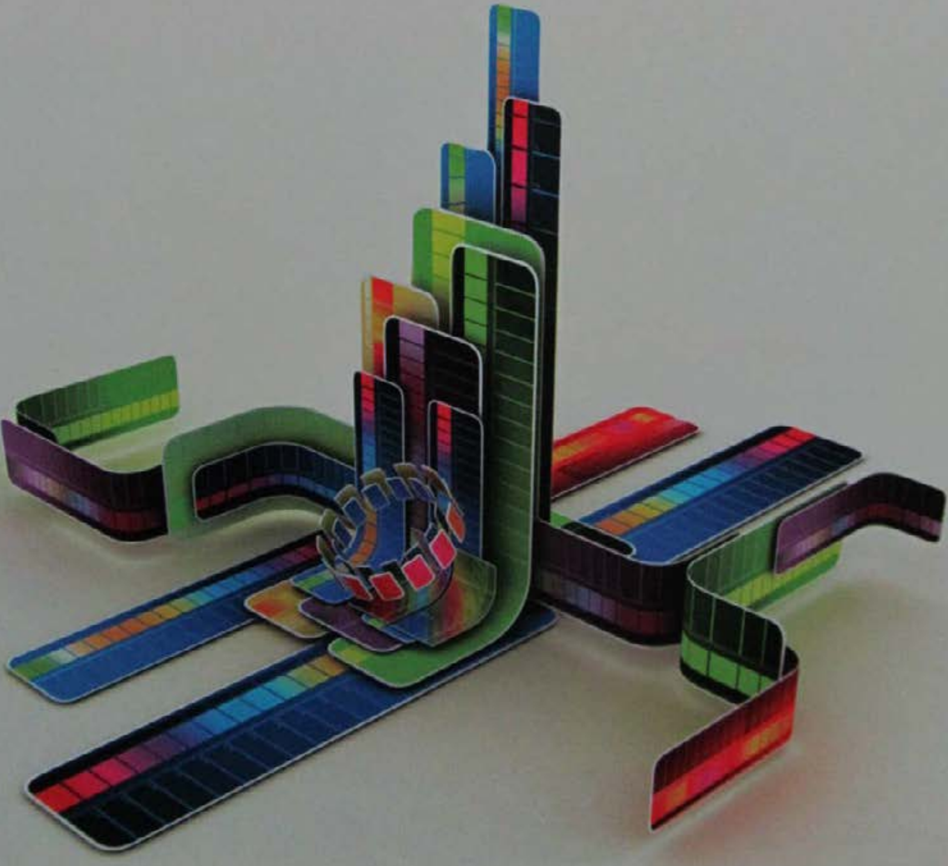
Центр учебной книги и средств обучения РИПО

Л. Л. Гладков,
Г. А. Гладкова

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА



Л. Л. Гладков, Г. А. Гладкова

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Допущено Министерством образования Республики Беларусь в качестве учебного пособия для учащихся учреждений образования, реализующих образовательные программы среднего специального образования по специальности «Программное обеспечение информационных технологий»

Минск
РИПО
2013

УДК 519.21/.22(075.32)
ББК 22.17я722
Г52

Рецензенты:

кафедра математических и естественнонаучных дисциплин УО «Минский государственный высший радиотехнический колледж» (заведующий кафедрой, кандидат химических наук, доцент *Л. А. Тихонова*); доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент *Н. М. Зуев*

Выпуск издания осуществлен при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь

Гладков, Л. Л.

Г52 Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / Л. Л. Гладков, Г. А. Гладкова. – Минск : РИПО, 2013. – 248 с.

ISBN 978-985-503-330-2.

В учебном пособии изложены основы теории вероятностей и математической статистики. Оно включает в себя такие темы, как случайные события, случайные величины, системы случайных величин, элементы математической статистики и др. Теоретический материал сопровождается подробным решением задач.

Учебное пособие предназначено для учащихся учреждений среднего специального образования по специальности «Программное обеспечение информационных технологий». Может быть полезным студентам технических вузов.

УДК 519.21/.22(075.32)
ББК 22.17я722

ISBN 978-985-503-330-2

Предисловие

При разработке программного обеспечения необходимо учитывать все особенности технических, технологических и экономических процессов. На многие из них существенное влияние оказывают случайные факторы. Установлением закономерностей в массовых случайных явлениях занимается такой раздел математики, как «Теория вероятностей и математическая статистика». Например, нельзя предсказать время бесперебойной работы конкретного прибора, но можно оценить среднее время работы партии таких приборов, а значит, решить вопросы, связанные с планированием обновления техники, расходами на гарантийное обслуживание приборов и т. п. Поскольку область применения методов теории вероятностей и математической статистики постоянно расширяется, программистам необходимы глубокие знания этой математической дисциплины. Даже создатели игровых компьютерных программ, используя случайный характер каких-либо действий, по мере усложнения уровня игры должны уметь изменять вероятности ходов, неудобных для игроков.

В соответствии с учебной программой для специальности «Программное обеспечение информационных технологий» учреждений среднего специального образования в учебное пособие включены следующие темы: случайные события, случайные величины, системы случайных величин и элементы математической статистики.

Авторы стремились сделать изложение теоретического материала доступным для понимания учащимися и развить у них правильное интуитивное представление о теории вероятностей, поэтому опущен ряд сложных доказательств теорем и выводов формул. В тех случаях, где это было возможно, доказательства основывались на классическом определении вероятности. Более строгое построение указанной дисциплины читатели могут найти в литературе, список которой приведен в конце пособия.

Для выработки практических навыков теоретический материал сопровождается подробными решениями задач различной степени сложности. С целью выработки умения учащимися анализировать свои решения и алгоритмы составляемых программ результаты решения ряда задач обсуждаются на предмет соответствия ожиданиям, основанным на знании предмета и условии задачи. Для проверки усвоения материала в конце каждой темы приводятся вопросы для контроля, а также примеры для самостоятельного решения. Часть из них дана с ответами. Задачи для самостоятельного решения можно использовать как для домашних заданий, так и для проведения самостоятельных и контрольных работ.

Часть 1

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Предметом теории вероятностей являются специфические количественные и качественные закономерности в массовых случайных явлениях, протекающих в одинаковых условиях.

Случайное явление – это такое явление, которое при неоднократном повторении одного и того же опыта протекает каждый раз несколько по-иному.

Примером случайного явления может служить стрельба из орудия, установленного под заданным углом к горизонту. Из механики известно, что траектория полета снаряда зависит от трех основных факторов: начальной скорости снаряда, указанного угла вылета, а также баллистического коэффициента снаряда. Однако реальная траектория и место падения снаряда при каждом выстреле будут отличаться от рассчитанных по причине воздействия ряда случайных факторов: небольшой разницы в массе и форме снаряда, массе заряда, в метеоусловиях и т. д. Учесть эти факторы невозможно, поэтому, когда говорят об одинаковых условиях проведения серии опытов, подразумевают неизменность основных факторов. Из-за наличия случайных факторов предсказать результат одного выстрела невозможно. Однако после ряда выстрелов оказывается, что места падения снарядов группируются вокруг рассчитанной точки. Отметим, что с помощью теории стрельбы, использующей вероятностные методы, можно вычислить количество снарядов, необходимых для поражения той или иной цели с заданной степенью надежности.

Трудно найти область человеческой деятельности, в которой не использовались бы вероятностные методы. Даже при решении задач, в которых отсутствуют случайные факторы, например при вычислении сложных определенных интегралов, применяются указанные методы. Для этого развито целое направление в программировании – стохастическое.

Глава 1
СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1.1. СОБЫТИЯ И ВЕРОЯТНОСТЬ

1.1.1. Основные понятия теории вероятностей

Как и в любой математической дисциплине, в теории вероятностей используются свои понятия и определения. Важнейшими среди них являются опыт, событие и вероятность.

Опыт (испытание) – действие, выполняющееся при осуществлении комплекса условий.

В качестве примера неоднократно будут рассматриваться опыты с подбрасыванием монеты или кубика при условии правильности их формы и однородности вещества. Например, монета должна быть плоской и на одной стороне иметь герб, а на другой – число. Грани кубика помечены цифрами от 1 до 6.

Событие – всякое явление, которое может произойти или не произойти в результате опыта.

События подразделяются на достоверные, невозможные и случайные.

Достоверное событие обязательно произойдет в результате опыта, *невозможное* – заведомо не может произойти в результате опыта, *случайное* – может произойти или не произойти в результате опыта.

Например, при однократном подбрасывании кубика выпадение на его грани цифры, меньшей 7, является достоверным событием, больше 7 – невозможным, одной из цифр от 1 до 6 – случайным. Достоверное событие обозначим символом Ω, невозможное – $\varnothing$, случайные события – заглавными латинскими буквами с начала алфавита (A, B, C,...).

Вероятность – это численная мера степени объективной возможности наступления рассматриваемого события. Данное определение указывает только на то, что вероятность является числом, характеризующим шансы появления события, но не дает способа ее вычисления.

Поскольку в дальнейшем мы будем иметь дело в основном со случайными событиями, остановимся на них подробнее.

1.1.2. Виды случайных событий и действия над ними

Случайные события, связанные с одним и тем же опытом, классифицируются по характеру взаимосвязи и степени возможности их появления.

События называются *совместными*, если появление одного из них не исключает появления других событий, и *несовместными*, если появление одного из них исключает появление остальных событий в одном и том же опыте.

Пример 1.1. В течение одной экзаменационной сессии студент сдает экзамены по физике и математике. Через событие A обозначим получение 9 баллов по математике, событие B – получение 8 баллов по математике на той же сессии, событие C – получение 8 баллов по физике. Выбрать из этих трех событий совместные и несовместные события.

Р е ш е н и е. Так как на одном экзамене можно получить только одну оценку, то события A и B – несовместные, тогда как события A и C, B и C – совместные.

Равновозможными называются события, ни одно из которых не является более возможным, чем остальные.

Примерами равновозможных событий являются выпадение герба или числа при подбрасывании плоской монеты или цифры на грани кубика.

Группа несовместных событий называется *полной группой*, если в результате опыта обязательно наступит одно из событий, входящих в эту группу.

Например, в случае сдачи экзамена студентом полную группу образуют четыре несовместных события: студент сдал экзамен, не сдал его, не явился на экзамен и не допущен к экзамену.

Противоположными называются два несовместных события, образующих полную группу.

Событие, противоположное событию A, обозначается $\bar{A}$ (читается «не A»). Если через событие A обозначено попадание в мишень при одном выстреле, то $\bar{A}$ означает промах.

Два события A и B называются *равносильными* (*эквивалентными*), если в результате каждого опыта они оба появляются одновременно. Равносильность двух событий обозначается знаком равенства ($A = B$) (равносильные события состоят из одних и тех же элементарных событий).

Множество всех возможных и взаимоисключающих исходов опыта называется *пространством элементарных событий* Ω, связанных с данным опытом. Элементы пространства Ω, обозначаемые $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, называются *элементарными событиями*. Выбирая в качестве элементарных другие события, для одного и того же опыта можно построить несколько пространств элементарных событий. Например, при подбрасывании кубика могут наступить шесть элементарных событий – $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6$, соответствующих выпадению цифры от 1 до 6. Тогда $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$. Если же ввести в качестве элементарных событий выпадение четного u_1 и нечетного числа очков u_2, пространство элементарных событий примет вид $\Omega = \{u_1, u_2\}$.

События, не входящие в элементарные, можно составить из элементарных с помощью алгебры событий. В алгебру событий достаточно включить только два действия: сложение и умножение.

Под *суммой* нескольких событий будем понимать появление *хотя бы одного* из этих событий.

Произведение нескольких событий – это событие, заключающееся в появлении *всех* этих событий.

Выделенные в этих определениях слова являются ключевыми.

Так, событие $A + B$ в случае несовместных событий означает появление события A или события B. Если же события совместные, то под суммой $A + B$ понимают появление только события A, или только события B, или обоих событий вместе.

Пример 1.2. Два стрелка стреляют по разу в одну мишень. Событие A_1 – попал первый стрелок, событие A_2 – второй. Через события A_1 и A_2 выразить события: 1) B – попал хотя бы один стрелок; 2) C – не попали оба.

Решение. Согласно определению суммы двух событий $B = A_1 + A_2$. Событие B можно представить иначе. Событие «попал хотя бы один стрелок» означает три возможных исхода (события): попал только первый стрелок, или только второй, или попали оба. Так как между этими событиями стоит союз *или*, то имеем сумму трех событий. Указанные события составные. Чтобы наступило первое, должны произойти два события: первый стрелок попал (это событие A_1) и второй промахнулся ($\bar{A}_2$). Если наступают оба события, то это означает произведение событий: $A_1 \cdot \bar{A}_2$. Аналогично представляется второе событие (попал только второй стрелок): $A_2 \cdot \bar{A}_1$ и третье: $A_1 \cdot A_2$. Тогда $B = A_1 \cdot \bar{A}_2 + A_2 \cdot \bar{A}_1 + A_1 \cdot A_2$.

2) $C = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2$, так как должны наступить оба события: и $\bar{A}_1$ (промахнулся первый стрелок), и $\bar{A}_2$ (промахнулся второй стрелок).

События и действия над ними иногда удобно представлять геометрически с помощью диаграмм Эйлера–Венна. В них достоверное событие Ω представляется в виде прямоугольника. Это означает, что в результате опыта выбирается любая точка внутри прямоугольника. Выбор точки обусловливает наступление элементарного события. Тогда случайному событию соответствует некоторая область внутри прямоугольника. Например, событие A означает попадание случайной точки внутрь овала, приведенного на рис 1.1, а попадание в оставшуюся часть – событие $\overline{A}$. Попадание точки на рис. 1.2 и 1.3 в заштрихованную область означает сумму и произведение событий A и B соответственно.

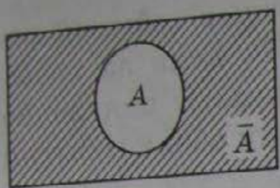


Рис. 1.1

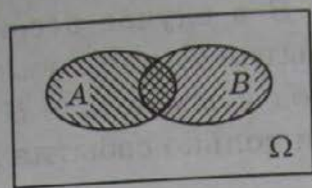


Рис. 1.2

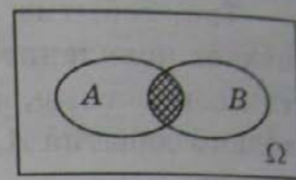


Рис. 1.3

Действия над событиями обладают теми же свойствами, что и операции над числами:

1) $A + B = B + A$, $A \cdot B = B \cdot A$ (переместительное свойство или коммутативность);

2) $A + (B + C) = (A + B) + C$, $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ (сочетательное свойство или ассоциативность);

3) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (распределительное свойство или дистрибутивность).

Кроме того, действия над событиями содержат ряд формул, которые кажутся странными или вовсе неверными. Так,

$$A \cdot A = A, \text{ но и } A + A = A, \ A + A \cdot A = A,$$

$$A + \Omega = \Omega, \ A + \overline{A} = \Omega, \ A \cdot \Omega = A, \ A \cdot \overline{A} = \varnothing.$$

Эти равенства нетрудно проверить с помощью рис. 1.1–1.3, используя определения суммы и произведения событий.

Справедливость операций двойственности или операций Моргана также подтверждают рис. 1.2 и 1.3:

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}, \ \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}.$$

Эти равенства распространяются на конечное число событий, если $n > 2$, т. е.

$$\overline{\sum_{i=1}^{n} A_i} = \prod_{i=1}^{n} \overline{A}_i; \; \overline{\prod_{i=1}^{n} A_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{A}_i.$$

1.1.3. Классическое определение вероятности. Элементы комбинаторики

Пусть имеется n равновозможных несовместных событий, образующих полную группу, каждое из которых назовем элементарным исходом опыта. Те исходы, при которых наступает интересующее нас событие, называются благоприятствующими этому событию.

Вероятностью события $P(A)$ называется отношение числа благоприятствующих этому событию исходов m к общему числу всех равновозможных несовместных исходов n, образующих полную группу:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1.1}$$

Для невозможного события нет ни одного благоприятствующего исхода, т. е. $m = 0$, а значит, и его вероятность также равна нулю. В случае достоверного события все исходы опыта являются благоприятствующими ($m = n$) и его вероятность равна единице. Тогда очевидно, что вероятность случайного события составляет долю единицы. Отсюда следует, что вероятность события может принимать значения от нуля до единицы:

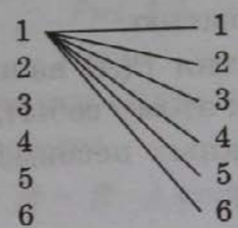
$$0 \le P(A) \le 1.$$

Если при решении задачи получилось значение вероятности, не удовлетворяющее данному двойному неравенству, то это означает, что допущена ошибка.

Пример 1.3. Найти вероятность того, что при подбрасывании кубика выпадет: а) четная цифра (событие A); б) сумма очков при двух бросках равна 12 (событие B); в) сумма очков при двух бросках равна 11 (событие C).

Решение. а) Поскольку выпасть может любая из шести граней, то общее число исходов $n = 6$. Так как четных цифр три (2, 4, 6), то число благоприятствующих исходов $m = 3$. Тогда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

б) В этом случае опыт произведен, если брошен один кубик 2 раза, или, что то же самое, брошено 2 кубика. Чтобы набрать 12 очков, возможен только один благоприятствующий исход, когда на обоих кубиках выпало по 6 очков, т. е. $m = 1$. Для подсчета общего числа исходов отметим, что любой из 6 цифр на первом кубике соответствует 6 вариантов выпадения цифры на втором кубике. Например, с цифрой 1 на первом кубике могут выпасть цифры 1, 2, 3, 4, 5 или 6 – на втором кубике.



Аналогично с цифрой 2 на первом кубике связано также 6 исходов появление цифр на втором кубике и т. п. В итоге получим

$$n = 6 \cdot 6 = 36 \text{ и } P(B) = \frac{m}{n} = \frac{1}{36}.$$

в) Как и в предыдущем случае, $n = 36$, но $m = 2$, поскольку один благоприятный исход – выпадение 5 очков на первом кубике и 6 на втором, а второй – 6 очков на первом кубике и 5 на втором:

$$P = \frac{m}{n} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

Пример 1.4. Найти вероятность того, что обезьяна, нажав пять клавиш клавиатуры компьютера, составит слово «книга» (событие A).

Решение. Для упрощения вычислений договоримся, что число клавиш равно 50. Опытом в данном примере является нажатие пяти любых клавиш, после чего проводится проверка: правильно ли набрано слово. Так как есть только один вариант правильного набора слова, то число благоприятствующих исходов $m = 1$. Найдем общее число исходов опыта. Первой может быть выбрана любая из 50 клавиш. Второй раз может быть нажата также любая из 50 клавиш и т. п. Как и предыдущем примере, перемножив эти числа, получим общее число исходов:

$$n = 50 \cdot 50 \cdot 50 \cdot 50 \cdot 50 = 3{,}125 \cdot 10^8;$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{3{,}125 \cdot 10^8} = 3{,}2 \cdot 10^{-9}.$$

Обратите внимание на огромное число комбинаций, составленных всего лишь из пяти символов. Вместе с тем с учетом высокой производительности современных компьютеров пяти символов будет недостаточно для обеспечения секретности пароля, защищающего доступ к конфиденциальной информации.

Для расчета вероятности необходимо подсчитать число элементарных исходов, которые можно найти с помощью формул комбинаторики. Приведем три из них, наиболее часто встречающиеся при решении задач.

Перестановками называются комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся порядком их следования.

Число перестановок из n различных элементов определяется по формуле

$$P_n = n!, \tag{1.2}$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ (читается: эн-факториал). По определению $0! = 1$, $1! = 1$.

Пример 1.5. Найти число комбинаций, составленных из: а) двух цифр; б) трех цифр.

Решение. а) Из двух цифр, например 1 и 2, возможны две комбинации: 1; 2 и 2; 1. Видно, что эти комбинации являются перестановками. Тогда по формуле числа перестановок (1.2) получаем тот же результат: $P_2 = 2! = 2$.

б) Из трех цифр, например 1; 2; 3, возможны шесть комбинаций: $P_3 = 3! = 6$. Этот результат можно получить и путем несложных рассуждений. Приведем все возможные комбинации:

1, 2, 3; 1, 3, 2; 2, 1, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2; 3, 2, 1.

Видно, что первым может оказаться любое из трех заданных чисел, т. е. есть три варианта расположения первого числа. Рассмотрим один из них. Например, пусть выбрана единица. Тогда выбор следующего числа ограничивается двумя числами: 2 и 3. Наконец, для третьего числа остается только один вариант. В итоге общее число комбинаций будет равно $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Размещения – это комбинации, состоящие из m элементов, выбранных из n различных элементов, различающихся как составом, так и порядком следования элементов.

Их число определятся по формуле

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \text{ или } A_n^m = \underbrace{n(n-1)\dots(n-m+1)}_{m}. \quad (1.3)$$

(A_n^m читается: «A из n по m».)

Пример 1.6. В соревнованиях участвуют четыре команды. Призовых мест два: первое и второе. Найти число возможных вариантов исхода соревнований.

Решение. Из четырех команд в призеры выбирают две. Поскольку играет роль порядок расположения (кто стал чемпионом, а кто занял второе место), такие комбинации называются размещениями. Согласно формуле (1.3) имеем

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = 12.$$

Приведем другой способ решения. На первом месте может оказаться любая из четырех команд. Одна из них его займет. На второе место претендуют оставшиеся три команды, т. е. всего возможных вариантов расположения команд на первом и втором местах $4 \cdot 3 = 12$.

Сочетания – это комбинации, состоящие из m элементов, выбранных из n разных элементов, которые различаются хотя бы одним элементом.

При этом порядок следования элементов роли не играет. Число сочетаний определяется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \quad (1.4)$$

(C_n^m читается: «C из n по m».)

Из приведенных формул видно, что число сочетаний выражается через число размещений и число перестановок:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}.$$

Пример 1.7. В группе пять студентов. На дежурство отбирают два человека. Найти число вариантов отбора двух человек из пяти.

Решение. Пусть отбор ведется в соответствии с порядковыми номерами фамилий в списке. С учетом того что порядок отбора роли не играет (1 и 2 или 2 и 1 – это одинаковый вариант подбора студентов), возможные неповторяющиеся варианты: 1 и 2; 1 и 3; 1 и 4; 1 и 5; 2 и 3; 2 и 4; 2 и 5; 3 и 4; 3 и 5; 4 и 5. Всего их 10.

Или, используя понятие сочетаний, можно получить

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10.$$

При решении задач на классическое определение вероятности можно использовать правила комбинаторики.

Правило суммы. Если некоторый элемент A может быть выбран из совокупности элементов m способами, а другой элемент B – n способами, то выбрать либо A, либо B можно $m + n$ способами.

Правило произведения. Если элемент A можно выбрать из совокупности элементов m способами и после каждого такого выбора элемент B можно выбрать n способами, то пара элементов (A, B) в указанном порядке может быть выбрана $m \cdot n$ способами.

Это правило уже использовалось при решении примеров 1.3,б), 1.4, 1.5.

Чтобы научиться распознавать виды комбинаций, решим еще три примера.

Пример 1.8. Найти вероятность того, что, заполнив карточку спортлото «5 из 36», мы угадаем а) 5 чисел (событие A); б) 4 числа (событие B); в) 3 числа (событие C).

Решение. а) В этом примере опытом является зачеркивание пяти выбранных чисел из 36. Ясно, что число благоприятствующих исходов равно единице. Найдем общее число исходов. Поскольку порядок зачеркивания роли не играет, имеем дело с сочетаниями:

$$n = C_{36}^{5} = \frac{36!}{5!\cdot 31!} = \frac{36\cdot 35\cdot 34\cdot 33\cdot 32\cdot \cancel{31!}}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot \cancel{31!}} = 376\ 992 .$$

$$P(A) = \frac{1}{376\ 992} \approx 2{,}65\cdot 10^{-6} .$$

Полученный результат показывает, что в случае участия в игре большого числа карточек максимальный выигрыш будет в среднем выпадать на примерно пять билетов из двух миллионов.

б) Общее количество исходов останется тем же. Число же благоприятствующих исходов увеличится. Количество вариантов правильно выбрать четыре числа из пяти, выпавших в тираже спортлото, равно

$$m_1 = C_5^4 = \frac{5!}{4!\cdot 1!} = \frac{5\cdot 4!}{4!} = 5 .$$

Пятое число мы не угадали. Ему соответствует одно из 31 невыигрышного числа ($m_2 = C_{31}^1$). Поскольку каждому из 5 исходов (угадать четыре числа из пяти) соответствует 31 вариант неправильного выбора числа, общее количество благоприятствующих исходов будет равно

$$m = m_1\cdot m_2 = C_5^4\cdot C_{31}^1 = 5\cdot 31 = 155 .$$

К этому же результату можно было бы прийти, используя правило произведения. Тогда вероятность угадать четыре числа равна

$$P(B) = \frac{155}{376\ 992} \approx 0{,}0\ 004 .$$

в) Рассуждая, как и в предыдущем случае, получим

$$m = C_5^3\cdot C_{31}^2 = \frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot\frac{31!}{2!\cdot 29!} = 10\cdot 465 = 4650 ,$$

$$P(C) = \frac{4650}{376\ 992} \approx 0{,}012 .$$

Пример 1.9. На пяти одинаковых карточках написаны буквы М, И, Н, С и К. Найти вероятность того, что не знающий букв ребенок, составляя карточки в ряд, получит слово «МИНСК» (событие A).

Решение. Одна комбинация карточек отличается от другой только перестановкой двух или более карточек. Тогда общее число исходов равно числу перестановок из пяти элементов:

$$n = 5! = 120.$$

Поскольку только один вариант расположения карточек соответствует слову «МИНСК», число благоприятствующих исходов равно единице, а

$$P(A) = 1/120.$$

Пример 1.10. Найти вероятность того, что из карточек М, М, А и А будет составлено слово «МАМА» (событие А).

Решение. Общее число исходов $n = 4! = 24$. Число благоприятствующих исходов будет больше одного, так как можно переставить местами две буквы М. Тогда каждому из этих вариантов будут соответствовать два варианта перестановки буквы А. Отсюда

$$m = 2! \cdot 2! = 4$$

и

$$P(A) = 4/24 = 1/6.$$

Пример 1.11. В лифт семиэтажного дома зашли три незнакомых друг другу человека. Найти вероятность того, что пассажиры выйдут: а) на седьмом этаже (событие A); б) на одном этаже (событие B); в) на разных этажах (событие C).

Решение. Будем считать, что пассажиры с одинаковой вероятностью выходят на любом этаже, начиная со второго. Каждому из шести вариантов выхода первого пассажира соответствует шесть вариантов выхода второго пассажира, т. е. имеется 36 вариантов выхода двух пассажиров из лифта. Каждому из этих 36 исходов соответствует шесть вариантов выхода третьего пассажира. Тогда общее число исходов будет равно

$$n = 6^3 = 216.$$

а) Поскольку только один благоприятствующий исход выхода всех пассажиров на седьмом этаже, число благоприятствующих исходов равно единице и

$$P(A) = \frac{1}{216}.$$

б) Пассажиры могут выйти вместе на любом из шести этажей, поэтому $m = 6$ и

$$P(B) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}.$$

в) Когда пассажиры выходят на разных этажах, это означает, что из шести чисел (номера этажей) выбирают три. Кроме того, важен порядок выбора, так как исходы, когда первый пассажир вышел на четвертом этаже, а второй – на пятом и, наоборот, когда первый пассажир вышел на пятом, а второй – на четвертом этаже, будут различны. Значит, имеем дело с размещениями и число благоприятствующих исходов равно

$$m = A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120,$$

$$P(C) = \frac{120}{216} = \frac{5}{9}.$$

Из приведенных примеров вытекает, что использовать классическое определение можно только в весьма небольшом числе случаев. Ограниченность классического определения вероятности вызвана достаточно жесткими требованиями: конечностью числа исходов опыта, их равновозможностью и несовместностью.

1.1.4. Геометрическое определение вероятности

Требование конечности числа исходов в полной группе событий можно обойти в некоторых случаях, используя *геометрическое определение вероятности*. Рассмотрим его на примере.

Пример 1.12. Пусть точка выбирается случайным образом из области, ограниченной прямоугольником (рис. 1.4). Как определить вероятность попадания точки в овал A (событие A), если нельзя отдать предпочтение ни одной точке прямоугольника?

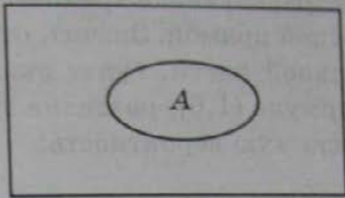


Рис. 1.4

Решение. Чем больше площадь овала, тем выше степень возможности попадания случайной точки в овал, поэтому искомая вероятность должна быть прямо пропорциональна площади овала. Чтобы ее значение не превышало единицы, площадь овала разделим на площадь прямоугольника. Тогда

$$P(A) = \frac{S_{\text{овал}}}{S_{\text{прямоуг.}}}. \tag{1.5}$$

Аналогично можно получить формулу для вычисления вероятности попадания случайной точки на отрезок длиной l (событие B), составляющий часть отрезка длиной L. При этом равновозможно попадание случайной точки в любую точку большего отрезка. Тогда

$$P(B) = \frac{l}{L}. \tag{1.6}$$

Отметим, что этой формулой можно пользоваться и при рассмотрении интервалов времени.

Пример 1.13. В течение часа параллельный телефон занят в среднем 30 мин. Найти вероятность того, что, подняв трубку, обнаружится, что телефон занят (событие A).

Решение. Поскольку из 60 мин 30 благоприятствуют событию, что телефон занят,

$$P(A) = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}.$$

Пример 1.14. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, находящимися друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу бросают монету радиусом $r < a$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из прямых (событие A).

Решение. Рассмотрим полосу между двумя прямыми. Если центр монеты попадет в ее центральную заштрихованную часть (рис. 1.5), то монета не пересечет ни одной прямой. Значит, отрезок длиной $l = 2a - 2r$, равный ширине центральной части, будет включать все благоприятствующие исходы. По формуле (1.6), разделив эту величину на ширину всей полосы, получим искомую вероятность:

$$P(A) = \frac{2a - 2r}{2a} = 1 - \frac{r}{a}.$$

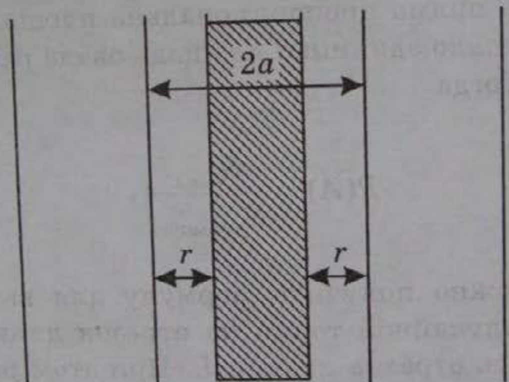


Рис. 1.5

Пример 1.15. Из отрезка [0,1] наудачу выбраны два числа – x и y. Найти вероятность того, что эти числа удовлетворяют неравенству $y < x^2$.

Решение. Выбору двух чисел x и y из отрезка [0, 1] на плоскости xOy соответствует квадрат с единичной длиной стороны (рис. 1.6). Его площадь равна 1. Область точек, удовлетворяющих неравенству $y < x^2$, лежит ниже графика параболы (на рис. 1.6 она заштрихована). Ее площадь будет равна

$$S = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Тогда по формуле (1.5) получим

$$P\left(y < x^2\right) = \frac{1/3}{1} = \frac{1}{3}.$$

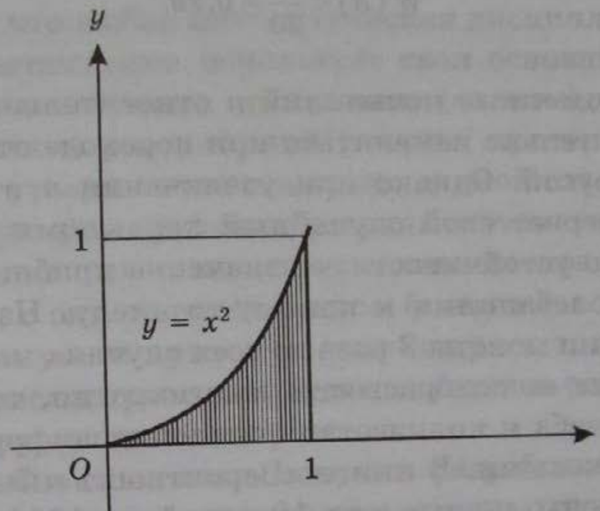


Рис. 1.6

1.1.5. Относительная частота и статистическая вероятность события

Относительной частотой события A в данной серии опытов называется отношение числа опытов m, в которых событие A наступило, к общему числу проведенных опытов n:

$$W\left(A\right) = \frac{m}{n}. \tag{1.7}$$

Формулы расчета вероятности (1.1) согласно классическому определению и относительной частоты имеют одинаковый вид. Однако вероятность определяется до опыта, а относительная частота – после.

Пример 1.16. Стрелок стрелял по мишени 20 раз, из них попал 5 раз. Найти частоту события A, состоящего в попадании стрелка в мишень.

Решение. В этом примере $n = 20$, $m = 5$. Тогда относительная частота события A равна

$$W(A) = \frac{5}{20} = 0,25.$$

При малом числе испытаний n относительная частота W может значительно изменяться при переходе от одной серии опытов к другой. Однако при увеличении n относительная частота W теряет свой случайный характер и обнаруживается свойство устойчивости: ее значение приближается с некоторыми колебаниями к какому-то числу. Например, при подбрасывании монеты 3 раза во всех случаях может выпасть герб. Если же ее подбрасывать многократно, то количество выпадения герба и количество появления цифры будут примерно одинаковыми. В книге «Вероятность» Ф. Мостеллера и др. приведены данные для 10 серий по 1000 опытов бросания монеты. В них число выпадений герба равнялось 502, 518, 497, 529, 504, 476, 507, 528, 504, 529. Из этих данных следует, что относительные частоты выпадений герба группируются около 1/2. Это число и принимают за вероятность выпадения герба.

Статистической вероятностью называется постоянное число, около которого группируются частоты этого события по мере увеличения числа испытаний:

$$W(A) = \frac{m}{n} \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} P(A).$$

Этот способ имеет как преимущества, так и недостатки.

К преимуществам можно отнести тот факт, что статистическая вероятность опирается на реальный эксперимент, а к недостаткам – необходимость проводить большое число испытаний и неоднозначность самого значения статистической вероятности (например, если в результате достаточно большого числа опытов значение частоты некоторого события A получилось достаточно близким к 0,5, то это число можно принять за статистическую вероятность события A, но можно в качестве $P(A)$ взять 0,49; 0,51 и т. д.).

1.1.6. Аксиоматика теории вероятностей

Известно, что любая математическая дисциплина или любой раздел математики использует свои основные понятия, ряд своих недоказуемых постулатов (аксиом), из которых путем логических рассуждений (теорем, критериев) получают основные утверждения и выводы данной главы.

Так, например, изучение раздела математики «Планиметрия» начиналось с введения основных понятий (точки, линии и др.), с определения аксиом («через две точки можно провести прямую, и притом только одну» и т. п.). И только после этого рассматривались и доказывались различные теоремы и утверждения геометрии.

Исторически сложилось так, что разработка методов решения вероятностно-статистических задач относится к началу XVII в. Первоначально изучались и решались простые и наглядные задачи, связанные с азартными играми (и до сих пор построенные по этим задачам математические модели широко используются при изучении теории вероятностей). К этому же времени относится введение основных понятий и постулатов теории вероятностей, правильность которых была подтверждена практически и экспериментально при исследовании моделей задач, связанных с азартными играми.

Теоретическое же обоснование того факта, что теория вероятностей является самостоятельной, строгой, логически построенной математической дисциплиной со своими основными понятиями, аксиомами и т. п. было получено существенно позже известным русским академиком А.Н. Колмогоровым в первой половине XX в.

Приведем аксиомы теории вероятностей, сформулировав их в более простом по отношению к оригиналу и удобном для восприятия читателям этой книги, только начинающим изучать теорию вероятностей.

Аксиомы теории вероятностей

Аксиома 1. Любое событие A может быть представлено в виде комбинаций сумм и произведений элементарных событий.

Аксиома 2. Каждому событию A можно поставить в соответствие число $P(A) \geq 0$, называемое вероятностью этого события.

Аксиома 3. Вероятность достоверного события равна 1.

Аксиома 4. Если события A и B несовместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Вопросы для самоконтроля

1. Что является предметом теории вероятностей?
2. Дайте определение достоверного, невозможного и случайного событий. Приведите примеры указанных событий.
3. Какое событие обозначается греческой буквой Ω?
4. Какие случайные события называются совместными и несовместными? Приведите примеры таких событий.
5. Дайте определение равновозможных случайных событий.
6. Какая группа случайных событий называется полной? Приведите примеры.
7. Что называется противоположными событиями?
8. Приведите определение суммы событий. Какими свойствами она обладает?
9. Приведите определение произведения событий. Какими свойствами оно обладает?
10. Что понимают под диаграммами Эйлера–Венна?
11. Что такое $n!$? Чему равен $0!$?
12. Что называется перестановками? Приведите формулу, по которой рассчитывается число перестановок.
13. Что называется размещениями? Как рассчитать число размещений?
14. Что называется сочетаниями? Приведите формулу, по которой рассчитывается число сочетаний.
15. Чем отличаются размещения от сочетаний? Приведите формулу, связывающую число сочетаний и число размещений.
16. Что называется благоприятствующими событию исходами?
17. Дайте классическое определение вероятности.
18. В каких пределах изменяется вероятность события?

19. Что понимается под геометрической вероятностью? Приведите формулы ее расчета.

20. Дайте определение относительной частоты.

21. Что определяется до опыта: относительная частота или вероятность?

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Являются ли несовместными перечисленные события?

а) Опыт – бросание монеты. События: A – появление герба, B – появление числа.

б) Опыт – взятие карты из колоды. События: A – появление дамы, B – появление карты крестовой масти.

в) Опыт – два выстрела по мишени. Событие A – хотя бы один промах, B – хотя бы одно попадание.

г) Опыт – бросание кубика. События: A – выпадение цифры 4, B – выпадение четного числа.

1.2. Образуют ли полную группу приведенные события?

а) Опыт – один выстрел по мишени. События: A – промах, B – попадание.

б) Опыт – два выстрела по мишени. События: A – один промах, B – два промаха.

в) Опыт – бросание кубика. События: A – выпадение нечетного числа, B – четного числа.

1.3. Являются ли равновозможными перечисленные события?

а) Опыт – бросание плоской монеты. События: A – появление герба, B – появление числа.

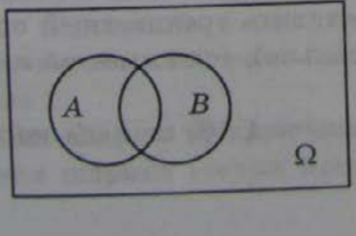
б) Опыт – взятие карты из колоды. События: A – появление дамы, B – карты крестовой масти.

в) Опыт – бросание кубика. События: A – выпадение цифры 2, B – четного числа.

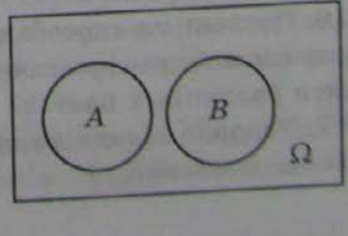
г) Опыт – один выстрел по мишени. События: A – промах, B – попадание.

1.4. Являются ли совместными события A и B, представленные на диаграммах?

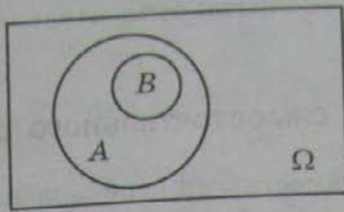
а



б



1.5. Найти, чему равны сумма и произведение событий A и B, представленных на диаграмме.



1.6. Докажите формулу $A = A \cdot B + A \cdot \overline{B}$.

1.7. В урне находится 7 белых и 3 черных шара. Наугад берут один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

1.8. В урне находится 7 белых и 3 черных шара. Наугад берут один шар. Он оказался белым. Затем из урны берут еще один шар. Найти вероятность того, что этот шар также белый.

1.9. В урне находится 7 белых и 3 черных шара. Наугад берут один шар и, не глядя на него, прячут в другой ящик. Затем из урны берут еще один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

1.10. В урне находится 7 белых и 3 черных шара. Наугад вынимают все шары за исключением последнего и, не глядя на них, прячут в другой ящик. Найти вероятность того, что последний шар окажется белым.

1.11. В урне находится 7 белых, 10 красных и 3 зеленых шара. Наугад берут один шар. Найти вероятность того, что этот шар цветной (не белый).

1.12. В группе 25 человек. Все они обменялись друг с другом фотокарточками. Сколько всего было роздано фотокарточек?

1.13. На круглую площадь ведут пять улиц. На трех из них движение двухстороннее, а на остальных двух – одностороннее к площади. Каким числом способов можно проехать через площадь?

1.14. Группа учащихся колледжа изучает 10 учебных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание занятий на понедельник, если в этот день недели должно быть четыре различные пары?

1.15. Сколькими способами можно выбрать три различные краски из имеющихся девяти?

1.16. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг (полосы располагаются горизонтально), если имеется материал девяти различных цветов?

1.17. Условие задачи то же, что и в задаче 1.16, но одна из полос должна быть зеленой.

1.18. Логин (пароль) содержит восемь символов. Сколькими способами его можно составить: а) из 10 цифр? б) из 10 цифр и 26 английских букв?

1.19. Какова вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 1 до 30 включительно будет: а) содержать цифру 1; б) кратно трем?

1.20. На шахматную доску из 64 клеток ставят наудачу две ладьи белого и черного цвета. С какой вероятностью они будут «бить» друг друга?

1.21. Какова вероятность того, что в январе наугад выбранного года окажется четыре воскресенья?

1.22. Какова вероятность того, что число на вырванном листке нового календаря кратно 5, если в году 365 дней?

1.23. При наборе телефонного номера абонент набирает три последние цифры наугад, помня, что это цифры 1, 3, 7 в каком-то порядке. Найти вероятность того, что номер будет набран правильно с первой попытки.

1.24. Ребенок, не знающий букв, составляет карточки разрезной азбуки в ряд. Найти вероятность того, что он

а) из шести букв М, О, С, К, В, А получит слово «МОСКВА»;

б) из шести букв А, А, А, Н, Н, С – слово «АНАНАС»;

в) из 10 букв А, А, А, М, М, Т, Т, Е, И и К – слово «МАТЕМАТИКА».

1.25. В урне пять пронумерованных шаров. Все шары вынимают один за другим. Найти вероятность того, что их номера расположатся в порядке убывания (5, 4, ..., 1).

1.26. Из колоды в 36 карт наугад выбирают 3 карты. Найти вероятность того, что среди них окажутся две дамы.

1.27. Из 60 вопросов, включенных в экзамен, студент подготовил 50. Какова вероятность того, что из предложенных ему трех вопросов он знает только два?

1.28. В урне находится 7 белых и 3 черных шара. Наугад берут два шара. Найти вероятность, что один шар будет белым, а другой – черным.

1.29. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 64 кубика одинакового размера. Определить вероятность того, что наудачу извлеченный кубик имеет три окрашенные грани.

1.30. На линии длиной L, ведущей от сервера, произошел разрыв. Считая положение точки разрыва на линии равновозможным, определить вероятность того, что она удалена на расстояние, которое не меньше l.

1.31. Шарик брошен внутрь круга радиусом R. Вероятность попадания шарика (точки касания плоскости круга) в любую область, расположенную внутри круга, пропорциональна площади этой области. Найти вероятность того, что точка прикосновения шарика к плоскости круга находится от центра на расстоянии, меньшем r ($r < R$).

1.32. На отрезке длиной 1 м наудачу выбраны две точки. Какова вероятность того, что расстояние между этими точками будет меньше 1/2 м?

1.33. Из отрезка [0,2] наудачу выбраны два числа – x и y. Найти вероятность того, что эти числа удовлетворяют неравенствам $x < y < 2x$.

1.34. За промежуток времени T в приемник поступают два одинаковых сигнала, причем моменты времени их поступления равновозможны. В случае, когда время между поступлением сигналов меньше t_0, приемник второй сигнал не регистрирует. Найти вероятность того, что второй сигнал будет зарегистрирован.

1.35. Монета подброшена 450 раз и 230 раз выпал герб. Найти относительную частоту выпадения герба.

1.36. В данной замкнутой популяции среди животных альбиносы встречаются с относительной частотой, равной 0,014. Сколько особей содержит популяция, если среди них насчитывается 7 альбиносов?

1.37. В данной местности солнечные дни появляются с относительной частотой 0,8. Сколько солнечных дней нужно ожидать в период 30-дневного летнего отпуска?

Ответы: **1.1.** а) Да; б) Нет; в) Нет; г) Нет. **1.2.** а) Да; б) Нет; в) Да; **1.3.** а) Да; б) Нет; в) Нет; г) Нет. **1.4.** а) Да. б) Нет. **1.5.** $A + B = A$, $A \cdot B = B$. **1.7.** 0,7. **1.8.** 2/3. **1.9.** 0,7. **1.10.** 0,7. **1.11.** 0,65. **1.12.** 600. **1.13.** 15. **1.14.** 5040. **1.15.** 84. **1.16.** 504. **1.17.** 168. **1.18.** а) 10^8. б) $36^8 \approx 2{,}82 \cdot 10^{12}$. **1.19.** а) 0,4. б) 1/3. **1.20.** 14/63 = 2/9. **1.21.** 4/7. **1.22.** 71/365. **1.23.** 1/6. **1.24.** а) 1/720. б) 1/60. в) 3!2!2!/10! = 1/151200. **1.25.** 1/120. **1.26.** $(C_4^2 C_{32}^1) / C_{36}^3 \approx 0{,}027$. **1.27.** $\approx 0{,}358$. **1.28.** 7/15. **1.29.** 1/8. **1.30.** $1 - \dfrac{l}{L}$. **1.31.** r^2/R^2. **1.32.** 3/4. **1.33.** 1/4. **1.34.** $(T - t_0)^2/T^2$. **1.35.** 23/45. **1.36.** 500. **1.37.** 24.

1.2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Обычно для нахождения вероятностей используются косвенные методы, когда по известным вероятностям одних событий находят вероятности других. Для этой цели служит ряд теорем.

