

GEORGE PÓLYA

MATEMATICA ȘI RAȚIONAMENTELE PLĂUZIBILE

G. P ó l y a

MATEMATICA ȘI RAȚIONAMENTELE PLAUZIBILE

G. PÓLYA

**MATEMATICA
ȘI RAȚIONAMENTELE
PLAUZIBILE**

Vol. I

INDUCȚIA ȘI ANALOGIA ÎN MATEMATICĂ

EDITURA ȘTIINȚIFICĂ

BUCUREȘTI — 1962

În românește de
RADU THEODORESCU

Coperta de
GABRIEL VASILIU

MATHEMATICS AND PLAUSIBLE
REASONING

G. PÓLYA

Princeton University Press
Princeton New Jersey

1954

CUVÎNT ÎNAINTE

Scrisă atrăgător și accesibil, cartea cunoscutului matematician de origine maghiară este consacrată procesului creației matematice. În primul volum, bogat ilustrat cu variate exemple, autorul se străduiește să răspundă la întrebări care preocupă deopotrivă pe cercetător, pe cel ce predă matematica și pe cel ce o învață. Toate aceste întrebări derivă din următoarea întrebare fundamentală: pe ce căi se dobîndesc cunoștințe noi în matematică, care este mecanismul descoperirii în această știință? Răspunsul, surprinzător pentru neinițiați arată că în creația matematicianului joacă un rol important metodele de cercetare comune tuturor științelor naturii: observația și generalizarea, ipoteza inductivă și experimentul.

În volumul al doilea, autorul încearcă să stabilească reguli și forme ale raționamentului inductiv, pe care el îl numește raționament plauzibil. Fiecare regulă se obține pornind de la exemple luate din matematică, fizică, astronomie, practica judiciară sau medicină. Se indică posibilități de a evalua adevărul concluziilor acestor forme de raționament inductiv cu ajutorul calculului probabilităților. Volumul al doilea poate fi citit independent de primul.

Situîndu-se, în general, pe poziții materialiste, autorul își expune ideile într-un limbaj curgător și plin de umor, ușor de urmărit.

La sfîrșitul fiecărui capitol sînt propuse probleme (dîndu-se și soluțiile lor), gradate ca dificultate, a căror rezolvare permite înțelegerea mai profundă a ideilor autorului.

PREFAȚĂ

Această carte urmărește diverse scopuri strins legate între ele. În primul rînd, cartea este destinată să-i ajute pe cei ce studiază și predau matematica într-o problemă importantă căreia, de obicei, nu i se acordă atenția cuvenită. Într-un anumit sens însă, cartea este și o încercare filozofică. De asemenea ea este o continuare și necesită o continuare. Mă voi ocupa de aceste puncte, unul după altul.

1. Riguros vorbind, toate cunoștințele noastre care depășesc cadrul matematicii și al logicii demonstrative (care este în fapt, o ramură a matematicii) constau din ipoteze. Desigur există ipoteze și ipoteze. Există unele cit se poate de fundamentate și demne de încredere, de exemplu cele exprimate în unele legi generale ale fizicii. Există altele care nu au nici una din aceste calități, iar unele dintre ele ne pot stîrni minia cînd le citim în reviste. Între unele și celelalte există tot felul de ipoteze, intuiții și presimțiri.

Ne întărim cunoștințele matematice prin *raționamente demonstrative*, însă ne sprijinim ipotezele prin *raționamente plauzibile*. O demonstrație matematică este un raționament demonstrativ, pe cînd probele inductive ale fizicianului, probele indirecte ale juristului, argumentele documentate ale istoricului și probele statistice ale economistului fac parte dintre raționamentele plauzibile.

Deosebirea dintre aceste două tipuri de raționamente este mare și variată. Raționamentul demonstrativ este cert, incontestabil și definitiv. Raționamentul plauzibil este hazardat, discutabil și provizoriu. Raționamentele demonstrative pătrund știința în aceeași măsură ca și matematica, însă, ca atare, ele nu sînt capabile (la fel ca matematica însăși) să ne furnizeze cunoștințe esențialmente noi despre lumea înconjurătoare. Tot ce aflăm nou despre lume este legat de raționamente plauzibile, unicul tip de raționamente care ne interesează în treburile de toate zilele. Raționamentul demonstrativ are standarde rigide, codificate și stabilite de logică (de logica formală sau demonstrativă), care este teoria raționamentelor demonstrative. Standardele raționamentelor plauzibile sînt fluente și nu există nici un fel de teorie

a acestui mod de a raționa care să se poată compara, sub aspectul clarității, cu logica demonstrativă sau să se bucure de un consens comparabil cu al acesteia.

2. Un alt punct referitor la aceste două tipuri de raționamente merită atenția noastră. Este unanim cunoscut că matematica ne oferă o minunată ocazie de a învăța modul de raționament demonstrativ, dar afirm, de asemenea, că în programele analitice obișnuite ale instituțiilor de învățămînt nu există un obiect care să ne ofere un prilej tot atît de bun pentru a învăța raționamentul plauzibil. Mă adresez tuturor celor care studiază matematica, pe cea elementară sau pe cea superioară, și care sînt interesați să și-o însușească, și le spun: Desigur, vom învăța să demonstrăm, dar *vom învăța*, totodată, să *intuim*, să *ghicim*.

Aceasta sună intrucîtva paradoxal și trebuie să accentuez unele puncte, pentru a evita eventuale neînțelegeri.

Matematica este considerată ca o știință demonstrativă. Aceasta este însă numai una dintre laturile ei. Matematica expusă într-o formă încheagată se prezintă ca o știință pur demonstrativă, constînd numai din demonstrații. Însă în procesul de formare, matematica seamănă cu toate celelalte cunoștințe umane aflate și ele în acest proces. Trebuie să intuiești o teoremă matematică înainte de a o demonstra; trebuie să intuiești ideea demonstrației, înainte de a o efectua în toate detaliile ei. Trebuie să combinate observații și să urmărești analogii; trebuie să încercați și iarăși să încercați. Rezultatul muncii de creație a matematicianului este un raționament demonstrativ, o demonstrație; însă demonstrația se dezvăluie cu ajutorul unui raționament plauzibil, cu ajutorul unei ipoteze. Dacă predarea matematicii reflectă, în vreun grad, modul în care se creează matematica, atunci ea trebuie să facă loc ipotezei, inferenței plauzibile.

După cum am mai spus, există două tipuri de raționamente: raționamentul demonstrativ și raționamentul plauzibil. Îmi permit să relev că ele nu se contrazic unul pe celălalt; dimpotrivă, ele se completează. Într-un raționament riguros, principalul este să distingem demonstrația de presupunere, demonstrația fundată de încercarea lipsită de validitate. Într-un raționament plauzibil principalul este să distingem o presupunere de alta, o presupunere mai rațională de alta mai puțin rațională. Dacă vă veți îndrepta atenția spre această distincție, ambele calificări vor deveni mai clare.

Cel ce studiază în mod serios matematica și vrea să facă din ea preocuparea vieții sale, trebuie să învețe raționamentul demonstrativ; aceasta este profesia lui și semnul distinctiv al științei sale. Însă pentru a avea cu adevărat succes, el trebuie

să învețe și raționamentele plauzibile; acesta este tipul de raționamente de care va depinde munca sa de creație. Cel care se ocupă de matematică în subsidiar sau ca amator trebuie, de asemenea, să se familiarizeze întrucîtva cu raționamentele demonstrative; poate că el nu va avea o deosebită nevoie să le aplice direct, însă el trebuie să-și însușească standardul cu care să poată confrunta diversele argumente prezentate în calitate de demonstrații, pe care le va întîlni în viața contemporană. În tot ce va întreprinde însă, el va avea nevoie de raționamente plauzibile. În orice caz, cel care studiază matematica și dorește să se impună în acest domeniu, indiferent de interesele sale ulterioare, trebuie să încerce să învețe ambele tipuri de raționamente, pe cel demonstrativ și pe cel plauzibil.

3. Nu cred să existe o metodă perfect garantată pentru a învăța să intuim. În orice caz, dacă există o astfel de metodă, nu o cunosc și, bineînțeles, nu pretind că am s-o expun în paginile ce urmează. Aplicarea eficientă a raționamentelor plauzibile este o deprindere practică și, la fel cu orice altă deprindere practică, ea se învață prin imitație și prin exercițiu. Mă voi strădui să fac tot ce depinde de mine pentru a-l ajuta pe cititorul care dorește să învețe raționamentele plauzibile, însă tot ce pot să-i ofer sînt numai exemple de imitat și ocazia de a exercersa.

În această carte, voi discuta frecvent despre descoperiri matematice, mari și mici. Nu pot relata istoria adevărată a modului cum s-a produs descoperirea, deopăreace aceasta nu o știe în mod real nimeni. Voi încerca însă să imaginez istoria plauzibilă a modului în care descoperirea putea să se producă. Voi încerca să pun în evidență motivele care au stat la baza descoperirii, inferențele plauzibile care au dus la ea, pe scurt, tot ce merită imitat. Desigur voi căuta să-l conving pe cititor; este obligația mea de pedagog și de autor. Voi fi însă de o perfectă cinste față de cititor în tot ce este cu adevărat esențial: mă voi strădui să-l conving numai de ceea ce cred că este adevărat și util.

Fiecare capitol este urmat de exemple și de note. Notele se ocupă de probleme prea tehnice sau prea subtile pentru textul capitolului, sau de probleme care sînt întrucîtva lăturalnice față de linia generală a expunerii. Unele exerciții îi dau cititorului ocazia de a reconsidera detalii care în text au fost numai menționate. Cea mai mare parte a exercițiilor însă îi oferă cititorului posibilitatea de a-și deduce propriile concluzii plauzibile. Înainte de a ataca vreo problemă mai grea, propusă la sfîrșitul unui capitol, cititorul trebuie să citească atent părțile corespunzătoare ale capitolului și, de asemenea, să parcurgă problemele vecine; cheia poate fi conținută într-o operație sau în cealaltă. Pentru a-l

înzebra pe cititor cu astfel de chei (sau pentru a i le ascunde), pentru o mai mare utilitate a studiului, s-a acordat multă atenție nu numai conținutului și formei problemelor propuse, ci și *ordinii* lor. În realitate, ordonarea acestor probleme a cerut mai mult timp și mai multe griji decît poate să-și închipuie sau să considere necesar un neinițiat.

Pentru a fi accesibil unui cerc mare de cititori, am căutat să ilustrez fiecare problemă importantă printr-un exemplu cît mai elementar. Totuși, în unele cazuri, am fost nevoit să recurg la un exemplu nu tocmai elementar, pentru a întări într-un mod destul de convingător o afirmație. În fapt mi-am dat seama că trebuie să prezint atît exemple de interes istoric, exemple posedînd o adevărată frumusețe matematică, cît și exemple care ilustrează paralelismul cu metodele folosite în alte științe sau în viața de toate zilele.

Trebuie adăugat că multe dintre povestirile acestea și-au căpătat forma definitivă în urma unui fel de experiment psihologic neformal. Am discutat subiectul cu mai multe grupe de studenți, întrerupîndu-mi adeseori expunerea prin întrebări de natura următoare: „Ei bine, ce ați face într-o astfel de situație?” Unele pasaje din textul care urmează au fost sugerate de răspunsurile studenților mei sau versiunea mea inițială a fost modificată în vreun alt mod sub influența reacției ascultătorilor mei.

Pe scurt, am căutat să folosesc întreaga mea experiență de cercetare și cea didactică, pentru a-i oferi cititorului cea mai bună ocazie de a imita în mod rațional sau de a lucra independent.

4. Exemplele de raționament plauzibil reunitе în această carte pot fi folosite și într-un alt scop: ele pot arunca oarecare lumină asupra unei probleme filozofice care constituie obiectul unor dispute inflăcărate: problema inducției. Iată problema crucială: există oare reguli pentru inducție? Unii filozofi spun „da”, mulți savanți cred „nu”. Pentru a discuta cu folos această problemă, trebuie să o punem în alt mod. Totodată, ea trebuie interpretată altfel, cu mai multă independență față de verbalismul tradițional sau față de formalismul de modă nouă, dar și într-un mai strîns contact cu practica savanților. Relevăm, în primul rînd, că raționamentul inductiv este un caz particular al raționamentului plauzibil. Mai menționăm (acest lucru a fost aproape uitat de autorii moderni, însă unii dintre cei vechi ca Euler și Laplace își dădeau bine seama de aceasta) că rolul probelor inductive în investigația matematică este similar cu rolul lor în cercetarea fizică. După aceasta, veți putea constata că unele informații despre raționamentele inductive se pot obține prin observarea și

compararea unor exemple de raționamente plauzibile în probleme de matematică. Și în felul acesta se deschide ușa spre *studiul inductiv al inducției*.

