Ion C. Şcerbaţchi activează pe tărâm pedagogic în instituţiile superioare de învăţămi ale republicii 35 de ani, dintre care mai mult de ani la Universitatea Tehnică a Moldovei.

Este absolvent al Institutului Pedagogic Stat din Tiraspol (1963), doctor în ştiinţe fizi matematice (1970), conferenţiar universitar catedrei „Matematică" a Universităţii Tehnic Moldovei (1978).

Autor a circa 40 de articole ştiinţifi ştiinţifico-didactice şi a 10 cursuri universita Remarcăm unele din ele: «Analyse numérique», OPU, Alger, 1988; «Éléments la géomètrie analytique et d'algèbre supérieure», U.T.M., Chişinău, 19 «Culegere de probleme de analiză matematică», EUS, Chişinău, 19 «Introduction à l'analyse mathématique», U.T.M., Chişinău, 1997; «Anali matematică (probleme)» v. 1 şi 2, «Tehnica», Chişinău, 1998, «Curs de anali matematică», v. 1, U.T.M., Chişinău, 2000.

A activat mai mulţi ani în străinătate: a ţinut prelegeri la Institu Naţional de Industrie Uşoară din Bumerdes (1974-1978) şi la Universita din Sidi Bel Abbes (1985-1988) ale Republicii Algeria.

f(x,y)

$\iint, \iiint$

CURS DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

ION ŞCERBAŢCHI

2

ION ŞCERBAŢCHI

CURS DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

2

f(x,y)

$\iint, \iiint$

Σ

Chişinău 2002

CZU 517(075.8)
Ş 32

Ion C. Şcerbaţchi „Curs de analiză matematică", vol. 2; manual pentru studenţii instituţiilor de învăţământ superior cu profil tehnic, economic şi agrar. Editura „Amprenta", Chişinău, 2002, p. 636.

Recenzenţi: *Ion Pancenco*, doctor, conferenţiar la catedra „Analiză matematică şi algebră superioară" a Universităţii de Stat din Tiraspol (cu sediul la Chişinău);
Valeriu Platon, doctor, conferenţiar, şef catedră „Matematici superioare şi mecanică teoretică" a Universităţii Agrare de Stat din Moldova.

Referenţi ştiinţifici: *Ion Valuţă*, prof. univ. la catedra „Matematică" a Universităţii Tehnice a Moldovei (U.T.M.)
Vladimir Dragan, doctor, conferenţiar la catedra „Matematică" a U.T.M.

Aprobată la consiliul facultăţii de radioelectronică şi telecomunicaţii a U.T.M., proces-verbal nr. 3 din 23.04.2002.

Paginare computerizată: *Svetlana Cersac*
Coperta: *Veaceslav Popovschi*

ISBN 9975-63-158-4

Nici o cercetare umană nu poate fi numită ştiinţă adevărată dacă ea n-a trecut prin demonstraţiile matematice.

Leonardo da Vinci [*)]

PREFAŢĂ

Această lucrare reprezintă o continuare a lucrării autorului „Curs de analiză matematică", volumul 1 ([20]). Ea este destinată studenţilor instituţiilor de învăţământ superior cu profil tehnic, economic şi agrar.

Lucrarea conţine următoarele capitole ale modulului „Analiză matematică 2 şi 3": calculul diferenţial al funcţiei de mai multe variabile reale; calculul integral al funcţiei de mai multe variabile reale ce cuprinde: integrale cu parametri, integrale curbilinii, duble, triple şi de suprafaţă cu aplicaţiile lor în teoria câmpurilor scalare şi vectoriale; ecuaţii şi sisteme de ecuaţii diferenţiale ordinare; serii, care cuprinde teoria seriilor numerice, funcţionale, de puteri şi seriile Fourier.

Lucrarea de asemenea conţine o gamă variată de exemple practice şi teoretice, care facilitează pătrunderea în esenţă a noţiunilor de bază expuse în capitolele enumerate. La sfârşitul fiecărui capitol sunt propuse spre rezolvare un şir de exerciţii cu răspunsurile şi indicaţiile respective. În anexă autorul propune lucrări de control pe compartimentele de bază ale modulului „Analiză matematică 2 şi 3" care pot servi ca lucrări de verificare pentru studenţii secţiei fără frecvenţă sau ca lucrări de calcul (grafice) pentru studenţii secţiei de zi.

[*)] Леонардо да Винчи «Избранные естественнонаучные произведения», Москва, Изд-во АН СССР, 1955.

Pentru o asimilare mai bună a materialului expus aici, este indispensabil de a utiliza în paralel lucrările autorului „Analiză matematică (probleme)" vol. 1 şi 2 ([21], [22]).

În încheiere ţin să aduc sincere mulţumiri recenzenţilor: conf. dr. Ion Pancenco şi Valeriu Platon cât şi referenţilor ştiinţifici: neobositului meu profesor Ion Valuţă şi colegului meu Vladimir Dragan pentru un şir de observaţii şi sugestii preţioase, care au contribuit la îmbunătăţirea acestei lucrări.

Sunt profund recunoscător colegilor de la catedra „Matematică" a U.T.M., în cadrul căreia activez mai mult de 30 ani, pentru susţinerea frecventă întru apariţia lucrărilor mele.

Mulţumesc mult Rectoratului U.T.M., decanilor celor 9 facultăţi ale U.T.M., foştilor mei studenţi: conf. dr. Sergiu Andronic (prodecanul FRT) şi directorul editurii „Amprenta" Vasile Mileţchi, pentru ajutorul acordat în vederea publicării lucrărilor mele; studenţilor mei, în special celor de la filiera francofonă „Informatica", pentru idei preţioase şi rezolvări originale, cât şi Doamnei Svetlana Cersac, minunatele degete ale căreia au tapat filă cu filă această lucrare.

Autorul

Capitolul 5
Calculul diferenţial al funcţiei de mai multe variabile

În capitolele precedente ([20], cap. 1, 2 şi 4) am definit noţiunea de funcţie reală de o singură variabilă reală şi am studiat calculul diferenţial şi integral al acestor funcţii.

În capitolele ce urmează (5 şi 6) vom introduce noţiunea de funcţie reală de mai multe variabile reale ca o generalizare a noţiunii de funcţie de o singură variabilă reală şi vom dezvolta calculul diferenţial şi integral al funcţiilor de mai multe variabile.

5.1. Funcţia de mai multe variabile

5.1.1. Dependenţa funcţională dintre variabile

Până acum ne-am ocupat cu studiul funcţiei reale de o singură variabilă reală, adică am studiat variabila dependentă (numită *funcţie*), valorile căreia sunt complet determinate de valorile variabilei independente (numită *argumentul* funcţiei).

În practică, la studierea numeroaselor fenomene ale naturii, deseori se întâlnesc cazuri când valorile unei variabile (numită *funcţie*) depind de valorile mai multor variabile independente (numite *argumentele* funcţiei). Să examinăm două exemple de acest fel.

1) În geometria plană euclidiană se cunosc diferite formule pentru a calcula aria unui triunghi: $S_\Delta = \frac{1}{2} h_a a$, $S_\Delta = \frac{1}{2} a \cdot b \sin A$, unde a, b sunt lungimile a două laturi oarecare, $\angle A$ este unghiul dintre ele, iar h_a înălţimea coborâtă din vârful opus pe latura cu lungimea a. Observăm că în primul caz valoarea ariei depinde de valorile variabilelor independente h_a şi a, adică variabila S este o funcţie de două variabile independente.

În cazul al doilea variabila S depinde de trei variabile independente (a, b şi $\angle A$).

2) Studiind starea fizică a unui corp oarecare, se observă deseori variația proprietăților lui de la un punct la altul. Așa sunt de exemplu: densitatea, temperatura, masa, potențialul electric etc. Toate aceste mărimi sunt «funcții de punct», sau, dacă este mai convenabil, funcții de coordonatele x, y, z ale punctului. Dacă starea fizică a corpului variază și în funcție de timp, atunci la aceste variabile independente se mai adaugă timpul t. În acest caz avem o funcție de patru variabile independente.

Pot fi aduse și multe alte exemple similare.

În cele ce urmează vom studia dependențe funcționale de tipul celor enumerate mai sus, în acest scop se introduce noțiunea de funcție de mai multe variabile și se elaborează aparatul de cercetare a unor astfel de funcții.

5.1.2. Planul euclidian și spațiul euclidian. Funcții de două și trei variabile

În teoria funcțiilor de o variabilă reală deseori utilizăm unii termeni geometrici ca: punct, distanță, lungime, arie, volum în descrierea noțiunilor de bază ca: funcție, limita șirului numeric și a funcției, etc; alteori dăm interpretări geometrice atât noțiunilor de bază, cât și unor rezultate fundamentale (derivata funcției, integrala definită, teoremele Rolle, Lagrange etc).

Vom încerca să găsim termenii geometrici respectivi, care ne vor permite să dezvoltăm teoria funcțiilor de mai multe variabile reale.

Începem cu reprezentarea numerelor reale pe axa numerică care a fost efectuată pentru prima dată de R. Descartes – fondatorul geometriei analitice. Fiecare punct M de pe axa numerică este caracterizat de un număr real x, numit *coordonata* lui (1.2. din [20].

Se numește *distanță* dintre două puncte $M_1(x_1)$ și $M_2(x_2)$ de pe axa numerică numărul real nenegativ

$$d(M_1, M_2)=|x_1-x_2| . \qquad (1)$$

Axa numerică sau dreapta reală înzestrată cu această noțiune se numește *dreaptă euclidiană*. Din geometria analitică în plan se știe că orice pereche ordonată (x,y) de numere reale determină un punct M din plan și numerele x și y se numesc *coordonatele* acestui punct. Vom scrie $M(x,y)$. Dacă $M_1(x_1,y_1)$ și $M_2(x_2,y_2)$ sunt două puncte oarecare din acest plan, atunci numim *distanță dintre ele* numărul real nenegativ

$$d(M_1, M_2)= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} . \qquad (2)$$

Planul înzestrat cu această noțiune se numește *plan euclidian*.

În mod analog: mulțimea tripletelor ordonate (x,y,z) se identifică cu mulțimea punctelor din spațiu. Notația $M(x,y,z)$ înseamnă că punctul M are coordonatele x,y și z. Dacă $M_1(x_1,y_1,z_1)$ și $M_2(x_2,y_2,z_2)$ sunt puncte ale spațiului, atunci numim *distanță dintre ele* numărul real nenegativ

$$d(M_1,M_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2} . \qquad (3)$$

Spațiul înzestrat cu această noțiune, se numește *spațiu euclidian tridimensional*.

Observăm că dacă M_1, M_2 aparțin unui plan euclidian, formula (3) se transformă în formula (2), iar dacă M_1 și M_2 aparțin dreptei euclidiene, atunci formula (3) se transformă în formula (1):

$$d(M_1,M_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2} =|x_1-x_2| .$$

Folosind terminologia geometrică, putem enunța definiția funcției de o variabilă reală astfel (vezi 1.3.1. din [20]): Dacă printr-un procedeu oarecare f fiecărui punct M dintr-o submulțime D de puncte ce aparțin dreptei euclidiene i se asociază un număr real unic u, atunci spunem că am definit *funcția* $u=f(M)$ *pe* D.

Trecem la definiția funcției de două variabile reale.

Dacă printr-un procedeu oarecare f fiecărui punct M dintr-o submulțime D de puncte ce aparțin planului euclidian i se asociază un număr real unic u, atunci spunem că am definit *funcția* $u=f(M)$ *pe* D.

Observăm că aceste două definiții se deosebesc numai prin aceea că expresia „dreaptă euclidiană" se înlocuiește prin expresia „plan euclidian".

Similar se obține definiția funcției de trei variabile reale înlocuind în definiția precedentă expresia „plan euclidian" prin expresia „spațiu euclidian".

Dacă $u=f(M)$ este definită pe D, atunci mulțimea D se numește *domeniu de definiție* (existență) a funcției. Numărul $u_0=f(M_0)$, $M_0\in D$ se numește *valoare particulară* a funcției. Mulțimea valorilor particulare ale funcției se numește *domeniu de valori*.

Punctul M în planul euclidian este caracterizat de coordonatele x și y, iar punctul M în spațiul euclidian tridimensional este caracterizat de coordonatele x, y și z. De aceea pe parcurs funcțiile de două variabile le vom nota tradițional prin litera z și vom scrie $z=f(M)=f(x,y)$, iar cele de trei și mai multe variabile reale le vom nota prin litera u și vom scrie $u=f(M)=f(x,y,z)$, $u=f(M)=f(x_1,x_2,...,x_n)$.

Asemănător cu ilustrarea geometrică a funcției $y=f(x)$ prin graficul său ([20], 1.3.5.) se poate interpreta geometric și funcția $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$: se numește *graficul* acestei funcții mulțimea punctelor din spațiul euclidian trigimensional coordonatele cărora satisfac ecuației $z=f(x,y)$.

Graficul funcției $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$ reprezintă în general o anumită suprafață. Egalitatea $z=f(x,y)$ la rândul său se numește *ecuația* acestei suprafețe.

Din definiția funcției de două (sau trei) variabile reiese că domeniul de definiție al ei poate fi tot planul (respectiv tot spațiul tridimensional) euclidian sau o parte din el.

Există diferite moduri de definire a funcțiilor de două sau trei variabile: analitic, adică cu ajutorul unor formule, tabelar, grafic, verbal etc.

În analiza matematică în majoritatea cazurilor se studiază funcții definite analitic.

Se numește *domeniu natural de definiție* (sau *domeniu de existență*) al funcției definite analitic $z=f(x,y)$ sau $u=f(x,y,z)$ totalitatea perechilor (x,y) (respectiv tripletelor (x,y,z)) de numere reale cărora le corespund valori reale ale funcției.

Exemple:

1) Fie $z=ln(1-x^2-y^2)$. Domeniul natural de definiție al acestei funcții constă din toate perechile de numere (x,y) pentru care

$1-x^2-y^2>0$, adică $x^2+y^2<1$. Domeniul reprezintă un cerc deschis cu centrul în originea sistemului de coordonate și de raza 1.

2) Funcția $z=\frac{1}{2}x\cdot y$ are drept domeniu natural de definiție mulțimea tuturor punctelor din planul euclidian. Dacă, însă, considerăm că $z=S_\Delta$ iar $x=h_a$ și $y=a$ (a se consultă ex. 1 din 5.1.1.), atunci domeniul acestei funcții $(S_\Delta=\frac{1}{2}h_a\cdot a)$ în condițiile respective este mulțimea tuturor perechilor de numere (h_a,a) unde $h_a>0$, $a>0$.

În cele ce vor urma, dacă textul problemei nu impune condiții suplimentare variației variabilelor independente (așa cum a avut loc în exemplul de mai sus), prin domeniu de definiție al unei funcții definite analitic vom subînțelege domeniul ei natural de definiție.

3) Fie $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}$. Domeniul de definiție al acestei funcții este mulțimea tripletelor de numere (x,y,z) care satisfac inegalitatea $x^2+y^2+z^2-1\geq 0$ sau $x^2+y^2+z^2\geq 1$, ceea ce înseamnă partea exterioară a sferei deschise cu centrul în origine de raza 1 inclusiv și punctele de pe această suprafață sferică.

Notă: Definițiile funcțiilor de 1, 2 și 3 variabile independente se deosebesc numai prin expresiile «dreaptă euclidiană», «plan euclidian» și «spațiu euclidian». Pentru a unifica aceste definiții cu definiția funcției reale de $n>3$ variabile independente reale, în paragraful ce urmează, vom introduce noțiunea de spațiu aritmetic n dimensional euclidian, care este o generalizare a dreptei, planului și spațiului tridimensional euclidian.

5.1.3. Spațiul R^n. Funcții de mai multe variabile.

Fie R mulțimea numerelor reale care este identificată cu mulțimea punctelor dreptei euclidiene.

Definiția 1: Mulțimea R^n formată din cortegii ordonate de n numere reale $(x_1,x_2,...,x_n)$ se numește *spațiu real de n dimensiuni* sau *spațiu aritmetic n dimensional*.

În acest caz cortegiile ordonate $(x_1,x_2,...,x_n)$ se numesc *«punctele»* mulțimii R^n. Le vom nota astfel $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ sau $M(x_1,x_2,...,x_n)$. Noțiunile de «punct» și «spațiu aritmetic n dimensional» au fost date de Riemann, terminologia, însă, îi aparține lui Cantor.

Dacă considerăm n axe numerice R, spațiul R^n poate fi definit ca produsul cartezian $R\times R\times ...\times R$. Deci,

$$R^n=\underbrace{R\times R\times ...\times R}_{n-factori}=\{(x_1,x_2,...,x_n)\,|\,x_1\in R, x_2\in R,...,x_n\in R\}.$$

Fie $x=(x_1,x_2,...,x_n)$.. Numerele reale $x_1,x_2,...,x_n$ se numesc *coordonatele* sau *proiecțiile* «punctului» x pe axele numerice respective $1,2,...,n$.

Definiția 2. Se numește *«distanță»* dintre «punctele» $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ și $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ numărul real nenegativ $d(x,y)$ care se calculează după formula

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}\,. \qquad (1)$$

Mulțimea «punctelor» spațiului R^n înzestrate cu noțiunea de «distanță», ce se calculează după formula (1), se numește *spațiu aritmetic euclidian* sau *spațiu metric* cu metrica («distanța») calculată după formula (1).

În general spațiul metric se definește astfel: Mulțimea E se numește *spațiu metric* dacă oricărei perechi $(x,y)\in E\times E$, $x\in E$, $y\in E$ i se asociază un număr real nenegativ $\rho(x,y)$ care satisface următoarele condiții:

1) $\rho(x,y)=o \Leftrightarrow x=y,\ x\in E, y\in E;$

2) $\rho(x,y)=\rho(y,x), x\in E, y\in E$;

3) $\rho(x,y)\le \rho(x,z)+\rho(z,y), x\in E, y\in E, z\in E$.

Se notează: (E,ρ).

Condiția 3 se numește *inegalitatea triunghiului*. Elementele spațiului metric se numesc *«puncte»*, funcția $\rho(x,y)$ se numește *metrică*, iar condițiile 1,2 și 3 - *axiomele spațiului metric*.

Vom demonstra că «distanța» $d(x,y)$, definită după formulă (1), satisface axiomele spațiului metric, considerând $E=R^n$.

Condițiile 1 și 2 sunt evidente. Inegalitatea triunghiului sau condiția 3 se demonstrează mai complicat: fie

$$x=(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n,\ y=(y_1,y_2,...,y_n)\in R^n,$$

și

$$z=(z_1,z_2,...,z_n)\in R^n.$$

Trebuie să demonstrăm inegalitatea

$$\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}\le\sqrt{(x_1-z_1)^2+\cdots+(x_n-z_n)^2}+ \\ +\sqrt{(z_1-y_1)^2+\cdots+(z_n-y_n)^2}. \qquad (2)$$

Mai întâi vom demonstra două rezultate importante.

Lema 1: Pentru orice numere reale $a_1,a_2,...,a_n$, $b_1,b_2,...,b_n$ are loc inegalitatea lui Cauchy și Buniakovski (1804-1889 – matematician rus):

$$\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2\le\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right).$$

Considerăm trinomul pătrat

$$P(x)=\sum_{i=1}^n(a_ix+b_i)^2=x^2\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)+2x\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)+\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right).$$

Întrucât $P(x)\ge 0$ și coeficientul lui dominant este pozitiv, obținem că discriminantul lui

$$\Delta=\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2-\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)\le 0.$$

De unde și se obține inegalitatea Cauchy-Buniakovski.

Lema 2: Pentru orice numere reale $a_1,a_2,...,a_n$, $b_1,b_2,...,b_n$ are loc inegalitatea lui Minkovski (1864-1909 – matematician german):

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n(a_i+b_i)^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}\,.$$

Folosind inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski obținem:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^2+2a_ib_i+b_i^2\right)}=$$

$$=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\le$$

$$\le\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)+2\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)}\cdot\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)}=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2},$$

ceea ce trebuia de demonstrat.

Dacă considerăm $a_i=x_i-z_i$, $b_i=z_i-y_i$, $i=1,2,\dots,n$ atunci inegalitatea lui Minkovski se transformă în inegalitatea (2).

Prin urmare «distanța» $d(x,y)$, definită după formula (1), este o metrică a spațiului R^n euclidian n dimensional.

Notă. În spațiul R^n pot fi definite și alte metrici. Propunem cititorului să demonstreze că funcțiile $\rho_1(x,y)=\max\limits_{i=1,\dots,n}|x_i-y_i|$, $\rho_2(x,y)=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$ servesc ca metrici în spațiul R^n.

Mulțimea «punctelor» de forma $(0,\dots,0,x_i,0,\dots,0)$ $(i=1,2,\dots,n)$ ale unui spațiu euclidian R^n formează *axa numerică de ordinul i*. Punctul $O(0,0,\dots,0)$ se numește *originea* sistemului de coordonate format din aceste n axe numerice. Pe parcurs vom considera că axele numerice două câte două sunt reciproc perpendiculare.

Cercetăm trei cazuri particulare ale spațiului R^n euclidian n dimensional.

1) Fie $n=1$. Spațiul euclidian R coincide cu axa numerică R. Observăm că «distanța» $d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2}=|x_1-y_1|$ coincide cu formula (1) din 5.1.2.

2) Fie $n=2$. Spațiul euclidian R^2 coincide cu planul euclidian în care sistemul de coordonate este format din două axe numerice R pe care, de obicei, le vom socoti reciproc perpendiculare între ele și cu originea $O(0,0)$ în punctul lor de intersecție. În acest caz punctele spațiului euclidian R^2 sunt notate $M(x,y)$ (în loc de $M(x_1,x_2)$) și axele numerice sunt: axa absciselor, notată OX și axa ordonatelor, notată OY. Distanța dintre punctele $M_1(x_1,y_1)$ și $M_2(x_2,y_2)$ ale planului R^2, după (1) este

$$d(M_1,M_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

Această formulă coincide cu formula obișnuită din planul euclidian (vezi formula (2) din 5.1.2.).

3) Fie $n=3$. Spațiul euclidian R^3 coincide cu spațiul euclidian tridimensional, în care sunt considerate trei axe numerice R perpendiculare două câte două cu originea $O(0,0,0)$ în punctul lor de intersecție. De obicei punctele acestui spațiu sunt notate $M(x,y,z)$ în loc de $M(x_1,x_2,x_3)$, unde coordonata x se numește *abscisă*, coordonata y - *ordonată*, iar coordonata z - *aplicată*.

Distanța dintre punctele $M_1(x_1,y_1,z_1)$ și $M_2(x_2,y_2,z_2)$ din R^3, calculată conform formulei (1), coincide cu formula obișnuită din spațul euclidian tridimensional (vezi formula (3) din 5.1.2.).

Vom considera acum două exemple de mulțimi de «puncte» din «spațiul n dimensional euclidian R^n» (foarte des utilizate pe parcurs):

a) Mulțimea «punctelor» $M(x_1,x_2,\dots,x_n)$, coordonatele cărora satisfac inegalitățile

$$a_1\le x_1\le b_1, a_2\le x_2\le b_2,\dots,a_n\le x_n\le b_n \tag{3}$$

se numește *«paralelipiped dreptunghic închis» n dimensional.*

Observăm, că pentru $n=1$ «paralelipipedul dreptunghic închis» se transformă în segmentul $[a, b]$. Pentru $n=2$ obţinem dreptunghiul obişnuit, adică mulţimea

$$D=\{(x,y)|(x,y)\in R^2, a_1\le x\le b_1, a_2\le y\le b_2\}.$$

Pentru $n=3$ «paralelipipedului dreptunghic închis» din R^3 îi corespunde un paralelipiped dreptunghic obişnuit al spaţiului euclidian tridimensional.

Dacă însă în relaţiile (3) excludem cel puţin un semn al egalităţii, atunci ele definesc aşa-numitul *«paralelipiped dreptunghic deschis» n dimensional*. Diferenţele

$$b_i-a_i, i=1,2,\ldots,n$$

se numesc *dimensiunile* «paralelipipedului dreptunghic», iar «punctul»

$$\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \ldots, \frac{a_n+b_n}{2}\right)$$

se numeşte *centrul* lui.

Dacă dimensiunile «paralelipipedului dreptunghic n dimensional» sunt egale cu numărul δ, atunci acest «paralelipiped» se numeşte *«cub n dimensional»*, respectiv *închis* sau *deschis*. În acest caz numărul δ se numeşte *dimensiunea „cubului"*.

Observăm că pentru n=2 «cubul 2 dimensional» se transformă în pătrat, iar pentru n=3, «cubul 3 dimensional» se transformă în cubul obişnuit al spaţiului euclidian tridimensional.

b) Fie $N(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ un „punct" fix din R^n şi r un număr real pozitiv. Mulţimea «punctelor» $M(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ din R^n coordonatele cărora satisfac inegalitatea

$$(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2\le r^2$$

(sau $<r^2$) se numeşte *«sferă (bilă) închisă* (sau respectiv *deschisă*) *n dimensională»* de raza r cu centrul în «punctul» N. Cu alte cuvinte «sfera» închisă (sau deschisă) este mulţimea „punctelor" M, ale căror «distanţă» de la un «punct» fix N nu depăşeşte pe r (sau respectiv este mai mică decât r). Este clar, că

pentru $n=2$ aceasta «sferă» coincide cu un cerc închis (sau deschis), iar pentru $n=3$ ea coincide cu sfera (bila) obişnuită a spaţiului euclidian tridimensional.

Definiţia 3: Se numeşte *vecinătate V(A,r)* a «punctului» $A(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in R^n$ orice «sferă deschisă» cu centrul în A şi raza r.

Această vecinătate a «punctului» A se numeşte *vecinătate «sferică»*.

Definiţia 4: Se numeşte *vecinătate V (A δ$_i$)*, a «punctului» $A(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in R^n$ orice «paralelipiped dreptunghic deschis» cu centrul în A, caracterizat de relaţiile:

$$|x_1-a_1|<\delta_1, |x_2-a_2|<\delta_2, \ldots, |x_n-a_n|<\delta_n, \quad (4)$$

sau

$$a_1-\delta_1<x_1<a_1+\delta_1, a_2-\delta_2<x_2<a_2+\delta_2,\ldots,$$
$$a_n-\delta_n<x_n<a_n+\delta_n,$$

unde $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n$ sunt numere reale pozitive.

Această vecinătate se numeşte *vecinătate «paralelipipedică»*.

De cele mai dese ori în calitate de vecinătate « paralelipipedică» vom considera «cubul» n dimensional deschis cu centrul în A, caracterizat de relaţiile:

$$|x_1-a_1|<\delta, |x_2-a_2|<\delta, \ldots, |x_n-a_n|<\delta \quad (5)$$

sau

$$a_1-\delta<x_1<a_1+\delta, a_2-\delta<x_2<a_2+\delta,\ldots,$$
$$a_n-\delta<x_n<a_n+\delta,$$

unde δ este un număr pozitiv, iar dimensiunea «cubului» este egală cu 2δ. Se notează *V(A, δ)*.

Constatăm că în orice vecinătate «sferică» se conţine o vecinătate «paralelipipedică» şi viceversa.

Într-adevăr, fie $V(A,r)$ o vecinătate «sferică» a «punctului» $A(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in R^n$. Considerăm «cubul» n dimensional deschis cu centrul în A și $\delta = \frac{r}{\sqrt{n}}$, caracterizat de relațiile (5).

Observăm că orice «punct» $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ce aparține acestui «cub» deschis cu centrul în $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, aparține «sferei» $V(A, r)$, deoarece «distanța»

$$d(M, A) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2} <$$
$$< \sqrt{\delta^2 + \delta^2 + \cdots + \delta^2} = \sqrt{n \cdot \delta^2} = \sqrt{n \cdot \frac{r^2}{n}} = r.$$

Invers, fie $V(A, \delta_i)$ o vecinătate «paralelipipedică» a «punctului» $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ caracterizată de relațiile (4). Considerăm o «sferă» deschisă cu centrul în A și raza $r < \min(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$, care se conține în întregime în «paralelipipedul» dat. Într-adevăr, pentru orice «punct» $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ce aparține acestei «sfere» avem:

$$|x_i - a_i| \le \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_i - a_i)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2} =$$
$$= d(M, A) < r < \min(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) \le \delta_i$$

pentru orice $i = 1, 2, \ldots n$, sau

$$a_1 - \delta_1 < x_1 < a_1 + \delta_1, a_2 - \delta_2 < x_2 < a_2 + \delta_2, \ldots,$$
$$a_n - \delta_n < x_n < a_n + \delta_n.$$

Prin urmare, «punctul» $M(x_1, x_2 \ldots x_n) \in V(A, \delta_i)$.

Acest rezultat pe parcurs ne va permite să utilizăm orice tip de vecinătate: «paralelipipedică» sau «sferică».

Fie E o submulțime a «spațiului» R^n. Se spune că $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ este un «punct» *interior* al mulțimii E dacă există o vecinătate («paralelipipedică» sau «sferică») $V(a)$ a «punctului» a, conținută în E, deci $a \in V(a) \subseteq E \subseteq R^n$.

Definiția 5: Mulțimea E formată numai din «puncte» interioare se numește *mulțime deschisă*.

«Paralelipipedul dreptunghic» deschis și «sfera» deschisă sunt exemple de mulțimi deschise.

Fie E o submulțime a «spațiului» R^n și $a \in R^n$. Se spune că a este un «punct» *de acumulare* a mulțimii E dacă orice vecinătate («paralelipipedică» sau «sferică») a acestui «punct» conține cel puțin un «punct» $x \ne a$ din E. Prin urmare, orice vecinătate a «punctului» a conține o infinitate de «puncte» ale lui E. Un «punct» al mulțimii E care nu este «punct» de acumulare, se numește *«punct» izolat*. Mulțimile finite sunt formate din «puncte» izolate. Mulțimea numerelor naturale este formată numai din «puncte» izolate. Există mulțimi infinite care nu au «puncte» de acumulare, însă orice mulțime care are un «punct» de acumulare este infinită.

Exemple:

1) Mulțimea $\{1,2,3,4,5\}$ nu are puncte de acumulare;

2) Mulțimea $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ îl are pe 0, ca punct de acumulare. Punctul 0 nu aparține mulțimii.

3) Mulțimea $\left\{0, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \ldots\right\}$ îl are pe 0 ca punct de acumulare. Punctul 0 aparține mulțimii.

Definiția 6. O mulțime formată numai din «puncte» izolate se numește *mulțime discretă*.

Se poate arăta că orice mulțime discretă este finită sau numărabilă. Mulțimile finite sunt discrete.

Definiția 7. «Punctele» de acumulare ale mulțimii deschise $E \subset R^n$ care nu aparțin mulțimii date se numesc *«puncte» frontieră* ale acestei mulțimi. Totalitatea «punctelor» frontieră ale mulțimii E se numește «frontiera» acestei mulțimi. Mulțimea deschisă $E \subset R^n$ împreună cu «frontiera» sa se numește *mulțime închisă*.

«Paralelipipedul dreptunghic închis» și «sfera închisă» prezintă exemple de mulțimi închise. Pentru «paralelipipedul dreptunghic deschis» «frontieră» lui va fi compusă din «punctele» $M(x_1,x_2,\dots,x_n)$, pentru care se satisfac relațiile

$$a_1 \le x_1 \le b_1, a_2 \le x_2 \le b_2, \dots, a_n \le x_n \le b_n,$$

unde cel puțin într-un caz are loc egalitatea.

Pentru «sfera deschisă» cu centrul în A de raza r, «frontiera» ei va fi formată din «punctele» M, pentru care $d(M,A)=r$.

Definiția 8. Mulțimea $E \subset R^n$ se numește *mărginită* dacă există o vecinătate $V(0)$ a «punctului» $O(0,0,\dots,0)\in R^n$ («sferică» sau «paralelipipedică») astfel încât $E \subseteq V(0)$.

Definiția 9. Mulțimea $E \subset R^n$ se numește *compactă* dacă ea este mărginită și închisă.

În «spațiul» R^n pot fi introduse și alte noțiuni geometrice ca: «dreaptă» n dimensională cu diferite ecuații (canonică, parametrică), «linie» n dimensională etc. De exemplu, fie $N(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)\in R^n$. Vom numi «dreaptă» în R^n, ce trece prin «punctul» N mulțimea «punctelor» $M(x_1,x_2,\dots,x_n)$ care satisfac sistemul de ecuații

$$\frac{x_1-\beta_1}{\alpha_1}=\frac{x_2-\beta_2}{\alpha_2}=\dots=\frac{x_n-\beta_n}{\alpha_n},$$

unde numerele reale $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ nu se anulează în același timp adică $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\dots+\alpha_n^2 \ne 0$.

Mulțimea «punctelor» $M(x_1,x_2,\dots,x_n)\in R^n$ coordonatele cărora sunt funcții continue $x_i = x_i(t)$, $i=1,2,\dots,n$ pe $[a,b]$ se numește *«linie» continuă* din R^n cu începutul în «punctul»

$$(x_1(a),x_2(a),\dots,x_n(a))$$

și sfârșitul în «punctul»

$$(x_1(b),x_2(b),\dots,x_n(b)).$$

Definiția 10. Mulțimea $E \subset R^n$ se numește *conexă* dacă oricare două «puncte» ale ei pot fi unite cu o «linie» continuă, «punctele» căreia aparțin în întregime mulțimii E.

Definiția 11. Mulțimea $E \subset R^n$ se numește *«domeniu deschis»* dacă ea este deschisă și conexă ([7],[10],v.1). Un «domeniu deschis» luat împreună cu «frontiera» sa, se numește *«domeniu închis»*.

«Paralelipipedul dreptunghic deschis» (sau închis) și «sfera deschisă» (sau închisă) sunt exemple de «domenii deschise» (sau respectiv «domenii închise»).

De acum înainte, vorbind despre «domeniu», vom avea în vedere «domeniul» în sensul definiției 11 (a nu se confunda domeniul de definiție al funcției sau domeniul valorilor ei cu noțiunea de domeniu definită mai sus).

Toate noțiunile expuse în paragraful acesta pot fi considerate ca aparținând unui «limbaj geometric»[*)]; de ele nu este legată (pentru $n>3$) nici o reprezentare geometrică. Totuși este util să subliniem, că spațiul euclidian n dimensional reprezintă numai un prim pas către generalizarea noțiunii de spațiu, care stă la bază multor noțiuni mult mai importante ale analizei contemporane (reamintim și alte generalizări ale noțiunii de spațiu ca: spații vectoriale, spații Banach (1892-1945-matematician polonez), spații Hilbert (1862-1943-matematician german) etc.).

Trecem acum la noțiunea de funcție reală de mai multe variabile reale.

Fie D o submulțime a spațiului euclidian n dimensional. Dacă printr-un procedeu oarecare f fiecărui punct M din D i se asociază un singur număr real u, spunem că am definit *funcția u de M pe mulțimea D* și scriem $u=f(M)$. Deoarece punctul M este caracterizat de coordonatele sale $x_1,x_2,\dots,x_n$ vom scrie $u=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Dacă $n>1$, funcția u se numește *funcție reală de mai multe variabile reale*, sau simplu, *funcție de mai multe variabile*. Observăm că dacă în definiția de mai sus schimbăm

---

[*)] *Am luat în ghilimele toți termenii geometrici, care erau folosiți în sens diferit de cel obișnuit: «punct», «distanță», «paralelipiped dreptunghic», «sferă», «domeniu» etc. În cele ce urmează nu vom face acest lucru.*

expresia «spaţiu n dimensional» în expresiile «dreaptă euclidiană», «plan euclidian» sau «spaţiu euclidian tridimensional», obţinem respectiv definiţia funcţiei de 1, 2, şi 3 variabile, enunţate în 5.1.2.

Mulţimea D se numeşte *domeniul de definiţie* (sau *de existenţă*) al funcţiei $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Variabilele independente $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se numesc *argumentele* funcţiei u. Numărul $u_0 = f(M_0)$, $M_0 \in D$ se numeşte *valoarea particulară* a funcţiei. Mulţimea valorilor particulare se numeşte *domeniul valorilor* acestei funcţii.

Graficul funcţiei $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se numeşte mulţimea punctelor $(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$ din spaţiul euclidian $(n+1)$ dimensional R^{n+1}:

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) \in R^{n+1} \mid (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D\},\ u \in R\}.$$

Pe parcurs în majoritatea cazurilor vom studia funcţii de mai multe variabile definite analitic, adică cu ajutorul unor formule. În asemenea cazuri, dacă textul problemei nu impune condiţii suplimentare variabilelor independente $x_1, x_2, \ldots, x_n$ prin domeniul de definiţie vom subînţelege mulţimea tuturor punctelor din $D \subseteq R^n$ cărora le corespund valori reale ale funcţiei u.

De exemplu, fie

$$u = \frac{1}{\sqrt{4 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2}}.$$

Observăm că domeniul de definiţie al acestei funcţii este mulţimea punctelor $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, coordonatele cărora satisfac inegalităţii stricte $4 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2 > 0$ sau $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < 4$, ceea ce înseamnă o sferă deschisă de raza $r = 2$ cu centrul în originea $O(0,0,\ldots,0)$ a sistemului de coordonate al spaţiului n

dimensional R^n. Domeniul de valori coincide cu semidreapta caracterizată de relaţia $u \geq \frac{1}{2}$.

5.2. Limita funcţiei de mai multe variabile.

O funcţie $f : N \to R^n$ se numeşte ***şir*** de puncte din spaţiul n dimensional euclidian R^n. Se notează $\{M_k\}, k \in N$ sau $\{(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})\}$.

Definiţia 1. Şirul de puncte $\{M_k\}, k \in N$ din R^n se numeşte *convergent* către punctul $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, dacă pentru orice număr real $\varepsilon > 0$, există un număr natural $N(\varepsilon)$ care, în general, depinde de ε astfel încât pentru orice $k > N(\varepsilon)$ distanţa $d(M_k, A) < \varepsilon$, adică $\lim\limits_{k \to \infty} d(M_k, A) = 0$.

În cazul acesta punctul A se numeşte *limita* şirului $\{M_k\}, k \in N$. Se notează astfel: $\lim\limits_{k \to \infty} M_k = A$ sau $M_k \to A$, când $k \to \infty$.

Teorema 1. Pentru ca şirul de puncte $\{M_k\}, k \in N$ din R^n să fie convergent către punctul $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ este necesar şi suficient ca şirurile numerice $\{x_1^{(k)}\}, \{x_2^{(k)}\}, \ldots, \{x_n^{(k)}\}$ să fie convergente respectiv către numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Necesitatea. Fie $\lim\limits_{k \to \infty} M_k = A$, adică

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), \forall k > N(\varepsilon) : d(M_k, A) < \varepsilon$$

sau

$$\sqrt{\left(x_1^{(k)} - a_1\right)^2 + \left(x_2^{(k)} - a_2\right)^2 + \cdots + \left(x_n^{(k)} - a_n\right)^2} < \varepsilon.$$

Deoarece $\left|x_i^{(k)}-a_i\right| \le d(M_k, A) < \varepsilon$, $i=1,2,\dots,n$, obținem că șirurile numerice $\{x_1^{(k)}\}, \{x_2^{(k)}\}, \dots, \{x_n^{(k)}\}$ sunt convergente către numerele reale $a_1, a_2, \dots, a_n$ (a se consulta def. 2 din [20] p. 42).

Suficiența. Fie $\lim\limits_{k\to\infty} x_i^{(k)} = a_i \quad (i=1,2,\dots,n)$. Aceasta înseamnă că

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists N_i(\varepsilon),\ \forall k>N_i(\varepsilon): \left|x_i^{(k)}-a_i\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Notăm $N(\varepsilon)=\max\limits_{i=1,\dots,n} N_i(\varepsilon)$. Atunci pentru orice $k>N(\varepsilon)$ obținem:

$$d(M_k, A) = \sqrt{\left(x_1^{(k)}-a_1\right)^2+\left(x_2^{(k)}-a_2\right)^2+\dots+\left(x_n^{(k)}-a_n\right)^2} <$$

$$< \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{n}+\frac{\varepsilon^2}{n}+\dots+\frac{\varepsilon^2}{n}} = \sqrt{n\cdot\frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon$$

adică, $\lim\limits_{k\to\infty} M_k = A$. Teorema este demonstrată.

Din definiția 1 reiese că șirul de puncte $\{M_k\}, k\in N$ din R^n este convergent către punctul A, atunci și numai atunci, când în orice vecinătate a punctului A sunt situate toate punctele șirului, începând cu un anumit rang.

Fie funcția $u=f(M)=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ definită într-o vecinătate oarecare a punctului $A(a_1,a_2,\dots,a_n)$ din R^n în afară poate de însuși punctul A.

Definiția 2. Numărul real l se numește limita funcției $u=f(M)=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ în punctul $A(a_1,a_2,\dots,a_n)$ dacă pentru orice șir de puncte $\{M_k\}, k\in N$, $M_k\neq A$ convergent

către punctul A, șirul respectiv al valorilor funcției $\{f(M_k)\}, k\in N$ este convergent către numărul l.

Se notează astfel:

$$l=\lim_{M\to A} f(M) \text{ sau } l=\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ x_2\to a_2\\ \dots\\ x_n\to a_n}} f(x_1,x_2,\dots,x_n).$$

Definiția 3. Numărul l se numește *limita* funcției $u=f(M)=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ în punctul $A(a_1,a_2,\dots,a_n)$ dacă pentru orice număr $\varepsilon>0$, există un număr $\delta>0$ care, în general, depinde de ε (se scrie $\delta(\varepsilon)$), astfel încât pentru orice punct M din vecinătatea $V(A,\delta)$ care verifică inegalitatea $0<d(M,A)<\delta$ se satisface inegalitatea $|f(M)-l|<\varepsilon$.

În limbajul logicii matematice această definiție se scrie astfel:

$$l=\lim_{M\to A} f(M) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall M\in V(A,\delta):$$

$$0<d(M,A)<\delta \Rightarrow |f(M)-l|<\varepsilon.$$

Definiția 2 se mai numește *definiția limitei funcției* $u=f(M)$ *în punctul* A *în limbajul «șirurilor»*, iar definiția 3 – *în limbajul* «$\varepsilon-\delta$».

Dacă în spațiul euclidian n dimensional R^n considerăm $n=1$, atunci definițiile 2 și 3 coincid cu definițiile obișnuite ale funcției de o singură variabilă reală în sensul Heine și respectiv în sensul Cauchy .

Definiția 4. Fie $A(a_1,a_2,\dots,a_n)\in R^n$. Mulțimea punctelor $M\in R^n$ care satisfac inegalitatea dublă $0<d(M,A)<\delta$ se numește δ vecinătate perforată a punctului A.

Se notează $\overline{V}(A,\delta)$.

Definiția 3 poate fi enunțată astfel.

Definiția 5. Numărul l se numește *limita* funcției $u=f(M)=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ în punctul $A(a_1,a_2,\dots,a_n)$ dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$, există o astfel de δ vecinătate perforată $\overline{V}(A,\delta)$ a punctului A încât $f(M) \in \overline{V}(l,\varepsilon)$, pentru orice punct $M \in \overline{V}(A,\delta)$.

Cu ajutorul acestei definiții ușor se arată că $\lim\limits_{M \to A} c = c$ (limita unei funcții constante coincide cu valoarea acestei constante) și că

$$\lim_{M \to A} x_i = a_i \quad (i = 1,2,\dots,n).$$

Deseori definiția 3 se numește *definiția limitei funcției* $u = f(M)$ *în punctul* M *în limbajul «distanțelor»*, iar definiția 5 – *în limbajul «vecinătăților»*.

Echivalența definițiilor 2 și 3 se demonstrează în mod similar cazului funcției de o singură variabilă reală (teorema 1 din 1.5.1, [20]).

Dacă $\lim\limits_{M \to A} f(M) = \lim\limits_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \dots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, funcția $f(M)$ se numește *funcție infinit mică* în punctul $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Folosind oricare din definițiile limitei unei funcții de mai multe variabile, putem deduce proprietățile fundamentale ale funcțiilor infinit mici, putem da noțiunea de comparare $(u = o(v))$ și noțiunea de echivalență a funcțiilor infinit mici $(u \sim v)$; putem să demonstrăm că diferența dintre o funcție care are limită și limita ei este o funcție infinit mică; putem să demonstrăm teoremele fundamentale referitoare la operațiile aritmetice asupra limitelor. Demonstrațiile acestor rezultate sunt similare cu demonstrațiile corespunzătore pentru funcțiile de o singură variabilă (a se consulta 1.5.2; 1.5.3 din [20]).

Fără a ne opri la noțiunea de limită infinită a unei funcții de mai multe variabile (cititorul o poate da singur prin analogie cu cazul unei funcții de o singură variabilă (a se consulta def. 4 din 1.5.2 [20])), menționăm că, în cele ce vor urma, vorbind despre limite, vom avea în vedere limita finită.

Exemplul 1. Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x^2 - y^3}{3x + 5y}$; b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\ln(1 + x^2 y^2)}{\sin^2(2xy)}$.

a) Folosind teorema despre operațiile aritmetice asupra limitelor și

$$\lim_{M \to A} c = c, \quad \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \dots \\ x_n \to a_n}} x_i = a_i \quad (i = 1,2,\dots,n)$$

obținem:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2 - y^3}{3x + 5y} = \frac{\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(x \cdot x) - \lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(y \cdot y \cdot y)}{\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(3 \cdot x) + \lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(5 \cdot y)} =$$

$$= \frac{1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 1 + 5 \cdot 2} = -\frac{7}{13}.$$

b) Notăm: $t = xy$. Avem: $(x,y) \to (0,0)$ implică $t \to 0$ și

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1 + x^2 y^2)}{\sin^2(2xy)} = \lim_{t \to 0} \frac{\ln(1 + t^2)}{\sin^2 2t}.$$

Însă, dacă $t \to 0$, avem: $\ln(1 + t^2) \sim t^2$ și $\sin^2 2t \sim 4t^2$ (vezi 1.5.5 din [20]). Deci,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1 + x^2 y^2)}{\sin^2(2xy)} = \lim_{t \to 0} \frac{\ln(1 + t^2)}{\sin^2 2t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{4t^2} = \frac{1}{4}$$

Așadar, am constatat, că între noțiunile de limita funcției de o singură variabilă și limita funcției de mai multe variabile sunt multe proprietăți comune. Însă între aceste noțiuni sunt și deosebiri esențiale: noțiunea de limită a unei funcții de mai multe variabile este mai îngustă decât noțiunea de limită a funcției de o singură variabilă. Într-adevăr, dacă în cazul funcției de o singură variabilă avem următorul criteriu: pentru ca $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ să fie egală cu numărul l este necesar și suficient existența limitei la dreapta $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ și a limitei la stânga $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ și egalitatea acestor două limite cu numărul l (teorema 2 din 1.5.1 [20]). Aceasta înseamnă că de punctul x_0 ne apropiem numai din două părți: la dreapta și la stânga. Pe când, în cazul funcției de mai multe variabile, de exemplu a funcției $z = f(x, y)$ de două variabile, de punctul (x_0, y_0) se poate de apropiat în diferite moduri: din dreapta, din stânga, de jos, de sus, sub un unghi de 30^0, 45^0, ... în raport cu axa OX etc., adică după o direcție (dreaptă) oarecare sau după o traiectorie cu mult mai complicată. Evident că egalitatea $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = l$ are loc indiferent de modul cum se apropie punctul (x, y) de punctul (x_0, y_0) : după o direcție (dreaptă) sau după o curbă oarecare.

Exemplul 2. Să se demonstreze că $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ nu există (nu are sens).

Metoda 1. Ne vom apropia de punctul $(0,0)$ după dreptele $y = kx$. Avem:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2x \cdot kx}{x^2 + k^2 x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2k}{1 + k^2} = \frac{2k}{1 + k^2}.$$

Dacă $k = 1$, adică ne apropiem de punctul $(0,0)$ după bisectoarea $y = x$, atunci limita funcției este egală cu $\frac{2}{2} = 1$. Dacă $k = 0$, adică ne apropiem de origine pe axa OX (din dreapta sau din stânga), limita funcției este egală cu 0. Prin urmare, apropiindu-ne de origine pe diferite direcții, obținem diferite limite. Aceasta înseamnă că funcția dată nu are limită în punctul $(0,0)$.

Metoda 2. Considerăm $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ și $\rho > 0$. Deoarece $x^2 + y^2 = \rho^2$, avem că punctele (x, y) aparțin unei

circumferințe cu centrul în $(0,0)$ de raza $r = \rho$. Dacă $\varphi \in [0, 2\pi]$, punctul (x, y) parcurge punctele acestei circumferințe.

Prin urmare, dacă $\rho \in [0, +\infty]$ și $\varphi \in [0, 2\pi]$ atunci obținem orice punct din planul euclidian. Condiția $(x, y) \to (0,0)$ este echivalentă cu condiția $\rho \to 0$. Deci,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho \to 0} \frac{2\rho^2 \cos \varphi \cdot \sin \varphi}{\rho^2} = \sin 2\varphi.$$

Prin urmare, limita acestei funcții depinde de direcția (unghiul) φ, adică $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ nu există (nu are sens).

Metoda 3. Considerăm șirul de puncte

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), n \in N$$

Observăm că

$$f(x_n, y_n) = \frac{2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = 1$$

și deci,

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n, y_n) = 1.$$

Dacă însă considerăm șirul de puncte

$$\left(x_n', y_n'\right) = \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right), n \in N$$

avem: $f\left(x_n', y_n'\right) = -1$ și deci, $\lim\limits_{n \to \infty} f\left(x_n', y_n'\right) = -1$.

Evident că punctele acestor două șiruri sunt diferite de punctul $(0,0)$ și ambele șiruri sunt convergente către punctul $O(0,0)$.

Aplicând definiţia 2, constatăm că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2xy}{x^2+y^2}$ nu există (nu are sens).

În afară de limita funcţiei $u=f(M)$, $M\in R^n$ considerată în definiţiile 2 şi 3 când toate argumentele tind în acelaşi timp către limitele lor, putem examina şi limite de alt gen, obţinute după o serie de treceri la limită repetată pentru fiecare argument în parte, într-o anumită ordine. Prima din aceste limite (definiţiile 2 şi 3) se numeşte *n-multiplă* (sau dublă, triplă etc. pentru $n=2,3,\dots$), iar ultima se numeşte *repetată* (sau *succesivă*).

Pentru simplitate ne vom opri la cazul funcţiei de două variabile:

$$z=f(M)=f(x,y).$$

Fie $z=f(M)=f(x,y)$ definită pe mulţimea

$$D=\{(x,y):0<|x-x_0|<a\,,\,0<|y-y_0|<b\}.$$

Presupunem că pentru orice x din intervalul $]x_0-a\,,\,x_0+a[\,,\,x\neq x_0$ există $\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$ care reprezintă o funcţie $g(x)$ ce depinde numai de x.

Dacă există $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\left[\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)\right]$ atunci aceasta limită se numeşte *limită repetată*. În mod analogic se defineşte şi a doua limită repetată: $\lim\limits_{y\to y_0}h(y)=\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)\right]$.

Ar fi greşit să credem că limitele repetate trebuie să fie egale: fie

$$f(x,y)=\frac{x+y+x^2+y^2}{x-y},$$

definită pe mulţimea

$$D=\{(x,y):0<|x|<a\,,\,0<|y|<b,x\neq y\}.$$

Observăm că

$$g(x)=\lim_{y\to 0}f(x,y)=\frac{x+x^2}{x}=x+1$$

şi

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}f(x,y)\right]=\lim_{x\to 0}g(x)=0+1=1.$$

În acelaşi timp

$$h(y)=\lim_{x\to 0}f(x,y)=\frac{y+y^2}{-y}=-(y+1)$$

şi

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}f(x,y)\right]=\lim_{y\to 0}[-(y+1)]=-1.$$

Se poate întâmpla, însă, ca una din limitele repetate să existe, iar cealaltă nu, sau ca existenţa limitei duble să nu implice existenţa limitelor repetate. De exemplu, fie

$$f(x,y)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{y}, & \text{dacă}\quad y\neq 0,\\ 0\ , & \text{dacă}\quad y=0.\end{cases}$$

Observăm că $|f(x,y)|\le|x|$. Deci, limita dublă $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0$ şi $\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}x\left(\sin\frac{1}{y}\right)=0$, deoarece funcţia $\sin\frac{1}{y}$ este mărginită. Deci, $\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)\right]=\lim\limits_{y\to 0}0=0$. În acelaşi timp $\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)=x\lim\limits_{y\to 0}\left(\sin\frac{1}{y}\right)$ nu există (vezi ex. 2 şi 3, p.69, [20]).

Prin urmare, nu există nici limita repetată $\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)\right]$.

Exemplul 2 de mai sus demonstrează că limita dublă $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2xy}{x^2+y^2}$ nu există, cu toate că ambele limite repetate ale ei există şi sunt egale: $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$ şi $\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right]=0$.

Similar: $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$ şi deci $\lim\limits_{x\to 0}[\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)]=0$.

Aceste exemple ne arată cât de precauţi trebuie să fim la permutarea a două treceri la limită în raport cu variabile diferite. În acelaşi timp multe probleme importante ale analizei matematice sunt legate anume de limitele permutabile, dar se subînţelege că de fiecare dată posibilitatea permutării trebuie să fie argumentată special.

Răspuns la aceste întrebări ne dă următoarea teoremă, care în acelaşi timp stabileşte şi legătura dintre limita dublă şi cea repetată.

Teorema 2: Fie funcţia $z=f(M)=f(x,y)$ definită pe mulţimea

$$D=\{(x,y):0<|x-x_0|<a,\,0<|y-y_0|<b\}$$

şi limita dublă

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=l.$$

Presupunem că pentru orice x fixat ce satisface relaţia $0<|x-x_0|<a$ există $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=g(x)$ şi pentru orice y fixat, ce satisface relaţia $0<|y-y_0|<b$ există $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=h(y)$.

Atunci limitele repetate există şi ele coincid cu cea dublă:

$$\lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right]=\lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right]=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=l.$$

Demonstraţie. Conform definiţiilor 3 şi 5 avem:

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall M\in \bar{V}(M_0,\delta)\Rightarrow|f(x,y)-l|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Fixăm pe y în aşa fel ca $0<|y-y_0|<\delta$ şi trecem la limită în inegalitatea $|f(x,y)-l|<\varepsilon$ când $x\to x_0$ şi $0<|x-x_0|<\delta$.

Deoarece $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=h(y)$, obţinem: $|h(y)-l|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$ pentru orice y ce satisface inegalitatea $0<|y-y_0|<\delta$.

Prin urmare,

$$\lim_{y\to y_0} h(y)=l,\ \text{adică}\ \lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right]=l.$$

Dacă, însă, fixăm x în aşa fel ca $0<|x-x_0|<\delta$ şi trecem la limită în inegalitatea $|f(x,y)-l|<\frac{\varepsilon}{2}$, când $y\to y_0$ şi $0<|y-y_0|<\delta$, obţinem $|g(x)-l|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$, deoarece $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=g(x)$.

Aceasta înseamnă că:

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\,0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|g(x)-l|<\varepsilon,$$

adică

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=l=\lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right]=l.$$

Teorema este demonstrată.

Nota 1: Pe parcurs vom folosi funcţii compuse de mai multe variabile. Pentru funcţiile compuse are loc o teoremă similară teoremei despre schimbarea de variabilă în limita unei funcţii de o singură variabilă (teorema 7, p. 80 din [20]). Enunţul şi demonstraţia teoremei în cazul funcţiilor de mai multe variabile este similară teoremei 7, p. 80 din [20] şi o propunem cititorului.

Notă 2: Considerăm funcţia $f:(N\times N)\to R$, unde $N\times N$ constă din punctele (m,n), $m\in N, n\in N$. Deci $u=f(m,n)$ este o funcţie de două variabile naturale şi se numeşte *şir dublu*. Pentru astfel de funcţii avem noţiunile de limită dublă şi limite repetate.

Exemplu 3. Fie funcţia:

$$f(m,n)=\cos^m(2\pi\cdot n!\cdot x)$$

unde $m\in N, n\in N$ şi $x\in R$. Demonstrăm că

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\lim_{m\to+\infty}\cos^m(2\pi n!\cdot x)\right]=D(x)=\begin{cases}1, \text{ dacă } x\in Q,\\ 0, \text{ dacă } x\in I=R\setminus Q,\end{cases}$$

adică $D(x)$ este funcția lui Dirichlet.

Într-adevăr, dacă $x=\frac{p}{q}$, $p\in Z$, $q\in N$, atunci pentru $n\in N$ și $n\geq q$ avem $\cos(2\pi\cdot n!\cdot x)=\cos\left(2\pi\cdot n!\cdot\frac{p}{q}\right)=\cos 2\pi\cdot k$ unde $k\in Z$.

Prin urmare, $\cos 2\pi\cdot k=1$ și pentru orice $x\in Q$ $\lim_{m\to+\infty}\cos^m(2\pi\cdot n!\cdot x)=1$, adică

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\lim_{m\to+\infty}\cos^m(2\pi\cdot n!\cdot x)\right]=1.$$

Dacă, însă, x este irațional atunci, întrucât $|\cos(2\pi\cdot n!\cdot x)|<1$ pentru orice $n\in N$ și $x\in I=R\setminus Q$, obținem că

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\lim_{m\to+\infty}\cos^m(2\pi\cdot n!\cdot x)\right|=0.$$

În felul acesta funcția Dirichlet

$$D(x)=\begin{cases}1, \text{ dacă } x\in Q,\\ 0, \text{ dacă } x\in I=R\setminus Q,\end{cases}$$

poate fi definită analitic ca funcția

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\left[\lim_{m\to+\infty}\cos^m(2\pi\cdot n!\cdot x)\right],\ x\in R,\ m\in N,\ n\in N.$$

5.3. Funcții continue.

5.3.1. Continuitatea funcției de mai multe variabile într-un punct. Proprietăți de bază.

Definiția 1: Funcția $u=f(M)=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$, definită într-o vecinătate $V(A)$ (paralelipipedică sau sferică) a punctului

$A(a_1,a_2,\dots,a_n)$ din R^n se numește *continuă* în punctul A dacă pentru orice punct $M\in V(A)$ are loc inegalitatea $\lim_{M\to A}f(M)=f(A)$ sau

$$\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ \dots\\ x_n\to a_n}}f(x_1,x_2,\dots,x_n)=f(a_1,a_2,\dots,a_n).$$

Din această definiție rezultă că $\lim_{M\to A}f(M)=f(\lim_{M\to A}M)$.

În limbajul «$\varepsilon-\delta$» continuitatea funcției într-un punct se exprimă astfel: pentru orice $\varepsilon>0$ există un număr $\delta>0$ astfel încât $|f(x_1,x_2,\dots,x_n)-f(a_1,a_2,\dots,a_n)|<\varepsilon$ pentru orice punct $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in V(A)$ ce satisface inegalitățile $|x_i-a_i|<\delta$, $i=1,2,\dots n$ sau: pentru orice $\varepsilon>0$ există un număr $r>0$, astfel încât $|f(M)-f(A)|<\varepsilon$ pentru orice punct $M\in V(A)$ ce satisface inegalitatea: distanța $d(M,A)<r$.

În limbajul «șirurilor» continuitatea funcției se exprimă astfel: pentru orice șir de puncte $\{M_k\}$, $k\in N$, $M_k\in V(A)$ convergent către A, șirul $\{f(M_k)\}$ de valori ale funcției este convergent către $f(A)$.

Spre deosebire de definiția limitei funcției într-un punct în definiția continuității funcției într-un punct punctele $M\in V(A)$ pot să coincidă cu însuși punctul A. Folosind definiția continuității funcției de mai multe variabile într-un punct și teoremele fundamentale despre limite se poate demonstra, că suma și produsul a două funcții continue este o funcție continuă; câtul a două funcții continue cu numitorul diferit de zero este o funcție continuă; o funcție compusă alcătuită din câteva funcții continue este o funcție continuă etc.

Fie $u=f(M)=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ definită pe mulțimea $E\subseteq R^n$ și $A(a_1,a_2,\dots,a_n)\in E$. Vom numi *creștere totală* a funcției $u=f(M)$ în punctul A funcția Δu definită cu ajutorul formulei $\Delta u=f(M)-f(A)$, unde $M\in E$.

Notăm $x_i - a_i = \Delta x_i$, $i = 1,2,\ldots,n$ şi le vom numi *creşterile* variabilelor independente $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Deci,

$$\Delta u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) =$$
$$= f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, \ldots, a_n + \Delta x_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Reieşind din definiţia 1 obţinem: funcţia $u = f(M)$ se numeşte *continuă* în punctul A dacă $\lim\limits_{M \to A} \Delta u = \lim\limits_{M \to A} [f(M) - f(A)] = 0$ sau $\lim\limits_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \ldots \\ \Delta x_n \to 0}} \Delta u = 0$, adică funcţia $u = f(M)$ se numeşte *continuă* în A, dacă creşterea ei totală în acest punct este o funcţie infinit mică când creşterile argumentelor funcţiei sunt infinit mici.

Pentru funcţia $u = f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se poate defini noţiunea de continuitate a funcţiei în punctul $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ în raport cu fiecare argument în parte, considerând valorile celorlalte argumente ca valori fixate. Cu acest scop introducem aşa-numitele *creşteri parţiale* ale funcţiei: numim *creştere parţială* a funcţiei $u = f(M)$ în punctul A în raport cu argumentul $x_i (i = 1,2,\ldots,n)$ funcţia $\Delta_{x_i} u$ definită cu ajutorul formulei

$$\Delta_{x_i} u = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + \Delta x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) -$$
$$- f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n),\ i = 1,2,\ldots,n.$$

Definiţia 2. Funcţia $u = f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se numeşte *continuă* în punctul $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ în raport cu argumentul $x_i (i = 1,2,\ldots n)$ dacă creşterea ei parţială $\Delta_{x_i} u$ în A este o funcţie infinit mică când creşterea $\Delta x_i (i=1,2,\ldots,n)$ este infinit mică.

Observăm că continuitatea funcţiei într-un punct în raport cu argumentul $x_i (i = 1,2,\ldots,n)$ coincide cu continuitatea funcţiei de o singură variabilă reală în punctul dat.

Evident că conform definiţiei 1, dacă $\lim\limits_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \ldots \\ \Delta x_n \to 0}} \Delta u = 0$, atunci $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \Delta_{x_i} u = 0$, $i = 1,2,\ldots,n$, adică continuitatea funcţiei într-un punct (în raport cu toate argumentele simultan) implică continuitatea funcţiei în acest punct în raport cu fiecare argument în parte.

Propoziţia inversă nu are loc. Considerăm funcţia

$$z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, \ \textit{dacă}\ x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, \ \textit{dacă}\ x = y = 0, \end{cases}$$

şi punctul $A(0,0)$ care aparţine domeniului ei de definiţie.

Observăm că

$$\Delta_x z = f(0 + \Delta x, 0) - f(0,0) = \frac{2\Delta x \cdot 0}{\Delta x^2} - 0 = 0.$$

Similar

$$\Delta_y z = f(0, 0 + \Delta y) - f(0,0) = \frac{2 \cdot 0 \cdot \Delta y}{\Delta y^2} - 0 = 0.$$

Prin urmare, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta_x z = 0 = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \Delta_y z$, adică funcţia $z = f(x,y)$ este continuă în punctul $A(0,0)$ în raport cu fiecare argument. Observăm, însă, că această funcţie în punctul $(0,0)$ nu are limită (ex. 2 din 5.2), adică funcţia $z = f(x,y)$ nu este continuă în $(0,0)$.

Punctele în care nu se respectă definiţia continuităţii funcţiei într-un punct se numesc *puncte de discontinuitate*. Punctul $(0,0)$ pentru funcţia de mai sus este un punct de discontinuitate al ei.

Punctul $(1,2)$ este un punct de discontinuitate pentru funcţia

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x^2 + y^2, \ \textit{dacă}\ (x,y) \neq (1,2), \\ 1, \ \textit{dacă}\ x = 1, y = 2, \end{cases}$$

deoarece

$$\lim_{\substack{x\to1\\y\to2}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to1\\y\to2}}\left(2x^2+y^2\right)=2\cdot1+2^2=6$$

și

$$f(1,2)=1,\ \text{adică}\ \lim_{\substack{x\to1\\y\to2}} f(x,y)\neq f(1,2).$$

5.3.2. Continuitatea funcției pe un domeniu. Continuitatea uniformă.

Fie $u=f(M)=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ definită pe o mulțime $D\subseteq R^n$.

Definiția 1. Funcția $u=f(M)=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ se numește *continuă* pe D dacă ea este continuă în fiecare punct al acestei mulțimi.

În 1.6.3 din [20] am studiat unele proprietăți ale funcțiilor continue pe un segment: teoremele lui Bolzano–Cauchy, teoremele lui Weierstrass, teorema lui Cantor etc.

Proprietăți similare pot fi enunțate și pentru funcții de mai multe variabile continue pe un domeniu mărginit și închis (în sensul definițiilor 8 și 11 din 5.1.3.) care este o analogie a segmentului în cazul funcției de o singură variabilă.

Se știe că continuitatea funcției $u=f(M)=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ într-un punct $A(a_1,a_2,\dots,a_n)$ din domeniul ei de definiție D se exprimă în limbajul «$\varepsilon-\delta$» astfel: pentru orice $\varepsilon>0$ există un număr $\delta>0$ astfel încât $|f(M)-f(A)|<\varepsilon$ pentru orice punct $M\in D$ ce satisface inegalitățile $|x_i-a_i|<\delta$, $i=1,2,\dots,n$. Evident că în acest caz numărul pozitiv δ depinde atât de numărul $\varepsilon>0$ cât și de punctul A, adică $\delta=\delta(\varepsilon, A)$.

Presupunem că funcția $u=f(M)$ este continuă pe mulțimea $D\subseteq R^n$. Atunci se impune următoarea problemă: există, oare, pentru un $\varepsilon>0$ dat, un număr $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, care s-ar potrivi pentru toate punctele A din D în același timp? Dacă acest lucru este posibil

(pentru orice număr $\varepsilon>0$), se spune, că funcția este *uniform continuă* pe mulțimea D.

Vom trece în revistă unele rezultate importante pentru funcțiile de mai multe variabile continue pe un domeniu închis și mărginit D în sensul definiției 8 și 11 din 5.1.3.

Teorema 1 (*Weierstrass*): Dacă funcția $u=f(M)=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ este definită și continuă pe $D^{*)}$, atunci această funcție este mărginită pe acest domeniu.

Teorema 2 (*Weierstrass*): Dacă funcția $u=f(M)$ este definită și continuă pe $D^{*)}$, atunci ea își atinge cel puțin o singură dată valoarea cea mai mare și valoarea cea mai mică pe acest domeniu.

Teorema 3 (*Bolzano - Cauchy*): Fie $u=f(M)$ definită și continuă pe D și $f(A)$, $f(B)$ sunt valorile funcției $u=f(M)$ în două puncte arbitrare $A\in D$, $B\in D$. Dacă $f(A)<l<f(B)$, atunci pe orice linie care unește punctele A și B și care aparține lui D există cel puțin un punct M_0, astfel încât $f(M_0)=l$;

Teorema 4 (*Bolzano–Cauchy*): Fie $u=f(M)$ definită și continuă pe D. Dacă în două puncte A și B ale acestui domeniu funcția admite valori de semne opuse: $f(A)\cdot f(B)<0$, atunci în acest domeniu există cel puțin un punct M_0 în care funcția se anulează: $f(M_0)=0$;

Teorema 5 (*Cantor*): dacă funcția $u=f(M)$ este continuă pe $D^{*)}$, atunci ea este uniform continuă pe acest domeniu.

$^{*)}$ În teoremele 1, 2 și 5 domeniul D poate fi înlocuit cu o mulțime compactă în sensul definiției 9 din 5.1.3.

5.4. Derivatele şi diferenţialele funcţiilor de mai multe variabile.

5.4.1. Derivatele parţiale ale funcţiilor de mai multe variabile.

Fie funcţia $u = f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ definită într-o vecinătate a punctului $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ din R^n.

Definiţie. Se numeşte *derivată parţială* a funcţiei $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ în punctul $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ în raport cu variabila $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$, derivata obişnuită $\dfrac{du}{dx_i}$ în punctul $x_i = a_i$ a funcţiei obţinute din funcţia u, fixând toate argumentele: $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_{i-1} = a_{i-1}, x_{i+1} = a_{i+1}, \dots, x_n = a_n$ în afară de argumentul x_i, adică a funcţiei $f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots a_n) = \varphi(x_i)$.

Se notează: $u'_{x_i}(A)$, $f'_{x_i}(A)$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(A)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(A)$.

Prin urmare,

$$f'_{x_i}(A) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i + \Delta x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{\Delta x_i} =$$

$$= \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i},$$

unde $\Delta_{x_i} u$ este creşterea parţială a funcţiei u în punctul A.

Menţionăm, că notaţiile derivatelor parţiale (cu ∂) trebuie privite numai ca simboluri şi nu ca unele câturi sau fracţii.

Din definiţie rezultă că regulile de calcul ale derivatelor parţiale coincid cu regulile de derivare ale funcţiei de o singură variabilă.

De exemplu, dacă $z = \sqrt{x^2 + y^4}$, avem:

$$z'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^4}} \cdot (x^2 + y^4)'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^4}}$$

şi

$$z'_y = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^4}} \cdot (x^2 + y^4)'_y = \frac{2y^3}{\sqrt{x^2 + y^4}}.$$

Remarcăm că din existenţa (ba chiar şi din continuitatea) derivatelor parţiale ale unei funcţii de mai multe variabile în punctul dat, nu rezultă că această funcţie este continuă în punctul dat. Considerăm funcţia

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, \ dacă\ x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, \ dacă\ x = y = 0. \end{cases}$$

În punctul 5.3.1 de mai sus am constatat că această funcţie nu este continuă în punctul $(0,0)$. De asemenea, tot acolo, am arătat că creşterile parţiale ale ei în punctul $(0,0)$ sunt egale cu $\Delta_x z = 0$ şi $\Delta_y z = 0$. Deci,

$$z'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

şi

$$z'_y(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0.$$

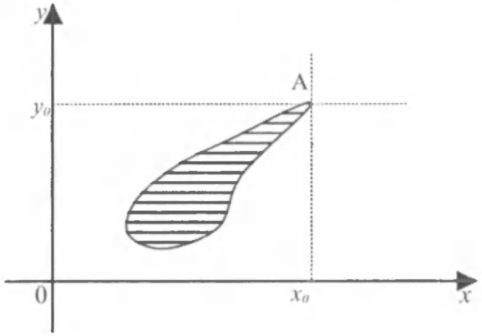
Prin urmare, derivatele parţiale, fiind funcţii constante, sunt continue pe tot planul euclidian şi în special în punctul $(0,0)$.

Dacă considerăm funcţia $z = f(x, y)$ de două variabile în planul euclidian R^2, atunci derivatele ei parţiale într-un punct $M_0(x_0, y_0)$ au următoarea interpretaţie geometrică: derivata parţială $f'_x(x_0, y_0)$ (sau $f'_y(x_0, y_0)$) în punctul dat M_0 coincide cu coeficientul unghiular (panta) al tangentei duse prin punctul

$A(x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)) \in R^3$ la linia de intersecţie a graficului funcţiei $z = f(x, y)$ cu planul $y = y_0$ (respectiv $x = x_0$).

Notă. Menţionăm că am definit derivatele parţiale ale unei funcţii de mai multe variabile $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ într-un punct interior $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Dacă însă punctul A este un punct de frontieră al domeniului de definiţie a funcţiei date, atunci creşterea ei parţială $\Delta_{x_i} u (i = 1,2,\ldots,n)$ poate fi nedeterminată, fiindcă punctul $B(a_1 + \Delta x_1, \ldots, a_i + \Delta x_i, \ldots, a_n + \Delta x_n)$ poate să nu aparţină domeniului de definiţie al funcţiei date nici pentru orice $\Delta x_i \to 0 (i = 1,2,\ldots,n)$.

Aşa o situaţie avem în punctul $A(x_0, y_0)$ din figura de mai jos.



În acest caz, dacă există derivata parţială $u'_{x_i}(M)(i = 1,2,\ldots,n)$ în punctele interioare M ale domeniului şi există $\lim_{M \to A} u'_{x_i}(M)$, atunci, prin definiţie, avem $u'_{x_i}(A) = \lim_{M \to A} u'_{x_i}(M) \quad (i = 1,2,\ldots,n)$.

5.4.2. Funcţii diferenţiabile de mai multe variabile.

Fie funcţia $u = f(M) = f(x_1, \ldots, x_n)$ definită într-o vecinătate $V(A,r)$ a punctului $A(a_1, \ldots, a_n)$ din R^n.

Definiţia 1. Funcţia $u = f(M) = f(x_1, \ldots, x_n)$ se numeşte *diferenţiabilă* în punctul A dacă creşterea ei totală $\Delta u = f(M) - f(A)$, $M \in V(A,r)$ în punctul A poate fi reprezentată sub forma

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} l_i \cdot \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \Delta x_i \;, \qquad (1)$$

unde l_i sunt numere reale ce nu depind de creşterile Δx_i ale argumentelor x_i $(i=1,\ldots,n)$, iar funcţiile

$$\alpha_i = \varphi_i (a_1,\ldots,a_n, \Delta x_1,\ldots,\Delta x_n) (i=1,\ldots n)$$

sunt funcţii infinit mici când $\Delta x_1 \to 0$, $\Delta x_2 \to 0$, $\ldots$, $\Delta x_n \to 0$ şi $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ când $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_n = 0$.

Vom demonstra că condiţia (1) de diferenţiabilitate a funcţiei $u = f(M)$ în punctul A poate fi înlocuită prin condiţia

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} l_i \cdot \Delta x_i + \varepsilon \cdot \rho \;, \qquad (2)$$

unde

$$\rho = d(M, A) = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \cdots + \Delta x_n^2}$$

şi

$$\varepsilon = g(a_1,\ldots,a_n, \Delta x_1,\ldots, \Delta x_n)$$

este o funcţie infinit mică când $\Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_n \to 0$.

Observăm că $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \cdots + \Delta x_n^2}$ este o funcţie infinit mică când $\Delta x_1 \to 0$, $\Delta x_2 \to 0$, $\ldots$, $\Delta x_n \to 0$:

$$\rho \to 0 \Leftrightarrow \Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_n \to 0$$

şi

$$\rho = 0 \Leftrightarrow \Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_n = 0 .$$

Dacă $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_n = 0$, atunci condiţiile (1) şi (2) sunt identice.

Demonstrăm mai întâi că funcția $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \Delta x_i$ este infinit mică de ordin mai superior în raport cu funcția infinit mică ρ când $\Delta x_1 \to 0$, $\Delta x_2 \to 0$, ..., $\Delta x_n \to 0$ adică $\lim_{\rho \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \Delta x_i}{\rho} = 0$.

Într-adevăr, dacă $\rho = d(M, A) \neq 0$ atunci din relația $|\Delta x_i| \le d(M, A) = \sqrt{\Delta x_1^2 + \cdots + \Delta x_n^2}$ obținem $0 \le \frac{|\Delta x_i|}{\rho} \le 1$ pentru orice $i = 1, \ldots, n$. Deci,

$$|\alpha_1 \Delta x_1 + \cdots + \alpha_n \Delta x_n| = \rho \left| \alpha_1 \cdot \frac{\Delta x_1}{\rho} + \cdots + \alpha_n \cdot \frac{\Delta x_n}{\rho} \right| \le$$

$$\le \rho \left(|\alpha_1| \cdot \frac{|\Delta x_1|}{\rho} + \cdots + |\alpha_n| \cdot \frac{|\Delta x_n|}{\rho} \right) \le \rho (|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|).$$

De unde

$$\frac{1}{\rho} |\alpha_1 \Delta x_1 + \cdots + \alpha_n \Delta x_n| \le |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|.$$

Observăm că

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{|\alpha_1 \Delta x_1 + \cdots + \alpha_n \Delta x_n|}{\rho} \le \lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \cdots \\ \Delta x_n \to 0}} (|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|) = 0.$$

De unde $\lim_{\rho \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \Delta x_i}{\rho} = 0$.

Fie că are loc condiția (1). În calitate de funcția ε pentru formula (2) considerăm funcția $\varepsilon = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \Delta x_i$.

Dacă, însă, avem condiția (2) de diferențiabilitate a funcției $u = f(M)$ în punctul A, funcțiile α_i $(i = 1, \ldots, n)$ pentru condiția (1) se obțin astfel: avem

$$\varepsilon \cdot \rho = \varepsilon \cdot \frac{\rho^2}{\rho} = \varepsilon \cdot \frac{\Delta x_1^2 + \cdots + \Delta x_n^2}{\rho} = \left(\varepsilon \cdot \frac{\Delta x_1}{\rho} \right) \cdot \Delta x_1 + \cdots +$$

$$+ \left(\varepsilon \cdot \frac{\Delta x_n}{\rho} \right) \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \Delta x_i,$$

unde $\alpha_i = \varepsilon \cdot \left(\frac{\Delta x_i}{\rho} \right)$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Observăm că funcțiile $\alpha_i (i = 1, \ldots, n)$ sunt funcții infinit mici când $\Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_n \to 0$, deoarece $\lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \cdots \\ \Delta x_n \to 0}} \alpha_i = \lim_{\rho \to 0} \varepsilon \cdot \left(\frac{\Delta x_i}{\rho} \right) = 0$, ca produsul dintre o funcție infinit mică ε și o funcție mărginită $\left(0 \le \left| \frac{\Delta x_i}{\rho} \right| \le 1 \right)$.

Prin urmare, condițiile (1) și (2) sunt echivalente.

Termenul $\sum_{i=1}^{n} l_i \cdot \Delta x_i$ din relația (1) sau (2) se numește *partea principală* a creșterii totale Δu a funcției $u = f(M) = f(x_1, \ldots, x_n)$ în punctul $A(a_1, \ldots, a_n) \in R^n$, întrucât termenul rămas $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \Delta x_i$ sau $\varepsilon \cdot \rho$ este o funcție infinit mică de ordin superior în raport cu ρ când $\Delta x_1 \to 0, \Delta x_2 \to 0, \ldots, \Delta x_n \to 0$.

Definiția dată mai sus a diferențiabilității funcției de mai multe variabile este o generalizare naturală a definiției diferențiabilității funcției de o singură variabilă (vezi 2.2.1 din [20]).

Tot acolo s-a constatat că, dacă o funcţie de o singură variabilă este diferenţiabilă într-un punct oarecare, atunci ea este derivabilă în acest punct. Condiţia „derivabilă într-un punct" s-a dovedit a fi şi suficientă, adică din derivabilitatea unei funcţii de o singură variabilă într-un punct dat rezultă diferenţiabilitatea funcţiei în acest punct (teorema 1 din 2.2.1, [20]). Să vedem cum se extind aceste proprietăţi asupra funcţiilor de mai multe variabile.

Teorema 1. Dacă funcţia $u = f(M) = f(x_1,\ldots,x_n)$ este diferenţiabilă în punctul $A(a_1,\ldots,a_n)$ din R^n, atunci ea este continuă în acest punct.

Demonstraţie. Dacă funcţia $u = f(M)$ este diferenţiabilă în A, atunci conform condiţiei (1) avem:

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0\\ \ldots\\ \Delta x_n \to 0}} \Delta u = \lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0\\ \ldots\\ \Delta x_n \to 0}} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} l_i \cdot \Delta x_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \Delta x_i\right)\right] = 0 .$$

Aceasta înseamnă că funcţia dată este continuă în punctul A.

Teorema este demonstrată.

Teorema 2. Dacă funcţia $u = f(M) = f(x_1,\ldots,x_n)$ este diferenţiabilă în punctul $A(a_1,\ldots,a_n)$ din R^n, atunci derivatele parţiale $\frac{\partial u}{\partial x_i}(A)\,(i = 1,\ldots,n)$ există şi coincid cu numere reale $l_i\ (i = 1,\ldots,n)$ din formulele (1) sau (2).

Demonstraţie. Fie Δx_i o creştere a argumentului $x_i\ (i = 1,\ldots,n)$. Atunci creşterea parţială $\Delta_{x_i} u$, conform formulei (1), are forma

$$\Delta_{x_i} u = l_i \Delta x_i + \alpha_i \cdot \Delta x_i \ (i = 1,\ldots,n),$$

deoarece $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_{i-1} = \Delta x_{i+1} = \cdots = \Delta x_n = 0$.

Întrucât $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \alpha_i = 0$, avem: $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i} = \lim\limits_{\Delta x_i \to 0} (l_i + \alpha_i) = \lim\limits_{\Delta x_i \to 0} l_i = l_i$ (l_i este o funcţie constantă).

Teorema este demonstrată.

Din teorema 2 rezultă că, spre exemplu, condiţia (2) de diferenţiabilitate a funcţiei $u = f(M)$ în punctul A are forma

$$\Delta u = f'_{x_1}(A) \cdot \Delta x_1 + f'_{x_2}(A) \cdot \Delta x_2 + \cdots + f'_{x_n}(A) \cdot \Delta x_n + \varepsilon \cdot \rho$$

şi această formă este unică pentru funcţia dată.

Teoremele 1 şi 2 se numesc *condiţii necesare de diferenţiabilitate* a funcţiei de mai multe variabile.

Afirmaţiile reciproce pentru teoremele 1 şi 2 nu sunt valabile. Din continuitatea unei funcţii de mai multe variabile într-un punct, precum şi din existenţa derivatelor ei parţiale în acest punct nu rezultă încă diferenţiabilitatea acestei funcţii în punctul dat.

Într-adevăr, considerăm funcţia $z = f(x, y) = x + y + \sqrt{|x| \cdot |y|}$, definită pe tot planul euclidian R^2.

Funcţia dată este continuă în punctul $(0,0)$ deoarece

$$\lim_{\substack{x \to 0\\ y \to 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \to 0\\ y \to 0}} \left(x + y + \sqrt{|x| \cdot |y|}\right) = 0 + 0 + 0 = 0 = f(0,0).$$

Calculăm derivatele ei parţiale în punctul $(0,0)$:

$$z'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x + 0 + \sqrt{|\Delta x| \cdot 0} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 .$$

În virtutea simetriei, obţinem: $z'_y(0,0) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta y} = 1$.

Creşterea ei totală în punctul $(0,0)$ are forma

$$\Delta z = f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) = f(\Delta x, \Delta y) = \Delta x + \Delta y + \sqrt{|\Delta x| \cdot |\Delta y|}.$$

Dacă funcţia f ar fi diferenţiabilă în punctul $(0,0)$, am avea următoarea reprezentare unică

$$\Delta u = u'_x(0,0) \cdot \Delta x + u'_y(0,0) \cdot \Delta y + \varepsilon \cdot \rho = 1 \cdot \Delta x + 1 \cdot \Delta y + \varepsilon \cdot \rho,$$

unde $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \varepsilon = 0$ şi $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

Prin urmare, am obţinut egalitatea

$$\Delta x + \Delta y + \sqrt{|\Delta x| \cdot |\Delta y|} = 1 \cdot \Delta x + 1 \cdot \Delta y + \varepsilon \cdot \rho.$$

De unde $\varepsilon \cdot \rho = \sqrt{|\Delta x| \cdot |\Delta y|}$, adică $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{|\Delta x| \cdot |\Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$. Pentru $\Delta x = \Delta y \to 0$, avem $\lim\limits_{\Delta x = \Delta y \to 0} \varepsilon = \lim\limits_{\Delta x = \Delta y \to 0} \dfrac{\sqrt{\Delta x^2}}{\sqrt{2\Delta x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, ceea ce înseamnă că ε nu este o funcţie infinit mică, când $\Delta x \to 0$ şi $\Delta y \to 0$.

Aşadar, funcţia $u = x + y + \sqrt{|x| \cdot |y|}$ este continuă în punctul (0,0), are derivate parţiale în (0,0) şi, cu toate acestea, ea nu este diferenţiabilă în acest punct. Constatăm că $z'_x(x,y), z'_y(x,y)$ nu sunt continue în (0,0).

Pentru ca o funcţie de mai multe variabile să fie diferenţiabilă într-un punct dat, trebuie să-i impunem, spre deosebire de funcţia de o singură variabilă, condiţii mai stricte decât existenţa derivatelor parţiale în acest punct. Are loc următoarea teoremă care exprimă condiţia suficientă de diferenţiabilitate.

Teorema 3. Dacă într-o vecinătate oarecare a punctului $A(a_1, \dots, a_n)$ din R^n există derivatele parţiale ale funcţiei $u = f(M) = f(x_1, \dots, x_n)$ în raport cu toate argumentele

$x_1, x_2, \dots, x_n$ şi aceste derivate sunt continue în punctul A, atunci funcţia $u = f(M)$ este diferenţiabilă în acest punct.

Demonstraţie. Pentru a simplifica calculele, vom demonstra teorema pentru o funcţie de două variabile. Deci, fie $z = f(x,y)$ definită într-o vecinătate a punctului $M_0(x_0, y_0)$ şi derivatele parţiale $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ există în această vecinătate şi sunt continue în M_0.

Pentru orice Δx şi Δy, punctele cărora $M_1(x_0 + \Delta x, y_0)$, $M_2(x_0, y_0 + \Delta y)$, $M_3(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ nu ies din această vecinătate a punctului $M_0(x_0, y_0)$ avem:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) -$$
$$- f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)].$$

În parantezele pătrate avem creşterile unor funcţii de o singură variabilă (una din variabile nu se schimbă): în prima paranteză – creşterea în raport cu variabila x, în a doua – cu variabila y. Aplicând formula creşterilor finite a lui Lagrange (vezi 2.4.3 din [20]) pentru aceste creşteri, obţinem:

$$\Delta z = f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) \cdot \Delta y$$

unde $0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$. Din continuitatea derivatelor parţiale $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ în punctul $M_0(x_0, y_0)$, avem:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0) \text{ şi}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x_0, y_0).$$

Prin urmare,

$$f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0) + \alpha_1$$

şi

$$f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x_0, y_0) + \alpha_2,$$

unde

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha_1 = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha_2 = 0$$

(a se consulta teorema 1 din 1.5.2. [20]).

Substituind aceste valori, obținem:

$$\Delta z = f'_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y + \alpha_1\cdot\Delta x + \alpha_2\cdot\Delta y,$$

unde α_1 și α_2 sunt funcții infinit mici când $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ ceea ce înseamnă că funcția $u = f(x,y)$ este diferențiabilă în punctul $M_0(x_0,y_0)$.

Teorema este demonstrată.

Consecință. Dacă funcția $z = f(x,y)$, definită într-o vecinătate oarecare a punctului $M_0(x_0,y_0)$ are derivatele parțiale $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ care sunt definite în această vecinătate și continue în M_0, atunci funcția $f(x,y)$ este continuă în acest punct.

Într-adevăr, conform teoremei 3, funcția $z = f(x,y)$ este diferențiabilă în punctul $M_0(x_0,y_0)$. Aplicând mai departe teorema 1, conchidem că funcția $z = f(x,y)$ este continuă în acest punct.

Cu ajutorul acestei teoreme putem ușor stabili diferențiabilitatea unor clase mari de funcții. De exemplu, funcția $z = f(x,y) = x^2\cos(x-y^2)$ este diferențiabilă în orice punct din planul euclidian R^2, deoarece derivatele parțiale

$$z'_x(x,y) = 2x\cos(x-y^2) - x^2\sin(x-y^2)$$

și $$z'_y(x,y) = -x^2\sin(x-y^2)\cdot(x-y^2)'_y = 2x^2y\sin(x-y^2)$$

sunt funcții continue în orice punct (x,y) din *planul euclidian*.

Notă: Continuitatea derivatelor parțiale în punctul dat nu este o condiție necesară pentru ca funcția să fie diferențiabilă în acest punct.

Pentru a confirma justețea acestei afirmații fie funcția

$$z = f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cdot\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{dacă } x^2+y^2>0,\\ 0, & \text{dacă } x=y=0.\end{cases}$$

Considerăm punctul $(0,0)$. Observăm că

$$\Delta z = f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) = f(\Delta x,\Delta y) =$$
$$= \left[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\right]\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}};$$

$$\Delta_x z = f(0+\Delta x,0) - f(0,0) = f(\Delta x,0) = (\Delta x)^2\cdot\sin\frac{1}{|\Delta x|}$$

și

$$\Delta_y z = f(0,0+\Delta y) - f(0,0) = f(0,\Delta y) = (\Delta y)^2\cdot\sin\frac{1}{|\Delta y|}.$$

Prin urmare,

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)\cdot\sin\frac{1}{|\Delta x|} = 0$$

și

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta x\to 0}(\Delta y)\cdot\sin\frac{1}{|\Delta x|} = 0,$$

ca produsul dintre o funcție infinit mică ($\Delta x \to 0$ sau $\Delta y \to 0$) și o funcție mărginită $\left|\sin\dfrac{1}{|\Delta x|}\right| \le 1$, $\left|\sin\dfrac{1}{\Delta y}\right| \le 1$.

Funcția $z = f(x,y)$ este diferențiabilă în punctul $(0,0)$, deoarece

$$\Delta z = f(x,y) - f(0,0) = f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - (0,0) =$$
$$= f(\Delta x,\Delta y) = (\Delta x^2 + \Delta y^2)\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} =$$

$$= 0\cdot\Delta x + 0\cdot\Delta y + \left(\Delta x^2 + \Delta y^2\right)\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} =$$

$$= 0\cdot\Delta x + 0\cdot\Delta y + \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \times$$

$$\times\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} = f'_x(0,0)\cdot\Delta x + f'_y(0,0)\cdot\Delta y + \left(\rho\cdot\sin\frac{1}{\rho}\right)\cdot\rho =$$

$$= f'_x(0,0)\cdot\Delta x + f'_y(0,0)\cdot\Delta y + \varepsilon\cdot\rho \quad ,$$

unde $\varepsilon = \rho\cdot\sin\frac{1}{\rho}$ și $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\varepsilon = 0$, ca produsul dintre o funcție infinit mică si o funcție mărginită.

Dacă $x^2 + y^2 > 0$ atunci

$$f'_x(x,y) = \left[\left(x^2+y^2\right)\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]'_x = 2x\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} +$$

$$+\left(x^2+y^2\right)\cdot\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left[\left(x^2+y^2\right)^{\frac{-1}{2}}\right]'_x =$$

$$= 2x\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \left(x^2+y^2\right)\cdot\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2x}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}} =$$

$$= 2x\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Observăm că funcția $f'_x(x,y)$ nu este continuă în punctul $(0,0)$, deoarece $\lim\limits_{\substack{x=\Delta x\to 0\\ y=\Delta y\to 0}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{\rho\to 0}\cos\frac{1}{\rho}$ nu există (a se consulta exemplul 3, p.68 din [20]).

Se spune că funcția $u = f(M) = f(x_1,\ldots,x_n)$ este **diferențiabilă pe mulțimea** $E \subseteq R^n$ dacă ea este diferențiabilă în orice punct din această mulțime.

5.4.3. Diferențialele funcției de mai multe variabile.

Fie funcția $u = f(M) = f(x_1,\ldots,x_n)$ diferențiabilă în punctul $A(a_1,\ldots,a_n)$ din R^n, atunci creșterea ei totală în A poate fi reprezentată unic sub forma

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u'_{x_i}(A)\cdot\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\Delta x_i\,, \qquad (1)$$

unde $\alpha_i(i=1,\ldots,n)$ sunt funcții infinit mici când $\Delta x_1\to 0,\ldots,\Delta x_n\to 0$.

Definiție. Partea liniară principală a creșterii totale a funcției u, diferențiabile în A, în raport cu $\Delta x_i(i=1,\ldots,n)$, se numește *diferențială totală* a acestei funcții în punctul dat A și se notează $df(A)$ sau $du(A)$. Deci,

$$du(A) = \sum_{i=1}^{n} u'_{x_i}(A)\cdot\Delta x_i\,. \qquad (2)$$

Prin analogie cu funcțiile de o singură variabilă $dx_i = \Delta x_i\ (i=1,\ldots,n)$ se numesc *diferențialele variabilelor independente* $x_1,\ldots,x_n$. De asemenea, expresiile $u'_{x_i}(A)\cdot\Delta x_i = u'_{x_i}(A)\cdot dx_i\ (i=1,\ldots,n)$ se numesc *diferențialele parțiale* ale funcției $u = f(M)$ în punctul A și se notează $d_{x_i}u(A) = u'_{x_i}(A)\cdot dx_i\ (i=1,\ldots,n)$.

Așadar, diferențiala totală du a funcției $u = f(M) = f(x_1,\ldots,x_n)$ în punctul A se exprimă cu ajutorul diferențialelor parțiale astfel:

$$du(A) = \sum_{i=1}^{n} d_{x_i}u(A).$$

Cu ajutorul diferențialei totale formula creşterii totale a funcției $u = f(M)$ în punctul A poate fi scrisă astfel

$$\Delta u = f(M) - f(A) = du(A) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta x \text{ sau } \Delta u = du(A) + \varepsilon \cdot \rho,$$

unde termenii $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta x$ și $(\varepsilon \cdot \rho)$ sunt funcții infinit mici de ordin superior în raport cu distanța $\rho = d(M, A) = \sqrt{\Delta x_1^2 + \cdots + \Delta x_n^2}$ când $\Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_n \to 0$. Prin urmare,

$$\Delta u \approx du. \qquad (3).$$

Această formulă se foloseşte pe larg la calculele aproximative, înlocuindu-se creşterea funcției $u = f(M)$, care poate să depindă în mod complicat de creşterile argumentelor ei, cu diferențiala ei totală, care depinde liniar de aceste creşteri.

Să admitem, de exemplu, că sunt date valorile funcției diferențiabile $u = f(M)$ și ale derivatelor ei parțiale într-un punct dat $A(a_1, \ldots, a_n)$ și se cere să se calculeze valoarea acestei funcții în punctul $M(a_1 + \Delta x_1, \ldots, a_n + \Delta x_n)$. Din formula (3) obținem următoarea formulă:

$$f(M) \approx f(A) + f'_{x_1}(A) \cdot \Delta x_1 + \cdots + f'_{x_n}(A) \cdot \Delta x_n \qquad (4).$$

Exemplul 1. Să se calculeze $\sqrt[5]{0,97} \cdot \sqrt[4]{1,02}$.

Rezolvare. Considerăm funcția $z = f(x, y) = \sqrt[5]{x} \cdot \sqrt[4]{y} = x^{\frac{1}{5}} \cdot y^{\frac{1}{4}}$. Derivatele ei parțiale

$$z'_x(M) = \frac{1}{5} x^{-\frac{4}{5}} \cdot y^{\frac{1}{4}} \text{ și } z'_y(M) = \frac{1}{4} x^{\frac{1}{5}} \cdot y^{-\frac{3}{4}}$$

sunt funcții continue în punctul $A(1,1)$, adică funcția $z = x^{\frac{1}{5}} \cdot y^{\frac{1}{4}}$ este diferențiabilă în acest punct.

Punând $x_0 = y_0 = 1$, $\Delta x = -0,03$, $\Delta y = 0,02$, conform formulei (4), obținem:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta x) = f(1 - 0,03\,, 1 + 0,02) =$$
$$= f(0,97\,, 1,02) = \sqrt[5]{0,97} \cdot \sqrt[4]{1,02} \approx f(A) + df(A) =$$
$$= 1 + z'_x(1,1)\Delta x + z'_y(1,1)\Delta y = 1 + \frac{1}{5} \cdot (-0,03) + \frac{1}{4} \cdot 0,02 =$$
$$= 1 - 0,006 + 0,005 = 0,999.$$

Pe bază exemplului 1 indicăm următorul algoritm pentru calcularea valorii unei expresii numerice oarecare K:

1) Aflăm funcția $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ și un punct $B(b_1, \ldots, b_n)$ din domeniul ei de definiție D, astfel încât $K = f(B)$;
2) Alegem un punct $A(a_1, \ldots, a_n) \in D$, astfel încât valoarea funcției u în A, adică $f(A)$, să se calculeze uşor ;
3) Calculăm $f(A)$;
4) Aflăm derivatele parțiale ale funcției $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ în punctul A;
5) Aplicăm formula (4) considerând $\Delta x_i = b_i - a_i$, adică $b_i = a_i + \Delta x_i (i = 1, \ldots, n)$.

Exemplul 2. Să se stabilească o formulă aproximativă pentru a calcula valoarea funcției $u = \ln(xy + 2y^2 - 2x)$ într-o vecinătate oarecare a punctului (1,1).

Considerăm $x_0 = y_0 = 1$. Avem: $u(1,1)=\ln(1+2-2)=\ln 1=0$;

$$u'_x(x, y) = \frac{1}{xy + 2y^2 - 2x} \cdot (y - 2) \quad \text{și} \quad u'_x(1,1) = -1;$$

$$u'_y(x, y) = \frac{1}{xy + 2y^2 - 2x} \cdot (x + 4y) \quad \text{și} \quad u'_y(1,1) = 5.$$

Aplicând formula (4), obținem:

$$\ln(xy + 2y^2 - 2x) \approx (-1)(x - 1) + 5(y - 1).$$

Propunem cititorului să calculeze valorile funcţiei nemijlocit (folosind tabelele logaritmilor) şi cu ajutorul acestei formule aproximative şi să compare rezultatele.

În încheierea acestui paragraf ne oprim la interpretarea geometrică a diferenţialei totale a unei funcţii de două variabile.

Fie $z = f(x, y)$ diferenţiabilă în punctul $M_0(x_0, y_0)$. Graficul acestei funcţii reprezintă o suprafaţă S în spaţiul euclidian R^3. Notăm prin (L_1) şi (L_2) liniile de intersecţie ale suprafeţei S cu planele $y = y_0$ (paralel cu planul XOZ) şi $x = x_0$ (paralel cu planul YOZ). Ducem tangentele la liniile (L_1) şi (L_2) în punctul lor de intersecţie $A(x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0))$. Aceste două tangente se intersectează în punctul A şi formează *planul tangent* la suprafaţa S prin punctul A.

Întrucât $f'_x(x_0, y_0)$ (respectiv $f'_y(x_0, y_0)$) reprezintă coeficientul unghiular (panta) al tangentei la linia (L_1) (respectiv la linia (L_2)), ecuaţiile acestor două tangente au forma

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0), y = y_0$$

şi

$$z - z_0 = f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), x = x_0 .$$

Din geometria analitică se ştie că ecuaţia planului ce trece printr-un punct dat $A(x_0, y_0, z_0)$ are forma

$$z - z_0 = k(x - x_0) + m(y - y_0).$$

Deoarece tangentele aparţin planului tangent, toate punctele ce aparţin acestor drepte aparţin şi planului. Înlocuind $(z - z_0)$ şi $y = y_0$ din ecuaţia întâi în ecuaţia planului, obţinem:

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) = k(x - x_0) + 0 .$$

De unde $k = f'_x(x_0, y_0)$.

Similar, înlocuind $z - z_0$ şi $x = x_0$ din a doua ecuaţie a tangentei în ecuaţia planului tangent, obţinem $m = f'_y(x_0, y_0)$.

Prin urmare, ecuaţia planului tangent la graficul funcţiei $z = f(x, y)$ în punctul dat $A(x_0, y_0, z_0)$, are forma:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Notăm $x - x_0 = \Delta x$ şi $y - y_0 = \Delta y$. Obţinem formula

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$$

sau $\Delta z = dz$, adică *diferenţiala totală a funcţiei* $z = f(x, y)$ *în punctul* (x_0, y_0) *coincide cu creşterea aplicatei planului tangent la graficul acestei funcţii în punctul* $A(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ *la trecerea din punctul* (x_0, y_0) *în punctul* $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

5.4.4. Derivarea funcţiilor compuse de mai multe variabile. Derivata totală.

Fie $u = f(M) = f(x_1, \ldots, x_n)$ o funcţie de mai multe variabile şi, la rândul lor, variabilele independente sunt funcţii de o singură variabilă independentă $t : x_i = \varphi_i(t)$, $i=1,2,\ldots,n$. Atunci funcţia $u = f(x_1, \ldots, x_n) = f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) = F(t)$ se numeşte *funcţie compusă* în raport cu variabila t. Variabilele $x_i (i = 1, \ldots, n)$ vor fi pentru ea variabile intermediare.

Teorema 1. Dacă funcţiile $x_i = \varphi_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ sunt diferenţiabile (derivabile)[*)] în punctul t_0, iar funcţia $u = f(M) = f(x_1, \ldots, x_n)$ este diferenţiabilă în punctul $A(\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \ldots, \varphi_n(t_0))$, atunci funcţia compusă $u = F(t)$ este o funcţie diferenţiabilă (derivabilă) şi

---

*) a se consulta teorema 1 din 2.2.1 [20].

$$\frac{du(t_0)}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x_1}(A)\cdot\frac{dx_1(t_0)}{dt}+\frac{\partial u}{\partial x_2}(A)\cdot\frac{dx_2(t_0)}{dt}+\dots+ \\ +\frac{\partial u}{\partial x_n}(A)\cdot\frac{dx_n(t_0)}{dt}. \tag{1}$$

Demonstrație. Să presupunem că creșterii Δt a variabilei t îi corespunde în punctul dat t_0 creșterile $\Delta x_i=\varphi_i(t_0+\Delta t)-\varphi_i(t_0)$ ale variabilelor $x_i(i=1,\dots,n)$, care la rândul lor implică creșterea totală a funcției $u=f(M)$: $\Delta u=f(M)-f(A)$.

Întrucât funcția $z=f(M)=f(x_1,\dots,x_n)$ este diferențiabilă în punctul A, avem:

$$\Delta u=\sum_{i=1}^{n}u'_{x_i}(A)\cdot\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\Delta x_i, \tag{2}$$

unde $\alpha_i(i=1,\dots,n)$ sunt funcții infinit mici când $\Delta x_1\to 0,\dots,\Delta x_n\to 0$. Împărțind la Δt ambele părți ale relației (2), obținem:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t}=\sum_{i=1}^{n}u'_{x_i}(A)\cdot\frac{\Delta x_i}{\Delta t}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\frac{\Delta x_i}{\Delta t}. \tag{3}$$

Conform ipotezei teoremei, avem: $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x_i}{\Delta t}=\frac{dx_i(t_0)}{dt}$ $(i=1,\dots,n)$ și derivatele $x_i'(t)(i=1,\dots,n)$ sunt funcții continue în punctul t_0, ceea ce înseamnă că pentru $\Delta t\to 0$ avem $\Delta x_i\to 0(i=1,\dots,n)$ și, în consecință, $\alpha_i\to 0$ pentru orice $i=1,\dots,n$.

Așadar, când $\Delta t\to 0$, există limita expresiei din partea dreaptă a relației (3) și, prin urmare, există $\frac{du(t_0)}{dt}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta t}$, adică obținem formula (1) sau, mai pe scurt,

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{dx_2}{dt}+\dots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot\frac{dx_n}{dt}. \tag{4}$$

Teorema este demonstrată.

Considerăm următorul caz particular: fie că variabila independentă t coincide cu una din variabilele independente $x_1,\dots,x_n$ ale funcției $u=f(x_1,\dots,x_n)$, de exemplu $x_1=t$, și respectăm condițiile corespunzătoare ale teoremei de mai sus.

Atunci, conform formulei (4), obținem:

$$\frac{du}{dx_1}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot 1+\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{dx_2}{dx_1}+\dots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot\frac{dx_n}{dx_1}. \tag{5}$$

Derivata $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, care figurează în partea dreaptă a relației (5) este derivata parțială a funcției $u=f(x_1,\dots,x_n)$ în raport cu variabila x_1. Ea se calculează în mod obișnuit considerând variabilele independente $x_2,x_3,\dots,x_n$ ale funcției u ca niște constante.

Derivata $\frac{du}{dx_1}$ din partea stângă a relației (5) se numește *derivată totală* a funcției $u=f(x_1,\dots,x_n)$ ca funcție compusă de variabila independentă x_1, care depinde de x_1 atât în mod explicit, cât și prin intermediul celorlalte variabile: $x_2,x_3,\dots,x_n$.

De exemplu, dacă $z=\ln(x-y^4)$, unde $y=\sqrt{\sin x}$, atunci derivata parțială

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x-y^4}\cdot(x-y^4)'_x=\frac{1}{x-y^4}.$$

Pentru a calcula derivata totală $\frac{dz}{dx}$, calculăm mai întâi derivata parțială $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x-y^4}\cdot(x-y^4)'_y=\frac{4y^3}{y^4-x}.$$

Folosind formula (5), obținem:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x-y^4}+\frac{4y^3}{y^4-x}\cdot\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}=$$

$$=\frac{1}{x-\sin^2 x}+\frac{2\sin x\sqrt{\sin x}}{\sin^2 x-x}\cdot\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}=$$

$$=\frac{1}{x-\sin^2 x}+\frac{\sin 2x}{\sin^2 x-x}=\frac{1-\sin 2x}{x-\sin^2 x}.$$

Teorema 2: Dacă funcţiile $x_i=\varphi_i(s,t)\,(i=1,\ldots,n)$ sunt diferenţiabile în punctul (s_0,t_0) din planul euclidian R^2, iar funcţia $u=f(M)=f(x_1,\ldots,x_n)$ este diferenţiabilă în punctul $A(\varphi_1(s_0,t_0),\ldots,\varphi_n(s_0,t_0))$, atunci funcţia compusă $u=f(\varphi_1(s,t),\ldots,\varphi_n(s,t))=F(s,t)$ este o funcţie diferenţiabilă în punctul (s_0,t_0) şi derivatele ei parţiale

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial s}+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial s},\qquad(6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t}+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t}.\qquad(7)$$

Demonstraţie. Consultând prima parte din demonstraţia teoremei 1, propunem cititorului să arate că dacă funcţiile $x_i=\varphi_i(s,t)\,(i=1,\ldots,n)$ sunt diferenţiabile în punctul (s_0,t_0) şi funcţia $u=f(x_1,\ldots,x_n)$ este diferenţiabilă în A, atunci funcţia compusă $u=F(s,t)$ este diferenţiabilă în (s_0,t_0). În ceea ce priveşte formulele (6) şi (7), ele se obţin ca o consecinţă a formulei (4), întrucât la determinarea derivatei parţiale $\frac{\partial u}{\partial s}$ (sau $\frac{\partial u}{\partial t}$) funcţia $u=F(s,t)$ este considerată ca o funcţie de o singură variabilă s (sau respectiv t), valoarea variabilei a doua fiind constantă.

Teorema este demonstrată.

La concluzii analogice ajungem şi în cazul când numărul argumentelor independente s, t este mai mare decât doi.

Fie funcţia $u=f(M)=f(x_1,\ldots,x_n)$ diferenţiabilă într-un punct oarecare $A(a_1,\ldots,a_n)$ din R^n. Conform definiţiei din punctul precedent, diferenţiala totală în A se calculează după formula

$$du(A)=\frac{\partial u}{\partial x_1}(A)\cdot dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}(A)\cdot dx_2+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_n}(A)\cdot dx_n$$

sau mai pe scurt

$$du=\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot dx_2+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot dx_n.\qquad(8)$$

Vom arăta că formula (8) este universală şi este valabilă şi în cazul când argumentele ei $x_1,\ldots,x_n$ sunt funcţii de variabile independente noi $s,t,\ldots$. Această proprietate a diferenţialei totale se numeşte *formă invariantă* a scrierii diferenţialei totale.

Fie că argumentele $x_1,\ldots,x_n$ ale funcţiei $u=f(M)=f(x_1,\ldots,x_n)$ sunt funcţii diferenţiabile în raport cu variabilele noi, de exemplu, s şi t în punctul (s_0,t_0) din R^2, iar funcţia $u=f(M)$ este diferenţiabilă în punctul $A(x_1(s_0,t_0),\ldots,x_n(s_0,t_0))$. Conform teoremei 2 avem că funcţia compusă $u=F(s,t)$ este diferenţiabilă în (s_0,t_0) şi derivatele ei parţiale $\frac{\partial u}{\partial s}$ şi $\frac{\partial u}{\partial t}$ se calculează după formulele (6) şi (7), iar diferenţiala ei totală este

$$du=\frac{\partial u}{\partial s}\cdot ds+\frac{\partial u}{\partial t}\cdot dt=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial s}+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial s}\right)ds+$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t}+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t}\right)dt=$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial s}\cdot ds+\frac{\partial x_1}{\partial t}\cdot dt\right)+\frac{\partial u}{\partial x_2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial s}\cdot ds+\frac{\partial x_2}{\partial t}\cdot dt\right)+\cdots+$$

$$+\frac{\partial u}{\partial x_n}\left(\frac{\partial x_n}{\partial s}\cdot ds+\frac{\partial x_n}{\partial t}\cdot dt\right) \qquad (9)$$

Întrucât funcţiile $x_i=\varphi_i(s,t)\,(i=1,\ldots,n)$ sunt diferenţiabile în punctul (s_0,t_0), diferenţialele lor totale au forma

$$dx_i=\frac{\partial x_i}{\partial s}ds+\frac{\partial x_i}{\partial t}dt\;(i=1,\ldots,n). \qquad (10)$$

Înlocuind formulele (10) în (9), obţinem aceeaşi formulă (8).

Forma invariantă a scrierii diferenţialei totale este demonstrată.

Forma invariantă a diferenţialei totale ne permite să stabilim următoarele proprietăţi: fie $u=f(M)=f(x_1,\ldots,x_n)$ şi $v=g(M)=g(x_1,\ldots,x_n)$ două funcţii diferenţiabile într-un punct oarecare M. Atunci

1) $d(u\pm v)=du\pm dv$;

2) $d(uv)=u\cdot dv+v\cdot du$. Caz particular $d(cu)=cdu$ unde $c=const$;

3) $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$, dacă $v(M)\neq 0$.

Demonstraţiile proprietăţilor 1) – 3) ale diferenţialei totale sunt asemănătoare. Demonstrăm, de exemplu, proprietatea a treia.

Fie $w=\frac{u}{v}$ cu condiţia că $v(M)\neq 0$. Observăm că

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{1}{v} \text{ şi } \frac{\partial w}{\partial v}=-\frac{u}{v^2}.$$

Prin urmare,

$$dw=d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{\partial w}{\partial u}\cdot du+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot dv=\frac{1}{v}du-\frac{u}{v^2}dv=\frac{vdu-udu}{v^2},$$

ceea ce trebuia de demonstrat.

În virtutea formei invariante a diferenţialei totale, formulele 1) – 3) rămân în vigoare şi în cazul când variabilele independente u şi v

sunt funcţii diferenţiabile în raport cu alte variabile noi independente: $y_1,y_2,\ldots,y_n$.

5.4.5. Derivarea funcţiilor omogene. Formula Euler.

Fie funcţia $u=f(M)=f(x_1,\ldots,x_n)$, definită pe o mulţime nevidă E din R^n.

Definiţie: Funcţia $u=f(M)=f(x_1,\ldots,x_n)$ se numeşte *omogenă* de gradul (sau ordinul) $k\in R$ pe mulţimea E, dacă pentru orice punct $M\in E$ şi orice număr real t, pentru care punctul $(tx_1,tx_2,\ldots,tx_n)$ aparţine mulţimii E, se satisface identitatea

$$f(tx_1,\ldots,tx_n)=t^k\cdot f(x_1,\ldots,x_n). \qquad (1)$$

Dacă această egalitate are loc numai pentru $t>0$, atunci funcţia u se numeşte *pozitiv-omogenă* de gradul k.

Exemplul 1. Funcţia

$$z=f(x,y)=x\cdot\frac{\sqrt{x^4+y^4}}{x+y}\cdot\ln\frac{x}{y}$$

este omogenă de gradul $k=2$.

Într-adevăr, pentru orice punct (x,y) din domeniul de definiţie D al funcţiei date şi orice $t\in R$ astfel încât punctul $(tx,ty)\in D$, avem:

$$f(tx,ty)=tx\cdot\frac{\sqrt{t^4x^4+t^4y^4}}{tx+ty}\cdot\ln\frac{tx}{ty}=t^2\cdot f(x,y).$$

Exemplul 2. Funcţia

$$z=f(x,y)=x^\pi\cdot\sin\frac{y}{x}+y^\pi\cdot\cos\frac{y}{x}$$

este omogenă de gradul $k=\pi$ în domeniul ei de definiţie D, deoarece

$$f(tx,ty)=(tx)^\pi\cdot\sin\frac{tx}{ty}+(ty)^\pi\cdot\cos\frac{tx}{ty}=t^\pi\cdot f(x,y)$$

pentru orice puncte $(x,y)\in D$ şi $(xt,yt)\in D$.

Teorema 1. Dacă funcţia $u=f(M)=f(x_1,\ldots,x_n)$ este omogenă de gradul k pe mulţimea $E\subseteq R^n$ şi există derivata ei parţială

$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_n)(i=1,\ldots,n)$ pe mulţimea $E_1 \subseteq E$, atunci funcţia $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_n)$ este omogenă de gradul $(k-1)$ pe mulţimea E_1.

Demonstraţie. Derivând ambele părţi ale relaţiei (1) în raport cu variabila x_i obţinem:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1,\ldots,tx_i,\ldots,tx_n)\cdot(tx_i)'_{x_i}=t^k\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_n)$$

sau

$$t\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1,\ldots,tx_n)=t^k\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_n).$$

Prin urmare,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1,\ldots,tx_n)=t^{k-1}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_n),$$

ceea ce înseamnă că funcţia $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_n)$ este omogenă de gradul $(k-1)$ pe mulţimea E_1.

Teorema 2 (*Euler*). Fie E o submulţime nevidă din R^n astfel încât relaţiile $(x_1,\ldots,x_n)\in E$ şi $t\in R$ implică $(tx_1,\ldots,tx_n)\in E$. Funcţia $u=f(M)=f(x_1,\ldots,x_n)$, definită şi continuă împreună cu derivatele ei parţiale pe E este omogenă de gradul $k\in R$ atunci şi numai atunci când are loc relaţia

$$kf(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_n) \tag{2}$$

pentru orice punct $M(x_1,\ldots,x_n)\in E$.

Necesitatea. Fie $u=f(M)$ o funcţie pozitiv-omogenă de gradul k pe E şi fie $A(a_1,\ldots,a_n)$ un punct arbitrar din E, atunci

$$f(ta_1,\ldots,ta_n)=t^k f(a_1,\ldots,a_n). \tag{3}$$

Observăm că funcţia $g(t)=f(ta_1,\ldots,ta_n)$ este definită pe $]0,+\infty[$ şi poate fi considerată ca o funcţie compusă: $u=f(s_1,\ldots,s_n)$ diferenţiabilă în A şi funcţiile $s_i=t\cdot a_i$ $(i=1,\ldots,n)$ derivabile în a_i.

Aplicând formula (1) a teoremei 1 din 5.4.4, avem:

$$g'(t)=(f(ta_1,\ldots,ta_n))'_t=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f}{\partial(ta_i)}(ta_1,\ldots,ta_n)\cdot(ta_i)'_t\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\frac{\partial f}{\partial(ta_i)}(ta_1,\ldots,ta_n). \tag{4}$$

Derivând ambele părţi ale relaţiei (3) şi luând în consideraţie relaţia (4), obţinem:

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\frac{\partial f}{\partial(ta_i)}(ta_1,\ldots,ta_n)=k\cdot t^{k-1}\cdot f(a_1,\ldots,a_n). \tag{5}$$

Deoarece punctul $A(a_1,\ldots,a_n)$ este arbitrar, atunci relaţia (5) cu $t=1$ se transformă în identitatea (2).

Suficienţa. Fie că funcţia $u=f(M)=f(x_1,\ldots,x_n)$ este definită şi continuă, împreună cu derivatele ei parţiale pe E şi satisface relaţia (2) pentru orice punct $(x_1,\ldots,x_n)$ din E.

Dacă $A(a_1,\ldots,a_n)$ este un punct arbitrar din E atunci pentru funcţia compusă $g(t)=f(ta_1,\ldots,ta_n)$, $t\in R$ luând în consideraţie (4), avem:

$$t\cdot g'(t)=t\left[\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\frac{\partial f}{\partial(ta_i)}(ta_1,\ldots,ta_n)\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(ta_i)\cdot\frac{\partial f}{\partial(ta_i)}(ta_1,\ldots,ta_n) \tag{6}$$

Aplicând relaţia (2), obţinem din (6) următoarea relaţie:

$$tg'(t)=k\cdot f(ta_1,\ldots,ta_n)=k\cdot g(t).$$

Prin urmare,

$$t\cdot\frac{dg(t)}{dt}=k\cdot g(t) \text{ sau } \frac{dg(t)}{g(t)}=\frac{k}{t}.$$

Integrând ambele părţi, obţinem:

$$\int\frac{dg(t)}{g(t)}=k\int\frac{dt}{t}.$$

De unde $\ln|g(t)|=k\ln|tc|, t\neq 0, c\neq 0$ sau $g(t)=t^k\cdot c_1$, $c_1=c^k$.

Dacă luăm $t=1$, atunci $g(1)=c_1$ şi $g(t)=t^k\cdot g(1)$.

Întrucât $g(1)=f(a_1,\ldots,a_n)$ şi punctul A este arbitrar, obţinem, că pentru orice $t\in R$ are loc relaţia $f(ta_1,\ldots,ta_n)=t^k\cdot f(a_1,\ldots,a_n)$, ceea ce înseamnă că funcţia $u=f(M)=f(x_1,\ldots,x_n)$ este omogenă de gradul k pe mulţimea E. Teorema este complet demonstrată.

Formula (2) din teorema 2 se numeşte *formula Euler*.

Notă.

1. Fie $u=f(M)=f(x_1,\ldots,x_n)$ este omogenă de gradul k pe mulţimea E. Dacă $t=\frac{1}{x_1}$, atunci identitatea (1) se transformă în relaţia

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x^k\cdot f\left(1,\frac{x_2}{x_1},\ldots,\frac{x_n}{x_1}\right).$$

2. *Dacă funcţia $u=f(M)=f(x_1,\ldots,x_n)$ este omogenă de gradul 0, atunci formulele (1) şi (2) se transformă respectiv în identităţile*

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=f\left(1,\frac{x_2}{x_1},\ldots,\frac{x_n}{x_1}\right) \tag{7}$$

şi

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,x_2,\ldots,x_n)\cdot x_i=0. \tag{8}$$

5.5. Funcţii implicite.

5.5.1. Funcţii implicite şi derivarea lor.

În punctul 2.1.6, capitolul 2 din [20] am introdus noţiunea de funcţie implicită de o singură variabilă şi într-un exemplu concret am rezolvat problema referitoare la derivarea funcţiei implicite de o singură variabilă, dar nu am găsit formula generală de exprimare a derivatei de la funcţia implicită şi nu am stabilit condiţiile de existenţă, de continuitate şi de derivabilitate ale acestei funcţii.

În matematică, fizică etc. foarte des ne întâlnim cu diverse probleme în care o variabilă oarecare u, conform conţinutului problemei, depinde (este funcţie) de alte variabile independente $x_1,x_2,\ldots,x_n$ şi această dependenţă este stabilită prin ecuaţia funcţională

$$F(u,x_1,\ldots,x_n)=0. \tag{1}$$

În acest caz se spune că funcţia $u=f(x_1,\ldots,x_n)$ de argumentele $x_1,\ldots,x_n$ este definită în formă *implicită*, sau simplu: funcţia $u=f(x_1,\ldots,x_n)$ este o *funcţie implicită*, definită de ecuaţia (1). Deci, dacă $u=f(x,\ldots,x_n)$ este o funcţie implicită, atunci ecuaţia (1) se transformă în identitatea

$$F(f(x_1,\ldots,x_n),x_1,\ldots,x_n)\equiv 0.$$

Evident că funcţia implicită de o singură variabilă este caracterizată de ecuaţia funcţională

$$F(x,y)=0, \tag{2}$$

unde y este funcţia , iar x – argumentul ei. Similar, funcţia implicită de două variabile este caracterizată de ecuaţia funcţională

$$F(x,y,z)=0, \tag{3}$$

unde z este funcţie de argumentele x şi y.

Remarcăm, că dacă o funcţie este definită printr-o ecuaţie de forma $y=f(x)$ sau $z=f(x,y)$, spunem că această funcţie este definită în *formă explicită* sau că această funcţie este o *funcţie explicită*. Spre exemplu, ecuaţia $y-f(x)=0$ sau $z-f(x,y)=0$

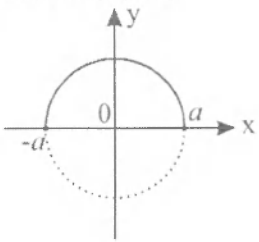
defineşte funcţia $y = f(x)$ sau respectiv funcţia $z = f(x,y)$ sub formă implicită, adică aceste funcţii sunt funcţii implicite.

Exemplul 1. Considerăm ecuaţia $x^2 + y^2 = a^2, a > 0$, adică $F(x,y) = x^2 + y^2 - a^2$.

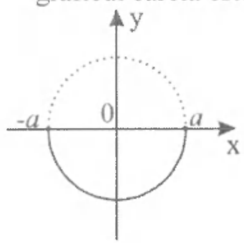
Această ecuaţie caracterizează o infinitate de funcţii implicite, definite pe $[-a,a]$.

Considerăm următoarele funcţii definite pe $[-a,a]$:

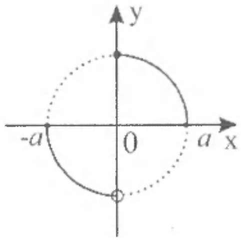
$y_1 = \sqrt{a^2 - x^2}$, graficul căreia este



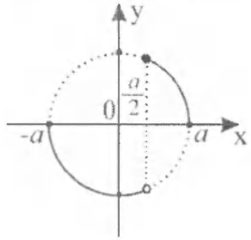
$y_2 = -\sqrt{a^2 - x^2}$, graficul căreia este



$$y_3 = \begin{cases} \sqrt{a^2 - x^2}, \text{ dacă } 0 \le x \le a, \\ -\sqrt{a^2 - x^2}, \text{ dacă } -a \le x < 0 \end{cases}$$, graficul căreia este



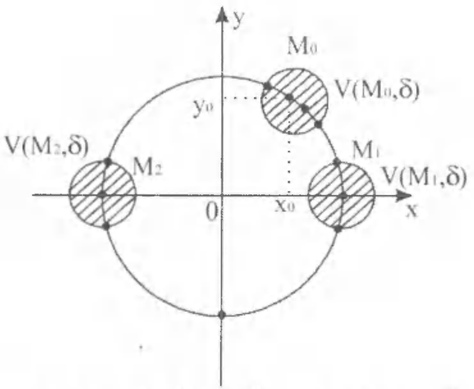
$$y_4 = \begin{cases} \sqrt{a^2 - x^2}, \text{ dacă } \frac{a}{2} \le x \le a, \\ -\sqrt{a^2 - x^2}, \text{ dacă } -a \le x < \frac{a}{2}, \end{cases}$$ graficul căreia este



Funcţiile y_1, y_2, y_3 şi y_4 sunt funcţii implicite caracterizate de ecuaţia dată, deoarece fiind substituite în ecuaţia $x^2 + y^2 = a^2$ o transformă în identitate.