1.2.1. Теорема сложения вероятностей совместных событий

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий за вычетом вероятности их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \qquad (1.8)$$

Доказательство. Пусть исходы опыта образуют полную группу, состоящую из n несовместных равновозможных событий. При этом m_A из них благоприятствуют событию A, а m_B – событию В. Из этих m_B событий l также благоприятствуют событию A. Это означает, что указанные l событий благоприятны произведению событий $A \cdot B$ (рис. 1.7). Тогда согласно классическому определению вероятности:

$$P(A) = \frac{m_A}{n}; \quad P(B) = \frac{m_B}{n}; \quad P(A \cdot B) = \frac{l}{n}.$$

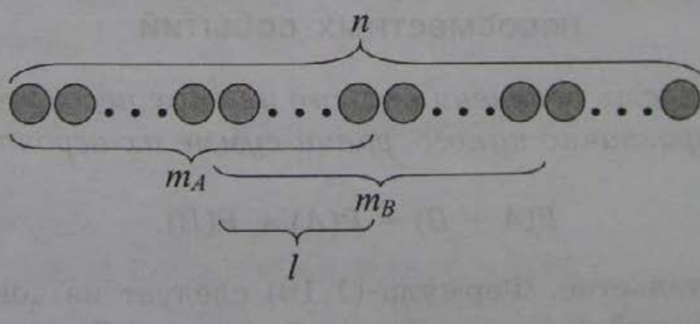


Рис. 1.7

Из рис. 1.7 видно, что событию $A + B$ благоприятствуют $m_A + m_B - l$ исходов. Отсюда

$$P(A + B) = \frac{m_A + m_B - l}{n}.$$

Разделив числитель почленно на n, получим

$$P(A+B)=\frac{m_A+m_B-l}{n}=\frac{m_A}{n}+\frac{m_B}{n}-\frac{l}{n}=P(A)+P(B)-P(A\cdot B),$$

что и требовалось доказать.

Формула для вычисления вероятности суммы трех совместных событий значительно сложнее:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cdot B)-\\ -P(A\cdot C)-P(B\cdot C)+P(A\cdot B\cdot C). \tag{1.9}$$

Формулу (1.9) нетрудно доказать, используя геометрическое определение вероятности (см. задачу 1.45). Еще сложнее вычислять вероятности суммы четырех и более совместных событий.

Рекомендация. В случае вычисления вероятности суммы трех и более совместных событий целесообразно сначала найти вероятность противоположного события.

1.2.2. Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме их вероятностей:

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{1.10}$$

Доказательство. Формула (1.10) следует из доказательства предыдущей теоремы. Если события A и B несовместные, то $l=0$ (рис. 1.7) и $P(A\cdot B)=0$. Тогда из формулы (1.8) имеем

$$P(A+B)=P(A)+P(B),$$

что и требовалось доказать.

Методом полной математической индукции можно доказать, что вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий для любого конечного числа слагаемых:

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k). \tag{1.11}$$

Следствие 1: сумма вероятностей несовместных событий, образующих полную группу событий, равна единице.

Доказательство. Пусть несовместные события $A_1, A_2, \ldots$ $\ldots, A_n$ образуют полную группу, тогда $A = \sum_{k=1}^{n} A_k$ – достоверное событие и его вероятность $P(A) = 1 = P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right)$. Воспользовавшись теоремой сложения вероятностей несовместных событий, получим $\sum_{k=1}^{n} P(A_k) = 1$, что и требовалось доказать.

Следствие 2: сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

Доказательство. Два противоположных события A и $\bar{A}$ образуют полную группу. С учетом этого, используя следствие 1, имеем

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1,$$

что и требовалось доказать.

Эта формула чаще используется в виде

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \tag{1.12}$$

Пример 1.17. Операционная система занята обработкой пяти приложений, причем первому уделяется 10 % времени, второму – 30, третьему, четвертому и пятому – по 20 %. В какой-то момент времени произошел сбой. Найти вероятность того, что сбой произошел в момент обработки первого или второго приложений.

Решение. Обозначим события: A_i – операционная система занята обработкой i-го приложения ($i = 1, 2, ..., 5$ или $i = \overline{1,5}$). Их вероятности равны соответственно

$$P(A_1) = 0,1;\ P(A_2) = 0,3;\ P(A_3) = P(A_4) = P(A_5) = 0,2.$$

Обозначим событие B – сбой произошел в момент обработки первого или второго приложений. Тогда $B = A_1 + A_2$. Так как события A_1 и A_2 несовместные, то используем формулу (1.10):

$$P(B) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) = 0,1 + 0,3 = 0,4.$$

1.2.3. Независимые и зависимые события. Условная вероятность

Два события A и B называются *независимыми*, если вероятность появления события A не зависит от того, произошло событие B или нет, и *зависимыми* в противоположном случае.

Закрепим эти определения на примере.

Пример 1.18. Пусть в ящике 10 ламп, 3 из которых неисправны. Рассмотрим два варианта проверки ламп: а) после проверки взятая наугад лампа возвращается в ящик; б) после проверки лампа не возвращается в ящик.

Пусть событие A – в первом опыте выбор неисправной лампы; событие B – во втором опыте выбор неисправной лампы.

Выясним, зависимы ли указанные события при каждом варианте проверки.

Решение. а) Так как из 10 ламп три неисправны, то $P(A) = \frac{3}{10}$. Поскольку проверенную лампу вернули в ящик, то второй опыт повторяет первый и $P(B) = \frac{3}{10}$. Отсюда следует, что события A и B являются независимыми.

б) Как и в предыдущем случае, $P(A) = \frac{3}{10}$. Пусть событие A наступило, тогда в ящике осталось девять ламп, из которых две неисправные. Тогда $P(B) = \frac{2}{9}$. Если же наступило событие $\bar{A}$, т. е. взяли исправную лампу, то $P(B) = \frac{3}{9}$. Поскольку вероятность события B зависит от того, произошло или нет событие A, события A и B – зависимые.

В случаях, когда количество событий больше двух, вводятся два понятия независимости событий.

Несколько событий называются *попарно независимыми*, если каждые два из них независимые.

Несколько событий называются *независимыми в совокупности*, если каждые два из них попарно независимые и каждое из событий и произведения любого числа оставшихся событий также являются независимыми.

Условная вероятность события A – это вероятность данного события, вычисленная при условии, что событие B произошло.

Условные вероятности в разных учебных пособиях по теории вероятностей обозначаются по-разному: $P(A|B)$, $P(A/B)$ или $P_B(A)$. Мы будем придерживаться первого варианта.

Для независимых событий A и B условные вероятности совпадают с безусловными.

Пример 1.19. В урне находится 7 белых и 3 черных шара. Три раза из урны наугад берут по одному шару, которые после определения цвета в урну не возвращают. События A_i – при i-й попытке взят белый шар ($i = \overline{1, 3}$). Найти условную вероятность $P(A_3|A_1A_2)$.

Решение. $P(A_3|A_1A_2)$ – это вероятность того, что третьим был выбран белый шар при условии, что ранее были взяты два белых шара. Перед третьей попыткой в урне осталось восемь шаров, из которых пять белых, поэтому

$$P\left(A_3 \middle| A_1 A_2\right) = \frac{5}{8}\cdot$$

1.2.4. Теорема умножения вероятностей зависимых событий

Вероятность произведения двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого события, вычисленную при условии, что первое событие уже произошло:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B). \qquad (1.13)$$

Доказательство. Из рис. 1.7 следует, что $P(A)=\frac{m_A}{n}$, а $P(A\cdot B)=\frac{l}{n}$. Раз произошло событие A, то общее число исходов будет равно не n, а m_A. Из этих m_A исходов l благоприятствуют также событию B, поэтому

$$P(B|A)=\frac{l}{m_A}.$$

Преобразовав вероятность произведения $P(A\cdot B)$, получим

$$P(A\cdot B)=\frac{l}{n}=\frac{l}{n}\cdot\frac{m_A}{m_A}=\frac{m_A}{n}\cdot\frac{l}{m_A}=P(A)\cdot P(B|A),$$

что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается, что $P(A\cdot B)=P(B)\cdot P(A|B)$.

Можно доказать, что в случае произведения n событий

$$P\left(\prod_{k=1}^{n}A_k\right)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1\cdot A_2)\times\ldots \tag{1.14}$$
$$\ldots\times P(A_n|A_1\cdot A_2\ldots A_{n-1}).$$

Пример 1.20. Студент знает один билет из 30. Каким по счету он должен пойти на экзамен, чтобы вероятность вытащить нужный билет была наибольшей?

Решение. Обозначим события: B_i – указанный студент пошел i-м по счету и вытащил нужный билет; A_i – i-й по счету студент вытащил нужный билет ($i=\overline{1,30}$). Рассчитав несколько значений $P(B_i)$ и установив закономерность изменения вероятности в зависимости от i, будет возможно ответить на поставленный вопрос. Согласно классическому определению вероятности, если указанный студент пойдет первым, то

$$P(B_1)=\frac{1}{30}.$$

Чтобы идущий вторым вытащил желаемый билет, необходимо первому студенту взять другой билет. Данное событие $\bar{A}_1$ и его вероятность $P(\bar{A}_1)=29/30$. Чтобы событие B_2 произошло, необходимо наступление обоих событий. Когда происходят *все* события, это означает произведение всех событий. Тогда $B_2 = \bar{A}_1 \cdot A_2$. События $\bar{A}_1$ и A_2 – зависимые события, так как $P(A_2|A_1) = 0$ и $P(A_2|\bar{A}_1) = 1/29$. По формуле (1.13) получим

$$P(B_2) = P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2|\bar{A}_1) = \frac{29}{30} \cdot \frac{1}{29} = \frac{1}{30}.$$

Аналогично выражению для события $B_3 = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3$. По формуле (1.14)

$$P(B_3) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(A_3|\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2) = \frac{29}{30} \cdot \frac{28}{29} \cdot \frac{1}{28} = \frac{1}{30}.$$

Следовательно, вероятность вытащить искомый билет не зависит от того, каким по счету идти на экзамен.

1.2.5. Теорема умножения вероятностей независимых событий

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \tag{1.15}$$

Доказательство. Если события независимые, то $P(B|A) = P(B)$. Подставив в формулу (1.13) $P(B)$ вместо $P(B|A)$, получим искомую формулу $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Следствие: вероятность произведения нескольких независимых в совокупности событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P\left(\prod_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k).$$

Пример 1.21. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,9, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что оба стрелка попадут в мишень, сделав по одному выстрелу.

Решение. Обозначим событие B – оба стрелка попадут в мишень, события A_i – мишень поражена i-м стрелком, $i = \overline{1,2}$. Вероятности этих событий приведены в условии примера $P(A_1) = 0,9$, $P(A_2) = 0,8$. Чтобы наступило событие B, должны произойти оба события – A_1 и A_2. Тогда $A = A_1 \cdot A_2$, причем A_1 и A_2 исходя из условия примера – независимые события. Используя теорему умножения вероятностей независимых событий, получим

$$P(B) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,9 \cdot 0,8 = 0,72.$$

1.2.6. Теорема вероятности появления хотя бы одного события

Вероятность наступления хотя бы одного из событий A_1, $A_2,...,A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей непоявления этих событий:

$$P(B) = 1 - q_1 q_2 ... q_n, \qquad (1.16)$$

где $q_k = P\left(\bar{A}_k\right) = 1 - p_k$, $k = \overline{1,n}$.

Доказательство. Пусть независимые в совокупности события A_1, $A_2,...,A_n$ могут наступить с вероятностями p_1, $p_2,...,p_n$.

Обозначим B событие, заключающееся в появлении хотя бы одного из указанных событий. Тогда

$$B = \sum_{k=1}^{n} A_k .$$

Противоположное событие $\bar{B}$ означает, что не произойдет ни одно из событий A_k ($k = \overline{1,n}$), т. е. наступят все события $\bar{A}_k$. Таким образом, событие $\bar{B}$ является произведением всех событий $\bar{A}_k$:

$$\bar{B} = \prod_{k=1}^{n} \bar{A}_k$$

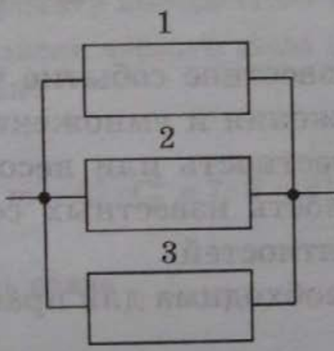
$$P\left(\bar{B}\right)=\prod_{k=1}^{n}P\left(\bar{A}_k\right)=q_1q_2\ldots q_n,$$

где $P\left(\bar{A}_k\right)=1-p_k=q_k$. Тогда по формуле (1.12) для вероятности противоположного события имеем

$$P\left(B\right)=1-P(\bar{B})=1-q_1q_2\ldots q_n,$$

что и требовалось доказать.

Пример 1.22. Вероятность прохождения сигнала через каждый элемент равна 0,9. Найти вероятность того, что сигнал пройдет через цепь, содержащую три параллельных элемента:



Решение. Введем обозначения событий, вероятности которых даны или необходимо найти. События A_i – сигнал проходит через i-й элемент ($i=\overline{1,3}$); $P(A_i)=0,9$. Событие B – сигнал прошел через цепь.

Сигнал пройдет через цепь, если он пройдет **хотя бы через один** элемент. Значит, $B=A_1+A_2+A_3$.

Так как A_1, A_2, A_3 – совместные события, вычисления по формуле (1.9) громоздки, поэтому найдем вероятность противоположного события.

Событие $\bar{B}$ – сигнал не пройдет через цепь. Это произойдет, если он не пройдет через **все** три элемента. Тогда

$$\bar{B}=\bar{A}_1\cdot\bar{A}_2\cdot\bar{A}_3.$$

Так как $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$ – независимые события, то

$$P\left(\bar{B}\right)=P(\bar{A}_1\cdot\bar{A}_2\cdot\bar{A}_3)=P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2)\cdot P(\bar{A}_3)=(1-0,9)^3=0,1^3=0,001,$$

$$P(B)=1-P\left(\bar{B}\right)=1-0,001=0,999.$$

Полученный результат показывает, что наличие элементов или приборов, работающих в параллельном режиме, увеличивает вероятность их безотказной работы. В случаях, если требуется высокая надежность аппаратуры, она дублируется.

1.2.7. Алгоритм и примеры решения задач на нахождение вероятностей событий

1. Вводим обозначения событий: неизвестного, вероятность которого требуется найти, и известных, т. е. событий, вероятности которых даны или легко вычисляются из условия задачи.

2. Выражаем неизвестное событие через известные с помощью действий сложения и умножения событий.

3. Проверив совместность или несовместность и независимость или зависимость известных событий, переходим к нахождению их вероятностей.

Такая проверка необходима для правильного выбора формулы (рис. 1.8).

$$P(A+B)\begin{cases}\xrightarrow{\text{События несовместные}} P(A)+P(B)\\[2ex] \xrightarrow[\text{События совместные}]{} P(A)+P(B)-P(A\cdot B)\end{cases}$$

$$P(A\cdot B)\begin{cases}\xrightarrow{\text{События независимые}} P(A)\cdot P(B)\\[2ex] \xrightarrow[\text{События зависимые}]{} P(A)\cdot P(B|A)\end{cases}$$

Рис. 1.8

Важность этого момента иллюстрирует следующий пример.

Пример 1.23. В урне находится 7 белых и 3 черных шара. Наугад берут два шара. Найти вероятность того, что один шар будет белым, а другой – черным.

Решение. Решим эту задачу двумя способами: сначала согласно классическому определению, а затем с помощью теорем сложения и умножения вероятностей.

1. Поскольку порядок выбора шаров роли не играет, имеем дело с сочетаниями. Общее число исходов будет равно числу сочетаний выбора двух шаров из десяти:

$$n = C_{10}^2 = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{2 \cdot 8!} = 45.$$

Так как каждому варианту выбора белого шара (а их $7 = C_7^1$) соответствуют три способа взятия черного шара ($3 = C_3^1$), число благоприятствующих исходов равно

$$m = C_7^1 \cdot C_3^1 = 7 \cdot 3 = 21.$$

Искомая вероятность равна

$$P = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}.$$

2. Обозначим события: A – выбран белый шар ($P(A) = 0{,}7$), B – выбран черный шар ($P(B) = 0{,}3$), C – взяты два шара, из которых один белый и один черный. Тогда

$$C = A \cdot B.$$

Применим формулу (1.15):

$$P(C) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}21.$$

Полученный результат неверен, так допущены две ошибки. Во-первых, события A и B – зависимые, поскольку $P(B|A) = 3/9$ (после выбора первым белого шара в урне осталось 9 шаров, среди которых 3 черных), а $P(B|\bar{A}) = 2/9$ (событие $\bar{A}$ – выбран черный), поэтому следовало применять формулу (1.13): $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A)$. Во-вторых, вторая допущенная ошибка заключается в том, что $C \neq A \cdot B$. Белый и черный шары можно взять двумя способами: сначала белый, а затем черный и, наоборот, первым – черный, а вторым – белый. Следовательно,

$$C = A_1 \cdot B_2 + B_1 \cdot A_2,$$

где A_i – i-м по счету взят белый шар; B_i – i-м по счету взят черный шар ($i = 1,2$). Наконец, верное решение

$$P(C) = P(A_1) \cdot P(B_2|A_1) + P(B_1) \cdot P(A_2|B_1) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{15}.$$

Пример 1.24. Три станции независимо друг от друга передают по одному сообщению. Вероятности приема этих сообщений четвертой станцией равны соответственно 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что будет принято одно сообщение.

Решение. Пусть событие A_i – принято сообщение i-й станции ($i = \overline{1,3}$). Вероятности этих событий известны и равны $P(A_1) = 0{,}7$; $P(A_2) = 0{,}8$; $P(A_3) = 0{,}9$. «Неизвестное» событие – B_1 (принято одно сообщение).

Событие B_1 означает, что принято сообщение только первой станцией (обозначим это событие H_1), или только второй (H_2), или только третьей (H_3), т. е.

$$B_1 = H_1 + H_2 + H_3.$$

Отметим, что составляющие сумму события H_i ($i = \overline{1,3}$) – несовместные. Выразим их через события A_i.

Событие H_1 наступает при появлении трех событий: A_1, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$ (помимо того что принято сообщение первой станции (событие A_1), не должны быть приняты сообщения второй ($\bar{A}_2$) и третьей станций ($\bar{A}_3$)), т. е.

$$H_1 = A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3.$$

Аналогично предыдущему рассуждению получим

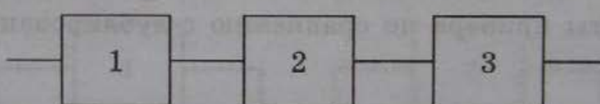
$$H_2 = \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3, \qquad H_3 = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3.$$

Учитывая независимость событий A_i (из условия) по формуле (1.15), получим

$$P(H_1) = P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) = 0,7 \cdot 0,2 \cdot 0,1 = 0,014;$$
$$P(H_2) = P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\bar{A}_3) = 0,3 \cdot 0,8 \cdot 0,1 = 0,024;$$
$$P(H_3) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(A_3) = 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,9 = 0,054;$$
$$P(B_1) = P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 0,092.$$

Пример 1.25. Телевизионный сигнал последовательно передается через три ретрансляционные станции. Вероятность того, сигнал будет передан без искажений каждой станцией, равна 0,9. Найти вероятность того, что сигнал пройдет по линии без искажений.

Решение. Из условия следует, что ретрансляционные станции можно представить на схеме соединенными последовательно:



Обозначим события: A_i – исправная работа i-й станции ($i = \overline{1,3}$), B – сигнал пройдет по линии без искажений. По условию примера $P(A_i) = 0,9$ ($i = \overline{1,3}$).

Чтобы сигнал прошел без искажений, все станции должны отработать без сбоев, поэтому

$$B = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3.$$

Из условия видно, что все события A_i являются независимыми. Следовательно, вероятность произведения событий равна произведению их вероятностей:

$$P(B) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0,9^3 = 0,729.$$

Полученный результат подтверждает вывод: чем больше звеньев в цепи передачи информации при последовательном соединении, тем менее она надежна.

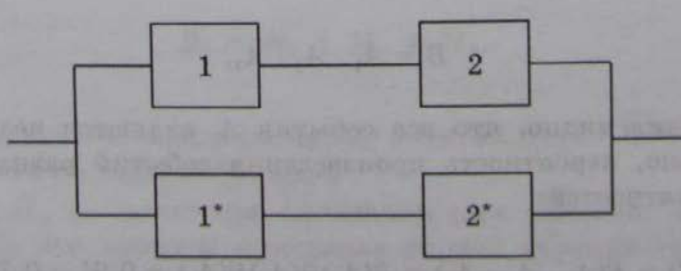
В примерах 1.22 и 1.25 рассмотрены параллельное и последовательное соединения элементов. В случае более сложных схем их разбивают на участки, содержащие только последовательно или только параллельно соединенные элементы, вводят соответствующие вспомогательные события и рассчитывают их вероятности.

Задачи, аналогичные рассмотренным примерам 1.22, 1.25 и 1.26 со схемами, играют важную роль при анализе надежности не только при анализе электрических, но и любых технических систем. Под *надежностью технической системы* подразумевается вероятность ее безотказной работы за определенный период времени t. При составлении схемы прибора блоки, при выходе из строя которых прибор отказывает, составляют последовательно, а взаимно заменяемые (дублирующие) – параллельно.

Пример 1.26. Прибор состоит из двух блоков. Работа каждого блока необходима для работы прибора. Показать, что дублирование каждого блока отдельно в большей степени увеличивает вероятность надежной работы прибора по сравнению с дублированием прибора в целом.

Решение. Так как работа каждого блока необходима для работы прибора, то их следует соединить последовательно. Для упрощения анализа результатов введем численные значения вероятностей исправной работы блоков в течение времени $t (p_1 = 0{,}9,\ p_2 = 0{,}8)$.

1. Дублируем прибор в целом:



Обозначим события: B – исправная работа прибора, приведенного на схеме, в течение времени t; A_i – i-й блок ($i = 1{,}2$) проработает заданное время; $A_{\text{в}}$, $A_{\text{н}}$ – исправная работа двух блоков, изображенных на верхнем и нижнем участках схемы соответственно, и получим формулу

$$A_в = A_1 \cdot A_2.$$

Так как события A_i – независимые, то

$$P(A_в) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}72.$$

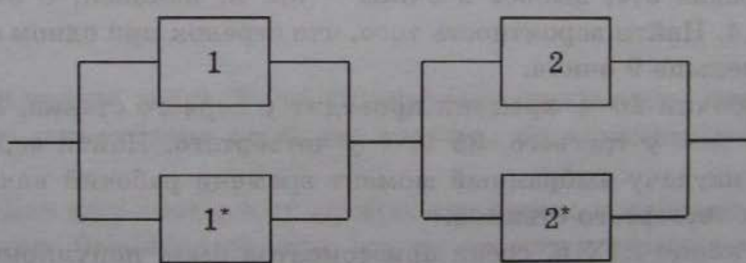
Вероятность $P(A_н)$ также равна 0,72. Прибор отработает заданное время, если хотя бы одна из ветвей схемы будет исправна, т. е.

$$B = A_в + A_н.$$

По теореме сложения вероятностей для совместных событий имеем

$$P(B) = P(A_в) + P(A_н) - P(A_в)P(A_н) = 0{,}72 + 0{,}72 - 0{,}72^2 = 0{,}9216.$$

2. Дублируем работу каждого блока:



Пусть события A_1, A_2, A_1^*, A_2^* – исправная работа элементов, изображенных на схеме; C_1, C_2 – исправная работа первого и второго параллельных участков. Тогда

$$C_1 = A_1 + A_1^*,$$

$$P(C_1) = P(A_1) + P(A_1^*) - P(A_1)P(A_1^*) = 0{,}9 + 0{,}9 - 0{,}9^2 = 0{,}99.$$

Аналогично $P(C_2) = 0{,}8 + 0{,}8 - 0{,}8^2 = 0{,}96$. Так как $B = C_1 \cdot C_2$, то

$$P(B) = P(C_1)P(C_2) = 0{,}99 \cdot 0{,}96 = 0{,}9504.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какие события называются независимыми?
2. Какие события называются зависимыми?
3. В каких случаях вероятность суммы событий равна сумме вероятностей этих событий?
4. Чему равна вероятность суммы двух совместных событий?
5. Чему равна вероятность суммы трех совместных событий?
6. Сформулируйте теорему о вероятности появления хотя бы одного события.
7. Чему равна сумма вероятностей несовместных событий, образующих полную группу?
8. Сформулируйте теорему умножения вероятностей для независимых событий.
9. Дайте определение условной вероятности.
10. Сформулируйте теорему умножения вероятностей для зависимых событий: а) в случае двух событий и б) в случае n событий.

Задачи для самостоятельного решения

1.38. Вероятность того, что стрелок, произведя выстрел, выбьет 10 очков, равна 0,4, выбьет 9 очков – 0,2 и, наконец, 8 очков или меньше – 0,4. Найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет не меньше 9 очков.

1.39. Рабочий 20 % времени проводит у первого станка, 30 % – у второго, 15 % – у третьего, 35 % – у четвертого. Найти вероятность того, что в наудачу выбранный момент времени рабочий находится у второго или четвертого станков.

1.40. В конце XIX в. среди аристократов была популярна экстремальная азартная игра – русская рулетка. Ее участники закладывали в барабан один или несколько патронов. Затем каждый участник, предварительно прокрутив барабан, стрелял в себя. Найти вероятность того, что все три участвующих игрока останутся невредимыми, если в шестизарядный револьвер заложен один патрон.

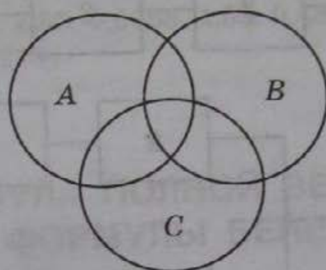
1.41. Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем ящиках соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что деталь содержится хотя бы в одном из ящиков.

1.42. Для сигнализации о пожаре установлены два независимо работающих друг от друга датчика. Вероятность того, что при пожаре датчик среагирует, для первого равна 0,85, для второго – 0,9. Найти вероятность того, что при пожаре сработает только один из двух датчиков.

1.43. Два спортсмена делают по одному броску. Вероятность попадания в корзину для первого из них равна 0,8, для второго – 0,6. Найти вероятность того, что в корзину будет заброшен только один мяч.

1.44. Три электролампочки параллельно подключены в электросеть. При повышении напряжения вероятность выхода из строя для любой лампочки равна 0,6. Найти вероятность того, что при повышении напряжения выйдет из строя только одна из трех лампочек.

1.45. Используя геометрическое определение вероятности, вывести формулу (1.9) для вычисления вероятности суммы трех совместных событий.



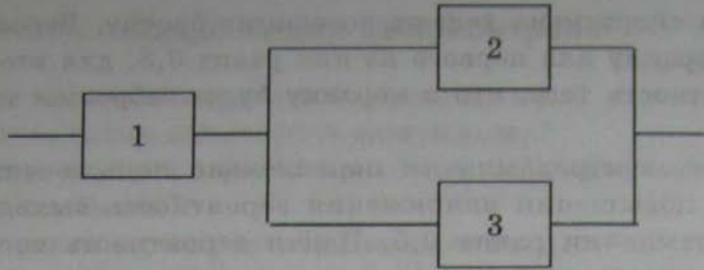
1.46. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает два вопроса, предложенные ему экзаменатором.

1.47. Для загрузки в базу данных ежедневно поступают три пакета информации. Вероятности того, что их придется пересылать повторно из-за сбоев, равны $P_1 = 0{,}05$; $P_2 = 0{,}04$; $P_3 = 0{,}01$. Найти вероятности того, что: 1) все пакеты будут приняты без сбоев; 2) один пакет потребуется переслать повторно.

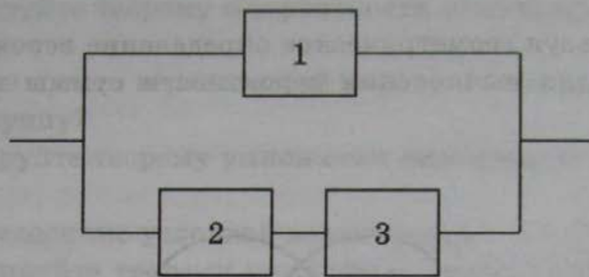
1.48. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,9; третий – 0,8. Найти вероятность того, что студентом будут сданы: а) только 2-й экзамен; б) только один экзамен; в) три экзамена; г) по крайней мере два экзамена; д) хотя бы один экзамен.

1.49–1.53. Вероятности исправной работы элементов, приведенных на схемах, равны $P_1 = 0{,}9$; $P_2 = 0{,}8$; $P_3 = 0{,}7$; $P_4 = 0{,}6$; $P_5 = 0{,}5$. Отказ любого из элементов приводит к прерыванию сигнала в той ветви цепи, где находится элемент. Предполагается, что элементы работают независимо друг от друга. Найти вероятность прохождения сигнала через цепь.

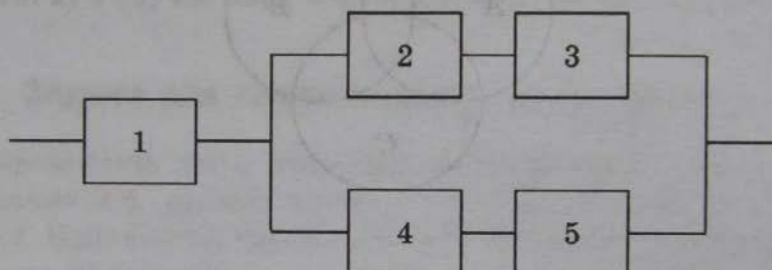
1.49



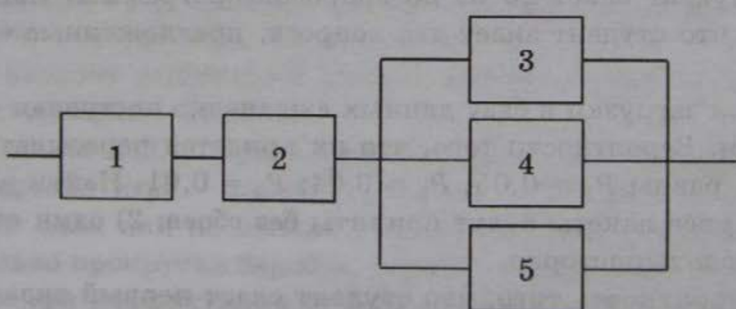
1.50



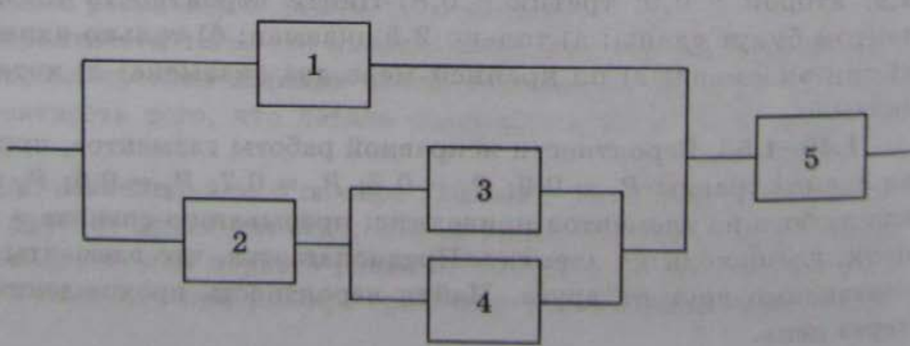
1.51



1.52



1.53



1.54–1.57. Вероятности выхода из строя элементов, приведенных на схемах, равны $P_1 = 0,3$; $P_2 = 0,1$; $P_3 = 0,2$; $P_4 = 0,1$; $P_5 = 0,1$. Отказ любого из элементов приводит к прерыванию сигнала в той ветви цепи, где находится элемент. Предполагается, что элементы работают независимо друг от друга. Найти вероятность того, что сигнал не пройдет через цепь.

1.54. Схема из задачи 1.49.

1.55. Схема из задачи 1.50.

1.56. Схема из задачи 1.51.

1.57. Схема из задачи 1.52.

Ответы. **1.38.** 0,6. **1.39.** 0,65. **1.40.** $(5/6)^3$. **1.41.** 0,976. **1.42.** 0,22. **1.43.** 0,44. **1.44.** 0,288. **1.46.** 19/30. **1.47.** 1) $\approx 0{,}903$; 2) $\approx 0{,}094$. **1.48.** а) 0,018; б) 0,044; в) 0,648; г) 0,954; д) 0,998. **1.49.** 0,846. **1.50.** 0,956. **1.51.** 0,6228. **1.52.** 0,6768. **1.53.** 0,4852. **1.54.** 0,314. **1.55.** 0,084. **1.56.** $\approx 0{,}337$. **1.57.** $\approx 0{,}371$.

1.3. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛЫ БЕЙЕСА

Формула полной вероятности. Пусть событие A может наступить в случае появления одного из нескольких несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу. События H_i часто называют *гипотезами*. Вероятности их наступления $P(H_i)$ и условные вероятности события A $P(A|H_i)$, $i = \overline{1, n}$ известны. *Тогда вероятность события A равна сумме произведений вероятностей событий H_i на условные вероятности события A, вычисленные при условии, что соответствующее событие H_i наступило:*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i). \qquad (1.17)$$

Доказательство. Поскольку событие A может наступить только вместе с одним из несовместных событий H_i, образующих полную группу, то

$$A = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n.$$

Так как $H_1, H_2, \dots, H_n$ – несовместные события, то и события $AH_1, AH_2, \dots, AH_n$ также являются несовместными, поэтому

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cdot H_i).$$

Учитывая, что A и H_i – зависимые события, окончательно получаем

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i).$$

Вероятность события A является средним арифметическим, точнее, средним арифметическим взвешенным условных вероятностей: $P(A|H_i)$. Чем больше вероятность какой-то гипотезы $P(H_i)$, тем больше вклад ее условной вероятности $P(A|H_i)$ в вероятность события A.

Пример 1.27. При передаче сообщений в двоичном коде сигналы «0» и «1» встречаются в соотношении 3:2. Определить вероятность того, что сигнал искажен, если из-за помех искажается в среднем 4 % сигналов «0» и 2 % сигналов «1».

Решение. Пусть событие A состоит в том, что принятый сигнал искажен. Возможно, что передавался сигнал «0». Обозначим эту гипотезу H_1, а гипотезу, состоящую в том, что передавался сигнал «1» – H_2. Из условия примера следует, что из пяти сигналов (общее число исходов) три сигнала благоприятствуют передаче «нуля», а два – единице. Тогда согласно классическому определению вероятности

$$P(H_1) = 3/5 = 0{,}6; \quad P(H_2) = 2/5 = 0{,}4.$$

Вероятность того, что искажен «0», равна 0,04. Чтобы перевести эту фразу в символы теории вероятности, сформулируем ее так: вероятность того, что сигнал искажен (это событие A), если этот сигнал «0», равна 0,04. Отсюда видно, что это условная вероятность события A и $P(A|H_1) = 0{,}04$. Аналогично $P(A|H_2) = 0{,}02$.

Окончательно по формуле полной вероятности имеем

$$P(A) = 0{,}6 \cdot 0{,}04 + 0{,}4 \cdot 0{,}02 = 0{,}032.$$

Полученное значение вероятности лежит между исходными величинами условных вероятностей 0,02 и 0,04, но ближе к последней ввиду ее большего вклада ($P(H_1) = 0{,}6$).

Пример 1.28. В двух ящиках находятся лампы. В первом – 12, из которых одна неисправна, во втором – 10, и тоже одна неисправна. Из первого ящика взята наугад лампа и переложена во второй. Найти вероятность того, что взятая наугад из второго ящика лампа будет неисправна.

Решение. Обозначим события: гипотеза H_1 – взята лампа, которая переложена из первого ящика, гипотеза H_2 – взята лампа, все время лежащая во втором ящике, событие A – взятая наугад лампа неисправна.

Так как в ящике только одна переложенная лампа, а всего их стало 11, то

$$P(H_1) = \frac{1}{11}, \text{ а } P(H_2) = \frac{10}{11}.$$

Поскольку в первом ящике одна неисправная лампа из 12, вероятность выбрать ее равна

$$P(A|H_1) = \frac{1}{12}.$$

Рассуждая таким же образом, получим $P(A|H_2) = \frac{1}{10}$.

По формуле полной вероятности имеем

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = \frac{1}{11}\cdot\frac{1}{12} + \frac{10}{11}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1+12}{11\cdot 12} = \frac{13}{132}.$$

Формулы Бейеса. Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий H_1, $H_2,\ldots,H_n$, образующих полную группу. Их вероятности $P(H_1)$, $P(H_2),\ldots,P(H_n)$ известны до опыта и называются *априорными*. Допустим, что в результате опыта событие A наступило. Как результат опыта повлияет на вероятности гипотез? Получим формулы для расчета условных вероятностей $P(H_k|A)$,

$k=\overline{1,n}$, которые называют *апостериорными* (в переводе с латинского – послеопытными).

Условные вероятности входят в теорему умножения для зависимых событий (формула (1.13)):

$$P(A\cdot H_k)=P(H_k)P(A|H_k)=P(A)P(H_k|A),$$

откуда

$$P(H_k|A)=\frac{P(H_k)P(A|H_k)}{P(A)}.$$

Подставив вместо $P(A)$ правую часть формулы полной вероятности (формула (1.17)), получим формулы Бейеса:

$$P(H_k|A)=\frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A|H_i)},\ k=\overline{1,n}. \qquad (1.18)$$

(В некоторых учебниках выведенные формулы называют иначе: формулы Байеса.)

Рекомендация. Иногда у студентов возникает вопрос: какую формулу использовать при решении задачи? Если известен результат опыта, то ответ однозначен: следует применять одну из формул Бейеса. Это единственные формулы, по которым вычисляются вероятности гипотез после опыта. При этом за событие A принимают событие, которое произошло в результате опыта.

Пример 1.29. Известно, что 5 % мужчин и 0,25 % женщин страдают дальтонизмом. Наугад выбранное лицо оказалось дальтоником. Найти вероятность того, что это мужчина, если считать число женщин и мужчин одинаковым.

Решение. В условии указано, что опыт проведен и наугад выбранное лицо оказалось дальтоником. Значит, используем формулу Бейеса. Событие A – выбран дальтоник, гипотеза H_1 – выбран мужчина, гипотеза H_2 – выбрана женщина. Ввиду равенства числа женщин и мужчин вероятности гипотез одинаковы, т. е.

$$P(H_1)=\frac{1}{2}, \quad P(H_2)=\frac{1}{2}.$$

Условная вероятность $P(A|H_1)$ – это вероятность выбрать дальтоника среди мужчин. По условию она равна $P(A|H_1) = 0{,}05$. Тогда $P(A|H_2) = 0{,}0\ 025$. Подставляя указанные вероятности в формулу Бейеса, получаем

$$P(H_1|A)=\frac{0{,}5\cdot 0{,}05}{0{,}5(0{,}05+0{,}0\ 025)}\approx 0{,}95.$$

Видно, что после опыта вероятность гипотезы H_1 (выбран мужчина) увеличилась с 0,5 до 0,95. Это объяснимо, так как среди дальтоников на одну женщину приходится 20 мужчин.

Пример 1.30. Два стрелка независимо один от другого стреляют по одной мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,8; для второго – 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что эта пробоина принадлежит первому стрелку.

Решение. Пусть событие A – в мишени обнаружена одна пробоина.

До опыта возможны следующие гипотезы: H_1 – никто не попадет в мишень; H_2 – оба стрелка попадут в мишень; H_3 – первый стрелок попадет в мишень, а второй – нет; H_4 – второй стрелок попадет в мишень, а первый нет. Вероятности этих гипотез равны:

$$P(H_1)=0{,}2\cdot 0{,}6=0{,}12; \quad P(H_2)=0{,}8\cdot 0{,}4=0{,}32;$$

$$P(H_3)=0{,}8\cdot 0{,}6=0{,}48; \quad P(H_4)=0{,}2\cdot 0{,}4=0{,}08.$$

Найдем условные вероятности появления события A:

$P(A|H_1) = 0$ – вероятность того, что в мишени обнаружена одна пробоина при условии, что никто не попадет в мишень;

$P(A|H_2) = 0$ – вероятность того, что в мишени обнаружена одна пробоина при условии, что в мишень попадут оба стрелка;

$P(A|H_3) = 1$ – вероятность того, что в мишени обнаружена одна пробоина при условии, что в мишень попадет только первый стрелок;

$P(A|H_4) = 1$ – вероятность того, что в мишени обнаружена одна пробоина при условии, что в мишень попадет только второй стрелок.

После опыта гипотезы H_1 и H_2 становятся невозможными, а вероятность гипотезы H_3 после наступления опыта будет равна:

$$P(H_3|A)=\frac{0,48\cdot 1}{0,48\cdot 1+0,08\cdot 1}=\frac{6}{7}.$$

В этом примере введены все гипотезы, образующие полную группу. При решении задач можно не вводить гипотезы, условные вероятности которых равны нулю.

Вопросы для самоконтроля

1. Какая группа событий называется полной?
2. Чему равна сумма вероятностей полной группы несовместных событий?
3. Приведите формулу полной вероятности.
4. Чему равна сумма вероятностей событий, называемых гипотезами?
5. В каких пределах лежит значение вероятности, найденное по формуле полной вероятности?
6. Если вероятности двух гипотез, образующих полную группу событий, равны, чему равна вероятность, найденная по формуле полной вероятности?
7. Какие вероятности определяются с помощью формул Бейеса?
8. Приведите формулы Бейеса.
9. В каком случае можно обойтись набором гипотез, не образующих полную группу событий?

Задачи для самостоятельного решения

1.58. Имеются два одинаковых ящика с шарами. В первом ящике 2 белых и 2 черных шара, во втором – 4 белых и 6 черных шаров. Из одного выбранного наугад ящика вынули белый шар. Какова вероятность, что этот шар вынули из другого ящика?

1.59. В дисплейном классе имеется 10 персональных компьютеров первого типа и 5 второго. Вероятность того, что за время работы на компьютере первого типа не произойдет сбоя, равна 0,9, а на компьютере второго типа – 0,6. Найти вероятность того, что: а) на случайно выбранном компьютере за время работы не произойдет сбоя; б) компьютер, во время работы на котором не произошло сбоя, – первого типа.

1.60. В группе 10 юношей и 15 девушек. Найти вероятность того, что наугад вызванный студент правильно ответит на вопрос, если вероятность правильного ответа равна 0,9 для девушки и 0,7 для юноши.

1.61. Два оператора производят соответственно 30 и 70 % всех измерений, допуская 5 и 2 % ошибок соответственно. Случайно проведенное измерение оказалось ошибочным. Найти вероятность того, что оно принадлежит первому оператору.

1.62. В ящике находится m транзисторов первой серии и n транзисторов второй серии. Вероятность того, что транзистор первой серии проработает гарантийный срок – p_1, второго – p_2. Найти вероятность того, что взятый наугад транзистор выдержит гарантийный срок.

1.63. Среди 10 приборов равновероятно наличие неисправных приборов в количестве от 0 до 2. Наугад взят один прибор. Найти вероятность того, что он окажется неисправным.

1.64. Среди поступающих на сборку деталей с первого станка 0,2 % бракованных, со второго – 0,4, с третьего – 0,5 %. Производительности станков относятся как 5:3:2 соответственно. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь окажется стандартной.

1.65. По каналу связи передается один из двух возможных сигналов x_1 или x_2, причем первый в 3 раза чаще, чем второй. Из-за наличия помех возможны искажения: вместо передаваемого сигнала x_1 на приемном конце может быть принят сигнал x_2 и наоборот. Свойства канала связи таковы, что сигнал x_1 искажается в 4 % случаев, а сигнал x_2 – в 8 % случаев. Определить вероятность правильного приема сигнала.

1.66. Известно, что 90 % выпускаемых заводом изделий отвечает стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0,8 и нестандартную с вероятностью 0,1. Определить вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенный контроль, отвечает стандарту.

1.67. Прибор может работать в двух режимах: в благоприятном с вероятностью p_1 и неблагоприятном с вероятностью $q_1 = 1 - p_1$. В благоприятном режиме надежность работы прибора равна p_2, в неблагоприятном – p_3. Найти надежность работы: а) прибора и б) устройства, в котором для повышения надежности добавлен второй такой же прибор, начинающий работу в случае выхода из строя первого прибора.

1.68. Прибор состоит из двух узлов; работа каждого узла необходима для работы прибора в целом. Вероятность безотказной работы в течение времени t первого узла равна p_1, второго – p_2. Прибор испытывался в течение времени t, в результате чего обнаружено, что он вышел из строя (отказал). Какова вероятность того, что отказал только первый узел, а второй – исправен.

Ответы: **1.58.** 4/9. **1.59.** а) 0,8; б) 0,75. **1.60.** 0,82. **1.61.** 15/29. **1.62.** $(mp_1 + np_2)/(m + n)$. **1.63.** 0,1. **1.64.** 0,9968. **1.65.** 0,95. **1.66.** 0,986. **1.67.** а) $p_1p_2 + (1 - p_1)p_3$; б) $p_1(2p_2 - p_2^2) + (1 - p_1)(2p_3 - p_3^2)$. **1.68.** $(1 - p_1)p_2$; $:(1 - p_1p_2)$.

1.4. ПОВТОРЕНИЕ ИСПЫТАНИЙ В ОДИНАКОВЫХ УСЛОВИЯХ

На практике встречаются ситуации, когда многократно проводятся испытания в одних и тех же условиях. Исходом их может быть либо появление события A, либо противоположного ему события $\bar{A}$. Если при этом вероятность появления события A в каждом опыте одинакова, то повторение испытаний называется *схемой Бернулли*. При рассмотрении этой темы исключим тривиальные случаи, когда в каждом испытании $P = 0$ и $P = 1$.

1.4.1. Формула Бернулли

Рассмотрим сначала пример, который подведет нас к выводу данной формулы.

Пример 1.31. Стрелок производит три выстрела, вероятность попадания при каждом известна и равна p. Найти вероятность того, что мишень будет поражена: 1) один раз; 2) два раза.

Решение. Обозначим события: событие A_i – попадание при i-м выстреле ($i = \overline{1,3}$), событие B_1 – мишень поражена 1 раз при трех выстрелах, B_2 – 2 раза.

Возможны три исхода наступления события B_1: стрелок попал только первый раз (а значит, второй и третий раз промахнулся, т. е. $A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$), только второй ($\bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3$) или только третий ($\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3$) раз. Тогда

$$B = A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3.$$

Эти исходы – несовместные события. Кроме того, все события A_i – независимые. Обозначив $q = 1 - p$, получим

$$P(B_1) = pqq + qpq + qqp = 3pq^2.$$

Рассуждая аналогично для события B_2, находим, что

$$P(B_2) = ppq + qpp + pqp = 3p^2q.$$

Из полученных выражений для вероятностей видно, что все слагаемые одинаковы. Кроме того, степень p равна числу появлений события, а сумма степеней при p и q – числу проведенных опытов. Естественно предположить, что обнаруженные закономерности будут справедливы и в общем случае. Кроме того, поскольку при большом числе опытов перебор всех вариантов становится громоздким, необходимо найти формулу для вычисления числа вариантов.