Cînd un biolog încearcă să cerceteze vreo problemă generală, să zicem de genetică, este foarte important pentru el să aleagă o anumită specie vegetală sau animală, cît mai potrivită pentru studiul experimental al problemei sale. Cînd un chimist intenționează să studieze vreo problemă generală, referitoare, să zicem, la viteza reacțiilor chimice, este foarte important pentru el să aleagă anumite substanțe speciale, cu care să fie comod de efectuat experimente adecvate problemei sale. Alegerea unui material experimental potrivit este de o mare importanță în studiul inductiv al oricărei probleme. Cred că, în mai multe privințe, matematica este cel mai potrivit material experimental pentru studiul raționamentelor inductive. Acest studiu impune necesitatea unui anumit fel de experimente psihologice: trebuie să încercați empiric ce influență exercită asupra încrederii pe care o aveți într-o ipoteză considerată cutare sau cutare tipuri de probe. Datorită inerentei lor simplități și clarități, subiectele matematice sînt mult mai convenabile pentru acest gen de experiențe psihologice decît subiectele din orice alt domeniu. În paginile care urmează, cititorul va avea destule ocazii să se convingă de aceasta.

Mă gîndesc că este mult mai filozofic să considerăm ideea mai generală a raționamentului plauzibil în locul cazului particular al raționamentului inductiv. Am impresia că exemplele strînse în această carte conduc la un aspect determinat și pe deplin satisfăcător al modului de a raționa plauzibil. Nu vreau însă să impun cititorului concepțiile mele. În fapt, nici nu le enunț în primul volum; vreau ca exemplele să vorbească de la sine. Primele patru capitole ale volumului al doilea sînt consacrate unei discuții generale mai explicite a raționamentelor plauzibile. Aici stabilesc în mod formal schemele de inferențe plauzibile sugerate de exemplele date, încerc să sistematizez aceste scheme și să cuprind unele dintre relațiile existente atît între ele cît și cu ideea de probabilitate.

Nu știu dacă conținutul acestor patru capitole merită să se numească filozofie. Dacă este filozofie, este vorba, incontestabil, de un fel de filozofie care nu țintește prea sus, avînd de-a face mai curînd cu înțelegerea unor exemple concrete și cu comportarea concretă a oamenilor decît cu interpretarea unor generalități. Desigur, îmi dau și mai puțin seama care va fi aprecierea definitivă a concepțiilor mele. Am însă convingerea destul de puternică că exemplele mele pot fi utile oricărui om rațional și lipsit de idei preconcepute, care studiază inducția sau raționamentul plauzi-

bil și dorește să-și formeze concepțiile în strins contact cu faptele observate.

5. Lucrarea despre *Matematică și raționamentele plauzibile*, pe care am considerat-o totdeauna ca pe un întreg, se descompune firesc în două părți: *Inducția și analogia în matematică* (vol. I) și *Scheme de inferențe plauzibile* (vol. II). Pentru comoditatea cititorilor ea apare în două volume. Volumul I este complet independent de volumul II și cred că mulți cititori vor dori să-l aprofundeze cu grijă înainte de a citi volumul II. El cuprinde cea mai mare parte din „carnea” matematică a acestei scrieri, și furnizează „datele” pentru studiul inductiv al inducției din volumul II. Unii cititori, mai pricepuți și mai experimentați în matematică, vor vrea, eventual, să treacă direct la volumul II, astfel că pentru ei va fi mai comod să-l aibă separat. Pentru simplificarea referirilor, numerotarea capitolelor este făcută în continuare pentru ambele volume. Nu am înzestrat cartea cu un indice, deoarece aceasta ar fi impus ca terminologia să fie mai rigidă decât este de dorit în lucrări de acest gen. Sint convins că tabla de materii va constitui un ghid satisfăcător al cărții.

Această lucrare este o continuare a cărții mele anterioare *How to Solve It*¹. Cititorul care se interesează de subiect ar trebui să citească ambele cărți, însă ordinea nu are prea mare importanță. Textul este astfel întocmit încît poate fi citit independent de lucrarea precedentă. În fapt, această carte conține numai unele referiri directe la cea anterioară, care pot fi trecute cu vederea la prima lectură. Totuși, există referiri indirecte la cartea precedentă aproape în fiecare pagină și aproape în fiecare frază a unora dintre pagini. Lucrarea de față dă numeroase exerciții și unele ilustrații mai complete decât cea precedentă, în care, dat fiind volumul și caracterul ei elementar, acestea nu și-au găsit loc.

Cartea de față este legată, de asemenea, de culegerea de probleme de analiză întocmită de G. Szegő și de autor (vezi bibliografia). Problemele din această culegere sint grupate cu grijă în așa fel încît să se sprijine una pe alta, să ofere una cheia alteia, să cuprindă în ansamblu o temă determinată și să-i dea cititorului ocazia de a se exersa în diverse procedee importante în rezolvarea problemelor. În tratarea problemelor, cartea de față urmează metoda de expunere inițiată în amintita culegere și această legătură nu este cituși de puțin lipsită de importanță.

Două capitole din volumul al doilea al cărții de față se ocupă de teoria probabilităților. Primul dintre aceste capitole este legat,

¹ *Cum se rezolvă?* — N. R.

în parte, de expunerea elementară a calculului probabilităților, scrisă de autor în urmă cu câțiva ani (vezi bibliografia). Concepțiile asupra probabilității care stau la baza sa și punctele de plecare sînt aceleași, iar pentru rest contactul este redus.

Unele concepții expuse în această carte au fost exprimate înainte în articolele mele indicate în bibliografie. În textul cărții au fost introduse extrase ample din lucrările nr. 4, 6, 8, 9 și 10. Îmi exprim recunoștința profundă editorilor lui „*American Mathematical Monthly*”, lui „*Etudes de Philosophie des Sciences en Hommage à Ferdinand Gonseth*” și lui „*Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1950*”, care au avut amabilitatea de a-mi permite să reproduc aceste extrase.

Numeroase părți ale acestei cărți au fost expuse în prelegerile mele, unele dintre ele chiar de mai multe ori. În unele părți și în unele privințe, am păstrat tonul expunerii orale. Nu sînt de părere că acest ton ar fi în genere de dorit într-o expunere de matematică tipărită, însă în cazul de față acesta poate fi potrivit sau cel puțin scuzabil.

6. Ultimul capitol din volumul al doilea al lucrării de față, consacrat Invenției și Predării, se leagă mai direct de lucrările mele anterioare și indică posibilitatea unei continuări.

Aplicarea eficientă a raționamentelor plauzibile joacă un rol esențial în rezolvarea problemelor. Cartea de față încearcă să illustreze acest rol cu ajutorul multor exemple, însă rămîn alte aspecte ale rezolvării problemelor care necesită ilustrări similare.

Multe probleme atacate necesită o dezvoltare ulterioară. Concepțiile mele asupra raționamentelor plauzibile ar trebui comparate cu concepțiile altor autori, exemplele istorice ar urma să fie analizate mai minuțios, concepțiile asupra invenției și predării ar trebui studiate, pe cît este posibil, prin metodele psihologiei experimentale și așa mai departe. Mai rămîn cîteva sarcini dintre acestea, însă unele dintre ele s-ar putea dovedi ingrate.

Această carte nu este un manual. Sper însă că, cu timpul, ea va influența expunerea obișnuită a manualelor și alegerea sferei lor de probleme. Sarcina de a scrie într-un mod nou manualele obișnuite, urmînd aceste direcții, nu trebuie privită ca ingrată.

GEORGE PÓLYA

Universitatea din Stanford

Mai 1953

SFATURI CĂTRE CITITORI

Pentru citirea părților esențiale ale textului se pot dovedi suficiente unele cunoștințe de algebră elementară și de geometrie. Aproape pentru întregul text și pentru majoritatea exemplurilor și a notelor este suficientă o bună cunoaștere a algebrei elementare și a geometriei elementare, precum și o oarecare cunoaștere a geometriei analitice și a analizei matematice, inclusiv limitele și șirurile infinite. În schimb, în unele observații incidentale din text, în unele probleme propuse și în anumite note, se presupun cunoștințe mai profunde. De obicei, acolo unde se cer cunoștințe mai profunde se face mențiunea necesară.

Cititorul mai bine pregătit care omite părțile ce i se par prea elementare poate pierde mai mult decât un cititor mai puțin pregătit care omite părțile ce i se par prea complicate.

Unele detalii (nu prea dificile) ale demonstrațiilor sînt adeseori omise, fără a-l avertiza pe cititor. Prevenit în modul convenit în vederea acestei eventualități, un cititor cu bune deprinderi critice nu va risca să și le strice.

Unele dintre problemele propuse spre rezolvare sînt foarte ușoare, în schimb cîteva sînt destul de grele. Indicațiile care pot ușura rezolvarea sînt cuprinse între paranteze drepte. Soluția poate fi sugerată și de problemele vecine. Trebuie acordată o deosebită atenție observațiilor introductive, care preced exemplele în unele capitole sau care preced prima parte sau partea a doua a acestor exemple.

Soluțiile sînt citeodată foarte scurte: ele presupun că, înainte de a cerceta soluția tipărită, cititorul a făcut încercări serioase pentru a rezolva problema prin propriile sale puteri.

Un cititor care a depus eforturi serioase la o problemă poate profita din aceasta, chiar dacă n-a izbutit să o rezolve. De exemplu, el poate să se uite la soluție, încercînd să extragă din ea ceea ce i se va părea ideea cheie, să pună apoi cartea de o parte și să încerce a elabora soluția.

În unele părți, această carte abundă în figuri, sau în detalii ale unei deducții. Intenția a fost de a prezenta intuitiv *evoluția* unei figuri sau a unei formule: vezi, de exemplu, fig. 16.1 — 16.5. Nu există însă o carte care să conțină destule figuri sau formule. Cititorul poate dori să parcurgă un anumit pasaj „în primă aproximație“ sau mai minuțios. Dacă el va vrea să citească mai minuțios, el trebuie să aibă la îndemână creion și hârtie; el trebuie să fie pregătit pentru a scrie sau a desena orice formulă sau figură dată sau doar indicată în text. Procedind în acest fel, el va avea cea mai bună șansă de a-și da seama de evoluția figurii sau a formulei, de a înțelege cum contribuie diversele detalii la rezultatul final și de a memora întregul proces.

I

INDUCȚIA

Va părea paradoxal să atribuim o mare importanță observațiilor pînă și în acea parte a științelor matematice care se numește obișnuit matematică pură, deoarece există părerea răspîndită că observațiile se mărginesc la obiecte fizice, care acționează asupra simțurilor noastre. Deoarece trebuie să legăm numerele numai de intelectul nostru pur, putem înțelege cu greu cum pot observațiile și cuasiexperimentele să fie utile în cercetarea naturii numerelor.

În realitate însă, după cum voi arăta aici, citind argumente serioase, proprietățile astăzi cunoscute ale numerelor au fost, în cea mai mare parte, descoperite prin observație, și anume cu mult înainte ca adevărul lor să fi fost confirmat prin demonstrații riguroase. Există chiar multe proprietăți ale numerelor, pe care le cunoaștem bine, însă pe care încă nu sîntem în stare să le demonstrăm; numai observațiile ne-au dus la cunoașterea lor. Vedem de aici că, în teoria numerelor, care este încă cu totul imperfectă, ne putem pune cele mai mari speranțe în observații; ele ne vor conduce mereu spre noi proprietăți pe care ne vom strădui mai tîrziu să le demonstrăm. Acest gen de cunoștințe, întărite numai prin observații, dar încă nedemonstrate, trebuie deosebite cu grijă de adevăr; ele se obțin, cum spunem de obicei, prin inducție. Am văzut însă cazuri cînd inducția simplă a dus la o eroare. De aceea, trebuie să fim foarte precauți pentru a nu lua drept adevărate, proprietăți ale numerelor descoperite prin observație și care sînt sprijinite numai de inducție. În realitate, trebuie să utilizăm o astfel de descoperire ca un prilej de a cerceta mai exact aceste proprietăți descoperite și să le demonstrăm sau să le infirmăm; în ambele cazuri putem învăța ceva folositor — Euler¹.

1. Experiență și opinie. Experiența modifică opiniile omului. Învățăm din experiență sau, mai exact, ar trebui să învățăm din experiență. Utilizarea optimă a experienței este una dintre marile sarcini ale omenirii, iar a lucra la rezolvarea ei este adevărata menire a savanților.

Un savant care-și merită numele se străduiește să-și formeze din datele experienței o opinie cît mai justă și să acumuleze experiența cea mai adecvată pentru a stabili o poziție corectă

¹ Euler, *Opera Omnia*, ser. 1, vol. 2, p. 459. Specimen de usu observationum in mathesi pura.

referitor la problema dată. Modul în care savantul abordează experiența este numit în mod obișnuit *inducție*. Exemple deosebit de clare ale procesului de inducție se pot găsi în cercetarea matematică. În paragraful următor, trecem la discutarea unui exemplu simplu.

2. Contacte sugestive. Inducția începe adeseori prin observații. Un naturalist poate observa viața păsărilor, un cristalograf — formele cristalelor. Un matematician care se interesează de teoria numerelor observă proprietățile întregilor 1, 2, 3, 4, 5,...

