline{\hspace{1cm}}) = \underline{\hspace{1cm}} (\underline{\hspace{1cm}} + 3\sqrt{7}) = 6 (\underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}})$  (м).

О т в е т.



## 45

Определите вид треугольника (остроугольный, прямоугольный или тупоугольный), стороны которого равны 5 м, 7 м и 9 м.

**Решение.** Обозначим стороны треугольника так:  $a = 5$  м,  $b = 7$  м и  $c = \underline{\hspace{1cm}}$  м, а противолежащие им вершины буквами  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Так как в треугольнике против большей стороны лежит  $\underline{\hspace{2cm}}$  угол, то  $\angle \underline{\hspace{1cm}}$  — больший угол треугольника, а следовательно, вид треугольника определяется углом  $\underline{\hspace{1cm}}$

По теореме  $\underline{\hspace{2cm}} c^2 = a^2 + \underline{\hspace{2cm}}$ , откуда  $\cos C = \frac{a^2 + \underline{\hspace{1cm}}}{2ab}$ , т. е.  $\cos C = (5^2 + \underline{\hspace{1cm}}) : \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$ . Так как  $\cos C \underline{\hspace{1cm}} 0$ , то угол  $C$  —  $\underline{\hspace{2cm}}$

Следовательно, данный треугольник —  $\underline{\hspace{2cm}}$

О т в е т.

**46**

Дано:  $\triangle ABC$ , где  $a = 2\sqrt{3}$ ,  $b = 1$ ,  $\angle C = 30^\circ$ . Найти:  $c$ ,  $\angle A$ ,  $\angle B$ .

Решение.

1) По теореме косинусов  $c^2 = a^2 + \underline{\hspace{2cm}}$ , т. е.  $c^2 = (2\sqrt{3})^2 + \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ , откуда  $c = \sqrt{\underline{\hspace{2cm}}} \approx \underline{\hspace{2cm}}$

2) По теореме  $a^2 = b^2 + \underline{\hspace{2cm}}$ , откуда  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - \underline{\hspace{2cm}}}{\underline{\hspace{2cm}}}$ , т. е.  $\cos A = (1^2 + \underline{\hspace{2cm}}) : \underline{\hspace{2cm}} \approx \underline{\hspace{2cm}}$ . Следовательно,  $\angle A \approx \underline{\hspace{2cm}}$

3)  $\angle B = 180^\circ - (\angle A + \underline{\hspace{2cm}})$ ,  $\angle B \approx \underline{\hspace{2cm}}$

Ответ.  $c \approx \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $\angle A \approx \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $\angle B \approx \underline{\hspace{2cm}}$

**47**

Дано:  $\triangle ABC$ , где  $a = 5$ ,  $\angle B = 70^\circ$ ,  $\angle C = 80^\circ$ . Найти:  $b$ ,  $c$ ,  $\angle A$ .

Решение.

1)  $\angle A = 180^\circ - (\underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}) = \underline{\hspace{2cm}}$

2) По теореме синусов  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ , откуда  $b = a \frac{\sin \underline{\hspace{2cm}}}{\sin \underline{\hspace{2cm}}}$ , т. е.  $b \approx 5 \cdot \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

3) По теореме  $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ , откуда  $c = a \cdot \underline{\hspace{2cm}}$ , т. е.  $c \approx \underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

Ответ.  $\angle A = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $b \approx \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $c \approx \underline{\hspace{2cm}}$

**48**

Дано:  $\triangle ABC$ , где  $a = 4$ ,  $b = 2$ ,  $c = 3$ . Найти:  $\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C$ .

Решение.

1) По теореме косинусов  $a^2 = b^2 + \underline{\hspace{2cm}}$ , откуда  $\cos A = \frac{b^2 + \underline{\hspace{2cm}} - \underline{\hspace{2cm}}}{2bc} = \frac{2^2 + \underline{\hspace{2cm}} - \underline{\hspace{2cm}}}{2 \cdot \underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}}} = \underline{\hspace{2cm}}$ , значит,  $\angle A \approx 104^\circ 30'$ .

2) Аналогично получаем  $\cos B = \frac{a^2 + \underline{\hspace{2cm}} - \underline{\hspace{2cm}}}{\underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}}}$ , т. е.  $\cos B = \underline{\hspace{2cm}}$ , откуда  $\angle B \approx \underline{\hspace{2cm}}$

3)  $\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle \underline{\hspace{2cm}})$ , т. е.  $\angle C \approx \underline{\hspace{2cm}}$

Ответ.  $\angle A \approx \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $\underline{\hspace{2cm}}$ ,  $\underline{\hspace{2cm}}$

49

В трапеции  $ABCD$  углы  $A$  и  $D$  равны  $50^\circ$ . Найдите углы между векторами:

- а)  $\vec{AB}$  и  $\vec{AD}$ ; б)  $\vec{AD}$  и  $\vec{DC}$ ; в)  $\vec{AB}$  и  $\vec{CD}$ ;
- г)  $\vec{BA}$  и  $\vec{CD}$ ; д)  $\vec{BC}$  и  $\vec{DA}$ ; е)  $\vec{AD}$  и  $\vec{BC}$ .

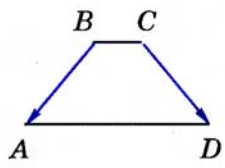
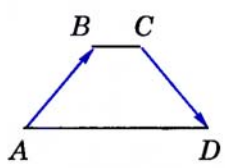
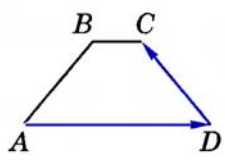
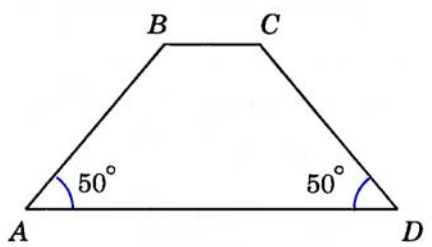
Решение.

а) Векторы  $\vec{AB}$  и  $\vec{AD}$  отложены от одной точки (точки \_\_\_\_\_), поэтому угол между \_\_\_\_\_  $\vec{AB}$  и  $\vec{AD}$  равен градусной \_\_\_\_\_ угла \_\_\_\_\_. Следовательно,  $\widehat{\vec{AB} \vec{AD}} = 50^\circ$ .

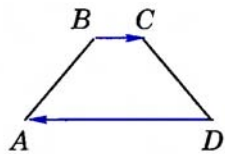
б) Отложим от начала вектора  $\vec{DC}$  (точки \_\_\_\_\_) вектор  $\vec{DK}$ , равный вектору \_\_\_\_\_ (выполните построение на рисунке). Угол между векторами  $\vec{AD}$  и  $\vec{DC}$  равен градусной \_\_\_\_\_ угла \_\_\_\_\_. Следовательно,  $\widehat{\vec{AD} \vec{DC}} = 180^\circ - \text{_____} = \text{_____}$

в) Отложим от начала \_\_\_\_\_  $\vec{AB}$  вектор  $\vec{AH}$ , \_\_\_\_\_ вектору  $\vec{CD}$  (выполните построение на рисунке). Угол между \_\_\_\_\_  $\vec{AB}$  и  $\vec{CD}$  равен \_\_\_\_\_ мере угла \_\_\_\_\_. Так как  $AH \parallel \text{_____}$ , то накрест лежащие углы  $HAD$  и \_\_\_\_\_ равны. Следовательно,  $\angle HAD = \text{_____}$ . Отсюда получаем:  $\angle BAH = 50^\circ + \text{_____} = \text{_____}$ , т. е.  $\widehat{\vec{AB} \vec{CD}} = \text{_____}$

г) Отложим от начала вектора  $\vec{BA}$  вектор  $\vec{BO}$ , равный вектору \_\_\_\_\_ (постройте на рисунке). Угол \_\_\_\_\_ векторами  $\vec{BA}$  и  $\vec{CD}$  равен \_\_\_\_\_ угла \_\_\_\_\_, т. е.  $\widehat{\vec{BA} \vec{CD}} = \text{_____}$



д) Отложим от \_\_\_\_\_ вектора  $\vec{BC}$  вектор  $\vec{BM}$ , \_\_\_\_\_ вектору  $\vec{DA}$  (выполните построение на рисунке). Угол между векторами \_\_\_\_\_ и  $\vec{DA}$  равен \_\_\_\_\_ угла \_\_\_\_\_ . Следовательно,  $\widehat{BC DA} = \underline{\hspace{2cm}}$



е) Так как векторы  $\vec{AD}$  и \_\_\_\_\_ сонаправлены, то угол между ними считается равным \_\_\_\_\_, т. е.  $\widehat{AD BC} = \underline{\hspace{2cm}}$

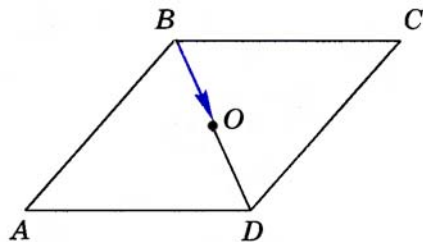
О т в е т.