Пусть произведено n испытаний, в каждом из которых событие наступает с вероятностью p и не наступает с вероятностью $q = 1 - p$. Выведем формулу для вычисления вероятности $P_n(m)$ того, что событие наступит m раз.

Рассмотрим один вариант, когда событие наступит первые m раз. Через события A_i его можно представить в виде

$$A_1 \cdot A_2 \ldots A_m \cdot \overline{A_{m+1}} \cdot \overline{A_{m+2}} \ldots \overline{A_n}.$$

Вероятность этого события равна $p^m \cdot q^{n-m}$. Определим число таких вариантов. Если посмотреть на индексы у событий A_i, то мы выберем m чисел из n возможных, причем порядок выбора роли не играет, поэтому таких вариантов будет столько, сколько можно составить сочетаний выбора m чисел из n:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Тогда

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}. \tag{1.19}$$

Формула (1.19) называется формулой Бернулли.

Иногда данную формулу называют *формулой биномиального распределения*, поскольку бином Ньютона можно записать в виде

$$(p+q)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}.$$

Рекомендация. При решении задач на повторение испытаний можно не вводить обозначения событий, но, внимательно изучив условие, надо правильно выбрать значения для p и q (см. пример 1.32).

Пример 1.32. Вероятность потери одного вызова на АТС равна 0,1. Найти вероятность того, что из пяти вызовов закончатся разговором: 1) три; 2) не менее четырех.

Решение. Поскольку вероятность потери одного вызова постоянна во всех пяти опытах, испытания проводятся по схеме Бернулли. Так как по условию примера надо найти вероятность того, что несколько раз произойдет событие A – вызов окончится разговором, то значение $p = 0,9$ и $q = 0,1$, а не наоборот. Тогда по формуле Бернулли получим

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!}(0,9)^3 \cdot (0,1)^2 = 0,0729 .$$

Не менее четырех означает, что произойдет четыре события (в данном случае 4 или 5) и более, поэтому

$$P_5(m \geq 4) = P_5(4) + P_5(5) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 + C_5^5 \cdot p^5 = 0,919 .$$

Пример 1.33. Мини-АТС обслуживает восемь абонентов. Каждый из них занимает соединительную линию с городской телефонной сетью в среднем 12 мин в час. Определить необходимое число линий для практически безотказного обслуживания абонентов.

Решение. Испытанием является проверка, говорит ли данный абонент в случайно выбранный момент времени (событие A). Вероятность этого события равна $p = 12/60 = 0,2$. Тогда $q = 0,8$. Проверка повторяется восемь раз. Для ответа на поставленный в примере вопрос по формуле Бернулли вычислим вероятности всех исходов испытаний. Вероятность того, что никто из абонентов не занимает соединительную линию, равна

$$P_8(0) = q^8 = 0,8^8 \approx 0,168.$$

Вероятность того, что разговаривает один абонент, равна

$$P_8(1) = C_8^{\,1} p^1 q^7 = 8 \cdot 0,2 \cdot 0,8^7 \approx 0,336.$$

Тогда

$$P_8(2) = C_8^{\,2} p^2 q^6 = \frac{8!}{2!6!} 0,2^2 \cdot 0,8^6 \approx 0,294;$$

$$P_8(3) \approx 0{,}147; \quad P_8(4) \approx 0{,}046;$$

$$P_8(5) + P_8(6) + P_8(7) + P_8(8) \approx 0{,}009.$$

Из расчетов следует, что достаточно иметь четыре линии связи. При этом в среднем только для одного из 100 вызовов не найдется свободной линии.

1.4.2. Локальная теорема Лапласа (Муавра–Лапласа)

В случаях если число испытаний n велико, формула Бернулли становится непригодной из-за сложности вычислений. Тогда используют приближенные формулы.

Если в каждом испытании вероятность наступления события постоянна и равна p, то вероятность наступления события k раз в n испытаниях приближенно определяется по формуле

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \qquad (1.20)$$

где $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ – табулированная функция (прилож. 1).

Так как $\varphi(x)$ – четная функция, то в приложении приведены ее значения только для $x > 0$.

Доказательство локальной теоремы Лапласа довольно громоздко, поэтому мы его опускаем.

Пример 1.34. В среднем 90 % студентов первого курса продолжают дальнейшее обучение в вузе. Какова вероятность того, что из 800 студентов первого курса перейдут на второй курс 720 человек?

Решение. Вероятность перейти на второй курс для студента равна $p = 0{,}9$. Проведено $n = 800$ испытаний.

По локальной теореме Лапласа, если $n = 800$, $m = 720$, $p = 0,9$, $q = 0,1$, имеем

$$P_{800}(720) = \frac{1}{\sqrt{800 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \varphi\left(\frac{720 - 800 \cdot 0,9}{\sqrt{800 \cdot 0,9 \cdot 0,1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{72}} \varphi(0) \approx 0,1179 \cdot 0,3989 \approx 0,047 .$$

Замечание. Эта формула является асимптотической, т. е. точность вычисления по ней тем выше, чем больше n. Однако она дает большую погрешность при малых значениях p. Общепринято при $n \cdot p < 10$ использовать формулу Пуассона.

1.4.3. Формула Пуассона

Пусть $n \to \infty$ так, что $\lambda = n \cdot p = \text{const}$, тогда $p = \frac{\lambda}{n}$. Подставим выражение для вероятности в формулу Бернулли $P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$:

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} = \frac{n(n-1)\cdot(n-2)\ldots(n-m+1)}{m!} \cdot \frac{\lambda^m}{n^m} \times$$

$$\times \left(1 + \left(-\frac{\lambda}{n}\right)\right)^n \cdot \left(1 + \left(-\frac{\lambda}{n}\right)\right)^{-m} .$$

Перейдя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^m}{m!} \cdot \frac{n(n-1)\cdot(n-2)\ldots(n-m+1)}{n^m} \cdot \left[\left(1 + \left(-\frac{\lambda}{n}\right)\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right]^{-\lambda} = \Big| \text{ известно:}$$

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \Big| = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot (1 - \frac{1}{n}) \cdot (1 - \frac{2}{n}) \ldots (1 - \frac{m-1}{n})}{1} = \frac{\lambda^n}{m!} e^{-\lambda}$$

Отсюда получаем формулу Пуассона

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}. \qquad (1.21)$$

Пример 1.35. С базы в магазин отправлено 2000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что изделие повредится в пути, равна 0,001. Найти вероятность того, что в магазин прибудут три испорченных изделия.

Решение. Испытания, рассматриваемые в задаче, удовлетворяют схеме Бернулли. Так как n достаточно велико, вероятность повреждения мала и $\lambda = np = 2 < 10$, то для вычисления $P_{2000}(3)$ можно воспользоваться формулой Пуассона:

$$P_{2000}(3) \approx \frac{2^3}{3!} e^{-2} \approx 0,18.$$

1.4.4. Интегральная теорема Лапласа

Если в каждом испытании вероятность наступления события постоянна и равна p, то вероятность наступления события в n испытаниях от k_1 до k_2 раз определяется по формуле

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (1.22)$$

где $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$; $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$; $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$; $\Phi(x)$ – функция Лапласа. (Ее значения приведены в прилож. 2. В таблице нет значений больше 5, при $x > 5$ $\Phi(x) = 0,5$.)

Интегральную теорему Лапласа также приводим без доказательства.

Рекомендация. В некоторых учебниках функция Лапласа может вводиться иначе, поэтому, прежде чем использовать табличное значение $\Phi(x)$, проверьте формулу ее задания.

Докажем, что функция Лапласа нечетная: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

$$\Phi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \left| \begin{array}{l} z = -y \\ dz = -dy \\ y_{\text{н}} = 0 \\ y_{\text{в}} = x \end{array} \right| = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = -\Phi(x).$$

Пример 1.36. Из партии, нестандартные изделия в которой составляют 20 %, отобрано 400 единиц. Определить вероятность того, что среди отобранных окажется от 60 до 90 нестандартных изделий.

Р е ш е н и е. По условию $p = 0{,}2$; $q = 0{,}8$; $n = 400$; $k_1 = 6$; $k_2 = 90$. Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$$x_1 = \frac{60 - 0{,}2 \cdot 400}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = \frac{-20}{8} = -2{,}5$$

и

$$x_2 = \frac{90 - 80}{8} = 1{,}25.$$

Тогда $P_{400}(60 \le k \le 90) \approx \Phi(1{,}25) - \Phi(-2{,}5) = \Phi(1{,}25) + \Phi(2{,}5) \approx 0{,}3944 + 0{,}4938 = 0{,}8882$.

1.4.5. Простейший поток событий

Потоком событий называют последовательность событий, которые наступают в случайные моменты времени, например поступление вызовов на АТС, последовательность отказов элементов и т. п. Среди большого разнообразия потоков событий выделяют простейший поток событий, который обладает следующими свойствами:

- стационарности, т. е. вероятность появления k событий за промежуток времени $(T, T + t)$ есть функция, зависящая только от t и k;
- отсутствие последействия, т. е. для любых непересекающихся промежутков времени число событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий попало на другой промежуток;

• ординарности, т. е. за бесконечно малый промежуток времени может появиться не более одного события.

Интенсивностью потока λ называют среднее число событий, которые появляются в единицу времени.

Для простейшего потока вероятность появления k событий за время t определяется формулой Пуассона:

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!}, \tag{1.23}$$

где $\lambda = np$ – интенсивность потока.

Пример 1.37. АТС получает в среднем пять вызовов за 1 мин. Найти вероятность того, что за 2 мин поступит 8 вызовов.

Решение. Считая поток вызовов простейшим, по формуле (1.23) получим

$$P_2(8) = \frac{10^8 \cdot e^{-10}}{8!} \approx 0{,}11.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что понимается под схемой Бернулли?
2. По какой формуле рассчитывается число сочетаний?
3. Приведите формулу Бернулли.
4. В каких случаях используется локальная теорема Лапласа?
5. Приведите формулы расчета вероятности с помощью локальной теоремы Лапласа.
6. При каком условии используется формула Пуассона? Приведите ее.
7. Когда применяется интегральная теорема Лапласа?
8. Приведите формулы расчета вероятности с помощью интегральной теоремы Лапласа.
9. Приведите формулу, задающую функцию Лапласа.
10. Что называется потоком событий?
11. Какими свойствами обладает простейший поток событий?
12. Приведите формулу, определяющую для простейшего потока вероятность появления k событий за время t.

Задачи для самостоятельного решения

1.69. Вероятность приема радиосигнала при каждой передаче равна 0,6. Найти вероятность того, что при трехкратной передаче сигнал будет принят не менее 2 раз.

1.70. Имеется пять станций, с которыми поддерживают связь. Вероятность отсутствия связи с каждой их них равна 0,2. Найти вероятность того, что в данный момент времени имеется связь не более чем с двумя станциями.

1.71. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 0,1. Найти вероятность того, что сообщение из четырех знаков: а) не будет искажено; б) содержит два искажения.

1.72. Из партии берут на проверку пять телефонных аппаратов. Доля бракованных аппаратов во всей партии составляет 20 %. Найти вероятность того, что четыре аппарата окажутся исправными.

1.73. В тесте по математике 18 примеров. Каждому примеру предлагается пять ответов, из которых только один правильный. Найти вероятность того, что абитуриент, не знающий ни одного правильного ответа и выбирающий наугад, не угадает ни одного ответа.

1.74. Прорастание семян составляет 80 %. Найти вероятность того, что из 400 посеянных семян взойдут 300 семян.

1.75. Устройство состоит из 2000 независимо работающих элементов. Вероятность отказа одного элемента в течение года равна 0,0005. Найти вероятность отказа в течение года двух элементов.

1.76. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена от 76 до 84 раз.

1.77. Вероятность того, что деталь бракованная, равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 400 отобранных деталей бракованных окажется от 70 до 100.

1.78. Вероятность отклонений от принятого стандарта при штамповке клемм равна 0,02. Найти вероятность наличия в партии из 200 клемм от 4 до 8 клемм, не соответствующих стандарту.

1.79. Среднее число машин, прибывающих в автопарк за 1 мин, равно двум. Найти вероятность того, что за 5 мин прибудет не менее двух машин, если поток прибытия машин простейший.

1.80. На узел связи поступает в среднем 120 сообщений в час. Полагая, что поток сообщений простейший, найти вероятность того, что в течение минуты поступит: а) не более одного сообщения; б) ровно три сообщения.

1.81. Известно, что в среднем 10 % людей, бронирующих туристические путевки, отказываются от брони. Зная это, менеджер туристического агентства на 200 путевок выдал бронь 210 желающим. Найти вероятность того, что все приехавшие в агентство, получат путевки.

Ответы: **1.69.** 0,648. **1.70.** 0,05792. **1.71.** а) 0,6561; б) 0,0486. **1.72.** 0,4096. **1.73.** ≈ 0,018. **1.74.** 0,0022. **1.75.** ≈ 0,184. **1.76.** 0,6826. **1.77.** 0,8882. **1.78.** 0,4783. **1.79.** ≈ 0,9995. **1.80.** а) ≈ 0,406; б) ≈ 0,1804. **1.81.** 0,9943.

Задачи для повторения

1. В урне три белых и пять черных шаров. Из урны вынимают наудачу два шара. Найти вероятность того, что шары разного цвета.

2. На шести одинаковых карточках записаны числа: 2, 4, 7, 8, 11, 12. Наугад берут две карточки. Найти вероятность того, что образованная из двух полученных чисел дробь – сократимая.

3. Вероятность выигрыша по одному билету лотереи равна 0,1. Какова вероятность того, что лицо, имеющее шесть билетов, выиграет.

4. На АТС поступают вызовы со средней плотностью 30 вызовов в час. Считая, что этот процесс описывается распределением Пуассона, найти вероятность того, что за 2 мин поступит ровно три вызова.

5. По самолету производится четыре выстрела. Вероятность попадания при каждом равна 0,3. Для поражения самолета достаточно двух попаданий, а при одном попадании он выходит из строя с $p = 0,6$. Найти вероятность того, что самолет выйдет из строя.

6. Три радиостанции независимо друг от друга передают по одному сообщению. Вероятности приема этих сообщений четвертой станцией равны 0,9; 0,7; 0,8 соответственно. Найти вероятность того, что будет принято: а) хотя бы одно сообщение; б) только одно сообщение.

7. В двух коробках имеются однотипные конденсаторы. В первой коробке 20 конденсаторов, из них два неисправных, во второй – 30, из них пять. Найти вероятность того, что взятый наугад конденсатор из случайно выбранной коробки: а) годен к использованию; б) при проверке конденсатор оказался годным. Из какой коробки он вероятнее всего взят?

8. Вероятность успешной сдачи студентом каждого из четырех экзаменов равна 0,5. Найти вероятность успешной сдачи: а) трех экзаменов; б) не менее двух экзаменов.

9. Оптовая база обслуживает пять магазинов. Вероятность получения заявки базой на данный день из каждого магазина равна 0,6. Найти вероятность того, что в этот день будет: а) пять заявок; б) не менее четырех заявок.

10. Абонент забыл последнюю цифру номера. Определить вероятность того, что для попадания по нужному номеру потребуется не более трех попыток.

11. Вероятность того, что студент сдаст тест, равна 0,6. На сдачу теста предоставляются три попытки. Найти вероятность того, что тест будет сдан.

12. На последней секунде баскетбольного матча команда, проигрывавшая одно очко, заработала право на два штрафных броска. Вероятность попадания при каждом броске равна 0,8. Найти вероятность того, что: а) команда выиграет; б) сведет основное время игры вничью.

13. У каждого из двух дуэлянтов по два патрона. Они стреляют поочередно до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Найти вероятность, что победит: а) первый стрелок; б) второй.

14. Во взводе 20 стрелков, из которых 15 хороших и 5 слабых. Вероятности попадания в мишень при одном выстреле для хорошего и слабого стрелков равны соответственно 0,9 и 0,6. Наудачу вызванный стрелок, сделав два выстрела, попал один раз. К какой категории стрелков вероятнее всего принадлежит вызванный стрелок?

15. При одном цикле обзора радиолокационной станции, следящей за объектом, объект обнаруживается с вероятностью 0,75. Обнаружение объекта при каждом цикле происходит независимо от результатов других циклов обзора. Какова вероятность того, что в результате четырех циклов объект будет обнаружен 3 раза?

16. Есть четыре кубика с цифрами на гранях: 1, 2, ..., 6 и одна правильная пирамида с цифрами на гранях: 1, 2, 3, 4. Наугад выбрали предмет и бросили, выпала цифра 4. Найти вероятность того, что взяли кубик.

17. Радиолокационная станция ведет наблюдения за объектом, который может применять или не применять помехи. Если объект не применяет помехи, то он обнаруживается радиолокационной станцией с вероятностью 0,9; если применяет помехи, то с вероятностью 0,6. Известно, что объект применяет помехи в 70 % случаев работы. Найти вероятность обнаружения объекта радиолокационной станцией.

18. Вероятность появления хотя бы одного события в четырех опытах равна 0,9984. Найти вероятность наступления события в одном опыте, если эта вероятность одинакова в каждом опыте.

19. Что вероятнее: выиграть у одинакового по силе игрока три партии из шести или две из четырех? Ничьи в расчет не принимаются.

20. Выпускник разослал свое резюме в 20 фирм. Найти вероятность того, что он получит хотя бы один ответ, если вероятность получить ответ от любой фирмы равна 0,1.

21. Трем друзьям посланы SMS с предложением встретиться. Вероятность того, что первый ответит положительно, равна 0,8, второй – 0,6, третий – 0,4. Найти вероятность того, что двое из троих друзей пришлют положительные ответы.

Глава 2

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Случайной называют величину, принимающую в результате опыта единственное значение, заранее неизвестное и зависящее от случайных причин.

Случайные величины обычно обозначаются заглавными латинскими буквами с конца алфавита X, Y, Z, а их значения – строчными буквами x, y, z.

Любое измерение, проводимое, например, в процессе лабораторной работы, является определением значения случайной величины. Случайные величины являются количественной характеристикой результата опыта, тогда как случайные события – его качественной характеристикой.

Среди случайных величин выделяют два вида – дискретные (прерывные) и непрерывные случайные величины.

Дискретной называется такая случайная величина, которая принимает значения, изолированные друг от друга.

Число возможных значений может быть как конечным, так и бесконечным. В последнем случае говорят, что случайная величина принимает счетное множество значений (множество, все значения которого можно пронумеровать). Примером дискретной случайной величины является оценка, полученная студентом на экзамене.

Случайная величина называется *непрерывной*, если она может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Очевидно, что число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно. В качестве примера непрерывной случайной величины можно привести дальность полета снаряда.

2.1. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

2.1.1. Закон распределения дискретной случайной величины

Для описания случайных величин необходимо кроме знания всех ее возможных значений указывать и вероятности, с которыми появляются эти значения.

Законом распределения случайной величины называют соотношение между возможными значениями случайной величины и их вероятностями.

Это определение является общим и для дискретных, и для непрерывных случайных величин. Существуют три способа задания закона для дискретных случайных величин: табличный в виде ряда распределения, графический в виде многоугольника распределения и аналитический в виде функции распределения.

Рассмотрим представление дискретной случайной величины в виде ряда распределения.

Пусть X – дискретная случайная величина, которая может принимать значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_n$ соответственно. Обозначим A_i событие, состоящее в том, что случайная величина X приняла значение x_i ($i = \overline{1, n}$). В результате опыта наступит какое-то из событий A_i. Эти события несовместны, образуют полную группу, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} p(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 . \qquad (2.1)$$

Равенство (2.1) называется *условием нормировки* для дискретной случайной величины.

Под *рядом распределения* понимают таблицу, в первой строке которой записываются все возможные значения дискретной случайной величины в порядке возрастания, а во второй – соответствующие им вероятности.

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

$$x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_n; \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 .$$

Если в системе декартовых координат xOy нанести точки $(x_i,\ p_i)$ и соединить их в порядке возрастания x_i отрезками прямых, то полученная фигура даст графическое представление дискретной случайной величины. Она называется многоугольником распределения (рис. 2.1).

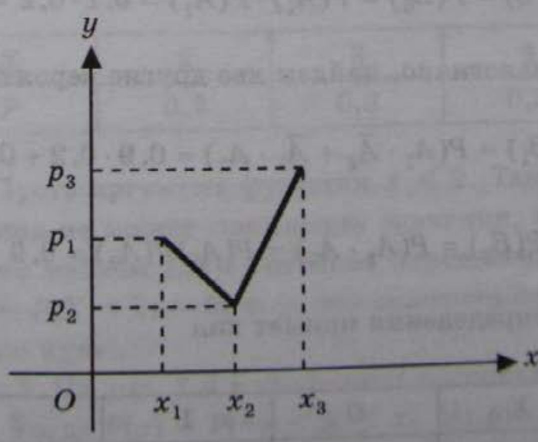


Рис. 2.1

Аналитически дискретную случайную величину можно представить с помощью функции распределения вероятностей, которая будет рассмотрена ниже (п. 2.1.2).

Пример 2.1. Пусть событие C может появиться в одном испытании с вероятностью p. Составить закон распределения для случайной величины X – числа появлений события C в одном испытании.

Решение. Если событие не наступит (его вероятность равна $1-p$), то $X=0$. Если же событие наступит (его вероятность равна p), то $X=1$. Подставив эти два возможных значения X и соответствующие вероятности в таблицу, получим искомый ряд распределения:

X	0	1
P	$1-p$	p

Пример 2.2. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,9, для второго – 0,8. Составить закон распределения для случайной величины X – числа попаданий в мишень, если каждый стрелок стреляет по одному разу.

Решение. После двух выстрелов в мишени может быть 0, 1 или 2 пробоины. Значит, случайная величина X принимает значения 0, 1 или 2. Для расчета вероятностей введем события: A_i – в мишень попал i-й стрелок ($i = 1,2$), B_k – число попаданий в мишень, $k=\overline{0,2}$.

Событие B_0 (в мишени нет пробоин) наступит, если промахнутся оба стрелка. Тогда $B_0 = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2$ и в силу независимости событий A_i:

$$P(X=0)=P(B_0)=P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2)=0,1\cdot 0,2=0,02.$$

Рассуждая аналогично, найдем две другие вероятности:

$$P(X=1)=P(B_1)=P(A_1\cdot\bar{A}_2+\bar{A}_1\cdot A_2)=0,9\cdot 0,2+0,1\cdot 0,8=0,26;$$

$$P(X=2)=P(B_2)=P(A_1\cdot A_2)=P(A_1)P(A_2)=0,9\cdot 0,8=0,72.$$

Тогда ряд распределения примет вид

X	0	1	2
P	0,02	0,26	0,72

Рекомендация. Согласно условию нормировки (2.1) сумма всех вероятностей должна быть равна 1, поэтому для проверки правильности расчета вероятностей целесообразно вычислить их сумму. Если она не равна 1, то ряд распределения составлен неверно.

2.1.2. Функция распределения случайной величины

Функцией распределения случайной величины называется функция $F(x)$, которая для любого действительного числа x равна вероятности того, что случайная величина примет значение, меньшее значения аргумента функции x:

$$F(x) = P(X < x). \tag{2.2}$$

Если представить случайную величину как случайную точку, принимающую некоторые значения на числовой оси, то функция распределения равна вероятности того, что случайная точка окажется левее точки x, т. е. попадет в интервал $(-\infty, x)$.

В отличие от ряда распределения функция распределения является более универсальной формой представления закона распределения, так как она применима как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин.

Пример 2.3. Составить функцию распределения $F(x)$ для случайной величины X, заданной рядом распределения:

X	2	3	4
P	0,2	0,3	0,5

Решение. Пусть аргумент функции $x < 2$. Так как по условию случайная величина не может принимать значения, меньшие двух, то $F(x) = 0$. Отдельно найдем $F(2)$. Согласно определению функции распределения $F(2) = P(X < 2) = 0$, т. е. это значение функции распределения также равно нулю.

Пусть $2 < x < 3$. На рис. 2.2 в указанном интервале выбрана произвольная точка x. Тогда $F(x) = P(-\infty < X < x)$. Из рис. 2.2 видно, что в этот интервал попадает только одно значение случайной величины $X = 2$

с вероятностью $p = 0,2$, поэтому $F(x) = 0,2$. Еще раз отдельно найдем значение функции в правой точке рассматриваемого интервала ($x = 3$). По определению $F(3) = P(X < 3) = 0,2$. Исходя из значений $F(2)$ и $F(3)$ видно, что правую границу интервала можно включать в рассматриваемый промежуток.

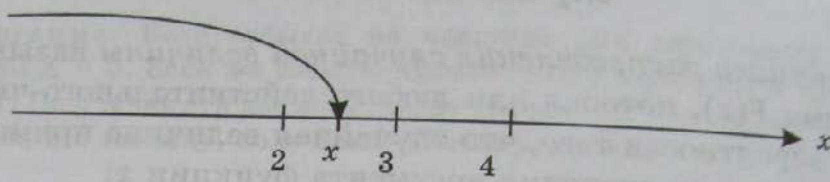


Рис. 2.2

Пусть $3 < x \leq 4$. Из рис. 2.3 видно, что в рассматриваемый интервал попадают два значения, которые может принять случайная величина. События, что случайная величина приняла значения 2 и 3, являются несовместными, поэтому

$$F(x) = P(-\infty < X < x) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0,5.$$

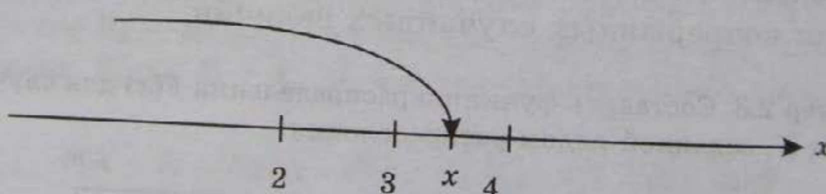


Рис. 2.3

Наконец, если аргумент функции $x > 4$, то вероятность попасть в интервал $(-\infty;\ x)$ равна 1, так как указанный интервал включает все возможные значения случайной величины. Тогда $F(x) = 1$. Можно было рассуждать иначе. В этот интервал попадают три точки, когда $X = 2$, $X = 3$ и $X = 4$ с вероятностями 0,2; 0,3 и 0,5. Отсюда

$$F(x) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 1.$$

Теперь можем записать выражение для функции распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ 0,2, & 2 < x \le 3, \\ 0,5, & 3 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Для любой дискретной случайной величины график $F(x)$ представляет собой «лесенку»:

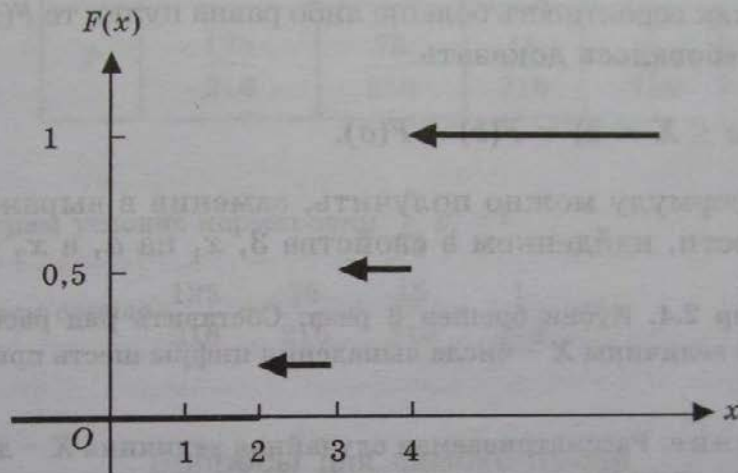


Рис. 2.4

Изучим свойства функции распределения.

1. Предельные: $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $F(+\infty) = P(-\infty < X <$ $< +\infty) = 1$.

2. Так как значения $F(x)$ являются вероятностями, то область изменения этой функции ограничена отрезком от 0 до 1, т. е.

$$0 \le F(x) \le 1 .$$

3. $F(x)$ – неубывающая функция, т. е. при $x_2 > x_1$, $F(x_2) \ge F(x_1)$. Это можно увидеть, например, на рис. 2.4. Докажем это. По определению

$$F(x_2) = P(-\infty < X < x_2).$$

Промежуток $(-\infty;\ x_2)$ разбиваем на две части: $(-\infty;\ x_1)$ и $[x_1;\ x_2)$.

Попадание в них случайной величины – несовместные события, поэтому

$$F(x_2) = P(-\infty < X < x_1) + P(x_1 \le X < x_2) = F(x_1) + P(x_1 \le X < x_2).$$

Отсюда

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Так как вероятность больше либо равна нулю, то $F(x_2) \ge F(x_1)$, что и требовалось доказать.

4. $P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$ (2.3)

Эту формулу можно получить, заменив в выражении для вероятности, найденном в свойстве 3, x_1 на a, а x_2 – на b.

Пример 2.4. Кубик брошен 3 раза. Составить ряд распределения случайной величины X – числа выпадения цифры шесть при трех бросках.

Решение. Рассматриваемая случайная величина X – дискретная, так как она принимает в результате опыта отдельные, изолированные друг от друга значения. При трех бросках кубика цифра 6 минимально может появиться 0 раз, а максимально – 3 раза. Тогда можно заполнить верхнюю строку ряда распределения числами 0, 1, 2, 3.

Для заполнения нижней строки ряда распределения найдем вероятности принятия случайной величиной X возможных значений $\{0, 1, 2, 3\}$, или, что то же самое, вероятности наступления событий A_i – при трех бросках кубика цифра 6 появилась i раз ($i = \overline{0,3}$).

Поскольку вероятность выпадения цифры 6 одинакова при всех бросках ($p = 1/6$), воспользуемся формулой Бернулли:

$$P_3(0) = C_3^0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216};$$

$$P_3(1) = C_3^1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216};$$

$$P_3(2) = C_3^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{15}{216};$$

$$P_3(3) = C_3^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{216}.$$

Таким образом, ряд распределения можно записать следующим образом:

X	0	1	2	3
P	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

Проверим условие нормировки $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

В нашем случае $\frac{125}{216} + \frac{75}{216} + \frac{15}{216} + \frac{1}{216} = 1$.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется случайной величиной?

2. Как обозначаются случайные величины и их возможные значения?

3. Что называется дискретной случайной величиной?

4. Может ли дискретная случайная величина иметь бесконечное число значений?

5. Что называется непрерывной случайной величиной?

6. Дайте определение закона распределения случайной величины.

7. Укажите способы задания закона распределения для дискретных случайных величин. Приведите примеры.

8. Что такое ряд распределения?

9. Приведите условие нормировки для дискретной случайной величины.

10. Дайте определение функции распределения случайной величины.

11. Что представляет собой график функции распределения дискретной случайной величины?

12. Укажите область изменения функции распределения случайной величины.

13. Является ли функция распределения случайной величины возрастающей?

14. Запишите формулу для нахождения вероятности попадания случайной величины на промежуток $[a, b)$.

2.1.3. Числовые характеристики дискретных случайных величин

Закон распределения полностью описывает рассматриваемую случайную величину. Однако для многих задач практики достаточно знать только несколько чисел, характеризующих данную случайную величину.

Основными числовыми характеристиками случайной величины являются математическое ожидание $M(X)$, дисперсия $D(X)$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$. Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины, две оставшиеся числовые характеристики – разброс возможных значений случайной величины относительно среднего.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется число, равное сумме произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i \,. \tag{2.4}$$

Если $n = \infty$, то формула (2.4) представляет собой числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_i$, который может сходиться или расходиться. В последнем случае говорят, что случайная величина не имеет математического ожидания.

Подчеркнем, что математическое ожидание является неслучайной величиной. Это число, характеризующее случайную величину. Выясним вероятностный смысл математического ожидания.

Пусть производится n опытов, в которых значение случайной величины x_1 появилось m_1 раз, x_2 – m_2 раз,...,x_k появилось m_k раз:

$$\sum_{i=1}^{k} m_i = n .$$

Вычислим среднее арифметическое появившихся значений случайной величины:

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_k x_k}{n} = \frac{m_1}{n} x_1 + \frac{m_2}{n} x_2 + \ldots + \frac{m_k}{n} x_k =$$
$$= W_1 x_1 + W_2 x_2 + \ldots + W_k x_k,$$

где W_i – i-я относительная частота ($i = \overline{1, k}$). Согласно статистическому определению вероятности при $n \to \infty$ $W_i \to p_i$:

$$\bar{x} \approx p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_k x_k = M(X).$$

Полученный результат означает, что математическое ожидание есть среднее арифметическое значений случайной величины X, наблюдающихся при большом числе опытов.

Пример 2.5. При подгонке деталей возможно от одной до пяти проб. Вероятность того, что для подгонки детали потребуется одна проба, равна 0,07, две – 0,16, три – 0,55, четыре – 0,21 и пять – 0,01. Найти среднее значение числа проб для правильной оценки производительности сборщика.

Решение. Составим ряд распределения для случайной величины X – числа проб:

X	1	2	3	4	5
P	0,07	0,16	0,55	0,21	0,01

Среднее число проб приближенно равно математическому ожиданию $M(X)$. По формуле (2.4) получим

$$\bar{x} \approx M(X) = 1 \cdot 0,07 + 2 \cdot 0,16 + 3 \cdot 0,55 + 4 \cdot 0,21 + 5 \cdot 0,01 = 2,93 .$$

Пример 2.6. Найти математическое ожидание числа появлений события в одном испытании.

Решение. В примере 2.1 уже был составлен ряд распределения:

X	0	1
P	$1 - p$	p

$$M(X) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p.$$

Таким образом, математическое ожидание числа появлений события в одном испытании равно вероятности появления события в одном испытании.

Математическое ожидание имеет следующие свойства:

1) математическое ожидание константы равно самой константе:

$$M(c) = c;$$

2) постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания:

$$M(cX) = cM(X);$$

3) только для независимых случайных величин X и Y математическое ожидание произведения равно произведению математических ожиданий:

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y).$$

Определение независимости случайных величин можно дать на основании определения независимых событий. *Две случайные величины* называются *независимыми*, если закон распределения одной из них не зависит от того, какое значение приняла другая случайная величина;

4) математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

Из свойств 2) и 4) следует формула

$$M\left[\sum_{i=1}^{k}(c_i \cdot x_i)\right] = \sum_{i=1}^{k} c_i M(x_i).$$

Отклонением называется разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием: $X - M(X)$;

5) математическое ожидание отклонения равно нулю, т. е.

$$M(X - M(X)) = 0.$$

Докажем свойства математического ожидания.

1. Считая константу случайной величиной, появляющейся с вероятностью, равной единице, составим ряд распределения:

X	c
P	1

Тогда по формуле (2.4) имеем

$$M(c) = c \cdot 1 = c.$$

2. Запишем ряды распределения для случайных величин X и cX:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

cX	cx_1	cx_2	...	cx_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Тогда $M(cX) = \sum_{i=1}^{n}(c \cdot x_i) \cdot p_i = c\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = cM(X)$.

3. Используя ряды распределения для случайных величин X и Y, составим ряд распределения для $X \cdot Y$:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Y	y_1	y_2	...	y_m
P	p'_1	p'_2	...	p'_m

XY	x_1y_1	x_1y_2	...	x_1y_m	x_2y_1	x_2y_2	...	x_2y_m	...	x_ny_m
P	p_1p_1'	p_1p_2'	...	p_1p_m'	p_2p_1'	p_2p_2'	...	p_2p_m'	...	p_np_m'

Тогда

$$M(X \cdot Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i \cdot y_j \cdot p_i \cdot p_j' = x_1p_1(y_1 \cdot p_1' + y_2 \cdot p_2' + \ldots + y_m \cdot p_m') +$$

$$+ x_2p_2(y_1 \cdot p_1' + y_2 \cdot p_2' + \ldots + y_m \cdot p_m') + \ldots + x_np_n \cdot (y_1 \cdot p_1' +$$

$$+ y_2 \cdot p_2' + \ldots + y_m \cdot p_m') = M(Y)(x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n) = M(Y) \cdot M(X).$$

4. Это свойство доказывается аналогично свойству 3.

5. Учитывая, что $M(X) = c$, и используя свойства 1 и 4, получим

$$M(X - M(X)) = M(X) - M(M(X)) = M(X) - M(X) = 0.$$

Пример 2.7. Найти математическое ожидание для случайной величины X – числа появлений события в n испытаниях, протекающих в одинаковых условиях.

Решение. Представим случайную величину X в виде суммы

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i\,,$$

где X_i – число появлений события в одном i-м испытании $(i = \overline{1,n})$. В примере 2.6 было показано, что $M(X) = p(i = \overline{1,n})$. Тогда

$$M(X) = M(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} M(X_i) = n \cdot p.$$

Дисперсия. Знания только математического ожидания (среднего значения) случайной величины недостаточно. Необходимо представлять, как сильно значения случайной величины разбросаны относительно математического ожидания. В качестве характеристики рассеивания нельзя использовать отклонение, так как его математическое ожидание равно нулю. Из двух вариантов выбора модуля отклонения

$|X - M(X)|$ или квадрата отклонения $[X - M(X)]^2$ предпочтительнее оказалось выбрать последний вариант.

Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения данной случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M[(X - M(X))^2]. \tag{2.5}$$

Своими словами дисперсию можно охарактеризовать как «средний квадрат отклонения от среднего». Из формулы (2.5) следует, что она может принимать только неотрицательные значения ($D(X) \geq 0$). В определении дисперсии отсутствует слово «дискретная». Это обусловлено тем, что данное определение справедливо как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин.

Выведем вторую формулу для дисперсии, которая часто приводит к упрощению ее вычисления. Используя формулу сокращенного умножения и свойства математического ожидания, получим

$$D(X) = M\left[\left(X - M(X)\right)^2\right] = M\left(X^2 - 2 \cdot X \cdot M(X) + M^2(X)\right) =$$
$$= M(X^2) - 2M(X) \cdot M(X) + M^2(X),$$

откуда

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X). \tag{2.6}$$

Пример 2.8. Задан ряд распределения случайной величины:

X	0	1	2
P	0,2	0,2	0,6

Найти ее дисперсию.

Решение. Чтобы вычислить дисперсию по формуле (2.6), необходимо найти математическое ожидание $M(X)$ случайной величины X и математическое ожидание $M(X^2)$ случайной величины X^2:

$$M(X) = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,6 = 1,4.$$

Для вычисления $M(X^2)$ составим ряд распределения для случайной величины X^2. Для этого все значения случайной величины x_i возведем в квадрат.

X^2	0	1	4
P	0,2	0,2	0,6

Тогда

$$M(X^2) = 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}6 = 2{,}6,$$

$$D(X) = 2{,}6 - (1{,}4)^2 = 0{,}64.$$

Дисперсия обладает следующими свойствами:

1) дисперсия константы равна нулю:

$$D(c) = 0;$$

2) постоянный множитель выносится за знак дисперсии, возведенный в квадрат:

$$D(cX) = c^2 \cdot D(X);$$

3) дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y);$$

4) дисперсия суммы случайной величины и константы равна дисперсии случайной величины:

$$D(X + c) = D(X) + D(c) = D(X);$$

5) дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

Докажем приведенные свойства дисперсии.

1. По определению дисперсии

$$D(c) = M((c - M(c))^2) = M((c - c)^2) = M(0) = 0.$$

Это свойство дисперсии очевидно, так как постоянная величина не может иметь разброса своих значений.

2. $D(cX) = M\left[\left(cX - M(cX)\right)^2\right] = M\left[c^2\left(X - M(X)\right)^2\right] = c^2 \cdot D(X)$.

Если $|c| > 1$, разброс случайной величины cX больше, чем разброс случайной величины X. Если $|c| < 1$, разброс случайной величины cX меньше, чем разброс случайной величины X.

3. Для независимых случайных величин X и Y

$$D(X+Y) = M((X+Y)^2) - M^2(X+Y) = M(X^2 + 2XY + Y^2) - [M(X) +$$

$$+M(Y)]^2 = M(X^2) + M(2XY) + M(Y^2) - \left[M^2(X) + 2M(X)\cdot M(Y) +\right.$$

$$\left. + M^2(Y)\right] = \left[M(X^2) - M^2(X)\right] + \left[M(Y^2) - M^2(Y)\right] = D(X) + D(Y).$$

Независимость случайных величин используется при представлении математического ожидания произведения X и Y.

4. $D(X + c) = D(X) + D(c) = D(X)$.

5. Используя свойства 2) и 3), получим

$$D(X - Y) = D(X + (-Y)) = D(X) + D((-1)(Y)) =$$
$$= D(X) + (-1)^2\, D(Y) = D(X) + D(Y).$$

Пример 2.9. Вычислить дисперсию $D(X)$, если случайная величина X – число появлений события в n испытаниях, которые проводятся в одинаковых условиях. Вероятность появления события в каждом испытании равна p.

Решение. Как и в примере 2.7, представим X в виде суммы

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i ,$$

где X_i – число появлений события в одном i-м испытании $(i = \overline{1, n})$.

Найдем сначала дисперсию $D_i(X)$ для одного испытания $(i = \overline{1, n})$:

X_i^2	0	1
P	$1 - p$	p

Тогда $M(X_i^2) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p \quad (i = \overline{1, n})$.

В примере 2.6 было найдено, что $M(X_i) = p$. Тогда по формуле (2.6)

$$D(X_i) = M(X_i^2) - M^2(X_i) = p - p^2 = p(1 - p) = pq \quad (i = \overline{1, n}).$$

Учитывая, что X_i – независимые случайные величины, для n испытаний получим

$$D(X) = D(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = npq .$$

Введение в качестве характеристики рассеивания математического ожидания *квадрата отклонения* привело к тому, что размерность дисперсии оказалась равна квадрату размерности случайной величины. Это очень неудобно для задач практики. Чтобы исправить этот недостаток, ввели вторую характеристику рассеивания – квадратный корень из дисперсии.

Средним квадратичным отклонением случайной величины называется квадратный корень из ее дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} . \qquad (2.7)$$

Как и дисперсия, среднее квадратичное отклонение неотрицательно, т. е. $\sigma(X) \geq 0$.

Свойство $\sigma(X)$: для взаимно независимых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$

$$\sigma(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \dots + \sigma^2(X_n)} .$$

Оно следует из свойства 3) дисперсии:

$$\sigma\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sqrt{D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} D(X_i)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma^2(X_i)}\,.$$

Другие числовые характеристики см. п. 2.2.3.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется математическим ожиданием дискретной случайной величины? Каков его вероятностный смысл?
2. Приведите свойства математического ожидания.
3. Для каких случайных величин математическое ожидание произведения равно произведению их математических ожиданий?
4. Дайте определение дисперсии. Что она характеризует?
5. Запишите вторую формулу для расчета дисперсии.
6. Какие значения может принимать дисперсия?
7. Приведите свойства дисперсии.
8. Дайте определение среднего квадратичного отклонения. По какой причине введена эта числовая характеристика?

2.1.4. Законы распределения дискретных случайных величин

Геометрическое распределение. Пусть событие может появиться в одном испытании с вероятностью p и не появиться с вероятностью $q = 1 - p$. Опыты проводятся до тех пор, пока событие не наступит. Случайная величина X – число «неудачных» испытаний до наступления «успеха», когда событие произойдет. Примером такой случайной величины может быть число промахов при стрельбе по мишени до первого попадания. Очевидно, что $X = 0, 1, 2, \ldots$ При этом число опытов не ограничено. Вероятности этих событий определяются с помощью теоремы умножения для независимых событий по формуле

$$P(X = n) = q^n \cdot p.$$

Ряд распределения указанной случайной величины имеет вид

X	0	1	2	...	n	...
P	p	$q \cdot p$	$q^2 \cdot p$	...	$q^n \cdot p$	...

Из таблицы видно, что вероятности составляют геометрическую прогрессию. Именно поэтому данное распределение получило свое название геометрическое.

Проверим выполнение условия нормировки $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. Сумма бесконечной геометрической прогрессии равна

$$S = \frac{b_1}{1-q},$$

где b_1 – первый член прогрессии; q – ее знаменатель (число, на которое умножается каждый последующий член прогрессии).

Для приведенной в таблице прогрессии $b_1 = p$, а знаменатель прогрессии равен вероятности того, что событие не появится. Тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = p + qp + q^2 p + \ldots + q^n p + \ldots = \frac{p}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} = 1.$$

Математическое ожидание X находится по формуле

$$M(X) = \frac{q}{p}.$$

Эта формула также получается с помощью суммы бесконечной геометрической прогрессии и свойства почленного дифференцирования абсолютно сходящегося ряда:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = 0 \cdot p + 1 \cdot pq + 2pq^2 + 3pq^3 + \ldots + npq^n + \ldots =$$

$$= pq\left(1 + 2q + 3q^2 + \ldots + nq^{n-1} + \ldots\right) = pq\left(q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + \ldots\right)' =$$

$$= pq\left(\frac{q}{1-q}\right)' = pq\frac{1 \cdot (1-q) - q \cdot (1-q)'}{(1-q)^2} = pq\frac{1-q+q}{p^2} = \frac{q}{p}.$$

Дисперсия для данного распределения равна:

$$D(X) = \frac{q}{p^2},$$

а среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{q}}{p}.$$

Гипергеометрическое распределение. Пусть имеется N деталей, из которых M – стандартные ($M < N$). Из этой партии случайным образом выбирается n деталей на проверку, причем после проверки детали назад не возвращаются. Введем случайную величину X – число стандартных деталей среди n отобранных и составим для нее ряд распределения. Наименьшее значение X равно нулю, если $n < N - M$ (обычно это условие выполняется). Если число отобранных деталей n меньше числа стандартных M, то все они могут оказаться стандартными. Тогда наибольшее значение X равно n. Если же $n > M$, то наибольшее значение X равно M, поэтому

$$X = 0, 1, 2, \ldots, \min(n, M).$$

Вероятность того, что среди n отобранных деталей будет m стандартных, найдем с помощью классического определения. Общее число исходов равно числу сочетаний C_N^n, число благоприятных исходов – $C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}$ (число вариантов выбора m стандартных деталей из M возможных, умноженное на число вариантов выбора оставшихся нестандартных деталей). Тогда

$$P_n(m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

Распределение, заданное приведенной выше формулой, называется *гипергеометрическим*. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, распределенной по гипергеометрическому закону, определяется формулами

$$M(X) = n\frac{M}{N};$$

$$D(X) = n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right).$$

При малых значениях n по сравнению с N ($n < 0{,}1N$) вместо гипергеометрического можно использовать биномиальный закон распределения, более удобный для вычислений.

Биномиальный закон распределения. Пусть проводится n испытаний в одинаковых условиях, в каждом из которых некоторое событие может наступить с вероятностью p и не наступить с вероятностью $q = 1 - p$. Введем случайную величину X – число появлений этого события в n испытаниях, возможные значения которой изменяются от 0 до n. Вероятность того, что X примет значение m, определяется формулой Бернулли (1.19):

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}.$$

Тогда ряд распределения имеет вид

X	0	1	...	m	...	n
P	q^n	$np \cdot q^{n-1}$	...	$C_n^m p^m q^{n-m}$	...	p^n

Такое распределение называется *биномиальным*. Поскольку повторение испытаний часто встречается на практике, биномиальное распределение находит наибольшее применение из всех законов распределения дискретных случайных величин.