Dacă vreți să observați viața păsărilor astfel încît să puteți spera obținerea unor rezultate interesante, trebuie să fiți întrucitva familiarizați cu păsările, să vă interesați de păsări, trebuie chiar, eventual, să iubiți păsările. Tot astfel, dacă vreți să observați numerele, trebuie să aveți interes pentru ele și să fiți întrucitva familiarizați cu ele. Trebuie să deosebiți numerele pare și pe cele impare, trebuie să cunoașteți pătratele 1, 4, 9, 16, 25, ... și numerele prime, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ... (Este mai bine să-l separăm pe 1 ca „unitate“ și să nu-l clasificăm în rîndul numerelor prime). Chiar cu cunoștințe atît de modeste, ați fi în stare să remarcați cite ceva interesant.

În mod întîmplător, vă loviți de relațiile

$$3 + 7 = 10, \quad 3 + 17 = 20, \quad 13 + 17 = 30,$$

și observați între ele o oarecare asemănare. Vă frapează faptul că numerele 3, 7, 13 și 17 sînt numere prime impare. Suma a două numere prime impare este, în mod necesar, un număr par; în adevăr, numerele 10, 20 și 30 sînt pare. Dar ce putem spune despre *celelalte* numere pare? Se comportă oare și ele într-un mod similar? Primul număr par care este suma a două numere prime impare este, bineînțeles,

$$6 = 3 + 3.$$

Mergînd mai departe găsim că

$$8 = 3 + 5,$$

$$10 = 3 + 7 = 5 + 5,$$

$$12 = 5 + 7,$$

$$14 = 3 + 11 = 7 + 7,$$

$$16 = 3 + 13 = 5 + 11.$$

Va continua oare mereu așa? Oricum ar fi, cazurile particulare pe care le-am observat ne sugerează ideea unei propoziții generale: *Orice număr par mai mare decît 4 poate fi reprezentat sub forma*

sumei a două numere prime impare. Reflectînd asupra cazurilor excepționale, numerele 2 și 4, care nu pot fi descompuse într-o sumă de două numere prime impare, putem prefera următoarea propoziție mai complicată: *Orice număr par care nu este nici prim, nici pătratul unui număr prim, poate fi reprezentat sub forma sumei a două numere prime impare.*

Am ajuns astfel la formularea unei ipoteze¹. Am găsit această ipoteză cu ajutorul *inducției*. Cu alte cuvinte, ea ne-a fost sugerată de observație, a fost indicată de diverse exemple particulare.

Aceste indicații au destul de puțină greutate; avem o justificare foarte slabă pentru a da crezare ipotezei noastre. Totuși putem găsi oarecare consolare în faptul că Goldbach, matematicianul care a emis această ipoteză cu mai bine de 200 de ani în urmă, nu dispunea pentru aceasta de vreo justificare mai serioasă.

Este oare adevărată ipoteza lui Goldbach? Nimeni nu poate răspunde astăzi la această întrebare. În ciuda imenselor eforturi depuse pentru clarificarea acestei probleme de către unii mari matematicieni, ipoteza lui Goldbach este astăzi, cum era și pe vremea lui Euler, una dintre „multiplele proprietăți ale numerelor, pe care le cunoaștem bine însă pe care încă nu sîntem în stare să le demonstrăm“ sau să le infirmăm.

Să privim acum înapoi și să încercăm a sesiza în raționamentul precedent pașii care ar putea fi tipici pentru procesul inducției.

Întîi, *am remarcat o anumită asemănare*. Ne-am dat seama că 3, 7, 13 și 17 sînt prime, iar 10, 20 și 30 sînt pare și că cele trei relații $3 + 7 = 10$, $3 + 17 = 20$, $13 + 17 = 30$ sînt analoge între ele.

A urmat apoi un pas de *generalizare*. De la cele patru numere 3, 7, 13 și 17 am trecut la toate numerele impare prime, de la 10, 20 și 30 la toate numerele pare, iar apoi la relația generală posibilă

$$\text{număr par} = \text{număr prim} + \text{număr prim.}$$

Am ajuns, astfel, la propoziția generală clar formulată, care este însă doar o ipoteză, doar o tentativă. Aceasta înseamnă că afirmația nu este nicidecum demonstrată, că ea nu are nici un drept să pretindă la adevăr, că ea este numai o încercare de a ajunge la adevăr.

Această ipoteză prezintă totuși unele *puncte de contact sugestive* cu experiența, cu „faptele“, cu „realitatea“. Ea este adevărată

¹ S-a tradus cuvîntul *conjecture* prin *ipoteză*, în conformitate cu sersul atribuit acestui termen în științele naturii (de exemplu, în fizică, chimie etc.) *N. T.*

pentru citeva numere concrete: 10, 20, 30, precum și pentru 6, 8, 12, 14, 16.

Prin aceste observații am conturat, în linii mari, prima etapă a procesului de inducție.

3. Contacte de sprijin. Nu trebuie să acordați prea multă încredere oricărei ipoteze nedemonstrate, chiar dacă a fost propusă de o mare autoritate, chiar dacă vă aparține. Trebuie să faceți încercarea de a o demonstra sau de a o infirma, trebuie să o supuneți la *încercări*.

Verificăm ipoteza lui Goldbach, cercetînd un nou număr par și stabilind dacă el este sau nu suma a două numere prime impare. Să luăm, de exemplu, numărul 60. Să efectuăm „cvasiexperimente“, cum spune Euler. Numărul 60 este par, dar apare el oare ca sumă a două numere prime? Este oare adevărat că

$$60 = 3 + \text{număr prim?}$$

Nu, numărul 57 nu este prim. Are loc oare relația

$$60 = 5 + \text{număr prim?}$$

Răspunsul va fi iarăși „nu“: 55 nu este prim. Dacă lucrurile vor continua astfel, ipoteza va fi torpilată. Încercarea următoare ne dă însă

$$60 = 7 + 53,$$

și 53 este prim. Ipoteza a mai fost confirmată într-un caz.

Rezultatul contrar ar fi hotărît o dată pentru totdeauna soarta ipotezei lui Goldbach. Dacă, încercînd toate numerele prime pînă la un număr par dat, să zicem 60, nu ajungeți în nici un caz să-l descompuneți într-o sumă de două numere prime, ați infirmat irevocabil ipoteza. În schimb, confirmînd ipoteza pentru cazul numărului par 60, nu puteți ajunge la o concluzie atît de definitivă. Fără îndoială, nu demonstrați teorema cu ajutorul unei singure verificări. Este însă firesc ca această confirmare să fie interpretată ca un *symptom favorabil*, care pledează în favoarea ipotezei, care o face *mai verosimilă*, deși, bineînțeles, rămîne la aprecierea noastră personală ce greutate vom atribui acestui simptom favorabil.

Să revenim pentru o clipă la numărul 60. După ce am încercat numerele prime 3, 5 și 7, putem încerca celelalte numere prime pînă la 30. (Evident, nu avem nevoie să mergem mai departe de $30 = 60/2$, deoarece unul dintre cele două numere prime a căror

sumă dă 60 trebuie să fie mai mic decît 30.) Obținem, astfel, toate descompunerile lui 60 într-o sumă de două numere prime:

$$60 = 7 + 53 = 13 + 47 = 17 + 43 = 19 + 41 = 23 + 37 = \\ = 29 + 31.$$

Putem proceda sistematic, cercetînd pe rînd numerele pare, așa cum am examinat numărul par 60. Rezultatele pot fi sintetizate sub forma următorului tabel:

$$\begin{aligned} 6 &= 3 + 3 \\ 8 &= 3 + 5 \\ 10 &= 3 + 7 = 5 + 5 \\ 12 &= 5 + 7 \\ 14 &= 3 + 11 = 7 + 7 \\ 16 &= 3 + 13 = 5 + 11 \\ 18 &= 5 + 13 = 7 + 11 \\ 20 &= 3 + 17 = 7 + 13 \\ 22 &= 3 + 19 = 5 + 17 = 11 + 11 \\ 24 &= 5 + 19 = 7 + 17 = 11 + 13 \\ 26 &= 3 + 23 = 7 + 19 = 13 + 13 \\ 28 &= 5 + 23 = 11 + 17 \\ 30 &= 7 + 23 = 11 + 19 = 13 + 17. \end{aligned}$$

Ipoteza este confirmată în toate cazurile examinate. Orice confirmare care prelungește tabelul întărește ipoteza, o face mai vrednică de încredere, îi mărește plauzibilitatea. Desigur, nici un număr de confirmări asemănătoare nu ar putea să demonstreze ipoteza.

Trebuie să cercetăm observațiile strînse, să le comparăm și să le combinăm, trebuie să căutăm o cheie eventual ascunsă în ele. În cazul nostru, este foarte greu să descoperim în tabel vreo cheie care să ne fie de un ajutor esențial. Totuși examinînd tabelul, ne putem da seama mai clar de sensul ipotezei. Acesta ne arată în cite moduri numerele pare care intervin în ea pot fi reprezentate ca sumă a două numere prime (6 într-un singur mod, 30 în trei moduri). Numărul acestor reprezentări ale numărului par $2n$ s-ar părea că „crește neregulat“ o dată cu n . Ipoteza lui

Goldbach exprimă speranța că numărul de reprezentări nu va scădea niciodată pînă la 0, oricît de mult am extinde tabelul.

Printre cazurile particulare examinate de noi, putem distinge două grupe: cele care au precedat enunțarea ipotezei și cele care au fost cercetate după aceea. Primele ne-au sugerat ipoteza, celelalte au întărit-o. Cazurile din ambele grupe creează un fel de contact între ipoteză și „fapte“. Tabelul nu face distincție între punctele de contact „sugestive“ și cele „de sprijin“.

Să ne întoarcem iarăși privirea asupra raționamentului precedent și să încercăm să vedem în el trăsăturile tipice pentru procesul inductiv.

După ce am exprimat ipoteza, am încercat să stabilim dacă ea este adevărată sau falsă. Ipoteza noastră a fost o propoziție generală, sugerată de anumite exemple particulare, pentru care am găsit-o adevărată. Am mai examinat cîteva cazuri particulare. Deoarece am constatat că ipoteza este valabilă pentru toate exemplele considerate, încrederea noastră în ea a crescut.

După cît mi se pare, nu am făcut decît ceea ce fac obișnuit oamenii rezonabili. Procedînd astfel, se pare că adoptăm principiul: *O propoziție ipotetică generală devine mai verosimilă, dacă ea este verificată pentru un nou caz particular.*

Să fie oare acesta principiul care stă la baza procesului de inducție?

4. Atitudinea inductivă. În viața noastră personală ne agățăm adeseori de cîte o iluzie. Altfel spus, nu îndrăznim să examinăm anumite opinii care ar putea fi ușor infirmate de experiență, deoarece ne temem de tulburarea echilibrului nostru afectiv. Sint posibile împrejurări în care nu este lipsit de înțelepciune să ne agățăm de iluzii, însă în știință este nevoie de o atitudine cu totul diferită, de *atitudinea inductivă*. Această atitudine are scopul de a adapta opiniile noastre la experiența noastră, într-un mod cît se poate de eficient. Ea cere să acordăm prioritate pentru ceea ce există în fapt. Ea cere să fim gata să ne ridicăm de la observații la generalizări și să coborîm de la generalizările cele mai cuprinzătoare la observațiile cele mai concrete. Ea cere să spunem „poate“ și „posibil“ cu mii de nuanțe diferite. Ea cere multe alte lucruri și, în special, pe următoarele trei:

Întîi, trebuie să fim gata să reconsiderăm oricare dintre opiniile noastre.

Al doilea, trebuie să ne schimbăm opinia, atunci cînd există motive serioase care ne determină la aceasta.

Al treilea, nu trebuie să ne modificăm opinia în mod arbitrar, fără un motiv serios.

Aceste principii par destul de banale. Dar este nevoie de calități destul de puțin obișnuite pentru a trăi ținând seama de ele.

Primul principiu cere „curaj intelectual“. Aveți nevoie de curaj pentru a vă reconsidera opiniile. Galilei, care a sfidat prejudecata contemporanilor săi și autoritatea lui Aristotel, este un exemplu măreț de curaj intelectual.

Al doilea principiu cere „onestitate intelectuală“. Ar fi necinstit să rămân credincios ipotezei mele, infirmată net de experiență, numai pentru că este ipoteza mea.

Al treilea principiu cere „cumpătare înțeleaptă“. Ar fi o prostie să ne schimbăm opinia fără o examinare serioasă, bunăoară numai pentru a fi la modă. Dar nu avem nici timp, nici putere pentru a examina cu strictețe toate opiniile noastre. De aceea, va fi înțelept să consacram munca noastră de toate zilele, toate întrebările și îndoielile noastre active opiniilor pe care putem spera în mod rațional să le corectăm. „Să nu crezi în nimic, dar să te îndoiești numai de ceea ce merită să te îndoiești“.