Dacă vom impune anumite condiţii suplimentare asupra funcţiei implicite definită de ecuaţia $x^2 + y^2 = a^2$, atunci această funcţie devine unică. De exemplu, dacă am cere în exemplul dat ca funcţia implicită să fie nenegativă pe $[-a,a]$, atunci există o singură funcţie implicită de acest fel, si anume $y_1 = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Pentru a analiza caracterul condiţiilor impuse asupra funcţiei $F(x,y) = x^2 + y^2 - a^2$ astfel ca ecuaţia respectivă $x^2 + y^2 = a^2$ să definească o singură funcţie implicită, vom trece la interpretarea geometrică. Această ecuaţie în planul euclidian R^2 reprezintă o circumferinţă de raza a şi cu centrul în originea sistemului cartezian rectangular de coordonate $X0Y$:



Considerăm punctul $M_0(x_0, y_0)$, astfel încât $x_0^2 + y_0^2 = a^2$ şi $y_0 \neq 0$. Fie $V(M_0, \delta)$ o vecinătate (circulară) a punctului M_0, astfel încât ea nu intersectează axa $0X$. Observăm că toate punctele ce aparţin circumferinţei date şi vecinătăţii $V(M_0, \delta)$ se proiectează univoc pe axa $0X$. Analitic aceasta înseamnă că, dacă considerăm funcţia $F(x,y) = x^2 + y^2 - a^2$ definită în $V(M_0, \delta)$, atunci ecuaţia $x^2 + y^2 = a^2$ defineşte o singură funcţie implicită, şi anume $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, dacă $y_0 > 0$ şi $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$, dacă $y_0 < 0$.

Dacă, însă, pe circumferinţa dată considerăm punctul $M_1(a,0)$ sau punctul $M_2(-a,0)$, atunci pentru orice vecinătate (circulară) $V(M_1,\delta)$ sau $V(M_2,\delta)$, unde $\delta>0$, toate punctele ce aparţin circumferinţei $x^2 + y^2 = a^2$ şi vecinătăţii respective se proiectează biunivoc pe axa OX, deoarece orice două puncte de pe circumferinţa dată, care sunt simetrice în raport cu axa OX, au aceiaşi proiecţie pe această axă. Prin urmare, în cazul dat ecuaţia $x^2 + y^2 = a^2$ defineşte două funcţii implicite.

Remarcăm că derivata parţială $\frac{\partial F}{\partial y}(M_0) \neq 0$, iar $\frac{\partial F}{\partial y}(M_1) = \frac{\partial F}{\partial y}(M_2) = 0$, unde $F(x,y) = x^2 + y^2 - a^2$.

Menţionăm că nu orice ecuaţie funcţională (1) defineşte o funcţie implicită. De exemplu, ecuaţiile $x^2 + y^2 + 1 = 0$, $\cos(x+y) - 3 = 0$, $e^{xy} = 0$ nu sunt satisfăcute de nici o pereche de numere reale x şi y, adică nu definesc nici un fel de funcţii implicite.

Vom examina următoarele probleme: să se stabilească condiţiile care trebuie să le satisfacă funcţia $F(u, x_1, \ldots, x_n)$ de $(n+1)$ variabile din ecuaţia (1) pentru ca această ecuaţie să definească în mod implicit o singură funcţie $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ şi ca această funcţie să fie continuă şi diferenţiabilă.

Condiţiile suficiente de existenţă, continuitate şi diferenţiabilitate a funcţiei implicite, condiţii comode în aplicaţii, sunt date de următoarea teoremă, pe care o expunem fără demonstraţie (demonstraţia o puteţi găsi în [3], cap. 8, §1.5; [8], v. 2, §41, [10], v. 2, cap. 15, § 2).

Teoremă. Dacă funcţia $F(u, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ împreună cu toate derivatele ei parţiale sunt continue într-o vecinătate oarecare a punctului $A(u_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ din spaţiul euclidian $(n+1)$ dimensional R^{n+1} şi $F(u_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$, $F'_u(u_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq 0$, atunci există vecinătăţile $V((a_1, a_2, \ldots, a_n), \delta_1)$ din R^n şi $V(u_0, \delta_2)$ din R, astfel încât

1) ecuaţia (1) defineşte o singură funcţie implicită $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ în $V((a_1, \ldots, a_n), \delta_1)$ şi pentru orice punct $(x_1, \ldots, x_n) \in V((a_1, \ldots, a_n), \delta_1)$ are loc $f(x_1, \ldots, x_n) \in V(u_0, \delta_2)$ şi $f(a_1, \ldots, a_n) = u_0$;
2) funcţia implicită $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ definită de ecuaţia (1) este continuă împreună cu derivatele sale parţiale în $V((a_1, \ldots, a_n), \delta_1)$.

În încheierea acestui paragraf ne vom ocupa cu stabilirea unei formule pentru a calcula derivatele parţiale ale unei funcţii implicite caracterizată de ecuaţia (1).

Fie funcţia implicită de o singură variabila $y=f(x)$ definită de ecuaţia (2), unde $F(x,y)$ împreună cu derivatele ei parţiale $F'_x(x,y)$ şi $F'_y(x,y)$ sunt funcţii continue într-o vecinătate $V(M_0)$ (circulară sau dreptunghică) a punctului $M_0(x_0,y_0)$ şi $F(x_0,y_0)=0$, $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$. Atunci, conform teoremei de mai sus, există o singură funcţie implicită $y=f(x)$, definită de ecuaţia (2) care este continuă împreună cu derivata sa într-o vecinătate $V(x_0,\delta)$ a punctului x_0 şi $y_0=f(x_0)$. Întrucât în această vecinătate ecuaţia (1) se transformă în identitatea $F(x,f(x))\equiv 0$, avem că derivata totală $\frac{dF}{dx}(x,f(x))=0$ sau ceea ce este acelaşi lucru $\frac{dF}{dx}(x,y)=0$, unde $y=f(x)$.

Conform formulei (5) din 5.4.4, derivata totală a acestei funcţii compuse este egală cu $F'_x(x,y)+F'_y(x,y)\cdot y'=0$.

De unde

$$y'=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \tag{4}$$

pentru orice $x\in V(x_0,\delta)$.

Formula (4) ne permite să aflăm derivata unei funcţii implicite de o singură variabilă definită de ecuaţia (2).

Aşadar, derivata unei funcţii implicite de o singură variabilă se poate afla chiar şi în cazul când aceasta funcţie nu este dată direct în mod explicit.

Exemplul 2. Fie că ecuaţia $2y-x-\sin(x+y)+e^{xy}-1=0$.

Evident că punctul $(0,0)$ satisface ecuaţia dată.

Funcţiile

$$F(x,y)=2y-x-\sin(x+y)+e^{xy}-1,$$
$$F'_x(x,y)=-1-\cos(x+y)+ye^{xy},$$
$$F'_y(x,y)=2-\cos(x+y)+e^{xy}\cdot x$$

sunt continue în orice vecinătate a punctului $M_0(0,0)$ şi $F'_y(0,0)=2-1+0=1\neq 0$.

Conform teoremei, există o singură funcţie univocă $y=f(x)$ definită de această ecuaţie şi $f(0)=0$.

Funcţia implicită $y=f(x)$ este continuă şi derivabilă într-o vecinătate oarecare a punctului $x_0=0$. Prin urmare, după formula (4), obţinem:

$$y'=-\frac{-1-\cos(x+y)+ye^{xy}}{2-\cos(x+y)+xe^{xy}}=\frac{1+\cos(x+y)-ye^{xy}}{2-\cos(x+y)+xe^{xy}}.$$

În particular, în punctul $(0,0)$ avem:

$$y'(0)=\frac{1+1-0}{2-1+0}=2.$$

Fie, acum, ecuaţia (3) defineşte o funcţie implicită $z=f(x,y)$ şi funcţia $F(x,y,z)$ împreună cu derivatele ei parţiale $F'_x(x,y,z)$, $F'_y(x,y,z)$, $F'_z(x,y,z)$ sunt continue într-o vecinătate $V(M_0)$ (sferică sau paralelipipedică) a punctului $M_0(x_0,y_0,z_0)$ în care $F(x_0,y_0,z_0)=0$ şi $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$. Atunci, după teorema de mai sus, există o singură funcţie implicită $z=f(x,y)$ definită de ecuaţia (3) şi această funcţie este continuă împreună cu derivatele ei parţiale $z'_x(x,y)$, $z'_y(x,y)$ într-o vecinătate a punctului (x_0,y_0).

Aflăm derivatele parţiale $z'_x(x,y)$ şi $z'_y(x,y)$. Când determinăm $z'_x(x,y)$, considerăm că variabila y este constantă. De aceea se poate aplica formula (4) dacă drept variabilă independentă se ia x, iar z este funcţie.

Deci

$$z'_x(x,y)=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}. \tag{5}$$

Repetând raţionamentele de mai sus, aflăm:

$$z'_y(x,y) = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}. \tag{6}$$

Formulele (5) şi (6) ne permit să calculăm derivatele parţiale ale unei funcţii implicite de două variabile definită de ecuaţia (3).

Repetând raţionamentele de mai sus pentru ecuaţiile (2) şi (3), obţinem următoarele: dacă funcţia $F(u, x_1, \ldots, x_n)$ din ecuaţia (1) satisface tuturor condiţiilor teoremei de mai sus, atunci ecuaţia (1) defineşte o singură funcţie implicită $u = f(x_1, \ldots, x_n)$, derivatele parţiale ale căreia se calculează după formulele

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = -\frac{F'_{x_i}(u, x_1, \ldots, x_n)}{F'_u(u, x_1, \ldots, x_n)} \tag{7}$$

pentru orice $i = 1, \ldots, n$.

5.5.2. Aplicaţii geometrice.

Fie $F(x,y) = 0$ şi (x_0, y_0) un punct oarecare, astfel încât $F(x_0, y_0)$=0. Dacă funcţia $F(x,y)$ satisface condiţiile din teorema punctului precedent, atunci există o singură funcţie implicită $y = f(x)$ definită de această ecuaţie. Funcţia implicită $y = f(x)$ este continuă şi derivabilă într-o vecinătate oarecare a punctului x_0. Se ştie că ecuaţia $F(x,y) = 0$ în planul euclidian reprezintă o linie plană. De aici rezultă, în particular, că linia plană $F(x,y) = 0$ are în (x_0, y_0) o tangentă neverticală, ecuaţia căreia are forma $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$, iar ecuaţia normalei fiind

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Aplicând formula (4) din punctul precedent, avem:

$$y - y_0 = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}(x - x_0)$$

şi respectiv

$$y - y_0 = \frac{F'_y(x_0, y_0)}{F'_x(x_0, y_0)}(x - x_0)$$

sau, efectuând transformările elementare, obţinem următoarele: ecuaţia tangentei are forma:

$$F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0, \tag{1}$$

iar ecuaţia normalei este

$$F'_y(x_0, y_0)(x - x_0) - F'_x(x_0, y_0)(y - y_0) = 0 \tag{2}$$

sau

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0)}. \tag{3}$$

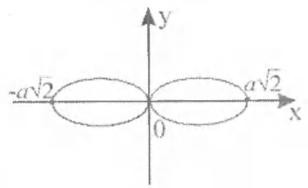
Prin urmare, derivatele parţiale F'_x, F'_y în punctul (x_0, y_0) sunt parametrii directori ai tangentei şi ai normalei în punctul (x_0, y_0) la curba definită de ecuaţia $F(x,y)=0$.

Dacă funcţia $F(x,y)$ satisface în locul condiţiei $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ condiţia $F'_x(x_0, y_0) \neq 0$, atunci într-o vecinătate oarecare a punctului (x_0, y_0) curba $F(x,y)$=0 poate fi caracterizată de funcţia $x = \varphi(y)$. Aceasta înseamnă că curba în (x_0, y_0) are o tangentă neorizontală. Evident că ecuaţia acestei tangente va avea din nou aceeaşi formă (1).

Punctele (x_0, y_0) ale curbei $F(x,y) = 0$ în care $F'_x(x_0, y_0) = F'_y(x_0, y_0) = 0$ se numesc *puncte singulare* ale ei.

Tangenta în punctele singulare ale unei curbe poate să nu existe.

De exemplu, în punctul (0, 0) curba de ecuaţia $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$, care se numeşte *lemniscata lui Bernoulli*, şi graficul căreia are forma



nu are tangentă. Ușor se verifică că derivatele parțiale ale funcției $F(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2)$ în (0,0) sunt egale cu zero.

Exemplul 3. Să se demonstreze că ecuația tangentei la

a) elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ are forma $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$ în orice punct (x_0,y_0) al ei;

b) hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ are forma $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$ în orice punct (x_0,y_0) al ei;

c) parabola $y^2=2px$ are forma $yy_0=p(x+x_0)$ în orice punct (x_0,y_0) al ei.

Rezolvare.

a) Considerăm funcția $F(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$. Avem $F'_x(x,y)=\frac{2x}{a^2}$, $F'_y(x,y)=\frac{2y}{b^2}$. Dacă punctul (x_0,y_0) aparține elipsei date și $y_0\neq 0$, atunci $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$ și conform formulei (1) de mai sus obținem:

$$\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)=0$$

sau

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=0.$$

De unde

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1.$$

Dacă $y_0=0$, atunci $\frac{x_0^2}{a^2}=1$ și $x_0=\pm a$. Observăm că $F'_x(\pm a,0)=\pm\frac{2}{a}\neq 0$. Deci, aplicând aceeași formulă (1) de mai sus, obținem $\left(\pm\frac{2}{a}\right)(x\mp a)+0(y-0)=0$, adică $x=\pm a$. Prin urmare ecuațiile tangentelor duse la elipsa dată prin punctele$(\pm a,0)$ au forma $x=\pm a$. Observăm ca aceste ecuații satisfac de asemenea relația $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$.

b) Considerăm funcția $F(x,y)=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1$ cu $F'_x(x,y)=\frac{2x}{a^2}\neq 0$ și $F'_y(x,y)=-\frac{2y}{b^2}$. Aplicând formula (1), avem că ecuația tangentei în orice punct (x_0,y_0) al hiperbolei are forma $\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)-\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)=0$ sau $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$.

c) Considerăm funcția $F(x,y)=y^2-2px$ cu $F'_x(x,y)=-2p\neq 0$ și $F'_y(x,y)=2y$. Aplicând din nou formula (1) pentru orice punct (x_0,y_0) al parabolei avem: $-2p(x-x_0)+2y_0(y-y_0)=0$ sau $-px+px_0+y_0y-y_0^2=0$. De unde $y_0y=y_0^2-px_0+px$. Întrucât $y_0^2=2px_0$, obținem: $px=p(x+x_0)$.

Propunem cititorului să consulte exemplul 2.24 din [21].

Fie suprafața S definită de ecuația $F(x,y,z)=0$ și $M_0(x_0,y_0,z_0)$ un punct arbitrar al suprafeței S. Dacă funcția

$F(x,y,z)$ satisface condițiile teoremei din punctul precedent, atunci există o singură funcție implicită $z=f(x,y)$ definită de ecuația $F(x,y,z)=0$, care este continuă împreună cu derivatele ei parțiale $z'_x(x,y), z'_y(x,y)$ într-o vecinătate a punctului (x_0,y_0). De aici rezultă că în particular funcția $z=f(x,y)$ este diferențiabilă în punctul (x_0,y_0), adică suprafața $F(x,y,z)=0$ are un plan tangent nevertical.

După cum se știe (vezi 5.4.3), ecuația acestui plan are forma

$$z-z_0=z'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+z'_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Substituind în ea formulele (5) și (6) din punctul precedent, avem:

$$z-z_0=-\frac{F'_x(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}(x-x_0)-\frac{F'_y(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}(y-y_0)$$

sau, efectuând transformările elementare, obținem următoarea ecuație a planului tangent la suprafața $F(x,y,z)=0$ în punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$:

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0. \quad (4)$$

Dreapta ce trece prin punctul M_0 și este perpendiculară planului tangent la suprafața $F(x,y,z)=0$ în punctul M_0 se numește *normală*.

Ecuația normalei are forma:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}. \quad (5)$$

Dacă în locul condiției $F'_z(M_0)\neq 0$ sunt satisfăcute condițiile $F'_x(M_0)\neq 0$ sau $F'_y(M_0)\neq 0$, atunci, făcând raționamente similare, obținem ecuația planului tangent și ecuația normalei la suprafața $F(x,y,z)=0$ sub aceeași formă (4) și (5). Punctele $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ale suprafeței $F(x,y,z)=0$ în care $F'_x(M_0)=F'_y(M_0)=F'_z(M_0)=0$ se numesc puncte *singulare*. În punctele singulare planul tangent la suprafața considerată poate să existe și poate să nu existe.

Exemplul 4. Să se scrie ecuația planului tangent și a normalei la suprafața: $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=0$ în punctul $M_0(0,2,3)$.

Această suprafață reprezintă o suprafață conică cu vârful în punctul $O(0,0,0)$.

Avem: $F(x,y,z)=\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}$. Deci,

$F'_x(x,y,z)=2x$ și $F'_x(M_0)=0$;

$F'_y(x,y,z)=\frac{y}{2}$ și $F'_y(M_0)=1$;

$F'_z(x,y,z)=-\frac{2z}{9}$ și $F'_z(M_0)=-\frac{2}{3}\neq 0$.

Funcțiile F'_x, F'_y, F'_z sunt continue în orice punct al spațiului R^3.

Aplicând formulele (4) și (5), obținem următoarele: ecuația planului tangent la această suprafață prin punctul M_0 are forma

$$0\cdot(x-0)+1\cdot(y-2)-\frac{2}{3}(z-3) \text{ sau } 3y-2z=0,$$

iar ecuația normalei are forma

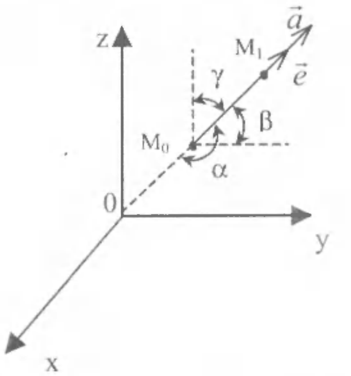
$$\frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{-\frac{2}{3}}.$$

Observăm că punctul $O(0,0,0)$ al acestei suprafețe este un punct singular al ei, deoarece $F'_x(0,0,0)=F'_y(0,0,0)=F'_z(0,0,0)=0$.

În acest punct nu există planul tangent și normala la suprafața dată.

5.6. Derivata în raport cu o direcție. Gradientul funcției.

Fie funcția $u = f(x, y, z)$ definită într-o vecinătate a punctului $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și $\vec{a}$ un vector oarecare.



Notăm unghiurile formate de acest vector cu axele de coordonate prin α, β și γ. Din geometria analitică se știe, că vectorul unitar $\vec{e}$ care are direcția acestui vector are coordonatele $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$. Reamintim că $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ se numesc *cosinusurile directoare* ale vectorului $\vec{a}$. Trecem din punctul M_0 în punctul $M_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ situat pe vectorul $\vec{a}$. Creșterea funcției u va fi $\Delta u = f(M_1) - f(M_0)$.

Observăm că

$$M_1M_0 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \rho,$$

$$\Delta x = \rho\cos\alpha,\ \Delta y = \rho\cos\beta,\ \Delta z = \rho\cos\gamma.$$

Definiția 1. Dacă există limita finită $\lim\limits_{M_1 \to M_0} \dfrac{f(M_1) - f(M_0)}{M_1M_0}$, atunci ea se numește *derivata funcției u în punctul M_0 în raport cu direcția vectorului $\vec{a}$*.

Se notează: $u'_{\vec{a}}(M_0)$ sau $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{a}}(M_0)$.

Evident că $u'_{\vec{a}}(M_0)$ depinde atât de punctul M_0 cât și de unghiurile α, β și γ.

Teorema 1. Dacă funcția $u = f(x, y, z)$ este diferențiabilă în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și $\vec{a}$ un vector oarecare cu cosinusurile lui directoare $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, atunci

$$u'_{\vec{a}}(M_0) = u'_x(M_0)\cos\alpha + u'_y(M_0)\cos\beta + u'_z(M_0)\cos\gamma. \quad (1)$$

Demonstrație. Deoarece funcția $u = f(x, y, z)$ este diferențiabilă în M_0 avem:

$$\Delta u = u'_x(M_0)\Delta x + u'_y(M_0)\Delta y + u'_z(M_0)\Delta z + \varepsilon\rho,$$

unde

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \text{ și } \lim_{\rho \to 0}\varepsilon = 0.$$

Împărțind ambele părți ale acestei relații la $M_1M_0 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \rho$ și luând în considerație că $\Delta x = \rho\cos\alpha$, $\Delta y = \rho\cos\beta$ și $\Delta z = \rho\cos\gamma$, obținem:

$$\frac{\Delta u}{M_0M_1} = u'_x(M_0)\cos\alpha + u'_y(M_0)\cos\beta + u'_z(M_0)\cos\gamma + \varepsilon,$$

unde $\lim\limits_{\rho \to 0}\varepsilon = 0$.

Prin urmare,

$$u'_{\vec{a}}(M_0) = \lim_{M_1 \to M_0}\frac{\Delta u}{M_0M} =$$

$$= u'_x(M_0)\cos\alpha + u'_y(M_0)\cos\beta + u'_z(M_0)\cos\gamma.$$

Teorema este demonstrată.

Consecință. Dacă funcția $u = f(x, y, z)$ este diferențiabilă în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$, atunci $u'_x(M_0) = u'_{\vec{i}}(M_0)$,

$u'_y(M_0)=u'_{\vec{j}}(M_0)$ şi $u'_z(M_0)=u'_{\vec{k}}(M_0)$, unde $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ sunt versorii sistemului cartezian rectangular de coordonate $OXYZ$.

Într-adevăr vectorii unitari ai axelor de coordonate OX, OY, OZ sunt respectivi $\vec{i}(1,0,0)$, $\vec{j}(0,1,0)$, $\vec{k}(0,0,1)$, şi conform teoremei, obţinem:

$$u'_{\vec{i}}(M_0)=u'_x(M_0)\cdot 1+u'_y(M_0)\cdot 0+u'_z(M_0)\cdot 0=u'_x(M_0),$$
$$u'_{\vec{j}}(M_0)=u'_x(M_0)\cdot 0+u'_y(M_0)\cdot 1+u'_z(M_0)\cdot 0=u'_y(M_0),$$
$$u'_{\vec{k}}(M_0)=u'_x(M_0)\cdot 0+u'_y(M_0)\cdot 0+u'_z(M_0)\cdot 1=u'_z(M_0).$$

Definiţia 2. Fie $u=f(x,y,z)$ diferenţiabilă în punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Vectorul, proiecţiile căruia coincid cu derivatele parţiale ale funcţiei date în punctul M_0, se numeşte *gradientul funcţiei*.

Se notează: $\overline{\text{grad}\, u(M_0)}=\{u'_x(M_0), u'_y(M_0), u'_z(M_0)\}$.

Teorema 2. Derivata în raport cu o direcţie este egală cu produsul scalar dintre vectorul unitar al direcţiei şi gradientul funcţiei.

Demonstraţie. Fie $u=f(x,y,z)$ diferenţiabilă în $M_0(x_0,y_0,z_0)$ şi vectorul $\vec{a}$ cu coordonatele m,n şi p. Vectorul unitar $\vec{e}$ care corespunde vectorului $\vec{a}$ are coordonatele $\cos\alpha$, $\cos\beta$ şi $\cos\gamma$. Din algebra vectorială se ştie că

$$\vec{e}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{a}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}=$$
$$=\left\{\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\right\}=$$
$$=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}.$$

Dacă vectorii sunt exprimaţi prin coordonatele lor atunci produsul scalar

$$\vec{e}\cdot\overline{\text{grad}\, u(M_0)}=u'_x(M_0)\cdot\cos\alpha+u'_y(M_0)\cos\beta+$$
$$+u'_z(M_0)\cos\gamma=u'_{\vec{a}}(M_0).$$

Prin urmare, $u'_{\vec{a}}(M_0)=\vec{e}\cdot\overline{\text{grad}\, u(M_0)}$ şi teorema este demonstrată.

Consecinţa 1. Derivata în raport cu o direcţie este egală cu proiecţia vectorului $\overline{\text{grad}\, u(M_0)}$ pe vectorul direcţiei.

Demonstraţie. Din definiţia produsului scalar a doi vectori reiese că produsul scalar este egal cu produsul modulului unui vector la proiecţia celuilalt pe primul vector.

Prin urmare,

$$u'_{\vec{a}}(M_0)=(\overline{\text{grad u}(M_0)}\cdot\vec{e}=\text{Pr}_{\vec{e}}(\overline{\text{grad u}(M_0)})=\text{Pr}_{\vec{a}}(\overline{\text{grad u}(M_0)}),$$

ceea ce trebuia de demonstrat.

Consecinţa 2. $|u'_{\vec{a}}(M_0)|\le|\overline{grad}\, u(M_0)|$.

Într-adevăr, din algebra vectorială ce ştie că $Pr_{\vec{a}}\vec{b}=b\cdot\cos\varphi$, unde φ este unghiul dintre vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$. În virtutea consecinţei de mai sus, obţinem: $u'_{\vec{a}}(M_0)=|\overline{grad\, u(M_0)}|\cdot\cos\varphi$, unde φ este unghiul dintre vectorii $\vec{a}$ şi $\overline{\text{grad}\, u(M_0)}$. Deci,

$$|u'_{\vec{a}}(M_0)|=|\overline{grad\, u(M_0)}|\cdot|\cos\varphi|\le|\overline{grad\, u(M_0)}|.$$

Observăm că dacă $\varphi=0$, adică vectorul $\overline{\text{grad}\, u(M_0)}$ este coliniar cu vectorul $\vec{a}$, atunci $u'_{\vec{a}}(M_0)$ atinge valoarea cea mai mare. Dacă $\varphi=\frac{\pi}{2}$, adică vectorul $\overline{\text{grad}\, u(M_0)}$ este perpendicular pe vectorul $\vec{a}$, atunci $u'_{\vec{a}}(M_0)=0$.

Întrucât $u'_{\vec{a}}(M_0)$ caracterizează viteza variaţiei funcţiei $u=f(x,y,z)$ în direcţia vectorului $\vec{a}$, rezultă că viteza maximală a variaţiei funcţiei $u=f(x,y,z)$ este atinsă atunci când direcţia vectorului dat coincide cu direcţia gradientului. Dacă însă aceşti doi vectori sunt perpendiculari, viteza variaţiei funcţiei este nulă.

Aşadar, gradientul funcţiei diferenţiabile $u = f(x,y,z)$ prezintă în fiecare punct direcţia de maximă variaţie a funcţiei în acest punct şi joacă un rol important în teoria câmpurilor (a se consulta cap. 6, 6.7.2.).

5.7. Derivatele şi diferenţialele de ordin superior.

5.7.1. Derivatele parţiale de ordin superior.

Dacă funcţia $z = f(x,y)$ este definită pe o mulţime D din R^2, atunci derivatele ei parţiale $f'_x(x,y)$ şi $f'_y(x,y)$ vor fi la rândul lor funcţii de două variabile x şi y, definite pe D sau pe o porţiune a acestei mulţimi. Le vom numi *derivate parţiale de ordinul întâi.*

Derivatele parţiale în raport cu x şi y ale funcţiilor $f'_x(x,y)$ şi $f'_y(x,y)$ în punctul (x,y), dacă ele există, se numesc *derivate parţiale de ordinul al doilea* ale funcţiei $z = f(x,y)$ în acest punct.

Derivatele parţiale de ordinul doi se notează astfel:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = z''_{x^2}$$

(aici f se derivează succesiv de două ori în raport cu x);

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = z''_{xy}$$

(aici f se derivează mai întâi în raport cu x, iar apoi în raport cu y);

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = z''_{yx}$$

(aici f se derivează mai întâi în raport cu y şi apoi în raport cu x);

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = z''_{y^2}$$

(aici f se derivează succesiv de două ori în raport cu y).

Menţionăm că simbolurile $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (se citeşte *de* doi *ef* pe *de x* la pătrat), $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ (se citeşte *de* doi *ef* pe *de x* şi *de y*), $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ sunt considerate ca un tot întreg, nu ca câturi.

Derivatele parţiale de ordinul 3, 4 ş.a.m.d prin inducţie de ordinul m şi simbolica corespunzătoare se introduc prin analogie.

E clar că în genere, pentru o funcţie de două variabile, se pot defini $2^1 = 2$ derivate parţiale de ordinul întâi, $2^2 = 4$ derivate parţiale de ordinul 2, $2^3 = 8$ derivate parţiale de ordinul 3 ş.a.m.d. 2^m derivate parţiale de ordinul m.

Derivata parţială de orice ordin, luată în raport cu diferite variabile, cum ar fi de exemplu $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial x}$ ş.a.m.d. se numesc *derivate mixte*.

De exemplu, dacă $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ avem:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{şi}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{6xy^2 - 2x^3}{\left(x^2+y^2\right)^3} \text{ etc.}$$

Observăm că derivatele mixte de ordinul doi sunt egale, adică

$$z''_{xy} = z''_{yx} = \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Trebuie să menționăm de la început, că această egalitate nu este întâmplătoare dar sunt și excepții: considerăm funcția

$$z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}, & dacă\ x^2+y^2>0, \\ 0, & dacă\ x=y=0. \end{cases}$$

Avem: $z'_x(x,y) = y^3 \dfrac{x^2+y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \dfrac{y^3\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, dacă $x^2+y^2>0$.

Dacă îi dăm lui x o valoare particulară egală cu zero, atunci pentru orice y vom avea: $z'_x(0,y) = \dfrac{y^3 \cdot y^2}{y^4} = y$.

Derivând această funcție în raport cu y, obținem $z''_{xy}(0,y)=1$. De aici rezultă, în particular, că în punctul $(0,0)$ vom avea $f''_{xy}(0,0)=1$.

Similar $z'_y(x,y) = x\dfrac{3y^2\left(x^2+y^2\right)-2y^4}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \dfrac{xy^2\left(3x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$,

dacă $x^2+y^2>0$.

Considerând $y=0$, obținem $z'_y(x,0)=0$, pentru orice x. Derivând această funcție în raport cu x, avem $z'_{yx}(x,0)=0$ și deci $z'_{yx}(0,0)=0$. Prin urmare, $z'_{xy}(0,0) \neq z'_{yx}(0,0)$.

Are loc următoarea teoremă.

Teoremă (*Schwarz*). Dacă într-o vecinătate oarecare a punctului (x_0,y_0) există derivatele $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$, $f''_{xy}(x,y)$, $f''_{yx}(x,y)$ ale funcției $z=f(x,y)$ și derivatele mixte $f''_{xy}(x,y)$, $f''_{yx}(x,y)$ sunt continue în (x_0,y_0), atunci ele sunt și egale în acest punct.

Demonstrație. Considerăm expresia

$$A = \left[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0)\right] - \left[f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)\right]$$

si funcția auxiliară $\varphi(x) = f(x, y_0+\Delta y) - f(x,y_0)$. Observăm că $A = \varphi(x_0+\Delta x) - \varphi(x_0)$.

Întrucât funcția $f'_x(x,y)$ există într-o vecinătate a punctului (x_0,y_0), obținem că există $\varphi'(x) = f'_x(x,y_0+\Delta y) - f'_x(x,y_0)$ pentru orice $x \in [x_0, x_0+\Delta x]$. Deci $\varphi(x)$ este continuă și derivabilă pe acest segment. Aplicăm teorema lui Lagrange (2.4.3 din [20]):

$$A = \varphi'(x_0+\theta_1\Delta x)\Delta x =$$
$$= \left[f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y) - f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0)\right]\Delta x,$$

unde $0<\theta_1<1$.

Observăm că funcția $f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y)$ este continuă pe segmentul $[y_0, y_0+\Delta y]$, deoarece există derivata $f''_{xy}(x,y)$ pe acest segment. Aplicând din nou teorema Lagrange, obținem:

$$A = f''_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)\cdot \Delta x \cdot \Delta y \qquad (1)$$

unde $0<\theta_1<1$ și $0<\theta_2<1$.

Permutând termenii din mijlocul expresiei A și introducând funcția auxiliară $\psi(y) = f(x_0+\Delta x, y) - f(x_0,y)$ obținem $A = \psi(y_0+\Delta y) - \psi(y_0)$.

Făcând raționamente similare primei părți, adică aplicând teorema lui Lagrange mai întâi la funcția $\psi(y)$ continuă pe

$[y_0, y_0+\Delta y]$, apoi la funcția $f'_y(x, y_0+\theta_3\Delta y)$ continuă pe $[x_0, x_0+\Delta x]$, obținem:

$$A = f''_{yx}(x_0+\theta_4\Delta x, y_0+\theta_3\Delta y)\cdot\Delta x\cdot\Delta y, \qquad (2)$$

unde $0<\theta_3<1, 0<\theta_4<1$.

Comparând (1) și (2), avem:

$$f''_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0+\theta_2\Delta x)=f''_{yx}(x_0+\theta_4\Delta x,\ y_0+\theta_3\Delta x), \qquad (3)$$

unde $0<\theta_i<1, i=1,2,3,4$.

În virtutea continuității funcțiilor $f''_{xy}(x,y), f''_{yx}(x,y)$ în punctul (x_0, y_0) și trecând la limită în ambele părți ale egalității (3) când $\Delta x\to 0$ și $\Delta y\to 0$, obținem: $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$, ceea ce trebuia de demonstrat.

Din această teoremă obținem următoarele rezultate importante:

1. Dacă derivatele mixte de ordinul 2 ale funcției $z=f(x,y)$ sunt continue pe mulțimea $D\subseteq R^2$, ele coincid în D.

2. Dacă funcția $z=f(x,y)$ admite pe mulțimea $D\subseteq R^2$ toate derivatele parțiale până la ordinul k inclusiv, și aceste derivate sunt continue pe D, atunci derivatele mixte de ordinul $m\le k$, care diferă numai prin ordinea derivărilor efectuate, coincid una cu alta.

Într-adevăr, dacă avem două derivate oarecare mixte de ordinul $m\le k$, care diferă numai prin ordinea derivărilor, putem trece de la una din ele la cealaltă printr-un șir de permutări a două derivări vecine. Conform teoremei, fiecare permutare de felul acesta lasă derivata neschimbată.

Explicăm cele spuse mai sus printr-un exemplu.

Să se arate că $f^{(5)}_{xyxyx}(x,y)=f^{(5)}_{yxxyx}(x,y)$.

Într-adevăr $f'''_{xyx}(x,y)=\left(f''_{xy}\right)'_x(x,y)=\left(f''_{yx}\right)'_x(x,y)=f'''_{yxx}(x,y)$, adică $f'''_{xyx}(x,y)=f'''_{yxx}(x,y)$. Derivând ambele părți ale acestei egalități mai întâi în raport cu y, apoi în raport cu x, obținem: $f^{(5)}_{xyxyx}(x,y)=f^{(5)}_{yxxyx}(x,y)$.

Așadar, în condițiile teoremei lui Schwarz, se micșorează considerabil numărul derivatelor parțiale de ordinul $m\le k$, diferite una de alta. Dacă ordinea derivărilor pentru funcția $f(x,y)$ este arbitrară, atunci se poate obține orice derivată parțială de ordinul m, făcând mai întâi toate derivările necesare în raport cu x, apoi toate derivările cerute în raport cu y, adică orice derivată parțială de ordinul m a funcției $z=f(x,y)$ poate fi scrisă sub forma $\dfrac{\partial^m z}{\partial x^t \partial x^{m-t}}$, unde $t=0,1,2,\dots,m$.

De aici rezultă, că numărul derivatelor parțiale de ordinul m este egal cu $(m+1)$ și nu cu 2^m, ca în cazul general.

Definițiile și notațiile derivatelor parțiale de ordin superior ale funcțiilor de trei și mai multe variabile reale se introduc în mod analog.

Rămâne valabilă și teorema despre independența derivatelor mixte de ordinea derivărilor cu condiția ca aceste derivate să fie continue. În virtutea acestei teoreme, pentru derivatele parțiale de ordin superior este de ajuns să se arate ordinul derivatei, variabilele după care se derivează și numărul derivărilor.

De exemplu, pentru funcția $u=f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ se folosește următoarea notație pentru o derivată parțială de ordinul m:

$$\frac{\partial^m u(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial x_3^{\alpha_3}\partial x_4^{\alpha_4}} \text{ sau } \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial x_3^{\alpha_3}\partial x_4^{\alpha_4}},$$

unde $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=m$,

care arată că am luat derivata de ordinul m, derivând succesiv de α_1 ori în raport cu x_1, de α_2 ori în raport cu x_2, de α_3 ori în raport cu x_3 și de α_4 ori în raport cu x_4.

De problema egalităților derivatelor mixte s-au ocupat încă Euler și Clairaut ((1713-1765) – matematician și astronom francez). Însă o demonstrație riguroasă a acestei afirmații a fost dată pentru prima dată de Schwarz ((1843-1921) – matematician german).

Pe parcurs în raţionamentele de ordin general vom considera numai funcţii pentru care condiţiile teoremei lui Schwarz sunt îndeplinite.

5.7.2. Diferenţialele de ordin superior.

Fie $z = f(x, y)$ o funcţie de două variabile independente x şi y diferenţiabilă pe mulţimea $D \subseteq R^2$. Dând variabilelor x şi y creşterile $\Delta x = dx$ şi $\Delta y = dy$, putem calcula diferenţiala totală în orice punct (x, y) al acestei mulţimi:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy . \qquad (1)$$

Această diferenţială se numeşte *diferenţială de ordinul 1*. Observăm că diferenţiala de ordinul 1 depinde atât de punctul (x, y) cât şi de dx, dy.

Fixând pe dx şi dy, obţinem o funcţie de două variabile x şi y definită pe D. Diferenţiala totală a acestei funcţii în orice punct (x, y) din D, dacă ea există, se numeşte *diferenţială de ordinul 2* a funcţiei $z = f(x, y)$ în punctul (x, y). Se notează astfel: $d^2 z$ sau $d^2 f(x, y)$ (se citeşte de doi z sau de doi *ef*).

Deci $d^2 z = d(dz)$. În mod analog se definesc diferenţialele de ordinul $3, 4, \ldots, n$. Deci, dacă diferenţiala $d^{n-1} z$ de ordinul $(n-1)$ este deja definită, atunci diferenţiala $d^n z$ de ordinul n se defineşte ca diferenţiala (totală) a diferenţialei de ordinul $(n-1)$: $d^n z = d\left(d^{n-1} z\right)$.

Dacă funcţia $z = f(x, y)$ admite pe mulţimea D derivate parţiale continue până la ordinul n inclusiv, atunci toate diferenţialele până la ordinul n inclusiv există în fiecare punct al mulţimii D. Calculându-le conform regulilor cunoscute, obţinem:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy ,$$

$$\begin{aligned} d^2 z &= d(dz) = d\left(z'_x dx + z'_y dy\right) = dx \cdot d\left(z'_x\right) + dy \cdot d\left(z'_y\right) = \\ &= dx \cdot \left(z''_{xx} dx + z''_{xy} dy\right) + dy \cdot \left(z''_{yx} dx + z''_{yy} dy\right) = \\ &= z''_{x^2} (dx)^2 + 2 z''_{xy} \cdot dx \cdot dy + z''_{y^2} \cdot (dy)^2 , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^3 z &= d\left(d^2 z\right) = d\left[z''_{x^2}\left(dx^2\right) + 2 z''_{xy} dx dy + z''_{y^2} (dy)^2\right] = \\ &= (dx)^2 \cdot d\left(z''_{x^2}\right) + 2 dx dy \cdot d\left(z''_{xy}\right) + (dy)^2 \cdot d\left(z''_{y^2}\right) = \\ &= (dx)^2 \left(z'''_{x^3} dx + z'''_{x^2 y} dy\right) + 2 dx dy \left(z'''_{x^2 y} dx + z'''_{xy^2} dy\right) + \\ &+ (dy)^2 \left(z'''_{xy^2} dx + z'''_{y^3} dy\right) = z'''_{x^3} (dx)^3 + 3 z'''_{x^2 y} (dx)^2 dy + \\ &+ 3 z'''_{xy^2} dx (dy)^2 + z'''_{y^3} (dy)^3 \quad etc. \end{aligned}$$

Menţionăm că în deducerea formulelor de mai sus am folosit pe larg teorema despre egalitatea derivatelor mixte şi faptul că dx şi dy sunt constante.

De asemenea observăm că expresiile dezvoltate ale diferenţialelor succesive devin din ce în ce mai complicate. Pentru simplificarea scrierii folosim următorul procedeu.

Înainte de toate în expresia diferenţialei de ordinul 1 scoatem litera z în afara parantezelor în mod convenţional. Atunci ea poate fi scrisă simbolic în felul următor:

$$dz = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot dy\right) \cdot z . \qquad (2)$$

Observăm acum, că dacă în expresia diferenţialei de ordinul 2 „scoatem pe z în afara parantezelor", atunci expresia rămasă în paranteze reprezintă formal dezvoltarea pătratului complet al expresiei din paranteze din relaţia (2), adică

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot dy\right)^2 \cdot z . \qquad (3)$$

În mod analog

$$d^3 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot dy\right)^3 \cdot z \quad \text{etc.} \qquad (4)$$

Această regulă este generală: pentru orice n vom avea egalitatea simbolică

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot dy \right)^n \cdot z, \qquad (5)$$

care trebuie interpretată astfel: suma din paranteze trebuie ridicată la puterea n folosind formula binomului lui Newton (2.6.2 din [20]), după care exponenții lui $\frac{\partial}{\partial x}$ și $\frac{\partial}{\partial y}$ trebuie considerați ca arătând ordinul derivatelor funcției z (sau f) în raport cu x, respectiv în raport cu y.

Demonstrația formulei (5) se poate efectua prin metoda inducției matematice (a se consulta ultimul alineat din 1.1[20]).

După cum știm din 5.4.4, formula (1) este adevărată nu numai în cazul în care variabilele x și y sunt variabile independente (așa numită *formă invariantă a scrierii diferențialei*), ci și în cazul când x și y sunt funcții de o altă variabilă independentă.

Însă când am dedus expresia lui $d^2 z$ era esențial faptul că am considerat pe dx și dy drept mărimi constante. Deci, formula (5) este valabilă numai în cazurile în care dx și dy pot fi socotite drept constante. Să examinăm un exemplu de acest fel: presupunem ca x și y sunt funcții liniare de variabilele independente s și t:

$$x = a_1 s + b_1 t + c_1 \text{ și } y = a_2 s + b_2 t + c_2$$

unde $a_i \in R$, $b_i \in R$, $c_i \in R$, $i = 1, 2$.

Atunci obținem

$$dx = a_1 ds + b_1 dt,\ dy = a_2 ds + b_2 dt.$$

Dar ds și dt, fiind diferențialele variabilelor independente s și t, trebuie socotite constante. Prin urmare, același lucru îl putem spune despre dx și dy. În definitiv, putem afirma că formula simbolică (5) este valabilă când x și y sunt variabile independente sau funcții liniare (polinoame întregi de gradul întâi) de variabile independente. Această observație simplă și importantă îi aparține lui Cauchy.

Dacă dx și dy nu pot fi considerate constante, formula (5) nu va mai fi adevărată. Să examinăm expresia lui d^2z în acest caz general. Când calculăm $d(z'_x \cdot dx)$ și $d(z'_y \cdot dy)$ nu mai avem dreptul de a scoate pe dx și dy în afara semnului diferențialei, ci trebuie să folosim formula pentru diferențiala unui produs (5.4.4.). Obținem astfel:

$$\begin{aligned} d^2 z &= d(z'_x)\cdot dx + z'_x d(dx) + d(z'_y)\cdot dy + z'_y d(dy) = \\ &= (z''_{x^2} dx + z''_{xy} dy)dx + z'_x d^2 x + (z''_{xy} dx + z''_{y^2} dy)dy + z'_y d^2 y = \\ &= \left[z''_{x^2}(dx)^2 + 2z''_{xy} dx dy + z''_{y^2}(dy)^2\right] + z'_x d^2 x + z'_y d^2 y = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 \cdot z + z'_x \cdot d^2 x + z'_y \cdot d^2 y, \end{aligned}$$

adică, în acest caz, expresia lui $d^2 z$ va conține termeni noi, depinzând de $d^2 x$ și $d^2 y$. Așadar, forma diferențialelor de ordinul al doilea, al treilea etc., indicată mai sus, nu este invariantă.

Definițiile și notațiile (3), (4) și (5) ale diferențialelor de ordin superior rămân valabile pentru funcțiile de orice număr de variabile. Remarcăm că diferențiala de ordinul m de la funcția $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ are forma

$$d^m u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^m \cdot u,$$

unde polinomul din paranteze se ridică la putere după regulile cunoscute din algebră.

În încheierea acestui paragraf demonstrăm următoarea teoremă.

Teorema 1. Fie că funcțiile $P(x, y)$ și $Q(x, y)$ sunt continue împreună cu derivatele lor parțiale până la ordinul 2 pe mulțimea $D \subseteq R^2$. Pentru ca expresia $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ să exprime diferențiala totală a unei funcții $z = f(x, y)$ diferențiabile pe D, adică

$$dz = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \tag{6}$$

este necesar şi suficient ca

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \tag{7}$$

pentru orice punct $(x,y) \in D$.

Demonstraţie. Fie (6). Comparând cu formula (1), avem:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = P(x,y) \text{ şi } \frac{\partial z}{\partial y} = Q(x,y). \tag{8}$$

Derivând prima relaţie în raport cu y, iar a doua în raport cu x obţinem:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} \text{ şi } \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

În virtutea egalităţii derivatelor mixte ale funcţiei $z = f(x,y)$ obţinem identitatea (7).

Condiţia este suficientă. Fie (7). Funcţia $z = f(x,y)$ trebuie să satisfacă relaţiile (8). Există o infinitate de funcţii care satisfac relaţiei $\frac{\partial z}{\partial x} = P(x,y)$:

$$z(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y), \tag{9}$$

unde integrala se calculează, presupunând că variabila y este socotită drept o constantă, iar $\varphi(y)$ este o funcţie oarecare care depinde de variabila y.

Într-adevăr, dacă derivăm această relaţie în raport cu x, obţinem $z'_x(x,y) = P(x,y)$ ([20], 4.1.1.).

Calculăm funcţia $\varphi(y)$, astfel încât $z'_y(x,y) = Q(x,y)$. Derivăm relaţia (9) în raport cu y şi o egalăm cu funcţia $Q(x,y)$:

$$z'_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right) + \varphi'(y) = Q(x,y).$$

De unde

$$\varphi'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right). \tag{10}$$

Observăm că funcţia $Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right)$ depinde numai de variabila y. Într-adevăr, derivând-o în raport cu x, avem:

$$Q'_x(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right)\right] =$$

$$= Q'_x(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\int P(x,y)dx\right)\right] =$$

$$= Q'_x(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}P(x,y) = Q'_x(x,y) - P'_y(x,y) = 0$$

pentru orice $(x,y) \in D$ (aici am folosit că derivatele mixte sunt egale şi relaţia (7)).

Prin urmare, expresia din partea dreaptă a egalităţii (10) este o funcţie care depinde numai de y. Deci,

$$\varphi'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right) = F(y).$$

De unde

$$\varphi(y) = \int F(y)dy + C$$

şi

$$z(x,y) = \int P(x,y)dx + \int F(y)dy + C.$$

Teorema este demonstrată.

Teorema 2. Fie $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ diferenţiabile pe o mulţime $D \subseteq R^3$. Pentru ca expresia

$$P(x,y,z)dx + +Q(x,y,z)dy + R(x,y,x)dz$$

să exprime diferențiala totală a unei funcții $u = f(x,y,z)$ diferențiabile pe D, este necesară și suficientă satisfacerea relațiilor $P'_y = Q'_x, Q'_z = R'_y$ și $R'_x = P'_z$ pentru orice punct (x,y,z) din D.

Demonstrația acestei teoreme este similară celeia din teorema 1.

5.7.3. Formula Taylor pentru funcții de mai multe variabile.

Știm deja (2.6.3 din [20]), că funcția $F(t)$ de o singură variabilă reală, cu condiția existenței primelor $(m+1)$ derivate ale ei, poate fi dezvoltată în felul următor după formula Taylor cu restul R_m în forma Lagrange:

$$\Delta F(t_0) = dF(t_0) + \frac{1}{2!}d^2F(t_0) + \cdots + \frac{1}{m!}d^mF(t_0) + R_m, \qquad (1)$$

$$\text{unde } R_m = \frac{1}{(m+1)!}d^{m+1}F(t_0 + \theta\cdot\Delta t),\ \ 0<\theta<1,$$

și R_m este un infinit mic de ordinul m în raport cu Δt, când $\Delta t \to 0$.

Este important să subliniem aici, că mărimea dt, care figurează la diferite puteri în expresiile diferențialelor din partea dreaptă a relației (1) este egală exact cu creșterea Δt, care figurează în creșterea funcției din partea stângă: $\Delta F(t_0) = F(t_0 + \Delta t) - F(t_0)$.

Vom arăta că formula lui Taylor se extinde și asupra cazului funcțiilor de mai multe variabile.

Pentru simplificarea scrierii ne vom limita la funcția $z = f(x,y)$ de două variabile x și y.

Teorema 1. (*Taylor*). Fie că funcția $z = f(x,y)$ împreună cu derivatele ei parțiale până la ordinul $(m+1)$ inclusiv sunt funcții continue într-o vecinătate oarecare $V(M_0)$ a punctului $M_0(x_0,y_0)$.

Atunci

$$\Delta f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) =$$
$$= df(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0) + \cdots + \frac{1}{m!}d^mf(x_0,y_0) + R_m, \qquad (2)$$

unde

$$R_m = \frac{1}{(m+1)!}d^{m+1}f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)$$

este o funcție infinit mică de ordin superior în raport cu ρ^m, când

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0 \text{ și } 0<\theta<1, dx = \Delta x, dy = \Delta y.$$

Demonstrație. Să dăm lui x_0 și y_0 creșterile Δx și Δy astfel, încât segmentul de dreaptă ce unește punctele (x_0,y_0) și $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ să aparțină vecinătății $V(M_0)$ a punctului $M_0(x_0,y_0)$.

Introducem variabila independentă t considerând

$$x = x_0 + t\Delta x, y = y_0 + t\Delta y, t\in[0,1]. \qquad (3)$$

Astfel obținem funcția compusă

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y).$$

Menționăm că formulele (3) reprezintă ecuația parametrică a segmentului de dreapta ce unește punctele (x_0,y_0) și $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$.

Evident ca

$$\Delta f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) =$$
$$= \Delta F(0) = F(1) - F(0) \qquad (4)$$

Dar $F(t)$ este o funcție de o singură variabilă și admite derivate până la ordinul $(m+1)$ inclusiv. Prin urmare, formula (1) se transformă în formula

$$\Delta F(0) = F(1) - F(0) = dF(0) + \frac{1}{2!}d^2F(0) + \cdots +$$
$$+ \frac{1}{m!}d^mF(0) + \frac{1}{(m+1)!}d^{m+1}F(\theta), \qquad (5)$$

unde $0<\theta<1$ şi diferenţiala dt care figurează la diferite puteri în partea dreaptă a egalităţii este egală cu $\Delta t=1-0=1$.

Acum, folosindu-ne de rezultatul din punctul precedent: de la o transformare liniară a variabilelor independente forma diferenţialelor de ordin superior se păstrează, obţinem:

$$dF(0)=f'_x(x_0,y_0)dx+f'_y(x_0,y_0)dy=df(x_0,y_0),$$

$$d^2F(0)=f''_{x^2}(x_0,y_0)dx^2+2f''_{xy}(x_0,y_0)dxdy+$$
$$=f''_{y^2}(x_0,y_0)dy^2=d^2f(x_0,y_0),$$

$$d^3F(0)=d^3f(x_0,y_0),\dots,\ d^mF(0)=d^mf(x_0,y_0), \qquad (6)$$
$$d^{m+1}F(\theta)=d^{m+1}f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y),\ 0<\theta<1.$$

Este important să subliniem, că aici diferenţialele dx şi dy nu se deosebesc cu nimic de creşterile luate mai înainte dx şi dy deoarece: $dt=\Delta t=1-0=1$, şi în virtutea relaţiei (3) avem: $dx=\Delta x\cdot dt=\Delta x, dy=\Delta y\cdot dt=\Delta y$.

Înlocuind expresiile (6) şi (4) în formula (5), obţinem formula (2).

Arătăm în sfârşit că $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{|R_m|}{\rho^m}=0$. Într-adevăr, deoarece funcţia f are derivate continue până la ordinul $(m+1)$, rezultă că într-o vecinătate $V(M_0)$ a punctului $M_0(x_0,y_0)$ toate derivatele parţiale ale funcţiei f până la ordinul $(m+1)$ sunt mărginite ([20], 1.5.3., teorema 1). Deci există un număr $M>0$ astfel încât $|R_m|<\rho^{m+1}\cdot M$ pentru orice $(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)\in V(M_0)$, deoarece $\dfrac{|\Delta x|}{\rho}\le 1$, $\dfrac{|\Delta y|}{\rho}\le 1$.

De unde rezultă că $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{|R_m|}{\rho^m}=0$.

Teorema este demonstrată.

Formula (2) se numeşte **formula Taylor** pentru funcţia de două variabile $z=f(x,y)$ cu restul R_m în forma Lagrange.

Vom arăta că în condiţiile teoremei 1 restul R_m are forma

$$R_m=\frac{1}{(m+1)!}d^{m+1}(x_0,y_0)+\varepsilon(\Delta x,\Delta y)\cdot\rho^{m+1}, \qquad (7)$$

unde $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\varepsilon(\Delta x,\Delta y)=0$.

Într-adevăr, notăm

$$\alpha_k(\Delta x,\Delta y)=\frac{\partial^{m+1}f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)}{\partial y^k\partial x^{m-k+1}}-\frac{\partial^{m+1}f(x_0,y_0)}{\partial y^k\cdot\partial x^{m-k+1}},$$
$$(k=0,1,\dots,m+1)$$

În virtutea continuităţii derivatelor parţiale de ordinul $(m+1)$ ale funcţiei $z=f(x,y)$, avem că

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha_k(\Delta x,\Delta y)=\lim_{\rho\to 0}\alpha_k(\Delta x,\Delta y)=0.$$

Deci,

$$R_m=\frac{1}{(m+1)!}\sum_{k=0}^{m+1}C_{m+1}^k\frac{\partial^{m+1}f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)}{\partial y^k\cdot\partial x^{m-k+1}}\Delta x^{m-k+1}\cdot\Delta y^k=$$
$$=\frac{1}{(m+1)!}\sum_{k=0}^{m+1}C_{m+1}^k\frac{\partial^{m+1}f(x_0,y_0)}{\partial y^k\cdot\partial x^{m-k+1}}\Delta x^{m-k+1}\cdot\Delta y^k+$$
$$+\frac{1}{(m+1)!}\cdot\sum_{k=0}^{m+1}C_{m+1}^k\alpha_k(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x^{m-k+1}\cdot\Delta y^k=$$
$$=\frac{1}{(m+1)!}\cdot d^{m+1}f(x_0,y_0)+$$
$$+\sum_{k=0}^{m+1}\frac{C_{m+1}^k}{(m+1)!}\cdot\alpha_k(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x^{m-k+1}\cdot\Delta y^k=$$
$$=\frac{1}{(m+1)!}\cdot d^{m+1}f(x_0,y_0)+$$
$$+\sum_{k=0}^{m+1}\frac{C_{m+1}^k}{(m+1)!}\cdot\alpha_k(\Delta x,\Delta y)\cdot\rho^{m+1}\cdot\left(\frac{\Delta x}{\rho}\right)^{m-k+1}\cdot\left(\frac{\Delta y}{\rho}\right)^k=$$

$$= \frac{1}{(m+1)!} \cdot d^{m+1} f(x_0, y_0) +$$

$$+ \rho^{m+1} \frac{1}{(m+1)!} \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^{k} \cdot \alpha_k(\Delta x, \Delta y) \cdot \left(\frac{\Delta x}{\rho}\right)^{m-k+1} \cdot \left(\frac{\Delta y}{\rho}\right)^{k}.$$

Dacă notăm $r_{m+1} = \rho^{m+1} \cdot \varepsilon(\Delta x, \Delta y)$, unde

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) =$$

$$= \frac{1}{(m+1)!} \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^{k} \cdot \alpha_k(\Delta x, \Delta y) \times \left(\frac{\Delta x}{\rho}\right)^{m-k+1} \cdot \left(\frac{\Delta y}{\rho}\right)^{k} = 0$$

(ca produsul unui număr finit de funcții infinit mici $(\alpha_k(\Delta x, \Delta y))$ cu o funcție mărginită, deoarece $\left|\frac{\Delta x}{\rho}\right| \le 1$, $\left|\frac{\Delta x}{\rho}\right| \le 1$ și $C_{m+1}^{k} (k = 0, \ldots, m+1)$ sunt coeficienții binomiali ai binomului Newton $(a+b)^{m+1}$). Prin urmare,

$$R_m = \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1}(x_0, y_0) + \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \cdot \rho^{m+1},$$

adică am obținut formula (7).

Înlocuind relația (7) în formula (2) obținem formula lui Taylor într-o formă mai simplă:

$$\Delta f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0) + \frac{1}{3!} d^3 f(x_0, y_0) +$$

$$+ \cdots + \frac{1}{m!} d^m f(x_0, y_0) + \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1} f(x_0, y_0) + \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \rho^{m+1}$$

unde $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ este o funcție infinit mică, când $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ și $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Formula lui Taylor are aceeași formă și pentru funcțiile de 3, 4 și mai multe variabile.

Teorema 2: Dacă funcția $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ împreună cu toate derivatele ei parțiale până la ordinul m inclusiv sunt funcții continue într-o vecinătate oarecare $V(A)$ a punctului $A(a_1, \ldots, a_n)$, atunci

$$\Delta u(A) = du(A) + \frac{1}{2!} d^2 u(A) + \frac{1}{3!} d^3 u(A) + \cdots + \\ + \frac{1}{m!} d^m u(A) + \varepsilon(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \cdot \rho^m, \tag{9}$$

unde $\varepsilon(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \to 0$ când $\Delta x_1 \to 0, \Delta x_2 \to 0, \ldots, \Delta x_n \to 0$ și $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \cdots + \Delta x_n^2}$.

Cititorul trebuie să-și dea seama, că deși în formă diferențială formula Taylor pentru cazul unei funcții de mai multe variabile are aceeași formă simplă ca și în cazul funcției de o singură variabilă, în formă dezvoltată ea este cu mult mai complicată.

5.8. Extremele funcției de mai multe variabile.

5.8.1. Maximele și minimele funcțiilor de mai multe variabile.

Fie funcția $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ definită pe domeniul $D \subseteq R^n$. Punctul $A(a_1, \ldots, a_n)$ din D se numește *punct de maxim (minim)* al funcției $u = f(x_1, \ldots, x_n)$, dacă $f(x_1, \ldots, x_n) \le f(a_1, \ldots, a_n)$ (respectiv $f(x_1, \ldots, x_n) \ge f(a_1, \ldots, a_n)$) pentru orice punct $(x_1, \ldots, x_n)$ dintr-o vecinătate oarecare a lui A și $(x_1, \ldots, x_n) \in D$.

Punctele de maxim și de minim, astfel definite, se numesc *puncte de maxim local (sau respectiv de minim local)*, deoarece valoarea funcției în punctele astea se compară cu valorile funcției în puncte suficient de aproape de ele.

Valorile funcției în punctele de maxim și de minim se mai numesc *maximele* și *minimele* funcției date sau mai pe scurt *extremele* funcției.

Întrucât creşterea totală a funcţiei u în A este egală cu

$$\Delta u = f(x_1,\ldots,x_n) - f(a_1,\ldots,a_n) =$$
$$= f(a_1 + \Delta x_1,\ldots,a_n + \Delta x_n) - f(a_1,\ldots,a_n),$$

avem că punctul A se numeşte *punct de maxim* (*minim*) dacă

$$\Delta u \le 0 \text{ (respectiv } \Delta u \ge 0\text{)} \tag{1}$$

pentru orice $\Delta x_i \to 0 \quad (i = 1,\ldots,n)$.

Teorema 1 (*condiţia necesară de existenţă a extremelor funcţiei*).

Dacă funcţia $u = f(x_1,\ldots,x_n)$ este definită într-o vecinătate $V(A)$ a punctului de extrem $A(a_1,\ldots,a_n)$ şi există $\frac{\partial f(A)}{\partial x_i}$ $(i = 1,\ldots,n)$, atunci $\frac{\partial f(A)}{\partial x_i} = 0$.

Demonstraţie. Presupunem că $i = 1$.

Dacă $A(a_1,\ldots,a_n)$ este un punct de extrem al funcţiei $u = f(x_1,\ldots,x_n)$, atunci punctul a_1 este un punct de extrem pentru funcţia $f(x_1,a_2,\ldots,a_n)$ de o singură variabilă x_1. Aceasta înseamnă că derivata ei în punctul a_1 este egală cu zero (a se consulta teorema 1 din 2.7 [20]), adică $\frac{\partial f(A)}{\partial x_1} = 0$.

Teorema este demonstrată.

Consecinţă. Dacă funcţia $u = f(x_1,\ldots,x_n)$ este diferenţiabilă în punctul de extrem al ei $A(a_1,\ldots,a_n)$, atunci diferenţiala totală $du(A) = 0$.

Deoarece funcţia u este diferenţiabilă, există toate derivatele ei parţiale în A.

Deci, $\frac{\partial f(A)}{\partial x_i} = 0$ pentru orice $i = 1,\ldots,n$.

Prin urmare, $du(A) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(A)}{\partial x_i} dx_i = 0$.

Definiţia 2. Fie $u = f(x_1,\ldots,x_n)$ diferenţiabilă în $A(a_1,\ldots,a_n)$. Dacă $du(A) = 0$, atunci acest punct se numeşte *punct staţionar* al funcţiei date.

Ca şi în cazul funcţiilor de o singură variabilă, în punctele staţionare nu este asigurată existenţa extremului funcţiei date. Dacă, de exemplu, considerăm funcţia $z = xy$, avem că $z'_x = y$ şi $z'_y = x$ şi derivatele ei parţiale se anulează concomitent numai în punctul $(0,0)$, în care $z(0,0)=0$.

Tot odată se observă direct, că în orice vecinătate a acestui punct creşterea funcţiei

$$\Delta z(0,0) = f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0,0) = \Delta x \cdot \Delta y$$

ia valori atât pozitive ($\Delta x, \Delta y$ au aceleaşi semne), cât şi negative ($\Delta x, \Delta y$ sunt de semne opuse). Conform relaţiei (1) punctul $(0,0)$ nu este punct de extrem al funcţiei $z = xy$.

Prin urmare, teorema inversă teoremei 1 nu este valabilă.

Definiţia 3. Punctul $A(a_1,\ldots,a_n)$ se numeşte *punct critic* al funcţiei $u = f(x_1,\ldots,x_n)$, dacă în acest punct toate derivatele ei parţiale de ordinul întâi se anulează simultan sau cel puţin una din ele nu există (este infinită sau nu are sens).

Evident că orice punct staţionar este şi punct critic. Dacă însă funcţia este diferenţiabilă într-un punct critic, atunci acest punct critic este şi staţionar.

De exemplu, funcţia $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, definită în orice punct al planului euclidian R^2, admite un maxim în punctul $(0,0)$, deoarece $z(0,0)=1$ şi $\Delta z(0,0) = z(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - z(0,0) = 1 - \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} - 1 = -\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \le 0$ pentru orice $\Delta x \to 0$ şi orice $\Delta y \to 0$.

Derivatele parţiale ale funcţiei date sunt: $z'_x(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ şi $z'_y(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ nu există în punctul $(0,0)$. Într-adevăr,

$$z'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-1}{\Delta x}=$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}-1, \text{dacă } \Delta x>0,\\ 1, \text{dacă } \Delta x<0.\end{cases}$$

Similar $z'_y(0,0)=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta y|}{\Delta y}=\begin{cases}-1, \text{dacă } \Delta y>0,\\ 1, \text{dacă } \Delta y<0.\end{cases}$

Graficul acestei funcții reprezintă o suprafață conică cu vârful în punctul $(0,0,1)$. Am arătat mai înainte că planul tangent în vârful conului nu există (a se consulta ex. 2 din 5.5.2.).

Așadar, pentru a determina extremele funcției într-un domeniu dat trebuie să supunem unui studiu suplimentar fiecare punct critic al funcției în domeniul dat.

Pentru funcții diferențiabile într-un punct critic are loc următoarea teoremă, care reprezintă condiții suficiente de existență extremului funcției.

Teorema 2. Fie funcția $u=f(x_1,\dots,x_n)$ definită și continuă împreună cu toate derivatele ei parțiale până la ordinul 2, inclusiv într-o vecinătate a unui punct critic $A(a_1,\dots,a_n)$. Atunci

a) Punctul A este un punct de minim pentru u, dacă $d^2u(A)$ este pozitiv definită ca formă pătratică în raport cu creșterile argumentelor $dx_1,\dots,dx_n$;

b) Punctul A este un punct de maxim pentru u, dacă $d^2u(A)$ este negativ definită ca formă pătratică în raport cu creșterile argumentelor $dx_1,\dots,dx_n$;

c) Punctul A nu este punct de extrem pentru u, dacă $d^2u(A)$ ca formă pătratică în raport cu creșterile argumentelor $dx_1,\dots,dx_n$ își schimbă semnul.

Demonstrație. Observăm că funcția $u=f(x_1,\dots,x_n)$ satisface toate condițiile teoremei 2 din 5.7.3 într-o vecinătate V(A) a punctului critic A (deci staționar, deoarece funcția u este diferențiabilă în A).

Pentru $m=2$, formula Taylor are forma (a se consulta formula (9) din 5.7.3):

$$\Delta u(A)=f(M)-f(A)=du(A)+\frac{1}{2!}d^2u(A)+\varepsilon\cdot\rho^2=$$

$$=\frac{1}{2!}d^2u(A)+\varepsilon\cdot\rho^2=\frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2u(A)}{\partial x_i\cdot\partial x_j}\cdot dx_i dx_j+\varepsilon\cdot\rho^2=$$

$$=\frac{1}{2}\rho^2\left[\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2u(A)}{\partial x_i\cdot\partial x_j}\cdot\frac{dx_i}{\rho}\cdot\frac{dx_j}{\rho}+2\varepsilon\right], \tag{2}$$

unde $\lim\limits_{\substack{dx_1\to 0\\ \dots\\ dx_n\to 0}}\varepsilon=0$, $\rho=\sqrt{dx_1^2+\dots+dx_n^2}$ și $\left|\frac{dx_i}{\rho}\right|\le 1$ pentru $i=1,\dots,n$.

Întrucât ε este o funcție infinit mică când $dx_1\to 0,\dots,dx_n\to 0$, semnul lui $\Delta u(A)$ din relația (2) depinde numai de semnul formei pătratice a diferențialei a doua $d^2u(A)$ într-o vecinătate V(A) a punctului A. Deci, dacă $d^2u(A)$ ca formă pătratică este pozitiv definită în V(A), atunci $\Delta u(A)\ge 0$ și, prin urmare, punctul A este un punct de minim pentru funcția u. Dacă $d^2u(A)$ ca formă pătratică este negativ definită în V(A), atunci $\Delta u(A)\le 0$ și punctul A este un punct de maxim pentru funcția u. Dacă $d^2u(A)$ ca formă pătratică își schimbă semnul, atunci $\Delta u(A)$ își schimbă semnul în V(A) și, conform relației (1), punctul A nu este punct de extrem pentru funcția u. Teorema este demonstrată.[*)]

Deoarece pentru formele pătratice se cunosc condiții necesare si suficiente pentru ca acestea să fie pozitiv (negativ) definite (studiul formelor pătratice este un compartiment al algebrei superioare), aceste condiții necesare și suficiente, conform teoremei precedente, vor deveni condiții necesare și suficiente pentru existența extremelor funcției de mai multe variabile.

*) O demonstrație mai detaliată a teoremei date o găsiți în [8], v.2, 40.2; [10], v.1, cap.14, §6.

Reamintim aici un criteriu de acest fel, bine cunoscut în algebra liniară, anume criteriul lui Sylvester ((1814-1897) – matematician englez): forma pătratică $d^2u(A)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\cdot\partial x_j}dx_i\cdot dx_j$ caracterizată de matricea simetrică

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(A) & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}(A) & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_n}(A)\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}(A) & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(A) & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2\partial x_n}(A)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_n}(A) & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n\partial x_2}(A) & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(A) \end{pmatrix}$$

este pozitiv definită, dacă și numai dacă minorii principali ai acestei matrice sunt pozitivi:

$$\Delta_1=u''_{x_1^2}(A)>0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} u''_{x_1^2}(A) & u''_{x_1x_2}(A)\\ u''_{x_1x_2}(A) & u''_{x_2^2}(A)\end{vmatrix}>0,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} u''_{x_1^2}(A) & u''_{x_1x_2}(A) & u''_{x_1x_3}(A)\\ u''_{x_1x_2}(A) & u''_{x_2^2}(A) & u''_{x_2x_3}(A)\\ u''_{x_1x_3}(A) & u''_{x_2x_3}(A) & u''_{x_3^2}(A)\end{vmatrix}>0,\ldots, \tag{3}$$

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} u''_{x_1^2}(A) & \cdots & u''_{x_1x_n}(A)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ u''_{x_1x_n}(A) & \cdots & u''_{x_n^2}(A)\end{vmatrix}>0.$$

Forma pătratică $d^2u(A)$ este negativ definită atunci și numai atunci când

$$\Delta_1<0,\ \Delta_2>0,\ \Delta_3<0,\ldots,(-1)^n\Delta_n>0\,, \tag{4}$$

Dacă însă determinanții $\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_n$ sunt nenuli, dar semnele lor variază după o altă regulă, atunci forma pătratică $d^2u(A)$ își schimbă semnul.

Reieșind din criteriul lui Sylvester, dăm următorul algoritm pentru studierea funcției $u=f(x_1,\ldots,x_n)$ la extrem:

1. Aflăm punctele staționare, adică rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} u'_{x_1}(x_1,\ldots,x_n)=0,\\ u'_{x_2}(x_1,\ldots,x_n)=0,\\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\\ u'_{x_n}(x_1,\ldots,x_n)=0,\end{cases}$$

și obținem punctele $A(a_1,\ldots,a_n)$, $B(b_1,\ldots,b_n)$ etc.

2. Aplicăm criteriul lui Sylvester:
   a) Dacă în punctul A determinanții $\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_n$ satisfac relația (3) (respectiv (4)), atunci punctul A este un punct de minim (respectiv un punct de maxim) al funcției date;
   b) Dacă determinanții $\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_n$ sunt nenuli, dar semnele lor nu variază conform relațiilor (3) și (4), atunci punctul A nu este un punct de extrem al funcției date;
   c) Dacă cel puțin unul din determinanții $\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_n$ se anulează, se apelează la d^3u etc.

Pe baza teoremei 2 enunțăm următoarea teoremă pentru cazul funcției de două variabile.

Teorema 3. Fie funcția $z=f(x,y)$ definită și continuă împreună cu derivatele ei parțiale până la ordinul 2 inclusiv într-o vecinătate oarecare a punctului staționar $A(x_0,y_0)$, adică $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$.

Considerăm expresia

$$D(x_0,y_0)=f''_{x^2}(x_0,y_0)\cdot f''_{y^2}(x_0,y_0)-\left(f''_{xy}(x_0,y_0)\right)^2.$$

Avem:

a) Dacă $D(x_0,y_0)>0$, atunci în punctul $A(x_0,y_0)$ funcția z admite un extrem: maxim, dacă $f''_{x^2}(x_0,y_0)<0$ și minim, dacă $f''_{x^2}(x_0,y_0)>0$;

b) Dacă $D(x_0,y_0)<0$, atunci funcția $z=f(x,y)$ nu admite extrem în punctul $A(x_0,y_0)$;

c) Dacă $D(x_0,y_0)=0$, nu se poate decide asupra naturii punctului staționar $A(x_0,y_0)$ decât după investigații suplimentare (în care se poate folosi dezvoltarea Taylor).

Demonstrația acestei teoreme fără a apela la teorema 2 o puteți găsi de exemplu în [2], cap. 12, § 8.

În încheiere vom completa cazul c) din teorema 3: dacă $D(x_0,y_0)=0$, atunci nu se poate decide asupra naturii punctului staționar $A(x_0,y_0)$ decât după investigații suplimentare.

Într-adevăr vom arăta că în acest caz funcția $z=f(x,y)$ poate să aibă sau poate să nu aibă extrem în punctul staționar $A(x_0,y_0)$. Acest lucru se confirmă, de exemplu, prin studiul funcțiilor $f(x,y)=x^4+y^4$ și $g(x,y)=x^4-y^4$ în vecinătate punctului staționar $(0,0)$. Avem $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$, $g'_x(0,0)=g'_y(0,0)=0$, $f''_{x^2}(0,0)=f''_{xy}(0,0)=f''_{y^2}(0,0)=0$ și $g''_{x^2}(0,0)=g''_{xy}(0,0)=g''_{y^2}(0,0)=0$. Observăm că $\Delta f(0,0)=$ $=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=f(\Delta x,\Delta y)=\Delta x^4+\Delta y^4\geq 0$ pentru orice Δx și Δy, ceea ce înseamnă ca punctul $(0,0)$ este un punct de minim pentru funcția $f(x,y)$.

Similar $\Delta g(0,0)=g(0+\Delta x,0+\Delta y)-g(0,0)=g(\Delta x,\Delta y)=$ $=\Delta x^4-\Delta y^4$. Pentru $\Delta x=0$ și orice Δy, avem: $\Delta g(0,0)<0$, iar pentru $\Delta y=0$ și orice Δx, avem: $\Delta g(0,0)>0$. Prin urmare, în orice vecinătate a punctului $(0,0)$ funcția $\Delta g(0,0)$ își schimbă

semnul, adică, conform relației (1), punctul $(0,0)$ nu este punct de extrem pentru funcția $g(x,y)$.

5.8.2. Metoda pătratelor mici.

Cunoscând algoritmul de determinare a extremelor unei funcții de mai multe variabile putem rezolva următoarea problemă de ajustare a datelor experimentale.

Să presupunem că în studiul unui fenomen se fac măsurări asupra a două caracteristici (de exemplu presiunea și temperatura), pentru care nu se cunoaște dependența dintre aceste două caracteristici.

Așezăm aceste date experimentale în tabelul

p	p_1	P_2	...	p_n
t	t_1	T_2	...	t_n

Ne interesează să stabilim forma dependenței $p=f(t)$.

După ce se așează punctele (t_i,p_i) $(i=1,2,\ldots,n)$ într-un sistem ortogonal de axe, se face o apreciere asupra formei funcției f (liniară: $p=at+b$, exponențială: $p=a^t$, după o parabolă: $p=ax^2+bx+c$, etc.).

Pentru forma aleasă a funcției $p=f(t,a,b,c,\ldots)$ convenim să alegem parametrii $a,b,c,\ldots$ astfel, încât această funcție să descrie procesul considerat în modul cel mai reușit.

Una din cele mai răspândite metode de rezolvare a problemei în cauză este metoda celor mai mici pătrate, metodă justificată de alegerea formei funcției $F(a,b,c,\ldots)$, supuse studiului la extrem.

Considerăm funcția

$$F(a,b,c,\ldots)=\sum_{i=1}^{n}(p_i-f(t_i,a,b,c,\ldots))^2. \qquad (1)$$

Alegem parametrii $a,b,c,\ldots$ astfel încât suma $F(a,b,c,\ldots)$ să aibă valoarea cea mai mică.

Vom studia două cazuri.

1. Să presupunem că repartiția punctelor (t_i, p_i) $(i = 1, \dots, n)$ se realizează aproximativ în formă liniară, adică $p = at + b$, ai căror coeficienți a, b sunt nedeterminați. Conform relației (1) avem $F(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (p_i - (at_i + b))^2$. Aplicam la această funcție algoritmul studierii extremelor din 5.8.1. Punctele staționare sunt punctele care satisfac următorul sistem liniar în raport cu necunoscutele a și b:

$$\begin{cases} F'_a(a,b) = (-2)\sum_{i=1}^{n} [p_i - (at_i + b)] \cdot t_i = 0, \\ F'_b(a,b) = (-2)\sum_{i=1}^{n} [p_i - (at_i + b)] = 0, \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} a\left(\sum_{i=1}^{n} t_i^2\right) + b\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i t_i, \\ a\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right) + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} p_i. \end{cases} \tag{2}$$

Evident că sistemul (2) are o soluție reală, deoarece funcția $F(a,b)$ întotdeauna are un punct de minim.

Aceasta se stabilește ușor și pe baza condițiilor suficiente ale teoremei 3. Într-adevăr, avem

$$F''_{a^2}(a,b) = 2\sum_{i=1}^{n} t_i^2, \quad F''_{ab}(a,b) = 2\sum_{i=1}^{n} t_i, \quad F''_{b^2}(a,b) = 2n.$$

Deci,

$$D(a,b) = F''_{a^2}(a,b) \cdot F''_{b^2}(a,b) - [F''_{ab}(a,b)]^2 =$$

$$= 4\left[n\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2\right] =$$

$$= 4\left[n\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} t_i^2 + 2\sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{n} t_i t_j\right)\right] =$$

$$= 4\left[(n-2)\sum_{i=1}^{n} t_i^2 + \sum_{i=1}^{n} t_i^2 + \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - 2\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} t_i t_j\right] =$$

$$= 4\left[(n-2)\sum_{i=1}^{n} t_i^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - 2\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} t_i t_j\right)\right] =$$

$$= 4\left[(n-2)\sum_{i=1}^{n} t_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} (t_i - t_j)^2\right] > 0 \ si \ F''_{a^2}(a,b) > 0.$$

2. Să presupunem că repartiția punctelor se realizează aproximativ după o parabolă, adică $p = at^2 + bt + c$ ai cărei coeficienți a, b, c sunt nedeterminați. Vom determina acești coeficienți astfel încât suma $F(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} (p_i - (at_i^2 + bt_i + c))^2$ să aibă valoarea cea mai mică. Pentru aceasta rezolvăm următorul sistem:

$$\begin{cases} F'_a(a,b,c) = (-2)\sum_{i=1}^{n} [p_i - (at_i^2 + bt_i + c)] \cdot t_i^2 = 0, \\ F'_b(a,b,c) = (-2)\sum_{i=1}^{n} [p_i - (at_i^2 + bt_i + c)] \cdot t_i = 0, \\ F'_c(a,b,c) = (-2)\sum_{i=1}^{n} [p_i - (at_i^2 + bt_i + c)] = 0, \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} a\left(\sum_{i=1}^{n} t_i^4\right)+b\left(\sum_{i=1}^{n} t_i^3\right)+c\left(\sum_{i=1}^{n} t_i^2\right)=\sum_{i=1}^{n} p_i t_i^2, \\ a\left(\sum_{i=1}^{n} t_i^3\right)+b\left(\sum_{i=1}^{n} t_i^2\right)+c\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)=\sum_{i=1}^{n} p_i t_i, \\ a\left(\sum_{i=1}^{n} t_i^2\right)+b\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)+c\cdot n=\sum_{i=1}^{n} p_i. \end{cases} \quad (3)$$

Sistemul (3) este un sistem de ecuaţii liniare în raport cu necunoscutele a,b,c. Din natura problemei rezultă că acest sistem are o soluţie bine determinată şi pentru valorile obţinute a,b,c funcţia $F(a,b,c)$ are minim.

5.8.3. Extremele condiţionate. Valoarea cea mai mare şi valoarea cea mai mică ale funcţiei de mai multe variabile.

În aplicaţii apar deseori situaţii în care se caută extremele unei funcţii de mai multe variabile, argumentele căreia verifică anumite condiţii suplimentare. Extremele funcţiei în acest caz se numesc *extreme condiţionate* sau *legate* spre deosebire de ele, extremele obişnuite le vom numi *extreme libere*.

Fie $u=f(x_1,\dots,x_n)$ o funcţie reală definită pe o mulţime E din R^n şi un sistem de $k<n$ ecuaţii

$$\begin{cases} F_1(x_1,\dots,x_n)=0, \\ F_2(x_1,\dots,x_n)=0, \\ \dots \quad \dots \\ F_k(x_1,\dots,x_n)=0, \end{cases} \quad (1)$$

unde funcţiile $F_i(x_1,\dots,x_n)$ sunt definite pe aceeaşi mulţime E.

Extremele funcţiei $u=f(x_1,\dots,x_n)$ când punctul $M(x_1,\dots,x_n)$ parcurge numai mulţimea D a soluţiilor sistemului (1) se numesc *extremele funcţiei u condiţionate de sistemul* (1) sau extremele funcţiei u supuse la legăturile (1) sau mai pe scurt *extremele condiţionate (legate) ale funcţiei u*.

Punctele staţionare ale funcţiei $u=f(x_1,\dots,x_n)$ când punctul $M(x_1,\dots,x_n)$ parcurge numai mulţimea D a soluţiilor sistemului (1) se numesc *puncte staţionare condiţionate* sau *legate* ale funcţiei u.

Punctele de extrem condiţionat sau punctele critice condiţionate se definesc în mod asemănător ca punctele extreme sau punctele critice obişnuite (sau libere), cu condiţia ca punctele respective să aparţină mulţimii D a soluţiilor sistemului (1).

În cele ce urmează presupunem că funcţiile $F_i(x_1,\dots,x_n)$ $(i=1,2,\dots k)$ sunt diferenţiabile pe E şi matricea funcţională

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \dots & & \dots & \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1} & \frac{\partial F_k}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (2)$$

are rangul k pe mulţimea E, adică există cel puţin un minor de ordinul k, de exemplu

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_k} \\ \dots & \dots & \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_k} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ pe } E \quad (3)$$

În astfel de condiţii sistemul (1) este echivalent cu sistemul de funcţii $x_i=\varphi_i(x_{k+1},\dots,x_n)$, $(i=1,\dots,k)$ implicite, definite de sistemul (1) (a se vedea [3], cap. 8, § 2, § 3, [7], v. 2, cap. 19, § 1. 317).

Prin urmare,

$$u=f(x_1,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_n)=$$
$$=f(\varphi_1(x_{k+1},\dots,x_n),\dots,\varphi_k(x_{k+1},\dots,x_n),x_{k+1},\dots,x_n))=\varphi(x_{k+1},\dots,x_n).$$

şi problema despre extremul condiţionat al funcţiei u cu legăturile (1) se reduce la problema despre extremul obişnuit al funcţiei $u = \varphi(x_{k+1},\dots,x_n)$ de $(n-k)$ variabile.

Exemplul 1. Să se cerceteze extremul funcţiei $z=(x-1)^2 + y^2$ cu condiţia $x^2-y^2-1 = 0$.

Observăm că $F'_x = 2x \neq 0$ (hiperbola echilaterală $x^2-y^2=1$ nu intersectează axa OY).

Deci, matricea funcţională $(2x \ -2y)$ are rangul 1. Pe baza teoremei din 5.5.1, ecuaţia $x^2-y^2-1 = 0$ defineşte funcţia implicită $x = \pm\sqrt{y^2+1}$.

Aşadar, cercetarea extremului condiţionat al funcţiei date se reduce la cercetarea extremului obişnuit al funcţiei de o singură variabilă

$$z = x^2-2x+1+y^2=y^2+1 \mp 2\sqrt{y^2+1}+1+y^2 =$$

$$= 2(y^2+1 \mp \sqrt{y^2+1}).$$

Aflăm punctele critice:

$$z'_y = 2\left(2y \mp \frac{y}{\sqrt{y^2+1}}\right) = 2y\frac{2\sqrt{y^2+1} \mp 1}{\sqrt{y^2+1}}$$

şi deci obţinem:

$$z'_y = 0 \Rightarrow y = 0,$$

$$z'_y = \infty \Rightarrow y = \varnothing.$$

Observăm, că $z'_y < 0$ dacă $y < 0$ şi $z'_y > 0$, dacă $y > 0$.

Prin urmare, punctul $y = 0$ este un punct de minim al funcţiilor

$$z_{1,2} = 2(y^2+1 \mp \sqrt{y^2+1} \quad \text{şi}$$

$$z_{min} = f_1(0) = 0,\ z_{min} = f_2(0) = 4.$$

Aşadar, punctele $(\pm1,0)$ sunt puncte de minim condiţionat ale funcţiei $z=(x-1)^2+y^2$ cu condiţia $x^2-y^2-1=0$ şi $z_{min} = f_1(1,0) = 0$, $z_{min} = f_2(-1,0)=4$.

În practică aflarea expresiilor explicite pentru sistemul de funcţii implicite, echivalent cu sistemul (1), prezintă mari dificultăţi. Vom indica o metodă de aflare a extremelor condiţionate fără a rezolva

sistemul (1) de ecuaţii funcţionale. Această metodă se numeşte *metoda multiplicatorilor lui Lagrange* şi se bazează pe ideea simetrizării rolului variabilelor (în problema extremului condiţionat variabilele $x_{k+1}, x_{k+2}\dots,x_n$ sunt independente, iar $x_1,x_2\dots,x_k$ sunt legate prin relaţiile (1)).

Teorema 1. Fie funcţia

$$L(x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_k) =$$

$$= f(x_1,\dots,x_n) + \lambda F_1(x_1,\dots,x_n) + \dots + \lambda_k F_k(x_1,\dots,x_n) \quad (4)$$

de $(n+k)$ variabile independente reale şi $(a_1,\dots,a_n,\mu_1,\dots,\mu_k)$ un punct staţionar al funcţiei L. Punctul $(a_1,\dots,a_n)$ este un punct staţionar condiţionat al funcţiei $u = f(x_1,\dots,x_n)$ cu legăturile (1).

Demonstraţia acestei teoreme o veţi găsi în [3], cap. VIII, §4.

Funcţia (4) din teorema 1 se numeşte *funcţia Lagrange*, iar variabilele independente λ_1, $\lambda_2,\dots$, λ_k poartă numele de *multiplicatorii Lagrange*.

Din teorema 1 rezultă că punctele de extrem condiţionat ale funcţiei u cu legăturile (1) se găsesc printre punctele staţionare obişnuite ale funcţiei Lagrange (4).

Teorema 2. Fie că punctul $A(a_1,\dots, a_n)$ care satisface sistemul (1) este un punct staţionar al funcţiei Lagrange (4) şi funcţiile u, F_1, $F_2,\dots$, F_k împreună cu derivatele lor parţiale până la ordinul 2 inclusiv sunt continue într-o vecinătate a punctului A. Dacă $d^2L(A)$ ca formă pătratică este pozitiv (respectiv negativ) definită în raport cu $dx_1,\dots, dx_n$, unde $dx_i (i = 1,\dots,n)$ satisfac sistemul

$$\begin{cases} dF_1(A) = \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}(A)dx_1 + \dots + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}(A)dx_n = 0, \\ dF_2(A) = \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1}(A)dx_1 + \dots + \dfrac{\partial F_2}{\partial x_n}(A)dx_n = 0, \\ \quad\dots \qquad\qquad \dots \\ dF_k(A) = \dfrac{\partial F_k}{\partial x_1}(A)dx_1 + \dots + \dfrac{\partial F_k}{\partial x_n}(A)dx_n = 0, \end{cases} \quad (5)$$

atunci punctul A este un punct de minim (respectiv maxim) al funcţiei u condiţionate de sistemul (1).

Demonstrație. Pentru a stabili că punctul A este un extrem condiționat al funcției u trebuie să studiem semnul creșterii totale

$$\Delta u = f(x_1,\dots x_n) - f(a_1,\dots,a_n) =$$
$$= f(a_1+\Delta x_1,\dots, a_n+\Delta x_n) - f(a_1,\dots,a_n)$$

pentru punctele $(x_1,x_2,\dots x_n)$ care verifică sistemul (1). Observăm, că

$$\Delta u = L(x_1,\dots,x_n) - L(a_1,\dots,a_n),$$

unde $\lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_k$ s-au înlocuit cu $\mu_1, \mu_2,\dots,\mu_k$ (teorema 1). Prin urmare, Δu coincide cu creșterea totală a funcției Lagrange (4) în punctual $(a_1,\dots,a_n, \mu_1,\dots,\mu_k)$. Aplicând formula Taylor (teorema 2 din 5.7.3.) pentru funcția $L(x_1,\dots,x_n)$ în punctul staționar A cu $m = 2$ avem:

$$\Delta L(A) = dL(A) + \frac{1}{2}d^2L(A) + \varepsilon\cdot\rho^2 =$$
$$= \frac{1}{2}d^2L(A) + \varepsilon\cdot\rho^2,$$

unde

$$x_i - a_i = \Delta x_i = dx_i \,(i=1,\dots,n),\ \lim_{\rho\to 0}\varepsilon = 0 \text{ și } \rho = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2}.$$

Aceasta înseamnă că semnul lui $\Delta L(A)$ coincide cu semnul lui

$$d^2L(A) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(A)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j.$$

Dacă diferențiem sistemul (1), obținem sistemul (5). Deoarece determinantul (3) în punctul A este diferit de zero, din sistemul (5) cu ajutorul regulei lui Cramer, obținem pe $dx_1, dx_2,\dots, dx_k$ ca funcții de $dx_{k+1},\dots, dx_n$. Dacă le înlocuim în $d^2L(A)$, obținem

$$d^2L(A) = \sum_{i,j=1}^{n-k} \frac{\partial^2 L(A)}{\partial x_i \partial x_j} dx_{k+i}\cdot dx_{k+j},$$

adică o formă pătratică în raport cu $dx_{k+1},\dots,dx_n$.

Aplicând teorema 2 din 5.8.1. avem: dacă $d^2L(A)$ este pozitiv (negativ) definită ca formă pătratică, atunci punctul A este un punct de minim (respectiv un punct de maxim) al funcției u cu condițiile (1).

Teorema este demonstrată.

Din teorema 2 rezultă următoarele: pentru a cerceta punctele staționare ale funcției Lagrange (4) la extrem, trebuie de cercetat

semnul formei pătratice d^2L în punctul dat, cu condiția ca diferențialele $dx_1,\dots,dx_n$ să satisfacă sistemul (5).

În cazul când $n = 2$ și $k = 1$, din teorema 2 reiese următorul rezultat.

Teorema 3. Fie $A(x_0, y_0)$ un punct staționar al funcției Lagrange $L(x, y) = f(x,y)+\lambda F(x,y)$ și fie funcțiile $z = f(x,y)$ și $F(x,y)$ împreună cu derivatele lor parțiale până la ordinul 2 inclusiv continue într-o vecinătate a punctului A.

Dacă

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & F'_x(A) & F'_y(A) \\ F'_x(A) & L''_{xx}(A) & L''_{xy}(A) \\ F'_y(A) & L''_{xy}(A) & L''_{yy}(A) \end{vmatrix}$$

este negativ, atunci funcția z are în A un maxim condiționat, iar dacă $\Delta > 0$, atunci punctul A este un punct de minim condiționat pentru funcția z.

Demonstrație. Avem

$$\Delta = [F'_y(A)]^2\cdot L''_{xx}(A) + [F'_x(A)]^2\cdot L''_{yy}(A) -$$
$$-2F'_x(A)\cdot F'_y(A)\cdot L''_{xy}(A)$$

și dacă $F'_y(A) \neq 0$, atunci $\dfrac{dy}{dx}(A) = -\dfrac{F'_x(A)}{F'_y(A)}$.

Deci

$$d^2L(A) = L''_{xx}(A)dx^2 + 2L''_{xy}(A)dxdy + L''_{yy}(A)dy^2 =$$
$$= dx^2\left[L''_{xx}(A) + 2L''_{xy}(A)\cdot\frac{dy}{dx}(A) + L''_{yy}(A)\cdot\left(\frac{dy}{dx}(A)\right)^2\right] =$$
$$= \frac{dx^2}{((F'_y(A))^2}\Big[((F'_y(A))^2\cdot L''_{xx}(A) - 2F'_x(A)\cdot F'_y(A)\cdot L''_{xy}(A) +$$
$$+ (F'_x(A))^2\cdot L''_{yy}(A)\Big] = \frac{dx^2}{(F'_y(A))^2}\cdot\Delta.$$

Prin urmare, semnul lui $d^2L(A)$ coincide cu semnul lui Δ.

Dacă însă $F'_y(A) = 0$ iar $F'_x(A) \neq 0$ raționamentele sunt simetrice.

Dacă $F'_x(A) = F'_y(A) = 0$, adică punctul A este un punct singular pentru curba $F(x,y) = 0$, teorema nu se aplică, deoarece în acest caz $\Delta = 0$.

Teorema este demonstrată.

Aplicăm teorema 3 pentru a cerceta extremele condiționate ale funcției din exemplul 1 de mai sus:

1) Alcătuim funcția Lagrange și aflăm punctele ei staționare:

$$L(x,y,\lambda) = (x-1)^2 + y^2 + \lambda(x^2 - y^2 - 1).$$

Avem:

$$L'_x = 2(x-1) + 2x\lambda = 2(x-1+x\lambda),$$
$$L'_y = 2y - 2y\lambda = 2y(1-\lambda),$$
$$L'_\lambda = x^2 - y^2 - 1.$$

Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} x - 1 + x\lambda = 0, \\ y(1-\lambda) = 0, \\ x^2 - y^2 - 1 = 0, \end{cases}$$

obținem următoarele puncte staționare: $A_1(1,0)$ cu $\lambda_1 = 0$ și $A_2(-1,0)$ cu $\lambda_2 = -2$.

2) Calculăm

$$L''_{xx}, L''_{xy}, L''_{yy} \text{ și } F'_x, F'_y:$$

$$L''_{xx} = 2(1+\lambda), L''_{xy} = 0, L''_{yy} = 2(1-\lambda) \text{ și } F'_x = 2x, F'_y = -2y.$$

Prin urmare, $\Delta(A_1) = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0,$

adică punctul $A_1(1,0)$ este un punct de minim condiționat cu $z_{\min}(A_1) = 0$ și

$$\Delta(A_2) = -\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 24 > 0,$$

adică punctul $A_2(-1,0)$ este de asemenea un punct de minim condiționat cu $z_{\min}(A_2) = 4$.

Menționăm, că problemele de determinare a extremelor unei funcții atunci când variabilele sunt supuse unor legături, constituie de fapt obiectul unei ramuri din matematica modernă în plină dezvoltare care se numește *"Programare matematică"*.

Problema generală a "Programării matematice" poate fi formulată astfel: să se determine valorile variabilelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ supuse condițiilor

$$g_i(x_1,\ldots,x_n) \geq 0 \ (i = 1,\ldots,k),\ h_j(x_1,\ldots,x_n) \leq 0 \ (j = 1,\ldots,s)$$
$$v_m(x_1,\ldots,x_n) = 0 \ (m = 1,\ldots,l)$$

și care maximizează sau minimizează o funcție $u = f(x_1,\ldots,x_n)$ care se numește *funcție obiectiv*.

Numeroase probleme tehnice și economice conduc la asemenea modele (exemplu: determinarea planului optim al unei întreprinderi care trebuie să se supună unor condiții de forma: consumul de metal să fie limitat superior, consumul de energie electrică să fie limitat superior, valoarea producției la un anumit produs să fie limitată inferior etc.).

În cazul în care funcția $u = f(x_1,\ldots,x_n)$ și restricțiile ei sunt funcții liniare,problema enunțată devine o *problemă de programare liniară*.

Dacă u este o funcție neliniară,se obține o *problemă de programare neliniară*.

Dacă coeficienții ce apar în funcția u sau în restricțiile ei nu sunt constanți ci variază după o anumită lege determinată, problema este de *programare parametrică*. Dacă coeficienții din u sau restricțiile ei variază aleator, atunci problema este de *programare stochastică*.

Dacă soluțiile care ne interesează sunt numere întregi, problema este de *programare discretă*.

Pentru fiecare din aceste tipuri de probleme există metode specifice ce conduc la algoritmi cu ajutorul cărora se poate folosi calculatorul.

5.9. Exerciţii la capitolul 5.

1. Să se determine domeniul de definiţie al funcţiei $z=f(x,y)$ şi să se interpreteze geometric acest domeniu dacă:

a) $z=\ln x-\ln y$; b) $z=\sqrt{x+y}$; c) $z=\sqrt{x^2+y^2-4}$;

d) $z=\ln\dfrac{x}{y}$; e) $z=\arccos\dfrac{x^2+y^2}{9}$;

f) $z=\sqrt{9-x^2-y^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$;

g) $z=\log_a\left(\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-1\right)$; h) $z=\dfrac{\sqrt{8x-y^2}}{\ln(9-x^2-y^2)}$.

2. Să se calculeze derivatele parţiale şi diferenţiala totală ale funcţiei:

a) $z=x^{y^2}$; b) $z=\operatorname{arctg}(x^2y)$; c) $z=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$;

d) $u=e^{\frac{x}{y}}+e^{\frac{z}{y}}$; e) $u=\operatorname{tg}(3x-y)+3^{y-z}$; f) $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$;

g) $z=\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$; h) $u=(\sin x)^{yz}$.

3. Să se calculeze derivatele parţiale sau totale ale funcţiilor compuse:

a) $z=u^2\ln v,\ u=\dfrac{y}{x},\ v=x^2-y^2$;

b) $z=e^{u-2v},\ u=\cos x,\ v=x^3-y^2$;

c) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{v}{u},\ u=e^{2x}+1,\ v=e^{2x}-1$;

d) $z=\arcsin(u+v),\ u=\cos\alpha\sin x,\ v=\sin\alpha\cos x$;

e) $z=\dfrac{e^{ax}(u-v)}{a^2+1},\ u=a\sin x,\ v=\cos x$;

f) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy},\ y=\cos x$;

g) $z=\ln(u^2-v^2+w),\ u=x+y,\ v=\sqrt{2xy},\ w=\dfrac{x}{y}$

h) $z=\cos(2x+4u^2-v),\ u=\dfrac{1}{x},\ v=\dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}$.

4. Să se calculeze derivatele y'_x, z'_x, z'_y ale funcţiilor implicite definite prin ecuaţiile:

a) $ye^x-x\ln y-1=0$; b) $xe^y+ye^x=2$;

c) $z^3+3x^2y+y^2z^2+y=2x-xz$;

d) $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=1$;

e) $z\ln(x+z)-\dfrac{xy}{z}=0$; f) $x^2+xy+y^2=0$;

g) $\ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}\right)-\dfrac{y}{x}=3$;

h) $5(x^2+y^2+z^2)-2(xy+yz+xz)=72$;

5. Să se demonstreze că dacă

a) $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, atunci $u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz}=0$;

b) $z=\dfrac{x^2y^2}{x+y}$, atunci $x\cdot z''_{xx}+y\cdot z''_{xy}=2z'_x$;

c) $z=\varphi(y+ax)+\psi(y-ax)$, atunci $z''_{xx}=a^2z''_{yy}$ pentru oricare funcţii φ şi ψ diferenţiabile de două ori.

6. Să se cerceteze la maxim şi minim funcţiile:

a) $z=x^2+xy+y^2-3x-6y$; b) $z=y^3-x^3-15xy$;

c) $z = \sin x \cdot \sin y,\ 0 < x < 2\pi$ şi $0 < y < 2\pi$;

d) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$;

e) $u = x^2 + y^2 + z^2 + xy - x + y - 2z$;

f) $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$;

g) $u = \frac{1}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{16},\ x \neq 0,\ y \neq 0,\ z \neq 0$;

h) $u = x^2 - xy + xz + yz$.

7. Să se cerceteze la extrem funcţiile:

a) $z = x^2+y^2-xy+x+y-4$ cu condiţia $x+y+3=0$;

b) $z = \frac{x-y-4}{\sqrt{2}}$ cu condiţia $x^2+y^2=1$;

c) $z = 8-2x-4y$ cu condiţia $x^2+2y^2=12$;

d) $u = x^2+y^2+z^2$ cu condiţia $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$;

e) $u = 2x+y-2z$ cu condiţia $x^2+y^2+z^2=36$;

f) $u = xyz$ cu condiţiile $x+y+z=4$ şi $xy+yz+xz=5$.

5.10. Indicaţii şi răspunsuri la capitolul 5.

1. a) Cadranul 1, semiaxele pozitive OX şi OY nu aparţin domeniului;

b) Porţiunea din planul XOY situată mai sus de bisectoarea a 2-a; punctele de pe această bisectoare aparţin acestui domeniu;

c) Exteriorul cercului $x^2 + y^2 \le 4$. Punctele circumferinţei $x^2 + y^2 = 4$ aparţin acestui domeniu;

d) Cadranele 1 şi 3. Axele OX şi OY nu aparţin acestui domeniu;

e) Cercul închis $x^2 + y^2 \le 9$;

f) Coroana $1 < x^2 + y^2 \le 9$. Punctele de pe circumferinţa mică nu aparţin acestui domeniu;

g) Exteriorul elipsei $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Punctele de pe această elipsă nu aparţin domeniului;

h) Porţiunea din planul OXY situată în interiorul parabolei $y^2 = 8x$ şi a cercului $x^2 + y^2 \le 9$. Punctele de pe parabolă aparţin domeniului, iar punctele de pe circumferinţa $x^2 + y^2 = 9$ nu aparţin acestui domeniu.

2. a) $dz = \left(y^2 x^{y^2-1}\right)dx + \left(2yx^{y^2} \cdot \ln x\right)dy$;

b) $dz = \left(\frac{2xy}{1+x^4y^2}\right)dx + \left(\frac{x^2}{1+x^4y^2}\right)dy$;

c) $dz = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(-dx + \frac{x}{y}dy\right)$;

d) $du = \left(\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\right)dx - \frac{1}{y^2}\left(xe^{\frac{x}{y}} + ze^{\frac{z}{y}}\right)dy + \left(\frac{1}{y}e^{\frac{z}{y}}\right)dz$;

e) $du = \frac{3dx}{\cos^2(3x-y)} + \left[3^{y-z} \cdot \ln 3 - \frac{1}{\cos^2(3x-y)}\right]dy -$

$$-3^{y-z}\ln 3dz;$$

f) $dz = \frac{ydx - xdy}{y\sqrt{y^2 - x^2}}$; g) $dz = \frac{y}{\sqrt{x^4 - y^4}}\left(\frac{y}{x}dx - dy\right)$;

h) $du = \left[yz(\sin x)^{yz-1}\cos x\right]dx + \left[(\sin x)^{yz} \cdot \ln|\sin x|\right](zdy + ydz)$.

3. a) $z'_x = \frac{2y^2}{x^3(x^2+y^2)}\left[x^2 - (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)\right]$;

$$z'_y = \frac{2y}{x^2(x^2+y^2)}\left[y^2 + (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)\right];$$

b) $z'_x = -e^{\cos x - 2x^3 + 2y^2}\left(\sin x + 6x^2\right),\ z'_y = 4ye^{\cos x - 2x^3 + 2y^2}$;

c) $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{2e^{2x}}{e^{4x}+1}$; d) $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\cos(x+\alpha)}{|\cos(x+\alpha)|}$ sau $\dfrac{dz}{dx}=1$, dacă

$2\pi k-\dfrac{\pi}{2}<(x+\alpha)<\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in z$ și $\dfrac{dz}{dx}=-1$, dacă

$2\pi k+\dfrac{\pi}{2}<(x+\alpha)<(2k+1)\pi+\dfrac{\pi}{2},\ k\in z$;

e) $\dfrac{dz}{dx}=e^{ax}\sin x$; f) $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$;

g) $z'_x=\dfrac{1+2xy}{x+x^2y+y^3}$, $z'_y=\dfrac{2y^3-x}{y(x+x^2y+y^3)}$;

h) $\dfrac{dz}{dt}=\left[-\sin\left(2x+\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}\right)\right]\left[2-\dfrac{8}{x^3}-\dfrac{\ln x-2}{2\sqrt{x}(\ln x)^2}\right]$.

4. a) $y'_x=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y(ye^x-\ln y)}{x-ye^x}$; b) $y'_x=\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{e^y+ye^x}{xe^y+e^x}$;

c) $z'_x=\dfrac{2-6xy-z}{3z^2+x+2y^2z}$, $z'_y=-\dfrac{3x^2+2yz^2+1}{3z^2+x+2y^2z}$;

d) $z'_x=-\dfrac{\sin 2x}{\sin 2z}$, $z'_y=-\dfrac{\sin 2y}{\sin 2z}$;

e) $z'_x=\dfrac{yz(x+y)-z^3}{z^2(x+z)\ln(x+z)+z^3+xy(x+z)}$

$z'_y=\dfrac{xz(x+z)}{z^2(x+z)\ln(x+z)+z^3+xy(x+z)}$;

f) $y'_x=\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x+y}{x+2y}$; g) $y'_x=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}$

h) $z'_x=\dfrac{y+z-5x}{5z-y-x}$, $z'_y=\dfrac{x+z-5y}{5z-y-x}$.

5. c) se consideră funcțiile compuse $\varphi(u)$ și $\psi(v)$ cu $u=y+ax$ și $v=y-ax$.

6. a) $z_{\min}=f(0,3)=-9$; b) $z_{\max}=f(5,-5)=125$;

c) $z_{\max}=f\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)=f\left(-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2}\right)=1$,

$z_{\min}=f\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)=f\left(\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$;

d) $z_{\min}=f(-\sqrt{2},\sqrt{2})=(\sqrt{2},-\sqrt{2})=-8$ și

$\Delta z(0,0)=2\Delta x^4>0$, pentru $\Delta x=\Delta y\to 0$,

$\Delta z(0,0)=(-\Delta x^2)(2-\Delta x^2)<0$, pentru $\Delta y=0$ și $\Delta x\to 0$;

e) $u_{\min}=f(1,-1,1)=-2$; f) $u_{\min}=f\left(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3},1\right)=-\dfrac{4}{3}$;

g) $u_{\min}=f(2,4,8)=2$, $u_{\max}=f(-2,4,-8)=-2$;

h) nu are extreme.

7. a) $z_{\min}=f\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{19}{4}$;

b) $z_{\min}=f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=-1-2\sqrt{2}$;

$z_{\max}=f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=1-2\sqrt{2}$;

c) $z_{\max}=f(-2,-2)=20$; $z_{\min}=f(2,2)=-4$;

d) $u_{\min}=f(0,0,\pm 1)=4$, $u_{\max}=f(\pm 4,0,0,)=16$,

În punctele $(0,\pm 3,0)$ extreme nu sunt,

e) $u_{\min}=f(-4,-2,4)=-18$, $u_{\max}=f(4,2,-4)=18$;

f) $u_{\max}=2$ în punctele $(2,1,1)$, $(1,2,1)$ și $(1,1,2)$, $u_{\min}=\dfrac{50}{27}$ în punctele $\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{5}{3},\dfrac{5}{3}\right)$, $\left(\dfrac{5}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{5}{3}\right)$ și $\left(\dfrac{5}{3},\dfrac{5}{3},\dfrac{2}{3}\right)$.

Capitolul 6

Calculul integral al funcţiei de mai multe variabile reale

6.1. Integralele ce depind de parametri.

6.1.1. Integralele proprii ce depind de parametri.

Fie $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ o funcţie de mai multe variabile definită şi continuă pa domeniul D:

$$a_i \le x_i \le b_i, i = 1, 2, ..., n.$$

Fixând orice valori ale argumentelor $x_2, ..., x_n$, alese în limitele indicate pentru ele ale domeniului D, obţinem o funcţie de o singură variabilă x_1:

$$\varphi(x_1) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

continuă şi deci integrabilă pe segmentul $[a_1, b_1]$. Integrala

$$I = \int_{a_1}^{b_1} \varphi(x_1)\, dx_1 = \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_1 \qquad (1)$$

depinde de valorile alese pentru $x_2, ..., x_n$. Variabilele $x_2, ..., x_n$ de care depinde funcţia de sub semnul integralei (1) şi care la integrare sunt privite ca constante, se numesc *parametri*. Integrala (1) se numeşte *integrală, care depinde de parametrii* $x_2, ..., x_n$. Aşadar integrala (1) ca atare este o funcţie de aceşti parametri.

Dacă a_1, b_1 sunt numere reale, integrala (1) se numeşte *integrală proprie*, sau simplu *integrală ce depinde de parametrii* $x_2, ..., x_n$. Dacă cel puţin unul din numerele a_1, b_1 este egal cu $+\infty$ sau $-\infty$, integrala (1) se numeşte *improprie*.

Vom enumera unele proprietăţi ale integralei (1) ce depinde de parametrii $x_2, ..., x_n$ cunoscând proprietăţile funcţiei de mai multe variabile $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Pentru simplicitate vom considera integrale ce depind de un singur parametru.

Rezultatele obţinute pot fi extinse asupra unui număr finit de parametri.

Teorema 1. Dacă funcţia $z = f(x, y)$ este continuă în dreptunghiul

$$D = \{(x, y) |\ a \le x \le b, c \le y \le d\},$$

unde a, b, c, d sunt numere reale, atunci funcţia

$$F(y) = \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dx, \qquad (2)$$

unde $a \le \alpha \le b$, $a \le \beta \le b$ este continuă pe segmentul $[c, d]$.

Demonstraţie. Întrucât domeniul D este închis şi mărginit, funcţia $f(x, y)$ va fi uniform continuă pe D (a se consulta teorema 5 din 5.3.2.), ceea ce înseamnă că pentru orice $\varepsilon > 0$ se poate determina $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \frac{\varepsilon}{|\alpha - \beta|}$$

oricare ar fi $x \in [a, b]$, $\alpha \ne \beta$ şi orice $y_1, y_2 \in [c, d]$ cu $|y_1 - y_2| < \delta$.

Deci

$$|\Delta F| = |F(y_1) - F(y_2)| = \left|\int_\alpha^\beta f(x, y_1)\, dx - \int_\alpha^\beta f(x, y_2)\, dx\right| =$$

$$= \left|\int_\alpha^\beta [f(x, y_1) - f(x, y_2)]\, dx\right| \le$$

$$\le \int_\alpha^\beta |f(x, y_1) - f(x, y_2)|\, dx < \int_\alpha^\beta \frac{\varepsilon}{|\alpha - \beta|}\, dx = \varepsilon,$$

dacă $|y_1 - y_2| < \delta$. Aceasta înseamnă că funcţia $F(y)$ de o singură variabilă este continuă pe $[c, d]$.

Dacă $\alpha = \beta$, atunci $F(y) = 0$ este continuă pe $[c, d]$ ca o funcţie constantă. Teorema este demonstrată.

Din teorema 1 reiese ca o consecinţă teorema despre posibilitatea trecerii la limită în raport cu un parametru sub semnul integralei:

Teorema 2. Dacă funcția $z = f(x, y)$ este continuă în dreptunghiul

$$D = \{(x, y) | a \le x \le b, c \le y \le d\},$$

atunci

$$\lim_{y \to y_0} \int_\alpha^\beta f(x, y) dx = \int_\alpha^\beta \left[\lim_{y \to y_0} f(x, y) \right] dx, \qquad (3)$$

unde $y_0 \in [c, d]$, $a \le \alpha \le b$, $a \le \beta \le b$.

Demonstrație. Conform teoremei 1 funcția $F(y)$ este continuă în punctul arbitrar $y_0 \in [c, d]$. Prin urmare,

$$\lim_{y \to y_0} \int_\alpha^\beta f(x, y) dx = \lim_{y \to y_0} F(y) = F(y_0) =$$

$$= \int_\alpha^\beta f(x, y_0) dx = \int_\alpha^\beta \left[\lim_{y \to y_0} f(x, y) \right] dx,$$

ceea ce trebuia de demonstrat.

Teorema 3. Dacă funcțiile $f(x, y)$ și $f'_y(x, y)$ sunt continue pe dreptunghiul

$$D = \{(x, y) | a \le x \le b, c \le y \le d\},$$

atunci funcția $F(y) = \int_\alpha^\beta f(x, y) dx$, unde $\alpha, \beta \in [a, b]$ este derivabilă pe segmentul $[c, d]$ și

$$F'(y) = \int_\alpha^\beta f'_y(x, y) dx. \qquad (4)$$

Demonstrație. Dacă $\alpha = \beta$ egalitatea (4) este evidentă. Fie $\alpha \ne \beta$ și dăm lui y o creștere Δy astfel încât y și $(y + \Delta y)$ aparțin segmentului $[c, d]$. Avem:

$$\Delta F = F(y + \Delta y) - F(y) = \int_\alpha^\beta [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] dx =$$

$$= \int_\alpha^\beta f'_y(x, y + \theta \Delta y) \Delta y \cdot dx = \Delta y \cdot \int_\alpha^\beta f'_y(x, y + \theta \Delta y) dx,$$

$$0 < \theta < 1,$$

ultima egalitate obținându-se prin aplicarea teoremei Lagrange (a se consulta 2.4.3. din [20]), unde θ poate, de altfel, să depindă și de x. Prin urmare,

$$\left| \frac{\Delta F}{\Delta y} - \int_\alpha^\beta f'_y(x, y) dx \right| = \left| \int_\alpha^\beta [f'_y(x, y + \theta \Delta y) - f'_y(x, y)] dx \right| \le$$

$$\le \int_\alpha^\beta |f'_y(x, y + \theta \Delta y) - f'_y(x, y)| dx. \qquad (5)$$

Cum se presupune că $f'_y(x, y)$ este continuă pe domeniul D închis și mărginit, această funcție va fi și uniform continuă pe D și deci

$$|f'_y(x, y + \theta \Delta y) - f'_y(x, y)| < \frac{\varepsilon}{|\alpha - \beta|}, \qquad (6)$$

îndată ce $|\Delta y| < \delta$, unde $\delta > 0$ și $\varepsilon > 0$ nu depind de x și y. Înlocuind (6) în (5) obținem:

$$\left| \frac{\Delta F}{\Delta y} - \int_\alpha^\beta f'_y(x, y) dx \right| < \int_\alpha^\beta \frac{\varepsilon}{|\alpha - \beta|} dx = \varepsilon,$$

ceea ce înseamnă că

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta y} = \int_\alpha^\beta f'_y(x, y) dx,$$

adică am obținut formula (4). Teorema este demonstrată.

Notă: Prin iterarea procedeului de demonstrare a teoremei 3 se arată ușor că dacă $f^{(n)}_{y^n}(x, y)$ este continuă pe D, atunci $F^{(n)}(y)$ este continuă pe $[c, d]$ și formula (4) se transformă în formula

$$F^{(n)}(y) = \int_\alpha^\beta f^{(n)}_{y^n}(x, y) dx, \qquad (7)$$

care se numește *formula Leibniz de derivare a integralelor cu parametri*. Așadar formula (7) a lui Leibniz ne permite să calculăm derivata de ordin superior a unei funcții definite cu ajutorul unei integrale cu parametri prin derivarea succesivă a funcției de sub semnul integralei.

În teoremele 1–3 am presupus că limitele de integrare α și β sunt constante. În cazul când α și β sunt funcții de careva parametri au loc următoarele teoreme:

Teorema 4. Dacă funcţia $f(x, y)$ este continuă pe dreptunghiul

$$D=\{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\},$$

iar funcţiile $\alpha=\varphi_1(y)$, $\beta=\varphi_2(y)$ sunt continue pe $[c, d]$ şi $a \leq \varphi_1(y) \leq b$, $a \leq \varphi_2(y) \leq b$, atunci funcţia

$$F(y)=\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y)\, dx$$

este continuă pe $[c, d]$.

Demonstraţia acestei teoreme o lăsăm pe seama cititorului (a se consulta [7], V.2, punctul 298, teorema 5 sau [10], partea 2, cap.9, teorema 9.4).

Teorema 5. Dacă funcţiile $f(x, y)$ şi $f'_y(x, y)$ sunt continue pe dreptunghiul

$$D=\{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\},$$

iar funcţiile $\alpha=\varphi_1(y)$ şi $\beta=\varphi_2(y)$ sunt derivabile pe $[c, d]$ şi $a \leq \varphi_1(y) \leq b$, $a \leq \varphi_2(y) \leq b$, atunci funcţia

$$F(y)=\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y)\, dx$$

este derivabilă pe $[c, d]$ şi

$$F'(y)=\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f'_y(x, y)\, dx+f(\varphi_2(y), y) \cdot \varphi'_2(y)-$$
$$-f(\varphi_1(y), y) \cdot \varphi'_1(y). \qquad (8)$$

Demonstraţie. Considerăm funcţia $F(y)$ ca o funcţie compusă în raport cu variabila y:

$$F(y)=\Phi(y, \beta, \alpha),$$

unde $\alpha=\varphi_1(y)$, $\beta=\varphi_2(y)$. Funcţia $\Phi(y, \beta, \alpha)$ are trei derivate parţiale continue pe $[c, d]$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}=\left(\int_\alpha^\beta f(x, y)\, dx\right)'_y=\int_\alpha^\beta f'_y(x, y)\, dx,$$

deoarece α şi β se consideră ca constante;

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}=\left(\int_\alpha^\beta f(x, y)\, dx\right)'_\beta=f(\beta, y),$$

deoarece $\left(\int_\alpha^x f(t)\, dt\right)'_x=f(x)$ (conform teoremei 1 din 4.2.4, [20]) şi α şi y se consideră ca constante;

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}=\left(\int_\alpha^\beta f(x, y)\, dx\right)'_\alpha=-\left(\int_\beta^\alpha f(x, y)\, dx\right)'_\alpha=-f(\alpha, y),$$

din acelaşi motiv (aici β şi y se consideră ca constante).

Întrucât funcţiile $\alpha=\varphi_1(y)$ şi $\beta=\varphi_2(y)$ sunt derivabile pe $[c, d]$, rezultă că funcţia compusă $F(y)$ este derivabilă pe $[c, d]$ şi aplicând formula derivatei totale (5) din 5.4.4. obţinem:

$$F'(y)=\frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot 1+\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dy}+\frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \cdot \frac{d\beta}{dy}=$$
$$=\int_\alpha^\beta f'_y(x, y)\, dx-f(\alpha, y)\alpha'(y)+f(\beta, y)\beta'(y)=$$
$$=\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f'_y(x, y)\, dx-f(\varphi_1(y), y)\varphi'_1(y)+f(\varphi_2(y), y)\varphi'_2(y),$$

ceea ce trebuia de demonstrat.

Teorema 6. Dacă funcţia $f(x, y)$ este continuă pe dreptunghiul

$$D=\{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\},$$

atunci

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(x, y)\, dx\right) dy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x, y)\, dy\right) dx. \qquad (9)$$

Demonstraţie. Să arătăm, mai general, că

$$\int_c^d\left(\int_a^t f(x, y)\, dx\right) dy=\int_a^t\left(\int_c^d f(x, y)\, dy\right) dx,$$

pentru orice $t \in [a, b]$.

Notăm

$$\varphi(t)=\int_c^d\left(\int_a^t f(x,y)\,dx\right)dy \quad \text{şi}$$
$$\psi(t)=\int_a^t\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx.$$

Va fi suficient să arătăm că $\varphi'(t)=\psi'(t)$ pentru $a\le t\le b$ şi $\varphi(a)=\psi(a)$.

În baza teoremei 1 funcţiile $F_1(t,y)=\int_a^t f(x,y)\,dx$ şi $F_2(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy$ · sunt continue pe dreptunghiul $D=\{(t,y)|\ a\le t\le b, c\le y\le d\}$ şi respectiv pe segmentul $[a,b]$.

Pentru o funcţie de o singură variabilă avem $\left(\int_a^t g(x)\,dx\right)_t'=g(t)$ (a se consulta teorema 1 din 4.2.4, [20]). Deci,

$$[F_1(t,y)]_t'=\left(\int_a^t f(x,y)\,dx\right)_t'=f(t,y),$$

care este continuă pe dreptunghiul

$$D=\{(t,y)|\ a\le t\le b, c\le y\le d\}.$$

Prin urmare, în baza teoremei 3 de mai sus şi a teoremei 1 din 4.2.4, [20] obţinem:

$$\varphi'(t)=\left(\int_c^d F_1(t,y)\,dy\right)_t'=\int_c^d (F_1(t,y))_t'\,dy=\int_c^d f(t,y)\,dy \quad \text{şi}$$
$$\psi'(t)=\left(\int_a^t F_2(x)\,dx\right)_t'=F_2(t)=\int_c^d f(t,y)\,dy.$$

De aici rezultă că $\varphi'(t)=\psi'(t)$, pentru orice $t\in[a,b]$. Şi, cum $\varphi(a)=\psi(a)=0$, avem: $\varphi(t)\equiv\psi(t)$ (a se consulta consecinţa 4 din 2.4.3, [20]), pentru orice $t\in[a,b]$. În particular dacă $t=b$ obţinem: $\varphi(b)=\psi(b)$, adică am demonstrat formula (9). Teorema este demonstrată.

Aşadar, teorema 6 afirmă că dacă funcţia $f(x,y)$ este continuă într-un dreptunghi, integralele iterate ale acestei funcţii pot fi calculate în orice ordine (înţelegând prin integrare iterată a unei funcţii de două variabile integrarea succesivă, întâi în raport cu o variabilă (a doua variabilă se consideră ca o constantă) şi apoi în raport cu cealaltă (prima variabilă se consideră ca o constantă) a funcţiei în cauză).

Teoremele 3, 5 şi 6 se aplică cu succes la calcularea diferitor integrale foarte complicate, inclusiv şi acelea care cu metode tradiţionale nu pot fi calculate (a se consulta exemplele rezolvate 4 şi 5 din §6, capitolul 8 [22], pag. 160-161).

Vom examina două exemple de acest fel.

Exemplul 1. Să se calculeze integrala

$$I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx.$$

Rezolvare. Considerăm integrala cu parametrul y:

$$I(y)=\int_0^y\frac{\ln(1+xy)}{1+x^2}\,dx.$$

Observăm că funcţiile $f(x,y)=\dfrac{\ln(1+xy)}{1+x^2}$, $f_y'(x,y)=\dfrac{x}{(1+xy)(1+x^2)}$, $\varphi_2(y)=y$, $\varphi_1(y)=0$ sunt continue, de exemplu, în dreptunghiul

$$D=\{(x,y)|\ 0\le x\le 1, y\in[a,b], b>a>0\}.$$

Aplicând teorema 5 avem:

$$I'(y)=\int_0^y\frac{x}{(1+xy)(1+x^2)}\,dx+\frac{\ln(1+y^2)}{1+y^2}.$$

Descompunând funcţia de integrare în funcţii raţionale simple (a se consulta 3.2.2. din [20]) şi integrând obţinem:

$$I'(y)=-\frac{y}{y^2+1}\cdot\left(\frac{\ln(1+xy)}{y}\right)\Bigg|_0^y+\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(1+x^2)}{y^2+1}\right)\Bigg|_0^y+$$

$$+\frac{y}{y^2+1}(arctg\ x)\Big|_0^y+\frac{\ln(1+y^2)}{1+y^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\ln(1+y^2)}{1+y^2}+\frac{y\cdot arctg\ y}{1+y^2}.$$

De unde

$$\int I'(y)dy=\frac{1}{2}\int\frac{\ln(1+y^2)}{y^2+1}dy+\int\frac{y\cdot arctg\ y}{1+y^2}dy.$$

Folosind integrarea prin părţi în a doua integrală din partea dreaptă, obţinem:

$$I(y)=\frac{1}{2}\int\frac{\ln(1+y^2)}{y^2+1}dy+\frac{1}{2}arctg\ y\cdot\ln(1+y^2)-$$
$$-\frac{1}{2}\int\frac{\ln(1+y^2)}{y^2+1}dy+C==\frac{1}{2}arctg\ y\cdot\ln(1+y^2)+C.$$

Determinăm constanta C: înlocuind $y=0$ în ultima relaţie avem: $I(0)=C$. Pe de altă parte, din $I(y)=\int_0^y\frac{\ln(1+xy)}{1+y^2}dx$ reiese că $I(0)=0$. Prin urmare $C=0$ şi deci

$$I(y)=\frac{1}{2}arctg\ y\cdot\ln(1+y^2),$$

adică

$$I(1)=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}arctg 1\cdot\ln 2.$$

Prin urmare, $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{8}\cdot\ln 2$.