В примере 2.7 найдено выражение для математического ожидания биномиально распределенной случайной величины:

$$M(X) = np,$$

а в примере 2.9 получена формула для дисперсии:

$$D(X) = npq.$$

Тогда среднее квадратичное отклонение равно

$$\sigma(X) = \sqrt{npq}\ .$$

Распределение Пуассона. Если количество опытов, проводимых в одинаковых условиях велико, а вероятность появления события в одном опыте мала, вместо формулы Бернулли целесообразно использовать формулу Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}\ ,$$

где m – число появлений события в n независимых испытаниях; $\lambda = np$ – среднее число появлений события в n испытаниях.

Если ввести случайную величину X как число появлений события в n испытаниях, а соответствующие значениям X вероятности вычислять по формуле Пуассона, то такая дискретная случайная величина называется *распределенной по закону Пуассона* с параметром λ.

Ряд распределения по закону Пуассона имеет вид

X	0	1	2	...	m	...	n
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\dfrac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	...	$\dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$	...	$\dfrac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$

Распределение Пуассона используется для описания массовых маловероятных (редких) событий. Особенностью такого распределения является равенство математического ожидания и дисперсии:

$$M(X) = D(X) = n \cdot p = \lambda.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Каким законом описываются дискретные случайные величины, если вероятности вычисляются по формуле Бернулли?

2. Как определяются вероятности возможных значений случайной величины при геометрическом распределении вероятностей? гипергеометрическом? распределении Пуассона?

3. Какие свойства имеют случайные величины, описываемые распределением Пуассона?

4. Чему равны математическое ожидание и дисперсия для биномиального закона распределения? геометрического? распределения Пуассона?

Задачи для самостоятельного решения

2.1. Могут ли графики функций, изображенные на рис. 2.5, *а–в*, быть графиками функции распределения случайной величины?

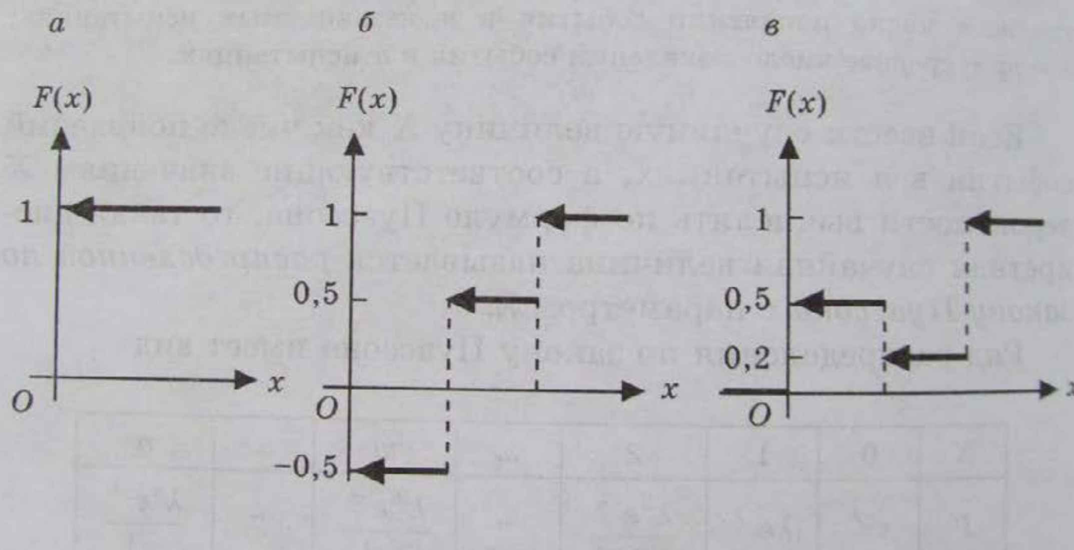


Рис. 2.5

2.2. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения

X	-1	0	2
P	0,5	0,1	p_3

Найти p_3; $M(X)$; $D(X)$; $P(X < 2)$; $F(x)$. Начертить график $F(x)$.

2.3. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения

X	-20	0	20
P	$0,3$	p_2	$0,4$

Найти p_2; $M(X)$; $D(X)$; $P(X \geq 6)$; $F(x)$, $M(3 - 2X)$, $D(3 - 2X)$. Начертить график $F(x)$.

2.4. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения

X	-1	0	x_3
P	$0,2$	$0,3$	p_3

Известно, что $M(X) = 0,8$. Найти p_3; x_3; $D(X)$; $P(X < 1)$; $F(x)$. Начертить график $F(x)$.

2.5. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения

X	-2	0	1
P	$0,2$	p_2	$0,1$

Найти p_2; $M(X)$; $D(X)$; $P(X < 1)$; $F(x)$, $M(2X - 1)$, $D(2X - 1)$. Начертить график $F(x)$.

Составить ряд распределения указанной дискретной случайной величины, найти функцию распределения и построить ее график. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение для указанной случайной величины X.

2.6. По мишени производятся два независимых выстрела. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. Случайная величина X – число попаданий в мишень.

2.7. Монета подбрасывается 3 раза. Случайная величина X – число выпадений герба.

2.8. Автомобиль должен проехать по улице, на которой установлено четыре независимо работающих светофора. Каждый светофор с интервалом в 2 мин подает красный и зеленый сигналы. Случайная величина X – число остановок автомобиля на этой улице.

2.9. Производят три выстрела по мишени. Вероятность поражения мишени первым выстрелом равна 0,4, вторым – 0,5, третьим – 0,6. Случайная величина X – число попаданий в мишень.

2.10. Вероятность выпуска прибора, удовлетворяющего требованиям качества, равна 0,9. В контрольной партии три прибора; X – число приборов, удовлетворяющих требованиям качества.

2.11. С вероятностью попадания при одном выстреле, равной 0,7, охотник, имея четыре патрона, стреляет по дичи до первого попадания. Случайная величина X – число использованных патронов.

2.12. Стрелок производит три выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле – 0,4. За каждое попадание засчитывается пять очков. Случайная величина X – число выбитых очков.

2.13. Три радиолокатора ведут наблюдение за объектом. Вероятность обнаружить объект для первого локатора равна 0,8, для второго – 0,7, для третьего – 0,6. Случайная величина X – число локаторов, обнаруживших объект.

2.14. Для отладки компьютерной программы используется тестовый пример. Если программа выполняет пример неверно, то ее дорабатывают и снова запускают отладочный пример. Отладочную процедуру (итерацию) повторяют до тех пор, пока программа не выполнит пример правильно. Вероятность того, что пример будет выполнен правильно на каждой итерации, одинакова и равна 0,9. Случайная величина X – число проведенных итераций. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

2.15. В подгруппе восемь девушек и четверо юношей. Для выполнения лабораторной работы отбирают двух человек. Случайная величина X – число юношей из двух отобранных студентов. Составить ряд распределения указанной дискретной случайной величины, найти ее функцию распределения и построить график $F(x)$.

2.16. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения

X	0	1	2
P	a^2	$a/2$	0,5

Найти a, $P(X < 2)$.

Ответы: **2.1.** а) Да; б) Нет; в) Нет. **2.2.** $p_3 = 0{,}4$; $M(X) = 0{,}3$; $D(X) = 2{,}01$; $\sigma(X) \approx 1{,}418$; $P(X < 2) = 0{,}6$. **2.3.** $p_2 = 0{,}3$; $M(X) = 2$; $D(X) = 276$; $\sigma(X) \approx 16{,}613$; $P(X \geq 6) = 0{,}4$; $M(3 - 2X) = -1$; $D(3 - 2X) = 1104$. **2.4.** $p_3 = 0{,}5$; $x_3 = 2$; $D(X) = 1{,}56$; $\sigma(X) \approx 1{,}249$; $P(X < 1) = 0{,}5$. **2.5.** $p_2 = 0{,}7$; $M(X) = -0{,}3$; $D(X) = 0{,}81$; $\sigma(X) = 0{,}9$; $P(X < 1) = 0{,}9$; $M(2X - 1) = -1{,}6$; $D(2X - 1) = 3{,}24$. **2.6.** $P(X = 0) = 0{,}16$; $P(X = 1) = 0{,}48$; $P(X = 2) = 0{,}36$; $M(X) = 1{,}2$; $D(X) = 0{,}48$; $\sigma(X) \approx 0{,}693$. **2.7.** $P(X = 0) = 1/8$; $P(X = 1) = 3/8$; $P(X = 2) = 3/8$; $P(X = 3) = 1/8$; $M(X) = 1{,}5$; $D(X) = 0{,}75$; $\sigma(X) \approx 0{,}866$. **2.8.** $P(X = 0) = 1/16$; $P(X = 1) = 4/16$; $P(X = 2) = 6/16$; $P(X = 3) = 4/16$; $P(X = 4) = 1/16$; $M(X) = 2$, $D(X) = 1$; $\sigma(X) = 1$. **2.9.** $P(X = 0) = 0{,}12$; $P(X = 1) = 0{,}38$; $P(X = 2) = 0{,}38$; $P(X = 3) = 0{,}12$; $M(X) = 1{,}5$; $D(X) = 0{,}73$; $\sigma(X) \approx 0{,}854$. **2.10.** $P(X = 0) = 0{,}001$; $P(X = 1) = 0{,}027$;

$P(X = 2) = 0{,}243$; $P(X = 3) = 0{,}729$; $M(X) = 2{,}7$; $D(X) = 0{,}27$; $\sigma(X) \approx 0{,}520$. **2.11.** $P(X = 1) = 0{,}7$; $P(X = 2) = 0{,}21$; $P(X = 3) = 0{,}063$; $P(X = 4) = 0{,}027$; $M(X) = 1{,}417$; $D(X) = 0{,}531$; $\sigma(X) \approx 0{,}729$. **2.12.** $P(X = 0) = 0{,}216$; $P(X = 5) = 0{,}432$; $P(X = 10) = 0{,}288$; $P(X = 15) = 0{,}064$; $M(X) = 6$; $D(X) = 18$; $\sigma(X) = 3\sqrt{2}$. **2.13.** $P(X = 0) = 0{,}024$; $P(X = 1) = 0{,}188$; $P(X = 2) = 0{,}452$; $P(X = 3) = 0{,}336$; $M(X) = 2{,}1$; $D(X) = 0{,}61$; $\sigma(X) \approx 0{,}781$. **2.14.** $P(X = n) = 0{,}9 \cdot 0{,}1^{n-1}$, $n \in N$; $M(X) = 1/9$; $D(X) = 10/81$; $\sigma(X) \approx 0{,}351$. **2.15.** $P(X = 0) = 14/33$; $P(X = 1) = 16/33$; $P(X = 2) = 1/11$. **2.16.** 0,5; 0,5.

2.2. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Если случайная величина X может принимать любое значение из отрезка $[a, b]$, то она называется *непрерывной*. Такие случайные величины могут иметь либо непрерывную либо разрывную функцию распределения вероятностей $F(x)$. В дальнейшем под *непрерывной случайной величиной* будем понимать такую непрерывную случайную величину, которая имеет непрерывную функцию распределения, дифференцируемую во всех точках области своего задания за исключением, может быть, отдельных точек.

Для непрерывных случайных величин функция распределения обладает такими же свойствами, что и для дискретных. Кроме того, она обладает *дополнительным свойством*: вероятность того, что непрерывная случайная величина примет одно определенное значение, равна нулю, т. е. $P(X = x_0) = 0$. Докажем его.

Согласно формуле (2.3)

$$P(x_0 \le X < x_0 + \Delta x) = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0).$$

Так как функция $F(x)$ непрерывна, т. е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(F\left(x_0 + \Delta x\right) - F\left(x_0\right)\right) = 0,$$

то

$$P(X = x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} P(x_0 \le X < x_0 + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} (F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)) = 0.$$

Такой результат можно было предположить: чтобы выполнялось условие нормировки, каждое из бесконечного числа событий, что случайная величина приняла одно определенное значение из отрезка $[a, b]$, не может иметь конечную вероятность.

Доказанный результат приводит к интересной особенности. Из гл. 1 мы знаем, если событие A невозможно, то $P(A) = 0$. А вот обратное утверждение в общем случае неверно: если $P(A) = 0$, то из этого не следует, что событие A невозможное.

2.2.1. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины (дифференциальная функция распределения)

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины называют первую производную функции распределения случайной величины:

$$f(x) = F'(x). \tag{2.8}$$

Из определения следует, что $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$. Так как $F(x)$ – неубывающая функция, то $f(x) \geq 0$. В отличие от $F(x)$ значения $f(x)$ могут быть больше единицы.

Так как функция $f(x)$ является производной функции $F(x)$, то понятно, почему ее второе название – дифференциальная функция распределения. Поскольку функция $F(x)$ будет находиться интегрированием, ее еще называют интегральной функцией распределения случайной величины.

Ряд важных формул включают плотность распределения вероятностей.

1. Вероятность попадания случайной величины X в интервал (a, b) равна:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx\,. \tag{2.9}$$

2. Условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 . \qquad (2.10)$$

3. Функция распределения вероятностей выражается через плотность распределения вероятностей:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx . \qquad (2.11)$$

Выведем эти формулы.

1. Так как $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, по формулам (2.3) и Ньютона–Лейбница получим

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)dx .$$

2. Исходя из формулы (2.9),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = P(-\infty < X < +\infty) = 1 .$$

3. На основании формулы (2.9)

$$F(x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx .$$

Найдем вероятность того, что случайная величина попадет на отрезок $[x,\ x + dx]$, где dx – бесконечно малое приращение аргумента.

Так как дифференциал функции является главной частью приращения функции, то

$$P(x < X < x + \Delta x) \approx F'(x)\Delta x = f(x)\Delta x.$$

Взяв вместо Δx бесконечно малое приращение аргумента dx, получим

$$P(x < X < x + dx) = f(x)dx. \tag{2.12}$$

Дифференциал функции распределения случайной величины $f(x)dx$ называется *элементом вероятности*.

Для нахождения функций $f(x)$ и $F(x)$ необходимо уметь дифференцировать и интегрировать. Таблицы производных основных элементарных функций и основные формулы интегрирования даны в прилож. 5 и 6.

Пример 2.10. Пусть функция плотности распределения вероятностей задана формулой $f(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$. Найти величину a и функцию распределения случайной величины $F(x)$.

Решение. Значение a найдем из условия нормировки (2.10):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{adx}{1+x^2} = a \cdot \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = a\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = a\pi = 1, \ a = \frac{1}{\pi}.$$

По формуле (2.11) определяем функцию распределения случайной величины:

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Пример 2.11. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 1, \\ ax^2 + bx, \ 1 < x \le 2, \\ 1, \ x > 2. \end{cases}$$

Найти a, b, $f(x)$, $P(0 < X < 1{,}5)$.

Р е ш е н и е. Константы a и b найдем, используя свойство непрерывности функции распределения $F(x)$. Приведенные в условии функции $F(x) = 0$, $F(x) = ax^2 + bx$ и $F(x) = 1$ являются непрерывными функции. Чтобы функция была непрерывной в точке x_0, в которой изменяется ее аналитическое выражение, необходимо выполнение условия непрерывности функции, а именно: односторонние пределы в этой точке должны быть равны между собой:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} F(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} F(x).$$

Для $x = 1$ имеем

$$\lim_{x \to 1-0} F(x) = \lim_{x \to 1-0} 0 = 0;$$

$$\lim_{x \to 1+0} F(x) = \lim_{x \to 1+0} \left(ax^2 + b\right) = a + b.$$

Отсюда $a + b = 0$.
Для $x = 2$ имеем

$$\lim_{x \to 2-0} F(x) = \lim_{x \to 2-0} \left(a \cdot x^2 + b \cdot x\right) = 4a + 2b;$$

$$\lim_{x \to 2+0} F(x) = \lim_{x \to 2+0} 1 = 1.$$

Отсюда $4a + 2b = 1$.
Таким образом, для определения a и b получена система уравнений:

$$\begin{cases} a + b = 0, \\ 4a + 2b = 1. \end{cases}$$

Решив ее, получим

$$\begin{cases} b = -a, \\ 4a - 2a = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} b = -a, \\ 2a = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0,5, \\ b = -0,5. \end{cases}$$

Тогда функция распределения случайной величины примет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, \;\; x \le 1, \\ 0,5x^2 - 0,5x, \;\; 1 < x \le 2, \\ 1, \;\; x > 2. \end{cases}$$

Продифференцировав функцию $F(x)$, найдем плотность распределения вероятностей $f(x)$:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ x - 0,5, & 1 < x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Наконец, вероятность попадания в заданный интервал вычислим по формуле (2.3). При этом учтем, что $F(0) = 0$ (значение взято из первой строки задания функции $F(x)$):

$$P(0 < X < 1{,}5) = F(1{,}5) - F(0) =$$
$$= (0{,}5 \cdot 1{,}5^2 - 0{,}5 \cdot 1{,}5) - 0 = 0{,}375.$$

Пример 2.12. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{1}{2}x, & 0 < x < 2, \\ 0, & x \ge 2. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

Решение. Функцию распределения найдем, используя формулу (2.11). Поскольку плотность распределения вероятности задана на трех интервалах, разобьем область определения функции $F(x)$ на три такие же части.

Пусть аргумент функции $F(x)$ принимает любое значение, не превышающее нуля. Тогда для любого x из этого интервала $f(x) = 0$ и

$$F(x) = 0.$$

Пусть аргумент функции принимает любое значение из интервала $(0,\ 2)$. Тогда область интегрирования разобьем на две части: $(-\infty,\ 0]$ и $[0,\ x)$. На первом промежутке $f(x) = 0$ и соответствующий интеграл также равен нулю. На втором промежутке $f(x) = \dfrac{1}{2}x$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{x} \frac{1}{2} x dx = \left.\frac{x^2}{4}\right|_0^x = \frac{x^2}{4}.$$

Пусть $x \geq 2$, тогда

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{2} x dx + \int_{2}^{x} 0 \cdot dx = \left. \frac{x^2}{4} \right|_0^2 = 1.$$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \dfrac{x^2}{4}, & 0 < x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

2.2.2. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Пусть непрерывная случайная величина X может принимать значения только на отрезке $[a, b]$. Разобьем его на n интервалов малой длины Δx_i $(i = \overline{1, n})$ так, чтобы функция $f(x)$ на этих интервалах слабо изменялась. На каждом из участков произвольно выбираем точку x_i. Тогда по формуле (2.12)

$$P(x_i < X < x_i + \Delta x_i) \approx f(x_i) \Delta x_i.$$

Обозначив эти вероятности p_i $\left(i = \overline{1, n}\right)$, используем их для приближенного нахождения математического ожидания:

$$M(x) \approx \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) \Delta x_i.$$

Последнее выражение представляет собой интегральную сумму для функции $xf(x)$, поэтому, переходя к пределу, когда максимальное $\Delta x_i \to 0$, получим

$$M(x) = \int_{a}^{b} x f(x) dx.$$

Если случайная величина принимает любые значения, то, рассуждая подобным образом, можно показать, что

$$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx . \qquad (2.13)$$

Дисперсия $D(X) = M\left[(X - M(X))^2\right]$ для непрерывной случайной величины равна

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[x - M(X)\right]^2 f(x) dx . \qquad (2.14)$$

Если вычислять $D(X)$ по формуле (2.6), то получим выражение

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx\right)^2 .$$

Формула среднего квадратичного отклонения остается той же, что и для дискретной случайной величины:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} .$$

Пример 2.13. Случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей $f(x) = \dfrac{1}{2} x$ в интервале (0,2), вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины X.

Решение. Исходя из условия примера представим плотность распределения вероятностей в виде

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{1}{2} x, & 0 < x < 2, \\ 0, & x \ge 2. \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание, используя формулу (2.13):

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

При этом разобьем область интегрирования на три части, как это сделано в выражении для $f(x)$:

$$M(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{2} x\frac{1}{2}xdx + \int_{2}^{+\infty} 0dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Дисперсию случайной величины найдем по формуле (2.6):

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Найдем $M(X^2)$:

$$M\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{0}^{2} x^2\frac{1}{2}x\ dx = \frac{x^4}{8}\Big|_0^2 = 2;$$

$$D(X) = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}.$$

Тогда среднее квадратичное отклонение равно:

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

2.2.3. Начальные и центральные моменты распределения

Начальным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание величины X^k:

$$\nu_k = M(X^k). \tag{2.15}$$

С начальными моментами мы уже сталкивались: $\nu_1 = M(X)$, $\nu_2 = M(X^2)$ и $D(X) = \nu_2 - \nu_1^2$.

Центральным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание ее отклонения от своего математического ожидания, возведенного в k-ю степень.

$$\mu_k = M\left[(X - M(X))^k\right]. \tag{2.16}$$

Из свойства 5) математического ожидания следует, что

$$\mu_1 = M[X - M(X)] = 0.$$

Второй центральный момент согласно определению равен дисперсии

$$\mu_2 = D(X).$$

Если распределение симметрично относительно математического ожидания, то все центральные моменты нечетного порядка $\mu_{2n+1} = 0$ ($n = 1, 2, ...$). По этой причине μ_3 используется для характеристики асимметрии распределения. Для этой цели вводят безразмерный *коэффициент асимметрии*:

$$A_S = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

Для описания крутизны кривой $f(x)$ вводится величина, называемая *эксцессом*:

$$E_X = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

Для нормального распределения (самого распространенного закона распределения) эксцесс равен нулю.

Вопросы для самоконтроля

1. Что понимается под непрерывной случайной величиной?
2. Чему равна вероятность того, что непрерывная случайная величина примет одно определенное значение?

3. Дайте определение плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины.

4. Приведите формулу, выражающую вероятность попадания в интервал (a, b) непрерывной случайной величины.

5. Сформулируйте условие нормировки для непрерывной случайной величины.

6. Как выражается функция распределения вероятностей через плотность распределения вероятностей?

7. Что называется элементом вероятности?

8. По какой формуле вычисляется математическое ожидание непрерывной случайной величины?

9. По какой формуле вычисляется математическое ожидание квадрата непрерывной случайной величины $M(X^2)$?

10. По каким формулам вычисляется дисперсия непрерывной случайной величины?

11. Приведите формулу для нахождения среднего квадратичного отклонения.

12. Что называется начальным моментом порядка k?

13. Что называется центральным моментом порядка k?

14. Как выражается дисперсия через начальные моменты? через центральные моменты?

15. Что называется коэффициентом асимметрии? Что он характеризует?

16. Что называется эксцессом? Что он характеризует?

Задачи для самостоятельного решения

2.17. Дан график функции распределения $F(x)$ случайной величины X (рис. 2.6). Как изменится этот график, если: а) прибавить к случайной величине 2; б) вычесть из случайной величины 3?

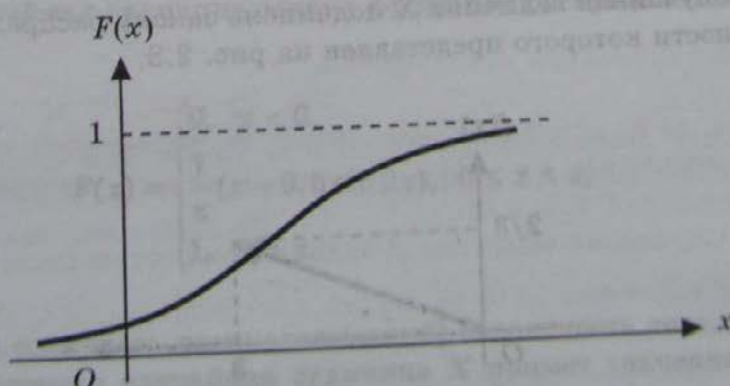


Рис. 2.6

2.18. К случайной величине X прибавили постоянную, неслучайную величину a. Как от этого изменятся характеристики случайной величины X: а) математическое ожидание; б) дисперсия?

2.19. Случайную величину X умножили на постоянную величину a. Как от этого изменятся характеристики случайной величины X: а) математическое ожидание; б) дисперсия?

2.20. Случайная величина X подчинена закону распределения, плотность которого задана графически (рис. 2.7).

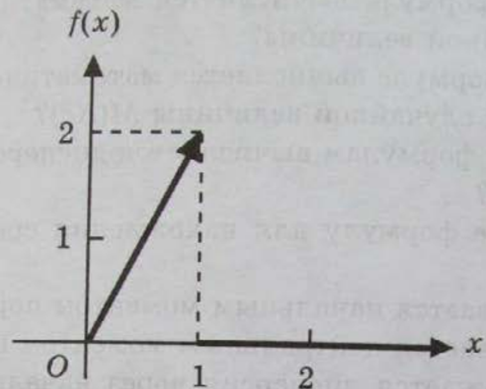


Рис. 2.7

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение величины X.

2.21. Непрерывная случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $f(x) = Ae^{-|x|}$. Определить ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

2.22. Случайная величина X распределена по закону $f(x) = |x|e^{-x^2}$. Чему равна вероятность того, что данная случайная величина примет значение, лежащее в интервале (0, 1).

2.23. Случайная величина X подчинена закону распределения, график плотности которого представлен на рис. 2.8.

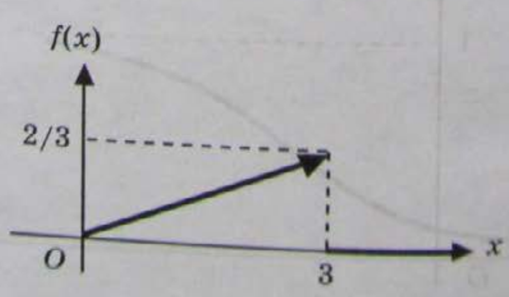


Рис. 2.8

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

2.24. Плотность распределения случайной величины X задана формулой $f(x) = \dfrac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$. Найти вероятность того, что величина X попадает на интервал $(-1, +1)$.

2.25. Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения случайной величины:

$$f(x) = \begin{cases} C(x^2 - 4x + 3), & x \in [1;\ 3], \\ 0, & x \notin [1;\ 3]. \end{cases}$$

Найти константу C, вероятности того, что данная случайная величина примет значение, принадлежащее отрезкам $[-1;\ 1]$ и $[1;\ 2]$, и функцию распределения.

2.26. Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения случайной величины:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0,5\sin x, & 0 \le x \le \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

Найти: а) функцию распределения; б) вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение, заключенное в интервале $\left(0; \dfrac{\pi}{3}\right)$.

2.27. Случайная величина задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{1}{\pi}(x - 0,5\sin 2x), & 0 \le x \le \pi, \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$$

Найти: а) плотность распределения; б) вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $\left(-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right)$.

2.28. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ ax^4, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

Найти a; $f(x)$; $M(X)$; $D(X)$; $P(X<0{,}2)$. Начертить график $f(x)$ и $F(x)$.

2.29. Непрерывная случайная величина x задана функцией распределения $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ ax^2+b, & 1<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Найти a; b; $f(x)$; $M(X)$; $D(X)$; $P(0<X<2)$. Начертить графики $f(x)$ и $F(x)$.

2.30. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения случайной величины:

$$f(x)=\begin{cases}C(3+x), & x\in[0;\ 4],\\ 0, & x\notin[0;\ 4].\end{cases}$$

Найти: а) функцию распределения; б) вероятность того, что в результате двух испытаний случайная величина дважды примет значение, заключенное в интервале (1; 2).

2.31. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения случайной величины $f(x)=\begin{cases}C(x+|x|), & x\in[-1;\ 1],\\ 0, & x\notin[-1;\ 1].\end{cases}$

Найти: а) функцию распределения; б) вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение, заключенное в интервале (–0,5; 0,5).

2.32. Случайная величина X задана плотностью распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ a(1-x^2), & -1\le x\le 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Найти коэффициент a, коэффициент асимметрии и эксцесс.

2.33. Плотность распределения случайной величины представлена на рис. 2.9.

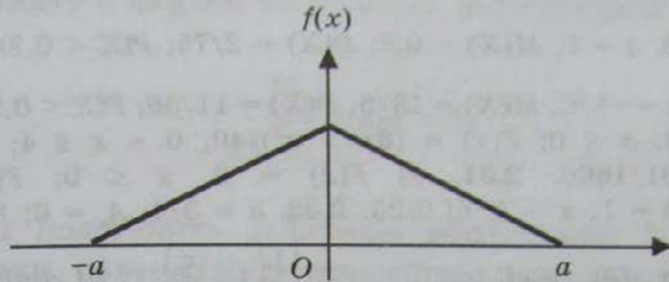


Рис. 2.9

Написать выражение плотности распределения при: 1) $a = 1$ и 2) $a = 2$. Найти математическое ожидание представленной случайной величины.

2.34. Плотность распределения вероятностей случайной величины представлена на рис. 2.10.

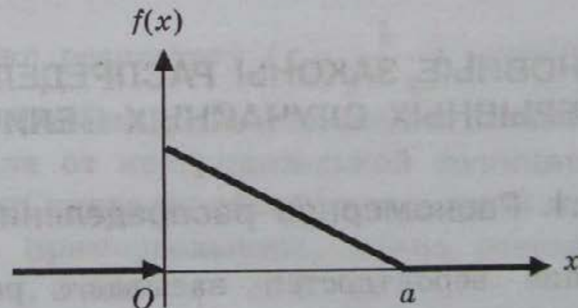


Рис. 2.10

а) Написать выражение плотности распределения вероятностей.
б) Найти функцию распределения и вероятность попадания случайной величины в интервал $(a/2;\ a)$.

Ответы: **2.17.** а) сдвинется вправо на 2; б) сдвинется влево на 3. **2.18.** а) прибавится слагаемое a; б) не изменится. **2.19.** а) умножится на a; б) умножится на a^2. **2.20.** $M(X) = 2/3$; $D(X) = 1/18$; $\sigma(X) = 1/(3\sqrt{2})$. **2.21.** $M(X) = 0$; $D(X) = 2$; $\sigma(X) = \sqrt{2}$. **2.22.** 0,316. **2.23.** $M(X) = 2$;

$D(X) = 0{,}5$; $\sigma(X) \approx 0{,}707$. **2.24.** 0,5. **2.25.** −0,75; 0; 0,5. $F(x) = 0,\ x \le 1$; $F(x) = -0{,}25x^3 + 1{,}5x^2 - 2{,}25x + 1$; $1 < x \le 3$; $F(x) = 1,\ x > 3$. **2.26.** а) $F(x) = 0,\ x \le 0$; $F(x) = 0{,}5(1 - \cos x),\ 0 < x \le \pi$; $F(x) = 1,\ x > \pi$; б) 0,25. **2.27.** а) $f(x) = 0,\ x \notin [0, \pi]$; а) $f(x) = \frac{1}{\pi}(1 - \cos 2x),\ x \in [0, \pi]$; б) $\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi}$. **2.28.** $a = 1$, $M(X) = 0{,}8$; $D(X) = 2/75$; $P(X < 0{,}2) = 0{,}0016$. **2.29.** $a = 1/8$, $b = -1/8$, $M(X) = 13/6$; $D(X) = 11/36$; $P(X < 0{,}2) = 0{,}375$. **2.30.** $F(x) = 0,\ x \le 0$; $F(x) = (6x + x^2)/40,\ 0 < x \le 4$; $F(x) = 1,\ x > 4$; б) 81/1600. **2.31.** а) $F(x) = 0,\ x \le 0$; $F(x) = x^2,\ 0 < x \le 1$; $F(x) = 1,\ x > 1$; б) 0,25. **2.32.** $a = 3/4$; $A_s = 0$; $E_X = -6/7$.

2.33. 1) $f(x) = \begin{cases} (1 - |x|), & x \in [-1;1] \\ 0, & x \notin [-1;1] \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{|x|}{2}\right), & x \in [-2;2], \\ 0, & x \notin [-2;2]; \end{cases}$ $M(X) = 0$.

2.34. а) $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{a}\left(1 - \frac{x}{a}\right), & x \in [0;\ a], \\ 0, & x \notin [0;\ a]; \end{cases}$ б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \frac{x}{a}\left(2 - \frac{x}{a}\right), & 0 < x \le a, \\ 1, & x > a; \end{cases}$ в) 0,25.

2.3. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

2.3.1. Равномерное распределение

Распределение вероятностей называют равномерным, если на промежутке, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность распределения сохраняет постоянное значение.

Равномерное распределение описывается плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ c, & a \le x \le b, \\ 0, & x > b, \end{cases} \tag{2.17}$$

где c – постоянная величина.

На практике равномерным законом распределения описывается, например, случайная величина, являющаяся ошибкой округления показаний приборов.

Константу c найдем из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Чтобы подставить заданные выражения $f(x)$ в условие нормировки, область интегрирования разобьем на три части:

$$\int_{-\infty}^{a} 0dx + \int_{a}^{b} cdx + \int_{b}^{\infty} 0dx = c \cdot x \,\Big|_a^b = c(b-a) = 1\,;\ c = \frac{1}{b-a}.$$

Первый и третий интегралы равны нулю, поэтому при нахождении функции распределения случайной величины, математических ожиданий случайных величин X и X^2 мы будем опускать интегралы с нулевой подынтегральной функцией.

К этому же результату ($c = \frac{1}{b-a}$) можно было прийти иным путем. Согласно геометрическому смыслу определенного интеграла от неотрицательной функции он численно равен площади криволинейной трапеции. В данном случае – это площадь прямоугольника, длина основания которого равна $l = b - a$, а высота – c. Тогда

$$c(b-a) = 1\text{, а } c = \frac{1}{b-a},$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

График функции $f(x)$ представлен на рис. 2.11.

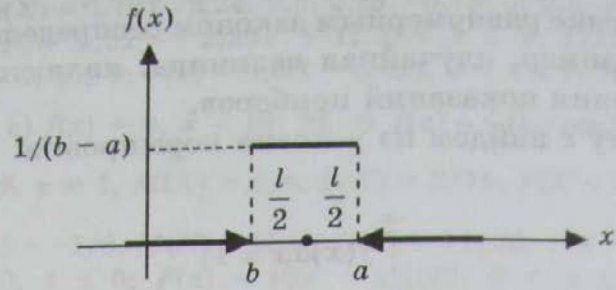


Рис. 2.11

По заданной плотности распределения найдем функцию распределения $F(x)$. Согласно (2.11)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx .$$

Чтобы знать, какое выражение подставлять в интеграл вместо $f(x)$, разобьем область определения функции $F(x)$ на три такие же части, что и для $f(x)$.

Пусть аргумент функции $F(x)$ принимает любое значение, но меньше a ($x < a$). Тогда для любого x из этого интервала $f(x) = 0$ и

$$F(x) = 0.$$

Пусть аргумент функции принимает любое значение из отрезка $[a, b]$ ($a \le x \le b$). Тогда область интегрирования разобьем на две части $x \in (-\infty, a)$ и $x \in [a, x)$. На первом промежутке $f(x) = 0$ и соответствующий интеграл также равен нулю. На втором промежутке $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$. Тогда

$$F(x) = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a} dx = \left. \frac{x}{b-a} \right|_{a}^{x} = \frac{x-a}{b-a} .$$

Пусть аргумент функции x больше a. Область интегрирования разобьем на три части: $(-\infty, a) \cup [a, b] \cup (a, x)$. Однако на первом и третьем промежутках $f(x) = 0$. Тогда

$$F(x) = \int_a^b \frac{1}{b-a} \cdot dx = \left. \frac{x}{b-a} \right|_a^b = \frac{b-a}{b-a} = 1 .$$

Объединив полученные выражения, составим выражение для $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \ a \le x \le b, \\ 1, \ x > b. \end{cases}$$

График функции равномерно распределенной случайной величины имеет вид, представленный на рис. 2.12.

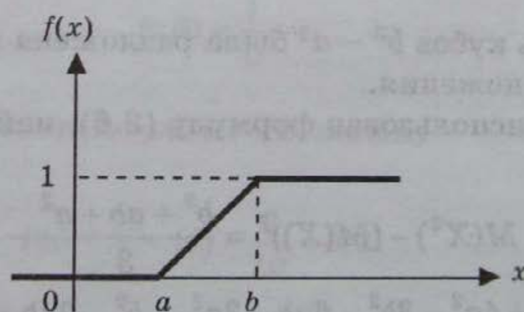


Рис. 2.12

Зная, что математическое ожидание характеризует среднее арифметическое значение случайной величины, можно легко его найти. Из рис. 2.11 в силу симметричности графика $f(x)$ видно, что математическое ожидание будет равно значению X, находящемуся в середине отрезка $[a, b]$, т. е.

$$M(X) = a + \frac{l}{2} = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2} .$$

Докажем это, используя формулу (2.13)

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b xdx=\left.\frac{x^2}{2(b-a)}\right|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{b+a}{2},$$

что и требовалось доказать.

Прежде чем найти дисперсию, отметим, что чем больше $l=b-a$, тем сильнее будет разброс случайной величины относительно среднего (см. рис. 2.11). Учитывая, что дисперсия – это «средний квадрат отклонения от среднего», можно ожидать, что дисперсия будет пропорциональна l^2. Сначала получим выражение для $M(X^2)$:

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\left.\frac{1}{b-a}\frac{x^3}{3}\right|_a^b=$$

$$=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3(b-a)}=\frac{(b^2+ab+a^2)}{3}.$$

Разность кубов b^3-a^3 была разложена по формуле сокращенного умножения.

Теперь, использовав формулу (2.6), найдем дисперсию:

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{b^2+2ab+a^2}{4}=$$

$$=\frac{4b^2+4ab+4a^2-3b^2-6ab-3a^2}{12}=\frac{b^2-2ab+a^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{l^2}{12}.$$

Как и ожидалось, $D(X)\sim l^2$. Тогда среднее квадратичное отклонение равно

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}=\frac{l}{2\sqrt{3}}.$$

Пример 2.14. Все значения равномерно распределенной случайной величины X лежат на отрезке [10, 20]. Найти вероятность $P(8<X<12)$.

Решение. *Способ 1.* Найдем плотность распределения. Для $x \in [10, 20]$ $f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{20-10} = \frac{1}{10}$, для остальных значений аргумента $f(x) = 0$. Тогда

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 10, \\ 1/10, & 10 \le x \le 20, \\ 0, & x > 20. \end{cases}$$

$$P(8 < X < 12) = \int_8^{12} f(x)dx = \int_8^{10} 0dx + \int_{10}^{12} \frac{1}{10}dx = \frac{1}{10}x\Big|_{10}^{12} = 0,2.$$

Способ 2. Воспользуемся геометрическим определением вероятности. Формула (1.6) вероятности попадания случайной точки на отрезок длиной l (событие B), составляющий часть отрезка длиной L, имеет вид

$$P(B) = \frac{l}{L}.$$

Из рис. 2.13 видно, что $L = 10$, а $l = 2$, поэтому

$$P(8 < X < 12) = \frac{2}{10} = 0,2.$$

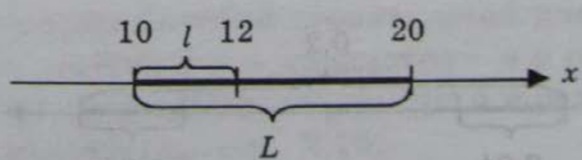


Рис. 2.13

Пример 2.15. Цена деления шкалы прибора составляет 0,2. Показания прибора округляются до ближайшего деления. Найти вероятность того, что случайная ошибка по абсолютной величине будет меньше 0,04.

Решение. Как и в предыдущем случае, решим пример двумя способами.

Способ 1. Случайная величина X – ошибка округления может принимать значения от 0 до 0,1 (половина цены деления), поэтому при $x \in [0; 0{,}1]$

$$f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{0{,}1-0} = 10.$$

Вне этого интервала $f(x) = 0$. Отсюда

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 10, & 0 \le x \le 0{,}1, \\ 0, & x > 0{,}1; \end{cases}$$

$$P(0 < X < 0{,}04) = \int_0^{0{,}04} f(x)dx = \int_0^{0{,}04} 10dx = 10x\Big|_0^{0{,}04} = 0{,}4.$$

Способ 2. Удовлетворять заданной точности будет попадание стрелки прибора в два интервала, выделенные жирной линией на рис. 2.14. Их суммарная длина равна $l = 2 \cdot 0{,}04 = 0{,}08$. С учетом того что $L = 0{,}2$, искомая вероятность равна

$$P(0 < X < 0{,}04) = \frac{0{,}08}{0{,}2} = 0{,}4.$$

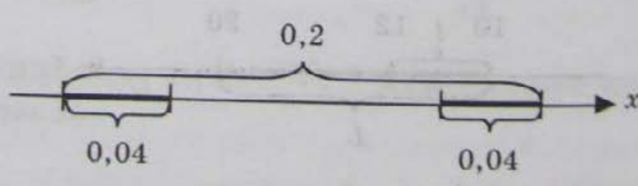


Рис. 2.14

2.3.2. Нормальное распределение

Закон нормального распределения непрерывной случайной величины описывается плотностью распределения вероятностей:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \tag{2.18}$$

Данный закон чаще всего встречается при описании непрерывных случайных величин в практических задачах. Объяснить причину широкого распространения закона нормального распределения впервые удалось русскому ученому А.М. Ляпунову. Он показал, что закон нормального распределения возникает тогда, когда случайная величина X может быть представлена в виде суммы большого числа независимых в совокупности случайных величин, каждая из которых вносит незначительный вклад, причем не играет роли, какими являются законы распределения вероятностей таких слагаемых. В этом заключается вероятностный смысл центральной предельной теоремы. Поскольку большинство случайных величин, описывающих природные, технические и экономические процессы, формируются под влиянием многочисленных случайных факторов, нормальный закон распределения оказывается наиболее распространенным.

Плотность распределения вероятностей для нормального распределения содержит два параметра – a и σ. Два графика $f(x)$ с одинаковым значением параметра a и различными значениями σ приведены на рис. 2.15.

Максимальное значение функции достигается при $x = a$ и равно

$$f_{\max}(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

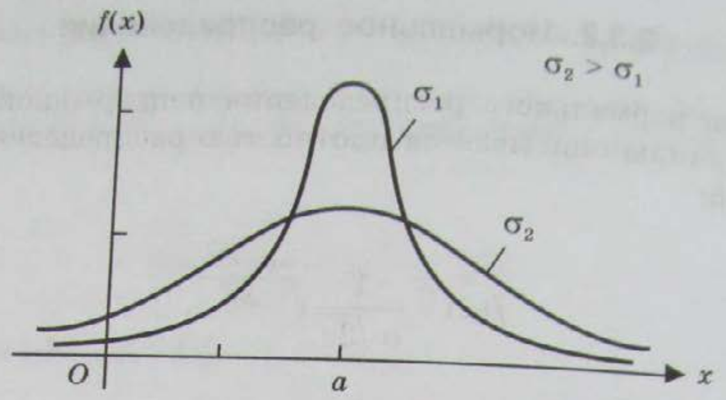


Рис. 2.15

Можно показать, что точками перегиба являются точки при $x = a \pm \sigma$. Из графика $f(x)$ видно, что первый параметр равен математическому ожиданию нормально распределенной случайной величины, а второй характеризует ее рассеивание. Действительно,

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left| \begin{array}{l} z = \dfrac{x-a}{\sigma} \\ x = \sigma \cdot z + a \\ dx = \sigma \cdot dz \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-z^2}{2}} (\sigma z + a)\sigma dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-z^2}{2}} \sigma z dz +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-z^2}{2}} a dz = 0 + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = a.$$

Первый интеграл равен нулю как интеграл от нечетной функции в симметричных пределах; второй интеграл называется интегралом Пуассона и равен $\sqrt{2\pi}$.

Аналогичным образом, дважды проинтегрировав по частям, можно показать, что

$$D(X) = \sigma^2.$$

Таким образом, параметр σ является средним квадратичным отклонением нормально распределенной случайной величины.

Функция распределения вероятностей для нормального закона имеет вид

$$F(x) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \tag{2.19}$$

Формулу (2.19) получим путем замены переменной интегрирования аналогично случаю вычисления математического ожидания. Согласно формуле (2.11)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = \left| \begin{array}{l} z = \dfrac{x-a}{\sigma} \\ x = \sigma\cdot z + a \\ dx = \sigma\cdot dz \\ z_{н} = -\infty \\ z_{в} = \dfrac{x-a}{\sigma} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z_в} e^{\frac{-z^2}{2}}\sigma dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{\frac{-z^2}{2}}dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{z_в} e^{\frac{-z^2}{2}}dz.$$

Первый интеграл в силу четности подынтегральной функции равен $0{,}5\sqrt{2\pi}$ (половине интеграла Пуассона), а второй представим с помощью функции Лапласа, ранее введенной в п. 1.4.4:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$$

Тогда получим искомую формулу

$$F(x) = 0{,}5 + \Phi(z_в) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Следует подчеркнуть, что неопределенный интеграл $\int e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ является неберущимся, поэтому значения функции Лапласа, приведенные в прилож. 2, вычисляются приближенно, хотя и с высокой степенью точности.

Найдем формулу, выражающую *вероятность попадания в заданный интервал нормально распределенной случайной величины*:

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = 0,5 + \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - 0,5 - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

откуда

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \qquad (2.20)$$

Из найденной формулы легко получить формулу вычисления *вероятности заданного отклонения*, необходимую при решении многих задач.

Обозначим заданное отклонение случайной величины от математического ожидания $\delta > 0$ и найдем вероятность выполнения неравенства $|X - a| < \delta$:

$$P(|X - a| < \delta) = P(a - \delta < X < a + \delta) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right);$$

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \qquad (2.21)$$

Область, удовлетворяющая данному неравенству, отмечена дугой на рис. 2.16.

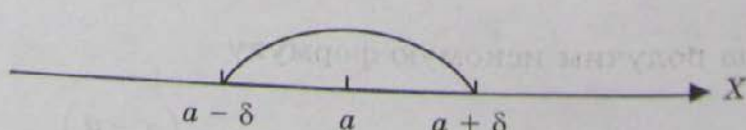


Рис. 2.16

Вычислим вероятности того, что отклонение примет значения, равные σ, 2σ, 3σ. Тогда

$$P(|X-a|<\sigma)=2\Phi(1)\approx 0{,}6826;$$
$$P(|X-a|<2\sigma)=2\Phi(2)\approx 0{,}9544;$$
$$P(|X-a|<3\sigma)=2\Phi(3)\approx 0{,}9973.$$

Следовательно, для нормально распределенной случайной величины вероятность попадания в интервал $(a-3\sigma,$ $a-3\sigma)\approx 1$, т. е. это практически достоверное событие. В этом заключается вероятностный смысл *правила трех сигм*.

Пример 2.16. Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $a = 20$ и средним квадратичным отклонением $\sigma = 10$. Найти вероятность того, что она попадет в интервал от 10 до 40.