а)  $50^\circ$ ; б) \_\_\_\_\_ ; \_\_\_\_\_

## 50

Точка  $O$  — середина диагонали  $BD$  ромба  $ABCD$ . Какие векторы с началом и концом в точках  $A, B, C, D$  и  $O$  перпендикулярны вектору  $\vec{BO}$ ?

Р е ш е н и е. Диагонали ромба пересекаются и \_\_\_\_\_ пересечения делятся \_\_\_\_\_, следовательно, точка  $O$  \_\_\_\_\_ на диагонали  $AC$ . Диагонали ромба взаимно \_\_\_\_\_, поэтому  $\vec{BO} \perp \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $\vec{BO} \perp \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $\vec{BO} \perp \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $\vec{BO} \perp \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $\vec{BO} \perp \underline{\hspace{2cm}}$



О т в е т.  $\vec{AC}$ , \_\_\_\_\_

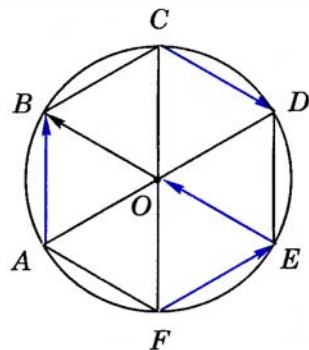
## 51

Точка  $O$  — центр окружности. Центральные углы  $AOB, BOC, COD, DOE, EOF$  и  $FOA$  равны.

Найдите углы между вектором  $OB$  и вектором:

а)  $\vec{AB}$ ; б)  $\vec{CD}$ ; в)  $\vec{EO}$ ; г)  $\vec{FE}$ .

О т в е т.



Найдите скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если:

- а)  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = 2$ ,  $\widehat{\vec{a}\vec{b}} = 30^\circ$ ;      б)  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ ,  $\widehat{\vec{a}\vec{b}} = 135^\circ$ ;  
 в)  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $\widehat{\vec{a}\vec{b}} = 90^\circ$ ;      г)  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = 0$ ;  
 д)  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 1$ ,  $\widehat{\vec{a}\vec{b}} = 180^\circ$ ;      е)  $|\vec{a}| = 6$ ,  $\vec{a} = \vec{b}$ .

Решение.

а) По определению скалярного \_\_\_\_\_ векторов

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot \underline{\hspace{2cm}} \cdot \cos \underline{\hspace{2cm}}, \text{ следовательно, } \vec{a}\vec{b} = 1 \cdot \underline{\hspace{2cm}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \underline{\hspace{2cm}}$$

б)  $\vec{a}\vec{b} = 3 \cdot \underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

в) Так как  $\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = \cos 90^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$ , то  $\vec{a}\vec{b} = \underline{\hspace{2cm}}$

г)  $\vec{a}\vec{b} = 1 \cdot \underline{\hspace{2cm}} \cdot \cos \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

д) \_\_\_\_\_

е)  $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \underline{\hspace{2cm}} = |\underline{\hspace{2cm}}|^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

О т в е т.

а) \_\_\_\_\_ ; б) \_\_\_\_\_ ;

в) \_\_\_\_\_ ; г) \_\_\_\_\_ ;

д) \_\_\_\_\_ ; е) \_\_\_\_\_

## 53

Определите вид угла (острый, прямой или тупой) между ненулевыми векторами  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ , если: а)  $\vec{b}\vec{c} < 0$ ; б)  $\vec{b}\vec{c} > 0$ ; в)  $\vec{b}\vec{c} = 0$ .

Решение.

а)  $\vec{b}\vec{c} = |\vec{b}| \cdot \underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}}$ . Так как  $\vec{b}\vec{c} \underline{\hspace{2cm}} 0$ ,  $|\vec{b}| \underline{\hspace{2cm}} 0$ ,  $|\vec{c}| \underline{\hspace{2cm}} 0$ , то  $\cos(\widehat{\vec{b}\vec{c}}) \underline{\hspace{2cm}} 0$ . Следовательно,  $\widehat{\vec{b}\vec{c}}$  — \_\_\_\_\_ угол.

б) Так как  $\vec{b}\vec{c} \underline{\hspace{2cm}} 0$ ,  $|\vec{b}| \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $|\vec{c}| \underline{\hspace{2cm}}$ , то  $\cos(\widehat{\vec{b}\vec{c}}) \underline{\hspace{2cm}} 0$ .  
 Следовательно,  $\widehat{\vec{b}\vec{c}}$  — \_\_\_\_\_ угол.

в) Так как  $|\vec{b}| \neq \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $|\vec{c}| \underline{\hspace{2cm}} 0$ ,  $\vec{b}\vec{c} \underline{\hspace{2cm}} 0$ , то  $\cos(\widehat{\vec{b}\vec{c}}) = \underline{\hspace{2cm}}$   
 Следовательно,  $\widehat{\vec{b}\vec{c}} = \underline{\hspace{2cm}}$

О т в е т.

а) \_\_\_\_\_

б) \_\_\_\_\_

в) \_\_\_\_\_

Дано: параллелограмм  $ABCD$ , в котором  $\angle BAD = 60^\circ$ ,  $AB = 3$ ,  $AD = 5$ .

Найти:  $AC$ .

Решение.

$$1) AC^2 = |\vec{AC}|^2 = \vec{AC} \cdot \vec{AC}$$

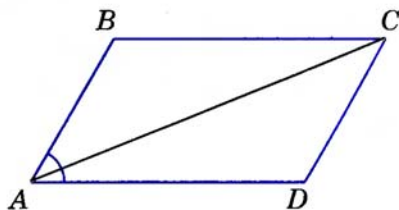
$$2) \text{ По правилу параллелограмма } \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}. \text{ Поэтому } \vec{AC} \cdot \vec{AC} =$$

$$= (\vec{AB} + \vec{AD}) \cdot (\vec{AB} + \vec{AD}) = \vec{AB}^2 + 2 \vec{AB} \cdot \vec{AD} + \vec{AD}^2 = |\vec{AB}|^2 +$$

$$+ 2 |\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}| \cos(\angle BAD) + |\vec{AD}|^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ + 5^2 =$$

$$\text{Итак, } AC^2 = 34, \text{ поэтому } AC = \sqrt{34}$$

Ответ:  $\sqrt{34}$



## 55

Найдите скалярное произведение векторов  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$ , если:

а)  $\vec{m} \{1; 2\}$ ,  $\vec{n} \{-2; 4\}$ ; б)  $\vec{m} \{0; 0,5\}$ ,  $\vec{n} \{3; -2\}$ .

Решение.

а) Скалярное произведение двух векторов равно сумме их соответствующих координат, т. е.  $\vec{m}\vec{n} = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 = 6$

б)  $\vec{m}\vec{n} = 0 \cdot 3 + 0,5 \cdot (-2) = -1$

Ответ: а)  $\vec{m}\vec{n} = 6$ ; б)  $\vec{m}\vec{n} = -1$

## 56

Даны векторы  $\vec{a} \{0,5; 0\}$ ,  $\vec{b} \{2; -0,5\}$ ,  $\vec{c} \{-1; -4\}$ . Какие из них взаимно перпендикулярны?

Решение.

Данные векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  — ненулевые. Ненулевые векторы перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно 0.

$\vec{a}\vec{b} = 0,5 \cdot 2 + 0 \cdot (-0,5) = 1 \neq 0$ , следовательно, векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  не перпендикулярны.

$\vec{a}\vec{c} = 0,5 \cdot (-1) + 0 \cdot (-4) = -0,5 \neq 0$ . Поэтому векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{c}$  не перпендикулярны.

$\vec{b}\vec{c} = 2 \cdot (-1) + (-0,5) \cdot (-4) = -2 + 2 = 0$ , значит, векторы  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  перпендикулярны.

Ответ:  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$

Векторы  $\vec{m} \{6; 3\}$  и  $\vec{n} \{-0,5; y\}$  перпендикулярны. Найдите  $y$ .