Exemplul 2. Să se calculeze integrala

$$I=\int_0^1\varphi(x)dx,$$

dacă $\varphi(x)=\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{x^b-x^a}{\ln x}$, $x\neq 0$, $x\neq 1$ şi $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=b-a$ cu $b>a>0$.

Observăm că funcţia $\varphi(x)$ este continuă pe $[a,b]$, însă primitiva ei nu poate fi calculată în funcţii elementare (a se consulta 4.1.6. din [20]).

Avem:

$$\int_a^b x^y\,dy=\frac{x^y}{\ln x}\Big|_a^b=\frac{x^b-x^a}{\ln x}.$$

Deoarece funcţia

$$f(x,y)=\begin{cases}x^y\cdot\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right), x\in]0,1], y\in[a,b]\\ 0,\ x=0,\ y\in[a,b]\end{cases}$$

este continuă pe dreptunghiul

$$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, a\le y\le b\},$$

aplicând teorema 6, obţinem:

$$I=\int_0^1\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\left(\int_a^b x^y\,dy\right)dx=\int_a^b\left(\int_0^1 x^y\cdot\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx\right)dy.$$

Calculăm mai întâi integrala

$$I_1=\int_0^1 x^y\cdot\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx=\int_0^1 x^y\cdot\cos(-\ln x)\,dx=$$
$$=\int_0^1 x^y\cdot\cos(\ln x)\,dx=$$
$$=\left|\begin{array}{l}\ln x=t,\ x=e^t\\ dx=e^t\ dt\\ t\in]-\infty,0]\end{array}\right|=\int_{-\infty}^0 e^{ty}\cos t\cdot e^t\ dt=\int_{-\infty}^0 e^{t(y+1)}\cos t\ dt=$$
$$=\left(e^{t(y+1)}\cdot\sin t\right)\Big|_{-\infty}^0-\int_{-\infty}^0(y+1)e^{t(y+1)}\sin t\ dt=$$
$$=(y+1)\left[\left(e^{t(y+1)}\cos t\right)\Big|_{-\infty}^0-(y+1)\int_{-\infty}^0 e^{t(y+1)}\cos t\ dt\right]=$$
$$=(y+1)[1-(y+1)\cdot I_1].$$

Deci $I_1 = (y+1) - (y+1)^2 I_1$. De unde $I_1 = \dfrac{y+1}{1+(y+1)^2}$.

Prin urmare,

$$I = \int_a^b I_1\, dy = \int_a^b \frac{y+1}{1+(y+1)^2}\, dy = \frac{1}{2}\ln\left[1+(y+1)^2\right]\Big|_a^b =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}.$$

6.1.2. Integralele improprii cu parametri

În 4.3 din [20] au fost introduse noțiunile de integrale improprii de speța 1 (cu limite de integrare infinite) și de speța 2 (de la funcții nemărginite) și au fost studiate proprietățile lor de bază. Este indispensabil ca cititorul să se familiarizeze cu aceste rezultate.

În multe aplicații practice apar integrale improprii cu parametri. Ca de obicei vom lua în discuție doar integrale improprii de speța întâi de forma $\int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx$ cu un singur parametru. Rezultatele sunt valabile și pentru alte tipuri de integrale improprii atât de speța 1 (de exemplu $\int_{-\infty}^{b} f(x, y)\, dx$ sau $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx$) cât și de speța 2 cu un număr finit de parametri. Pentru ca rezultatele din paragraful precedent (teoremele 1, 2, 3, și 6) să fie valabile și în cazul integralelor improprii cu parametri, trebuie impuse condiții suplimentare asupra convergenței acestor integrale, cea mai utilizată fiind condiția de convergență uniformă a integralelor improprii care depind de parametri (este clar că este vorba de o condiție suficientă).

Fie $\int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx$ o integrală improprie de speța 1 (cu limita superioară egală cu $(+\infty)$) și fie $z = f(x, y)$ o funcție definită pe domeniul deschis

$$D = \{(x, y) \mid a \le x < +\infty, c \le y \le d\},$$

unde segmentul $[c, d]$ poate fi orice interval, de lungime finită sau nu, al axei reale. Dacă integrala $\int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx$ este convergentă pentru orice $y \in [c, d]$, atunci această integrală definește o funcție

$$F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx,\ y \in [c, d],$$

care se numește *integrală improprie de speța 1 cu parametrul y*.

Definiție. Integrala $\int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx = F(y)$ se numește *uniform convergentă către funcția* $F(y)$ pe $[c, d]$, dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr real $L(\varepsilon) > a$, care nu depinde de parametrul y, astfel încât să avem pentru orice $A > L(\varepsilon)$:

$$\left|\int_a^A f(x, y)\, dx - F(y)\right| < \varepsilon, \tag{1}$$

oricare ar fi $y \in [c, d]$.

Nota 1. Condiția (1) din definiția de mai sus poate fi înlocuită cu condiția

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x, y)\, dx\right| < \varepsilon \tag{2}$$

pentru $A > L(\varepsilon)$ și orice $y \in [c, d]$, deoarece

$$\left|\int_a^A f(x, y)\, dx - F(y)\right| = \left|\int_a^A f(x, y)\, dx - \int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx\right| =$$

$$= \left|\int_a^A f(x, y)\, dx - \int_a^A f(x, y)\, dx - \int_A^{+\infty} f(x, y)\, dx\right| =$$

$$= \left|\int_A^{+\infty} f(x, y)\, dx\right|.$$

În această condiție nu intervine funcția $F(y)$.

Vom da un exemplu de integrală convergentă care nu converge uniform. Integrala:

$$F(y) = \int_0^{+\infty} y \cdot e^{-xy}\, dx = -e^{-xy}\Big|_0^{+\infty} = \frac{(-1)}{e^{xy}}\Big|_0^{+\infty} = 1,$$

pentru orice $y\in[0,1]$, ceea ce înseamnă că integrala considerată este convergentă în raport cu parametrul $y\in[0,1]$.

Arătăm că această integrală nu este uniform convergentă către $F(y)$ pe $[0,1]$. Într-adevăr, avem:

$$F(y)=\lim_{u\to+\infty}\int_0^u y\cdot e^{-xy}\,dx=\lim_{u\to+\infty}\left(-e^{-xy}\right)\Big|_0^u=$$
$$\lim_{u\to+\infty}\left(1-e^{-uy}\right)=1-0=1,$$

pentru orice $y\in[0,1]$. În baza definiției limitei funcției, inegalitatea (1) poate fi scrisă astfel:

$$\left|\int_0^u y\cdot e^{-xy}\,dy-1\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|1-e^{-uy}-1\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|-e^{-uy}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-uy}<\varepsilon\Leftrightarrow u>\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{y},\ \varepsilon>0,\ y\neq0.$$

Prin urmare, inegalitatea (1) are loc, dacă $u>L(\varepsilon,y)=-\dfrac{\ln\varepsilon}{y}$, adică $L(\varepsilon,y)$ depinde de y, ceea ce înseamnă că integrala $\int_0^{+\infty}y\cdot e^{-xy}\,dx$ nu este uniform convergentă către $F(y)$ pe $[0,1]$.

Conform criteriului din teorema 1 ([20], 4.3.2), vom enunța următorul criteriu.

Teorema 1. Pentru ca integrala $\int_a^{+\infty}f(x,y)dx=F(y)$ să fie uniform convergentă către $F(y)$ pe $[c,d]$ este necesar și suficient ca pentru orice număr $\varepsilon>0$ să existe numărul $L(\varepsilon)>a$, care nu depinde de parametrul y, astfel încât, oricare ar fi numerele $A>L(\varepsilon)$, $B>L(\varepsilon)$ și $y\in[c,d]$ are loc inegalitatea

$$\left|\int_A^B f(x,y)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Teorema 2. Dacă există o funcție pozitivă $g(x)$, $x\in[a,+\infty[$, astfel încât $|f(x,y)|\le g(x)$ pentru orice $x\in[a,+\infty[$ și $y\in[c,d]$ și dacă $\int_a^{+\infty}g(x)\,dx$ este convergentă, atunci integrala $\int_a^{+\infty}f(x,y)\,dx=F(y)$ este uniform convergentă către $F(y)$ pe $y\in[c,d]$.

Într-adevăr, deoarece

$$\left|\int_A^B f(x,y)\,dx\right|\le\int_A^B g(x)\,dx$$

obținem, în baza teoremei 1 din 4.3.2, [20] și a teoremei 1 de mai sus, că $F(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)\,dx$ este uniform convergentă către $F(y)$ pe $[c,d]$.

Nota 2: În condițiile teoremei 2 se spune că funcția $f(x,y)$ are o majorantă integrabilă $g(x)$ sau că integrala $F(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)\,dx$ este majorată de integrala convergentă $\int_a^{+\infty}g(x)\,dx$, care nu conține parametrul y.

Teorema 3. Fie funcția $f(x,y)$ este continuă pe mulțimea

$$\{(x,y)\mid a\le x<+\infty,\ c\le y\le d\}$$

și integrala $F(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)\,dx$ este uniform convergentă către $F(y)$ pe $[c,d]$.

Atunci

a) Funcția $F(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)\,dx$, $y\in[c,d]$ este continuă pe $[c,d]$;

b) $\lim\limits_{y\to y_0}\int_a^{+\infty}f(x,y)\,dx=\int_a^{+\infty}\left[\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)\right]dx;$

c) $\int_{\alpha}^{\beta}\left[\int_{a}^{+\infty} f(x, y)\, dx\right] dy = \int_{a}^{+\infty}\left[\int_{\alpha}^{\beta} f(x, y)\, dy\right] dx,$

unde $\alpha, \beta \in [c, d]$.

Teorema 4. Dacă

a) funcțiile $f(x, y)$ și $f'_y(x, y)$ sunt continue pe mulțimea $\{(x, y) \mid a \le x < +\infty, c \le y \le d\}$;

b) integrala $F(y) = \int_{a}^{+\infty} f(x, y)\, dx$ este convergentă pentru orice $y \in [c, d]$;

d) integrala $\varphi(y) = \int_{a}^{+\infty} f'_y(x, y)\, dx$ este uniform convergentă către $\varphi(x)$ pe $[c, d]$,

atunci $F(y)$ este derivabilă pe $[c, d]$ și are loc egalitatea

$$F'(y) = \left[\int_{a}^{+\infty} f(x, y)\, dx\right]'_y = \int_{a}^{+\infty} f'_y(x, y)\, dx = \varphi(y).$$

Demonstrațiile teoremelor 3 și 4 se bazează pe teoremele 1–6 din paragraful precedent cât și pe generalizările acestora, pentru cazul, când intervalul $[c, d]$ poate fi orice interval deschis de o lungime finită sau nu al axei reale, și le puteți găsi de exemplu în: [7], V.2, punctele 304–307; [17], V.2, punctele 518, 520, 521; [18], 50.2 etc.

6.1.3. Integralele Euler (funcțiile „gama" și „beta").

Integrala de forma

$$\Gamma(p) = \int_{0}^{+\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x}\, dx, \; p \in R \qquad (1)$$

se numește *funcția „gama"* sau la propunerea lui Legendre (1752–1833 – matematician francez), această integrală se numește *integrala Euler de speța 2.*

După funcțiile elementare, funcția „gama" este una dintre funcțiile cele mai importante pentru analiza matematică și aplicațiile ei. Studiul proprietăților funcției $\Gamma(p)$, pornind de la

definirea ei, integrală (1), servește în același timp și ca exemplu excelent de aplicație a teoriei expuse în punctul 6.1.2. de mai sus a integralelor care depind de parametri.

Ne vom opri la câteva proprietăți ale funcției „gama".

1. Domeniul de convergență.

Observăm că funcția $\Gamma(p)$ este o integrală improprie de speța 1 și de speța 2 (pentru $p < 1$) care depinde de parametrul p.

Pentru a arăta convergența integralei (1), în cazul $p > 0$, folosim descompunerea:

$$\Gamma(p) = \int_{0}^{1} x^{p-1} e^{-x}\, dx + \int_{1}^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx. \qquad (2)$$

Menționăm ca dacă $x \to 0$, atunci $x^{p-1} e^{-x} \sim x^{p-1}$, deoarece $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^{p-1} \cdot e^{-x}}{x^{p-1}} = \lim\limits_{x \to 0} e^{-x} = 1$. Deci în baza criteriului de comparație al integralelor improprii (a se consulta consecința teoremei 3 din 4.3.2. și 4.3.3,[20]), conchidem că integrala $\int_{0}^{1} x^{p-1} e^{-x}\, dx$ este convergentă atunci și numai atunci când integrala $\int_{0}^{1} x^{p-1}\, dx$ este convergentă. Dar

$$\int_{0}^{1} x^{p-1}\, dx = \left.\frac{x^{p}}{p}\right|_{0}^{1} = \begin{cases} \dfrac{1}{p}, & \text{dacă } p > 0 \\ \infty, & \text{dacă } p \le 0 \end{cases}$$

Prin urmare, $\int_{0}^{1} x^{p-1} e^{-x}\, dx$ este convergentă pentru $p > 0$ și divergentă pentru $p \le 0$. Aplicând teorema 2 din 6.1.2. observăm că majoranta $\int_{0}^{1} x^{p-1}\, dx$ a acestei integrale este convergentă pentru $p > 0$. Deci integrala $\int_{0}^{1} x^{p-1} e^{-x}\, dx$ este și uniform convergentă pe intervalul $]0, +\infty[$.

Pentru integrala $\int_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx$ ţinem seama de inegalitatea

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots > \frac{x^k}{k!} \text{ sau } \frac{1}{e^x} < \frac{k!}{x^k}.$$

De unde

$$x^{p-1}\cdot e^{-x} < \frac{k!}{x^{k-p+1}},\ k \in N.$$

Luând $k > p$, observăm că majoranta integralei $\int_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx$ este integrala

$$\int_1^{+\infty} \frac{k!}{x^{k-p+1}}\,dx = k!\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{k-p+1}},$$

care este convergentă dacă $k-p+1>1$, adică $k>p$ (a se consulta exemplul 4 $(a=1)$ din 4.3.1, [20]). Astfel integrala $\int_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx$ este uniform convergentă pe R şi deci convergentă pentru orice p.

Aşadar pe baza relaţiei 2, funcţia „gama" este convergentă pentru orice $p>0$ şi uniform convergentă pe $]0,+\infty[$.

2. Are loc relaţia

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p). \tag{3}$$

Într-adevăr

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x}\,dx = \left|\begin{matrix} x^p = u,\ du = p\cdot x^{p-1}\,dx \\ e^{-x}\,dx = dv \\ v = -e^{-x}\end{matrix}\right| =$$

$$= -x^p\cdot e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} p\cdot x^{p-1}e^{-x}\,dx =$$

$$= -\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{e^x} - 0\right) + p\cdot\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx = p\Gamma(p),$$

deoarece $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{e^x} = 0$ ($p>0$, se aplică regula L'Hospital (2.5.2. din [20]) până când exponentul lui x este un număr negativ (a se consulta exemplul 2 din 2.5.2, [20])).

Prin urmare, $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$.

Aplicând de n ori integrarea prin părţi în (1), relaţia (3) ne conduce la relaţia

$$\Gamma(p+n) = (p+n-1)(p+n-2)\cdot\ldots\cdot(p+1)p\Gamma(p). \tag{4}$$

În felul acesta calculul funcţiei $\Gamma(p)$ pentru valori arbitrare ale argumentului p se poate reduce la calculul funcţiei $\Gamma(p)$ pentru $0<p\le 1$ (sau dacă dorim, pentru $1<p\le 2$ etc.).

Dacă $p=1$, avem

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} x^0\cdot e^{-x}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$$

şi folosind relaţia (4) obţinem

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!.$$

Aşadar, funcţia $\Gamma(p)$ este o extindere naturală a funcţiei n! ($n\in N$) asupra domeniului oricăror valori pozitive ale argumentului p, adică funcţia $\Gamma(p)$ pentru $p\ne n+1$ extrapolează factorialul.

Pentru $p=\frac{1}{2}$ avem:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}} = \left|\begin{matrix}\sqrt{x}=t \\ x=t^2 \\ dx = 2t\,dt \\ t\in[0,+\infty[\end{matrix}\right| = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = 2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

(a se consulta exerciţiul 5 din §6, [22]).

Exemplul 3. Să se arate că

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}, \tag{5}$$

pentru orice număr natural n (reamintim că produsul numerelor naturale impare $1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2n-1)$ se notează $(2n-1)!!$, iar produsul numerelor naturale pare $2\cdot4\cdot6\cdot...\cdot(2n)$ se notează $(2n)!!$).

Într-adevăr avem:

$$\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}\ \text{(formula (3) cu } p=\frac{1}{2}\text{)},$$

$$\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(1+\left(1+\frac{1}{2}\right)\right)=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2^2}\sqrt{\pi}.$$

Presupunem că formula (5) este adevărată pentru n şi o demonstrăm pentru $(n+1)$:

$$\Gamma\left((n+1)+\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(1+\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)=\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{2n+1}{2}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}=$$

$$=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2n-1)(2n+1)}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}=\frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}$$

(am folosit relaţia (3) cu $p=n+\frac{1}{2}>0$ pentru orice $n\in N$ şi formula (5)).

Prin urmare, formula (5) este valabilă pentru orice $n\in N$.

3. Funcţia $\Gamma(p)$ este continuă pentru toate valorile lui $p>0$, admite derivate de orice ordin şi aceste derivate sunt şi ele funcţii continue pe $]0,+\infty[$.

Deoarece funcţia $f(x,p)=x^{p-1}\cdot e^{-x}$ este continuă (ca produsul a două funcţii elementare) pentru $x\geq0$ şi $p>0$, aplicând teorema 3 din 6.1.2., obţinem că $\Gamma(p)$ este continuă pentru $p>0$.

Cercetăm condiţiile teoremei 4 din 6.1.2.:

$$f'_p(p,x)=\left(x^{p-1}\cdot e^{-x}\right)'_p=x^{p-1}\cdot\ln x\cdot e^{-x}.$$

Observăm că integrala

$$\int_0^{+\infty}x^{p-1}\cdot\ln x\cdot e^{-x}dx=\int_0^1x^{p-1}\cdot e^{-x}\cdot\ln x dx+\int_1^{+\infty}x^{p-1}\cdot\ln x\cdot e^{-x}dx$$

este uniform convergentă pe $]0,+\infty[$ ca suma a două integrale uniform convergente pe $]0,+\infty[$, care sunt majorate respectiv de următoarele integrale convergente:

a) $$\int_0^1x^{p-1}\cdot|\ln x|\,dx=\left|\begin{array}{l}\ln x=u\\ du=\dfrac{dx}{x}\\ x^{p-1}dx=dv\\ v=\dfrac{x^p}{p}\end{array}\right|=\frac{x^p}{p}\cdot\ln x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^p}{p}\cdot\frac{dx}{x}=$$

$$=0-\frac{1}{p}\lim_{x\to0+0}\frac{\ln x}{x^{-p}}-\frac{1}{p}\int_0^1x^{p-1}dx=\frac{1}{p^2}\cdot x^p\Big|_0^1=\frac{1}{p^2}(1-0)=\frac{1}{p^2},$$

deoarece $p>0$, $\lim\limits_{x\to0+0}\frac{\ln x}{x^{-p}}=\lim\limits_{x\to0+0}\frac{(\ln x)'}{\left(x^{-p}\right)'}=0$ şi $\left|x^{p-1}\cdot e^{-x}\cdot\ln x\right|<x^{p-1}\cdot|\ln x|$;

b) $$\int_1^{+\infty}x^n\cdot e^{-x}\,dx=\left|\begin{array}{l}x^n=u,\ du=nx^{n-1}dx\\ n\in N,\ e^{-x}dx=dv\\ v=-e^{-x}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{-x^n}{e^x}\Bigg|_1^{+\infty}+n\int_1^{+\infty}x^{n-1}e^{-x}\,dx=0+\frac{1}{e}+n\int_1^{+\infty}x^{n-1}e^{-x}\,dx,$$

deoarece $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(x^n\right)'}{\left(e^x\right)'}=...(n\,ori)=n!\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$. Astfel, aplicând metoda integrării prin părţi de n ori la integrala

$\int_1^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx$, obținem că $\int_1^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx = A + n!\int_1^{+\infty} e^{-x}\, dx =$

$= A + n!\left(-e^{-x}\right)\Big|_1^{+\infty} = A + n!$, unde A este un număr real oarecare.

Prin urmare, integrala $\int_1^{+\infty} x^{n_0} e^{-x}\, dx$, unde $n_0 > p$ este un număr natural fixat, servește ca majorantă pentru integrala $\int_1^{+\infty} x^p e^{-x}\, dx$ din următoarele considerente: pentru orice $x > 1$, avem: $\ln x < x$ și pentru orice $p > 0$ există un număr natural n_0 astfel încât $p < n_0$. Deci,

$$\left|x^{p-1} \cdot e^{-x} \cdot \ln x\right| < x^{p-1} \cdot e^{-x} \cdot x = x^p \cdot e^{-x} < x^{n_0} \cdot e^{-x}.$$

Prin urmare, condițiile teoremei 4 din 6.1.2 sunt satisfăcute și deci funcția $\Gamma(p)$ admite derivate de orice ordin și aceste derivate sunt funcții continue pe $]0,+\infty[$.

Integrala de forma

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx,\ p\in \mathrm{R}, q\in \mathrm{R} \qquad (6)$$

se numește *funcția „beta”* de variabilele p și q, care la propunerea lui Legendre, a fost numită *integrala Euler de speța 1*. Remarcăm că (6) este o integrală improprie de speța 2 cu punctele singulare $x = 0$ (pentru $p < 1$) și $x = 1$ (pentru $q < 1$), care depinde de parametrii p și q.

Funcția „beta” are următoarele proprietăți.

1. Domeniul de convergență.

Avem:

$$B(p, q) = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx. \qquad (7)$$

Observăm că dacă $x \to 1$, $x^{p-1}(1-x)^{q-1} \sim (1-x)^{q-1}$, deoarece $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1-x)^{q-1}} = 1$ și dacă $x \to 0$, atunci $x^{p-1}(1-x)^{q-1} \sim x^{p-1}$ deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{x^{p-1}} = 1$.

Întrucât

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}\, dx = \frac{x^p}{p}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} \dfrac{1}{p\cdot 2^p}, & \text{dacă } p > 0, \\ \infty, & \text{dacă } p \le 0, \end{cases} \text{ și}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^{q-1}\, dx = \frac{-(1-x)^q}{q}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^1 = \begin{cases} \dfrac{1}{q\cdot 2^q}, & \text{dacă } q > 0, \\ \infty, & \text{dacă } q \le 0, \end{cases}$$

pe baza relației (7), conchidem că integrala (6) este convergentă atunci și numai atunci când $p > 0$ și $q > 0$.

2. Funcția $B(p, q)$ este simetrică în raport cu p și q.

Într-adevăr, substituția $x = 1 - t$ ne conduce la egalitatea

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-1}\, dx = \left|\begin{array}{l} x = 1-t \\ dx = -dt \\ t \in [1, 0] \end{array}\right| = -\int_1^0 (1-t)^{p-1}\cdot t^q\, dt =$$

$$= \int_0^1 t^q(1-t)^{p-1}\, dt = B(q, p).$$

3. Are loc următoarea formulă

$$B(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1}\cdot B(p, q-1),\quad q > 1. \qquad (8)$$

Într-adevăr, integrând prin părți în formula (6) pentru $q > 1$ și folosind identitatea $x^p(1-x)^{q-2} = x^{p-1}(1-x)^{q-2} - x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ obținem:

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx = \left|\begin{array}{l} (1-x)^{q-1} = u \\ du = (q-1)(1-x)^{q-2}\cdot(-1)dx \\ x^{p-1}dx = dv,\ v = \dfrac{x^p}{p} \end{array}\right| =$$

$$= \frac{x^p(1-x)^{q-1}}{p}\Bigg|_0^1 + \frac{q-1}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}\, dx =$$

$$= 0 + \frac{q-1}{p}\int_0^1 \left[x^{p-1}(1-x)^{q-2} - x^{p-1}(1-x)^{q-1}\right]dx =$$

$$= \frac{q-1}{p}\left[\mathrm{B}(p, q-1) - \mathrm{B}(p, q)\right].$$

De unde $B(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1), \quad q > 1.$

Formula (8) se numeşte *formulă de reducere* şi se aplică în scopul micşorării parametrului q atâta timp cât q rămâne mai mare decât 1. În felul acesta se poate face întotdeauna ca al doilea parametru să devină ≤ 1. De altfel, acelaşi lucru se poate obţine şi relativ la parametrul p, deoarece în virtutea simetriei funcţiei „beta" în raport cu p şi q, este valabilă şi o altă *formulă de reducere*

$$\mathrm{B}(p, q) = \frac{p-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p-1, q),\ p > 1.$$

Dacă $q = n \in N$, atunci aplicând succesiv formula (8), obţinem:

$$\mathrm{B}(p, n) = \frac{n-1}{p+n-1}\cdot\frac{n-2}{p+n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{p+1}\mathrm{B}(p, 1).$$

Dar

$$B(p, 1) = \int_0^1 x^{p-1}\,dx = \left.\frac{x^p}{p}\right|_0^1 = \frac{1}{p}.$$

De aceea pentru $B(p, n)$ şi, în acelaşi timp, pentru $B(n, p)$ se obţine expresia definitivă

$$\mathrm{B}(n, p) = \mathrm{B}(p, n) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)}{p(p+1)\cdot\ldots\cdot(p+n-1)} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{p(p+1)\cdot\ldots\cdot(p+n-1)}.$$

Dacă şi p este un număr natural, atunci această formulă se transformă în formula

$$\mathrm{B}(m, n) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!},$$

care poate fi aplicată şi pentru $m = 1$ sau $n = 1$, dacă prin simbolul $0!$ se subînţelege 1.

3. Vom da funcţiei „beta" o altă reprezentare analitică, care este utilă adesea.

Anume, dacă în integrala (6) facem substituţia $x = \frac{y}{y+1}$, în care y este o nouă variabilă ce variază de la 0 până la $+\infty$, când x variază de la 0 până la 1, obţinem:

$$\mathrm{B}(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\,dy. \tag{9}$$

Punând în formula (9) $q = 1 - p$ (în ipoteză ca $0 < p < 1$), avem:

$$\mathrm{B}(p, 1-p) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{p-1}}{1+y}\,dy. \tag{10}$$

Integrala (10) este de asemenea legată de numele lui Euler, care este egală cu $\frac{\pi}{\sin \pi p}$ $(0 < p < 1)$ (a se consulta de exemplu [7], V.2, punctul 308).

Deci, pentru orice $p \in \left]0, 1\right[$ avem:

$$\mathrm{B}(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p} \tag{11}$$

Dacă luăm în particular $p = 1 - p = \frac{1}{2}$, obţinem: $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$.

În încheiere vom stabili legătura dintre funcţiile „gama" şi „beta".

Avem:

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx = \left|\begin{array}{l} x = ty\ (t > 0) \\ dx = t\cdot dy \\ y \in [0, +\infty[\end{array}\right| =$$

$$= \int_0^{+\infty} t^{p-1}y^{p-1}e^{-ty}t\,dy = t^p\int_0^{+\infty} y^{p-1}e^{-ty}\,dy.$$

De unde

$$\frac{\Gamma(p)}{t^p}=\int_0^{+\infty} y^{p-1}e^{-ty}\,dy. \tag{12}$$

Înlocuind în egalitatea (12) pe p cu $(p+q)$ și pe t cu $(1+t)$ obținem formula

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}}=\int_0^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}\,dy.$$

Înmulțim ambele părți ale acestei egalități cu t^{p-1} și integrăm în raport cu t de la 0 la $+\infty$ ($t>0$!):

$$\Gamma(p+q)\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}\cdot dt}{(1+t)^{p+q}}=\int_0^{+\infty}t^{p-1}\left(\int_0^{+\infty}y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}\,dy\right)dt. \tag{13}$$

În partea dreaptă a egalității (13) permutăm integralele. Ca rezultat, egalitatea (13), în baza relațiilor (9) și (12), are forma

$$\Gamma(p+q)\cdot \mathrm{B}(p,q)=\int_0^{+\infty}y^{p+q-1}e^{-y}\left(\int_0^{+\infty}t^{p-1}e^{-ty}\,dt\right)dy=$$

$$=\int_0^{+\infty}y^{p+q-1}e^{-y}\frac{\Gamma(p)}{y^p}\,dy=\Gamma(p)\cdot\int_0^{+\infty}y^{q-1}e^{-y}\,dy=\Gamma(p)\cdot\Gamma(q).$$

De unde

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{14}$$

Deducerea elegantă a relației (14) dintre integralele Euler de spețа 1 și 2 îi aparține lui Dirichlet (1805–1859 – matematician german).

De altfel, pentru argumentarea ei mai trebuie să justificăm permutarea integralelor din relația (13), adică aplicarea teoremei 3 din 6.3.2. Din lipsă de spațiu nu ne vom opri la justificarea aplicării teoremei 3 din 6.3.2 (a se consulta [7], V.2, cap. 18, § 4.311.).

Fie $p\in\,]0,1[$ și $q=1-p$. Atunci formula (14), în baza formulei (11) și $\Gamma(1)=1$ are forma

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin\pi p},\ 0<p<1 \tag{15}$$

care se numește *formulă de completare*.

Pentru $p=\frac{1}{2}$ din formula aceasta obținem din nou că

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{1}=\pi \text{ sau } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},$$

deoarece $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)>0$ (a se compara cu proprietatea (2) de mai sus a funcției „gama").

Exemplul 4. *Formula lui Legendre.*

Dacă în integrala

$$\mathrm{B}(p,p)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{p-1}\,dx=\int_0^1\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{p-1}\cdot dx=$$

$$=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{p-1}\cdot dx$$

facem substituția $\frac{1}{2}-x=\frac{1}{2}\sqrt{t}$, obținem:

$$\mathrm{B}(p,p)=2\int_1^0\frac{1}{2^{2(p-1)}}(1-t)^{p-1}\left(-\frac{dt}{4\sqrt{t}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2^{2p-1}}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}-1}\cdot(1-t)^{p-1}\,dt=\frac{1}{2^{2p-1}}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},p\right).$$

Folosind formula (14) avem:

$$\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(p)}{\Gamma(2p)}=\frac{1}{2^{2p-1}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma(p)}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}.$$

Simplificând prin $\Gamma(p)$ și înlocuind $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ prin $\sqrt{\pi}$ obținem *formula lui Legendre*

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\cdot\Gamma(2p).$$

Exemplul 5. Să se calculeze

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(x+1)^2}\,dx.$$

Pe baza formulelor (9), (14), (3) şi (15) obţinem:

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac14}}{(1+x)^2}\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac54-1}\cdot dx}{(1+x)^{\frac54+\frac34}}=\mathrm{B}\left(\frac54,\frac34\right)=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac54\right)\cdot\Gamma\left(\frac34\right)}{\Gamma\left(\frac34+\frac54\right)}=\frac{\Gamma\left(\frac14+1\right)\cdot\Gamma\left(\frac34\right)}{\Gamma(1+1)}=$$

$$=\frac14\cdot\frac{\Gamma\left(\frac14\right)\cdot\Gamma\left(\frac34\right)}{1\cdot\Gamma(1)}=\frac14\cdot\frac{\Gamma\left(\frac14\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac14\right)}{1}=\frac14\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi\sqrt2}{4}.$$

Calcularea acestei integrale prin metode obişnuite este cu mult mai complicată.

Exemplul 6. Să se calculeze următoarele integrale:

a) $\int_0^{+\infty}e^{-x^p}\,dx,\ p>0$;

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{p-1}x\cdot\cos^{q-1}x\,dx,\ p>0, q>0$.

c) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$.

Rezolvare:

a) $$\int_0^{+\infty}e^{-x^p}\,dx=\left|\begin{array}{l}x^p=y,\ y^{\frac1p}=x,\\ dx=\frac1p y^{\frac1p-1}dy\\ y\in[0,+\infty[\end{array}\right|=\frac1p\int_0^{+\infty}y^{\frac1p-1}e^{-y}\,dy=$$

$$=\frac1p\Gamma\left(\frac1p\right)=\Gamma\left(1+\frac1p\right)$$

(am folosit formula (3));

b) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{p-1}x\cdot\cos^{q-1}x\,dx=\left|\begin{array}{l}y=\sin^2x\\ dy=2\sin x\cos x\,dx\\ y\in[0,1]\end{array}\right|=$$

$$=\frac12\int_0^1 y^{\frac p2-1}(1-y)^{\frac q2-1}\,dy=\frac12\mathrm{B}\left(\frac p2,\frac q2\right)=\frac12\cdot\frac{\Gamma\left(\frac p2\right)\cdot\Gamma\left(\frac q2\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}$$

(am folosit formula (14)).

Dacă în formula aceasta considerăm $q=1$, obţinem:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{p-1}x\,dx=\frac12\cdot\frac{\Gamma\left(\frac p2\right)\cdot\Gamma\left(\frac12\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac p2\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}.$$

c) $$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}=\left|\begin{array}{l}x^3=t,\ x=t^{\frac13}\\ dx=\frac13 t^{-\frac23}\cdot dt\\ t\in[0,+\infty]\end{array}\right|=\frac13\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac13-1}}{(1+t)^{\frac13+\frac23}}=\frac13 B\left(\frac13,\frac23\right)=$$

$$=\frac13\cdot\frac{\Gamma\left(\frac13\right)\cdot\Gamma\left(\frac23\right)}{\Gamma\left(\frac13+\frac23\right)}=\frac13\Gamma\left(\frac13\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac13\right)=\frac13\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi\sqrt3}{9}$$

(am folosit succesiv formulele (9), (14) şi (15)).

Din aceste câteva exemple e clar cu cât se lărgesc, datorită introducerii funcţiei „gama", posibilităţile de a reprezenta integralele sub formă finită cu ajutorul funcţiilor cunoscute. Uneori chiar dacă funcţia „gama" nu figurează în rezultatul definitiv, acesta se obţine mai uşor întrebuinţând proprietăţile funcţiei menţionate.

De aceea funcţia „gama", care nu este elementară, graţie utilizării ei frecvente în analiza matematică modernă, a fost însuşită în aceeaşi măsură ca şi funcţiile obişnuite, pe care le-am numit *elementare.*

6.2. Integralele curbilinii

Integrala curbilinie este o extindere a integralei definite în sensul că domeniul ei de integrare se înlocuieşte printr-un arc de curbă plană sau spaţială.

Integralele curbilinii se aplică pe larg în diverse ramuri ale matematicii, mecanicei etc. Există două tipuri de integrale curbilinii: integrale curbilinii de speţa 1 (sau după lungimea arcului) şi de speţa 2 (după coordonate sau după proiecţii).

6.2.1. Integralele curbilinii de speţa 1 (după lungimea arcului)

Fie în spaţiul tridimensional euclidian R^3, raportat la sistemul cartezian rectangular de coordonate XYZ, o curbă oarecare γ, definită de ecuaţiile parametrice

$$x=\varphi_1(t),\ y=\varphi_2(t),\ z=\varphi_3(t),\ t\in[a,b] \qquad (1)$$

cu extremităţile în punctele $A(\varphi_1(a),\varphi_2(a),\varphi_3(a))$ şi $B(\varphi_1(b),\varphi_2(b),\varphi_3(b))$. Dacă funcţiile $\varphi_i(t)$ $(i=1,2,3)$ sunt continue pe $[a,b]$, curba γ se numeşte *continuă*. Dacă funcţiile $\varphi_i(t)$, $\varphi_i'(t)$ $(i=1,2,3)$ sunt continue pe $[a,b]$, curba γ se numeşte *netedă*. Dacă funcţiile $\varphi_i(t)$, $\varphi_i'(t)$ $(i=1,2,3)$ sunt continue pe $[a,b]$ în afară de un număr finit de puncte ale $[a,b]$ şi aceste puncte sunt puncte de discontinuitate de speţa 1 pentru funcţiile date, spunem că curba γ este *netedă pe porţiuni*. Dacă extremităţile A şi B ale curbei γ coincid, spunem că curba este *închisă*. Dacă extremităţile A şi B ale curbei γ nu coincid, spunem că curba γ este *deschisă*. Dacă există două valori t_1 şi t_2 din $[a,b]$ astfel încât punctele respective $M_1(\varphi_1(t_1),\varphi_2(t_1),\varphi_3(t_1))$, $M_2(\varphi_1(t_2),\varphi_2(t_2),\varphi_3(t_2))$ coincid şi cel puţin una din inegalităţile $a<t_1$ şi $t_2<b$ să fie satisfăcută, spunem că punctul acesta este un *punct multiplu* al curbei date. Dacă curba γ nu admite nici un

punct multiplu, spunem că γ este o *curbă simplă*. Punctul (x_0,y_0,z_0) de pe curba netedă γ se numeşte *punct singular* dacă există $t_0\in[a,b]$ astfel încât $\varphi_1'(t_0)=\varphi_2'(t_0)=\varphi_3'(t_0)=0$.

Presupunem că curba γ este caracterizată de ecuaţiile parametrice (1) şi Δ este o diviziune a segmentului $[a,b]$:

$$a\le t_0<t_1<\ldots<t_{i-1}<t_i<\ldots\le t_n=b. \qquad (2)$$

Punctele (vezi fig. 1)

$$A=M_0(\varphi_1(t_0),\varphi_2(t_0),\varphi_3(t_0)),\ M_1,\ldots,M_{i-1},M_i,\ldots,$$
$$M_n=B(\varphi_1(t_n),\varphi_2(t_n),\varphi_3(t_n)) \qquad (3)$$

determină o linie poligonală vârfurile căreia aparţin curbei γ, iar punctele M_0 şi M_n coincid cu extremităţile acestei curbe.

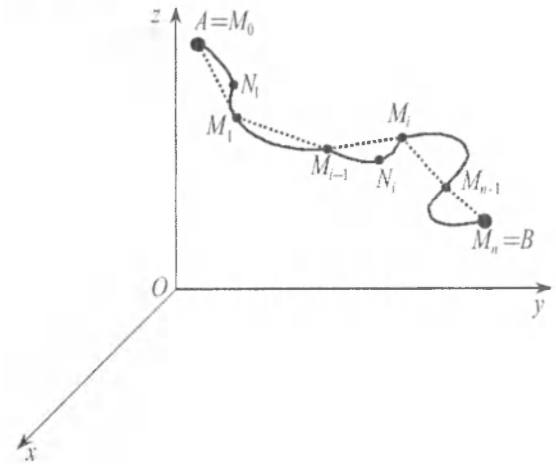


Fig. 1.

Lungimea acestei linii poligonale este

$$L_\Delta=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[\varphi_1(t_i)-\varphi_1(t_{i-1})]^2+[\varphi_2(t_i)-\varphi_2(t_{i-1})]^2+[\varphi_3(t_i)-\varphi_3(t_{i-1})]^2}$$

Dacă înlocuim diviziunea Δ cu una mai fină, atunci L_Δ crește.

Notăm prin Δl_i lungimile arcelor $M_{i-1}M_i$ $(i=1,2,...,n)$ și prin λ cea mai mare lungime a acestor arce, care se numește *pasul* diviziunii Δ.

Definiția 1. Curba γ se numește *rectificabilă*, dacă există limita finită $L=\lim\limits_{\lambda\to 0} L_\Delta$.

Numărul L se numește *lungimea* acestei curbe.

În 4.4.3, [20] am constatat că, dacă curba γ este netedă și este caracterizată de ecuațiile parametrice (1), atunci lungimea ei este egală cu

$$L=\int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(t))^2+(\varphi_2'(t))^2+(\varphi_3'(t))^2}\,dt. \tag{4}$$

Așadar, orice curbă netedă este rectificabilă, adică are lungime. Dacă $t\in[a,b]$ din (4) obținem:

$$l(t)=\int_a^t \sqrt{(\varphi_1'(u))^2+(\varphi_2'(u))^2+(\varphi_3'(u))^2}\,du$$

și în baza teoremei 1 din 4.2.4, [20] avem:

$$dl=l'(t)\,dt=\sqrt{(\varphi_1'(t))^2+(\varphi_2'(t))^2+(\varphi_3'(t))^2}\,dt, \tag{5}$$

care se numește *diferențiala lungimii arcului* curbei γ sau *elementul de arc* al curbei γ. Deoarece $dx=\varphi_1'(t)\,dt,\ dy=\varphi_2'(t)\,dt,\ dz=\varphi_3'(t)\,dt$, elementul de arc al curbei date poate fi reprezentat și sub forma $dl=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$.

Introducem acum noțiunea de integrală curbilinie de speța I (după lungimea arcului).

Fie γ o curbă simplă, netedă și deschisă în R^3 definită de reprezentarea parametrică (1) și funcția $u=f(x,y,z)$ definită în orice punct al acestei curbe. Dacă (2) este o diviziune Δ a segmentului $[a,b]$, punctele $M_0=A, M_1, ..., M_{i-1}, M_i, ..., M_n=B$ din (3) împart curba γ în n părți (a se consulta fig. 1). Pe fiecare arc elementar $M_{i-1}M_i$ $(i=1,2,...,n)$ alegem câte un punct arbitrar N_i și înmulțim valoarea funcției $u=f(x,y,z)$ în punctul N_i cu lungimea Δl_i a arcului $M_{i-1}M_i$. Adunând toate produsele acestea obținem suma

$$\sigma_\Delta=\sum_{i=1}^{n} f(N_i)\Delta l_i, \tag{6}$$

care se numește *sumă integrală* pentru funcția $f(x,y,z)$ definită pe curba γ. Evident că σ_Δ depinde atât de diviziunea Δ a segmentului $[a,b]$, cât și de alegerea punctelor N_i pe arcele elementare $M_{i-1}M_i$.

Considerăm procesul în care numărul n al arcelor elementare ale curbei γ, va crește nemărginit, iar lungimile acestor arce vor tinde către zero. Acest proces poate fi caracterizat prin cuvintele: „pasul λ al diviziunii Δ a curbei γ tinde către zero".

Definiția 2. Dacă există limita finită $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma_\Delta$, atunci această limită se numește *integrală curbilinie de speța I* a funcției $u=f(x,y,z)$ luată pe lungimea curbei γ.

Se notează astfel:

$$\int_\gamma f(x,y,z)dl=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(N_i)\Delta l_i.$$

Denumirea *„integrală curbilinie după lungimea arcului"* se datorează faptului că în sumele integrale σ_Δ din (6) valoarea funcției f în punctul N_i se înmulțește cu lungimea arcului elementar respectiv.

Nota 1: Dacă în calitate de curba γ considerăm un fir material și pe acest fir presupunem distribuită o masă de densitate $f(x,y,z)$, cunoscută în fiecare punct, atunci problema determinării masei M a acestui fir material conduce la noțiunea de integrală curbilinie de speța I. Într-adevăr, masa firului poate fi aproximată cu suma σ_Δ din relația (6), deoarece densitatea distribuției masei pe fiecare arc elementar în realitate, în general vorbind, nu este constantă. Firește, că cu cât vor fi mai mici lungimile arcelor elementare, cu atât va fi mai exactă egalitatea aproximativă

$$M=\sum_{i=1}^{n} m_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(N_i)\cdot \Delta l_i = \sigma_\Delta .$$

unde m_i masa arcului elementar material.

Drept masă a curbei materiale (a firului) γ se consideră $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma_\Delta$. Deci masa firului

$$M=\int_\gamma f(x,y,z)\,dl, \tag{7}$$

unde curba γ trebuie să fie simplă, netedă şi deschisă, iar funcţia $f(x,y,z)$ să fie strict pozitivă şi continuă în orice punct al curbei γ (după cum vom vedea în teorema de mai jos aceste restricţii sunt suficiente pentru existenţa integralei curbilinii de speţa 1). Relaţia (7) reprezintă *sensul fizic al integralei curbilinii de speţa 1.*

Nota 2: Integrala curbilinie de speţa 1 nu este altceva decât extensia noţiunii de integrală definită (Riemann) (a se consulta 4.2.1. din [20]), în care curba γ este un segment de pe axa reală.

Enunţăm câteva proprietăţi ale integralei curbilinii de speţa 1, care reiese direct din definiţia acestei integrale. Presupunem că fiecare din integralele menţionate mai jos există.

P1. Valoarea integralei curbilinii de speţa 1 nu depinde de orientarea curbei γ;

P2. Factorul constant poate fi scos în afara semnului integralei;

P3. Integrala curbilinie a sumei a două funcţii este egală cu suma integralelor curbilinii ale acestor funcţii;

Proprietatea se generalizează asupra unui număr finit de funcţii.

P4. Dacă curba γ este împărţită printr-un punct oarecare în două părţi γ_1 şi γ_2, atunci

$$\int_\gamma f(x,y,z)\,dl=\int_{\gamma_1} f(x,y,z)\,dl+\int_{\gamma_2} f(x,y,z)\,dl .$$

Proprietatea se generalizează asupra unui număr finit de părţi ale curbei γ.

P5. Dacă $f_1(x,y,z)\le f_2(x,y,z)$ pentru orice punct (x,y,z) ce aparţine curbei γ, atunci

$$\int_\gamma f_1(x,y,z)\,dl \le \int_\gamma f_2(x,y,z)\,dl ;$$

P6. $\left|\int_\gamma f(x,y,z)\,dl\right| \le \int_\gamma |f(x,y,z)|\,dl$;

P7. Dacă $f(x,y,z)=1$, atunci *lungimea curbei* γ este egală cu

$$L=\int_\gamma dl ;$$

P8. Dacă funcţia $f(x,y,z)$ este continuă în orice punct al curbei γ, atunci există un punct $(\xi,\theta,\eta)\in\gamma$ astfel încât

$$\int_\gamma f(x,y,z)\,dl = f(\xi,\theta,\eta)\cdot L ,$$

unde L este lungimea curbei γ.

Nota 3. Am introdus noţiunea de integrală curbilinie de speţa 1 în cazul când curba γ este simplă, netedă şi deschisă. În baza proprietăţii **P4** de mai sus noţiunea de integrală curbilinie de speţa 1 poate fi extinsă şi în cazul când curba γ este netedă pe porţiuni.

Într-adevăr, împărţim curba γ în n părţi $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ astfel încât fiecare din ele să fie simplă şi deschisă, folosind ca puncte de diviziune şi punctele $N_i(\varphi_1(t_i),\ (\varphi_2(t_i),\ (\varphi_3(t_i))$, unde t_i sunt punctele de discontinuitate de speţa 1 ale funcţiilor $\varphi_i(t),\varphi_i'(t)(i=1,2,3)$. Atunci, în baza proprietăţii **P4**, integrala curbilinie pe γ se defineşte ca suma integralelor (dacă ele există) pe curbele $\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n$.

De obicei dacă curba γ este închisă, integrala curbilinie pe această curbă se notează astfel

$$\oint_\gamma f(x,y,z)\,dl . \tag{8}$$

Nota 4: Din definiţia integralei curbilinii de speţa 1 reiese că această integrală nu depinde de reprezentarea parametrică a curbei γ.

În încheiere vom demonstra teorema despre existenţa şi calculul integralei curbilinii de speţa 1.

Teorema 1. Fie funcţia $u=f(x,y,z)$ definită şi continuă în orice punct al curbei netede γ din R^3, caracterizată de ecuaţiile sale parametrice

$$x=\varphi_1(t),\ y=\varphi_2(t),\ z=\varphi_3(t),\ a\le t\le b.$$

Dacă curba γ nu are puncte singulare atunci

$$\int_\gamma f(x,y,z)\,dl=\int_a^b f(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\varphi_3(t))\times$$

$$\times\sqrt{(\varphi_1'(t))^2+(\varphi_2'(t))^2+(\varphi_3'(t))^2}\,dt. \qquad (9)$$

Demonstrație. Întrucât funcția $u=f(x,y,z)$ este continuă în orice punct al curbei γ și funcțiile $\varphi_i(t)$, $\varphi_i'(t)$ $(i=1,2,3)$ sunt continue pe $[a,b]$ (deoarece curba γ este netedă), rezultă că funcția compusă $f(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\varphi_3(t))$ este continuă pe $[a,b]$ (a se consulta teorema 1 din 5.4.4.). Prin urmare, funcția de integrare a integralei definite din partea dreaptă a egalității (9) este continuă, ceea ce înseamnă că integrala definită

$$I=\int_a^b f(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\varphi_3(t))\cdot\sqrt{(\varphi_1'(t))^2+(\varphi_2'(t))^2+(\varphi_3'(t))^2}\,dt \qquad (10)$$

există (a se consulta teorema 2 din 4.2.2, [20]).

Fie (2) o diviziune Δ a segmentului $[a,b]$. Atunci punctele $A=M_0,M_1,\dots,M_n=B$ (a se consulta fig. 1) din (3) împart curba γ în n părți (arce elementare). Pe fiecare arc elementar $M_{i-1}M_i$ $(i=1,\dots,n)$ alegem câte un punct arbitrar N_i și alcătuim suma integrală

$$\sigma_\Delta=\sum_{i=1}^n f(N_i)\cdot\Delta l_i.$$

Deoarece curba netedă γ este rectificabilă, în baza formulei (4), avem:

$$\Delta l_i=\int_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{(\varphi_1'(t))^2+(\varphi_2'(t))^2+(\varphi_3'(t))^2}\,dt.$$

Deci,

$$\sigma_\Delta=\sum_{i=1}^n\left[f(N_i)\cdot\int_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{(\varphi_1'(t))^2+(\varphi_2'(t))^2+(\varphi_3'(t))^2}\,dt\right].$$

Pe de altă parte, integrala definită (10) există, deci,

$$I=\int_a^b F(t)\,dt=\int_{a=t_0}^{t_1}F(t)\,dt+\int_{t_1}^{t_2}F(t)\,dt+\dots+$$

$$+\int_{t_{i-1}}^{t_i}F(t)\,dt+\dots+\int_{t_{n-1}}^{t_n=b}F(t)\,dt=\sum_{i=1}^n\int_{t_{i-1}}^{t_i}F(t)\,dt,$$

unde

$$F(t)=f(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\varphi_3(t))\cdot\sqrt{(\varphi_1'(t))^2+(\varphi_2'(t))^2+(\varphi_3'(t))^2}.$$

Estimăm diferența

$$|\sigma_\Delta-I|=\left|\sum_{i=1}^n[f(N_i)-f(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\varphi_3(t))]\times\right.$$

$$\left.\times\int_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{(\varphi_1'(t))^2+(\varphi_2'(t))^2+(\varphi_3'(t))^2}\,dt\right|\le$$

$$\le\sum_{i=1}^n|f(N_i)-f(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\varphi_3(t))|\times$$

$$\times\int_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{(\varphi_1'(t))^2+(\varphi_2'(t))^2+(\varphi_3'(t))^2}\,dt. \qquad (11)$$

Observăm că dacă $\lambda=\max\limits_{(i=1,\dots,n)}\Delta l_i\to 0$, atunci și $\Delta t_i=(t_i-t_{i-1})\to 0$ pentru orice $i=1,\dots,n$. Într-adevăr, deoarece curba γ nu are puncte singulare și funcțiile $\varphi_i'(t)\,(i=1,2,3)$ sunt continue pe $[a,b]$, avem că funcția $\sqrt{(\varphi_1'(t))^2+(\varphi_2'(t))^2+(\varphi_3'(t))^2}$ este continuă și strict pozitivă pe $[a,b]$. Conform teoremei lui Weierstrass (teorema 4b din 1.6.3, [20]), există valoarea cea mai mică m a acestei funcții și $m>0$. Deci

$$\Delta l_i=\int_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{(\varphi_1'(t))^2+(\varphi_2'(t))^2+(\varphi_3'(t))^2}\,dt\ge\int_{t_{i-1}}^{t_i}m\cdot dt=$$

$$=m\int_{t_{i-1}}^{t_i}dt=m\Delta t_i.$$

De unde $\Delta t_i \le \dfrac{1}{m}\Delta l_i$ şi, prin urmare, dacă $\lambda = \max\limits_{(i=1,\dots,n)} \Delta l_i \to 0$, atunci $\Delta t_i \to 0$ pentru orice $i = 1,\dots,n$.

Din continuitatea funcţiei compuse $f(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\varphi_3(t))$ pe $[a,b]$ rezultă că pentru orice $\dfrac{\varepsilon}{L} > 0$ (unde L este lungimea curbei rectificabile γ), există un $\delta > 0$, astfel încât, dacă $|\Delta l_i| < \delta$ ceea ce înseamnă că şi $|\Delta t_i| < \delta$, se satisface inegalitatea

$$|f(N_i) - f(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\varphi_3(t))| < \frac{\varepsilon}{L}.$$

Deci inegalitatea (11) are forma

$$|\sigma_\Delta - I| < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{L}\cdot\int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + (\varphi_2'(t))^2 + (\varphi_3'(t))^2}\,dt =$$

$$= \frac{\varepsilon}{L}\cdot\int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + (\varphi_2'(t))^2 + (\varphi_3'(t))^2}\,dt = \frac{\varepsilon}{L}\cdot\int_a^b dl = \frac{\varepsilon}{L}\cdot L = \varepsilon.$$

Prin urmare, egalitatea (9) este adevărată şi teorema 1 este demonstrată.

Aşadar, pentru a calcula integrala curbilinie de speţa 1 trebuie, aplicând ecuaţiile parametrice ale curbei, să exprimăm funcţia de sub semnul integralei prin parametrul t, apoi să înlocuim dl prin diferenţiala arcului ca funcţie de parametrul t (formula (5)) şi în sfârşit să integrăm expresia obţinută după t în limitele de la valoarea mai mică a parametrului t pentru curba dată la valoarea lui cea mai mare.

Nota 5: După cum sensul geometric al integralei definite $\int_a^b f(x)\,dx$ (în ipoteză că $f(x) \ge 0$) reprezintă aria trapezului curbiliniu mărginit de graficul funcţiei f, axa OX şi dreptele $x = a$, $x = b$ (vezi fig. 2), prin extindere se poate da o semnificaţie geometrică şi integralei curbilinii de speţa 1 şi anume (vezi fig. 3) integrala $\int_\gamma f(x,y,z)\,dl$ (în ipoteză că $f(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\varphi_3(t)) \ge 0$) coincide cu aria unei porţiuni dintr-o suprafaţă cilindrică, directoarea căreia este curba γ, iar generatoarele sunt paralele axei OZ şi sunt limitate la valoarea $f(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\varphi_3(t))$, unde $t \in [a,b]$.

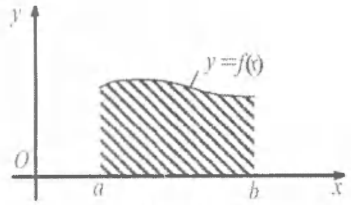


Fig. 2.

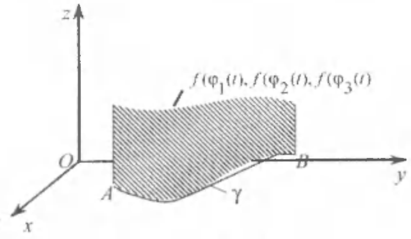


Fig. 3.

Fie $z = f(x,y)$ continuă în orice punct al curbei plane netede γ definită de ecuaţiile parametrice $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$, $t \in [a,b]$. Înlocuind în formula (9) $z = \varphi_3(t) \equiv 0$ obţinem formula

$$\int_\gamma f(x,y)\,dl = \int_a^b f(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + (\varphi_2'(t))^2}\,dt. \qquad (12)$$

În particular, dacă γ este definită de $x = t$, $y = \varphi(t)$, $t \in [a,b]$, adică de ecuaţia $y = \varphi(x)$, $x \in [a,b]$, avem

$$\int_\gamma f(x,y)\,dl = \int_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}\,dx. \qquad (13)$$

Menţionăm, că dacă în integrala curbilinie de speţa 1 din R^2 curba netedă γ coincide cu segmentul $[a,b]$ al axei OX ($y = 0$), atunci $f(x,y) = f(x)$, $\Delta l_i = \Delta x_i$ şi integrala curbilinie devine o integrală definită.

Exemplul 1. Să se calculeze integralele:

a) $\int_\gamma xy\,dl$, unde curba γ este arcul elipsei $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ situat în cadranul I;

b) $\int_{\gamma} y\,dl$, unde curba γ este arcul parabolei $y^2 = 2px$ de la originea de coordonate până la punctul (x_0, y_0).

Rezolvare:

a) Forma parametrică a curbei γ este $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Deci,

$$\int_{\gamma} xy\,dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t \cdot b\sin t \cdot \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} \cdot \sin 2t \cdot dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{a^2}{2}(1-\cos 2t) + \frac{b^2}{2}(1+\cos 2t)} \cdot \frac{(-1)}{2} d(\cos 2t) =$$

$$= -\frac{ab}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2} \cdot \cos 2t)} \cdot d(\cos 2t) =$$

$$= -\frac{ab}{4} \cdot \frac{2}{b^2-a^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2}\cos 2t\right)^3} \cdot \frac{2}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{ab}{3} \cdot \frac{1}{a^2-b^2} \cdot (a^3 - b^3) = \frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}.$$

b) $$\int_{\gamma} y\,dl = \int_0^{x_0} y\sqrt{1+(y_x')^2}\,dx = \int_0^{x_0} \sqrt{y^2 + y^2(y_x')^2}\,dx =$$

$$= \int_0^{x_0} \sqrt{y^2 + (yy')^2}\,dx = \int_0^{x_0} \sqrt{2px + p^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2p}\int_0^{x_0} \sqrt{p^2 + 2px} \cdot d(p^2 + 2px) = \frac{1}{2p}\sqrt{(p^2+2px)^3} \cdot \frac{2}{3}\Big|_0^{x_0} =$$

$$= \frac{1}{3p}\left[\sqrt{(p^2 + y_0^2)^3} - p^3\right], \text{ deoarece } y^2 = 2px \Rightarrow yy' = p.$$

6.2.2. Aplicațiile integralei curbilinii de speța 1

1. Dacă funcția $f(x,y,z) \equiv 1$ în orice punct al curbei netede γ, atunci suma integrală (6) are forma

$$\sigma_{\Delta} = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = L,$$

unde L este lungimea curbei γ. Prin urmare,

$$L = \int_{\gamma} dl = \int_{\gamma} \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + (\varphi_2'(t))^2 + (\varphi_3'(t))^2}\,dt,$$

dacă curba netedă γ este reprezentată prin ecuațiile sale parametrice

$$x = \varphi_1(t),\ y = \varphi_2(t),\ z = \varphi_3(t),\ t \in [a,b].$$

Dacă curba netedă γ este plană, caracterizată de ecuațiile

$$x = \varphi_1(t),\ y = \varphi_2(t),\ t \in [a,b],$$

atunci lungimea acestei curbe este

$$L = \int_{\gamma} dl = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + (\varphi_2'(t))^2}\,dt$$

(a se compara cu formula (2) din 4.4.3, [20]).

2. Reieșind din sensul fizic al integralei curbilinii de speța 1, obținem că masa unui fir material neomogen, proiecția căruia coincide cu curba netedă γ, este egală cu

$$M = \int_{\gamma} \rho(x,y,z)\,dl,$$

unde densitatea repartiției masei $\rho(x,y,z)$ este o funcție nenegativă și continuă în orice punct al curbei γ.

Urmând schema din 4.5.2, [20] și utilizând rezultatele respective din mecanica teoretică, se obțin următoarele formule:

a) Momentele statice în raport cu planele de coordonate sunt egale cu

$$M_{YOZ} = \int_{\gamma} x\rho(x,y,z)\,dl, \quad M_{XOZ} = \int_{\gamma} y\rho(x,y,z)\,dl,$$

$$M_{XOY}=\int_\gamma z\rho(x,y,z)\,dl.$$

b) Momentele de inerție în raport cu planele de coordonate sunt egale cu

$$I_{YOZ}=\int_\gamma x^2\rho(x,y,z)\,dl,\quad I_{XOZ}=\int_\gamma y^2\rho(x,y,z)\,dl,$$

$$I_{XOY}=\int_\gamma z^2\rho(x,y,z)\,dl,$$

iar momentul de inerție în raport cu originea sistemului de coordonate este egal cu

$$I_O=I_{YOZ}+I_{XOZ}+I_{XOY}=\int_\gamma\left(x^2+y^2+z^2\right)\cdot\rho(x,y,z)dl.$$

c) Coordonatele centrului de greutate sunt egale cu

$$x_0=\frac{1}{M}\int_\gamma x\rho(x,y,z)\,dl,\quad y_0=\frac{1}{M}\int_\gamma y\rho(x,y,z)\,dl,$$

$$z_0=\frac{1}{M}\int_\gamma z\rho(x,y,z)\,dl,$$

unde $M=\int_\gamma \rho(x,y,z)\,dl$.

Dacă densitatea $\rho(x,y,z)$ este constantă (firul material este omogen), atunci coordonatele centrului de greutate sunt date de formulele

$$x_0=\frac{1}{L}\int_\gamma x\,dl,\quad y_0=\frac{1}{L}\int_\gamma y\,dl,\quad z_0=\frac{1}{L}\int_\gamma z\,dl,$$

unde L este lungimea firului material (a curbei netede) γ.

Dacă firul material γ este imaginea unei curbe netede plane (din R^2) atunci:

a) Masa și coordonatele centrului de greutate sunt date de formulele

$$M=\int_\gamma \rho(x,y)\,dl,\quad x_0=\frac{1}{M}\int_\gamma x\rho(x,y)\,dl,\quad y_0=\frac{1}{M}\int_\gamma y\rho(x,y)\,dl.$$

Dacă firul γ este omogen, atunci coordonatele centrului de greutate sunt egale cu

$$x_0=\frac{1}{L}\int_\gamma x\,dl,\quad y_0=\frac{1}{L}\int_\gamma y\,dl,$$

unde L este lungimea acestui fir (a curbei netede plane γ).

b) Momentele statice în raport cu axele de coordonate sunt egale cu

$$M_{OX}=\int_\gamma x\rho(x,y)\,dl,\qquad M_{OY}=\int_\gamma y\rho(x,y)\,dl.$$

c) Momentele de inerție în raport cu axele de coordonate sunt egale cu

$$I_{OY}=\int_\gamma x^2\rho(x,y)\,dl,\quad I_{OX}=\int_\gamma y^2\rho(x,y)\,dl,$$

iar momentul de inerție în raport cu originea de coordonate este egal cu

$$I_O=I_{OX}+I_{OY}=\int_\gamma\left(x^2+y^2\right)\rho(x,y)\,dl.$$

6.2.3. Integralele curbilinii de speța 2 (după coordonate)

Aplicațiile practice ale integralei curbilinii de speța 2 sunt foarte variate. Din această cauză vom introduce noțiunea de integrală curbilinie de speța 2 pornind de la o problemă fizică.

Lucrul mecanic A_F efectuat de o forță constantă $\vec{F}$ într-o deplasare rectilinie AB este produsul scalar dintre vectorul $\vec{F}$ și deplasarea orientată $\overrightarrow{AB}$, adică $A_F=\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}=F\cdot AB\cdot\cos\varphi$, unde φ este unghiul format de acești doi vectori, iar F este modulul forței $\vec{F}$.

Dacă forța $\vec{F}$ (ca vector!) are coordonatele P, Q, R, iar punctele A și B au coordonatele $A(x_1,y_1,z_1)$ și $B(x_2,y_2,z_2)$, atunci

$$A_F = P(x_2 - x_1) + Q(y_2 - y_1) + R(z_2 - z_1), \qquad (1)$$

sau dacă notăm prin $\vec{r}(A)$ și $\vec{r}(B)$ razele vector $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$ ale punctelor A și B, atunci

$$A_F = \vec{F}\cdot(\vec{r}(B) - \vec{r}(A)).$$

Fie γ o curbă simplă, netedă și deschisă în R^3, caracterizată de ecuațiile parametrice

$$x = \varphi_1(t),\ y = \varphi_2(t),\ z = \varphi_3(t),\ t \in [a,b]. \qquad (2)$$

Pentru $t \in [a,b]$, punctul (x,y,z) descrie curba γ de la punctul $A(\varphi_1(a),\varphi_2(a),\varphi_3(a))$ la punctul $B(\varphi_1(b),\varphi_2(b),\varphi_3(b))$. Acest sens îl vom numi *sens direct* (sau pozitiv) și-l vom nota $\gamma^{(+)}$ sau AB. Dacă punctul (x,y,z) descrie curba de la B la A când t variază de la b la a, atunci sensul îl vom numi *sens invers* (sau negativ) și-l vom nota $\gamma^{(-)}$ sau BA. Curba γ în acest caz se numește *curbă orientată*.

Fie pe curba γ este definit vectorul forței

$$\vec{F}(x,y,z) = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\} =$$
$$= P(x,y,z)\cdot\vec{i} + Q(x,y,z)\cdot\vec{j} + R(x,y,z)\cdot\vec{k},$$

unde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sunt vectorii unitari (versori) ai axelor de coordonate: OX, OY, OZ. Funcțiile P, Q, și R se numesc *coordonatele* vectorului $\vec{F}$. Ne propunem să calculăm lucrul mecanic efectuat de forța variabilă $\vec{F}(x,y,z)$ când punctul material $M(x,y,z)$ se deplasează de-a lungul curbei γ din punctul A în punctul B.

Fie

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{i-1} < t_i < \ldots < t_n = b \qquad (3)$$

o diviziune Δ a segmentului $[a,b]$.

Punctele (vezi fig. 4)

$$A = M_0, M_1(\varphi_1(t_1), \varphi_2(t_1), \varphi_3(t_1)), \ldots,$$
$$M_i(\varphi_1(t_i), \varphi_2(t_i), \varphi_3(t_i)), \ldots M_n = B \qquad (4)$$

împart curba γ în n arce elementare $M_{i-1}M_i$ $(i = 1,\ldots,n)$. Numim *pasul diviziunii* Δ numărul $\lambda = \max\limits_{(i=1,\ldots,n)}(\Delta l_i)$, unde Δl_i este lungimea arcului elementar $M_{i-1}M_i$. Pe fiecare arc elementar $M_{i-1}M_i$ luăm un punct arbitrar N_i $(i = 1,\ldots,n)$. Valoarea funcției $\vec{F}$ în punctul N_i este $\vec{F}(N_i)$.

Presupunem că în punctele arcului $M_{i-1}M_i$ $(i = 1,\ldots,n)$ forța $\vec{F}_i$, care acționează, este constantă ca mărime și este egală cu $\vec{F}(N_i)$ și presupunem de asemenea că sub acțiunea acestei forțe punctul material $M(x,y,z)$ s-a deplasat nu pe arcul elementar $M_{i-1}M_i$, ci pe coarda lui $M_{i-1}M_i$.

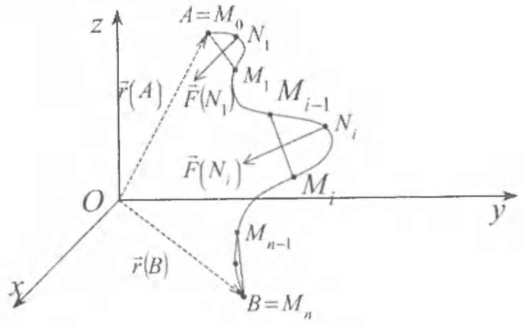


Fig. 4.

Lucrul forței constante $\vec{F}(N_i)$ pe segmentul $M_{i-1}M_i$ poate fi luat drept valoare aproximativă a lucrului $(A_i)_F$ efectuat de forța constantă $\vec{F}(N_i)$ pe arcul $M_{i-1}M_i$. Astfel, în baza relației (1), avem:

$$(A_i)_F \approx \vec{F}(N_i)\cdot\overrightarrow{M_{i-1}M_i} = P(N_i)\Delta x_i + Q(N_i)\Delta y_i + R(N_i)\Delta z_i,$$

unde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$, $i = 1,\ldots,n$.

Socotind că lucrul A_F al forței $\vec{F}(x,y,z)$ de-a lungul curbei γ este egal cu suma lucrurilor pe porțiunile lui:

$$A_F = \sum_{i=1}^{n} (A_i)_F ,$$

obținem:

$$A_F \approx \sigma_\Delta = \sum_{i=1}^{n} [P(N_i)\Delta x_i + Q(N_i)\Delta y_i + R(N_i)\Delta z_i].$$

Drept valoare exactă a lucrului de deplasare a unei unități de masă de-a lungul curbei γ din punctul A în punctul B se ia limita

$$A_F = \lim_{\lambda\to 0} \sigma_\Delta = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} [P(N_i)\Delta x_i + Q(N_i)\Delta y_i + R(N_i)\Delta z_i], \quad (5)$$

dacă ea există și este finită.

Vom studia limitele de această formă, făcând abstracție de sensul concret al problemei respective.

Așadar, fie γ o curbă simplă netedă și deschisă caracterizată de ecuațiile sale parametrice (2) situată în spațiul R^3 (în particular pe unul din planele de coordonate ale sistemului cartezian $OXYZ$) și $P(x,y,z)$ o funcție arbitrară, definită în orice punct al curbei γ.

Dacă (3) este o diviziune Δ a segmentului $[a,b]$, și λ pasul acestei diviziuni, atunci punctele

$$A = M_0, M_1, ..., M_i, ..., M_n = B$$

din relația (4) împart curba γ din punctul A în punctul B în n arce elementare $M_{i-1}M_i$ $(i = 1,...,n)$. Pe fiecare arc elementar $M_{i-1}M_i$ alegem câte un punct arbitrar N_i $(i = 1,...,n)$ și înmulțim valoarea funcției P în punctul N_i cu mărimea $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ a proiecției arcului elementar $M_{i-1}M_i$ pe axa OX (prin *proiecție* a arcului $M_{i-1}M_i$ pe axa OX vom subînțelege proiecția vectorului coardă $\overline{M_{i-1}M_i}$ pe această axă).

Suma acestor produse:

$$S'_\Delta = \sum_{i=1}^{n} P(N_i)\Delta x_i$$

se numește *sumă integrală* pentru funcția P pe arul AB după variabila x.

Definiția 1. Dacă există limita finită

$$\lim_{\lambda\to 0} S'_\Delta ,$$

atunci această limită se numește *integrală curbilinie a funcției P după variabila x* pe arcul AB al curbei date în sensul direct: de la punctul A la punctul B și se notează astfel:

$$\int_{AB} P(x,y,z)\,dx = \int_{\gamma(+)} P(x,y,z)\,dx .$$

Așadar,

$$\int_{AB} P(x,y,z)\,dx = \lim_{\lambda\to 0} S'_\Delta = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} P(N_i)\Delta x_i , \quad (6)$$

dacă această limită există și este finită.

În mod analog, pentru orice funcții $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ definite în orice punct al curbei netede și deschise γ se definesc integralele curbilinii ale funcțiilor Q și R după variabilele y și respectiv z pe arcul AB al curbei γ în sensul direct:

$$\int_{AB} Q(x,y,z)\,dx = \lim_{\lambda\to 0} S''_\Delta = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(N_i)\Delta y_i , \quad (7)$$

$$\int_{AB} R(x,y,z)\,dx = \lim_{\lambda\to 0} S'''_\Delta = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} R(N_i)\Delta z_i , \quad (8)$$

unde Δy_i și Δz_i sunt proiecțiile arcului elementar $M_{i-1}M_i$ (adică a vectorului coardă $\overline{M_{i-1}M_i}$) pe axa OY și respectiv pe axa OZ, dacă aceste limite există și sunt finite.

Definiția 2. Integralele curbilinii (6), (7) și (8) ale funcțiilor P, Q și R după variabilele x, y și z se numesc *integrale curbilinii de speța 2*. Dacă de-a lungul curbei γ în sensul direct există și sunt finite integralele (6), (7) și (8), atunci suma lor se numește *integrală curbilinie de speţa 2 în formă generală* şi se notează astfel:

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_{AB} P(x,y,z)dx + \int_{AB} Q(x,y,z)dy + \int_{AB} R(x,y,z)dz. \qquad (9)$$

Remarcăm că în baza relaţiei (5), integrala curbilinie de speţa 2 în formă generală reprezintă lucrul efectuat de forţa variabilă

$$\vec{F}(x,y,z) = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$$

de-a lungul curbei γ în sensul ei direct. Deci, formula (9) poate fi scrisă în formă vectorială astfel:

$$\int_{AB} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl}, \qquad (10)$$

unde $\vec{F} \cdot \overrightarrow{dl}$ este produsul scalar al vectorului $\vec{F} = \{P, Q, R\}$ cu vectorul deplasării $\overrightarrow{dl} = \{dx, dy, dz\}$.

Forma vectorială (10) a integralei curbilinii de speţa 2 este mai comodă în raport cu formulele (6)-(9), care exprimă integralele curbilinii de speţa 2 în coordonate (ale vectorului forţei $\vec{F} = \{P, Q, R\}$).

Vom compara acum definiţia integralei curbilinii de speţa 2 cu definiţia integralei curbilinii de speţa 1 din 6.2.1. Deşi se aseamănă, cele două definiţii se deosebesc esenţial: în cazul integralei curbilinii de speţa 1 la scrierea sumei integrale σ_Δ valoarea funcţiei $f(N_i)$ se înmulţeşte cu lungimea Δl_i a arcului elementar $M_{i-1}M_i$ al curbei γ, pe când în cazul integralei curbilinii de speţa 2, la alcătuirea sumelor integrale valoarea funcţiei în punctul N_i se înmulţeşte cu proiecţia Δx_i (sau Δy_i, Δz_i) a arcului elementar pe axa *OX* (sau, respectiv, axele *OY*, *OZ*).

În 6.2.1. am constatat că sensul curbei γ de-a lungul căreia se efectuează integrarea, nu joacă nici un rol în cazul integralei

curbilinii de speţa 1, deoarece lungimea Δl_i a arcului elementar $M_{i-1}M_i$ nu depinde de acest sens. Altfel stau lucrurile cu integrala curbilinie de speţa 2: proiecţia arcului elementar $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$ care este egală cu proiecţia vectorului $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$ pe una din axele *OX*, *OY*, *OZ* depinde esenţial de sensul arcului şi când acest sens se schimbă în opus, proiecţia îşi schimbă semnul în opus. Aşadar, pentru integralele curbilinii de speţa 2 vom avea

$$\int_{BA} P(x,y,z)dx = -\int_{AB} P(x,y,z)dx,$$

$$\int_{BA} Q(x,y,z)dy = -\int_{AB} Q(x,y,z)dy,$$

$$\int_{BA} R(x,y,z)dz = -\int_{AB} R(x,y,z)dz,$$

$$\int_{BA} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= -\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz,$$

după cum se vede, din existenţa integralelor din partea dreaptă, rezultă existenţa integralelor din partea stângă şi invers.

Următoarele proprietăţi ale integralelor curbilinii de speţa 2 rezultă imediat din definiţia acestor integrale. În acest caz vom presupune că fiecare din integralele ce se vor întâlni mai jos există.

P1. Factorul constant se scoate în afara semnului integralei curbilinii;

P2. Integrala curbilinie a sumei a două funcţii este egală cu suma integralelor termenilor respectivi;

Proprietatea se generalizează pentru un număr finit de funcţii.

P3. Dacă curba simplă, netedă şi deschisă γ este împărţită în două părţi γ_1 şi γ_2 cu ajutorul unui punct oarecare, situat pe γ, atunci integrala curbilinie pe toată curba γ este egală cu suma integralelor curbilinii pe părţile ei γ_1 şi γ_2.

Proprietatea este valabilă pentru orice număr finit de părţi.

P4. Dacă curba γ este situată într-un plan perpendicular pe axa OX, atunci

$$\int\limits_{\gamma} P(x,y,z)dx = 0.$$

Într-adevăr, în acest caz în suma integrală corespunzătoare S'_{Δ} toţi factorii Δx_i $(i = 1,\dots,n)$ sunt egali cu zero, ceea ce înseamnă că

$$\int\limits_{\gamma} P(x,y,z)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(N_i)\cdot 0 = 0.$$

Similar, pentru curba γ situată într-un plan perpendicular pe axa OY (sau OZ) obţinem

$$\int\limits_{\gamma} Q(x,y,z)dy = 0 \quad \text{şi, respectiv,} \quad \int\limits_{\gamma} R(x,y,z)dz = 0.$$

Ne vom ocupa de cazul când curba γ este închisă.

Convenim să numim *sens pozitiv* (sau *direct*) de parcurgere a curbei (conturului) γ, sensul în care mişcarea are loc în sensul opus mişcării acelor de ceasornic, adică astfel încât domeniul mărginit de conturul γ rămâne în stânga. Sensul opus de parcurgere a conturului γ se va numi *sens negativ* (sau *indirect*). Integralele curbilinii respective le vom nota prin simbolurile $\oint\limits_{\gamma^{(+)}}$ şi $\oint\limits_{\gamma^{(-)}}$. Dacă nu sunt date indicaţii suplimentare în privinţa sensului conturului γ vom subînţelege sensul pozitiv de parcurgere folosind simbolul obişnuit $\oint\limits_{\gamma}$. Desigur că această convenţie nu ne împiedică să considerăm, dacă e necesar, şi integrala, luată în sensul negativ. În cazul acesta o vom nota-o prin $\left(-\oint\limits_{\gamma}\right)$.

Nota 1: Integralele curbilinii de speţa 2 $((6)-(9))$ au fost definite pe curbe simple, netede şi deschise. În baza proprietăţii **P3** noţiunea de integrală curbilinie de speţa 2 poate fi extinsă în cazul unei curbe oarecare γ netedă pe porţiuni. Într-adevăr, împărţim curba γ în n părţi $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ astfel încât fiecare din ele să fie o curbă simplă şi deschisă, considerând ca puncte de divizare şi punctele $N_i(\varphi_1(t), (\varphi_2(t), (\varphi_3(t)$, unde t_i sunt punctele de discontinuitate de speţa 1 ale funcţiilor $\varphi_i(t)$, $\varphi'_i(t)$ $(i = 1,2,3)$. Atunci, în baza proprietăţii **P3** de mai sus, integrala curbilinie de speţa 2 pe curba γ se defineşte ca suma integralelor curbilinii de speţa 2 pe curbele $\gamma_1,\dots,\gamma_n$, dacă, bineînţeles, ele există.

P5. Integrala curbilinie de speţa 2 pe curba închisă şi netedă nu depinde de punctul iniţial, ci depinde numai de sensul parcurgerii curbei.

Într-adevăr, alegând punctul A ca punct iniţial (punctul A coincide cu punctul final B), obţinem, de exemplu (vezi fig. 5),

$$\oint\limits_{AmA_1nA} P(x,y,z)dx = \oint\limits_{AmA_1} P(x,y,z)dx + \oint\limits_{A_1nA} P(x,y,z)dx.$$

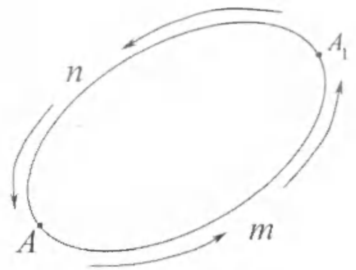


Fig. 5.

Luând acum punctul A_1 drept punct iniţial (punctul A_1 coincide cu punctul final B), obţinem

$$\oint\limits_{A_1nAmA_1} P(x,y,z)dx = \oint\limits_{A_1nA} P(x,y,z)dx + \oint\limits_{AmA_1} P(x,y,z)dx.$$

Deoarece părţile drepte ale acestor egalităţi sunt egale, rezultă că

$$\oint\limits_{AmA_1nA} P(x,y,z)dx = \oint\limits_{A_1mAnA_1} P(x,y,z)dx.$$

În mod similar se demonstrează proprietatea **P5** și pentru celelalte tipuri de integrale curbilinii de speța 2.

Formulăm acum condițiile suficiente de existență a integralelor curbilinii de speța 2.

Teorema 1. Fie funcțiile $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ și $R(x,y,z)$ continue în fiecare punct al curbei netede γ definită prin ecuațiile sale parametrice

$$x = \varphi_1(t),\ y = \varphi_2(t),\ z = \varphi_3(t),\ t \in [a,b]$$

și curba γ nu are puncte singulare. Atunci integralele curbilinii de speța 2 de tipul (6)-(9) pe curba γ există și se calculează astfel:

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx = \int_a^b P(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\varphi_3(t))\varphi_1'(t)dt, \tag{11}$$

$$\int\limits_{AB} Q(x,y,z)dy = \int_a^b Q(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\varphi_3(t))\varphi_2'(t)dt, \tag{12}$$

$$\int\limits_{AB} R(x,y,z)dz = \int_a^b R(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\varphi_3(t))\varphi_3'(t)dt, \tag{13}$$

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_a^b [P(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\varphi_3(t))\varphi_1'(t) +$$

$$+ Q(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\varphi_3(t))\varphi_2'(t) +$$

$$+ R(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\varphi_3(t))\varphi_3'(t)]dt. \tag{14}$$

Demonstrația acestei teoreme este similară demonstrației teoremei 1 despre existența și calcularea integralei curbilinii de speța 1 din 6.2.1. și o propunem cititorului (a se consulta de asemenea [10], partea 2-a, cap. 4, §2 și [6], cap. 9, partea 2-a, §3).

În cazul când curba γ este netedă și plană (din R^2) caracterizată de ecuațiile parametrice

$$x = t,\ y = \varphi(t),\ t \in [a,b],$$

adică de ecuația $y = \varphi(x),\ x \in [a,b]$ și funcțiile $P(x,y)$, $Q(x,y)$ sunt continue pe această curbă, atunci, ca un caz particular al formulelor (11)-(14) obținem formulele

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx = \int_a^b P(x,\varphi(x))dx, \tag{15}$$

$$\int\limits_{AB} Q(x,y)dy = \int_a^b Q(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx, \tag{16}$$

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int_a^b [P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x)]dx. \tag{17}$$

În încheiere vom stabili legătura dintre integralele curbilinii de speța 1 și integralele curbilinii de speța 2.

Fie γ o curbă netedă fără puncte singulare și funcțiile $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ continue în orice punct de pe curba γ. Alegem în calitate de parametru lungimea l a arcului AM, unde $M(x,y,z)$ este un punct curent al curbei γ. În acest caz curba γ este caracterizată de ecuațiile parametrice

$$x = \varphi_1(l),\ y = \varphi_2(l),\ z = \varphi_3(l),\ l \in [0,L],$$

unde L este lungimea curbei γ.

Dacă vom nota prin α, β și γ unghiurile formate de tangenta la curba γ orientată în sensul creșterii parametrului l cu axele de coordonate OX, OY și OZ, apoi, după cum se știe,

$$\cos\alpha = \varphi_1'(l),\ \cos\beta = \varphi_2'(l),\ \cos\gamma = \varphi_3'(l).$$

Aplicând formulele (11)-(14) obținem:

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx = \int_0^L P(\varphi_1(l),\varphi_2(l),\varphi_3(l))\varphi_1'(l)dl =$$

$$= \int\limits_{AB} P(x,y,z)\cos\alpha\, dl.$$

Similar

$$\int_{AB} Q(x,y,z)dy = \int_{AB} Q(x,y,z)\cos\beta \, dl\,;$$

$$\int_{AB} R(x,y,z)dz = \int_{AB} R(x,y,z)\cos\gamma \, dl \text{ și}$$

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_{AB} \left[P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\right] dl\,.$$

Nota 2: Integralele curbilinii de speța 2 nu depind de reprezentarea parametrică a curbei netede γ.

Exemplul 2. Să se calculeze integralele

a) $\frac{1}{2}\int_{\gamma^{(+)}} xdy - ydx$, unde $\gamma^{(+)}$ este elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ orientată în sens direct;

b) $\frac{1}{2}\int_{\gamma^{(+)}} xdy - ydx$, unde $\gamma^{(+)}$ este astroida $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$, orientată în sens direct;

c) $\int_{\gamma^{(+)}} \frac{x^2dy - y^2dx}{x^{5/3}+y^{5/3}}$, unde $\gamma^{(+)}$ este arcul astroidei $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$, ce unește punctul $A(a,0)$ cu punctul $B(0,a)$.

Rezolvare.

a) Forma parametrică a elipsei este $x = a\cos t, y = b\sin t$. Sensul direct al elipsei coincide cu variația parametrului t pe $[0,2\pi]$. Deci,

$$\frac{1}{2}\int_{\gamma^{(+)}} xdy - ydx = \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}(\cos^2 t + \sin^2 t)dt = \pi ab.$$

b) Sensul direct al astroidei coincide cu variația lui t pe $[0,2\pi]$. Deci,

$$\frac{1}{2}\int_{\gamma^{(+)}} xdy - ydx = \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t)dt =$$

$$= \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2tdt = \frac{3a^2}{16}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)dt = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

Nota 3: După cum vom vedea în 6.3.5, integralele din exemplele precedente reprezintă ariile figurilor plane mărginite de curbele respective. Propunem cititorului să calculeze ariile figurilor respective cu ajutorul integralelor definite sau duble (din 6.3) și să compare calculele efectuate (a se consulta ex. 2, p. 165 din [21].

c) Sensul direct al acestui arc de astroidă corespunde variației parametrului t pe $[0,\frac{\pi}{2}]$. Deci,

$$\int_{\gamma^{(+)}} \frac{x^2dy - y^2dx}{x^{5/3}+y^{5/3}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3a^3\cos^7 t\cdot\sin^2 t + 3a^3\sin^7 t\cdot\cos^2 t}{a^{5/3}\cos^5 t + a^{5/3}\sin^5 t} =$$

$$= 3a\sqrt[3]{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cdot\cos^2 t\cdot dt = \frac{3a}{4}\sqrt[3]{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 2t)dt =$$

$$= \frac{3a}{4}\sqrt[3]{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos 4t}{2}\right)dt = \frac{3\pi}{16}a\cdot\sqrt[3]{a}.$$

6.2.4. Independența integralei curbilinii de speța 2 de forma drumului de integrare

După cum s-a văzut, integrala curbilinie de speța 2 în formă generală are o semnificație fizică deosebită și anume lucrul mecanic al unei forțe variabile, care acționează asupra unui punct material ce se deplasează de-a lungul unei curbe netede. În legătură cu lucrul mecanic se pune problema independenței sale de forma drumului de integrare.

În acest sens un exemplu ne este oferit de forța gravitațională, pentru care se știe că lucrul mecanic nu depinde de drum.

Independența de drum a integralei curbilinii de speța 2, prezintă interes şi din punct de vedere matematic. Pentru a da condiţii necesare şi suficiente ca integrala curbilinie de speţa 2 să nu depindă de drumul de integrare sunt necesare câteva noţiuni.

În 5.1.3. am spus că o mulţime D se numeşte *domeniu deschis* (închis) dacă ea este deschisă sau respectiv închisă şi conexă. Astfel într-un domeniu D, oarecare ar fi punctele A şi B există o linie poligonală care uneşte punctele A şi B şi aparţine în întregime lui D.

Spunem că domeniul D din R^2 este un domeniu *simplu conex* dacă odată cu orice curbă γ simplă şi închisă ce aparţine lui D, aparţine lui D, şi porţiunea plană mărginită de curba γ.

Ca exemple de domenii simplu conexe din R^2 sunt: interiorul unui cerc, unui dreptunghi, unui triunghi etc. Partea plană mărginită de două cercuri concentrice (numită *coroană circulară*) nu este un domeniu simplu conex.

Domeniul D din R^3 se numeşte *simplu conex* dacă la orice curbă γ simplă şi închisă ce aparţine lui D, există cel puţin o suprafaţă S, mărginită de γ şi situată în întregime în D.

Ca exemple de domenii simplu conexe din R^3 pot servi: interiorul unei sfere, unui cub, unui paralelipiped etc.

Dacă dintr-un cub scoatem o sferă înscrisă, atunci domeniul rămas nu este un domeniu simplu conex.

Un domeniu care nu este simplu conex se numeşte *multiplu conex* (sau *policonex*).

Se mai spune, că domeniile simplu conexe sunt domeniile formate dintr-o singură „bucată" a spaţiului respectiv, adică în cazul planului R^2 aceste domenii sunt mărginite de o singură curbă simplă şi închisă. Domeniile multiplu conexe sunt domeniile cu „găuri" (adică în cazul planului R^2 acest domeniu este mărginit de o curbă exterioară simplă şi închisă şi mai multe curbe interioare simple şi închise ce nu se intersectează între ele).

Un domeniu multiplu conex poate fi transformat în domeniu simplu conex cu ajutorul unor tăieturi. Numărul minim de tăieturi

necesar pentru a transforma un domeniu multiplu conex D într-un domeniu simplu conex, mărit cu o unitate, se numeşte ordinul de conexitate al domeniului D.

De exemplu, domeniul multiplu conex D (vezi fig. 6), care reprezintă interiorul unui dreptunghi cu 2 găuri poate fi transformat într-un domeniu simplu conex cu ajutorul a 2 tăieturi: *ab* şi *cd* (numărul minim!!) (conturul acestui domeniu simplu conex este indicat cu săgeţi în sens direct (pozitiv)). De aceea domeniul D din fig. 6 este triplu conex (el este mărginit de trei contururi: unul exterior şi două - interioare , ce nu se intersectează între ele).

O coroană circulară, exteriorul unui cerc, exteriorul unui cilindru circular sunt domenii dublu conexe.

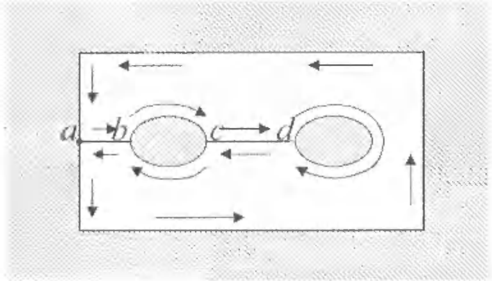


Fig. 6.

Fie funcţiile $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ continue într-un domeniu simplu conex D.

Definiţie. Spunem că integrala

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

nu depinde de forma drumului de integrare în domeniul D dacă valorile ei după orice curbă netedă, care aparţine lui D şi care are începutul în punctul A şi sfârşitul în punctul B, sunt aceleaşi.

În acest caz la notarea integralei este suficient să indicăm numai punctele A (iniţial) şi B (final) ale drumului de integrare. În legătură cu acest fapt sunt admise notaţiile:

$$\int_A^B P\,dx + Q\,dy + R\,dz \quad \text{sau} \quad \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz .$$

Condițiile necesare și suficiente pentru ca o integrală curbilinie de speța 2 să nu depindă de forma drumului de integrare sunt enunțate în următoarele teoreme (pentru domeniile simplu conexe din R^2 și R^3).

Teorema 1. Fie funcțiile $P(x,y)$, $Q(x,y)$ și derivatele lor parțiale $P'_y(x,y), Q'_x(x,y)$ sunt continue într-un domeniu simplu conex D din R^2. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(1). Pentru orice două puncte A și B din D, integrala curbilinie $\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ pe orice curbă simplă și netedă ce aparține lui D cu începutul în A și sfârșitul în B este aceeași;

(2). Există o funcție $U(x,y)$ astfel încât

$$dU(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy ,$$

adică expresia $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ reprezintă diferențiala totală a funcției $U(x,y)$ și $U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt$, unde $(x_0,y_0) \in D$;

(3). $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ pentru orice punct (x,y) din D;

(4). Integrala curbilinie de speța 2

$$\oint_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

pentru orice curbă γ simplă, netedă și închisă ce aparține în întregime domeniului D.

Demonstrație. Demonstrăm că $(1) \Rightarrow (2)$. Fie $A(x_0,y_0) \in D$ și $B(x,y)$ un punct arbitrar din D. Deci integrala

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

va depinde numai de poziția punctului $B(x,y)$, adică va fi o funcție $U(x,y)$ care depinde de variabilele x și y definită în D. Deci,

$$U(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy .$$

Demonstrăm că

$$dU(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy .$$

Fie $B(x,y)$ un punct oarecare fixat pe domeniul D. Îi dăm lui x o creștere Δx (vezi fig. 7), atunci

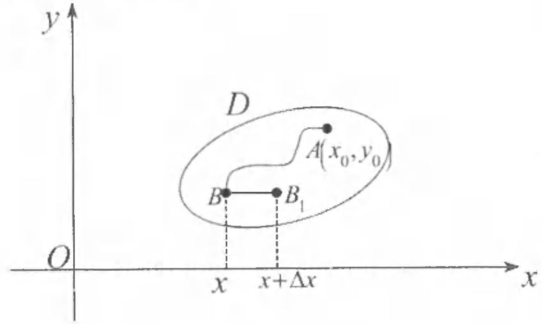


Fig. 7.

$$U(x+\Delta x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy .$$

Deoarece mărimea integralei curbilinii nu depinde de forma drumului de integrare vom considera

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

pe o curbă oarecare AB, iar integrala

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

pe curba AB_1 care constă din curba aleasă AB și segmentul de dreaptă BB_1, unde $B_1(x+\Delta x, y)$. În acest caz, în baza proprietăților **P3** și **P4** din 6.2.3. ale integralelor curbilinii de speța 2 (când curba γ este plană), avem:

$$\Delta_x U = U(x+\Delta x, y) - U(x,y) = \int_{AB_1} P(x,y)dx + Q(x,y)dy -$$
$$-\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy +$$
$$+\int_{BB_1} P(x,y)dx + Q(x,y)dy - \int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$
$$= \int_{BB_1} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x, y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$
$$= \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x, y)} P(x,y)dx,$$

deoarece segmentul BB_1 este perpendicular axei OY. Exprimând ultima integrală (curbilinie de speța 2) prin cea definită (utilizând formula (15) din 6.2.3.) și aplicând teorema despre valoarea medie a integralei definite (consecința din proprietatea 8 din 4.2.3, [20]) obținem:

$$\Delta_x U = \int_x^{x+\Delta x} P(t,y)\,dt = P(x+\theta\Delta x, y)\cdot \Delta x,$$

unde $0 < \theta < 1$.

Deoarece $P(x,y)$ este continuă pe D avem:

$$U'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x U}{\Delta U} = \lim_{\Delta x \to 0} P(x+\theta\Delta x, y) = P(x,y).$$

În mod analog se demonstrează, că

$$U'_y = Q(x,y).$$

Întrucât $P(x,y)$, $Q(x,y)$ sunt continue pe D, funcția $U(x,y)$ cu derivatele ei parțiale $U'_x(x,y) = P(x,y)$ și $U'_y(x,y) = Q(x,y)$ sunt continue pe D. Prin urmare funcția $U(x,y)$ este diferențiabilă pe D (teorema 3 din 5.4.2) și

$$dU(x,y) = U'_x(x,y)dx + U'_y(x,y)dy = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Evident că

$$U(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int_{(x_0,y_0)}^{(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$
$$= \int_{(x_0,y_0)}^{(x_0+\Delta x, y_0)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy +$$
$$+ \int_{(x_0+\Delta x, y_0)}^{(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$
$$= \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy =$$
$$= \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt,$$

deoarece în prima integrală variabila $y = y_0$ și deci $dy = 0$, iar în a doua integrală – $x = x_0 + \Delta x$ și $dx = 0$.

În virtutea teoremei 1 din 5.7.2., avem că relațiile (2) și (3) sunt echivalente.

Demonstrăm că relațiile (1) și (4) sunt de asemenea echivalente.

Într-adevăr, presupunem că relația (1) este valabilă și fie γ o curbă simplă, netedă și închisă ce aparține domeniului D (fig. 8).

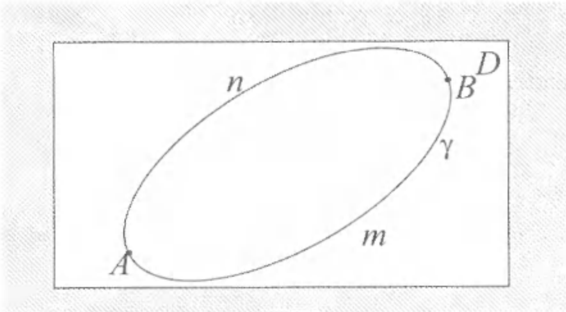


Fig. 8.

În virtutea proprietății **P3** din 6.2.3. avem:

$$\oint_{\gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AmB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy +$$

$$+\int_{BnA} P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

Deoarece integrala curbilinie $\int_{\gamma} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ nu depinde de forma drumului de integrare, obținem:

$$\int_{AmB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{AnB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=$$
$$=-\int_{BnA} P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

Prin urmare,

$$\oint_{\gamma} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0.$$

Invers, presupunem că

$$\oint_{\gamma} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

pe orice curbă γ închisă, netedă și simplă ce aparține domeniului D. Luăm două puncte arbitrare A și B din D și le unim prin orice două curbe AmB și AnB. Dacă aceste curbe se intersectează numai în punctele A și B, atunci, considerând curba închisă $AmBnA$ (fig. 9) obținem:

$$\oint_{AmBnA} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0,$$

adică

$$\int_{AmB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy+\int_{BnA} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0.$$

De unde

$$\int_{AmB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=-\int_{BnA} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=$$
$$=\int_{AnB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

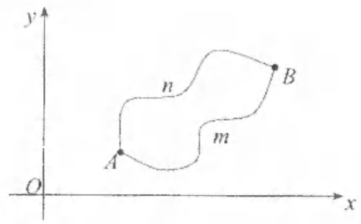


Fig. 9.

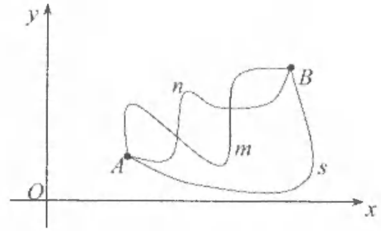


Fig. 10.

Dacă, însă, curbele AmB și AnB se intersectează în puncte comune diferite de punctele A și B, atunci mai luăm o a treia curbă AsB, care se intersectează cu curbele AmB și AnB numai în punctele A și B (vezi fig. 10). Conform celor demonstrate anterior (în cazul fig. 9) obținem:

$$\int_{AmB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{AsB} P\,dx+Q\,dy$$

și

$$\int_{AnB} P(x,y)dx+Q\,dy=\int_{AsB} P(x,y)\,dx+Q(x,y)dy,$$

adică

$$\int_{AmB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{AnB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

Rămâne să demonstrăm implicația $(3)\Rightarrow(4)$.

Deoarece relațiile (2) și (3) sunt echivalente, fie că există o funcție $U(x,y)$ astfel încât

$$dU(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

pentru orice punct (x,y) din D.

Să demonstrăm, în acest caz, că integrala

$$\int_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

nu depinde de forma drumului de integrare, deoarece după cum am stabilit deja condițiile (1) și (4) sunt echivalente.

Fie A şi B două puncte arbitrare fixe din D, AB orice curbă netedă care uneşte aceste puncte. Dacă

$$x=\varphi_1(t),\ y=\varphi_2(t),\ t\in[a,b]$$

sunt ecuaţiile parametrice ale curbei AB, atunci, utilizând formula (17), din 6.2.3., avem:

$$\int_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b dU(\varphi_1(t),\varphi_2(t))=$$

$$=\int_a^b U_t'(\varphi_1(t),\varphi_2(t))dt=U(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\Big|_a^b=$$

$$=U(\varphi_1(b),\varphi_2(b))-U(\varphi_1(a),\varphi_2(a))=U(B)-U(A),$$

adică integrala

$$\int_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

depinde numai de poziţia punctelor A şi B şi nu depinde de forma curbei AB.

Teorema este complet demonstrată.

Teorema 2. Fie funcţiile $P(x,y,z), Q(x,y,z)$ şi $R(x,y,z)$ împreună cu derivatele lor parţiale continue într-un domeniu simplu conex D din R^3. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(1). Pentru orice două puncte A şi B din D integrala curbilinie de speţa 2

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

pe orice curbă simplă şi netedă ce aparţine lui D cu începutul în A şi sfârşitul în B este aceeaşi;

(2). Există o funcţie $U(x,y,z)$ astfel încât

$$dU(x,y,z)=P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz \quad \text{şi}$$

$$U(x,y,z)=\int_{x_0}^{x} P(t,y_0,z_0)dt+\int_{y_0}^{y} Q(x,t,z_0)dt+\int_{z_0}^{z} R(x,y,t)dt;$$

(3). $$\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x},\ \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z}=\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial x}=\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}$$

pentru orice punct (x,y,z) din D;

(4). Integrala curbilinie de speţa 2

$$\oint_{\gamma} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=0$$

pentru orice curbă γ simplă, netedă şi închisă ce aparţine în întregime domeniului D.

Demonstraţia este similară demonstraţiei teoremei 1 şi o propunem cititorului (a se consulta, de exemplu, §9, cap.7 din [4]).

În teoremele 1 şi 2 domeniul D s-a presupus simplu conex. Condiţia aceasta este esenţială, aşa cum rezultă din următorul exemplu.

Fie că domeniul D coincide cu coroana circulară deschisă formată din circumferinţele concentrice

$$x^2+y^2=\frac{1}{4} \text{ şi } x^2+y^2=4,$$

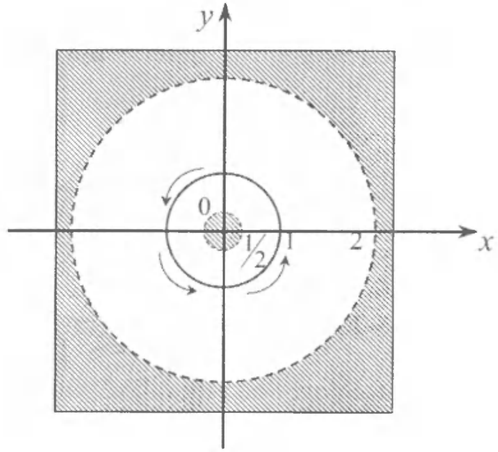


Fig. 11.

unde punctele de pe circumferinţele acestea nu aparţin domeniului. Deci domeniul este dublu conex: mărginit exterior de circumferinţa $x^2+y^2=4$ şi interior de circumferinţa $x^2+y^2=\frac{1}{4}$.

Fie curba γ definită de reprezentarea parametrică

$$x=\cos t,\ y=\sin t,\ t\in[0,2\pi],$$

adică circumferinţa $x^2+y^2=1$. Evident că γ este simplă, netedă (x_t', y_t' sunt funcţii continue pe $[0,2\pi]$) şi închisă.

Considerăm funcţiile $P(x,y)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$ şi $Q(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ definite pe domeniul dublu conex D (punctul $(0,0)$ nu aparţine lui D!!).

Avem:

$$P_x'(x,y)=\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2},\quad P_y'(x,y)=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$$Q_x'(x,y)=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \text{ şi } Q_y'(x,y)=-\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Observăm că funcţiile $P(x,y)$, $Q(x,y)$ împreună cu derivatele lor parţiale de ordinul 1 sunt continue pe D şi pentru orice punct (x,y) din D are loc egalitatea

$$P_y'(x,y)=Q_x'(x,y)=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Cu toate acestea, teorema 1 nu este valabilă, deoarece

$$\oint_{\gamma^{(+)}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\oint_{\gamma^{(+)}}\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}=$$

$$=\left|\begin{array}{cc} x=\cos t, & y=\sin t, \\ dx=-\sin t\,dt, & dy=\cos t\,dt, \\ \multicolumn{2}{c}{t\in[0,2\pi]} \end{array}\right|=\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\cos^2 t+\sin^2 t}dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}dt=2\pi\neq 0.$$

Exemplul 3. Să se calculeze

$$\int_{\gamma^{(+)}}(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$$

unde $\gamma^{(+)}$este

a) segmentul de dreaptă AB ce uneşte punctele $A(0,0)$ cu $B(1,1)$;
b) arcul AB al parabolei $y=x^2$;
c) arcul AB al parabolei $x=y^2$;
d) arcul AB al parabolei $y=x^3$.

Rezolvare. Observăm că funcţiile $P(x,y)=x^4+4xy^3$, $P_y'(x,y)=12xy^2$, $Q(x,y)=6x^2y^2-5y^4$ şi $Q_x'(x,y)=12xy^2$ sunt continue pe orice domeniu simplu conex D ce conţine punctele $A(0,0)$, $B(1,1)$ şi $Q_x'(x,y)=P_y'(x,y)$, pentru orice punct $(x,y)\in D$.

Prin urmare, integrala curbilinie iniţială nu depinde de forma drumului de integrare, adică este aceeaşi în toate cazurile a), b), c) şi d). Pentru cazul a) avem: $y=x$, $dx=dy$ şi $x\in[0,1]$.

Deci,

$$\int_{\gamma^{(+)}}(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)\,dy=$$

$$=\int_0^1(x^4+4x^4+6x^4-5x^4)\,dx=\int_0^1 6x^4dx=\frac{6}{5}.$$

6.3. Integralele duble

6.3.1. Definiția integralei duble. Criterii de integrabilitate

Integrala dublă reprezintă o generalizare a noțiunii de integrală definită în cazul funcției de două variabile.

Fie $D \subseteq R^2$ un domeniu închis în sensul definiției 11 din 5.1.3. Un domeniu închis și mărginit se numește *domeniu compact.*

Pe dreapta reală, orice domeniu închis reprezintă un segment, pe când în plan sau în spațiu există domenii închise care nu sunt segmente. Unele domenii închise din plan sau spațiu au o structură cu mult mai complicată decât aceea a unui segment. Cadrul firesc în care se definește integrala dublă este acela al domeniilor compacte a căror frontieră este o reuniune finită de imagini de curbe netede, adică *frontiera unui astfel de domeniu este o curbă netedă pe porțiuni.* Se demonstrează că astfel de domenii au arie, adică sunt cuadrabile ([8], V.2, §44).

În continuare vom considera numai domenii de acest fel. Fie $D \subset R^2$ un domeniu compact. Prin *diametru* al domeniului D, notat $d(D)$, înțelegem cea mai mare distanță dintre oricare două puncte de pe frontiera acestui domeniu.

Se numește *diviziune* Δ a domeniului D un număr finit de domenii compacte D_i $(i=1,...,n)$ fără puncte interioare comune, astfel încât

$$D = D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_n$$

și frontiera domeniului D_i $(i=1,...,n)$ este o curbă închisă netedă sau netedă pe porțiuni. *Pas* (*sau normă*) al diviziunii Δ a domeniului D, notat prin λ, se numește cel mai mare dintre diametrele domeniilor de diviziune D_i $(i=1,...,n)$.

Fie Δ_1 și Δ_2 două diviziuni ale domeniului D. Spunem că diviziunea Δ_2 este *mai fină* decât diviziunea Δ_1 și vom scrie $\Delta_1 \subset \Delta_2$ dacă orice domeniu al diviziunii Δ_1 sau coincide cu un

domeniu al diviziunii Δ_2, sau este egal cu o reuniune finită de domenii ale diviziunii Δ_2.

Dacă $\Delta_1 \subset \Delta_2$, atunci are loc inegalitatea $\lambda(\Delta_1) \geq \lambda(\Delta_2)$. Reciproc nu este adevărat: dacă Δ_1 și Δ_2 sunt două diviziuni ale lui D și $\lambda(\Delta_1) \geq \lambda(\Delta_2)$, nu rezultă că $\Delta_1 \subset \Delta_2$.

Fie $z = f(x,y)$ o funcție reală definită pe domeniul compact $D \subset R^2$ și fie $\Delta = (D_1,...,D_n)$ o diviziune arbitrară a domeniului D. Notăm prin ΔS_i aria domeniului de diviziune D_i $(i=1,...,n)$. Alegem în fiecare domeniu compact D_i (în interior sau pe frontieră) câte un punct $N_i(\xi_i, \eta_i)$ $(i=1,...,n)$ și înmulțim valoarea funcției $z = f(x,y)$ în acest punct cu aria ΔS_i. Adunând toate produsele de acest fel, obținem suma:

$$\sigma_\Delta = \sum_{i=1}^{n} f(N_i)\Delta S_i, \tag{1}$$

care se numește *sumă integrală* (*Riemann*) pentru funcția $z = f(x,y)$ în domeniul D. Evident că suma integrală depinde atât de modul de divizare a domeniului D în domenii D_i, cât și de alegerea punctelor intermediare N_i pe domeniile de diviziune D_i $(i=1,...,n)$.

Nota 1. Dacă funcția $z = f(x,y)$ este pozitivă pe domeniul D, atunci suma integrală (1) reprezintă suma volumelor cilindrilor drepți, ariile bazelor cărora sunt egale cu ΔS_i, iar înălțimile – $f(N_i)$. Prin urmare, suma integrală (1) aproximează volumul unui corp (numit cilindru curbiliniu), mărginit sus de graficul funcției $z = f(x,y)$, jos – de domeniul D și lateral – de o suprafață cilindrică, generatoarele căreia sunt paralele axei OZ, iar directoarea ei coincide cu frontiera domeniului D.

Nota 2. Dacă funcția $z = f(x,y)$ reprezintă densitatea de suprafață a domeniului material neomogen D, atunci suma integrală (1) reprezintă suma maselor domeniilor materiale D_i $(i=1,...,n)$, considerându-le deja ca domenii omogene cu densitatea de suprafaţă egală cu numărul $f(N_i)$. Prin urmare, suma (1) aproximează masa unui domeniu material neomogen D cu densitatea variabilă $f(x,y)$.

Definiţie: Se numeşte *integrală dublă* a funcţiei $f(x,y)$ pe domeniul D limita finită I a sumei integrale (1) când $\lambda \to 0$, adică:

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma_\Delta = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(N_i)\Delta S_i$$

ceea ce înseamnă: pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta > 0$, care în general depinde de ε, astfel încât oricare ar fi diviziunea Δ cu $\lambda(\Delta) < \delta$ şi oricare ar fi alegerea punctelor intermediare $N_i(\xi_i, \eta_i) \in D_i$, să avem $|\sigma_\Delta - I| < \varepsilon$.

Se notează astfel:

$$I = \iint_D f(x,y)dx\,dy.$$

În acest caz funcţia $z = f(x,y)$ se numeşte *funcţie integrabilă pe domeniul D*, *D – domeniu de integrare*, *x* şi *y* – *variabile de integrare*, iar $dx\,dy$ – *elementul de arie* în coordonatele carteziene.

Evident că integrala dublă $\iint_D f(x,y)dx\,dy$, dacă există, depinde numai de funcţia $z = f(x,y)$ şi de domeniul D şi nu depinde nici de modul de divizare a domeniului D, nici de alegerea punctelor intermediare N_i pe domeniile de diviziune D_i $(i = 1,...,n)$.

Remarcăm că o funcţie integrabilă trebuie să fie neapărat mărginită. Într-adevăr, în caz contrar, folosind un anumit mod de divizare a domeniului D în părţi, s-ar putea face, prin alegerea convenabilă a punctelor $N_i \in D_i$ $(i = 1,...,n)$, ca suma integrală (1) să fie oricât de mare după modul, deci limita finită I n-ar putea să existe (a se consulta teorema 2 din 4.2.1, [20]).

De aceea, vorbind despre condiţiile de integrabilitate a funcţiei $z = f(x,y)$, vom presupune de la început că funcţia z este mărginită. Aceasta este condiţia necesară de integrabilitate (tot aşa cum am avut în cazul funcţiei de o singură variabilă: [20], 4.2.1,

teorema 2). Însă această condiţie nu este şi suficientă, adică există funcţii mărginite, dar neintegrabile. Drept exemplu poate servi, funcţia $f(x,y)$, definită în pătratul $\{(x,y) | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ în felul următor:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \text{ şi } y \text{ sunt numele raţionale} \\ 0, \text{ dacă cel puţin unul din numerele } x \text{ şi } y \text{ este iraţional.} \end{cases}$$

Demonstraţia neintegrabilităţii acestei funcţii reiese nemijlocit din definiţia integralei duble (a se compara cu ex. 3 din 4.2.1, [20]).

Pentru a determina condiţiile suficiente de integrabilitate, ca şi în cazul funcţiei de o singură variabilă (4.2.2. din [20]), putem folosi teoria sumelor Darboux, care poate fi aplicată şi în cazul integralei duble. Fie deci funcţia $z = f(x,y)$, mărginită pe domeniul compact D, adică:

$$m \le f(x,y) \le M$$

pentru orice punct $(x,y) \in D$, unde $m = Inf_D z$ şi $M = \mathrm{Sup}_D z$.

Ca şi în cazul unei funcţii de o singură variabilă (4.2.2. din [20]) e comod şi aici să introducem aşa-numitele *sume inferioară şi superioară* ale lui Darboux:

$$s_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta S_i,\ S_\Delta = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta S_i,$$

unde $m_i = Inf_{D_i} z$, $M_i = \mathrm{Sup}_{D_i} z$ şi ΔS_i este aria domeniului compact D_i $(i = 1,...,n)$. Pentru diviziunea Δ a domeniului D, indiferent cum sunt alese punctele $N_i \in D_i$, vor fi satisfăcute inegalităţile:

$$s_\Delta \le \sigma_\Delta \le S_\Delta.$$

Dar prin alegerea convenabilă a acestor puncte se poate face ca valorile lui $f(N_i)$ să fie oricât de apropiate de m_i (sau M_i) şi, în acelaşi timp, suma integrală σ_Δ să fie cât mai apropiată de s_Δ (sau S_Δ). Aşadar, sumele Darboux superioară şi inferioară sunt respectiv marginile superioară şi inferioară exacte ale sumelor integrale (Reimann), care corespund aceleiaşi diviziuni a domeniului D.

Pentru sumele Darboux se pot stabili, ca în cazul liniar, următoarele proprietăţi:

1. La trecerea de la Δ la o divizare mai fină (prin adăugarea unor linii noi de divizare) a domeniilor compacte D_i $(i=1,...,n)$ suma inferioară a lui Darboux nu descreşte, iar cea superioară nu creşte.

2. Orice sumă inferioară a lui Darboux nu depăşeşte orice sumă superioară Darboux, chiar dacă aceasta din urmă corespunde unei alte diviziuni a domeniului D.

Demonstraţia acestor proprietăţi se face prin analogie cu demonstraţia dată în 4.2.2. din [20], cu o singură deosebire că în cazurile când acolo se vorbea de puncte de diviziune, aici trebuie să se vorbească de linii de diviziune. În fine, prin reproducerea exactă a demonstraţiei teoremei 1 din 4.2.2. din [20], obţinem următoarea teoremă:

Teorema 1 (*criteriul Darboux*). Fie $z=f(x,y)$ definită şi mărginită pe domeniul compact D. Pentru ca $\iint_D f(x,y)dx\,dy$ să existe, este necesar şi suficient ca $\lim_{\lambda\to 0}(S_\Delta - s_\Delta)=0$, sau în alte notaţii $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta s_i=0$, în care ω_i este oscilaţia (M_i-m_i) a funcţiei $f(x,y)$ pe domeniul de diviziune D_i $(i=1,...,n)$.

Teorema 2. Orice funcţie $z=f(x,y)$, continuă pe un domeniu compact D, este integrabilă pe acest domeniu.

Demonstraţie. Fie funcţia $z=f(x,y)$ continuă pe domeniul compact D, adică ea este şi uniform continuă pe D (vezi 5.3.2.). Atunci pe baza proprietăţii continuităţii uniforme, fiecărui $\varepsilon>0$ îi corespunde un $\delta>0$, astfel încât pentru orice diviziune a domeniului D în domenii D_i cu diametrele mai mici decât δ oscilaţia funcţiei va fi mai mică decât ε. În particular, dacă luăm $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{S_D}>0$, unde S_D – aria domeniului D, atunci pentru orice diviziune Δ a domeniului D cu $\lambda(\Delta)<\delta$ obţinem că toate oscilaţiile $\omega_i<\frac{\varepsilon}{S_D}$ $(i=1,...,n)$ şi

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta S_i<\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{S_D}\Delta S_i=\frac{\varepsilon}{S_D}\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i=\varepsilon .$$

Aceasta înseamnă că

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta S_i=0 .$$

Prin urmare, conform criteriului Darboux, teorema este demonstrată.

Clasa funcţiilor integrabile Riemann este mult mai bogată decât clasa funcţiilor continue. Acest fapt reiese din următoarea teoremă ([3], cap. XV, §1, p.3).

Teorema 3. Dacă mulţimea T a punctelor de discontinuitate a unei funcţii mărginite $z=f(x,y)$, definită pe un domeniu compact D ($T\subset D$) este formată dintr-un număr finit de arce netede, atunci funcţia $z=f(x,y)$ este integrabilă Riemann pe D.

În încheiere, în virtutea notei 1 şi notei 2, obţinem următoarele:

a) *Sensul geometric al integralei duble*: integrala dublă $\iint_D f(x,y)dx\,dy$ a unei funcţii $z=f(x,y)$ continue şi nenegative pe un domeniu compact D este egală cu volumul cilindrului curbiliniu mărginit sus de graficul funcţiei $z=f(x,y)$, jos – de domeniul D şi lateral – de o suprafaţă cilindrică cu generatoarele paralele axei OZ, iar directoarea ei coincide cu frontiera domeniului D.

b) *Sensul fizic al integralei duble*: integrala dublă $\iint_D f(x,y)dx\,dy$ a funcţiei $z=f(x,y)$ continue şi nenegativă este egală cu masa domeniului compact material, densitatea de suprafaţă a căruia este variabilă şi coincide cu funcţia $f(x,y)$.

6.3.2. Proprietățile integralelor duble

Proprietățile fundamentale ale integralei duble sunt similare proprietăților respective ale integralei definite. De aceea, propunem cititorului demonstrațiile următoarelor proprietăți ale integralei duble:

P1. Dacă f este integrabilă pe D, atunci integrala dublă $\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy$ nu depinde de felul cum sunt notate variabilele de integrare, adică:

$$\iint\limits_D f(x;y)dx\,dy = \iint\limits_D f(s,t)ds\,dt.$$

P2. Dacă f este integrabilă pe D și $k \in R$, atunci kf este integrabilă pe D și

$$\iint\limits_D kf(x,y)dx\,dy = k\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy.$$

P3. Dacă f și g sunt integrabile pe D, atunci funcția sumă $(f+g)$ este integrabilă pe D și

$$\iint\limits_D [f(x,y)+g(x,y)]dx\,dy = \iint\limits_D f(x,y)dx\,dy + \iint\limits_D g(x,y)dx\,dy.$$

P4. Dacă f este integrabilă pe D și domeniul D este reuniunea domeniilor D_1 și D_2 ce nu au puncte interioare comune, atunci f este integrabilă pe D_1, D_2 și

$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dx\,dy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dx\,dy.$$

P5. Dacă pretutindeni în domeniul D funcția $f(x,y) \geq 0$ și ea este integrabilă pe D, atunci $\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy \geq 0$.

P6. Dacă $f(x,y) \geq g(x,y)$ pentru orice $(x,y) \in D$ și dacă f și g sunt integrabile pe D, atunci

$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy \geq \iint\limits_D g(x,y)dx\,dy.$$

P7. Dacă f este integrabilă pe D, atunci $|f|$ este integrabilă pe D și

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy\right| \leq \iint\limits_D |f(x,y)|dx\,dy.$$

P8. $\iint\limits_D dx\,dy = S_D$, unde S_D este aria domeniului D.

P9. *Formulele de medie.*

a) Dacă f este mărginită și integrabilă pe D, adică

$$m \leq f(x,y) \leq M, (x,y) \in D,$$

atunci există un număr μ cuprins între m și M astfel încât

$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy = \mu \cdot S_D,$$

unde S_D – aria domeniului D.

b) Dacă $f(x,y)$ este continuă pe D, atunci există un punct $(\xi,\eta) \in D$ astfel încât să avem egalitatea:

$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy = f(\xi,\eta) \cdot S_D, \tag{1}$$

unde S_D – aria domeniului D. Formula (1) se numește *formula mediei* pentru integralele duble.

c) Dacă $f(x,y)$ este continuă pe D, iar $g(x,y)$ este continuă și își păstrează semnul constant pe D, atunci există un punct $(\xi,\eta) \in D$, astfel încât să avem

$$\iint\limits_D f(x,y) \cdot g(x,y)dx\,dy = f(\xi,\eta) \cdot \iint\limits_D g(x,y)dx\,dy. \tag{2}$$

Formula (2) se numește *formula generală a mediei* pentru integralele duble.

6.3.3. Calculul integralelor duble

Calculul integralelor duble se reduce la calculul integralelor definite.

Teorema 1. Dacă funcţia $f(x,y)$ este continuă pe domeniul compact D mărginit de liniile $x=a$, $x=b$ $(a<b)$, $y=\varphi(x)$, $y=\psi(x)$, unde $\varphi(x)$ şi $\psi(x)$ sunt continue pe $[a,b]$ şi $\varphi(x)\leq\psi(x)$ pe acest segment, atunci are loc egalitatea:

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy=\int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)dy\right)dx. \qquad (1)$$

Astfel, formula (1) ne permite să reducem calculul integralei duble la calculul succesiv a două integrale definite (sau mai pe scurt: la calculul unei integrale iterate). Integrala iterată din partea dreaptă a egalităţii (1) se scrie de obicei sub forma:

$$\int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)dy.$$

Demonstraţie. Considerăm $(n+1)$ drepte echidistante, paralele axei OY de ecuaţiile (a se consulta fig. 1)

$$x=x_0,\ x=x_1\ x=x_2,\dots,x=x_n,$$

unde $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{i-1}<x_i<\dots<x_n=b$ şi $(n+1)$ curbe caracterizate de ecuaţiile

$$y=\varphi_0(x),\ y=\varphi_1(x),\dots,y=\varphi_n(x),$$

unde $\varphi_k(x)=\varphi(x)+\dfrac{k}{n}[\psi(x)-\varphi(x)]$, $k=0,1,\dots,n$. Funcţiile $\varphi_k(x)$ sunt continue pe $[a,b]$ şi

$$\varphi(x)=\varphi_0(x)\leq\varphi_1(x)\leq\varphi_2(x)\leq\dots\leq\varphi_{k-1}(x)\leq\varphi_k(x)\leq\dots\leq$$
$$\leq\varphi_n(x)=\psi(x)$$

pentru orice $x\in[a,b]$.