Решение. Подставив в формулу (2.20) приведенные в условии примера данные, получим

$$P(10<X<40)=\Phi\left(\frac{40-20}{10}\right)-\Phi\left(\frac{10-20}{10}\right)=\Phi(2)-\Phi(-1)=$$
$$=\Phi(2)+\Phi(1)\approx 0,4772+0,3413=0,8185.$$

Значения функции Лапласа взяты из прилож. 2.

В ходе вычислений было использовано свойство нечетности функции Лапласа, а именно: $\Phi(-1) = -\Phi(1)$.

Пример 2.17. В результате проверки точности прибора установлено, что 80 % ошибок не вышло за пределы ±20 м. Известно, что прибор не имеет систематических ошибок. Найти процент ошибок, не выходящих за пределы ±5 м, полагая, что ошибки распределены по нормальному закону.

Решение. Поскольку систематических ошибок прибор не дает, то ошибки имеют случайный характер. Математическое ожидание случайных ошибок равно нулю ($a = 0$).

По формуле (2.21) получим

$$P\left(|X|<\delta\right)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

По условию задачи вероятность попадания случайной величины в интервал (−20, 20) равна 0,8. Следовательно, $2\Phi\left(\frac{20}{\sigma}\right)=0,8$, откуда $\Phi\left(\frac{20}{\sigma}\right)=0,4$. По таблице значений функции Лапласа (см. прилож. 2) найдем $\frac{20}{\sigma}=1,28$, откуда $\sigma=\frac{20}{1,28}$.

Искомая вероятность:

$$P(|X|<5)=2\Phi\left(\frac{5\cdot 1,28}{20}\right)=2\Phi(0,32).$$

По той же таблице найдем, что $\Phi(0,32)\approx 0,1255$, следовательно, $P(|X|<5)\approx 0,251$.

Пример 2.18. Измерение дальности до объекта сопровождается систематическими и случайными ошибками. Систематическая ошибка равна 50 м в сторону занижения дальности. Случайные ошибки подчиняются нормальному закону со средним квадратичным отклонением $\sigma = 100$ м. Найти вероятность измерения дальности с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 100 м.

Решение. Пусть X – суммарная ошибка измерения дальности. Так как математическое ожидание случайной ошибки измерения равно нулю, то математическое ожидание суммарной ошибки равно $a=-50$ м.

Чтобы ошибка не превосходила по абсолютной величине 100 м, случайная величина должна попасть в интервал (−100, 100). Подставив в формулу (2.20) $\beta=100$, $\alpha=-100$, $\sigma=100$, получим

$$P(|X|<100)=P(-100<X<100)=\Phi\left(\frac{100+50}{100}\right)-\Phi\left(\frac{-100+50}{100}\right)=$$
$$=\Phi(1,5)-\Phi(-0,5)=\Phi(1,5)+\Phi(0,5)\approx 0,4332+0,1915=0,6247.$$

2.3.3. Показательное распределение

Плотность распределения вероятностей для показательного закона имеет вид

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \lambda\cdot e^{-\lambda\cdot t}, & t\geq 0,\end{cases}\qquad (2.22)$$

где $\lambda = \mathrm{const}$, $\lambda>0$.

График $f(t)$ изображен на рис. 2.17.

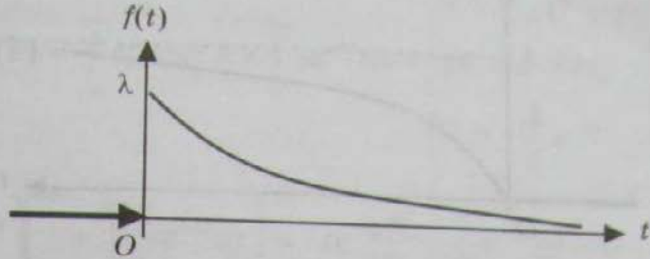


Рис. 2.17

Обратим внимание, что вместо общепринятого аргумента функции x аргументом плотности показательного распределения является t. Эта замена не случайна. По показательному закону распределения вероятностей часто описывается продолжительность безотказной работы различных приборов, составляющих их элементов или, например, время между появлениями двух последовательных событий простейшего потока.

Найдем функцию распределения. Если ее аргумент $t < 0$, то $f(t) = 0$, а значит, и $F(t)$ также равна нулю. Пусть $t \geq 0$. Использовав при интегрировании метод замены переменной ($x = -\lambda t$), получим

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t)dt = \lambda\int_{0}^{t} e^{-\lambda \cdot t}dt = \left| \begin{array}{l} x = -\lambda t,\ t = -\dfrac{x}{\lambda}, \\ dt = -\dfrac{1}{\lambda}dx,\ x_{\text{н}} = 0,\ x_{\text{в}} = -\lambda t \end{array} \right| =$$

$$= \lambda\int_{0}^{-\lambda t} e^{x}(-\frac{1}{\lambda})dx = -\int_{0}^{-\lambda t} e^{x}dx = -e^{x}\Big|_{0}^{-\lambda t} = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Тогда функция распределения, график которой приведен на рис. 2.18, будет иметь вид

$$F(t) = \begin{cases} 0,\ t < 0, \\ 1 - e^{-\lambda t},\ t \geq 0. \end{cases} \quad (2.23)$$

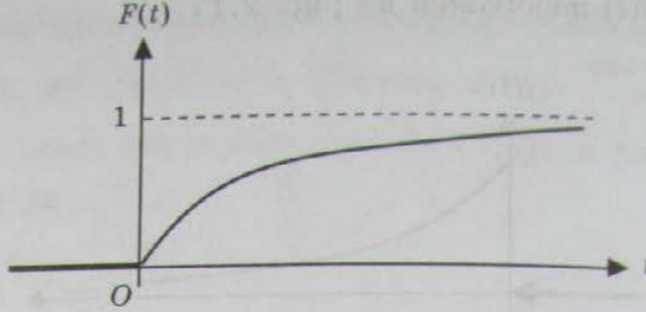


Рис. 2.18

Пусть случайная величина T – время безотказной работы прибора имеет показательный закон распределения. Вероятность попадания этой случайной величины в интервал от α до β равна:

$$P(\alpha < T < \beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}. \tag{2.24}$$

Действительно,

$$P(\alpha < T < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = 1 - e^{-\lambda\beta} - 1 + e^{-\lambda\alpha} = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}.$$

Пусть t_0 – гарантийное время работы прибора. Найдем вероятность того, что прибор проработает гарантийный срок. Условием этого будет выполнение неравенства $T \geq t_0$:

$$P(T \geq t_0) = 1 - P(T < t_0) = 1 - F(t_0) = 1 - 1 + e^{-\lambda t_0} = e^{-\lambda t_0}.$$

Функция $R(t) = e^{-\lambda t}$ называется *функцией надежности* для показательного распределения, так как она равна вероятности того, что прибор проработает время не менее t.

Найдем основные числовые характеристики показательного распределения. Применив метод интегрирования по частям ($\int UdV = UV - \int VdU$) и вычисленный при нахождении функции $F(x)$ интеграл от функции $e^{-\lambda t}$, будем иметь

$$M(T) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \lambda \int\limits_{0}^{+\infty} te^{-\lambda t}dt = \left| \begin{matrix} U = t,\, dU = dt, \\ dV = e^{-\lambda t}dt, \\ V = -\dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda t} \end{matrix} \right| =$$

$$= \lambda\left(t\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right)\Bigg|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}dt\right) = -te^{-\lambda t}\Big|_0^{\infty} + \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda t}dt = 0 - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda},$$

где $t \cdot e^{-\lambda t}\Big|^{+\infty} = \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t}{e^{\lambda t}} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{\lambda e^{\lambda t}} = \left(\dfrac{1}{\infty}\right) = 0.$

При вычислении предела мы воспользовались правилом Лопиталя, заменив отношение функций отношением их производных.

Если средняя продолжительность работы прибора равна $1/\lambda$, то λ характеризует среднее число отказов в единицу времени.

Дважды проинтегрировав по частям, можно получить $M(T^2) = 2/\lambda^2$. Тогда дисперсия равна

$$D(T) = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Итак, основные числовые характеристики показательного распределения равны:

$$M(T) = \frac{1}{\lambda}; \tag{2.25}$$

$$D(T) = \frac{1}{\lambda^2}; \tag{2.26}$$

$$\sigma(T) = \frac{1}{\lambda}. \tag{2.27}$$

Равенство $M(T) = \sigma(T)$ – характеристический признак именно показательного распределения.

Пример 2.19. Среднее время устранения повреждения канала $t_{ср}$ = 10 мин. Случайная величина T – время устранения повреждения канала описывается показательным распределением. Найти вероятность того, что на восстановление канала потребуется: а) более 10 мин; б) от 5 до 10 мин.

Решение. Для нахождения вероятности $P(T > 10)$ воспользуемся функцией надежности $R(t) = e^{-\lambda t} = P(T > t)$. Поскольку математическое ожидание дает среднее значение случайной величины, $M(t) = \frac{1}{\lambda} = 10$ и $\lambda = \frac{1}{10}$.

Отсюда $P(T > 10) = R(10) = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,3679$.

Для нахождения вероятности попадания случайной величины в интервал $P(5 < T < 10)$ воспользуемся формулой (2.24):

$$P(\alpha < T < \beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}.$$

Положив $\beta = 10$, $\alpha = 5$ и $\lambda = \frac{1}{10}$, получим

$$P(5 < T < 10) = e^{-5/10} - e^{-1} = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{e} \approx 0,2387.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какой формулой описывается плотность распределения вероятностей для равномерного закона?
2. Чему равно математическое ожидание равномерно распределенной случайной величины?
3. Чему равны дисперсия и среднее квадратичное отклонение равномерно распределенной случайной величины?
4. При каких условиях возникает нормальный закон?
5. Какой формулой описывается плотность распределения вероятностей для нормального закона? Какие параметры она содержит?
6. От какого параметра зависит значение максимума функции плотности распределения вероятностей для нормального закона?
7. Как определяется функция Лапласа?
8. Каков вероятностный смысл правила трех сигм?
9. Приведите формулу вычисления вероятности заданного отклонения.
10. Для каких практических задач используется показательное распределение?

11. Сколько параметров содержит показательное распределение?

12. Какой формулой описывается плотность распределения вероятностей для показательного закона?

13. Что такое функция надежности для показательного закона?

14. По какой формуле вычисляется вероятность попадания в заданный интервал случайной величины, распределенной по показательному закону?

Задачи для самостоятельного решения

2.35. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения – 6 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 мин.

2.36. Все значения равномерно распределенной случайной величины X принадлежат отрезку [4; 8]. Найти вероятность попадания значения случайной величины X в отрезок [1; 5].

2.37. Трамваи данного маршрута идут с интервалом в 8 мин. Пассажир подходит к трамвайной остановке в некоторый момент времени. Какова вероятность появления пассажира не ранее чем через 1 мин после ухода предыдущего трамвая, но не позднее, чем за 2 мин до прихода следующего трамвая?

2.38. Минутная стрелка часов перемещается скачком в конце каждой минуты. Рассматривая разность между истинным временем и временем, которое в данное мгновение показывают часы, как случайную величину X, распределенную равномерно, найти вероятность того, что в данный момент часы покажут время, которое отличается от истинного не более чем на 15 с.

2.39. Случайная величина X имеет функцию плотности распределения $f(x)=\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{72}}$. По какому закону распределена случайная величина? Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(x)$.

2.40. Ошибка измерителя дальности подчинена нормальному закону с систематической ошибкой 20 м и средним квадратичным отклонением 60 м. Найти вероятность того, что измеренное значение дальности будет отклоняться от истинного не более чем на 30 м.

2.41. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, распределенной по закону $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$.

2.42. При массе некоторого изделия в 10 кг найдено, что отклонения, по абсолютному значению превосходящие 50 г, встречаются в среднем 34 раза на каждые 1000 изделий. Допуская, что масса изделия распределен по нормальному закону, определить его среднее квадратичное отклонение.

2.43. Среднее значение длины детали 50 см, а дисперсия 0,1. Найти вероятность того, что случайно взятая деталь окажется по длине не меньше 49,5 см и не больше 50,5 см, если длина детали распределена по нормальному закону.

2.44. Случайная величина X распределена нормально с параметрами $a = 1$, $\sigma = 1$. Вычислить вероятность того, что $|X - 2| \le 1$.

2.45. При определении расстояния радиолокатором случайные ошибки распределяются по нормальному закону. Какова вероятность того, что ошибка при определении расстояния не превысит 20 м, если известно, что систематических ошибок радиолокатор не допускает, а дисперсия случайных ошибок равна 1370 м^2.

2.46. Ошибки измерений прибора подчиняются нормальному закону распределения. Прибор имеет систематическую ошибку $a = 5$ м и среднеквадратичную ошибку $\sigma = 75$ м. Какова вероятность того, что две подряд ошибки измерений попадут в интервал (0; 80).

2.47. Измерительный прибор не имеет систематических ошибок (математическое ожидание ошибок равно нулю). Вероятность того, что ошибка не превзойдет по абсолютной величине 12 м, равна 0,9356. Найти вероятность того, что ошибки не превзойдут по абсолютной величине 10 м, считая, что ошибки распределены по нормальному закону.

2.48. Случайная величина X распределена нормально. Найти ее дисперсию, если $M(X) = 12$ и $P(10 < X < 14) = 0{,}8926$.

2.49. Непрерывная величина X распределена по показательному закону:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 2e^{-2x}, & x \ge 0. \end{cases}$$

Найти вероятность попадания значений величины X в интервал (0,1; 0,7).

2.50. Срок службы жесткого диска компьютера – случайная величина, подчиняющаяся показательному распределению со средним временем безотказной работы в 12 000 ч. Найти долю жестких дисков, срок службы которых превысит 24 000 ч.

2.51. Вероятность безотказной работы телевизора распределена по показательному закону $f(t) = 0{,}002e^{-0{,}002t}$ $(t > 0)$. Найти вероятность того, что телевизор проработает 1000 ч.

2.52. Срок службы батареек приблизительно подчиняется показательному закону с $\lambda = 1/12$ 1/день. Какова доля батареек со сроком службы больше чем 9 дней?

2.53. Служащий рекламного агентства утверждает, что время, в течение которого телезрители помнят содержание коммерческого рекламного ролика, подчиняется показательному закону с $\lambda =$ $= 0{,}25$ 1/день. Найти долю зрителей, способных вспомнить рекламу спустя 7 дней.

2.54. Программист обнаружил, что время (в днях) до нахождения ошибки подчиняется показательному распределению с $\lambda = 0{,}25$ 1/день. Найти среднее время, потраченное на нахождение ошибки, и определить вероятность того, что для нахождения ошибки понадобится более 5 дней.

2.55. Испытывают два независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы первого элемента T_1 имеет показательное распределение $F_1(t) = 1 - e^{-0{,}02t}$, второго $T_2 - F_2(t) = 1 - e^{-0{,}05t}$, где время измеряется в часах. Найти вероятность того, что за время $t = 6$ ч оба элемента откажут.

Ответы: **2.35.** 0,5. **2.36.** 0,25. **2.37.** 0.625. **2.38.** 0,25. **2.39.** Нормальный закон, $M(X) = 3$; $D(X) = 36$; $\sigma(x) = 6$; $F(x) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{x-3}{\sigma}\right)$. **2.40.** 0,364. **2.41.** $M(X) = a$; $D(X) = \sigma^2$. **2.42.** 23,6 г. **2.43.** 0,886. **2.44.** 0,4772. **2.45.** 0,41. **2.46.** 0,136. **2.47.** 0,8764. **2.48.** 1,543. **2.49.** 0,5721. **2.50.** 0,1353. **2.51.** 0,1353. **2.52.** 0,4724. **2.53.** 0,1738. **2.54.** 4; 0,2865. **2.55.** 0,0293.

2.4. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

В случаях большого числа испытаний или случайных величин, являющихся суммами большого числа случайных величин, имеет место свойство устойчивости средних. Случайные отклонения от среднего в каждом испытании при большом числе испытаний взаимно погашаются, и средний результат можно предсказать с большой степенью точности. Устойчивость средних – физическое содержание закона больших чисел.

Теория вероятностей под законом больших чисел понимает ряд теорем, в которых для тех или иных условий устанавливается факт приближения средних характеристик большого числа опытов к некоторым постоянным величинам. В частности, теорема Чебышева дает наиболее общий случай закона больших чисел, а теорема Бернулли – простейший. Перед их доказательством предварительно получим неравенство Чебышева и дисперсию среднего арифметического.

2.4.1. Неравенство Чебышева

Вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше чем разность между единицей и отношением дисперсии к квадрату ε:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (2.28)$$

Доказательство. Неравенство Чебышева справедливо как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин. Докажем его для дискретных случайных величин.

Пусть случайная величина X принимает значения x_1, $x_2,...,x_n$ с вероятностями p_1, $p_2,...,p_n$ соответственно. Ее дисперсия равна

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 \cdot p_i.$$

В этой сумме отбросим все слагаемые, не удовлетворяющие неравенству $|x_i - M(x)| \geq \varepsilon$. Тогда дисперсия станет не меньше суммы оставшихся слагаемых:

$$D(X) \geq \sum_{|x_i - M(x)| \geq \varepsilon} (x_i - M(X))^2 \cdot p_i.$$

Учитывая, что для всех слагаемых $(x_i - M(X))^2 \geq \varepsilon^2$, имеем

$$D(X) \geq \sum_{|x_i - M(x)| \geq \varepsilon} (x_i - M(X))^2 \cdot p_i \geq \sum_{|x_i - M(x)| \geq \varepsilon} \varepsilon^2 \cdot p_i =$$

$$= \varepsilon^2 \sum_{|x_i - M(x)| \ge \varepsilon} p_i = \varepsilon^2 p(|X - M(X)| \ge \varepsilon).$$

Отсюда $p(|X - M(X)| \ge \varepsilon) \le \dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$.

Перейдя к вероятности противоположного события $P(|X - M(X)| \ge \varepsilon) = 1 - P(|X - M(X)| < \varepsilon)$, получим

$$1 - P(| X - M(X) |< \varepsilon) \le \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Перенеся единицу в правую часть и умножив обе части неравенства на (–1), получим неравенство Чебышева, что и требовалось доказать.

Замечание: неравенство Чебышева имеет большое теоретическое значение, но на практике используется сравнительно редко. Это связано с тем, что часто оно дает достаточно грубую оценку вероятности события. Например, если $D(X) = \varepsilon^2$, то из неравенства Чебышева следует, что $P \ge 0$.

Пример 2.20. Вероятность наступления события в одном испытании равна 1/4. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что при 800 испытаниях событие появится от 150 до 250 раз.

Решение. Случайная величина X – число появлений события в 800 испытаниях. Поскольку вероятность появления события в каждом испытании одинакова, то эта случайная величина подчинена биномиальному распределению. Тогда ее математическое ожидание равно $M(X) = np = 200$, а дисперсия – $D(X) = npq = 200 \cdot \dfrac{3}{4} = 150$.

Подставив найденные значения в неравенство Чебышева, будем иметь

$$p(150 < X < 250) = p(| X - 200 |< 50) \ge 1 - \frac{150}{50 \cdot 50} \ge 0,94.$$

2.4.2. Дисперсия среднего арифметического

1. Пусть случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n$ имеют одинаковые значения математических ожиданий и дисперсий, а также попарно независимы. Обозначим D дисперсию каждой случайной величины ($D(X_i) = D = \text{const}, i = \overline{1,n}$).

Вычислим среднее арифметическое этих величин и ее дисперсию:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n};$$

$$D(\overline{X}) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} D(X_i)\right) = \frac{nD}{n^2} = \frac{D}{n}.$$

Итак, если у n случайных величин дисперсия одинакова, то дисперсия их среднего арифметического в n раз меньше дисперсии одной случайной величины:

$$D(\overline{X}) = \frac{D}{n}. \tag{2.29}$$

Данная формула – одна из важнейших в теории измерений. Не случайно при выполнении лабораторных работ измерения проводятся не менее 3 раз. Тогда дисперсия их среднего арифметического уменьшается в 3 раза и более.

2. Пусть случайные величины X_i $(i = \overline{1,n})$ имеют разные значения дисперсий, но они ограничены сверху некоторой константой C $(D(X_i) \le C, i = \overline{1,n})$. Тогда дисперсия среднего арифметического также ограничена:

$$D(\overline{X}) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} D(X_i)\right) \le \frac{nC}{n^2};$$

$$D(\overline{X}) \le \frac{C}{n}. \tag{2.30}$$

2.4.3 Теорема Чебышева

Если случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ попарно независимы и их дисперсии ограничены сверху некоторой константой C, то для любого положительного ε

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1, \quad (2.31)$$

или

$$\lim_{n\to\infty} P(|\,\overline{X} - M(\overline{X})\,| < \varepsilon) = 1.$$

Доказательство. Среднее арифметическое $\overline{X}$ также является случайной величиной. Применим к нему неравенство Чебышева:

$$P(|\,\overline{X} - M(\overline{X})\,| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{D(\overline{X})}{\varepsilon^2}.$$

Так как дисперсии всех случайных величин ограничены, то согласно (2.30) $D(\overline{X}) \le \frac{C}{n}$. Тогда

$$P(|\,\overline{X} - M(\overline{X})\,| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}. \quad (2.32)$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} P(|\,\overline{X} - M(\overline{X})\,| < \varepsilon) \ge 1.$$

Так как вероятность не может быть больше единицы, то справедлив только знак равенства, что и требовалось доказать.

Частный случай теоремы Чебышева. Пусть все математические ожидания одинаковы, т. е. $M(X_i) = a$, $i = \overline{1, n}$. Тогда теорема Чебышева запишется в виде

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} - a\right| < \varepsilon\right) = 1. \qquad (2.33)$$

На этой формуле основывается *выборочный метод математической статистики*. Если a – истинное значение измеряемой величины, то при увеличении числа измерений среднее арифметическое измеренных значений приближается к a. Таким образом, по сравнительно небольшому количеству объектов, отобранных для изучения случайным образом, можно судить обо всей совокупности исследуемых объектов.

2.4.4. Теорема Бернулли

Если в каждом из n испытаний вероятность наступления события одинакова, то при $n \to \infty$ вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности по абсолютной величине будет сколь угодно малым, стремится к единице:

$$\lim_{n\to\infty}\left(P\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1. \qquad (2.34)$$

Доказательство. Пусть случайная величина X – число появлений события в n испытаниях, протекающих в одинаковых условиях. Как и в примере (2.7), представим X в виде суммы $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, $i = \overline{1, n}$, где X_i – число появления события в одном i-м испытании. Поскольку случайная величина X

описывается биномиальным законом распределения, ее математическое ожидание равно $M(X) = np$. Найдем математическое ожидание среднего арифметического $\overline{X}$:

$$M(\overline{X}) = M\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{1}{n} M\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{np}{n} = p.$$

Подставим данный результат в формулу Чебышева:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Обозначив m число появления событий в n испытаниях $m = \sum_{i=1}^{n} X_i$, получим формулу (2.34), что и требовалось доказать.

Обоснуйте самостоятельно выполнение условия об ограниченности дисперсий случайных величин X_i.

Замечания. 1. По теореме Бернулли в отдельных сериях опытов возможно отклонение относительной частоты от вероятности по модулю больше чем на ε, но при большом числе опытов n такое событие маловероятно.

2. В обычном понимании предела последовательности $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ подразумевается, что для сколь угодно малой величины ε существует такое N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$. Для приведенного в теореме Бернулли предела это не так, поэтому не говорят, что относительная частота сходится к вероятности, а говорят, что относительная частота сходится к вероятности по вероятности.

3. При оценке отклонения относительной частоты от вероятности удобно использовать неравенство Бернулли:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)>1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}. \qquad (2.35)$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что понимается под законом больших чисел?
2. Запишите неравенство Чебышева.
3. Чему равна дисперсия среднего арифметического n попарно независимых случайных величин, имеющих одинаковые значения математических ожиданий и дисперсий?
4. Запишите формулу, выражающую теорему Чебышева.
5. Сформулируйте теорему Бернулли.
6. Запишите формулу, выражающую частный случай теоремы Чебышева.

Задачи для самостоятельного решения

2.56. Вероятность появления события в одном испытании $p = 0{,}3$. Оценить вероятность того, что в $n = 10^4$ испытаниях отклонение среднего числа появления события в одном испытании от своего математического ожидания по абсолютной величине не превзойдет 0,01 (воспользуйтесь неравенством (2.35)).

2.57. Вероятность появления события в одном испытании $p = 0{,}5$. Оценить вероятность того, что в 1000 независимых опытах число появлений события будет в пределах от 400 до 600.

2.58. Компьютерная сеть обслуживает 18 000 абонентов, вероятность работы которых в вечернее время равна 0,9. Какова вероятность того, что число работающих вечером абонентов отличается от своего математического ожидания по модулю не более чем на 200.

2.59. Дисперсия случайной величины X равна 2,5. По результатам 200 независимых опытов вычислена средняя арифметическая, значением которой заменили неизвестную величину $M(X)$. Каково наименьшее значение вероятности того, что эта замена приведет к ошибке менее чем 0,25?

2.60. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 900 испытаний равна 0,7. Используя неравенство Бернулли, оценить вероятность того, что событие состоится число раз, заключенное между 600 и 660.

2.61. Вероятность наступления некоторого события равна 0,75 (в каждом испытании). Предполагается произвести 10 000 испытаний. Используя неравенство Бернулли, оценить вероятность того, что при этом число наступления события отклонится от наиболее вероятного значения не более чем на 100.

2.62. Принимая равновероятным рождение мальчика и девочки, оценить с помощью теоремы Бернулли вероятность того, что из 1000 родившихся детей мальчиков будет от 465 до 535.

Ответы: **2.56.** $P \geq 0{,}79$. **2.57.** $P \geq 0{,}975$. **2.58.** $P \geq 0{,}956$. **2.59.** $P \geq 0{,}8$. **2.60.** $P > 0{,}79$. **2.61.** $P > 0{,}8125$. **2.62.** $P \geq 0{,}796$.

Задачи для повторения

1. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения

X	-1	1	x_3
P	0,1	p_2	0,3

Известно, что $M(X) = 1{,}1$. Найти p_2; x_3; $D(X)$; $P(X \geq 1)$; $F(x)$. Начертить график $F(x)$.

2. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения

X	-1	x_2	2
P	0,2	0,1	p_3

Известно, что $M(X) = 1{,}3$. Найти p_3; x_2; $D(X)$; $P(X < 1)$; $F(x)$. Начертить график $F(x)$.

3. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения

X	-2	0	2
P	p_1	0,1	0,5

Найти p_1; $M(X)$; $D(X)$; $P(0 \leq X \leq 2)$; $F(x)$, $M(3X - 2)$, $D(3X - 2)$. Начертить график $F(x)$.

4. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения

X	0	1	5
P	0,3	0,5	p_3

Найти p_3; $M(X)$; $D(X)$; $P(X \geq 3)$; $F(x)$. Начертить график $F(x)$.

В приведенных ниже примерах 5–10 найти закон распределения указанной дискретной случайной величины, ее функцию распределения и построить график $F(x)$. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение для указанной случайной величины X.

5. Вероятность приема каждого из четырех радиосигналов равна 0,6; случайная величина X – число принятых радиосигналов.

6. Вероятность отказа прибора за время испытания на надежность равна 0,2; случайная величина X – число приборов, отказавших в работе, среди пяти испытываемых.

7. Баскетбольный мяч трижды бросают в корзину. Вероятность попадания каждый раз равна 0,8. Случайная величина X – число попаданий мячом в корзину.

8. Рабочий обслуживает четыре станка. Вероятность выхода из строя в течение смены для первого станка равна 0,6, второго – 0,5, третьего – 0,4, четвертого – 0,5. Случайная величина X – число станков, вышедших из строя за смену.

9. Из колоды в 32 карты наугад извлекают четыре карты. Случайная величина X – число бубновых карт в выборке.

10. Стрелок имеет четыре патрона и стреляет до первого попадания. Вероятность промаха при каждом выстреле равна 0,2. Случайная величина X – число оставшихся неиспользованными патронов.

11. Два стрелка поочередно стреляют по мишени до тех пор, пока один из них не промахнется. Вероятность попадания для первого стрелка равна p_1, а для второго – p_2. Найти законы распределения количества выстрелов, произведенных каждым стрелком.

12. После ответа на вопросы экзаменационного билета экзаменатор задает студенту от одного до четырех дополнительных вопросов. Преподаватель прекращает задавать дополнительные вопросы, как только студент не ответит на очередной вопрос. Вероятность того, что студент ответит на любой поставленный вопрос, равна 0,9. Составить ряд распределения и вычислить математическое ожидание случайной величины X – числа дополнительных вопросов.

13. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ a(x^2-1), & 1<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Найти a; $f(x)$; $M(X)$; $D(X)$; $P(-1<x<1)$. Начертить графики $f(x)$ и $F(x)$.

14. Непрерывная случайная величина x задана функцией распределения $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ ax^2+bx, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

Найти a; b; $f(x)$; $M(X)$; $D(X)$; $P(0<x<1{,}5)$. Начертить графики $f(x)$ и $F(x)$.

15. Случайная величина X задана дифференциальной функцией

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{\sin x}{2}, & 0\le x\le \pi,\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$$

Найти: а) интегральную функцию; б) вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение, заключенное в интервале $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

16. Измерительный прибор не имеет систематических ошибок (математическое ожидание ошибок равно нулю). Вероятность того, что ошибка не превзойдет по абсолютной величине 6 м, равна 0,7154. Найти вероятность того, что ошибки не превзойдут по абсолютной величине 8 м, считая, что ошибки распределены по нормальному закону.

17. Случайная величина X – ошибка измерительного прибора распределена по нормальному закону с дисперсией, равной 16 мкм, и математическим ожиданием, равным нулю. Найти вероятность того, что величина ошибки при одном измерении не превзойдет по абсолютной величине 6 мкм.

18. Случайная величина X распределена нормально. Вычислить вероятность ее попадания в интервал (20, 70), если $M(X) = 40$ и $D(X) = 100$.

19. Случайная величина X распределена нормально. Найти ее дисперсию, если $M(X) = 12$ и $P(10 < X < 14) = 0{,}8926$.

20. Случайная величина X распределена нормально. Найти границы интервала (α, β), симметричного относительно $M(X)$, в который случайная величина попадает с вероятностью $p = 0{,}975$, если $M(X) = 18$, $D(X) = 0{,}0576$.

21. Случайная величина X распределена нормально. Найти вероятность того, что случайная величина не попадет в интервал (30, 60), если $M(X) = 40$; $D(X) = 25$.

22. Все значения равномерно распределенной случайной величины X принадлежат отрезку [0; 10]. Найти вероятность попадания значения случайной величины X в отрезок [1; 5].

23. Все значения равномерно распределенной случайной величины X принадлежат отрезку [−4; 8]. Найти вероятность попадания значения случайной величины X в отрезок [−5; 5].

24. Длительность времени безотказной работы элемента T – случайная величина, распределенная по показательному закону $f(t) = e^{-\lambda t}\ (t \geq 0)$. Определить вероятность того, что в течение времени t: а) элемент откажет ($\lambda = 0{,}5$, $t = 3$); б) элемент не откажет ($\lambda = 2$, $t = 1$).

25. Время устранения повреждения на канале связи T – случайная величина, распределенная по закону $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}\ (t \geq 0)$. Среднее время восстановления канала – 10 мин. Определить вероятность того, что на восстановление канала потребуется: а) более 10 мин; б) от 5 до 10 мин.

26. Дискретные случайные величины X и Y заданы рядами распределения:

X	−2	2
p	0,4	0,6

Y	−1	0	1
p	0,5	0,3	0,2

Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины:

а) $Z = 2X^2 - 3Y + 5$;

б) $T = -Y^2 + X + 3$;

в) $V = 4Y^2 - Y + 2$.

СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Часто случайное явление описывается несколькими случайными величинами. При этом недостаточно знать и рассматривать отдельные случайные величины, а необходимо учитывать связь между ними. В таком случае говорят, что случайное явление описывается системой случайных величин. Например, при изучении вольт-амперной характеристики транзистора измеряют напряжение и ток, которые составляют систему из двух случайных величин. Местоположение самолета во время полета, характеризующееся тремя координатами, задается системой из трех случайных величин и т. п. Для краткости систему двух случайных величин будем называть двумерной случайной величиной, трех – трехмерной, систему n случайных величин – n-мерной случайной величиной.

В дальнейшем в основном ограничимся рассмотрением двумерных случайных величин.

Итак, *двумерной случайной величиной* называется упорядоченная пара двух случайных величин. Входящие в нее случайные величины называют составляющими. Двумерные случайные величины в зависимости от типа составляющих могут быть дискретными (если обе составляющие являются дискретными), непрерывными (если обе составляющие являются непрерывными) или смешанными (если среди составляющих есть как дискретные, так и непрерывные случайные величины). Двумерные случайные величины мы будем обозначать парой заглавных латинских букв в круглых скобках, например (X, Y), а их возможные значения – парой строчных букв (x, y). Такое обозначение имеет сходство с заданием декартовых координат точки на плоскости. Это сходство не случайно. Действительно, геометрически двумерную случайную величину удобно представлять как случайную точку на плоскости (рис. 3.1) или в виде случайного вектора, проведенного из начала координат в точку с координатами (X, Y) (рис. 3.2).

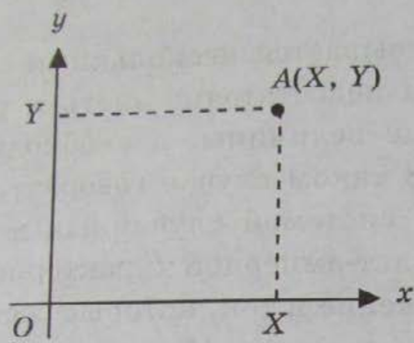


Рис. 3.1

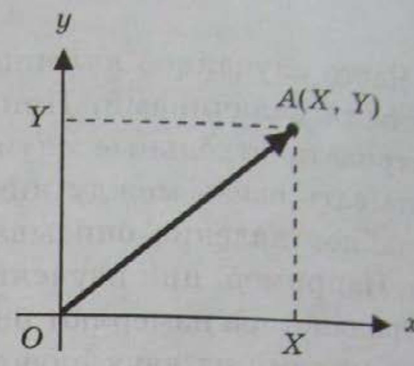


Рис. 3.2

Так как многие понятия и определения, относящиеся к случайным величинам, распространяются или легко обобщаются для случая систем случайных величин, изложение нового материала будет опираться на результаты, полученные в гл. 2 для случайных величин.

3.1. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Закон распределения двумерной случайной величины – это соотношение ее между возможными значениями и вероятностями их появления.

В отличие от одномерной случайной величины возможное значение двумерной случайной величины подразумевает упорядоченную пару чисел.

Способы задания закона те же, что и в гл. 2: табличный или аналитический в виде функции или плотности распределения.

3.1.1. Таблица распределения дискретной двумерной случайной величины

Для дискретных двумерных случайных величин (X, Y) закон можно представить в виде формулы, задающей вероятность произведения двух событий, заключающихся в том, что составляющая X приняла значение x_i $(i = \overline{1, n})$, а составляющая Y – значение y_j $(j = \overline{1, m})$:

$$P_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), \ i = \overline{1, n}, \ j = \overline{1, m}. \qquad (3.1)$$

При последующем изложении индекс i и его наибольшее значение n будет относиться к случайной величине X, а индекс j и его наибольшее значение m – к случайной величине Y.

Если числа n и m сравнительно невелики, то закон распределения дискретной двумерной случайной величины (X, Y) удобно представлять в виде следующей таблицы:

$Y \backslash X$	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}	...	p_{i1}	...	p_{n1}
y_2	p_{12}	p_{22}	...	p_{i2}	...	p_{n2}
...	...	...	...	...	...	...
y_j	p_{1j}	p_{2j}	...	p_{ij}	...	p_{nj}
...	...	...	...	...	...	...
y_m	p_{1m}	p_{2m}	...	p_{im}	...	p_{nm}

Все возможные значения составляющей случайной величины X расположены в первой строке, а составляющей Y – в первом столбце. Вероятности, приведенные в таблице, определяются по формуле (3.1). Обратим внимание, что в отличие от элементов матриц первый индекс вероятности p_{ij} указывает на номер столбца, а второй – на номер строки.

Условие нормировки для дискретной двумерной случайной величины, заданной таблицей распределения, имеет тот же смысл, что и для одной случайной величины: сумма всех вероятностей, входящих в таблицу, равна единице. Однако математически выражается несколько иначе, а именно: в виде двойной суммы:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P_{ij} = 1. \tag{3.2}$$

Исходя из известного закона распределения двумерной случайной величины в виде таблицы распределения, легко составить законы распределения составляющих X и Y. Поскольку все вероятности таблицы относятся к несовместным событиям, просуммировав вероятности первой строки, получим вероятность того, что Y примет значение y_1. Какое значение примет в этом случае составляющая X, нас не интересует. Сумма вероятностей второй строки даст $P(Y = y_2)$ и т. д. ($P(Y = y_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_{ij}$, $j = \overline{1, m}$). Ряд распределения случайной величины Y можно представить в виде отдельной таблицы, но удобно дополнить таблицу распределения для двумерной случайной величины еще одним столбцом справа, в котором следует привести рассчитанные вероятности $P_j = P(Y = y_j)$, $j = \overline{1, m}$. Тогда первый и последний столбцы таблицы будут задавать закон распределения случайной величины Y.

Просуммировав вероятности каждого столбца, получим вероятности $P_i = P(X = x_i) = \sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij}$, $i = \overline{1, n}$. Если записать их в новой строке, дополняющей исходную таблицу снизу, то она вместе с первой строкой, где приведены возможные значения случайной величины X, даст ряд распределения составляющей X.

Y \ X	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n	P_j
y_1	p_{11}	p_{21}	...	p_{i1}	...	p_{n1}	$\sum_{i=1}^{n} P_{i1}$
y_2	p_{12}	p_{22}	...	p_{i2}	...	p_{n2}	$\sum_{i=1}^{n} P_{i2}$
...	...	...	...	...	...	...	...
y_j	p_{1j}	p_{2j}	...	p_{ij}	...	p_{nj}	$\sum_{i=1}^{n} P_{ij}$
...	...	...	...	...	...	...	...
y_m	p_{1m}	p_{2m}	...	p_{im}	...	p_{nm}	$\sum_{i=1}^{n} P_{im}$
P_i	$\sum_{j=1}^{m} P_{1j}$	$\sum_{j=1}^{m} P_{2j}$	...	$\sum_{j=1}^{m} P_{ij}$	...	$\sum_{j=1}^{m} P_{nj}$	1 \ 1

Пример 3.1. По мишени производятся два выстрела. Вероятность попадания при каждом из них равна 0,7. Составить закон распределения для двумерной случайной величины (X, Y), где X – число попаданий, Y – число промахов.

Решение. Обе случайные величины могут принимать значения 0, 1 или 2. Возможны три исхода опыта: событие B_{20} – два попадания $(X = 2, Y = 0)$, событие B_{11} – одно попадание и один промах, событие B_{02} – два промаха. Для расчета вероятностей этих событий введем два события: A_1, A_2 – попадание при первом и втором выстрелах соответственно. Эти события независимые. Их вероятности равны $P(A_1) = P(A_2) = 0,7$. Тогда

$$B_{20} = A_1 \cdot A_2,\ P(B_{20}) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,7 \cdot 0,7 = 0,49.$$

Событие B_{02} означает промахи и при первом, и при втором выстреле. Тогда

$$B_{02} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2,\ \ P(B_{02}) = P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09.$$

Одно попадание в мишень возможно в случаях, когда попали первый раз, а второй раз промахнулись, и, наоборот, первый раз промахнулись, а второй раз попали. Тогда

$$B_{11} = A_1 \cdot \bar{A}_2 + \bar{A}_1 \cdot A_2 .$$

С учетом того что события $A_1 \cdot \bar{A}_2$ и $\bar{A}_1 \cdot A_2$ – несовместные,

$$P(B_{11}) = P(A_1 \cdot \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 \cdot A_2) = 0,7 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,7 = 0,42.$$

Остальные события невозможные, и их вероятности равны нулю. Например, после двух выстрелов не может быть двух попаданий и двух промахов, поэтому $P_{22} = P(X = 2,\ Y = 2) = 0$. Вычисленные значения вероятностей занесем в таблицу:

Y \ X	0	1	2
0	0	0	0,49
1	0	0,42	0
2	0,09	0	0

Для контроля правильности решения проверим выполнение условия нормировки:

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} p_{ij} = 0,49 + 0,42 + 0,09 = 1.$$

Пример 3.2. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины задан таблицей. Найти законы распределения составляющих.

Y \ X	–1	0	1
1	0,1	0,2	0,3
2	0,2	0	0,2

Решение. Дополним данную таблицу еще одним столбцом и еще одной строкой. Просуммировав вероятности, расположенные в первом столбце, найдем вероятность того, что составляющая X примет значение –1:

$$P(X = -1) = 0,1 + 0,2 = 0,3.$$

Таким же образом найдем две другие вероятности:

$$P(X=0)=0{,}2+0=0{,}2;\quad P(X=1)=0{,}3+0{,}2=0{,}5.$$

Запишем вычисленные вероятности в дополнительную строку. Тогда первая и последняя строки дадут закон распределения составляющей X.

Просуммировав вероятности, расположенные в строках, запишем их в последнем столбце. Тогда первый и последний столбцы дадут закон распределения составляющей Y:

$Y \backslash X$	−1	0	1	P_j
1	0,1	0,2	0,3	0,6
2	0,2	0	0,2	0,4
P_i	0,3	0,2	0,5	1 \ 1

3.1.2. Функция распределения двумерной случайной величины

Функцией распределения двумерной случайной величины называется функция двух переменных $F(x, y)$, которая для любой пары действительных чисел x и y равна вероятности того, что случайная величина X примет значение, меньшее значения x, и при этом случайная величина Y примет значение, меньшее y:

$$F(x, y) = P(X < x,\ Y < y). \tag{3.3}$$

Приведенное определение является обобщением определения функции распределения для одномерной случайной величины ($F(x) = P(X < x)$), но требует наступления двух событий $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$. Оно справедливо как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин. Чтобы найти значение функции $F(x, y)$ при $x = x_0$ и $y = y_0$ для дискретной случайной величины, надо просуммировать вероятности p_{ij}, при которых наступают оба события $\{X < x_0\}$ и $\{Y < y_0\}$.

На плоскости xOy область, удовлетворяющая двум указанным неравенствам, расположена левее и ниже точки с координатами (x_0, y_0). Тогда $F(x, y)$ – это вероятность попадания случайной точки в бесконечный квадрант, расположенный левее и ниже точки (x, y) (см. рис. 3.3).

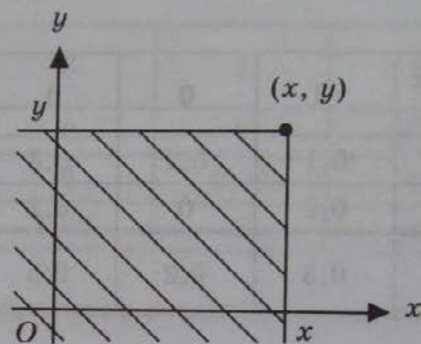


Рис. 3.3

Функция распределения двумерной случайной величины $F(x, y)$ имеет практически те же свойства, что и функция распределения одномерной случайной величины.

1) предельные: $F(-\infty, -\infty) = 0$, $F(-\infty, y) = 0$, $F(x, -\infty) = 0$, $F(+\infty, +\infty) = 1$;

2) так как значения функции $F(x, y)$ равны вероятностям, то область изменения функции:

$$0 \le F(x, y) \le 1;$$

3) $F(x, y)$ является неубывающей функцией по обоим аргументам x и y. Это свойство можно обосновать с помощью рис. 3.3. Так, при увеличении x граница квадранта смещается вправо, а при увеличении у граница квадранта смещается вверх, расширяя область, что не может приводить к уменьшению вероятности.

Получим формулу для нахождения вероятности попадания случайной точки в прямоугольник (рис. 3.4). Сначала определим вероятность попадания в вертикальную полуполосу, расположенную ниже прямой $y = y_2$. Разбив бесконечный квадрант с правой верхней вершиной в точке (x_2, y_2) на бесконечный квадрант с вершиной (x_1, y_2) и рассматриваемую полуполосу, перейдем к вероятностям этих областей, используя геометрическую интерпретацию функции $F(x, y)$ (см. рис. 3.4):

$$P(X < x_2, Y < y_2) = P(X < x_1, Y < y_2) + P(x_1 \le X < x_2, Y < y_2);$$

$$F(x_2, y_2) = F(x_1, y_2) + P(x_1 \le X < x_2, Y < y_2),$$

откуда

$$P(x_1 \le X < x_2, Y < y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2).$$

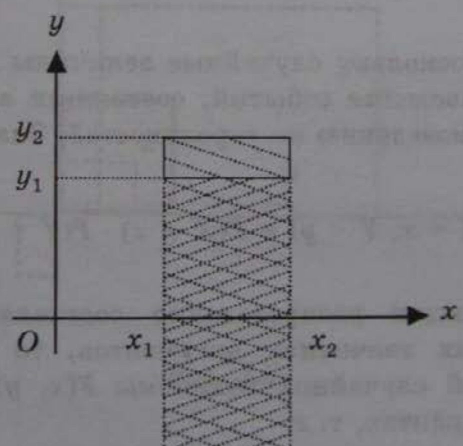


Рис. 3.4

Тогда вероятность попадания в вертикальную полуполосу, расположенную ниже прямой $y = y_1$, равна:

$$P(x_1 \le X < x_2, Y < y_1) = F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1).$$

Вероятность попадания случайной точки в прямоугольник будет равна разности вероятностей попадания в две указанные полуполосы:

$$P(x_1 \le X < x_2,\ y_1 \le Y < y_2) = \\ = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1). \tag{3.4}$$

Пример 3.3. Пусть независимые случайные величины X и Y заданы функциями распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \end{cases} \qquad F(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ 1 - e^{-\mu y}, & y \ge 0, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$, $\mu > 0$.

Составить функцию распределения двумерной случайной величины $F(x, y)$.

Решение. Поскольку случайные величины X и Y независимые, вероятность произведения событий, состоящих в том, что $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$, равна произведению их вероятностей. Значит,

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y) = F(x) \cdot F(y).$$

Так как функции распределения составляющих равны нулю при отрицательных значениях аргументов, то и функция распределения двумерной случайной величины $F(x, y)$ также равна нулю во II, III и IV квадрантах, т. е.

1) $F(x, y) = 0,\ x < 0,\ y < 0$;

2) $F(x, y) = 0,\ x < 0,\ y \ge 0$;

3) $F(x, y) = 0,\ x \ge 0,\ y < 0$;

4) пусть $x \ge 0$ и $y \ge 0$.