Решение.

По условию задачи  $\vec{m} \perp \vec{n}$ , следовательно,  $\vec{m} \vec{n} = 0$ . Но  $\vec{m} \vec{n} = 6 \cdot (-0,5) + 3y = -3 + 3y = 0$ , откуда  $y = 1$ .

Ответ. 1

Вычислите угол между векторами  $\vec{p} \{2; 1\}$  и  $\vec{q} \{1; 3\}$ .

Решение.

Используя для ненулевых векторов  $\vec{p} \{x_1; y_1\}$  и  $\vec{q} \{x_2; y_2\}$  формулу

$$\cos(\widehat{pq}) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}},$$

получаем:

$$\cos(\widehat{pq}) = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 3}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

следовательно,  $\widehat{pq} = 45^\circ$

Ответ.  $45^\circ$

Верно ли, что для любых векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  выполняется равенство  $(\vec{a} \vec{b}) \vec{c} = \vec{a} (\vec{b} \vec{c})$ ?

Решение.

Скалярное произведение двух векторов является числом. Пусть  $\vec{a} \vec{b} = x$ ,  $\vec{b} \vec{c} = y$ . Согласно определению, произведение данного вектора на число является коллинеарным данному вектору, поэтому  $x \vec{c} \parallel \vec{c}$  и  $y \vec{a} \parallel \vec{a}$ . Если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{c}$  не коллинеарны и  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ , то векторы  $x \vec{c}$  и  $y \vec{a}$  не коллинеарны, а следовательно, не могут быть равны.

Итак, равенство  $(\vec{a} \vec{b}) \vec{c} = \vec{a} (\vec{b} \vec{c})$  для произвольных трех векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  не выполняется.

Ответ. Нет

Упростите выражение  $(\vec{a} + \vec{b}) \vec{c} + \vec{c}(\vec{b} - \vec{a})$  и найдите его значение, если  $|\vec{b}|=2$ ,  $|\vec{c}|=3$ ,  $\widehat{\vec{b}\vec{c}} = 120^\circ$ . Укажите, какие свойства скалярного произведения при этом использовались.

Решение.

$$\begin{aligned} &\text{Так как } \vec{c}(\vec{b} - \vec{a}) = (\vec{b} - \vec{a})\vec{c}, \\ \text{то } &(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} + \vec{c}(\vec{b} - \vec{a}) = \\ &= (\vec{a} + \vec{b})\vec{c} + (\underline{\hspace{2cm}})\vec{c} = \\ &= ((\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{b} - \underline{\hspace{1cm}})) \underline{\hspace{1cm}} \end{aligned}$$

Обоснование.

\_\_\_\_\_  
закон скалярного умножения  
векторов  
\_\_\_\_\_ закон

Используя переместительный и \_\_\_\_\_  
законы сложения \_\_\_\_\_, получаем:  $(\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{b} - \vec{a}) = 2\underline{\hspace{1cm}}$

$$\begin{aligned} &\text{Следовательно,} \\ &((\vec{a} + \vec{b}) + (\underline{\hspace{2cm}}))\vec{c} = \\ &= (2\underline{\hspace{1cm}})\vec{c} = 2(\underline{\hspace{1cm}}). \end{aligned}$$

\_\_\_\_\_  
закон скалярного \_\_\_\_\_  
векторов

$$\begin{aligned} \text{Но } \vec{b}\vec{c} &= |\underline{\hspace{1cm}}| \cdot |\underline{\hspace{1cm}}| \cdot \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \\ \text{Итак, } &(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} + \vec{c}(\vec{b} - \vec{a}) = \underline{\hspace{1cm}}\vec{b}\vec{c} = \underline{\hspace{1cm}} \end{aligned}$$

Ответ. \_\_\_\_\_

# § 1

## Правильные многоугольники

### 61

Верно ли утверждение:

а) выпуклый многоугольник, у которого все стороны равны, является правильным;

б) любой четырехугольник с равными углами правильный?

Ответ обоснуйте.

О т в е т .

а) Неверно. Например, \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

б) \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

### 62

Найдите углы правильного  $n$ -угольника, если:

а)  $n = 9$ ; б)  $n = 12$ ; в)  $n = 36$ .

Р е ш е н и е .

Сумма углов выпуклого  $n$ -угольника равна  $(n-2) \cdot 180^\circ$ , а так как по условию  $n$ -угольник правильный, то каждый его угол равен  $((n - \underline{\quad}) \cdot \underline{\quad}) : n$ . Пусть  $\alpha_n$  — угол правильного  $n$ -угольника, тогда:

$$\text{а) } \alpha_9 = (9-2) \cdot 180^\circ : 9 = \underline{\quad\quad\quad} = \underline{\quad\quad\quad}$$

$$\text{б) } \alpha_{12} = \underline{\quad\quad\quad} \cdot \underline{\quad\quad\quad} = \underline{\quad\quad} \cdot \underline{\quad\quad} = \underline{\quad\quad\quad}$$

$$\text{в) } \alpha_{36} = \underline{\quad\quad\quad} \cdot \underline{\quad\quad\quad} = \underline{\quad\quad\quad}$$

О т в е т . а) \_\_\_\_\_ ; б) \_\_\_\_\_ ; \_\_\_\_\_

Чему равна сумма внешних углов правильного  $n$ -угольника, если при каждой вершине взято по одному внешнему углу? (Задача 1082 учебника.)

Решение.

Так как каждый угол правильного  $n$ -угольника вычисляется по формуле  $\alpha_n = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$ , то внешний угол при каждой вершине равен  $180^\circ - \alpha_n = 180^\circ - \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} = \frac{180^\circ}{n}$ . Поэтому искомая сумма равна  $\frac{180^\circ}{n} \cdot n = 180^\circ$ .

Ответ.  $180^\circ$

## 64

Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если каждый его угол равен: а)  $120^\circ$ , б)  $175^\circ$ ?

Решение.

Пусть  $n$  — число сторон правильного многоугольника. Так как каждый его угол вычисляется по формуле  $\alpha_n = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$ , то:

$$\text{а) } 120^\circ = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}, \quad \text{откуда } 120^\circ n = (n-2) \cdot 180^\circ, \\ 120n = 180n - 360, \quad n = 120$$

$$\text{б) } 175^\circ = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}, \quad \text{откуда } 175n = (n-2) \cdot 180^\circ, \\ 175n = 180n - 360, \quad n = 72$$

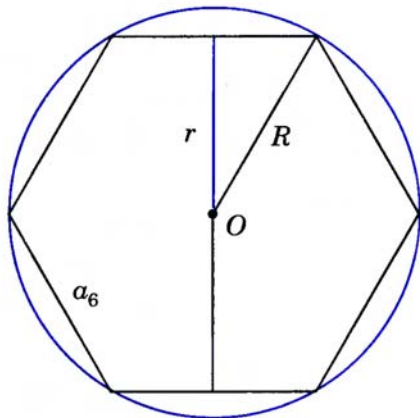
Ответ. а) 120; б) 72

## 65

На рисунке изображен правильный шестиугольник, вписанный в окружность радиуса  $R$ .

Пусть  $a_6$  — сторона правильного шестиугольника,  $r$  — радиус вписанной окружности,  $P$  — периметр правильного шестиугольника,  $S$  — его площадь.

Найдите значения  $a_6$ ,  $R$ ,  $P$  и  $S$ , если  $r = 4\sqrt{3}$  см.



Решение. По условию  $r = 4\sqrt{3}$  см, поэтому

$$R = r : \cos \frac{180^\circ}{6} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{1cm}} \text{ (см);}$$

$$a_6 = \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} \text{ (см); } P = 6 \cdot \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} \text{ (см);}$$

$$S = \frac{1}{2} P \cdot \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{1cm}} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ.  $a_6 = \underline{\hspace{1cm}}$  см;  $R = \underline{\hspace{1cm}}$  см;  $P = \underline{\hspace{1cm}}$  см;  $S = \underline{\hspace{1cm}}$  см<sup>2</sup>.

## 66

---

Периметр квадрата, вписанного в окружность, равен  $28\sqrt{2}$  см. Найдите сторону правильного треугольника, вписанного в данную окружность.

Решение. Так как периметр  $P$  квадрата равен  $28\sqrt{2}$  см, то его сторона  $a_4 = \underline{\hspace{2cm}}$  см и радиус описанной окружности  $R = a_4 : \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$  (см). Следовательно, сторона правильного вписанного треугольника  $a_3 = 2R \cdot \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$  см.