Acest sistem de linii împarte domeniul D în n^2 domenii de diviziune:

$$D_{ik}=\{(x,y)\in D,\ x_{i-1}\leq x\leq x_i,\ \varphi_{k-1}(x)\leq y\leq\varphi_k(x)\},$$

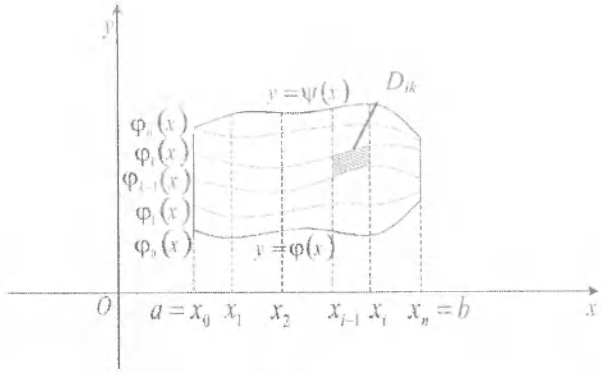


Fig. 1.

ariile cărora le vom nota prin ΔS_{ik} $(i,k=1,2,\dots,n)$. Întrucât funcţia $f(x,y)$ este continuă pe D_{ik}, avem:

$$m_{ik}\leq f(x,y)\leq M_{ik} \qquad (2)$$

pentru orice $(x,y)\in D_{ik}$, unde m_{ik}, M_{ik} sunt respectiv valorile cea mai mică şi cea mai mare ale funcţiei $f(x,y)$ pe domeniul compact D_{ik} (în virtutea teorema lui Weierstrass din 5.3.2.).

Integrăm relaţia (2) după y pentru fiecare valoare a lui $x\in[x_{i-1},x_i]$:

$$\int_{\varphi_{k-1}(x)}^{\varphi_k(x)}m_{ik}\,dy\leq\int_{\varphi_{k-1}(x)}^{\varphi_k(x)}f(x,y)dy\leq\int_{\varphi_{k-1}(x)}^{\varphi_k(x)}M_{ik}\,dy$$

sau

$$m_{ik}[\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)]\leq\int_{\varphi_{k-1}(x)}^{\varphi_k(x)}f(x,y)dy\leq$$
$$\leq M_{ik}[\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)]. \qquad (3)$$

Integrala din relaţia (3) reprezintă o funcţie continuă în raport cu parametrul x pe segmentul $[x_{i-1},x_i]$. Integrând inegalitatea dublă (3) în raport cu x în limitele de la x_{i-1} până la x_i şi ţinând seama că

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}[\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)]dx=\Delta S_{ik}$$

obţinem:

$$m_{ik}\Delta S_{ik}\leq\int_{x_{i-1}}^{x_i}dx\int_{\varphi_{k-1}(x)}^{\varphi_k(x)}f(x,y)dy\leq M_{ik}\cdot\Delta S_{ik}\ . \qquad (4)$$

Inegalităţile (4) au loc în fiecare domeniu de diviziune D_{ik} $(i,k=1,...,n)$. Însumându-le după k de la $k=1$ până la $k=n$, avem:

$$\sum_{k=1}^{n}m_{ik}\Delta S_{ik}\leq\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{\varphi_{k-1}(x)}^{\varphi_k(x)}f(x,y)dy\right]dx\leq\sum_{k=1}^{n}M_{ik}\Delta S_{ik} \text{ sau}$$

$$\sum_{k=1}^{n}m_{ik}\Delta S_{ik}\leq\int_{x_{i-1}}^{x_i}dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)dy\leq\sum_{k=1}^{n}M_{ik}\Delta S_{ik}\ .$$

Însumăm ultimele inegalităţi după i de la $i=1$ până la $i=n$, obţinem:

$$\sum_{i,k=1}^{n}m_{ik}\Delta S_{ik}\leq\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)dy\leq\sum_{i,k=1}^{n}M_{ik}\Delta S_{ik}$$

sau

$$\sum_{i,k=1}^{n}m_{ik}\Delta S_{ik}\leq\int_{a}^{b}dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)dy\leq\sum_{i,k=1}^{n}M_{ik}\Delta S_{ik}\ . \qquad (5)$$

Sumele $\sum_{i,k=1}^{n}m_{ik}\Delta S_{ik}$, $\sum_{i,k=1}^{n}M_{ik}\Delta S_{ik}$ reprezintă respectiv sumele inferioară şi superioară Darboux pentru funcţia $f(x,y)$ şi diviziunea dată a domeniului D.

Presupunem că $n\to\infty$. Întrucât funcţiile $\varphi(x)$ şi $\psi(x)$, fiind continue pe $[a,b]$, sunt şi uniform continue pe acest segment, se poate de arătat că pasul diviziunii în acest caz tinde către zero. Deoarece funcţia $f(x,y)$ este integrabilă pe D, avem:

$$\lim_{\lambda\to0}\sum_{i,k=1}^{n}m_{ik}\Delta S_{ik}=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i,k=1}^{n}M_{ik}\Delta S_{ik}=\iint_D f(x,y)dx\,dy\ .$$

Prin urmare, această limită coincide cu integrala iterată din mijlocul inegalităţii duble (5), adică

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy=\int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)dy\ .$$

Teorema este demonstrată.

Nota 1. La calcularea integralei duble cu ajutorul formulei (1) mai întâi se calculează integrala interioară $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)dy$ pentru o valoare constantă a variabilei x, $x\in[a,b]$ în limitele de variaţie a lui y (pentru domeniul D), după aceasta funcţia obţinută în raport cu x se integrează după x în limitele maxime de variaţie a variabilei x pentru domeniul D.

Schimbând în teorema 1 şi în demonstraţia ei rolurile variabilelor x şi y, obţinem următoarea teoremă:

Teorema 2. Dacă funcţia $f(x,y)$ este continuă pe domeniul compact D mărginit de liniile $y=c$, $y=d\ (c<d)$, $x=u(y)$, $x=v(y)$, unde funcţiile $u(y)$ şi $v(y)$ sunt continue pe segmentul $[c,d]$ şi $u(y)\leq v(y)$ pe acest segment, atunci are loc egalitatea:

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy=\int_c^d dy\int_{u(y)}^{v(y)}f(x,y)dx\ . \qquad (6)$$

La calcularea integralei duble cu ajutorul formulei (6) mai întâi se calculează integrala interioară $\int_{u(y)}^{v(y)}f(x,y)dx$ pentru o valoare constantă a lui y, $c\leq y\leq d$, în limitele de variaţie ale lui x (pentru domeniul D), apoi funcţia obţinută în raport cu variabila y se integrează după y în limitele maxime de variaţie ale lui y pentru domeniul D.

Nota 2. Domeniul D din teorema 1 se numeşte *domeniu simplu (regulat) în raport cu axa OY*, iar domeniul D din teorema 2 se numeşte *simplu (regulat) în raport cu axa OX* ([4], cap. VIII, §4).

Nota 3. Dacă funcţia $f(x,y)$ este continuă într-un domeniu compact D care satisface simultan condiţiile teoremelor 1 şi 2, adică D este simplu (regulat) în raport cu axele de coordonate, atunci la calcularea integralei duble $\iint_D f(x,y)dx\,dy$ poate fi aleasă oricare din formulele (1) sau (6), adică poate fi aleasă orice ordine de integrare (integrala exterioară să fie luată în raport cu x, cea interioară în raport cu y sau invers). De exemplu (vezi fig. 2.), dacă frontiera domeniului D este intersectată de fiecare dreaptă paralelă cu axa OY nu mai mult decât în două puncte (D este limitat de liniile $x=a$, $x=b$, arcul EAB are ecuația $y=\varphi(x)$, arcul ECB are ecuația $y=\Psi(x)$), și de fiecare dreaptă paralelă cu axa OX nu mai mult decât în două puncte (D este limitat de liniile $y=c$, $y=d$, arcul AEC are ecuația $x=u(y)$, arcul ABC are ecuația $x=v(y)$), atunci sunt aplicabile ambele formule (1) și (6), adică:

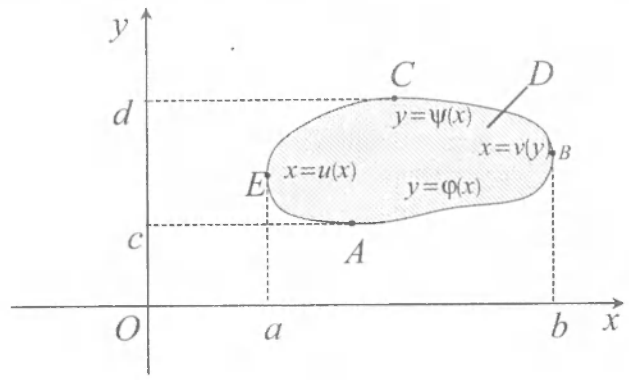


Fig. 2.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy=\int_c^d dy\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)\,dx,$$

unde $\varphi(x)\le\psi(x), x\in[a,b]$, $\varphi(x),\psi(x)$ continue pe $[a,b]$ și $u(y)\le v(y)$, $y\in[c,d]$, $u(y), v(y)$ continue pe $[c,d]$.

Exemplul 1. Să se calculeze integrala dublă $\iint_D \frac{\sin y}{y}\,dx\,dy$,

unde D este mărginit de dreptele $x=0$, $y=\frac{\pi}{2}$ și $y=x$.

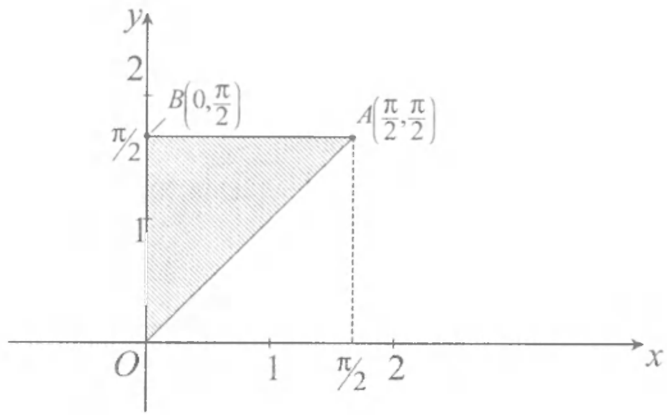


Fig. 3.

Observăm că domeniul D (vezi fig. 3) este simplu (regulat) în raport cu ambele axe de coordonate.

Aplicăm formula (6):

$$\iint_D \frac{\sin y}{y}\,dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dy\int_0^y \frac{\sin y}{y}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{y}\left(\int_0^y dx\right)dy=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{y}\cdot y\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y\,dy=-\cos y\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$$

Dacă, însă, aplicăm formula (1), obținem:

$$\iint_D \frac{\sin y}{y}\,dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\int_0^y \frac{\sin y}{y}\,dy$$

și această integrală nu poate fi calculată, deoarece integrala $\int \frac{\sin y}{y}\,dy=S_i(y)$ definește *sinusul integral*, care nu se exprimă prin funcții elementare ([20], 4.1.6.).

Nota 4. Dacă domeniul compact D este un dreptunghi

$$\{(x,y)|a\le x\le b, c\le y\le d\},$$

iar funcția $f(x,y)$ este continuă pe D, atunci, aplicând formulele (1) și (6), obținem:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx .$$

În particular, dacă $f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y)$, atunci integrala dublă pe D este egală cu produsul a două integrale definite:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f_1(x)\cdot f_2(y)\,dy =$$

$$= \left(\int_a^b f_1(x)\,dx\right)\left(\int_c^d f_2(y)\,dy\right).$$

Nota 5. La calcularea integralei duble pe un domeniu compact D de o formă mai complicată (de exemplu domeniul D nu este simplu în raport cu axele de coordonate), el se împarte într-un număr finit de domenii compacte care satisfac condițiile teoremei 1 sau 2 și apoi se aplică proprietatea aditivă a integralei duble (proprietatea P4 din 6.3.2.). Fiecare din integralele obținute se calculează după formulele (1) sau (6).

Exemplul 2. Să se compună formula pentru calcularea integralei duble $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ pe domeniul D mărginit de liniile $x^2+y^2=2y$ și $x^2+y^2=4y$.

Divizăm domeniul D în trei părți D_1, D_2 și D_3, după cum este arătat în figura 4.

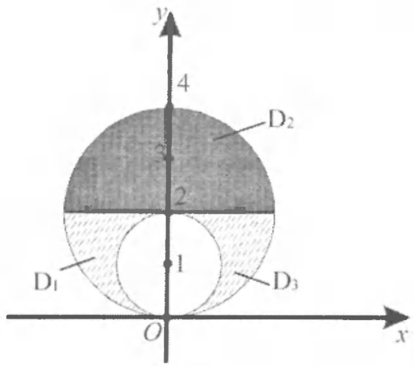


Fig. 4.

Fiecare domeniu obținut satisface, de exemplu, condițiile teoremei 2. Domeniul D_1 este mărginit de liniile $y=0$, $y=2$, $x=-\sqrt{4y-y^2}$, $x=-\sqrt{2y-y^2}$, adică:

$$\iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{-\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,dx .$$

Domeniul D_2 este mărginit de liniile $y=2$, $y=4$, $x=-\sqrt{4y-y^2}$, $x=\sqrt{4y-y^2}$, adică:

$$\iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_2^4 dy \int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)\,dx .$$

Domeniul D_3 este mărginit de liniile $y=0$, $y=2$, $x=\sqrt{2y-y^2}$, $x=\sqrt{4y-y^2}$, adică:

$$\iint_{D_3} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 dy \int_{\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)\,dx .$$

Prin urmare,

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy +$$

$$+\iint_{D_3} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{-\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,dx +$$

$$+\int_2^4 dy \int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_0^2 dy \int_{\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

6.3.4. Aplicațiile integralei duble

În geometrie integrala dublă se aplică la rezolvarea următoarelor probleme:

G1. *Calcularea ariilor figurilor plane.*

Dacă vom alcătui suma integrală pentru funcția $f(x,y)=1$

continuă pe domeniul compact D, atunci această sumă va fi egală cu aria S_D a domeniului D pentru orice diviziune a domeniului D. Prin urmare,

$$S_D = \iint_D dx\,dy$$

(a se consulta **P8** din 6.3.2.).

G2. *Calcularea volumelor unor anumite corpuri.*

Reieşind din sensul geometric al integralei duble (6.3.1.), avem că volumul V al unui corp mărginit de graficul funcţiei $z = f(x, y)$, nenegative şi continue pe un domeniu compact D; planul $z = 0$ şi suprafaţa cilindrică la care generatoarele sunt paralele cu axa OZ şi drept directoare a căreia serveşte frontiera domeniului D (aşa corp se numeşte *cilindru curbiliniu*), este egal cu integrala dublă de la funcţia $z = f(x, y)$ pe domeniul D, adică:

$$V = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy .$$

Dacă funcţia $z = f(x, y)$ este nepozitivă şi continuă pe D, atunci volumul cilindrului curbiliniu respectiv este egal cu:

$$V = -\iint_D f(x, y)\,dx\,dy .$$

Dacă funcţia $z = f(x, y)$ este continuă şi îşi schimbă semnul pe D, atunci împărţim domeniul D în două domenii D_1 şi D_2, astfel încât pe fiecare din aceste domenii funcţia $z = f(x, y)$ îşi păstrează semnul: de exemplu, pe D_1, funcţia $z = f(x, y)$ este nenegativă, iar pe D_2 funcţia $z = f(x, y)$ este nepozitivă. Atunci, dacă D_1 şi D_2 nu au puncte interioare comune sau $f(x, y) = 0$ în punctele lor comune, avem:

$$V = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x, y)\,dx\,dy - \iint_{D_2} f(x, y)\,dx\,dy .$$

Dacă corpul, volumul căruia se calculează, este mărginit sus de suprafaţa $z = f_2(x, y)$, jos – de suprafaţa $z = f_1(x, y)$, iar lateral de

o suprafaţă cilindrică cu generatoarele paralele axei OZ şi directoarea căreia coincide cu frontiera domeniului D, care este proiecţia comună a celor două suprafeţe pe planul XOY, atunci volumul acestui corp este egal cu diferenţa volumelor cilindrilor curbilinii respectivi, adică:

$$V = \iint_D [f_2(x, y) - f_1(x, y)]\,dx\,dy , \qquad (1)$$

unde $f_1(x, y)$ şi $f_2(x, y)$ sunt orice funcţii continue pe D, ce satisfac condiţia

$$f_1(x, y) \le f_2(x, y) .$$

Astfel de corpuri le vom numi *domenii simple* (*regulate*) *în raport cu axa OZ*. Formula (1) rămâne valabilă şi pentru domenii simple (regulate) în raport cu axele OY şi OX.

G3. *Calcularea ariilor suprafeţelor curbe* (*neplane*).

Definiţia 1. Fie φ o funcţie reală definită şi continuă pe o mulţime $D \subseteq R^2$. Dacă φ admite derivatele parţiale de ordinul 1 continue pe D, atunci mulţimea punctelor din spaţiul R^3

$$S = \{(x, y, z) | z = \varphi(x, y), (x, y) \in D\}$$

se numeşte *suprafaţă netedă* caracterizată de ecuaţia $z = \varphi(x, y), (x, y) \in D$.

Dacă punctul (x, y) din planul XOY descrie o mulţime $E \subset D$, punctul corespunzător (x, y, z), $z = \varphi(x, y)$, descrie în spaţiul R^3 raportat la sistemul cartezian de coordonate $OXYZ$ o porţiune a suprafeţei S. În continuare vom considera D un domeniu compact cu frontiera l, care reprezintă o curbă simplă, închisă şi netedă sau netedă pe porţiuni. Astfel de domenii D sunt cuadrabile, adică au arie ([8], V.2, §44).

Dacă curba l este definită de următoarea reprezentare parametrică

$$x = h_1(t), y = h_2(t), t \in [a, b],$$

atunci curba $L \subset R^3$ definită de reprezentarea parametrică

$x = h_1(t),\ y = h_2(t),\ z = \varphi(x,y) = \varphi(h_1(t), h_2(t)),\ t \in [a,b]$ se numește *frontiera* suprafeței S.

Fie $\Delta = (D_1, D_2, \ldots, D_n)$ o diviziune oarecare a domeniului compact D și $N_i(\xi_i, \eta_i)$ un punct oarecare din D_i. Fie M_i acel punct de pe suprafața S ale cărui coordonate sunt ξ_i, η_i și $z_i = \varphi(\xi_i, \eta_i)$ (vezi fig. 5). În punctul M_i ducem planul tangent (P_i) la suprafața S. Considerăm cilindrul care are drept curbă directoare frontiera domeniului D_i și generatoarele paralele cu axa OZ. Acest cilindru determină pe planul tangent (P_i) un domeniu T_i cu proprietatea că proiecția lui T_i pe planul XOY coincide cu D_i. Să considerăm suma $\sum_{i=1}^{n} \Delta\tau_i$, unde $\Delta\tau_i$, este aria domeniului T_i.

Definiția 2. Se numește *arie a suprafeței S* limita finită a sumei $\sum_{i=1}^{n} \Delta\tau_i$, când pasul λ al diviziunii Δ tinde către zero, adică

$$A_S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta\tau_i .$$

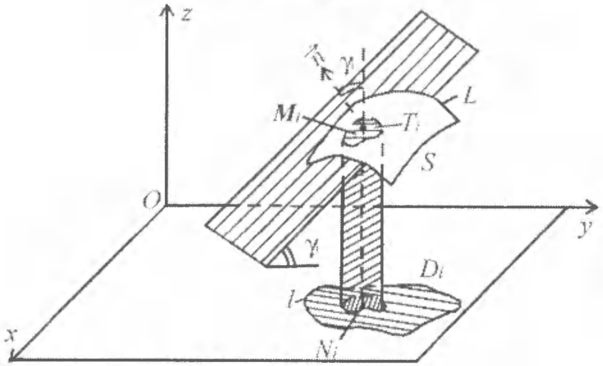


Fig. 5.

Are loc următoarea teoremă:

Teoremă. Dacă S este o suprafață netedă caracterizată de ecuația $z = \varphi(x,y), (x,y) \in D$, unde D este un domeniu compact cu frontiera l netedă pe porțiuni și $z = \varphi(x,y)$ este continuă pe D, atunci aria acestei suprafețe

$$A_S = \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dx\, dy . \qquad (2)$$

Demonstrație. Fie γ_i unghiul ascuțit format de normala la suprafața S în punctul M_i cu axa OZ (fig. 5). Se vede imediat că unghiul ascuțit format de planul tangent (P_i) cu planul XOY este egal cu γ_i, deoarece γ_i este unghiul liniar al unghiului diedru dintre planele (P_i) și XOY. În baza formulelor din geometria analitică, avem:

$$\Delta\tau_i = \frac{\Delta\sigma_i}{\cos\gamma_i},\quad \cos\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + (z'_x(N_i))^2 + (z'_y(N_i))^2}},$$

unde $\Delta\sigma_i$ este aria domeniului elementar D_i. De unde

$$\Delta\tau_i = \frac{\Delta\sigma_i}{\cos\gamma_i} = \sqrt{1 + (z'_x(N_i))^2 + (z'_y(N_i))^2}\,\Delta\sigma_i .$$

Prin urmare,

$$A_S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta\tau_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (z'_x(N_i))^2 + (z'_y(N_i))^2}\,\Delta\sigma_i .$$

Deoarece limita sumei integrale din partea dreaptă a acestei egalități, prin definiție, reprezintă integrala dublă

$$\iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_x)^2}\, dx\, dy,$$

care există în virtutea teoremei 2 din 6.3.1., atunci definitiv obținem formula (2).

Teorema este demonstrată.

Dacă ecuaţia suprafeţei S se dă sub forma $x = g(y,z)$ sau $y = h(x,z)$, atunci formulele respective pentru calcularea ariei suprafeţei S au forma:

$$A_S = \iint_{D_1} \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2}\, dy\, dz, \qquad (3)$$

$$A_S = \iint_{D_2} \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2}\, dx\, dz, \qquad (4)$$

unde D_1 şi D_2 sunt proiecţiile suprafeţei S pe planele YOZ şi respectiv XOZ.

În fizică integrala dublă se aplică la rezolvarea următoarelor probleme:

F1. *Calcularea masei unei plăci.*

Considerăm în planul XOY o placă materială, care reprezintă un domeniu compact, în care este distribuită o masă M cu densitatea $\gamma(x,y)$. Presupunem că funcţia $\gamma(x,y)$ este nenegativă şi continuă pe D. Reieşind din sensul fizic al integralei duble (6.3.1.), avem că masa M a acestei plăci materiale este egală cu

$$M = \iint_D \gamma(x,y)\, dx\, dy.$$

Fie $D_1, D_2, ..., D_n$ o diviziune a domeniului D. Presupunem că masa m_i a fiecărui domeniu D_i este concentrată într-un punct $N_i(\xi_i, \eta_i) \in D_i$, adică înlocuim domeniul material D printr-un sistem fictiv de n puncte materiale $N_i(\xi_i, \eta_i)$ $(i = 1, ..., n)$, care au (în sumă) aceeaşi masă ca şi domeniul D.

Momentele statice M_{OX}, M_{OY} în raport cu axele de coordonate, momentele de inerţie I_{OX}, I_{OY} în raport cu axele OX şi respectiv OY, precum şi coordonatele centrului de greutate x_0, y_0 ale domeniului D pot fi considerate aproximativ egale cu valorile mărimilor respective pentru sistemul indicat de puncte materiale, adică:

$$M_{OX} \approx \sum_{i=1}^{n} \eta_i m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \eta_i \gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i,$$

$$M_{OY} \approx \sum_{i=1}^{n} \xi_i m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \xi_i \gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i,$$

$$I_{OX} \approx \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 \gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i,$$

$$I_{OY} \approx \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i,$$

$$x_0 \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i \gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i}{\sum_{i=1}^{n} \gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i},$$

$$y_0 \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} \eta_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} \eta_i \gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i}{\sum_{i=1}^{n} \gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i}.$$

Valoarea exactă a fiecărei mărimi se determină ca limita valorii aproximative respective, când pasul de diviziune λ al domeniului D tinde către zero.

Prin urmare, obţinem următoarele rezultate:

F2. *Momentele statice* ale plăcii plane D de densitate $\gamma(x,y)$, continuă şi nenegativă pe D în raport cu axele de coordonate, se calculează după formulele:

$$M_{OX} = \iint_D y \cdot \gamma(x,y)\, dx\, dy, \quad M_{OY} = \iint_D x \cdot \gamma(x,y)\, dx\, dy.$$

Notă: În 4.5.3. din [20] pentru momentele statice ale unei plăci plane omogene ($\gamma(x,y) = const = 1$) D, mărginită de dreptele $x = a$, $x = b$, $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, unde $f_1(x) \le f_2(x)$ şi $f_1(x)$, $f_2(x)$ sunt continue pe $[a,b]$, am stabilit următoarele formule:

$$M_{OX}=\frac{1}{2}\int_a^b\left[f_2^2(x)-f_1^2(x)\right]dx,\ M_{OY}=\int_a^b x\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx.$$

Aceste formule rezultă, desigur, din formulele de mai sus. De exemplu:

$$M_{OX}=\iint_D y\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_{f_1(x)}^{f_2(x)}y\,dy=\frac{1}{2}\int_a^b\left[f_2^2(x)-f_1^2(x)\right]dx \text{ etc.}$$

În 4.5.3. din [20] la calcularea acestei integrale au fost folosite anumite considerente geometrice relativ la poziția unui dreptunghi omogen.

F3. *Momentele de inerție* în raport cu axele și originea sistemului de coordonate *XOY* ale unei plăci plane *D* de densitatea $\gamma(x,y)$, care este o funcție continuă și nenegativă pe *D*, se calculează după formulele:

$$I_{OX}=\iint_D y^2\cdot\gamma(x,y)dx\,dy,\ I_{OY}=\iint_D x^2\cdot\gamma(x,y)dx\,dy$$

și

$$I_O=I_{OX}+I_{OY}=\iint_D(x^2+y^2)\gamma(x,y)dxdy.$$

F4. *Coordonatele centrului de greutate*, ale unei plăci *D* de densitatea $\gamma(x,y)$, continuă și nenegativă pe *D*, se calculează după formulele:

$$x_0=\frac{M_{OY}}{M}=\frac{\iint_D x\gamma(x,y)dx\,dy}{\iint_D\gamma(x,y)dx\,dy},\quad y_0=\frac{M_{OX}}{M}=\frac{\iint_D y\gamma(x,y)dx\,dy}{\iint_D\gamma(x,y)dx\,dy}.$$

În cazul când placa *D* este omogenă, adică $\gamma(x,y)=\text{const}$, obținem:

$$x_0=\frac{\iint_D x\,dx\,dy}{\iint_D dx\,dy}=\frac{1}{S_D}\iint_D x\,dx\,dy,\quad y_0=\frac{\iint_D y\,dx\,dy}{\iint_D dx\,dy}=\frac{1}{S_D}\iint_D y\,dx\,dy,$$

unde S_D – aria domeniului *D*.

6.3.5. Formula Green-Ostrogradski

Formula lui G. Green (1793-1841 – matematician și fizician englez) și Ostrogradski (1801-1861 – matematician rus) stabilește legătura dintre integrala curbilinie de speța 2 pe un contur închis și integrala dublă pe domeniul mărginit de acest contur.

Teorema 1. Fie $P(x,y)$ o funcție reală definită și continuă pe un domeniu compact *D* mărginit de liniile $x=a$, $x=b$, $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, unde $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$ și $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ sunt continue pe $[a,b]$. Dacă $P_y'(x,y)$ există și este continuă pe *D*, atunci are loc egalitatea:

$$\oint_L P(x,y)dx=\iint_D\left(-P_y'(x,y)\right)dx\,dy, \qquad (1)$$

unde *L* este frontiera domeniului *D*, orientată în sens direct (pozitiv).

Demonstrație. Existența celor două integrale din relația (1) este garantată de continuitatea funcțiilor de sub semnul integralei și de ipoteza făcută asupra domeniului compact *D* (care este simplu în raport cu axa *OY*). Domeniul *D* are forma de mai jos (fig. 6).

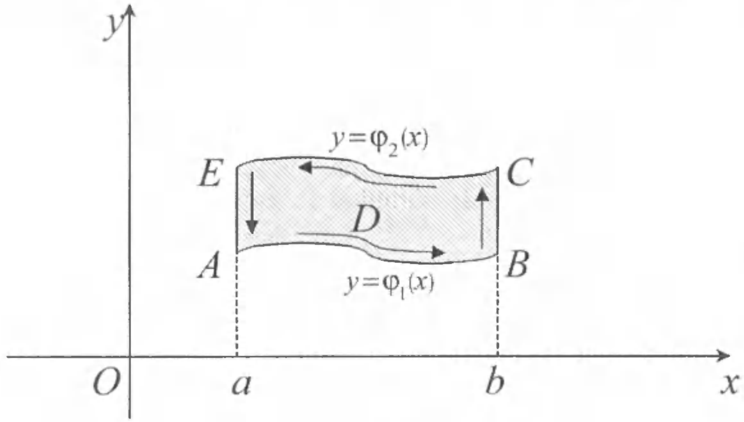


Fig. 6.

Frontiera domeniului D este conturul închis $L = ABCEA$ orientat în sens direct (pozitiv). Notăm: L_1 arcul AB, care are reprezentarea parametrică $y=\varphi_1(x)$, $x\in[a,b]$; L_2 segmentul de dreaptă BC care este perpendicular pe axa OX; L_3 arcul CE, care are reprezentarea parametrică $y=\varphi_2(x)$, $x\in[b,a]$; L_4 segmentul de dreaptă EA, care este perpendicular pe axa OX. Deci,

$$L=L_1\cup L_2\cup L_3\cup L_4.$$

Calculăm aparte fiecare integrală din relația (1).

Avem:

$$\iint_D \left(-P'_y(x,y)\right)dx\,dy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\left(-P'_y(x,y)\right)dy=$$

$$=\int_a^b\left[-P(x,y)\Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\right]dx=\int_a^b P(x,\varphi_1(x))dx-\int_a^b P(x,\varphi_2(x))dx.$$

Pe de altă parte, avem:

$$\oint_L P(x,y)dx=\int_{L_1}P(x,y)dx+\int_{L_2}P(x,y)dx+\int_{L_3}P(x,y)dx+$$

$$+\int_{L_4}P(x,y)dx=\int_a^b P(x,\varphi_1(x))dx+0+$$

$$+\int_b^a P(x,\varphi_2(x))dx+0=\int_a^b P(x,\varphi_1(x))dx-\int_a^b P(x,\varphi_2(x))dx,$$

deoarece segmentele $L_2=BC$ și $L_4=EA$ sunt perpendiculare pe axa OX și deci proiecțiile lor pe această axă sunt egale cu zero (a se consulta definiția integralei curbilinii de speța 2 și **P4** din 6.2.3.).

Prin urmare, egalitatea (1) este valabilă și teorema este demonstrată.

Teorema 2. Fie $Q(x,y)$ o funcție reală definită și continuă pe un domeniu compact D mărginit de liniile $y=c$, $y=d$, $x=u(y)$, $x=v(y)$, unde $u(y)\le v(y)$ și $u(y)$, $v(y)$ sunt continue pe $[c,d]$ (adică domeniul D este simplu în raport cu axa OX). Dacă derivata $Q'_x(x,y)$ există și este continuă pe D, atunci

$$\oint_L Q(x,y)dy=\iint_D \left(Q'_x(x,y)\right)dx\,dy, \qquad (2)$$

unde L este frontiera domeniului D, orientată în sens direct (pozitiv).

Demonstrație. Domeniul D are forma de mai jos (fig. 7).

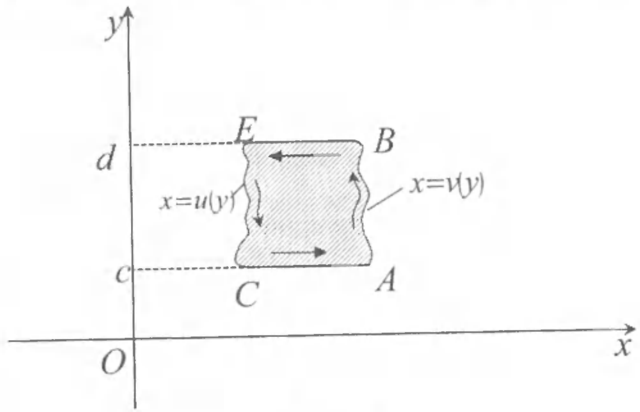


Fig. 7.

Frontiera L este conturul închis $ABECA$ orientat în sens direct. Notăm: L_1 arcul AB, care are reprezentarea parametrică $x=v(y)$, $y\in[c,d]$; L_2 segmentul de dreaptă BE care este perpendicular pe axa OY; L_3 arcul EC, care are reprezentarea parametrică $x=u(y)$, $y\in[d,c]$ și L_4 segmentul de dreaptă CA, care este perpendicular pe axa OY. Deci, $L=L_1\cup L_2\cup L_3\cup L_4$.

Procedând ca în cazul teoremei 1, obținem:

$$\iint_D \left(Q'_x(x,y)\right)dx\,dy=\int_c^d dy\int_{u(y)}^{v(y)}\left(Q'_x(x,y)\right)dx=\int_c^d dx\left[Q(x,y)\Big|_{u(y)}^{v(y)}\right]=$$

$$=\int_c^d Q(v(y),y)dy-\int_c^d Q(u(y),y)dy.$$

Pe de altă parte, avem:

$$\oint_L Q(x,y)dy = \int_{L_1} Q(x,y)dy + \int_{L_2} Q(x,y)dy + \int_{L_3} Q(x,y)dy +$$

$$+ \int_{L_4} Q(x,y)dy = \int_c^d Q(v(y),y)dy + 0 + \int_d^c Q(u(y),y)dy + 0 =$$

$$= \int_c^d Q(v(y),y)dy - \int_c^d Q(u(y),y)dy,$$

deoarece L_2 şi L_4 reprezintă segmente de dreaptă, care sunt perpendiculare pe axa OY şi deci proiecţiile lor pe această axă sunt nule (vezi **P4** din 6.2.3.).

Prin urmare, egalitatea (2) este justă şi deci teorema 2 este demonstrată.

Notă. Presupunem că domeniul compact D este o reuniune finită de domenii compacte D_i şi că aceste domenii nu au puncte interioare comune, iar frontierele lor sunt curbe netede pe porţiuni (vezi fig. 8).

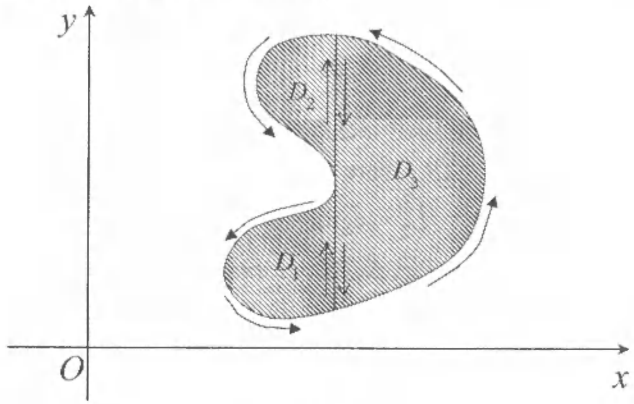


Fig. 8.

Dacă $P(x,y)$ şi $Q(x,y)$ sunt două funcţii reale şi continue pe D, atunci are loc egalitatea:

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \sum_{i=1}^{n} \oint_{L_i} P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \qquad (3)$$

unde L este frontiera domeniului D, iar L_i – frontiera domeniului D_i $(i = 1,\dots,n)$, orientate în aceeaşi direcţie. Egalitatea (3) reiese imediat dacă ţinem seama de aditivitatea integralei curbilinii de speţa 2 (a se consulta P3 din 6.2.3.) şi egalitatea:

$$\int_{L^{(+)}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{L^{(-)}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Teorema 3. Fie $P(x,y)$ şi $Q(x,y)$ două funcţii reale definite şi continue împreună cu derivatele lor parţiale $P'_y(x,y)$ şi $Q'_x(x,y)$ pe domeniul compact D cu frontiera L, care reprezintă o curbă netedă pe porţiuni. Atunci are loc egalitatea:

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left[Q'_x(x,y) - P'_y(x,y)\right]dx\,dy, \qquad (4)$$

unde conturul închis L este orientat în sens direct (pozitiv).

Demonstraţie. Fie D un domeniu compact $D \subset R^2$. Prin drepte paralele la axa OY descompunem acest domeniu în n domenii D_i, fără puncte interioare comune, astfel încât D_i să fie compacte şi simple în raport cu axa OY. O astfel de situaţie este ilustrată în figura de mai jos (fig. 9).

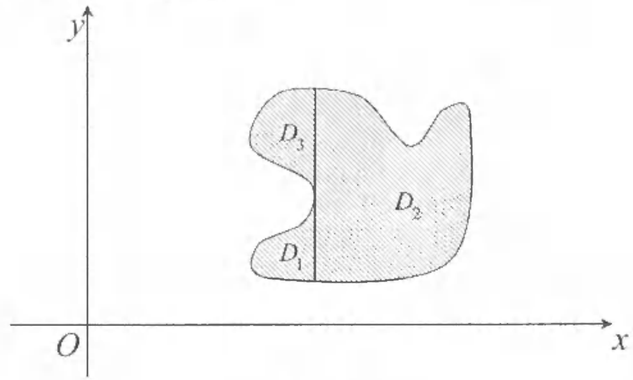


Fig. 9.

Folosind proprietatea de aditivitate a integralei duble, avem:

$$\iint_D \left(-P'_y(x,y)\right)dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} \iint_{D_i} \left(-P'_y(x,y)\right)dx\,dy .$$

Aplicând pentru fiecare domeniu D_i ($i = 1,...,n$) formula (1) din teorema 1, obținem:

$$\iint_{D_i} \left(-P'_y(x,y)\right)dx\,dy = \oint_{L_i} P(x,y)dx ,$$

unde L_i este frontiera domeniului D_i orientată în sens direct. Prin urmare, avem:

$$\iint_D \left(-P'_y(x,y)\right)dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} \oint_{L_i} P(x,y)dx .$$

În virtutea formulei (3) din nota de mai sus avem:

$$\iint_D \left(-P'_y(x,y)\right)dx\,dy = \oint_L P(x,y)dx , \qquad (5)$$

unde L este frontiera domeniului D orientată în sens direct.

Descompunem acum domeniul D în domenii D_i, fără puncte interioare comune, cu ajutorul unui sistem de drepte paralele la axa OX, obținând astfel ca domeniile D_i să fie simple în raport cu axa OX. O astfel de situație este ilustrată în figura de mai jos (fig. 10).

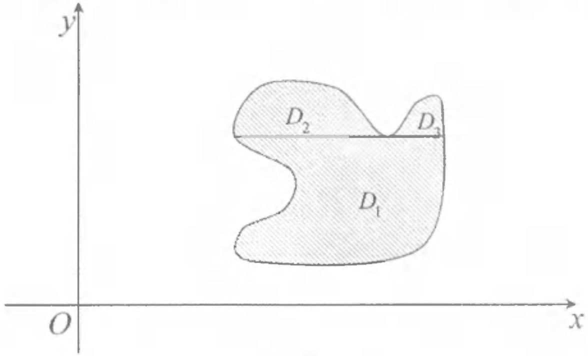


Fig. 10.

Procedând similar cu $\iint_D Q'_x(x,y)dx\,dy$ și folosind formulele (2) și (3), obținem următorul rezultat:

$$\iint_D Q'_x(x,y)dx\,dy = \oint_L Q(x,y)dx , \qquad (6)$$

unde conturul L este orientat în sens direct. Adunând parte cu parte egalitățile (5) și (6), obținem formula (4). Teorema este demonstrată.

Formula (4) se numește *formula lui Green-Ostrogradski.*

Aplicăm formula lui Green-Ostrogradski la calcularea ariei unui domeniu compact D, unde frontiera lui L este o curbă închisă și netedă pe porțiuni.

Fie $P(x,y) = -y$, $Q(x,y) = 0$. Atunci formula (4) are forma:

$$\iint_D (0-(-1))dx\,dy = \oint_L -y\,dx \text{ sau } S_D = -\oint_L y\,dx ,$$

unde $S_D = \iint_D dx\,dy$ este aria domeniului D. Punând $P(x,y) = 0$, $Q(x,y) = x$, în mod analog, obținem că $S_D = \oint_L x\,dy$.

Și, în sfârșit, dacă luăm $P(x,y) = -\frac{1}{2}y$ și $Q(x,y) = \frac{1}{2}x$, obținem formula:

$$S_D = \frac{1}{2}\oint_L x\,dy - y\,dx .$$

Astfel, calcularea ariei unui domeniu plan D se poate efectua cu ajutorul integralei curbilinii de speța 2 pe conturul lui după una din formulele următoare:

$$S_D = -\oint_L y\,dx ,\ S_D = \oint_L x\,dy ,\ S_D = \frac{1}{2}\oint_L x\,dy - y\,dx ,$$

unde conturul închis L este orientat în sens direct (pozitiv) (a se consulta exemplul 2 a) și b) din 6.2.3.)

6.3.6. Schimbarea de variabile într-o integrală dublă

Fie date două plane cu sistemele de coordonate carteziene rectangulare $UO'V$ şi XOY (fig. 11). Considerăm domeniile D' şi D situate respectiv în planele $UO'V$ şi XOY şi presupunem că funcţiile

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v), \\ y = \psi(u,v), \ (u,v) \in D' \end{cases} \qquad (1)$$

stabilesc o corespondenţă biunivocă între punctele acestor domenii. Dacă D' este compact şi frontiera lui L' este o curbă simplă şi netedă pe porţiuni, atunci domeniul corespunzător D din XOY este şi el compact şi frontiera lui L este de asemenea simplă şi netedă pe porţiuni.

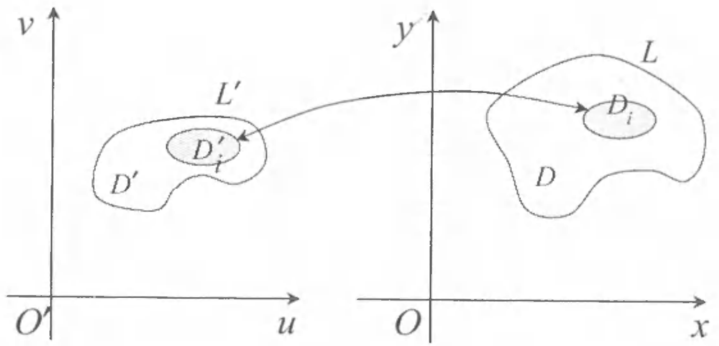


Fig. 11.

Fie funcţiile $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ continue împreună cu derivatele lor parţiale până la ordinul 2 pe domeniul D'. Atunci determinantul

$$\begin{vmatrix} \varphi'_u(u,v) & \varphi'_v(u,v) \\ \psi'_u(u,v) & \psi'_v(u,v) \end{vmatrix} = I(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

se numeşte *determinantul lui Jacobi* (se citeşte „Iacobi") ((1804–1851 – matematician german), sau simplu *iacobianul* (sau *determinantul funcţional*) al transformării (1).

De obicei, se presupune că iacobianul $I(u,v) \neq 0$ în domeniul D' şi, prin urmare, în virtutea continuităţii îşi păstrează semnul.

Să explicăm cum variază aria domeniului D' la transformarea (1). Vom reieşi din formula care exprimă aria domeniului prin integrala curbilinie pe conturul lui:

$$S_D = \oint_L x\,dy = \oint_{L'} \varphi(u,v)\left[\psi'_u(u,v)du + \psi'_v(u,v)dv\right] =$$

$$= \oint_{L'} \left[\varphi(u,v)\psi'_u(u,v)\right]du + \left[\varphi(u,v)\psi'_v(u,v)\right]dv .$$

Aplicăm formula Green-Ostrogradski cu

$$P(u,v) = \varphi(u,v)\cdot\psi'_u(u,v) \text{ şi } Q(u,v) = \varphi(u,v)\cdot\psi'_v(u,v).$$

Deci,

$$Q'_u(u,v) - P'_v(u,v) = \varphi'_u(u,v)\cdot\psi'_v(u,v) + \varphi(u,v)\cdot\psi''_{vu}(u,v) -$$

$$-\varphi'_v(u,v)\cdot\psi'_u(u,v) - \varphi(u,v)\cdot\psi''_{vu}(u,v) =$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi'_u(u,v) & \varphi'_v(u,v) \\ \psi'_u(u,v) & \psi'_v(u,v) \end{vmatrix} = I(u,v).$$

Prin urmare,

$$S_D = \pm \iint_{D'} I(u,v)\,du\,dv,$$

unde semnul plus se ia dacă conturul L' este orientat în sens direct şi minus – în caz contrar. Dar $S_D > 0$, deci:

$$S_D = \begin{cases} +\iint_{D'} I(u,v)du\,dv, \ \textit{dacă } I(u,v) > 0, \\ -\iint_{D'} I(u,v)du\,dv, \ \textit{dacă } I(u,v) < 0. \end{cases}$$

sau $S_D = \iint_{D'} |I(u,v)|\,du\,dv$.

Aplicând formula de medie pentru integrala dublă, avem:

$$S_D = |I(u_0, v_0)| \cdot S_{D'}, \tag{2}$$

unde (u_0, v_0) este un punct al domeniului D'.

Ne punem acum scopul de a înlocui integrala dublă $\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy$ în raport cu variabilele x şi y (pe domeniul D) printr-o integrală dublă egală cu ea în raport cu variabilele u şi v (pe domeniul D').

Fie $\Delta' = (D'_1, D'_2, ..., D'_n)$ o diviziune a domeniului D'. Cu ajutorul transformării bijective (1) obţinem o diviziune $\Delta = (D_1, D_2, ..., D_n)$ a lui D (fig. 11). Pentru fiecare domeniu D_i ($i = 1,...,n$) aplicăm formula (2). Rezultă în acest fel că pentru fiecare i ($i = 1,...,n$) există un punct $(u_i, v_i) \in D'_i$ astfel încât:

$$\Delta S_i = |I(u_i, v_i)| \cdot \Delta S'_i,$$

unde ΔS_i, $\Delta S'_i$ sunt ariile domeniilor D_i şi respectiv D'_i. Notăm

$$\xi_i = \varphi(u_i, v_i), \ \eta_i = \psi(u_i, v_i)$$

şi avem $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ ($i = 1,...,n$).

Formăm suma integrală pentru integrala dublă $\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy$:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(u_i, v_i), \psi(u_i, v_i)) \cdot |I(u_i, v_i)| \cdot \Delta S'_i. \tag{3}$$

Considerăm funcţia

$$F(u,v) = f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \cdot |I(u,v)|$$

şi deci avem că

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} F(u_i, v_i) \Delta S'_i.$$

În acest fel am obţinut că orice sumă Riemann relativ la funcţia $F(u,v)$ şi la diviziunea Δ' a lui D' este egală cu o sumă Reimann relativ la funcţia $f(x,y)$ şi diviziunea Δ a lui D.

Din continuitatea uniformă a funcţiilor $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ pe domeniul compact D', reiese că, dacă pasul diviziunii $\lambda_{\Delta'}$ a domeniului D' tinde către zero, atunci şi pasul diviziunii λ_Δ a domeniului D tinde de asemenea către zero. Trecând la limită în egalitatea (3) când $\lambda_{\Delta'} \to 0$, adică şi $\lambda_\Delta \to 0$, obţinem:

$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy = \iint\limits_{D'} f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \cdot |I(u,v)| du\,dv. \tag{4}$$

Această formulă se numeşte *formula schimbării de variabile într-o integrală dublă.*

Nota 1. Se poate arăta că formula (4) are loc şi în cazul când condiţiile impuse transformării biunivoce (1) nu se respectă în unele puncte sau pe unele curbe netede pe porţiuni ce aparţin domeniului compact D'.

Exemplul 3. Să se calculeze aria domeniului mărginit de liniile $xy = 1$, $xy = 4$, $y = x^2$, $y = 2x^2$ (vezi fig. 12).

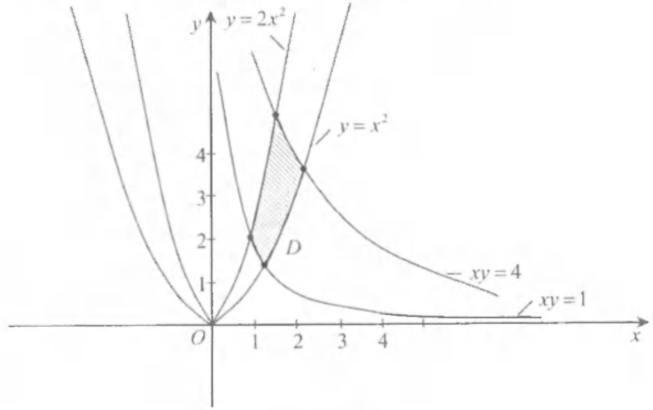


Fig. 12.

Notăm $xy = u$ şi $\frac{y}{x^2} = v$. Observăm că $1 \le u \le 4$ şi $1 \le v \le 2$.

De unde obţinem transformarea $x = \sqrt[3]{\frac{u}{v}}$, $y = \sqrt[3]{u^2 v}$ cu $u \in [1,4]$ şi $v \in [1,2]$.

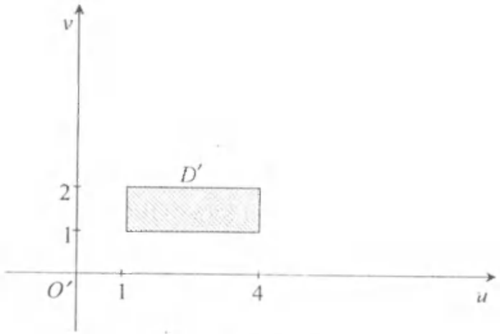


Fig. 13.

Domeniul D' raportat la sistemul cartezian rectangular de coordonate $UO'V$ se transformă biunivoc în domeniul D raportat la sistemul cartezian de coordonate XOY.

Iacobianul transformării este:

$$I(u,v)=\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{3\sqrt[3]{u^2 v}} & -\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{u}{v^4}} \\ \dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\dfrac{v}{u}} & \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{u^2}{v^2}} \end{vmatrix}=\frac{1}{3v}>0,\ v\in[1,2].$$

Prin urmare, aplicând formula (4), obţinem:

$$S_D=\iint_D dx\,dy=\iint_{D'} I(u,v)\,du\,dv=\int_1^4 du\int_1^2 \frac{1}{3v}dv=$$

$$=\frac{1}{3}\ln 2\cdot\int_1^4 du=\ln 2.$$

Propunem cititorului să calculeze această integrală în mod direct.

Vom deduce acum formula de trecere de la coordonatele carteziene rectangulare în plan la cele polare.

Poziţia punctului $M(x,y)$ din planul XOY se determină univoc, dacă sunt date perechea de numere ρ şi θ, unde ρ este lungimea segmentului ce uneşte originea coordonatelor O (numită *pol*) cu

punctul dat M, iar θ – unghiul format de acest segment cu axa OX (numită *axă polară*). Numerele ρ şi θ se numesc *coordonate polare* ale punctului M.

Se ştie că coordonatele rectangulare carteziene x şi y din planul XOY sunt legate de coordonatele polare ρ şi θ prin formulele:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta, \end{cases}\ \rho\in[0,+\infty[,\ \theta\in[0,2\pi]. \qquad (5)$$

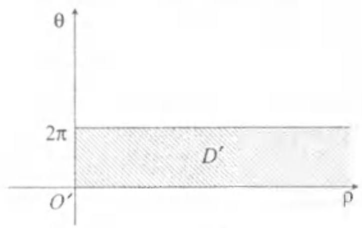


Fig. 14.

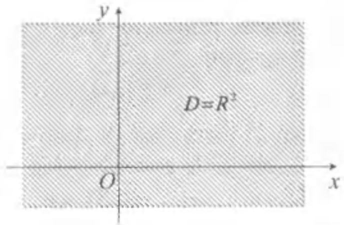


Fig. 15.

Aceste formule transformă «fâşia»

$$D'=\{(\rho,\theta)\,|\,0\le\rho<+\infty,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$$

a planului R^2, raportat la sistemul cartezian rectangular de coordonate $\rho O'\theta$ pe tot planul R^2, raportat respectiv la sistemul cartezian de coordonate XOY. În acest caz fiecărui punct interior (ρ,θ) cu $\rho\in\,]0,+\infty[$ şi $\theta\in\,]0,2\pi[$ al «fâşiei» D' îi corespunde un punct (x,y), unde $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ din planul XOY. Acest punct este diferit de originea de coordonate (pentru că $\rho\neq 0$) şi nu se află pe semiaxa pozitivă OX (deoarece $\theta\neq 0$ şi $\theta\neq 2\pi$). Reciproc, fiecărui punct (x,y) din planul XOY, care nu aparţine semiaxei pozitive OX, îi corespunde un punct (ρ,θ) şi numai unul singur din «fâşia» D'. Frontierei «fâşiei» D' în transformarea $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ îi corespunde originea de coordonate O şi semiaxa pozitivă OX, care iese din ea. Astfel, formulele (5) stabilesc o corespondență biunivocă între mulțimea punctelor interioare ale «fâșiei» D' și mulțimea punctelor din planul XOY ce nu aparțin semiaxei pozitive OX. Transformarea frontierei «fâșiei» D' pe semiaxa pozitivă OX nu este biunivocă.

Calculăm iacobianul transformării (5):

$$I(\rho,\theta)=\begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\theta \\ y'_\rho & y'_\theta \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix}=\rho .$$

În fiecare punct al fâșiei D' (cu excepția punctelor de pe frontieră) avem:

$$I(\rho,\theta)=\rho>0\ ,\ \theta\in\,]0,2\pi[\,.$$

Aplicând formula (4), obținem așa-numita *formulă de trecere în integrala dublă la coordonatele polare:*

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{D^*} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\cdot\rho\,d\rho\,d\theta . \qquad (6)$$

Aici domeniul D este situat în planul XOY, iar domeniul D^* este situat în «fâșia» D', imaginea căreia la transformarea (5) este domeniul D.

Din nota 1 urmează că nerespectarea biunivocității transformării (5) în punctele indicate mai sus nu influențează asupra justeței formulei (6), adică în formula (6) avem că $\rho\in[0,+\infty[$ și $\theta\in[0,2\pi]$.

Nota 2. În integrala dublă este bine să se treacă la coordonatele polare atunci când frontiera domeniului de integrare D conține linii, în ecuațiile cărora figurează expresii de forma $\left(x^2+y^2\right)^\alpha$, $\alpha\neq 0$ sau dacă la liniile respective se mai adaugă și segmente de drepte ce ies din originea sistemului cartezian rectangular de coordonate.

Exemplul 4. Să se calculeze integrala $\iint_D \sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}\,dx\,dy$, unde D este sfertul de coroană $1\le x^2+y^2\le 4$ situată în cadranul 1.

În virtutea notei 2 de mai sus, folosind formula (6), obținem:

$$\iint_D \sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}\,dx\,dy=\iint_{D^*}\rho^3\cdot\rho\,d\rho\,d\theta=\iint_{D^*}\rho^4\,d\rho\,d\theta ,$$

unde domeniul $D^*=\left\{(\rho,\theta)\,|\,\rho\in[1,2],\ \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right\}$, imaginea căruia la transformarea (5) este domeniul D din R^2, raportat la sistemul cartezian XOY (vezi fig. 16 și 17).

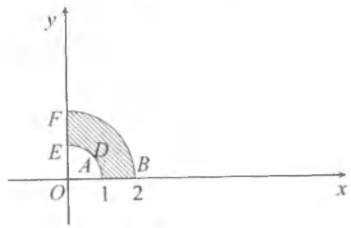


Fig. 16.

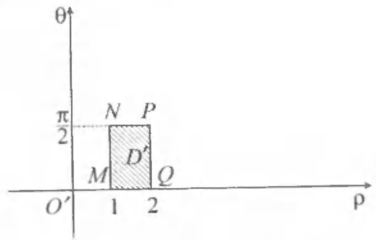


Fig. 17.

Într-adevăr, la transformarea (5): $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, arcului AE al circumferinței $x^2+y^2=1$ îi corespunde segmentul de dreaptă MN: $\rho=1$, $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, arcului BF al circumferinței $x^2+y^2=4$ – segmentul de dreaptă PQ: $\rho=2$, $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, segmentelor AB ($y=0$, $x\in[1,2]$) și EF ($x=0$, $y\in[1,2]$) – segmentele dreptelor MQ: $\theta=0$ și respectiv NP: $\theta=\frac{\pi}{2}$ ($1\le\rho\le 2$).

Prin urmare, domeniul D^* reprezintă dreptunghiul:

$$\left\{(\rho,\theta)\,|\,1\le\rho\le 2,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$$

în planul $\rho O'\theta$.

Trecând de la integrala dublă în raport cu variabilele ρ și θ la cea iterată, obținem:

$$\iint_{D^*}\rho^4\,d\rho\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2\rho^4\,d\rho=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\left(\frac{32}{5}-\frac{1}{5}\right)=\frac{31\pi}{10}.$$

Prin urmare, $\iint_D \sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}\,dx\,dy = \frac{31\pi}{10}$.

Exemplul 5. Să se calculeze aria figurii mărginită de linia

a) $\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2-y^2\right)$, care se numeşte *lemniscata lui Bernoulli;*

b) $\left(x^2+y^2\right)^2 = 2ax^3$, $a>0$ (a se consulta ex. d), e) şi g) din 8.5, [22]).

Conform notei 2 de mai sus, prezenţa binomului $\left(x^2+y^2\right)^2$ ne sugerează ideea să trecem la coordonatele polare considerând $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ şi calculând ariile figurilor de mai sus cu ajutorul formulei:

$$S=\iint_D dx\,dy = \iint_{D^*} \rho\,d\rho\,d\theta .$$

a) Întrucât curba dată este simetrică în raport cu axele de coordonate (acest fapt e clar din ecuaţia liniei, deoarece ea nu-şi schimbă forma, dacă se înlocuieşte x cu $(-x)$ şi y cu $(-y)$), e suficient să determinăm aria părţii D a figurii, care se află în primul cadran şi apoi s-o înmulţim cu 4 (vezi fig. 18) (O este punct dublu).

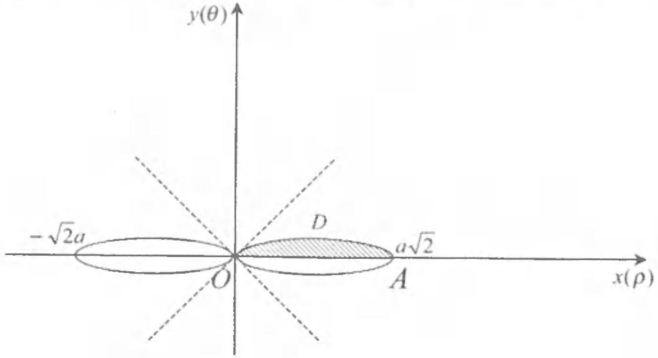


Fig. 18.

Ecuaţia polară a lemniscatei este

$$\rho^2 = 2a^2\cos 2\theta ,$$

însă, dacă ne limităm la primul cadran, θ trebuie să varieze de la 0 până la $\frac{\pi}{4}$, deoarece $\cos 2\theta \ge 0$. Aşadar, domeniul D^* din planul $\rho O\theta$, corespunzător domeniului D, este mărginit de linia $\rho = a\sqrt{2\cos 2\theta}$, $\theta\in[0,\frac{\pi}{4}]$ (în formă de lemniscată) şi de segmentul OA al axei $O\rho$ (numai în origine nu se respectă corespondenţa biunivocă între D şi D^*, aceasta conform notei 1 nu se reflectă la utilizarea formulei $\iint_D dx\,dy = \iint_{D^*}\rho\,d\rho\,d\theta$).

Prin urmare,

$$\frac{1}{4}S = \iint_{D^*}\rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} \rho\,d\rho = a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\,d\theta = \frac{a^2}{2},$$

ceea ce înseamnă că aria totală

$$S = 4\cdot\frac{a^2}{2} = 2a^2 .$$

b) Observăm că linia dată este simetrică în raport cu axa OX (deoarece ecuaţia nu se schimbă dacă se înlocuieşte y prin $(-y)$), este situată în cadranele 1 şi 4, fiindcă $x\ge 0$, intersectează axa OX în punctele $x=0$ şi $x=2a$, deoarece

$$x=0 \Rightarrow y^4=0 \Rightarrow y=0 \text{ şi}$$

$$x=2a \Rightarrow \left(4a^2+y^2\right)^2 = 2a\cdot 8a^3 \Rightarrow 16a^4+8a^2y^2+y^4 = 16a^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2\left(8a^2+y^2\right)=0 \Rightarrow y=0 .$$

De asemenea, remarcăm că linia dată este mărginită, fiindcă din ecuaţia liniei avem:

$$x^4 \le 2ax^3 \Rightarrow x\le 2a \text{ şi}$$

$$y^4 \le 2ax^3 \Rightarrow y^4 \le 2a\cdot 8a^3 = 16a^4 \Rightarrow |y|\le 2a .$$

Schematic, domeniul D are forma:

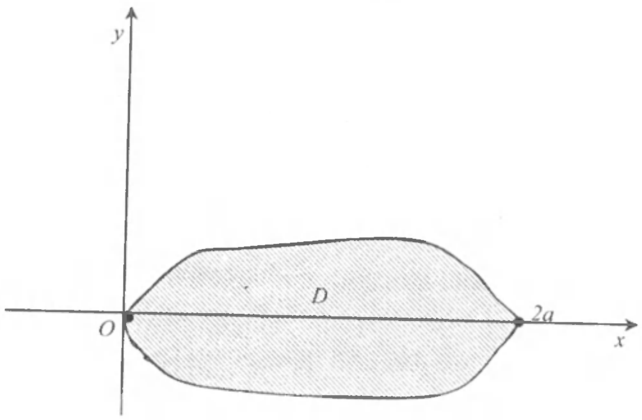


Fig. 19.

Ecuația polară a liniei este

$$\rho = 2a\cos^3\theta,\ \theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

Deci, aria figurii D este egală cu

$$S=\iint_{D^*}\rho\,d\rho\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos^3\theta}\rho\,d\rho = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta\,d\theta=$$

$$=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2\theta\right)^3 d\theta = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^3 d\theta=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+3\cos 2\theta+3\cos^2 2\theta+\cos^3 2\theta\right)d\theta=$$

$$=\frac{a^2}{2}\Bigg[\left(\theta+\frac{3}{2}\sin 2\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 4\theta)\,d\theta+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2 2\theta\right)d(\sin 2\theta)\Bigg]=\frac{a^2}{2}\Bigg[\frac{\pi}{2}+0+\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\sin 2\theta-\frac{\sin^3 2\theta}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\Bigg]=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}+0\right)=\frac{5}{8}\pi\cdot a^2.$$

Exemplul 6. Să se calculeze integrala improprie $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\,dx$, care se numește *integrala lui Poisson* ([20], 4.1.6). Această integrală joacă un rol important în teoria probabilităților și a statisticii matematice. Constatăm că primitiva acestei integrale nu se exprimă în funcții elementare ([20], 4.1.6.). Vom calcula integrala lui Poisson cu ajutorul integralei duble în coordonate polare. Avem:

$$\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}e^{-\left(x^2+y^2\right)}dy=\left|\begin{array}{l}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\\ \rho\in[0,+\infty[\\ \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\end{array}\right|=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{+\infty}\rho\cdot e^{-\rho^2}\,d\rho=$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\cdot\left(\frac{e^{-\rho^2}}{2}\right)\Bigg|_0^{+\infty}=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\,(0-1)=\frac{\pi}{4}.$$

Pe de altă parte,

$$\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}e^{-\left(x^2+y^2\right)}dy=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\,dy=$$

$$=\left(\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,dy\right)\cdot\left(\int_0^{+\infty}e^{-y^2}\,dy\right).$$

Întrucât

$$\int_0^{+\infty}e^{-y^2}\,dy=\left|\begin{array}{l}y=x\\ dy=dx\\ x\in[0,+\infty[\end{array}\right|=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,dx,\text{ obținem:}$$

$$\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dy = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \right)^2 .$$

Prin urmare,

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \right)^2 = \frac{\pi}{4} \text{ și } \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

deoarece

$$e^{-x^2} > 0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx > 0$$

(a se consulta ultimele alineate din demonstrația proprietății 8 din 4.2.3, [20]).

Deci,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\, dx + \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx .$$

Observăm că

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\, dx = \left| \begin{array}{l} x = -t \\ dx = -dt \\ t \in \left]+\infty, 0\right] \end{array} \right| = -\int_{+\infty}^{0} e^{-t^2}\, dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \left| \begin{array}{l} t = x \\ dt = dx \\ x \in \left[0, +\infty\right[\end{array} \right| = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dt .$$

Prin urmare,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi} .$$

Nota 3. Dacă frontiera domeniului de integrare conține linii în ecuațiile cărora figurează expresii de forma $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^{\alpha}$, $\alpha \neq 0$ sau dacă la liniile respective se mai adaugă și segmente de drepte ce ies din originea sistemului cartezian rectangular de coordonate, atunci e rațional să trecem la așa-numitele *coordonate polare generalizate*: $x = a\rho\cos\theta$, $y = b\rho\sin\theta$, unde ρ și θ sunt coordonatele polare obișnuite și $a > 0$, $b > 0$. Observăm că iacobanul acestei transformări

$$I(\rho, \theta) = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\theta \\ y'_\rho & y'_\theta \end{vmatrix} = ab\rho \geq 0$$

pentru orice $a > 0$, $b > 0$, $\rho \geq 0$ și $\theta \in [0, 2\pi]$.

Exemplul 7. Să se calculeze aria figurilor mărginite de liniile

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{h} + \frac{y}{k}$, $a > 0, b > 0, h > 0, k > 0$;

b) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 = \frac{xy}{c^2}$, $a > 0, b > 0, c \neq 0$.

Conform notei 3 de mai sus în ambele cazuri folosim formula de trecere de la coordonatele carteziene rectangulare la cele polare generalizate într-o integrală dublă, adică:

$$S_D = \iint_D dx\, dy = \iint_{D'} |I(\rho, \theta)|\, d\rho\, d\theta = (ab) \iint_{D'} \rho\, d\rho\, d\theta .$$

a) Trecând la coordonatele polare generalizate, ecuația frontierei domeniului D' are forma:

$$\rho^2 = \rho\left(\frac{a}{h}\cos\theta + \frac{b}{k}\sin\theta \right).$$

De unde $\rho_1 = 0$ și $\rho_2 = \frac{a}{h}\cos\theta + \frac{b}{k}\sin\theta$.

Deoarece $\rho \geq 0$, alegem acele valori ale argumentului θ pentru care expresia

$$\frac{a}{h}\cos\theta + \frac{b}{k}\sin\theta \geq 0 .$$

Înmulțim și împărțim partea stângă a relației de mai sus cu $\sqrt{\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}}$ și aflând valoarea lui θ din relațiile

$$\sin\theta_0 = \frac{a}{h\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}}}, \quad \cos\theta_0 = \frac{b}{k\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}}}$$

obținem următoarele:

$$\rho_2 = \sqrt{\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}}\sin(\theta+\theta_0) \geq 0.$$

De unde $\sin(\theta+\theta_0)\geq 0$, adică $0 \leq \theta+\theta_0 \leq \pi$. Deci, $-\theta_0 \leq \theta \leq \pi-\theta_0$. Prin urmare,

$$S_D = (ab)\iint_{D'} \rho\, d\rho\, d\theta = (ab)\int_{-\theta_0}^{\pi-\theta_0} d\theta \int_0^{\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}}\sin(\theta+\theta_0)} \rho\, d\rho =$$

$$= \frac{(ab)}{2}\int_{-\theta_0}^{\pi-\theta_0}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)\sin^2(\theta+\theta_0)\, d\theta =$$

$$= \frac{(ab)}{2}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)\int_{-\theta_0}^{\pi-\theta_0}\frac{1-\cos 2(\theta+\theta_0)}{2}\, d\theta = \frac{ab\pi}{4}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right).$$

b) Observăm că $xy \geq 0$, adică linia este situată în cadranele 1 și 3. Linia este simetrică în raport cu originea sistemului de coordonate, deoarece ecuația liniei nu se schimbă dacă înlocuim x prin $(-x)$ și y prin $(-y)$. Originea sistemului de coordonate este unicul punct de intersecție a liniei cu axele de coordonate OX și OY:

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ și } y = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Figura mărginită de această linie este compusă din două părți simetrice: o parte se află în cadranul 1, iar cealaltă – în cadranul 3, deoarece linia este mărginită. Arătăm de exemplu că figura din cadranul 1 este mărginită:

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{xy}{c^2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^4}{a^4} \leq \frac{xy}{c^2}, \\ \frac{y^4}{b^4} \leq \frac{xy}{c^2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 \leq \frac{a^4}{c^2}y, \\ y^3 \leq \frac{b^4}{c^2}x. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leq \sqrt[3]{\frac{a^4}{c^2}}\sqrt[3]{y} = h\cdot\sqrt[3]{y}, \\ y \leq \sqrt[3]{\frac{b^4}{c^2}}\sqrt[3]{x} = k\cdot\sqrt[3]{x}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq h\cdot\sqrt[3]{k\sqrt[3]{x}}, \\ y \leq k\cdot\sqrt[3]{x}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^8 \leq h^9\cdot k^3, \\ y \leq k\cdot\sqrt[3]{x}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leq \sqrt[8]{h^9\cdot k^3} = A, \\ y \leq k\cdot\sqrt[3]{A} = B. \end{cases}$$

Ecuația liniei în coordonatele polare generalizate are forma $\rho^4 = \rho^2\cdot\frac{ab}{c^2}\sin\theta\cos\theta$, de unde $\rho_1 = 0$ și $\rho_2 = \sqrt{\frac{ab}{c^2}\sin\theta\cos\theta}$.

Prin urmare, în virtutea simetriei, avem:

$$S_D = (ab)\iint_{D'} \rho\, d\rho\, d\theta = 2(ab)\iint_{D''} \rho\, d\rho\, d\theta,$$

unde D'' are ca imagine partea domeniului D situată în cadranul 1. Deci, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ și

$$S_D = 2ab\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{\frac{ab}{c^2}\sin\theta\cos\theta}} \rho\, d\rho = \frac{a^2b^2}{c^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\, d\theta = \frac{a^2b^2}{2c^2}.$$

6.4. Integralele triple

Integralele triple prezintă o generalizare directă a integralelor duble pentru cazul spaţiului tridimensional R^3. Integralele triple, ca şi integralele duble, au o aplicare largă în diverse probleme de fizică şi geometrie.

Întrucât o serie întreagă de propoziţii, stabilite pentru integralele duble, se extind împreună cu demonstraţiile lor asupra integralelor triple, ne vom mărgini, de obicei, să formulăm aceste propoziţii, lăsând ca cititorul să parafrazeze demonstraţiile ulterioare.

6.4.1. Definiţia integralei triple şi proprietăţile ei de bază

Cadrul firesc în care se defineşte integrala triplă este acela al domeniului compact $D \subset R^3$, cu frontiera formată dintr-o reuniune finită de suprafeţe netede. Se demonstrează ([8], V.2, §44) că astfel de domenii au volum, adică sunt cubabile. În continuare vom considera numai domenii de acest fel.

Prin diviziunea $\Delta = (D_1, D_2, ..., D_n)$ a domeniului compact D înţelegem un număr finit de domenii compacte $D_1, D_2, ..., D_n$ fără puncte interioare comune, astfel încât:

$$D = D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_n$$

şi frontiera domeniului D_i $(i = 1, 2, ..., n)$ este o suprafaţă închisă netedă sau netedă pe porţiuni.

Se numeşte *diametru al domeniului D* distanţa maximă dintre două puncte situate pe frontiera domeniului dat.

Prin *pasul* (sau *norma*) diviziunii Δ, notat cu $\lambda = \lambda(\Delta)$, înţelegem cel mai mare număr dintre diametrele domeniilor de diviziune D_i $(i = 1, 2, ..., n)$. Noţiunea de diviziune mai fină se defineşte în mod asemănător ca în cazul domeniilor plane (6.3.1).

Fie $\Delta = (D_1, D_2, ..., D_n)$ o diviziune a domeniului compact $D \subset R^3$ şi funcţia reală $u = f(x, y, z)$ definită şi mărginită pe D. Vom nota cu

$$m = \inf_D f(x,y,z),\ M = \sup_D f(x,y,z)$$

$$m_i = \inf_{D_i} f(x,y,z),\ M_i = \sup_{D_i} f(x,y,z)\ (i = 1, 2, ..., n)$$

şi prin $\Delta V_1, \Delta V_2, ..., \Delta V_n$ volumele domeniilor de diviziune $D_1, D_2, ..., D_n$. Formăm sumele:

a) $S_\Delta(f) = M_1 \Delta V_1 + M_2 \Delta V_2 + ... + M_n \Delta V_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta V_i$,

care se numeşte *sumă superioară Darboux;*

b) $s_\Delta(f) = m_1 \Delta V_1 + m_2 \Delta V_2 + ... + m_n \Delta V_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta V_i$,

care se numeşte *sumă inferioară Darboux*;

c) Dacă considerăm în fiecare domeniu de diviziune D_i câte un punct N_i, atunci suma

$$\sigma_\Delta(f(N_i)) = f(N_1)\Delta V_1 + f(N_2)\Delta V_2 + ... + f(N_n)\Delta V_n = \sum_{i=1}^{n} f(N_i)\Delta V_i$$

se numeşte *sumă integrală* a lui Riemann.

Proprietăţile sumelor Darboux şi Riemann sunt aceleaşi ca şi în cazul unei funcţii reale definite şi mărginite pe un domeniu compact $D \subset R^2$ (vezi 6.3.1) sau $D \subset R$ (vezi [20], 4.2.1 şi 4.2.2), iar demonstraţiile lor nu prezintă nici o dificultate.

Definiţie. Spunem că funcţia $f(x, y, z)$ este *integrabilă Riemann* pe $D \subset R^3$, dacă există un număr I cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât oricare ar fi diviziunea Δ cu $\lambda(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ şi oricare ar fi alegerea punctelor intermediare $N_i \in D_i$, să avem $|\sigma_\Delta(f(N_i)) - I| < \varepsilon$.

În acest caz numărul I se numeşte *integrală triplă* (*Riemann*) a funcţiei f pe domeniul D şi se notează astfel:

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(N_i) \cdot \Delta V_i = \iiint_D f(x,y,z)dv = \iiint_D f(x,y,z)dx\,dy\,dz\ ,$$

unde $f(x,y,z)$ se numeşte *funcţia de sub integrală*, *D – domeniul de integrare*, *x, y* şi *z – variabilele de integrare*, *dv* (sau $dx\,dy\,dz$) – *volumul elementar*.

Din definiţie rezultă că integrala triplă, ca şi cea dublă, nu depinde de modul de împărţire a domeniului D în domenii elementare D_i ($i = 1,2,...,n$) şi de alegerea punctelor intermediare N_i pe aceste domenii.

Nota 1. Fie dat un corp D, care are o oarecare masă şi în fiecare punct $M(x,y,z) \in D$ este cunoscută densitatea de repartiţie a acestor mase

$$\gamma = \gamma(M) = \gamma(x,y,z).$$

Ne punem problema de a determina masa totală a acestui corp material neomogen.

Pentru a rezolva această problemă, descompunem corpul D în părţile $D_1, D_2, ..., D_n$ fără puncte interioare comune şi alegem în fiecare din ele câte un punct intermediar N_i.

Vom considera aproximativ, că în partea D_i densitatea este constantă şi egală cu $\gamma(N_i)$ în punctul ales N_i. Atunci masa m_i a acestei părţi se exprimă aproximativ astfel: $m_i \approx \gamma(N_i) \cdot \Delta V_i$, unde ΔV_i este volumul părţii D_i ($i = 1,2,...,n$), iar masa totală a corpului D va fi:

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(N_i) \cdot \Delta V_i .$$

Dacă pasul acestei diviziuni tinde către zero, atunci

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma(N_i) \cdot \Delta V_i$$

şi problema este rezolvată.

Vedem că rezolvarea problemei de mai sus ne-a condus la integrala triplă

$$m = \iiint_D \gamma(x,y,z)\,dv . \qquad (1)$$

Acesta este întocmai *sensul fizic* al integralei triple pentru o funcţie nenegativă şi continuă pe un domeniu compact.

Este imposibil de a stabili sensul geometric al integralei triple $\iiint_D f(x,y,z)\,dv$ pentru o funcţie arbitrară $f(x,y,z)$, fără a ieşi din limitele spaţiului de trei dimensiuni R^3.

Dacă, însă, în domeniul D

$$f(x,y,z) = 1,$$

atunci

$$\iiint_D dv = \iiint_D dx\,dy\,dz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = V ,$$

unde V este volumul corpului D.

În aşa fel, *volumul corpului D* poate fi calculat cu ajutorul integralei triple după formula

$$V = \iiint_D dv = \iiint_D dx\,dy\,dz . \qquad (2)$$

Criteriile de integrabilitate, precum şi proprietăţile integralei triple, se formulează şi se demonstrează la fel ca şi în cazul integralei duble (teoremele 1, 2 şi 3 din 6.3.1 şi 6.3.2). De aceea, ne vom opri numai la enunţarea lor.

Teorema 1 (criteriul Darboux). Fie $u = f(x,y,z)$ mărginită şi definită pe domeniul compact D. Pentru ca integrala triplă $\iiint_D f(x,y,z)\,dv$ să existe, este necesar şi suficient ca $\lim_{\lambda \to 0} [S_\Delta(f) - s_\Delta(f)] = 0$ sau în alte notaţii $\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \cdot \Delta V_i = 0$, în care ω_i este oscilaţia $(M_i - m_i)$ a funcţiei $f(x,y,z)$ pe domeniul de diviziune D_i ($i = 1,2,...,n$).

Teorema 2. Orice funcţie $u = f(x,y,z)$ continuă pe un domeniu compact D este integrabilă pe acest domeniu.

Teorema 3. Dacă mulţimea T a punctelor de discontinuitate a unei funcţii mărginite $u = f(x,y,z)$, definită pe un domeniu compact D ($T \subset D$) este formată dintr-un număr finit de suprafeţe netede, atunci funcţia $u = f(x,y,z)$ este integrabilă (Riemann) pe D.

Enumerăm acum cele mai simple proprietăţi ale integralelor triple pentru funcţii continue în domeniile compacte considerate (a se compara cu 6.3.2).

P1. Integrala triplă $\iiint_D f(x,y,z)dx\,dy\,dz$ nu depinde de notaţia variabilelor de integrare, adică

$$\iiint_D f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \iiint_D f(s,t,u)ds\,dt\,du .$$

P2. Factorul constant poate fi scos în afara semnului integralei triple, adică

$$\iiint_D k\cdot f(x,y,z)dv = k\cdot\iiint_D f(x,y,z)dv ,$$

unde $k \in R$.

P3. $$\iiint_D [f(x,y,z)\pm g(x,y,z)]dv =$$

$$= \iiint_D f(x,y,z)dv \pm \iiint_D g(x,y,z)dv .$$

P4. Dacă domeniul D este împărţit în două domenii D_1 şi D_2 fără puncte interioare comune, atunci

$$\iiint_D f(x,y,z)dv = \iiint_{D_1} f(x,y,z)dv + \iiint_{D_2} f(x,y,z)dv .$$

P5. Dacă în domeniul D $f(x,y,z)\geq 0$, atunci

$$\iiint_D f(x,y,z)dv \geq 0 .$$

P6. Dacă în domeniul D $f(x,y,z)\leq g(x,y,z)$, atunci

$$\iiint_D f(x,y,z)dv \leq \iiint_D g(x,y,z)dv .$$

P7. $$\left|\iiint_D f(x,y,z)dv\right| \leq \iiint_D |f(x,y,z)|dv .$$

P8. *Formulele de medie.*

a) Dacă f este mărginită şi integrabilă pe D, adică

$$m \leq f(x,y,z) \leq M$$

pentru orice $(x,y,z)\in D$, atunci

$$\iiint_D f(x,y,z)dv = \mu\cdot V ,$$

unde $\mu \in [m,M]$ şi V este volumul domeniului D.

b) Dacă $f(x,y,z)$ este continuă pe D, atunci există un punct $N_i \in D$ astfel încât

$$\iiint_D f(x,y,z)dv = f(N_i)\cdot V ,$$

unde V este volumul domeniului D. Această formulă se numeşte *formula despre medie* pentru integrale triple.

c) Dacă $f(x,y,z)$ este continuă pe D şi $g(x,y,z)$ este continuă şi îşi păstrează semnul constant pe D, atunci există un punct $N_i \in D$, astfel încât

$$\iiint_D f(x,y,z)\cdot g(x,y,z)dv = f(N_i)\cdot \iiint_D g(x,y,z)dv .$$

Formula obţinută se numeşte *formula generală a mediei* pentru integrale triple.

6.4.2. Calculul integralei triple

Ca şi în cazul integralelor duble, calcularea integralelor triple se reduce la calculul consecutiv al integralelor de o multiplicitate mai mică.

Teorema 1. Fie D un domeniu compact din R^3 mărginit inferior şi superior de suprafeţele S_1: $z = h(x,y)$ şi S_2: $z = H(x,y)$, unde funcţiile $h(x,y)$ şi $H(x,y)$ sunt continue pe domeniul închis $\sigma = \Pr_{XOY} D$ al planului XOY şi lateral de suprafaţa cilindrică S_3, generatoarele căreia sunt paralele cu axa OZ, iar directoarea este frontiera domeniului σ (vezi fig. 1). Atunci pentru orice funcţie $f(x,y,z)$ continuă pe domeniul compact D, are loc formula:

$$\iiint_D f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \iint_\sigma dx\,dy\int_{h(x,y)}^{H(x,y)} f(x,y,z)dz. \quad (1)$$

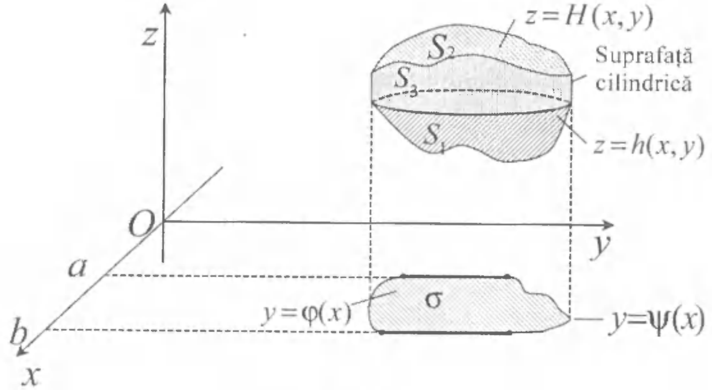


Fig. 1.

Această formulă ne permite să reducem calcularea integralei triple la calcularea integralei duble a funcţiei

$$F(x,y) = \int_{h(x,y)}^{H(x,y)} f(x,y,z)dz,$$

care reprezintă o integrală definită în raport cu variabila z, considerând variabilele x şi y constante.

Demonstraţia acestei teoreme cititorul o poate obţine ca o generalizare directă pentru cazul tridimensional R^3 a demonstraţiei teoremei despre trecerea de la integrala dublă la cea iterată (vezi teorema 1 din 6.3.3).

La calcularea integralei triple după formula (1) prin intermediul integralei iterate se calculează mai întâi integrala interioară în raport cu variabila z, considerând x şi y constante (x şi y sunt parametri) în limitele de variaţie a lui z (pentru domeniul D); după aceea funcţia obţinută $F(x,y)$ se integrează în raport cu x şi y pe domeniul σ, care este proiecţia lui D pe planul XOY.

Dacă în acest caz (vezi fig. 1) domeniul σ, care este proiecţia domeniului compact $D \subset R^3$ pe planul XOY, este mărginit de liniile $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$, unde $\varphi(x)$ şi $\psi(x)$ sunt continue pe $[a,b]$ şi $\varphi(x) \le \psi(x)$, $x \in [a,b]$, atunci, trecând de la integrala dublă pe domeniul σ la cea iterată (în virtutea teoremei 1 din 6.3.3), obţinem formula:

$$\iiint_D f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy\int_{h(x,y)}^{H(x,y)} f(x,y,z)dz, \quad (2)$$

care ne permite să reducem calculul integralei triple la calcularea succesivă a trei integrale definite (numite *integrale iterate*).

În particular, dacă domeniul $D \subset R^3$ este un paralelipiped cu feţele $x = a_1$, $x = a_2$ $(a_1 < a_2)$, $y = b_1$, $y = b_2$ $(b_1 < b_2)$, $z = c_1$, $z = c_2$ $(c_1 < c_2)$, atunci după formula (2) avem:

$$\iiint_D f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \int_{a_1}^{a_2} dx\int_{b_1}^{b_2} dy\int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)dz.$$

Dacă funcţia $f(x,y,z) = f_1(x)\cdot f_2(y)\cdot f_3(z)$ este continuă pe acest paralelipiped, atunci

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \left(\int_{a_1}^{a_2} f_1(x)dx\right)\left(\int_{b_1}^{b_2} f_2(y)dy\right)\left(\int_{c_1}^{c_2} f_3(z)dz\right). \quad (3)$$

Această egalitate rezultă direct din proprietăţile integralelor triple şi duble.

Nota 1. Domeniul D din teorema 1 se mai numeşte *domeniu simplu (regulat) în raport cu axa OZ* (vezi **G2** din 6.3.4). Teorema 1 are loc şi pentru domenii simple (regulate) în raport cu axa OX sau în raport cu axa OY. În acest caz formula (1) este valabilă, permutându-se respectiv variabilele x, y şi z între ele (vezi exemplul 2 de mai departe). În multe cazuri practice suprafaţa cilindrică S_3 din domeniul D (teorema 1) lipseşte (scriem $S_3 = 0$).

Exemplul 1. Să se calculeze integrala

$$\iiint_D xy\,dx\,dy\,dz$$

după domeniul D mărginit de planele $x+y+z=1$, $z=1$, $x=0$, $y=0$.

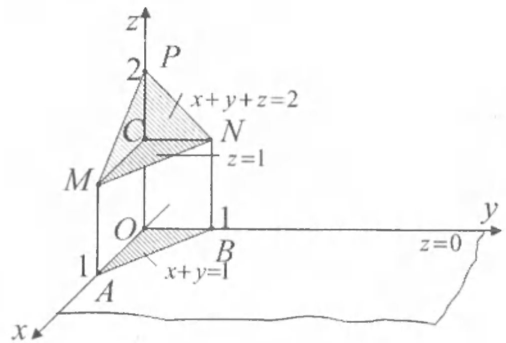


Fig. 2.

Domeniul D reprezintă o piramidă triunghiulară, proiecția căreia pe planul XOY este triunghiul ΔABO, mărginit de dreptele $x=0$, $y=0$ și $x+y+1=2$, adică $x+y=1$. În cazul acesta domeniul D este mărginit de suprafețele S_1: $z=1$, S_2: $z=2-x-y$ și suprafața cilindrică S_3 care constă din suprafețele: $x = 0$, limitată de ΔNCP și y = 0, limitată de ΔMCP. Aplicând formulele (1) și (2), obținem:

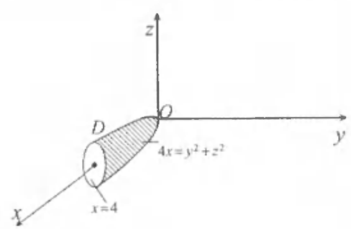
$$\iiint_D xy\,dx\,dy\,dz = \iint_\sigma dx\,dy\int_1^{2-x-y} xy\,dz = \int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_1^{2-x-y} xy\,dz =$$

$$= \int_0^1 x\,dx\int_0^{1-x} y[(2-x-y)-1]dy = \int_0^1 x\,dx\int_0^{1-x} y[(1-x)-y]dy =$$

$$= \int_0^1 x\,dx\cdot\left[(1-x)\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]\Bigg|_0^{1-x} = \int_0^1 x\,dx\cdot\left[\frac{(1-x)^3}{2}-\frac{(1-x)^3}{3}\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 x(1-x)^3\,dx = \frac{1}{6}\int_0^1 \left(x-3x^2+3x^3-x^4\right)dx = \frac{1}{120}.$$

Exemplul 2. Să se calculeze $\iiint_D (1+y)dx\,dy\,dz$, unde domeniul D este limitat de suprafețele $y^2+z^2=4x$, $x=4$.



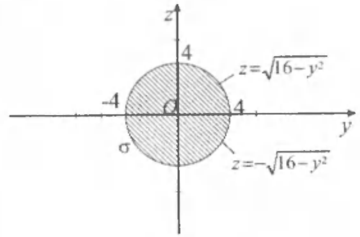


Fig. 3. **Fig. 4.**

Observăm că domeniul D este limitat de paraboloidul de rotație $x=\frac{1}{4}\left(y^2+z^2\right)$ cu axa de simetrie Ox, tăiat de planul $x=4$, adică S_1: $x=\frac{1}{4}\left(y^2+z^2\right)$, S_2: $x=4$, $S_3=0$ și proiecția lui D pe planul YOZ este cercul $y^2+z^2\le 16$ (vezi fig. 3 și 4). Ecuația circumferinței se determină din relațiile

$$\begin{cases}4x=y^2+z^2\\ x=4\end{cases} \Rightarrow y^2+z^2=16.$$

Ținând cont de nota 1, formula (1) are forma:

$$\iiint_D f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \iint_\sigma dy\,dz\int_{h(y,z)}^{H(y,z)} f(x,y,z)dx.$$

Prin urmare,

$$\iiint_D (1+y)dxdydz = \iint_\sigma dydz\int_{\frac{1}{4}(y^2+z^2)}^{4}(1+y)dx = \iint_\sigma (1+y)\left[4-\frac{1}{4}\left(y^2+z^2\right)\right]dydz.$$

Dacă trecem la coordonatele polare în integrala dublă respectivă, avem: $y=\rho\cos\theta$, $z=\rho\sin\theta$, $\theta\in[0,2\pi]$, $\rho\in[0,4]$ și deci,

$$\iiint_D (1+y)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 \rho(1+\rho\cos\theta)\left(4-\frac{1}{4}\rho^2\right)d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 \left[4\rho - \frac{1}{4}\rho^3 + \left(4\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4\right)\cos\theta\right]d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \left[2\rho^2 - \frac{1}{16}\rho^4 + \left(\frac{4}{3}\rho^3 - \frac{1}{20}\rho^5\right)\cos\theta\right]\Bigg|_0^4 =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[32 - 16 + \left(\frac{256}{3} - \frac{256}{5}\right)\cos\theta\right] d\theta =$$

$$= \left(16\theta + \frac{512}{15}\sin\theta\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 16\cdot 2\pi = 32\pi .$$

În cazul când domeniul D nu este simplu dar poate fi împărțit în părți, ce satisfac condițiile teoremei 1 de mai sus pentru domenii simple în raport cu axa OZ sau a teoremelor obținute din ea prin permutarea variabilelor x, y și z (adică D este simplu în raport cu OX sau OY), calculul integralei triple se reduce la calculul integralelor respective pe fiecare din aceste părți (aplicându-se ulterior proprietatea **P4** a integralelor triple din 6.4.1).

Exemplul 3. Să se calculeze integrala triplă $\iiint_D z\cdot dx\,dy\,dz$ pe domeniul D, situat în primul octan și mărginit de suprafețele $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x^2+y^2+z^2=1$ și $x^2+y^2+z^2=4$.

Deoarece suprafața, care mărginește domeniul D de jos, este caracterizată prin două ecuații (ecuația planului XOY: $z=0$ și ecuația suprafeței sferice $x^2+y^2+z^2=1$), împărțim domeniul D în două părți prin suprafața cilindrică $x^2+y^2=1$ (vezi fig. 5 și 6).

Notăm prin σ_1 porțiunea de cerc $x^2+y^2\le 1$ situată în cadranul 1, iar prin σ_2 porțiunea de coroană $1\le x^2+y^2\le 4$, care este de asemenea situată în cadranul 1 al planului XOY, și prin D_1

și D_2 porțiunile domeniului D, ce se proiectează respectiv în σ_1 și σ_2. Atunci pe baza proprietății **P4** a integralei triple din 6.4.1, avem:

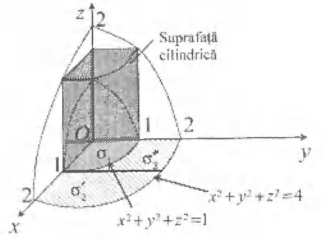


Fig. 5.

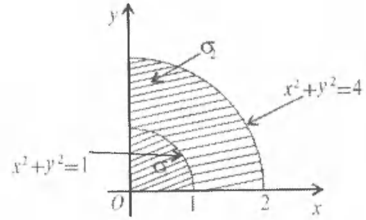


Fig. 6.

$$\iiint_D z\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D_1} z\,dx\,dy\,dz + \iiint_{D_2} z\,dx\,dy\,dz .$$

Calculăm integralele triple pe domeniile D_1 și D_2 aplicând formula (1).

Avem:

a) domeniul D_1 este mărginit de suprafețele S_1: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ (suprafața de jos), S_2: $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ (suprafața de sus) și $S_3=0$. Proiecția σ_1 a domeniului D_1 pe planul XOY este cercul $x^2+y^2\le 1$ situat în cadranul 1. Deci,

$$\iiint_{D_1} z\,dx\,dy\,dz = \iint_{\sigma_1} dx\,dy \int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{\sigma_1}\left(4-x^2-y^2-1+x^2+y^2\right) = \frac{3}{2}\iint_{\sigma_1} dx\,dy .$$

Dar $\iint_{\sigma_1} dx\,dy$ reprezintă aria suprafeței σ_1 ($1/4$ din suprafața cercului $x^2+y^2\le 1$). Prin urmare,

$$\iiint_{D_1} z\,dx\,dy\,dz = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\pi R^2 = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\pi = \frac{3\pi}{8}.$$

b) Domeniul D_2 este mărginit jos de planul XOY: $z=0$ şi sus de suprafaţa sferică: $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$. Proiecţia σ_2 a domeniului D_2 pe planul XOY este coroana $1 \le x^2+y^2 \le 4$ situată în cadranul întâi. Prin urmare,

$$\iiint_{D_2} z\,dx\,dy\,dz = \iint_{\sigma_2} dx\,dy \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\,dz = \frac{1}{2}\iint_{\sigma_2}\left[4-\left(x^2+y^2\right)\right]dx\,dy =$$

$$= \left|\begin{array}{l} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \\ \rho\in[1,2] \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 \left(4-\rho^2\right)\rho\,d\rho = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\left(2\rho^2-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{9\pi}{16}.$$

Aşadar,

$$\iiint_D z\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D_1} z\,dx\,dy\,dz + \iiint_{D_2} z\,dx\,dy\,dz = \frac{3\pi}{8}+\frac{9\pi}{16} = \frac{15\pi}{16}.$$

Exemplul 4. Să se calculeze volumul elipsoidului $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

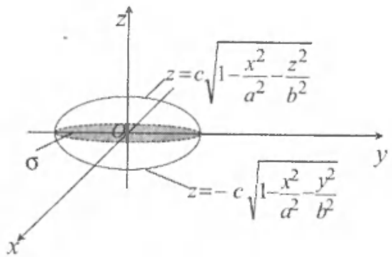


Fig. 7.

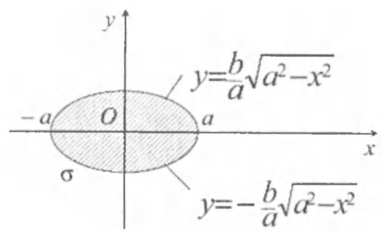


Fig. 8.

Elipsoidul D este mărginit sus de suprafaţa $z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$, jos de suprafaţa $z=-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$. Proiecţia acestui domeniu pe planul XOY este domeniul σ mărginit de elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Conform formulei (2) din 6.4.1 şi aplicând formulele (1) şi (2) de mai sus, obţinem:

$$V = \iiint_D dx\,dy\,dz = \iint_\sigma dx\,dy \int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz =$$

$$= 2c\iint_\sigma \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy = 2c\int_{-a}^{a} dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-\frac{y^2}{b^2}}\,dy.$$

În procesul de calculare a integralei interioare, x se consideră constant. Facem substituţia $y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\sin t$. Deci, $dy=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cos t\,dt$. Variabila y se schimbă de la $\left(-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)$ până la $\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, de aceea t variază de la $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ până la $\frac{\pi}{2}$. Prin urmare,

$$V = 2c\int_{-a}^{a} dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\sin^2 t}\cdot b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cos t\,dt =$$

$$=2bc\int_{-a}^{a} dx\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = 2bc\int_{-a}^{a} dx\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt =$$

$$= bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx\cdot\pi = bc\cdot\pi\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi\cdot abc.$$

Dacă $a=b=c$, obținem că volumul sferei $V=\frac{4}{3}\pi\cdot a^3$.

6.4.3. Schimbarea de variabile în integrala triplă

Formula de schimbare de variabile într-o integrală triplă este asemănătoare formulei de schimbare de variabile într-o integrală dublă (vezi 6.3.6). Stabilirea ei se face într-un mod similar celui din 6.3.6, de aceea nu vom da detalii de calcul, care pot fi refăcute de cititor (mai ales folosind formula Gauss-Ostrogradski din paragraful următor)[*].

Schimbarea de variabile în integrala triplă se efectuează conform următoarei reguli.

Fie funcția $f(x,y,z)$ continuă într-un domeniu compact D având drept frontieră o suprafață netedă pe porțiuni, iar funcțiile

$$x=\varphi_1(u,v,w),\quad y=\varphi_2(u,v,w),\quad z=\varphi_3(u,v,w) \qquad (1)$$

au derivate parțiale de ordinul întâi continue în domeniul compact D' al spațiului R^3 raportat la sistemul de coordonate $O'UVW$. Dacă aplicația (1) transformă în mod biunivoc domeniul D' în domeniul D din spațiul R^3, raportat la sistemul de coordonate carteziene rectangulare $OXYZ$, atunci are loc formula

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_{D'} f(\varphi_1(u,v,w),\varphi_2(u,v,w),\varphi_3(u,v,w))\times|I(u,v,w)|\,du\,dv\,dw, \qquad (2)$$

unde

---

[*] A se consulta cu această ocazie §3 din [7], V.2 și §4 din [4].

$$I(u,v,w)=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}\neq 0$$

este iacobianul transformării (1).

Formula (2) se numește *formula schimbării de variabile* într-o integrală triplă sau formula de trecere de la coordonatele carteziene (x,y,z) la coordonatele curbilinii (u,v,w).

Tot așa ca și în cazul a două variabile, când modulul iacobianului transformării era egal cu coeficientul variației unei arii infinit mici (vezi formula (2) din 6.3.6), modulul iacobianului transformării (1) este egal cu coeficientul variației unui volum infinit mic la transformarea (1).

Nota 1. Formula (2) rămâne valabilă și în cazul când condițiile puse asupra transformării (1) nu se respectă în unele puncte, pe unele linii netede pe porțiuni sau pe suprafețe netede (a se compara cu nota 1 din 6.3.6).

Ne oprim mai pe larg la două cazuri mai frecvente de schimbare a variabilelor în integralele triple.

1) Trecerea de la coordonatele carteziene rectangulare la coordonatele cilindrice în integrala triplă.

Coordonatele cilindrice reprezintă o combinație de coordonate polare în planul XOY (sau XOZ sau YOZ) cu aplicata (respectiv ordonata sau respectiv abscisa) carteziană obișnuită z (respectiv y sau respectiv x).

Formulele, care exprimă relația dintre aceste coordonate și coordonatele carteziene rectangulare au forma

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,\quad z=z. \qquad (3)$$

După definiție, $\rho\in[0,+\infty[$, $-\infty<z<+\infty$. Valoarea unghiului θ se va lua în limitele $0\le\theta\le 2\pi$.

Formulele (3) unde ρ, θ, z variază în limitele indicate pot fi privite ca o transformare a domeniului (vezi fig. 9 și 10)

$$D'=\{(\rho,\theta,z)\,|\,0\le\rho<+\infty,-\infty<z<+\infty,0\le\theta\le 2\pi\}$$

din spațiul R^3, raportat la sistemul cartezian rectangular de coordonate $O'\rho\theta Z$, în tot spațiul R^3, raportat la sistemul cartezian rectangular de coordonate $OXYZ$. În acest caz între punctele

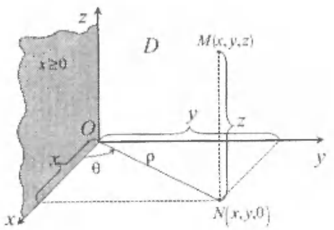


Fig. 9.

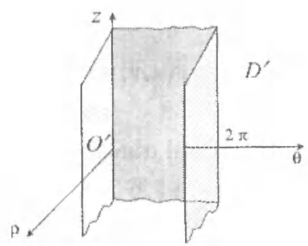


Fig. 10.

interioare ale domeniului D' şi punctele spaţiului $OXYZ$, care nu se află pe semiplanul XOZ $(x \geq 0)$ transformarea (3) este biunivocă. Între punctele de pe frontiera domeniului D' şi punctele corespunzătoare lor din planul XOZ $(x \geq 0)$ ale spaţiului $OXYZ$, biunivocitatea transformării nu mai are loc. De exemplu, dreapta $\rho = 0$, $z = z$ din D' se aplică într-un singur punct $(0,0,z)$ din spaţiul $OXYZ$.

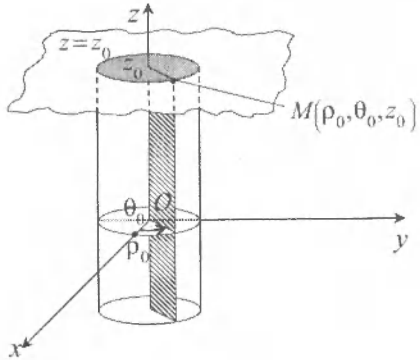


Fig. 11.

Denumirea de „coordonate cilindrice" se datorează faptului că porţiunii de plan $\rho = \rho_0$ din D' îi corespunde în spaţiul $OXYZ$ suprafaţa cilindrică $x^2 + y^2 = \rho_0^2$ cu generatoarele paralele axei OZ (vezi fig. 11).

Constatăm, de asemenea, că porţiunilor respective ale planelor $\theta = \theta_0$ şi $z = z_0$ din D' le corespund în spaţiul $OXYZ$ respectiv semiplanul ce trece prin axa OZ sub unghiul θ_0 în raport cu direcţia pozitivă a axei OX şi semiplanul $z = z_0$ paralel cu planul XOY.

Iacobianul acestei transformări:

$$I(\rho,\theta,z)=\begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\theta & x'_z \\ y'_\rho & y'_\theta & y'_z \\ z'_\rho & z'_\theta & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

este nenegativ în D' ($\rho = 0$ numai pe frontiera lui D').

Aplicând formula (2), obţinem formula de trecere în integrala triplă de la coordonatele carteziene la cele cilindrice:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D'} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\cdot\rho\cdot d\rho\,d\theta\,dz\,. \quad (4)$$

Aici domeniul compact D' din spaţiul $O'\rho\theta z$ are ca imagine domeniul compact D din spaţiul $OXYZ$ în transformarea (3). În virtutea notei 1, formula (4) este valabilă pentru $\rho \geq 0$, $\theta \in [0,2\pi]$ şi $z \in \left]-\infty,+\infty\right[$.

Exemplul 5. Să se calculeze integrala $\iiint_D (2x^2y^2+1)\,dx\,dy\,dz$, unde D (vezi fig. 13) este mărginit de paraboloizii $z = x^2 + y^2$ şi $z = 6 - x^2 - y^2$.

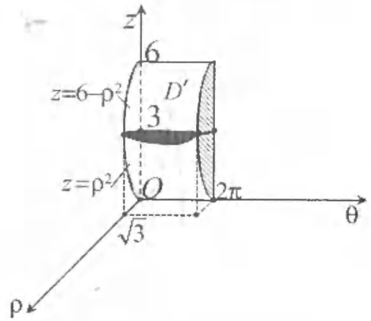


Fig. 12.

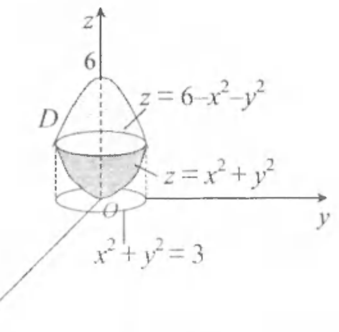


Fig. 13.

Notăm prin D' (vezi fig. 12) domeniul spațiului R^3, raportat la sistemul cartezian rectangular de coordonate $O\rho\theta z$, mărginit de suprafețele $z=\rho^2$, $z=6-\rho^2$, $0\le\theta\le 2\pi$. La transformarea (3), imaginea lui D' în spațiul $OXYZ$ va fi domeniul dat D. Observăm că $\begin{cases} z=\rho^2 \\ z=6-\rho^2 \end{cases} \Rightarrow 2\rho^2=6 \Rightarrow \rho=\sqrt{3}$, adică $\rho\in[0,\sqrt{3}\,]$. Aplicând formula (4), obținem:

$$\iiint\limits_D \left(2x^2y^2+1\right)dx\,dy\,dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}\rho\,d\rho\int_{\rho^2}^{6-\rho^2}\left(2\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta+1\right)dz=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}\rho\cdot\left(2\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta+1\right)\cdot\left(6-\rho^2-\rho^2\right)d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}\left[2\cos^2\theta\sin^2\theta\cdot\left(6\rho^5-2\rho^7\right)+\left(6\rho-2\rho^3\right)\right]d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}4\cos^2\theta\sin^2\theta\cdot\left(3\rho^5-\rho^7\right)d\rho+2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}\left(3\rho-\rho^3\right)d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta(\sin^2 2\theta)\left(\frac{3}{6}\rho^6-\frac{1}{8}\rho^8\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}}+2\int_0^{2\pi}d\theta\left(\frac{3}{2}\rho^2-\frac{1}{4}\rho^4\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}}=$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4\theta}{2}d\theta\cdot\frac{27}{8}+2\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\frac{9}{4}=\frac{27}{16}\left(\theta-\frac{\sin 4\theta}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi}+\frac{9}{2}\cdot 2\pi=\frac{99}{8}\pi.$$

Nota 2. Limitele la calcularea integralei triple în coordonatele cilindrice se pot stabili utilizând desenul domeniului D în spațiul $OXYZ$ și sensul geometric al coordonatelor cilindrice.

Astfel, în exemplul de mai sus, la stabilirea limitelor în integrala dată, se putea raționa în felul următor. Deoarece domeniul D se proiectează pe planul XOY în cercul $x^2+y^2\le 3$, coordonata cilindrică θ a punctelor de pe D' variază de la 0 la 2π, iar coordonata ρ variază de la 0 până la $\sqrt{3}$. În ceea ce privește z, avem: $z=x^2+y^2$ și $z=6-\left(x^2+y^2\right)$. Exprimând aceste valori în coordonate cilindrice, obținem: $z=\rho^2$ și $z=6-\rho^2$.

2) Trecerea de la coordonatele carteziene la cele sferice în integrala triplă.

Coordonatele sferice ([1], [2], [4], [7], [9], [10], [17]), care se mai numesc *coordonate polare în spațiu* ([2], [7], V.2, [17], V.3) sau geografice ([24]), sunt legate de coordonatele carteziene prin formulele:

$$x=r\sin\varphi\cos\theta,\ y=r\sin\varphi\sin\theta\ \ z=r\cos\varphi, \qquad (5)$$

în care $r\ge 0$, $\varphi\in[0,\pi]$, $\theta\in[0,2\pi]$. Sensul geometric al mărimilor r,φ,θ este clar din fig. 14:

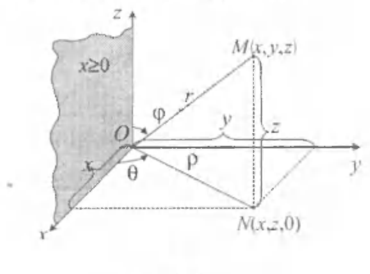


Fig. 14.

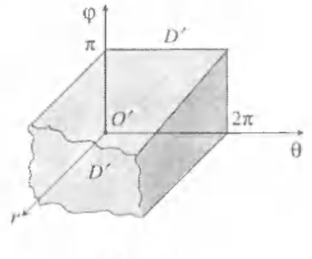


Fig. 15.

r este lungimea segmentului OM, care unește originea (polul) cu punctul dat M; φ este unghiul format de dreapta OM cu axa OZ (axa polară); θ este unghiul format cu axa OX de proiecția segmentului OM pe planul XOY (perpendicular pe axa polară).

Formulele (5), unde r,φ,θ variază în limitele indicate, pot fi privite ca o transformare a domeniului

$$D' = \{(r,\theta,\varphi) \mid 0 \le r < +\infty, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \varphi \le \pi\}$$

din spațiul R^3, raportat la sistemul cartezian rectangular de coordonate $O'r\varphi\theta$ (fig. 15) în tot spațiul R^3, raportat la sistemul cartezian de coordonate $OXYZ$ (fig. 14). În acest caz între punctele interioare ale domeniului D' și punctele din spațiul $OXYZ$, în afară de punctele din semiplanul XOZ ($x \ge 0$), se stabilește o corespondență biunivocă cu ajutorul transformării (5). Între punctele de pe frontiera domeniului D' și punctele de pe semiplanul XOZ ($x \ge 0$) al spațiului $OXYZ$ dispare corespondența biunivocă. Așa, de exemplu, planul $r = 0$ al spațiului $O'r\varphi\theta$ se aplică în originea coordonatelor (polul) $x = y = z = 0$; dreptele $\varphi = 0$, $r = r$ și $\varphi = \pi$, $r = r$ se aplică într-un singur punct $x = y = 0$, $z = r$. Denumirea „coordonate sferice" se datorează faptului că porțiunii de plan $r = r_0$ din D' (fig. 17) îi corespunde în spațiul $OXYZ$ suprafața sferică $x^2 + y^2 + z^2 = r_0^2$ cu centrul în originea coordonatelor de raza r_0 (fig. 16).

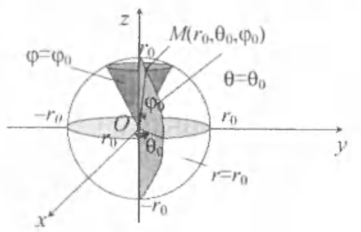


Fig. 16.

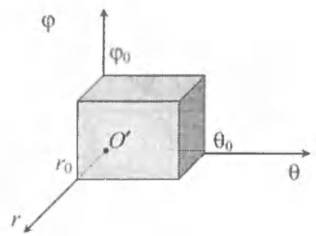


Fig. 17.

Constatăm, de asemenea, că porțiunii de plan $\varphi = \varphi_0$ din D' îi corespunde, în spațiul $OXYZ$, conul circular cu vârful în originea coordonatelor, generatoarele căruia formează cu axa OZ unghiul φ_0.

Porțiunii de plan $\theta = \theta_0$ din D' îi corespunde în spațiul $OXYZ$ semiplanul ce trece prin axa OZ sub unghiul θ_0 în raport cu axa OX.

Iacobianul acestei transformări

$$I(r,\varphi,\theta) = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi & x'_\theta \\ y'_r & y'_\varphi & y'_\theta \\ z'_r & z'_\varphi & z'_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\varphi \begin{vmatrix} r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \end{vmatrix} + r\sin\varphi \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\varphi \cdot r^2 \sin\varphi\cos\varphi + r\sin\varphi \cdot r\sin^2\varphi = r^2\sin\varphi(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) =$$

$$= r^2 \sin\varphi > 0 \ (r \ne 0, \varphi \ne 0, \varphi \ne \pi).$$

Aplicând formula (2), obținem formula de trecere de la coordonatele carteziene rectangulare la cele sferice:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \tag{6}$$
$$= \iiint_D f(r\cdot\sin\varphi\cdot\cos\theta, r\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta, r\cdot\cos\varphi)\cdot r^2\cdot\sin\varphi\cdot d\varphi\cdot dr\cdot d\theta,$$

care este valabilă, conform notei 1, pentru $r \ge 0$, $\varphi \in [0,\pi]$ și $\theta \in [0,2\pi]$.

La calcularea integralei triple în coordonatele sferice se poate folosi desenul domeniului D, raportat la sistemul cartezian rectangular de coordonate $OXYZ$ și sensul geometric al coordonatelor sferice.

Nota 3. Unii autori ([6], [8], V.2, [18]) drept coordonate sferice ale punctului $M(x,y,z)$ din spațiul $OXYZ$ numesc tripletul de numere (r,θ,φ), unde r este lungimea segmentului OM, care unește originea coordonatelor cu punctul M, φ este unghiul dintre dreapta OM și planul XOY și θ este unghiul dintre proiecția segmentului OM pe planul XOY și axa OX.

Coordonatele sferice, astfel definite, sunt legate de coordonatele carteziene rectangulare (x,y,z) cu ajutorul formulelor:

$$x = r\cos\varphi\cos\theta,\ y = r\cos\varphi\sin\theta,\ z = r\sin\varphi. \tag{7}$$

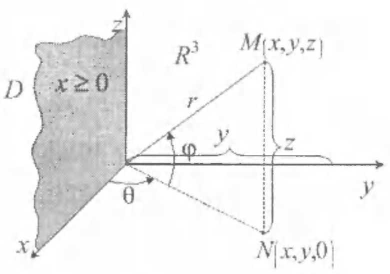


Fig. 18.

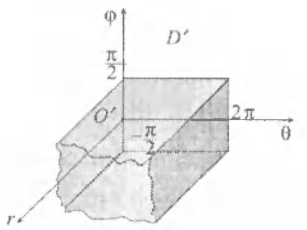


Fig. 19.

Conform definiţiei $r \geq 0$, iar valorile unghiurilor φ şi θ se vor lua în limitele

$$0 \leq \theta \leq 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Formulele (7), în limitele indicate, transformă domeniul

$$D' = (\theta, r, \varphi) \left| \left\{ 0 \leq r < +\infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\} \right.,$$

raportat la sistemul cartezian rectangular $O'r\theta\varphi$ (fig. 19), în tot spaţiul R^3, raportat respectiv la sistemul cartezian rectangular de coordonate $OXYZ$ (fig. 18).

Denumirea de „coordonate sferice" se datorează şi în cazul acesta faptului că porţiunii de plan $r = r_0$ din D' îi corespunde în spaţiul $OXYZ$ o suprafaţă sferică $x^2 + y^2 + z^2 = r_0^2$ cu centrul în originea coordonatelor de raza r_0. Constatăm, de asemenea, că porţiunii de plan $\theta = \theta_0$ din D' îi corespunde semiplanul ce trece prin axa OZ sub unghiul θ_0 în raport cu axa OX, iar porţiunii de plan $\varphi = \varphi_0$ – conul circular cu vârful în originea coordonatelor, generatoarele căruia sunt înclinate faţă de planul XOY sub unghiul θ_0.

Formulele (7) stabilesc o corespondenţă biunivocă între punctele interioare ale domeniului D' şi punctele spaţiului $OXYZ$ ($x \geq 0$). Transformarea frontierei lui D' pe semiplanul XOZ ($x \geq 0$) nu va mai fi biunivocă.

Iacobianul transformării (7) este

$$I(r,\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\theta & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\theta & y'_\varphi \\ z'_r & z'_\theta & z'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi & 0 & r\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= r^2\cos\varphi > 0\ (r \neq 0,\ \varphi \neq \pm\frac{\pi}{2}).$$

În domeniul D' iacobianul transformării (7) este nenegativ şi se transformă în zero numai pe frontiera lui ($r = 0$, $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$).

Aplicând formula (2), obţinem următoarea formulă de trecere de la coordonatele carteziene rectangulare la cele sferice (în sensul acesta):

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$\iiint_D f(r\cos\varphi\cos\theta, r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi) r^2 \cos\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi, \quad (8)$$

care este justă, în virtutea notei 1, pentru $r \geq 0$, $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Exemplul 6. Să se calculeze masa emisferei D de rază R, dacă densitatea distribuţiei masei în fiecare punct al ei este proporţională cu distanţa acestui punct de la un punct oarecare fix O, luat pe frontiera bazei emisferei (să se considere coeficientul de proporţionalitate $k = 1$).

Alegem originea de coordonate în punctul O, iar planul XOY în planul bazei emisferei astfel încât centrul sferei să se afle pe axa OY (vezi fig. 20).

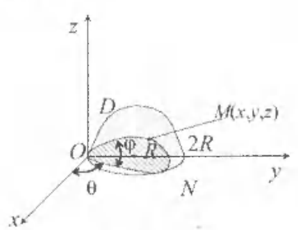


Fig. 20.

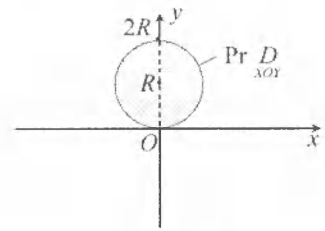


Fig. 21.

În acest caz ecuația suprafeței, care mărginește acest corp D de sus are forma $x^2+y^2+z^2=2Ry$, iar ecuația suprafeței care mărginește corpul D de jos, adică proiecția domeniului D pe planul XOY, are forma $x^2+y^2\le 2Ry$, $z=0$. Densitatea distribuției masei se determină după formula:

$$\gamma(x,y,z)=k\cdot OM=k\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

și, prin urmare, conform formulei (1) din 6.4.1, calcularea masei acestui corp se reduce la calcularea integralei triple:

$$m=\iiint\limits_D\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz\,.$$

Aplicăm, mai întâi, formula (6):

$$m=\iiint\limits_D\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{D'}r\cdot r^2\cdot\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta\,.$$

Observăm că limitele variabilelor de integrare sunt:

a) Circumferința $x^2+y^2=2Ry$, adică $x^2+(y-R)^2=R^2$ este situată în cadranele 1 și 2 ale planului XOY. Deci $\theta\in[0,\pi]$;

b) Unghiul φ, care este egal cu unghiul dintre axa OZ și dreapta OM variază de la 0 până la $\frac{\pi}{2}$;

c) Înlocuind $x=r\sin\varphi\cos\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\varphi$ în ecuația suprafeței sferice $x^2+y^2+z^2=2Ry$,obținem:

$$r^2=2Rr\cdot\sin\varphi\sin\theta\,.$$

De unde $r_1=0$, $r_2=2R\cdot\sin\varphi\sin\theta$. Prin urmare,

$$m=\iiint\limits_{D'}r^3\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2R\sin\varphi\sin\theta}r^3\sin\varphi\,dr=$$

$$=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi\cdot\frac{1}{4}\cdot 16R^4\sin^4\varphi\sin^4\theta=$$

$$=4R^4\int_0^{\pi}\sin^4\theta\,d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2\varphi\right)^2d(\cos\varphi)\cdot(-1)=$$

$$=-4R^4\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2d\theta\cdot\left(\cos\varphi-\frac{2\cos^3\varphi}{3}+\frac{\cos^5\varphi}{5}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=-R^4\int_0^{\pi}\left(1-2\cos 2\theta+\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)d\theta\cdot\left(-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)=$$

$$=\frac{8}{15}R^4\left(\theta-\sin 2\theta+\frac{1}{2}\theta+\frac{\sin 4\theta}{8}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{4}{5}\pi R^4\,.$$

Dacă aplicăm formula (8) cu $x=r\cos\varphi\cos\theta$, $y=r\cos\varphi\sin\theta$, $z=r\sin\varphi$,obținem:

$$m=\iiint\limits_{D'}r^3\cos\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta\,.$$

Limitele variabilelor de integrare sunt:

a) Deoarece $\Pr\limits_{XOY}D$, adică cercul $x^2+y^2\le 2Ry$, este situată în cadranele 1 și 2, avem: $\theta\in[0,\pi]$;

b) Unghiul φ, care este egal cu unghiul dintre dreapta OM și planul XOY, variază de la 0 până la $\frac{\pi}{2}$;

c) Ecuația sferei $x^2+y^2+z^2=2Ry$ cu ajutorul formulelor (7) are forma $r^2=2Rr\cos\varphi\sin\theta$. De unde $r_1=0$ și $r_2=2R\cdot\cos\varphi\sin\theta$.

Prin urmare,

$$m=\iiint\limits_{D'}r^3\cos\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi\sin\theta}r^3\,dr=$$

$$=4R^4\int_0^{\pi}\sin^4\theta\,d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\,d\varphi=$$

$$=4R^4\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2\varphi\right)^2d(\sin\varphi)=$$

$$= 4R^4 \cdot \frac{3}{8}\pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - 2\sin^2\varphi + \sin^4\varphi\right) d(\sin\varphi) =$$

$$= \frac{3}{2}\pi R^4 \left(\sin\varphi - \frac{2}{3}\sin^3\varphi + \frac{1}{5}\sin^5\varphi \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}\pi R^4 \cdot \frac{8}{15} = \frac{4}{5}\pi R^4 .$$

Nota 4. Dacă frontiera domeniului de integrare D conţine suprafeţe în ecuaţiile cărora figurează expresii de forma $\left(x^2 + y^2\right)^\alpha$, $\alpha \neq 0$, atunci e convenabil să trecem la coordonatele cilindrice: $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $z = z$ cu $\rho \geq 0$, $\theta \in [0,2\pi]$ şi $z \in R$. Remarcăm că $\left(x^2 + y^2\right)^\alpha = \rho^{2\alpha}$. Observaţia rămâne în vigoare şi în cazul când avem oricare alte combinaţii de acest fel în raport cu x, y, z. De exemplu, dacă ecuaţia suprafeţei conţine expresia $\left(x^2 + z^2\right)^\alpha$, $\alpha \neq 0$, trecem la coordonatele cilindrice determinate de formulele $x = \rho\cos\theta$, $z = \rho\sin\theta$, $y = y$ cu $\rho \geq 0$, $\theta \in [0,2\pi]$ şi $y \in R$ etc.

Dacă frontiera domeniului de integrare D conţine suprafeţe în ecuaţiile cărora figurează expresii de forma $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^\alpha$, $\alpha \neq 0$, atunci e convenabil să trecem la aşa-numitele *coordonate cilindrice generalizate*: $x = a\rho\cos\theta$, $y = b\rho\sin\theta$, $z = z$ cu $a > 0$, $b > 0$, $\rho \geq 0$, $\theta \in [0,2\pi]$ şi $z \in R$.

Remarcăm că şi în cazul acesta $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^\alpha = \rho^{2\alpha}$, iar iacobianul $I(\rho,\theta,z) = ab\rho$. Observaţia rămâne în vigoare şi în cazul unor altor combinaţii de acest fel între variabilele de integrare x, y, z şi $I(\rho,\theta,x) = I(\rho,\theta,y) = I(\rho,\theta,z) = ab\rho$.

Exemplul 7. Să se calculeze integrala $\iiint\limits_D \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4}}}$, unde D este mărginit de elipsoidul $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{4} = 1$.