Тогда

$$F(x, y) = F(x) \cdot F(y) = (1 - e^{-\lambda x}) \cdot (1 - e^{-\mu y}).$$

Итак, функция распределения двумерной случайной величины имеет вид:

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-\lambda x})\cdot(1-e^{-\mu y}), & x\geq 0,\ y\geq 0,\\ 0, & x<0 \text{ или } y<0.\end{cases}$$

Пример 3.4. Система случайных величин (X, Y) распределена с постоянной вероятностью внутри квадрата со стороной a (рис. 3.5). Составить функцию распределения $F(x, y)$.

Р е ш е н и е. 1. Поскольку случайные величины X и Y не могут принимать отрицательных значений, функция распределения двумерной случайной величины $F(x, y)$ равна нулю во II, III и IV квадрантах.

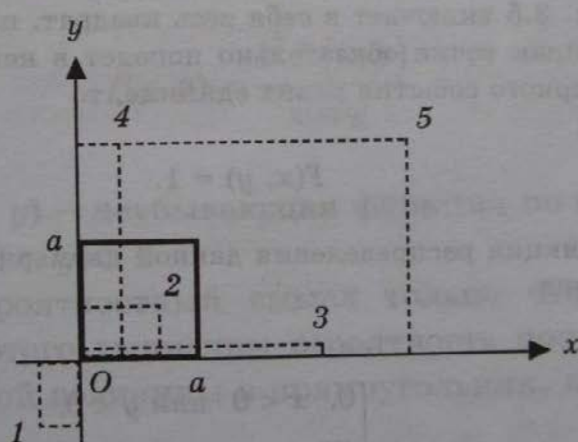


Рис. 3.5

2. Пусть аргументы функции x и y удовлетворяют неравенствам $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$. Воспользуемся формулой (1.5) геометрического определения вероятности. Все возможные значения системы случайных величин принадлежат квадрату, площадь которого равна a^2. Все благоприятствующие исходы заключены в прямоугольнике 2 на рис. 3.5. Его площадь равна $x \cdot y$. Тогда

$$F(x,y)=\frac{xy}{a^2}.$$

3. Пусть $x > a$, а $0 \le y \le a$. Этим условиям соответствует прямоугольник *3* на рис. 3.5. Однако случайная точка может попасть только в ту его часть, которая входит в квадрат, поэтому площадь прямоугольника, принадлежащего благоприятствующим исходам, равна ay. Отсюда

$$F(x,y) = \frac{ay}{a^2} = \frac{y}{a}.$$

4. Пусть $0 \le x \le a$, а $y > a$. Площадь части прямоугольника *4*, входящая в квадрат, равна ax, поэтому

$$F(x,y) = \frac{ax}{a^2} = \frac{x}{a}.$$

5. Наконец, рассмотрим случай, когда $x > a$ и $y > a$. Прямоугольник *5* на рис. 3.5 включает в себя весь квадрат, поэтому в результате опыта случайная точка обязательно попадет в него. Так как вероятность достоверного события равна единице, то

$$F(x, y) = 1.$$

Итак, функция распределения данной двумерной случайной величины имеет вид

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, \ x < 0 \ \text{ или } y < 0, \\ \dfrac{xy}{a^2}, \ 0 \le x \le a, \ 0 \le y \le a, \\ \dfrac{y}{a}, \ x > a, \ 0 \le y \le a, \\ \dfrac{x}{a}, \ 0 \le x \le a, \ y > a, \\ 1, \ x > a, \ y > a. \end{cases}$$

Фактически в данном примере был рассмотрен простейший случай равномерного распределения для непрерывной двумерной случайной величины.

3.1.3. Плотность распределения вероятностей непрерывной двумерной случайной величины

Для описания непрерывной двумерной случайной величины более важной является плотность распределения вероятностей. Введем ее аналогично случаю одномерной случайной величины. Для случайной величины X $f(x) = F'(x)$, для случайной величины Y $f(y) = F'(y)$. Чтобы из функции двух переменных $F(x, y)$ получить $f(x, y)$ таким же способом, по-видимому, надо продифференцировать $F(x, y)$ как по аргументу x, так и по аргументу y.

Плотностью распределения вероятностей непрерывной двумерной случайной величины называется вторая смешанная частная производная от функции распределения:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}. \tag{3.5}$$

Так как $F(x, y)$ – неубывающая функция по каждому из аргументов, то $f(x, y) \geq 0$.

Выясним вероятностный смысл только что введенной функции. Для этого вычислим вероятность попадания двумерной случайной величины в прямоугольник, представленный на рис. 3.6.

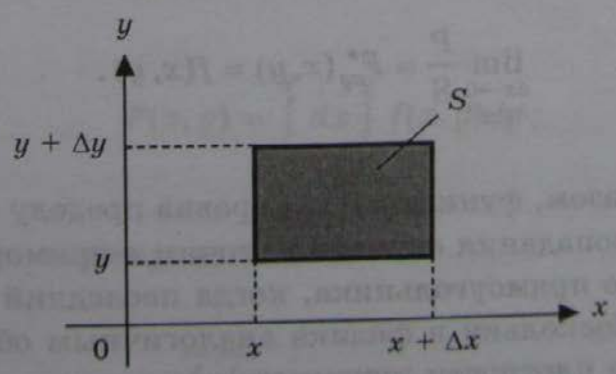


Рис. 3.6

Согласно формуле (3.4) вероятность попадания случайной точки в прямоугольник равна:

$$P = P(x < X < x + \Delta x,\ y < Y < y + \Delta y) = F(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - F(x + \Delta x,\ y) - F(x,\ y + \Delta y) + F(x,\ y).$$

Разделив обе части равенства на площадь прямоугольника $S = \Delta x \Delta y$ и перегруппировав слагаемые, получим

$$\frac{P}{S} = \frac{\left(F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x, y+\Delta y)\right) / \Delta x}{\Delta y} - \frac{\left(F(x+\Delta x, y) - F(x, y)\right) / \Delta x}{\Delta y}.$$

Числители дробей правой части равенства представляют собой отношения частных приращений функции по переменной x к приращению переменной Δx, поэтому, перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим частные производные по переменной x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P}{S} = \frac{F_x'(x, y+\Delta y)}{\Delta y} - \frac{F_x'(x, y)}{\Delta y} = \frac{F_x'(x, y+\Delta y) - F_x'(x, y)}{\Delta y}.$$

Теперь имеем частное приращение функции по переменной y к ее приращению Δy. Еще раз перейдя к пределу, но уже при $\Delta y \to 0$, получим

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P}{S} = F''_{xy}(x, y) = f(x, y). \qquad (3.6)$$

Таким образом, функция $f(x,\ y)$ равна пределу отношения вероятности попадания случайной точки в прямоугольник к площади этого прямоугольника, когда последний стягивается в точку. Поскольку в физике аналогичным образом вводится понятие плотности, например плотность вещества или плотность электрического тока, функции $f(x,\ y)$ и $f(x)$ для одномерной случайной величины получили название плотности распределения вероятностей.

Из формулы (3.6) следует

$$P = P(x < X < x + \Delta x,\ y < Y < y + \Delta y) \approx f(x,\ y)S = \\ = f(x,\ y)\Delta x \Delta y.$$

Величина $f(x,\ y)\Delta x \Delta y$ называется *элементом вероятности* для непрерывной двумерной случайной величины.

Формулы, использующие плотность распределения вероятностей непрерывной двумерной случайной величины $f(x,\ y)$, аналогичны соответствующим формулам для одномерной случайной величины. При этом определенные или несобственные интегралы заменятся двойными или двойными несобственными интегралами:

1) вероятность попадания случайной точки в произвольную область D равна двойному интегралу от функции $f(x,\ y)$ по этой области:

$$P\big((X,Y) \in D\big) = \iint\limits_D f(x,y)dxdy\,; \tag{3.7}$$

2) функция распределения выражается через плотность распределения следующим образом:

$$F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x} dx \int\limits_{-\infty}^{y} f(x,y)dy\,; \tag{3.8}$$

3) условие нормировки имеет вид

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1\,. \tag{3.9}$$

Выведем формулы (3.7)–(3.9).

1. Разобьем область D прямыми, параллельными осям координат и расположенными на одинаковом расстоянии друг от друга на n частей (рис. 3.7). Площадь каждого внутреннего прямоугольника равна $\Delta S = \Delta x \Delta y$. Вероятность попадания в него приближенно равна элементу вероятности $f(x, y)\Delta x \Delta y$. Поскольку события, заключающиеся в попадании случайной точки в прямоугольники, несовместны, вероятность попадания случайной точки в область D приближенно равна $P((X,Y) \in D) \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta x \Delta y$. Устремив $\Delta x \to$ и $\Delta y \to 0$, получим

$$P\big((X,Y) \in D\big) = \iint_D f(x,y)dxdy .$$

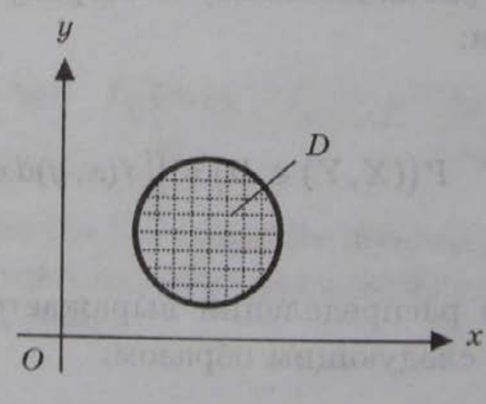


Рис. 3.7

В частности, если область возможных значений двумерной случайной величины является прямоугольником (см. рис. 3.4), то эта вероятность равна

$$P\big((X,Y) \in D\big) = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)dy .$$

2. Функция $F(x, y)$ равна вероятности попадания в бесконечный квадрант, поэтому, использовав формулу (3.7), получим

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} dx \int_{-\infty}^{y} f(x,y)dy .$$

3. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = P(-\infty < X < \infty, -\infty < Y < \infty)$ – вероятность достоверного события, поэтому она равна 1.

Пример 3.5. Дана функция распределения непрерывной двумерной случайной величины: $F(x, y) = (1 - e^{-\lambda x})(1 - e^{-\mu y})$, $x > 0$, $y > 0$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Найти плотность распределения $f(x, y)$.

Решение. Согласно формуле (3.5) $f(x,y) = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$. Сначала найдем частную производную по x. Дифференцируя по x, переменную y считаем константой:

$$F'_x = -e^{-\lambda x}(-\lambda)(1 - e^{-\mu y}) = \lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\mu y}) .$$

Теперь полученное выражение продифференцируем по переменной y, считая x константой:

$$(F'_x)'_y = \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu y} = \lambda \mu e^{-(\lambda x + \mu y)} .$$

Итак, $f(x,y) = \lambda \mu e^{-(\lambda x + \mu y)}$ (для $x > 0$, $y > 0$) .

Пример 3.6. Задана плотность распределения двумерной случайной величины

$$f(x,y) = \begin{cases} a, & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D, \end{cases}$$

где область D – треугольник с вершинами $A(0; 2)$, $B(2; 0)$, $C(0; -2)$.

Найти: 1) значение константы a; 2) вероятность попадания случайной точки (X, Y) в ΔABE (рис. 3.8), если координаты вершины $E(1; 0)$.

Решение. Так как имеем дело с равномерным распределением, то $a = \dfrac{1}{S_D}$. Площадь ΔABC равна $S_D = 4$.

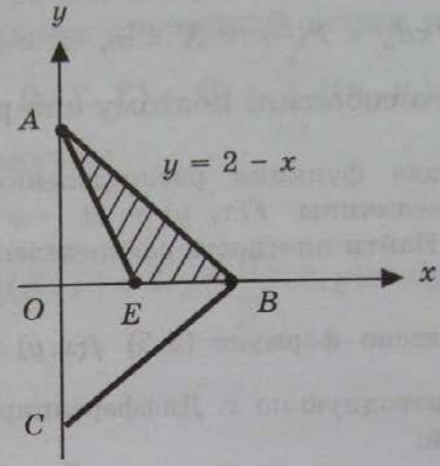


Рис. 3.8

Тогда плотность распределения вероятностей будет иметь вид

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D. \end{cases}$$

Вычислим вероятность попадания случайной точки (X, Y) в ΔABE с помощью геометрического определения вероятности:

$$S_{\Delta ABE} = \frac{1}{2} AO \cdot BE = 1;$$

$$P\big((X,Y) \in \Delta ABE\big) = \frac{S_{\Delta ABE}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{4}.$$

Пример 3.7. Пусть случайная точка может попасть в прямоугольник $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$, причем плотность распределения вероятностей равна $f(x, y) = 0{,}5\sin(x + y)$. Найти функцию распределения $F(x, y)$.

Решение. Согласно формуле (3.8) $F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x} dx \int\limits_{-\infty}^{y} f(x,y)dy$.

Отметим, что при интегрировании по y переменную x считают константой, и наоборот при интегрировании по y переменную x считают постоянной. Подставив в интеграл выражение для $f(x, y)$, получим

$$F(x,y) = \int\limits_{0}^{x} dx \int\limits_{0}^{y} 0{,}5\sin(x+y)dy = -0{,}5\int\limits_{0}^{x} \cos(x+y)\Big|_0^y \, dx =$$

$$= -0{,}5\int\limits_{0}^{x} (\cos(x+y) - \cos x)dx = -0{,}5(\sin(x+y) - \sin x)\Big|_0^x =$$

$$= -0{,}5(\sin(x+y) - \sin y - \sin x) = 0{,}5(\sin y - \sin(x+y) + \sin x).$$

3.1.4. Функция и плотность распределения вероятностей составляющих двумерной случайной величины

Согласно определению функции распределения вероятностей

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y).$$

Подставив ∞ вместо y и учтя, что событие $\{Y < \infty\}$ – достоверное, получим

$$F(x, \infty) = P(X < x, Y < \infty) = P(X < x) = F_1(x).$$

Отсюда видно, что функция $F_1(x)$ является функцией распределения составляющей X. Подставив в $F(x, y)$ вместо x ∞, получим функцию распределения составляющей Y:

$$F_2(y) = F(\infty, y).$$

Зная плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины, можно найти функции распределения составляющих. Для этого в формуле (3.8) верхний предел интегрирования x или y заменяют на бесконечность:

$$F_1(x) = F(x, +\infty) = \int_{-\infty}^{x} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy\,; \tag{3.10}$$

$$F_2(y) = F(+\infty, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{y} f(x, y)dx\,. \tag{3.11}$$

Плотности распределения составляющих находятся дифференцированием. Известно, что производная интеграла с переменным верхним пределом равна подынтегральной функции, умноженной на производную верхнего предела:

$$f_1(x) = F_1'(x) = \left(\int_{-\infty}^{x} dx\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy\right]\right)_x' = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy = f_1(x)\,.$$

Итак, плотности распределения составляющих X и Y имеют вид

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy\,; \tag{3.12}$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx\,. \tag{3.13}$$

Из изложенного следует, что по известному распределению двумерной случайной величины можно найти законы распределения для составляющих, которые иногда называют безусловными законами распределения составляющих. Обратная задача в общем случае не решается, так как невозможно восстановить зависимость между составляющими. Эту зависимость можно описать с помощью условных законов распределения.

3.1.5. Условные законы распределения составляющих дискретной двумерной случайной величины

Условным законом распределения одной из составляющих двумерной случайной величины называется закон ее распределения, найденный при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение.

Из определения видно, что условный закон распределения связан с понятием условной вероятности. Согласно теореме умножения вероятностей зависимых событий эта вероятность равна:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}.$$

Чтобы ее использовать для нахождения условного закона распределения, введем события: A – случайная величина X приняла значение x_i ($i = \overline{1,n}$), В – случайная величина Y приняла значение y_j ($j = \overline{1,m}$). Подставив выражения для событий A и B в приведенную формулу, найдем условную вероятность того, что случайная величина Y приняла значение y_j, если вторая составляющая X приняла значение x_i:

$$P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)} = \frac{P_{ij}}{P_i} = \frac{P_{ij}}{\sum\limits_{j=1}^{m} P_{ij}}.$$

Деление на P_i в данной формуле означает нормировку (перерасчет) соответствующих вероятностей. Ведь если случайная величина X приняла значение x_i, то вероятность этого события $P(X = x_i)$ стала равна единице. Чтобы найти условные вероятности, надо вероятности, расположенные в соответствующем столбце, пропорционально увеличить так, чтобы их сумма равнялась единице.

Найденные по формуле

$$P(Y = y_j \mid X = x_i) = \frac{P_{ij}}{P_i} = \frac{P_{ij}}{\sum\limits_{j=1}^{m} P_{ij}} \tag{3.14}$$

для всех $j = \overline{1, m}$ условные вероятности вместе со значениями случайной величины Y дадут условный закон распределения случайной величины Y при условии, что $X = x_i$. Покажем, что сумма всех условных вероятностей равна 1:

$$\sum_{j=1}^{m} P(Y = y_j \mid X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} \frac{P_{ij}}{\sum\limits_{j=1}^{m} P_{ij}} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} P_{ij}}{\sum\limits_{j=1}^{m} P_{ij}} = 1 .$$

Формула для составления условного закона распределения составляющей X имеет вид, аналогичный формуле (3.4):

$$P(X = x_i \mid Y = y_j) = \frac{P_{ij}}{P_j} = \frac{P_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{n} P_{ij}} . \tag{3.15}$$

Числовые характеристики для условных законов распределения находятся по тем же формулам, что и для обычных законов распределения, только вероятности заменяют условными вероятностями, поэтому для примера приведем определение условного математического ожидания.

Условным математическим ожиданием случайной величины Y при условии, что случайная величина X приняла некоторое определенное значение x_i, называется сумма произведений всех возможных значений Y на соответствующие условные вероятности:

$$M(Y / X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} y_j P(Y = y_j / X = x_i) . \tag{3.16}$$

Из данного определения следует, что условное математическое ожидание дискретной случайной величины является функцией дискретного аргумента: $M(Y/X = x_i) = f(x)$. Функция $f(x)$ называется *функцией регрессии* Y *на* X.

Можно построить *линию регрессии* Y *на* X, соединив соседние точки с координатами $(x_i, M(Y/X = x_i)$ отрезками.

Для составляющей X условное математическое ожидание равно

$$M(X / Y = y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i \mid Y = y_i).$$

Пример 3.8. Двумерная случайная величина задана таблицей. Найти условные законы распределения для составляющей Y. Построить линию регрессии Y на X.

Y \ X	−1	0	1
−2	0,1	0,05	0,2
0	0,1	0	0
1	0	0,05	0,2
3	0,2	0,1	0

Решение. Просуммировав вероятности в строках и столбцах, найдем вероятности P_j и P_i составляющих случайных величин Y и X соответственно. Запишем их в таблицу.

Y \ X	−1	0	1	P_j
−2	0,1	0,05	0,2	0,35
0	0,1	0	0	0,1
1	0	0,05	0,2	0,25
3	0,2	0,1	0	0,3
P_i	0,4	0,2	0,4	1 \ 1

Найдем условный закон распределения случайной величины Y при условии, что $X = -1$. Это означает, что возможны только события, безусловные вероятности которых приведены в первом столбце таблицы. Сумма соответствующих условных вероятностей должна быть равна 1. Для их нахождения разделим безусловные вероятности первого столбца таблицы на 0,4 в соответствии с формулой (3.14):

$$P(Y = -2 \,/\, X = -1) = \frac{0,1}{0,4} = 0,25; \quad P(Y = 0 \,/\, X = -1) = \frac{0,1}{0,4} = 0,25;$$

$$P(Y = 1 \,/\, X = -1) = 0; \quad P(Y = 3 \,/\, X = -1) = \frac{0,2}{0,4} = 0,5.$$

Таким образом, условный закон распределения случайной величины Y при условии, что $X = -1$, имеет вид

Y	−2	0	1	3
P	0,25	0,25	0	0,5

Разделив безусловные вероятности второго столбца на 0,2, получим условный закон распределения случайной величины Y при условии, что $X = 0$:

Y	−2	0	1	3
P	0,25	0	0,25	0,5

Найдем условный закон распределения случайной величины Y при условии, что $X = 1$:

Y	−2	0	1	3
P	0,5	0	0,5	0

Найдем условные математические ожидания случайной величины Y:

$$M(Y/X = -1) = -2 \cdot 0,25 + 0 \cdot 0,25 + 0 + 3 \cdot 0,5 = 1;$$

$$M(Y/X = 0) = -2 \cdot 0,25 + 0 + 1 \cdot 0,25 + 3 \cdot 0,5 = 1,25;$$

$$M(Y/X=1) = -2 \cdot 0{,}5 + 0 + 1 \cdot 0{,}5 + 0 = -0{,}5.$$

Для построения линии регрессии Y на X отмечаем точки с координатами $(-1;\ 1)$, $(0;\ 1{,}25)$, $(1;\ -0{,}5)$ и соседние точки соединяем отрезками прямых (рис. 3.9).

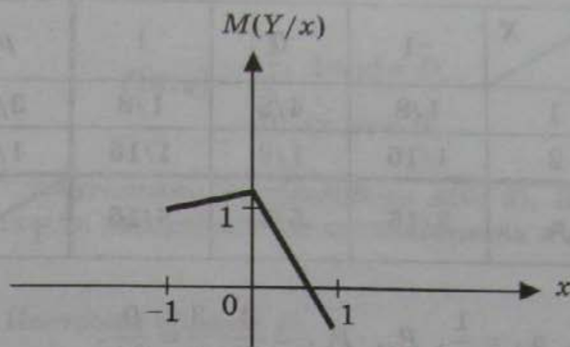


Рис. 3.9

В гл. 2 было дано определение независимости двух случайных величин. Поскольку две случайные величины называются независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того, какое значение приняла другая случайная величина, условные законы должны совпадать с безусловным законом распределения. Сравнив условные законы распределения случайной величины Y, найденные в предыдущем примере, ясно, что X и Y являются зависимыми.

Однако такой способ определения зависимости или независимости случайных величин достаточно трудоемок. Проще это сделать следующим образом: если X и Y – независимые случайные величины, то

$$P(X = x_i,\ Y = y_i) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_i),$$

или

$$p_{ij} = p_i \cdot p_j\,, \quad i = \overline{1, n}\,, \quad j = \overline{1, m}\,. \qquad (3.17)$$

Чтобы случайные величины были независимыми, равенство (3.17) должно выполняться для всех вероятностей p_{ij} из таблицы распределения. Если оно не выполняется хотя бы для одной вероятности, то случайные величины являются зависимыми.

Пример 3.9. Проверить, зависимы ли случайные величины X и Y, заданные таблицей.

$Y \backslash X$	-1	0	1	p_j
1	1/8	4/8	1/8	3/4
2	1/16	1/8	1/16	1/4
p_i	3/16	5/8	3/16	1 \ 1

Решение. $p_{11} = \dfrac{1}{8}$, $P_{i=1} \cdot P_{j=1} = \dfrac{3}{16} \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{64}$.

Так как $\dfrac{1}{8} \neq \dfrac{9}{64}$, то случайные величины X и Y являются зависимыми.

3.1.6. Условные законы распределения составляющих непрерывной двумерной случайной величины

Еще раз воспользуемся теоремой умножения вероятностей зависимых событий:

$$P(B|\,A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}.$$

Введем условные плотности распределения вероятности для составляющих непрерывной двумерной случайной величины, заменив в указанной формуле вероятности на плотности:

$$\varphi(x \,/\, y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)};$$

$$\psi(y \,/\, x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}. \tag{3.18}$$

Тогда

$$f(x,\ y) = \varphi(x/y)f_2(y) = f_1(x)\psi(y/x). \qquad (3.19)$$

Пример 3.10. Задана плотность распределения двумерной случайной величины

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D, \end{cases}$$

где область D – треугольник с вершинами $A(0;\ 2)$, $B(2;\ 0)$, $O(0;\ 0)$. Определить плотности распределения составляющих и их условные законы.

Решение. Построим область D.

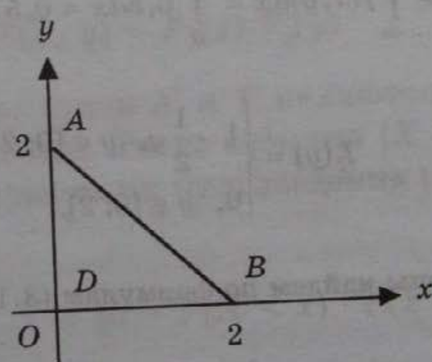


Рис. 3.10

Из условия и рис. 3.10 видно, что двумерная случайная величина может принимать значения только из ΔABO. Следовательно, плотность распределения составляющей X $f_1(x) = 0$, если $x \notin [0,\ 2]$. Пусть $x \in [0,\ 2]$. Согласно формуле (3.12)

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy\,.$$

Исходя из координат точек A и B, составим уравнение прямой, проходящей через эти точки:

$$y = 2 - x.$$

Тогда интегрирование будет проводиться от некоторой точки на прямой $y = 0$, ограничивающей область D снизу, до соответствующей точки на прямой $y = 2 - x$, ограничивающей эту область сверху:

$$f_1(x) = \int_0^{2-x} 0,5dy = 0,5\,y\Big|_0^{2-x} = 0,5(2 - x).$$

Тогда

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{2}x, & x \in [0;\,2], \\ 0, & x \notin [0;\,2]. \end{cases}$$

Аналогично функции $f_1(x)$ находим функцию $f_2(y)$. При $y \in [0;\,2]$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_0^{2-y} 0,5dx = 0,5\,x\Big|_0^{2-y} = 1 - \frac{y}{2};$$

$$f_2(y) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{2}y, & y \in [0;\,2], \\ 0, & y \notin [0;\,2]. \end{cases}$$

Условные законы найдем по формулам (3.18):

$$\varphi(x\,/\,y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{0,5}{1 - \dfrac{y}{2}} = \frac{1}{2 - y}.$$

Отсюда

$$\varphi(x\,/\,y) = \frac{1}{2 - y}, \quad y \in [0;2), \qquad 0 < x < 2 - y.$$

Аналогично $\varphi(x/y)$ находим условный закон для составляющей Y:

$$\psi(y\,/\,x) = \frac{1}{2 - x}, \quad x \in [0;2), \qquad 0 < y < 2 - x.$$

Условные законы распределения не определены вне области треугольника ΔABO.

3.1.7. Теорема о независимости случайных величин

Для того чтобы случайные величины X и Y были независимы, необходимо и достаточно, чтобы интегральная или дифференциальная функции распределения двумерной случайной величины были равны произведению соответствующих функций составляющих:

$$F(x, y) = F_1(x)\, F_2(y); \tag{3.20}$$

$$f(x, y) = f_1(x)\, f_2(y). \tag{3.21}$$

Доказательство. Сначала докажем теорему для интегральной функции распределения:

$$F(x, y) = F_1(x)\, F_2(y).$$

1. Необходимость: пусть X и Y являются независимыми случайными величинами. Тогда события $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$ – независимы и вероятность их произведения равна произведению вероятностей:

$$P(X < x,\, Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y).$$

Отсюда по определению функции распределения

$$F(x, y) = F_1(x)\, F_2(y),$$

что и требовалось доказать.

2. Достаточность: пусть $F(x, y) = F_1(x)\, F_2(y)$. Из этого равенства согласно определению $F(x)$ следует

$$P(X < x,\, Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y),$$

значит, X и Y являются независимыми, что и требовалось доказать.

Докажем теорему для плотностей распределения вероятностей.

3. Необходимость: пусть X и Y являются независимыми случайными величинами. Только что было доказано, что

$$F(x, y) = F_1(x)\, F_2(y).$$

Продифференцируем это равенство сначала по x:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{dF_1(x)}{dx} F_2(y),$$

а затем по y:

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{dF_1(x)}{dx} \cdot \frac{dF_2(y)}{dy}.$$

Отсюда

$$f(x, y) = f_1(x)\, f_2(y),$$

что и требовалось доказать.

4. Достаточность: пусть $f(x, y) = f_1(x)\, f_2(y)$. Если известна плотность распределения двумерной случайной величины, то функция распределения определяется по формуле (3.8). Используя ее, а также формулы (3.10) и (3.11), выражающие функции распределения составляющих через плотности, получим

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{x} f_1(x)dx \int_{-\infty}^{y} f_2(y)dy = F_1(x)F_2(y),$$

что и требовалось доказать.

Пример 3.11. Доказать, что X и Y независимы, если

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi^2(1 + x^2 + y^2 + x^2y^2)}.$$

Решение. Сгруппировав первые два и последние два слагаемых в знаменателе и выделив общий множитель, получим

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi^2(1+x^2+y^2+x^2y^2)}=\frac{1}{\pi^2(1+x^2+y^2(1+x^2))}=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}=$$
$$=\frac{1}{\pi(1+x^2)}\cdot\frac{1}{\pi(1+y^2)}=f_1(x)f_2(y),$$

где $f_1(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$, $f_2(y)=\dfrac{1}{\pi(1+y^2)}$.

Отсюда следует, что X и Y независимы.

Вопросы для самоконтроля

1. По какой причине случайные величины необходимо рассматривать совместно?
2. Что называется двумерной случайной величиной? Как она обозначается?
3. Как геометрически представляют двумерную случайную величину?
4. Что называется законом распределения двумерной случайной величины?
5. Укажите способы задания закона распределения двумерной случайной величины.
6. Приведите условие нормировки для дискретной двумерной случайной величины.
7. Как найти ряды распределения составляющих двумерной случайной величины?
8. Что называется функцией распределения двумерной случайной величины?
9. Какова геометрическая интерпретация функции распределения двумерной случайной величины?
10. Как найти вероятность попадания случайной точки в полуполосу? в прямоугольник?
11. Укажите свойства функции распределения двумерной случайной величины.
12. Что называется плотностью распределения вероятностей непрерывной двумерной случайной величины?
13. Что называется элементом вероятности для непрерывной двумерной случайной величины?
14. Как найти вероятность попадания случайной точки в произвольную область D?
15. Как выражается функция распределения через плотность распределения?
16. Как из функции распределения двумерной случайной величины получить функции и плотности распределения составляющих?

17. Что называется условным законом распределения случайной величины? По каким формулам они находятся для дискретных и непрерывных случайных величин?

18. Что называется условным математическим ожиданием случайной величины?

19. Как построить линию регрессии Y на X?

20. Как установить зависимость или независимость дискретных случайных величин?

21. Как вводятся условные плотности распределения вероятности для составляющих непрерывной двумерной случайной величины?

22. Сформулируйте теорему о независимости случайных величин.

Задачи для самостоятельного решения

3.1. Двумерная случайная величина задана таблицей

Y \ X	-1	0	1
1	0,15	p_{21}	0,35
2	0,05	0,05	0,1

Найти: а) p_{21}; б) законы распределения компонент X и Y; в) вычислить вероятности $P(X \geq 0,\ Y = 2)$ и $P(X > Y)$.

3.2. Двумерная случайная величина задана таблицей

Y \ X	1	5	8
4	0,10	0,10	0,05
8	0,10	0,30	p_{32}

Найти: а) p_{32}; б) безусловные законы распределения составляющих; в) вычислить вероятности $P(X \geq 3,\ Y = 4)$ и $P(X > Y)$.

3.3. Двумерная случайная величина задана таблицей

Y \ X	3	6
10	$p11$	0,10
14	0,15	0,05
18	0,30	0,15

Найти а) p_{11}; б) законы распределения компонент X и Y; в) вычислить вероятности $P(X \geq 3,\ Y \geq 11)$ и $P(X > Y)$.

3.4. Две зенитные установки независимо друг от друга обстреливают воздушную цель противника одной ракетой каждая. Вероятность попадания в цель для первой установки равна 0,7, для второй – 0,4. Составить таблицу распределения системы $(X,\ Y)$, где X – число попаданий первой; Y – число попаданий второй зенитной установки.

3.5. По цели производятся два независимых выстрела. Вероятность попадания в цель при первом выстреле p_1, при втором – p_2. Построить таблицу распределения системы двух дискретных случайных величин $(X,\ Y)$, где X – число попаданий при первом выстреле; Y – число попаданий при втором выстреле.

3.6. По воздушной цели осуществлен пуск трех ракет с вероятностью попадания 0,3 каждая. Для уничтожения цели достаточно двух попаданий, а при одном попадании цель уничтожается с вероятностью 0,8. Составить таблицу распределения двумерной случайной величины $(X,\ Y)$, где X – число попаданий в цель; Y – число уничтоженных целей.

3.7. Функция распределения двумерной случайной величины имеет вид $F(x,\ y) = 1 - e^{-\alpha x} - e^{-\beta y} + e^{-\alpha x - \beta y}$, где $x \geq 0$, $y \geq 0$. Найти плотность распределения $f(x,\ y)$ и определить, зависимы ли случайные величины X и Y.

3.8. Определить вероятность попадания снаряда в цель, указанную на рис. 3.11 в виде заштрихованной области, если задана функция распределения $F(x,\ y)$.

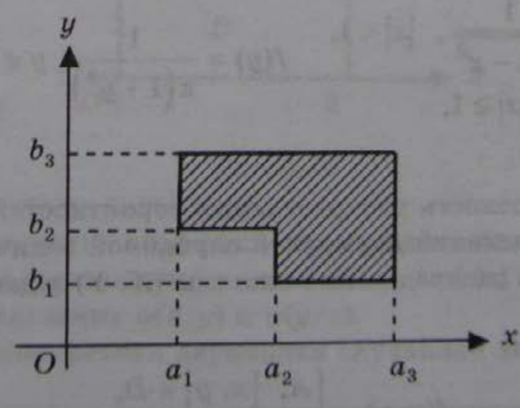


Рис. 3.11

3.9. Определить вероятность попадания снаряда в цель, указанную на рис. 3.12 в виде заштрихованной области, если функция распределения $F(x, y)$ случайной точки (X, Y) (точки падения снаряда на плоскость xOy) задана выражением

$$F(x, y) = 1 - e^{-\alpha x} - e^{-\beta y} + e^{-\alpha x - \beta y} \ (x \geq 0,\ y \geq 0).$$

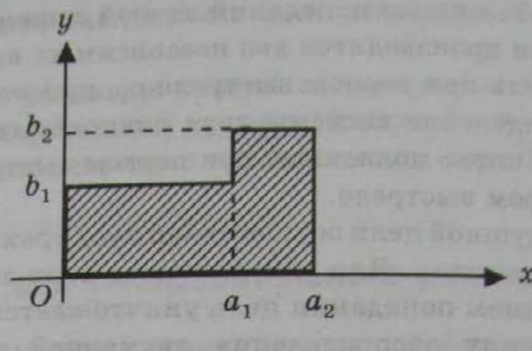


Рис. 3.12

3.10. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) задана выражением $f(x, y) = \dfrac{1}{\pi} e^{-(x^2+y^2)}$, $\quad x \in R,\ y \in R.$ Установить, зависимы или нет случайные величины X и Y.

3.11. Плотности распределения вероятностей независимых случайных величин X и Y имеют соответственно вид

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases} \qquad f(y) = \frac{1}{\pi\left(1+y^2\right)},\ y \in (-\infty, \infty).$$

Определить плотность распределения вероятностей вектора (X, Y) и функцию распределения двумерной случайной величины (X, Y).

3.12. Плотность распределения системы (X, Y) задана выражением

$$f(x, y) = \begin{cases} A, & [x, y] \in D, \\ 0, & [x, y] \notin D. \end{cases}$$

Область существования случайной величины D представлена на рис. 3.13.

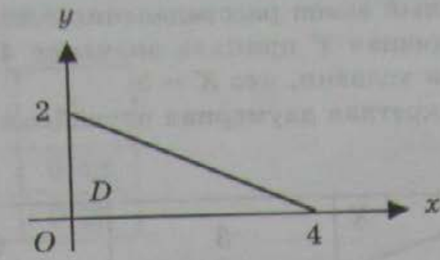


Рис. 3.13

Вычислить значение коэффициента A, найти безусловные плотности распределения составляющих системы, т. е. $f_1(x)$ и $f_2(y)$, найти условные плотности распределения $\varphi(x/y)$ и $\psi(y/x)$.

3.13. Плотность распределения системы (X, Y) задана выражением

$$f(x,y)=\begin{cases}A(x+y), & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

Область существования случайной величины D представлена на рис. 3.14.

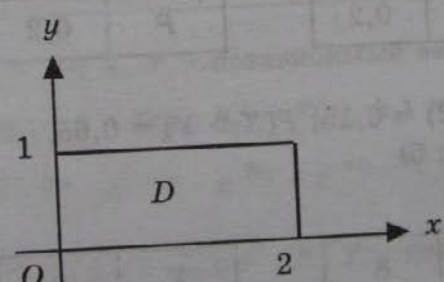


Рис. 3.14

Вычислить значение коэффициента A, найти безусловные плотности распределения составляющих системы, т. е. $f_1(x)$ и $f_2(y)$, и условные плотности распределения $\varphi(x/y)$ и $\psi(y/x)$.

3.14. Задана дискретная двумерная случайная величина (X, Y):

Y \ X	2	5	8
4	0,15	0,30	0,35
8	0,05	0,10	0,05

Найти: а) условный закон распределения составляющей X при условии, что составляющая Y приняла значение 4; б) условный закон распределения Y при условии, что $X = 5$.

3.15. Задана дискретная двумерная случайная величина (X, Y):

Y \ X	3	6
10	0,25	0,15
14	0,15	0,05
18	0,30	0,10

Найти: а) условный закон распределения составляющей X при условии, что составляющая $Y = 10$; б) условный закон распределения Y при условии, что $X = 6$; в) условное математическое ожидание составляющей X при условии, что составляющая $Y = 10$.

Ответы: **3.1.** а) $p_{21} = 0,3$; б)

Y	1	2
P	0,8	0,2

X	−1	0	1
P	0,2	0,35	0,45

в) $P(X \geq 0,\ Y = 2) = 0,15$; $P(X > Y) = 0,65$.

3.2. а) $p_{32} = 0,35$; б)

Y	4	8
P	0,25	0,75

X	2	5	8
P	0,2	0,4	0,4

в) $P(X \geq 3,\ Y = 4) = 0,15$; $P(X > Y) = 0,5$.

3.3. а) $p_{11} = 0,25$; б)

Y	3	6
P	0,7	0,3

X	10	14	18
P	0,35	0,2	0,45

в) $P(X \geq 0,\ Y = 2) = 0,65$, $P(X > Y) = 1$.

3.4

Y \ X	0	1
0	0,18	0,42
1	0,12	0,28

3.5

y_j \ x_i	0	1
0	q_1q_2	p_1q_2
1	p_2q_1	p_1p_2

3.6

Y \ X	0	1	2	3
0	0,3430	0,0882	0	0
1	0	0,3528	0,1890	0,0270

3.7. $f(x, y) = \alpha\beta e^{-\alpha x - \beta y}$; X, Y – независимые величины.

3.8. $F(a_3, b_3) - F(a_1, b_3) - F(a_2, b_2) - F(a_3, b_1) + F(a_1, b_2) + F(a_2, b_1)$.

3.9. $e^{-\alpha a_2-\beta b_2} + e^{-\alpha a_1-\beta b_1} - e^{-\alpha a_2} - e^{-\beta b_1} - e^{-\alpha a_1-\beta b_2}$.

3.10. $f_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$; $f_2(y) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-y^2}$; X, Y – независимые величины.

3.11. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi^2\sqrt{1-x^2}\left(1+y^2\right)}, & |x| < 1,\ y \in (-\infty, \infty), \\ 0, & |x| \ge 1,\ y \in (-\infty, \infty). \end{cases}$$

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & x \le -1,\ y \in (-\infty, \infty), \\ \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\arcsin x\right)\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg} y\right), & -1 < x \le 1,\ y \in (-\infty, \infty), \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg} y, & x > 1,\ y \in (-\infty, \infty). \end{cases}$$

3.12. $A = \frac{1}{4}$; $f_1(x) = \begin{cases} \frac{4-x}{8}, & x \in [0,4], \\ 0, & x \notin [0,4]; \end{cases}$ $\quad f_2(y) = \begin{cases} \frac{2-y}{2}, & y \in [0,2], \\ 0, & y \in [0,2]; \end{cases}$

$$\varphi(x / y) = \begin{cases} \frac{1}{4-2y}, x \in [0;4-2y], y \in [0,2), \\ \text{не определена, если } (x,y) \notin D; \end{cases}$$

$$\psi(y / x) = \begin{cases} \frac{2}{4-x}, y \in \left[0;2-\frac{x}{2}\right], x \in [0,4), \\ \text{не определена, если } (x,y) \notin D. \end{cases}$$

3.13. $A = \frac{1}{3}$; $f_1(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{6}, & x \in [0,2], \\ 0, & x \notin [0,2]; \end{cases}$ $\quad f_2(y) = \begin{cases} \frac{2(y+1)}{3}, & y \in [0,1], \\ 0, & y \in [0,1]; \end{cases}$

$$\varphi(x / y) = \begin{cases} \frac{x+y}{2(y+1)}, x \in [0,2], y \in [0,1], \\ \text{не определена при } (x,y) \notin D; \end{cases}$$

$$\psi(y / x) = \begin{cases} \frac{2(x+y)}{2x+1}, x \in [0,2], y \in [0,1], \\ \text{не определена при } (x,y) \notin D. \end{cases}$$

3.14. а)

X	2	5	8
P	3/16	6/16	7/16

б)

Y	4	8
P	0,75	0,25

3.15. а)

X	3	6
P	5/8	3/8

б)

Y	10	14	18
P	3/6	1/6	2/6

в) 4,125.

3.2. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВУМЕРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

3.2.1. Основные числовые характеристики составляющих двумерной случайной величины

К основным числовым характеристикам систем относятся математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратичное отклонение составляющих. Расчет этих параметров можно проводить по формулам, приведенным ниже.

Для дискретных двумерных случайных величин (X, Y):

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{m} p_{ij} \right);$$

$$M(Y) = \sum_{j=1}^{m} y_j p_j = \sum_{j=1}^{m} y_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} \right);$$

$$D(X) = M\left((X - M(X))^2\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - M(X)\right)^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - M(X)\right)^2 \left(\sum_{j=1}^{m} p_{ij} \right);$$

$$D(Y) = M\left((Y - M(Y))^2\right) = \sum_{j=1}^{m} \left(y_j - M(Y)\right)^2 p_j = \sum_{j=1}^{m} \left(y_j - M(Y)\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} \right);$$

$$\sigma(X) = \sigma_x = \sqrt{D(X)}, \; \sigma(Y) = \sigma_y = \sqrt{D(Y)}.$$

Для непрерывных двумерных случайных величин (X, Y):

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \right) dx;$$

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy;$$

$$M(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_1(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \right) dx;$$

$$M(Y^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_2(y)dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx \right) dy;$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2, \quad D(Y) = M(Y^2) - (M(Y))^2;$$

$$\sigma(X) = \sigma_x = \sqrt{D(X)}, \; \sigma(Y) = \sigma_y = \sqrt{D(Y)}.$$

При этом более рационально предварительно найти ряды распределения составляющих в случае дискретной двумерной случайной величины или плотности распределения составляющих для непрерывной случайной величины, а затем использовать формулы для одномерной случайной величины.

3.2.2. Корреляционный момент

Приведенных в п. 3.2.1 числовых характеристик недостаточно для описания двумерных случайных величин, поскольку они не отражают степени (силы) связи между составляющими случайными величинами, что является важным фактором случайных явлений, описываемых такими величинами. Например, при измерении силы тока в зависимости от приложенного к резистору напряжения между этими случайными величинами (а результаты экспериментальных измерений являются случайными величинами) обнаруживается тесная связь. По измеренной величине напряжения силу тока можно предсказать с высокой степенью точности. Связь между ростом и массой человека менее выражена. Однако можно ожидать, что у человека, имеющего рост выше среднего, и масса также будет выше среднего. Для описания силы (степени) связи между случайными величинами вводят две новые числовые характеристики – корреляционный момент и коэффициент корреляции.

Корреляционным моментом, или *ковариацией*, μ_{xy} случайных величин X и Y называется математическое ожидание произведения отклонений этих случайных величин от их математических ожиданий:

$$\mu_{xy} = M[(X - M(X))(Y - M(Y))]. \tag{3.22}$$

Если $\mu_{xy} > 0$, то корреляцию называют *положительной*. Если $\mu_{xy} < 0$, то корреляцию называют *отрицательной*. В случае положительной корреляции имеет место следующая тенденция: с увеличением X можно ожидать увеличение Y, поскольку условное математическое ожидание Y (условное среднее) увеличивается с ростом значения X. Если же корреляция отрицательная, то тенденция противоположная: с увеличением X можно ожидать уменьшения Y. В приведенных примерах корреляция между напряжением и током на резисторе, а также между ростом и массой человека является положительной.

Как и в случае дисперсии, выведем вторую формулу для нахождения корреляционного момента. Раскрыв внутренние скобки в формуле (3.22) и использовав свойства математического ожидания, получим

$$\mu_{xy} = M[X \cdot Y - X \cdot M(Y) - M(X) \cdot Y + M(X) \cdot M(Y)] =$$
$$= M(X \cdot Y) - M(X) \cdot M(Y) - M(X) \cdot M(Y) + M(X) \cdot M(Y) =$$
$$= M(X \cdot Y) - M(X) \cdot M(Y).$$

Таким образом, удобное для расчетов выражение для корреляционного момента имеет вид

$$\mu_{xy} = M(X \cdot Y) - M(X) \cdot M(Y). \tag{3.23}$$

Сходство между корреляционным моментом и дисперсией не случайно (см. ниже свойство 2).

Для дискретных случайных величин математическое ожидание $M(X \cdot Y)$ равно сумме произведений всех пар значений $x_i y_j$ на соответствующие вероятности p_{ij}:

$$M(X \cdot Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij} . \qquad (3.24)$$

Для непрерывных случайных величин

$$M(X \cdot Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y)dxdy . \qquad (3.25)$$

Если корреляционный момент равен нулю, то случайные величины X и Y называются *некоррелированными*, в противном случае, когда $\mu_{xy} \neq 0$, – *коррелированными*.

Корреляционный момент обладает рядом свойств.

1. Свойство симметрии, т. е.

$$\mu_{xy} = \mu_{yx}.$$

2. Корреляционный момент двух одинаковых случайных величин равен дисперсии этой случайной величины:

$$\mu_{xx} = D(X).$$

3. Корреляционный момент равен нулю, если случайные величины X и Y независимы.

4. Постоянный множитель можно вынести за знак корреляционного момента. Например, если $T = c \cdot Y$, то

$$\mu_{xt} = c\mu_{xy}.$$

5. Корреляционный момент не изменится, если к одной или обеим случайным величинам прибавить постоянную. Например, если $T = c + Y$, то

$$\mu_{xt} = \mu_{xy}.$$

Докажем приведенные свойства.

1–2. Первые два свойства вытекают из определения корреляционного момента.

3. Для независимых случайных величин $M(X \cdot Y) = M(X) \times$ $\times M(Y)$, а значит, $\mu_{xy} = 0$.