Ответ.  $\underline{\hspace{2cm}}$  см.

## 67

---

Хорда окружности, равная  $12\sqrt{2}$  см, стягивает дугу в  $90^\circ$ .

Найдите радиус окружности.

Решение.

Пусть  $a$  — хорда окружности, стягивающая дугу в  $90^\circ$ , тогда  $a$  — сторона  $\underline{\hspace{2cm}}$ , вписанного в эту окружность, и поэтому  $a = R \cdot \underline{\hspace{1cm}}$ . Отсюда  $R = a : \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{2cm}} : \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$  (см).

Ответ.  $\underline{\hspace{2cm}}$  см.

## 68

---

В окружность вписаны квадрат и правильный треугольник. Площадь квадрата равна  $Q$ . Найдите сторону и площадь треугольника.

Решение.

По условию площадь квадрата равна  $Q$ , поэтому сторона квадрата  $a_4 = \underline{\hspace{1cm}}$  и радиус описанной окружности  $R = \sqrt{Q} : \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$

Сторона вписанного треугольника  $a_3 = R \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$ , а площадь треугольника  $S = a_3^2 \cdot \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$

Ответ.  $a_3 = \underline{\hspace{1cm}}$ ;  $S = \underline{\hspace{1cm}}$

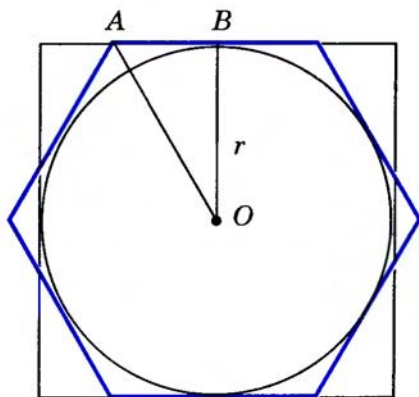
Около окружности описаны квадрат и правильный шестиугольник. Найдите периметр квадрата, если периметр шестиугольника равен 48 см. (Задача 1092 учебника.)

**Решение.**

Пусть  $r$  — радиус вписанной окружности. Тогда периметр  $P$  квадрата равен \_\_\_\_\_

Из условия задачи следует, что сторона шестиугольника равна \_\_\_\_\_ см, поэтому в прямоугольном треугольнике  $AOB$ , изображенном на рисунке,  $OB = r$ ,  $AB =$  \_\_\_\_\_ см,  $OA =$  \_\_\_\_\_ см,

значит,  $r = \sqrt{OA^2 - \text{_____}} =$  \_\_\_\_\_ (см) и  $P =$  \_\_\_\_\_ см.



**Ответ.** \_\_\_\_\_ см.

Найдите площадь  $S$  правильного  $n$ -угольника, если:

- а)  $n = 4$ ,  $R = 3\sqrt{2}$  см;      б)  $n = 3$ ,  $P = 24$  см;  
в)  $n = 6$ ,  $r = 9$  см;      г)  $n = 8$ ,  $r = 5\sqrt{3}$  см.

(Задача 1094 учебника.)

**Решение.**

По формулам п. 108 учебника находим:

а)  $n = 4$ ,  $a_4 = R \cdot \text{_____} = \text{_____} \cdot \text{_____} = \text{_____}$  (см),  $r = R \cdot \cos \text{_____} =$   
 $= \text{_____} \cdot \text{_____} = \text{_____}$  (см),  $S = \frac{1}{2} P \cdot \text{_____} = \text{_____} = \text{_____}$  (см<sup>2</sup>);

б)  $n = 3$ ,  $a_3 = \text{_____}$  см,  $R = a_3 : 2 \sin \text{_____} = \text{_____} = \text{_____}$  (см),  
 $r = R \cdot \cos \text{_____} = \text{_____}$  (см),  $S = \frac{1}{2} P \cdot \text{_____} = \text{_____} = \text{_____}$  (см<sup>2</sup>);

в)  $n = 6$ ,  $r = R \cdot \cos \text{_____} = \text{_____} \cdot \text{_____}$ , поэтому  $R = \text{_____}$  см,  
 $a_6 = \text{_____} = \text{_____}$  см,  $S = \frac{1}{2} \cdot \text{_____} \cdot \text{_____} = \text{_____}$  (см<sup>2</sup>);

г)  $n = 8$ ,  $r = R \cdot \cos \text{_____}$ ,  $a = 2R \cdot \sin \text{_____} = 2r \cdot \text{_____} =$   
 $= \text{_____}$  (см),  $S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \text{_____} = \text{_____} \approx \text{_____}$  (см<sup>2</sup>).

**Ответ.**

а) \_\_\_\_\_ см<sup>2</sup>; б) \_\_\_\_\_ см<sup>2</sup>; в) \_\_\_\_\_ см<sup>2</sup>; г)  $\approx$  \_\_\_\_\_ см<sup>2</sup>.

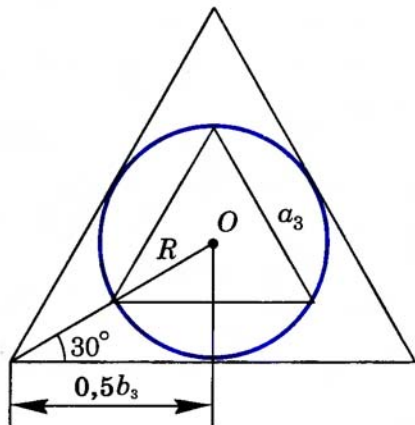
В окружность вписан правильный треугольник и около окружности описан правильный треугольник. Найдите отношение площадей этих треугольников.

Решение.

Пусть  $a_3$  — сторона вписанного в окружность треугольника,  $R$  — радиус этой окружности,  $b_3$  — сторона описанного треугольника,  $S$  — площадь вписанного треугольника,  $Q$  — площадь описанного треугольника. Тогда  $a_3 = R \cdot \underline{\hspace{1cm}}$ , а  $S = a_3^2 \cdot \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} \cdot R^2$ ;  
 $0,5 b_3 = R : \operatorname{tg} \underline{\hspace{1cm}}$ , откуда  $b_3 = \underline{\hspace{1cm}} R$ .

Поэтому  $Q = b_3^2 \cdot \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} R^2$ . Отсюда получаем  $S : Q = \underline{\hspace{1cm}} : \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$

Ответ.  $\underline{\hspace{1cm}}$



## § 2 Длина окружности и площадь круга

### 72

Найдите длину окружности, описанной около:

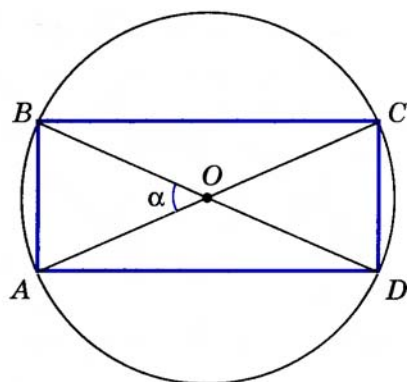
- правильного треугольника со стороной  $12\sqrt{3}$  см;
- прямоугольника, меньшая сторона которого равна 8 см, а угол между диагоналями равен  $\alpha$ ;
- правильного треугольника, площадь которого равна  $48\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>.

Решение.

Пусть  $R$  — радиус окружности, описанной около данного многоугольника,  $C$  — длина этой окружности,  $a$  — сторона данного правильного треугольника.

а) Так как  $R = a : \underline{\hspace{1cm}}$ , а  $C = 2\pi \cdot \underline{\hspace{1cm}}$ , то  $C = 2\pi \cdot \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} \cdot \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$  (см).

б) На рисунке  $ABCD$  — данный прямоугольник, у которого  $AB = 8$  см, а  $\angle AOB = \alpha$ . В прямоугольном треугольнике  $ABD$   $\angle A = 90^\circ$ ,  $\angle ADB =$  \_\_\_\_\_ (угол  $ADB$  — вписанный и опирается на дугу  $AB$ , центральный угол которой равен  $\alpha$ ), гипотенуза  $BD =$  \_\_\_\_\_, поэтому  $2R =$  \_\_\_\_\_ см и  $C =$  \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ (см).



в) Так как площадь правильного треугольника со стороной  $a$  можно вычислить по формуле  $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ , то из уравнения \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ находим  $a =$  \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ (см). Следовательно,  $R = a :$  \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ (см) и  $C =$  \_\_\_\_\_ (см).

О т в е т .

а) \_\_\_\_\_ см; б) \_\_\_\_\_ см; в) \_\_\_\_\_ см.