Observăm că expresia $\left(\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4}\right)$ figurează atât în ecuaţia suprafeţei ce mărgineşte domeniul de integrare, cât şi în funcţia de integrare. Deci, folosim coordonatele cilindrice generalizate cu formulele $x = a\rho\cos\theta = 3\rho\cos\theta$, $z = b\rho\sin\theta = 2\rho\sin\theta$, $y = y$ şi $I(\rho,\theta,y) = ab\rho = 6\rho$. Ecuaţia elipsoidului în spaţiul $\rho\theta y$ are forma $\rho^2\cos^2\theta + y^2 + \rho^2\sin^2\theta = 1$, adică $y^2 = 1 - \rho^2$. De unde $y_1 = -\sqrt{1-\rho^2}$ şi $y_2 = \sqrt{1-\rho^2}$. Proiecţia elipsoidului pe planul XOZ ($y = 0$) coincide cu figura mărginită de elipsa $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$.

De aici rezultă că $\rho^2 = 1$ sau $\rho = 1$ şi $\theta \in [0,2\pi]$. Prin urmare, aplicând formula (2), avem:

$$\iiint\limits_D \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4}}} = \iiint\limits_{D'} \frac{|I(\rho,\theta,y)|}{\rho} d\rho\, d\theta\, dy = \iiint\limits_{D'} (ab)\, d\rho\, d\theta\, dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_{-\sqrt{1-\rho^2}}^{\sqrt{1-\rho^2}} 3 \cdot 2 \cdot dy = 6 \cdot 2\pi \cdot 2\int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\, d\rho =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \rho = \sin t \\ d\rho = \cos t\, dt \\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{array} \right| = 24\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = 24\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 6\pi^2 .$$

Nota 5. Dacă frontiera domeniului de integrare D conţine suprafeţe în ecuaţiile cărora figurează expresii de forma $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^\alpha$, $\alpha \neq 0$, atunci e convenabil să trecem la coordonatele sferice. Remarcăm că $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^\alpha = r^{2\alpha}$. Dacă frontiera domeniului de integrare D conţine suprafeţe în ecuaţiile cărora figurează expresii de forma $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^\alpha$, $\alpha \neq 0$, atunci e convenabil să trecem la aşa-numitele *coordonate sferice generalizate*: $x = ar\sin\varphi\cos\theta$, $y = br\sin\varphi\sin\theta$, $z = cr\cos\varphi$ cu $a>0$, $b>0$, $c>0$, $r\ge 0$, $\varphi\in[0,\pi]$, $\theta\in[0,2\pi]$ şi iacobianul $I(r,\varphi,\theta)=abcr^2\sin\varphi$ sau $x = ar\cos\varphi\cos\theta$, $y = br\cos\varphi\sin\theta$, $z = cr\sin\varphi$ cu $a>0$, $b>0$, $c>0$, $r\ge 0$, $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $\theta\in[0,2\pi]$ şi iacobianul $I(r,\theta,\varphi)=abcr^2\cos\varphi$.

Exemplul 8. Să se calculeze volumul corpului mărginit de suprafaţa:

a) $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=z$

b) $\left(x^2+y^2+z^2\right)^n=x^{2n-1}$, $n\in N$.

Întrucât în ecuaţiile suprafeţelor respective figurează expresii de forma $\left(x^2+y^2+z^2\right)^\alpha$ cu $\alpha=2$ şi $\alpha=n\in N$, folosim coordonatele sferice, de exemplu, de tipul 1 (formulele (5)).

a) Corpul este simetric în raport cu planele YOZ şi XOZ deoarece înlocuind x prin $(-x)$ şi y prin $(-y)$, ecuaţia nu se schimbă. Întrucât $z\ge 0$, avem că corpul este situat în primele 4 octane. De aceea, calculăm $\frac{1}{4}$ din volumul corpului dat, adică volumul acelei părţi care este situată în octanul 1. Avem: $x=r\sin\varphi\cos\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\varphi$, unde $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ şi ecuaţia suprafeţei în spaţiul $Or\theta\varphi$ are forma $r^4=r\cos\varphi$, de unde $r_1=0$ şi $r_2=\sqrt[3]{\cos\varphi}$. Folosind formula (6), obţinem:

$$V_D=4\iiint_D dx\,dy\,dz=4\iiint_{D'} r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta=$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{\sqrt[3]{\cos\varphi}}r^2\,dr=$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d(\sin\varphi)=\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}.$$

b) Similar punctului precedent, constatăm că corpul este simetric în raport cu planele XOZ, XOY şi $x\ge 0$. De aceea, calculăm $\frac{1}{4}$ din volumul corpului dat, adică volumul acelei părţi care este situată în octanul 1. De data aceasta e mai raţional de considerat formulele următoare: $x=r\cos\varphi$ (rolul lui z din punctul a) este analog lui x din b)). De aceea $y=r\sin\varphi\sin\theta$ şi $z=r\sin\varphi\cos\theta$. Ecuaţia suprafeţei în spaţiul $Or\theta\varphi$ are forma $r^{2n}=r^{2n-1}\cdot(\cos\varphi)^{2n-1}$. De unde $r_1=0$ şi $r_2=(\cos\varphi)^{2n-1}$. Folosind formula (6), avem:

$$V_D=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{(\cos\varphi)^{2n-1}}r^2\,dr=$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi\cdot(\cos\varphi)^{6n-3}=$$

$$=-\frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^{6n-3}\,d(\cos\varphi)=-\frac{2\pi}{3}\left.\frac{(\cos\varphi)^{6n-2}}{6n-2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{1}{2(3n-1)}=\frac{\pi}{3(3n-1)}.$$

Exemplul 9. Să se calculeze volumul corpului mărginit de:

a) suprafaţa $\left(\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{4}\right)^2=y$;

b) suprafeţele $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2=16$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=0$, $y=0$, $y=x$.

Rezolvare:

a) Corpul dat este simetric în raport cu planele YOZ şi XOY.

Întrucât $y \geq 0$, aflăm $\frac{1}{4}$ din volumul corpului dat, adică volumul acelei părți care este situată în octanul 1.

Trecem la coordonatele sferice generalizate:

$$x = ar\sin\varphi\cos\theta = r\sin\varphi\cos\theta,$$

$$y = br\sin\varphi\sin\theta = \sqrt{2}\sin\varphi\sin\theta,$$

$$z = cr\cos\varphi = 2r\cos\varphi,$$

unde $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ și ecuația suprafeței în spațiul $Or\varphi\theta$ are forma

$$r^4 = r\sqrt{2}\sin\varphi\sin\theta.$$

De unde $r_1 = 0$ și $r_2 = \sqrt[3]{\sqrt{2}\sin\varphi\sin\theta}$. Iacobianul $I(r,\theta,\varphi) = abcr^2\sin\varphi = 2\sqrt{2}r^2\sin\varphi$. Deci

$$V_D = 4\iiint_D dx\,dy\,dz = 4\iiint_{D'} |I(r,\theta,\varphi)|\,dr\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= 8\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \int_0^{\sqrt[3]{\sqrt{2}\sin\varphi\sin\theta}} r^2\,dr = \frac{16}{3}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{16}{3}(-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi = \frac{4\pi}{3}.$$

Propunem cititorului să rezolve ex. 4 din 6.4.2, utilizând această metodă.

b) Trecem la coordonatele sferice:

$$x = r\sin\varphi\cos\theta,\ y = r\sin\varphi\sin\theta,\ z = r\cos\varphi.$$

Ecuațiile suprafețelor sferice în spațiul $Or\theta\varphi$ au forma:

$$r^2 = 1 \Rightarrow r_1 = 1 \text{ și } r^2 = 16 \Rightarrow r_2 = 4, \text{ adică } r \in [1,4].$$

Ecuația conului cu vârful în originea de coordonate și cu axa de simetrie OZ în spațiul $Or\theta\varphi$ are forma: $r\cos\varphi = \sqrt{r^2\sin^2\varphi} = r\sin\varphi$, adică $\cos\varphi = \sin\varphi$. De unde $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$.

Întrucât unghiul φ este unghiul format de raza vectoare cu direcția pozitivă a axei OZ și variază de la 0 până la π, în planul orizontal XOY ($z = 0$) primește valoarea $\frac{\pi}{2}$. Deci $\varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$. Proiecția corpului pe planul XOY este mărginită de liniile:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \Rightarrow 2(x^2 + y^2) = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \Rightarrow 2(x^2 + y^2) = 16 \Rightarrow x^2 + y^2 = 8$

3) $y = 0$, 4) $y = x$ și are forma (fig. 22):

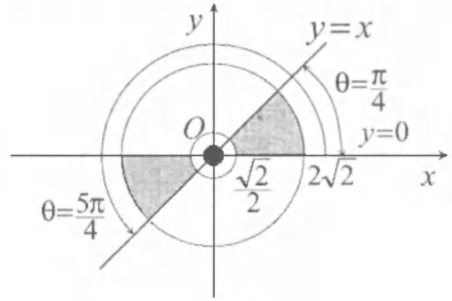


Fig. 22.

În virtutea simetriei corpului dat în raport cu axa OZ, avem că domeniul D este compus din două părți cu volume egale, care se află în octanele 1 și 3. Deci $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ sau $\theta \in \left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right]$.

Aplicând formula trecerii de la coordonatele carteziene rectangulare la cele sferice în integrala triplă, obținem:

$$V_D = 2\iiint_D dx\,dy\,dz = 2\iiint_{D'} r^2\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi\int_1^4 r^2\,dr = 2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot(-\cos\varphi)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{63}{3} = \frac{21\sqrt{2}}{4}\pi.$$

6.4.4. Aplicațiile integralei triple

Conform formulei (2) din 6.4.1 integrala triplă poate fi aplicată la calcularea volumelor corpurilor: dacă D este un domeniu compact cubabil, adică care are volum, atunci volumul V_D al acestui corp se calculează după formula:

$$V_D = \iiint_D dx\,dy\,dz$$

(a se consulta exemplele 4 din 6.4.2 și 8, 9 din 6.4.3).

La calculul integralelor triple ne conduc probleme legate de distribuția continuă a masei într-un domeniu tridimensional material neomogen.

E natural că în principiu toate mărimile geometrice și mecanice, legate de repartizarea maselor într-un oarecare corp închis și mărginit D în spațiu, se exprimă prin integrale triple, aplicate la corpul D și aici e cel mai simplu să ne folosim de principiul însumărilor elementelor infinit mici (a se consulta 4.5 din [20] și 6.3.4): să notăm cu γ densitatea de distribuție a maselor într-un punct arbitrar $M(x,y,z)$ al corpului mărginit și închis D din spațiu. Admitem că funcția $\gamma=\gamma(x,y,z)$ este continuă și nenegativă pe D. Însumând elementele de masă $dm=\gamma\,dv=\gamma(x,y,z)dx\,dy\,dz$, vom obține pentru mărimea întregii mase:

$$m=\iiint_D \gamma(x,y,z)dx\,dy\,dz$$

(a se consulta nota 1 și formula (2) din 6.4.1).

Pornind de la elementele statice elementare

$$dM_{YOZ}=x\,dm=x\gamma\,dv,$$
$$dM_{XOZ}=y\,dm=y\gamma\,dv,$$
$$dM_{XOY}=z\,dm=z\gamma\,dv,$$

determinăm momentele statice în raport cu planele de coordonate ale sistemului cartezian de coordonate:

$$M_{YOZ}=\iiint_D x\gamma\,dv,\quad M_{XOZ}=\iiint_D y\gamma\,dv,\quad M_{XOY}=\iiint_D z\gamma\,dv,$$

iar pe baza lor – coordonatele centrului de greutate:

$$x_0=\frac{M_{YOZ}}{m}=\frac{\iiint_D x\gamma\,dv}{\iiint_D \gamma\,dv},\quad y_0=\frac{M_{XOZ}}{m}=\frac{\iiint_D y\gamma\,dv}{\iiint_D \gamma\,dv},$$

$$z_0=\frac{M_{XOY}}{m}=\frac{\iiint_D z\gamma\,dv}{\iiint_D \gamma\,dv}.$$

În cazul unui corp omogen funcția $\gamma(x,y,z)$ este constantă și deci obținem un rezultat mai simplu:

$$x_0=\frac{1}{V_D}\iiint_D x\,dv,\quad y_0=\frac{1}{V_D}\iiint_D y\,dv,\quad z_0=\frac{1}{V_D}\iiint_D z\,dv,$$

unde V_D este volumul corpului D.

Sunt clare și formulele pentru momentele de inerție în raport cu axele de coordonate:

$$I_{OX}=\iiint_D (y^2+z^2)\gamma\,dv,\quad I_{OY}=\iiint_D (x^2+z^2)\gamma\,dv,$$

$$I_{OZ}=\iiint_D (x^2+y^2)\gamma\,dv$$

sau în raport cu planele de coordonate:

$$I_{YOZ}=\iiint_D x^2\gamma\,dv,\quad I_{XOZ}=\iiint_D y^2\gamma\,dv,\quad I_{XOY}=\iiint_D z^2\gamma\,dv.$$

În cazul acesta momentul polar de inerție este:

$$I_O=I_{YOZ}+I_{XOZ}+I_{XOY}=\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\gamma\,dv.$$

Exemplul 10. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al corpului material omogen care ocupă domeniul

$$D=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\right\}.$$

Avem $x_0=\frac{1}{V_D}\iiint_D x\,dv,\quad y_0=\frac{1}{V_D}\iiint_D y\,dv,\quad z_0=\frac{1}{V_D}\iiint_D z\,dv,$

unde V_D este volumul domeniului D care este egal cu $\frac{1}{8}$ din volumul domeniului mărginit de elipsoidul $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Conform exemplului 4 din 6.4.2, avem:

$$V_D = \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3}abc\cdot\pi = \frac{\pi}{6}abc.$$

Conform notei 5 din 6.4.3, trecem la coordonatele sferice generalizate:

$$x = ar\sin\varphi\cos\theta,\ y = br\sin\varphi\sin\theta,\ z = cr\cos\varphi,$$

cu $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $r\in[0,1]$ şi iacobianul $I = abcr^2\sin\varphi$, deoarece domeniul D este situat în octanul 1. Prin urmare,

$$x_0 = \frac{6}{\pi\cdot abc}\iiint_D x\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \frac{6}{\pi\cdot abc}\iiint_{D'} ar\sin\varphi\cos\theta\cdot abc\cdot r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta =$$

$$= \frac{6a}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\,d\varphi\int_0^1 r^3\,dr =$$

$$= \frac{6a}{\pi}\cdot(\sin\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{2}\left(\varphi-\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{8}a;$$

$$y_0 = \frac{6}{\pi\cdot abc}\iiint_{D'} br\sin\varphi\sin\theta\cdot abc\cdot r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta =$$

$$= \frac{6b}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\,d\varphi\int_0^1 r^3\,dr = \frac{6b}{\pi}\cdot 1\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{8}b;$$

$$z_0 = \frac{6}{\pi\cdot abc}\iiint_{D'} cr\cos\varphi\cdot abc\cdot r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta =$$

$$= \frac{6c}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\int_0^1 r^3\,dr = \frac{6c}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{8}c.$$

Astfel, centrul de greutate al domeniului omogen D are coordonatele $\left(\frac{3}{8}a, \frac{3}{8}b, \frac{3}{8}c\right)$.

6.5. Integralele de suprafaţă

Teoria integralelor de suprafaţă în mare parte este similară teoriei integralelor curbilinii. Se deosebesc integrale de suprafaţă de speţa 1 (după aria suprafeţei) şi speţa 2 (după coordonate).

6.5.1. Integralele de suprafaţă de speţa 1

Integralele de suprafaţă de speţa 1 (după aria suprafeţei) reprezintă o generalizare a integralelor duble, tot aşa cum integralele curbilinii de speţa 1 (după lungimea arcului) reprezintă o generalizare a integralelor definite simple.

Această generalizare se face în felul următor.

Fie S o suprafaţă cuadrabilă, adică care are arie, în spaţiul R^3 raportat la sistemul cartezian rectangular de coordonate $OXYZ$, iar funcţia $f(x,y,z)$ o funcţie definită în punctele suprafeţei S. Divizăm în mod arbitrar suprafaţa S în n părţi $S_1, S_2,..., S_n$, fără puncte interioare comune. Ariile părţilor $S_1, S_2,..., S_n$ le vom nota prin $\Delta S_1, \Delta S_2,..., \Delta S_n$. Pe fiecare suprafaţă elementară S_i ($i=1,...,n$) alegem câte un punct $M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$. Alcătuim suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i = f(M_1)\Delta S_1 + f(M_2)\Delta S_2 + ... + f_n(M_n)\Delta S_n,$$

care se numeşte *suma integrală* pentru funcţia f pe suprafaţa S. Evident că pentru funcţia dată f se pot compune o infinitate de sume integrale pe suprafaţa S, care depind atât de modul de divizare al suprafeţei S, cât şi de alegerea punctelor intermediare M_i.

Numim *diametru* al suprafeţei date cea mai mare distanţă dintre două puncte ale acestei suprafeţe. Se numeşte *pasul diviziunii* Δ a suprafeţei S în suprafeţele elementare $S_1, S_2,..., S_3$, fără puncte interioare comune, cel mai mare dintre diametrele suprafeţelor de diviziune $S_1, S_2,..., S_n$. Îl vom nota prin $\lambda = \lambda(\Delta)$.

Definiţie. Spunem că funcţia $f(x,y,z)$ este *integrabilă* pe suprafaţa cuadrabilă S dacă există un număr I cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon>0$ există un $\delta(\varepsilon)>0$ astfel încât, oricare ar fi diviziunea $\Delta=(S_1,S_2,...,S_n)$ a suprafeţei S cu $\lambda(\Delta)<\delta(\varepsilon)$ şi oricare ar fi alegerea punctelor intermediare M_i pe S_i ($i=1,...,n$), să avem

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i - I\right| < \varepsilon .$$

Atunci notăm $I=\iint_S f(x,y,z)ds$ şi citim integrala funcţiei f pe suprafaţa S. Această integrală se numeşte *integrală de suprafaţă de speţa 1* a funcţiei f pe suprafaţa cuadrabilă S. Astfel

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i ,$$

dacă această limită (finită) există.

Din definiţie rezultă că integrala $\iint_S f(x,y,z)ds$ nu depinde nici de modul de divizare a suprafeţei S în suprafeţe elementare S_i, nici de alegerea punctelor intermediare M_i pe suprafeţele S_i.

Integralele de suprafaţă de speţa 1 sunt numite adesea *integrale de suprafaţă după aria suprafeţei*, deoarece în sumele integrale valorile funcţiei f în punctul M_i se înmulţesc cu ariile suprafeţelor elementare S_i.

Dacă presupunem că S este o suprafaţă materială, iar $f(x,y,z)$ reprezintă densitatea de repartiţie a maselor în punctul cu coordonatele x,y,z, atunci dacă integrala funcţiei f pe suprafaţa S există, ea este egală cu masa suprafeţei materiale S.

Dacă f ar reprezenta densitatea de repartiţie a unei sarcini electrice, integrala lui f pe suprafaţa S ar reprezenta sarcina electrică totală distribuită pe S.

Constatăm că definiţia integralei de suprafaţă de speţa 1 este similară definiţiei integralei duble şi de aceea proprietăţile de bază ale integralelor duble se extind şi asupra integralelor de suprafaţă de speţa 1 (a se consulta 6.3.2).

În particular dacă pe suprafaţa S funcţia $f(x,y,z)=1$, atunci $\iint_S ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i = A_s$, unde A_s este aria suprafeţei S. Deci, prin intermediul integralei de suprafaţă de speţa 1 putem calcula ariile suprafeţelor cuadrabile neplane.

În afară de aceasta, cu ajutorul lor se poate calcula masa, momentele statice, momentele de inerţie, coordonatele centrului de greutate şi alte mărimi asemănătoare ale suprafeţelor materiale cu densitatea superficială de repartiţie a maselor cunoscută (a se consulta **F1-F4** din 6.3.4).

Problemele acestea se rezolvă analog problemelor respective ce se referă la curbe materiale, domenii materiale plane şi spaţiale.

Vom enunţa cele mai simple condiţii suficiente de existenţă a integralelor de suprafaţă de speţa 1.

Teorema 1. Dacă suprafaţa S poate fi caracterizată printr-o ecuaţie $z=\varphi(x,y)$, unde funcţia $\varphi(x,y)$ este continuă împreună cu derivatele parţiale $\varphi'_x(x,y), \varphi'_y(x,y)$ într-un domeniu compact D, care coincide cu proiecţia lui S pe planul XOY, iar funcţia $f(x,y,z)$ este continuă pe suprafaţa S, atunci integrala $\iint_S F(x,y,z)dS$ există şi este finită.

Demonstraţia o puteţi găsi în aşa studii complete ca [8], v.2, § 50; [17], v.3, cap.17; [10], v.2, cap.5 etc. Majoritatea cazurilor ce se întâlnesc în practică se reduc la utilizarea acestor condiţii, precum şi a condiţiilor, ce se obţin din acestea prin permutarea variabilelor x, y şi z.

Pentru a calcula integralele de suprafaţă de speţa 1, ele se reduc la integralele duble.

Fie $f(x,y,z)$ o funcție continuă pe suprafața S, care satisface condițiile teoremei 1 de mai sus. În acest caz pentru orice mod de divizare a suprafeței S în suprafețele elementare S_i și orice alegere a punctelor intermediare $M_i(\xi_i,\eta_i,z_i)$ cu $z_i=\varphi(\xi_i,\eta_i)$ pe suprafețele S_i ($i=1,...,n$) avem că

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i .$$

Construim sumele integrale într-un mod special: împărțim S în părțile S_1, S_2,..., S_n fără puncte interioare comune cu ariile respective ΔS_1, ΔS_2,..., ΔS_n. Notăm prin D_i proiecția lui S_i pe planul XOY. Astfel domeniul $D=\Pr\limits_{XOY} S$ se va împărți în n părți D_1, D_2,..., D_n cu ariile respective $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$,..., $\Delta\sigma_n$.

Aplicând formula (1) din 6.3.4 avem:

$$\Delta S_i=\iint_{D_i}\sqrt{1+[\varphi'_x(x,y)]^2+[\varphi'_y(x,y)]^2}\,dx\,dy \quad (i=1,...,n).$$

Conform formulei mediei pentru o integrală dublă (**P8**, b) din 6.3.2), obținem:

$$\Delta S_i=\sqrt{1+[\varphi'_x(\xi_i,\eta_i)]^2+[\varphi'_y(\xi_i,\eta_i)]^2}\cdot\Delta\sigma_i ,$$

unde $N_i(\xi_i,\eta_i)$ este un punct oarecare de pe domeniul de diviziune D_i ($i=1,...,n$). Notăm prin M_i punctul de pe suprafața S cu coordonatele (ξ_i,η_i,z_i), unde $z_i=\varphi(\xi_i,\eta_i)$, și compunem suma integrală pentru funcția f pe suprafața S, care corespunde diviziunii suprafeței S în S_1, S_2,..., S_n și punctelor M_i ($i=1,...,n$) alese pe aceste suprafețe.

Avem:

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\varphi(\xi_i,\eta_i))\cdot\sqrt{1+[\varphi'_x(\xi_i,\eta_i)]^2+[\varphi'_y(\xi_i,\eta_i)]^2}\cdot\Delta\sigma_i \quad (1)$$

Am obținut o sumă integrală pentru integrala dublă de la funcția

$$f(x,y,\varphi(x,y))\cdot\sqrt{1+[\varphi'_x(x,y)]^2+[\varphi'_y(x,y)]^2} ,$$

care este continuă pe domeniul $D=\Pr\limits_{XOY} S$.

Observăm că dacă pasul diviziunii suprafeței S tinde către zero, pasul diviziunii respective a suprafeței plane $D=\Pr\limits_{XOY} S$ va tinde și el către zero.

Trecând la limită în relația (1) când pasul diviziunii suprafeței S tinde către zero, obținem formula calculării integralei de suprafață de speța 1 cu ajutorul unei integrale duble pe proiecția D a suprafeței S pe planul XOY:

$$\iint_S f(x,y,z)dS=$$

$$=\iint_D f(x,y,\varphi(x,y))\cdot\sqrt{1+[\varphi'_x(x,y)]^2+[\varphi'_y(x,y)]^2}\,dx\,dy . \quad (2)$$

În mod analog se obțin formulele care exprimă în condiții respective integrala de suprafață de speța 1 prin integrale duble după proiecțiile acestei suprafețe pe planele XOZ și YOZ.

În calculul integralelor de suprafață de o formă mai complicată aceste suprafețe se împart, dacă se poate, în prealabil în părți care satisfac condițiile teoremei 1 și pe urmă se aplică proprietatea aditivă a integralelor de suprafață și anume: dacă $S=S_1\cup S_2$, unde S_1, S_2 nu au puncte interioare comune și dacă integralele $\iint_{S_1} f(x,y,z)dS$ și $\iint_{S_2} f(x,y,z)dS$ există, atunci există și integrala $\iint_S f(x,y,z)dS$ și

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_{S_1} f(x,y,z)dS+\iint_{S_2} f(x,y,z)dS$$

(a se compara cu **P4** din 6.3.2).

Nota 1. Se poate demonstra că integrala pe suprafața S există și formula (2) are loc și în cazul când funcțiile $\varphi'_x(x,y)$, $\varphi'_y(x,y)$ sunt mărginite în domeniul compact $D=\Pr\limits_{XOY} S$ și continue pe D cu excepția unor linii netede pe porţiuni, iar funcţia $f(x,y,z)$ este mărginită pe suprafaţa S şi continuă pe S cu excepţia unor linii netede pe porţiuni.

Exemplul 1. Să se calculeze integrala $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS$, unde S este suprafaţa conică $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=\frac{z^2}{9}$, mărginită de planele $z=3$ şi $z=6$.

Observăm că S este caracterizată de ecuaţia $z=\frac{3}{4}\sqrt{x^2+y^2}$, $z\in[3,6]$. Proiecţia D a lui S pe planul XOY este coroana circulară mărginită de circumferinţele:

$$\text{a)}\ \begin{cases}\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=\frac{z^2}{9}\\ z=3\end{cases}\Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=1\Rightarrow x^2+y^2=16$$

$$\text{b)}\ \begin{cases}\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=\frac{z^2}{9}\\ z=6\end{cases}\Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=4\Rightarrow x^2+y^2=64.$$

Pe această coroană $D=\{(x,y)\,|\,16\le x^2+y^2\le 64\}$ funcţiile $z=\frac{3}{4}\sqrt{x^2+y^2}$, $z'_x=\frac{3}{4}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z'_y=\frac{3}{4}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ sunt continue. Prin urmare, aplicând formula (2), obţinem:

$$\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS=\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{1+\frac{9x^2}{16(x^2+y^2)}+\frac{9y^2}{16(x^2+y^2)}}\,dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\cdot\frac{5}{4}\,dx\,dy=\begin{vmatrix}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\\ I(\rho,\theta)=\rho\\ \rho\in[4,8]\\ \theta\in[0,2\pi]\end{vmatrix}=\frac{5}{4}\int_0^{2\pi}d\theta\int_4^8\rho^2\,d\rho=\frac{1120}{3}\pi.$$

6.5.2. Integralele de suprafaţă de speţa 2 (după coordonate)

Integralele de suprafaţă de speţa 2 pot fi privite ca o generalizare a integralelor duble, tot aşa după cum sunt privite integralele curbilinii de speţa 2 în raport cu integralele definite. La studierea integralelor curbilinii de speţa 2 (vezi 6.2.4) s-au considerat curbe orientate şi în sumele integrale respective valorile funcţiei în punctele intermediare ale curbei se înmulţeau cu lungimile proiecţiilor pe axele de coordonate ale arcelor de diviziune, luate cu un anumit semn. În cazul bidimensional noţiunea de curbă orientată se înlocuieşte cu noţiunea de faţă a suprafeţei, iar la alcătuirea sumelor integrale valorile funcţiei în punctele intermediare ale suprafeţei se înmulţesc cu ariile proiecţiilor pe planele de coordonate ale suprafeţelor de diviziune, luate cu un anumit semn.

Vom introduce în prealabil noţiunea de faţă a unei suprafeţe.

Fie S o suprafaţă netedă, adică există planul tangent (deci şi normala) în orice punct al ei şi poziţia planului tangent se schimbă continuu la deplasarea continuă a punctului de tangenţă pe suprafaţă (a se consulta 5.5.2). Considerăm pe S un punct arbitrar M şi ducem normala la suprafaţă. Alegem o direcţie bine determinată pe normală. Începem să deplasăm continuu punctul M pe un contur închis situat pe S, şi care nu intersectează frontiera ei. În poziţia iniţială punctul M se va întoarce sau cu acelaşi sens al normalei (vezi fig. 1), sau cu un sens direct opus al normalei (vezi fig. 2).

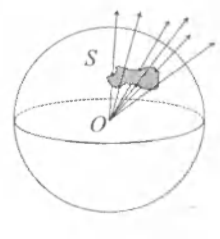


Fig. 1.

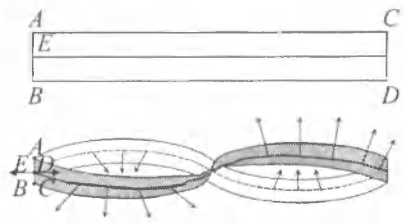


Fig. 2.

Dacă pe suprafaţa S există cel puţin un contur închis, care nu intersectează frontiera suprafeţei, la parcurgerea căruia, sensul normalei în punctul arbitrar M ce aparţine acestui contur, se schimbă în opus, atunci suprafaţa se numeşte *suprafaţă cu o singură faţă*. O astfel de suprafaţă este, de exemplu, foaia lui Möbius (1790-1868 – matematician german), modelul căreia este prezentat în fig. 2. Foaia lui Möbius poate fi obţinută luând o foaie dreptunghiulară de hârtie $ABDC$ şi încleind-o astfel încât punctul A să coincidă cu punctul D, iar punctul B – cu punctul C. Deplasându-ne pe linia medie EE' a foii lui Möbius şi revenind în poziţia iniţială, observăm că normala îşi schimbă sensul în opus.

Dacă pentru orice punct al suprafeţei S şi orice contur închis, care nu intersectează frontiera suprafeţei S, după parcurgere, sensul normalei nu se schimbă, atunci suprafaţa se numeşte *suprafaţă cu două feţe*, iar totalitatea punctelor suprafeţei cu sensurile normalei alese în ele se numeşte *faţă* a acestei suprafeţe.

Pentru suprafaţa cu două feţe alegerea sensului normalei într-un punct al ei determină sensul normalei în toate punctele suprafeţei, adică determină faţa suprafeţei.

Exemple de suprafeţe cu două feţe pot servi orice plan, sferă, elipsoid, paraboloid, orice suprafaţă definită prin ecuaţia $z=\varphi(x,y)$, unde $\varphi(x,y)$, $\varphi'_x(x,y)$, $\varphi'_y(x,y)$ sunt funcţii continue pe un domeniu oarecare al planului XOY. Definiţia de mai sus a feţei se află în concordanţă cu noţiunea intuitivă despre faţă „superioară" şi cea „inferioară" a suprafeţei $z=f(x,y)$ (subînţelegând că însăşi axa OZ este orientată vertical în sus), despre faţă „exterioară" şi cea „interioară" a suprafeţei închise, de exemplu a sferei, elipsoidului etc.

Noţiunea de faţă a suprafeţei e în strânsă legătură cu noţiunea de orientare a frontierei ei.

Fie S o suprafaţă orientată, adică este deja aleasă faţa ei, limitată de conturul închis care nu are puncte de autointersecţie (aşa curbe se numesc simple). Vom numi *direcţie pozitivă* (*sau sens direct*) de parcurgere a conturului L o astfel de direcţie, la care mişcându-ne pe faţa aleasă a suprafeţei S în această direcţie, suprafaţă rămâne

în stânga (vezi fig. 3). Direcţia inversă se va numi *direcţie negativă* (*sau sens indirect*). Dacă vom schimba faţa suprafeţei S, adică direcţia normalei va fi opusă, atunci direcţia pozitivă de parcurgere a conturului L şi cea negativă îşi vor schimba locurile.

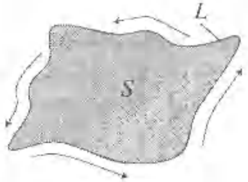


Fig. 3.

Fig. 4.

Considerăm acum o suprafaţă S netedă pe porţiuni, adică o suprafaţă S care constă dintr-un număr finit m de suprafeţe cu două feţe: S_1, S_2,..., S_m de forma considerată pe fig. 4, care vin în contact una cu alta după o muchie şi care este partea comună a contururilor lor. Acest procedeu simplu nu este suficient ca toată suprafaţa S să fie considerată cu două feţe: doar şi suprafaţa lui Möbius se poate compune uşor din două porţiuni cu două feţe.

Constatăm că în punctele acestor muchii planul tangent şi normala la suprafaţa S pot să nu existe, adică definiţia dată mai sus a suprafeţei cu două feţe la suprafaţa S, în general vorbind, nu se poate aplica. Completăm această definiţie şi anume: vom spune că suprafaţa S are două feţe, dacă pe contururile fiecărei suprafeţe elementare S_1, S_2,..., S_m putem alege astfel sensul de parcurgere, încât părţile lor comune („muchiile") vor fi parcurse în sensuri opuse.

Alegând sensurile de parcurgere ale contururilor suprafeţelor elementare S_1, S_2,..., S_m în felul indicat, vom determina astfel pe fiecare din suprafeţele S_1, S_2,..., S_m faţa acestor suprafeţe. Faţa suprafeţei S se determină ca totalitatea feţelor părţilor ei, alese în modul indicat.

Trecem acum la definiția integralei de suprafață de speța 2.

Fie S o suprafață cu două fețe care este netedă și caracterizată de ecuația $z=\varphi(x,y)$, definită pe un domeniu D din planul XOY, mărginit de un contur neted pe porțiuni. Presupunem că funcția $R(x,y,z)$ este definită și mărginită în orice punct al suprafeței S. Alegem una din cele două fețe ale suprafeței S, adică una din cele două direcții posibile ale normalei în punctele de pe suprafață (în așa mod noi orientăm suprafața). Dacă normala în orice punct al suprafeței S formează cu axa OZ unghiuri ascuțite, vom spune că am ales fața exterioară (sau superioară) a suprafeței S, iar dacă aceste unghiuri sunt obtuze, atunci – fața interioară (sau inferioară).

Divizăm suprafața S în n suprafețe elementare: S_1, S_2,..., S_n fără puncte interioare comune și notăm prin D_i proiecția suprafeței S_i $(i=1,\dots,n)$ pe planul XOY. Alegem pe fiecare suprafață parțială S_i un punct arbitrar M_i și formăm suma

$$\sum_{i=1}^{n} R(M_i)\Delta\sigma_i ,$$

unde $\Delta\sigma_i$ este aria suprafeței plane D_i, luată cu semnul plus, dacă se alege fața exterioară a suprafeței S și cu semnul minus în cazul când se alege fața interioară a suprafeței S. Dacă suprafața de diviziune S_i este o suprafață cilindrică, având generatoarele paralele cu axa OZ, atunci proiecția lui S_i pe planul XOY reprezintă un arc de curbă și deci $\Delta\sigma_i=0$. Astfel, chestiunea despre semnul lui $\Delta\sigma_i$, în acest caz, decade. Suma $\sum_{i=1}^{n} R(M_i)\Delta\sigma_i$ se numește *sumă integrală* pentru funcția $R(M)=R(x,y,z)$. Numim *diametru* al suprafeței S cea mia mare distanță dintre două puncte ale acestei suprafețe. Se numește *pasul* diviziunii Δ a

suprafeței S în suprafețele elementare S_1, S_2,...,S_n, fără puncte interioare comune, cel mai mare dintre diametrele suprafețelor de diviziune S_1, S_2,...,S_n. Îl vom nota prin $\lambda=\lambda(\Delta)$.

Definiție. Dacă există limita finită $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(M_i)\Delta\sigma_i$, atunci această limită se numește *integrală de suprafață de speța 2* a funcției $R(x,y,z)$ pe fața aleasă a suprafeței S în raport cu variabilele x și y și se notează astfel:

$$\iint_S R(x,y,z)d\sigma=\iint_S R(x,y,z)dx\,dy . \tag{1}$$

În acest caz funcția $R(x,y,z)$ se numește *integrabilă* pe suprafața S după variabilele x și y.

Schimbând rolul axelor de coordonate (în acest caz se schimbă respectiv și cerințele noastre în raport cu suprafața S), s-ar putea proiecta suprafețele de diviziune S_i ale lui S nu pe planul XOY, ci pe planul YOZ sau XOZ. În felul acesta se obțin alte două integrale de suprafață de speța 2:

$$\iint_S P(x,y,z)dy\,dz \ \text{sau} \ \iint_S Q(x,y,z)dx\,dz , \tag{2}$$

unde funcțiile $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ sunt definite și mărginite pe suprafața S. Suma

$$\iint_S P(x,y,z)dy\,dz+\iint_S Q(x,y,z)dx\,dz+\iint_S R(x,y,z)dx\,dy$$

se numește *integrală de suprafață de speța 2 în formă generală* și se notează astfel:

$$\iint_S P(x,y,z)dy\,dz+Q(x,y,z)dx\,dz+R(x,y,z)dx\,dy , \tag{3}$$

unde funcțiile $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ sunt definite și mărginite pe suprafața S.

Menționăm încă o dată că în toate cazurile se presupune că suprafața S este cu două fețe și integrala se aplică pe o anumită față a ei.

Un exemplu care ne conduce la noțiunea de integrală de suprafață de speța 2 este problema despre fluxul unui câmp vectorial care va fi examinată în 6.7.3. Pentru suprafețele cu o față noțiunea de integrală de suprafață de speța 2 nu se definește.

Din definiția integralelor de suprafață de speța 2 rezultă imediat următoarele proprietăți (în **P1-P7** se presupune că există fiecare din integralele considerate):

P1. Orice integrală de suprafață de speța 2 își schimbă semnul când se schimbă fața suprafeței.

P2. Factorul constant poate fi scos în afara simbolului integralei de suprafață.

P3. Integrala de suprafață a sumei a două funcții este egală cu suma integralelor respective ale termenilor ei.

P4. Dacă suprafața orientată S este împărțită în părțile $S_1, S_2, ..., S_n$, fără puncte interioare comune între ele, atunci integrala de suprafață pe întreaga suprafață S este egală cu suma integralelor după suprafețele ei elementare S_i ($i=1,...,n$).

P5. Dacă S este o suprafață cilindrică având generatoarele paralele cu axa OZ, atunci:

$$\iint_S R(x,y,z)dx\,dy = 0.$$

P6. Dacă S este o suprafață cilindrică având generatoarele paralele cu axa OX, atunci:

$$\iint_S P(x,y,z)dy\,dz = 0.$$

P7. Dacă S este o suprafață cilindrică având generatoarele paralele cu axa OY, atunci:

$$\iint_S Q(x,y,z)dx\,dz = 0.$$

Are loc următoarea teoremă.

Teorema 1. Fie S o suprafață netedă, cu două fețe, caracterizată de ecuația $z=\varphi(x,y)$, $(x,y)\in D$ și $D = \Pr_{XOY} S$ este un domeniu compact cu frontiera netedă pe porțiuni, iar $R(x,y,z)$ o funcție continuă pe S. Atunci $\iint_S R(x,y,z)dx\,dy$ există și

$$\iint_S R(x,y,z)dx\,dy = \iint_D R(x,y,\varphi(x,y))dx\,dy. \qquad (4)$$

Demonstrație. Alegem fața exterioară a suprafeței S. Divizăm S printr-o rețea de linii netede pe porțiuni în n părți S_1, S_2,..., S_n, ariile cărora le vom nota prin ΔS_1, ΔS_2,..., ΔS_n. Proiecțiile acestor linii pe planul XOY vor împărți domeniul D în domeniile elementare D_1, D_2,..., D_n, ariile cărora le vom nota prin $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$,..., $\Delta\sigma_n$. Luăm pe fiecare parte S_i un punct arbitrar $M_i(\xi_i,\eta_i,z_i)$ cu $z_i=\varphi(\xi_i,\eta_i)$. Deoarece în calitate de față a suprafeței S este aleasă cea exterioară, avem că proiecția lui S_i pe planul XOY se ia cu semnul „+" și este egală cu $(+\Delta\sigma_i)$. Alcătuim suma integrală:

$$\sum_{i=1}^{n} R(M_i)\Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\varphi(\xi_i,\eta_i))\cdot\Delta\sigma_i.$$

În partea dreaptă a egalității de mai sus avem suma integrală pentru integrala dublă a funcției continue $R(x,y,\varphi(x,y))$ pe domeniul D (care există în virtutea teoremei 2 din 6.3.1). Când pasul de diviziune λ al suprafeței S tinde către zero, pasul diviziunii respective a domeniului D tinde de asemenea către zero. Trecând la limită în egalitatea dată când $\lambda\to 0$, obținem:

$$\iint_S R(x,y,z)dx\,dy = \iint_D R(x,y,\varphi(x,y))dx\,dy.$$

Teorema este demonstrată.

Formula (4) exprimă integrala de suprafață de speța 2 pe fața exterioară a suprafeței S prin integrala dublă pe proiecția ei pe planul XOY. Integrala pe fața interioară a suprafeței S se reduce la integrala pe fața exterioară a suprafeței S prin schimbarea semnului în fața integralei, adică

$$\iint_{S^{(-)}} R(x,y,z)\,dx\,dy = -\iint_{S^{(+)}} R(x,y,z)\,dx\,dy = -\iint_{D} R(x,y,\varphi(x,y))\,dx\,dy,$$

unde $S^{(+)}$, $S^{(-)}$ – fața exterioară și respectiv fața interioară a suprafeței S.

În mod analog se stabilește valabilitatea următoarelor formule:

$$\iint_{S} P(x,y,z)\,dy\,dz = \iint_{D_1} P(\varphi(y,z),y,z)\,dy\,dz, \qquad (5)$$

dacă suprafața S este orientată și netedă, definită de ecuația $x=\varphi(y,z)$, $(y,z)\in D_1$, unde $D_1 = \Pr_{XOY} S$ este un domeniu compact cu frontiera netedă pe porțiuni și

$$\iint_{S} Q(x,y,z)\,dx\,dz = \iint_{D_2} Q(x,\varphi(x,z),z)\,dx\,dz, \qquad (6)$$

dacă S este orientată și netedă, caracterizată de ecuația $y=\varphi(x,z)$, $(x,z)\in D_2$, unde $D_2 = \Pr_{XOZ} S$ este un domeniu compact cu frontiera netedă pe porțiuni.

Pentru calcularea integralei de suprafață de speța 2 în forma generală (3) se aplică formulele (4), (5) și (6), dacă suprafața orientată și netedă S se proiectează univoc pe cele trei plane de coordonate.

În cazuri mai complicate suprafața S se divizează în părți, astfel încât fiecare parte să posede proprietățile indicate mai sus în formulele (4), (5), (6) și se aplică proprietatea **P4** a integralelor de suprafață de speța 2.

Exemplul 2. Să se calculeze integrala $\iint_S z^2\,dx\,dy$ pe fața exterioară a emisferei $x^2+y^2+z^2=2Ry$, $0\le z\le R$.

Suprafața S (fig. 5) este caracterizată de ecuația $z=\sqrt{2Ry-x^2-y^2}$, proiecția D a căreia pe planul XOY este cercul $x^2+y^2\le 2Ry$ sau $x^2+(y-R)^2\le R^2$.

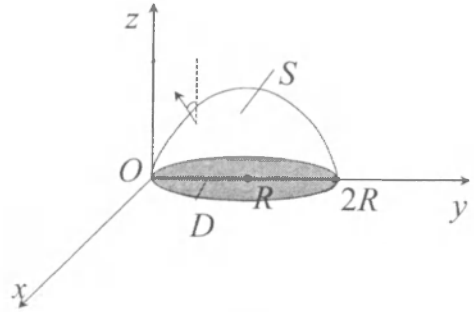


Fig. 5.

Aplicând formula (4) pe fața exterioară a suprafeței S, avem:

$$\iint_{S^{(+)}} z^2\,dx\,dy = +\iint_D \left(2Ry - x^2 - y^2\right)dx\,dy = \left|\begin{array}{l} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ \theta\in[0,\pi] \\ \rho\in[0,2R\sin\theta] \\ I(\rho,\theta)=\rho \end{array}\right| =$$

$$= \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2R\sin\theta} \rho\left(2R\rho\sin\theta - \rho^2\right)d\rho = \int_0^{\pi} d\theta \left(2R\sin\theta\cdot\frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^{2R\sin\theta} =$$

$$= \frac{R^4}{3}\int_0^{\pi}\left(2\sin^2\theta\right)^2 d\theta = \frac{R^4}{3}\int_0^{\pi}(1-\cos 2\theta)^2\,d\theta =$$

$$= \frac{R^4}{3}\left(\theta - \sin 2\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{8}\sin 4\theta\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Exemplul 3. Să se calculeze integrala

$$\iint_S x^2\,dy\,dz + \sin\left(y^2\right)dx\,dz + zx\,dx\,dy,$$

unde S este partea exterioară a planului $x+3z=6$, situată în octanul 1 și tăiată de planul $y=5$ (vezi fig. 6).

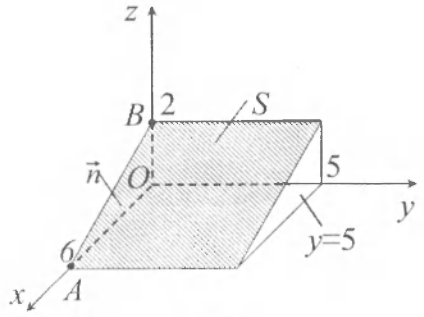


Fig. 6.

Conform definiției,

$$\iint_S x^2\,dy\,dz + \sin\left(y^2\right)dx\,dz + zx\,dx\,dy =$$

$$= \iint_S x^2\,dy\,dz + \iint_S \sin\left(y^2\right)dx\,dz + \iint_S zx\,dx\,dy .$$

Observăm că proiecția suprafeței S pe planul XOZ coincide cu segmentul AB, deoarece planul $x+3z=6$ este paralel cu axa OY. În virtutea proprietății **P7** a integralei de suprafață, avem că

$$\iint_S \sin\left(y^2\right)dx\,dz = 0 .$$

Proiecțiile D_1 și D_2 ale suprafeței S pe planele YOZ și XOY sunt următoarele domenii indicate pe fig. 7 și corespunzător pe fig. 8.

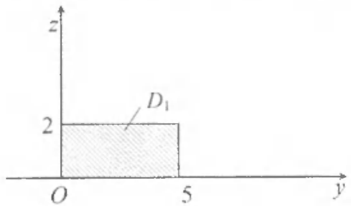


Fig. 7.

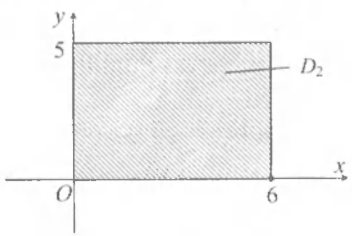


Fig. 8.

În primul caz, suprafața S este caracterizată de ecuația $x=6-3z$, $z\in[0,2]$, $y\in[0,5]$. Conform formulei (5) avem:

$$\iint_S x^2\,dy\,dz = \iint_{D_1}(6-3z)^2dy\,dz = 9\int_0^5 dy\int_0^2(2-z)^2dz =$$

$$= 9\cdot 5\cdot(-1)\cdot\left.\frac{(2-z)^3}{3}\right|_0^2 = 120 .$$

În al doilea caz, suprafața S este caracterizată de ecuația $z=2-\frac{1}{3}x$, $x\in[0,6]$ $y\in[0,5]$. Conform formulei (4) obținem:

$$\iint_S zx\,dx\,dy = \iint_{D_2}\left(2x-\frac{1}{3}x^2\right)dx\,dy = \int_0^6\left(2x-\frac{1}{3}x^2\right)dx\int_0^5 dy = 60 .$$

Prin urmare,

$$\iint_S x^2\,dy\,dz + \sin\left(y^2\right)dz\,dx + zx\,dx\,dy = 120+0+60 = 180 .$$

6.5.3. Relația dintre integralele de suprafață de speța 1 și 2

Fie S o suprafață cu două fețe și netedă, definită de ecuația $z=\varphi(x,y)$, $(x,y)\in D$, unde D este un domeniu compact cu frontiera netedă pe porțiuni, iar funcția $R(x,y,z)$ continuă pe S. Alegem fața exterioară a suprafeței S.

Cu ajutorul unei rețele de linii netede pe porțiuni, împărțim suprafața S în n părți S_1, S_2,..., S_n, ariile cărora le vom nota prin ΔS_1, ΔS_2,..., ΔS_n.

În acest caz, aplicând formula (1) din 6.3.4, avem:

$$\Delta S_i = \iint_{D_i}\sqrt{1+\left[\varphi'_x(x,y)\right]^2+\left[\varphi'_y(x,y)\right]^2}\,dx\,dy ,$$

unde $D_i = \Pr_{XOY} S_i$, $i = 1,2,\ldots,n$.

În virtutea formulei mediei într-o integrală dublă (formula (1) din 6.3.2), obținem:

$$\Delta S_i = \sqrt{1+[\varphi'_x(\xi_i,\eta_i)]^2+[\varphi'_y(\xi_i,\eta_i)]^2}\cdot\Delta\sigma_i,$$

unde (ξ_i,η_i) este un punct oarecare din domeniul elementar D_i, aria căruia este egală cu $\Delta\sigma_i$. Notăm prin $M_i(\xi_i,\eta_i,\varphi(\xi_i,\eta_i))$ punctul de pe suprafaţa S_i, iar prin γ_i – unghiul ascuţit (doar am ales faţa exterioară a suprafeţei *S*), format de normala dusă la suprafaţa *S* în punctul M_i cu axa *OZ* (care este unghiul liniar al unghiului diedru format de planul tangent la suprafaţa *S* prin punctul M_i cu planul *XOY*). Atunci $\Delta S_i \approx \Delta\tau_i = \dfrac{\Delta\sigma_i}{\cos\gamma_i}$, de unde

$$\Delta\sigma_i \approx \cos\gamma_i\ \Delta S_i$$

(a se consulta aplicaţia **G3** din 6.3.4). Alcătuind suma integrală pentru integrala de suprafaţă de speţa 2 pe faţa exterioară a suprafeţei *S*, obţinem:

$$\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\varphi(\xi_i,\eta_i))\cdot\Delta\sigma_i \approx \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,z_i)\cdot\cos\gamma_i\cdot\Delta S_i.$$

Suma din partea dreaptă a acestei relaţii reprezintă suma integrală pentru integrala de suprafaţă de speţa 1 a funcţiei $R(x,y,z)\cos\gamma$, unde γ este unghiul dintre axa *OZ* şi normala dusă în punctul curent $M(x,y,z)$ la suprafaţa *S* pe faţa aleasă a suprafeţei. Când pasul diviziunii tinde către zero, în limită se obţine egalitatea:

$$\iint_S R(x,y,z)dx\,dy = \iint_S R(x,y,z)\cos\gamma\, dS. \qquad (1)$$

Dacă se consideră faţa interioară a suprafeţei *S*, atunci:

$$(-\Delta\sigma_i)\approx\cos\gamma_i\cdot\Delta S_i,$$

unde prin γ_i am notat unghiul obtuz, format de normala dusă în punctul M_i la suprafaţa S_i cu axa *OZ*.

Prin raţionamente analogice obţinem din nou formula (1):

$$\iint_S R(x,y,z)dx\,dy = \iint_S R(x,y,z)\cos\gamma\, dS,$$

unde γ este unghiul dintre axa *OZ* şi normala dusă la suprafaţa *S* prin punctul curent $M(x,y,z)$ la faţa aleasă a suprafeţei *S*.

Dacă suprafaţa S_1 este cilindrică, având generatoarele paralele cu axa *OZ*, atunci formula (1) de asemenea are loc, deoarece (în baza **P5** din 6.5.2)

$$\iint_{S_1} R(x,y,z)dx\,dy = 0 \text{ şi } \cos\gamma = 0$$

($\gamma = \pm\frac{\pi}{2}$ este unghiul format de normala la suprafaţa S_1 cu axa *OZ*).

Dacă suprafaţa *S* constă dintr-un număr finit de suprafeţe de forma menţionată mai sus, atunci adunând parte cu parte egalităţile (1), alcătuite pentru porţiunile ei, obţinem formula

$$\iint_S R(x,y,z)dx\,dy = \iint_S R(x,y,z)\cos\gamma\, dS.$$

Formule analogice în condiţii respective au loc pentru celelalte două tipuri ale integralelor de suprafaţă de speţa 2.

Sumându-le, obţinem formula de legătură dintre integrala de suprafaţă de speţa 2 în forma generală şi integrala de suprafaţă de speţa 1:

$$\iint_S P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy =$$

$$= \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS. \qquad (2)$$

Aici $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sunt cosinusurile directoare ale normalei la suprafaţa *S* pe faţa aleasă a suprafeţei *S*.

Fie *S* o suprafaţă cu două feţe şi netedă, definită de ecuaţia $z=\varphi(x,y)$, $(x,y)\in D$, unde *D* este un domeniu compact, frontiera căruia reprezintă o curbă netedă pe porţiuni.

Conform formulelor din 5.5.2, avem:

$$\cos\alpha = \frac{-z'_x}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}},\quad \cos\beta = \frac{-z'_y}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{+1}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}},$$

dacă este aleasă faţa exterioară a lui *S* (atenţie $\cos\gamma > 0$) şi

$$\cos\alpha = \frac{z'_x}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}},\ \cos\beta = \frac{z'_y}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{-1}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}},$$

dacă este aleasă fața interioară a lui S ($\cos\gamma < 0$!!!).

Aplicând formula (2), obținem:

$$\iint_S P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy = \pm\iint_S \frac{-P\cdot z'_x - Q\cdot z'_y + R}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}\,dS\,.$$

Exprimând această integrală de suprafață de speța 1 printr-o integrală dublă pe domeniul D, care este proiecția suprafeței S pe planul XOY (a se consulta formula (2) din 6.5.1), avem:

$$\iint_S P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy =$$

$$=\pm\iint_D \left[-\varphi'_x(x,y)\cdot P(x,y,\varphi(x,y)) - \varphi'_y(x,y)\cdot Q(x,y,\varphi(x,y)) + \right.$$

$$\left. + R(x,y,\varphi(x,y))\right]dxdy, \qquad (3)$$

unde semnul „+" se ia dacă este aleasă fața exterioară a suprafeței S ($\cos\gamma > 0$) și semnul „–" – dacă este aleasă fața interioară a suprafeței S ($\cos\gamma < 0$).

Exemplul 4. Să se calculeze integrala

$$I = \iint_S x^2\,dy\,dz + \sin(y^2)dx\,dz + zx\,dx\,dy\,,$$

unde S este partea exterioară (de sus) a planului $x + 3z = 6$, situată în octanul 1 și tăiată de planul $y = 5$ (vezi fig. 6 din 6.5.2.).

Avem: $z = 2 - \frac{1}{3}x$ și proiecția suprafeței S pe planul XOY este dreptunghiul

$$D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 6, 0 \le y \le 5\}.$$

Deci, $z'_x = -\frac{1}{3}$, $z'_y = 0$. Aplicând formula (3) obținem:

$$I = +\iint_D \left[\frac{1}{3}x^2 + 0 + \left(2 - \frac{1}{3}x\right)x\right]dx\,dy =$$

$$= \int_0^5 dy \int_0^6 \left(\frac{x^2}{3} + 2x - \frac{x^2}{3}\right)dx = 5\cdot 36 = 180$$

(a se compara cu rezolvarea exemplului 3 din 6.5.2.).

Exemplul 5. Să se calculeze integrala

$$I = \iint_S x(z+1)dy\,dz + y(z+1)dx\,dz + 2(x^2+y^2)dx\,dy$$

pe fața interioară a paraboloidului de rotație $(z+1) = (x^2+y^2)$, tăiat de planul $z = 3$.

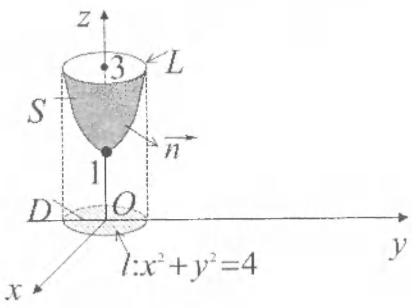


Fig. 9.

Avem $z = x^2 + y^2 - 1$, definită pe cercul $x^2 + y^2 \le 4$. Deci $z'_x = 2x$, $z'_y = 2y$ și aplicând formula (3), obținem:

$$I = -\iint_D \left[-2x^2(x^2+y^2) - 2y^2(x^2+y^2) + 2(x^2+y^2)\right]dx\,dy =$$

$$= 2\iint_D (x^2+y^2)(x^2+y^2-1)dx\,dy = \left|\begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ \theta\in[0,2\pi] \\ \rho\in[0,2] \\ I(\rho,\theta) = \rho \end{array}\right| =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho\cdot\rho^2(\rho^2-1)d\rho = \frac{80}{3}\pi\,.$$

Am pus semnul (–) în fața integralei duble, deoarece am ales fața interioară a suprafeței S.

6.6. Formulele Gauss-Ostrogradski şi Stokes

6.6.1. Formula Gauss-Ostrogradski

Această formulă este un analog al formulei Green-Ostrogradski. În timp ce formula Green-Ostrogradski (a se consulta 6.5.3) stabileşte relaţia dintre integrala curbilinie de speţa 2 pe o curbă închisă şi integrala dublă pe domeniul plan mărginit de această curbă, formula Gauss-Ostrogradski arată legătura dintre integrala de suprafaţă de speţa 2 în formă generală pe o suprafaţă închisă şi integrala triplă pe un domeniu spaţial limitat de această suprafaţă.

Vom deduce această formulă pentru cazul unui domeniu spaţial închis V, mărginit sus de suprafaţa netedă S_1, caracterizată de ecuaţia $z = H(x,y)$, jos de suprafaţa netedă S_2 definită de ecuaţia $z = h(x,y)$, iar lateral de suprafaţa cilindrică S_3, generatoarele căreia sunt paralele cu axa OZ. Drept directoare serveşte conturul (frontiera) neted pe porţiuni al domeniului compact D, care este proiecţia corpului V pe planul XOY (a se consulta teorema 1 din 6.4.2). Vom considera faţa exterioară a suprafeţei $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, care mărgineşte domeniul spaţial închis V. Constatăm că în situaţia aceasta trebuie să alegem faţa exterioară a lui S_1 şi faţa interioară a lui S_2, adică $S^{(+)} = S_1^{(+)} \cup S_2^{(-)} \cup S_3^{(+)}$. Presupunem de asemenea că funcţia $R(x,y,z)$ şi derivata ei parţială $R'_z(x,y,z)$ sunt continue pe domeniul închis V.

În aceste condiţii vom demonstra formula

$$\iiint_V R'_z(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \oiint_{S^{(+)}} R(x,y,z)\,dx\,dy\,,^{*)} \qquad (1)$$

în care pe suprafaţa S este aleasă faţa ei exterioară.

---

*) Dacă suprafaţa S este închisă, vom nota integrala de suprafaţă de speţa a 2-a în formă generală prin simbolul $\oiint$.

Într-adevăr, conform formulei (1) din 6.4.2, avem:

$$\iiint_V R'_z(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dy \int_{h(x,y)}^{H(x,y)} R'_z(x,y,z)\,dz =$$

$$= \iint_D R(x,y,H(x,y))\,dx\,dy - \iint_D R(x,y,h(x,y))\,dx\,dy\,.$$

Integrala dublă $\iint_D R(x,y,H(x,y))\,dx\,dy$ poate fi înlocuită prin integrala de suprafaţă $\iint_{S_1} R(x,y,z)\,dx\,dy$ egală cu ea, luată pe faţa exterioară a suprafeţei S_1 (vezi formula (4) din 6.5.2). În mod analog, integrala $\iint_D R(x,y,h(x,y))\,dx\,dy$ poate fi înlocuită prin integrala egală cu ea $\iint_{S_1} R(x,y,z)\,dx\,dy$, luată pe faţa exterioară a suprafeţei S_2. Prin urmare,

$$\iiint_V R'_z(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{S_1^{(+)}} R(x,y,z)\,dx\,dy - \iint_{S_2^{(+)}} R(x,y,z)\,dx\,dy\,.$$

Schimbând în integrala după S_2 faţa suprafeţei S_2 şi adăugând integrala egală cu zero $\iint_{S_3} R(x,y,z)\,dx\,dy$ pe faţa exterioară a suprafeţei S_3 (în virtutea proprietăţii **P5** din 6.5.2), obţinem:

$$\iiint_V R'_z(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{S_1^{(+)}} R(x,y,z)\,dx\,dy +$$

$$+ \iint_{S_2^{(-)}} R(x,y,z)\,dx\,dy + \iint_{S_3^{(+)}} R(x,y,z)\,dx\,dy = \oiint_{S^{(+)}} R(x,y,z)\,dx\,dy\,,$$

unde S este suprafaţa care mărgineşte domeniul V. Integrala se consideră pe faţa exterioară a suprafeţei închise $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

Astfel formula (1) este demonstrată.

Formula (1) am dedus-o pentru domenii V de o formă specială, numite *domenii simple (regulate) în raport cu axa OZ*. Se vede uşor, că formula rămâne valabilă pentru orice domeniu spaţial închis, care poate fi divizat într-un număr finit de domenii de acest fel. Într-adevăr, aplicând formula (1) pentru fiecare din domeniile elementare şi adunând rezultatele, vom obţine în partea stângă a egalităţii integrala triplă pe tot domeniul considerat, iar în partea dreaptă integrala de suprafaţă pe suprafaţa ce limitează domeniul dat, fiindcă integralele de suprafaţă pe suprafeţele auxiliare se iau o dată pe o faţă a acestei suprafeţe şi altă dată pe faţa opusă a ei, şi la adunare ele se reduc reciproc.

În mod analog (în condiţii respective) se deduc formulele:

$$\iiint_V P'_x(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \oiint_S P(x,y,z)\,dy\,dz\,, \qquad (2)$$

$$\iiint_V Q'_y(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \oiint_S Q(x,y,z)\,dx\,dz\,, \qquad (3)$$

unde S este orientată pe faţa ei exterioară.

Dacă presupunem că domeniul spaţial închis V şi funcţiile $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ satisfac simultan toate condiţiile pentru care formulele (1), (2) şi (3) sunt adevărate, atunci adunând parte cu parte formulele (1), (2) şi (3), obţinem aşa-numita formulă Gauss-Ostrogradski:

$$\iiint_V \left[P'_x(x,y,z)+Q'_y(x,y,z)+R'_z(x,y,z)\right]dx\,dy\,dz =$$

$$= \oiint_S P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dx\,dz + R(x,y,z)\,dx\,dy\,, \qquad (4)$$

unde pe suprafaţa închisă S se ia faţa exterioară a ei.

Formulele (1), (2) şi (3) sunt cazuri particulare ale formulei Gauss-Ostrogradski.

Formula aceasta se utilizează la calculul integralelor de suprafaţă de speţa 2 pe suprafeţe închise.

Exemplul 1. Să se calculeze integrala

$$I = \oiint_S x^3y^2\,dy\,dz + x^2y^3\,dx\,dz + 6z\,dx\,dy\,,$$

pe faţa exterioară a suprafeţei S, care este frontiera domeniului spaţial V, mărginit de paraboloizii $z = 2(x^2+y^2)$, $z = 12 - x^2 - y^2$.

În acest caz, $P = x^3y^2$, $Q = x^2y^3$ şi $R = 6z$. Deci, $P'_x = 3x^2y^2$, $Q'_y = 3x^2y^2$ şi $R'_z = 6$. Aplicând formula (4), obţinem:

$$I = \iiint_V (3x^2y^2 + 3x^2y^2 + 6)\,dx\,dy\,dz = 6\iiint_V (x^2y^2+1)\,dx\,dy\,dz\,.$$

Proiecţia lui V pe planul XOY este domeniul D mărginit de circumferinţa:

$$\begin{cases} z = 2(x^2+y^2) \\ z = 12 - x^2 - y^2 \end{cases} \Rightarrow 3(x^2+y^2) = 12 \Rightarrow x^2+y^2 = 4\,.$$

Trecem la coordonatele cilindrice: $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $z = z$, unde $I(\rho,\theta,z) = \rho$, $\theta \in [0,2\pi]$, $\rho \in [0,2]$ şi $z_1 = 2(x^2+y^2) = 2\rho^2$, $z_2 = 12 - (x^2+y^2) = 12 - \rho^2$. Prin urmare,

$$I = 6\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho\,d\rho \int_{2\rho^2}^{12-\rho^2} (\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta + 1)\,dz =$$

$$= 6\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho\left(\frac{1}{4}\rho^4\sin^2 2\theta + 1\right)(12 - \rho^2 - 2\rho^2)\,d\rho =$$

$$= 18\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho\left(\frac{\rho^4}{8}(1-\cos 4\theta) + 1\right)(4-\rho^2)\,d\rho =$$

$$= 18\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \left[(1-\cos 4\theta)\left(\frac{\rho^5}{2} - \frac{\rho^7}{8}\right) + 4\rho - \rho^3\right] d\rho = 192\pi\,.$$

După cum s-a menţionat în 6.3.5, formula Green-Ostrogradski exprimă aria unui domeniu prin integrala curbilinie de speţa 2 calculată după conturul acestui domeniu. În acelaşi mod, din formula Gauss-Ostrogradski se poate obţine o expresie pentru volumul domeniului spaţial închis, scrisă în formă de integrală de suprafață pe o suprafață închisă S care limitează domeniul dat. Considerăm câteva cazuri particulare de acest fel:

a) Fie $P=x$, $Q=0$, $R=0$. După formula (4), obținem::

$$v=\iiint_V dx\,dy\,dz=\oint\!\!\oint_S x dy\,dz\,;$$

b) Dacă $P=0$, $Q=y$, $R=0$, avem

$$v=\iiint_V dx\,dy\,dz=\oint\!\!\oint_S y\,dx\,dz\,;$$

c) Fie $P=0$, $Q=0$ și $R=z$. Atunci

$$v=\iiint_V dx\,dy\,dz=\oint\!\!\oint_S z\,dx\,dy\,;$$

d) Fie $P=\frac{1}{3}x$, $Q=\frac{1}{3}y$ și $R=\frac{1}{3}z$. Atunci

$$v=\iiint_V dx\,dy\,dz=\frac{1}{3}\oint\!\!\oint_S x\,dy\,dz+y\,dx\,dz+z\,dx\,dy,$$

unde v este volumul corpului V.

Formulele obținute în cazurile cercetate exprimă volumul unui corp prin integrala de suprafață pe fața exterioară a suprafeței lui.

6.6.2. Formula Stokes

Formula lui Stokes (1819-1903 – fizician și matematician englez) stabilește relația dintre integrala curbilinie de speța 2 în spațiu și integrala de suprafață și prezintă o generalizare a formulei Green-Ostrogradski (6.3.5).

Fie S o suprafață cu două fețe și netedă, caracterizată de ecuația $z=\varphi(x,y)$, $(x,y)\in D$, unde D este un domeniu compact, frontiera căruia este o curbă închisă și netedă pe porțiuni. Notăm prin l frontiera domeniului D, iar prin L frontiera suprafeței S.

În condițiile enumerate mai sus are loc

Teorema 1. Dacă funcțiile $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ și derivatele lor parțiale de ordinul întâi sunt continue pe suprafața S, atunci este justă formula

$$\oint_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=$$

$$=\iint_S(R'_y-Q'_z)dy\,dz+(P'_z-R'_x)dx\,dz+(Q'_x-P'_y)dx\,dy=$$

$$=\iint_S\left[(R'_y-Q'_z)\cos\alpha+(P'_z-R'_x)\cos\beta+(Q'_x-P'_y)\cos\gamma\right]dS\,, \quad (1)$$

unde sensul de parcurgere al conturului închis L corespunde aici acelei fețe a suprafeței S, pe care se calculează integrala de suprafață din partea dreaptă a egalității și $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sunt cosinusurile directoare ale normalei la suprafața S.

Demonstrație. Alegem pe suprafața S o față anumită, de exemplu, cea exterioară, și stabilim corespunzător sensul pozitiv de parcurgere al conturului închis L (vezi 6.5.2). Fie $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$ ecuațiile parametrice ale conturului închis l al domeniului D. Aici variației parametrului t de la α la β îi corespunde sensul pozitiv de parcurgere al conturului l. În acest caz ecuațiile $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=\varphi(x(t),y(t))=z(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$ vor fi ecuațiile parametrice ale conturului L, unde variației parametrului de la α la β îi corespunde de asemenea sensul pozitiv de parcurgere al conturului L. Presupunem că funcțiile $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ sunt continue pe S împreună cu derivatele lor parțiale de ordinul 1.

Aplicând formula (14) din teorema 1 despre existența și calcularea integralei curbilinii de speța 2 în formă generală din 6.2.3, obținem:

$$\oint_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=$$

$$=\int_\alpha^\beta[P(x(t),y(t),z(t))x'_t+Q(x(t),y(t),z(t))y'_t+$$

$$+R(x(t),y(t),z(t))(z'_x\cdot x'_t+z'_y\cdot y'_t)]dt=$$

$$=\int_\alpha^\beta\{[P(x(t),y(t),z(t))+R(x(t),y(t),z(t))\cdot z'_x]x'_t+$$

$$+\left[Q(x(t),y(t),z(t))+R(x(t),y(t),z(t))\cdot z'_y\right]y'_t\Big\}dt=$$
$$=\oint_l \left[P(x,y,\varphi(x,y))+R(x,y,\varphi(x,y))\cdot z'_x\right]dx+$$
$$+\left[Q(x,y,\varphi(x,y))+R(x,y,\varphi(x,y))\cdot z'_y\right]dy.$$

Conform formulei Green-Ostrogradski (6.3.5), această integrală curbilinie pe conturul închis l din planul XOY poate fi înlocuită prin integrala dublă, egală cu ea, pe domeniul D mărginit de conturul l:

$$\iint_D \Big\{\left[Q(x(t),y(t),z(t))+z'_y\cdot R(x(t),y(t),z(t))\right]'_x-$$
$$-\left[P(x,y,\varphi(x,y))+z'_x\cdot R(x,y,\varphi(x,y))\right]'_y\Big\}dx\,dy.$$

Deoarece

$$\left[Q(x(t),y(t),z(t))+z'_y\cdot R(x(t),y(t),z(t))\right]'_x=$$
$$=Q'_x\cdot x'_x+Q'_z\cdot z'_x+z''_{yx}\cdot R+z'_y\left(R'_x\cdot x'_x+R'_z\cdot z'_x\right)=$$
$$=Q'_x+Q'_z\cdot z'_x+\left(R'_x+R'_z\cdot z'_x\right)\cdot z'_y+z''_{yx}\cdot R$$

și

$$\left[P(x(t),y(t),z(t))+z'_x\cdot R(x(t),y(t),z(t))\right]'_y$$
$$=P'_y+P'_z\cdot z'_y+\left(R'_y+R'_z\cdot z'_y\right)\cdot z'_x+z''_{xy}\cdot R,$$

obținem:

$$\oint_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz=$$
$$=\iint_D\left[-z'_x\left(R'_y-Q'_z\right)-z'_y\left(P'_z-R'_x\right)+\left(Q'_x-P'_y\right)\right]dx\,dy.$$

În obținerea relației acestea am presupus, bineînțeles, că derivatele de ordinul doi z''_{yx} și z''_{xy} există și sunt egale:

$$z''_{yx}=z''_{xy}\Rightarrow z''_{yx}\cdot R(x,y,\varphi(x,y))=z''_{xy}\cdot R(x,y,\varphi(x,y)).$$

Aplicând formula (3) din 6.5.3, obținem că integrala din partea dreaptă a egalității de mai sus este egală cu integrala de suprafață în formă generală pe fața exterioară (deci în formula (3) din 6.5.3, luăm semnul „+") a suprafeței S:

$$\iint_S\left(R'_y-Q'_z\right)dy\,dz+\left(P'_z-R'_x\right)dx\,dz+\left(Q'_x-P'_y\right)dx\,dy.$$

Prin urmare, formula (1) este demonstrată.

Remarcăm că dacă vom schimba fața suprafeței S și corespunzător sensul de parcurgere al conturului L, atunci ambele integrale din relația (1) își vor schimba semnul. Prin urmare, relația (1) este valabilă și în cazul când integrala de suprafață se ia după fața interioară a suprafeței S, iar cea curbilinie – pe conturul L în sensul pozitiv în raport cu fața aleasă a suprafeței S.

Aplicând proprietatea aditivității integralelor de suprafață și curbilinii, conchidem că formula (1) rămâne valabilă și în cazul când suprafața S constă dintr-un număr finit de suprafețe de forma considerată în teorema de mai sus. De asemenea, formula (1) este valabilă și pentru suprafețele, care posedă proprietățile indicate în raport cu alte plane de coordonate: S este caracterizată de ecuația $y=\varphi(x,z)$ sau $x=\varphi(y,z)$.

Formula (1) se numește *formula Stokes*.

Considerăm un caz particular al formulei Stokes: fie L o curbă închisă în planul XOY și S – suprafața plană, mărginită de conturul L. În cazul acesta $z=0$ și deci $dz=0$. Prin urmare, formula Stokes se transformă în formula

$$\oint_L P(x,y,0)dx+Q(x,y,0)dy=\iint_S\left[0+0+\left(Q'_x-P'_y\right)\right]dx\,dy,$$

adică am obținut formula:

$$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_S\left[Q'_x(x,y)-P'_y(x,y)\right]dx\,dy,$$

care coincide cu formula Green-Ostrogradski din 6.3.5.

Formula Stokes poate fi utilizată la calcularea integralelor curbilinii pe contururi închise și netede pe porțiuni.

Exemplul 2. Să se calculeze după formula Stokes integrala

$$I=\oint_L(yz-2x)dx+(xz-2y)dy+xy\,dz,$$

unde L este circumferința $x^2+y^2=4$, $z=3$, iar în calitate de suprafața S se ia suprafața paraboloidului de rotație

$z+1=x^2+y^2$, tăiat de planul $z=3$ (a se consulta fig. 9 din 6.5.3).

Observăm că $P=yz-2x$, $Q=xz-2y$ şi $R=xy$.

Avem:

$R'_y-Q'_z=x-x=0$, $P'_z-R'_x=y-y=0$, $Q'_x-P'_y=z-z=0$.

Prin urmare,

$$I=\iint_S 0\,ds=0.$$

Propunem cititorului să verifice rezultatul obţinut, calculând în mod direct această integrală curbilinie de speţa 2 (folosind formula (14) din 6.2.3.).

6.7. Elemente ale teoriei câmpului

6.7.1. Câmpuri scalare şi vectoriale

Noţiunea de câmp, sub diversele sale aspecte (câmp scalar, câmp vectorial, câmp tensorial etc.) este importantă în diverse aplicaţii de natură concretă.

În punctele ce urmează vom considera numai spaţii plane euclidiene R^2 şi spaţii tridimensionale euclidiene R^3 pentru a avea o mai bună interpretare geometrică a rezultatelor expuse.

Fie $E\subseteq R^3$. Orice funcţie reală $u=f(x,y,z)$ definită pe E defineşte *un câmp scalar* în E. Din fizică se pot obţine diverse exemple de câmpuri scalare în R^3, cum ar fi temperatura unui corp, densitatea în distribuţia unor mase, iluminarea produsă de o sursă de lumină etc.

Să presupunem că funcţia $u=f(x,y,z)$ defineşte un câmp scalar în $E\subseteq R^3$. Dacă u este o funcţie continuă, vom spune că acest câmp scalar pe E este *continuu*. Analog apare şi noţiunea de *câmp scalar discontinuu*.

Dacă un câmp scalar este definit, de cele mai multe ori se

solicită o vizualizare a acestuia, pentru a se permite o mai corectă apreciere a proprietăţilor sale. În acest scop sunt uneori utile *suprafeţele de nivel* ale acestui câmp definite prin egalitatea

$$f(x,y,z)=a,\ a\in R.$$

Evident, odată cu modificarea parametrului a se va modifica şi suprafaţa de nivel şi este important de observat că două suprafeţe de nivel nu pot avea un punct comun fără ca ele să coincidă. Într-adevăr, dacă S_1 şi S_2 sunt două suprafeţe de nivel, definite respectiv de egalităţile $f(x,y,z)=a_1$ şi $f(x,y,z)=a_2$, iar (x_0,y_0,z_0) este un punct comun al lor, atunci, deoarece $f(x_0,y_0,z_0)=a_1$ şi $f(x_0,y_0,z_0)=a_2$, rezultă că $a_1=a_2$.

Dacă $z=f(x,y)$ este definită pe mulţimea E din R^2, atunci apare noţiunea de *linie de nivel*: mulţimea punctelor din E, care verifică egalitatea $f(x,y)=a$, $a\in R$ va defini o linie (curbă) în planul XOY. Constatăm că liniile de nivel nu pot avea puncte comune, adică nu se intersectează între ele.

Trebuie de remarcat că structura unui câmp scalar poate fi uneori mai bine obţinută prin utilizarea unui alt sistem de coordonate decât cel cartezian. Astfel dacă, prin utilizarea sistemului sferic de coordonate: $x=r\cos\theta\sin\varphi$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$, $z=r\cos\varphi$, unde $r\ge 0$, $0\le\theta<2\pi$, $0\le\varphi\le\pi$, se deduce $f(x,y,z)=g\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)=g(r)$, (deci f nu depinde de variabilele θ şi φ), atunci se spune că este vorba de un câmp scalar având *simetrie sferică*.

De exemplu, câmpul scalar $u=f(x,y,z)$ definit în $R^3\setminus\{(0,0,0)\}$ prin relaţia

$$f(x,y,z)=\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

va avea simetrie sferică, suprafeţele sale de nivel fiind sfere concentrice cu centrul în origine.

Dacă în R^3, prin trecerea la sistemul cilindric: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$ unde $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$, se deduce că $f(x, y, z) = f(r, z)$ (deci dacă f nu depinde de variabila θ), atunci se spune că acest câmp are *simetrie axială*.

Pentru câmpurile scalare din R^3 unde funcţia $u = f(x, y, z)$ este diferenţiabilă, se poate defini (aşa cum s-a realizat în 5.6) noţiunea de derivată a câmpului după o direcţie dată cu ajutorul căreia se poate determina variaţia oricărui câmp scalar în raport cu orice direcţie, variaţia cea mai rapidă obţinându-se întotdeauna pe direcţia normalei la suprafeţele de nivel ale câmpului, adică pe direcţia vectorului gradient al funcţiei date.

Fie $E \subseteq R^3$. Se spune că în E este definit *un câmp vectorial*, dacă fiecărui punct $M \in E$ i se ataşează un vector

$$\vec{r}(M) = \{P(M), Q(M), R(M)\} = P(M)\cdot\vec{i} + Q(M)\cdot\vec{j} + R(M)\cdot\vec{k}$$

unde $P(M)$, $Q(M)$ şi $R(M)$ se numesc *coordonatele* vectorului $\vec{r}(M)$ în R^3 care sunt egale cu valorile funcţiilor $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ în punctul M şi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sunt vectorii versori ai axelor de coordonate: OX, OY, OZ.

Numerele $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$ se mai numesc *proiecţiile* vectorului $\vec{r}(M)$ respectiv pe axele OX, OY, OZ.

Din fizică se obţin nenumărate exemple de câmpuri vectoriale: câmpul vitezelor unui fluid în deplasare, câmpul gravitaţional determinat de o distribuţie de mase, câmpul electrostatic, câmpul forţelor etc.

O curbă γ din $E \subseteq R^3$ se numeşte *curbă vectorială* relativă la câmpul vectorial $\vec{r}(M)$ definit în E, dacă tangenta la γ în orice punct al ei coincide cu direcţia câmpului vectorial $\vec{r}(M)$ în punctul de tangenţă M. Notând prin $\vec{\tau} = \{m, n, p\}$ vectorul tangentei la curba γ ce trece prin M, obţinem egalitatea vectorială

$\vec{\tau} = \lambda\cdot\vec{r}(M)$, $\lambda \in R$, care în formă de coordonate se reduce la sistemul:

$$\begin{cases} m(x, y, z) = \lambda\cdot P(x, y, z), \\ n(x, y, z) = \lambda\cdot Q(x, y, z), \\ p(x, y, z) = \lambda\cdot R(x, y, z), \end{cases}$$

pentru orice punct $M(x, y, z) \in E$. Acest sistem constituie ecuaţiile curbelor vectoriale ale câmpului vectorial $\vec{r}(M)$.

O suprafaţă S din $E \subseteq R^3$ se numeşte *suprafaţă vectorială* relativă la câmpul vectorial $\vec{r}(M)$, $M \in E$, dacă în fiecare punct al ei vectorul normalei, notat cu $\vec{n}$, este ortogonal pe vectorul $\vec{r}(M)$ în punctul considerat. Cu alte cuvinte, suprafeţele vectoriale ale câmpului vectorial $\vec{r}(M)$, $M \in E$ sunt definite prin egalitatea $(\vec{r}(M), \vec{n}) = 0$, unde prin $(\vec{r}(M), \vec{n})$ se subînţelege produsul scalar al acestor doi vectori.

Ca şi în cazul câmpurilor scalare, câmpurile vectoriale pot avea unele proprietăţi de simetrie, ceea ce simplifică studiul acestor câmpuri. Astfel, dacă prin alegerea convenabilă a sistemului cartezian de coordonate din R^3 rezultă că vectorul $\vec{r}(M)$ depinde numai de variabilele x şi y (sau respectiv numai de variabilele y şi z, sau numai de variabilele x şi z), adică $\vec{r}(M) = \{P(M), Q(M), R(M)\} = \vec{r}(x, y)$ (sau $\vec{r}(y, z)$, sau $\vec{r}(x, z)$), atunci câmpul vectorial se numeşte *câmp plan-paralel*, iar dacă în plus $R(M) = 0$, câmpul $\vec{r}(M)$ se numeşte *plan*.

Dacă prin alegerea convenabilă a sistemului cartezian de coordonate din R^3 se deduce că vectorul $\vec{r}(M)$ depinde de o singură variabilă, orice două din funcţiile $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$ sunt identic egale cu zero, atunci câmpul vectorial $\vec{r}(M)$ se numeşte *uni-dimensional* şi în acest caz curbele vectoriale corespunzătoare sunt linii drepte, paralele cu axa OX, dacă $\vec{r}(M)$ depinde numai de x şi respectiv paralele cu axele OY sau OZ, dacă $\vec{r}(M)=\vec{r}(y)$ sau respectiv $\vec{r}(M)=\vec{r}(z)$.

Analog, dacă prin trecerea la sistemul cilindric de coordonate din R^3, se deduce că $\vec{r}(M)$ nu depinde de θ, câmpul vectorial $\vec{r}(M)$ se va numi *axial-simetric*, iar dacă prin trecerea la sistemul sferic de coordonate, câmpul vectorial $\vec{r}(M)$ nu depinde de unghiurile θ şi φ, atunci el se va numi *câmp vectorial cu simetrie sferică*.

6.7.2. Operatorii diferenţiali de ordinul 1 şi 2 ai teoriei câmpurilor. Operatorii Hamilton şi Laplace

Fie $E\subseteq R^3$ şi presupunem că toate funcţiile (scalare sau vectoriale) care intervin în consideraţiile viitoare posedă toate derivatele impuse de calcule. Vom defini mai întâi următoarele aplicaţii definite de aşa-numiţii *operatori diferenţiali de ordinul 1*:

Cazul 1. Dacă $u=u(M)=u(x,y,z)$ este un câmp scalar în E, atunci câmpul vectorial din E definit prin vectorul $\vec{r}(M)=\overrightarrow{grad}(u(M))=\{u'_x(M),u'_y(M),u'_z(M)\}$ poartă denumirea de *câmp de gradienţi* ai câmpului scalar u. Aşadar, operatorul grad (citit gradient — de la cuvântul francez „gradient") aplică orice câmp scalar din E într-un câmp vectorial ale cărui coordonate sunt derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei $u=u(x,y,z)$.

De exemplu, dacă $u_1=xyz$, câmpul de gradienţi din R^3 corespunzător va fi $\overrightarrow{grad}(u_1(M))=\{yz,xz,xy\}$, iar dacă $u_2=u_2(M)=\frac{1}{r}$ cu $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}>0$ se deduce că

$$\overrightarrow{grad}(u_2)=\left\{-\frac{x}{r^3},-\frac{y}{r^3},-\frac{z}{r^3}\right\}=-\frac{1}{r^3}\{x,y,z\}=-\frac{\vec{r}}{r^3},\text{ unde}$$

$$\vec{r}=\vec{r}(M)=\overrightarrow{OM}\neq\vec{0}.$$

Definiţia 1. Câmpul vectorial $\vec{r}(M)$ din E se numeşte *potenţial*, dacă el poate fi reprezentat ca un câmp de gradienţi ai unui câmp scalar $u(M)=u(x,y,z)$ din E. Câmpul scalar $u=u(M)$, în acest caz, se va numi *potenţialul scalar* al câmpului vectorial $\vec{r}(M)$.

În exemplele de mai sus, câmpul vectorial $\vec{r_1}(M)=\{yz,xz,xy\}$ este potenţial şi potenţialul lui scalar este $u_1=xyz$ în R^3, iar câmpul vectorial

$$\vec{r_2}(M)=\left\{\frac{x}{r^3},\frac{y}{r^3},\frac{z}{r^3}\right\},\quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}>0\ \text{ este de}$$

asemenea un câmp potenţial, având potenţialul scalar egal cu

$$u=-\frac{1}{r}=-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\quad\text{în}\quad E=R^3\setminus\{(0,0,0)\}.$$

Potenţialul scalar al unui câmp potenţial este determinat cu exactitate de o constantă reală, deoarece

$$\overrightarrow{grad}(u_1)=\overrightarrow{grad}(u_2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[(u_1)'_x=(u_2)'_x,(u_1)'_y=(u_2)'_y,(u_1)'_z=(u_2)'_z\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_1(x,y,z)=u_2(x,y,z)+C,\ C\in R.$$

Cazul 2. Dacă câmpul vectorial este definit de vectorul $\vec{r}(x,y,z)=\vec{r}(M)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$ în E, atunci câmpul scalar din E definit prin funcţia

$$div\vec{r}(M)=\frac{\partial P}{\partial x}(M)+\frac{\partial Q}{\partial y}(M)+\frac{\partial R}{\partial z}(M)$$

se numeşte *divergenţa* câmpului vectorial $\vec{r}(M)$.

Aşadar, operatorul *div* (citit divergenţă, de la cuvântul francez „divergeance") va fi un operator diferenţial, care transformă un câmp vectorial din E într-un câmp scalar definit în E.

De exemplu, dacă $\vec{r_1}(M)=\{x,yz,z^2\}$, se obţine că

$$div\vec{r_1}(M)=1+z+2z=1+3z,$$

iar dacă $\vec{r_2}(M)=\{y^2,z^2,x^2\}$, avem $div\vec{r_2}(M)=0$ în orice punct din R^3.

Definiția 2. Câmpul vectorial $\vec{r}(M)$ din E se numește *câmp vectorial solenoidal* (sau *tubular*) *în E*, dacă $\overline{div\vec{r}(M)} = 0$.

În primul caz de mai sus câmpul vectorial $\vec{r_1}(M)$ nu este solenoidal, pe când al doilea exemplu definește un *câmp solenoidal* (*tubular*) în R^3.

Cazul 3. Dacă $\vec{r}(M) = \{P, Q, R\}$ este un câmp vectorial în E, atunci vectorul

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{r}(M)\right) = \{R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y\}$$

se numește *rotorul* (sau *vârtejul*) câmpului vectorial $\vec{r}(M)$.

Așadar, operatorul *rot* (citit rotor de la cuvântul francez „rotation") transformă orice câmp vectorial $\vec{r}(M)$ din E într-un alt câmp vectorial $\overrightarrow{rot}\left(\vec{r}(M)\right)$ din E.

Dacă $\vec{r}(M)$ este un câmp vectorial în E astfel încât $\overrightarrow{rot}\left(\vec{r}(M)\right) = \vec{0}$, câmpul vectorial $\vec{r}(M)$ se numește *irotațional*, adică *fără vârtej*.

Dacă, însă, există un alt câmp vectorial $\vec{s}(A)$ în E, astfel încât $\vec{r}(A) = \overrightarrow{rot}\left(\vec{s}(A)\right)$, atunci se spune că *câmpul vectorial* $\vec{r}(A)$ *este rotațional* în E, iar vectorul $\vec{s}(t)$ este *potențialul vector* al câmpului vectorial $\vec{r}(M)$ în E (a se compara cu cazul 1 de mai sus).

De exemplu, dacă

$$\vec{r_1}(M) = \{bz - cy, cx - az, ay - bx\},\ a, b, c \in R,$$

rezultă că

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{r_1}(M)\right) = \{2a, 2b, 2c\} = 2\{a, b, c\},$$

iar dacă

$$\vec{r_2}(M) = \left\{\frac{3x^2y^2}{z} - 2x^3, \frac{2x^3y}{z} + 3y^3, z^3 - \frac{x^3y^2}{z^2}\right\},$$

avem: $P'_y = \frac{6x^2y}{z}$, $P'_z = -\frac{3x^2y^2}{z^2}$, $Q'_x = \frac{6x^2y}{z}$, $Q'_z = -\frac{2x^3y}{z^2}$, $R'_x = -\frac{3x^2y^2}{z^2}$, $R'_y = -\frac{2x^3y}{z^2}$ și deci, $\overrightarrow{rot}(r_2(M)) = \{0,0,0\} = \vec{0}$.

În baza definițiilor de mai sus, rezultă că pentru câmpul vectorial $\vec{r}(M) = \{a, b, c\}$, $a, b, c \in R$, există potențialul vector

$$\vec{s}(M) = \frac{1}{2}\vec{r_1}(M) = \frac{1}{2}\{bz - cy, cx - az, ay - bx\},$$

astfel încât

$$rot\left(\vec{s}(M)\right) = rot\left(\frac{1}{2}\vec{r_1}(M)\right) = \{a, b, c\} = \vec{r}(M),$$

deci, câmpul vectorial $\vec{r}(M) = \{a, b, c\}$ este rotațional. Al doilea câmp vectorial determinat de vectorul $\vec{r_2}(M)$ este irotațional, având rotorul nul în R^3.

Definiția 3. Câmpul vectorial $r(M)$ din E se numește *câmp armonic* (sau *laplasian*) dacă el este simultan potențial și solenoidal.

Propunem cititorului să demonstreze că câmpul vectorial

$$\overline{r(M)} = \left\{\frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, \frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}\right\}$$

este armonic în $E = R^3 \setminus \{0,0,0\}$.

Constatăm că operatorii *grad*, *div*, și *rot* sunt obținuți cu ajutorul operației de diferențiere și conțin derivate parțiale de ordinul întâi. De aceea acești operatori se numesc *operatori diferențiali de ordinul 1*.

Operatorii de bază ai teoriei câmpurilor, considerați mai sus: *grad*, *div*, și *rot*, cât și operațiile cu ei se reprezintă mai comod cu ajutorul operatorului Hamilton ((1805–1865 – matematician englez) (sau operatorul „nabla"): acest operator reprezintă un vector simbolic notat cu $\vec{\nabla}$ (litera grecească „nabla") coordonatele căruia sunt simbolurile derivatelor parțiale: $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$, adică

$$\vec{\nabla}=\left\{\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right\}=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

Operațiile cu acest vector simbolic se vor efectua conform legilor algebrei vectoriale. Totodată vom accepta produsul fiecărui din simbolurile $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ și $\frac{\partial}{\partial z}$ cu o funcție scalară $u=u(x,y,z)$ ca derivată parțială a acestei funcții respectiv în raport cu x, y și z.

Astfel, cele trei operații de bază din calculul vectorial (înmulțirea cu un scalar, produsul scalar și produsul vectorial) aplicate operatorului Hamilton vor conduce la cei trei operatori diferențiali de ordinul 1 definiți în cazurile 1, 2 și 3 de mai sus. Într-adevăr:

1) fie $u=u(x,y,z)$ o funcție scalară definită în $E\subseteq R^3$. Atunci produsul dintre operatorul $\vec{\nabla}$ și funcția scalară u este egal cu gradientul acestei funcții:

$$\vec{\nabla}u=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}=\overrightarrow{grad}(u);$$

2) fie $\vec{r}(M)=\{P,Q,R\}$ un vector funcție. Atunci produsul scalar dintre vectorul $\vec{\nabla}$ și vectorul funcție $\vec{r}(M)$ este egal cu divergența acestui vector funcție:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{r}(M)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left[P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}\right]=$$
$$=\frac{\partial P}{\partial x}(M)+\frac{\partial Q}{\partial y}(M)+\frac{\partial R}{\partial z}(M)=div\,\vec{r}(M).$$

3) fie $\vec{r}(M)=\{P,Q,R\}$ un vector funcție. Atunci produsul vectorial dintre operatorul $\vec{\nabla}$ și vectorul funcție $\vec{r}(M)$ este egal cu rotorul vectorului $\vec{r}(M)$:

$$\vec{\nabla}\times\vec{r}(M)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=$$

$$=\left(R'_y-Q'_z\right)\vec{i}+\left(P'_z-R'_x\right)\vec{j}+\left(Q'_x-P'_y\right)\vec{k}=\overrightarrow{rot}\left(\vec{r}(M)\right)$$

(am descompus determinantul după elementele primei linii, simbolurile de derivare parțială $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ fiind înmulțiți cu elementele din linia a treia a determinantului, ceea ce înseamnă derivarea în raport cu variabila în speță, adică $\frac{\partial}{\partial z}R$ înseamnă $\frac{\partial R}{\partial z}$ etc.)

Evident că operațiile din 1), 2), 3) de mai sus trebuie considerate ca fiind formale, având, însă, avantajul că în afara faptului că permit reținerea operatorilor *grad*, *div* și *rot*, permit și stabilirea unor egalități posibile cu acești operatori plecând de la egalități valabile pentru vectorii obișnuiți.

Propunem cititorului prin calcule directe să demonstreze următoarele egalități (a se consulta [5], 4.10.4):

a) $\vec{\nabla}(u+v)=\vec{\nabla}u+\vec{\nabla}v$,

$div\left(\vec{r}_1(M)+\vec{r}_2(M)\right)=div\left(\vec{r}_1(M)\right)+div\left(\vec{r}_2(M)\right)$,

$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{r_1(M)}+\overrightarrow{r_2(M)}\right)=\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{r_1(M)}\right)+\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{r_2(M)}\right)$;

b) $div\left(u\cdot\vec{r}(M)\right)=\overrightarrow{grad}\,u\cdot\vec{r}(M)+u\cdot div\left(\vec{r}(M)\right)$;

c) $\overrightarrow{grad}(u\cdot v)=u\,\overrightarrow{grad}v+v\,\overrightarrow{grad}u$;

d) $\overrightarrow{rot}\left[u\cdot\vec{r}(M)\right]=u\,\overrightarrow{rot}\left(\vec{r}(M)\right)+\left(\overrightarrow{grad}u\right)\times\vec{r}(M)$;

e) $div\left[\vec{r}_1(M)\times\vec{r}_2(M)\right]=\vec{r}_2(M)\cdot\overrightarrow{rot}\left(r_1(M)\right)-\vec{r}_1(M)\cdot\overrightarrow{rot}\left(r_2(M)\right)$.

Exact la fel cum s-au definit derivatele (sau diferențialele) de ordinul doi, plecând de la operatorii *grad*, *div* și *rot* se pot defini operatorii diferențiali de ordinul 2, care se obțin prin aplicarea succesivă a operatorilor diferențiali de ordinul 1. În acest sens trebuie de avut grijă de faptul că operatorul *grad* se aplică numai la câmpurile scalare, pe când operatorii *div* și *rot* se pot aplica numai la câmpurile vectoriale. În tabelul de mai jos sunt specificate toate posibilitățile de formare a operatorilor diferențiali de ordinul 2:

	câmp scalar u	câmp vectorial $\vec{r}(M)$	
operația	$\overrightarrow{grad\,u} = \vec{\nabla} u$	$div(\vec{r}(M)) = \vec{\nabla}\cdot\vec{r}(M)$	$\overrightarrow{rot}(\vec{r}(M)) = \vec{\nabla}\times\vec{r}(M)$
Grad		$\overrightarrow{grad}(div\,\vec{r}(M)) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{r}(M))$	
div	$div(\overrightarrow{grad\,u}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} u$		$div(\overrightarrow{rot}(\vec{r}(M))) = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{r}(M))$
rot	$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad\,u}) = \vec{\nabla}\times\vec{\nabla} u$		$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{r}(M))) = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{r}(M))$

Modul de interpretare a tabelului este evident: întâi se consideră operațiile calculate pe orizontală, adică cei trei operatori diferențiali de ordinul 1 (*grad*, *div* și *rot*), cărora li se aplică operațiile indicate în prima coloană.

Prin urmare, am obținut 5 operatori diferențiali de ordinul 2.

Propunem cititorului prin calcul direct să deducă următoarele egalități (a se consulta [5], 4.10.5):

1) $div(\overrightarrow{grad\,u}) = u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}$.

Partea dreaptă a acestei expresii se notează $\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}$ sau simbolic $\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) u$. Simbolul $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}$ se numește operatorul Laplace (1749-1827 – matematician și fizician francez).

Prin urmare, avem:

$$div(\overrightarrow{grad\,u}) = \Delta u .$$

Operatorul Laplace se aplică atât câmpurilor scalare, cât și câmpurilor vectoriale:

$$\Delta\vec{r}(M) = \{\Delta P, \Delta Q, \Delta R\} =$$
$$= \{P''_{xx} + P''_{yy} + P''_{zz}, Q''_{xx} + Q''_{yy} + Q''_{zz}, R''_{xx} + R''_{yy} + R''_{zz}\}.$$

Menționăm că ecuația $u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = 0$ sau $\Delta u = 0$ se numește *ecuația Laplace*. Funcția care satisface ecuația Laplace se numește *funcție armonică*. Cu ajutorul acestei ecuații se descriu procese staționare ale diferitor fenomene fizice ca: distribuirea staționară a căldurii, câmpul electrostatic al unei sarcini punctiforme, mișcarea stabilă a unui lichid incomprimabil în interiorul unui domeniu oarecare etc.

2) $rot(\overrightarrow{grad\,u}) = 0$;

3) $div(\overrightarrow{rot}(r(M))) = 0$;

4) $\overrightarrow{grad}(div(\vec{r}(M))) = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{r}(M))$;

5) $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{r(M)})) = \overrightarrow{grad}(div(\vec{r}(M))) - \Delta\,\vec{r}(M)$. (1)

Din relațiile 1)-5) rezultă că cei cinci operatori diferențiali de ordinul 2 care se pot forma cu ajutorul operatorilor diferențiali de ordinul 1 (*grad*, *div* și *rot*) se reduc de fapt la trei nenuli (în general), care la rândul lor se pot considera legați prin egalitatea (1). Folosind definițiile câmpurilor potențiale, solenoidale și armonice se pot demonstra următoarele criterii (a se consulta de exemplu [5], 5.10.2):

a) Pentru ca câmpul vectorial $\vec{r}(M)$ în $E \subseteq R^3$ să fie solenoidal (tubular), este necesar și suficient ca el să fie rotațional, adică

$$div\,\vec{r}(M) = 0 \Leftrightarrow \exists\vec{s}(M) : \vec{r}(M) = rot(\vec{s}(M));$$

b) Pentru ca câmpul vectorial $\vec{r}(M) = \{P, Q, R\}$ definit pe un domeniu simplu conex $D \subseteq R^3$ să fie potențial, este necesar și suficient ca el să fie irotațional, adică există o funcție $u = f(M)$ astfel încât

$$\vec{r}(M) = \overrightarrow{grad\,u} \Leftrightarrow \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{r(M)}) = \vec{0} \Leftrightarrow P'_y = Q'_x, Q'_z = R'_y, R'_x = P'_z .$$

În cazul acesta potențialul scalar al câmpului dat se calculează după formula

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x} P(t,y_0,z_0)dt+\int_{y_0}^{y} Q(x,t,z_0)dt+$$
$$+\int_{z_0}^{z} R(x,y,t)dt+C,$$
unde (x_0,y_0,z_0) este un punct arbitrar din domeniul simplu conex D în care funcţiile P,Q,R sunt definite (a se consulta teorema 2 din 6.2.4);

c) Pentru ca un câmp vectorial să fie armonic, este necesar şi suficient ca potenţialul lui scalar să fie o funcţie armonică;

d) Orice câmp vectorial $\overrightarrow{r(M)}$ din E poate fi descompus într-o sumă de două câmpuri vectoriale $\vec{s}_1(M)$ şi $\vec{s}_2(M)$ din E: unul potenţial, celălalt solenoidal, adică
$\vec{r}(M)=\vec{s}_1(M)+\vec{s}_2(M)$, unde $\overrightarrow{rot}(\vec{s}_1(M))=\vec{0}$, şi $div(\vec{s}_2(M))=0$.

6.7.3. Fluxul şi divergenţa câmpului vectorial

Considerăm în spaţiul R^3 un câmp vectorial
$$\vec{v}(M)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$$
al vitezelor mişcării unui fluid, densitatea căruia o considerăm egală cu 1. Ne punem problema de a calcula cantitatea σ de lichid ce curge într-o unitate de timp printr-o suprafaţă orientată S, limitată de curba spaţială netedă L. Presupunem că sunt cunoscute cosinusurile directoare $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ale vectorului unitar $\vec{n}$ al normalei la suprafaţa S şi funcţiile P, Q, R sunt continue pe S.

Divizăm în mod arbitrar suprafaţa S în m suprafeţe elementare $S_1,...,S_m$ fără puncte interioare comune cu ariile respectiv $\Delta S_1,...,\Delta S_m$ şi pe fiecare din ele fixăm câte un punct N_i ($i=1,...,m$). Calculăm cantitatea σ_i de lichid ce curge într-o unitate de timp prin suprafaţa $S_i(i=1,...,m)$. Notăm prin φ unghiul dintre vectorul unitar $\vec{n_i}=\vec{n}(N_i)$ al normalei duse la suprafaţa S_i prin punctul N_i şi vectorul $\vec{v_i}=\vec{v}(N_i)$. Dacă φ este

ascuţit, adică dacă lichidul curge în direcţia indicată de vectorul $\vec{n_i}$, atunci cantitatea de lichid σ_i se va considera pozitivă, iar dacă φ este obtuz (adică lichidul curge în direcţie opusă) – negativă.

Pentru o porţiune $S_i(i=1,...,m)$ destul de mică a suprafeţei S putem considera, aproximativ, că în orice punct al porţiunii i viteza de curgere este constantă şi egală cu $\vec{v}(N_i)$ şi că toate porţiunile $S_i(i=1,...,m)$ sunt plane (vezi fig. 1). Atunci valoarea aproximativă a mărimii σ_i luată cu semnul respectiv va fi egală cu volumul cilindrului aria bazei căruia este ΔS_i, iar înălţimea h_i este egală cu modulul proiecţiei vectorului $\vec{v}(N_i)$ pe vectorul $\vec{n_i}$, adică
$$\sigma_i \approx \Delta S_i \cdot h_i$$
şi
$$h_i=\mathrm{Pr}_{\vec{n_i}}\vec{v_i}=\left|\vec{v_i}\right|\cdot\cos\varphi=\left|\vec{v_i}\right|\cdot\left|\vec{n_i}\right|\cdot\cos\varphi=\vec{n_i}\cdot\vec{v_i},$$
deoarece $\left|\vec{n_i}\right|=1$. Deci, $\sigma_i \approx (\vec{n_i}\cdot\vec{v_i})\Delta S_i$.

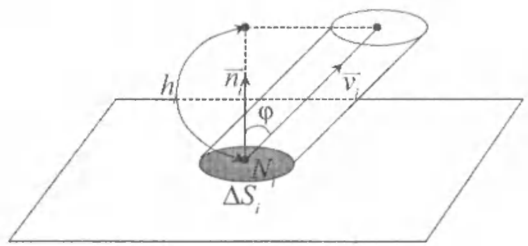


Fig. 1.

Sumând după i de la 1 la m, obţinem valoarea aproximativă a cantităţii σ de lichid care curge prin suprafaţa orientată S într-o unitate de timp:

$$\sigma_i \approx \sum_{i=1}^{m} \left(\vec{n}_i \cdot \vec{v}_i\right)\Delta S_i .$$

Partea dreaptă a expresiei reprezintă suma integrală a funcţiei continue $[\vec{n} \cdot \vec{v}(M)]$ pe S. Prin urmare,

$$\sigma = \iint_S \vec{n} \cdot \vec{v}(M)dS = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS =$$

$$= \iint_S P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy \qquad (1)$$

(a se consulta definiţia integralei de suprafaţă de speţa 1 din 6.5.1 şi formula (2) din 6.5.3).

Aşadar, cantitatea σ de lichid care curge într-o unitate de timp printr-o suprafaţă orientată S reprezintă o integrală de suprafaţă de speţa 2 pe faţa aleasă a suprafeţei S.

În cazul unui câmp vectorial arbitrar $\vec{r}(M)$, integrala de suprafaţă de speţa 2 (formula (1) de mai sus) se numeşte *fluxul câmpului vectorial* $\vec{r}(M)$ *prin suprafaţa* S. Pentru un câmp vectorial de o altă natură fluxul, evident, va avea alt sens fizic.

Dacă utilizăm noţiunile de divergenţă (din 6.7.2) şi de flux ale câmpului vectorial $\overline{r(M)} = \{P, Q, R\}$ printr-o suprafaţă S orientată şi închisă ce formează corpul V, atunci formula Gauss-Ostrogradski din 6.6.1 poate fi scrisă într-o formă vectorială mai compactă:

$$\oiint_S \left(\vec{r}(M) \cdot \vec{n}\right)dS = \iiint_V div\left(\vec{r}(M)\right)dx\,dy\,dz \qquad (2)$$

şi se citeşte aşa: fluxul câmpului vectorial $\vec{r}(M)$ prin suprafaţa închisă şi orientată S este egal cu integrala triplă de la divergenţa câmpului vectorial $\vec{r}(M)$, calculată pe domeniul V, care este mărginit de suprafaţa închisă S.

Vom demonstra acum că operatorul *div*, definit în 6.7.2, nu depinde de sistemul de coordonate. Pentru aceasta, aplicând formulele de medie într-o integrală triplă (a se consulta **P7** din 6.4.1), formula (2) se scrie sub forma

$$\oiint_S \left(\vec{r}(M) \cdot \vec{n}\right)dS = div\left(\vec{r}(M_0)\right)\cdot v ,$$

unde $M_0(x_0, y_0, z_0)$ este un punct arbitrar din domeniul V şi v – volumul acestui domeniu.

De unde

$$div\left(\vec{r}(M_0)\right) = \frac{\oiint_S \left(\vec{r}(M) \cdot \vec{n}\right)dS}{v} .$$

Vom contracta acum domeniul V în punctul M_0. În acest caz $v \to 0$, sau $M \to M_0$ şi avem:

$$div\left(\vec{r}(M_0)\right) = \lim_{v \to 0} \frac{\oiint_S \left(\vec{r}(M) \cdot \vec{n}\right)dS}{v} , \qquad (3)$$

ceea ce înseamnă că divergenţa câmpului vectorial $\vec{r}(M)$ într-un punct arbitrar M este egală cu limita raportului dintre fluxul câmpului vectorial $\vec{r}(M)$ prin suprafaţa închisă S, ce înconjoară punctul M şi volumul corpului limitat de S, când $v \to 0$.

Dat fiind faptul că fluxul şi volumul nu depind de sistemul de coordonate ales, rezultă că şi divergenţa câmpului vectorial nu depinde de sistemul de coordonate ales, ceea ce trebuia de demonstrat.

Formula (3) ne permite să determinăm sensul fizic al divergenţei. Într-adevăr, vom considera câmpul vectorial $\vec{r}(M)$ ca un câmp vectorial al vitezelor lichidului cu densitatea $\gamma = 1$. În baza formulei (1) fluxul

$$\sigma = \iint_S \left(\vec{v}(M) \cdot \vec{n}\right)dS$$

este egal cu cantitatea de lichid ce curge într-o unitate de timp prin suprafaţa S în direcţia vectorului unitar $\vec{n}$ al normalei la faţa exterioară a suprafeţei S. Deoarece S este închisă, este evident că fluxul σ este egal cu cantitatea de lichid ce apare sau dispare într-un interval de timp în limitele domeniului V, care este mărginit de suprafaţa *S*. Vom numi această cantitate *putere sumară* a sursei (dacă $\sigma > 0$) sau *putere sumară de scurgere* (dacă $\sigma < 0$). Atunci raportul

$$\frac{\oiint_S \left(\vec{r}(M)\cdot\vec{n}\right)dS}{v}$$

constituie densitatea medie de volum a surselor (sau ale scurgerilor), adică cantitatea de lichid ce apare (sau dispare) într-o unitate de timp şi într-o unitate de volum a domeniului *V*, iar limita

$$\lim_{v\to 0}\frac{\oiint_S \left(\vec{r}(M)\cdot\vec{n}\right)dS}{v} = div\left(\vec{r}(M)\right)$$

cu condiţia că domeniul *V*, mărginit de suprafaţa închisă *S*, se contractă până în punctul *M*, poate fi numită *densitate a sursei* (*sau a scurgerii*) în punctul *M*. Acesta este sensul fizic al divergenţei.

Dacă $div\left(\vec{r}(M)\right) > 0$, atunci, în baza formulei (2), avem $\sigma > 0$, adică în interiorul domeniului *V* se află surse de lichid şi din *V* se scurge mai mult lichid decât curge în el. Dacă $div\left(\vec{r}(M)\right) < 0$, atunci $\sigma < 0$, adică în interiorul lui *V* sunt scurgeri de lichid şi în domeniul *V* curge mai mult lichid decât din el se scurge. Dacă însă $div\left(\vec{r}(M)\right) = 0$, adică câmpul vectorial $\vec{r}(M)$ este solenoidal, atunci $\sigma = 0$. Aşadar, în câmpuri vectoriale solenoidale nu sunt nici surse, nici scurgeri de lichid în domeniul *V*, limitat de suprafaţa închisă orientată *S*, adică în *V* curge tot atât lichid, cât din el se scurge. Acest fenomen are loc, spre exemplu, în orice corp *V* situat într-un curent de apă ce curge în râu. În felul acesta obţinem o proprietate importantă a câmpului solenoidal: *fluxul câmpului vectorial solenoidal, care trece prin secţiunile transversale ale tubului vectorial, îşi păstrează mărimea constantă.* Această mărime se numeşte *intensitatea tubului vectorial*. În cazul câmpului vectorial al vitezelor unui lichid incompresibil fără surse (câmp vectorial solenoidal) această proprietate înseamnă *că cantitatea de lichid prin secţiunea transversală a tubului vectorial are aceeaşi mărime pentru toate secţiunile.*

6.7.4. Circulaţia şi rotorul câmpului vectorial

Fie $\vec{r}(M) = \{P, Q, R\}$ un câmp vectorial definit pe o curbă închisă γ netedă sau netedă pe porţiuni. Alegem pe acest contur una din cele două direcţii posibile de mişcare şi notăm prin $\overrightarrow{dl} = \{dx, dy, dz\}$ vectorul care în fiecare punct al curbei are aceeaşi direcţie ca şi direcţia mişcării pe curbă în acest punct. Atunci integrala curbilinie de speţa 2

$$\oint_\gamma \vec{r}(M)\cdot\overrightarrow{dl} = \oint_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \oint_\gamma [P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma]dl = \oint_\gamma A_l\,dl \tag{1}$$

se numeşte *circulaţie a câmpului vectorial* $\vec{r}(M)$ de-a lungul curbei γ. Într-un câmp de forţe circulaţia exprimă lucrul câmpului la deplasarea punctului material de-a lungul drumului γ (a se consulta formula (10) din 6.2.3). Pentru câmpuri de o altă natură circulaţia are alt sens fizic.

Dacă utilizăm noţiunile de circulaţie şi de rotor din 6.7.2 ale câmpului vectorial $\vec{r}(M) = \{P, Q, R\}$, unde funcţiile *P*, *Q*, *R* sunt continue pe domeniul *S*, mărginit de curba închisă γ netedă pe porţiuni, putem scrie formula Stokes din 6.6.2 într-o formă mai compactă şi anume în formă vectorială:

$$\oint_{\gamma^{(+)}} \vec{r}(M)\cdot\overrightarrow{dl} = \iint_{S^{(+)}} \left(\overrightarrow{rot}(r(M))\cdot\vec{n}\right)dS\,. \tag{2}$$

Formula (2) se citeşte astfel: circulaţia câmpului vectorial $\vec{r}(M)$ de-a lungul conturului închis γ este egală cu fluxul rotorului acestui câmp vectorial prin suprafaţa *S*, mărginită de conturul γ.

Definiţia operatorului *rot* dată în 6.7.2, ca şi definiţia operatorului *div* (tot acolo) are inconvenientul obişnuit: ea este legată de un anumit sistem de coordonate. Pentru a demonstra că şi operatorul *rot* nu depinde de sistemul de coordonate ales, ci numai de câmpul vectorial $\vec{r}(M)$, folosim o schemă similară celeia din demonstrația că operatorul *div* nu depinde de sistemul de coordonate ales (6.7.3).

Fie $\vec{n}$, $|\vec{n}|=1$ o direcție oarecare, care pleacă dintr-un punct dat M. Înconjurăm acest punct, cu o suprafață plană S mărginită de conturul închis γ și această suprafață aparține unui plan perpendicular pe $\vec{n}$. Atunci, conform formulei lui Stokes, avem:

$$\oint_{\gamma} A_l\, dl = \iint_{S} \left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{r}(M)\right)\cdot \vec{n}\right) dS .$$

Împărțind ambele părți ale egalității la aria σ a suprafeței S și concentrând-o în punctul dat, vom obține la limită:

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{r}(M)\right)\cdot \vec{n} = \lim_{\sigma\to 0}\frac{\oint_{\gamma} A_l\, dl}{\sigma} .$$

Deoarece

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{r}(M)\right)\cdot \vec{n} = |\vec{n}|\cdot \text{Pr}_{\vec{n}}\left[\overrightarrow{rot}\left(\vec{r}(M)\right)\right] = \text{Pr}_{\vec{n}}\left[\overrightarrow{rot}\left(\vec{r}(M)\right)\right],$$

obținem că proiecția vectorului $\overrightarrow{rot}\left(\vec{r}(M)\right)$ pe vectorul unitar $\vec{n}$ este egală cu

$$\text{Pr}_{\vec{n}}\left[\overrightarrow{rot}\left(\vec{r}(M)\right)\right] = \lim_{\sigma\to 0}\frac{\oint_{\gamma} A_l\, dl}{\sigma} .$$

Așadar, putem determina proiecția vectorului $\overrightarrow{rot}\left(\vec{r}(M)\right)$ pe orice axă și deci însăși vectorul, fără a ne referi la un sistem de coordonate ales dinainte.

6.8. Exerciții la capitolul 6.

6.1. Integrale ce depind de parametri.

1. Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{y\to 0}\int_0^1 \sqrt[5]{x^3+y^4}\, dx$; b) $\lim\limits_{y\to 0}\int_{1+y}^{2+y} \frac{x\cos(x^2y^3)}{2+x^2+y^2}\, dx$;

c) $\lim\limits_{y\to -1}\int_{1+y^3}^{3+y^3} \frac{dx}{3+x^2+y^2}$; d) $\lim\limits_{y\to 0}\int_{1+y}^{2+y^2} x^3\cos(xy)\, dx$.

2. Să se calculeze $F'(y)$ dacă :

a) $F(y)=\int_{y}^{y^2}\frac{1}{x}e^{-yx^2}\, dx, \quad x\in[1,2]$;

b) $F(y)=\int_0^y (x+y)\sin(x-y)\, dx$;

c) $F(y)=\int_{\sin y}^{\cos y}\frac{x e^{y\sqrt{1-x^2}}}{(1-x^2)}\, dx, \quad x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}], \; y\in[0,\frac{\pi}{2}]$;

d) $F(y)=\int_0^y \frac{\ln(1+xy)}{x}\, dx$.

3. Folosind posibilitatea de derivare în raport cu parametrul y, să se calculeze integralele:

a) $\int_0^1 f(x,y)\, dx$, *unde* $f(x,y)=\frac{arctg(xy)}{x\sqrt{1-x^2}}$,
$x\neq 0, x\neq 1$ și $f(0,y)=y$, $f(1,y)=0$, $y\geq 0$;

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x,y)\, dx$, *unde* $f(x,y)=\frac{arctg(y\sin x)}{\sin x}$,
$x\neq 0$ și $f(0,y)=y$, $y\geq 0$;

c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x,y)\,dx$, *unde* $f(x,y)=\dfrac{\ln(1+y\cos^2 x)}{\cos^2 x}$,

$x\neq\dfrac{\pi}{2}$ şi $f(\dfrac{\pi}{2},y)=y,\ y\geq -1$;

d) $\int\limits_0^1 f(x,y)\,dx$, *unde* $f(x,y)=\dfrac{\ln(1-x^2y^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}$,

$x\neq 0, x\neq 1$ şi $f(0,y)=y,\ f(1,y)=0,\ y\in[-1,1]$;

e) $\int\limits_0^{+\infty} f(x,y)dx,\ f(x,y)=\dfrac{e^{x^2}-e^{-xy}}{x}$,

$x\neq 0, y>0$ şi $f(x,y)=0$;

f) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x,y)\,dx$, *unde* $f(x,y)=\dfrac{1}{\sin x}\ln\dfrac{1+y\sin x}{1-y\sin x}$,

$x\neq 0$, *şi* $f(0,y)=y,\ |y|<1$.

4. Folosind posibilitatea inversării ordinii de integrare în integralele ce depind de un parametru, să se calculeze:

a) $\int\limits_0^1 \varphi(x)\,dx$, *unde* $\varphi(x)=\dfrac{1}{\ln x}(x^b-x^a),\ x\neq 1,\ x\neq 0$,

$a>0,\ b>0$ şi $\varphi(0)=\varphi(1)=0$.

b) $\int\limits_0^1 \varphi(x)\,dx$, *unde* $\varphi(x)=\cos(\ln\dfrac{1}{x})\cdot\dfrac{x(x-1)}{\ln x},\ x\neq 0, x\neq 1$

şi $\varphi(0)=\varphi(1)=0$.

c) $\int\limits_0^1 \varphi(x)\,dx$, *unde* $\varphi(x)=\sin(\ln\dfrac{1}{x})\cdot\dfrac{x}{\ln x}(x^2-1),\ x\neq 0$,

$x\neq 1$ şi $\varphi(0)=\varphi(1)=0$.

d) $\int\limits_0^1 \varphi(x)\,dx$, *unde* $\varphi(x)=\dfrac{x^b-x^a}{\ln x}\sin(\ln x), x\neq 0, x\neq 1$ şi

$\varphi(0)=0, \varphi(1)=1, a>0, b>0$.

5. Folosind integralele Euler, să se calculeze următoarele integrale:

a) $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{x^2}{x^4+1}dx$; *b)* $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$;

c) $\int\limits_0^1\left[\ln(\dfrac{1}{x})\right]^p dx,\ p>-1$; *d)* $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^5}dx$.

6.2. Integrale curbilinii.

1. Să se calculeze integralele curbilinii de speţa întâi:

a) $\int\limits_\gamma (x^2+y^2)\,dl$, unde γ este segmentul de dreaptă AB cu A(a,a) şi B(b,b), (b>a);

b) $\int\limits_\gamma y\,e^{-x}dl$, unde γ este arcul curbei

$x=\ln(1+t^2),\ y=2arctgt-t+3,\ t\in[0,1]$;

c) $\int\limits_\gamma \sqrt{y(2-y)}\ dl$, unde γ este arcul cicloidei

$x=t-\sin t, y=1-\cos t,\ t\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$;

d) $\int\limits_\gamma x^2y^2\,dl$, unde γ este arcul astroidei

$x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t,\ t\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$;

e) $\int\limits_\gamma \dfrac{dl}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, unde γ este arcul spiralei hiperbolice

$\rho\cdot\theta=1,\ \theta\in[\sqrt{3},2\sqrt{2}]$;

f) $\int_\gamma \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, unde γ este arcul curbei

$x=\cos t+t\sin t,\ y=\sin t-t\cos t,\ t\in[0,\pi]$;

g) $\int_\gamma xyz\,dl$, unde γ este arcul curbei

$x=t,\ y=\frac{1}{3}\sqrt{8t^3}, z=\frac{1}{2}t^2,\ t\in[0,1]$;

h) $\int_\gamma (x^2+y^2+z^2)\,dl$, unde γ este arcul curbei $x=a\cos t$,

$y=a\sin t, z=bt, t\in[0,2\pi]$;

i) $\int_\gamma xyz\,dl$, unde γ este segmentul de dreaptă cuprins între punctele A(1,0,1) şi B(2,2,3).

2. Să se calculeze integralele curbilinii de speţa a doua:

a) $\int_\gamma (x^2-y^2)\,dx$ şi $\int_\gamma (x^2-y^2)\,dy$, unde γ este arcul parabolei $y=x^2$, $x\in[0,2]$;

b) $\int_\gamma xy\,dx+(y-x)\,dy$, unde

1) γ este segmentul de dreaptă cuprins între punctele A(0,0) şi B(1,1);

2) γ este arcul AB al parabolei $y=x^2$;

3) γ este arcul AB al parabolei $x=y^2$;

4) γ este arcul AB al parabolei cubice $y=x^3$.

c) $\int_\gamma (x^2+2xy)\,dy$, unde γ este arcul de elipsă $\frac{x^2}{9}+y^2=1$, cuprins în cadranele 1 şi 2 în sensul direct;

d) $\int_\gamma y^2dx-x^2\,dy$, unde γ este

1) o circumferinţă de raza 1 cu centrul în O(0,0) parcursă în sens direct;

2) o circumferinţă de raza 1 cu centrul în C(1,1) parcursă în sens direct;

e) $\int_\gamma (x^3+y^2)\,dx+(x^2+y^3)\,dy$, unde γ este calea cea mai scurtă din punctul A(-2,0) spre punctul B(1,0), care nu intersectează interiorul cercului $x^2+y^2\le 1$;

f) I= $\int_\gamma 2y\sin 2x\,dx-\cos 2x\,dy$, unde γ este orice linie ce uneşte punctul $A(\frac{\pi}{4},2)$ cu punctul $B(\frac{\pi}{6},1)$;

g) I= $\int_\gamma xye^x\,dx+(x-1)e^x\,dy$, unde γ este orice linie ce uneşte punctul A(0,2) cu punctul B(1,2);

h) $\int_\gamma yz\,dx-z\sqrt{1^2-y^2}\,dy+xy\,dz$, unde γ este curba $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=\frac{t}{2\pi},\ t\in[0,2\pi]$;

i) $\int_\gamma x\,dx+y\,dy+(x+y-1)\,dz$, unde γ este segmentul de dreaptă cuprins între punctele A(1,1,1) şi B(2,3,4);

j) $\int_\gamma xy\,dx+zx^2\,dy+xyz\,dz$, unde γ este curba $x=e^t,\ y=e^{-t},\ z=t^2,\ t\in[0,1]$.