Curajul intelectual, onestitatea intelectuală și cumpătarea înțeleaptă sint calitățile morale ale savantului.

EXEMPLE ȘI NOTE LA CAPITOLUL I

1. Încercați să ghiciți după ce regulă au fost aleși termenii șirului

$$11, 31, 41, 61, 71, 101, 131, \dots$$

2. Considerați tabelul

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & 0 + 1 \\ 2 + 3 + 4 & = & 1 + 8 \\ 5 + 6 + 7 + 8 + 9 & = & 8 + 27 \\ 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 & = & 27 + 64. \end{array}$$

Ghiciți ce lege generală sugerează aceste exemple; enunțați-o în notații matematice corespunzătoare și demonstrați-o.

3. Considerați valorile sumelor succesive

$$1, 1 + 3, 1 + 3 + 5, 1 + 3 + 5 + 7, \dots$$

există oare aici o regulă simplă?

4. Considerați valorile sumelor succesive

$$1, 1 + 8, 1 + 8 + 27, 1 + 8 + 27 + 64, \dots$$

Există oare aici o regulă simplă?

5. Cele trei laturi ale unui triunghi au respectiv lungimile l , m , și n . Numerele l , m și n sint întregi pozitive, $l \leq m \leq n$.

Aflați numărul triunghiurilor diferite de tipul indicat pentru un n dat. [Luați $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$]. Găsiți legea generală care guvernează dependența de n a numărului de triunghiuri.

6. Primii trei termeni ai șirului 5, 15, 25, ... (numerele a căror ultimă cifră este 5) sînt divizibili prin 5. Se împart oare prin 5 și termenii următori?

Primii trei termeni ai șirului 3, 13, 23, ... (numerele a căror ultimă cifră este 3) sînt numere prime. Vor fi oare primi și termenii următori?

7. Printr-un calcul formal, găsim

$$(1 + 1!x + 2!x^2 + 3!x^3 + 4!x^4 + 5!x^5 + 6!x^6 + \dots)^{-1} = 1 - x - x^2 - 3x^3 - 13x^4 - 71x^5 - 461x^6 \dots$$

Aceasta sugerează două ipoteze în legătură cu coeficienții următori ai seriei de puteri din membrul al doilea: (1) toți sînt negativi; (2) toți sînt numere prime. Merită oare ambele ipoteze aceeași încredere?

8. Să punem

$$\left(1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots\right)^{-1} = A_0 + \frac{A_1x}{1!} + \frac{A_2x^2}{2!} + \dots$$

Găsim că pentru

$$\begin{array}{cccccccccc} n & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ A_n & 1 & 1 & 1 & 2 & 4 & 14 & 38 & 216 & 600 & 6240. \end{array}$$

Enunțați o ipoteză.

9. Marele matematician francez Fermat a considerat șirul 5, 17, 257, 65537,...

cu termenul general $2^{2^n} + 1$. El a observat că primii patru termeni (dați aici), care corespund valorilor $n = 1, 2, 3$ și 4 , sînt numere prime. El a formulat ipoteza că termenii următori vor fi și ei numere prime. Deși el nu a demonstrat acest lucru, el era atît de sigur de adevărul ipotezei sale, încît l-a provocat pe Wallis și pe alți matematicieni englezi să o demonstreze. Însă Euler a constatat că termenul imediat următor, $2^{32} + 1$ corespunzător lui $n = 5$, nu este prim; el este divizibil prin 641^1 . Vezi citatul din Euler de la începutul acestui capitol: „Am văzut însă cazuri cînd inducția simplă a dus la o eroare“.

10. Verificînd ipoteza lui Goldbach pentru $2n = 60$, am încercat pe rînd numerele prime p pînă la $n = 30$. Am fi putut

¹ Euler, *Opera Omnia*, ser. 1, vol. 2, pp. 1-5, Hardy G. H. and Wright E. M., *An Introduction to the Theory of Numbers*, pp. 14-15.

încerca însă și numerele prime p' cuprinse între $n = 30$ și $2n = 60$. Care procedeu pare a fi mai avantajos pentru valori mai mari ale lui n ?

11. Într-un dicționar veți găsi, printre explicațiile cuvintelor „inducție“, „experiment“ și „observație“, fraze de felul următor:

„Inducția este inferența prin care obținem o lege generală din cazuri particulare sau prezentarea unor fapte pentru a demonstra o propoziție generală“.

„Experimentul este un procedeu pentru a verifica ipoteze“.

„Observația este urmărirea și notarea exactă a fenomenelor, în forma în care acestea se manifestă în natură, ținând seama de cauză și efect sau de relații mutuale“.

Sînt oare aplicabile aceste descrieri exemplului pe care l-am considerat în §§ 2 și 3?

12. *Da și nu.* Verificînd anumite consecințe care decurg dintr-o lege ipotetică generală pe baza unei noi observații, matematicianul, la fel ca și naturalistul, adresează o întrebare Naturii: „Bănuiesc că această lege este adevărată. Este ea oare adevărată?“ În cazul cînd consecința este infirmată clar, legea nu poate fi adevărată. Dacă însă consecința este clar verificată, există o oarecare indicație că legea ar putea fi adevărată. Natura poate să răspundă „da“ sau „nu“, însă ea șoptește un răspuns și îl pronunță pe celălalt cu glas de tunet; ea spune „da“ condiționat, însă spune „nu“ definitiv.

13. *Experiență și comportare.* Experiența modifică comportarea omului. Totodată, experiența modifică opiniile oamenilor. Aceste două lucruri nu sînt independente unul de celălalt. Comportarea este adeseori rezultată din opinii, iar opiniile sînt o comportare potențială. Puteți vedea comportarea unui alt om, dar nu-i puteți vedea opiniile. Comportarea este mai ușor de observat decît opinia. Oricine cunoaște proverbul: „Cine se frige cu ciorba, suflă și în iaurt“¹ care exprimă tocmai ceea ce spuneam: experiența introduce modificări în comportarea omului.

Mai mult, ea introduce modificări și în comportarea animalelor.

Unul dintre vecinii mei are un cîine, care latră și sare la oameni fără a fi provocat. Am descoperit însă că mă pot apăra destul de ușor. Dacă mă aplec și mă prefac că ridic o piatră, cîinele fuge schelălăind. Nu toți cîinii se comportă la fel și este ușor să ghicim ce fel de experiență a fost cauza unei astfel de comportări din partea acestui cîine.

Un urs din parcul zoologic „face frumos“, adică atunci cînd îl observă cineva din apropiere el ia o poziție caraghioasă, care

¹ În original: „a burnt child dreads the fire“. — *N. R.*

il îndeamnă destul de frecvent pe observator să arunce în cușcă o bucată de zahăr. Probabil că un urs care nu se află în captivitate nu ia niciodată o astfel de poză absurdă și este ușor să ghicim ce fel de experiență l-a învățat pe ursul din grădina zoologică „să facă frumos“.

Studiul complet al inducției ar trebui să îmbrățișeze, poate, și cercetarea comportării animalelor.

14. *Logicianul, matematicianul, fizicianul și inginerul.* „Ia te uită la acest matematician, — spuse logicianul. El observă că primele nouăzeci și nouă de numere sînt mai mici decît o sută, și de aici, cu ajutorul a ceea ce se cheamă la el inducție, conchide că toate numerele sînt mai mici decît o sută“.

„Fizicianul crede — spuse matematicianul — că 60 se împarte prin toate numerele. El observă că 60 este divizibil prin 1, 2, 3, 4, 5 și 6. El verifică încă vreo cîteva numere, să zicem 10, 20 și 30, luate, cum spune el, la întimplare. Deoarece 60 este divizibil și prin acestea, el consideră că datele experimentale sînt suficiente“.

„Da, dar să ne uităm la inginer — replică fizicianul. Inginerul bănuiește că toate numerele impare sînt prime. În orice caz, 1 poate fi considerat ca un număr prim, argumentează el. Urmează apoi, 3, 5, și 7, toate incontestabil prime. Vine apoi 9; un caz supărător; acesta nu pare să fie prim. În schimb, 11 și 13 sînt, fără îndoială, prime. Să revenim la 9 — spune el —, conchid că 9 trebuie să fie o eroare experimentală“.

Este cît se poate de evident că inducția poate duce la eroare. Este însă remarcabil că inducția conduce cîteodată spre adevăr, deși, după cum se pare, posibilitatea apariției erorii este foarte mare. Trebuie oare să începem cu studiul cazurilor evidente în care inducția dă greș sau cu studiul cazurilor remarcabile în care inducția reușește? Studiul pietrelor prețioase este, firește, mai atrăgător decît studiul unor bolovani obișnuiți și, în plus, tocmai pietrele prețioase, i-au condus pe mineralogi, în mai mare măsură decît bolovanii, spre minunata știință a cristalografiei.

II

GENERALIZARE, PARTICULARIZARE, ANALOGIE

Și prețuiesc cel mai mult analogiile, călăuzele mele cele mai sigure. Ele cunosc toate tainele Naturii, și mai ales în Geometrie ele nu trebuie neglijate. — K e p l e r.

1. Generalizare, particularizare, analogie și inducție. Să reluăm exemplul de raționament inductiv de care ne-am ocupat destul de amănunțit în §§ 1.2, 1.3. Am început prin a remarca o *analogie* între cele trei relații

$$3 + 7 = 10, \quad 3 + 17 = 20, \quad 13 + 17 = 30,$$

am *generalizat* ridicându-ne de la 3, 7, 13 și 17 la toate numerele prime, iar de la 10, 20 și 30 la toate numerele pare, apoi am *particularizat* din nou, încercînd diverse numere pare, cum ar fi 6, sau 8, sau 60.

Acest prim exemplu este cît se poate de simplu. El ilustrează într-un mod foarte corect rolul generalizării, al particularizării și al analogiei în raționamentul inductiv. Însă trebuie să cercetăm ilustrări mai puțin sărăcăcioase și mai vii, și înainte va trebui să studiem generalizarea, particularizarea și analogia, aceste mari izvoare ale descoperirii, ca atare.

2. Generalizarea este trecerea de la considerarea unei mulțimi de obiecte date la considerarea unei mulțimi mai mari care o conține pe cea dată. De exemplu, generalizăm cînd trecem de la considerarea triunghiurilor la considerarea poligoanelor cu un număr arbitrar de laturi. Generalizăm, de asemenea, cînd trecem de la studiul funcțiilor trigonometrice ale unghiului ascuțit la studiul funcțiilor trigonometrice ale unui unghi arbitrar.

Este de observat că, în aceste două exemple, generalizarea s-a efectuat pe două căi care diferă într-un mod caracteristic. În primul exemplu, cînd am trecut de la triunghiuri la poligoane cu n laturi, am înlocuit o constantă printr-o variabilă, numărul fix 3 prin numărul arbitrar n (supus numai restricției $n \geq 3$). În al doilea exemplu, trecînd de la unghiuri ascuțite la un-

ghiuri α oarecare, am renunțat la o restricție, anume la condiția $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Adeseori generalizăm trecînd de la un singur obiect la o întreagă clasă care conține acest obiect.

3. Particularizarea este trecerea de la considerarea unei mulțimi de obiecte date la considerarea unei mulțimi mai mici, conținută în cea dată. De exemplu, particularizăm cînd trecem de la considerarea poligoanelor la considerarea poligoanelor regulate, și particularizăm într-o măsură și mai mare cînd trecem de la poligoane regulate cu n laturi la triunghiul regulat, adică la triunghiul echilateral.

Aceste două treceri consecutive au fost realizate pe două căi care diferă într-un mod caracteristic. În prima trecere, cea de la poligoane la poligoane regulate, am introdus o restricție, anume am cerut ca toate laturile și toate unghiurile poligonului să fie egale. În a doua trecere, am înlocuit un obiect variabil printr-unul constant, am pus 3 în locul numărului întreg variabil n .

De foarte multe ori, efectuăm particularizarea trecînd de la o întreagă clasă de obiecte la un singur obiect aparținînd acestei clase. De exemplu, dacă vrem să verificăm o anumită afirmație generală referitoare la numerele prime, alegem un număr prim oarecare, să zicem 17, și examinăm dacă afirmația generală respectivă este adevărată sau nu pentru acest număr 17.

4. Analogia. Noțiunile de generalizare și de particularizare nu cuprind nimic neclar sau îndoielnic. Însă cînd trecem la studiul analogiei, ne situăm pe un teren mai puțin sigur.

Analogia este un fel de asemănare. Se poate spune că este o asemănare, însă la un nivel mai bine definit și mai conceptual. Putem să ne exprimăm încă ceva mai precis. Deosebirea esențială dintre analogie și alte tipuri de asemănare constă, mi se pare, în intențiile celui care gîndește. Obiectele asemănătoare concordă între ele sub un anumit aspect. Dacă intenționați să reduceți acest aspect sub care ele concordă la noțiuni determinate, atunci considerați aceste obiecte asemănătoare ca fiind *analoge*. Dacă reușiți să formați noțiuni clare, ați *clarificat* analogia.