## 73

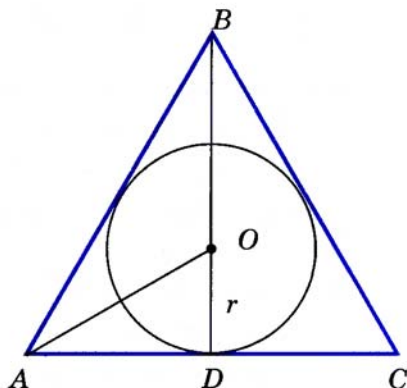
Найдите длину окружности, вписанной:

- в равносторонний треугольник со стороной  $a$ ;
- в равнобедренный треугольник с углом  $2\alpha$  при вершине и боковой стороной  $a$ ;
- в прямоугольный треугольник с острым углом  $\alpha$  и противолежащим катетом  $a$ .

Р е ш е н и е .

а) На рисунке окружность с центром  $O$  и радиусом  $r$  вписана в равносторонний треугольник  $ABC$  со стороной  $AB = a$ .

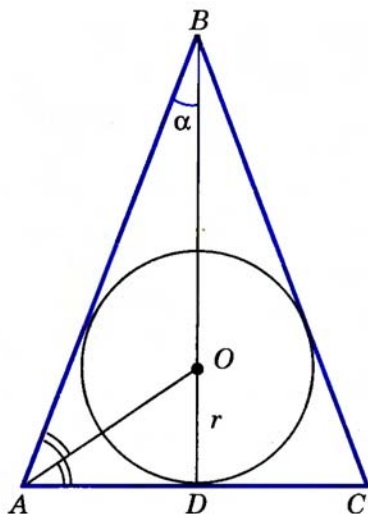
В прямоугольном треугольнике  $ADO$  катет  $OD = r$ , катет  $AD = \frac{1}{2}$  \_\_\_\_\_, а  $\angle OAD =$  \_\_\_\_\_, и следовательно,  $r = AD \cdot$  \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ и  $C =$  \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_



б) На рисунке окружность с центром  $O$  и радиусом  $r$  вписана в равнобедренный треугольник  $ABC$ , в котором  $AB = BC = a$  и  $\angle B = 2\alpha$ .

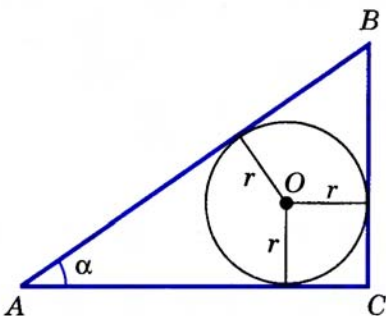
1) В \_\_\_\_\_ треугольнике  $ABD$  с  $\angle D = 90^\circ$   $AB = a$ , а  $\angle ABD = \alpha$ , поэтому  $AD =$  \_\_\_\_\_

2) В \_\_\_\_\_ треугольнике  $AOD$  с прямым углом  $D$   $\angle OAD = \frac{1}{2} \angle \_\_\_\_\_\_ = \frac{1}{2}(90^\circ - \_\_\_\_\_\_)$ , поэтому  $r = AD \cdot \_\_\_\_\_\_ =$  \_\_\_\_\_  
Отсюда  $C = \_\_\_\_\_\_ =$  \_\_\_\_\_



в) На рисунке окружность с центром  $O$  и радиусом  $r$  вписана в треугольник  $ABC$ , в котором  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle A = \alpha$ ,  $BC = a$ . Поэтому  $AC = a : \_\_\_\_\_\_ , AB = a : \_\_\_\_\_\_ . S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC =$  \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_

С другой стороны,  $S_{ABC} = \frac{1}{2} P \cdot r = \frac{1}{2} \_\_\_\_\_\_ \cdot r = \frac{a(\_\_\_\_\_\_)}{2\sin\alpha} \cdot r$ .



Таким образом,  $\frac{a^2 \cos\alpha}{2\sin\alpha} = \_\_\_\_\_\_ \cdot r$ , откуда  $r = \_\_\_\_\_\_$  и  $C = \_\_\_\_\_\_ =$  \_\_\_\_\_

О т в е т . а) \_\_\_\_\_ ; б) \_\_\_\_\_ ; в) \_\_\_\_\_

## 74

Найдите длину дуги окружности радиуса 6 см, если ее градусная мера равна: а)  $30^\circ$ ; б)  $45^\circ$ ; в)  $60^\circ$ ; г)  $90^\circ$ . (Задача 1109 учебника.)

Р е ш е н и е . Воспользуемся формулой п. 110 учебника для вычисления дуги окружности:  $l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha$ .

а)  $l = \frac{\pi \cdot 6 \cdot 30}{180} = \pi$  (см); б)  $l =$  \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ (см);

в)  $l =$  \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ (см); г)  $l =$  \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ (см).

О т в е т . а)  $\pi$  см; б) \_\_\_\_\_ см; в) \_\_\_\_\_ см; г) \_\_\_\_\_ см.

Длина окружности, описанной около правильного треугольника, равна  $18\pi$  см. Найдите периметр этого треугольника.

**Решение.** Воспользуемся формулой для вычисления длины окружности  $C = \dots$  и найдем радиус  $R$  этой окружности. Так как по условию  $C = 18\pi$  см, то  $R = 18\pi : \dots = \dots$  (см),  $a_3 = R \dots = \dots$  (см), и  $P = \dots = \dots$  (см).

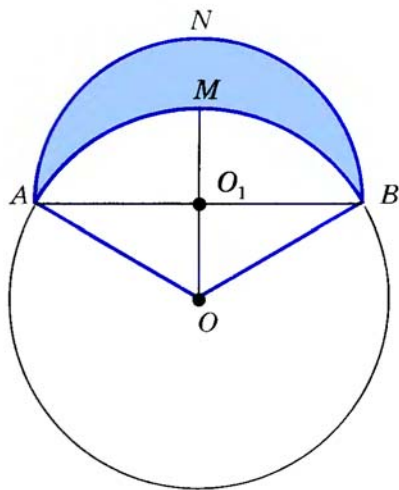
**Ответ.**  $\dots$  см.

Найдите периметр закрашенной на рисунке лунки, если радиус окружности с центром в точке  $O$  равен  $R$ , радиус окружности с центром в точке  $O_1$  равен  $\frac{1}{2}AB$ , а  $\sphericalangle AMB = 120^\circ$ .

**Решение.** Так как  $\sphericalangle AMB = 120^\circ$ , то длина дуги  $l = \frac{\pi R}{180} \cdot \dots = \dots$ . Хорда  $AB$  стягивает дугу  $AMB$  окружности с центром  $O$  в  $120^\circ$ , поэтому  $AB = a_3 = \dots$ , а радиус  $r$  окружности с центром  $O_1$  равен  $\frac{1}{2} \cdot \dots = \dots$ , и длина  $m$  дуги  $ANB$  равна половине длины этой окружности, т. е.  $m = \frac{1}{2} \cdot \dots = \dots = \dots$

Теперь найдем периметр  $C$  лунки:  
 $C = l + m = \dots + \dots = \frac{\pi R}{6} \cdot \dots$

**Ответ.**  $\dots$



Длина окружности радиуса 15 см равна длине дуги, центральный угол которой равен  $150^\circ$ . Найдите радиус дуги.

**Решение.** Длина данной окружности равна  $\dots \cdot 15 = \dots$  (см). По условию длина этой окружности равна длине  $l$  дуги искомого радиуса  $R$ , центральный угол  $\alpha$  которой равен  $150^\circ$ . Используя формулу  $l = \frac{\pi R \alpha}{180}$ , получаем  $R = l \cdot \dots = \dots = \dots$  (см).

**Ответ.**  $\dots$  см.

Найдите площадь круга, описанного около:

- правильного треугольника со стороной  $a$ ;
- равнобедренного треугольника с боковой стороной, равной 10 см, и высотой, проведенной к основанию, равной 8 см;
- равнобедренного треугольника с боковой стороной  $a$  и углом при вершине  $\alpha$ .

**Решение.**

а) Так как сторона  $a$  правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса  $R$ , равна  $R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ , то  $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$  и  $S = \pi R^2 = \frac{\pi a^2}{3}$ .

б) На рисунке равнобедренный треугольник  $ABC$  с основанием  $AC$  вписан в окружность,  $BD$  — его высота, проведенная к основанию. По теореме Пифагора  $AD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$  (см), и поэтому  $AC = 2 \cdot 5 = 10$  (см),  $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8 = 40$  (см<sup>2</sup>).