3. Să se calculeze lungimea arcului mărginit de curba:

a) $y=chx,\ x\in[0,1]$;

b) $y = 1 - \ln\cos x,\ x \in [0, \frac{\pi}{4}]$;

c) $x = 3t,\ y = 3t^2,\ z = 2t^3$ şi punctele O(0,0,0), A(3,3,2);

d) $x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t,\ z = e^t,\ t \in [0,1]$.

4. Să se determine masa firului material γ mărginit de curba:

a) $y = \ln x,\ x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}]$, dacă densitatea de masă $\rho(x, y) = x^2$;

b) $y = ach\frac{x}{a},\ x \in [0, a]$, dacă densitatea de masă $\rho(x, y) = \frac{1}{y}$;

c) $x = \ln(1 + t^2),\ y = 2arctgt - t,\ t \in [0,1]$, dacă densitatea de masă $\rho(x, y) = ye^{-x}$;

d) $x = \frac{1}{2}t^2,\ y = t,\ z = \frac{1}{3}t^3,\ t \in [0,2]$, dacă densitatea de masă $\rho(x, y) = \sqrt{1 + 4x^2 + y^2}$.

6.3 Integrale duble.

1. Să se calculeze următoarele integrale duble:

a) $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{(x+y)^2}$, unde D este dreptunghiul $3 \le x \le 4,\ -1 \le y \le 2$;

b) $\iint\limits_D \frac{y\,dx\,dy}{\sqrt{(1 + x^2 + y^2)^3}}$, unde D este dreptunghiul $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2$;

c) $\iint\limits_D y^2\sqrt{1 - x^2}\,dx\,dy$, unde D este cercul $x^2 + y^2 \le 1$;

d) $\iint\limits_D (x^2 + y)dx\,dy$, unde D este limitat de parabolele $y = x^2$ şi $x = y^2$;

e) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dx\,dy$, unde D este limitat de dreptele $x = 2, y = x$ şi hiperbola $xy = 1$;

f) $\iint\limits_D (6x + y)\,dx\,dy$, unde D este limitat de dreptele $y = x$, $y = 5x$ şi $y = 1$;

g) $\iint\limits_D \sqrt{xy - y^2}\,dx\,dy$, unde D este triunghiul cu vârfurile O(0,0), A(10,1) şi B(1,1).

2. Folosind o schimbare de variabilă adecvată, să se calculeze următoarele integrale:

a) $\iint\limits_D y^2\sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy$, unde D este coroana $\pi^2 \le x^2 + y^2 \le (2\pi)^2$;

b) $\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2}dx\,dy$, unde D este determinat de inegalitatea dublă $1 \le x^2 + y^2 \le 2x$;

c) $\iint\limits_D xy\,dx\,dy$, unde D este cercul $x^2 + y^2 \le R^2$, situat în cadranul 1;

d) $\iint\limits_D \sqrt{25 - x^2 - y^2}\,dxdy$, unde D este cercul $x^2 + y^2 \le 9$;

e) $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$, unde D este limitat de elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

f) $\iint\limits_D \sqrt{xy}\,dx\,dy$, unde D este limitat de liniile $y^2 = x,\ y^2 = 2x,\ xy = 1,\ xy = 2$;

g) $\iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy$, unde D este limitat de dreptele $x - y - 1 = 0,\ x - y + 2 = 0, x + y + 2 = 0$ şi $x + y - 3 = 0$;

h) $\iint\limits_D y^3\,dx\,dy$, unde D este limitat de parabolele $y = x^2,\ y = 2x^2$ şi de hiperbolele $xy = 1,\ xy = 2$.

3. Să se calculeze aria figurii mărginită de:

a) liniile $xy = 4,\ x + y - 5 = 0$;

b) dreptele $y = x,\ i = 2i,\ x + y = 1,\ x + 3y = 1$;

c) parabolele $y^2 = 10x + 25,\ y^2 = -6x + 9$;

d) elipsa $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

e) astroida $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$;

f) linia $(x^2 + y^2)^3 = x^4 + y^4$;

g) linia $(x^2 + y^2)^3 = xy^4$;

h) $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)^2 = x^2 + y^2,\ a > 0,\ b > 0$;

i) $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)^2 = \dfrac{x^2}{c^2},\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$

4. Să se calculeze aria suprafeţei:

a) sferice $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 = x$;

b) sferice $x^2 + y^2 + z^2 = 100$, cuprinsă între planele $x = 6$ şi $x = 8$;

c) paraboloidului $z = 1 - x^2 - y^2$, tăiată de planul $z = 0$;

d) conice $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, tăiată de cilindrul $x^2 + y^2 = 1$.

5. Să se calculeze masa plăcii plane materiale caracterizată prin domeniul D şi densitatea de masă $\gamma(x, y)$ dacă:

a) D este mărginit de liniile $x + y = 3,\ xy = 2$ şi $\gamma(x, y) = xy$;

b) D este pătratul $-1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1$ şi $\gamma(x, y) = x^2 + y^2$;

c) D este cercul $x^2 + y^2 \le R^2$ şi $\gamma(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

d) D este mărginit de elipsa $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ situată în cadranul 1 şi $\gamma(x, y) = \sqrt{4 - x^2}$.

6.4 Integrale triple.

1. Să se calculeze integralele:

a) $\iiint\limits_D \dfrac{dx\,dy\,dz}{(1 + x + y + z)^3}$, unde D este tetraedrul mărginit de planele $x = 0,\ y = 0, z = 0$ şi $x + y + z = 1$;

b) $\iiint\limits_D x\,dx\,dy\,dz$, unde D este prisma mărginită de planele $x = 0, y = 0, z = 0, y = h, x + z = a$;

c) $\iiint\limits_D xyz\,dx\,dy\,dz$, unde D este paralelipipedul $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ 0 \le z \le c$;

d) $\iiint\limits_D z\,dx\,dy\,dz$, unde D este mărginit de semielipsoidul $z = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4}}$ şi planul $z = 0$;

e) $\iiint\limits_D z\,dx\,dy\,dz$, unde D este mărginit de planele $x=0$, $y=x$, $z=0$ şi emisfera $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$;

f) $\iiint\limits_D x^2y\,dx\,dy\,dz$, unde D este mărginit de planele $x=0$, $y=0$, $z=0$ şi $x+y+z-2=0$;

g) $\iiint\limits_D (2x+y)\,dx\,dy\,dz$, unde D este mărginit de suprafeţele $x=1$, $y=x$, $y=0$, $z=2$, $z=1+x^2+y^2$.

2. Folosind coordonatele cilindrice, să se calculeze integralele:

a) $\iiint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, unde D este mărginit de cilindrul $x^2+y^2=4$, planul $z=1$ şi paraboloidul $z=2+x^2+y^2$;

b) $\iiint\limits_D z^2\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, unde D este mărginit de planele $y=0$, $z=0$, $z=3$, cilindrul $x^2+y^2=2x$ şi $y\geq 0$;

c) $\iiint\limits_D z\,dx\,dy\,dz$, unde D este mărginit de suprafaţa conică $z=\sqrt{x^2+y^2}$ şi planul $z=2$;

d) $\iiint\limits_D x^2y^2(1-2z)\,dx\,dy\,dz$, unde D este mărginit de cilindrul $x^2+y^2=1$, paraboloidul $z=x^2+y^2$ şi planul $z=0$;

e) $\iiint\limits_D x\,dx\,dy\,dz$, unde D este mărginit de suprafaţa conică $x^2=2(y^2+z^2)$, tăiată de planul $x=4$;

f) $\iiint\limits_D (x^2+z^2)dx\,dy\,dz$, unde D este mărginit de paraboloidul $2y=x^2+z^2$, tăiat de planul $y=2$;

g) $\iiint\limits_D \dfrac{x\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}}}$, unde D este mărginit de elipsoidul $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $a>0$, $b>0$, $c>0$.

3. Folosind coordonatele sferice să se calculeze integralele:

a) $\iiint\limits_D x^2\,dx\,dy\,dz$, unde D este mărginit de suprafaţa sferică $x^2+y^2+z^2=R^2$;

b) $\iiint\limits_D xyz\,dx\,dy\,dz$, unde D este mărginit de suprafaţa sferică $x^2+y^2+z^2=1$, tăiată de planele de coordonate $x=0$, $y=0$, $z=0$;

c) $\iiint\limits_D \sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}\,dx\,dy\,dz$, unde D este mărginit de suprafaţa sferică $x^2+y^2+z^2=4$, planul $y=0$ şi $y\geq 0$;

d) $\iiint\limits_D \sqrt{1+(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dx\,dy\,dz$, unde D este mărginit de suprafaţa sferică $x^2+y^2+z^2=1$;

e) $\iiint\limits_D z^2\,dx\,dy\,dz$, unde D este mărginit de suprafeţele sferice $x^2+y^2+z^2=R^2$ şi $x^2+y^2+z^2=4R^2$;

f) $\iiint\limits_D \dfrac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, unde D este mărginit de suprafaţa sferică $z=\sqrt{y-x^2-y^2}$ şi planul $z=0$;

g) $\iiint\limits_D dx\,dy\,dz$, unde D este mărginit de suprafaţa închisă $(x^2+y^2+z^2)^2=27x$;

h) $\iiint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dx\,dy\,dz$, unde D este mărginit de elipsoidul $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $a>0$, $b>0$, $c>0$.

4. Să se calculeze volumul corpului mărginit de:

a) cilindrul parabolic $y=x^2$ și planele $y+z=4$, $z=0$;

b) cilindrul circular $x^2+y^2=9$ și planele $z=1$, $x+y+z=11$;

c) paraboloidul de rotație $z=5-x^2-y^2$, tăiat de planul $z=1$;

d) cilindrul parabolic $z=4-y^2$, planele $x=0$, $y=0$, $z=0$, $2x+3y=6$ și $y\geq 0$;

e) cilindrul circular $x^2+y^2=4$, paraboloidul de rotație $z=x^2+y^2$ și planul $z=0$;

f) suprafața conică $z=\sqrt{x^2+y^2}$ și paraboloidul de rotație $z=x^2+y^2$;

g) suprafața sferică $x^2+y^2+z^2=4$ și suprafața conică $z^2=x^2+y^2$ (înnăuntrul acesteia) ;

h) paraboloidul de rotație $x=y^2+z^2$, tăiat de planul $x=4$;

i) suprafața închisă $(x^2+y^2+z^2)^2=4(x^2+y^2)$;

j) suprafața închisă $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$, $a>0$, $i>0$, $c>0$.

5. După densitatea $\gamma(x,y,z)$ să se calculeze masa corpului mărginit de:

a) planele $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$, dacă $\gamma(x,y,z)=x+y+z$;

b) suprafața sferică $x^2+y^2+z^2=4$ și planele $x=0$, $y=0$, $z=0$, dacă $\gamma(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$;

c) suprafața sferică $x^2+y^2+z^2=32$ și suprafața conică $z=\sqrt{x^2+y^2}$, dacă $\gamma(x,y,z)=y$;

d) suprafața sferică $x^2+y^2+z^2=2z$, dacă $\gamma(x,y,z)=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$;

e) suprafața conică $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$, tăiată de planul $z=0$, dacă $\gamma(x,y,z)=z$.

6. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al corpului D material și omogen ($\gamma(x,y,z)=1$) mărginit de:

a) planele $x+y+z=a$ $(a\neq 0)$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

b) paraboloidul de rotație $2z=4-x^2-y^2$, tăiat de planul $z=0$;

c) paraboloidul de rotație $x=y^2+z^2$, tăiat de planul $x=4$;

d) suprafața sferică $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, tăiată de planul $z=0$.

7. Să se determine momentul de inerție în raport cu planul YOZ al corpului mărginit de planele $x+2y-z=2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, dacă densitatea $\gamma(x,y,z)=x$.

8. Să se calculeze momentul de inerție al unei suprafețe sferice omogene cu densitatea $\gamma(x,y,z)=1$ în raport cu centrul ei.

6.4 Integrale de suprafață.

1. Să se calculeze următoarele integrale de suprafață de speța 1:

a) $\iint_S \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dS$, unde S este porţiunea paraboloidului de rotaţie $z=1-x^2-y^2$, tăiată de planul XOY;

b) $\iint_S \frac{dS}{1+x+z}$, unde S este porţiunea planului $x+y+z=1$, situată în primul octant;

c) $\iint_S (x^2+y^2)\, dS$, unde S este suprafaţa conică $z^2=x^2+y^2$, cuprinsă între planele $z=0, z=1$;

d) $\iint_S x\, dS$, unde S este suprafaţa sferică $x^2+y^2+z^2=R^2$, situată în primul octant;

e) $\iint_S xy\, dS$, unde S este suprafaţa paraboloidului de rotaţie $z=x^2+y^2$, tăiată de planul $z=1$;

f) $\iint_S \sqrt{R^2-x^2-y^2}\, dS$, unde S este suprafaţa sferică $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, tăiată de planul XOY.

2. Să se afle aria suprafeţei:

a) paraboloidului hiperbolic $z=xy$, tăiată de suprafaţa cilindrică $x^2+y^2=1$;

b) conice $4(x^2+y^2)-z^2=0$, cuprinsă între planele $z=0$, $z=2$;

c) paraboloidului de rotaţie $x=1-y^2-z^2$, tăiată de suprafaţa cilindrică $y^2+z^2=1$;

d) sferice $x^2+y^2+z^2=4$, tăiată de suprafaţa cilindrică $x^2+y^2=1$.

3. După densitatea de masă $\gamma(x,y,z)$, să se calculeze masa suprafeţei materiale S:

a) $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $0\le z\le 1$, dacă $\gamma(x,y,z)=z$;

b) $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, dacă $\gamma(x,y,z)=x^2+y^2$;

c) $z=\frac{3}{4}\sqrt{x^2+y^2}$, $0\le z\le 3$ dacă $\gamma(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$;

d) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, dacă $\gamma(x,y,z)=x^2y^2$.

4. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al suprafeţei materiale omogene ($\gamma(x,y,z)=1$):

a) $z=\sqrt{x^2+y^2}$, decupată de cilindrul circular $x^2+y^2=1$;

b) $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

5. Să se calculeze următoarele integrale de suprafaţă de speţa 2:

a) $\iint_S x\,dy\,dz+dx\,dz+xz^2dx\,dy$, unde S este faţa exterioară a suprafeţei sferice $x^2+y^2+z^2=1$, cuprinsă în primul octant;

b) $\iint_S z\,dy\,dz-4y\,dx\,dz+8x^2dx\,dy$, unde S este faţa interioară a paraboloidului de rotaţie $z=x^2+y^2+1$, tăiată de planul $z=2$;

c) $\iint_S x\,dy\,dz+y\,dx\,dz+z\,dx\,dy$, unde S este faţa exterioară a planului $x+2y+z-6=0$, cuprinsă în primul octant;

d) $\iint_S (x+y)\,dy\,dz+(y+z)\,dx\,dz+(z+x)\,dx\,dy$, unde S este faţa exterioară a piramidei triunghiulare mărginită de planele $x=0, y=0, z=0, x+2y+3z=6$.

e) $\iint\limits_S x\,dy\,dz + z^3 dx\,dy$, unde S este fața exterioară a suparfeței sferice $x^2+y^2+z^2=1$;

f) $\iint\limits_S 2x\,dy\,dz - y\,dx\,dz$, unde S este fața exterioară a suprafeței laterale a cilindrului $x^2+y^2=R^2$, $0\le z\le H$, situat în primul octant.

6.6 Formulele Gauss – Ostrogradski și Stokes.

1. Folosind formula Gauss-Ostrogradski, să se calculeze integralele:

a) $\oiint\limits_S (x+y)\,dy\,dz + (y-x)\,dx\,dz + (z-2)\,dx\,dy$, unde S este fața exterioară a corpului mărginit de suprafața conică $x^2+y^2-z^2=0$ și planele $z=0$, $z=1$;

b) $\oiint\limits_S x\,dy\,dz + z^3 dx\,dy$, unde S este fața exterioară a sferei $x^2+y^2+z^2\le 1$;

c) $\oiint\limits_S yz\,dy\,dz + xz\,dx\,dz + xy\,dx\,dy$, unde S este fața exterioară a suprafeței totale a cilindrului $x^2+y^2\le R^2$, $0\le z\le H$;

d) $\oiint\limits_S xz\,dy\,dz + xy\,dx\,dz + yz\,dx\,dy$, unde S este fața exterioară a piramidei triunghiulare fețele căreia sunt planele $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$.

e) $\oiint\limits_S z\,dy\,dz + (3y-x)\,dx\,dz - z\,dx\,dy$, unde S este fața exterioară a corpului mărginit de suprafețele: planul $z=0$, cilindrul $x^2+y^2=1$ și paraboloidul de rotație $z=x^2+y^2+2$;

f) $\oiint\limits_S 3z\,dx\,dy$, unde S este fața exterioară a elipsoidului $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;

g) $\oiint\limits_S x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy$, unde S este fața exterioară a suprafeței totale a cilindrului $x^2+y^2\le R^2$, $0\le z\le H$;

h) $\oiint\limits_S y^2\,dy\,dz + x^2\,dx\,dz + 3z\,dx\,dy$, unde S este fața exterioară a suprafeței sferice $x^2+y^2+z^2=R^2$.

2. Folosind formula Stokes, să se calculeze integralele:

a) $\oint\limits_L z^3 dx + x^3 dy + y^3 dz$, unde L este elipsa formată de la intersecția hiperboloidului cu o pânză $2x^2-y^2+z^2=4$ cu planul $x+y=0$ și parcursă în sens pozitiv;

b) $\oint\limits_L z\,dx + x\,dy + y\,dz$, unde L este circumferința formată de la intersecția suprafeței sferice $x^2+y^2+z^2=R^2$ cu planul $x+y+z=\mathrm{R}$ și parcursă în sens pozitiv;

c) $\oint\limits_L (x^2-yz)\,dx + (y^2-zx)\,dy + (z^2-xy)\,dz$, unde L este circumferința formată de la intersecția paraboloidului de rotație $2z=x^2+y^2$ cu planul $z=2$ și parcursă în sens pozitiv;

d) $\oint\limits_L (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz$, unde L este elipsa formată de la intersecția cilindrului drept $x^2+y^2=1$ cu planul $x+z=1$ și parcursă în sens pozitiv;

e) $\oint_L (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$, unde L este circumferința formată de la intersecția suprafeței sferice $x^2+y^2+z^2=R^2$ cu planul $x+y+z=0$ parcursă în sens negativ.

6.7 Elemente ale teoriei câmpului.

1. Să se determine liniile de nivel ale câmpurilor scalare:

a) $u=\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}}$, $a>0, b>0, c>0$;

b) $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$, $x^2+y^2+z^2\neq 0$;

c) $u=\dfrac{z}{x^2+y^2}$, $x^2+y^2\neq 0$; d) $u=\sqrt{x^2+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{9}}$;

e) $u=\sqrt{\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{25}}$.

2. Să se demonstreze că câmpul vectorial $\vec{a}(M)$ este potențial și folosind formula (1) din 6.7.2, să se calculeze potențialul lui:

a) $\vec{a}(M)=\{x^2-2yz,\ y^2-2xz,\ z^2-2xy\}$;

b) $\vec{a}(M)=\left\{2xz+\dfrac{1}{y},\ -\dfrac{x+z}{y^2},\ x^2+\dfrac{1}{y}\right\}$;

c) $\vec{a}(M)=\{2xy+z,\ x^2-2y,\ x\}$;

d) $\vec{a}(M)=\{yz\cos(xy),\ xz\cos(xy),\ \sin(xy)\}$;

e) $\vec{a}(M)=\left\{yz-xy,\ xz-\dfrac{1}{2}x^2+yz^2,\ xy+y^2z\right\}$.

3. Să se demonstreze că următoarele câmpuri vectoriale sunt armonice:

a) $\vec{a}(M)=\overline{grad\,u}$ *cu* $u(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$;

b) $\vec{a}(M)=\{(yz-2x),\ (xz+2y),\ xy\}$;

c) $\vec{a}(M)=grad\,u$ *cu* $u(x,y,z)=Ax+By+Cz+D$;

d) $\vec{a}(M)=\{y-z,\ z-x,\ x-y\}$;

e) $\vec{a}(M)=\left\{\dfrac{x}{yz},\ \dfrac{y}{xz},\ -\dfrac{(x+y)\ln z}{xy}\right\}$, $x\neq 0,\ y\neq 0,\ z>0$.

4. Să se calculeze fluxul câmpului vectorial:

a) $\vec{a}(M)=\{x^2,\ y^2,\ z^2\}$ prin fața exterioară a cubului $|x|\le a,\ |y|\le b,\ |z|\le c$;

b) $\vec{a}(M)=\{x,\ y,\ -2z\}$ prin fața exterioară a suprafeței sferice $x^2+y^2+z^2=R^2$;

c) $\vec{a}(M)=\{x,\ y,\ z\}$ prin fața exterioară a suprafeței totale a cilindrului drept $x^2+y^2\le R^2$, $0\le z\le H$;

d) $\vec{a}(M)=\{x,\ -2y,\ z\}$ prin fața exterioară a planului $x+2y+3z-6=0$ cuprinsă în primul octant;

e) $\vec{a}(M)=\{xz^2,\ yx^2,\ zy^2\}$ prin fața exterioară a suprafeței sferice $x^2+y^2+z^2=R^2$;

f) $\vec{a}(M)=\{2x,\ y,\ 3z\}$ prin fața exterioară a elipsoidului $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}=1$, cuprins în primul octant;

g) $\vec{a}(M)=\{8x,\ 11y,\ 17z\}$ prin fața exterioară a planului $x+2y+3z=1$, cuprins în primul octant;

h) $\vec{a}(M)=\{x,\ -2y,\ -z\}$ prin fața exterioară a corpului mărginit de paraboloidul de rotație $z=1-x^2-y^2$, tăiat de planul $z=0$.

5. Să se calculeze circulația câmpului vectorial $\vec{a}(M)$ în mod direct și cu ajutorul formulei lui Stokes dacă:

a) $\vec{a}(M)=\{yz,\ 2xz,\ xy\}$ de-a lungul circumferinței formată de la intersecția suprafeței sferice $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$ și a cilindrului circular $x^2+y^2=9$, parcursă în sens pozitiv;

b) $\vec{a}(M)=\{y^3-8yz-z,\ yz-x^3+2x,\ yx^3-2z^3\}$ de-a lungul circumferinței formată de la intersecția paraboloidului de rotație $z=x^2+y^2$ cu planul $z=1$, parcursă în sens pozitiv;

c) $\vec{a}(M)=\{y,\ -x,\ 2\}$ de-a lungul circumferinței formată de la intersecția cilindrului circular $x^2+y^2=4$ cu planul $z=4$, parcursă în sens negativ;

d) $\vec{a}(M)=\{z^2-x^2, x^2-y^2, y^2-z^2\}$ de-a lungul circumferinței formată de la intersecția suprafeței sferice $x^2+y^2+z^2=8$ cu suprafața conică $z=\sqrt{x^2+y^2}$, parcursă în sens pozitiv;

e) $\vec{a}(M)=\{y,\ -2z, x\}$ de-a lungul elipsei formată de la intersecția hiperboloidului cu o pânză $2x^2-y^2+z^2=R^2$ și a planului $y=x$, parcursă în sens pozitiv.

6.9. Indicații și răspunsuri la capitolul 6.

6.1 Integrale ce depind de parametri.

1. a) $\frac{5}{8}$; b) $\frac{1}{2}\ln 2$; c) $\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$; d) $\frac{15}{4}$.

2. a) $\frac{1}{2y}(5e^{-y^5}-3e^{-y^3})$; b) $2(\cos y-1)$;

c) $e^{y\sin y}(\frac{\cos y}{\sin^2 y}-\frac{1}{y})-e^{y\cos y}(\frac{\cos y}{\sin^2 y}-\frac{1}{y})$; d) $\frac{2}{y}\ln(1+y^2)$.

3. a) $\frac{\pi}{2}\ln(y+\sqrt{1+y^2})$; În integrala $I'_y=\int_0^1 f'_y(x,y)dx$ mai întâi facem substituția $x=\sin t$; b) $\frac{\pi}{2}\ln(y+\sqrt{1+y^2})$;

c) $\pi(\sqrt{1+y}-1)$; d) $\pi(\sqrt{1-y^2}-1)$ (a se consulta ex. 3a de mai sus); e) $\ln y$; f) $\pi\arcsin y$.

4. a) $\ln\frac{1+b}{1+a}$ $(\varphi(x)=\int_a^b x^y\,dy)$;

b) $\frac{1}{2}\ln 2$ $\left(\varphi(x)=\cos(\ln 1-\ln x)\frac{x}{\ln x}(x-1)=\cos(\ln x)\frac{x}{\ln x}(x-1)=\right.$ $=\int_1^2 x^y\cos(\ln x)dy$ și $\int_0^1\varphi(x)\,dx=\int_1^2 dy\left[\int_0^1 x^y\cos(\ln x)\,dx\right]$. Integrând de două ori prin părți obținem $\int_0^1 x^y\cos(\ln x)\,dx=\frac{1}{y+1}-\frac{1}{(y+1)^2}\int_0^1 x^y\cos(\ln x)\,dx$. De unde $\left.\int_0^1 x^y\cos(\ln x)\,dx=\frac{y+1}{1+(y+1)^2}\right)$; c) $arctg4-arctg2=arctg\frac{2}{9}$

(a se consulta exemplul precedent cu $\varphi(x)=\int_1^3 x^y\sin(-\ln x)\,dy$ și $\left.\int_0^1 x^y\sin(\ln x)\,dx=\frac{-1}{1+(y+1)^2}\right)$;

d) $arctg(a+1)-arctg(b+1)=arctg\frac{a-b}{1+(a+1)(b+1)}$,

$\left(\varphi(x)=\int_a^b x^y\sin(\ln x)dy\right.$ și $\int_0^1\varphi(x)\,dx=\int_0^1 dx\int_a^b x^y\sin(\ln x)\,dy=$ $\left.=\int_a^b dy\int_0^1 x^y\sin(\ln x)\,dx=-\int_a^b\frac{dy}{1+(1+y)^2}\right)$

5. a) $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$; b) $\dfrac{\pi}{n\sin\dfrac{\pi}{n}}$; c) $\Gamma(p+1)$; d) $\dfrac{\pi}{5\sin 72^\circ}$.

6.2 Integrale curbilinii.

1. a) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}(b^3-a^3)$; b) $\dfrac{\pi^2}{16}-\dfrac{1}{2}\ln 2+\dfrac{3\pi}{4}$; c) $\dfrac{8}{3}$;

d) $\dfrac{3}{280}$; e) $\dfrac{19}{3}$; f) $\dfrac{1}{3}\left[\sqrt{(1+\pi^2)^3}-1\right]$; g) $\dfrac{16\sqrt{2}}{143}$;

h) $\dfrac{2\pi}{3}\sqrt{a^2+b^2}(3a^2+4\pi^2b^2)$; i) 12 $\left(AB:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{2}\right.$ *sau* $\left. x=1+t,\ y=2t,\ z=1+2t,\ t\in[t_A,t_B]=[0,1],\ dl=3dt\right)$.

2. a) $-\dfrac{56}{15}$ și $-\dfrac{40}{3}$; b) $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{12}, \dfrac{17}{30}, -\dfrac{1}{20}$; c) 5; d) 0 și -4π;

e) $\dfrac{29}{12}$($\gamma=AD+DB$ cu $D(-1,0)$ și $AD: y=0,\ x\in[-2,-1]$, $DB: x=\cos t$, $y=\sin t,\ t\in[\pi,0]$); f) $-\dfrac{1}{2}$ $\Big(P'_y(x,y)=Q'_x(x,y)=2\sin 2x, u(x,y)=$

$=\displaystyle\int_0^x 0\cdot\sin 2x\,dx-\int_0^y \cos 2x\,dy=y\cos 2x;\ I=\int_{(A)}^{(B)} du(x,y)=$

$=u(x,y)\Big|_A^B=-\dfrac{1}{2}\Big)$; g) 2 (a se consulta ex. precedent: $u(x,y)=y(x-1)e^x$); h) $-\pi$; i) 13 $\left(AB:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}\right.$

și $\left. x=1+t,\ y=1+2t,\ z=1+3t,\ t\in[0,1]\right)$; j) $\dfrac{3}{2}$.

3. a) $sh1=\dfrac{e^2-1}{2e}$; b) $\ln tg\dfrac{3\pi}{8}=\ln ctg\dfrac{\pi}{8}=\ln(1+\sqrt{2})$,

$\left(ctg2\cdot\dfrac{\pi}{8}=ctg\dfrac{\pi}{4}=1\Rightarrow \dfrac{\cos2\cdot\dfrac{\pi}{8}}{\sin2\cdot\dfrac{\pi}{8}}=1\Rightarrow\dfrac{\cos^2\dfrac{\pi}{8}-\sin^2\dfrac{\pi}{8}}{2\sin\dfrac{\pi}{8}\cdot\cos\dfrac{\pi}{8}}=\right.$

$\left.=1\Rightarrow\dfrac{ctg^2\dfrac{\pi}{8}-1}{2ctg\dfrac{\pi}{8}}=1\Rightarrow ctg^2\dfrac{\pi}{8}-2ctg\dfrac{\pi}{8}-1=0,\ ctg\dfrac{\pi}{8}=1+\sqrt{2}\right)$

c) $dl=3(1+2t^2)dt$; d) $a\sqrt{3}(e-1)(dl=a\sqrt{3}e^t dt)$.

4. a) $\dfrac{19}{3}$; b) 1 $\left(\displaystyle\int_0^a\frac{1}{y}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^a\frac{dx}{a}=1\right)$; c) $\dfrac{\pi^2}{16}-\dfrac{1}{2}\ln 2$;

d) $\dfrac{166}{15}$.

6.3. Integrale duble.

1. a) $\ln\dfrac{5}{4}$; b) $-\ln(1+\sqrt{6})$;

c) $\dfrac{32}{45}\left(\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}y^2dy=\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^2\,dx\right)$; d) $\dfrac{33}{140}$;

e) $\dfrac{9}{4}$; f) $\dfrac{92}{75}$ (se integrează mai întâi în raport cu x și pe urmă în raport cu y); g) 6 (se integrează mai întâi în raport cu x și pe urmă în raport cu y).

2. a) $\frac{31}{5}\pi^6$ (trecem la coordonatele polare cu $\theta\in[0,2\pi]$, $\rho\in[\pi,2\pi]$); b) $\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3}$ ($x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, $\theta\in[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$, $1\le\rho\le 2\cos\theta$); c) $\frac{R^4}{8}$; d) $\frac{122\pi}{3}$; e) $2\pi ab$ (trecem la coordonatele polare generalizate); f) $\frac{2}{9}(2\sqrt{2}-1)\ln 2$ (trecem la coordonatele curbilinii: $y^2=ux$, $xy=v \Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{v^2}{u}}$, $y=\sqrt[3]{uv}$, $I=-\frac{1}{3u}$, $u\in[1,2]$, $v\in[1,2]$); g) $\frac{15}{4}$ ($x+y=v$, $x-y=u \Rightarrow x=\frac{1}{2}(u+v)$, $y=\frac{1}{2}(v-u)$, $I=\frac{1}{2}$, $u\in[-2,1]$, $v\in[-2,3]$); h) $\frac{7}{9}$ (a se consulta ex. f) de mai sus).

3. a) $\frac{15}{2}-8\ln 2$; b) $\frac{7}{120}$; c) $\frac{16}{3}\sqrt{15}$; d) πab (trecem la coordonatele polare generalizate); e) $\frac{3}{8}\pi a^2$ (trecem la coordonatele curbilinii: $x=r\cos^3 t$, $y=r\sin^3 t$, $r\in[0,a]$, $t\in[0,2\pi]$ şi $I=3r\sin^2 t\cos^2 t$); f) $\frac{3}{4}\pi$ (trecem la coordonatele polare: $S=4\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{\sqrt{\cos^4\theta+\sin^4\theta}}\rho d\rho$); g) $\frac{7\pi}{512}$ (trecem la coordonatele polare cu $0\le\rho\le\cos\theta\sin^4\theta$, $\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, deoarece $x\ge 0$);

h) $\frac{\pi}{2}ab(a^2+b^2)$, (trecem la coordonatele polare generalizate);

i) $\frac{\pi}{2}\frac{a^3b}{c^2}$ (trecem la coordonate polare generalizate).

4. a) $2(\pi-2)$; b) 40π; c) $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$; d) $\pi\sqrt{2}$.

5. a) $\frac{1}{8}(13-16\ln 2)$; b) $\frac{8}{3}$; c) $2\pi R$;

d) $\left(M=\int_{-2}^{2}\sqrt{4-2x}\,dx\int_0^{\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}}dy\right)$.

6.4 Integrale triple.

1. a) $\frac{1}{2}(\ln 2-\frac{5}{8})$; b) $\frac{a^3h}{6}$; c) $\frac{(abc)^2}{8}$ (a se folosi formula 3 din 6.4.2);
d) $\frac{3\pi}{2}$; e) $\frac{\pi}{32}$; f) $\frac{16}{15}$; g) $-\frac{11}{60}$.

2. a) $\frac{272\pi}{15}$; b) 8; c) π; d) $\frac{\pi}{160}$;

e) 32π ($x=x$, $y=\rho\cos\theta$, $z=\rho\sin\theta$, $\theta\in[0,2\pi]$, $\rho\in[0,\sqrt{8}]$);

f) $\frac{16\pi}{3}$ ($x=\rho\cos\theta$, $z=\rho\sin\theta$, $y=y$, $\theta\in[0,2\pi]$, $\rho\in[0,2]$);

g) 0 ($x=a\rho\cos\theta$, $y=b\rho\sin\theta$, $z=z$, $\theta\in[0,2\pi]$, $\rho\in[0,1]$).

3. a) $\frac{4\pi R^5}{15}$; b) $\frac{1}{48}$; c) $\frac{64\pi}{3}$; d) $\frac{8}{9}\pi(2\sqrt{2}-1)$; e) $\frac{124\pi}{15}$;

f) $\frac{\pi}{6}$ ($\theta\in[0,\pi]$, $\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $0\le r\le\sin\theta\sin\varphi$, $I=r^2\sin\varphi$);

g) 9π $(\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}], \varphi\in[0,\pi], 0\le r\le 3\sqrt[3]{\sin\varphi\cos\theta}, I=r^2\sin\varphi)$;

h) $\frac{\pi^2}{4}abc$ $(x=ar\sin\varphi\cos\theta,\ y=ar\sin\varphi\sin\theta,\ z=cr\cos\varphi,$
$I=r^2abc\sin\varphi,\ \theta\in[0,2\pi],\ \varphi\in[0,\pi],\ r\in[0,1]$.

4. a) $\frac{256}{15}$; b) 90π; c) 8π; d) 10; e) 8π; f) $\frac{\pi}{6}$;

g) $\frac{16\pi}{3}(2-\sqrt{2})$ $(x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,\ z=z,\ \theta\in[0,2\pi],$
$\rho\in[0,\sqrt{2}],\ I=\rho;\ V=2V_1)$; h) 8π $(x=x,\ y=\rho\sin\theta,$
$z=\rho\cos\theta,\ I=\rho,\ \theta\in[0,2\pi],\ \rho\in[0,2],\ \rho^2\le x\le 4)$;

i) $2\pi^2$ $(x=r\sin\varphi\cos\theta,\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\ z=r\cos\varphi,$
$I=r^2\sin\varphi,\ \theta\in[0,2\pi],\ \varphi\in[0,\pi],\ 0\le r\le 2\sin\varphi)$;

j) $\frac{\pi^2}{4}abc(V=8V_1,\ x=ar\sin\varphi\cos\theta,\ y=rb\sin\varphi\sin\theta,\ z=rc\cos\varphi,$
$I=abcr^2\sin\varphi,\ \theta\in[0,\frac{\pi}{2}],\ \varphi\in[0,\frac{\pi}{2}],\ 0\le r\le \sin\varphi)$.

5. a) $\frac{3}{2}$; b) $\frac{16\pi}{5}$ (trecem la coordonatele sferice);

c) 128π $(x=\rho\cos\theta,\ z=\rho\sin\theta,\ y=y,\ \theta\in[0,2\pi],\ \rho\le y\le\sqrt{32-\rho^2},$
$\rho\in[0,4])$;

d) 2π $(x=r\sin\varphi\cos\theta,\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\ z=r\cos\varphi,$
$I=r^2\sin\varphi,\ \theta\in[0,2\pi],\ \varphi\in[0,\frac{\pi}{2}],\ 0\le r\le 2\cos\varphi)$;

e) $\frac{8}{3}\pi$ $(x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,\ z=z,\ \theta\in[0,2\pi],$
$\rho\in[0,2],\ 0\le z\le 2-\rho)$

6. a) $\left(\frac{1}{4}a,\frac{1}{4}a,\frac{1}{4}a\right)$ b) $\left(0,0,\frac{2}{3}\right)$ c) $\left(\frac{16}{5},0,0\right)$;
d) $\left(0,0,\frac{3}{8}R\right)$ **7.** $\frac{4}{15}$. **8.** $\frac{4\pi R^5}{5}$.

6.5 Integrale de suprafaţă.

1. a) 3π; b) $\sqrt{3}(1-\ln 2)$; c) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$; d) $\frac{\pi R^3}{4}$; e) 0; f) πR^3.

2. a) $\frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$; b) $\pi\sqrt{5}$;

c) $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)\left(S=\iint_S dS=\iint_{D_{yoz}}\sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}\,dydz=\right.$
$\left.=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho\right)$.

d) $8\pi(2-\sqrt{3})$ $\left(S=2S_1=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{2\rho}{\sqrt{4-\rho^2}}d\rho\right)$

3. a) $\frac{2\pi}{15}(6\sqrt{3}+1)$; b) $\frac{4\pi R^4}{3}$; c) $\frac{160\pi}{3}$; d) $\frac{128\pi}{15}$.

4. a) $\left(0,0,\frac{2}{3}\right)$ b) $\left(0,0,\frac{R}{2}\right)$

5. a) $\frac{25\pi+8}{60}$; b) 4π; c) 54; d) 18; e) $\frac{32\pi}{15}$;

f) $\frac{\pi R^2H}{4}$ $\left(\int_0^R dy\int_0^H 2\sqrt{R^2-y^2}\,dz-\int_0^R dx\int_0^H\sqrt{R^2-x^2}\,dz\right)$

6.6 Formulele Gauss-Ostrogradski și Stokes.

1. a) π; b) $\dfrac{32\pi}{15}$; c) 0; d) $\dfrac{1}{8}$; e) 5π; f) 4π abc;

g) $3\pi R^2 H$; h) $4\pi R^3$.

2. a) 24π $\left(\overrightarrow{rot\, a(M)} = \{3y^2, 3z^2, 3x^2\},\ \vec{n} = \left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\},\right.$

$$\left. D_{XOZ} = \Pr_{XOZ} S : \begin{cases} 2x^2 - y^2 + z^2 \le 4 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow x^2 + z^2 \le 4 \right);$$

b) $\dfrac{2\pi R^2\sqrt{3}}{3}$ $\left(\overrightarrow{rot\, a(M)} = \{1,1,1\},\ \vec{n} = \left\{\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\},\right.$ -

$$\left. \sqrt{3}\iint_S dS = \sqrt{3}\pi r^2,\ r^2 = R^2 - d^2,\ d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{R}{\sqrt{3}} \right);$$

c) 0 $\left(\overrightarrow{rot\, a(M)} = \vec{0}\right)$; d) 0 $\left(\overrightarrow{rot\, a(M)} = \vec{0}\right)$;

e) $2\sqrt{3}\pi R^2$ $\left(\overrightarrow{rot\, a(M)} = \{-2,-2,-2\},\ \vec{n} = \left\{\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}\right.$

și $\left. I = -2\sqrt{3}\iint_{S^{(-)}} dS = +2\sqrt{3}\iint_{S^{(+)}} dS = 2\sqrt{3}\cdot\pi R^2\right)$.

6.7 Elemente ale teoriei câmpului.

1. a) familia de elipsoizi cu centrul în origine și semiaxele ak, bk, ck unde k orice număr real pozitiv;

b) sfere concentrice: $x^2 + y^2 + z^2 = e^c$, unde c orice număr real;

c) familia de paraboloizi de rotație $z = c(x^2 + y^2)$, unde c orice număr real diferit de 0. Dacă c = 0, suprafața de nivel coincide cu planul XOY;

d) familia de hiperboloizi cu o pânză: $\dfrac{x^2}{c^2} + \dfrac{y^2}{(2c)^2} - \dfrac{z^2}{(3c)^2} = 1$ cu axa de simetrie OZ și c orice număr pozitiv;

e) familia de hiperboloizi cu două pânze $\dfrac{x^2}{(2c)^2} - \dfrac{y^2}{(3c)^2} - \dfrac{z^2}{(5c)^2} = 1$ cu axa de simetrie OX și vârfurile $(\pm 2c, 0, 0)$ și c orice număr real pozitiv.

2. a) $\dfrac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - 2xyz + C$; b) $x^2 z + \dfrac{x+z}{y} + C$;

c) $x^2y - y^2 + xz + C$; d) $z\sin(xy) + C$; e) $xyz - \dfrac{1}{2}x^2y + \dfrac{1}{2}y^2z^2 + C$.

4. a) $16abc$; b) 0 $\left(div\, \overline{a(M)} = 0\right)$; c) $3\pi R^2$; d) 36; e) $\dfrac{4\pi R^5}{5}$; f) 24π; g) 1; h) $-\pi$.

5. a) 36π $\left(\overrightarrow{rot\, a(M)} = \{-x, 0, z\},\ \vec{n} = \vec{k}\right)$;

b) $\dfrac{17}{2}\pi$ $\left(\overrightarrow{rot\, a(M)} = \{x^3 - y, -(3yx^2 + 8y + 1), 2 - 3x^2 - 3y^2 + 8z\},\right.$ $\left.\vec{n} = \vec{k}\right)$;

c) 8π $\left(\overrightarrow{rot\, a(M)} = \{0, 0, -2\},\ \vec{n} = \vec{k}\right)$;

d) 0 $\left(\overrightarrow{rot\, a(M)} = \{2y, 2z, 2x\},\ \vec{n} = \vec{k}\right)$;

e) 3π $R^2\left(x = y = R\cos t,\ z = R\sin t,\ t \in [0, 2\pi]\right)$.

Capitolul 7

Ecuaţii diferenţiale ordinare

Ecuaţiile diferenţiale ocupă un loc important în matematică. Cercetarea prin metode matematice a celor mai diverse fenomene, ce au loc în natură, ne conduce deseori la rezolvarea unor ecuaţii care exprimă o relaţie dintre o funcţie necunoscută, derivatele ei şi variabilele independente (argumentele funcţiei). Astfel de ecuaţii se numesc *ecuaţii diferenţiale*. Problema fundamentală a teoriei ecuaţiilor diferenţiale constă în studierea funcţiilor care reprezintă soluţiile acestor ecuaţii. Ecuaţiile diferenţiale pot fi clasificate în ecuaţii diferenţiale ordinare, dacă necunoscuta este funcţie de o singură variabilă şi în ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale, dacă necunoscuta este funcţie de două şi mai multe variabile.

Teoria ecuaţiilor diferenţiale cu derivatele parţiale are un caracter mai complicat şi se analizează în cursuri mai complete sau în cursuri speciale ale matematicii (de exemplu ecuaţiile fizicii matematice etc.) (a se consulta [3], cap. 21, [9], v.2, cap.7).

În capitolul de faţă vom expune elemente ale teoriei ecuaţiilor diferenţiale ordinare. În cele ce urmează termenul „ecuaţii diferenţiale" va însemna numai ecuaţii diferenţiale ordinare.

7.1. Ecuaţii diferenţiale de ordinul 1

7.1.1. Noţiuni generale

Relaţia de forma

$$F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0\,, \qquad (1)$$

unde $F: R^{n+2}\to R$ este o funcţie reală care depinde de argumentele: variabila reală $x\in I\subseteq R$, funcţia reală necunoscută y de argumentul x şi derivatele ei $y',y'',\dots,y^{(n)}$, se numeşte *ecuaţie diferenţială*. Dacă derivata de ordinul cel mai mare $y^{(n)}$ intră efectiv în ecuaţia diferenţială, zicem că *ecuaţia diferenţială (1) este*

de ordinul n. Dacă ecuaţia (1) se poate rezolva în raport cu $y^{(n)}$, avem:

$$y^{(n)}=f(x,y,y',y'',\dots,y^{(n-1)})\,, \qquad (2)$$

unde funcţia reală f de argumentele $x, y,\dots, y^{(n)}$ este definită pe o mulţime din spaţiul R^{n+1}. Ecuaţia de forma (2) se mai numeşte *ecuaţie în formă normală*.

Dacă $n=1$, ecuaţia (1) se numeşte *ecuaţie diferenţială de ordinul* 1. Dacă n = 2, 3, ..., ecuaţia (1) se numeşte *ecuaţie diferenţială de ordin superior*.

În cele ce urmează vom considera numai ecuaţii diferenţiale de ordinul 1.

Evident că forma generală a ecuaţiei diferenţiale de ordinul 1 este:

$$F(x,y,y')=0\,, \qquad (3)$$

unde funcţia reală F de argumentele: variabila reală $x\in I\subseteq R$, funcţia reală necunoscută y de argumentul x şi derivata ei y' este definită pe o mulţime oarecare V din spaţiul euclidian tridimensional R^3, iar forma normală a ecuaţiei (3) este:

$$\frac{dy}{dx}=y'=f(x,y)\,, \qquad (4)$$

unde funcţia reală f de variabilele x şi y este definită pe o mulţime oarecare D din spaţiul euclidian bidimensional R^2.

Dacă $f(x_0,y_0)=\infty$, atunci într-o vecinătate oarecare a punctului (x_0,y_0) din D, paralel cu ecuaţia (4), vom considera ecuaţia inversă a ei:

$$\frac{dx}{dy}=x'=\frac{1}{f(x,y)}\,, \qquad (4^*)$$

unde funcţia necunoscută este variabila x, iar argumentul ei este variabila y. Orice ecuaţie diferenţială de ordinul 1 în formă normală poate fi scrisă întotdeauna sub aşa-numita *formă diferenţială*:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0\,, \qquad (5)$$

unde $P(x,y)$, $Q(x,y)$ sunt definite pe mulţimea $D \subseteq R^2$. Într-adevăr, dacă de exemplu avem (4), atunci $dy = f(x,y)\cdot dx$. De unde $f(x,y)dx - dy = 0$ cu $P(x,y) = f(x,y)$ şi $Q(x,y) = -1$, definite pe D. Invers, fiecare ecuaţie de forma (5), cu $Q(x,y) \neq 0$ (sau $P(x,y) \neq 0$), poate fi rezolvată în raport cu derivata $\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ sau respectiv $\frac{dx}{dy} = -\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$, adică poate fi scrisă sub forma (4) sau (4*) cu $f(x,y) = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$.

Forma diferenţială (5) este o formă simetrică şi este comodă prin faptul că variabilele x şi y pot avea aceleaşi roluri, adică fiecare dintre ele poate fi considerată funcţie de cealaltă.

Definiţia 1. Se numeşte *soluţie* sau *integrală* a ecuaţiei diferenţiale (3) orice funcţie $y = \varphi(x)$, $x \in I$, care fiind substituită în această ecuaţie, o transformă în identitate.

Graficul soluţiei ecuaţiei (3) este o curbă plană continuă, numită *curbă integrală*. Constatăm că în fiecare punct al curbei integrale există tangenta la această curbă.

În unele cazuri soluţia ecuaţiei (3) poate fi definită în formă implicită (de o relaţie $\phi(x,y) = 0$) sau în formă parametrică (de ecuaţiile $x = p(t)$, $y = s(t)$, $t \in I \subseteq R$).

Pe parcurs, vorbind despre soluţiile ecuaţiei (4) vom subînţelege atât soluţiile ecuaţiei directe (4), cât şi soluţiile ecuaţiei inverse (4^*).

După cum se ştie, una din problemele fundamentale ale calculului integral al funcţiei de o singură variabilă reală constă în restabilirea funcţiei $y = \varphi(x)$, $x \in I \subseteq R$, când este dată derivata ei. Prin urmare, această problemă ne conduce la rezolvarea ecuaţiei diferenţiale $y' = f(x)$, unde $f(x)$ este o funcţie reală de argumentul real $x \in I$, care este un caz particular al ecuaţiei (4).

După cum se ştie (a se consulta [20], cap.4), soluţia acestei ecuaţii coincide cu mulţimea tuturor primitivelor funcţiei $f(x)$. Dacă $f(x)$ este continuă pe $I \subseteq R$, atunci soluţiile ecuaţiei $y' = f(x)$ au forma:

$$y = \int f(x)dx + C = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + C\,, \qquad (6)$$

unde x_0 este un punct fix din I, iar C – o constantă arbitrară reală. Dacă căutăm soluţia care pentru $x = x_0 \in I$ să ia valoarea $y_0 = \varphi(x_0)$, avem:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)dt\,. \qquad (7)$$

Formula (7) ne arată că pentru orice punct $(x_0, y_0) \in R^2$, $x_0 \in I$ există o soluţie unică a ecuaţiei $y' = f(x)$, $x \in I$, care satisface condiţia $y_0 = \varphi(x_0)$, sau, altfel spus, prin orice punct $(x,y) \in R^2$, $x \in I$, trece o curbă integrală a ecuaţiei date şi numai una.

La rezolvarea ecuaţiilor de forma $y' = f(x)$ ne conduc şi multe probleme din mecanică. De exemplu, aflarea legii mişcării unui punct material, dacă se ştie viteza lui; aflarea legii mişcării unui punct material şi viteza lui, dacă se cunoaşte forţa de acţiune sau, ceea ce este echivalent, conform legii a doua a lui Newton, dacă se ştie acceleraţia mişcării acestui punct.

Trecem acum la interpretarea geometrică a ecuaţiei (4).

Fie funcţia $f(x,y)$ definită pe o mulţime D din planul XOY. Fiecărui punct $(x_0, y_0) \in D$ îi corespunde o direcţie de coeficient unghiular $y_0' = f(x_0, y_0)$. Fiecărei direcţii îi corespunde o dreaptă $y - y_0 = y_0'(x - x_0)$ ce trece prin punctul dat. Prin urmare, ecuaţia (4) asociază fiecărui punct dat din D o direcţie (o dreaptă). Astfel am obţinut un câmp ϕ de direcţii pe mulţimea D. Să presupunem acum că $y = \varphi(x)$, $(x,y) \in D$ este o soluţie a ecuaţiei (4). Graficul acestei soluţii este o curbă integrală în D, care este continuă şi are tangentă în orice punct al ei. Curba $y = \varphi(x)$ are proprietatea că în fiecare punct al ei, tangenta la curbă are ca direcţie direcţia câmpului ϕ ce trece prin punctul considerat.

Prin urmare, a defini ecuaţia $y' = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, înseamnă a defini în D câmpul de direcţii ϕ. A găsi o soluţie a acestei ecuaţii înseamnă a afla o curbă, tangenta la care, în fiecare punct al ei, coincide cu direcţia câmpului ϕ în punctul considerat. Astfel de curbe integrale vor fi multe – o familie întreagă (construcţia poate fi începută din fiecare punct al mulţimii D) (vezi fig. 1).

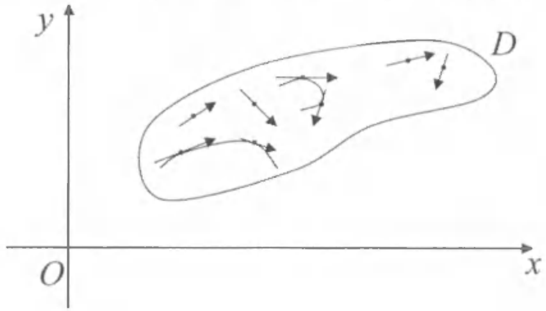


Fig. 1.

Exemplul 1. Să se afle soluţiile ecuaţiei diferenţiale $y' = -1$, $x \in R$.

Funcţia $f(x, y) = -1$ este definită pretutindeni, deci câmpul de direcţii ϕ al acestei ecuaţii ocupă tot planul XOY şi este format din direcţii paralele la bisectoarea a 2-a ($y = -x$) (vezi fig. 2.). Curbele integrale sunt drepte paralele cu această bisectoare. Ecuaţia tuturor acestor drepte, conform formulei (6), este:

$$y = \int f(x)dx + C = \int (-1)dx = -x + C,$$

unde $x \in R$ şi C este o constantă arbitrară.

Orice dreaptă paralelă cu dreapta $y = -x$ este o soluţie a ecuaţiei $y' = -1$. Deci, dreptele $y = -x + 2$ ($C = 2$), $y = -x$ ($C = 0$), $y = -x - 1$ ($C = -1$), $y = -x - 2$ ($C = -2$) sunt soluţii ale ecuaţiei date.

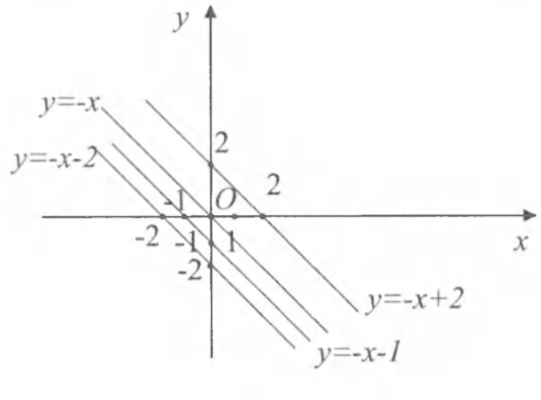


Fig. 2.

Exemplul considerat mai sus precum şi interpretarea geometrică a ecuaţiilor diferenţiale de forma (4) confirmă că ecuaţiile diferenţiale de ordinul 1 au, în general, nu o singură soluţie, ci o infinitate de soluţii. Pentru a separa din această mulţime infinită de soluţii o soluţie oarecare, de obicei, se indică valoarea y_0, ce trebuie s-o primească funcţia căutată $y = \varphi(x)$, $x \in I$, $(x, y) \in D$ pentru o anumită valoare $x_0 \in I$ a argumentului x. Perechea de numere $(x_0, y_0) \in D$ poartă denumirea de *condiţii iniţiale* (sau *condiţii Cauchy*) ale soluţiei ecuaţiei date pe mulţimea D şi se scriu în felul următor:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0 \text{ sau } (x_0, y_0). \tag{8}$$

Din punct de vedere geometric, definirea condiţiilor iniţiale este echivalentă cu indicarea unui punct (x_0, y_0) – a „punctului iniţial" din D, prin care trece curba integrală $y = \varphi(x)$.

Aflarea soluției ecuației (4), ce satisface condițiile inițiale date (5), este una din cele mai importante probleme ale teoriei ecuațiilor diferențiale. Această problemă poartă denumirea de *problema Cauchy*. Firește că apare întrebarea: există oare întotdeauna o soluție a problemei Cauchy și, dacă există, va fi ea oare unică? Răspuns la aceste întrebări ne dau următoarele teoreme:

Teorema Cauchy. Fie ecuația diferențială (4) definită pe un domeniu compact D (în sensul definiției 9 și 11 din 5.1.3.). Dacă funcția $f(x,y)$ împreună cu derivata ei parțială $f_y'(x,y)$ sunt continue pe D, atunci prin orice punct interior (x_0,y_0) al domeniului D trece o singură curbă integrală $y=\varphi(x)$, definită într-o vecinătate a punctului x_0 care satisface condițiile inițiale $\varphi(x_0)=y_0$.

Teorema Picard ((1856–1941) – matematician francez). Fie ecuația diferențială (4) definită pe un domeniu D. Dacă funcția $f(x,y)$ este continuă pe D, și derivata ei parțială $f_y'(x,y)$ este mărginită pe D, atunci prin orice punct interior (x_0,y_0) al domeniului D trece o singură curbă integrală $y=\varphi(x)$, definită într-o vecinătate oarecare a punctului x_0 și care satisface condițiile inițiale $\varphi(x_0)=y_0$.

De obicei, în teorema Picard condiția: „$f_y'(x,y)$ **este mărginită pe** D” este înlocuită printr-o condiție mai generală, numită *condiția Lipschiz* ((1832–1903) – matematician german): **„funcția** ***f satisface condiția Lipschiz în raport cu y*** **”** ceea ce înseamnă: există un număr A>0 astfel încât pentru orice două puncte $(x,y_1)\in D$, $(x,y_2)\in D$ are loc inegalitatea:

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)\leq A(y_1-y_2|.$$

Teorema Peano ((1858 – 1932) – matematician italian). Fie ecuația diferențială (4) definită pe domeniul închis D. Dacă funcția $f(x,y)$ este continuă pe D, atunci prin orice punct interior al domeniului D trece cel puțin o curbă integrală a acestei ecuații.

Demonstrația acestor teoreme le puteți găsi în [28], cap.5; [25]; [26]; [4], cap.12, §1; [1], cap.16, §27, §28 etc.

Teoremele Cauchy și Picard stabilesc existența și unicitatea soluției ecuației diferențiale (4), iar teorema Peano – numai existența soluției acestei ecuații diferențiale. Matematicianul rus M. A. Lavrientiev (1900 – 1980) în [27] a demonstrat că în cazul teoremei lui Peano unicitatea soluției ecuației (4) în orice punct interior din D nu se menține. Petrovski ((1901 – 1973) – matematician rus) în [26] a demonstrat că cu anumite restricții unicitatea soluției ecuației (4) poate fi menținută în teorema Peano, punând la bază așa-numitul principiu al aplicaților de contracție. Acest principiu a simplificat cu mult demonstrația teoremei despre existența și unicitatea soluției ecuației diferențiale de ordinul 1.

Din teoremele Cauchy și Picard rezultă că în domeniul D ecuația (4) are o infinitate de soluții. Într-adevăr, socotind x_0 constant și variind y_0 astfel încât punctul (x_0,y_0) să fie un punct interior al domeniului D, obținem pentru fiecare valoare y_0 soluția sub forma $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ (a se consulta formula (7)).

Introducem acum următoarele noțiuni fundamentale.

Definiția 2. Funcția $y=\varphi(x,C)$, unde C este o constantă arbitrară, se numește **soluție generală** a ecuației (3) pe mulțimea D a planului XOY, dacă ea este soluție a ecuației (3) pentru orice valoare a constantei C, inclusiv $C=\pm\infty$ (sau pentru orice valoare a lui C dintr-o mulțime oarecare din R) și dacă pentru orice condiții inițiale $(x_0,y_0)\in D$ există o valoare unică $C=C_0$ a constantei astfel încât funcția $\varphi(x,C_0)$ satisface condițiile inițiale (8), adică $\varphi(x,C_0)=y_0$.

Deseori în procesul aflării soluției generale a ecuației (3) obținem o relație de forma

$$\phi(x,y,C)=0 \quad \text{sau} \quad \phi(x,y)=C, \tag{9}$$

care nu-i rezolvată în raport cu y. Rezolvând această ecuaţie în raport cu y, obţinem soluţia generală. Însă nu întotdeauna din (9) e posibil de a exprima y în funcţii elementare. În aceste cazuri soluţia generală se păstrează în forma implicită (9). Astfel relaţia (9), care defineşte soluţia generală în mod implicit, se numeşte *integrală generală* a ecuaţiei (3).

Soluţia generală a ecuaţiei (3) poate fi dată şi în formă parametrică:

$$\begin{cases} x = h(t, C) \\ y = s(t, C),\ t \in I \subseteq R \end{cases} \tag{10}$$

Definiţia 3. Se numeşte *soluţie particulară* a ecuaţiei (3) orice funcţie $y = \varphi(x, C_0)$, care se obţine din soluţia generală $y = \varphi(x, C)$ a ecuaţiei (3), dacă constantei arbitrare C i se atribuie o valoare determinată $C = C_0$, inclusiv $C = \pm\infty$.

Relaţia $\phi(x, y, C_0) = 0$ sau $\phi(x, y) = C_0$ se numeşte în acest caz integrală particulară a ecuaţiei (3).

Ecuaţia $y' = -1$ din exemplul 1 de mai sus are soluţia generală $y = -x + C$, $x \in R$. Prin urmare, soluţia generală a ecuaţiei date reprezintă o familie de drepte paralele bisectoarei a doua a axelor de coordonate (vezi fig. 2). Pe fig. 2 sunt reprezentate curbele particulare ale acestei familii ce corespund anumitor valori ale parametrului $C: C = -2$, $C = -1, C = 0$, şi $C = 2$. Observăm că condiţiile iniţiale ale acestor soluţii particulare sunt respectiv punctele (–2,0), (–1,0), (0,0) şi (2,0).

Aşadar, mulţimea soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale de ordinul 1 depinde de o constantă arbitrară. Putem arăta imediat, însă, că are loc şi afirmaţia reciprocă: orice familie de curbe plane

$$\varphi(x, y, C) = 0,\ (x, y) \in D \tag{11}$$

cu $\varphi, \varphi'_x, \varphi'_y$ continue pe D, verifică în D o ecuaţie diferenţială de ordinul 1.

Într-adevăr, derivând relaţia (11) în raport cu x, avem:

$$\varphi'_x + y' \cdot \varphi'_y = 0. \tag{12}$$

Eliminând parametrul C din (11) şi (12), obţinem: $\phi(x, y, y') = 0$, adică o ecuaţie diferenţială de ordinul 1. Această eliminare se face imediat dacă scriem ecuaţia (11) sub forma

$$g(x, y) = C, \tag{13}$$

adică rezolvând-o în prealabil în raport cu C. Dacă derivăm pe (13) în raport cu x, constanta C se elimină şi avem:

$$g'_x + g'_y \cdot y' = 0, \tag{14}$$

care este ecuaţia diferenţială, verificată de familia (13). Ecuaţia (14) se mai scrie sub formă simetrică astfel: $g'_x \cdot dx + g'_y \cdot dy = 0$, care are avantajul că nu specifică dacă x sau y este variabilă independentă.

Exemplul 2. Să se afle ecuaţia diferenţială a familiei de curbe plane $y = \cos(x + C)$, $C \in R$.

Derivând ecuaţia $y = \cos(x - C)$ în raport cu x, avem: $y' = -\sin(x + C)$ şi eliminând parametrul C din relaţiile $y = \cos(x + C)$, $y' = -\sin(x + C)$, obţinem ecuaţia diferenţială căutată: $y^2 + (y')^2 = 1$, $(x, y) \in R^2$.

Fie ecuaţia diferenţială (4) şi D domeniul de definiţie al funcţiei $f(x, y)$. Vom numi punctul interior (x_0, y_0) din D *punct ordinar* al ecuaţiei (4), dacă există o vecinătate a acestui punct în care sunt satisfăcute condiţiile teoremei lui Cauchy. Astfel, prin fiecare punct ordinar al ecuaţiei (4) trece o singură curbă integrală.

Problema lui Cauchy pusă pentru un punct ordinar al ecuaţiei (4) are o singură soluţie.

Punctele de frontieră ale domeniului D, precum şi punctele interioare care nu sunt puncte ordinare, se vor numi *puncte singulare* ale ecuaţiei (4). Deoarece în orice vecinătate oricât de mică a unui punct singular nu sunt satisfăcute condiţiile teoremei lui Cauchy, prin acest punct poate să nu treacă nici o curbă integrală a ecuaţiei (4), sau poate să treacă una, sau câteva curbe, ba chiar şi o infinitate de curbe integrale. Problema lui Cauchy, pusă pentru un punct singular al ecuaţiei (4), poate să nu aibă soluţii, sau poate avea o singură soluţie, ori mai multe soluţii.

Definiţia 4. Vom spune că soluţia ecuaţiei (4) este *singulară*, dacă în fiecare punct al ei nu se respectă unicitatea soluţiei problemei lui Cauchy.

Din definiția 4 rezultă că o funcție $y=\varphi(x)$, $(x,\varphi(x))\in D$ este soluție singulară a ecuației (4) pe mulțimea D dacă:

a) $\varphi(x)$ și $\varphi'(x)$ verifică identic ecuația (4) pe mulțimea D;

b) în orice vecinătate a fiecărui punct al ei există cel puțin două curbe integrale ale ecuației (4) care trec prin acel punct.

Evident că soluția singulară a ecuației (4) pe mulțimea D nu se conține în soluția generală a ecuației (4) pe D, adică soluția singulară nu se obține din formula soluției generale a ecuației (4) nici pentru o valoare a constantei C, inclusiv $(+\infty)$ sau $(-\infty)$. Soluția singulară poate fi obținută din formula soluției generale a ecuației (4) pe D numai înlocuind constanta C printr-o funcție oarecare de variabila $x: C=C(y)=C(\varphi(x))=F(x)$.

Așadar, pentru a afla soluțiile singulare ale ecuației (4) pe mulțimea D, este suficient: de aflat locul geometric al punctelor singulare ale ecuației date; de verificat, înlocuind direct în ecuație, dacă prezintă acest loc geometric sau unele părți ale lui curbe integrale și în caz de răspuns afirmativ, de controlat, dacă se respectă în punctele acestor curbe integrale unicitatea.

Exemplul 3. Să se afle soluțiile generală și singulară ale ecuației $y'=2\sqrt{y}$, $y\geq 0$.

Avem $f(x,y)=2\sqrt{y}$ și $f'_y(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{y}}$, care sunt continue pentru $y>0$ și $x\in R$. Deci, pentru această ecuație sunt verificate condițiile teoremei lui Cauchy în semiplanul de sus $(y>0)$ al planului XOY. Prin urmare, prin fiecare punct al acestui semiplan trece o singură curbă integrală a ecuației date.

Dacă $y>0$, atunci $\dfrac{y'}{2\sqrt{y}}=1$ sau $(\sqrt{y})'=1$. Folosind formula (6), avem: $\sqrt{y}=\int f(x)dx+C=\int dx+C=x+C$, unde $x+C>0$ sau $x>-C$. Prin urmare, $y=(x+C)^2$, $x>-C$. Să verificăm, dacă această funcție este soluția generală a ecuației

date. Într-adevăr, pentru orice valoare a lui C avem că $y'=2(x+C)$ și $\sqrt{y}=x+C$ implică $2\sqrt{y}=2(x+C)$. De unde $y'=2\sqrt{y}$. Deci, funcția $y=(x+C)^2$, $x>-C$ satisface ecuația dată pentru orice valoare a lui C.

Fie (x_0,y_0), $y_0>0$ o condiție inițială, atunci $y_0=(x_0+C_0)^2$. De unde $x_0+C_0=+\sqrt{y_0}$, deoarece $x_0>-C_0$ adică, $x_0+C_0>0$.

Prin urmare, $C_0=\sqrt{y_0}-x_0$ și $y=(x-x_0+\sqrt{y_0})^2$ este soluția particulară, care satisface condițiile inițiale date.

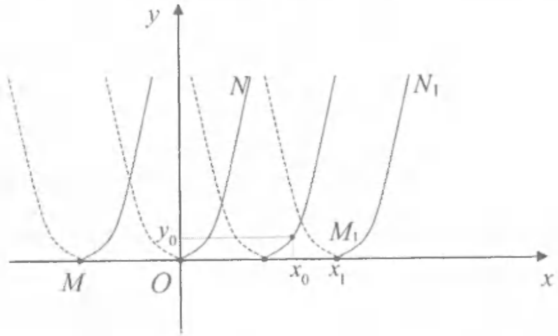


Fig. 3.

Așadar, funcția $y=(x+C)^2$, $x>-C$ este soluția generală a ecuației date în semiplanul de sus $y>0$ și reprezintă, din punct de vedere geometric, familia ramurilor din dreapta ale parabolelor $y=(x+C)^2$, $x>-C$, adică $\sqrt{y}=x+C$ (vezi fig. 3). Fiecare din aceste ramuri este o soluție particulară a ecuației date. Într-adevăr, pentru condițiile inițiale date (x_0,y_0), $y_0>0$ putem separa din întreaga familie ramura din dreapta a parabolei, care trece prin punctul $(x_0,y_0):\sqrt{y}=x-x_0+\sqrt{y_0}$.

Trecem acum la aflarea soluției singulare a ecuației date. Observăm că punctele de forma (x, y), $y=0$, adică toate punctele de pe axa OX (de ecuația $y=0$) sunt puncte singulare, deoarece funcția $f'_y(x,y)=(2\sqrt{y})'_y=\frac{1}{\sqrt{y}}$ nu este continuă în astfel de puncte. Evident că dreapta $y=0$ este o soluție a ecuației date: în fiecare punct al ei ecuația $y'=2\sqrt{y}$, $y\geq 0$ se transformă în identitatea $0=0$ și această soluție nu se obține din soluția generală $y=(x+C)^2$ pentru nici o valoare a constantei C, inclusiv $+\infty$ sau $(-\infty)$. Prin urmare, soluția $y=0$ este singulară: prin orice punct $M_1(x_1, o)$ de pe axa OX trec două soluții ale ecuației date: dreapta $y=0$ și ramura din dreapta a parabolei $y=(x+C_1)^2$ cu $C_1=-x_1$, adică $y=(x-x_1)^2$, sau $\sqrt{y}=x-x_1$.

Nota 1. Curbe integrale ale ecauției $y'=2\sqrt{y}$, $y\geq 0$ se pot de asemenea obține încleind părțile axei OX ($y=0$) cu ramurile din dreapta ale parabolelor $y=(x+C)^2$, $x>-C$ care sunt tangente acestei axe în punctul $(x,0)$:

$$y=\begin{cases}0, x<C_0\\(x-C_0)^2, x>C_0, C_0\in R.\end{cases}$$

Drept exemplu de astfel de curbe integrale por servi: porțiunea MON (compusă din segmentul MO al axei OX și ramura din dreapta a parabolei $y=x^2$) sau porțiunea OM_1N_1 (compusă din segmentul OM_1 al axei OX și ramura din dreapta a parabolei $y=(x-x_1)^2$) (vezi fig. 3). Menționăm că soluțiile de această formă nu sunt nici particulare, nici singulare. Cu soluții de tipul ăsta nu ne vom ocupa.

În încheiere remarcăm că problema fundamentală a teoriei ecuațiilor diferențiale constă în găsirea tuturor soluțiilor (în formă explicită, implicită sau parametrică) ecuației diferențiale date și studierea proprietăților acestor soluții. Aflarea soluțiilor ecuațiilor diferențiale se mai numește *integrarea* acestor ecuații.

7.2. Ecuații diferențiale de ordinul 1 integrabile în cuadraturi

Considerăm câteva tipuri de ecuații diferențiale de ordinul 1, integrarea cărora se reduce la calcularea uneia sau mai multe integrale nedefinite.

7.2.1. Ecuația $y'=g(x)$

Fie ecuația

$$y'=g(x), \tag{1}$$

unde funcția $g(x)$ nu conține variabila y. Dacă funcția $g(x)$ este continuă pe $[a,b]$, atunci condițiile teoremei lui Cauchy sunt verificate ($f'_y(x,y)=[g(x)]'_y=0$ – continuă pe R) și folosind formula (6) din 7.1.1., obținem soluția generală a ecuației (1):

$$y=\int g(x)dx+C=\int_{x_0}^{x} g(t)dt+C, \tag{2}$$

unde $x_0\in[a,b]$ este o valoare fixată și C o constantă arbitrară. Substituind $x=x_0$ în formula (2), obținem: $y(x_0)=0+C$, adică $y_0=C$. Deci, soluția generală a ecuației (1) poate fi scrisă și sub forma

$$y=\int_{x_0}^{x} g(t)dt+y_0, \tag{3}$$

unde y_0 joacă rolul de constantă. Menționăm că în cazul ăsta ecuația (1) nu are soluții singulare.

Dacă însă funcția $g(x)$ are în punctul $x=\xi\in[a,b]$ o discontinuitate de speța a doua, adică $g(\xi)=\infty$, atunci considerăm ecuația inversă.

$$\frac{dx}{dy}=x'=\frac{1}{g(x)}, \tag{4}$$

Observăm că în cazul ăsta dreapta $x=\xi$ este o curbă integrală pentru ecuația (4). Prin urmare, soluția $x=\xi$ o atașăm la soluțiile ecuației directe (1).

Această soluție a ecuației (1) poate fi particulară sau singulară în dependență de faptul dacă în fiecare punct al ei unicitatea soluției problemei Cauchy se menține sau nu.

De obicei, dacă $x=\xi$ este o soluție particulară a ecuației (1), ea se obține din soluția generală (2) considerând $C=\pm\infty$, adică

$$C=\lim_{(x,y)\to(\xi,y)}[y-\int g(x)dx]=\pm\infty$$

(a se consulta exemplul 1 de mai jos). De asemenea dreapta $x=\xi$ va fi o soluție singulară a ecuației (1) atunci când ea se va obține din (2) considerând $C=C(y)=C(\varphi(x))$ ca o funcție de y, iar y la rândul lui fiind o funcție de x, adică

$$C=\lim_{(x,y)\to(\xi,y)}[y-\int g(x)dx]=C(y)=F(x)$$

(a se vedea exemplul 2 de mai jos).

Exemplul 1. Să se integreze ecuația $y'=-\dfrac{1}{x^2}$. Funcția $g(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ este continuă în orice punct $x\neq 0$, $x\in R$. Aplicând formula (2), avem că soluția generală a ecuației date are forma $y=-\int\dfrac{1}{x^2}dx+C=\dfrac{1}{x}+C$, unde $x\neq 0$, $x\in R$ și C este o constantă arbitrară. Soluția generală reprezintă o familie de hiperbole în care axa OY servește ca asimptotă verticală pentru ele.

Observăm că dreapta $x=0$ (axa OY) este o soluție a ecuației inverse $x'=-x^2$, $x\in R$. Din fig. 4 se vede că soluția $x=0$ (axa OY) este o soluție particulară a ecuației date, deoarece prin orice punct al ei trece o singură soluție (ea însăși!) a ecuației date. Soluția $x=0$ se obține din soluția generală $y=\dfrac{1}{x}+C$ sau $\dfrac{1}{x}=y-C$ considerând $C=\pm\infty$:

$$C=\lim_{(x,y)\to(0,y)}(y-\frac{1}{x})=y-\frac{1}{0}=\pm\infty.$$

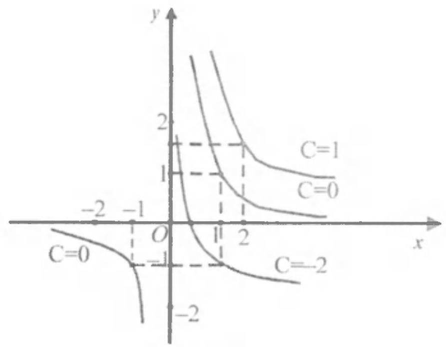


Fig. 4

Deci, ecuația dată nu are soluții singulare.

Exemplul 2. Să se integreze ecuația $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Funcția $g(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ este continuă pentru $x>0$. Deci, soluția generală a ecuației date pentru $x>0$ are forma

$$y=\int\frac{dx}{2\sqrt{x}}+C=\sqrt{x}+C \text{ sau } x=(y-C)^2,\ y>C.$$

Prin urmare, soluția generală a ecuației date reprezintă o familie a ramurilor de sus ale parabolelor $x=(y-C)^2$, $y>C$, care au axele de simetrie paralele cu axa OX, iar vârful lor este situat pe axa OY (vezi fig. 5).

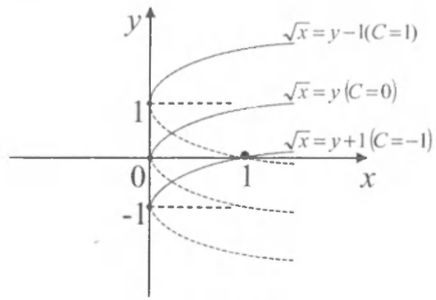


Fig. 5.

Observăm că axa OY $(x=0)$ este o soluție a ecuației inverse $x'=\dfrac{dx}{dy}=2\sqrt{x}$, $x\geq 0$. Această soluție $(x=0)$ este o soluție singulară pentru ecuația dată, deoarece în orice punct $(0,y_0)$, $y_0\in R$ al ei trec două soluții ale ecuației $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$: dreapta $x=0$ și ramura de sus a parabolei $\sqrt{x}=(y-y_0)^2$, $y>y_0$ care este tangentă în punctul de intersecție. Remarcăm că soluția $x=0$ se obține din soluția generală $x=(y-C)^2$ considerând $C=y=\varphi(x)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,y)}[y-\int g(x)dx]=\lim_{(x,y)\to(0,y)}(y-\sqrt{x})=y-0=y.$$

7.2.2. Ecuația $y'=g(y)$

Fie ecuația

$$\frac{dy}{dx}=y'=g(y), \tag{1}$$

unde funcția $g(y)$ nu conține variabila independentă x. Presupunem că funcția $g(y)$ este continuă pe $[c,d]$. Ecuația inversă are forma:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{g(y)}, \tag{2}$$

Ecuația $x'=\dfrac{1}{g(y)}$ este de tipul, cercetat în cazul precedent.

Deci, dacă $g(y)\neq 0$ pentru orice $y\in[c,d]$, adică funcția $\dfrac{1}{g(y)}$ este continuă pe $[c,d]$, aplicând formulele (2) și (3) din punctul precedent, obținem: $x=\int\dfrac{dy}{g(y)}+C=\int_{y_0}^{y}\dfrac{dy}{g(y)}+x_0$, care este integrala generală a ecuației (1).

Observăm că în cazul ăsta ecuația (1) nu are soluții singulare.

Dacă însă funcția $g(y)$ din (2) este continuă pe $[c,d]$ și $g(\xi)=0$ pentru $\xi\in[c,d]$, atunci dreapta $y=\xi$ este o soluție a ecuației date: ecuația inversă ecuației (2) coincide cu ecuația (1). Soluția $y=\xi$ va fi particulară pentru (1) dacă în orice punct al ei trece o singură curbă integrală a ecuației (1) și singulară — în caz contrar. În primul caz ea se obține din soluția generală pentru $C=\pm\infty$, iar în al doilea caz - pentru $C=C(y)=C(\varphi(x))$.

Considerăm acum cazul când $g(\eta)=\infty$ pentru o valoare oarecare $y=\eta$ din $[c,d]$ și $g(y)$, este continuă pe $[c,d]$ pentru orice $y\neq\eta$ și $g(y)\neq 0$ pentru orice $y\in[c,d]$. Prin urmare, ecuația inversă $x'=\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{g(y)}$ satisface condițiile teoremei lui Cauchy într-o vecinătate a punctelor (x,η), $x\in R$.

Ușor se verifică că dreapta $y=\eta$ este o soluție a ecuației inverse (2) și, prin urmare, o soluție a ecuației (1).

Rămâne de verificat dacă această soluție este o soluție particulară sau singulară a ecuației (1).

Exemplul 3. Să se integreze ecuația $y'=\sqrt[3]{(y-1)^2}$. Ecuația ei inversă are forma $\dfrac{dx}{dy}=x'=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(y-1)^2}}$. Aplicând afirmațiile din punctul precedent, obținem că soluția ei generală este:

$$x=\int\frac{dy}{\sqrt[3]{(y-1)^2}}+C=3\sqrt[3]{y-1}+C,$$

unde $y\neq 1$, și C – o constantă arbitrară.

Exprimând y în funcție de x obținem, că soluția generală a ecuației date are forma $y=1+\dfrac{1}{27}(x-C)^3$, care reprezintă o familie de parabole cubice, punctele de inflexiune ale cărora aparțin dreptei

$y=1$ (vezi fig. 6.). Dacă $y=1$, atunci funcţia $\frac{1}{\sqrt[3]{(y-1)^2}}$ este discontinuă în orice punct al acestei drepte. Observăm că dreapta

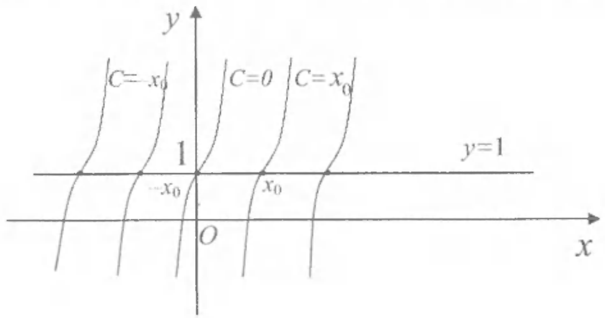


Fig. 6.

$y=1$ este o soluţie a ecuaţiei $y'=\sqrt[3]{(y-1)^2}$, deoarece în orice punct al dreptei ecuaţia dată se transformă în identitate. Remarcăm că prin orice punct $(x_0,1)$, $x_0\in R$ al dreptei $y=1$ trec două soluţii ale ecuaţiei date: dreapta $y=1$ şi parabola cubică respectivă $y=1+\frac{1}{27}(x-x_0)^3$. Deci, soluţia $y=1$ este o soluţie singulară a ecuaţiei date.

Exemplul 4. Să se integreze ecuaţia $y'=\sqrt{(y-1)^3}$, $y\geq 1$. Considerăm ecuaţia inversă $x'=\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\sqrt{(y-1)^3}}$, $y>1$. Soluţia ei generală are forma: $x=\int\frac{dy}{\sqrt{(y-1)^{3/2}}}+C=\frac{(-2)}{\sqrt{y-1}}+C$. Exprimând y în raport cu x, obţinem soluţia generală a ecuaţiei iniţiale: $y=1+\frac{4}{(x-C)^2}$. Dacă $C=\pm\infty$, obţinem: $y=1$, adică $y=1$ este o

soluţie particulară a ecuaţiei date. Observăm că dreapta $y=1$ este o asimptotă orizontală pentru curbele din integrala generală a ecuaţiei date (vezi fig. 7.).

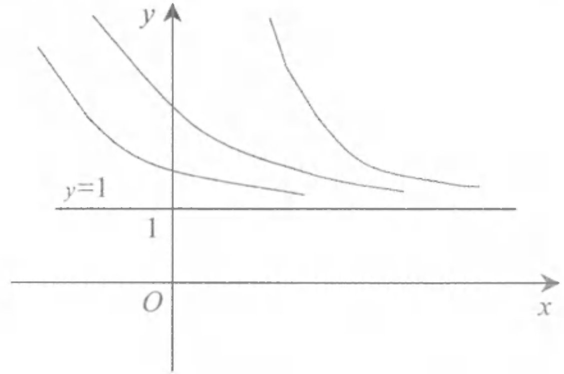


Fig. 7.

Aşadar, prin orice punct al dreptei $y=1$ trece o singură soluţie a ecuaţiei date: însăşi dreapta $y=1$. Prin urmare, ecuaţia dată nu are soluţii singulare.

7.2.3. Ecuaţii în diferenţiale totale

Fie

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \qquad (1)$$

forma diferenţială a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul 1 (vezi (5) din 7.1.1.).

Presupunem că funcţiile $P(x,y)$, $Q(x,y)$ sunt continue într-un domeniu simplu conex $D\subseteq R$ (în sensul definiţiei din 6.2.4.) şi $[P(x,y)]^2+[Q(x,y)]^2\neq 0$ pentru orice punct (x,y) din D. Ecuaţia (1) se numeşte *în diferenţiale totale* dacă $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ este diferenţiala totală a unei funcţii $U(x,y)$ diferenţiabile pe D. Deci $dU=U'_x dx+U'_y dy$, de unde

$$U'_x=P(x,y) \text{ şi } U'_y=Q(x,y). \qquad (2)$$

Considerăm ecuaţia

$$U(x,y)=C, \tag{3}$$

unde C este o constantă arbitrară.

Arătăm că ecuaţiile (1) şi (3) au aceleaşi soluţii, adică sunt echivalente.

Într-adevăr, fie $y=\varphi(x)$, $x\in I\subseteq R$ şi $(x,\varphi(x))\in D$ o soluţie a ecuaţiei (1). Deci,

$$P(x,\varphi(x))+Q(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x)=0, \tag{4}$$

pentru orice $x\in I$.

Notăm $V(x)=U(x,\varphi(x))$ şi derivând-o în raport cu x, obţinem:

$$V'(x)=U'_x(x,\varphi(x))+U'_y(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x)=$$
$$=P(x,\varphi(x))+Q(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x)=0$$

pentru orice $x\in I$ în virtutea relaţiilor (2) şi (4)). Deci, $V'(x)=0$ şi $V(x)=U(x,\varphi(x))=C_1$. Prin urmare, $\varphi(x)$ este o soluţie a ecuaţiei (3) pentru $C=C_1$.

Invers, fie $U(x,\varphi(x))=C$. Derivând această relaţie în raport cu x, obţinem identitatea:

$$\forall x\in I:\ U'_x(x,\varphi(x))+U'_y(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x)=0,$$

care în virtutea relaţiei (2) se transformă în identitatea (4). Prin urmare, $y=\varphi(x)$ este o soluţie a ecuaţiei (1).

Aşadar, am demonstrat că soluţia generală a ecuaţiei (1) este dată sub forma implicită de ecuaţia $U(x,y)=C$. Dacă presupunem că $P(x,y)$, $Q(x,y)$ admit derivate parţiale pe domeniul D (simplu conex) şi are loc egalitatea $\forall(x,y)\in D$: $P'_y(x,y)=Q'_x(x,y)$, atunci ecuaţia (1) este o ecuaţie în diferenţiale totale (a se consulta teorema 1 din 6.2.4.) şi

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(t,y_0)dt+\int_{y_0}^{y}Q(x,t)dt,\ (x_0,y_0)\in D,\ (x,y)\in D.$$

Prin urmare, integrala generală a ecuaţiei (1) are forma

$$\int_{x_0}^{x}P(t,y_0)dt+\int_{y_0}^{y}Q(x,t)dt=C, \tag{5}$$

sau în forma simetrică:

$$\int_{x_0}^{x}P(t,y)dt+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,t)dt,=C'. \tag{6}$$

Punctul (x_0,y_0) din formulele (5) şi (6) se alege astfel încât integralele respective să aibă sens. O alegere bună a punctului (x_0,y_0) simplifică considerabil calculele integralei generale. Formulele (5) şi (6) permit de a obţine soluţii particulare ale ecuaţiei (1). Dacă ecuaţiei diferenţiale (1) i se ataşează condiţia iniţială $y(x_0)=y_0$ din (5) sau (6), se deduce că $C=C'=0$ şi integrala particulară are forma:

$$\int_{x_0}^{x}P(t,y_0)dt+\int_{y_0}^{y}Q(x,t)dt,=0. \tag{7}$$

sau

$$\int_{x_0}^{x}P(t,y)dt+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,t)dt,=0. \tag{8}$$

Dacă, însă, nu se specifică vreo condiţie iniţială, punctul $(x_0,y_0)\in D$ se alege arbitrar. Fie $(x_0,y_0)\in D$ şi $P(x_0,y_0)=Q(x_0,y_0)=0$. Atunci în virtutea relaţiei (1) $y'(x_0,y_0)=\left(\frac{0}{0}\right)$, adică câmpul de direcţii al ecuaţiei (1) în acest punct nu este determinat. Prin urmare, într-o vecinătate a punctului (x_0,y_0) existenţa şi unicitatea soluţiei problemei lui Cauchy nu sunt garantate. De obicei, în astfel de situaţii, se studiază curbele integrale din integrala generală (5) sau (6) ce trec prin acest punct şi soluţiile ecuaţiei (1) care sunt caracterizate de frontiera domeniului simplu conex D. Similar se procedează şi în cazul când $P(x_0,y_0)=0\neq Q'(x_0,y_0)$ sau $Q(x_0,y_0)=0\neq P(x_0,y_0)$.

Exemplul 5. Să se integreze ecuaţia $ydx+xdy=0$.

Observăm că $P(x,y)=y$, $Q(x,y)=x$ sunt continue pe planul XOY şi $P'_y(x,y)=Q'_x(x,y)=1$ pentru orice punct din acest plan.

Prin urmare, ecuaţia dată este în diferenţiale totale pe tot planul XOY, adică în R^2. Folosind, de exemplu, formula (5) cu $x_0=y_0=0$, avem:

$$\int_0^x 0\cdot dt+\int_0^y x\cdot dt=C.$$

De unde integrala generală are forma $xy=C$, unde C este o constantă arbitrară reală.

Observăm că anume alegerea punctului (0,0) simplifică calculele în aflarea soluţiei generale a ecuaţiei date.

Aşadar, soluţia generală a ecuaţiei date geometric reprezintă o familie de hiperbole situate în cadranele 1, 3, dacă $C>0$; în cadranele 2, 4, dacă $C<0$ şi axele de coordonate, dacă $C=0$.

Observăm că dacă $P(\xi,y)=0$, adică $y=0$, atunci dreapta $x=0$ (axa OY) este soluţie a ecuaţiei date şi ea este particulară : se obţine din soluţie generală $xy=C$, considerând $C=0$. Similar, dacă $Q(x,\eta)=0$, adică $x=0$, atunci dreapta $y=0$ (axa OX) este soluţie a ecuaţiei date şi ea este de asemenea particulară: se obţine din soluţia generală xy = C, considerând $C=0$. Prin urmare, ecuaţia dată nu are soluţii singulare.

7.2.4. Ecuaţii diferenţiale cu variabile separate şi separabile

Ecuaţia de forma

$$M(x)dx+N(y)dy=0, \tag{1}$$

unde $M(x)$ este continuă pe intervalul $I_1\subseteq R$, iar $N(y)$ este continuă pe intervalul $I_2\subseteq R$, se numeşte *ecuaţie cu variabile separate.*

Observăm că ecuaţia (1) este o ecuaţie în diferenţiale totale deoarece

$$P(x,y)=M(x),\ Q(x,y)=N(y)$$

şi

$$P'_y(x,y)=0=Q'_x(x,y)$$

pentru orice $x\in I_1$ şi orice $y\in I_2$. Prin urmare, integrala generală a ecuaţiei (1) are forma (vezi formula (5) din 7.2.3.):

$$\int_{x_0}^{x} M(t)dt+\int_{y_0}^{y} N(t)dt=C,, \tag{2}$$

unde (x_0,y_0) este un punct fix cu $x_0\in I_1$, $y_0\in I_2$ şi C o constantă oarecare.

Dacă $F_1(x)$ şi $F_2(y)$ sunt primitivele funcţiilor $M(x)$ şi $N(y)$ pe intervalele I_1 şi I_2, atunci din (2) obţinem relaţia:

$$F_1(x)-F_1(x_0)+F_2(y)-F_2(y_0)=C$$

sau

$$F_1(x)+F_1(y)=C+F_1(x_0)+F_2(y_0).$$

Prin urmare, integrala generală a ecuaţiei (1) poate fi scrisă şi sub forma:

$$\int M(x)dx+\int N(y)dy=C_1, \tag{3}$$

unde C_1 este o constantă arbitrară.

Rezolvarea problemei Cauchy pentru condiţiile iniţiale (x_0,y_0) ce satisfac relaţia $[M(x_0)]^2+[N(y_0)]^2\neq 0$ este garantată: $y'=-\dfrac{M(x)}{N(y)}$, $x'=-\dfrac{N(y)}{M(x)}$ şi funcţiile $f_1(x,y)=-\dfrac{M(x)}{N(y)}$, $f_2(x,y)=-\dfrac{N(y)}{M(x)}$ împreună cu derivatele lor parţiale $[f_1(x,y)]'_y$, $[f_2(x,y)]'_x$ satisfac condiţiile teoremei lui Cauchy într-o vecinătate oarecare a punctului (x_0,y_0).

Prin urmare, în acest caz integrala particulară respectivă a ecuației (1) are forma

$$\int_{x_0}^{x} M(t)dt + \int_{y_0}^{y} N(t)dt = 0. \tag{4}$$

Evident că dacă $M(\xi)=0$ sau $N(\eta)=0$, atunci în orice vecinătate a punctelor (ξ, y_0), (x_0, η) cu $y_0 \in I_2$, $x_0 \in I_1$ și (ξ_1, η_1) cu $M(\xi_1)=N(\eta_1)=0$, funcțiile $f_1(x,y)=-\dfrac{M(x)}{N(y)}$ și $f_2(x,y)=-\dfrac{N(y)}{M(x)}$ nu satisfac condițiile teoremei lui Cauchy și deci existența și unicitatea soluției ecuației (1) ce trece prin aceste puncte nu este garantată. Dacă dreptele $x=\xi$, $y=\eta$ sunt soluții ale ecuației (1), atunci ele sunt particulare dacă se obțin din (4) prin particularizarea constantei C și singulare în caz contrar. Alte soluții singulare ecuația (1) nu are.

Ecuația de forma:

$$M_1(x)\cdot M_2(y)dx + N_1(x)\cdot N_2(y)dy = 0, \tag{5}$$

unde $M_1(x)$, $N_1(x)$ sunt continue pe intervalul $I_1 \subseteq R$ și $M_2(y)$, $N_2(y)$ sunt continue pe intervalul $I_2 \subseteq R$ se numește *ecuație cu variabile separabile.*

Dacă împărțim ecuația (5) la $M_2(y)\cdot N_1(x) \neq 0$, atunci ecuația dată se transformă într-o ecuație cu variabile separate:

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{M_2(y)}{N_2(y)}dy = 0, \tag{6}$$

cu $N_1(x)\neq 0$, $M_2(y)\neq 0$ și integrala ei generală are forma:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{M_1(t)}{N_1(t)}dt + \int_{y}^{y} \frac{N_2(t)}{M_2(t)}dt = C \tag{7}$$

sau

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = C_1, \tag{8}$$

unde $x_0, x \in I_1$, $y_0, y \in I_2$, $N_1(x_0)\neq 0$, $M_2(y_0)\neq 0$ și C, C_1 sunt constante arbitrare.

Dacă, (x_0, y_0) sunt condiții inițiale astfel încât $[M(x_0)]^2+[N(y_0)]^2\neq 0$, atunci integrala particulară a ecuației (5) are forma:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{M_1(t)}{N_1(t)}dt + \int_{y_0}^{y} \frac{N_2(t)}{M_2(t)}dt = 0. \tag{9}$$

Dacă însă $M_2(y)\cdot N_1(x)=0$, atunci $M_2(y)=0$ sau $N_1(x)=0$. Fie $N_1(\xi)=0$, atunci dreapta $x=\xi$ este o soluție a ecuației (5): în orice punct (ξ, y_0), $y_0 \in I_2$ al dreptei $x = \xi$ ecuația (5) se transformă în identitatea

$$M_1(\xi)\cdot M_2(y_0)dx + N_1(\xi)\cdot N_2(y_0)dy = 0,$$

deoarece $N_1(\xi)=0$ și $x = \xi$ implică $dx=0$. Similar, dacă $M_2(\eta)=0$, obținem că dreapta $y=\eta$ este soluție a ecuației (5).

Sunt posibile următoarele situații:

a) Soluțiile $x=\xi$, $y=\eta$ se obțin din integrala generală (7) sau (8) dând o valoare particulară constantei arbitrare C, inclusiv $C=\pm\infty$. Deci, în cazul ăsta soluțiile $x=\xi$, $y=\eta$ sunt particulare. Cu alte cuvinte, dreptele $x=\xi$, $y=\eta$ sunt soluții particulare, dacă ele sunt unicele soluții ale ecuației (5) ce trec prin punctele (ξ, y_0), $y_0 \in I_2$ și respectiv punctele (x_0, η), $x_0 \in I_1$ în afară de punctul lor de intersecție (ξ, η), unde câmpul de direcții al ecuației (5) nu este determinat: $y'(\xi,\eta)=\left(\dfrac{0}{0}\right)$ (a se consulta ex. 1, 4 și 5 de mai sus).

b) Soluțiile $x=\xi$, $y=\eta$ se obțin din integrala generală (7) sau (8) printr-o valoare a constantei $C=C(y)$, care depinde de y, adică și de x. Astfel de soluții vor fi singulare. Cu alte cuvinte, soluțiile $x=\xi$, $y=\eta$ vor fi singulare dacă prin orice punct de pe aceste drepte trece cel puțin încă o curbă integrală a ecuației (5) (a se consulta ex. 2 și 3 de mai sus). Alte soluții singulare ecuația (5) nu are.

Exemplul 6. Să se integreze ecuația $xdx + ydy = 0$.

Ecuația dată este o ecuație cu variabile separate și conform formulei (8) integrala ei generală are forma

$$\int xdx + \int ydy = C_1 \quad \text{sau} \quad x^2 + y^2 = 2C_1,\ C_1 > 0.$$

Prin urmare, integrala generală reprezintă o familie de circumferințe concentrice cu centrul în $(0,0)$ de raza $\sqrt{2C_1}$. Dacă $C_1 = 0$, atunci curbele integrale ale ecuației date degenerează în punctul $(0,0)$. În acest punct existența și unicitatea soluției date nu este garantată, deoarece câmpul de direcții în punctul $(0,0)$ nu este determinat:

$$y'(0,0) = \left(-\frac{x}{y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

Observăm că funcția $M(x) = x$ se transformă în zero când $x = 0$, iar funcția $N(y) = y$ – când $y = 0$. Dreapta $x = 0$ nu este soluție a ecuației date, deoarece nu satisface această ecuație: pentru orice $y \neq 0$ și $dy \neq 0$, avem:

$$0 \cdot dx + y \cdot dy \neq 0$$

Similar se demonstrează că dreapta $y = 0$ pentru orice $x \neq 0$ și $dx \neq 0$ nu satisface ecuația $xdx + ydy = 0$. Prin urmare, ecuația nu are soluții singulare.

Exemplul 7. Să se integreze ecuația $(tgy)dx - (x\ln x)dy = 0,\quad x > 0,\ y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z.$

Această ecuație este o ecuație cu variabile separabile. Împărțind ecuația la $x\ln x \cdot tgy \neq 0$, obținem o ecuație cu variabile separate:

$$\frac{dx}{x\ln x} - \frac{dy}{tgy} = 0.$$

Integrala ei generală, în virtutea formulei (8), este: $\ln|\ln x| - \ln|\sin y| = C_1$ sau $\frac{\ln x}{\sin y} = C$ cu $C = \pm e^{C_1}$. De unde $x = e^{C \cdot \sin y}$. Pentru a afla soluțiile singulare, considerăm ecuația:

$$x\ln x \cdot tgy = 0,$$

soluțiile ei fiind $x = 1$ și $y = \pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Soluția $x = 0$ nu aparține domeniului de definiție a ecuației date.

Ușor se verifică că dreptele $x = 1$ și $y = \pi k$ $(k \in Z)$ sunt soluții ale ecuației date: de exemplu, dacă $x = 1$, atunci $dx = 0$ și ecuația dată se transformă în identitatea $tgy \cdot 0 - 0 \cdot dy = 0$ pentru orice $y \in R$ și $dy \neq 0$.

Observăm că aceste soluții sunt soluții particulare ale ecuației date, deoarece ele se obțin din integrala ei generală considerând:

a) $C = 0$ $(C_1 = -\infty \Rightarrow C = e^{C_1} = 0)$ pentru a obține soluția $x = 1$;

b) $C = +\infty$. În cazul ăsta pentru orice $x \in R$ trebuie să avem ca $\sin y = 0$, adică $y = \pi k$ $(k \in Z)$ $(x = (0 \cdot \infty))$.

Așadar, ecuația dată nu are soluții singulare.

Notă 1. Ecuația de forma $y' = f(ax + by + k)$ se reduce la o ecuație cu variabile separabile cu ajutorul substituției $ax + by + k = z$. Într-adevăr, dacă $b \neq 0$, atunci $z' = a + by'$, de unde $y' = \frac{z' - a}{b}$. Prin urmare, $\frac{dz}{dx} = b \cdot f(z) + a$ sau $\frac{dz}{bf(z) + a} = dx$ și soluția generală are forma $\int \frac{dz}{bf(z) + a} = x + C$, care înlocuind z prin $ax + by + k$, devine soluția generală a ecuației date. Soluțiile singulare ale ecuației date pot fi dreptele $ax + by + k = z_0$, unde z_0 este soluția ecuației $bf(z) + a = 0$.

Dacă însă $b = 0$, ecuația $\frac{dy}{dx} = y' = f(ax + k)$ este deja o ecuație cu variabile separabile și soluția ei generală are forma $y = \int f(ax + k)dx + C$ (a se consulta ex. 6.1(s,t,u), din [22]).

În încheiere constatăm că ecuațiile de forma $y' = f(x)$, $y' = f(y)$ și $M(x)dx + N(y)dy = 0$, studiate până acum, pot fi considerate ca cazuri particulare ale ecuațiilor diferențiale cu variabile separabile. Așadar, ecuațiile diferențiale cu variabile separabile constituie o clasă simplă și destul de largă din mulțimea ecuațiilor diferențiale de ordinul 1, care se rezolvă în cuadraturi.

Multe ecuații diferențiale de ordinul 1 se reduc la una sau două ecuații cu variabile separabile cu ajutorul unei substituții.

Analizăm trei ecuații diferențiale de acest fel.

7.2.5. Ecuații diferențiale omogene

Ecuația

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

se numește *omogenă* dacă funcțiile $P(x,y)$, $Q(x,y)$ sunt funcții omogene de ordinul m, unde $m \in R$ (vezi 5.4.5), adică:

$$P(tx,ty) = t^m P(x,y) \text{ și } Q(tx,ty) = t^m Q(x,y). \tag{2}$$

Dacă în identitățile (2) considerăm $t = \frac{1}{x}$, obținem:

$$P\left(1,\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^m} P(x,y) \text{ și } Q\left(1,\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^m} Q(x,y). \tag{3}$$

Prin urmare, ecuația (1) are forma:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = -\frac{x^m \cdot P\left(1,\frac{y}{x}\right)}{x^m \cdot Q\left(1,\frac{y}{x}\right)} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \tag{4}$$

dacă $Q(1,\frac{y}{x}) \neq 0$, $x \neq 0$. Similar, dacă $t = \frac{1}{y}$, ecuația (1) are forma:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = -\frac{y^m \cdot P\left(\frac{x}{y},1\right)}{y^m \cdot Q\left(\frac{x}{y},1\right)} = \Psi\left(\frac{x}{y}\right). \tag{5}$$

cu condiția că $Q(\frac{x}{y},1) \neq 0$, $y \neq 0$.

Așadar, ecuația diferențială în formă normală

$$y' = f(x,y) = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}, \tag{6}$$

se numește *omogenă* dacă funcția $f(x,y)$ este omogenă de ordinul zero, adică $f(tx,ty) = f(x,y)$ sau dacă ecuația (6) are forma (4) sau (5).

Pentru a rezolva ecuația (1), introducem o funcție nouă $u = u(x)$ astfel încât $\frac{y}{x} = u$, adică $y = ux$. Deci, $dy = u \cdot dx + x \cdot du$. Ecuația (1), în virtutea formulei (3), se transformă într-o ecuație cu variabile separabile:

$$x^m P(1,u)dx + x^m Q(1,u)(udx + xdu) = 0$$

sau

$$[P(1,u) + uQ(1,u)]dx + x \cdot Q(1,u)du = 0,$$

dacă $x \neq 0$.

Separând variabilele, adică împărțind la $x \cdot [P(1,u) + uQ(1,u)] \neq 0$, obținem o ecuație cu variabile separate:

$$\frac{dx}{x} + \frac{Q(1,u)du}{P(1,u) + uQ(1,u)} = 0.$$

Integrala generală a acestei ecuații are forma $\ln|x| + \int \frac{Q(1,u)du}{P(1,u) + uQ(1,u)} = C_1$, sau $x = C \cdot e^{\psi(u)}$, unde $C = \pm e^{C_1}$, și $\psi(u) = -\int \frac{Q(1,u)du}{P(1,u) + uQ(1,u)}$. Prin urmare, integrala generală a ecuației (1) are forma:

$$x = C \cdot e^{\psi(\frac{y}{x})}, \quad C \in R. \tag{7}$$

Dacă $u = u_1$ este o soluție a ecuației $P(1,u) + uQ(1,u) = 0$, atunci dreapta $y = u_1 x$ este soluție a ecuației (1). Dacă $y = u_1 x$ se obține din (7) prin particularizarea constantei C, atunci această dreaptă este o soluţie particulară a ecuaţiei (1). În caz contrar, dreapta $y=u_1x$ este o soluţie singulară a ecuaţiei (1).

Soluţii singulare ale ecuaţiei (1) pot fi de asemenea şi semiaxele axei OY de ecuaţiile $x=0$ ($y>0$) şi $x=0$ ($y<0$), dacă ele bineînţeles satisfac ecuaţia (1). Alte soluţii singulare ecuaţia (1) nu are.

Fie acum ecuaţia omogenă (1) în forma ei normală (6), unde $f(x,y)$ este o funcţie omogenă de ordinul zero. În cazul ăsta ecuaţia (6) are forma (4) sau forma (5). Făcând substituţia $\frac{y}{x}=u$, adică $y=ux$, unde u este o funcţie ce depinde de x în cazul formei (4) sau substituţia $\frac{x}{y}=u$, adică $x=uy$, unde u este o funcţie ce depinde de y în cazul formei (5), ecuaţia (6) se transformă într-o ecuaţie cu variabile separabile.

Într-adevăr, dacă (6) este omogenă şi are forma (4), adică

$$\frac{dy}{dx}=f\left(1,\frac{y}{x}\right)=\varphi\left(1,\frac{y}{x}\right),$$

atunci schimbarea de funcţie $\frac{y}{x}=u(x)$ sau $y=u\cdot x$ transformă ecuaţia dată în ecuaţia $x\cdot\frac{du}{dx}+u=f(1,u)$, care este o ecuaţie cu variabile separabile: $xdu-[f(1,u)-u]dx=0$. Separând variabilele, obţinem ecuaţia:

$$\frac{dx}{x}-\frac{du}{f(1,u)-u}=0.$$

Integrala ei generală are forma:

$$\ln|x|-\int\frac{du}{f(1,u)-u}=C_1 \quad \text{sau} \quad x=C\cdot e^{F(u)},$$

unde

$$F(u)=\int\frac{du}{f(1,u)-u} \quad \text{şi } C=\pm e^{C_1}.$$

Prin urmare, integrala generală a ecuaţiei (6) are forma

$$x=C\cdot e^{F\left(\frac{y}{x}\right)}. \tag{8}$$

Dacă $u=u_1$ este o soluţie a ecuaţiei $f(1,u)-u=0$, atunci dreapta $y=u_1x$ este o soluţie a ecuaţiei (6) şi ea poate fi particulară dacă se obţine din (8) prin particularizarea constantei C şi singulară în caz contrar. De asemenea pot fi soluţii singulare ale ecuaţiei omogene în formă normală şi semiaxele axei $OY: x=O(y>0)$ şi $x=0(y<0)$.

Notă. Ecuaţiile de forma

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1x+c_1}{a_2x+b_2x+c_2}\right)=F(x,y), \tag{9}$$

pot fi reduse la ecuaţii omogene.

Într-adevăr, dacă $c_1=c_2=0$, ecuaţia (9) este deja omogenă, deoarece:

$$f(tx,ty)=f\left(\frac{a_1tx+b_1ty}{a_2tx+b_2ty}\right)=f\left(\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}\right)=F(x,y).$$

Fie cel puţin unul din numerele c_1 şi c_2 diferit de zero şi

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-b_1a_2\neq 0.$$

Efectuăm schimbul de variabile:

$$x=x_1+h \text{ şi } y=y_1+k. \tag{10}$$

Deci, $\frac{dy}{dx}=\frac{dy_1}{dx_1}$ şi ecuaţia (9) are forma:

$$\frac{dy_1}{dx_1}=f\left(\frac{a_1x_1+b_1y_1+a_1h+b_1k+c_1}{a_2x_1+b_2y_1+a_2h+b_2k+c_2}\right). \tag{11}$$

Alegem numerele h şi k astfel încât ele să fie soluţie a sistemului liniar de ecuaţii:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0. \end{cases} \tag{12}$$

Din algebră se ştie că sistemul (12) are soluţie atunci şi numai atunci când determinantul lui $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ este diferit de zero. Deci, ecuaţia (11) are forma:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{a_1x_1 + b_1y_1}{a_2x_1 + b_2y_1}\right)$$

şi evident că este o ecuaţie omogenă. Rezolvând această ecuaţie omogenă şi revenind prin intermediul formulelor (10) din nou la variabilele x şi y, obţinem integrala generală a ecuaţiei (9).

Dacă $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, atunci $a_1b_2 = a_2b_1$. De unde $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \lambda$, adică $a_2 = \lambda a_1$, $b_2 = \lambda b_1$. Ecuaţia (9) are forma:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{\lambda(a_1x + b_1y) + c_1}{\lambda(a_1x + b_1y) + c_2}\right) = \varphi(a_1x + b_1y), \tag{13}$$

care cu ajutorul substituţiei $u = a_1x + b_1y$, ce implică relaţia $u' = a_1 + b_1y'$, se transformă într-o ecuaţie cu variabile separabile:

$$u' = \frac{du}{dx} = a_1 + b_1 \cdot \varphi(u). \tag{14}$$

Printre altele, ecuaţia (14) este o ecuaţie de tipul 7.2.2. cercetat anterior: ecuaţie ce nu conţine variabila independentă x: $u' = \varphi(u)$ (a se consulta ex. 6.3 (o, p, r, s) din [22]).

Exemplul 8. Să se integreze ecuaţia: $2xydx - (x^2 + y^2)dy = 0$.

Observăm că funcţiile $P(x,y) = 2xy$ şi $Q(x,y) = -(x^2 + y^2)$ sunt funcţii omogene de ordinul doi, deoarece

$$P(tx,ty) = 2(tx)\cdot(ty) = t^2 \cdot 2xy = t^2 \cdot P(x,y) \text{ şi}$$

$$Q(tx,ty) = -\left[(tx)^2 + (ty)^2\right] = -t^2(x^2 + y^2) = t^2Q(x,y)$$

Prin urmare, ecuaţia dată este omogenă. Schimbarea de funcţie $y = ux$ ce implică $dy = u\cdot dx + x\cdot du$ transformă ecuaţia diferenţială omogenă într-o ecuaţie cu variabilele separabile:

$$2x\cdot u\cdot xdx - (x^2 + u^2x^2)(udx + xdu) = 0.$$

Simplificând prin x^2 şi grupând termenii de pe lângă dx şi dy obţinem următoarea ecuaţie cu variabile separabile: $(u - u^3)dx - x(1+u^2)du = 0$. Dacă $x(u - u^3) \neq 0$, atunci separând

variabilele x şi u obţinem ecuaţia $\frac{dx}{x} + \frac{1+u^2}{u^3 - u}du = 0$, care este deja ecuaţie cu variabile separate. Integrala generală are forma: $\ln|x| + \int \frac{1+u^2}{u(u^2-1)}du = C$. Pentru a calcula $\int \frac{1+u^2}{u(u^2-1)}$ descompunem fracţia raţională $\frac{1+u^2}{u(u^2-1)}$ în fracţii raţionale simple (a se consulta 3.2 din [20]):

$$\frac{1+u^2}{u(u^2-1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-1} + \frac{C}{u+1}$$

şi alcătuim identitatea de bază

$$1 + u^2 = A(u^2-1) + B\cdot u(u+1) + C\cdot u(u-1).$$

Dacă $u = 0$, avem $A = -1$; pentru $u = 1$, obţinem $B = 1$ şi pentru $u = -1$, obţinem: $C = 1$. Prin urmare, o primitivă a integralei $\int \frac{(1+u^2)}{u(u^2-1)}du$ este funcţia $(-\ln|u| + \ln|u-1| + \ln|u-1|)$.

şi deci soluţia generală a ecuaţiei date este:

$$\ln|x| - \ln|u| + \ln|u-1| + \ln|u-1| = C_1 \text{ sau}$$

$$\ln\left|\frac{x(u^2-1)}{u}\right| = C_1.$$

De unde $\frac{x(u^2-1)}{u} = \pm e^{C_1} = C$ sau $\frac{x\left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right)}{\frac{y}{x}} = C$. Făcând transformările elementare obţinem următoarea formă a integralei generale a ecuaţiei diferenţiale date $x^2 - y^2 + Cy = 0$. Cercetăm acum soluţiile singulare ale ecuaţiei iniţiale.

Dacă $x(u-u^3)=0$, obținem $x=0$, $u=0$ și $u=\pm1$, adică $x=0$, $y=0$ și $y=\pm x$. Ușor se verifică că dreptele $y=0$ și $y=\pm x$ sunt soluții ale ecuației date, iar dreapta $x=0$ (axa OY) nu este soluție a ecuației date: avem $dx=0$ și pentru orice $y\neq 0$ și $dy\neq 0$ ecuația dată nu se transformă în identitate: $0-(0-y^2)dy\neq 0$.

Remarcăm că soluțiile $y=\pm x$ se obțin din integrala generală a ecuației date considerând $C=0$. Deci, dreptele $y=\pm x$ sunt soluții particulare. Dreapta $y=0$ (axa OX) este o soluție particulară deoarece ea se obține din integrala generală $x^2-y^2+Cy=0$, considerând $C=\pm\infty$:

$$C=\lim_{(x,y)\to(x,0)}\left(\frac{y^2-x^2}{y}\right)=\lim_{(x,y)\to(x,0)}\left(y-\frac{x}{y}\right)=\infty.$$

Așadar, ecuația dată nu are soluții singulare. În punctul (0,0) unicitatea nu este garantată: ($y'(0,0)=\left(\frac{0}{0}\right)$).

7.2.6. Ecuații diferențiale liniare

Ecuația de forma

$$y'+P(x)y=Q(x), \tag{1}$$

unde funcțiile $P(x)$, $Q(x)$ sunt definite pe $I\subseteq R$, se numește *ecuație liniară*, adică acea ecuație, care este liniară în raport cu y și y'. Dacă pentru orice $x\in I$ funcția $Q(x)=0$, atunci ecuația

$$y'+P(x)y=0, \tag{2}$$

se numește *ecuație liniară omogenă* (cuvântul „omogen" aici are alt sens decât cel din punctul anterior). Dacă funcția $Q(x)\neq 0$, atunci ecuația (1) se numește *ecuație liniară neomogenă*. Dacă pentru orice $x\in I$ funcția $P(x)$ = 0, ecuația (1) se transformă în ecuație de tipul 7.2.1.

Dacă funcțiile $P(x)$ și $Q(x)$ sunt continue pe intervalul $I\subseteq R$, atunci funcția $f(x,y)=Q(x)-P(x)y$ este continuă împreună cu derivata ei $f'_y(x,y)$ pe I. Prin urmare, ecuația $y'=f(x,y)$, echivalentă ecuației (1), satisface teorema Cauchy. Deci, există o singură soluție a ecuației (1) care satisface condițiile inițiale (x_0,y_0) cu $x_0\in I$, $y_0\in R$. Soluții singulare ecuația (1) nu are. Ecuația liniară omogenă (2) are următoarele proprietăți:

P1. Întrucât dreapta $y=0$, $x\in I$ este soluție a ecuației liniare omogene (2), în virtutea unicității problemei Cauchy pentru ecuația (2) avem următoarele: orice curbă integrală a ecuației (2) nu intersectează axa OX.

P2. Dacă $y_1=\varphi(x)$, $x\in I$ este o soluție particulară a ecuației (2), atunci funcția $C\cdot y_1=C\cdot\varphi(x)$, unde C este o constantă arbitrară, este de asemenea soluție a ecuației (2).

Demonstrația este evidentă.

P3. Dacă $y_1\neq 0$ este o soluție particulară a ecuației (2), atunci soluția generală a ei are forma: $y=Cy_1$, unde C este o constantă arbitrară.

Demonstrație. Întrucât $y_1\neq 0$ este soluție particulară a ecuației (2), avem, în virtutea P2, că Cy_1 este de asemenea soluție a ecuației pentru orice valoare a lui C. Dacă însă (x_0,y_0) cu $x_0\in I$ și $y_0\in R$ sunt condiții inițiale, atunci $C_0=\dfrac{y(x_0)}{y_1(x_0)}$ și $y=C_0\cdot y_1(x_0)$ este o soluție particulară a ecuației (2).

Are loc următoarea teoremă.

Teoremă. Fie ecuația liniară neomogenă (1) și ecuația liniară omogenă (2), atașată ei. Atunci soluția generală a ecuației (1) are forma:

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[C+\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}\cdot dx\right],\ x\in I, C\in R. \tag{3}$$

Demonstrație. Rezolvăm mai întâi ecuația liniară omogenă (2), atașată ecuației (1), care este o ecuație cu variabile separabile:

$$dy + P(x)\cdot y\cdot dx = 0,\ x\in I.$$

Separând variabilele, obținem: $\dfrac{dy}{y} + P(x)\cdot dx = 0,\quad y\neq 0.$

Soluția ei generală este:

$$\ln|y| + \int P(x)\cdot dx = C_1.$$

De unde

$$y = C\cdot e^{-\int P(x)dx},\ x\in I,\ C = \pm e^{C_1}. \qquad (4)$$

Dacă C = 1, funcția $y_1 = e^{-\int P(x)dx} \neq 0$ este o soluție particulară a ecuației (2). Prin urmare, în virtutea proprietății P2 de mai sus soluția generală a ecuației (2) are forma (4), unde C este o constantă arbitrară.

Pentru a integra ecuația (1), facem schimbarea de funcție $y = uy_1$. Deci $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy_1}{dx}u + \dfrac{du}{dx}\cdot y_1$ și ecuația (1) are forma:

$$\frac{dy_1}{dx}\cdot u + \frac{du}{dx}\cdot y_1 + P(x)\cdot y_1\cdot u = Q(x)\ \text{ sau}$$

$$u\left[\frac{dy_1}{dx} + P(x)y_1\right] + \frac{du}{dx}\cdot y_1 = Q(x). \qquad (5)$$

Deoarece y_1 este o soluție particulară a ecuației (2), avem: $\dfrac{dy_1}{dx} + P(x)y_1 = 0$ și ecuația (5) are forma $\dfrac{du}{dx}\cdot y_1 = Q(x)$ sau $du = \dfrac{Q(x)}{y_1}dx$, care este deja o ecuație cu variabile separate.

Soluția ei generală are forma:

$$u = \int\frac{Q(x)}{y_1}dx + C = \int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}\cdot dx + C.$$

Prin urmare, soluția generală a ecuației (1) este:

$$y = y_1\cdot u = e^{-\int P(x)dx}\cdot\left[C + \int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}\cdot dx\right].$$

Am obținut formula (3) și deci teorema este demonstrată.

Așadar, soluția generală a ecuației (1) se obține cu ajutorul a două cuadraturi. Reieșind din rezultatul obținut, facem următoarele observații:

1) Metoda folosită pentru integrarea ecuației liniare neomogene (1) se numește *metoda variației constantelor* sau *metoda lui Lagrange*. Într-adevăr, din integrala generală (4) a ecuației omogene (2) și soluția particulară $y_1 = e^{-\int P(x)dx} \neq 0$ a ecuației (2) avem $y = C\cdot y_1$, unde C este o constantă arbitrară. Prin substituția $y = u\cdot y_1$, am considerat pe C ca o funcție de x: $C = u(x)$ și l-am determinat pe u astfel încât $y = u\cdot y_1$ să verifice ecuația (1).

2) Soluția generală (3) a ecuației (1) poate fi scrisă altfel:

$$y = C\cdot e^{-\int P(x)dx} + \left[\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}\cdot dx\right]\cdot e^{-\int P(x)dx},$$

adică soluția generală a ecuației (1) se compune din soluția generală a ecuației liniare omogene (2) atașată ei și o soluție particulară a ecuației (1), deoarece termenul al doilea din această sumă reprezintă o soluție particulară a ecuației (1), considerând în formula (3) $C = 0$. Rezultatul obținut poartă numele de *structura soluției generale* a ecuației liniare neomogene (1). Din acest rezultat obținem următoarele: dacă știm o soluție particulară y_1 a ecuației (1), atunci soluția generală a ecuației (1) are forma: $y = C\cdot e^{-\int P(x)dx} + y_1$ și. prin urmare, soluția generală a ecuației (1) se obține cu ajutorul unei cuadraturi; dacă se știe că y_1 și y_2 sunt două soluții particulare ale ecuației (1), atunci soluția generală are forma $y = y_1 + C(y_2 - y_1)$, deoarece $(y_2 - y_1)\neq 0$ este o soluție particulară a ecuației (2) și deci expresia $C(y_2 - y_1)$, în virtutea proprietății P3 de mai sus, este soluția generală a ecuației (2). Prin urmare, soluția generală a ecuației (1) se obține fără nici o cuadratură.

3) Soluția generală (3) a ecuației liniare (1) este o funcție de forma $y=\varphi(x)+C\cdot\psi(x)$, $x\in I$, $C\in R$ adică o familie de curbe care depinde liniar de o constantă arbitrară C. Are loc și afirmația inversă: orice familie de curbe, care depinde liniar de o constantă arbitrară, verifică o ecuație liniară de ordinul 1. Într-adevăr, fie $y=\varphi(x)+C\cdot\psi(x)$. Deci, $y'=\varphi'(x)+C\cdot\psi'(x)$. Eliminând pe C din aceste două relații, obținem ecuația diferențială de ordinul 1:

$$\frac{y-\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{y'-\varphi'(x)}{\psi'(x)} \quad \text{sau}$$

$$y'-\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}y=\varphi'(x)-\frac{\varphi(x)\cdot\Psi'(x)}{\Psi(x)},$$

care, evident, este o ecuație liniară de ordinul 1.

4) În practică se folosește următoarea metodă de rezolvare a ecuațiilor liniare de ordinul 1: vom căuta soluția ecuației (1) sub forma $y=u\cdot v$, unde $u=u(x)$ și $v=v(x)$ sunt funcții continue împreună cu derivatele lor pe intervalul $I\subseteq R$. Deci, $y'=u'v+uv'$ și ecuația (1) are forma:

$$\frac{du}{dx}v+u\cdot\frac{dv}{dx}+P(x)\cdot u\cdot v=Q(x) \quad \text{sau}$$

$$v\left[\frac{du}{dx}+P(x)\cdot u\right]+u\cdot\frac{dv}{dx}=Q(x). \qquad (6)$$

Alegem funcția $u=u(x)$, astfel încât

$$\frac{du}{dx}+P(x)\cdot u=0. \qquad (7)$$

Ecuația (7) este o ecuație cu variabile separabile. Separând variabilele, obținem ecuația: $\frac{du}{u}+P(x)\cdot dx=0$, care este deja cu variabile separate. Integrala ei generală este:

$$\ln|u|+\int P(x)dx=C_1 \quad \text{sau} \quad u=C\cdot e^{-\int P(x)dx},\ C=\pm e^{C_1}.$$

Deoarece e suficient să avem o soluție oarecare diferită de zero a ecuației (7), în calitate de $u=u(x)$ vom lua $u_1=e^{-\int P(x)dx}\neq 0$, $x\in I$. Substituind în ecuația (6) valoarea găsită a lui $u_1(x)$, obținem ecuația:

$$u_1\cdot\frac{dv}{dx}=Q(x). \qquad (8)$$

Ecuația (8) este o ecuație cu variabile separabile și separând variabilele, obținem ecuația:

$$dv=Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}\cdot dx.$$

Soluția generală a acestei ecuații este:

$$v=\left[\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}\cdot dx\right]+C_2.$$

Prin urmare, soluția generală a ecuației (1) are forma

$$y=u_1\cdot v=e^{-\int P(x)dx}\left[C_2+\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}\cdot dx\right].$$

Am obținut formula (3). Constatăm că formula (3) nu se schimbă dacă în loc de soluția particulară $u_1\neq 0$ a ecuației (7) vom lua soluția ei generală: $u=C\cdot u_1$.