Comparînd o tină ră femeie cu o floare, poeții găsesc o anumită asemănare, însă, de obicei, ei nu au în vedere o analogie. În adevăr, ei nu intenționează cituși de puțin să părăsească nivelul emoțiilor și să reducă această comparație la ceva măsurabil sau la ceva ce poate fi definit conceptual.

Privind într-un muzeu de istorie naturală scheletele diverselor mamifere, le puteți găsi pe toate înfricoșătoare. Dacă aceasta este întreaga asemănare pe care o puteți constata între ele, nu

ai văzut o analogie prea mare. Puteți remarca însă o analogie extrem de sugestivă, dacă veți examina mîna omului, laba pisicii, piciorul din față al calului, aripa balenei și aripa liliacului, aceste organe cu utilizări atît de diferite, dar care sînt formate din părți asemănătoare, legate în mod asemănător între ele.

Acest din urmă exemplu ilustrează cazul cel mai tipic de analogie clarificată; două sisteme sînt analoge dacă ele *concordă sub aspectul unor relații clar definite ale părților lor corespunzătoare*.

De exemplu, triunghiul în plan este analog cu tetraedrul în spațiu. În plan, 2 drepte nu pot delimita o figură mărginită, pe cînd 3 drepte pot forma un triunghi. În spațiu, 3 plane nu pot delimita un corp mărginit, pe cînd 4 plane pot forma un tetraedru. Relația triunghiului față de plan este aceeași ca și relația tetraedrului față de spațiu, deoarece atît triunghiul cît și tetraedrul sînt mărginite de numărul minim de elemente frontieră simple. De aici și analogia.

Una dintre semnificațiile cuvîntului grecesc de la care provine cuvîntul nostru „analogie“ este „proporție“. În adevăr, sistemul celor două numere 6 și 9 este „analog“ cu sistemul celor două numere 10 și 15, deoarece raportul dintre termenii corespunzători ai celor două sisteme este concordant:

$$6 : 9 = 10 : 15.$$

Proporționalitatea sau egalitatea rapoartelor dintre părțile corespunzătoare, pe care o constatăm intuitiv la figurile asemănătoare din punct de vedere geometric este un caz foarte sugestiv de analogie.

Iată un alt exemplu. Putem considera triunghiul și piramida ca figuri analoge. Luați, pe de o parte, un segment de dreaptă, iar pe de alta un poligon. Uniți toate punctele segmentului cu un punct exterior dreptei care conține segmentul, și veți obține un triunghi. Uniți toate punctele poligonului cu un punct exterior planului care conține poligonul și veți obține o piramidă. În același mod, putem considera ca figuri analoge paralelogramul și prisma. În adevăr, deplasați un segment sau un poligon paralel cu el însuși în direcția unei drepte care intersectează dreapta sau planul care le conține și atunci primul va descrie un paralelogram, iar al doilea o prismă. Am putea fi tentați să exprimăm relațiile de corespondență dintre figurile plane și corpurile spațiale cu ajutorul unui fel de proporție și, dacă nu vom rezista tentației, vom ajunge la fig. 2.1. Această figură modifică semnificația obișnuită a unor simboluri (: și =) în același sens în care, de-a

lungul istoriei limbii, semnificația cuvântului „analogie“ s-a modificat de la „proporție“ la „analogie“.

Acest din urmă exemplu este instructiv și într-o altă privință. Analogia, îndeosebi analogia clarificată incomplet, poate fi ambiguă. Astfel, comparînd geometria plană cu geometria în spațiu, am găsit întii că triunghiul în plan este analog cu tetraedrul

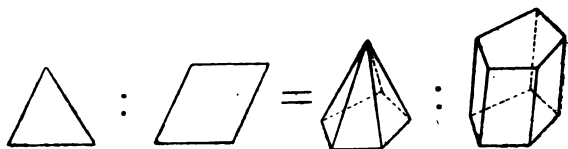


Fig. 2.1. Relații analoge în plan și în spațiu.

în spațiu, iar apoi că triunghiul este analog cu piramida. Ambele analogii sînt raționale și fiecare își are valabilitatea la locul său. Între geometria plană și geometria în spațiu există mai multe analogii, nu numai una singură privilegiată.

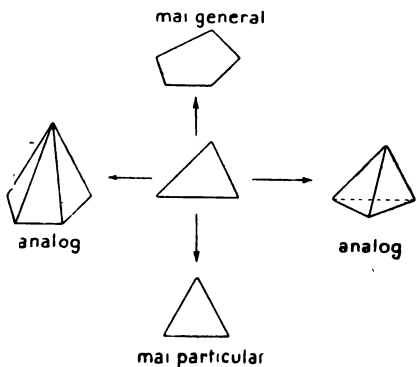


Fig. 2.2. Generalizare, particularizare, analogie.

Fig. 2.2 arată cum putem, pornind de la triunghi, să ne ridicăm spre poligon cu ajutorul generalizării, să coborîm spre triunghiul echilateral cu ajutorul particularizării sau să trecem la diverse corpuri cu ajutorul analogiei — găsim analogii în toate sensurile.

Și, țineți minte, nu trebuie neglijate analogiile vagi. Dacă vreți însă ca ele să se bucure de tof respectul, căutați să le clarificați.

5. **Generalizarea, particularizarea și analogia** colaborează adeseori la rezolvarea problemelor de matematică¹. Să luăm, de exemplu, demonstrația celei mai cunoscute teoreme din matematica elementară, teorema lui Pitagora. Demonstrația pe care o vom da nu este nouă. Ea îi aparține lui Euclid însuși (Euclid VI,31).

(1) Să considerăm un triunghi dreptunghic de laturi a, b, c , dintre care prima, a , este ipotenuza. Vrem să demonstrăm că

$$(A) \quad a^2 = b^2 + c^2.$$

Acest scop ne sugerează gândul de a construi pătrate pe cele trei laturi ale triunghiului nostru. Și în felul acesta ajungem la partea I, destul de cunoscută, a figurii noastre compuse, fig. 2.3. (Cititorul trebuie să traseze părțile acestei figuri, pe măsură ce ele apar, pentru a-și da seama de formarea ei treptată).

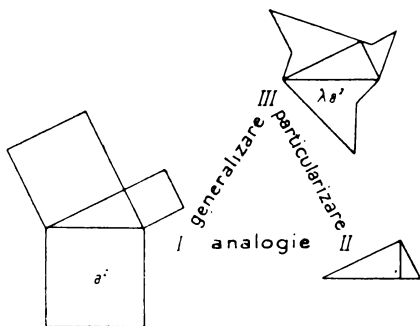


Fig. 2.3. I — analogie; II—III — particularizare; I—III — generalizare.

(2) Descoperirile, chiar cele mai modeste, cer să fi observat ceva, să devenim conștienți de o anumită relație. Vom reuși să descoperim demonstrația pe care o vom reproduce mai jos, dacă vom observa *analogia* dintre partea familiară I a figurii noastre compuse și partea II, care ne este aproape tot atât de familiară: același triunghi dreptunghic ca și în I, este împărțit în II în două părți prin înălțimea coborită pe ipotenuză.

¹ Acest paragraf reproduce, cu mici modificări, o notă publicată de autor în „American Mathematical Monthly“, vol. 55 (1948), pp. 241—243.

(3) Poate că nu sesizați analogia dintre I și II. Această analogie poate fi însă clarificată prin *generalizarea* simultană a figurilor I și II, exprimată în III. Acolo, regăsim același triunghi dreptunghic, iar pe cele trei laturi ale sale sînt construite trei poligoane asemenea între ele, însă în rest arbitrare.

(4) Aria pătratului construit în I pe ipotenuză este egală cu a^2 . Aria poligonului neregulat construit pe ipotenuza din III poate fi considerată egală cu λa^2 ; factorul λ se definește ca raport al celor două arii date. Atunci însă, din asemănarea celor trei poligoane construite pe laturile a , b , și c ale triunghiului din III rezultă că ariile lor vor fi respectiv λa^2 , λb^2 și λc^2 .

Acum, dacă egalitatea (A) este adevărată (după cum afirmă teorema pe care vrem s-o demonstrăm), atunci va fi adevărată și egalitatea

$$(B) \quad \lambda a^2 = \lambda b^2 + \lambda c^2.$$

În adevăr, nu este nevoie decît de foarte puțină algebră, pentru a deduce pe (B) din (A). Acum (B) apare ca o *generalizare* a teoremei lui Pitagora, de la care am plecat: *Dacă construim trei poligoane asemenea pe cele trei laturi ale unui triunghi dreptunghic, poligonul construit pe ipotenuză are aria egală cu suma ariilor celorlalte două.*

Este instructiv de remarcat că această generalizare este *echivalentă* cu cazul particular inițial. În adevăr, relațiile (A) și (B) se pot deduce una din cealaltă, înmulțind sau împărțind cu λ (care, fiind raportul dintre două arii, este diferit de 0).

(5) Teorema generală, exprimată prin (B), nu este echivalentă numai cu cazul particular (A), ci și cu orice alt caz particular. Prin urmare, dacă unul dintre aceste cazuri particulare s-ar dovedi evident, cazul general ar fi astfel demonstrat.

Acum, încercînd să găsim o *particularizare* utilă, vom căuta un caz particular convenabil. În adevăr, II este un astfel de caz. După cum știm și ne putem ușor convinge, un triunghi dreptunghic construit pe propria sa ipotenuză, este asemenea cu cele două triunghiuri construite pe cele două catete. Și, evident, aria întregului triunghi este egală cu suma ariilor celor două părți. În felul acesta, teorema lui Pitagora este demonstrată.

Raționamentul de mai sus este cît se poate de instructiv. Un caz este instructiv, atunci cînd putem învăța din el ceva aplicabil altor cazuri, și cu atît mai instructiv cu cît cadrul aplicațiilor posibile este mai cuprinzător. Și iată, exemplul precedent ne permite să învățăm cum se aplică operații fundamentale ale gîndirii ca generalizarea, particularizarea și sesizarea analogiilor. Poate că nu există descoperiri în matematica elementară, nici în cea

superioară, eventual chiar în nici un alt domeniu, la care să putem ajunge fără aceste operații, îndeosebi fără analogie.

Exemplul precedent ne arată cum ne putem ridica de la un caz particular (cel reprezentat în fig. 2.3, I), prin generalizare, la o situație mai generală (cea din fig. 2.3. III) și cobori apoi din nou, cu ajutorul particularizării, la un caz analog (fig. 2.3, II). El ne mai arată faptul, atât de obișnuit în matematică și totuși atât de surprinzător pentru începători sau pentru filozoful care se consideră un cunoscător, că un caz general poate fi logic echivalent cu un caz particular. Exemplul nostru ne arată într-un mod naiv și sugestiv, cum se îmbină firesc generalizarea, particularizarea și analogia, în efortul de a ajunge la soluția dorită. Observați că, pentru a înțelege perfect raționamentul de mai sus, nu este nevoie decât de un minim de cunoștințe preliminare.

6. Descoperirea prin analogie. Analogia pare să-și aibă partea în toate descoperirile, dar sînt unele în care îi revine partea leului. Vreau să ilustrez aceasta printr-un exemplu nu chiar elementar, însă prezentînd un interes istoric și care face o impresie mult mai puternică decît oricare dintre exemplele elementare pe care le-ași putea da.

Matematicianul elvețian Jacques Bernoulli (1654—1705), contemporan cu Newton și cu Leibniz, a descoperit suma multor serii infinite, însă n-a reușit să găsească suma seriei formate din inversele pătratelor numerelor naturale:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \dots$$

„Dacă cineva va reuși — scria Bernoulli — să afle ceea ce pînă acum a rezistat eforturilor noastre și ne-o va comunica, îi vom fi foarte recunoscători“.

Această problemă l-a interesat pe un alt matematician elvețian, Leonhard Euler¹ (1707—1783) care s-a născut la Basel, ca și Jacques Bernoulli și care a fost elevul lui Jean Bernoulli (1667—1748), fratele lui Jacques. Euler a găsit diverse expresii pentru suma căutată (integrale definite, alte serii), dar nici una dintre acestea nu-l satisfăcea. El a utilizat una dintre expresiile găsite pentru a calcula această sumă cu șase zecimale (1,644 934). Dar aceasta nu este decât o valoare aproximativă, pe cînd el vroia să afle valoarea exactă. În cele din urmă, Euler a obținut-o. O

¹ Peste 30 de ani din viața sa Euler a trăit în Rusia, tipărind în publicațiile Academiei de Științe de la Petersburg, al cărei membru a fost, cea mai mare parte din lucrările sale. *Nota redacției sovietice.*

analogie l-a condus la emiterea unei ipoteze extrem de cutezătoare.