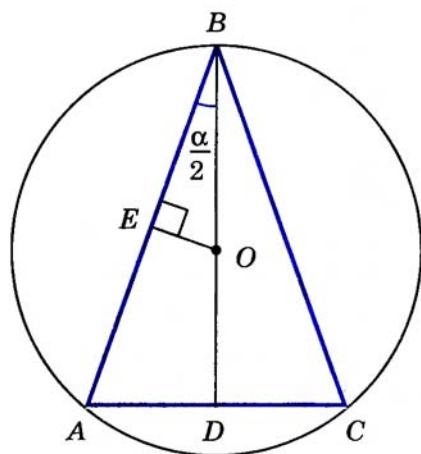
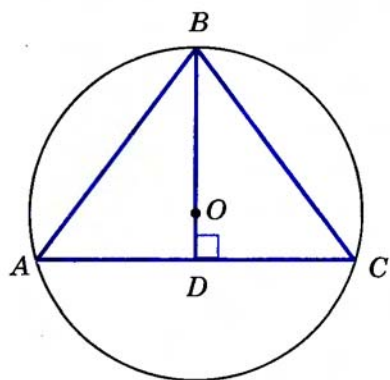
С другой стороны,  $S_{ABC} = \frac{abc}{4R}$ , следовательно,  $R = \frac{abc}{4S_{ABC}} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 10}{4 \cdot 40} = \frac{25}{2}$  (см), значит,  $S_{\text{круга}} = \pi R^2 = \frac{625\pi}{4}$  (см<sup>2</sup>).

в) На рисунке окружность с центром  $O$  и радиусом  $R$  описана около равнобедренного треугольника  $ABC$  с боковой стороной  $AB = a$  и углом  $B = \alpha$ ,  $OE \perp AB$ . Так как  $OA = OB = R$ , то высота  $OE$  треугольника  $AOB$  является его медианой, поэтому  $BE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$ .

В прямоугольном треугольнике  $OBE$   $\angle OBE = \frac{\alpha}{2}$ ,  $OB = R = BE$ :  $R = \frac{a}{2}$ .  $S_{\text{круга}} = \pi R^2 = \frac{\pi a^2}{4}$ .

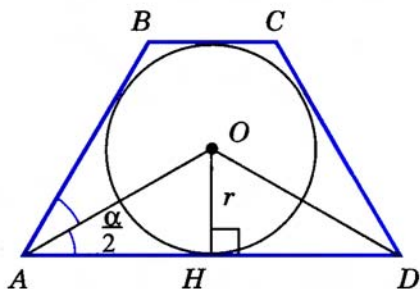
**Ответ.**

- а)  $\frac{\pi a^2}{3}$ ; б)  $40$  см<sup>2</sup>; в)  $\frac{\pi a^2}{4}$



Найдите площадь круга, вписанного в равнобедренную трапецию с большим основанием  $a$  и острым углом  $\alpha$ . (Задача 1117 (г) учебника.)

**Решение.** На рисунке круг с центром  $O$  и радиусом  $r$  вписан в равнобедренную трапецию  $ABCD$ . Так как  $O$  — точка пересечения биссектрис углов  $\angle A$  и  $\angle D$ , то  $\angle OAD = \angle ODA = \frac{\alpha}{2}$ , поэтому треугольник  $AOD$  — равнобедренный, следовательно, его высота  $OH$  является медианой, и  $AH = HD = \frac{a}{2}$ . Из прямоугольного треугольника  $OAH$  находим:  $OH = r = \frac{a}{2} \cdot \tan \frac{\alpha}{2}$  и площадь круга  $S = \pi r^2 = \frac{\pi a^2 \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{4}$ .



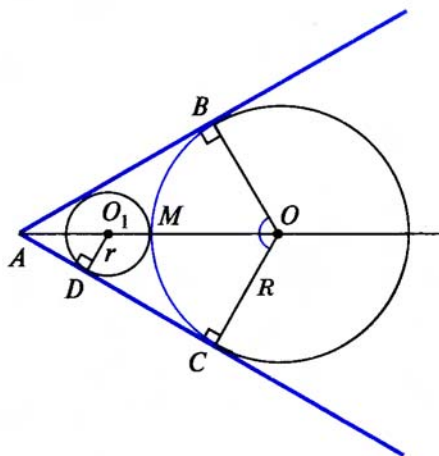
**Ответ.**  $\frac{\pi a^2 \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{4}$

## 80

На рисунке из точки  $A$  к окружности с центром  $O$  проведены касательные  $AB$  и  $AC$  ( $B$  и  $C$  — точки касания),  $\angle BOC = 120^\circ$ , а длина дуги  $BMC$  равна 12 см. Найдите длину окружности, вписанной в фигуру  $ABMC$ , т. е. касающейся сторон угла  $BAC$  и дуги  $BMC$ .

**Решение.** Пусть  $O_1$  — центр окружности, вписанной в фигуру  $ABMC$ ,  $D$  — точка касания этой окружности со стороной  $AC$ . Обозначим радиус окружности с центром  $O$  через  $R$ , а радиус окружности с центром  $O_1$  через  $r$ .

1) По условию  $\angle BOC = 120^\circ$ , поэтому длина дуги  $BMC$  равна  $\frac{\pi R}{180} \cdot 120 = \frac{2\pi R}{3}$ . С другой стороны, по условию длина этой дуги равна 12 см, следовательно,  $\frac{2\pi R}{3} = 12$ , откуда  $R = \frac{18}{\pi}$  см.



2) Прямоугольные треугольники  $ABO$  и  $ACO$  равны по гипотенузе и катету ( $AO$  — общая \_\_\_\_\_,  $OB = \underline{\hspace{1cm}} = R$ ), поэтому  $\angle BOA = \angle \underline{\hspace{1cm}} = \frac{1}{2} \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$ ,  $\angle BAO = \angle \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$ . Катет, лежащий против угла в  $30^\circ$ , равен половине \_\_\_\_\_, значит,  $AO = 2 \cdot \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$ , и аналогично,  $AO_1 = 2 \cdot \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$ .

3)  $AO = AO_1 + O_1M + \underline{\hspace{1cm}}$ , т. е.  $2R = \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}}$ ,  $\underline{\hspace{1cm}}r = \underline{\hspace{1cm}}$ ,  $r = \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$  (см), а длина окружности равна  $2\pi \cdot \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$  (см).

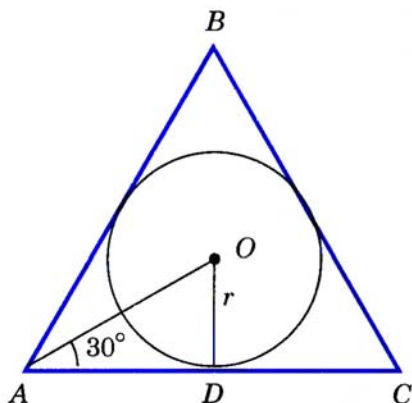
О т в е т. \_\_\_\_\_ см.

## 81

Площадь правильного треугольника больше площади вписанного в него круга на  $15\sqrt{3} - 5\pi$ . Найдите радиус круга.

Р е ш е н и е. Пусть окружность радиуса  $r$  вписана в треугольник  $ABC$ . Тогда  $AC = 2AD = 2r$ : \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_, полупериметр треугольника  $p = \underline{\hspace{1cm}}r$ ,  $S_{ABC} = p \cdot \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$ ,  $S_{\text{круга}} = \pi \cdot \underline{\hspace{1cm}}$ . По условию  $S_{ABC} - S_{\text{круга}} = 15\sqrt{3} - 5\pi$ , поэтому \_\_\_\_\_ =  $15\sqrt{3} - 5\pi$ , т. е.  $r^2 \cdot \underline{\hspace{1cm}} = 5(3\sqrt{3} - \pi)$ , откуда  $r^2 = \underline{\hspace{1cm}}$ , а  $r = \underline{\hspace{1cm}}$ .

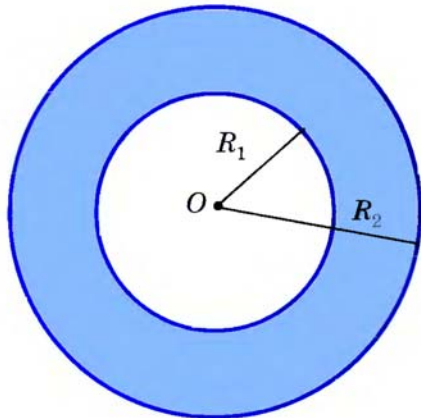
О т в е т. \_\_\_\_\_



## 82

Найдите площадь кольца, ограниченного двумя окружностями с общим центром и радиусами  $R_1$  и  $R_2$ ,  $R_1 < R_2$ . Вычислите площадь, если  $R_1 = 1,5$  см,  $R_2 = 2,5$  см. (Задача 1120 учебника.)