5) În formula (3) se poate de înlocuit integralele nedefinite prin integrale definite cu limita superioară variabilă. Avem:

$$y=e^{-\int_{x_0}^{x}P(t)dt}\left[C+\int_{x_0}^{x}Q(x)\cdot e^{\int_{x_0}^{x}P(t)dt}\cdot dx\right],$$

unde x_0 este o valoare fixată din intervalul $I\subseteq R$ și $C=y(x_0)=y_0$. Prin urmare, soluția generală a ecuației (1) are forma

$$y=e^{-\int_{x_0}^{x}P(x)dx}\left[y_0+\int_{x_0}^{x}Q(x)\cdot e^{\int_{x_0}^{x}P(t)dt}\cdot dx\right],$$

unde $x_0\in I$ și $y_0\in R$.

Exemplul 9. Să se integreze ecuația $y'+y=e^x$.

Observăm că ecuația dată este o ecuație liniară cu $P(x)=1$ și $Q(x)=e^x$.

Metoda 1. Folosim formula (3). Calculăm integralele nedefinite din această formulă. Avem: $\int P(x)dx=\int dx=x+C_1$ și

$$\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}\cdot dx=\int e^x\cdot e^{x+C_1}dx=e^{C_1}\cdot\frac{e^{2x}}{2}+C_2.$$

Prin urmare, soluția generală a ecuației date după formula (3) este:

$$y=e^{-(x+C_1)}\left(C+\frac{1}{2}e^{C_1}\cdot e^{2x}+C_2\right)=e^{-x}\cdot e^{-C_1}\left[(C+C_2)+\frac{e^{C_1}}{2}\cdot e^{2x}\right]$$

$$=C_3\cdot e^{-x}+\frac{1}{2}e^x,\ C_3\in R.$$

Metoda 2. Căutăm soluția ecuației date sub forma $y=u\cdot v$. Deci, $y'=u'\cdot v+uv'$ și ecuația inițială are forma: $u'v+uv'+uv=e^x$ sau

$$v(u'+u)+uv'=e^x. \qquad (9)$$

În calitate de u aflăm o soluție particulară $u_1\neq 0$ a ecuației cu variabile separabile $u'+u=0$ sau $\frac{du}{dx}+u=0$. Separând variabilele u și x, obținem ecuația $\frac{du}{u}=-dx$, care este deja cu variabilele separate. Prin urmare, soluția ei generală are forma: $\ln|u|=-x+C_1$ sau $u=C_2\cdot e^{-x}$, $C_2=\pm e^{C_1}$.

Dacă luăm $C_2=1$, obținem o soluție particulară $u_1=e^{-x}\neq 0$ a acestei ecuații. Substituind $u_1=e^{-x}$ în ecuația (9) obținem: $u_1v'=e^x$ sau $e^{-x}\cdot\frac{dv}{dx}=e^x$, adică $dv=e^{2x}dx$.

Am obținut o ecuație cu variabile separate și soluția ei generală este:

$$v=\int e^{2x}dx+C_3=\frac{1}{2}e^x+C_3,\ C_3\in R.$$

Prin urmare, soluția generală a ecuației date are forma:

$$y=u_1v=e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{2x}+C_3\right)=C_3\cdot e^{-x}+\frac{1}{2}e^x,\ C_3\in R.$$

Constatăm că dacă am fi luat $u=C_2\cdot e^{-x}$, $C_2\neq 0$, atunci ecuația (9) ar avea forma: $C_2\cdot e^{-x}\cdot\frac{dv}{dx}=e^x$ sau $dv=\frac{1}{C_2}e^{2x}$.

Soluția generală a acestei ecuații este:

$$v=\frac{1}{C_2}\int e^{2x}dx+C_3=\frac{1}{2C_2}e^{2x}+C_3,\ C_3\in R.$$

Prin urmare, soluția generală a ecuației inițiale este:

$$y=uv=C_2\cdot e^{-x}\left(\frac{1}{2C_2}e^{2x}+C_3\right)=C_4\cdot e^{-x}+\frac{1}{2}e^x,\ C_4\in R,$$

adică aceiași formă ca mai înainte.

În paragrafele 7.2.7. și 7.2.8. vom considera două tipuri de ecuații diferențiale de ordinul 1 care se reduc la cele liniare.

7.2.7. Ecuația Bernoulli

Ecuația de forma

$$y'+P(x)y=Q(x)\cdot y^n, \qquad (1)$$

unde $P(x)$ și $Q(x)$ sunt definite și continue pe intervalul $I\subseteq R$ și $n\in R$, $n\neq 0$, $n\neq 1$ se numește *ecuația Bernoulli* (frații Jacques Bernoulli (1654 – 1705) și Jean Bernoulli (1667 – 1748) – matematicieni elvețieni, contemporanii lui Euler și Newton, prin lucrările lor fundamentale și o imensă activitate pedagogică au contribuit foarte mult la dezvoltarea analizei matematice).

Dacă $n=0$ sau $n=1$, ecuația (1) se transformă într-o ecuație liniară neomogenă și respectiv omogenă. Împărțim ecuația (1) la y^n. Obținem ecuația:

$$y^{-n}y' + P(x)\cdot y^{1-n} = Q(x). \qquad (2)$$

Efectuăm substituţia $z = y^{1-n}$. Deci, $z' = (1-n)y^{-n}\cdot y'$ şi ecuaţia (2) se transformă în ecuaţia

$$\frac{z'}{1-n} + P(x)\cdot z = Q(x) \quad \text{sau} \quad z' + (1-n)P(x)\cdot z = (1-n)Q(x),$$

care este deja o ecuaţie liniară. Soluţia ei generală are forma

$$z = e^{\int (n-1)P(x)dx}\left[C + \int (1-n)Q(x)\cdot e^{\int (1-n)P(x)dx}\cdot dx\right].$$

Prin urmare, soluţia generală a ecuaţiei (1) are forma:

$$y = z^{\frac{1}{1-n}} = \left\{e^{\int (n-1)P(x)dx}\left[C + \int (1-n)Q(x)\cdot e^{\int (1-n)P(x)dx}\cdot dx\right]\right\}^{\frac{1}{1-n}}, \qquad (3)$$

Rămâne să cercetăm soluţiile ei singulare. Împărţind ecuaţia (1) la y^n, noi putem să pierdem soluţia $y = 0$. Observăm că dacă $n > 0$, $n \neq 1$ (uşor se verifică că dreapta $y = 0$ satisface ecuaţia (1): $dy = 0$ şi (1) se transformă în identitatea $0 + P(x)\cdot 0 = Q(x)\cdot 0$). Dacă însă $n < 0$, atunci constatăm că dreapta $y = 0$ nu este soluţie a ecuaţiei (1). Prin urmare, dacă $n > 0$, $n \neq 1$, dreapta $y = 0$ (axa OY) este soluţie a ecuaţiei Bernoulli şi pentru $n > 1$, aceste soluţia se obţine din soluţia generală (3) a ecuaţiei (1), considerând $C = \infty$. Deci, dreapta $y = 0$ este o soluţie particulară a ecuaţiei (1). Dacă $0 < n < 1$, atunci dreapta $y = 0$ este o soluţie singulară a ecuaţiei (1) (se obţine din (3) considerând $C = C(x)$). Pentru a ilustra cele spuse mai sus, analizăm următoarele exemple simple: fie ecuaţiile $y' = y^2$; $y' = 2\cdot\sqrt{y}$ dacă $y \geq 0$ şi $y' = \frac{2}{3\cdot\sqrt{y}}$, dacă $y > 0$. Uşor se verifică că aceste ecuaţii sunt ecuaţii Bernoulli cu $n_1 = 2$, $n_2 = \frac{1}{2}$ şi $n_3 = -\frac{1}{2}$. Pe de altă parte, aceste ecuaţii sunt ecuaţii cu variabile separabile. Separând variabilele, obţinem

ecuaţiile: $\frac{dy}{y^2} = dx$, dacă $y \neq 0$, $\frac{dy}{2\cdot\sqrt{y}} = dx$, dacă $y > 0$ şi $\frac{3}{2}\cdot\sqrt{y}\cdot dy = dx$, dacă $y > 0$. Deci, soluţiile lor generale au respectiv forma: $y = -\frac{1}{x+C}$, $y = (x+C)^2$, $x > -C$, şi $y = \sqrt[3]{(x+C)^2}$.

Dreapta $y = 0$ (deci $dy = 0$) pentru ecuaţiile $y' = y^2$ ($dy = y^2dx$) şi $y' = 2\cdot\sqrt{y}$ ($dy = 2\cdot\sqrt{y}dx$) este soluţie, iar pentru ecuaţia $y' = \frac{2}{3\cdot\sqrt{y}}$, adică $3\cdot\sqrt{y}dy = 2dx$, nu este soluţie ($n_2 = -\frac{1}{2} < 0$!). Pentru ecuaţia $dy = y^2dx$ ($n_1 = 2 > 1$) dreapta $y = 0$ este o soluţie particulară: se obţine din $y = -\frac{1}{C+x}$, considerând $C = \infty$. Pentru ecuaţia $dy = 2\sqrt{y}dx$ dreapta $y = 0$ este o soluţie singulară, deoarece se obţine din soluţia ei generală $y = (x+C)^2$ considerând $C = -x = F(x)$.

Notă: În practică, pentru integrarea ecuaţiei Bernoulli nu se foloseşte formula ei generală (3). Se procedează ca în cazul ecuaţiei liniare: căutăm soluţia generală a ecuaţiei (1) sub forma $y = u\cdot v$, unde $u = u_1$ este o soluţie particulară nenulă a ecuaţiei liniare omogene $u' + P(x)\cdot u = 0$, iar v este soluţia generală a ecuaţiei cu variabilele separabile $\frac{dv}{dx} = Q(x)\cdot u_1^{n-1}\cdot v^n$, unde u_1 este soluţia particulară nenulă găsită anterior (a se consulta ex. 6.7; 6.8 din [22]).

7.2.8. Ecuaţia Riccati

Ecuaţia de forma $y' = f(x,y)$, unde $f(x,y)$ este o funcţie pătratică în raport cu funcţia căutată y, adică ecuaţia

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x), \quad (1)$$

se numeşte *ecuaţia Riccati* (Riccati Jacobo – (1676 – 1754) – matematician italian). Dacă $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ sunt continue pe un interval $I \subseteq R$ şi $P(x) \neq 0$, $Q(x) \neq 0$ pe I, atunci condiţiile teoremei Cauchy sunt îndeplinite: $f(x,y) = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$ şi $f'_y(x,y) = 2P(x)y + Q(x)$ sunt continue pe I. Prin urmare, existenţa şi unicitatea soluţiei ecuaţiei (1) într-o vecinătate a punctului x_0, $x_0 \in I$ este garantată. Soluţii singulare ecuaţia (1) nu are. Dacă $P(x) \equiv 0$ pe intervalul I, ecuaţia Riccati se transformă într-o ecuaţie liniară. Dacă însă $Q(x) \equiv 0$, şi $R(x) \equiv 0$ pe intervalul I, ecuaţia (1) se transformă în ecuaţia Bernoulli.

În general, ecuaţia Riccati nu poate fi integrată în cuadraturi. Avem, însă, următoarea teoremă.

Teoremă. Dacă se cunoaşte o soluţie particulară y_1 a ecuaţiei (1), prin schimbarea de funcţie $y = y_1 + \frac{1}{z}$ integrarea ecuaţiei (1) se reduce la integrarea unei ecuaţii liniare.

Demonstraţie. Avem $y = y_1 + \frac{1}{z}$, $y' = y_1' - \frac{z'}{z^2}$ şi ecuaţia (1) are forma:

$$y_1' - \frac{z'}{z^2} = P(x)(y_1^2 + \frac{2y_1}{z} + \frac{1}{z^2}) + Q(x)(y_1 + \frac{1}{z}) + R(x) \text{ sau}$$

$$[-y_1' + P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x)] +$$
$$+ \frac{1}{z^2}[z' + 2y_1P(x)z + Q(x)z + P(x)] = 0. \quad (2)$$

Întrucât y_1 este soluţie a ecuaţiei (1), avem: $-y_1' + P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x) = 0$ şi ecuaţia (2) are forma:

$$z' + [2y_1P(x) + Q(x)]z + P(x) = 0, \quad (3)$$

care este o ecuaţie liniară în raport cu funcţia necunoscută z. Teorema este demonstrată.

Aşadar, dacă este cunoscută o soluţie particulară a ecuaţiei Riccati, atunci integrala generală se obţine prin două cuadraturi.

Dacă y_1 şi y_2 sunt două soluţii particulare ale ecuaţiei (1), atunci integrala generală a ecuaţiei Riccati se obţine printr-o singură cuadratură. Într-adevăr, dacă y_1 şi y_2 sunt două soluţii particulare ale ecuaţiei (1), avem: $y_2 = y_1 + \frac{1}{z_1}$. De unde $z_1 = \frac{1}{y_2 - y_1}$ este o soluţie particulară a ecuaţiei liniare (3). Deci, în virtutea observaţiei (2) din 7.2.6., avem că soluţia generală a ecuaţiei (3) se obţine printr-o cuadratură:

$$z = z_1 + Ce^{-\int[2y_1P(x)+Q(x)]dx}. \quad (4)$$

Prin urmare, soluţia generală a ecuaţiei (1) se obţine de asemenea printr-o cuadratură: $y = y_1 + \frac{1}{z}$, unde z are forma (4).

Dacă, în fine, se cunosc trei soluţii particulare y_1, y_2, y_3 ale ecuaţiei (1), atunci $y_2 = y_1 + \frac{1}{z_1}$ şi $y_3 = y_1 + \frac{1}{z_2}$. De unde $z_1 = \frac{1}{y_2 - y_1}$ şi $z_2 = \frac{1}{y_3 - y_1}$ sunt două soluţii particulare ale ecuaţiei liniare (3). În virtutea observaţiei 2 din 7.2.6, avem că soluţia generală a ecuaţiei (3) se obţine fără nici o cuadratură:

$$z = z_1 + C(z_2 - z_1) = \frac{1}{y_2 - y_1} + C\left(\frac{1}{y_3 - y_1} - \frac{1}{y_2 - y_1}\right). \quad (5)$$

Soluţia generală a ecuaţiei Riccati se obţine fără nici o cuadratură: $y = y_1 + \frac{1}{z}$, de unde $z = \frac{1}{y - y_1}$ şi relaţia (5) are forma:

$$\frac{1}{y-y_1}=\frac{1}{y_2-y_1}+C\left(\frac{1}{y_3-y_1}-\frac{1}{y_2-y_1}\right).$$

Rezolvând această relaţie în raport cu C, obţinem integrala generală a ecuaţiei Riccati sub forma:

$$\frac{\dfrac{1}{y-y_1}-\dfrac{1}{y_2-y_1}}{\dfrac{1}{y_3-y_1}-\dfrac{1}{y_2-y_1}}=C$$

sau

$$\frac{y-y_2}{y-y_1}:\frac{y_3-y_2}{y_3-y_1}=C. \qquad (6)$$

Din formula (6) rezultă următoarele: dacă y_1, y_2, y_3 şi y_4 sunt patru soluţii particulare ale ecuaţiei Riccati, are loc identitatea:

$$\frac{y_4-y_2}{y_4-y_1}:\frac{y_3-y_2}{y_3-y_1}\equiv const.$$

Notă 1. Menţionăm următoarele două cazuri simple în care o soluţie particulară a ecuaţiei Riccati este evidentă:

a) $R(x)=-P(x)b^2-Q(x)b$. În cazul ăsta ecuaţia Riccati are ca soluţie particulară dreapta $y=b$;

b) $R(x)=-P(x)x^2-Q(x)x+1$. Soluţia particulară a ecuaţiei Riccati este dreapta $y=x$.

Exemplul 10. Să se integreze ecuaţia

$$y'=-e^x y^2+(1-2e^x)y-e^x+1.$$

Observăm că ecuaţia dată este ecuaţia Riccati cu $P(x)=-e^x$, $Q(x)=(1-2e^x)$ şi $R(x)=1-e^x$ continue pe R. Întrucât

$$R(x)=-P(x)\cdot(-1)^2-Q(x)\cdot(-1),$$

dreapta $y=-1$ ($b=-1$) este o soluţie particulară a ecuaţiei date (nota 1, a)).

Observăm că şi funcţiile $y_2=-1+2e^{-x}$, $y_3=-1+\dfrac{1}{shx}$

sunt de asemenea soluţii particulare ale acestei ecuaţii. Prin urmare, soluţia generală se obţine fără cuadraturi. Conform formulei (6), avem:

$$\frac{y+1-2e^{-x}}{y+1}:\frac{-1+\dfrac{1}{shx}+1-2e^{-x}}{-1+\dfrac{1}{shx}+1}=C \quad \text{sau}$$

$$\left(1-\frac{2e^{-x}}{y+1}\right):(1-2e^{-x}shx)=C.$$

De unde

$$1-\frac{2e^{-x}}{y+1}=C\left[1-2e^{-x}\cdot\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\right] \quad \text{sau}$$

$$1-\frac{2e^{-x}}{y+1}=C\cdot e^{-2x}.$$

Prin urmare,

$$y+1=\frac{2e^{-x}}{1-C\cdot e^{-2x}} \quad \text{sau}$$

$$y+1=\frac{2e^x}{e^{2x}-C}.$$

Propunem cititorului să verifice că $y_1=-1$, $y_2=-1+2e^{-x}$, $y_3=-1+\dfrac{1}{shx}$ sunt soluţii particulare ale ecuaţiei iniţiale şi să o rezolve în cuadraturi considerând soluţia ei particulară $y_1=-1$. Să se compare rezultatele obţinute (a se consulta ex. 9 din 7.2.6).

Nota 2. Ecuaţia (1) se numeşte *ecuaţia Riccati în formă generală*. Cu ajutorul transformărilor liniare se demonstrează că ecuaţia (1) are forma: $y'=\pm y^2+R(x)$, care se numeşte *ecuaţia Riccati în formă canonică*. Riccati a studiat ecuaţia de forma $y'+Ay^2=Bx^m$, unde A, B, şi m sunt numere reale constante, care poartă numele de ecuaţie specială a lui Riccati. Liouville ((1809 – 1882) – matematician francez) a demonstrat că această ecuaţie se rezolvă în cuadraturi pentru orice m pentru care expresia $\dfrac{m}{2m+4}$ este un număr întreg (atât pozitiv, cât şi negativ) (a se consulta §10, cap.1 din [28]).

7.2.9. Factorul integrant

Considerăm ecuaţia

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0, \qquad (1)$$

unde P şi Q sunt două funcţii reale diferenţiabile pe un domeniu simplu conex $D \subseteq R^2$. Dacă (1) nu este în diferenţiale totale, adică

$$P'_y(x,y) \neq Q'_x(x,y),\ (x,y) \in D,$$

ne propunem să căutăm o funcţie $\mu(x,y)$ astfel încât ecuaţia

$$\mu(x,y)P(x,y)dx+\mu(x,y)Q(x,y)dy=0$$

să fie deja o ecuaţie în diferenţiale totale. Aceasta înseamnă că

$$[\mu(x,y)\cdot P(x,y)]'_y=[\mu(x,y)\cdot Q(x,y)]'_x \quad \text{sau}$$

$$P(x,y)\cdot \mu'_y(x,y)-Q(x,y)\cdot \mu'_x(x,y)=$$
$$=[Q'_x(x,y)-P'_y(x,y)]\cdot \mu(x,y). \qquad (2)$$

Definiţie: Funcţia $\mu(x,y)$ diferenţiabilă pe D care verifică ecuaţia (2) se numeşte *factor integrant* al ecuaţiei (1).

În general, problema aflării unui factor integrant revine la rezolvarea ecuaţiei cu derivate parţiale (2), care este o problemă cu mult mai dificilă decât integrarea ecuaţiei (1). Să observăm, însă, că nu avem nevoie decât de o soluţie particulară a ecuaţiei (2) şi că în anumite cazuri determinarea unei astfel de soluţii e posibilă. De exemplu, dacă căutăm un factor integrant de forma $\mu=\mu(x)$, funcţie care depinde numai de x, ecuaţia (2) se scrie astfel:

$$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{dx}=\frac{1}{Q(x,y)}\left[P'_y(x,y)-Q'_x(x,y)\right] \quad \text{sau}$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{1}{Q(x,y)}\left[P'_y(x,y)-Q'_x(x,y)\right]dx. \qquad (3)$$

Dacă funcţia $\dfrac{P'_y(x,y)-Q'_x(x,y)}{Q(x,y)}$ depinde numai de x, atunci ecuaţia (3) este o ecuaţie cu variabile separate şi integrala ei generală are forma:

$$\ln|\mu|=\int\frac{P'_x-Q'_y}{Q}dx+C_1 \quad \text{sau}$$

$$\mu=C\cdot e^{\int\frac{P'_x-Q'_y}{Q}dx},\ C=\pm e^{C_1}.$$

Luând $C=1$, obţinem un factor integrant, suficient pentru a integra ecuaţia (1).

În mod asemănător se procedează şi în cazul în care cerem ca ecuaţia (1) să admită un factor integrant de forma $\mu(y)$, $\mu(x\pm y)$, $\mu(x^2\pm y^2)$, $\mu(x\cdot y)$, $\mu(\frac{y}{x})$ etc. Într-adevăr, dacă căutăm un factor integrant $\mu(y)$ funcţie numai de y, avem din (2):

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{1}{P(x,y)}\left[Q'_x(x,y)-P'_y(x,y)\right]dy, \qquad (4)$$

şi determinarea lui e posibilă dacă expresia $\dfrac{Q'_x(x,y)-P'_y(x,y)}{P(x,y)}$ depinde numai de y. Dacă această condiţie este satisfăcută, obţinem pe μ printr-o cuadratură: $\ln|\mu|=\int\frac{Q'_x-P'_y}{P}dy$.

Considerăm cazul când factorul integrant are forma $\mu=\mu(\varphi(x,y))$, unde $\varphi(x,y)$ este o funcţie diferenţiabilă pe D. În acest caz ecuaţia (2) are forma:

$$P\cdot\mu'_\varphi\cdot\varphi'_y-Q\cdot\mu'_\varphi\cdot\varphi'_x=[Q'_x-P'_y]\mu \quad \text{sau}$$

$$\mu'_\varphi[P\cdot\varphi'_y-Q\cdot\varphi'_x]=[Q'_x-P'_y]\mu.$$

Dacă $P\cdot\varphi'_y-Q\cdot\varphi'_x\neq 0$, obţinem ecuaţia:

$$\frac{\mu'_\varphi}{\mu}=\frac{Q'_x-P'_y}{P\cdot\varphi'_y-Q\cdot\varphi'_x}. \qquad (5)$$

Ecuația (5) este o ecuație cu variabile separate dacă expresia

$$\frac{Q'_x - P'_y}{P\cdot\varphi'_y - Q\cdot\varphi'_x} = F(\varphi), \tag{6}$$

este o funcție de argumentul $\varphi = \varphi(x,y)$. În cazul ăsta avem:

$$\ln|\mu| = \int \frac{Q'_x - P'_y}{P\cdot\varphi'_y - Q\cdot\varphi'_x}\cdot d\varphi + C_1 = \int F(\varphi)\cdot d\varphi + C_1, \tag{7}$$

adică

$$\mu = C\cdot e^{\int F(\varphi)\cdot d\varphi},\ C = \pm e^{C_1}. \tag{8}$$

Menționăm că dacă $\varphi(x,y) = x$ atunci formula (6) are forma:

$$\frac{Q'_x - P'_y}{P\cdot 0 - Q\cdot 1} = F(x) \text{ sau } \frac{P'_y - Q'_x}{Q} = F(x),$$

adică am obținut că partea dreaptă a ecuației (3) depinde numai de x. Similar, dacă $\varphi(x,y) = y$, atunci formula (6) coincide cu partea dreaptă a ecuației (4). Prin urmare, cazurile $\mu(x)$ și $\mu(y)$ sunt cazuri particulare ale cazului $\mu = \mu(\varphi(x,y))$, când $\varphi = x$ și respectiv $\mu = y$. Propunem cititorului să găsească condițiile de existență a factorului integrant de forma $\mu(x \pm y)$, $\mu(x^2 \pm y^2)$, $\mu(x\cdot y)$, $\mu(\frac{y}{x})$.

Exemplul 11. Fie ecuația diferențială $(x-y)dx+(x+y)dy=0$. Să se demonstreze că această ecuație admite un factor integrant ce depinde de (x^2+y^2) și să se integreze ecuația dată.

Avem $P(x,y) = x - y$ și $Q(x,y) = x + y$ care sunt funcții diferențiabile pe orice domeniu simplu conex $D \subseteq R^2$. Verificăm relația (6) care exprimă existența unui astfel de factor integrant. Deci, $\varphi = (x^2 + y^2)$, $\varphi'_x = 2x$, $\varphi'_y = 2y$ și relația (6) are forma:

$$\frac{1-(-1)}{(x-y)\cdot 2y - (x+y)\cdot 2x} = \frac{2}{-2(x^2+y^2)} = -\frac{1}{\varphi}.$$

Aplicând formula (7), obținem: $\ln|\mu| = -\int\frac{d\varphi}{\varphi} = -\ln\varphi + C_1$. De unde $\mu = C\cdot\frac{1}{\varphi}$, $C = \pm e^{C_1}$. Dacă luăm $C = 1$, avem: $\mu = \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{x^2+y^2}$. Înmulțind ecuația inițială cu $\mu = \frac{1}{x^2+y^2}$ și făcând transformările elementare, obținem:

$$\frac{xdx + ydy}{x^2+y^2} + \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = 0.$$

De unde

$$\frac{d(x^2+y^2)}{2(x^2+y^2)} + \frac{d(\frac{y}{x})}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = 0,$$

adică

$$\frac{1}{2}d\left[\ln(x^2+y^2)\right] + d\left[arctg\left(\frac{y}{x}\right)\right] = 0.$$

Integrând ambele părți, ca o ecuație cu variabilele $x^2 + y^2 = z$ și $\frac{y}{x} = t$ deja separate, obținem:

$$\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+y^2)\right] + arctg\left(\frac{y}{x}\right) = C_1.$$

De unde

$$\sqrt{x^2+y^2} = C\cdot e^{-arctg\left(\frac{y}{x}\right)},\ C = e^{C_1},$$

care reprezintă integrala generală a ecuației date.

Să studiem acum problema aflării soluției singulare a ecuației (1) dacă există factorul integrant $\mu(x,y)$ al ei. Deci, în cazul ăsta există o funcție $u(x,y)$ astfel încât $du = \mu Pdx + \mu Qdy$, adică $Pdx + Q(dy) = \frac{1}{\mu}du$. Deci, ecuația (1) are forma: $\frac{1}{\mu}du = 0$, adică

$du = 0$ sau $\frac{1}{\mu} = 0$. Prima ecuaţie ne conduce la soluţia generală a ecuaţiei (1). Ecuaţia a doua – la aflarea soluţiilor singulare ale ecuaţiei date. Prin urmare, soluţia singulară a ecuaţiei (1) poate fi aceea care satisface ecuaţia (1) şi transformă $\mu(x,y)$ în infinit, ceea ce înseamnă că în orice punct (x_0, y_0), care aparţine domeniului de definiţie al acestei soluţii, avem:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \mu(x,y) = \infty .$$

Aşadar, dacă $\mu(x,y) \neq \infty$ sau $\mu(x,y)$ se transformă în infinit în careva puncte din R^2, atunci ecuaţia (1) nu are soluţii singulare. Prin urmare, ecuaţia diferenţială din exemplul 11 de mai sus nu are soluţii singulare, deoarece factorul integrant al ei $\mu(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ se transformă în infinit într-un singur punct (0,0) din planul XOY.

7.3. Ecuaţii diferenţiale de ordinul 1 nerezolvabile în raport cu derivata dar integrabile în cuadraturi

Până acum ne-am ocupat de ecuaţii diferenţiale în formă normală:

$$y' = f(x,y), \ (x,y) \in D, \tag{1}$$

adică rezolvate în raport cu y'.

În continuare ne vom ocupa de ecuaţii diferenţiale de ordinul 1 de forma

$$F(x,y,y') = 0, \ (x,y) \in D, \tag{2}$$

nerezolvabile în raport cu y'. Ecuaţia (2) defineşte în mod implicit în fiecare punct (x,y) al mulţimii D din planul XOY una sau câteva valori ale lui y'. Dacă vom construi în fiecare punct $(x,y) \in D$ segmente de dreaptă având coeficientul unghiular egal cu valoarea y' în acest punct, vom obţine aşa-numitul *câmp de direcţii*, determinat de ecuaţia (2). A integra ecuaţia (2) înseamnă a afla toate soluţiile ei în formă implicită sau parametrică. Din punct de vedere geometric aceasta înseamnă a afla toate curbele a căror tangentă la fiecare din ele în orice punct al lor coincide cu una din direcţiile câmpului în acest punct.

Presupunem că într-o mulţime D din planul XOY ecuaţia (2) defineşte în mod implicit m valori reale diferite ale lui y':

$$y_i' = f_i(x,y), \ i = 1,2,...,m, \tag{3}$$

În acest caz câmpul de direcţii al ecuaţiei (2) în D poate fi privit ca suprapunerea a m câmpuri ale ecuaţiilor (3) rezolvate în raport cu derivata. Toate soluţiile acestor ecuaţii sunt soluţii ale ecuaţiei date în D.

Fie $\phi_i(x,y,C) = 0$, $i = 1,2,...,m$ integralele generale ale ecuaţiilor (3) în D (pentru fiecare din aceste integrale generale constanta C poate să varieze în limitele sale). Totalitatea acestor integrale generale va fi numită *integrala generală* a ecuaţiei (2) în D.

Ecuaţiile de forma (2) doar în unele cazuri excepţionale pot fi de fapt rezolvate în raport cu derivata şi integrate în cuadraturi (a se consulta 7.2.1 – 7.2.9). În legătură cu aceasta un mare interes îl prezintă metodele, ce permit să se integreze unele tipuri de aşa ecuaţii, fără a le rezolva în raport cu derivata.

Una din aceste metode – metoda introducerii parametrului – se va considera mai jos la unele tipuri de ecuaţii de forma (2) nerezolvabile în raport cu derivata, dar integrabile în cuadraturi.

7.3.1 Ecuaţia, care nu conţine în mod explicit funcţia căutată

Fie ecuaţia

$$F(x,y') = 0. \tag{1}$$

Dacă ecuaţia (1) este rezolvabilă în raport cu x, adică

$$x = f(y'), \tag{2}$$

unde funcţia f este o funcţie continuă împreună cu derivata sa pe un interval $I \subseteq R$, atunci toate soluţiile ecuaţiei (2) pot fi găsite cu ajutorul unei cuadraturi. Într-adevăr are loc următoarea teoremă.

Teoremă. Soluţia generală a ecuaţiei (2) are forma parametrică:

$$\begin{cases} x = f(p), \\ y = \int pf'(p)\cdot dp + C, \ p \in I. \end{cases} \tag{3}$$

Demonstraţie. Să presupunem că $y' = p$ şi să-l considerăm pe parametrul P ca o variabilă independentă. Avem $x = f(p)$, $dx = f'(p)\cdot dp$, care este o ecuaţie cu variabile separate. Soluţia generală a acestei ecuaţii se obţine cu ajutorul unei cuadraturi.

$$y = \int y'dx = \int p\cdot f'(p)\cdot dp + C.$$

Prin urmare, soluţia generală a ecuaţiei (2) are forma parametrică:

$$\begin{cases} x = f(p) \\ y = \int pf'(p)dp + C, \ p \in I. \end{cases}$$

Teorema este demonstrată.

Dacă eliminăm parametrul p din relaţia (3) obţinem în formă explicită sau implicită soluţia generală a ecuaţiei (2): $y = \varphi(x, C)$ sau $\phi(x, y, C) = 0$.

La rezolvarea exemplelor concrete de obicei nu se aplică direct formulele (3), ci însăşi metoda de introducere a parametrului p.

Notă: Dacă ecuaţia (1) nu poate fi rezolvată (prin metode elementare) în funcţie de x şi dacă curba caracterizată de ecuaţia $F(u, v) = 0$ se poate reprezenta parametric $u = \varphi(t)$, $v = \Psi(t)$, $t \in I \subseteq R$, integrarea ecuaţiei (1) se obţine printr-o cuadratură. Într-adevăr, dacă funcţiile φ, φ', Ψ sunt continue pe I, atunci avem: $\frac{dy}{dx} = y'$, şi $dy = y'dx = \psi(t)\cdot\varphi'(t)dt$. De unde $y = \int \Psi(t)\cdot\varphi'(t)dt + C$.

Prin urmare, curbele integrale ale ecuaţiei (1) sunt date parametric

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \int \Psi(t)\cdot\varphi'(t)dt + C, \ t \in I. \end{cases} \tag{4}$$

Menţionăm că formula (3) este un caz particular al formulei (4): $p = t$.

Exemplul 12. Să se integreze ecuaţia

$$(y')^3 + 3xy' - 2x^3 = 0.$$

Pentru a obţine o reprezentare parametrică a curbei $v^3 + 3uv - 2u^3 = 0$, considerăm $v = tu$. Avem:

$$t^3u^3 + 3u^2t - 2u^3 = 0 \ \text{sau} \ t^3u + 3t - 2u = 0.$$

De unde

$$u = \frac{3t}{2 - t^3} \ \text{şi} \ v = \frac{3t^2}{2 - t^3}.$$

În acest fel, $x = u = \frac{3t}{2 - t^3}$ şi $y' = v = \frac{3t^2}{2 - t^3}$.

Deci, $dx = \frac{6(1 + t^3)}{(2 - t^3)^2}dt$ şi $dy = y'\cdot dx = \frac{3t^2}{(2 - t^3)}dx = \frac{3t^2\cdot 6\cdot(1 + t^3)}{(2 - t^3)^3}dt$.

Prin urmare,

$$y = \int \frac{6\cdot(1 + t^3)\cdot 3t^2dt}{(2 - t^3)^3} = \left| \begin{array}{l} 2 - t^3 = s \\ t^3 = 2 - s \\ ds = -3t^2dt \end{array} \right| = \int \frac{6(1 + 2 - s)(-ds)}{s^3} =$$

$$= (-18)\cdot\frac{s^{-2}}{(-2)} + 6\cdot\frac{s^{-1}}{(-1)} + C = \frac{9}{s^2} - \frac{6}{s} + C =$$

$$= 3\frac{3 - 2s}{s^2} + C = \frac{3(2t^3 - 1)}{(2 - t^3)^2} + C.$$

Aşadar, soluţia generală a ecuaţiei date are forma parametrică:

$$x = \frac{3t}{2 - t^3}, \ y = \frac{3(2t^3 - 1)}{(2 - t^3)^2}, \ t \neq \sqrt[3]{2}.$$

Ecuaţia dată nu are soluţii singulare.

7.3.2. Ecuaţia, care nu conţine în mod explicit variabila independentă.

Fie ecuaţia

$$F(y, y') = 0. \tag{1}$$

Dacă se cunoaşte o reprezentare parametrică $u=\varphi(t)$, $v=\Psi(t)$, $t\in I\subseteq R$ a curbei caracterizată de ecuaţia $F(u,v)=0$, integrala generală a ecuaţiei (1) se obţine printr-o cuadratură.

Într-adevăr, dacă funcţiile φ, φ', Ψ sunt continue pe I, avem: $y=\varphi(t)$, $y'_t=\Psi(t)$. Dar $y'_x=\dfrac{dy}{dx}$, de unde $dx=\dfrac{1}{y'}\cdot dy=\dfrac{1}{\Psi(t)}\cdot\varphi'(t)dt$ cu condiţia $y'=\Psi(t)\neq 0$, $t\in I$. Deci,

$$x=\int\frac{\varphi'(t)}{\Psi(t)}dt+C$$

şi soluţia generală a ecuaţiei (1) are forma parametrică:

$$\begin{cases} y=\varphi(t),\\ x=\displaystyle\int\frac{\varphi'(t)}{\Psi(t)}dt+C,\ t\in I.\end{cases}$$

Soluţiile singulare trebuie de studiat printre soluţiile ecuaţiei $\Psi(t)=0$, deoarece $\Psi(t)=0\Rightarrow y'=0\Rightarrow y=b=const$ şi ecuaţia (1) se transformă în ecuaţia $F(b,0)=0$. Prin urmare, dacă ecuaţia (1) are soluţii singulare, atunci ele au forma $y=b$, unde b se determină din ecuaţia $F(b,0)=0$.

Exemplul 13. Să se integreze ecuaţia $y^2\left[(y')^2+1\right]=a^2(y')^2$, $a\neq 0$.

Uşor se verifică că curba $u^2(v^2+1)=a^2v^2$ are reprezentarea parametrică $u=a\sin t$, $v=tgt$, $t\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$. Avem $y=a\sin t$, $y'=tgt$. Deci,

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{a\cos t}{tgt}=\frac{a\cos^2 t}{\sin t}dt,\quad t\neq\pi k,\ k\in Z.$$

Prin urmare,

$$x=\int\frac{a\cos^2 t}{\sin t}dt=a\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin t}dt=a\ln\left|tg\frac{t}{2}\right|+a\cos t+C.$$

Aşadar, soluţia generală a ecuaţiei date are forma parametrică:

$$\begin{cases} x=a\ln\left|tg\dfrac{t}{2}\right|+a\cos t+C,\\ y=a\sin t,\ t\neq\pi k,\ k\in Z.\end{cases}$$

Cercetăm soluţiile singulare. Avem :

$$t=\pi k,\ k\in Z\Rightarrow \sin\pi k=0\Rightarrow y=0.$$

Observăm că dreapta $y=0$ satisface ecuaţia dată: $0(0+1)=0$. Soluţia $y=0$ nu se obţine din soluţia generală a ecuaţiei iniţiale nici pentru o valoare a constantei C, inclusiv ($\pm\infty$). Prin urmare, dreapta $y=0$ este o soluţie singulară a ecuaţiei considerate.

Notă: În cazul când (1) poate fi scrisă sub forma $y=\varphi(y')$ şi funcţia φ este continua împreună cu derivata sa pe $I\subseteq R$ procedăm astfel: luăm ca parametru $p=y'$ şi deci $\dfrac{dy}{dx}=p$. De unde $dx=\dfrac{dy}{p}=\dfrac{\varphi'(p)dp}{p}$, adică

$$x=\int\frac{\varphi'(p)dp}{p}+C$$

şi soluţia generală a ecuaţiei are forma parametrică:

$$x=\int\frac{\varphi'(p)dp}{p}+C,\quad y=\varphi(p).$$

Dacă ecuaţia $y=\varphi(y')$ are soluţii singulare, atunci ele au forma $y=b$, unde $b=\varphi(0)$.

7.3.3 Ecuaţia Lagrange

Ecuaţia de forma

$$y=x\varphi(y')+\psi(y'),\tag{1}$$

se numeşte *ecuaţia Lagrange*.

O ecuaţie Lagrange se recunoaşte uşor prin faptul că este liniară în raport cu x şi y, coeficienţii fiind funcţii de variabila y'.

Dacă funcţiile φ, φ', ψ, ψ' sunt continue pe intervalul $I\subseteq R$, atunci integrarea ecuaţiei Lagrange se reduce la integrarea unei ecuaţii liniare în modul următor: în (1) înlocuim pe y' cu p şi obţinem: $y = x\cdot\varphi(p)+\psi(p)$; apoi derivăm în raport cu x şi ţinem seama că p este funcţie de x:

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(p)+x\cdot\varphi'(p)\cdot\frac{dp}{dx}+\psi'(p)\cdot\frac{dp}{dx}.$$

În această ecuaţie înlocuim $\frac{dy}{dx}$ cu p şi observăm că am obţinut o ecuaţie liniară în raport cu funcţia $x=x(p)$, p, fiind considerat ca variabilă independentă. Într-adevăr, avem:

$$p=\varphi(p)+x\cdot\varphi'(p)\cdot\frac{dp}{dx}+\psi'(p)\cdot\frac{dp}{dx},$$

adică

$$\frac{dp}{dx}[x\cdot\varphi'(p)+\Psi'(p)]+\varphi(p)-p=0, \qquad (2)$$

şi pentru $\varphi(p)-p\neq 0$ obţinem ecuaţia liniară în raport cu funcţia x:

$$\frac{dx}{dp}+\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}x=\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}. \qquad (3)$$

Folosind formula (3) din 7.2.6, soluţia generală a acestei ecuaţii are forma:

$$x=e^{\int\frac{\varphi'(p)dp}{p-\varphi(p)}}\left[C+\int\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}\cdot e^{\int\frac{\varphi'(p)dp}{\varphi(p)-p}}\cdot dp\right]=g(p,C),$$

care, împreună cu $y=x\varphi(p)+\psi(p)$, $p\in I$ determină soluţia generală a ecuaţiei Lagrange sub formă parametrică.

Ne mai rămâne să studiem soluţiile singulare ale ecuaţiei Lagrange.

Dacă $p=p_0$ este o soluţie a ecuaţiei $\varphi(p)-p=0$, adică $\varphi(p_0)=p_0$, atunci $p=p_0$ este o soluţie a ecuaţiei (2). Observăm că dreapta $y=p_0x+\psi(p_0)$ este o soluţie a ecuaţiei Lagrange.

Referitor la dreapta $y=p_0x+\psi(p_0)$, avem două cazuri:

a) $\lim\limits_{p\to p_0}|x|=\lim\limits_{p\to p_0}|g(p,C)|=+\infty$ adică această dreaptă reprezintă o direcţie asimptotică a curbelor integrale reprezentate de soluţia

generală a ecuaţiei Lagrange. În cazul dat dreapta $y=p_0x+\Psi(p_0)$ este o soluţie particulară a ecuaţiei (1).

b) $\lim\limits_{p\to p_0}|x|=\lim\limits_{p\to p_0}|g(p,C)|<+\infty$, adică $\lim\limits_{p\to p_0}|x|$ este un număr finit. În cazul acesta dreapta $y=p_0x+\psi(p_0)$ este o soluţie singulară a ecuaţiei Lagrange.

Exemplul 14. Să se integreze ecuaţia $y=x(y')^2+(y')^2$.

Ecuaţia dată este o ecuaţie Lagrange cu

$$\varphi(y')=\psi(y')=(y')^2,$$

unde funcţiile φ, φ', ψ, ψ' sunt continue pe R. Dacă luăm $y'=p$, atunci $y=xp^2+p^2$. Derivând această ecuaţie în raport cu x, obţinem:

$$y'=p^2+2xpp'+2pp' \text{ sau}$$

$$p=p^2+2xp\cdot\frac{dp}{dx}+2p\cdot\frac{dp}{dx}.$$

De unde

$$2p\cdot\frac{dp}{dx}(x+1)+(p^2-p)=0$$

sau

$$\frac{dx}{dp}(p^2-p)+2px+2p=0.$$

Prin urmare, am obţinut relaţia:

$$p\cdot\left[\frac{dx}{dp}(p-1)+2x+2\right]=0.$$

De unde $p=0$ sau $\frac{dx}{dp}(p-1)+2x+2=0$.

Dacă $p=0$, adică $y'=0$, avem $y=C$. Observăm că dacă $C=0$, atunci dreapta $y=0$ este o soluţie a ecuaţiei iniţiale.

Presupunem că $p-1\neq 0$. Atunci ecuaţia

$$\frac{dx}{dp}+\frac{2}{p-1}x=\frac{2}{1-p}$$

este o ecuaţie liniară în raport cu $x = f(p)$. Integrând această ecuaţie liniară (a se consulta 7.2.6), obţinem soluţia ei generală

$$x = \frac{C}{(p-1)^2} - 1 \text{ şi } y = x(y')^2 + (y')^2 = x \cdot p^2 + p^2 = p^2(x+1) = \frac{Cp^2}{(p-1)^2},$$

dacă $p \neq 0$, $p \neq 1$.

Pentru $p = 0$ obţinem soluţia $y = 0$ (axa OX) care este o soluţie singulară, deoarece $\lim\limits_{p \to 0} |x| = C - 1 < +\infty$. Aceasta înseamnă că în orice punct $(x_0, 0)$, $x_0 \in R$ de pe axa OX trec două soluţii ale ecuaţiei date: dreapta $y = 0$ şi dreapta $x = x_0$ care este o soluţie particulară considerând $C_0 = x_0 + 1$. Pentru $p = 1$ obţinem soluţia $y = x + 1$. În acest caz $\lim\limits_{p \to 1} |x| = \lim \left| \frac{C}{(p-1)^2} - 1 \right| = +\infty$. Prin urmare, dreapta $y = x + 1$ este o direcţie asimptotică a curbelor integrale ale ecuaţiei iniţiale. Aceasta înseamnă că prin orice punct de pe dreapta $y = x + 1$ trece o singură soluţie a ecuaţiei date: însăşi dreapta dată. Aşadar, dreapta $y = x + 1$ este o soluţie particulară a ecuaţiei date.

Afirmaţiile acestea se confirmă uşor dacă excludem parametrul p din integrala generală a ecuaţiei date:

$$\begin{cases} x = \dfrac{C}{(p-1)^2} - 1 \\ y = \dfrac{Cp^2}{(p-1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = \dfrac{C}{(p-1)^2} \\ y = (x+1)p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p - 1 = \pm\sqrt{\dfrac{C}{x+1}} = \dfrac{C_1}{\sqrt{x+1}} \\ y = (x+1)p^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p^2 = \left(1 + \dfrac{C_1}{\sqrt{x+1}}\right)^2 \\ y = (x+1)p^2 \end{cases} \Rightarrow y = (x+1)\left(1 + \frac{C_1}{\sqrt{x+1}}\right)^2, \text{ cu } C_1 = \pm\sqrt{C}.$$

Soluţia $y = 0$ se obţine din soluţia generală considerând $C_1 = -\sqrt{x+1} = F(x)$ (a se consulta definiţia 4 şi alineatele ce urmează după ea din 7.1), adică ea este o soluţie singulară. Soluţia $y = x + 1$ se obţine din soluţia generală considerând $C_1 = 0$, adică ea este soluţie particulară.

7.3.4 Ecuaţia Clairaut.

Ecuaţia de forma

$$y = xy' + \psi(y'), \tag{1}$$

se numeşte *ecuaţia Clairaut* ((1713 – 1765) – matematician şi astronom francez). După cum se vede, ecuaţia Clairaut este un caz particular al ecuaţiei Lagrange, anume când $\varphi(y') = y'$.

Pentru integrarea acestei ecuaţii procedăm la fel ca şi în cazul integrării ecuaţiei Lagrange. Presupunem că funcţiile ψ, ψ' sunt continue pe un interval $I \subseteq R$. Înlocuim pe y' cu p:

$$y = xp + \psi(p). \tag{2}$$

Derivăm în raport cu x şi ţinem seama că p este funcţie de x:

$$p = p + [x + \psi'(p)] \cdot \frac{dp}{dx} \text{ sau}$$

$$[x + \psi'(p)] \cdot \frac{dp}{dx} = 0. \tag{3}$$

Considerăm două cazuri:

a) $\dfrac{dp}{dx} = 0$, adică $p = C$ şi în virtutea relaţiei (2), obţinem:

$$y = xC + \psi(C), \tag{4}$$

Relaţia (4) reprezintă soluţia generală a ecuaţiei Clairaut.

b) $x + \psi'(p) = 0$, adică $x = -\psi'(p)$. Relaţia (2) are forma.

$$y = -p\psi'(p) + \psi(p),$$

care împreună cu $x = -\psi'(p)$ reprezintă soluţia singulară a ecuaţiei Clairaut în formă parametrică (a se consulta [3], cap.18 §3; [28], cap.2, §3; [1], v.2, cap.13, §11, ex. 3).

Exemplul 15. Să se integreze ecuaţia $y = xy' + \sqrt{1 + (y')^2}$.

Observăm că ecuația dată este o ecuație Clairaut cu $\psi(y') = \sqrt{1+(y')^2}$. După formula (4), soluția generală are forma:

$$y = xC + \sqrt{1+C^2},$$

unde C este o constantă arbitrară.

Soluția singulară este caracterizată în formă parametrică de ecuațiile:

$$\begin{cases} x = -\psi'(p) = \dfrac{-p}{\sqrt{1+p^2}}, \\ y = -p\psi'(p) + \psi(p) = -\dfrac{p^2}{\sqrt{1+p^2}} + \sqrt{1+p^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}. \end{cases}$$

Dacă excludem parametrul p, obținem forma implicită a soluției singulare:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Observăm că prin orice punct (x_0, y_0) de pe circumferința $x^2 + y^2 = 1$ trec două curbe integrale ale ecuației considerate: însăși circumferința și o soluție particulară din familia de drepte $y = xC + \sqrt{1+C^2}$ pentru $y_0 \neq 0$ ($C_0 = -\dfrac{x_0}{y_0}$) și prin punctele $(1,0)$ și $(-1,0)$ trec dreptele $x = 1$, $x = -1$ care sunt soluții particulare ale ecuației inverse:

$$x = yx' + \sqrt{1+(x')^2}$$

(circumferința $x^2 + y^2 = 1$ este înfășurătoarea familiei de drepte $y = xC + \sqrt{1+C^2}$) ([3], cap.18, §3).

Prin urmare, curbele integrale ale ecuației date și ale ecuației inverse ei sunt circumferința $x^2 + y^2 = 1$ și toate tangentele duse la această circumferință prin orice punct de pe circumferință.

7.4. Ecuații diferențiale de ordin superior. Noțiuni generale.

În 7.1. am definit o ecuație diferențială ca o relație de forma:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \quad y = f(x), \quad x \in I \subseteq R. \tag{1}$$

Se numește *ordinul* ecuației (1) ordinul maximal al derivatei care figurează în această ecuație. O ecuație diferențială se spune că este de ordin superior dacă ordinul sau $n \geq 2$.

În unele cazuri ecuația (1) poate fi rezolvată în raport cu $y^{(n)}$, adică poate fi scrisă sub forma:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{2}$$

care se numește *formă normală* a ecuației (1).

Se numește *soluție* pe intervalul $I \subseteq R$ a ecuației (1) o funcție $y = \varphi(x)$ derivabilă de n ori pe I, care verifică ecuația (1):

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) = 0, \quad x \in I.$$

Ca și ecuațiile diferențiale de ordinul 1, ecuațiile diferențiale de ordin superior au, în general vorbind, o infinitate de soluții; fiecare soluție reprezintă în planul XOY o curbă oarecare, numită *curbă integrală*.

Definiția 1. Funcția $y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$ se numește *soluție generală* a ecuației (1) studiată pe o mulțime D din R^2, dacă funcția φ este soluție a ecuației date și dacă prin alegerea convenabilă a constantelor $C_1, \ldots, C_n$ funcția $\varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$ se transformă în orice soluție a ecuației (1), a cărei grafic se află în D.

Soluția generală a ecuației (1) poate fi dată sub formă implicită de relația

$$R(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0. \tag{3}$$

De obicei în acest caz, relației (3) i se atribuie denumirea de *integrală generală* pentru a o distinge de funcția explicită $y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$, care este numită *soluție generală*.

Soluția generală a unei ecuații (1) poate fi dată și sub formă parametrică:

$$\begin{cases} x = \psi_1(t, C_1, ..., C_n), \\ y = \psi_2(t, C_1, ..., C_n). \end{cases}$$

Definiția 2. Se numește *soluție particulară* a ecuației (1) o funcție

$$y = g(x),\ x \in I \subseteq R,\ (x, y) \in D \subseteq R^2,$$

care se obține din soluția generală dând valori particulare constantelor $C_1, C_2 ..., C_n$. Graficul unei soluții particulare a ecuației (1) este o curbă plană ce se află în D.

Din definiția (1) rezultă că soluția generală a ecuației (1) depinde de n constante arbitrare. Putem arăta imediat, că are loc și afirmația inversă: orice familie de curbe plane

$$\phi(x, y, C_1, ..., C_n) = 0, \tag{4}$$

unde funcția ϕ este continuă împreună cu derivatele ei parțiale până la ordinul n inclusiv în D, verifică în D o ecuație diferențială de ordinul n. Într-adevăr, derivând ambele părți ale relației (4), obținem succesiv relațiile:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi}{\partial x} + \dfrac{\partial\phi}{\partial y} \cdot y' = 0, \\ \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} \cdot y' + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \cdot (y')^2 + \dfrac{\partial\phi}{\partial y} \cdot y'' = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dfrac{\partial^n\phi}{\partial x^n} + n \cdot \dfrac{\partial^n\phi}{\partial x^{n-1} \cdot \partial y} y' + \dots + \dfrac{\partial\phi}{\partial y} \cdot y^{(n)} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Relațiile (5), împreună cu relația (4) formează un sistem de $(n+1)$ ecuații cu n necunoscute $C_1, ..., C_n$. Dacă determinăm pe $C_1, ..., C_n$ din (5) și le înlocuim în (4), obținem o relație de forma:

$$G(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0,$$

adică o ecuație diferențială de ordinul n. Prin urmare, o familie de curbe care depinde de n parametri verifică în general o ecuație diferențială de ordinul n. De aici rezultă următoarea consecință:

fie (1) o ecuație diferențială de ordinul n și (4) o familie de curbe plane care depinde de n parametri $C_1, ..., C_n$. Dacă din ecuația familiei $\phi(x, y, C, ..., C_n) = 0$ și cele n ecuații ce se obțin

derivând o dată, de două ori ș.a.m.d. de n ori ecuația (4) eliminăm pe $C_1, ..., C_n$ și dacă în rezultatul eliminării se obține ecuația (1), spunem că ecuația (4) este *integrala generală* a ecuației (1).

Dacă se dă ecuația (1), nu este întotdeauna necesar să aflăm soluția ei generală. Într-adevăr, dacă ecuația dată corespunde unui anumit fenomen fizic, pentru determinarea fenomenului fizic corespunzător este necesară o anumită soluție, care pe lângă faptul că verifică ecuația (1), mai trebuie să îndeplinească anumite condiții, numite *condiții inițiale*, sau *condiții Cauchy*, și care o determină în mod unic.

În general, vom precăuta o soluție a ecuației (1), astfel încât pentru $x = x_0$, funcția y și derivatele ei $y', ..., y^{(n-1)}$ să ia valori date dinainte respectiv $y_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}$, adică

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = a_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}. \tag{6}$$

Problema determinării soluției $y = \varphi(x)$ a ecuației diferențiale (1), care satisface condițiile inițiale (6), se numește *problema Cauchy* pentru ecuația (1) pe mulțimea $D \subseteq R^2$.

Condițiile suficiente pentru existența și unicitatea soluției problemei Cauchy pentru ecuația diferențială (2) de ordinul n în formă normală sunt date de teoreme, ce se formulează analogic teoremelor pentru ecuațiile diferențiale de ordinul 1.

Teorema Cauchy. Dacă funcția $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ de $(n+1)$ variabile din ecuația (2) este continuă pe un domeniu închis D (în sensul definiției 11 din 5.1.3.) din spațiul euclidian R^{n+1} de $(n+1)$ dimensiuni și are derivate parțiale de ordinul întâi în raport cu $y, y', ..., y^{(n-1)}$ continue pe D, atunci pentru orice punct interior $(x_0, y_0, y'(x_0), ..., y^{(n-1)}(x_0))$ al acestui domeniu există o singură soluție $y = \varphi(x)$ a ecuației (2) definită într-o vecinătate a punctului $(x_0, y_0) \in R^2$ și care satisface condițiile inițiale (6).

Teorema Picard. Dacă funcția $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ de $(n+1)$ variabile din ecuației (2) este:

a) continuă pe un domeniu închis D al spațiului euclidian $R^{(n+1)}$ de $(n+1)$ dimensiuni;

b) are derivate parțiale de ordinul întâi în raport cu $y, y', ..., y^{(n-1)}$ mărginite în D, atunci pentru orice punct interior $(x_0, y_0, y'(x_0), ..., y^{(n-1)}(x_0))$ al domeniului D există o singură soluție $y = \varphi(x)$ a ecuației (2) definită într-o vecinătate a punctului $(x_0, y_0) \in R_2$ și care satisface condițiile inițiale (6).

Teorema Peano. Dacă funcția $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ de $(n+1)$ variabile din (2) este definită și continuă pe un domeniu închis D al spațiului $(n+1)$ dimensional R^{n+1}, atunci prin fiecare punct interior al domeniului D trece cel puțin o curbă integrală a ecuației (2), care satisface condițiile inițiale (6).

Menționăm că unicitatea soluției problemei lui Cauchy pentru ecuația diferențială de ordin superior nu înseamnă că prin orice punct dat (x_0, y_0) trece numai o singură curbă integrală $y = \varphi(x)$, cum era în cazul ecuației diferențiale de ordinul 1, în formă normală. De exemplu, pentru ecuația diferențială de ordinul 2

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

cu condițiile inițiale $y(x_0) = a_1$, $y'(x_0) = a_1$ unicitatea soluției problemei Cauchy trebuie înțeleasă în sensul că prin punctul $(x_0, y(x_0))$ al planului XOY trece o singură curbă integrală, tangenta căreia are în acest punct coeficientul unghiular $y'(x_0) = a_1$. Prin acest punct (x_0, y_0) poate să treacă încă o infinitate de curbe integrale ale ecuației diferențiale date cu o altă înclinație a tangentei în acest punct.

Fixând valoarea lui x și variind valorile $y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x)$, astfel încât punctul $(x, y(x), ..., y^{(n-1)}(x))$ să aparțină lui $D \subseteq R^{n+1}$ obținem că soluția generală a ecuației (2) poate fi scrisă sub forma:

$$y = \varphi(x\ , y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x)).$$

Rolul constantelor $C_1, C_2, ..., C_n$ îl joacă respectiv numerele:

$$y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x).$$

A rezolva (a integra) o ecuație diferențială de ordin superior înseamnă:

a) a afla soluția ei generală (dacă condițiile inițiale nu sunt date);

b) a afla soluția ei particulară care verifică condițiile inițiale date.

În paragraful ce urmează sunt expuse metode de rezolvare a diverselor ecuații diferențiale de ordin superior.

7.5. Ecuații diferențiale de ordinul n ce admit micșorarea ordinului

7.5.1. Ecuația $y^{(n)} = f(x)$.

Considerăm ecuația de forma $y^{(n)} = f(x)$, unde funcția $f(x)$ este continuă pe $I \subseteq R$. Integrând succesiv (și prin aceasta micșorând ordinul ecuației), obținem:

$$y^{(n-1)} = \int f(x) + C_1 = f_1(x) + C_1, \qquad (1_1)$$

$$y^{(n-2)} = \int f_1(x)dx + C_1x + C_2 =$$
$$= f_2(x) + C_1x + C_2; \qquad (1_2)$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$y = \int f_{n-1}(x)dx + C_1 \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} +$$
$$+ C_2 \cdot \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + C_n = g(x, C_1, ..., C_n), \qquad (1_n)$$

unde fiecare din integrale reprezintă o primitivă oarecare a funcției de sub integrala respectivă, iar $C_1, C_2, ..., C_n$ sunt constante arbitrare reale.

Substituind funcția (1) direct în ecuația $y^{(n)} = f(x)$, ne convingem, că această funcție pentru orice valori ale constantelor $C_1, C_2, ..., C_n$ satisface ecuația dată. Funcția (1) reprezintă soluția generală a ecuației $y^{(n)} = f(x)$ în domeniul

$$D = \{(x,y) \in R^2 | x \in I, y \in R\}.$$

Observăm că ecuația dată este rezolvată cu ajutorul a n cuadraturi. Pentru a afla soluția particulară a acestei ecuații ce satisface condițiile inițiale:

$$x = x_0, y(x_0) = y_0, y'(x_0) = a_1, \; y'(x_0) = a_2, ..., y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1},$$

substituim în expresiile $(1_n),...,(1_2),(1_1)$ pentru $y, y', ..., y^{(n-1)}$ condițiile inițiale date și rezolvăm sistemul din n ecuații algebrice liniare în raport cu necunoscutele $C_1, C_2, ..., C_n$. Fie $(C_1^*, C_2^*, ..., C_n^*)$ o soluție a acestui sistem. Atunci soluția particulară are forma

$$y = \underbrace{\int dx \int dx ... \int}_{n\text{-ori}} f(x)dx + C_1^* \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} +$$

$$+ C_2^* \cdot \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + C_n^* = g(x, C_1^*, ..., C_n^*).$$

7.5.2. Ecuația de forma $F(x, y^{(n)}) = 0$.

Considerăm ecuația de forma $F(x, y^{(n)}) = 0$.

Dacă ecuația dată poate fi rezolvată în raport cu $y^{(n)}$, adică

$$y^{(n)} = f_k(x), \; , = 1,2,...,m,$$

atunci integrarea ei se reduce la cazul precedent 7.5.1.

Presupunem că ecuația

$$F(x, y^{(n)}) = 0$$

nu poate fi rezolvată în raport cu $y^{(n)}$, dar se cunoaște o reprezentare parametrică a curbei caracterizată de ecuația $F(u,v) = 0$: $u = \varphi(t)$, $v = \psi(t)$, $t \in I \subseteq R$.

Dacă funcțiile φ, φ', ψ sunt continue pe intervalul $I \subseteq R$, atunci avem: $x = \varphi(t)$, $y^{(n)} = \Psi(t)$. Deoarece

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = \frac{d\left(y^{(n-1)}\right)}{dx}, \text{ avem:}$$

$$d\left(y^{(n-1)}\right) = y^{(n)} \cdot dx = \psi(t) \cdot \varphi'(t)dt, \text{ de unde}$$

$$y^{(n-1)} = \psi(t) \cdot \varphi'(t)dt + C_1 = y_1(t, C_1).$$

Analog se calculează $y^{(n-2)}, ..., y', y$ și obținem:

$$y = g_n(t, C_1, C_2, ..., C_n),$$

care împreună cu $x = \varphi(t)$ reprezintă soluția generală a ecuației date în formă parametrică.

Exemplul 1. Să se integreze ecuația: $x = y'' + \sin(y'')$.

O reprezentare parametrică a ecuației date este:

$$\begin{cases} y'' = t, \\ x = t + \sin t. \end{cases}$$

Avem: $y'' = (y')' = t$ și $dx = (1 + \cos t)dt$. Deci,

$$y' = \int y'' dx = \int t \cdot (1 + \cos t)dt = \frac{1}{2}t^2 + t\sin t + \cos t + C_1,$$

$$y = \int y' dx = \int \left(\frac{1}{2}t^2 + t\sin t + \cos t + C_1 \right) \cdot (1 + \cos t)dt =$$

$$= \int \left(\frac{t^2}{2} + t\sin t + \cos t + C_1 + \frac{t^2}{2}\cos t + t\sin t\cos t + \cos^2 t + C_1 \cos t \right) dt =$$

$$= \frac{t^3}{6} + (-t\cos t + \sin t) + \sin t + C_1 t + \frac{1}{2}\left(t^2 \sin t - 2t\cos t - 2\sin t\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}t\sin^2 t - \frac{1}{4}t + \frac{1}{8}\sin 2t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C_1 \sin t + C_2 =$$

$$= \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 \sin t + \frac{1}{4}t\left(1 + 2\sin^2 t\right) + \sin t + \frac{3}{8}\sin 2t + C_1(t + \sin t) + C_2,$$

care împreună cu $x = t + \sin t$ reprezintă soluția generală a ecuației date în formă parametrică.

7.5.3. Ecuaţia de forma $F(x, y^{(k)},..., y^{(n)}) = 0$.

Fie ecuaţia

$$F(x,y^{(k)},...,y^{(n)})=0, \qquad (1)$$

în care lipsesc $y, y',..., y^{k-1}$, unde $1 < k < n$.

Prin schimbarea de variabilă $y^{(k)} = z$, ecuaţia (1) se transformă în ecuaţia:

$$F(x,z,z',...,z^{(n-k)})=0, \qquad (2)$$

adică am obţinut o ecuaţie diferenţială de ordinul $(n-k)$. Dacă reuşim să determinăm soluţia generală a ecuaţiei (2): $z=\varphi(x,C_1,C_2,...,C_{n-k})$ atunci integrarea ecuaţiei (1) se reduce la integrarea ecuaţiei diferenţiale $y^{(k)}=\varphi(x,C_1,...,C_{n-k})$, care este o ecuaţie de tipul 7.5.1.

7.5.4. Ecuaţia de forma $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$.

Considerăm ecuaţia diferenţială $F(y^{(n-1)}, y^{(n)} = 0$.

Dacă $u=\varphi(t)$, $v=\psi(t)$, $t\in I\subseteq R$ cu φ, φ', ψ continue pe I şi $\psi(t)\neq 0$ pe I este o reprezentare parametrică a curbei caracterizată de ecuaţia $F(u,v)=0$, atunci soluţia generală a ecuaţiei date se obţine prin n cuadraturi. Într-adevăr, avem: $y^{(n-1)}=\varphi(t)$, $y^{(n)}=\psi(t)$, $t\in I$.

Din relaţia $dy^{(n-1)}=y^{(n)}dx=\psi(t)\cdot dx$ obţinem că $dx=\dfrac{d\left(y^{(n-1)}\right)}{\Psi(t)}=\dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt$. De unde $x=\displaystyle\int\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt+C_n$.

Prin urmare,

$$x=\int\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt+C_n \text{ şi } y^{(n-1)}=\varphi(t).$$

În continuare procedăm că în cazul 7.5.2. şi obţinem:

$$y=g(t,C_1,C_2,...,C_{n-1}).$$

Aşadar, soluţia generală a ecuaţiei date are forma parametrică

$$\begin{cases} x=\displaystyle\int\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt+C_n, \\ y=g(t,C_1,C_2,...,C_{n-1}),\ t\in I. \end{cases}$$

7.5.5. Ecuaţia de forma $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$.

Considerăm ecuaţia diferenţială $F(y^{(n-2)},y^{(n)})=0$.

Dacă se cunoaşte că

$$u=\varphi(t),\ v=\varphi(t),\ t\in I$$

este o reprezentare parametrică a curbei de ecuaţia $F(u,v)=0$ cu φ, φ', ψ continue pe I, atunci integrarea ecuaţiei date se obţine prin cuadraturi.

Într-adevăr, avem: $y^{(n-2)}=\varphi(t)$, $y^{(n)}=\psi(t)$.

Deoarece

$$d\left(y^{(n-1)}\right)=y^{(n)}dx, \text{ şi } d\left(y^{(n-2)}\right)=y^{(n-1)}dx,$$

obţinem:

$$\frac{d\left(y^{(n-1)}\right)}{y^{(n)}}=\frac{d\left(y^{(n-2)}\right)}{y^{(n-1)}}(=dx).$$

De unde

$$y^{(n-1)}\cdot d\left(y^{(n-1)}\right)=y^{(n)}\cdot d\left(y^{(n-2)}\right)=\psi(t)\cdot\varphi'(t)dt.$$

Prin urmare,

$$\int\left(y^{(n-1)}\right)\cdot d\left(y^{(n-1)}\right)=\int\psi(t)\cdot\varphi'(t)dt,$$

adică

$$\frac{\left[y^{(n-1)}\right]^2}{2}=\int\psi(t)\cdot\varphi'(t)dt+C_1$$

sau

$$y^{(n-1)}=\pm\sqrt{2\left[\int\psi(t)\cdot\varphi'(t)dt+C_1\right]}.$$

Această ecuaţie diferenţială împreună cu ecuaţia diferenţială

$$y^{(n-2)} = \varphi(t)$$

permit aflarea soluţiilor ecuaţiei date folosind procedeul din punctul precedent (7.5.4.).

7.5.6. Ecuaţia de forma $F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0$.

Fie ecuaţia

$$F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0,$$

în care lipseşte variabila independentă x. Ordinul ecuaţiei (1) se reduce cu o unitate dacă facem substituţia: $\frac{dy}{dx} = \varphi(y) = p$, unde p este o funcţie de variabila y. Atunci

$$y''_x = (y'_x)'_x = p'_x = p'_y \cdot y'_x = p \cdot \frac{dp}{dy},$$

$$y'''_x = (y''_x)'_x = \left(p \cdot \frac{dp}{dy}\right)'_x = \left(p \cdot \frac{dp}{dy}\right)'_y \cdot y'_x =$$

$$= (p'_y \cdot p'_y + p \cdot p''_{y^2})p = p \cdot \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2 \cdot \frac{d^2 p}{dy^2}.$$

În mod asemănător se calculează toate derivatele până la ordinul n. Înlocuind expresiile derivatelor $y'', y''', ..., y^{(n)}$ în ecuaţia (1), obţinem o nouă ecuaţie diferenţială de ordinul $(n-1)$:

$$F_1(y, p, p'', ..., p^{n-1}) = 0. \qquad (2)$$

Dacă reuşim să determinăm soluţia generală a ecuaţiei (2): $p = \Psi(y, C_1, C_2, ..., C_{n-1})$, atunci integrarea ecuaţiei (1) se reduce la integrarea ecuaţiei diferenţiale de ordinul întâi: $y' = \Psi(y, C_1, ..., C_{n-1})$.

Exemplul 2. Să se integreze ecuaţia:

$$yy'' - (y')^2 = 0.$$

Această ecuaţie este de tipul 7.5.6. cu $n = 2$.

Fie $y' = p = p(y) \neq 0$. Atunci $y''_x = p \cdot \frac{dp}{dy}$ şi înlocuind în ecuaţia dată, obţinem o ecuaţie diferenţială cu variabile separabile:

$$y \cdot p \cdot \frac{dp}{dy} - p^2 = 0, \text{ sau } y \cdot \frac{dp}{dy} - p = 0.$$

Soluţia generală a acestei ecuaţii este $p = C_1 y$. Deci $y'_x = \frac{dp}{dy} = C_1 y$. Această ecuaţie este şi ea o ecuaţie cu variabile separabile şi are soluţia generală $y = C_2 \cdot e^{C_1 x}$.

7.5.7. Ecuaţia de forma $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$, unde funcţia F este omogenă în raport cu $y, y', ..., y^{(n)}$.

Fie ecuaţia de forma:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \qquad (1)$$

unde funcţia $F(x, y, y', ..., y^{(n)})$ este omogenă în raport cu argumentele $y, y', ..., y^{(n)}$, adică

$$F(x, ty, ty', ..., ty^{(n)}) = t^m \cdot F(x, y, y', ..., y^{(n)}), \; m \in R$$

(a se consulta 5.4.5.).

Dacă înlocuim $t = \frac{1}{y}$, obţinem:

$$F\left(x, 1, \frac{y'}{y}, ..., \frac{y^{(n)}}{y}\right) = \frac{1}{y^m} \cdot F(x, y, y', ..., y^{(n)}),$$

adică

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = y^m \cdot F\left(x, \frac{1}{x}, \frac{y'}{y}, ..., \frac{y^{(n)}}{y}\right).$$

În cazul acesta, dacă $y \neq 0$, atunci ecuația (1) este echivalentă cu ecuația

$$F\left(x, 1, \frac{y'}{y}, \ldots, \frac{y^{(n)}}{y}\right) = 0.$$

Ecuația (2) admite micșorarea ordinului cu o unitate prin schimbarea de funcție $\frac{y'_x}{y} = u = \varphi(x)$. Într-adevăr, avem: $y'_x = u \cdot y$,

$$y''_x = (uy)'_x = uy'_x + u'y = u \cdot uy + u'y = y(u^2 + u'),$$

$$y''' = \left[y(u^2 + u')\right]'_x = y'_x(u^2 + u') + y(2u \cdot u' + u'') =$$

$$= uy(u^2 + u') + y(2u \cdot u' + u'') = y(u^3 + 3u \cdot u' + u'').$$

Se observă că $y_x^{(k)}$ se exprimă cu ajutorul lui y înmulțit cu o expresie în care apare funcția $u = u(x)$ și derivatele ei $u', u'', \ldots, u^{(k-1)}$.

Prin urmare, dacă înlocuim în ecuația (2) pe $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ prin expresiile respective, obținem o ecuație diferențială de ordinul $(n-1)$, unde funcția necunoscută este $u = u(x) = \frac{y'}{y}$:

$$F^*(x, u, u', \ldots, u^{(n-1)}) = 0.$$

Notă: Același rezultat se obține dacă facem schimbarea de funcție $y = e^{\int u(x) \cdot dx}$.

Într-adevăr din relația $\frac{y'}{y} = u(x)$, avem: $y' = y \cdot u(x)$.

Rezolvând această ecuație diferențială cu variabile separabile, obținem soluția generală

$$y = C_1 \cdot e^{\int u(x) dx}.$$

Considerând $C_1 = 1$, avem soluția particulară

$$y = e^{\int u(x) dx}$$

(a se consulta [4], cap. 13, § 7).

7.6. Ecuații diferențiale liniare de ordin superior

Ecuațiile diferențiale liniare prezintă cel mai simplu și cel mai studiat tip de ecuații diferențiale de ordin superior. Aceasta se explică pe de o parte prin faptul că ecuațiile liniare se bucură de o serie de proprietăți, ce ușurează considerabil aflarea și cercetarea soluțiilor lor, pe de altă parte, prin faptul că rezolvarea multor probleme practice din fizică, mecanică, tehnică și mai ales electrotehnică ne conduc la rezolvarea unor asemenea ecuații. În cazul când o problemă oarecare practică ne conduce la o ecuație neliniară mai complicată, adesea se folosesc metode aproximative de rezolvare, care permit să înlocuim ecuația neliniară printr-o ecuație liniară *„apropiată"* de ea.

Ne vom opri mai amănunțit asupra studierii proprietăților soluțiilor ecuațiilor liniare și vom examina de asemenea metode de construire a soluțiilor lor generale.

7.6.1. Noțiuni generale despre ecuații diferențiale liniare de ordin superior

Ecuația diferențială de ordinul n

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

se numește *liniară*, dacă funcția $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ este liniară în raport cu funcția căutată y și cu toate derivatele ei. Prin urmare, orice ecuație diferențială liniară de ordinul n poate fi scrisă sub forma:

$$A_0(x)y^{(n)} + A_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + A_n(x)y + A_{n+1}(x) = 0. \quad (1)$$

În cazul când coeficienții $A_i(x)$ $(i = 0, \ldots, n)$ sunt constanți, ecuația (1) se numește *ecuație liniară cu coeficienți constanți.* Termenul liber $A_{n+1}(x)$ în acest caz poate fi constant sau o funcție de variabila independentă x.

Ecuațiile diferențiale liniare se scriu de obicei în așa-numită formă redusă:

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + P_n(x)y = f(x). \quad (2)$$

Observăm că ecuaţiile (1) şi (2) sunt echivalente dacă $A_0(x) \neq 0$.

Pe parcurs vom considera ecuaţia liniară de forma (2) cu coeficienţii $P_1(x), P_2(x), ..., P_n(x)$ şi partea dreaptă $f(x)$ continue într-un interval oarecare I (finit sau infinit) al axei OX. În aceste ipoteze ecuaţia (2) satisface pe mulţimea

$$D = \left\{ (x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \middle| x \in I, y \in R, y' \in R, ..., y^{(n-1)} \in R \right\}$$

a spaţiului $(n+1)$ dimensional R^{n+1} condiţiile de existenţă şi unicitate ale teoremei Cauchy (vezi 7.4.). Într-adevăr, deoarece ecuaţia (2), rezolvată în raport cu $y^{(n)}$, are aspectul:

$$y^{(n)} = f(x) - P_1(x) y^{(n-1)} - ... - P_n(x) y,$$

atunci funcţia

$$g(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) = f(x) - P_1(x) y^{(n-1)} - ... - P_n(x) y$$

este continuă pe D şi are derivate parţiale de ordinul întâi continue în raport cu $y, y', ..., y^{(n-1)}$:

$$g'_y = -P_n(x), \quad g'_{y'} = -P_{n-1}(x), ..., g'_{y^{(n-1)}} = -P_1(x).$$

De aici rezultă că pentru orice condiţii iniţiale

$$x = x_0 \in I, \; y(x_0) = y_0 \in R, \; y'(x_0) = a_1 \in R, ..., y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1} \in R$$

există o singură soluţie a ecuaţiei (2), ce satisface aceste condiţii iniţiale. Se poate demonstra că această soluţie va fi determinată nu numai într-o vecinătate a punctului $x_0 \in I$, ci şi pe tot intervalul $I \subseteq R$.

Evident că ecuaţia liniară (2) în acest caz nu are soluţii singulare.

Ecuaţia (2) se numeşte *ecuaţie liniară neomogenă*, sau *ecuaţie liniară cu partea dreaptă*, dacă funcţia $f(x)$ nu este identic egală cu zero pe I. Dacă $f(x) = 0$ pentru orice $x \in I$, ecuaţia

$$y^{(n)} + P_1(x) y^{(n-1)} + ... + P_n(x) y = 0 \qquad (3)$$

se numeşte *ecuaţie liniară omogenă*, sau ecuaţie liniară fără partea dreaptă.

În continuare, pentru prescurtarea scrierii, introducem următorul operator, numit *operator liniar diferenţial*:

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + P_1(x) \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + ... + P_{n-1}(x) \frac{d}{dx} + P_n(x), \qquad (4)$$

cu ajutorul căruia ecuaţia (2) se transformă în ecuaţia

$$L(y) = f(x), \qquad (5)$$

iar ecuaţia (3) are forma

$$L(y) = 0. \qquad (6)$$

Evident că operatorul L este complet determinat de coeficienţii ecuaţiei (2) sau (3). Operatorul L are următoarele proprietăţi:

a) Factorul constant poate fi scos în afara operatorului: $L(Cy) = CL(y)$;

b) Operatorul de la suma a două funcţii este egal cu suma operatorilor de la aceste două funcţii: $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$.

Demonstrarea acestor două propoziţii matematice reiese din proprietăţile similare ale derivatelor.

Proprietatea a doua poate fi generalizată asupra unui număr finit de funcţii.

Din a) şi b) reiese următoarea afirmaţie:

c) $L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) = C_1 L(y_1) + C_2 L(y_2) + ... + C_n L(y_n)$,

unde $C_1, C_2, ..., C_n$ sunt constante arbitrare.

7.6.2. Ecuaţii liniare omogene cu coeficienţi arbitrari

Fie

$$y^{(n)} + P_1(x) \cdot y^{(n-1)} + ... + P_n(x) \cdot y = 0 \qquad (1)$$

o ecuaţie liniară omogenă, unde $P_1(x), ..., P_n(x)$ sunt funcţii continue pe acelaşi interval $I \subseteq R$. Cu ajutorul operatorului liniar diferenţial, ecuaţia (1) are forma:

$$L(y) = 0. \qquad (2)$$

Teorema 1. Dacă y_1 este o soluţie a ecuaţiei liniare omogene (2), atunci C_1y_1 este de asemenea o soluţie a acestei ecuaţii, unde C_1 este o constantă arbitrară.

Demonstraţie. Deoarece y_1 este o soluţie a ecuaţiei (2) avem $L(y_1)=0$. Folosind proprietatea a) a operatorului liniar diferenţial L din 7.6.1. obţinem că $L(C_1y_1)=C_1L(y_1)=0$, adică C_1y_1 este de asemenea o soluţie a ecuaţiei liniare omogene (2), unde C_1 este o constantă arbitrară.

Teorema 2. Dacă $y_1,y_2,...,y_n$ sunt n soluţii ale ecuaţiei liniare omogene (2), atunci combinaţia lor liniară

$$y=C_1y_1+C_2y_2+...+C_ny_n, \qquad (3)$$

cu coeficienţi constanţi arbitrari $C_1,C_2,...,C_n$, este de asemenea o soluţie a acestei ecuaţii.

Demonstraţia reiese din teorema 1 şi proprietatea c) a operatorului L din 7.6.1.

Funcţia y dată de (3) este o soluţie a ecuaţiei (2) şi conţine n constante arbitrare. Vom stabili, în continuare, condiţiile pe care trebuie să le satisfacă cele n soluţii $y_1,y_2,...,y_n$ ale ecuaţiei (2), astfel încât orice soluţie a ecuaţiei (2) să se obţină din (3) prin particularizarea constantelor $C_1,C_2,...,C_n$.

În acest scop sunt necesare următoarele definiţii.

Definiţia 1. Sistemul din n funcţii $\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_n(x)$ definite pe acelaşi interval $I\subseteq R$, se numeşte *sistem liniar dependent pe intervalul I*, dacă există n numere $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ astfel încât cel puţin unul din ele este diferit de zero şi are loc relaţia:

$$\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)+...+\alpha_n\varphi_n(x)=0$$

pentru orice $x\in I$.

Definiţia 2. Sistemul de n funcţii $\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)$, definite pe $I\subseteq R$, se numeşte *sistem liniar dependent* dacă cel puţin o funcţie din acest sistem este o combinaţie liniară a celorlalte funcţii.

Propunem cititorului să demonstreze că aceste două definiţii sunt echivalente.

Definiţia 3. Sistemul de n funcţii $\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_n(x)$, definite pe $I\subseteq R$, se numeşte *sistem liniar independent pe I* dacă relaţia

$$\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)+...+\alpha_n\varphi_n(x)=0$$

pentru orice $x\in I$ şi $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ numere reale implică

$$\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0.$$

Observăm că dacă funcţiile $\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_n(x)$ definite pe I formează un sistem liniar independent , atunci nici una din ele nu este o combinaţie liniară a celorlalte. De asemenea, menţionăm că orice sistem de funcţii care conţine o funcţie egală identic cu zero este un sistem liniar dependent.

Dependenţa liniară a două funcţii $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ definite pe I este echivalentă cu proporţionalitatea acestor două funcţii.

Într-adevăr, dacă $\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)=0$ pentru orice $x\in I$ şi de exemplu $\alpha_1\neq 0$, atunci $\varphi_1(x)=-\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\varphi_2(x)$, adică

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}=-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=const.$$

Invers, dacă $\dfrac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}=\alpha=const.$, atunci $\varphi_1(x)-\alpha\cdot\varphi_2(x)=0$ pentru orice $x\in I$. Observăm că $\alpha_1=1\neq 0$ şi $\alpha_2=-\alpha$.

Exemplul 1. Funcţiile $1,x,x^2,...,x^n$ formează un sistem liniar independent pe orice intervale $I\subseteq R$.

Într-adevăr, egalitatea $\alpha_1\cdot 1+\alpha_2\cdot x+\alpha_3\cdot x^2+...+\alpha_{n+1}\cdot x^n=0$, unde nu toate $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_{n+1}$ sunt egale cu zero, nu poate avea loc pentru orice $x\in R$, deoarece orice ecuaţie algebrică de gradul n admite cel mult n rădăcini reale. Prin urmare, egalitatea de mai sus are loc pentru orice $x\in R$ numai în cazul când $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=...=\alpha_{n+1}=0$.

Exemplul 2. Funcţiile $y_1 = e^x$ şi $y_2 = e^{-x}$ formează un sistem liniar independent pe orice interval $I \subseteq R$.

Într-adevăr, egalitatea $\alpha_1 \cdot e^x + \alpha_2 \cdot e^{-x} = 0$, unde α_1 şi α_2 sunt numere reale diferite de zero nu poate fi îndeplinită decât într-un punct. Aceasta rezultă din faptul că

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x} \neq const., \ \forall x \in I \subseteq R.$$

Exemplul 3. Funcţiile $y_1 = \sin^2 x$, $y_2 = \cos^2 x$ şi $y_3 = 1$ formează un sistem liniar dependent pe R, deoarece

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$$

pentru orice $x \in R$. În acest caz $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ şi $\alpha_3 = -1$.

Exemplul 4. Funcţiile $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$ şi $y_3 = chx$ formează un sistem liniar dependent pe $I \subseteq R$, deoarece avem identitatea:

$$y_3 = chx = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2,$$

adică funcţia y_3 este o combinaţie liniară a funcţiilor y_1 şi y_2.

Exemplul 5. Funcţiile $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}$, unde $k_i \in R$, $k_i \neq k_j$ pentru $i \neq j$, $i, j = 1,2,\dots,n$ formează un sistem liniar independent pe $I \subseteq R$.

Pentru a simplifica calculele, ne limităm la cazul $n = 3$. Presupunem că funcţiile $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}$ şi $e^{k_3 x}$ formează un sistem liniar dependent. Deci, avem identitatea:

$$\alpha_1 e^{k_1 x} + \alpha_2 e^{k_2 x} + \alpha_3 e^{k_3 x} = 0$$

pentru orice $x \in I$ şi presupunem că $\alpha_3 \neq 0$. Împărţind identitatea la $e^{k_1 x}$ şi derivând relaţia obţinută în raport cu x, obţinem identitatea:

$$\alpha_2 (k_2 - k_1) \cdot e^{(k_2 - k_1)x} + \alpha_3 (k_3 - k_1) \cdot e^{(k_3 - k_1)x} = 0.$$

Împărţim ultima relaţie la $e^{(k_2 - k_1)x}$ şi derivând ambele părţi în raport cu x, avem:

$$\alpha_3 (k_3 - k_1) \cdot (k_3 - k_2) \cdot e^{(k_3 - k_2)x} = 0$$

pentru orice $x \in I$.

Întrucât $e^{(k_3 - k_2)x} \neq 0$ pentru orice $x \in I$, avem:

$$\alpha_3 (k_3 - k_1) \cdot (k_3 - k_2) = 0.$$

Am primit o contrazicere, deoarece numerele $\alpha_3 \neq 0$, $k_3 - k_1 \neq 0$ şi $k_3 - k_2 \neq 0$. Deci, presupunerea că sistemul dat este liniar dependent este falsă. Prin urmare, sistemul $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}$ este liniar independent pe $I \subseteq R$.

Exemplul 6. Fie

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} x^2, x \in]-1,0[, \\ 0, x \in [0,1[, \end{cases} \quad \text{şi} \quad \varphi_2(x) = \begin{cases} 0, x \in]-1,0[, \\ x^2, x \in [0,1[. \end{cases}$$

Propunem cititorului să demonstreze că aceste două funcţii formează un sistem liniar dependent pe intervalele $]-1,0[$, $]0,1[$ şi liniar independent pe $]-1,1[$.

Nota 1. Fie $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ un sistem liniar dependent de funcţii pe $I \subseteq R$. Evident că: orice alt sistem de funcţii care conţine acest sistem este de asemenea liniar dependent şi orice subsistem al unui sistem liniar independent este de asemenea liniar independent.

Definiţia 4. Fie $y_1, y_2, \dots, y_n$ un sistem de n funcţii reale definite şi derivabile de $(n-1)$ ori pe intervalul $I \subseteq R$. Determinantul

$$W(x) = W(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (4)$$

se numeşte *determinantul lui Wronski* ((1778-1853) – matematician polonez) sau Wronskianul funcţiilor $y_1, \dots, y_n$.

Teorema 3. Dacă funcţiile reale definite şi derivabile de $(n-1)$ ori pe I formează un sistem liniar dependent pe I, atunci $W(x) = 0$ pentru orice $x \in I$.

Demonstraţie. Sistemul de funcţii $y_1, \dots, y_n$ fiind liniar dependent pe I, conform definiţiei 2, o funcţie din ele, de exemplu y_n, este o combinaţie liniară a celorlalte, adică:

$$y_n = C_1 y_1 + \dots + C_{n-1} y_{n-1}, \ x \in I.$$

Derivând această relaţie de $(n-1)$ ori şi înlocuind valorile $y_n, y_n', \ldots, y_n^{(n-1)}$ în ultima coloană a wronskianului, obţinem determinantul:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & (C_1 y_1 + \ldots + C_{n-1} y_{n-1}) \\ y_1' & y_2' & \ldots & (C_1 y_1' + \ldots + C_{n-1} y_{n-1}') \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & (C_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + C_{n-1} y^{(n-1)}_{n-1}) \end{vmatrix}.$$

Descompunând acest determinant într-o sumă de $(n-1)$ determinanţi după elementele ultimei coloane, obţinem că în fiecare determinant de acest fel două coloane sunt proporţionale. Însă determinantul cu două coloane (linii) proporţionale este egal cu zero. Prin urmare, wronskianul funcţiilor $y_1, \ldots, y_n$ este egal cu zero. Teorema este demonstrată.

Constatăm, că această condiţie necesară ca un sistem de funcţii să fie liniar dependent nu este suficientă. Într-adevăr, după cum am spus în exemplul 6, sistemul de funcţii

$$y_1 = \varphi_1(x) = \begin{cases} x^2, x \in]-1,0[, \\ 0, x \in [0,1[, \end{cases} \quad \text{şi} \quad y_2 = \varphi_2(x) = \begin{cases} 0, x \in]-1,0[, \\ x^2, x \in [0,1[, \end{cases}$$

este liniar independent pe $]-1,1[$. Observăm însă că wronskianul funcţiilor y_1 şi y_2

$$W(x) = W(y_1, y_2) = \begin{cases} \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = 0, x \in]-1,0[, \\ \\ \begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ 0 & 2x \end{vmatrix} = 0, x \in [0,1[\end{cases}$$

adică $W(x) = 0$ pentru orice $x \in]-1,1[$.

Teorema 4. Fie $y_1, y_2, \ldots, y_n$ soluţii ale ecuaţiei liniare omogene (1), unde coeficienţii $P_1(x), \ldots, P_n(x)$ sunt funcţii continue pe I. Pentru ca sistemul de funcţii $y_1, \ldots, y_n$ să fie liniar independent pe I, este necesar şi suficient ca wronskianul (4) a acestor funcţii să fie diferit de zero pentru orice $x \in I$.

Necesitatea. Fie $y_1, \ldots, y_n$ soluţii ale ecuaţiei (1) şi fie că ele formează un sistem liniar independent pe I. Trebuie să demonstrăm că wronskianul $W(x) \neq 0$ pentru orice x din I. Presupunem contrariul, adică există un punct $x_0 \in I$ astfel încât $W(x_0) = 0$.

Alcătuim următorul sistem omogen de n ecuaţii liniare algebrice cu n necunoscute $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n(x_0) = 0, \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n'(x_0) = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Determinantul acestui sistem este diferit de zero, deoarece el coincide cu wronskianul funcţiilor $y_1, \ldots, y_n$ în punctul $x_0 \in I$. Din algebra liniară se ştie că dacă determinantul unui sistem omogen de ecuaţii liniare algebrice este diferit de zero, atunci există cel puţin o soluţie netrivială (diferită de zero) a acestui sistem. Notăm prin $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*$ soluţia netrivială a sistemului dat. Aceasta înseamnă că cel puţin unul din numerele $\alpha_i^* \ (i = 1, \ldots, n)$ este diferit de zero. Considerăm funcţia $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n$, care în virtutea teoremei 2 este soluţie a ecuaţiei (1). Conform relaţiei (5), această soluţie a ecuaţiei (1) satisface condiţiile iniţiale:

$$x_0 \in R, y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = 0. \tag{6}$$

Condiţiile iniţiale (6) le satisface şi funcţia $y = 0$, $x \in I$, care, evident, de asemenea este o soluţie a ecuaţiei liniare omogene (1). Întrucât teorema Cauchy pentru ecuaţia (1) pe I are loc, rezultă că soluţia ecuaţiei (1) cu condiţiile iniţiale (6) este unică. Prin urmare, $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0$ pentru orice $x \in I$, şi cel puţin unul din numerele $\alpha_i \ (i = 1, \ldots, n)$ este diferit de zero. Aşadar, am obţinut că sistemul de funcţii $y_1, \ldots, y_n$ este liniar dependent. Contrazicerea obţinută implică că ipoteza este falsă. Deci, $W(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I$.

Suficienţa. Fie $y_1, \ldots, y_n$ soluţii ale ecuaţiei (1) şi fie $W(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I$. Trebuie să demonstrăm că sistemul de funcţii $y_1, \ldots, y_n$ este liniar independent pe I.

Dacă am presupune că sistemul liniar de funcţii $y_1,...,y_n$ este liniar dependent pe I, atunci în baza teoremei 3 am obţine că $W(x)=0$ pentru orice $x \in I$, ceea ce contrazice condiţia teoremei. Prin urmare, sistemul de funcţii $y_1,...,y_n$ este liniar independent şi teorema este complet demonstrată.

Consecinţa 1. Fie că coeficienţii ecuaţiei liniare omogene (1) sunt funcţii continue pe I. Dacă wronskianul a n soluţii ale ecuaţiei (1) este egal cu zero într-un punct $x_0 \in I$, atunci el este identic egal cu zero pe I.

Într-adevăr, dacă

$$W(x_0)=W(y_1(x_0),y_2(x_0),...,y_n(x_0))=0$$

în $x_0 \in I$, atunci în virtutea demonstraţiei din prima parte a teoremei 4, obţinem că funcţiile $y_1,...,y_n$ formează un sistem liniar dependent, care pe baza teoremei 3 implică că $W(x)=0$ pentru orice $x \in I$.

Consecinţa 2. Fie că coeficienţii ecuaţiei liniare omogene (1) sunt funcţii continue pe I. Dacă wronskianul a n soluţii ale ecuaţiei (1) este diferit de zero într-un punct $x_0 \in I$, atunci el este diferit de zero pentru orice $x \in I$.

Într-adevăr, dacă am presupune că $W(x_1)=0$ într-un punct oarecare $x_1 \in I$, atunci, conform consecinţei 1, am obţine că wronskianul este egal cu zero şi în punctul $x_0 \in I$. Contrazicerea obţinută confirmă justeţea consecinţei 2.

Definiţia 5. Spunem că n soluţii $y_1,y_2,...,y_n$ ale ecuaţiei (1) formează un *sistem fundamental de soluţii pe intervalul* $I \subseteq R$ dacă ele sunt liniar independente pe I.

Din teorema 4 rezultă că dacă $y_1,y_2,...,y_n$ este un sistem fundamental de soluţii ale ecuaţiei (1) pe I, atunci wronskianul lor este diferit de zero pe I.

Din consecinţa 2 rezultă că dacă $y_1,y_2,...,y_n$ sunt n soluţii ale ecuaţiei (1) cu wronskianul diferit de zero într-un punct din intervalul I, atunci soluţiile $y_1,...,y_n$ formează un sistem fundamental de soluţii pe I.

Are loc următoarea teoremă care se numeşte teorema despre *structura soluţiei generale* a ecuaţiei liniare omogene (1).

Teorema 5. Fie ecuaţia (1), unde $P_1(x),P_2(x)...,P_n(x)$ sunt funcţii continue pe $I \subseteq R$. Dacă $y_1,y_2,...,y_n$ formează un sistem fundamental de soluţii ale ecuaţiei (1) pe I, atunci soluţia generală a ecuaţiei (1) are forma:

$$y=C_1y_1+C_2y_2+...+C_ny_n, \qquad (7)$$

unde $C_1,C_2,...,C_n$ sunt constante arbitrare.

Demonstraţie. Deoarece $y_1,y_2,...,y_n$ sunt soluţii ale ecuaţiei (1), în baza teoremelor 1 şi 2 funcţia (7) este de asemenea o soluţie a ecuaţiei (1).

Pentru a demonstra că expresia (7) reprezintă soluţia generală a ecuaţiei (1) pe I este suficient să stabilim, că orice soluţie a ecuaţiei (1) se determină din (7) pentru anumite valori ale constantelor $C_1,C_2,...,C_n$.

Pentru orice $x \in I$ ecuaţia (1) satisface condiţiile teoremei Cauchy din 7.4. Prin urmare, există şi este unică soluţia $\widetilde{y}$ a ecuaţiei (1), care satisface condiţiile iniţiale:

$$x_0 \in I,\ \widetilde{y}(x_0)=\widetilde{y}_0, \widetilde{y}'(x_0)=a_1,...,\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0)=a_{n-1}, \qquad (8)$$

unde $\widetilde{y}_0,a_1,...,a_{n-1}$ sunt numere reale arbitrare.

Alcătuim următorul sistem de n ecuaţii liniare algebrice în raport cu necunoscutele $C_1,C_2,...,C_n$:

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0)+...+C_ny_n(x_0)=\widetilde{y}_0, \\ C_1y_1'(x_0)+C_2y_2'(x_0)+...+C_ny_n'(x_0)=a_1, \\ \quad ... \qquad ... \qquad ... \\ C_1y_1^{(n-1)}(x_0)+C_2y_2^{(n-1)}(x_0)+...+C_ny_n^{(n-1)}(x_0)=a_{n-1} \end{cases} \qquad (9)$$

Determinantul sistemului (9) coincide cu wronskianul soluţiilor $y_1,...,y_n$ ale ecuaţiei (1) pentru $x=x_0 \in I$, care este diferit de zero (soluţiile $y_1,...,y_n$ formează un sistem liniar independent pe I). Prin urmare, sistemul (9) are o singură soluţie: $C_1^*,C_2^*,...,C_n^*$.

Examinăm soluţia particulară $y=C_1^*y_1+C_2^*y_2+...+C_n^*y_n$ a ecuaţiei (1). Observăm că această soluţie satisface condiţiile inițiale (8). Deci, în virtutea unicității, ea coincide cu $\tilde{y}$. Prin urmare, $\tilde{y} = C_1^* y_1 + C_2^* y_2 + ... + C_n^* y_n$, ceea ce trebuia de demonstrat.

Pe baza teoremei 5 conchidem:

a) Dat fiind faptul că funcțiile $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$ sunt soluții ale ecuației $y'' - y = 0$ pe R și ele formează un sistem liniar independent pe R (a se consulta ex. 2 de mai sus), avem că soluția generală a acestei ecuații are forma $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

b) De asemenea, ușor se verifică că funcțiile $y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}$ și $y_3 = e^{3x}$ verifică ecuația $y''' + 6y'' + 11y' - 6y = 0$. Conform exemplului 5 de mai sus aceste soluții formează un sistem liniar independent. Deci, soluția generală a ecuației date are forma $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$.

Nota 1. Din teorema 5 rezultă următoarele:

a) numărul maxim de soluții liniar independente pe I pentru ecuația diferențială liniară omogenă (1) este egal cu n;

b) problema integrării ecuației diferențiale liniare omogene (1) se reduce la aflarea a n soluții particulare ale ecuației (1) care să formeze un sistem fundamental de soluții pe I.

Teorema 6. Dacă cunoaștem o soluție particulară $y_1 \neq 0$ a ecuației liniare omogene (1), prin schimbarea de funcție $y = y_1 z$, $z = \int u(x) \cdot dx$ îi putem micșora ordinul cu o unitate.

Demonstrație. Fie $y = y_1 z$. Avem:

$$y' = y_1' z + y_1 z',$$

$$y'' = y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z'', \ ...,$$

$$y^{(n)} = y_1^{(n)} z + C_n^1 y_1^{(n-1)} z' + C_n^2 y_1^{(n-2)} z'' + ... + C_n^n y_1 z^{(n)}$$

Înlocuind $y, y', ..., y^{(n)}$ în expresia (1) și făcând transformările elementare respective obținem ecuația:

$$z\left[y_1^{(n)} + P_1(x) y_1^{(n-1)} + ... + P_n(x) \cdot y_1\right] +$$
$$+ z'\left[C_n^1 y_1^{(n-1)} + ... + P_1(x) \cdot y_1\right] + ... + z^{(n)} y_1 = 0.$$

Deoarece y_1 este o soluție a ecuației (1), coeficientul de pe lângă z:

$$y_1^{(n)} + P_1(x) y_1^{(n-1)} + ... + P_n(x) \cdot y_1$$

este egal cu zero. Făcând o nouă schimbare de funcție $z = \int u dx$ sau $z' = u$, ecuația (1) se transformă într-o ecuație liniară și omogenă de ordinul $(n-1)$:

$$u^{(n-1)} y_1 + ... + u\left[C_n^1 y_1^{(n-1)} + ... + P_1(x) \cdot y_1\right] = 0$$

sau, deoarece $y_1 \neq 0$ obținem ecuația

$$u^{(n-1)} + ... + \left[C_n^1 \cdot \frac{1}{y_1} \cdot y_1^{(n-1)} + ... + P_1(x)\right] u = 0, \qquad (10)$$

care este o ecuație liniară omogenă de ordinul $(n-1)$ în raport cu funcția u. Teorema este demonstrată.

Coeficienții ecuației (10) sunt de asemenea funcții continue pe R.

Vom demonstra în încheiere că dacă $u_2, u_3, ..., u_n$ este un sistem fundamental de soluții ale ecuației (10), atunci soluțiile sistemului (1)

$$y_1, y_1 \cdot \int u_2 dx, y_1 \cdot \int u_3 dx, ..., y_1 \cdot \int u_n dx \qquad (11)$$

formează un sistem fundamental de soluții ale ecuației (1).

Într-adevăr, dacă presupunem că funcțiile (11) formează un sistem liniar dependent, adică are loc identitatea:

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_1 \cdot \int u_2 dx + \alpha_3 y_1 \cdot \int u_3 dx + ... + \alpha_n y_1 \cdot \int u_n dx = 0, \ (12)$$

atunci cel puțin unul din numerele $\alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ este diferit de zero: dacă $\alpha_2 = \alpha_3 = ... = \alpha_n = 0$, atunci identitatea (12) are forma $\alpha_1 \cdot y_1 = 0$. De unde $\alpha_1 = 0$, deoarece $y_1 \neq 0$. În acest caz în identitatea (12) avem că $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$, adică sistemul (11) este liniar independent ceea ce contrazice cu ipoteza de mai sus.

Deci în identitatea (12) cel puțin unul din numerele $a_2, a_3, ..., a_n$ este diferit de zero. Împărțind (12) la $y_1 \neq 0$ obținem:

$$a_1 + a_2 \cdot \int u_2 dx + \alpha_3 \cdot \int u_3 dx + ... + \alpha_n \cdot \int u_n dx = 0.$$

şi derivând ambele părţi ale acestei identităţii în raport cu x, avem:

$$\alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + ... + \alpha_n u_n = 0,$$

unde cel puţin unul din numerele $\alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ este diferit de zero. Am primit o contrazicere cu faptul că sistemul $u_2, u_3, ..., u_n$ este un sistem fundamental de soluţii ale sistemului (10).

Prin urmare, sistemul (11) este un sistem fundamental de soluţii ale ecuaţiei (1).

7.6.3. Ecuaţii liniare omogene cu coeficienţi constanţi

Fie

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0, \qquad (1)$$

unde $a_1, ..., a_n$ sunt numere reale, o ecuaţie liniară omogenă cu coeficienţi constanţi. Cu ajutorul operatorului diferenţial ecuaţia (1) are forma:

$$L(y) = 0. \qquad (2)$$

Euler a propus în acest caz de a căuta soluţiile ecuaţiei (1) sub forma $y = e^{kx}$, unde k este orice număr real, din următoarele considerente: fie $y' - ay = 0$ o ecuaţie liniară omogenă de ordinul 1 (a se consulta 7.2.6.), unde $a \in R$. Observăm că această ecuaţie este o ecuaţie cu variabile separabile: $\frac{dy}{dx} = ay$. Separând variabilele, obţinem următoarea soluţie particulară a ei: $y = e^{ay}$.

Deci, fie $y = e^{kx}$, $k \in R$. Atunci obţinem:

$$y' = ke^{kx},\ y'' = k^2 e^{kx}, ..., y^{(n)} = k^n e^{kx} \text{ şi}$$

$$L(e^{kx}) = e^{kx}(k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n). \qquad (3)$$

Polinomul

$$P_n(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n$$

se numeşte *polinom caracteristic* şi se obţine din partea stângă a ecuaţiei (1), înlocuind derivatele $y', y'', ..., y^{(n)}$ prin $k, k^2, ..., k^n$, iar y prin $k^0 = 1$

Pentru ca funcţia e^{kx} să fie soluţie a ecuaţiei (1) trebuie ca $L(e^{kx}) = 0$. Deoarece $e^{kx} \neq 0$ pentru orice argument real avem că relaţia (3) se transformă în următoarea relaţie

$$k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n = 0. \qquad (4)$$

Ecuaţia (4) se numeşte *ecuaţie caracteristică* a ecuaţiei liniare omogene (1).

Aşadar, pentru ca funcţia e^{kx} să fie soluţie a ecuaţiei (1), este necesar şi suficient ca numărul k să fie rădăcină a ecuaţiei caracteristice corespunzătoare (4).

Ecuaţia caracteristică reprezintă o ecuaţie algebrică de gradul n în raport cu k. Conform teoremei fundamentale a algebrei (teorema Grauss) (a se consulta de exemplu ([20] , cap.3, 3.2.1, teorema 2) ecuaţia (4) are n rădăcini. Deci fiecărei rădăcini a ecuaţiei caracteristice (4) îi corespunde o soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene (1).

Considerăm următoarele cazuri posibile:

Cazul 1. Toate rădăcinile ecuaţiei caracteristice (4) sunt numere reale distincte: $k_1, k_2, ..., k_n$. Funcţiile $y_i = e^{k_i x}$ $(i = 1, ..., n)$ sunt soluţii ale ecuaţiei (1) şi ele formează un sistem fundamental de soluţii ale ecuaţiei (1) pe mulţimea R (a se consulta exemplul 5 din 7.6.2.) Prin urmare, în baza teoremei 5 din 7.6.2, soluţia generală a ecuaţiei (1) are forma:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + ... + C_n e^{k_n x},$$

unde $C_1, C_2, ..., C_n$ sunt constante arbitrare.

Cazul 2. Toate rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt reale, dar printre ele se întâlnesc şi multiple.

În acest caz, printre numerele $k_1, k_2, ..., k_n$ sunt rădăcini distincte mai puţine decât n, deci respectiv printre soluţiile $e^{k_i x}$ $(i = 1, ..., n)$ ale ecuaţiei (1) vor fi de asemenea mai puţine decât n. Aceasta înseamnă că sistemul format de aceste soluţii nu va fi un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia (1). Pentru a obţine celelalte soluţii vom apela la următoarea teoremă.

Teorema 1. Dacă ecuaţia caracteristică (4) a ecuaţiei (1) are o rădăcină reală k_1 multiplă de multiplicitatea μ, atunci funcţiile

$$e^{k_1 x},\ xe^{k_1 x},\ x^2 e^{k_1 x},\ \ldots,\ x^{\mu-1} e^{k_1 x}$$

sunt soluţii ale ecuaţiei (1) şi formează un sistem liniar independent.

Derivăm de m ori ambele părţi ale identităţii (3) în raport cu k. În partea stângă obţinem relaţia:

$$\left[L(e^{kx})\right]_k^{(m)} = L\left((e^{kx})_k^{(m)}\right) = L\left(x^m \cdot e^{kx}\right),$$

În partea dreaptă a identităţii (3) folosim formula lui Leibniz pentru derivarea produsului a două funcţii (vezi teorema 2 din 2.3.1. [20]):

$$\left[P_n(k)\cdot e^{kx}\right]_k^{(m)} = \sum_{s=0}^{m} C_m^s P_n^{(s)}(k)\cdot (e^{kx})^{(m-s)} =$$

$$= \sum_{s=0}^{m} C_m^s P_n^{(s)}(k)\cdot x^{m-s} e^{kx},$$

unde $C_m^0 = C_m^m = 1$.

Prin urmare, am obţinut identitatea:

$$L\left(x^m \cdot e^{kx}\right) = \sum_{s=0}^{m} C_m^s P_n^{(s)}(k)\cdot x^{m-s} e^{kx}. \qquad (5)$$

Întrucât k_1 este o rădăcină multiplă de multiplicitatea μ a ecuaţiei caracteristice (4), avem:

$$P_n(k_1) = P_n'(k_1) = P_n''(k_1) = P_n^{\mu-1}(k_1) = 0 \ \text{ şi } \ P_k^{(\mu)}(k_1) \neq 0$$

(a se consulta 3.2.1. din [20]).

Prin urmare, $L\left(x^m \cdot e^{kx}\right) \equiv 0$ pentru $m = 0,1,2,\ldots,\mu-1$, adică funcţiile $e^{k_1 x}$, $xe^{k_1 x}$, $x^2 e^{k_1 x}$, ..., $x^{\mu-1} e^{k_1 x}$ sunt soluţii ale ecuaţiei (1).

Arătăm că aceste funcţii formează un sistem liniar independent.

În exemplul 1 din 7.6.2. am arătat că funcţiile $1, x, x^2, \ldots, x^{\mu-1}$ formează un sistem liniar independent pe R. Deci, dacă are loc egalitatea

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot x^2 + \ldots + \alpha_\mu \cdot x^{\mu-1} = 0$$

pentru orice $x \in R$, atunci $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_\mu = 0$.

Înmulţind egalitatea de mai sus cu $e^{k_1 x} \neq 0$ pentru orice $x \in R$ obţinem egalitatea

$$\alpha_1 \cdot e^{k_1 x} + \alpha_2 \cdot xe^{k_1 x} + \ldots + \alpha_\mu \cdot x^{\mu-1} e^{k_1 x} = 0$$

pentru orice $x \in R$ care implică că $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\mu = 0$. Aceasta înseamnă că funcţiile

$$e^{k_1 x},\ xe^{k_1 x},\ x^2 e^{k_1 x},\ \ldots,\ x^{\mu-1} e^{k_1 x}$$

formează un sistem liniar independent pe R. Teorema este demonstrată.

Aşadar, fiecărei rădăcini multiple k_1 de multiplicitatea μ a ecuaţiei caracteristice (4) i se pun în corespondenţă exact μ soluţii distincte ale ecuaţiei (1).

Revenim la cazul 2. Judecând în mod analog pentru fiecare rădăcină reală simplă şi multiplă a ecuaţiei caracteristice (4), compunem un sistem din n soluţii distincte ale ecuaţiei (1). Se poate arăta că acest sistem de soluţii ale ecuaţiei (1) este un sistem fundamental de soluţii ale ecuaţiei (1) pe R. Pe baza teoremei 5 din 7.6.2, combinaţia liniară a acestor soluţii cu coeficienţi constanţi reprezintă soluţia generală a ecuaţiei (1) pe tot planul R^2.

Exemplul 7. Să se integreze ecuaţia

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0.$$

Această ecuaţie este o ecuaţie liniară şi omogenă de ordinul 3 cu coeficienţi constanţi. Ecuaţia caracteristică are forma:

$$k^3 - 5k^2 + 8k - 4 = 0.$$

Rădăcinile ei sunt $k_1 = 1$ (rădăcină simplă) şi $k_2 = k_3 = 2$ (rădăcină multiplă de multiplicitatea $\mu = 2$). În virtutea raţionamentelor de mai sus obţinem trei soluţii particulare ale ecuaţiei diferenţiale date

$$y_1 = e^{k_1 x} = e^x,\ y_2 = e^{k_2 x} = e^{2x} \ \text{ şi } \ y_3 = x \cdot e^{2x}.$$

Aceste funcţii formează un sistem fundamental de soluţii ale ecuaţiei date, deoarece wronskianul lor este diferit de zero pe mulţimea R:

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & xe^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} & e^{2x}(1+2x) \\ e^x & 4e^{2x} & 4e^{2x}(1+x) \end{vmatrix}=$$

$$=e^x\cdot e^{2x}\cdot e^{2x}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1+2x \\ 1 & 4 & 4+4x \end{vmatrix}=e^{5x}\left[\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2x \\ 1 & 4 & 4x \end{vmatrix}\right]=$$

$$=e^{5x}[(2x+1)+(-2x)]=e^{5x}\neq 0.$$

Prin urmare, soluția generală a ecuației inițiale are forma:

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+C_3xe^{2x},$$

unde C_1, C_2, C_3 sunt constante arbitrare.

Cazul 3. Toate rădăcinile ecuației caracteristice sunt numere complexe simple sau multiple.

Are loc următoarea teoremă.

Teorema 2. Dacă $k_1=\alpha+\beta i$ este o rădăcină complexă a ecuației caracteristice (4) multiplă de multiplicitatea μ (eventual simplă dacă $\mu=1$), atunci funcțiile reale

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

$$xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,$$

$$\dots \qquad \dots$$

$$x^{\mu-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^{\mu-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Sunt soluții ale ecuației (1) și formează un sistem liniar independent pe R.

Demonstrație. Într-adevăr, dacă ecuația caracteristică (4) cu coeficienții reali are o rădăcină complexă $k_1=\alpha+\beta i$ multiplă de multiplicitatea μ, atunci și numărul complex conjugat $k_2=\alpha-\beta i$ este de asemenea o rădăcină multiplă de multiplicitatea μ a ecuației (4) (vezi 3.2.1. din [20]). Se arată exact ca și în cazul rădăcinilor reale multiple că celor două rădăcini complexe le corespund pentru ecuația (1) următoarele soluții (funcții complexe) liniar independente pe R:

$$\left.\begin{aligned} y_1&=e^{(\alpha+\beta i)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x),\\ \bar{y}_1&=e^{(\alpha-\beta i)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x),\\ y_2&=xe^{(\alpha+\beta i)x}=xe^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x),\\ \bar{y}_2&=xe^{(\alpha-\beta i)x}=xe^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x),\\ &\dots \qquad \dots\\ y_\mu&=x^{\mu-1}e^{(\alpha+\beta i)x}=x^{\mu-1}e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x),\\ \bar{y}_\mu&=x^{\mu-1}e^{(\alpha-\beta i)x}=x^{\mu-1}e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x). \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Aici am folosit formula Euler:

$$e^{x\pm iy}=e^x(\cos y\pm i\sin y),\ x,y\in R.$$

În practică ne interesează numai soluții reale, de aceea nu se ia sistemul (6) ca sistem fundamental, ci următoarele soluții reale obținute prin combinații liniare, care după cum știm (teorema 2 din 7.6.2.) sunt de asemenea soluții ale ecuației (1), anume

$$\begin{cases} u_1=\dfrac{y_1+\bar{y}_1}{2}=e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \bar{u}_1=\dfrac{y_1-\bar{y}_1}{2i}=e^{\alpha x}\sin\beta x,\\ u_2=\dfrac{y_2+\bar{y}_2}{2}=xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \bar{u}_2=\dfrac{y_2-\bar{y}_2}{2i}=xe^{\alpha x}\sin\beta x,\\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots\\ u_\mu=\dfrac{y_\mu+\bar{y}_\mu}{2}=x^{\mu-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \bar{u}_\mu=\dfrac{y_\mu-\bar{y}_\mu}{2i}=x^{\mu-1}e^{\alpha x}\sin\beta x. \end{cases} \qquad (7)$$

Sistemul de funcții (7) este un sistem liniar independent, deoarece în caz contrar, folosind formulele Euler, am obține că funcțiile $x^m\cdot e^{(a\pm bi)x}$, unde $m=0,1,\dots,(\mu-1)$ sunt liniar dependente pe R (a se compara cu ultimele alineate din demonstrația teoremei 1 de mai sus).

Așadar, dacă numărul $k_1=\alpha+\beta i$ este rădăcină complexă de multiplicitatea μ (eventual rădăcină simplă: $\mu=1$) a ecuației caracteristice (4), atunci și numărul complex conjugat $k_2=\alpha-\beta i$ este de asemenea rădăcină a ecuației (4) multiplă de multiplicitatea μ.

Acestor rădăcini le corespund 2μ soluții reale ale ecuației (1):

$$u_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ u_2 = xe^{\alpha x}\cos\beta x, \dots, u_\mu = x^{\mu-1}e^{\alpha x}\cos\beta x \quad \text{și}$$

$$u_{\mu+1} = e^{\alpha x}\sin\beta x, u_{\mu+2} = xe^{\alpha x}\sin\beta x, \dots,\ u_{2\mu} = x^{\mu-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Cazurile 1), 2) și 3) cercetate mai sus ne permit să formulăm următoarea regulă generală de rezolvare a ecuației diferențiale liniare omogene de ordin superior cu coeficienți constanți:

1. Compunem ecuația caracteristică a ecuației diferențiale date și aflăm rădăcinile ei;

2. Aflăm soluțiile particulare ale ecuației diferențiale date. În acest caz:

a) fiecărei rădăcini reale simple k a ecuației caracteristice i se pune în corespondență soluția e^{kx} a ecuației diferențiale date;

b) fiecărei rădăcini reale k de multiplicitatea μ a ecuației caracteristice i se pun în corespondență μ soluții: $e^{kx}, xe^{kx}, x^2e^{kx}, \dots, x^{\mu-1}e^{kx}$;

c) fiecărei perechi de rădăcini simple complexe conjugate $(\alpha \pm \beta i)$ a ecuației caracteristice i se pune în corespondență două soluții reale: $e^{\alpha x}\cos\beta x$ și $e^{\alpha x}\sin\beta x$;

d) fiecărei perechi de rădăcini complexe conjugate $(\alpha \pm \beta i)$ de multiplicitatea μ a ecuației caracteristice i se pune în corespondență 2μ soluții:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x, \dots, x^{\mu-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x, \dots,\ x^{\mu-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

3. Se poate arăta că aceste n soluții particulare, obținute în cazurile de mai sus, formează un sistem fundamental de soluții ale ecuației diferențiale date pe R. Prin urmare, soluția generală a ecuației diferențiale date reprezintă combinația liniară cu coeficienți constanți a acestor n soluții particulare.

7.6.4. Ecuații diferențiale liniare neomogene cu coeficienți arbitrari

Fie ecuația diferențială de ordinul n liniară neomogenă

$$L(y) = y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \dots + P_n(x)y = f(x), \qquad (1)$$

unde funcțiile reale $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$ (coeficienții ecuației) și $f(x)$ (termenul liber) sunt continue pe același interval $I \subseteq R$.

Ecuația

$$L(y) = 0 \qquad (2)$$

se numește *ecuația liniară omogenă* atașată ecuației liniare neomogene (1).

Teorema 1. Soluția generală a ecuației (1) se obține adăugând la soluția generală a ecuației omogene (2) o soluție particulară a ecuației (1).

Demonstrație. Fie y_p o soluție particulară a ecuației (1), adică

$$L(y_p) = f(x),\ \forall x \in I.$$

Notăm prin $y_1, y_2, \dots, y_n$ sistemul fundamental de soluții ale ecuației omogene (2) atașate ecuației (1).

Deci, $L(y_i) = 0,\ \forall x \in I,\ \forall\, i = (1, \dots, n)$. Atunci soluția generală a ecuației (2) are forma:

$$y_{om} = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n,$$

unde $C_1, C_2, \dots, C_n$ sunt constante arbitrare.

Vom demonstra că

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n + y_p \qquad (3)$$

este soluția generală a ecuației (1).

Într-adevăr, pentru orice valori ale constantelor $C_1, \dots, C_n$ expresia (3) este soluția ecuației (1):

$$\begin{aligned} &L(C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n + y_p) = \\ &= L(C_1y_1) + L(C_2y_2) + \dots + L(C_ny_n) + L(y_p) = \\ &= C_1L(y_1) + C_2L(y_2) + \dots + C_nL(y_n) + L(y_p) = \\ &= C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 + \dots + C_n \cdot 0 + f(x) = f(x) \end{aligned}$$

pentru orice $x \in I$. Rămâne să arătăm că orice soluție y^* a ecuației (1) poate fi scrisă sub forma (3) pentru careva valori ale constantelor $C_1, C_2, ..., C_n$.

Deoarece y^* este o soluție a ecuației (1), avem: $L(y^*) = f(x)$ pentru orice $x \in I$. În acest caz diferența $(y^* - y_p)$ este o soluție a ecuației omogene (2), deoarece

$$L(y^* - y_p) = L(y^*) - L(y_p) = f(x) - f(x) = 0, \ x \in I..$$

Deci, soluția $(y^* - y_p)$ poate fi scrisă sub forma: $C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n$ pentru careva valori ale constantelor $C_1, ..., C_n$ adică

$$y^* - y_p = C_1^*y_1 + C_2^*y_2 + ... + C_n^*y_n.$$

De aici rezultă că

$$y^* = C_1^*y_1 + C_2^*y_2 + ... + C_n^*y_n + y_p$$

și teorema este demonstrată.

Teorema 1 stabilește *structura soluției generale* a ecuației liniare neomogene (1).

Teorema 2: Dacă y_1, y_2 sunt soluții particulare ale ecuațiilor liniare neomogene $L(y) = f_1(x)$ și $L(y) = f_2(x)$, atunci $(y_1 + y_2)$ este o soluție particulară a ecuației liniare neomogene $L(y) = f_1(x) + f_2(x)$.

Demonstrația teoremei 2 reiese din faptul că $L(y_1) = f_1(x)$, $L(y_2) = f_2(x)$ pentru orice $x \in I$ și proprietatea aditivă a operatorului liniar diferențial L:

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) = f_1(x) + f_2(x).$$

Așadar, pentru aflarea soluției generale a ecuației (1) este suficient să cunoaștem un sistem fundamental de soluții ale ecuației omogene (2) atașate ei și o soluție particulară a ecuației (1).

Aflarea soluției particulare a ecuației neomogene (1) este o problemă în general dificilă. În unele cazuri pe care le vom studia

în paragraful următor astfel de soluție se poate obține destul de simplu.

Există o metodă generală pentru aflarea unei soluții particulare a ecuației neomogene (1), numită *metoda variației constantelor* sau *metoda Lagrange*. Această metodă ne permite să aflăm soluția particulară a ecuației neomogene (1) după un sistem fundamental de soluții ale ecuației omogene (2) atașate ecuației (1).

Teorema 3. Soluția generală a ecuației neomogene (1) se obține din soluția generală a ecuației omogene (2) atașate ecuației (1) cu ajutorul a n cuadraturi.

Demonstrație. Fie $y_1, y_2, ..., y_n$ un sistem fundamental de soluții ale ecuației (2). Prin urmare, soluția generală a ecuației (2) are forma:

$$y_{om} = C_1y_1 + C_2y_2 + ...C_ny_n = \sum_{i=1}^{n} C_iy_i,$$

unde $C_1, C_2, ..., C_n$ sunt constante arbitrare.

Vom căuta soluția particulară a ecuației liniare neomogene (1) sub același aspect, numai că considerăm pe $C_1, ..., C_n$ ca funcții de x, continue pe I, adică

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i. \qquad (4)$$

Alegem aceste n funcții necunoscute $C_i(x)$ $(i = 1, ..., n)$ astfel încât expresia (4) să fie soluție a ecuației (1). Pentru aceasta este necesar ca

$$L\left(\sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i\right) = f(x), \ \forall x \in I. \qquad (5)$$

Celelalte $(n-1)$ condiții, necesare pentru determinarea a n funcții necunoscute, pot fi date în mod arbitrar, numai cu condiția că sistemul obținut de ecuații liniare algebrice să fie compatibil. Aceste condiții suplimentare le vom alege succesiv astfel încât relația (5), care se obține ca rezultat al substituției funcției (4) în ecuația (1) și a tuturor derivatelor ei până la ordinul n inclusiv, să fie cât mai simplă.