(1) Să începem prin a trece în revistă câteva fapte algebrice elementare, esențiale pentru descoperirea lui Euler. Dacă ecuația de grad n

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_n x^n = 0$$

are n rădăcini distincte

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n,$$

atunci polinomul care figurează în primul ei membru poate fi reprezentat sub forma unui produs de n factori liniari:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_n x^n = a_n (x - \alpha_1) (x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n).$$

Comparînd termenii de aceeași putere a lui x din ambii membri ai acestei identități, deducem binecunoscutele relații dintre rădăcinile și coeficienții unei ecuații; cea mai simplă este

$$a_{n-1} = - a_n (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n),$$

pe care o obținem, comparînd termenii în x^{n-1} .

Descompunerea în factori liniari poate fi scrisă și altfel. Dacă nici una dintre rădăcinile $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ nu este egală cu 0 sau (ceea ce este același lucru) dacă a_0 este diferit de zero, avem, de asemenea,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_n x^n = a_0 \left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right) \left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right)$$

și

$$a_1 = - a_0 \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_n}\right).$$

Mai există și o altă variantă. Să presupunem că o ecuație de gradul $2n$ este de forma

$$b_0 - b_1x^2 + b_2x^4 - \dots + (-1)^n b_n x^{2n} = 0$$

și are $2n$ rădăcini distincte

$$\beta_1, -\beta_1, \beta_2, -\beta_2, \dots, \beta_n, -\beta_n.$$

Atunci

$$\begin{aligned} b_0 - b_1x^2 + b_2x^4 - \dots + (-1)^n b_n x^{2n} &= \\ &= b_0 \left(1 - \frac{x^2}{\beta_1^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{\beta_2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{\beta_n^2}\right) \end{aligned}$$

și

$$b_1 = b_0 \left(\frac{1}{\beta_1^2} + \frac{1}{\beta_2^2} + \dots + \frac{1}{\beta_n^2} \right).$$

(2) Euler consideră ecuația

$$\sin x = 0,$$

sau

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots = 0.$$

Membrul întâi are o infinitate de termeni, este de „grad infinit“. De aceea, spune Euler, nu trebuie să ne mire că avem o infinitate de rădăcini.

$$0, \pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, 3\pi, -3\pi, \dots$$

Euler elimină rădăcina 0. El împarte primul membru al ecuației prin x , factorul linear corespunzător rădăcinii 0, și capătă astfel ecuația

$$1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots = 0$$

cu rădăcinile

$$\pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, 3\pi, -3\pi, \dots$$

Am întâlnit o situație analogă înainte, la (1), când am considerat ultima variantă de descompunere în factori liniari. Euler conchide, prin analogie, că

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots =$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2} \right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2} \right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2} \right) \dots,$$

$$\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \dots,$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Este tocmai seria care a rezistat eforturilor lui Jacques Bernoulli, însă concluzia era cutezătoare.

(3) Euler își dădea foarte bine seama de aceasta. „Metoda era nouă și încă neutilizată într-un astfel de scop“, scria el cu 10 ani mai târziu. Euler a văzut el însuși unele obiecții și multe obiecții au fost ridicate de prietenii săi matematicieni, după ce și-au revenit din prima lor surpriză plină de admirație.

Euler avea însă motive de a crede în descoperirea sa. În primul rând, valoarea numerică a sumei seriei, pe care o calculase înainte, concorda pînă la ultima zecimală cu $\pi^2/6$. Comparînd coeficienții următori în expresia lui $\sin x$ sub formă de produs, el a găsit suma unei alte serii remarcabile, anume seria inverselor numerelor naturale la puterea a patra:

$$1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \frac{1}{256} + \frac{1}{625} + \dots = \frac{\pi^4}{90}.$$

O nouă examinare a valorii numerice l-a dus iarăși la rezultate concordante.

(4) Euler și-a încercat metoda și pe alte exemple. El a reușit, astfel, să obțină din nou suma $\frac{\pi^2}{6}$ pentru seria lui Jacques Bernoulli, modificînd în diverse feluri tratarea ei inițială. El a reușit, de asemenea, să redescopere, prin metoda sa, suma unei importante serii care i se datorește lui Leibniz.

Să insistăm asupra acestui din urmă exemplu. Vom considera, urmîndu-l pe Euler, ecuația

$$1 - \sin x = 0.$$

Rădăcinile ei sînt

$$\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, -\frac{11\pi}{2}, \dots$$

Fiecare dintre aceste rădăcini este însă dublă. (Curba $y = \sin x$ nu intersectează pentru aceste valori ale lui x dreapta $y = 1$, ci este tangentă la ea. Derivata membrului întîi, nu însă și derivata a doua, se anulează pentru aceste valori ale lui x). Prin urmare, ecuația

$$1 - \frac{x}{1} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots = 0$$

are rădăcinile

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}, \dots$$

și concluzia prin analogie a lui Euler conduce la descompunerea în factori liniari:

$$1 - \sin x = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots =$$

$$= \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right)^2 \left(1 + \frac{2x}{3\pi}\right)^2 \left(1 - \frac{2x}{5\pi}\right)^2 \left(1 + \frac{2x}{7\pi}\right)^2 \dots$$

Comparând coeficienții lui x din ambii membri ai egalității, obținem

$$-1 = -\frac{4}{\pi} + \frac{4}{3\pi} - \frac{4}{5\pi} + \frac{4}{7\pi} - \dots,$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

Aceasta este celebra serie a lui Leibniz; cutezătoarea metodă a lui Euler a condus la un rezultat cunoscut. „Pentru metoda noastră care poate părea unora insuficient de sigură, găsim aici o confirmare puternică, — spune Euler. De aceea nu mai trebuie să ne îndoim de nici unul dintre celelalte rezultate deduse prin aceeași metodă“.

(5) Totuși, Euler a continuat să se îndoiască. El nu a întrerupt verificările numerice, descrise mai sus la (3), a examinat tot mai multe serii și a considerat din ce în ce mai multe semne zecimale, obținând concordanță în toate cazurile considerate. El a încercat și alte metode, reușind pînă la urmă să confirme nu numai aproximativ, ci și exact, valoarea $\pi^2/6$ pentru suma seriei lui Jacques Bernoulli. El a găsit o nouă demonstrație. Această demonstrație, deși ascunsă și ingenioasă, se baza pe considerații mai obișnuite și a fost acceptată ca fiind perfect riguroasă. În felul acesta, consecința cea mai remarcabilă a descoperirii lui Euler a fost confirmată într-un mod convingător. Se pare că aceste argumente l-au convins pe Euler de corectitudinea rezultatului său¹.

7. Analogia și inducția. Vrem să învățăm cite ceva despre natura raționamentului inventiv și inductiv. Ce putem învăța din relatarea de mai sus?

¹ Mult mai tîrziu, aproape la zece ani după prima sa descoperire, Euler a revenit la această problemă, a răspuns obiecțiilor, a desăvîrșit într-un anumit grad tratarea euristică inițială și a dat o demonstrație nouă, esențialmente diferită. Vezi Euler, *Opera Omnia*, ser. 1, vol. 14, pp. 73—86, 138—155, 177—186, precum și 156—176, unde se află o notă a lui Paul Stäckel, consacrată istoricului acestei probleme.

(1) Pasul hotărîtor al lui Euler a fost cutezător. Din punctul de vedere al unei logici riguroase, el reprezenta o eroare vădită: Euler a aplicat o regulă unui caz pentru care această regulă nu fusese stabilită; el a aplicat o regulă referitoare la ecuațiile algebrice unor ecuații nealgebrice. Din punctul de vedere al unei logici riguroase, pasul lui Euler nu era justificat. El era justificat însă de o analogie, de analogia confirmată de cele mai fecunde realizări ale unei științe în dezvoltare pe care chiar el a denumit-o, cu cîțiva ani mai tîrziu „Analiza infinitului“. Alți matematicieni înaintea lui Euler au trecut de la diferențe finite la diferențe infinit mici, de la sume cu un număr finit de termeni la sume cu o infinitate de termeni, de la produse finite la produse infinite. Și în același mod, Euler a trecut de la ecuații de grad finit (ecuații algebrice) la ecuații de grad infinit, aplicînd infinitului reguli stabilite pentru finit.

Această analogie, această trecere de la finit la infinit, este plină de capcane. Cum le-a evitat Euler? Era un geniu, vor răspunde unii, dar aceasta nu este, bineînțeles, o explicație. Euler avea motive puternice pentru a crede în descoperirea sa. Dacă avem măcar puțin bun simț, putem înțelege aceste motive fără a recurge la intuirea miraculoasă, caracteristică geniului.

(2) Motivele lui Euler de a avea încredere în această descoperire, expuse pe scurt mai sus¹, nu sînt demonstrative. Euler nu reexaminează bazele ipotezei sale², a trecerii sale cutezătoare de la finit la infinit. El nu a făcut decît să-i studieze consecințele. El consideră confirmarea oricăreia dintre aceste consecințe drept un argument în favoarea ipotezei sale. El acceptă confirmările aproximative ca și pe cele exacte, însă pare să acorde mai multă greutate acestora din urmă. El studiază și consecințele unor ipoteze analoge³ strîns legate de a sa, și consideră confirmarea oricăreia dintre aceste consecințe drept un argument în favoarea ipotezei sale.

Motivele lui Euler au fost de fapt inductive. Studiul consecințelor ipotezei și aprecierea ei pe baza unui astfel de studiu constituie procedeul tipic al inducției. În cercetarea științifică, la fel ca și în viața de toate zilele, credem, sau ar trebui să credem într-o ipoteză mai mult sau mai puțin, după cum consecințele ei, de care ne putem da seama, concordă mai mult sau mai puțin cu faptele.

¹ În § 6 (3), (4), (5). Vezi rezumatul propriu al lui Euler în *Opera Omnia*, ser. 1, vol. 14, p. 140.

² Reprezentarea lui $\sin x$ printr-un produs infinit.

³ În special produsul pentru $1 - \sin x$.

Pe scurt, se pare că Euler raționează în același mod în care raționează obișnuit oamenii de bun simț, savanți sau nu. Probabil că el adoptă anumite principii: *O ipoteză devine mai verosimilă după confirmarea oricărei consecințe noi și: o ipoteză devine mai verosimilă dacă devine mai verosimilă o ipoteză analogă.*

Aceasta să fie oare natura principiilor care stau la baza procesului inducției?

EXEMPLE ȘI NOTE LA CAPITOLUL II

Partea întâi

1. Generalizarea corectă.

A. Găsiți trei numere x , y și z care să satisfacă următorul sistem de ecuații:

$$\begin{aligned}9x - 6y - 10z &= 1, \\ -6x + 4y + 7z &= 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 9.\end{aligned}$$

Dacă trebuie să rezolvați problema A, care anume dintre următoarele trei generalizări vă poate da o sugestie mai bună pentru găsirea soluției: B, C sau D?

B. Găsiți cele trei necunoscute dintr-un sistem de trei ecuații.

C. Aflați cele trei necunoscute dintr-un sistem de trei ecuații, în care primele două sînt liniare, iar a treia de gradul doi.

D. Găsiți cele n necunoscute dintr-un sistem de n ecuații, unde primele $n - 1$ sînt liniare.

2. Fie *date* un punct și o piramidă hexagonală „regulată“. (O piramidă se numește „regulată“, dacă baza ei este un poligon regulat și înălțimea ei trece prin centrul bazei.) Aflați un plan care trece prin punctul dat și împarte volumul piramidei date în două părți egale.

Pentru a vă veni în ajutor, pun următoarea întrebare: Care este generalizarea corectă?

3. A. Trei drepte necoplanare trec printr-un același punct O . Duceți prin O un plan egal inclinat pe cele trei drepte.

B. Trei drepte necoplanare sînt concurente. Un punct P se află pe una dintre aceste drepte; duceți prin P un plan egal inclinat pe cele trei drepte.

Comparați problemele A și B. Putem oare folosi soluția uneia pentru a o rezolva pe cealaltă? Care este legătura logică dintre ele?

4. A. Calculați integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + x^2)^{-3} dx.$$

B. Calculați integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} (p + x^2)^{-3} dx,$$

unde p este un număr pozitiv dat.

Comparați problemele A și B. Putem oare folosi soluția uneia pentru a rezolva pe cealaltă? Care este legătura logică dintre ele?

5. *Un caz particular extrem.* Doi oameni sînt așezați la o masă de formă dreptunghiulară obișnuită. Unul pune pe masă un penny, apoi al doilea face același lucru și, așa mai departe, pe rînd. Se subînțelege că fiecare penny este așezat pe masă cu una dintre fețele sale și nu se suprapune peste vreo monedă așezată anterior. Jucătorul care așază ultima monedă cîștigă. Care jucător trebuie să cîștige, dacă fiecare joacă cel mai bine posibil?

Este o problemă distractivă străveche, însă excelentă. Am avut ocazia să observ o dată pe un matematician cu adevărat remarcabil cînd i s-a pus această problemă. El a început prin a spune: „Să admitem că masa este atît de mică încît o acoperă un singur penny. În acest caz, este evident că trebuie să cîștige primul jucător“. Cu alte cuvinte, el a început prin a considera *cazul particular extrem* în care soluția este evidentă.