4. Пусть $T = c \cdot Y$. Тогда

$$\mu_{xt} = M(X \cdot cY) - M(X) \cdot M(cY) = cM(X \cdot Y) - M(X) \cdot cM(Y) = \\ = c(M(X \cdot Y) - M(X) \cdot M(Y)) = c\mu_{xy}.$$

5. Пусть $T = c + Y$. Тогда

$$\mu_{xt} = M[(X - M(X)) \cdot (c + Y - M(c + Y))] = \\ = M[(X - M(X)) \cdot (c + Y - c - M(Y))] = \mu_{xy}.$$

Из независимости случайных величин X и Y следует их некоррелированность. Обратное убеждение (если $\mu_{xy} = 0$, то X и Y – независимы) в общем случае неверно. Покажем это на примере.

Пример 3.12. Пусть задана плотность распределения двумерной случайной величины $f(x, y) = \begin{cases} c, & x^2 + y^2 \le R^2, \\ 0, & x^2 + y^2 > R^2. \end{cases}$

Доказать зависимость случайных величин X и Y и равенство нулю их корреляционного момента.

Решение.

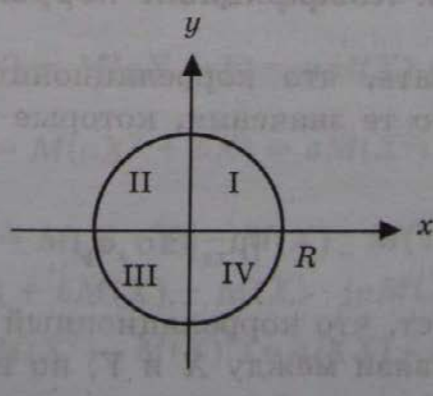


Рис. 3.15

Две случайные величины называются независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того, какое значение приняла другая случайная величина. В данном примере случайные величины X и Y – зависимые, так как даже область изменения случайной величины Y зависит от того, какое значение принимает X. Например, при $X = R$ случайная величина Y принимает единственное значение $Y = 0$, тогда как при $X = 0$ Y может изменяться от $-R$ до R.

Для нахождения корреляционного момента используем формулу (3.23). Из рис. 3.15 видно, что $M(X) = M(Y) = 0$ в силу симметрии распределения. Это же свойство применим для вычисления $M(X \cdot Y)$. Двумерная случайная величина может принимать значения из круга радиусом R. Этот круг, являющийся областью интегрирования, разобьем на четыре сектора (см. рис. 3.15). Тогда

$$M(X \cdot Y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} xyf(x,y)dxdy = \iint\limits_{I(x>0,y>0)} xyf(x,y)dxdy +$$

$$+ \iint\limits_{II(x<0,y>0)} xyf(x,y)dxdy + \iint\limits_{III(x<0,y<0)} xyf(x,y)dxdy + \iint\limits_{IV(x>0,y<0)} xyf(x,y)dxdy.$$

В силу симметрии все четыре интеграла по абсолютной величине равны, но первый и третий больше нуля, а второй и четвертый – меньше, поэтому

$$M(X \cdot Y) = 0,$$

$$\mu_{xy} = M(X \cdot Y) - M(X) \cdot M(Y) = 0 - 0 \cdot 0 = 0.$$

3.2.3. Коэффициент корреляции

Можно показать, что корреляционный момент может принимать только те значения, которые удовлетворяют неравенству

$$\left|\mu_{xy}\right| \le \sigma_x \sigma_y. \tag{3.26}$$

Из него следует, что корреляционный момент описывает не только силу связи между X и Y, но и степень разброса. Сила связи X и Y может быть велика, но если разброс одной из случайных величин мал, то корреляционный момент также будет мал. Кроме того, корреляционный момент имеет размерность, равную произведению размерностей случайных величин, т. е. его значение зависит от выбора единиц измерений. Это затрудняет сравнение корреляционных моментов различных систем случайных величин.

Чтобы устранить оба недостатка, разделим μ_{xy} на $\sigma_x\sigma_y$ и получим безразмерную числовую характеристику – коэффициент корреляции.

Коэффициентом корреляции называется отношение корреляционного момента к произведению средних квадратичных отклонений случайных величин:

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}. \qquad (3.27)$$

Коэффициент корреляции принимает значения, удовлетворяющие неравенству

$$|r_{xy}| \le 1, \qquad (3.28)$$

причем $r_{xy} = \pm 1$ только тогда, когда между X и Y существует функциональная линейная зависимость $Y = aX + b$, где a, b – константы. Функциональная линейная зависимость означает, что измеряется только случайная величина X, а Y вычисляется с помощью указанной формулы.

Пусть $Y = aX + b$. Тогда, использовав свойства математического ожидания и дисперсии, получим

$$M(Y) = M(aX + b) = aM(X) + b;$$

$$M(X \cdot Y) = M(aX^2 + bX) = aM(X^2) + bM(X);$$

$$\mu_{xy} = M(X \cdot Y) - M(X) \cdot M(Y) =$$
$$= aM(X^2) + bM(X) - M(X) \cdot (aM(X) + b) =$$
$$= a(M(X^2) - M(X)^2) = aD(X) = a\sigma_x^2;$$

$$D(Y) = M\left[\left(aX + b - (aM(X) + b)\right)^2\right] =$$
$$= M\left[\left(a(X - M(X))\right)^2\right] = a^2D(X) = a^2\sigma_x^2;$$

$$\sigma_y^2 = a^2\sigma_x^2 .$$

Отсюда

$$\sigma_y = \pm a\sigma_x,$$

причем знак «плюс» выбирается, если $a > 0$, а знак «минус» – в случае, если $a < 0$. Тогда

$$r_{xy} = \frac{a\sigma_x^2}{\sigma_x \left|a\sigma_x\right|} = \begin{cases} 1, & a > 0, \\ -1, & a < 0, \end{cases}$$

что и требовалось доказать.

На практике X и Y считаются достаточно хорошо коррелированными, если $\left|r_{xy}\right| \geq 0{,}8$.

Понятие коэффициента корреляции лежит в основе теории корреляции, имеющей важное прикладное значение для решения многих экономических и технических задач. Однако при этом необходим анализ причинно-следственных связей между случайными величинами. Иначе, исходя только из высокого значения коэффициента корреляции, можно прийти к неверным выводам. Приведем широко известный пример. Между случайными величинами: размер пожара и количество пожарных, участвующих в его тушении, имеется положительная корреляция. Однако это не значит, что, уменьшив количество пожарных, мы добьемся уменьшения ущерба от пожара.

Пример 3.13. Двумерная дискретная случайная величина задана таблицей. Найти корреляционный момент μ_{xy} и коэффициент корреляции r_{xy}.

$Y \backslash X$	0	1	P_j
2	0,4	0,1	0,5
4	0,1	0,4	0,5
P_i	0,5	0,5	1 \ 1

Решение.

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=0\cdot 0,5+1\cdot 0,5=0,5\,;\quad M(Y)=\sum_{j=1}^{m}y_jp_j=2\cdot 0,5+4\cdot 0,5=3\,;$$

$$M(X^2)=\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2p_i=0\cdot 0,5+1\cdot 0,5=0,5\,;$$

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=0,5-0,25=0,25\,,\ \sigma_x=0,5\,;$$

$$M(Y^2)=\sum_{j=1}^{m}{y_j}^2p_j=4\cdot 0,5+16\cdot 0,5=10\,;$$

$$D(Y)=M(Y^2)-(M(Y))^2=10-3^2=1\,,\ \sigma_y=1\,;$$

$$M(X\cdot Y)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}x_iy_jp_{ij}=0\cdot 2\cdot 0,4+0\cdot 4\cdot 0,1+1\cdot 2\cdot 0,1+1\cdot 4\cdot 0,4=$$
$$=0,2+1,6=1,8;$$

$$\mu_{xy}=M(X\cdot Y)-M(X)\cdot M(Y)=1,8-0,5\cdot 3=0,3\,;$$

$$r_{xy}=\frac{\mu_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{0,3}{0,5\cdot 1}=0,6\,.$$

Пример 3.14. Найти корреляционный момент μ_{xy} и коэффициент корреляции r_{xy} для случайных величин X и Y, заданных в примере 3.10.

Решение. По условию примера 3.10

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases}$$

где область D – треугольник с вершинами $A(0;\ 2)$, $B(2;\ 0)$, $O(0;\ 0)$ (см. рис. 3.10). Там же были найдены плотности распределения составляющих:

$$f_1(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{2}x, & x\in[0;\,2],\\ 0, & x\notin[0;\,2],\end{cases}\qquad f_2(y)=\begin{cases}1-\frac{1}{2}y, & y\in[0;\,2],\\ 0, & y\notin[0;\,2].\end{cases}$$

Используем эти выражения для определения математических ожиданий и дисперсий:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x)dx=\int_0^2 x(1-\frac{x}{2})\,dx=(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6})\Big|_0^2=\frac{2}{3}.$$

Самостоятельно покажите, что $M(Y)$ также равно 2/3.

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_1(x)dx=\int_0^2 x^2(1-\frac{x}{2})\,dx=(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{8})\Big|_0^2=\frac{2}{3};$$

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9},\ \sigma_x=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Получим также, что $D(Y)=\frac{2}{9},\ \sigma_y=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Тогда

$$M(X\cdot Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)\,dxdy=\frac{1}{2}\int_0^2 xdx\int_0^{2-x} ydy=\frac{1}{2}\int_0^2 xdx\,\frac{y^2}{2}\Big|_0^{2-x}=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^2 x(2-x)^2dx=\frac{1}{4}\int_0^2(4x-4x^2+x^3)\,dx=\frac{1}{4}\left(2x^2-\frac{4x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right)_0^2=\frac{1}{3};$$

$$\mu_{xy}=M(X\cdot Y)-M(X)M(Y)=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=-\frac{1}{9};$$

$$r_{xy}=\frac{\mu_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}=-\frac{1}{9}\Big/(\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3})=-\frac{1}{2}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Как вычислить математические ожидания составляющих двумерной случайной величины? дисперсии? средние квадратичные отклонения?

2. Что называется корреляционным моментом?

3. Приведите вторую формулу для вычисления корреляционного момента.

4. Как связаны между собой дисперсия и корреляционный момент?

5. Как вычислить математическое ожидание произведения двух случайных величин $M(X \cdot Y)$?

6. Какие случайные величины называются коррелированными? некоррелированными?

7. Приведите свойства корреляционного момента.

8. Какая связь существует между равенством нулю коэффициента корреляции и независимостью случайных величин?

9. Что называется коэффициентом корреляции?

10. По каким причинам дополнительно к корреляционному моменту ввели вторую числовую характеристику силы связи между случайными величинами?

11. Какие значения может принимать коэффициент корреляции?

12. В каких случаях коэффициент корреляции равен по абсолютной величине единице?

Задачи для самостоятельного решения

3.16. Система двух случайных величин (X, Y) имеет следующую таблицу распределения:

$Y \backslash X$	-2	0	2
1	0,1	0,2	0,2
2	0	0,2	0,1
3	0,1	0	0,1

Найти математические ожидания составляющих, а также корреляционный момент.

3.17. Система двух случайных величин (X, Y) имеет следующую таблицу распределения:

$Y \backslash X$	0	2	4
0	0,2	0,1	0
1	0,1	0,2	0,1
2	0	0,1	0,2

Найти математические ожидания составляющих, а также корреляционный момент.

3.18. Из ящика, в котором находятся шесть фугасных снарядов и пять зажигательных, наудачу извлекают два снаряда без возвращения. Рассматривается дискретная система двух случайных величин (X, Y), где X – число фугасных снарядов, Y – число зажигательных снарядов среди выбранных двух снарядов. Составить закон распределения системы и найти коэффициент корреляции.

3.19. Задана плотность распределения вероятностей системы двух случайных величин (X, Y):

$$f(x,y)=\begin{cases}4xye^{-x^2-y^2}, & x\ge 0,\ y\ge 0,\\ 0, & x<0 \text{ или } y<0.\end{cases}$$

Найти математические ожидания и дисперсии составляющих X и Y.

3.20. Пусть компоненты случайного вектора (X_1, X_2) удовлетворяют условиям: $M(X_1) = -1$, $M(X_2) = 3$, $\mu_{xy} = 6$. Найти $M(Y)$, где $Y = 3X_1X_2 + 4$.

3.21. Плотность распределения вероятностей случайного вектора (X, Y) имеет вид

$$f(x,y)=\begin{cases}Axy, & (x, y)\in D,\\ 0, & (x, y)\notin D,\end{cases}$$

где $A = \text{const}$; D – область, ограниченная прямыми $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

Найти: а) константу A; б) $M(X)$; $M(Y)$; в) $D(X)$; $D(Y)$; г) μ_{xy}; д) r_{xy}.

3.22. Найти коэффициент корреляции между X и X^2, если X равномерно распределена на отрезке [0, 1].

3.23. Дискретная случайная величина X распределена по закону:

X	0	1	2
p	0,1	0,6	0,3

Найти коэффициент корреляции r_{xy} в случаях, когда: а) $Y = 2 + 3X$; б) $Y = 2 - 3X$; в) $Y = X^2$; г) $Y = |X|$; д) $Y = 2X^2$; е) $Y = 3|X|$; ж) $Y = |X| + 2$.

3.24. Дана плотность распределения системы случайных величин (X, Y):

$$f(x, y) = \begin{cases} 0,5\sin(x+y), & x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \\ 0, & x \notin \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ или } y \notin \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Найти математическое ожидание случайных величин, входящих в систему, и их корреляционный момент.

3.25. Плотность распределения вероятностей системы случайных величин (X, Y) равна:

$$f(x, y) = \begin{cases} 6e^{-(3x+2y)}, & x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & x < 0, \text{ или } y < 0. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение каждой случайной величины системы, их корреляционный момент.

Ответы: **3.16.** $M(X) = 0{,}4$; $M(Y) = 1{,}7$; $\mu_{xy} = -0{,}08$. **3.17.** $M(X) = 2$; $M(Y) = 1$; $\mu_{xy} = 0{,}8$.

3.18.

Y \ X	0	1	2
0	0	0	3/11
1	0	6/11	0
2	2/11	0	0

$r_{xy} = -1$.

3.19. $M(X) = M(Y) = \sqrt{\pi}\ /\ 2$; $D(X) = D(Y) = 1 - \pi/4$. **3.20.** $M(Y) = 13$. **3.21.** а) $A = 2$; б) $M(X) = M(Y) = 2/5$; в) $D(X) = D(Y) = 1/25$; г) $\mu_{xy} = -2/75$; д) $r_{xy} = -2/3$. **3.22.** $r_{xy} \approx 0{,}97$; **3.23.** а) 1; б) -1; в) $r_{xy} \approx 0{,}95$; г) 1; д) $r_{xy} \approx 0{,}95$; е) 1; ж) 1. **3.24.** $M(X) = M(Y) = \pi/4$; $r_{xy} = \dfrac{\pi - 2}{2} - \left(\dfrac{\pi}{4}\right)^2$.

3.25. $M(X) = 1/3$; $M(Y) = 1/2$; $\sigma_x = 1/3$; $\sigma_y = 1/2$; $r_{xy} = 0$.

3.3. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Плотность нормально распределенной одномерной случайной величины имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}},$$

где m_x – математическое ожидание случайной величины X (в формуле (2.10) оно было обозначено a).

Если случайные величины X и Y – независимые, то плотность нормально распределенной двумерной случайной величины имеет вид

$$f(x,y) = f_1(x)f_2(y) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \cdot \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right)\right). \quad (3.29)$$

Для зависимых случайных величин выражение сложнее:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r_{xy}^2}} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{1}{2(1-r_{xy}^2)} \cdot \left(\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} - 2r_{xy}\frac{(x-m_x)}{\sigma_x}\frac{(y-m_y)}{\sigma_y}\right)\right). \quad (3.30)$$

Форма поверхности, описываемая функциями $f(x, y)$ (3.29)–(3.30), представлена на рис. 3.15. Линии уровня, когда $f(x, y) = \text{const}$, являются эллипсами, если $\sigma_x \neq \sigma_y$, и окружностями, если $\sigma_x = \sigma_y$.

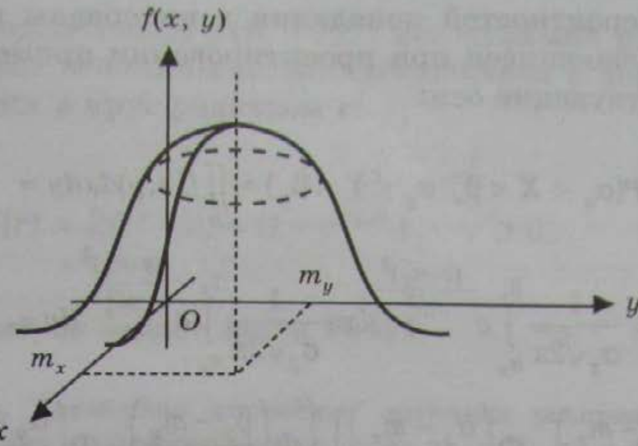


Рис. 3.15

Далее рассмотрим случаи, когда случайные величины X и Y независимы. Получим формулы для нахождения вероятности попадания случайной точки в прямоугольник (рис. 3.16) и окружность.

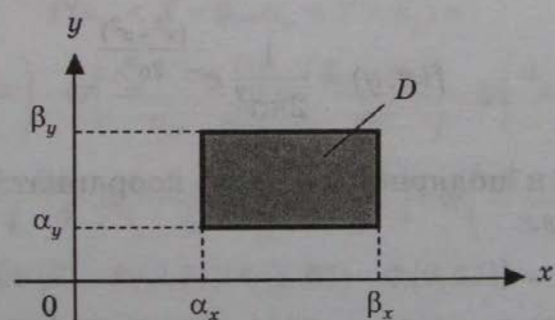


Рис. 3.16

Для одномерной случайной величины вероятность попадания в интервал (α_x, β_x) имеет вид

$$P\left(\alpha_x < X < \beta_x\right) = \Phi\left(\frac{\beta_x - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha_x - m_x}{\sigma_x}\right).$$

Так как случайные величины X и Y независимы, то вероятность попадания в прямоугольник будет равна произведению вероятностей попадания в интервалы по осям Ox и Oy, получающиеся при проектировании прямоугольника на соответствующие оси:

$$P(\alpha_x < X < \beta_x, \alpha_y < Y < \beta_y) = \iint_D f(x,y)dxdy =$$

$$= \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha_x}^{\beta_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}dx \cdot \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha_y}^{\beta_y} e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}dy = \tag{3.31}$$

$$= \left(\Phi\left(\frac{\beta_x - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha_x - m_x}{\sigma_x}\right)\right)\cdot\left(\Phi\left(\frac{\beta_y - m_y}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha_y - m_y}{\sigma_y}\right)\right).$$

Теперь получим выражение для вероятности попадания случайной точки в круг радиусом r с центром в начале координат в случае, когда $m_x = m_y = 0$, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ и выражение плотности распределения вероятностей упростится:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}.$$

Перейдем к полярной системе координат: $x^2 + y^2 = R^2$, $dxdy = RdRd\varphi$.

Тогда

$$P(R < r) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r R\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}}dR = \left| \begin{array}{l} t = -\dfrac{R^2}{2\sigma^2}, \\ dt = -\dfrac{R}{\sigma^2}dR, \\ t_{\text{н}} = 0, \\ t_{\text{в}} = -\dfrac{r^2}{2\sigma^2}. \end{array} \right| = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{t_{\text{в}}} e^t dt =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(e^{t_{\text{в}}} - 1)d\varphi = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} - 1\right)d\varphi = 1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}.$$

Согласно определению $P(R < r)$ – это функция распределения случайной величины R, заключающаяся в попадании случайной точки в круг радиусом r:

$$F(r) = P(R < r) = (1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}), \quad r \geq 0.$$

Данная формула задает закон Рэлея.

Пример 3.15. Двумерная случайная величина распределена по нормальному закону с параметрами $m_x = 2$; $m_y = 1$; $\sigma_x = 4$; $\sigma_y = 3$; $r_{xy} = 0$. Вычислить вероятности попадания случайной точки в прямоугольник, заданный неравенствами: $-8 < x < 10$, $-7 < y < 6$.

Решение. Для нормального закона равенство нулю коэффициента корреляции означает независимость случайных величин X и Y, поэтому подставим данные условия в формулу (3.31):

$$P(\alpha_x < X < \beta_x, \alpha_y < Y < \beta_y) =$$

$$= \left(\Phi\left(\frac{\beta_x - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha_x - m_x}{\sigma_x}\right)\right)\left(\Phi\left(\frac{\beta_y - m_y}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha_y - m_y}{\sigma_y}\right)\right) =$$

$$= \left[\Phi\left(\frac{10-2}{4}\right) - \Phi\left(\frac{-8-2}{4}\right)\right]\left[\Phi\left(\frac{6-1}{3}\right) - \Phi\left(\frac{-7-1}{3}\right)\right] \approx$$

$$\approx \left(\Phi(2) + \Phi(2,5)\right)\left(\Phi(1,67) + \Phi(2,67)\right) \approx$$

$$\approx (0,4772 + 0,4938)(0,4525 + 0,4962) \approx 0,921.$$

3.4. СИСТЕМА ПРОИЗВОЛЬНОГО ЧИСЛА СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Обобщим полученные в гл. 3 результаты на систему из n случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Функцией распределения системы n случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется вероятность совместного наступления n событий $\{X_i < x_i\}$ $i = \overline{1, n}$, где x_i – i-й аргумент функции:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, ..., X_n < x_n). \quad (3.32)$$

Плотностью распределения вероятностей системы n непрерывных случайных величин называется n-я смешанная частная производная функции распределения, взятая по каждому аргументу:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}. \quad (3.33)$$

По известному закону распределения системы можно найти законы распределения составляющих:

$$F_1(x_1) = F(x_1, +\infty, +\infty, \ldots, +\infty), \; f_1(x_1) = \frac{dF_1(x_1)}{dx_1};$$

$$F_2(x_2) = F(+\infty, x_2, +\infty, \ldots, +\infty), \; f_2(x_2) = \frac{dF_2(x_2)}{dx_2}$$

$$\ldots$$

$$F_n(x_n) = F(+\infty, +\infty, \ldots, +\infty, x_n), \; f_n(x_n) = \frac{dF_n(x_n)}{dx_n}.$$

Если ограничиться минимальным числом числовых характеристик, то необходимо ввести:

1) n математических ожиданий $M(X_i)$, $i = \overline{1, n}$;

2) n дисперсий $D(X_i) = D_i$, $i = \overline{1, n}$;

3) n средних квадратичных отклонений $\sigma(X_i)$, $i = \overline{1, n}$;

4) $\frac{n^2 - n}{2}$ корреляционных моментов:

$$\mu_{ij} = M[(X_i - M(X_i))(X_j - M(X_j))].$$

Поскольку $\mu_{ii} = D_i$, $\mu_{ij} = \mu_{ji}$, корреляционные моменты обычно задают в виде корреляционной матрицы, опуская при этом элементы, стоящие ниже главной диагонали:

$$\begin{pmatrix} D_1 & \mu_{12} & \mu_{13} & \dots & \mu_{1n} \\ & D_2 & \mu_{23} & \dots & \mu_{2n} \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & D_n \end{pmatrix}. \tag{3.34}$$

Если ввести коэффициенты корреляции $r_{ij} = \dfrac{\mu_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$, можно составить нормированную корреляционную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & r_{1n} \\ & 1 & r_{23} & r_{2n} \\ & & \dots & \dots \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.35}$$

Вопросы для самоконтроля

1. Запишите выражение для плотности распределения двумерной случайной величины, если составляющие X и Y независимые.
2. Запишите формулу для нахождения вероятности попадания случайной точки в прямоугольник.
3. Запишите формулу Рэлея.
4. Дайте определение функции распределения системы n случайных величин.
5. Дайте определение плотности распределения вероятностей системы n непрерывных случайных величин.
6. Что такое корреляционная матрица? Как она задается?
7. Что такое нормированная корреляционная матрица?

3.26. Независимые случайные величины X, Y распределены по нормальным законам с параметрами $M(X) = 2$; $M(Y) = -3$; $\sigma(X) = 1$; $\sigma(Y) = 2$. Вычислить $P(|X| < 1, |Y| < 2)$ и $P(X < M(X), Y < M(Y))$.

3.27. Координаты (X, Y) случайной точки M на плоскости подчинены нормальному закону:

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-\left(x^2 + y^2\right)}.$$

Определить вероятность того, что точка M попадает в круг радиусом R с центром в начале координат.

3.28. Найти вероятность попадания при одном пуске ракеты по наземной цели, представляющей собой прямоугольник со сторонами 30 и 10 м, если расчетная траектория проходит через центр прямоугольника, прицеливание – по центру цели. Направление стрельбы параллельно большей стороне цели, среднее квадратичное отклонение по дальности – 20 м, по боковому смещению – 4 м.

3.29. GPS-навигатор определяет местоположение объекта без систематических ошибок со средним квадратичным отклонением, равным 5 м. Найти вероятность того, что ошибка определения местоположения по модулю будет меньше 5 м.

3.30. Ракетный комплекс ведет стрельбу по наземной цели, имеющей вид прямоугольника размером 20×30 м^2. Траектория стрельбы лежит в плоскости, параллельной длинной стороне цели, прицеливание проводится по центру цели. Из-за систематической ошибки центр рассеивания ракет смещен в сторону недолета на 5 м. Среднее квадратичное отклонение по дальности 20 м и по направлению – 8 м. Определить вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех независимых выстрелах.

3.31. Двумерная случайная величина распределена по нормальному закону с параметрами $m_x = 2$; $m_y = 1$; $\sigma_x = 4$; $\sigma_y = 3$; $r_{xy} = 0$. Найти вероятность ее попадания в прямоугольник, удовлетворяющий неравенствам: $-8 \le X \le 10$, $-7 \le Y \le 6$.

Ответы: **3.26.** 0,0476; 0,25. **3.27.** $P = 1 - e^{-R^2}$. **3.28.** 0,4313. **3.29.** 0,3935. **3.30.** 0,8871. **3.31.** 0,9199.

Задачи для повторения

1. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) задана выражением $f(x, y) = C / \left((9 + x^2)(16 + y^2)\right)$. Найти постоянную C.

2. По данным примера 3.1 найти условные законы распределения.

3. По данным примера 3.2 найти условные законы распределения.

4. Плотность распределения системы (X, Y) на всей плоскости имеет вид

$$f(x, y) = \frac{a}{1 + x^2} e^{-y^2}.$$

Найти величину параметра a, записать выражения для $f_1(x)$, $\varphi(x/y)$ и $\psi(y/x)$ и сделать вывод о зависимости составляющих системы.

5. Плотность распределения системы (X, Y) задана выражением

$$f(x, y) = \begin{cases} A, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Область существования случайной величины представлена на рис. 3.17.

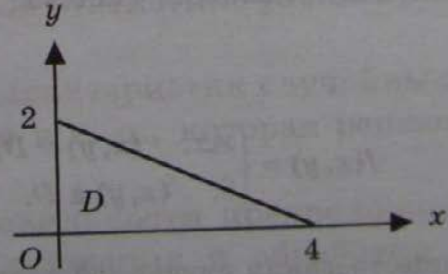


Рис. 3.17

Вычислить значение коэффициента A, найти безусловные плотности распределения составляющих системы, т. е. $f_1(x)$ и $f_2(y)$, найти условные плотности распределения $\varphi(x/y)$ и $\psi(y/x)$.

6. Плотность распределения системы (X, Y) задана выражением

$$f(x,y)=\begin{cases}Ay, & [x,y]\in D,\\ 0, & [x,y]\notin D.\end{cases}$$

Область существования случайной величины представлена на рис. 3.18.

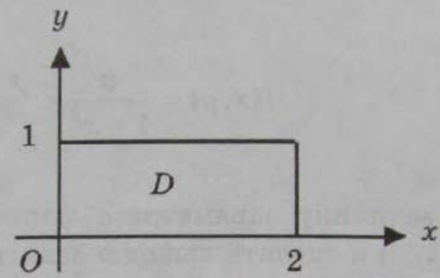


Рис. 3.18

Вычислить значение коэффициента A, найти безусловные плотности распределения составляющих системы, т. е. $f_1(x)$ и $f_2(y)$, найти условные плотности распределения $\varphi(x/y)$ и $\psi(y/x)$.

7. По данным примера 3.1 найти корреляционный момент и коэффициент корреляции.

8. По данным примера 3.2 найти корреляционный момент и коэффициент корреляции.

9. Плотность распределения системы (X, Y) задана выражением

$$f(x,y)=\begin{cases}Ax, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

Область существования случайной величины представлена на рис. 3.18.

Вычислить значение коэффициента A, корреляционный момент и коэффициент корреляции.

Часть 2

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

В теории вероятностей предполагается, что все основные характеристики случайных событий, случайных величин, систем случайных величин или функций случайных величин известны. Однако на практике это бывает крайне редко. По этой причине все характеристики или их часть можно получить только на основании изучения закономерностей, которым подчинены массовые случайные однородные явления, т. е. на основании изучения статистических данных – результатов наблюдений. Эти вопросы являются предметом изучения раздела математики, называемого «Математическая статистика».

В математической статистике рассматриваются две основные задачи:

1) оценивание характеристик случайных величин, систем случайных величин и т. п., которая решается в теории оценивания;

2) проверка правильности предположений, выдвинутых на основании исследования и обработки экспериментальных данных. Этот тип задачи решается в теории проверки статистических гипотез.

Глава 4

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

4.1. ГЕНЕРАЛЬНАЯ И ВЫБОРОЧНАЯ СОВОКУПНОСТИ

Совокупность, над которой производятся наблюдения, называется *генеральной*. Под объемом генеральной совокупности N понимают число всех ее элементов. Обычно N достаточно велико, а для непрерывных случайных величин объем генеральной совокупности бесконечен, поэтому обследовать все элементы по интересующему нас признаку не представляется возможным. Для уменьшения количества исследуемых объектов из генеральной совокупности объема N случайным образом отбирают n элементов ($n < N$) в выборочную совокупность (или выборку) и обследуют только их. Здесь очень важно, чтобы полученная выборочная совокупность правильно представляла генеральную совокупность, т. е. была репрезентативной (представительной). Выборка будет репрезентативной, если ее осуществлять случайным образом так, чтобы все объекты генеральной совокупности имели одинаковую вероятность попасть в выборку. Тогда интересующий нас оцениваемый признак, полученный по выборочной совокупности, на основании закона больших чисел позволяет судить об аналогичном неизвестном признаке всей генеральной совокупности.

На практике обычно применяются определенные способы получения репрезентативных выборок.

1. Простой отбор. В нем не предусматривается предварительное разбиение генеральной совокупности на части. Отбор элементов производится случайным образом по одному из всей генеральной совокупности с последующим возвращением его обратно в генеральную совокупность перед выбором следующего элемента (такой отбор называется повторным)

или без возвращения его в генеральную совокупность (такой отбор называется бесповторным).

2. Отбор, требующий предварительного разбиения генеральной совокупности на части. Здесь обычно рассматривают следующие возможные случаи:

а) генеральная совокупность делится на «типические» (характерные) части, и из каждой такой части отбирается один или несколько элементов;

б) генеральная совокупность «механически» делится на несколько групп, и из каждой группы отбирается один элемент.

3. Серийный отбор. Здесь из генеральной совокупности элементы отбираются целыми сериями, а не по одному. В дальнейшем отобранные в серию объекты обследуются полностью по интересующему нас признаку.

4. Комбинированный отбор. Он сочетает приведенные выше способы отбора.

4.2. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

4.2.1. Статистическое распределение

Пусть для некоторой генеральной совокупности объема N необходимо исследовать количественный признак X. Для этого из генеральной совокупности извлечена репрезентативная выборка объема n, т. е. получено n конкретных количественных значений признака X. При этом эти значения могут повторяться или не повторяться между собой. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что некоторое значение x_1 признака X наблюдается в выборке m_1 раз, значение признака x_2 наблюдается m_2 раз и т. д. Тогда множество полученных значений $x_1, x_2, \dots, x_k$ можно рассматривать как множество возможных значений некоторой дискретной случайной величины X.

В математической статистике наблюдаемые значения признака X называют вариантами. Варианты, записанные в порядке возрастания, образуют вариационный ряд.

Если варианта x_i наблюдалась m_i раз ($\overline{i=1,k}$; $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$), то число m_i называется частотой появления варианты x_i, а его отношение к объему выборки – относительной частотой варианты x_i:

$$W_i = \frac{m_i}{n}. \tag{4.1}$$

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант x_i вариационного ряда и соответствующих им относительных частот $W_i = \dfrac{m_i}{n}$ (или абсолютных частот m_i).

Если число вариант k ограничено ($k < 10$), то статистическое распределение выборки как соотношение между вариантами и соответствующими частотами может быть представлено в двух формах.

Рассмотрим первую из этих форм с использованием абсолютных частот:

x_1	x_2	...	x_k
m_1	m_2	...	m_k

где $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$ – общее число наблюдений (объем выборки); m_i – абсолютные частоты появления варианты x_i; $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$, x_i – варианты.

Для второй формы характерно использование относительных частот $W_i = \dfrac{m_i}{n}$:

x_1	x_2	...	x_k
W_1	W_2	...	W_k

Если же k велико или признак X непрерывен, то область возможных значений признака X разбивают на k интервалов длиной l_i и подсчитывают число вариант, попавших в каждый интервал. Вариантой в этом случае считают середину интервала, а соответствующую им частоту m_i определяют как сумму частот вариант, попавших в i-й интервал. Такой вариационный ряд называют *интервальным*.

Пример 4.1. Пусть в некоторой группе из 25 человек на экзамене были получены следующие оценки: 9, 7, 7, 8, 6, 9, 6, 6, 8, 5, 4, 7, 6, 6, 8, 5, 5, 6, 4, 5, 3, 4, 5, 5, 6.

Составить статистическое распределение абсолютных частот количественного признака X, за который принимается оценка, полученная на экзамене. Записать его в виде таблицы.

Решение. Подсчитав количество одинаковых оценок, запишем их в таблицу:

x_i	3	4	5	6	7	8	9
m_i	1	3	6	7	3	3	2

Пример 4.2. Выборка значений некоторого признака X задана в виде распределения частот:

x_i	1	3	5	7	9
m_i	2	4	7	23	14

Найти статистическое распределение относительных частот.

Решение. Сначала найдем объем выборки:

$$n = \sum_{i=1}^{k} m_i = 2 + 4 + 7 + 23 + 14 = 50.$$

Затем получим относительные частоты по формуле $W_i = \dfrac{m_i}{n}$:

$$W_1 = \frac{2}{50} = 0{,}04;\; W_2 = \frac{4}{50} = 0{,}08;\; W_3 = \frac{7}{50} = 0{,}14;$$

$$W_4 = \frac{23}{50} = 0,46; \; W_5 = \frac{14}{50} = 0,28.$$

Запишем искомое распределение относительных частот в виде таблицы:

x_i	1	3	5	7	9
W_i	0,04	0,08	0,14	0,46	0,28

Для контроля правильности решения примера можно найти сумму относительных частот. Она должна быть равна 1.

Для нашего примера:

$$\sum_{i=1}^{k} W_i = 0,04 + 0,08 + 0,14 + 0,46 + 0,28 = 1.$$

Пример 4.3. При изучении состава 100 SMS по числу слов было установлено, что 15 из них содержали до 5 слов включительно, 35 из них имели количество слов в интервале от 6 до 10; 30 содержали от 11 до 15 слов; 15 SMS по количеству слов находились в интервале от 16 до 20 и 5 SMS содержали от 21 до 25 слов. Найти статистическое распределение относительных частот признака X – количество слов в SMS.

Решение. Так как по условию задачи изучаемый признак X задан не одним значением, а интервалом, то составим интервальный вариационный ряд:

Количество слов в SMS	[1, 5]	[6, 10]	[11, 15]	[16, 20]	[21, 25]
m_i	15	35	30	15	5
W_i	0,15	0,35	0,30	0,15	0,05

4.2.2. Наглядное представление статистической информации

Для наглядности и удобства статистическая информация может быть представлена графически в виде полигона и гистограммы. Рассмотрим эти понятия.

Полигоном частот называют ломаную, соединяющую соседние точки с координатами (x_i, m_i), а *полигоном относительных частот* – ломаную, соединяющую соседние точки с координатами (x_i, W_i).

Если для рассмотренного примера 4.1 построить полигон абсолютных частот, то он будет иметь вид

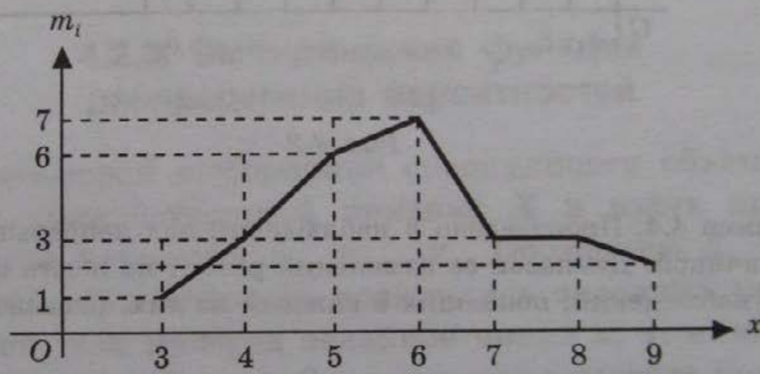


Рис. 4.1

Для интервального ряда чаще используется гистограмма относительных частот, представляющая собой ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников. Для ее построения на оси абсцисс отмечаются границы интервалов, и на каждом из них как на основании строится прямоугольник высотой $h_i = \dfrac{W_i}{\delta_i}$, где δ_i – длина i-го интервала $\left(i = \overline{1, k}\right)$. Площадь гистограммы равна $\sum\limits_{i=1}^{k} \delta_i h_i = \sum\limits_{i=1}^{k} W_i = 1$. При больших n и малых δ_i гистограмма относительных частот мало отличается от графика плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины. Примерный график плотности распределения изображен штриховой линией на рис. 4.2.

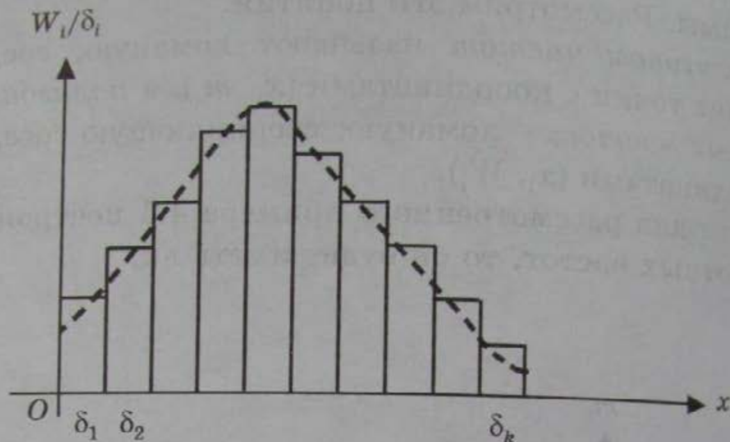


Рис. 4.2

Пример 4.4. Произведено n наблюдений над непрерывной случайной величиной. Диапазон ее изменений разбит на шесть промежутков и число наблюдений, попавших в каждый из них, указано в таблице.

Промежуток	[0, 2)	[2, 4)	[4, 6)	[6, 8)	[8, 10)	[10, 12)
m_i	20	46	80	58	28	18

Построить гистограмму относительных частот.

Решение. Определим объем выборки $n = \sum_{i=1}^{6} n_i = 250$. Длина всех промежутков одинакова ($W_i = 2$). Вычислим относительные частоты W_i и высоты прямоугольников h_i:

$W_1 = n_1/n = 0{,}080$; $h_1 = W_1/\delta = 0{,}040$; $W_2 = 0{,}184$; $h_2 = 0{,}092$;
$W_3 = 0{,}320$; $h_3 = 0{,}160$; $W_4 = 0{,}232$; $h_4 = 0{,}116$;
$W_5 = 0{,}112$; $h_5 = 0{,}056$; $W_6 = 0{,}072$; $h_2 = 0{,}036$.

Построим гистограмму относительных частот (рис. 4.3):

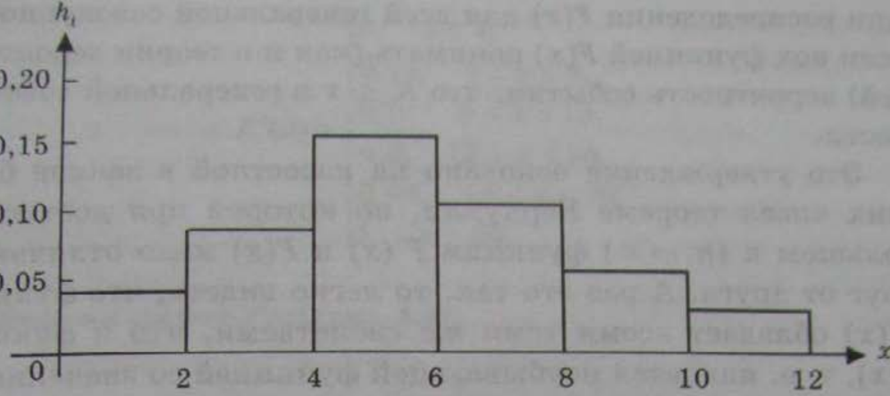


Рис. 4.3

4.2.3. Эмпирическая функция распределения вероятностей

Для некоторой выборочной совокупности объема n исследуется количественный признак X и пусть при этом наблюдались варианты $x_1, x_2, ..., x_n$. Обозначим n_x – число наблюдений, при которых появлялись значения признака X меньшие, чем наперед заданное число x, т. е. выполнялось неравенство $(X < x)$. Относительная частота появления вариант x_i $(i = \overline{1, n})$, удовлетворяющих этому неравенству, равна n_x/n.

Эмпирической функцией распределения (или функцией распределения выборки) называют функцию $F^*(x)$, определяющую для любого значения x относительную частоту выполнения неравенства $X < x$:

$$F^*(x) = n_x/n. \qquad (4.2)$$

Эмпирическая функция распределения $F^*(x)$ по известной не слишком большого объема выборке может быть найдена достаточно легко. Вместе с тем ее можно использовать в качестве приближенного представления о неизвестной функции распределения $F(x)$ для всей генеральной совокупности, если под функцией $F(x)$ понимать (как и в теории вероятностей) вероятность события, что $X < x$ в генеральной совокупности.

Это утверждение основано на известной в законе больших чисел теореме Бернулли, по которой при достаточно большом n ($n \to \infty$) функции $F^*(x)$ и $F(x)$ мало отличаются друг от друга. А раз это так, то легко видеть, что функция $F^*(x)$ обладает всеми теми же свойствами, что и функция $F(x)$, т. е. является неубывающей функцией со значениями, принадлежащими отрезку [0; 1]. Алгоритм ее составления сходен с нахождением функции распределения дискретной случайной величины в теории вероятностей.

Пример 4.5. Выборка значений некоторого признака X задана в виде распределения частот:

x_i	4	8	12	16	20
m_i	15	35	30	15	5

Найти эмпирическую функцию распределения $F^*(x)$ и построить ее график.

Решение. Сначала определим объем выборки $n = 15 + 35 + 30 + 15 + 5 = 100$.

Построим эмпирическую функцию распределения $F^*(x)$ для данного статистического распределения. Наименьшая варианта $x_1 = 4$; следовательно, при $x \le 4$ $n_x = 0$ и $F^*(x) = 0$. Если значения x удовлетворяют условию $4 < x \le 8$, то $n_x = 15$ и $F^*(x) = 0{,}15$. Если же значения x удовлетворяют условию $8 < x \le 12$, то $n_x = 15 + 35 = 50$ и $F^*(x) = 0{,}5$. Аналогично при $12 < x \le 16$ значение $n_x = 15 + 35 + 30 = 80$ и $F^*(x) = 0{,}8$; при $16 < x \le 20$ значение $n_x = 15 + 35 + 30 + 15 = 95$ и $F^*(x) = 0{,}95$. Наибольшая наблюдаемая в этом примере варианта $x = 20$, поэтому при $x > 20$ значение $F^*(x) = 1$.

Таким образом, полученная эмпирическая функция распределения может быть записана в виде

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 4, \\ 0{,}15, & 4 < x \le 8, \\ 0{,}5, & 8 < x \le 12, \\ 0{,}8, & 12 < x \le 16, \\ 0{,}95, & 16 < x \le 20, \\ 1, & x > 20. \end{cases}$$

Построим график $F^*(x)$ (рис. 4.4):

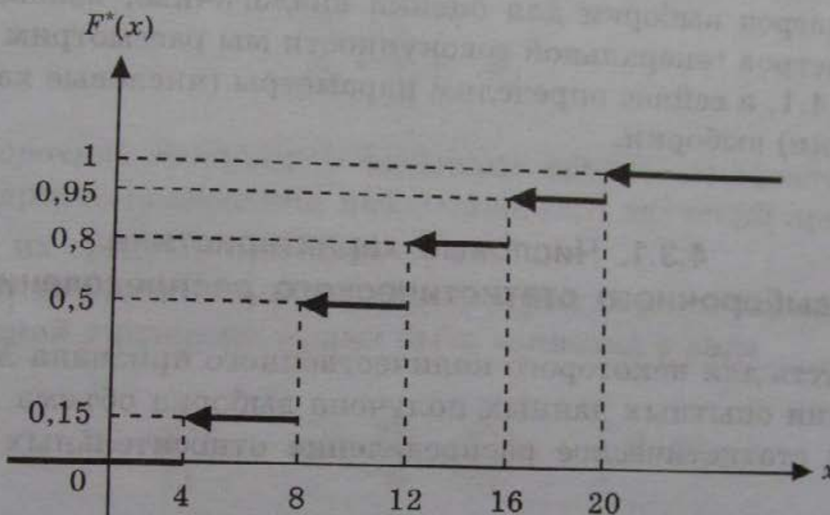


Рис. 4.4

4.3. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАТИСТИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Мы знаем, что под статистическим распределением понимается перечень вариант x_i $(i = \overline{1,n})$ вариационного ряда и соответствующих им относительных ($W_i = \dfrac{m_i}{n}$, $i = \overline{1,n}$) или абсолютных (m_i, $i = \overline{1,n}$) частот. Статистические распределения рассматриваются как для выборочной, так и для генеральной совокупности. Однако нужно учитывать, что статистическое распределение выборки обычно известно и составлено по опытным данным, для него можно найти по определенным правилам параметры распределения. Статистическое распределение всей генеральной совокупности, как правило, неизвестно, и о его параметрах можно судить только по найденным аналогичным параметрам выборки. Таким образом, полученные по опытным данным параметры выборочной совокупности рассматриваются как оценки неизвестных соответствующих параметров генеральной совокупности. Вопросы возможности и правомерности использования параметров выборки для оценки аналогичных неизвестных параметров генеральной совокупности мы рассмотрим в пункте 4.4.1, а сейчас определим параметры (числовые характеристики) выборки.