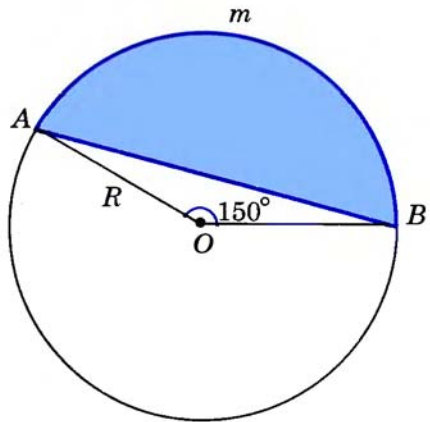
Р е ш е н и е. Искомая площадь кольца  $S = \underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}} = \pi \underline{\hspace{1cm}}$ . Если  $R_1 = 1,5$  см,  $R_2 = 2,5$  см, то  $S = \underline{\hspace{1cm}}$  см<sup>2</sup> = \_\_\_\_\_ см<sup>2</sup>.



О т в е т. \_\_\_\_\_ см<sup>2</sup>.

На рисунке дуга  $AmB$  равна  $150^\circ$ , а радиус  $R$  равен 2 см. Найдите площадь закрашенного сегмента.

Решение. Пусть  $S$  — площадь сегмента  $AmB$ ,  $S_1$  — площадь сектора  $OAmB$ ,  $S_2$  — площадь треугольника  $AOB$ , тогда  $S = \text{---} - \text{---}$



$$1) S_1 = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \text{---} = \text{---} \cdot R^2 = \text{---} \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$2) S_2 = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \text{---} = \text{---} R^2 = \text{---} \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$3) S = \text{---} - \text{---} = \text{---} \text{ см}^2.$$

Ответ. \_\_\_\_\_ см<sup>2</sup>.

Площадь сектора с центральным углом  $72^\circ$  равна  $S$ .

Найдите радиус сектора. (Задача 1127 учебника.)

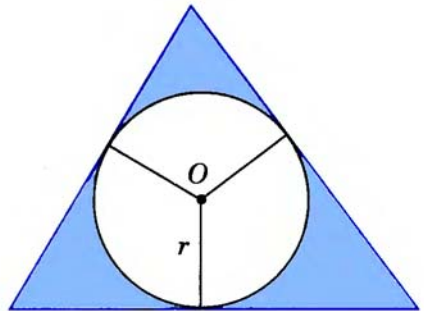
Решение. Пусть  $R$  — радиус окружности. Тогда  $S = \text{---} \cdot \text{---}$ , откуда  $R^2 = \text{---} = \text{---}$  и  $R = \text{---}$

Ответ. \_\_\_\_\_

В треугольник со сторонами 13 см, 14 см и 15 см вписана окружность. Найдите площадь закрашенной фигуры.

Решение. Площадь  $S$  треугольника можно найти по формуле Герона  $S = \sqrt{p \cdot \text{---}} = \text{---} = \text{---} \text{ (см}^2\text{)}.$

С другой стороны,  $S = p \cdot \text{---}$ , где полупериметр  $p = \text{---}$  см, поэтому  $r = \text{---}$  см, а площадь круга  $S_1 = \text{---} = \text{---} \text{ (см}^2\text{)}.$  Теперь можно найти площадь закрашенной фигуры  $S_\phi = S - S_1 = \text{---} - \text{---} \text{ (см}^2\text{)}.$



Ответ. \_\_\_\_\_ см<sup>2</sup>.

§ 1

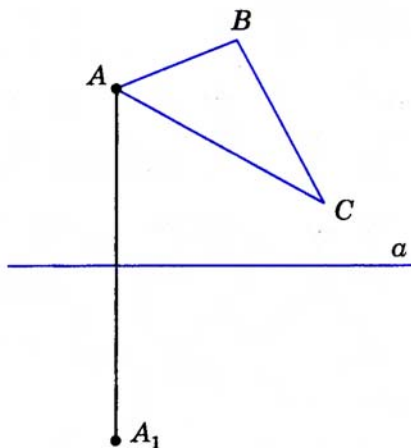
Понятие движения

86

На рисунке даны прямая  $a$  и треугольник  $ABC$ . Постройте фигуру  $F$ , на которую отображается данный треугольник при осевой симметрии с осью  $a$ . Что представляет собой фигура  $F$ ?

Решение. Построим точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ , симметричные точкам  $A$ ,  $B$ ,  $C$  относительно \_\_\_\_\_  $a$ , и проведем отрезки  $A_1B_1$ ,  $B_1C_1$  и \_\_\_\_\_

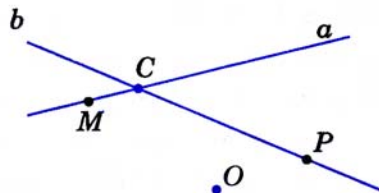
Так как при движении, в частности при осевой симметрии, треугольник отображается на равный ему \_\_\_\_\_, то искомой фигурой является треугольник \_\_\_\_\_, равный треугольнику \_\_\_\_\_



87

На рисунке даны точка  $O$  и две пересекающиеся прямые  $a$  и  $b$ . Постройте прямые, на которые отображаются прямые  $a$  и  $b$  при центральной симметрии с центром  $O$ .

Решение. Отметим на прямой  $a$  какую-нибудь точку  $M$ , а на прямой  $b$  — точку  $P$  так, чтобы эти точки не совпадали с точкой  $C$ .



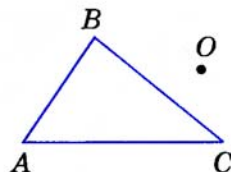
Затем построим точки  $M_1$ ,  $C_1$  и  $P_1$ , симметричные \_\_\_\_\_  
 $M$ ,  $C$  и \_\_\_\_\_ относительно точки  $O$ . Так как при движении, в част-  
 ности при центральной \_\_\_\_\_, прямая отображается на  
 \_\_\_\_\_, то при данной \_\_\_\_\_ симметрии прямая  $MC$   
 отображается на прямую \_\_\_\_\_, прямая  $PC$  — на прямую \_\_\_\_\_  
 Итак, пересекающиеся в точке  $C_1$  прямые \_\_\_\_\_ и \_\_\_\_\_ — искомые.

## 88

На рисунке даны точка  $O$  и треугольник  $ABC$ . Постройте фигу-  
 ру  $F$ , на которую отображается треугольник  $ABC$  при центральной  
 симметрии с центром  $O$ . Что представляет собой фигура  $F$ ?

**Решение.** Построим точки  $A_1$ ,  
 $B_1$  и  $C_1$ , симметричные точкам  $A$ ,  $B$  и  
 \_\_\_\_\_ относительно \_\_\_\_\_  $O$ , и проведем  
 отрезки  $A_1B_1$ ,  $B_1C_1$  и \_\_\_\_\_

Так как при движении, в частности  
 при центральной \_\_\_\_\_,  
 треугольник отображается на равный  
 ему \_\_\_\_\_, то иско-  
 мой фигурой  $F$  является треугольник  
 \_\_\_\_\_, равный треугольнику \_\_\_\_\_



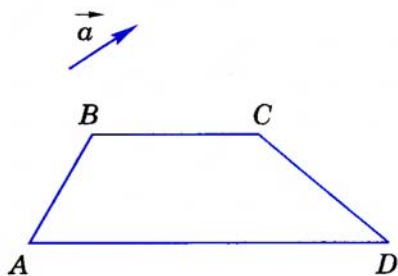
## § 2

### Параллельный перенос и поворот

## 89

Постройте фигуру, на которую отображается данная трапеция  
 $ABCD$  при параллельном переносе на данный вектор  $\vec{a}$ .