Din acest caz particular, puteți obține soluția completă, dacă vă veți imagina că masa se lărgeste treptat, cuprinzînd tot mai multe monede. Poate este și mai bine să *generalizați* problema, gîndindu-vă la mese de forme și dimensiuni diferite. Dacă veți observa că masa are un centru de simetrie, și că *generalizarea corectă* ar putea consta în considerarea unor mese cu centre de simetrie, veți obține soluția, sau cel puțin, vă veți apropia foarte mult de ea.

6. Construiți tangenta comună la două cercuri date.

Pentru a vă veni în ajutor, pun întrebarea: Există oare un caz particular extrem mai accesibil?

7. *Un caz particular călăuzitor.* Aria unui poligon este egală cu A , iar planul său formează unghiul α cu un alt plan. Poligonul se proiectează ortogonal pe al doilea plan. Aflați aria proiecției.

Observați că forma poligonului nu este dată. Există însă o varietate fără de sfîrșit de forme posibile. Ce formă ar trebui considerată? Ce formă ar trebui considerată întîi?

Există o formă cu care este deosebit de ușor să operăm: dreptunghiul a cărui bază este paralelă cu dreapta de intersecție l a planului figurii proiectate și a planului de proiecție. Dacă a este baza unui astfel de dreptunghi, iar b înălțimea sa, adică aria sa este ab , atunci mărimile corespunzătoare pentru proiecții vor fi a , $b \cos \alpha$ și $ab \cos \alpha$. Dacă aria unui astfel de dreptunghi este egală cu A , atunci aria proiecției sale va fi $A \cos \alpha$.

Acest caz particular al unui dreptunghi având baza paralelă cu l , este nu numai extrem de accesibil; el este totodată *un caz particular călăuzitor*. Alte cazuri rezultă din el; rezolvarea problemei pentru cazul particular călăuzitor cuprinde *soluția problemei în cazul general*. În adevăr, pornind de la dreptunghiul având baza paralelă cu l , putem extinde regula „aria proiecției este egală cu $A \cos \alpha$ ” succesiv la toate celelalte figuri. Întii la triunghiuri dreptunghice având o catetă paralelă cu l (tăind în două părți egale dreptunghiul de la care am pornit). Apoi la un triunghi oarecare, având o latură paralelă cu l (combinând două triunghiuri dreptunghice); în sfârșit, la orice poligon (descompunându-l în triunghiuri de tipul indicat mai sus). Putem trece chiar la figuri cu frontiera curbilinie (considerându-le ca limite ale unor poligoane).

8. Unghiul la centru al unui cerc este de două ori mai mare decât unghiul cu vârful pe circumferință, care corespunde aceluiași arc (Euclid, III, 20).

Dacă se dă unghiul la centru, atunci unghiul cu vârful pe circumferință nu este încă determinat, vârful său putând avea poziții diferite. Care este „poziția particulară călăuzitoare” în demonstrația obișnuită a teoremei (în demonstrația lui Euclid)?

9. Teorema lui Cauchy, fundamentală în teoria funcțiilor analitice, afirmă că integrala unei funcții de o variabilă complexă de-a lungul unei curbe închise arbitrare este egală cu zero, dacă funcția este olomorfă în domeniul mărginit de această curbă. Putem considera cazul particular al teoremei lui Cauchy în care curba închisă este un triunghi, ca fiind cazul particular călăuzitor. O dată ce am demonstrat teorema pentru triunghi vom putea s-o extindem cu ușurință succesiv la poligoane (combinând triunghiuri) și la curbe (considerându-le ca limite ale unor poligoane). Observați analogia cu problemele 7 și 8.

10. *Un caz particular reprezentativ*. Aveți de rezolvat o problemă în legătură cu poligoanele cu n laturi. Desenați un pentagon, rezolvați problema pentru el, studiați soluția și observați că ea este adecvată, în aceeași măsură, cazului general cu n arbitrar, ca și cazului particular $n = 5$. Atunci puteți spune că $n = 5$ este cazul particular *reprezentativ*; el reprezintă pentru dumneavoastră cazul general. Desigur, pentru a fi cu adevărat reprezen-

tativ, cazul $n = 5$ nu trebuie să conțină nici un fel de simplificări specifice care să vă poată induce în eroare. Cazul particular reprezentativ nu trebuie să fie mai simplu decât cazul general.

Cazurile particulare reprezentative sînt adeseori comode în cadrul predării. Putem demonstra o teoremă despre determinanții de ordinul n , dacă examinăm cu atenție determinanții de ordinul 3.

11. *Un caz analog.* Problema constă în a proiecta avioane în așa fel încît pericolul unei fracturi a craniului în caz de accident să fie minim. Medicul care studiază problema experimentează cu ouă, pe care le sparge în diverse condiții. Ce face el? El a modificat problema inițială și cercetează acum o *problemă ajutătoare*, spărgînd ouă, în loc să fractureze crani. Legătura dintre cele două probleme — cea inițială și cea ajutătoare — este *analogia*. Din punct de vedere mecanic capul omului și oul de găină sînt, în linii mari, analoge: capul și oul sînt formate dintr-un înveliș rigid fragil, care conține o substanță gelatinoasă.

12. Dacă două drepte în spațiu sînt intersectate de trei plane paralele, segmentele corespunzătoare determinate pe ele sînt proporționale.

Pentru a vă ajuta să găsiți demonstrația, pun întrebarea: Există oare o teoremă analogă mai simplă?

13. Cele patru diagonale ale unui paralelipiped au un punct comun, care este mijlocul fiecăreia dintre ele.

Există oare o teoremă analogă mai simplă?

14. Suma a două unghiuri plane arbitrare dintr-un triedru este mai mare decât al treilea unghi plan al său.

Există oare o teoremă analogă mai simplă?

15. Considerați un tetraedru drept corpul analog cu un triunghi. Enumerați noțiunile din geometria în spațiu analoge cu următoarele noțiuni din geometria plană: *paralelogram, dreptunghi, pătrat, bisectoarea unui unghi*. Enunțați o teoremă din geometria în spațiu care este analogul următoarei teoreme din geometria plană: *Bisectoarele celor trei unghiuri ale unui triunghi sînt concurente într-un punct care este centrul cercului înscris în triunghi*.

16. Considerați o piramidă drept corpul analog cu un triunghi. Enumerați corpurile analoge următoarelor figuri plane: *paralelogramul, dreptunghiul, cercul*. Enunțați o teoremă din geometria în spațiu care este analogul următoarei teoreme din geometria plană: *Aria unui cerc este egală cu aria unui triunghi a cărui bază are aceeași lungime ca și circumferința, și a cărui înălțime este egală cu raza*.

17. Inventati o teoremă din geometria în spațiu care să fie analogul următoarei teoreme din geometria plană: *Înălțimea unui triunghi isoscel trece prin mijlocul bazei*.

Ce corp veți considera drept analog al triunghiului isoscel?

18. *Analogii mari.* (1) Exemplele 12—17 de mai sus subliniază analogia dintre geometria plană și geometria în spațiu. Această analogie poate fi considerată din multe puncte de vedere, din care cauză ea este adeseori ambiguă și nu întotdeauna clar conturată, fiind totuși un inepuizabil izvor de noi sugestii și descoperiri.

(2) Numerele și figurile nu sînt obiectele unice ale matematicii. Matematica este principial inseparabilă de logică și are de-a face cu toate obiectele care pot interveni într-o teorie exactă¹. Numerele și figurile sînt însă obiectele cele mai obișnuite ale matematicii, iar matematicienilor le place să ilustreze prin proprietăți ale figurilor fapte referitoare la numere, și prin proprietăți ale numerelor, fapte referitoare la figuri. De aceea, există nenumărate aspecte ale analogiei între *numere* și *figuri*. Unele dintre aceste aspecte sînt cît se poate de clare. Astfel, în geometria analitică, studiem corespondențe bine definite între obiecte și relații algebrice și geometrice. Însă varietatea figurilor geometrice este inepuizabilă, după cum este inepuizabilă și varietatea operațiilor posibile cu numere; tot atît de inepuizabile sînt și corespondențele posibile între aceste varietăți.

(3) Studiul limitelor și al proceselor de trecere la limită introduce un alt tip de analogie, care poate fi denumită analogie între *infini*t și *finit*. Astfel, seriile infinite și integralele sînt, în diferite privințe, analoge cu sumele finite ale căror limite sînt; calculul diferențial este analogul calculului cu diferențe finite; ecuațiile diferențiale, în special cele liniare omogene, sînt analoge, într-o anumită măsură, ecuațiilor algebrice, și așa mai departe. Un capitol important, relativ nou al matematicii este teoria ecuațiilor integrale; ea dă un răspuns surprinzător și foarte frumos la întrebarea: care este, în calculul integral, analogul unui sistem de n ecuații liniare cu n necunoscute? Analogia dintre *infini*t și *finit* suscită un interes deosebit, deoarece ea prezintă dificultăți și capcane specifice. Ea poate conduce la o descoperire sau induce în eroare; vezi exemplul 46.

(4) Galilei, care a stabilit traiectoria parabolică a proiectilelor și legea cantitativă a mișcării lor, este autorul unor mari descoperiri și în astronomie. Cu ajutorul lunetei construite de el,

¹ În fond, se înțelege de obicei printr-o „teorie exactă“ o teorie care poate fi aritmetizată astfel încît teoremele acestei teorii să se transforme în teoreme ale aritmeticii. Așadar, proclamarea ca obiect al matematicii a oricăror obiecte „care pot interveni într-o teorie exactă nu ne scoate, în realitate, din cadrul definiției date de Engels matematicii, ca știință care studiază relațiile cantitative și formele spațiale ale lumii reale (vezi F. Engels *Anti-Dühring*, E.S.P.L.P., București, 1955, p. 48; *Marea Enciclopedie Sovietică*, ediția a II-a, articolul *Matematica*).

Galilei a descoperit sateliții lui Jupiter. El a constatat că acești sateliți care se mișcă în jurul planetei Jupiter sînt analogi ai Lunii, care se mișcă în jurul Pămîntului, precum și analogi ai planetelor, care se mișcă în jurul Soarelui. El a descoperit, de asemenea, fazele planetei Venus și a remarcat asemănarea lor cu fazele Lunii. Aceste descoperiri, considerate drept o puternică confirmare a teoriei heliocentrice a lui Copernic, au fost discutate cu inflăcărare

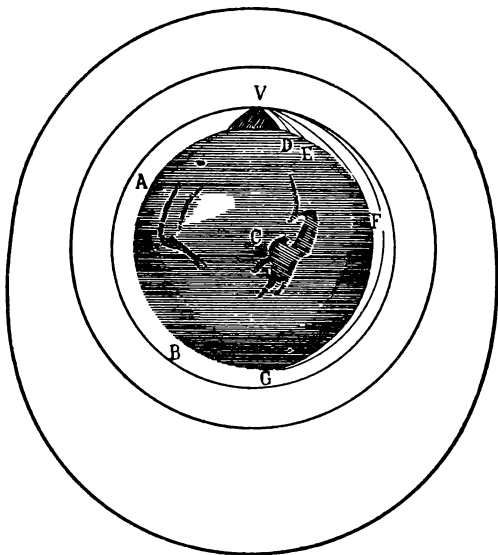


Fig. 2.4. De la traiectoria unei pietre la traiectoria Lunii. Vezi „Sistemul lumii“ al lui Newton.

în perioada aceea. Este curios că Galilei nu a observat analogia dintre mișcarea corpurilor cerești și mișcarea proiectilelor, de care ne putem da seama perfect în mod intuitiv. Traiectoria unui proiectil are concavitățile spre Pămînt, exact ca și traiectoria Lunii. Newton a insistat asupra acestei analogii: „...O piatră aruncată se abate, sub acțiunea propriei sale greutate, de la traiectoria rectilinie, pe care ar trebui s-o urmeze sub acțiunea exclusivă a impulsului inițial, și este nevoită să descrie în aer o curbă și... în sfîrșit, să cadă pe Pămînt; și cu atît este mai mare viteza cu care

a fost lansată, cu atât ea va zbura mai departe, înainte de a recădea pe Pământ. De aceea, putem presupune că viteza crescînd în mod corespunzător, ea va descrie arce de 1, 2, 5, 10, 100, 1 000 mile înainte de a recădea pe Pământ pînă cînd, în sfîrșit, părăsind limitele Pămîntului, ea va trebui să treacă în spațiu, fără a mai atinge Pămîntul (vezi fig. 2.4).

Variind continuu, traiectoria pietrei trece în traiectoria Lunii. Și după cum piatra și Luna sînt legate de Pământ, tot astfel sateliții lui Jupiter sînt legați de Jupiter, sau Venus și celelalte planete, de Soare. Dacă nu ne dăm seama clar de această analogie, putem înțelege doar în mod cu totul imperfect descoperirea gravitației universale de către Newton, care poate fi considerată pînă acum drept cea mai mare descoperire științifică a tuturor timpurilor.