4.3.1. Числовые характеристики выборочного статистического распределения

Пусть для некоторого количественного признака X на основании опытных данных получена выборка объема n, имеющая статистическое распределение относительных частот вида:

x_i	x_1	x_2	...	x_k
W_i	$\frac{m_1}{n}$	$\frac{m_2}{n}$	...	$\frac{m_k}{n}$

Здесь $m_1 + m_2 + ... + m_k = n$.

В частном, но часто встречающемся на практике случае, когда каждая варианта x_i $(i = \overline{1, n})$ появляется ровно один раз, это статистическое распределение принимает вид

x_i	x_1	x_2	...	x_n
W_i	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

По данным выборки прежде всего можно определить выборочное среднее, обозначаемое $\overline{x_{в}}$; выборочную дисперсию $D_{в}$ и выборочное среднее квадратичное отклонение $\sigma_{в}$.

Выборочным средним называют среднее арифметическое значений признака X в выборке:

$$\overline{x_{в}} = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + \ldots + x_k \cdot m_k}{n} = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot \frac{m_i}{n} = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot W_i .$$

Итак, выборочное среднее определяется по формуле

$$\overline{x_{в}} = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot W_i . \tag{4.3}$$

Выборочной дисперсией называют среднее арифметическое квадратов отклонений наблюдавшихся значений признака X от их среднего значения $\overline{x_{в}}$.

В соответствии с определением формула для нахождения выборочной дисперсии может быть записана в виде

$$D_{в} = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x_{в}})^2 \cdot \frac{m_i}{n} = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x_{в}})^2 \cdot W_i . \tag{4.4}$$

Если же в выборке варианты x_i $(i = \overline{1, n})$ не повторяются, то в этом частном случае выборочную дисперсию можно находить по формуле

$$D_{в} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x_{в}})^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x_{в}})^2 . \tag{4.5}$$

Однако при получении дисперсии часто используют другую более удобную для вычислений формулу. Получим ее:

$$\begin{aligned} D_{в} &= \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x_{в}})^2 \cdot \frac{m_i}{n} = \sum_{i=1}^{k} (x_i^2 - 2x_i \overline{x_{в}} + (\overline{x_{в}})^2) \cdot \frac{m_i}{n} = \\ &= \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot \frac{m_i}{n} - 2\overline{x_{в}} \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot \frac{m_i}{n} + (\overline{x_{в}})^2 \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{n} . \end{aligned} \tag{4.6}$$

Теперь воспользуемся следующими рассуждениями: первое слагаемое формулы (4.6) представляет собой среднее арифметическое значение квадратов признака X в выборке $\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot \frac{m_i}{n} = (\overline{x^2})_{\text{в}}$, второе слагаемом $\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot \frac{m_i}{n}$ является выборочным средним признака X, т. е. $2\overline{x_{\text{в}}}\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot \frac{m_i}{n} = 2\overline{x_{\text{в}}} \cdot \overline{x_{\text{в}}} = 2\left(\overline{x_{\text{в}}}\right)^2$.

При анализе третьего слагаемого учитываем, что сумма абсолютных частот m_i $(i = \overline{1, k})$ равна объему выборки n, и получаем

$$\left(\overline{x_{\text{в}}}\right)^2 \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{n} = \left(\overline{x_{\text{в}}}\right)^2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i}{n} \left(\overline{x_{\text{в}}}\right)^2 \cdot \frac{n}{n} = \left(\overline{x_{\text{в}}}\right)^2.$$

Запишем окончательно формулу для нахождения выборочной дисперсии:

$$D_{\text{в}} = \left(\overline{x^2}\right)_{\text{в}} - \left(\overline{x_{\text{в}}}\right)^2. \tag{4.7}$$

Выборочным средним квадратичным отклонением $\sigma_{\text{в}}$ называют число, равное квадратному корню из выборочной дисперсии $D_{\text{в}}$:

$$\sigma_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}}. \tag{4.8}$$

На практике часто бывают важны и другие числовые характеристики, в частности медиана и мода. Рассмотрим их.

Медианой M_e называют варианту вариационного ряда, которая делит весь ряд значений пополам. Иными словами, медиана – это средняя величина вариационного ряда. Допустим, у нас задан вариационный ряд: 3, 4, 5, 6, 7. Для него медиана будет равна 5. Если же ряд содержит четное число вариант, например 2, 4, 6, 8, 10, 12, то здесь медиана находится между третьей и четвертой вариантами и определяется по правилу: два средних значения вариант складывают и полученную сумму делят пополам. В нашем примере $M_e = (6 + 8)/2 = 7$.

В общем виде это утверждение можно записать:

$$M_e = \begin{cases} x_{m+1}, & n = 2m+1, \\ \dfrac{x_m + x_{m+1}}{2}, & n = 2m. \end{cases} \tag{4.9}$$

Модой называют варианту вариационного ряда, которая чаще всего встречается в данной выборочной совокупности. Другими словами, под модой понимают величину признака, имеющую наибольшую частоту.

Пример 4.6. Пусть задано выборочное статистическое распределение, полученное в результате наблюдений над некоторой дискретной случайной величиной X:

x_i	3	5	7	9	11
m_i	4	10	25	8	3

Найти его выборочные числовые характеристики.

Решение. Сначала определим объем выборки (общее число наблюдений):

$$n = \sum_{i=1}^{k} m_i = 4 + 10 + 25 + 8 + 3 = 50\,.$$

Далее вычислим значение выборочного среднего:

$$\overline{x_{\text{в}}} = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot \frac{m_i}{n} = \frac{3 \cdot 4 + 5 \cdot 10 + 7 \cdot 25 + 9 \cdot 8 + 11 \cdot 3}{50} = \frac{342}{50} = 6,84.$$

Для нахождения выборочной дисперсии $D_в$ найдем значения отклонений $x_i - \overline{x_в}$ и квадратов отклонений $\left(x_i - \overline{x_в}\right)^2$. Результаты запишем в таблицу:

$x_i - \overline{x_в}$	−3,84	−1,84	0,16	2,16	4,16
$\left(x_i - \overline{x_в}\right)^2$	14,7456	3,3856	0,0256	4,6656	17,3056

Теперь по формуле (4.4) получим

$$D_в = \frac{14,7456 \cdot 4 + 3,3856 \cdot 10 + 0,0256 \cdot 25 + 4,6656 \cdot 8 + 17,3056 \cdot 3}{50} =$$

$$= \frac{182,72}{50} = 3,6544.$$

Выборочное среднее квадратичное отклонение будет равно

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} \approx 1,91.$$

В этом примере значение моды и медианы совпадают и равны 7. В общем случае это совпадение совсем необязательно.

Рассмотрим, как можно найти выборочную дисперсию $D_в$ с использованием формулы (4.7).

Для этого составим таблицу:

x_i^2	9	25	49	81	121
m_i	4	10	25	8	3

Вычислим

$$\left(\overline{x^2}\right)_в = \frac{9 \cdot 4 + 25 \cdot 10 + 49 \cdot 25 + 81 \cdot 8 + 121 \cdot 3}{50} = \frac{2522}{50} = 50,44.$$

Возведем в квадрат значение выборочного среднего:

$$\left(\overline{x_в}\right)^2 = (6,84)^2 = 46,7856.$$

По формуле (4.7) получим искомое значение выборочной дисперсии:

$$D_в = 50,44 - 46,79 = 3,6544.$$

Если рассматривается непрерывный признак X и объем выборки n достаточно велик, то для нахождения выборочных характеристик прибегают к группировке данных. Область изменения признака X разбивают на k интервалов и считают X дискретным признаком, который принимает только значения x_i $(i = \overline{1, k})$, равные серединам интервалов с частотами m_i $(i = \overline{1, k})$, соответствующими сумме всех частот вариант, попавших в рассматриваемый интервал. Таким образом, после проведенных преобразований непрерывный признак X можно приближенно рассматривать как дискретный и для нахождения числовых характеристик выборочного статистического распределения использовать формулы (4.3) – (4.9).

Пример 4.7. Пусть над некоторой непрерывной случайной величиной X проведено n наблюдений. Диапазон изменения величины X разбит на восемь промежутков. Их границы и значения абсолютных частот m_i, наблюдавшихся в каждом промежутке, приведены в таблице:

(x_{i-1}, x_i)	[1, 3)	[3, 5)	[5, 7)	[7, 9)	[9, 11)	[11, 13)	[13, 15)	[15, 17)
m_i	5	15	38	80	58	28	18	8

Найти выборочное среднее, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратичное отклонение.

Решение. Сначала найдем общее число наблюдений n, равное:

$$n = 5 + 15 + 38 + 80 + 58 + 28 + 18 + 8 = 250.$$

Теперь определим выборочное среднее $\overline{x_в}$. Для этого в качестве вариант x_i используем середины промежутков $[x_{i-1}, x_i)$ $(i = \overline{1, 8})$, т. е. $x_1 = 2$; $x_2 = 4$; $x_3 = 6$; $x_4 = 8$; $x_5 = 10$; $x_6 = 12$; $x_7 = 14$; $x_8 = 16$.

Далее по формуле (4.3) получим искомое $\overline{x_в}$:

$$\overline{x_в} = \frac{2\cdot5+4\cdot15+6\cdot38+8\cdot80+10\cdot58+12\cdot28+14\cdot18+16\cdot8}{250} = \frac{2234}{250} = 8{,}936.$$

Затем переходим к нахождению выборочной дисперсии $D_в$ по формуле (4.4). Для удобства составим таблицу:

$x_i - \overline{x_в}$	–6,936	–4,936	–2,936	–0,936	1,064	3,064	5,064	7,064
$\left(x_i - \overline{x_в}\right)^2$	48,1081	24,3641	8,6201	0,8761	1,1321	9,3881	25,6441	49,9001

$$D_в = \frac{48,1081\cdot5+24,3641\cdot15+8,6201\cdot38+0,8761\cdot80+1,1321\cdot58}{250} +$$

$$+\frac{9,3881\cdot28+25,6441\cdot18+49,9001\cdot8}{250} \approx 8,7719.$$

Тогда выборочное среднее квадратичное отклонение равно:

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} = \sqrt{8,7719} \approx 2,9617.$$

4.3.2. Числовые характеристики статистического распределения генеральной совокупности

Как и для случая выборочного статистического распределения, считаем, что требуется изучить некоторый количественный признак X для всей генеральной совокупности объема N. Как правило, статистическое распределение генеральной совокупности неизвестно или очень громоздко, что делает невозможным или трудоемким нахождение ее параметров. Рассмотрим, что понимают под параметрами (числовыми характеристиками) генеральной совокупности.

Основными числовыми характеристиками признака X в данном случае являются генеральное среднее $\overline{x_г}$ и генеральная дисперсия $D_г$.

Генеральное среднее – это среднее арифметическое признака X в генеральной совокупности. Здесь возможны два случая: варианты x_i $(i = \overline{1, N})$ не повторяются (т. е. появляются по одному разу):

$$\overline{x_г} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

или каждая из вариант x_i $(i = \overline{1, k})$ повторяется N_i раз $\left(\sum_{i=1}^{k} N_i = N\right)$, тогда

$$\overline{x_г} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot N_i}{N}.$$

Генеральная дисперсия – это среднее арифметическое квадратов отклонений значений признака X от их среднего значения. Если варианты генеральной совокупности не повторяются, то

$$D_г = \sum_{i=1}^{N} \left(x_i - \overline{x_г}\right)^2 \cdot \frac{1}{N}.$$

Если же варианты x_i повторяются по N_i раз $(i = \overline{1, k})$, то

$$D_г = \sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \overline{x_г}\right)^2 \cdot \frac{N_i}{N}.$$

4.3.3. Нахождение общих средних и дисперсий с помощью групповых числовых характеристик

При очень больших объемах выборки использовать формулы (4.3) – (4.8) для нахождения числовых характеристик выборочной совокупности затруднительно, поэтому при больших n применяются упрощенные методы расчета $\overline{x_{\text{в}}}$ и $D_{\text{в}}$.

На практике статистическую совокупность (как выборочную, так в общем случае и генеральную) обычно изучают по группам. Рассматривая каждую группу как самостоятельную выборку, можно найти групповое среднее $\overline{x_i}$ и групповые дисперсии D_i $(i = \overline{1,l})$ для каждой группы.

Для получения числовых характеристик всей статистической совокупности с использованием предварительно найденных групповых средних $\overline{x_i}$ и групповых дисперсий D_i введем ряд определений.

Общее среднее равно среднему арифметическому групповых средних, взвешенных по объемам групп:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{l} n_i \overline{x_i}}{n}, \tag{4.10}$$

где n_i – объем i-й группы; n – объем всей совокупности.

Внутригрупповая дисперсия – средняя арифметическая групповых дисперсий, взвешенная по объемам групп:

$$D_{\text{вгр}} = \frac{\sum_{i=1}^{l} n_i D_i}{n}. \tag{4.11}$$

Межгрупповая дисперсия – дисперсия групповых средних относительно общей средней:

$$D_{\text{м}} = \frac{\sum_{i=1}^{l} n_i \left(\overline{x_i} - \overline{x}\right)^2}{n}. \tag{4.12}$$

Можно доказать, что общая дисперсия $D_в$ (для всей генеральной или выборочной совокупности) равна:

$$D_в = D_{в\,гр} + D_м. \tag{4.13}$$

Замечание. Нужно иметь в виду, что значения $\overline{x_в}$ и $D_в$ не зависят от способа их получения, т. е. для данного статистического распределения числовые характеристики, полученные по формулам (4.3) – (4.4) и по формулам (4.10), (4.13) совпадают.

Пример 4.8. Статистическая совокупность разбита на две группы. Первая группа объема $n_1 = 10$ представлена в виде таблицы:

x_i	1	3	4
n_i	1	7	2

Вторая группа имеет объем $n_2 = 5$ и представлена в виде таблицы:

x_i	2	7
n_i	2	3

Найти общее среднее, внутригрупповую, межгрупповую и общую дисперсии.

Решение. Сначала определим групповые средние для первой группы $\overline{x_1}$ и для второй группы $\overline{x_2}$, затем получим общее среднее $\overline{x_в}$.

$$\overline{x_1} = \frac{1 \cdot 1 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 2}{10} = 3; \quad \overline{x_2} = \frac{2 \cdot 2 + 7 \cdot 3}{5} = 5;$$

$$\overline{x_в} = \frac{3 \cdot 10 + 5 \cdot 5}{10 + 5} = \frac{55}{15} = \frac{11}{3}.$$

Далее найдем групповые дисперсии для первой группы D_1 и для второй группы D_2. После этого вычислим внутригрупповую дисперсию $D_{\text{в гр}}$, межгрупповую дисперсию $D_{\text{м}}$ и общую дисперсию $D_{\text{в}}$:

$$D_1 = \frac{(1-3)^2 \cdot 1 + (3-3)^2 \cdot 7 + (4-3)^2 \cdot 2}{10} = 0,6\,;$$

$$D_2 = \frac{(2-5)^2 \cdot 2 + (7-5)^2 \cdot 3}{5} = 6\,;$$

$$D_{\text{вгр}} = \frac{0,6 \cdot 10 + 6 \cdot 5}{10+5} = \frac{36}{15} = \frac{12}{5} = 2,4\,;$$

$$D_{\text{м}} = \frac{\left(3 - \frac{11}{3}\right)^2 \cdot 10 + \left(5 - \frac{11}{3}\right)^2 \cdot 5}{10+5} = \frac{8}{9}\,;$$

$$D_{\text{в}} = D_{\text{вгр}} + D_{\text{м}} = \frac{12}{5} + \frac{8}{9} = \frac{12 \cdot 9 + 8 \cdot 5}{45} = \frac{148}{45}.$$

Этот же результат можно получить, рассчитав $\overline{x_{\text{в}}}$ и $D_{\text{в}}$ по всей выборке:

x_i	1	2	3	4	7
n_i	1	2	7	2	3

$$\overline{x_{\text{в}}} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 2 + 7 \cdot 3}{15} = \frac{11}{3}\,;$$

$$D_{\text{в}} = \frac{\left(1 - \frac{11}{3}\right)^2 \cdot 1 + \left(2 - \frac{11}{3}\right)^2 \cdot 2 + \ldots + \left(7 - \frac{11}{3}\right)^2 \cdot 3}{15} = \frac{148}{45}.$$

4.4. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

4.4.1. Точечные оценки

Пусть требуется изучить количественный признак X генеральной совокупности. Основными числовыми характеристиками признака X в генеральной совокупности являются генеральное среднее $\overline{x_г}$ и генеральная дисперсия $D_г$. Для генеральной совокупности эти параметры неизвестны.

По данным выборки можно посчитать $\overline{x_в}$ и $D_в$. По ним мы можем судить о значениях $\overline{x_г}$ и $D_г$. Таким образом, числа $\overline{x_в}$ и $D_в$ являются статистическими оценками неизвестных параметров распределения $\overline{x_г}$ и $D_г$. Выборочная характеристика, приближенно заменяющая значение характеристики генеральной совокупности, называется ее *точечной статистической оценкой*. Точечной она называется потому, что определяется одним числом.

Оценки, найденные по нескольким различным выборкам, как правило, отличаются друг от друга. Так как по каждой извлеченной из генеральной совокупности выборке мы находим свою точечную оценку, то множество точечных оценок можно рассматривать как наблюдаемые значения некоторой новой случайной величины θ^*.

Для того чтобы θ^* можно было использовать как точечную оценку неизвестного параметра θ, к θ^* нужно предъявить следующие требования:

1) при увеличении числа n независимых опытов оценка θ^* должна сходиться к неизвестному параметру θ по вероятности. Такая оценка называется состоятельной;

2) оценка θ^* не должна быть завышенной или заниженной, т. е. иметь систематическую ошибку. Это значит, что

$$M(\theta^*) = \theta.$$

Такая оценка называется *несмещенной*;

3) выбранная несмещенная оценка должна обладать наименьшей дисперсией при заданной объеме выборки. Такая оценка называется *эффективной*.

Замечание. На практике не всегда удается обеспечить все три требования, но перед использованием оценки нужно проверять выполнение приведенных выше требований.

Докажем, что выборочное среднее $\overline{x_в}$ является оценкой $\overline{x_г}$.

Рассмотрим $x_1, x_2, ..., x_n$ как значения независимых случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$, имеющих одинаковое математическое ожидание $M(X_i) = \overline{x_г}$ и одинаковую дисперсию D.

Тогда выборочное среднее $\overline{x_в} = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$ является значением случайной величины $\overline{X_в} = \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$.

Проверим выполнение требований к оценке:

1) несмещенность оценки, т. е. $M(\overline{X_в}) = \overline{x_г}$.

Исходя из свойств математического ожидания, имеем

$$M(\overline{X_в}) = M\left(\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(M(X_1) + ... + M(X_n)\right) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \overline{x_г} = \overline{x_г}.$$

Следовательно, $\overline{x_в}$ является несмещенной оценкой для $\overline{x_г}$;

2) состоятельность оценки. Из определения $\overline{x_в}$ и $\overline{x_г}$ следует, что при увеличении объема выборки n по закону больших чисел $\overline{x_в}$ сходится по вероятности к $\overline{x_г}$, т.е. $\overline{x_в}$ – состоятельная оценка;

3) эффективность оценки:

$$D(\overline{X_в}) = D\left(\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot D = \frac{D}{n}.$$

Так как $D(\overline{x_в}) \to 0$ при $n \to \infty$, то $\overline{x_в}$ – эффективная оценка.

Выборочная дисперсия $D_в$ является состоятельной, эффективной, но смещенной оценкой для генеральной дисперсии $D_г$.

Можно показать, что $M(D_в) = \frac{n-1}{n} D_г \Rightarrow M\left(\frac{n}{n-1} D_в\right) = D_г$.

Следовательно, за оценку для генеральной дисперсии можно принять величину

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_в, \tag{4.14}$$

называемую *исправленной дисперсией.*

Величина S называется *исправленным средним квадратичным отклонением.*

Замечание. Сравнив формулы для вычисления выборочной и исправленных дисперсий

$$D_в = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x_в}\right)^2 \cdot \frac{n_i}{n};$$

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x_в}\right)^2 \cdot \frac{n_i}{n} = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x_в}\right)^2 \cdot \frac{n_i}{n-1},$$

можно сделать вывод о том, что при больших значениях n разница между $D_в$ и S^2 несущественна. По этой причине на практике исправленную дисперсию используют при $n < 30$.

4.4.2. Интервальные оценки

Рассмотрев точечные оценки неизвестных параметров генеральной совокупности, сделаем уточнение: поскольку выборка, по которой были найдены эти оценки, сама состоит из случайных значений, точечные статистические оценки математического ожидания и дисперсии сами, очевидно, являются случайными величинами. В разных сериях испытаний, в разных выборках, особенно при небольших объемах опытов, эти оценки могут получиться различными и, как правило, будут отличаться от истинных значений оцениваемых параметров. В ряде практических задач эти точечные оценки могут успешно использоваться вместо соответствующих неизвестных параметров генеральной совокупности. Однако часто для практических целей важно знать, насколько статистическая оценка отличается (отклоняется) от истинного значения параметра. Такое отклонение – это тоже случайная величина, которую можно оценить с помощью так называемых интервальных оценок.

Интервальная оценка – это оценка, определяемая двумя числами, задающими начало и конец доверительного интервала, покрывающего неизвестный параметр с заданной доверительной вероятностью.

Введем нужные нам обозначения. Пусть в генеральной совокупности оценивается неизвестный неслучайный параметр, который обычно в математической статистике обозначается $\theta_г$.

Для его оценки по известной выборке получено конкретное значение аналогичного параметра $\theta_в$. Под отклонением $\theta_в$ от $\theta_г$ понимают разность $|\theta_г - \theta_в|$. Далее потребуем, чтобы отклонение $|\theta_г - \theta_в|$ не превышало подлежащей определению величины δ с некоторой заданной надежностью (доверительной вероятностью) γ. Доверительная вероятность обычно принимает достаточно большие значения (например, $\gamma = 0,9$; $\gamma = 0,95$; $\gamma = 0,99$ и т. д.), чтобы событие $|\theta_г - \theta_в| < \delta$ было практически достоверным. Указанное условие может быть записано в виде

$$P(|\theta_г - \theta_в| < \delta) = \gamma. \tag{4.15}$$

Из равенства (4.15) находят δ и записывают доверительный интервал в виде $(\theta_г - \delta; \theta_в + \delta)$. По смыслу доверительный интервал указывает на точность суждений о значении параметра $\theta_г$ (чем меньше длина доверительного интервала, тем информативнее оценка для $\theta_г$), а доверительная вероятность определяет надежность этого суждения. Отметим, что параметр $\theta_г$ является неслучайной величиной, а доверитальный интервал имеет случайный характер, поэтому фраза «параметр $\theta_г$ попадает на доверительный интервал с доверительной вероятностью γ» неверна. Правильная формулировка: «доверительный интервал покрывает оцениваемый параметр $\theta_г$ с доверительной вероятностью γ».

Очевидно, что с расширением доверительного интервала возрастает доверительная вероятность и наоборот. Поясним последнее утверждение на примере.

Пусть необходимо оценить среднее значение (математическое ожидание) роста большой группы людей, например студентов некоторого учреждения образования. Для этого была сделана выборка, т. е. измерен рост n случайно отобранных людей и по этой выборке получена точечная статистическая оценка для среднего роста $\overline{x}_в = 170$ см. Если в качестве доверительного интервала для истинного среднего роста человека взять интервал (150 см; 190 см), то это малоинфомативное утверждение с высокой степенью надежности можно рассматривать как достоверное. Если же, увеличивая информативность, сужать длину доверительного интервала до (169 см; 171 см) ($\delta = 1$), то при этом заметно уменьшится и вероятность истинности такого утверждения, т. е. вероятность того, что доверительный интервал (169 см; 171 см) покрывает интересующий нас оцениваемый параметр $\overline{x}_г$. Причиной тому может служить тот факт, что при создании выборки мы могли случайно попасть на группу нетипично высоких или нетипично низких людей со средним ростом $\overline{x}_в$, сильно отклоняющимся ($\delta > 1$) от оцениваемого $\overline{x}_г$.

4.4.3. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при известном σ

Уточним постановку решаемой задачи. Пусть неизвестный исследуемый признак X генеральной совокупности распределен по нормальному закону с параметрами a и σ, причем σ известно. Кроме того, считаем заданной надежность (доверительную вероятность) γ. По данным выборки легко вычисляется $\overline{x_{в}}$. Найдем доверительный интервал ($\overline{x_{в}} - \delta$, $\overline{x_{в}} + \delta$), покрывающий $M(X) = a = \overline{x_{г}}$ с вероятностью γ.

Будем рассматривать данные выборки $x_1, x_2, ..., x_n$ как возможные значения случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$, имеющих нормальное распределение и одинаковые числовые характеристики $a_i = a$ и $\sigma_i = \sigma$ ($i = \overline{1, n}$). Согласно центральной предельной теореме среднее арифметическое этих случайных величин

$$\overline{X_{в}} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$$

тоже является нормально распределенной случайной величиной с числовыми характеристиками, которые можно найти, используя свойства математического ожидания и дисперсии:

$$M(\overline{X_{в}}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a = a;$$

$$D(\overline{X_{в}}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \frac{1}{n^2}\sigma^2 \cdot n = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Из курса теории вероятностей известно, что вероятность отклонения нормально распределенной случайной величины от ее математического ожидания определяется по формуле

$$P\left(\left|\overline{X_{в}} - a\right| < \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma / \sqrt{n}}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \gamma. \qquad (4.16)$$

Положим $t = \dfrac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$ и из равенства

$$2\Phi(t) = \gamma \qquad (4.17)$$

по известному значению γ найдем t по таблице значений функции Лапласа (см. прилож. 2).

Далее найдем отклонение

$$\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (4.18)$$

и запишем доверительный интервал:

$$\left(\overline{x_{\text{в}}} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x_{\text{в}}} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right). \qquad (4.19)$$

Замечание. Если надо оценить математическое ожидание с заданной точностью δ и надежностью γ, то *минимальный объем выборки* можно определить с помощью неравенства

$$n_{\min} \geq \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2}. \qquad (4.20)$$

Пример 4.9. Для нормально распределенной случайной величины X $\sigma = 1$. Для выборки объема $n = 16$ $\overline{x_{\text{в}}} = 4$. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания $M(X)$ с доверительной вероятностью, равной 0,95.

Решение. В равенство (4.17) подставим значение доверительной вероятности:

$$2\Phi(t) = 0{,}95,\ \Phi(t) = 0{,}475.$$

По таблице значений функции Лапласа (см. прилож. 2) найдем $t = 1{,}96$. Тогда $\delta = \frac{1{,}96 \cdot 1}{\sqrt{16}} = 0{,}49$ и доверительный интервал имеет границы: (4 – 0,49; 4 + 0,49) или (3,51; 4,49).

4.4.4. Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестном σ. Распределение Стьюдента

Постановка данной задачи совпадает с постановкой задачи предыдущего пункта, за исключением того, что параметр σ неизвестен. Вместо него используется найденное по данным выборки исправленное среднее квадратичное отклонение:

$$S = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_{\text{в}}}.$$

Введем новую случайную величину:

$$T = \frac{\overline{X_{\text{в}}} - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}},$$

где $\overline{X_{\text{в}}}$ – случайная величина, возможными значениями которой являются выборочные средние $\overline{x_{\text{в}}}$, полученные по разным выборкам объема n; $a = \overline{x_{\text{г}}}$ – неизвестный, оцениваемый параметр генеральной совокупности.

Можно показать, что случайная величина T имеет плотность распределения вероятностей, задаваемую следующим образом:

$$f_n(t) = B_n \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}},$$

где B_n – коэффициент, зависящий от объема выборки n.

Такое распределение называют *распределением Стьюдента*. Его особенность состоит в том, что плотность распределения вероятностей $S(n, t)$ зависит только от объема выборки n и не зависит от a и σ, и при возрастании n распределение Стьюдента стремится к нормальному распределению.

Предположим, что по данным некоторой выборки небольшого объема $n (n < 30)$ найдено выборочное среднее $\overline{x_в}$, тогда $T = \dfrac{\overline{x_в} - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$. Для определения доверительного интервала запишем равенство

$$P(|T| < t_\gamma) = \int_{-t_\gamma}^{t_\gamma} f_n(t)dt = \gamma .$$

Вычислять указанный интеграл нет необходимости. Существуют специальные таблицы, с помощью которых по известному объему выборки и доверительной вероятности γ можно найти t_γ (см. прилож. 3). Итак, из равенства

$$P\left(\left|\frac{\overline{x_в} - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right| < t_\gamma\right) = \gamma$$

найдем t_γ. Для нахождения доверительного интервала неравенство

$$\left|\frac{\overline{x_в} - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right| < t_\gamma$$

преобразуем к виду

$$\overline{x_в} - t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_в} + t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} .$$

Таким образом, доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестном σ имеет вид

$$\overline{x_{\text{в}}} - t_{\gamma} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_{\text{в}}} + t_{\gamma} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}. \qquad (4.21)$$

Если же при исследовании генеральной совокупности получена выборка большого объема ($n > 30$), то для нахождения доверительного интервала для оценки математического ожидания используется формула (4.19), где неизвестный параметр σ заменяют исправленным выборочным средним квадратичным отклонением

$$S = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_{\text{в}}},$$

а для получения t используют таблицу значений функции Лапласа (см. прилож. 2).

Пример 4.10. В генеральной совокупности количественный признак X распределен по нормальному закону. По некоторой выборке объема $n = 25$ получены выборочное среднее $\overline{x_{\text{в}}} = 15{,}5$ и исправленное среднее квадратичное отклонение $S = 3{,}4$. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания генеральной совокупности a с надежностью $\gamma = 0{,}95$.

Решение. Так как объем выборки n небольшой ($n = 25 < 30$), то по таблице (см. прилож. 3) по известным $n = 25$ и $\gamma = 0{,}95$ найдем $t_{\gamma} = 2{,}064$.

Использовав формулу (4.21), запишем доверительный интервал:

$$15{,}5 - 2{,}064 \cdot \frac{3{,}4}{\sqrt{25}} < a < 15{,}5 + 2{,}064 \cdot \frac{3{,}4}{\sqrt{25}}$$

или

$$14{,}1 < a < 16{,}9.$$

Пример 4.11. В генеральной совокупности количественный признак X распределен по нормальному закону. По некоторой выборке объема $n = 100$ получены выборочное среднее $\overline{x}_в = 21$ и $S = 11,5$. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания генеральной совокупности с надежностью $\gamma = 0,95$.

Решение. Так как объем выборки n большой ($n = 100 > 30$), то по таблице значений функции Лапласа (см. прилож. 2) найдем t:

$$\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = 0,475\,,\ t = 1,96.$$

Заменив в формуле (4.19) неизвестную величину σ на S, найдем доверительный интервал:

$$21 - 1,96\cdot\frac{11,5}{\sqrt{100}} < a < 21 + 1,96\cdot\frac{11,5}{\sqrt{100}}$$

или

$$18,75 < a < 23,25.$$

4.4.5. Доверительные интервалы для оценки среднего квадратичного отклонения нормального распределения

Предположим, что некоторый количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально с неизвестным, оцениваемым средним квадратичным отклонением σ. По имеющимся данным выборки можно легко получить исправленное среднее квадратичное отклонение S. Для неизвестного σ с заданной надежностью γ требуется выполнение соотношения

$$P(|\sigma - S| < \delta) = \gamma.$$

Преобразуем его:

$$P(S - \delta < \sigma < S + \delta) = \gamma;$$

$$P\left(S\left(1-\frac{\delta}{S}\right)<\sigma<S\left(1+\frac{\delta}{S}\right)\right)=\gamma .$$

Обозначив $q=\dfrac{\delta}{S}$, получим доверительный интервал для оценки среднего квадратичного отклонения σ нормально распределенного признака X с надежностью γ по исправленному среднему квадратичному отклонению S:

$$S(1-q)<\sigma<S(1+q), \text{ если } q \le 1; \qquad (4.22)$$

$$0<\sigma<S(1+q), \text{ если } q>1. \qquad (4.23)$$

Следует отметить, что для нахождения q по известным объему выборки n и надежности γ используют специальную таблицу (прилож. 4).

Пример 4.12. Для нормально распределенного признака X найти интервальную оценку неизвестного параметра σ с надежностью $\gamma = 0{,}95$, если по имеющейся выборке объема $n = 20$ найдено, что исправленное среднее квадратичное отклонение равно $S = 1$.

Решение. По условию задачи необходимо отыскать доверительный интервал по формулам (4.22) или (4.23). Сначала по прилож. 4 при $n = 20$ и $\gamma = 0{,}95$ найдем $q = 0{,}37$. Так как $q \le 1$, использовав формулу (4.22), вычислим границы доверительного интервала:

$$1\cdot(1-0{,}37)<\sigma<1\cdot(1+0{,}37)$$

или

$$0{,}63<\sigma<1{,}37.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Назовите основные задачи, изучаемые математической статистикой.
2. Дайте определение генеральной совокупности. Приведите примеры.
3. Дайте определение выборки. Приведите примеры.

4. Какая выборка называется репрезентативной?

5. Назовите способы отбора, применяемые на практике для получения репрезентативной выборки.

6. Какой ряд наблюдений называют вариационным рядом?

7. Как определяется статистическое распределение выборки?

8. Какие используются способы наглядного представления статистической информации?

9. Определите понятие эмпирической функции распределения вероятностей.

10. Перечислите основные числовые характеристики вариационного ряда.

11. Какие формулы используются для расчета выборочного среднего? выборочной дисперсии?

12. Какие величины являются точечными оценками для генерального среднего?

13. Какие точечные оценки используются для генеральной дисперсии?

14. Каким требованиям должны удовлетворять точечные оценки?

15. Как определяется интервальная оценка генерального среднего при нормальном распределении исследуемого признака?

16. Как определяется доверительный интервал для оценки среднего квадратичного отклонения нормального распределения?

Задачи

4.1. Дана выборка:

x_i	1	3	6
m_i	10	25	15

Найти статистическое распределение относительных частот, эмпирическую функцию и построить ее график. Построить полигон относительных частот выборки.

4.2. Дана выборка:

x_i	2	4	5	7	10
m_i	15	20	10	10	45

Найти статистическое распределение относительных частот, эмпирическую функцию распределения, построить ее график. Построить полигон относительных частот выборки.

4.3. По данным выборки построить гистограмму относительных частот:

а)

№ интервала	Промежуток	Число вариант в интервале
1	[1; 5)	10
2	[5; 9)	20
3	[9; 13)	50
4	[13; 17)	12
5	[17; 21)	8

б)

№ интервала	Промежуток	Число вариант в интервале
1	[2; 5)	6
2	[5; 8)	10
3	[8; 11)	5
4	[11; 14)	4

4.4. Дана выборка:

x_i	2	5	7	8
m_i	1	3	4	2

Найти статистическое распределение относительных частот, эмпирическую функцию распределения, построить ее график. Построить полигон относительных частот выборки.

4.5. Дана выборка:

x_i	2	5	7	10
m_i	5	25	15	5

Найти статистическое распределение относительных частот, эмпирическую функцию распределения, построить ее график. Построить полигон относительных частот выборки.

4.6. Построить гистограмму относительных частот для выборки:

№ интервала	Промежуток	Число вариант в интервале
1	[10; 15)	2
2	[15; 20)	4
3	[20; 25)	8
4	[25; 30)	4
5	[30; 35)	2

4.7. По данным выборки найти выборочное среднее и выборочное среднее квадратичное отклонение:

x_i	1250	1275	1280	1300
m_i	20	25	50	5

4.8. По данным выборки найти выборочное среднее и выборочное среднее квадратичное отклонение:

x_i	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5
W_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

4.9. Результаты четырех измерений длины однотипных деталей: $x_1 = 0{,}25$ м, $x_2 = 0{,}25$ м, $x_3 = 0{,}25$ м, $x_4 = 0{,}25$ м. Считая распределение длины деталей нормальным, найти доверительный интервал истинной длины детали с надежностью $\gamma = 0{,}95$.

4.10. Произведено пять независимых опытов над случайной величиной X, нормально распределенной с неизвестным параметром m_x и $\sigma_x = 2$. Результаты опыта приведены в таблице:

x_i	−25	−20	10	21	34
m_i	1	1	1	1	1

Найти доверительный интервал для m_x с надежностью $\gamma = 0{,}9$.

4.11. Из генеральной совокупности X с нормальным распределением извлечена выборка объемом $n = 10$ и составлен статистический ряд:

x_i	−2	1	2	3	4	5
W_i	0,2	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1

Найти доверительный интервал для математического ожидания m_x с надежностью $\gamma = 0,95$.

4.12. Каково должно быть число опытов, чтобы с надежностью $\gamma = 0,95$ точность оценки математического ожидания m_x была равна $\delta = 0,2$, если среднее квадратичное отклонение $\sigma_x = 4$.

Ответы: **4.7.** $\overline{x_{в}} = 1273,75$; $\sigma_{в} = 12,9301$. **4.8.** $\overline{x_{в}} = 22,5$; $\sigma_{в} = 5,48$. **4.9.** (0,238; 0,265). **4.10.** (2,52; 5,48). **4.11.** (0,28; 3,72). **4.12.** 1537.

Литература

Вентцель, Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. – М.: Наука, 2001.

Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 2003.

Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 2009.

Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. – М.: Наука. 1969.

Гурский, Е. И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике / Е. И. Гурский. – М.: Высш. шк., 1975.

Гусак, А. А. Теория вероятностей: справ. пособие к решению задач / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. – Минск: ТетраСистемс, 2007.

Колемаев, В. А. Теория вероятностей и математическая статистика / В. А. Колемаев, В. Н. Калинина. – М.: Инфра-М. 1997.

Марков, Л. Н. Основы теории вероятностей / Л. Н. Марков, В. К. Кравцов [и др.]. – Минск: Военная академия РБ, 2007.

Мацкевич, И. П. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Теория вероятностей и математическая статистика / И. П. Мацкевич, Г. П. Свирид, Г. М. Булдык. – Минск: Вышэйш. шк., 1996.

Мостеллер, Ф. Вероятность / Ф. Мостеллер, Р. Рурке, Дж. Томас. – М.: Мир, 1969.

Письменный, Д. Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Д. Т. Письменный. – М.: Айрисс пресс, 2010.

Самойленко, Н. И. Теория вероятностей / Н. И. Самойленко, А. И. Кузнецов, А. Б. Костенко. – Харьков: изд-во «НТМТ», 2009.

Свирид, Г. А. Теория вероятностей и математическая статистика / Г. А. Свирид, И. П. Мацкевич. – Минск: Вышэйш. шк., 1994.

Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: в 2 т. / В. Феллер. – М.: Мир, 1984. – Т. 1.

Приложение 1. Таблица значений функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3698
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127

1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0395	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0353	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001

Приложение 2. Таблица значений функции Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,31	0,1217	0,62	0,2324	0,93	0,3238
0,01	0,0040	0,32	0,1255	0,63	0,2357	0,94	0,3264
0,02	0,0080	0,33	0,1293	0,64	0,2389	0,95	0,3289
0,03	0,0120	0,34	0,1331	0,65	0,2422	0,96	0,3315
0,04	0,0160	0,35	0,1368	0,66	0,2454	0,97	0,3340
0,05	0,0199	0,36	0,1406	0,67	0,2486	0,98	0,3365
0,06	0,0239	0,37	0,1443	0,68	0,2517	0,99	0,3389
0,07	0,0279	0,38	0,1480	0,69	0,2549	1,00	0,3413
0,08	0,0319	0,39	0,1517	0,70	0,2580	1,01	0,3438
0,09	0,0359	0,40	0,1554	0,71	0,2611	1,02	0,3461
0,10	0,0398	0,41	0,159	0,72	0,2642	1,03	0,3485
0,11	0,0438	0,42	0,1628	0,73	0,2673	1,04	0,3508
0,12	0,0478	0,43	0,1664	0,74	0,2703	1,05	0,3531
0,13	0,0517	0,44	0,1700	0,75	0,2734	1,06	0,3554
0,14	0,0557	0,45	0,1736	0,76	0,2764	1,07	0,3577
0,15	0,0596	0,46	0,1772	0,77	0,2794	1,08	0,3599
0,16	0,0636	0,47	0,1808	0,78	0,2823	1,09	0,3621
0,17	0,0675	0,48	0,1844	0,79	0,2852	1,10	0,3643
0,18	0,0714	0,49	0,1879	0,80	0,2881	1,11	0,3665
0,19	0,0753	0,50	0,1915	0,81	0,2910	1,12	0,3686
0,20	0,0793	0,51	0,1950	0,82	0,2939	1,13	0,3708
0,21	0,0832	0,52	0,1985	0,83	0,2967	1,14	0,3729
0,22	0,0871	0,53	0,2019	0,84	0,2995	1,15	0,3749
0,23	0,0910	0,54	0,2054	0,85	0,3023	1,16	0,3770
0,24	0,0948	0,55	0,2088	0,86	0,3051	1,17	0,3790
0,25	0,0987	0,56	0,2123	0,87	0,3078	1,18	0,3810
0,26	0,1026	0,57	0,2157	0,88	0,3106	1,19	0,3830
0,27	0,1064	0,58	0,2190	0,89	0,3133	1,20	0,3849
0,28	0,1103	0,59	0,2224	0,90	0,3159	1,21	0,3869
0,29	0,1141	0,60	0,2257	0,91	0,3186	1,22	0,3883
0,30	0,1179	0,61	0,2291	0,92	0,3212	1,23	0,3907

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,24	0,3925	1,58	0,4429	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,25	0,3944	1,59	0,4441	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,26	0,3962	1,60	0,4452	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,27	0,3980	1,61	0,4463	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,28	0,3997	1,62	0,4474	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,29	0,4015	1,63	0,4484	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,30	0,4032	1,64	0,4495	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,31	0,4049	1,65	0,4505	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,32	0,4066	1,66	0,4515	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,33	0,4082	1,67	0,4525	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,34	0,4099	1,68	0,4535	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,35	0,4115	1,69	0,4545	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,36	0,4131	1,70	0,4554	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,37	0,4147	1,71	0,4564	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,38	0,4162	1,72	0,4573	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,39	0,4177	1,73	0,4582	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,40	0,4192	1,74	0,4591	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,41	0,4207	1,75	0,4599	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,42	0,4222	1,76	0,4608	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,43	0,4236	1,77	0,4616	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,44	0,4251	1,78	0,4625	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,45	0,4265	1,79	0,4633	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,46	0,4279	1,80	0,4641	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,47	0,4292	1,81	0,4649	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,48	0,4306	1,82	0,4656	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,49	0,4319	1,83	0,4664	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,50	0,4332	1,84	0,4671	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,51	0,4345	1,85	0,4678	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,52	0,4357	1,86	0,4686	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,53	0,4370	1,87	0,4693	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,54	0,4382	1,88	0,4699	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,55	0,4394	1,89	0,4706	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,56	0,4406	1,90	0,4713	2,48	0,4934	5,00	0,499997
1,57	0,4418	1,91	0,4719				

Приложение 3. Таблица значений $t = t(\gamma, n)$

n \ γ	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61
6	2,57	4,03	6,86
7	2,45	3,71	5,96
8	2,37	3,50	5,41
9	2,31	2,36	5,04
10	2,26	3,25	4,78
11	2,23	3,17	4,59
12	2,20	3,11	4,44
13	2,18	3,06	44,32
14	2,16	3,01	4,22
15	2,15	2,98	4,14
16	2,13	2,95	4,07
17	2,12	2,92	4,02
18	2,11	2,90	3,97
19	2,10	2,88	3,92
20	2,093	2,861	3,883
25	2,064	2,797	3,745
30	2,045	2,756	3,659
35	2,032	2,729	3,600
40	2,023	2,708	3,558
45	2,016	2,692	3,527
50	2,009	2,679	3,502
60	2,001	2,662	3,464
70	1,996	2,649	3,439
80	1,001	2,640	3,418
90	1,987	2,633	3,403
100	1,984	2,627	3,392
120	1,980	2,617	3,374
∞	1,960	2,576	3,291

Приложение 4. Таблица значений $q = q(\gamma, n)$

n \ γ	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64
6	1,09	2,01	3,88
7	0,92	1,62	2,98
8	0,80	1,38	2,42
9	0,71	1,20	2,06
10	0,65	1,08	1,80
11	0,59	0,98	1,60
12	0,55	0,90	1,45
13	0,52	0,83	1,33
14	0,48	0,78	1,23
15	0,46	0,73	1,15
16	0,44	0,70	1,07
17	0,42	0,66	1,01
18	0,40	0,63	0,96
19	0,39	0,60	0,92
20	0,37	0,58	0,88
25	0,32	0,49	0,73
30	0,28	0,43	0,63
35	0,26	0,38	0,56
40	0,24	0,35	0,50
45	0,22	0,32	0,46
50	0,21	0,30	0,43
60	0,188	0,269	0,38
70	0,174	0,245	0,34
80	0,161	0,226	0,31
90	0,151	0,211	0,29
100	0,143	0,198	0,27
150	0,115	0,160	0,221
200	0,099	0,136	0,185
250	0,089	0,120	0,162

Приложение 5. Производные основных элементарных функций

1. $C' = 0$	10. $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$, где $u > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$
2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$	11. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
3. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$	12. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	13. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
5. $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$	14. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
6. $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	15. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
7. $(e^u)' = e^u \cdot u'$	16. $(\arccos u)' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
8. $(a^u)' = (a^u \ln a)u'$	17. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
9. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, где u>0	18. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

Приложение 6. Основные формулы интегрирования

1. $\int u^k du = \frac{u^{k+1}}{k+1} + C,\ k \neq -1$	7. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C.$
2. $\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$	8. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$
3. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$	9. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C$
4. $\int e^u du = e^u + C.$	10. $\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + C$
5. $\int \cos u\, du = \sin u + C$	11. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm 1}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 \pm 1}\right) + C$
6. $\int \sin u\, du = -\cos u + C$	12. $\int \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{u-1}{u+1}\right\rvert + C$

Оглавление

Учебное издание

Гладков Лев Львович,
Гладкова Галина Александровна

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебное пособие

Редактор *Р. В. Михновец*
Дизайн обложки *А. В. Жушма*
Компьютерная верстка *Е. А. Титовой*

Подписано в печать 29.10.2013. Формат 60х84/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 14,41.
Уч.-изд. л. 15,00. Тираж 800 экз. Заказ № 400.

Республиканский институт профессионального образования.
ЛИ № 02330/0549497 от 16.06.2009.
Ул. К. Либкнехта, 32, 220004, г. Минск.

Республиканское унитарное предприятие
«Информационно-вычислительный центр
Министерства финансов Республики Беларусь».
ЛП № 02330/0494120 от 11.03.2009.
Ул. Кальварийская, 17, 220004, г. Минск.

Л. Л. Гладков, Г. А. Гладкова

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ISBN 978-985-503-330-2