**Решение.** Построим точки  $A_1$ ,  
 $B_1$ ,  $C_1$  и  $D_1$ , которые получаются из  
 точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  параллельным пере-  
 носом на вектор  $\vec{a}$ , и проведем отрез-  
 ки  $A_1B_1$ ,  $B_1C_1$ ,  $C_1D_1$  и  $D_1A_1$ . Так как при  
 движении любая фигура отображается  
 на \_\_\_\_\_, то  
 искомой фигурой является трапеция  
 \_\_\_\_\_



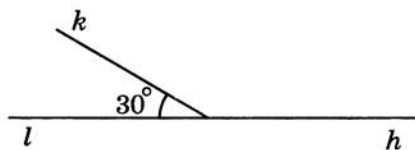
Даны отрезок  $MN$  и точка  $O$ . Постройте отрезок  $M_1N_1$ , который получается из данного отрезка  $MN$  поворотом вокруг данного центра  $O$ :

- а) на угол  $150^\circ$  по часовой стрелке;  
 б) на угол  $135^\circ$  против часовой стрелки.

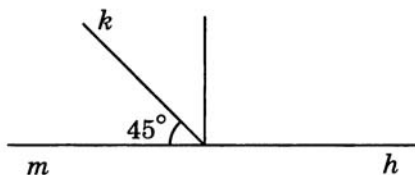
Решение.

а) Построим сначала угол  $hk$ , равный  $150^\circ$ . Таким углом является, например, угол, смежный с \_\_\_\_\_ . Затем от луча  $OM$  отложим угол  $МОК$ , равный построенному \_\_\_\_\_  $hk$ , так, чтобы поворот от луча  $OM$  к лучу  $OK$  на  $150^\circ$  осуществлялся по часовой \_\_\_\_\_ , и отметим на луче  $OK$  \_\_\_\_\_  $M_1$  так, что  $OM_1 = OM$ . Аналогично построим угол  $NON_1$ , причем  $ON_1 =$  \_\_\_\_\_. Так как поворот является движением, то отрезок отображается на \_\_\_\_\_ . Следовательно, отрезок \_\_\_\_\_ — искомый.

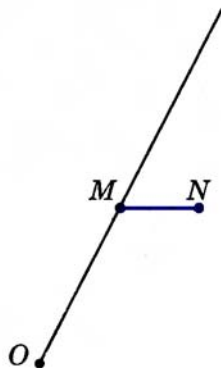
б) Построим сначала угол  $hk$ , равный  $135^\circ$ . Таким углом является, например, угол, смежный с \_\_\_\_\_ . Затем от луча  $OM$  отложим \_\_\_\_\_  $МОМ_1$ , равный построенному углу \_\_\_\_\_ , так, чтобы \_\_\_\_\_ от луча  $OM$  к лучу  $OM_1$  на  $135^\circ$  осуществлялся \_\_\_\_\_ стрелки, причем  $OM_1 = OM$ . Аналогично построим угол \_\_\_\_\_ , где \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_. Так как при движении, в частности при повороте, отрезок отображается на \_\_\_\_\_ , то отрезок \_\_\_\_\_ — искомый.



а)



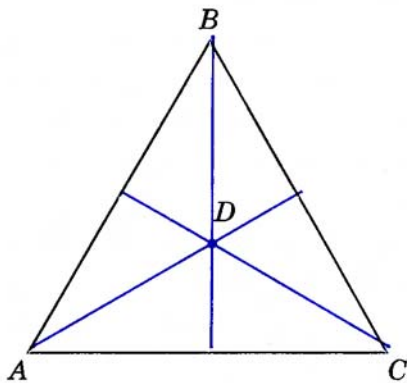
б)



На рисунке точка  $D$  является точкой пересечения биссектрис равностороннего треугольника  $ABC$ . Докажите, что при повороте вокруг точки  $D$  на угол  $120^\circ$  треугольник  $ABC$  отображается на себя. (Задача 1168 учебника.)

Решение.

Рассмотрим, например, поворот по часовой стрелке. Каждый из углов  $A$  и  $B$  треугольника  $ABD$  равен  $\frac{1}{2} \cdot \text{---} = \text{---}$ . Следовательно,  $DA = \text{---}$  и  $\angle ADB = \text{---}$ . Поэтому при повороте вокруг точки  $D$  на угол  $120^\circ$  по часовой стрелке вершина  $A$  отображается в вершину  $\text{---}$ . По аналогичной причине вершина  $B$  отображается в вершину  $\text{---}$ , а вершина  $C$  — в вершину  $\text{---}$ . Следовательно, треугольник  $ABC$  отображается на  $\text{---}$   $ABC$ , т. е. на себя.

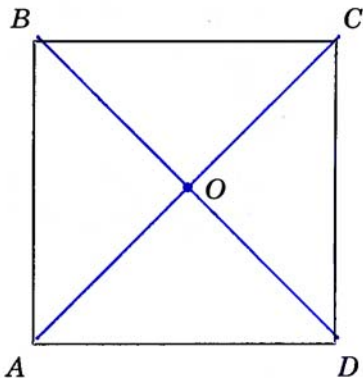


## 92

Докажите, что при повороте квадрата вокруг точки пересечения его диагоналей на угол  $90^\circ$  квадрат отображается на себя. (Задача 1169 учебника.)

Решение.

Диагонали квадрата равны, взаимно  $\text{---}$  и делятся точкой пересечения  $\text{---}$ . Следовательно, при повороте вокруг точки  $O$  пересечения диагоналей на  $\text{---}$   $90^\circ$  каждая из вершин квадрата  $ABCD$  отображается в соседнюю  $\text{---}$  этого квадрата, а значит, квадрат отображается на  $\text{---}$



Используя параллельный перенос, постройте трапецию по ее основаниям и диагоналям. (Задача 1182 учебника.)

Решение.

Пусть требуется построить трапецию  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$ , равными данным отрезкам  $a$  и  $b$ , и диагоналями  $AC$  и \_\_\_\_\_, равными данным \_\_\_\_\_  $d_1$  и  $d_2$ .

1) Построим сначала отрезок  $AD$ , равный отрезку  $a$ .

2) На луче  $AD$  от точки  $D$  отложим отрезок  $DD_1$ , равный \_\_\_\_\_  $b$ .

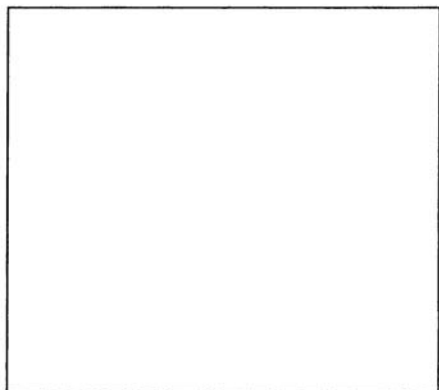
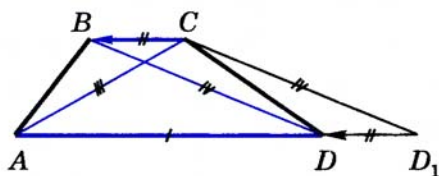
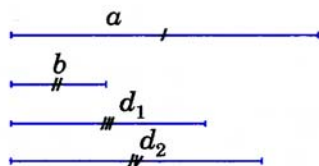
3) Построим треугольник  $ACD_1$ , стороны  $AC$  и  $CD_1$  которого равны данным отрезкам  $d_1$  и  $d_2$ .

4) Построим точку  $B$ , в которую отображается точка  $C$  при параллельном \_\_\_\_\_ на вектор  $\vec{D_1D}$ .

Выполните указанные построения самостоятельно.

Четырехугольник  $ABCD$  — искомая трапеция.

В самом деле, стороны  $AD$  и  $BC$  этого четырехугольника параллельны и \_\_\_\_\_ данным отрезкам \_\_\_\_\_ и \_\_\_\_\_, диагональ  $AC$  равна отрезку \_\_\_\_\_, а диагональ  $BD$  получается из отрезка  $CD_1$  параллельным \_\_\_\_\_ на вектор \_\_\_\_\_. Поэтому  $BD =$  \_\_\_\_\_, т. е. диагональ  $BD$  равна данному отрезку \_\_\_\_\_



## ОГЛАВЛЕНИЕ

### Глава X. Метод координат

§1. Координаты вектора	3
§2. Простейшие задачи в координатах	7
§3. Уравнение окружности и прямой	11

### Глава XI. Соотношения между сторонами и углами треугольника. Скалярное произведение векторов

§1. Синус, косинус, тангенс угла	18
§2. Соотношения между сторонами и углами треугольника	22
§3. Скалярное произведение векторов	26

### Глава XII. Длина окружности и площадь круга

§1. Правильные многоугольники	32
§2. Длина окружности и площадь круга	36

### Глава XIII. Движения

§1. Понятие движения	44
§2. Параллельный перенос и поворот	45