19. *Analogii clarificate.* Analogia este adeseori vagă. Răspunsul la întrebarea ce este analog cu ce, este de multe ori ambiguu. Faptul că o analogie este vagă, nu-i micșorează interesul și utilitatea; însă cazurile în care noțiunea de analogie atinge claritatea noțiunilor logice sau matematice merită a fi considerate în mod special.

(1) Analogia este o asemănare de relații. Această asemănare are o semnificație clară, dacă *relațiile sînt guvernate de aceleași legi*. Din acest punct de vedere, adunarea numerelor este analogă cu înmulțirea numerelor, în măsura în care adunarea și înmulțirea se supun aceluiași reguli. Și adunarea și înmulțirea sînt comutative și asociative;

$$a + b = b + a, \quad ab = ba,$$

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (ab)c = a(bc).$$

Atît una cît și cealaltă admit cîte o operație inversă; ecuațiile

$$a + x = b, \quad ax = b$$

se aseamănă, deoarece fiecare dintre ele admite cîte o soluție și numai una. (Pentru a avea posibilitatea de a stabili această din urmă regulă, fără excepție, trebuie să admitem numerele negative la considerarea adunării și să eliminăm cazul $a = 0$, cînd considerăm înmulțirea.) În această ordine de idei, scăderea este analogă cu împărțirea; în adevăr, soluțiile ecuațiilor de mai sus sînt, respectiv

$$x = b - a \quad x = \frac{b}{a}.$$

Mai departe, numărul 0 este analog cu numărul 1; în adevăr, adunarea lui 0 la un număr arbitrar, ca și înmulțirea cu 1 a unui număr arbitrar nu modifică acest număr:

$$a + 0 = a, \quad a \cdot 1 = a.$$

Aceste legi sînt aceleași pentru diverse clase de numere; putem considera aici numerele raționale, numerele reale sau numerele complexe. În general, *sistemele de obiecte care se supun acelorași legi fundamentale* (sau acelorași axiome) pot fi considerate ca analoge între ele și acest tip de analogie are o semnificație cît se poate de clară.

(2) Adunarea numerelor *reale* este analogă cu înmulțirea numerelor *pozitive* și într-un alt sens. Orice număr real r este logaritmul unui număr pozitiv p

$$r = \log p.$$

(Dacă vom considera logaritmi zecimali, atunci $r = -2$ pentru $p = 0,01$). În virtutea acestei relații, fiecărui număr pozitiv îi corespunde un număr real perfect determinat, și fiecărui număr real, un număr pozitiv perfect determinat. În condițiile acestei corespondențe, adunarea numerelor reale corespunde cu înmulțirea numerelor pozitive. Dacă

$$r = \log p, \quad r' = \log p', \quad r'' = \log p'',$$

atunci oricare dintre cele două relații de mai jos o implică pe cealaltă:

$$r + r' = r'', \quad pp' = p''.$$

Formula din stînga și cea din dreapta ne spun același lucru în două limbaje diferite. Vom denumi unul dintre numerele corespunzătoare traducerea celuiilalt; de exemplu, vom denumi numărul real r (logaritmul lui p) traducerea lui p , iar p va fi *originalul* lui r . (Am fi putut interverti cuvintele „traducere” și „original”, însă a trebuit să efectuăm o alegere, pe care urmează s-o respectăm). În această terminologie, adunarea apare ca traducerea înmulțirii, scăderea ca traducerea împărțirii, 0 ca traducerea lui 1, legea de comutativitate și legea de asociativitate pentru adunarea numerelor reale sînt concepute ca traduceri ale acestor legi pentru înmulțirea numerelor pozitive. Firește, traducerea se deosebește de original, însă ea este o traducere corectă în următorul sens: din indiferent ce relație dintre elementele originalului putem deduce cu certitudine relația corespunzătoare dintre elementele corespunzătoare ale traducerii și reciproc. O astfel de traducere

corectă, adică o *corespondență biunivocă care conservă legile unor anumite relații*, se numește, în limbajul tehnic al matematicianului, un *izomorfism*. Izomorfismul este un tip de analogie perfect clarificată.

(3) Al treilea tip de analogie complet clarificată este ceea ce matematicienii denumesc, în limbajul lor tehnic, *omomorfism* (sau *izomorfism meroedral*). Ne-ar lua prea mult timp să discutăm amănunțit un exemplu sau să descriem exact această noțiune, însă putem încerca să înțelegem următoarea descriere aproximată. Omomorfismul este un fel de *traducere prescurtată în mod sistematic*. Originalul nu este numai tradus în alt limbaj, ci și prescurtat, astfel că ceea ce obținem în cele din urmă, după traducere și prescurtare, este ceva redus uniform și sistematic la jumătate sau la o treime sau la o altă fracțiune din extensiunea originalului. La această prescurtare se pot pierde unele subtilități, însă tot ce există în original este reprezentat prin ceva din traducere, iar relațiile se conservă la o scară redusă.

20. *Citate.* „Să vedem dacă putem, printr-o întâmplare fericită, să concepem o altă problemă generală, care o conține pe cea inițială și este mai ușor de rezolvat. Astfel, când căutăm tangenta într-un punct dat al unei curbe, concepem că nu sîntem pe cale decît să căutăm o dreaptă care taie curba în punctul considerat, și într-un alt punct, situat la o distanță dată de cel precedent. O dată rezolvată această problemă, a cărei soluție o putem găsi întotdeauna ușor cu ajutorul algebrei, găsim cazul tangentei ca un caz particular, anume acela în care distanța dată este minimă, se reduce la un punct, dispăre“ (Leibniz).

„Cum se întâmplă adeseori, se constată că problema generală este mai ușor de rezolvat decît ar fi fost problema particulară, dacă am fi atacat-o direct“. (P.G. Lejeune-Dirichlet, R. Dedekind).

„[Poate fi util] să reducem genul la diversele sale specii, și chiar la cîteva specii. Cel mai util este însă să reducem genul la o singură specie minimă“ (Leibniz).

„Este recomandabil în filozofie să considerăm asemănarea, chiar în lucruri care sînt foarte diferite unul de altul“ (Aristotel).

„Comparațiile au o mare valoare, în măsura în care ele reduc relații necunoscute la relații cunoscute“.

„A înțelege corect se reduce, în cele din urmă, la o sesizare a unor relații (*un saisir de rapports*)¹. Însă înțelegem o relație într-un mod mai clar și mai pur, atunci cînd o recunoaștem ca fiind

¹ În limba franceză în original — N. T.

aceeași în cazuri foarte diferite și între obiecte complet eterogene“. (Arthur Schopenhauer).

Nu trebuie să uitați însă că există două feluri de generalizări. Una ieftină, iar cealaltă valoroasă. Este ușor de generalizat prin *diluare*; este important să generalizăm prin *condensare*. Este ieftin și ușor să diluăm un pic de vin într-o cantitate mare de apă. Este considerabil mai greu, însă valoros, să preparăm un concentrat purificat și condensat, din câteva ingrediente de bună calitate. Generalizarea prin condensare comprimă într-o singură noțiune largă mai multe idei care păreau înainte fără legătură. Astfel, teoria grupurilor sintetizează într-o expresie comună idei dispersate înainte în algebră, teoria numerelor, analiză, geometrie, cristalografie și în alte domenii. În prezent este mai la modă decât în trecut celălalt gen de generalizare. Acesta diluează o idee mică într-o terminologie mare. De obicei, autorul preferă să ia pînă și această idee mică de la altcineva, abținîndu-se să adauge vreo observație originală, și evită rezolvarea oricăror probleme, cu excepția citorva care apar din dificultățile proprii sale terminologice. Ar fi foarte ușor să dau exemple, însă nu vreau să-mi fac dușmani [cf.(1)].

Partea a doua

Toate exemplele și notele din această a doua parte sînt legate de § 6 și legate între ele. Multe dintre ele se referă direct sau indirect la exemplul 21, cu care trebuie începută lectura.

21. *Ipoteza E*. Considerăm drept ipoteză egalitatea

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \dots ;$$

o vom denumi „ipoteza *E*“. Urmîndu-l pe Euler, vrem să cercetăm această ipoteză în mod inductiv.

Cercetarea inductivă a unei ipoteze implică confruntarea consecințelor ei cu faptele. Adeseori, vom „prevedea, plecînd de la *E*, și vom confirma“. „A prevedea, plecînd de la *E*“ înseamnă a deduce, presupunînd că *E* este adevărată; „a confirma“ înseamnă a deduce fără a recurge la această presupunere. Un fapt „este în concordanță cu *E*“, dacă el poate fi dedus (ușor) din presupunerea că *E* este adevărată.

În cele ce urmează vom considera cunoscute elementele de analiză matematică (care, sub aspect formal, erau complet cunoscute lui Euler în epoca descoperirii sale), inclusiv noțiunea riguroasă de limită (despre care Euler nu a avut niciodată o imagine clară). Vom folosi numai procese de trecere la limită care pot

fi justificate (cele mai multe dintre ele, foarte ușor), însă nu vom intra în justificări detaliate.

22. Știm că $\sin(-x) = -\sin x$. Este oare acest fapt în concordanță cu E ?

23. Prevedeți, plecând de la E , și verificați valoarea produsului infinit

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \dots$$

24. Prevedeți, plecând de la E , și verificați valoarea produsului infinit

$$\left(1 - \frac{4}{9}\right) \left(1 - \frac{4}{16}\right) \left(1 - \frac{4}{25}\right) \dots \left(1 - \frac{4}{n^2}\right) \dots$$

25. Comparați exemplele 23 și 24 și faceți generalizarea.

26. Prevedeți, plecând de la E , valoarea produsului infinit.

$$\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 8}{7 \cdot 7} \cdot \frac{8 \cdot 10}{9 \cdot 9} \dots$$

27. Să se arate că ipoteza E este echivalentă cu afirmația

$$\frac{\sin \pi z}{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(z+n) \dots (z+1)z(z-1) \dots (z-n)}{(-1)^n (n!)^2}$$

28. Știm că $\sin(x + \pi) = -\sin x$. Este oare acest fapt în concordanță cu E ?

29. Metoda din § 6 (2) duce la ipoteza

$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right) \left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right) \dots$$

Arătați că această egalitate este nu numai un analog, ci și o consecință a ipotezei E .

30. Se știe că

$$\sin x = 2 \sin(x/2) \cos(x/2).$$

Este oare acest fapt în concordanță cu E ?

31. Prevedeți, plecând de la E , și verificați valoarea produsului infinit

$$\left(1 - \frac{4}{1}\right) \left(1 - \frac{4}{9}\right) \left(1 - \frac{4}{25}\right) \left(1 - \frac{4}{49}\right) \dots$$

32. Prevedeți, plecând de la E și verificați valoarea produsului infinit

$$\left(1 - \frac{16}{1}\right) \left(1 - \frac{16}{9}\right) \left(1 - \frac{16}{25}\right) \left(1 - \frac{16}{49}\right) \dots$$

33. Comparați exemplele 31 și 32 și generalizați.

34. Se știe că $\cos(-x) = \cos x$. Este oare acest fapt în concordanță cu E?

35. Știm că $\cos(x + \pi) = -\cos x$. Este oare acest fapt în concordanță cu E?

36. Deduceți din E produsul pentru $1 - \sin x$, presupus în § 6 (4).

37. Deduceți din E că

$$\operatorname{ctg} x = \dots + \frac{1}{x + 2\pi} + \frac{1}{x + \pi} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x - \pi} + \frac{1}{x - 2\pi} + \dots$$

38. Deduceți din E că

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} x &= \frac{1}{x} - \frac{2x}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots \right) - \\ &\quad - \frac{2x^3}{\pi^4} \left(1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \frac{1}{256} + \frac{1}{625} + \dots \right) - \\ &\quad - \frac{2x^5}{\pi^6} \left(1 + \frac{1}{64} + \frac{1}{729} + \dots \right) - \\ &\quad - \dots \end{aligned}$$

și găsiți suma seriilor infinite ce figurează drept coeficienți în membrul al doilea.

39. Deduceți din E că

$$\begin{aligned} \frac{\cos x}{1 - \sin x} &= \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) = \\ &= - \left(\frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} + \frac{1}{x + \frac{3\pi}{2}} + \frac{1}{x - \frac{5\pi}{2}} + \frac{1}{x + \frac{7\pi}{2}} + \dots \right) = \\ &= \frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \right) + \\ &\quad + \frac{8x}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \dots \right) + \\ &\quad + \frac{16x^2}{\pi^3} \left(1 - \frac{1}{27} + \frac{1}{125} - \frac{1}{343} + \dots \right) + \\ &\quad + \frac{32x^3}{\pi^4} \left(1 + \frac{1}{81} + \frac{1}{625} + \dots \right) + \dots \end{aligned}$$

și găsiți suma seriilor infinite ce figurează drept coeficienți în această din urmă expresie.