Să calculăm derivatele funcţiei (4). Avem:

$$y' = \sum_{i=1}^{n} [C_i'(x) \cdot y_i + C_i(x) \cdot y_i'] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) \cdot y_i + \sum_{i=1}^{n} C_i(x) \cdot y_i'.$$

În calitate de prima condiţie suplimentară luăm ecuaţia

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) \cdot y_i = 0. \qquad (6)$$

Atunci pentru y' obţinem o expresie mai simplă:

$$y' = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) \cdot y_i', \qquad (7)$$

adică aceeaşi formă ca şi în cazul constantelor C_i $(i = 1,...,n)$. Pentru aflarea lui y'' derivăm relaţia (7) în raport cu x:

$$y'' = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i'' + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) \cdot y_i'.$$

În calitate de a doua condiţie suplimentară luăm ecuaţia

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) \cdot y_i' = 0. \qquad (8)$$

Deci $y'' = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i''$ are aceeaşi formă ca în cazul constantelor C_i $(i = 1,...,n)$ etc.

Ultima $(n-1)$ condiţie suplimentară se pune la pasul $(n-1)$:

$$y^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) \cdot y_i^{(n-2)}.$$

Ea are forma:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) \cdot y_i^{(n-2)} = 0. \qquad (9)$$

Deci,

$$y^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i^{(n-1)}. \qquad (10)$$

Derivând relaţia (10) în raport cu x, obţinem:

$$y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) \cdot y_i^{(n-1)}.$$

Substituind funcţia $y = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) \cdot y_i$ şi toate derivatele ei $y', y'',..., y^{(n)}$ în ecuaţia (1) şi luând în consideraţie că $L(y_i) = 0$ pentru $i = 1,...,n$, obţinem ultima (a n - a) condiţie asupra funcţiilor necunoscute $C_1(x), C_2(x),..., C_n(x)$:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) \cdot y_i^{(n-1)} = f(x).$$

Astfel, pentru ca expresia (4) să fie soluţie a ecuaţiei (1), este suficient ca funcţiile $C_1(x),..., C_n(x)$ să satisfacă condiţiile:

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 + ... + C_n'(x) y_n = 0, \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' + ... + C_n'(x) y_n' = 0, \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ C_1'(x) y_1^{(n-2)} + C_2'(x) y_2^{(n-2)} + ... + C_n'(x) y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'(x) y_1^{(n-1)} + C_2'(x) y_2^{(n-1)} + ... + C_n'(x) y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \qquad (11)$$

Aceste condiţii reprezintă un sistem de n ecuaţii algebrice liniare cu n necunoscute $C_1(x), C_2(x),..., C_n(x)$. Determinantul acestui sistem este diferit de zero, deoarece acest determinant coincide cu wronskianul funcţiilor liniar independente $y_1,..., y_n$ pe intervalul I. Prin urmare, sistemul (11) are o singură soluţie (care poate fi aflată de exemplu, cu ajutorul formulelor Cramer). Rezolvând sistemul (11) obţinem: $C_i'(x) = \varphi_i(x)$, $x \in I$, $i = 1,...,n$. De unde prin integrare avem: $C_i(x) = \int \varphi_i(x) dx + A_i$, unde A_i sunt constante arbitrare.

Aşadar, relaţia (4) are forma:

$$y=\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \int \varphi_i(x)dx+\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot y_i \qquad (12)$$

şi această funcţie satisface ecuaţia (1) pentru orice valori ale constantelor A_i $(i=1,...,n)$. Deoarece expresia (12) este formată din soluţia generală

$$y_{om}=A_1y_1+A_2y_2+...+A_ny_n,$$

unde $A_1,A_2,...,A_n$ sunt constante arbitrare, a ecuaţiei omogene (2), ataşată ecuaţiei (1) şi o soluţie

$$y_p=\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \int \varphi_i(x)dx$$

particulară (pentru $A_1=A_2=...=A_n=0$) a ecuaţiei (1), rezultă că (12) reprezintă soluţia generală a ecuaţiei neomogene (1). Teorema este demonstrată.

7.6.5. Ecuaţii liniare neomogene cu coeficienţi constanţi

Fie o ecuaţie liniară neomogenă cu coeficienţi constanţi

$$L(y)=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=f(x), \quad (1)$$

unde $a_1,...,a_n$ sunt numere reale, iar $f(x)$ este o funcţie continuă pe intervalul $I \subseteq R$.

Ecuaţia (1) poate fi integrată în cuadraturi prin metoda variaţiei constantelor, deoarece ecuaţia omogenă cu coeficienţi constanţi

$$L(y)=0, \qquad (2)$$

ataşată ecuaţiei (1), se integrează în funcţii elementare.

Vom studia o serie de cazuri în care ecuaţia (1) poate fi integrată fără cuadraturi prin metode pur algebrice. În teorema 1 din 7.6.4. am demonstrat că soluţia generală a ecuaţiei (1) se compune din soluţia generală a ecuaţiei omogene (2) ataşată ei şi o soluţie particulară a ecuaţiei (1). Dacă funcţia $f(x)$ – termenul liber al ecuaţiei (1) are o formă specială, atunci soluţia particulară a ecuaţiei (1) poate fi obţinută prin metoda coeficienţilor nedeterminaţi.

Teorema 1. Dacă termenul liber al ecuaţiei (1) are forma:

$$f(x)=Q_m(x)e^{\alpha x},$$

unde

$$Q_m(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+...+A_m$$

este polinom de gradul m, atunci o soluţie particulară a ecuaţiei (1) are forma

$$y=x^r \cdot T_m(x)\cdot e^{\alpha x},$$

unde

$$T_m(x)=B_0x^m+B_1x^{m-1}+...+B_m$$

este un polinom oarecare de gradul m, iar r este multiplicitatea numărului α ca rădăcină a ecuaţiei caracteristice

$$P_n(k)=k^n+a_1k^{n-1}+...+a_{n-1}k+a_n=0 \qquad (3)$$

a ecuaţiei liniare omogene (2) ataşate ecuaţiei (1).

Demonstraţie. Analizăm două cazuri.

Cazul 1. Admitem că numărul α nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice (3), adică $P_n(\alpha)\neq 0$, ceea ce corespunde cazului $r=0$.

Să demonstrăm că în condiţiile astea există o soluţie particulară a ecuaţiei (1) de forma:

$$y=T_m(x)\cdot e^{\alpha x}, \qquad (4)$$

unde

$$T_m(x)=B_0x^m+B_1x^{m-1}+...+B_m. \qquad (5)$$

Pentru aceasta e suficient să arătăm, că coeficienţii $B_0,B_1,...,B_m$ ai polinomului $T_m(x)$ pot fi determinaţi astfel, încât să se verifice identitatea

$$L\left(T_m(x)\cdot e^{\alpha x}\right)=Q_m(x)\cdot e^{\alpha x}, \; x\in I\subseteq R. \qquad (6)$$

Aplicând proprietăţile operatorului diferenţial L din 7.6.1. şi a identităţii (5) din 7.6.3., obţinem:

$$L\left(T_m(x)\cdot e^{\alpha x}\right)=L\left[\left(B_0x^m+B_1x^{m-1}+...+B_m\right)\cdot e^{\alpha x}\right]=$$
$$=B_0L\left(x^m\cdot e^{\alpha x}\right)+B_1L\left(x^{m-1}\cdot e^{\alpha x}\right)+...+B_mL\left(e^{\alpha x}\right)=$$

$$= B_0 \cdot e^{\alpha x}\left[x^m P_n(\alpha) + C_m^1 x^{m-1} P_n'(\alpha) + C_m^2 x^{m-2} P_n''(\alpha) + \ldots + P_n^{(m)}(\alpha)\right] +$$
$$+ B_1 \cdot e^{\alpha x}\left[x^{m-1} P_n(\alpha) + C_m^1 x^{m-2} P_n'(\alpha) + \ldots + P_n^{(m-1)}(\alpha)\right] + \ldots + B_m \cdot e^{\alpha x} \cdot P_n(\alpha) =$$
$$= e^{\alpha x}\left(A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m\right), \forall x \in I \subseteq R. \qquad (7)$$

Simplificând prin $e^{\alpha x}$, obținem egalitatea a două polinoame de gradul m. Egalând coeficienții de pe lângă aceleași puteri ale lui $x : x^m, x^{m-1}, \ldots, x^0$, ajungem la un sistem din $(m+1)$ ecuații algebrice liniare din care determinăm necunoscutele $B_0, B_1, \ldots, B_m$:

$$\begin{cases} B_0 P_n(\alpha) = A_0 \\ m B_0 P_n'(\alpha) + B_1 P_n(\alpha) = A_1 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ B_0 P_n^{(m)}(\alpha) + B_1 P_n^{(m-1)}(\alpha) + \ldots + B_m P_n(\alpha) = A_m \end{cases}$$

Valorile coeficienților necunoscuți pot fi aflate succesiv: din prima ecuație îl aflăm pe

$$B_0 = \frac{A_0}{P_n(\alpha)},$$

$P_n(\alpha) \neq 0$, deoarece α nu este rădăcină a ecuației caracteristice (3). Înlocuim B_0 în ecuația a doua și îl calculăm pe B_1, etc. În felul acesta se vor determina toți coeficienții polinomului $T_m(x)$).

Cazul 2. Numărul α este rădăcină multiplă de multiplicitatea μ (eventual și rădăcină simplă dacă $\mu = 1$). În acest caz,

$$P_n(\alpha) = P_n'(\alpha) = \ldots = P_n^{(\mu-1)}(\alpha) = 0, \; P_n^{(\mu)}(\alpha) \neq 0. \qquad (8)$$

Prin urmare, nu putem determina soluția particulară sub forma:

$$y = T_m(x) \cdot e^{\alpha x},$$

unde $T_m(x)$ este un polinom de gradul m, deoarece în partea stângă a egalității (7), în virtutea relațiilor (8), obținem un polinom de gradul $(m-\mu)$, iar în partea dreaptă – un polinom de gradul m.

Pentru ca după înlocuirea lui y din (4), $y', \ldots, y^{(n)}$ în (1) în partea stângă a ecuației (1) să rămână un polinom de gradul m, trebuie să căutăm soluția particulară sub forma:

$$y = x^\mu \cdot T_m(x) \cdot e^{\alpha x} = \left(B_0 x^{m+\mu} + B_1 x^{m+\mu-1} + \ldots + B_m x^\mu\right) \cdot e^{\alpha x}. \qquad (9)$$

Într-adevăr, aplicând proprietățile operatorului L din 7.6.1, identitatea (5) din 7.6.3 și relațiile (8) de mai sus, obținem că identitatea (7) se transformă în următoarea identitate:

$$L\left[x^\mu \cdot T_m(x) \cdot e^{\alpha x}\right] =$$
$$= B_0 \cdot e^{\alpha x}\left[C_{m+\mu}^{\mu} x^m P_n^{(\mu)}(\alpha) + C_{m+\mu}^{\mu+1} x^{m-1} P_n^{(\mu+1)}(\alpha) + \ldots + P_n^{(m+\mu)}(\alpha)\right] +$$
$$+ B_1 \cdot e^{\alpha x}\left[C_{m+\mu-1}^{\mu} x^{m-1} P_n^{(\mu)}(\alpha) + \ldots + P_n^{(m+\mu-1)}(\alpha)\right] + \ldots +$$
$$+ B_m \cdot e^{\alpha x} \cdot P_n^{(\mu)}(\alpha) =$$
$$= e^{\alpha x}\left(A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m\right), \; x \in I \subseteq R.$$

Simplificând prin $e^{\alpha x}$ și egalând coeficienții de pe lângă aceleași puteri ale lui $x : x^m, \ldots, x^0$ din partea stângă și din partea dreaptă ale egalității de mai sus obținem următorul sistem de $(m+1)$ ecuații algebrice liniare cu $(m+1)$ necunoscute $B_0, B_1, \ldots, B_m$:

$$\begin{cases} C_{m+\mu}^{\mu} B_0 P_n^{(\mu)}(\alpha) = A_0 \\ C_{m+\mu}^{\mu+1} B_0 P_n^{(\mu+1)}(\alpha) + C_{m+\mu-1}^{\mu} B_1 P_n^{(\mu)}(\alpha) = A_1 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ B_0(\alpha) P_n^{(m+\mu)}(\alpha) + B_1 P_n^{(m+\mu-1)}(\alpha) + \ldots + B_m P_n^{\mu}(\alpha) = A_m \end{cases}$$

Întrucât în virtutea relațiilor (8) avem că $P_n^{\mu}(\alpha) \neq 0$, din acest sistem putem determina succesiv coeficienții $B_0, B_1, \ldots, B_m$.

Teorema este demonstrată.

Dacă $\alpha = 0$, adică ecuația (1) are forma:

$$L(y) = Q_m(x),$$

atunci soluția particulară a ecuației date are forma:

$$y = x^\mu \cdot T_m(x),$$

unde μ este multiplicitatea numărului $\alpha = 0$ ca rădăcină a ecuației caracteristice (3).

Nota 1. Dacă partea dreaptă a ecuației (1) are forma $Q_m(x)\cdot e^{\alpha x}$, unde $Q_m(x)$ este un polinom cu coeficienți complecşi şi α este un număr complex atunci, după cum rezultă din raționamentele date mai sus, soluția particulară a ecuației (1) poate fi determinată sub forma:

$$y = x^{\mu}\cdot T_m(x),$$

unde $T_m(x)$ este un polinom cu coeficienți complecşi de gradul m iar μ este multiplicitatea numărului complex ca rădăcină a ecuației (3).

Nota 2. Aplicând teorema 2 din 7.6.4 despre soluția particulară a ecuației (1) cu partea dreaptă de forma

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

tragem concluzia, că soluția particulară a ecuației

$$L(y) = \sum_{i=1}^{s} Q_i(x)e^{\alpha_i x}$$

unde

$$Q_1(x), Q_2(x), \dots, Q_s(x)$$

sunt polinoame, poate fi determinată ca suma soluțiilor particulare ale ecuațiilor auxiliare:

$$L(y) = Q_i(x)\cdot e^{\alpha_i x},\quad i = 1,2,\dots,s.$$

Nota 3. Fie $f(x) = Q_m(x)$, adică $\alpha = 0$. Presupunem că $\alpha = 0$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice (3) ceea ce înseamnă că $a_n \neq 0$. Conform teoremei 1 (cazul 1) avem că soluția particulară a ecuației (1) are forma $y_p = T_m(x)$ unde acest polinom se determină cu ajutorul metodei coeficienților nedeterminați. Observăm că $y_p^{(m)} = m!\cdot B_0$ şi $y_p^{(m+k)} = [T_m(x)]^{(m+k)} = 0$ pentru orice $k = 1,2,3,\dots$.

Şcerbacov în [32] a propus o altă metodă mai simplă pentru a afla y_p bazată pe următoarele: dacă $m < n$, atunci y_p este soluția unui sistem de m ecuații liniare algebrice în raport cu necunoscutele $y, y', \dots, y^{(m)}$, care are forma:

$$\begin{cases} a_n y + a_{n-1}y' + \dots + a_{n-m}\ y^{(m)} = Q_m(x) \\ a_n y' + \dots + a_{n-m+1}y^{(m)} = Q_m'(x) \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_n\cdot\ y^{(m)} = Q_m^{(m)}(x) = m!\cdot A_0 \end{cases}$$

Din ultima ecuație a acestui sistem aflăm $y_p^{(m)}$. Pe urmă înlocuim valoarea $y_p^{(m)}$ în penultima ecuație şi aflăm, $y_p^{(m-1)}$ etc. Înlocuind valorile $y_p^{(m)}, y_p^{(m-1)}, \dots, y_p'$ în prima ecuație a acestui sistem aflăm y_p.

Dacă, însă, gradul polinomului $Q_m(x)$ este mai mare de cât ordinul ecuației diferențiale (1), adică $m > n$, atunci în prima ecuație a acestui sistem considerăm coeficienții de pe lângă $y^{(n+1)}, y^{(n+2)}, \dots, y^{(m)}$ egali cu zero, adică y_p este soluția sistemului

$$\begin{cases} a_n y + a_{n-1}y' + \dots + a_1 y^{(n-1)} + \quad y^{(n)} = Q_m(x), \\ a_n\ y' + \dots + a_2 y^{(n-1)} + a_1 y^{(n)} + y^{(n+1)} = Q_m'(x), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_n y^{(m)} = Q_m^{(m)}(x) = m!\cdot A_0. \end{cases}$$

Exemplul 8. Să se integreze ecuațiile:

a) $y''' - 2y'' - y' + 2y = x^2 + x + 2,$

b) $y'' + 3y' + 2y = x^3 + x^2 + 1.$

Rezolvare.

a) Ecuația caracteristică are forma

$$k^3 - 2k^2 - k + 2 = 0.$$

De unde $k_1 = -1,\ k_2 = 1,\ k_1 = 2.$

Deci soluția generală a ecuației liniare omogene ataşată ecuației date are forma

$$y_{om} = C_1e^{-x} + C_2e^{x} + C_3e^{2x}.$$

Conform notei 3 de mai sus, deoarece $m = 2 < n = 3$, avem că soluția particulară y_p are forma $y_p = T_2(x) = B_0 + B_1x + B_2x^2$, adică $y_p''' = y_p^{IV} = \dots = 0$ şi, deci, y_p este soluția sistemului de ecuații liniare algebrice:

$$\begin{cases} 2y - y' - 2y'' = x^2 + x + 2 \\ 2y' - y'' = 2x + 1 \\ 2y'' = 2 \end{cases}$$

De unde obţinem:

$$y_p'' = 1,\ y_p' = x+1 \text{ şi } y_p = \frac{1}{2}(x^2+2x+5).$$

Prin urmare, soluţia generală a ecuaţiei date are forma

$$y = y_{om} + y_p = C_1e^{-x} + C_2e^{x} + C_3e^{2x} + \frac{1}{2}(x^2+2x+5).$$

b) Ecuaţia caracteristică a acestei ecuaţii are forma

$$k^2+3k+2=0.$$

De unde $k_1=-2$, $k_2=-1$ şi soluţia generală a ecuaţiei liniare omogene ataşată ecuaţiei date are forma $y_{om} = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x}$.

Avem $y_p = T_3(x) = B_0 + B_1x^2 + B_2x^2 + B_3x^3$ şi $m=3>n=2$. Prin urmare soluţia particulară y_p este soluţia următorului sistem de ecuaţii liniare algebrice în raport cu necunoscutele y, y', y'', y''':

$$\begin{cases} 2y+3y'+y'' = x^2+x+1 \\ 2y'+3y''+y''' = 3x^2+2x \\ 2y''+3y''' = 6x+2 \\ 2y''' = 6 \end{cases}$$

Rezolvându-l obţinem:

$$y_p''' = 2,\quad y_p'' = 3x - \frac{7}{2},$$
$$y_p' = \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{2} + \frac{15}{4},$$
$$y_p = \frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + \frac{15}{4}x - \frac{27}{8}.$$

Aşadar soluţia generală a ecuaţiei date are forma

$$y = y_{om} + y_p = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} + \frac{1}{8}(4x^3 - 14x^2 + 30x - 27).$$

Propunem cititorului să verifice rezultatele obţinute şi să afle soluţiile particulare ale acestor două ecuaţii diferenţiale liniare şi neomogene cu ajutorul metodei coeficienţilor nedeterminaţi.

Teorema 2. Dacă partea dreaptă a ecuaţiei (1) are forma

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x\right], \tag{10}$$

unde $Q_1(x), Q_2(x)$ sunt polinoame de gradele m_1 şi respectiv m_2, atunci soluţia particulară a ecuaţiei (1) are forma:

$$y = x^{\mu}\cdot e^{\alpha x}\left[T_1(x)\cos\beta x + T_2(x)\sin\beta x\right], \tag{11}$$

unde $T_1(x), T_2(x)$ sunt polinoame de gradul $m=\max(m_1,m_2)$ şi numărul μ este multiplicitatea numărului complex $(\alpha+\beta i)$ ca rădăcină a ecuaţiei caracteristice (3).

Demonstraţie. Folosind formulele Euler $e^{\pm i\beta x} = \cos\beta x \pm i\sin\beta x$ obţinem $\cos\beta x = \dfrac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2}$, $\sin\beta x = \dfrac{1}{2i}\left(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}\right)$.

Deci,

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[Q_1(x)\cdot\frac{1}{2}\left(e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}\right) + Q_2(x)\cdot\frac{1}{2i}\left(e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}\right)\right] =$$
$$= Q_1^*(x)\cdot e^{(\alpha+\beta i)x} + Q_2^*(x)\cdot e^{(\alpha-\beta i)x},$$

unde $Q_1^*(x)$ şi $Q_2^*(x)$ sunt polinoame cu coeficienţi complecşi de gradul $m=\max(m_1,m_2)$.

În virtutea celor spuse în notele 1 şi 2 de mai sus, soluţia particulară a ecuaţiei (1) are forma

$$y = x^{\mu}\left[R_1(x)\cdot e^{(\alpha+\beta i)x} + R_2(x)\cdot e^{(\alpha-\beta i)x}\right],$$

unde $R_1(x), R_2(x)$ sunt polinoame de gradul m, iar μ este egal cu multiplicitatea numerelor complexe conjugate $(\alpha\pm\beta i)$ ca rădăcină a ecuaţiei caracteristice (3).

Substituind în loc de funcţiile $e^{(\alpha\pm\beta i)x}$ valorile lor $e^{\alpha x}(\cos\beta x \pm i\sin\beta x)$ după reducerea termenilor asemenea obţinem că soluţia particulară a ecuaţiei (1) are forma:

$$y = x^{\mu}\cdot e^{\alpha x}\left[T_1(x)\cos\beta x + T_2(x)\sin\beta x\right]$$

unde $T_1(x)$, $T_2(x)$ sunt polinoame de gradul $m=\max(m_1,m_2)$ cu coeficienţi reali. Teorema este demonstrată.

Nota 4. Dacă partea dreaptă a ecuației (1) are forma: $f(x)=e^{\alpha x}Q_1(x)\cos\beta x$ sau $f(x)=e^{\alpha x}Q_2(x)\sin\beta x$, atunci, după cum reiese din raționamentele de mai sus, soluția particulară a ecuației (1) trebuie căutată sub „forma completă" (11):

$$y=x^{\mu}\cdot e^{\alpha x}\left[T_1(x)\cos\beta x+T_2(x)\sin\beta x\right].$$

Așadar, soluția particulară a ecuației (1) cu termenul liber de forma (10) poate fi aflată prin metoda coeficienților nedeterminați. Pentru aceasta pe baza teoremei 2 este suficient să scriem soluția particulară a ecuației (1) sub forma (11), luând în calitate de $T_1(x)$ și $T_2(x)$ polinoame de gradul m cu coeficienții nedeterminați $B_0,B_1,...,B_m$ și $C_0,C_1,...,C_m$. Apoi substituim soluția (11) în ecuația (1), simplificăm prin $e^{\alpha x}$ și egalăm expresiile de pe lângă $\sin\beta x$ și $\cos\beta x$ din ambele părți. Astfel, obținem egalitatea a 4 polinoame de gradul m. Egalând coeficienții de pe lângă aceeași putere a lui x din aceste 4 polinoame, căpătăm un sistem de $2(m+1)$ necunoscute. Rezolvându-l, obținem coeficienții nedeterminați: $B_0,B_1,...,B_m$ ai polinomului $T_1(x)$ și $C_0,C_1,...,C_m$ ai polinomului $T_2(x)$.

Nota 5. Dacă termenul liber al ecuației (1) este o combinație liniară de funcții, care satisfac teoremele 1 și 2, atunci soluția particulară a ecuației (1) se poate determina ca suma soluțiilor particulare ale ecuațiilor auxiliare de forma considerată în aceste două teoreme.

Exemplul 9. Să se integreze ecuația

$$y''-2y'+y=x\cdot e^x+\cos x.$$

Observăm că această ecuație este o ecuație diferențială de ordinul 2 liniară și neomogenă cu coeficienți constanți.

Aflăm mai întâi soluția generală a ecuației liniare omogene

$$y''-2y'+y=0,$$

atașate ecuației date. Ecuația ei caracteristică are forma: $k^2-2k+1=0$, rădăcinile căreia sunt: $k_1=k_2=1$, adică ecuația caracteristică are o rădăcină reală care se repetă de două ori. Prin urmare, conform cazului 2 din 7.6.3, obținem că soluția generală a ecuației omogene date are forma:

$$y_{0m}=C_1\cdot e^x+C_2x\cdot e^x,$$

unde C_1, C_2 sunt constante arbitrare. În virtutea celor spuse în nota 5 de mai sus, soluția particulară a ecuației inițiale se compune din soluțiile particulare ale ecuațiilor auxiliare

$$y''-2y'+y=x\cdot e^x \text{ și } y''-2y'+y=\cos x.$$

Aplicând cazul 2 din teorema 1, avem:

$$y_{p_1}=T_1(x)\cdot e^x\cdot x^{\mu},$$

unde

$$T_1(x)=b_0x+b_1$$

este un polinom de același grad cu polinomul $Q_1(x)=x$, iar $\mu=2$ deoarece $\alpha=k_1=k_2=1$.

Deci,

$$y_{p_1}=(b_0x+b_1)\cdot e^x\cdot x^2=(b_0x^3+b_1x^2)\cdot e^x,$$

$$y'_{p_1}=e^x(b_0x^3+b_1x^2+3b_0x^2+2b_1x)$$

$$y''_{p_1}=e^x(b_0x^3+b_1x^2+3b_0x^2+2b_1x+$$

$$+3b_0x^2+2b_1x+6b_0x+2b_1).$$

Înlocuind valorile y_p, y'_p și y''_p în ecuația $y''-2y'+y=xe^x$ și simplificând prin e^x, obținem egalitatea a două polinoame:

$$6b_0x+2b_1=x.$$

Egalând coeficienții de pe lângă aceeași putere a lui x din ambele polinoame, obținem: $6b_0=1$ și $2b_1=0$. De unde $b_0=\frac{1}{6}$ și $b_1=0$. Prin urmare, soluția particulară a primei ecuații auxiliare are forma: $y_{p_1}=\frac{1}{6}x^3\cdot e^x$.

Pe baza teoremei 2, soluția particulară a ecuației auxiliare

$$y''-2y'+y=\cos x$$

are forma:

$$y_{p_2} = x^{\mu} e^{\alpha x}[T_1(x)\cos\beta x + T_2(x)\sin\beta x].$$

Deoarece $Q_1(x)=1$ și $Q_2(x)=0$ sunt polinoame de gradul 0, avem că $T_1(x)$ și $T_2(x)$ sunt de asemenea polinoame de gradul zero, adică $T_1(x)=M$ și $T_2(x)=N$, unde M și N sunt numere pe care trebuie să le aflăm (vezi nota 4 de mai sus). Observăm că numărul $(\alpha+\beta i)=0+1\cdot i=i$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice $k^2-2k+1=0$. Deci $\mu=0$. Prin urmare, soluția particulară a ecuației auxiliare de mai sus are forma:

$$y_{p_2}=M\cos x+N\sin x.$$

De unde $y'_{p_2}=-M\sin x+N\cos x$ și $y''_{p_2}=-M\cos x-N\sin x$.

Înlocuind în ecuația auxiliară de mai sus, avem:

$$2M\sin x-2N\cos x=\cos x.$$

Egalând coeficienții de pe lângă $\cos x$ și $\sin x$ din ambele părți, obținem: $-2N=1$ și $2M=0$. De unde $N=-\frac{1}{2}$ și $M=0$.

Prin urmare, soluția particulară a ecuației auxiliare de mai sus are forma: $y_{p_2}=-\frac{1}{2}\sin x$.

Așadar, soluția particulară a ecuației diferențiale

$$y''-2y'+y=xe^x+\cos x$$

este:

$$y_p=y_{p_1}+y_{p_2}=\frac{1}{6}x^3\cdot e^x-\frac{1}{2}\sin x,$$

iar soluția ei generală este:

$$y=y_{0m}+y_p=C_1\cdot e^x+C_2x\cdot e^x+\frac{1}{6}x^3\cdot e^x-\frac{1}{2}\sin x.$$

În următoarele două paragrafe vom considera două tipuri de ecuații liniare cu coeficienți arbitrari, reductibile la ecuații liniare cu coeficienți constanți.

7.6.6. Ecuația diferențială Euler.

Ecuația diferențială liniară neomogenă de forma

$$x^n y^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}xy'+a_ny=f(x), \qquad (1)$$

unde $a_i\,(i=1,\dots,n)$ sunt numere reale, iar funcția f este continuă pe $I\subseteq R$ și $x\neq 0$ se numește *ecuație diferențială liniară neomogenă a lui Euler.*

Făcând substituția $|x|=e^t$, ecuația (1) se transformă într-o ecuație diferențială liniară neomogenă cu coeficienți constanți. Într-adevăr, fie $x>0$, adică $x=e^t$, de unde $t=\ln x$. Avem:

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{x}=\frac{dy}{dt}\cdot e^{-t}.$$

$$y''_{x^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\cdot e^{-t}\right)=\left(\frac{dy}{dt}\cdot e^{-t}\right)'_t\cdot\frac{dt}{dx}=$$

$$=\left(\frac{d^2y}{dt^2}\cdot e^{-t}-\frac{dy}{dt}\cdot e^{-t}\right)\cdot e^{-t}=\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)\cdot e^{-2t}=\left(y''_{t^2}-y'_t\right)\cdot e^{-2t}.$$

$$y'''_{x^3}=\frac{d}{dx}\left(y''_{x^2}\right)=\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)\cdot e^{-2t}\right]=\left[\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)\cdot e^{-2t}\right]'_t\cdot\frac{dt}{dx}=$$

$$=e^{-2t}\left[-2\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+\frac{d^3t}{dt^3}-\frac{d^2y}{dt^2}\right]\cdot e^{-t}=$$

$$=\left(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right)\cdot e^{-3t}=\left(y'''_{t^3}-3y''_{t^2}+2y'_t\right)\cdot e^{-3t},$$

... ...

$$y^{(n)}_{x^n}=\left[y^{(n)}_{t^n}+\dots+(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\,y'_t\right]\cdot e^{-nt}.$$

Constatăm că derivata de ordinul k de la funcția y în raport cu x se exprimă în formă de produs dintre e^{-kt} și o funcție liniară în raport cu $y'_t, y''_{t^2}, \dots, y^{(k)}_{t^k}$ cu coeficienți constanți.

Observăm că

$$xy'_x = e^t \cdot y'_t \cdot e^{-t} = y'_t,$$
$$x^2 y''_{x^2} = e^{2t} \cdot \left(y''_{t^2} - y'_t\right) \cdot e^{-2t} = y''_{t^2} - y'_t,$$
$$x^3 y'''_{x^3} = e^{3t} \cdot \left(y'''_{t^3} - 3y''_{t^2} + 2y'_t\right) \cdot e^{-3t} = y'''_{t^3} - 3y''_{t^2} + 2y'_t.$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$
$$x^n y^{(n)}_{x^n} = e^{nt}\left[y^{(n)}_{t^n} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!\, y'_t\right] \cdot e^{-nt} =$$
$$= y^{(n)}_{t^n} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!\, y'_t.$$

Dacă înlocuim produsele xy', $x^2 y''$,..., $x^n y^{(n)}$ în ecuaţia (1), obţinem o ecuaţie diferenţială de ordinul n liniară şi neomogenă cu coeficienţii constanţi:

$$y^{(n)}_{t^n} + b_1 y^{(n-1)}_{t^{n-1}} + \dots + b_{n-1} y'_t + a_n y = f(e^t), \qquad (2)$$

unde $b_1,\dots,b_{n-1}$ sunt numere reale, iar a_n este coeficientul din ecuaţia (1), care de asemenea este un număr real.

Folosind rezultatele din 7.6.5, putem afla soluţia generală a ecuaţiei (2), şi înlocuind $t = \ln x$, obţinem soluţia generală a ecuaţiei lui Euler.

Acelaşi rezultat se obţine dacă $x < 0$.

Notă. Ecuaţia diferenţială de forma:

$$(ax+b)^n \cdot y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(ax+b) \cdot y' + a_n y = f(x),$$

unde $a_1,\dots,a_n$ sunt numere reale poate fi transformată într-o ecuaţie diferenţială cu coeficienţi constanţi dacă facem substituţia: $|ax+b| = e^t$.

Exemplul 10. Să se integreze ecuaţia:

$$x^2 y'' - xy' + y = \frac{\ln x}{x}, \quad x > 0.$$

Această ecuaţie este o ecuaţie Euler liniară şi neomogenă. Substituţia $x = e^t$, adică $t = \ln x$ transformă ecuaţia dată într-o ecuaţie liniară şi neomogenă cu coeficienţi constanţi:

$$y''_{t^2} - y'_t - y'_t + y = t \cdot e^{-t},$$

adică

$$y''_{t^2} - 2y'_t + y = t \cdot e^{-t}.$$

Aplicând teorema 1 din 7.6.5, propunem cititorului să demonstreze că soluţia generală a ecuaţiei de mai sus are forma:

$$y = C_1 e^t + C_2 \cdot t \cdot e^t + \frac{1}{4}(1+t)e^t.$$

Prin urmare, soluţia generală a ecuaţiei date este:

$$y = C_1 x + C_2 x \ln x + \frac{1 + \ln x}{4x},$$

unde C_1, C_2 sunt constante arbitrare.

7.6.7. Ecuaţia Cebâşev

Ecuaţia liniară omogenă de forma:

$$\left(1 - x^2\right)y'' - xy' + n^2 y = 0, \qquad (1)$$

unde $x \neq \pm 1$ şi $n \in N$ se numeşte *ecuaţia lui Cebâşev* ((1821–1894) – matematician rus). Cu ajutorul substituţiei $t = \arccos x$, ecuaţia (1) se transformă într-o ecuaţie liniară omogenă cu coeficienţi constanţi.

Într-adevăr, avem:

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{y'_t}{\sin t};$$

$$y''_{x^2} = -\left(\frac{y'_t}{\sin t}\right)'_x = -\left(\frac{y'_t}{\sin t}\right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} =$$

$$= -\frac{y''_{t^2}\sin t - y'_t \cos t}{\sin^2 t} \cdot \left(-\frac{1}{\sin t}\right) =$$

$$= \frac{y''_{t^2}}{\sin^2 t} - \frac{y'_t \cos t}{\sin^3 t}.$$

Substituind x, y'_x, y''_{x^2} în ecuaţia (1), obţinem o ecuaţie liniară omogenă cu coeficienţi constanţi:

$$\left(1 - \cos^2 t\right) \cdot \left[\frac{y''_{t^2}}{\sin^2 t} - \frac{y'_t \cos t}{\sin^3 t}\right] + \frac{\cos t \cdot y'_t}{\sin t} + n^2 y = 0$$

sau

$$y''_{t^2} + n^2 y = 0 .$$

Soluția generală are forma (a se consulta teorema 2 din 7.6.3):

$$y = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt .$$

Prin urmare, soluția generală a ecuației lui Cebâșev are forma:

$$y = C_1 \cos(n \cdot \arccos x) + C_2 \sin(n \cdot \arccos t) .$$

Soluția particulară a ei

$$y_1 = \cos(n \cdot \arccos x),\ x \in [-1; 1]$$

reprezintă un polinom de gradul n și se numește *polinomul lui Cebâșev*, care joacă un rol important la aproximarea funcțiilor prin polinoame, cât și la integrarea numerică a funcțiilor.

7.7. Sisteme de ecuații diferențiale.

Totalitatea ecuațiilor de forma

$$F_i\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m_2)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n)}\right) = 0$$

$$i = 1,2,\ldots,n, \qquad (1)$$

unde x este variabila independentă, iar $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sunt funcțiile căutate se numește *sistem de n ecuații diferențiale cu n funcții necunoscute în formă generală.*

Soluție a sistemului (1) se numește *orice sistem de n funcții* $y_i = \varphi_i(x)$, $x \in I \subseteq R$, $i = 1,2,\ldots,n$, care fiind substituite în ecuațiile (1), le transformă în identități pe intervalul $I \subseteq R$.

Dacă sistemul (1) este rezolvat în raport cu derivatele de ordinul cel mai înalt ale funcțiilor $y_1, \ldots, y_n$, adică este de forma

$$y_i^{(m_i)} = f_i\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n-1)}\right),\ i = 1,2,\ldots,n, \quad (2)$$

atunci acest sistem se numește *sistem canonic sau sistem în formă explicită.*

Dacă cel puțin unul din numerele $m_1, m_2, \ldots, m_n$ este mai mare decât unu, sistemul (1) sau (2) se numește *sistem de ordin superior.* Dacă însă $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 1$, atunci sistemul (1) sau (2) se

numește *sistem de ordinul întâi.* Deci un sistem canonic de n ecuații diferențiale de ordinul 1 cu n funcții necunoscute $y_1, \ldots, y_n$ are forma

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),\ i = 1,2,\ldots,n . \qquad (3)$$

Sistemul (3) se mai numește *sistem normal.*

Dacă în sistemul canonic de ordin superior (2) introducem următoarele funcții necunoscute

$$y_1' = u_1,\ u_1' = u_2, \ldots, u_{m_1-2}' = u_{m_1-1};$$

$$y_2' = v_1,\ v_1' = v_2, \ldots, v_{m_2-2}' = v_{m_2-1};$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$y_n' = t_1,\ t_1' = t_2, \ldots, v_{m_n-2}' = t_{m_n-1};$$

și observăm că

$$y_1' = u_1,\ y_1'' = u_2, \ldots, y_1^{(m_1)} = u_{m_1-1}';$$

$$y_2' = v_1,\ y_2'' = v_2, \ldots, y_2^{(m_2)} = v_{m_2-1}';$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$y_n' = t_1,\ y_n'' = t_2, \ldots, y_n^{m_n} = t_{m_n-1}',$$

atunci sistemul canonic de ordin superior (2) este echivalent cu următorul sistem normal de ordinul întâi:

$$u_1' = u_2,\ u_2' = u_3, \ldots, u_{m_1-2}' = u_{m_1-1},$$

$$u_{m_1-1}' = f_1(x, u_1, u_2, \ldots, u_{m_1-1}, \ldots, t_1, t_2, \ldots, t_{m_n-1});$$

$$v_1' = v_2,\ v_2' = v_3, \ldots, v_{m_2-1}' = v_{m_2-1},$$

$$v_{m_2-1}' = f_2(x, u_1, u_2, \ldots, u_{m_1-1}, \ldots, t_1, t_2, \ldots, t_{m_n-1});$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$t_1' = t_2\ \ t_2' = t_3, \ldots, t_{m_n-2}' = t_{m_n-1},$$

$$t_{m_n-1}' = f_n(x, u_1, u_2, \ldots, u_{m_1-1}, \ldots, t_1, t_2, \ldots, t_{m_n-1}).$$

Așadar, orice sistem canonic (sau nu) de n ecuații cu necunoscute de ordin superior se transformă într-un sistem de ($m_1 + m_2 + \ldots + m_n$) ecuații diferențiale de ordinul 1 canonic (sau nu).

Astfel rezolvarea unui sistem de ordin superior se reduce la rezolvarea unui sistem de ecuații diferențiale de ordinul 1.

Fie (3) un sistem normal de ecuaţii diferenţiale de ordinul 1 cu n necunoscute. Acest sistem poate fi privit ca o generalizare a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul 1 (cu o singură variabilă necunoscută) rezolvată în raport cu derivata

$$y' = f(x,y). \tag{4}$$

După cum se ştie soluţia ecuaţiei (4) reprezintă din punct de vedere geometric o curbă oarecare, numită *curbă integrală* în planul XOY, adică în spaţiul euclidian de două dimensiuni R^2, al variabilelor x şi y.

În mod analog soluţia sistemului normal (3):

$$y_1 = \varphi_1(x),\ y_2 = \varphi_2(x), \dots, y_n = \varphi_n(x) \tag{5}$$

reprezintă o curbă integrală în spaţiul euclidian R^{n+1} de $(n+1)$ dimensiuni al variabilelor $x, y_1, y_2, \dots, y_n$.

Convenim să spunem că soluţia (5) a sistemului (3) satisface condiţiile iniţiale $(x_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, dacă $\varphi_i(x_0) = \alpha_i$ pentru $i = 1,2,\dots,n$.

Din punct de vedere geometric aceasta înseamnă, că curba integrală (5) trece prin punctul $(x_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ al spaţiului $(n+1)$ dimensional R^{n+1}.

Problema lui Cauchy pentru sistemul normal (3) şi datele iniţiale

$$(x_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \tag{6}$$

numite *condiţii iniţiale Cauchy*, se formulează în felul următor: să se afle o soluţie a sistemului (3) care satisface condiţiile iniţiale (6).

Condiţiile suficiente de existenţă şi unicitate a soluţiei problemei Cauchy pentru sisteme normale (3) sunt similare teoremei Peano şi respectiv teoremelor Cauchy şi Picard pentru ecuaţia (4) (a se consulta 7.1.1.). Ne vom opri la teorema Cauchy.

Teorema Cauchy. Dacă într-un domeniu închis D al spaţiului euclidian de $(n+1)$ dimensiuni funcţiile

$$f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n),\ i = 1,2,\dots,n$$

sunt continue pe D şi au derivate parţiale de ordinul întâi în raport cu $y_1, y_2, \dots, y_n$ continue pe D, atunci pentru orice punct interior

$(x_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ din D există o singură soluţie (5) a sistemului (3) care satisface condiţiile iniţiale (6). Această soluţie este definită într-o vecinătate oarecare a punctului $x_0 \in R$.

Din teorema Cauchy rezultă că în domeniul D sistemul (3) are o infinitate de soluţii: schimbând valorile $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ în careva limite, obţinem pentru fiecare sistem de numere $x_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ o soluţie a sistemului (3) de forma

$$y_i = \varphi_i(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),\ i = 1,2,\dots,n.$$

Definiţie. Se numeşte *soluţie generală* a sistemului (3) pe o mulţime D a spaţiului euclidian de $(n+1)$ dimensiuni, sistemul de n funcţii ce depind de n constante $C_1, \dots, C_n$:

$$y_i = \varphi_i(x, C_1, \dots, C_n),\ i = 1,2,\dots,n, \tag{7}$$

care satisface următoarele condiţii:

a) pentru orice valori ale constantelor $C_1, \dots, C_n$ (dintr-o mulţime oarecare) funcţiile (7) formează o soluţie a sistemului (3);

b) orice soluţie a sistemului (3), definită pe D, poate fi scrisă sub forma (7) pentru anumite valori ale constantelor $C_1, C_2 \dots, C_n$.

Soluţiile, care se obţin din soluţia generală (7) a sistemului (3) pentru valori concrete ale constantelor $C_1, \dots, C_n$, se numesc *soluţii particulare* ale sistemului (3).

Dacă în domeniul închis D sunt satisfăcute condiţiile teoremei Cauchy, apoi pentru determinarea soluţiei particulare a sistemului (3), ce satisface condiţiile iniţiale (6), este suficient să rezolvăm sistemul de ecuaţii

$$\varphi_i(x_0, C_1, C_2 \dots, C_n) = \alpha_i \ \ (i = 1, \dots, n)$$

în raport cu $C_1, C_2 \dots, C_n$ şi să substituim valorile găsite ale constantelor în (7).

Sistemul normal (3) în cazul când $n = 3$ admite o interpretare mecanică simplă. Notăm valoarea independentă prin t, iar funcţiile necunoscute prin x, y, z şi vom privi t ca timpul iar x, y, z – ca coordonatele unui punct material situat în spaţiul euclidian tridimensional, ce se deplasează. În acest caz soluţia

$$x = \varphi_1(t),\ y = \varphi_2(t),\ z = \varphi_3(t) \tag{8}$$

a sistemului

$$\begin{cases} x_t' = f_1(t,x,y,z), \\ y_t' = f_2(t,x,y,z), \\ z_t' = f_3(t,x,y,z), \end{cases} \qquad (9)$$

va determina poziția punctului material în orice moment t, adică va determina legea mişcării acestui punct. Curba din spaţiul $OXYZ$, caracterizată de ecuaţiile (8) va fi traiectoria mişcării, iar derivatele x_t', y_t', z_t' vor fi coordonatele vectorului vitezei al punctului material ce se deplasează.

Astfel, a defini sistemul (9) acesta înseamnă a defini în spaţiul euclidian tridimensional $OXYZ$ (sau într-o parte oarecare a lui) în orice moment t componentele vectorului vitezei al punctului material ce se deplasează, sau, mai pe scurt, a defini în fiecare moment t câmpul vitezelor.

A rezolva pentru sistemul (9) problema Cauchy cu condiţiile iniţiale (t_0, x_0, y_0, z_0) înseamnă a caracteriza legea mişcării punctului material, care în momentul t_0 se află în punctul (x_0, y_0, z_0).

Într-o astfel de interpretare sistemul (9) se numeşte *spaţiu dinamic*, spaţiul $OXYZ$ – *spaţiu fazic*, iar soluţiile sistemului (9) – *mişcări*.

Dacă funcţiile f_1, f_2, f_3 din (9) nu depind de t, mişcarea punctelor materiale se numeşte *staţionară*. În acest caz mişcarea punctelor materiale în fiecare punct al spaţiului R^3 nu depinde de timp, adică este constantă pe parcursul acestui timp. Astfel mişcarea devine permanentă. Dacă mai avem că funcţiile f_1, f_2, f_3 satisfac condiţiile teoremei Cauchy, apoi prin fiecare punct al spaţiului fazic va trece o singură traiectorie, deoarece în orice moment vectorul vitezei în acest punct are aceeaşi mărime şi direcţie.

În cazul mişcării nestaţionare câmpul vitezelor se schimbă în funcţie de timp şi traiectoriile mişcării pot să se intersecteze.

În mod analog, orice sistem normal de ecuaţii diferenţiale cu orice număr n de necunoscute poate fi privit ca un sistem dinamic,

iar soluţiile lui – ca mişcări în spaţiul fazic corespunzător de n dimensiuni.

Studierea sistemelor normale şi a proprietăţilor lor este strâns legată de studierea ecuaţiilor diferenţiale de ordin superior cu o singură funcţie necunoscută. Are loc următoarea teoremă.

Teorema 1. Rezolvarea unui sistem normal de n ecuaţii diferenţiale de ordinul 1 se reduce la integrarea unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n rezolvată în raport cu derivata de ordinul n şi viceversa.

Demonstraţie.

a) Fie o ecuaţie diferenţială de ordinul n rezolvată în raport cu $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right). \qquad (10)$$

Dacă introducem funcţiile

$$y_1 = y,\ y_2 = y', \dots,\ y_n = y^{(n-1)}$$

şi ţinem seama de ecuaţia (10) obţinem următorul sistem normal de n ecuaţii diferenţiale de ordinul 1:

$$y_1' = y_2,\ y_2' = y_3, \dots,\ y_{n-1}' = y_n,\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \qquad (11)$$

Prin urmare, este evident că dacă y este o soluţie a ecuaţiei (10), atunci $y_1, y_2, \dots, y_n$ este o soluţie a sistemului (11) şi reciproc: dacă $y_1, y_2, \dots, y_n$ este o soluţie a sistemului (11), atunci y_1 este o soluţie a ecuaţiei (10).

b) Fie (3) un sistem normal de n ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi. Derivăm ambele părţi ale primei ecuaţii ale sistemului (3) în raport cu x. Obţinem:

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot \frac{dy_n}{dx}.$$

Înlocuind $y_1', y_2', \dots y_n'$ prin expresiile respective din sistemul (3), avem:

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot f_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot f_n$$

sau

$$y_1'' = F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Derivând această ecuaţie în raport cu x şi aplicând din nou aceleaşi procedeu obţinem:

$$y_1''' = F_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \text{ etc.}$$

În felul acesta vom căpăta următorul sistem de ecuaţii

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ y_1'' = F_2(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, \ldots, y_n). \end{cases} \qquad (12)$$

Din primele $(n-1)$ relaţii ale acestui sistem exprimăm (dacă e posibil!) necunoscutele $y_2, y_3, \ldots, y_n$ prin $x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}$ şi substituind valorile lor în ultima ecuaţie ajungem la o ecuaţie diferenţială de ordinul n în raport cu funcţia necunoscută y_1:

$$y_1^{(n)} = f\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right). \qquad (13)$$

Dacă $y_1, y_2, \ldots, y_n$ este o soluţie a sistemului (3), atunci y_1 satisface ecuaţia (13). Invers, dacă y_1 este o soluţie a ecuaţiei (13), atunci, aflând $y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}$ şi substituind aceste valori în (12) determinăm funcţiile $y_2, \ldots, y_n$. Astfel, funcţiile obţinute $y_1, y_2, \ldots, y_n$ satisfac sistemul (3).

Prin urmare, în cazul când sistemul (12) este rezolvabil în raport cu $y_2, y_3, \ldots, y_n$, atunci integrarea sistemului (3) se reduce la integrarea unei ecuaţii diferenţiale de ordin superior în raport cu funcţia necunoscută y_1.

Raţionamente similare pot fi făcute relativ la oricare din funcţiile $y_2, y_3, \ldots, y_n$. Teorema este demonstrată.

Din teorema 1 rezultă că dacă reuşim să aflăm soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale de ordin superior (13), atunci putem obţine soluţia generală a sistemului normal (3) numai prin derivări şi operaţii algebrice.

Aşadar, reducerea integrării sistemului normal de ecuaţii diferenţiale de ordinul 1 la integrarea unei singure ecuaţii

diferenţiale de ordin superior este una din metodele fundamentale de integrare a sistemelor normale.

Sistemul normal (3) se numeşte *liniar* dacă funcţiile $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$ sunt liniare în raport cu $y_1, \ldots, y_n$, adică are forma

$$y_i' = a_{i1}(x) \cdot y_1 + a_{i2}(x) \cdot y_2 + \ldots + a_{in}(x) \cdot y_n + f_i(x)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (14)$$

unde $a_{ij}(x)$ şi $f_i(x)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ sunt funcţii continue pe $I \subseteq R$.

Dacă în sistemul (14) funcţiile $f_i(x) = 0$ pentru orice $x \in I$ şi orice i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ atunci sistemul (14) se numeşte *liniar omogen*. În caz contrar sistemul (14) se numeşte – *liniar neomogen*.

Evident că în astfel de condiţii sistemele normale liniare satisfac condiţiile teoremei lui Cauchy. De aceea existenţa şi unicitatea soluţiei problemei lui Cauchy în cazul sistemelor normale liniare este garantată.

Din demonstraţia teoremei 1 reiese că dacă ecuaţia (10) este liniară omogenă (neomogenă) cu coeficienţi arbitrari (respectiv constanţi), atunci sistemul (11) este de asemenea liniar omogen (respectiv neomogen) cu coeficienţi arbitrari (respectiv constanţi) şi reciproc, dacă sistemul (11) este liniar omogen (neomogen) cu coeficienţi arbitrari (constanţi), atunci ecuaţia diferenţială de ordin superior (13) este o ecuaţie liniară omogenă (respectiv neomogenă) cu coeficienţi arbitrari (respectiv constanţi). De aceea o seamă de proprietăţi ale ecuaţiilor liniare le au şi sistemele normale liniare.

Ca şi în cazul ecuaţiilor liniare de ordin superior (7.6), există o teorie bine dezvoltată a sistemelor normale şi liniare (omogene şi neomogene), care studiază proprietăţile soluţiilor, structura soluţiilor generale şi metoda variaţiei constantelor pentru sisteme normale, liniare şi neomogene etc.

Dat fiind faptul că în 7.6 teoria ecuaţiilor liniare de ordin superior a fost dezvăluită şi având în vedere punctele de tangenţă ale acestor două teorii (în virtutea teoremei 1 de mai sus) nu ne vom opri la expunerea teoriei sistemelor normale liniare (cu această ocazie a se consulta [3], cap.20; [4], cap.15; [28], cap.9, 10).

Exemplul 11. Să se integreze sistemul

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3 \\ y_2' = -y_1 + 5y_2 - y_3 \\ y_3' = y_1 - y_2 + 3y_3 \end{cases}.$$

Acest sistem este un sistem normal, liniar şi omogen cu coeficienţi constanţi. Aplicând metoda expusă în teorema 1 acest sistem se reduce la o ecuaţie diferenţială de ordinul 3 liniară şi omogenă cu coeficienţi constanţi.

Derivând prima ecuaţie în raport cu x şi înlocuind y_1', y_2', y_3' din acest sistem obţinem:

$$y_1'' = 3y_1' - y_2' + y_3' = 3(3y_1 - y_2 + y_3) + y_1 - 5y_2 + y_3 +$$
$$+ y_1 - y_2 + 3y_3 = 11y_1 - 9y_2 + 7y_3.$$

Derivăm această ecuaţie în raport cu x şi înlocuim y_1', y_2', y_3' din sistemul iniţial:

$$y_1''' = 11y_1' - 9y_2' + 7y_3' =$$
$$= 11(3y_1 - y_2 + y_3) - 9(-y_1 + 5y_2 - y_3) +$$
$$+ 7(y_1 - y_2 + 3y_3) = 49y_1 - 63y_2 + 41y_3.$$

Formăm sistemul din trei ecuaţii liniare omogene cu coeficienţi constanţi:

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3 \\ y_1'' = 11y_1 - 9y_2 + 7y_3 \\ y_1''' = 49y_1 - 63y_2 + 41y_3. \end{cases}$$

Din primele două ecuaţii exprimăm y_2 şi y_3 prin y_1, y_1' şi y_1'':

$$\begin{cases} y_2 - y_3 = 3y_1 - y_1' \\ 9y_2 - 7y_3 = 11y_1 - y_1''. \end{cases}$$

Înmulţim prima ecuaţie la -7 şi le adunăm parte cu parte. Avem:

$$y_2 = \frac{1}{2}(-10y_1 + 7y_1' - y_1'').$$

Înlocuim y_2 în prima ecuaţie obţinem:

$$y_3 = \frac{1}{2}(-16y_1 + 9y_1' - y_1'').$$

Prin urmare,

$$y_1''' = 49y_1 - 63\cdot\frac{-10y_1 + 7y_1' - y_1''}{2} + 41\cdot\frac{-16y_1 + 9y_1' - y_1''}{2} =$$
$$= 36y_1 - 36y_1' + 11y_1'',$$

adică

$$y_1''' - 11y_1'' + 36y_1' - 36y_1 = 0.$$

Rezolvăm această ecuaţie ca o ecuaţie liniară omogenă cu coeficienţi constanţi (7.6.3). Alcătuim ecuaţia caracteristică:

$$k^3 - 11k^2 + 36k - 36 = 0.$$

Rădăcinile ecuaţiei sunt $k_1 = 2$, $k_2 = 3$ şi $k_3 = 6$.

Deci, soluţia ei generală are forma

$$y_1 = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + C_3e^{6x},$$

unde C_1, C_2, C_3 sunt constante arbitrare.

Avem:

$$y_1' = 2C_1e^{2x} + 3C_2e^{3x} + 6C_3e^{6x} \text{ şi } y_1'' = 4C_1e^{2x} + 9C_2e^{3x} + 36C_3e^{6x}.$$

Prin urmare,

$$y_2 = \frac{1}{2}(-10y_1 + 7y_1' - y_1'') = \frac{1}{2}\Big[-10\big(C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + C_3e^{6x}\big) +$$
$$+ 7\big(2C_1e^{2x} + 3C_2e^{3x} + 6C_3e^{6x}\big) -$$
$$- 4C_1e^{2x} - 9C_2e^{3x} - 36C_3e^{6x}\Big] = C_2e^{3x} - 2C_3e^{6x} \text{ şi}$$

$$y_3 = \frac{1}{2}(-16y_1 + 9y_1' - y_1'') = \frac{1}{2}\Big[-16\big(C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + C_3e^{6x}\big) +$$
$$+ 9\big(2C_1e^{2x} + 3C_2e^{3x} + 6C_3e^{6x}\big) - 4C_1e^{2x} - 9C_2e^{3x} - 36C_3e^{6x}\Big] =$$
$$= -C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + C_3e^{6x}.$$

Propunem cititorului să verifice că funcţiile y_1, y_2, y_3, astfel obţinute, satisfac sistemul dat.

7.8. Exerciții la capitolul 7

1. Să se determine tipul și să se afle soluțiile generale ale

a) $y' = xy^2 + x$; b) $y' = \frac{y}{x}\left[\ln\left(\frac{y}{x} + 1\right)\right]$;

c) $y' = 2xy + (x+1)e^{x^2}$; d) $dy + xydx = x^3y^3dx$;

e) $y' = \frac{2 + \cos(x+y)}{5 - \cos(x+y)}$; f) $xy'\cos y + \sin y = 0$;

g) $x(y+1)dx + (x^2+1)dy = 0$;

h) $3y\sin\frac{3x}{y}dx + \left(y - 3x\sin\frac{3x}{y}\right)dy = 0$;

i) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$; j) $y'(x + y^2) = y$;

k) $y' - y\,tgx = \sin x$; l) $y' - \frac{y}{x-1} = \frac{y^2}{x-1}$;

m) $(x^2 - 4)y' - 4y + (x+2)y^2 = 0$;

n) $(e^x\sin y + x)dx + (e^x\cos y + y)dy = 0$;

o) $ye^xdx + (y + e^x)dy = 0$

ecuațiilor diferențiale:

2. Să se afle soluțiile particulare ale ecuațiilor diferențiale;

a) $tgy \cdot dx - x\ln x \cdot dy = 0,\ y(e) = \frac{\pi}{2}$;

b) $y - xy' = 2(1 + x^2y'),\ y(1) = 1$;

c) $(\sqrt{xy} - x)dy + ydx = 0,\ y(1) = 1$;

d) $(x + 3y)dx - (3x - y)dy = 0,\ y(1) = 0$;

e) $y'\sin x - y\cos x = 1,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;

f) $dy = (2xy + 1 - 2x^2)dx,\ y(0) = 2$;

g) $y' - 2y\,tgx + y^2\sin^2 x = 0,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{8}{4-\pi}$;

h) $ydx + \left(x - \frac{1}{2}x^3y\right)dy = 0,\ y\left(\frac{1}{2}\right) = 1$;

i) $yy' + xe^y = 0,\ y(1) = 0$;

j) $y'tgx = y,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$;

k) $(e^{x+y} + 3x^2)dx + (e^{x+y} + 4y^3)dy = 0,\ y(0) = 0$;

l) $(x^2 + y^2 + y)dx + (2xy + x + e^y)dy = 0,\ y(0) = 0$;

m) $(y^2 + 2y + x^2)y' + 2x = 0,\ y(1) = 0$;

n) $y = y'\ln y,\ y(2) = 1$;

o) $y' = e^{x+y} + e^{x-y},\ y(0) = 0$

3. Să se afle soluțiile generale ale ecuațiilor:

a) $y'' = arctg\,x$; b) $y''' = x^2 + \sin 2x$;

c) $y''' = \frac{6}{x^3},\ y(1) = 2,\ y'(1) = 1,\ y''(1) = 1$;

d) $xy'' = y'$; e) $y'' = \frac{y'}{x} + x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$;

f) $yy'' = (y')^2$; g) $y''y^3 = 1$;

h) $y''tgx = y' + 1$; i) $2yy'' = 1 + (y')^2$;

j) $yy'' + (y')^2 = 1,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -2$.

4. Să se integreze următoarele ecuații liniare neomogene:

a) $y'' - 2y' + y = e^{2x}$; b) $y'' + 3y' = 9x$;

c) $y'' - 4y = 8x^3$; d) $y'' - 2y' + 2y = x^2$;

e) $y'' + y' = \frac{1}{1 + e^x}$; f) $y'' - 7y' + 12y = 5e^{3x}$;

g) $y''' + y'' = 6x + e^{-x}$; h) $y'' + y = tgx$;

i) $y'' - 2y' + y = e^x(x^2 + 1)$; j) $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x$;

k) $y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}$; l) $y'' + y = 4x\cos x$;

m) $y'' - 2y' + 3y = e^{-x}\cos x$; n) $y'' + y = x\cos x$;

o) $y'' + 9y = 18\cos 3x - 30\sin 3x$; p) $y'' + 4y' = \frac{1}{\cos 2x}$.

5. Să se afle soluțiile particulare ale ecuațiilor liniare neomogene:

$a)\ y''' - y'' + y' - y = x^2 + x,\ \ y(0) = y'(0) = 0,\ \ y''(0) = 1;$

$b)\ y'' + y' = 4x^2e^x,\ \ y(0) = 3,\ \ y'(0) = 6;$

$c)\ y'' + 10y' + 25y = 4e^{-5x},\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0;$

$d)\ y'' + 3y' + 2y = x\sin x,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = -\dfrac{18}{25};$

$e)\ y''' - y'' = 12x^2 + 6x,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0,\ \ y''(0) = -31;$

$f)\ y'' + 4y = \sin 2x,\ \ y(0) = 2,\ \ y'(0) = 1;$

$g)\ y'' - 6y' + 9y = 25e^x \sin x,\ \ y(0) = 5,\ \ y'(0) = 2;$

$h)\ y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\cos 2x,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 1;$

$i)\ y'' - 3y' + 2y = xe^x,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = -2;$

$j)\ 5y''' - 7y'' = 3,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = -1,\ \ y''(0) = \dfrac{418}{175};$

$k)\ y'' + y' = x^2 - e^{-x} + e^x,\ \ y(0) = \dfrac{1}{2},\ \ y'(0) = \dfrac{9}{2};$

$l)\ y'' + y = x^2 \sin x,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0;$

$m)\ y'' - 2y' + y = 2 + e^x \sin x,\ \ y(0) = 3,\ \ y'(0) = 2;$

$n)\ y'' - 6y' + 9y = 4e^x - 16e^{3x},\ \ y(0) = 2,\ \ y'(0) = 3;$

$o)\ y'' - y' - 2y = 4x - 2e^x,\ \ y(0) = 2,\ \ y'(0) = -4.$

6. Să se integreze următoarele sisteme de ecuații diferențiale reducându-le la o ecuație diferențială liniară de ordin superior:

$a)\ \begin{cases} x_t' = y, \\ y_t' = -x; \end{cases}\qquad b)\ \begin{cases} x_t' = y + 1, \\ y_t' = x + 1; \end{cases}$

$c)\ \begin{cases} x_t' = 3x + 8y, \\ y_t' = -x - 3y; \end{cases}\ x(0) = 6,\ \ y(0) = -2;\qquad d)\ \begin{cases} x_t' = -\dfrac{x}{t} + y, \\ y_t' = -\dfrac{2x}{t^2} + \dfrac{y}{t}; \end{cases}$

$e)\ \begin{cases} x_t' + 3x + 4y = 0, \\ y_t' + 2x + 5y = 0, \end{cases}\ x(0) = 1,\ \ y(0) = 4;\qquad f)\ \begin{cases} x_t' = y + t, \\ y_t' = x - t; \end{cases}$

$g)\ \begin{cases} x_t' = -y + z, \\ y_t' = z, \\ z_t' = -x + z; \end{cases}\qquad h)\ \begin{cases} x_t' = y + z, \\ y_t' = x + z, \\ z_t' = x + y; \end{cases}\ x(0) = 1,\ \ y(0) = 2,\ \ z(0) = 3;$

$i)\ \begin{cases} x_t'' + y_t' + x = 0, \\ x_t' + y_t'' = 0; \end{cases}\qquad j)\ \begin{cases} x_t'' = 3x + y, \\ y_t' = -2x. \end{cases}$

7.9. Indicații și răspunsuri la capitolul 7

1. $a)\ y = tg\left(\dfrac{x^2}{2} + C\right)$ $\quad b)\ y = xe^{Cx};\quad c)\ y = \left[\dfrac{(x+1)^2}{2} + C\right]e^{x^2};$

$d)\ y^2\left(x^2 + 1 + Ce^{x^2}\right) = 1;\ \ e)\ \sin(x+y) + 2x - 5y = C;\ \ f)\ x\sin y = C;$

$g)\ (1+y)\sqrt{x^2+1} = C;\ \ h)\ \ln|y| - \cos\dfrac{3x}{y} = C;\ i)\ y + \sqrt{x^2+y^2} = Cx^2;$

$j)\ x = Cy + y^2$ (*consideăm* $x = \varphi(y)$); $k)\ y = \dfrac{1}{\cos x}\left(\dfrac{1}{2}\sin^2 x + C\right)$

$l)\ y = \dfrac{1-x}{x+C};\ \ m)\ y = \dfrac{x-2}{x+2}\cdot\dfrac{1}{C + \ln|x+2|};\ \ n)\ x^2 + y^2 + 2e^x \sin y = C;$

$o)\ 2ye^x + y^2 = C;$

2. $a)\ x = e^{\sin y};\qquad b)\ y = \dfrac{2+x}{1+2x};\qquad c)\ \ln|y| + 2\sqrt{\dfrac{x}{y}} = 2;$

$d)\ \sqrt{x^2+y^2} = e^{3arctg\frac{y}{x}};\quad e)\ y = -\cos x;\quad f)\ y = x + 2e^{x^2};$

$g)\ y = \dfrac{\sec^2 x}{tgx - x};\ \ h)\ x^2 = \dfrac{1}{y + 3y^2}$ (*considerămx* $= \varphi(y)$);

$i)\ 2(y+1) - e^y\left(x^2+1\right) = 0;\quad j)\ y = \sin x;$

$k)\ e^{x+y} + x^3 + y^4 = 1;\qquad l)\ x^3 + 3xy^2 + 3xy + 3e^y - 3 = 0;$

$m)\ e^y\left(x^2+y^2\right) = 1$ (*considerăm* $x = \varphi(y)$);

$n)\ 2(x-2) = \ln^2|y|;\quad o)\ y = \ln\left|tg\left(e^x + \dfrac{\pi}{4} - 1\right)\right|.$

3. a) $y=\frac{1}{2}(arctgx)(x^2-1)-\frac{x}{2}\ln(1+x^2)+C_1x+C_2;$

b) $y=\frac{1}{60}x^5+\frac{1}{8}\cos 2x+\frac{1}{2}x^2\cdot C_1+C_2x+C_3;$

c) $y=3\ln x+2x^2-6x+6;$ d) $y=C_1x^2+C_2;$

e) $y=\frac{1}{3}x^3+x^2+1;$ f) $y=C_1\cdot e^{C_2x};$

g) $C_1y^2=1+(C_1x+C_2)^2;$ h) $y=C_2-C_1\cos x-x;$

i) $4(C_1y-1)=(C_1x+C_2)^2;$ j) $(x+2)^2-y^2=3.$

4. a) $y=C_1e^x+C_2e^x\cdot x+e^{2x};$ b) $y=C_1+C_2e^{-3x}+\frac{3}{2}x^2-x;$

c) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}-2x^3-3x;$

d) $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+\frac{1}{2}(x+1)^2;$

e) $y=C_1+C_2e^{-x}-(1+e^{-x})\ln(1+e^x)+x;$

f) $y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}-5xe^{3x};$

g) $y=C_1+C_2x+(C_3+x)e^{-x}+x^3-3x^2;$

h) $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\cos x\cdot\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|;$

i) $y=e^x\left(C_1+C_2x+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{12}x^4\right);$

j) $y=e^x\left(C_1+C_2x+C_3x^2+\frac{1}{6}x^3\right);$

k) $y=(C_1-\ln|\sin x|)\cos 2x+\left(C_2-x-\frac{1}{2}ctgx\right)\sin 2x;$

l) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x(x\sin x+\cos x);$

m) $y=e^x\left[C_1\cos(x\sqrt{2})+C_2\sin(x\sqrt{2})\right]+\frac{1}{41}e^{-x}(5\cos x-4\sin x);$

n) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{4}x\cos x+\frac{1}{4}x^2\sin x;$

o) $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+x(5\cos 3x+3\sin 3x);$

p) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x\cdot\ln(\cos 2x).$

5. a) $y=2e^x-\cos x+\sin x-x^2-3x-1;$

b) $y=1-5e^{-x}+e^x(2x^2-6x+7);$ c) $y=(1+2x)e^{-5x}+2x^2e^{-5x};$

d) $y=\frac{39}{50}e^{-x}-\frac{3}{25}e^{-2x}-\left(\frac{3}{10}x-\frac{17}{50}\right)\cos x+\left(\frac{1}{10}x+\frac{3}{25}\right)\sin x;$

e) $y=2-e^x-x^4-5x^3-15x^2+x;$

f) $y=2\cos 2x+\frac{5}{8}\sin 2x-\frac{1}{4}x\cos 2x;$

g) $y=(1-8x)e^{3x}+e^x(4\cos x+3\sin x);$

h) $y=(\cos 2x+\sin 2x)e^{-x}+\frac{1}{4}xe^{-x}\sin 2x;$

i) $y=e^x-e^{2x}-\frac{1}{2}x(x+2)e^x;$ j) $y=1+\frac{2}{5}x-e^{\frac{7}{5}x}-\frac{3}{14}x^2;$

k) $y=1-e^{-x}(1+x)+\frac{1}{2}e^x+\frac{x^3}{3}-x^2+2x;$

l) $y=\left(1+\frac{x}{4}-\frac{x^3}{6}\right)\cos x+\frac{1}{4}(x^2-1)\sin x;$

m) $y=2+e^x(1+2x-\sin x);$ n) $y=(1-x)e^{3x}+e^x-8x^2e^{3x};$

o) $y=e^{-x}-e^{2x}-2x+1+e^x.$

6. a) $x=C_1\cos t+C_2\sin t,$ $y=-C_1\sin t+C_2\cos t;$

b) $x=C_1e^t+C_2e^{-t}-1,$ $y=C_1e^t-C_2e^{-t}-1;$

c) $x=4e^t+2e^{-t},$ $y=-e^t-e^{-t};$

d) $x=C_1+C_2t,$ $y=C_1\cdot\frac{1}{t}+2C_2;$

e) $x=-2e^{-t}+3e^{-7t},$ $y=e^{-t}+3e^{-7t};$

f) $x=C_1e^t-C_2e^{-t}+t-1,$ $y=C_1e^t+C_2e^{-t}-t+1;$

$g)\ x=(C_1-C_2)\cos t+(C_1+C_2)\sin t,$

$y=C_1\sin t-C_2\cos t+C_3e^t,$

$z=C_1\cos t+C_2\sin t+C_3e^t;$

$h)\ x=-e^{-t}+2e^{2t},\qquad y=2e^{2t},\qquad z=e^{-t}+2e^{2t};$

$i)\ x=C_1+C_2t+C_3t^2,$

$y=-(C_1+2C_3)t-\frac{1}{2}C_2t^2-\frac{1}{3}C_3t^3+C_4;$

$j)\ x=(C_1+C_2t)e^t+C_3e^{-2t},\ y=2(C_2-C_1-C_2t)e^t+C_3e^{-2t}$.

Capitolul 8.

Serii.

În capitolul de față vom studia seriile, un aparat matematic important ce se utilizează la calcule și studii atât în diferite compartimente ale matematicii propriu-zise, cât și în diverse aplicații ale ei.

8.1 Serii numerice.

8.1.1. Serii numerice. Noțiuni generale.

Reamintim ([20], 1.4.1) că funcția f : $N \to R$ se numește *șir de numere reale*. Se notează $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ etc. Numerele $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ale șirului $\{a_n\}$ se numesc *termenii* șirului, iar numărul a_n - *termenul general* al șirului. Pe axa numerică șirul $\{a_n\}$ reprezintă o mulțime infinită de puncte $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Expresia de forma :

$$a_1+a_2+\dots+a_n+\dots \qquad (1),$$

unde $a_n\in R$ și $n\in N$ se numește *serie numerică*. Numerele $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ se numesc *termenii* seriei, iar a_n - *termenul general* al ei. Se notează astfel $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (se citește: sigma a_n , unde n variază de la 1 până la ∞ (infinit)).[*)]

Să adunăm succesiv termenii seriei (1), formând sumele:

$$S_1=a_1,\ S_2=a_1+a_2,\ \dots,\ S_n=a_1+\dots+a_n,\ \dots \qquad (2)$$

[*)] Uneori este mai ușor să se înceapă numerotarea termenilor seriei nu de la 1, ci de la zero, sau chiar de la un număr natural mai mare decât unitatea.

care se numesc *sume parţiale* ale seriei (1). Acest şir $\{S_n\}$ de sume parţiale se va asocia întotdeauna cu seria (1). Menţionăm că rolul expresiei de forma (1) este anume de a obţine şirul (2) şi de a studia limita lui.

Definiţie. Seria (1) se numeşte *convergentă,* dacă şirul (2) este convergent, adică există limita finită $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. În acest caz numărul S se numeşte *suma* seriei (1). Dacă şirul (2) este divergent, adică nu are limită sau limita lui este egală cu infinit, atunci seria (1) se numeşte *divergentă* şi, în acest caz, nu i se atribuie nici o sumă.

Aşadar, conform definiţiei, convergenţa seriei, adică existenţa sumei seriei (1), înseamnă existenţa limitei finite a şirului sumelor parţiale (2).

Are loc şi afirmaţia reciprocă. Pentru orice şir de numere $\{b_n\}$ existenţa limitei finite a acestui şir este echivalentă cu convergenţa seriei :

$$b_1 + (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \ldots + (b_n - b_{n-1}) + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n-1}) \text{ cu } b_0 = 0.$$

Şirul sumelor parţiale ale acestei serii coincide cu şirul $\{b_n\}$.

Într-adevăr

$$S_1 = b_1,\ S_2 = b_1 + (b_2 - b_1) = b_2, \ldots,\ S_n = b_1 + \ldots + (b_n - b_{n-1}) = b_n, \ldots .$$

Prin urmare, din convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n-1})$, $b_0 = 0$ rezultă convergenţa şirului $\{b_n\}$ şi viceversa. Astfel orice propoziţie formulată în limbajul seriilor poate fi tradusă (reformulată) în limbajul şirurilor şi reciproc.

A cerceta natura unei serii numerice înseamnă a stabili convergenţa sau divergenţa ei.

În continuare vom considera câteva exemple de serii convergente şi divergente.

Exemplul 1. Să se cerceteze natura seriei

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + \ldots + aq^n + \ldots .$$

Observăm că termenii ei formează o progresie geometrică cu raţia q. Vom considera cazul când $a \neq 0$.

Avem, $S_n = a + aq + \ldots + aq^{n-1} = \dfrac{a - aq^n}{1-q} = \dfrac{a}{1-q} - \dfrac{aq^n}{1-q}$.

Sunt posibile următoarele cazuri:

a) Pentru $|q| < 1$, avem

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q} - 0 = \frac{a}{1-q},$$

adică seria dată este convergentă, având suma ei egală cu $\dfrac{a}{1-q}$.

Deci,

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots = \frac{a}{1-q},$$

rezultat bine cunoscut din clasele liceale superioare;

b) Pentru $|q| > 1$, seria este divergentă, deoarece $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ (a se consulta ex.2 din 1.4.1. [20]);

c) Pentru $q = 1$, obţinem seria

$$a + a + \ldots + a + \ldots .$$

Avem $S_n = \underbrace{a + \ldots + a}_{n \text{ ori}} = na$ şi $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, adică seria este divergentă;

d) Pentru $q = -1$, obţinem seria

$$a - a + a - a + \ldots ,$$

care este de asemenea divergentă, deoarece $S_n = \begin{cases} a, & \textit{pentru } n \textit{ impar} \\ 0, & \textit{pentru } n \textit{ par}, \end{cases}$ şi, deci şirul $\{S_n\}$ nu are limită (a se consulta [3], cap.2, § 2.6, ultimele alineate sau [20], ex.4 din 1.4.2. pag. 43).

Prin urmare, seria formată din termenii unei progresii geometrice este convergentă pentru $|q| < 1$, având suma ei egală cu $\frac{a}{1-q}$ şi divergentă pentru $|q| \geq 1$.

Exemplul 2. Să se arate că seria

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...,$$

numită *armonică* [*] este divergentă.

După cum se ştie (vezi de exemplu [2], cap.2, §3.2; [6], cap.3, partea 2, §11; [3], cap.2, §4.5) şirul crescător $\{x_n\}$, $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ este convergent, având limita egală cu e.

Deci, pentru orice $n \in N$ avem $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$.

Logaritmând în baza e această inegalitate, obţinem

$$n\ln(1+\frac{1}{n}) = n\ln\frac{n+1}{n} < 1.$$

De unde,

$$\frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n, \quad n \in N.$$

Înlocuind $n = 1,2,3,\dots$, obţinem:

[*] Fiecare termen începând cu al doilea, este media armonică a celor doi termeni vecini. Numărul c este media armonică a numerelor a şi b dacă $\frac{1}{c} = \frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$.

$$1 > \ln 2,$$
$$\frac{1}{2} > \ln 3 - \ln 2,$$
$$\frac{1}{3} > \ln 4 - \ln 3,$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots$$
$$\frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n,$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad .$$

Adunând parte cu parte primele n inegalităţi, avem:

$$S_n = 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n} > \ln(n+1).$$

Prin urmare, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n \geq \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$, adică $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ şi seria armonică este divergentă.

Exemplul 3. Fie seria de numere pozitive

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}+... = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}.$$

Observăm că $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, pentru orice $n \in N$.

Prin urmare, şirul sumelor parţiale are forma:

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = 1-\frac{1}{2},\quad S_2 = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3} = 1-\frac{1}{3}, \dots,$$

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2}+...+\frac{1}{n(n+1)} = 1-\frac{1}{n+1},....$$

Deci, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1}) = 1$, adică seria iniţială este convergentă şi suma ei este egală cu 1.

Se poate scrie

$$1=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}+....$$

Exemplul 4. Considerăm seria :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}[\ln(n+1)-\ln n].$$

Suma parţială S_n se calculează astfel:

$$S_n=\ln 2+(\ln 3-\ln 2)+(\ln 4-\ln 3)+...+[\ln(n+1)-\ln n]=$$
$$=\ln(n+1).$$

Întrucât şirul $\{S_n\}$ este divergent, deoarece $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}[\ln(n+1)]=+\infty$, seria iniţială este divergentă.

Exemplul 5. Să se cerceteze la convergenţă seria:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Considerăm şirul $\{S_n\}$ al sumelor parţiale ale acestei serii.

Avem:

$$S_n=1+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}<S_{n+1}=1+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}$$

şi, deci, şirul $\{S_n\}$ este crescător. Observăm că acest şir este mărginit superior:

$$S_n=1+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n(n-1)}=$$
$$=1+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+...+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})=1+(1-\frac{1}{n})<2.$$

Prin urmare, şirul sumelor parţiale $\{S_n\}$ al seriei date este crescător şi mărginit superior. Deci acest şir este convergent ([20], teorema 7 din 1.4.2) şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ este convergentă.

Remarcăm următoarele proprietăţi ale seriilor numerice:

1. Omiterea unui număr finit de termeni sau adăugarea a câtorva termeni noi nu schimbă natura seriei, adică ambele serii sunt simultan sau convergente sau divergente.

Aceasta reiese din faptul că omiterea sau adăugarea unui număr finit de termeni nu influenţează la natura şirului numeric ([20], nota 1, pag.43).

2. Dacă termenii seriei convergente (1) se înmulţesc cu un număr $r\in R$, convergenţa nu dispare. Suma ei se înmulţeşte cu numărul r.

Observăm că dacă seria (1) este divergentă, atunci şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}r\,a_n,\ unde\ r\neq 0$ este divergentă. Într-adevăr, dacă vom admite, că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}r\,a_n$ este convergentă şi vom înmulţi termenii ei cu $\frac{1}{r}$, atunci vom obţine că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ este convergentă, ceea ce contrazice ipoteza.

3. Două serii convergente

$$A=a_1+...+a_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

şi

$$B=b_1+...+b_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

se pot aduna sau scădea termen cu termen şi seriile:

$$(a_1\pm b_1)+...+(a_n\pm b_n)+...=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$$

vor fi de asemenea convergente, suma lor fiind egală respectiv cu A+B şi A–B.

Proprietăţile 2 şi 3 reiese din proprietăţile similare şirurilor numerice convergente (a se consulta [20], 1.4.3, teorema 1. şi consecinţele 2,3).

În acest fel s-a stabilit că seriile convergente pot fi adunate, scăzute termen cu termen şi înmulţite cu un număr tot aşa ca şi sumele finite.

Notă. Suma unei serii convergente şi a unei serii divergente este o serie divergentă. Într-adevăr, fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă. Atunci, dacă admitem convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$, obţinem, în virtutea proprietăţii 3, că seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă ca diferenţa a două serii convergente $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ceea ce contrazice condiţia. O afirmaţie generală în privinţa sumei a două serii divergente nu poate fi făcută. În unele cazuri suma a două serii divergente poate fi o serie convergentă, în altele – divergentă (a se consulta nota după teorema 1 din 1.4.3 [20]).

Fie seria (1). Fixăm indicele n şi formăm următoarea serie

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} + \ldots = \sum_{p=1}^{\infty} a_{n+p}, \tag{3}$$

care se numeşte *restul de ordinul n* al seriei (1). Notăm suma parţială a primilor n termeni ai seriei (1) prin S_n, suma parţială a primilor $(n + p)$ termeni ai seriei (1) prin S_{n+p}, iar suma parţială a primilor p termeni ai seriei (3) prin σ_p. Avem:

$$\sigma_p = S_{n+p} - S_n.$$

Din această relaţie, în care S_n este fixat rezultă că există şi sunt finite sau ambele limite

$$\lim_{p\to\infty} \sigma_p \text{ şi } \lim_{p\to\infty} S_{n+p}$$

sau nici una.

Deci, dacă seria (1) este divergentă, adică nu există limita finită $\lim\limits_{p\to\infty} S_{n+p}$, atunci restul ei – seria (3) este de asemenea divergentă: nu există limita finită $\lim\limits_{p\to\infty} \sigma_p$.

Fie seria (1) convergentă şi suma ei $S = \lim\limits_{p\to\infty} S_{n+p}$. În acest caz seria (3) este de asemenea convergentă şi suma ei

$$R_n = \lim_{p\to\infty} \sigma_p = \lim_{p\to\infty}(S_{n+p} - S_n) = S - S_n. \tag{4}$$

Dacă în ultima egalitate indicele n nu rămâne fixat, ci tinde către ∞, atunci $S_n \to S$ şi deci $R_n \to 0$. Aşadar restul unei serii convergente tinde către zero când $n \to \infty$.

Are loc şi afirmaţia inversă. Fie $\lim\limits_{p\to\infty} R_n = 0$, adică seria (3) este convergentă. Adăugând la seria (3) un număr finit de termeni a_1, a_2, ...,a_n, în virtutea proprietăţii 1 de mai sus, seria obţinută (seria (1)) este convergentă. Se vede, că restul unei serii convergente reprezintă eroarea comisă la înlocuirea egalităţii exacte $S = S_n + R_n$ prin egalitatea aproximativă $S \approx S_n$, care se foloseşte la calcularea valorii aproximative a sumei seriei convergente. Gradul de precizie se află evaluând restul R_n.

Exemplul 6. Să se calculeze cu precizia de 0,01 suma seriei din exemplul 5.

Aflăm valoarea indicelui n din formula $S = S_n + R_n$, pentru care $R_n < 0{,}01$.

Restul R_n al seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este egal cu:

$$R_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} + \ldots < \frac{1}{n(n+1)} +$$
$$+ \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} + \ldots =$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)}\right)+\left(\frac{1}{(n+1)}-\frac{1}{(n+2)}\right)+\ldots+$$

$$+\left[\frac{1}{(n+p-1)}-\frac{1}{(n+p)}\right]+\ldots=\frac{1}{n}.$$

Prin urmare, $R_n<\frac{1}{n}$ şi, deci, înlocuind suma S prin suma parţială

$$S_n=1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2},$$

comitem o eroare mai mică decât $\frac{1}{n}$. Pentru n = 100 din egalitatea

$$S\approx 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{100^2}$$

aflăm suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ cu precizia de 0,01.

În practica studierii seriilor numerice se rezolvă două probleme:

1) se studiază natura seriei, adică se stabileşte dacă seria dată este convergentă sau divergentă;

2) ştiind, că seria este convergentă, se află sau cel puţin se estimează suma ei.

Aceste probleme nu sunt simple. Atât prima, cât şi a doua problemă nu întotdeauna pot fi rezolvate practic. În fond ne vom ocupa mai mult de rezolvarea primei probleme, adică vom studia natura seriilor numerice. Pe parcurs vom examina diferite criterii de convergenţă ale seriilor numerice.

Teorema 1 (criteriul general de convergenţa seriilor al lui Cauchy). Pentru ca seria $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ să fie convergentă este necesar şi suficient, ca pentru orice număr $\varepsilon>0$ să existe un număr natural $N(\varepsilon)$ astfel încât pentru orice $n>N(\varepsilon)$ şi orice $p>0$ întreg să se satisfacă inegalitatea:

$$\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}\right|<\varepsilon.$$

Demonstraţia acestei teoreme reiese din criteriul general de convergenţă al şirurilor numerice (a se consulta [3], cap.2, § 2.5; [6], cap.10, partea 1, § 1).

Trebuie să avem în vedere, că utilizarea criteriului general al lui Cauchy în practică este de obicei un lucru dificil, de aceea se consideră criterii mai simple în sensul aplicării lor în practică, în schimb mai "înguste".

Teorema 2 (criteriul necesar de convergenţa seriilor). Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ este convergentă, atunci $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

Demonstraţia reiese imediat din teorema 1 considerând p = 1.

Teorema 2 se poate demonstra şi altfel: fie seria $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ convergentă şi S suma ei. Atunci, $\lim_{n\to\infty}S_n=S$. Observăm că şi $\lim_{(n-1)\to\infty}S_{n-1}=S$. Întrucât $a_n=S_n-S_{n-1}$, obţinem:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=S-S=0.$$

Consecinţă: Dacă $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ este divergentă.

Demonstraţia se face prin metoda reducerii la absurd.

Exemplul 7. Să se studieze natura seriilor:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$.

Rezolvare.

a) Avem: $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})=1$.

Deci, seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}$ este divergentă.

b) Seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = -1+1-1+...+(-1)^n+...$ este de asemenea divergentă deoarece termenul ei general nu tinde către zero când $n \to \infty$: şirul $\{(-1)^{n-1}\}$ nu are limită (a se consulta [20], 1.4.2, ex.4, pag. 43).

Teorema reciprocă teoremei 2 nu este valabilă (a se vedea ex.2 şi 3 de mai sus).

În încheiere constatăm următoarele: dacă termenul general al seriei (1) când $n \to \infty$ nu tinde către zero, atunci seria este divergentă. Dacă, însă, termenul general tinde către zero, atunci despre convergenţa seriei încă nu se poate spune nimic. În acest caz seria mai trebuie studiată, folosind alte criterii de convergenţă. Vom începe cu stabilirea de criterii suficiente de convergenţă.

8.1.2. Serii cu termeni pozitivi.

La studierea seriilor, termenii cărora au acelaşi semn, este suficient să considerăm seriile cu termeni pozitivi. Într-adevăr, seriile cu termeni negativi se deosebesc de seriile respective cu termeni pozitivi doar prin factorul (-1), din care cauză aşa serii, în virtutea proprietăţii 2 din 8.1.1., se comportă la fel în raport cu convergenţa.

Teorema 1. (*criteriul monotoniei*). Pentru ca seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cu termeni pozitivi să fie convergentă este necesar şi suficient ca şirul sumelor ei parţiale să fie mărginit superior.

Demonstraţie. Dacă seria este convergentă, şirul sumelor parţiale este convergent. Însă orice şir convergent este mărginit ([20], teorema 3 din 1.4.2). Astfel condiţia necesară este demonstrată.

Presupunem acum că şirul sumelor parţiale $\{S_n\}$ al seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este mărginit superior. Întrucât termenii seriei date sunt pozitivi, avem:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n < S_{n+1} = a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1}.$$

Prin urmare, şirul $\{S_n\}$ este crescător şi mărginit superior. Conform teoremei 7 din 1.4.2 [20], şirul este convergent, ceea ce înseamnă, că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă. Teorema 1 este complet demonstrată.

Consecinţă. Dacă dintr-o serie convergentă $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cu termeni pozitivi este omisă o mulţime finită sau infinită de termeni, seria rămasă este de asemenea convergentă.

Într-adevăr, admitem că din seria convergentă $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cu termeni pozitivi s-a omis o mulţime finită sau infinită de termeni.

Seria rămasă va fi:

$$b_1 + b_2 + ... + b_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} b_n .$$

Notăm prin σ_n suma parţială a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Orice termen al seriei $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este şi termen al seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. De aceea pentru suma parţială

$$\sigma_n = b_1 + b_2 + ... + b_n$$

există o sumă parţială $S_m = a_1 + a_2 + ... + a_m$ a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, care conţine toţi termenii din σ_n. Deoarece S_m conţine şi alţi termeni avem:

$$\sigma_n < S_m < S ,$$

unde S este suma seriei convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Prin urmare, şirul $\{\sigma_n\}$ al sumelor parţiale ale seriei $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este mărginit superior.

Pe baza teoremei 1, seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă.

Exemplul 8. Să se cerceteze la convergenţă seriile:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$, $k \geq 2$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n^2}$.

Rezolvare.

a) Dacă k = 2, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă (exemplul 5).

Notăm prin S_n suma parţială a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$, $k > 2$. Avem

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \ldots + \frac{1}{n^k} < 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < \sigma,$$

unde σ este suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Prin urmare şirul $\{S_n\}$ al sumelor parţiale ale seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$, $k \geq 2$ este mărginit superior. Conform teoremei 1, seria dată este convergentă pentru orice număr real $k \geq 2$.

b) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n^2}$ este convergentă, deoarece

$$\frac{1}{2^n + n^2} < \frac{1}{2^n} \quad (n = 1,2,\ldots) \text{ şi}$$

$$S_n = \frac{1}{2+1^2} + \frac{1}{2^2+2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n+n^2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1$$

pentru orice $n = 1,2,\ldots$, adică şirul $\{S_n\}$ este mărginit superior.

Nota 1. Seriile cu termeni pozitivi întotdeauna au sumă:
a) finită şi, prin urmare, seria este convergentă;
b) infinită şi, prin urmare, seria este divergentă;

Teorema 2 (*Criteriul 1 de comparaţie*). Fie date două serii cu termeni pozitivi :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

şi

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \tag{2}$$

Dacă există un număr natural N_1 astfel încât pentru orice $n > N_1$:

$$a_n \leq b_n, \tag{3}$$

atunci din convergenţa seriei (2) reiese convergenţa seriei (1), iar din divergenţa seriei (1) reiese divergenţa seriei (2).

Demonstraţie. Notăm prin S_n şi σ_n respectiv sumele parţiale ale seriilor (1) şi (2). Deoarece seria (2) este convergentă, sumele ei parţiale sunt mărginite superior, adică pentru orice număr natural n

$$\sigma_n \leq M,$$

unde M este un număr oarecare pozitiv. Dar în virtutea relaţiei (3) avem:

$$S_n \leq \sigma_n \leq M$$

pentru orice $n > N_1$.

Aceasta înseamnă că şirul $\{S_n\}$ este mărginit superior şi conform teoremei 1, seria (1) este convergentă.

Dacă seria (1) este divergentă, atunci şi seria (2) va fi divergentă deoarece, dacă se admite contrariul, obţinem conform celor demonstrate că, seria (1) este convergentă, ceea ce contrazice ipoteza.

Astfel teorema este complet demonstrată.

Practic e mai potrivită următoarea teoremă care rezultă din teorema 2.

Teorema 3 (*Criteriul 2 de comparaţie*). Fie (1) şi (2) două serii cu termeni pozitivi, astfel încât: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k$.

Dacă $0<k<+\infty$, atunci seriile (1) şi (2) au aceeaşi natură de convergenţă : ambele sunt convergente sau ambele sunt divergente.

Dacă $k=0$ şi seria (2) este convergentă, atunci şi seria (1) este convergentă. Dacă $k=+\infty$ şi seria (2) este divergentă, atunci seria (1) este divergentă.

Demonstraţie. Fie $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k$, $0<k<+\infty$ şi seria (2) este convergentă. Luând un $\varepsilon>0$, conform definiţiei limitei funcţiei (în sens Cauchy), pentru n suficient de mare vom avea

$$\frac{a_n}{b_n}<k+\varepsilon \text{ sau } a_n<(k+\varepsilon)\cdot b_n.$$

În baza proprietăţii 2 din 8.1.1 , odată cu convergenţa seriei (2) va fi convergentă şi seria $\sum_{k=1}^{\infty}(k+\varepsilon)\cdot b_n$. În virtutea teoremei 2 seria (1) este convergentă. Dacă însă $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k$, $0<k<+\infty$ şi seria (2) este divergentă, atunci presupunând că seria (1) este convergentă avem: $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\frac{1}{k}$ şi $0<\frac{1}{k}<+\infty$. Conform primei părţi a teoremei 3 obţinem că seria (2) este convergentă, ceea ce contrazice ipoteza.

Dacă $k=0$, atunci pentru $\varepsilon>0$ şi n suficient de mare vom avea:

$$\frac{a_n}{b_n}<\varepsilon \text{ sau } a_n<\varepsilon\cdot b_n.$$

Din convergenţa seriei (2) rezultă convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon\cdot b_n$ (proprietatea 2 din 8.1.1) şi prin urmare, convergenţa seriei (1) (teorema 2).

În fine, fie $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty$, atunci $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=0$. Dacă seria (2) este divergentă, atunci presupunând că seria (1) este convergentă obţinem pentru $\varepsilon>0$ şi n suficient de mare

$$\frac{b_n}{a_n}<\varepsilon \text{ sau } b_n<\varepsilon\cdot a_n.$$

Din convergenţa seriei (1) reiese convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon\cdot a_n$ (proprietatea 2 din 8.1.1) şi deci convergenţa seriei (2) (teorema 2), ceea ce contrazice ipoteza.

Teorema e complet demonstrată.

Teorema 4. Fie (1) şi (2) două serii cu termeni pozitivi. Dacă, începând cu un termen oarecare (să zicem, pentru $n>N_l$) este satisfăcută inegalitatea:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}$$

atunci din convergenţa seriei (2) rezultă convergenţa seriei (1) sau ceea ce este acelaşi lucru, din divergenţa seriei (1) rezultă divergenţa seriei (2).

Demonstraţie. Fie are loc inegalitatea

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

În acest caz vom avea, fără a restrânge generalitatea,

$$\frac{a_2}{a_1}\le\frac{b_2}{b_1},\frac{a_3}{a_2}\le\frac{b_3}{b_2},\dots,\frac{a_n}{a_{n-1}}\le\frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

Înmulţind aceste inegalităţi parte cu parte, obţinem $\frac{a_n}{a_1}\le\frac{b_n}{b_1}$ sau

$a_n\le\frac{a_1}{b_1}\cdot b_n$, pentru $n=1,2,\dots$.

Fie seria (2) este convergentă. Împreună cu ea converge şi seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1}{b_1}\cdot b_n$ (pe baza proprietăţii 2 din 8.1.1). Prin urmare, în virtutea teoremei 2, seria (1) este convergentă.

Propunem cititorului să demonstreze partea a 2-a a teoremei: din divergenţa seriei (1) rezultă divergenţa seriei (2).

Teorema este demonstrată.

Exemplul 9. Să se studieze natura seriilor:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a+hn}$, $h > 0, a > 0$;

Rezolvare.

a) Observăm că

$$a_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}=\frac{n!\cdot n!}{(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n)(n+1)(n+2)\ldots(2n)}=$$

$$=\frac{n!\cdot n!}{(2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n)[1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)]}=$$

$$=\frac{n!}{2^n[1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-1)]}=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}=$$

$$=\frac{1}{2^n}\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{2n-1}<\frac{1}{2^n}=b_n$$

Seria $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ este o serie convergentă, deoarece termenii ei formează o progresie geometrică cu raţia $q=\frac{1}{2}<1$ (exemplul 1 din 8.1.1.). Pe baza teoremei 2 seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ este convergentă.

b) Considerăm seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, care este divergentă (exemplul 2 din 8.1.1.). Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a+h\cdot n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a+h\cdot n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{a}{n}+h}=\frac{1}{0+h}=\frac{1}{h}>0$$

Prin urmare seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a+h\cdot n}$, *a > 0, h > 0* este divergentă (pe baza teoremei 3).

Teorema 5 (*Criteriul D'Alembert*). Fie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=k$, atunci seria este convergentă pentru $k < 1$ şi divergentă pentru $k > 1$. Pentru $k = 1$ criteriul nu rezolvă problema. Menţionăm că $k = +\infty$ se conţine în cazul $k > 1$.

Demonstraţie. Fie $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=k$ şi $k < 1$. Există un număr q astfel încât $k < q < 1$. Conform definiţiei limitei (în sens Cauchy) pentru $\varepsilon = q - k > 0$ şi n suficient de mare vom avea

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<k+\varepsilon=q \quad \text{sau}$$

$$a_{n+1}<q\cdot a_n,\, a_{n+2}<q\cdot a_{n+1}<q^2\cdot a_n,\, a_{n+3}<q^3\cdot a_n,\ldots,\, a_{n+p}<q^p\cdot a_n.$$

Considerăm seriile:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}+\ldots \quad \text{şi}$$

$$a_n+a_nq+a_nq^2+\ldots+a_nq^p+\ldots\,.$$

Seria $a_n + a_n q + a_n q^2 + ... + a_n q^p + ...$ este convergentă ca o serie, termenii căreia, formează o progresie geometrică cu rația $q < 1$ (exemplul 1 din 8.1.1.).

Aplicând teorema 2 și proprietatea 1 din 8.1.1 , conchidem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

Fie acum $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k$ și $k > 1$. Există un număr real q astfel încât $1 < q < k$. Conform definiției limitei funcției (în sens Cauchy) pentru $\varepsilon = k - q > 0$ și n suficient de mare vom avea

$$k - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < k + \varepsilon.$$

De unde

$$k - (k - q) < \frac{a_{n+1}}{a_n}, \text{ adică}$$

$$a_{n+1} > a_n q,\ a_{n+2} > a_{n+1} q > a_n q^2,\ a_{n+3} > a_{n+2} q > a_n q^3, ..., a_{n+p} > a_n q^p.$$

Considerăm seriile:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p} + ... \text{ și}$$

$$a_n + a_n q + a_n q^2 + ... + a_n q^p + ...$$

În baza exemplului 1 din 8.1.1. seria $a_n + a_n q + a_n q^2 + ... + a_n q^p + ...$ este divergentă, deoarece $q > 1$.

În virtutea teoremei 2, seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este de asemenea divergentă.

Pentru $k = 1$ problema studierii naturii seriei nu se rezolvă deoarece : aplicând criteriul D'Alembert la seriile din exemplele 2 și 3 din 8.1.1, obținem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

(seria armonică este divergentă) și

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{n}} = 1$$

(seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ este convergentă).

Teorema este complet demonstrată.

Teorema 6 (*Criteriul radical al lui Cauchy*). Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$, atunci pentru $k < 1$ seria este convergentă, iar pentru $k>1$ seria este divergentă. Cazul $k = 1$ este exceptat.

Demonstrația este similară teoremei 5 și o propunem cititorului.

În cazul când $k = 1$ și acest criteriu nu ne permite să stabilim natura seriei: pentru seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, care este divergentă, avem:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1$$

(a se consulta ex. 7 a), pag. 21 din [21]). Pentru seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, care este convergentă (exemplul 2 din 8.1.1.), avem:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n+1}} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1$$

(a se consulta exemplul 1.27 m), pag. 24 din [21]).

Exemplul 10. Să se studieze natura seriilor:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}$;

Rezolvare.

a) Aplicând criteriul D'Alembert, avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

Deci seria inițială este convergentă.

b) Aplicând criteriul radical Cauchy, obținem

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n = e^2 > 1.$$

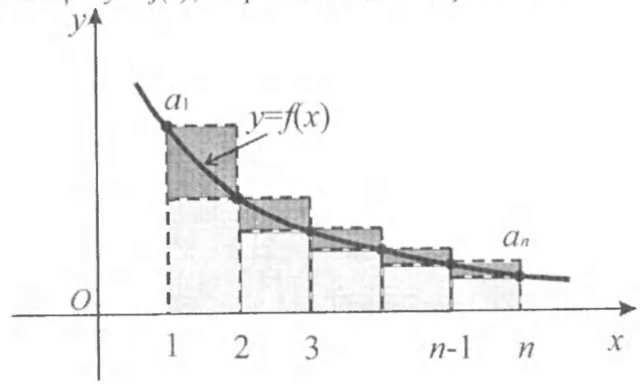
Prin urmare seria dată este divergentă.

După cum se vede din raționamentele de mai sus, criteriile lui D'Alembert și Cauchy se bazează pe comparația seriei date cu seria, termenii căreia formează o progresie geometrică. Aceste criterii nu sunt „sensibile" în raport cu seriile, care converg „mai încet" sau diverg „ mai încet " decât progresia geometrică. Pentru astfel de serii trebuie să avem criterii mai puternice. Astfel de criterii sunt : criteriul integral al lui Cauchy și criteriul lui Raabe [(1801 – 1859) – matematician german] și Duhamel Jean ((1797–1872) – matematician francez).

Teorema 7 (*Criteriul integral al lui Cauchy*). Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi, și termenii ei formează un șir monoton descrescător. Fie $f(x)$ o funcție continuă, pozitivă și descrescătoare pentru orice $x \geq 1$*), astfel încât $f(1)=a_1, f(2)=a_2, \ldots, f(n)=a_n, \ldots$. Atunci din convergența sau divergența integralei improprii $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ rezultă convergența sau respectiv divergența seriei date.

* Drept valoare inițială a lui x, în loc de 1 poate servi orice alt număr natural n.

Demonstrație. Vom considera trapezul curbiliniu limitat de graficul funcției $y = f(x)$, dreptele $x = 1$, $x = n$ și axa OX.



Înscriem acest trapez curbiliniu și îl circumscriem în două figuri în trepte, compuse din dreptunghiuri, bazele cărora sunt egale cu 1, iar înălțimile respectiv cu $f(1)=a_1$, $f(2)=a_2$, $f(3)=a_3, \ldots$, $f(n-1)=a_{n-1}$ și $f(n)=a_n$ (vezi figura de mai sus).

Ținând cont de sensul geometric al integralei definite, avem:

$$a_2 + a_3 + \ldots + a_n < \int_1^n f(x)dx < a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$$

sau $S_n - a_1 < \int_1^n f(x)dx < S_n - a_n$,

unde S_n sunt sumele parțiale ale seriei considerate.

Prin urmare,

$$S_n < a_1 + \int_1^n f(x)dx \text{ și} \quad (4)$$

$$S_n > a_n + \int_1^n f(x)dx . \quad (5)$$

Dacă $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ este convergentă, atunci integralele ei parțiale $\int_1^n f(x)dx$ sunt mărginite (superior), (a se consulta [20], 4.3.2 teorema 2). Conform inegalității (4) obținem că șirul $\{S_n\}$ este mărginit superior și deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă, în virtutea teoremei 1.

Dacă, însă, $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ este divergentă, atunci $\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx = +\infty$, adică șirul $\{\int_1^n f(x)dx\}$ este un șir monoton crescător nemărginit. Din inegalitatea (5) rezultă că $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$, adică șirul sumelor parțiale $\{S_n\}$ ale seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergent. Prin urmare, seria inițială este divergentă și teorema este demonstrată.

Exemplul 11. Să se cerceteze natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, unde $s \in \mathbf{R}$.

Considerăm două cazuri:

a) Fie $s > 0$. Vom determina natura seriei, utilizând criteriul integral al lui Cauchy. În calitate de $f(x)$ luăm funcția $\frac{1}{x^s}$, $x \in [1,+\infty[$, care satisface condițiile teoremei 6.

Avem: $f(1)=\frac{1}{1^s}; f(2)=\frac{1}{2^s}; f(3)=\frac{1}{3^s},\ldots,f(n)=\frac{1}{n^s},\ldots$.

După cum se știe (vezi [20], 4.3.1, exemplul 4) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^s}$ este convergentă pentru $s > 1$ și divergentă pentru $s \le 1$.

Aplicând teorema 7, conchidem că seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ este convergentă pentru $s > 1$ și divergentă pentru $s \le 1$.

b) Fie $s \le 0$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{|s|}$. Observăm că $\lim_{n\to\infty} n^{|s|} = +\infty$, adică termenul general al acestei serii nu tinde către zero, când $n \to \infty$. Conform consecinței din teorema 2 din 8.1.1., seria inițială este divergentă.

Așadar seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ este convergentă pentru $s > 1$ și divergentă pentru $s \le 1$. Această serie se numește *serie armonică generalizată* sau *seria lui Riemann.*

În particular, pentru $s = 1$ obținem seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, care este divergentă (exemplul 2 din 8.1.1.), pentru $s = 2$, obținem seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, care este convergentă (exemplul 5 din 8.1.1.).

Nota 2. Criteriul integral al lui Cauchy a fost descoperit în formă geometrică încă în anul 1742 de Mac Laurin ((1698 – 1746) – savant scoțian), rămânând însă neobservat. Acest criteriu a fost redescoperit din nou în anul 1827 de Cauchy.

Teorema 8 (*Criteriul Raabe - Duhamel*).

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)= = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = k$, atunci pentru $k > 1$ seria este convergentă, iar pentru $k < 1$ seria este divergentă. Cazul $k = 1$ este exceptat.

Demonstrație. Fie $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=k$ și $k>1$. Există un număr r, astfel încât $1 < r < k$. Pe baza definiției limitei funcției (în sens Cauchy) pentru $\varepsilon = k - r > 0$ și n suficient de mare, avem

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > k-\varepsilon = r > 1.$$

De unde $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1-\frac{r}{n}$.

Să luăm acum un număr oarecare s cuprins între 1 și r, adică $1 < s < r$. Pe baza unei consecințe din a 2 – a limită remarcabilă ([20], 1.5.4, teorema 2, consecința 5) avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^s-1}{\left(-\frac{1}{n}\right)}=s,$$

ceea ce înseamnă că pentru $\varepsilon = r - s > 0$ și n suficient de mare vom avea:

$$\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^s-1}{\left(-\frac{1}{n}\right)} < s+\varepsilon = r \quad \text{sau} \quad \left(1-\frac{1}{n}\right)^s > \left(1-\frac{r}{n}\right).$$

Având în vedere că $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(1-\frac{r}{n}\right) < \left(1-\frac{1}{n}\right)^s$, obținem

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(1-\frac{1}{n}\right)^s = \frac{\frac{1}{n^s}}{\frac{1}{(n-1)^s}}.$$

În partea dreaptă a inegalității avem raportul a doi termeni succesivi ai seriei convergente $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ cu $s > 1$. Aplicând teorema 4, obținem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

Fie acum $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=k$ și $k<1$. Există un număr real q, astfel încât $k < q < 1$. Pe baza definiției limitei funcției (în sens Cauchy) pentru $\varepsilon = q - k > 0$ și n suficient de mare vom avea :

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < k+\varepsilon = q < 1, \text{ adică } n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1.$$

Deci, $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1-\frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}}$.

În partea dreaptă a inegalității avem raportul a doi termeni succesivi ai seriei armonice $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, care este divergentă. În virtutea teoremei 4 seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

Teorema e complet demonstrată.

Așadar, criteriul Raabe – Duhamel se bazează pe compararea seriei date cu seria armonică generalizată, adică cu seria Riemann. Criteriul lui Raabe și Duhamel se aplică, în general, în cazul în care criteriul lui D'Alembert nu duce nici la un rezultat.

Exemplul 12. Să se cerceteze natura seriilor:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{n+3}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^r}, r\in \mathbf{R}$.

Rezolvare.

a) Dacă aplicăm criteriul lui D'Alembert obţinem :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!}\cdot\dfrac{1}{n+4}}{\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\dfrac{1}{n+3}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)\cdot(2n+2)}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}}{\dfrac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}}\cdot\frac{n+3}{n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{2n+1}\cdot\frac{n+3}{n+4}=1.$$

După criteriul Raabe – Duhamel avem:

$$\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}n\left[1-\frac{(2n+2)(n+3)}{(2n+1)(n+4)}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-2)}{(2n+1)(n+4)}=\frac{1}{2}<1.$$

Prin urmare, seria este divergentă.

b) Aplicăm criteriul integral al lui Cauchy. Funcţia $\dfrac{1}{x(\ln x)^r}$ satisface condiţiile teoremei 7 pe $[2,+\infty[$. Calculăm integrala improprie :

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^r}=\left|\begin{array}{l}\ln x=t\\ dt=\dfrac{dx}{x}\\ t\in[\ln 2,+\infty[\end{array}\right|=\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{dt}{t^r}.$$

Ultima integrală este convergentă pentru $r>1$ şi divergentă pentru $r\le 1$ ([20], 4.3.1., exemplul 4). Prin urmare, integrala considerată este convergentă pentru $r>1$ şi divergentă pentru $r\le 1$.

Nota 3. Aplicarea directă a criteriilor de comparaţie (teoremele 2, 3 şi 4), ne conduce la următoarele:

a) Dacă luăm pentru comparaţie în calitate de seria (2) din teorema 2 seria convergentă $\sum_{n=1}^{\infty}q^n, 0<q<1$, termenii căreia formează o progresie geometrică, sau seria divergentă $\sum_{n=1}^{\infty}1$, $\left(\lim_{n\to\infty}a_n=1\neq 0\right)$, termenii căreia formează de asemenea o progresie geometrică şi comparând seria (1) din teorema 2 cu aceste serii după schema din această teoremă, vom ajunge la criteriile D'Alembert şi radical Cauchy;

b) Dacă comparaţia seriei (1) din teorema 2 se realizează cu seria armonică generalizată (în calitate de seria (2)) se obţine criteriul Raabe – Duhamel;

c) Criterii şi mai puternice se obţin dacă în calitate de serie de comparaţie se consideră seria lui Bertrand*): $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}, \alpha\in\mathbf{R}, \beta\in\mathbf{R}.$

Această serie converge pentru $\alpha>1$, şi $\beta\in\mathbf{R}$ sau $\alpha=1$, şi $\beta<1$, iar diverge pentru $\alpha<1$, şi $\beta\in\mathbf{R}$ sau $\alpha=1$ şi $\beta\le 1$. Propunem cititorului să studieze natura seriei lui Bertrand consultând exemplul 12 *b)* de mai sus şi exemplul 7.4 *w)* din [22].

8.1.3. Serii cu termeni oarecare.

Fie

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots \qquad (1)$$

o serie numerică. Dacă termenii seriei (1) nu sunt toţi pozitivi, fiind însă pozitivi, începând cu un termen oarecare, atunci omiţând un număr suficient de termeni de la începutul seriei, conform proprietăţii 1 din 8.1.1., reducem problema studierii naturii seriei (1) la o serie cu termeni pozitivi, studiate în 8.1.2. Dacă termenii seriei (1) sunt negativi sau devin negativi cel puţin, începând cu un termen oarecare, atunci revenim la cazurile studiate, schimbând semnele tuturor termenilor. Aşadar un caz cu adevărat nou este acela, când printre termenii seriei (1) se găseşte un număr infinit de

*) Joseph Bertrand (1822–1900) – matematician francez.

termeni, atât pozitivi cât şi negativi. Pe parcurs prin serii cu termeni oarecare vom subînţelege numai serii de acest fel.

Definiţie. O serie cu termeni oarecare (1) se numeşte *absolut convergentă*, dacă seria modulelor

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|+\ldots \tag{2}$$

este convergentă. Dacă seria (1) este convergentă, iar seria modulelor (2) este divergentă, seria (1) se numeşte *semiconvergentă* (sau *neabsolut convergentă*).

Teorema 1(*Cauchy*). Dacă o serie cu termeni oarecare (1) este absolut convergentă, atunci ea este convergentă.

Demonstraţia se obţine imediat utilizând criteriul general de convergenţa a seriilor al lui Cauchy (teorema 1 din 8.1.1.): inegalitatea

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}|\le|a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\ldots+|a_{n+p}|$$

ne arată, că dacă condiţia de convergenţă este satisfăcută pentru seria (2), ea este cu atât mai mult satisfăcută pentru seria (1).

Pentru a stabili convergenţa absolută a seriei (1) se pot aplica seriei cu termeni pozitivi (2) toate criteriile de convergenţă, studiate în paragraful precedent. Trebuie, însă, să fim atenţi cu criteriile de divergenţă : chiar dacă seria (2) este divergentă, seria (1) poate fi totuşi convergentă (semiconvergentă). Fac excepţie numai criteriile lui D'Alembert şi radical Cauchy.

Teorema 2 (*Criteriul D'Alembert*). Dacă există limita $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=k$, atunci pentru $k<1$ seria (1) este absolut convergentă, pentru $k>1$ seria (1) este divergentă. Cazul $k=1$ este exceptat.

Într-adevăr, dacă $k<1$, atunci după criteriul lui D'Alembert pentru serii cu termeni pozitivi, avem că seria (2) este convergentă şi, deci, în virtutea teoremei 1 de mai sus, seria (1) este convergentă, adică absolut convergentă. Dacă $k>1$, atunci pentru n suficient de mare avem :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1 \text{ sau } |a_{n+1}|>|a_n|.$$

Deci $|a_n|$ nu tinde către zero, când $n\to\infty$. Prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\ne 0$. Pe baza consecinţei din teorema2 din 8.1.1. seria (1) este divergentă. Dacă însă $k=1$, în caz general despre convergenţa seriei (1) nu putem spune nimic.

Teorema 3 (*Criteriul radical Cauchy*). Dacă există limita $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=k$, atunci pentru $k<1$ seria (1) este absolut convergentă, iar pentru $k>1$, seria (1) este divergentă. Cazul $k=1$ este exceptat.

Într-adevăr, dacă $k<1$, conform criteriului radical al lui Cauchy pentru serii cu termeni pozitivi, seria (2) este convergentă, prin urmare, seria (1) este absolut convergentă (teorema 1). Dacă $k>1$, atunci pentru n suficient de mare $\sqrt[n]{|a_n|}>1$, adică $|a_n|>1$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|\ne 0$. Prin urmare şi $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\ne 0$, adică seria (1) este divergentă.

Aşadar, cu ajutorul criteriilor de mai sus se poate stabili numai convergenţa absolută a seriei. La serii semiconvergente aceste criterii sunt inaplicabile. De aceea vom studia în încheiere problema convergenţei unei clase speciale importante de serii, care se numesc *serii alternate* [3], [4], [6], [31]) sau *alternante* [5], [7]). Printre ele sunt şi serii semiconvergente.

Definiţie. Se numeşte *serie alternată* seria termenii căreia au semne ce se schimbă succesiv. Dacă primul termen este pozitiv, seria alternată poate fi scrisă sub forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n=a_1-a_2+\ldots+(-1)^{n+1}a_n+\ldots, \tag{3}$$

unde $a_n>0$ pentru orice $n=1,2,3,\ldots$.

Teorema 4 (*Criteriul Leibniz*). Dacă într-o serie alternată (3) şirul $\{a_n\}$, format din valorile absolute ale termenilor ei, este monoton descrescător şi $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, atunci seria (3) este convergentă.

Demonstraţie. Considerăm sumele parţiale ale seriei (3) cu un număr par de termeni

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + a_{2m-1} - a_{2m} =$$
$$= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + ... + (a_{2m-1} - a_{2m}).$$

Deoarece fiecare paranteză, în virtutea condiţiei că şirul $\{a_n\}$ este monoton descrescător, este pozitivă, şirul $\{S_{2m}\}$ este monoton crescător.

Demonstrăm că el este mărginit superior. Avem:

$$S_{2m} = a_1 - [(a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + ... + (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}].$$

Numărul scris în paranteze pătrate este pozitiv, de aceea $S_{2m} < a_1$.

Aşadar, şirul $\{S_{2m}\}$ este monoton crescător şi mărginit superior. Prin urmare el este convergent ([20], 1.4.2., teorema 7). Fie $\lim_{n\to\infty} S_{2m} = S$. Pentru a demonstra convergenţa seriei (3), trebuie să mai demonstrăm că şirul sumelor parţiale cu un număr impar de termeni ai acestei serii este de asemenea convergent şi are limita egală cu S.

Deoarece $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$ şi $a_{2m+1} \to 0$, când $m \to \infty$, (în virtutea condiţiei teoremei că şirul $\{a_n\}$ are limita zero), obţinem: $\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = S + 0 = S$. Prin urmare şirul $\{S_n\}$ $n \in N$ al sumelor parţiale ale seriei (3) este convergent şi deci seria (3) este convergentă. Teorema este demonstrată.

Notă: Am văzut, că sumele de ordin par S_{2m} se apropie crescând de suma S a seriei (3). Scriind S_{2m+1} sub forma $S_{2m+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - ... - (a_{2m} - a_{2m+1})$ putem stabili uşor că sumele de ordin impar tind descrescând către suma S a seriei (3). Prin urmare întotdeauna se satisface relaţia $0 < S_{2m} < S < S_{2m+1} < a_1$, pentru orice număr natural m.

În particular se poate afirma că

$$0 < S < a_1 \quad (4).$$

Această relaţie ne permite să evaluăm foarte simplu şi uşor restul seriei (3), care şi el la rândul său reprezintă o serie alternată. Anume

$$R_n = (-1)^{n-1}(a_{n+1} - a_{n+2} + ...).$$

Pe baza relaţiei (4) conchidem, că suma seriei din paranteze este pozitivă şi este mai mică decât a_{n+1}. Aşadar în toate cazurile restul unei serii alternate (3), ce satisface condiţiile teoremei 4, are semnul primului termen ($(-1)^n a_{n+1}$) şi este mai mic decât acesta în valoare absolută.

Această notă se utilizează adesea în calcule aproximative cu ajutorul seriilor. Anume : fie (3) o serie alternată convergentă, având că sumă numărul S. În acest caz :

$$S = S_n + (-1)^n(a_{n+1} - a_{n+2} + ...) = S_n + (-1)^n R_n,$$

unde R_n este restul de ordinul n al seriei (3). Întrucât avem $0 < |R_n| < |a_{n+1}|$, înlocuind suma seriei (3) printr – o sumă parţială a ei, obţinem o eroare, valoarea absolută a căreia, este mai mică decât valoarea absolută a primului dintre termenii omişi ai seriei (3).

Exemplul 13. Să se cerceteze convergenţa absolută şi neabsolută a seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$, $s > 0$. În cazul s = 2 să se calculeze suma seriei date cu precizie de 0,01.

Seria modulelor seriei date coincide cu seria Riemann $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, $s > 0$, care este convergentă pentru $s > 1$ şi divergentă pentru $0 < s \le 1$. Prin urmare seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$, $s > 1$ este absolut convergentă (pe baza teoremei 1).

Cercetăm cazul $0 < s \le 1$. observăm că şirul $\left\{\frac{1}{n^s}\right\}$ este monoton descrescător şi $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^s} = 0$. Prin urmare, conform criteriului lui Leibniz, seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$, $0 < s \le 1$ este convergentă şi deci semiconvergentă, sau neabsolut convergentă.

Dacă $s = 2$ obţinem seria

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}+\ldots,$$

care satisface condiţiile teoremei 4. Pentru a obţine suma seriei date cu precizia de 0,01, este suficient să considerăm suma parţială S_n astfel încât primul termen $a_{n+1} < 0{,}01$. O asemenea sumă parţială este S_{10} deoarece $a_{11}=\frac{1}{11^2}=\frac{1}{121}<0{,}01$. Astfel egalitatea

$$S\approx 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{9^2}-\frac{1}{10^2},$$

reprezintă suma seriei date cu precizie de 0,01.

Noţiunea de sumă a unei serii infinite diferă esenţial de noţiunea de sumă a unui număr finit de termeni (pe care o întâlnim în aritmetică şi algebră) prin faptul, că cuprinde trecerea la limită. Deşi unele proprietăţi ale sumelor obişnuite se exting şi asupra sumelor seriilor infinite, de cele mai multe ori, aceasta are loc numai când sunt satisfăcute anumite condiţii, care urmează să fie studiate. În alte cazuri, însă, proprietăţile sumelor, cu care suntem obişnuiţi, nu sunt de loc respectate. Deci la rezolvarea acestei probleme trebuie să procedăm cu mare precauţie.

În încheiere menţionăm unele proprietăţi de acest fel referitoare la seriile convergente, absolut convergente şi semiconvergente (demonstraţiile le puteţi găsi de exemplu în [3], cap. 2, §7.3; [6], cap.10, partea 1, §4; [7], v.2, cap. 15, §4; [8], v.1, cap. 4, §35.10; §35.12).

1. Orice grupare a termenilor unei serii convergente, care nu schimbă ordinea lor, păstrează convergenţa seriei şi mărimea sumei ei.

Această proprietate pentru sumele unui număr finit de termeni se numeşte *proprietatea asociativă.*

Menţionăm că dacă seria este divergentă, proprietatea asociativă nu este valabilă: seria

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}=1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n+1}+\ldots$$

este divergentă (vezi exemplul 1 din 8.1.1, cazul $q = -1$). Dacă grupăm termenii astfel:

$$(1-1)+(1-1)+\ldots,$$

obţinem seria

$$0+0+\ldots+0+\ldots,$$

care este convergentă şi suma ei este egală cu zero.

2. Dacă o serie este absolut convergentă, atunci seria, obţinută din ea prin orice permutare a termenilor ei, este de asemenea absolut convergentă şi are aceeaşi sumă.

Această proprietate a fost demonstrată de Dirichlet (1805 – 1859 – matematician german). Similar cazului sumelor finite, această proprietate se numeşte *comutativitate*. Proprietatea comutativă pentru seriile semiconvergente nu este valabilă : după cum se ştie seria

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\ldots, \qquad (5)$$

care se numeşte *seria Leibniz* (această serie satisface condiţiile criteriului lui Leibniz) este semiconvergentă (vezi exemplul 13). Notăm suma ei prin S, care se dovedeşte a fi egală cu ln2. Facem următoarea permutare de termeni: după fiecare termen pozitiv urmează doi termeni negativi. Obţinem seria

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots. \qquad (6)$$

Propunem cititorului să demonstreze că seria (6) este convergentă. Aplicând proprietatea 1 de mai sus obţinem seria

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\ldots, \qquad (7)$$

care este de asemenea convergentă, având suma ei egală cu suma seriei (6). Dar seria (7) poate fi scrisă sub următoarea formă:

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\ldots=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots\right)=\frac{1}{2}\cdot S.$$

Aşadar, permutând termenii seriei (5) am obţinut o serie nouă, suma căreia este de două ori mai mică decât suma seriei date.

După cum a arătat Riemann are loc următoarea proprietate pentru seriile semiconvergente:

3. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este semiconvergentă, atunci indiferent cum ar fi numărul k luat dinainte, finit sau egal cu ($+\infty$) ori ($-\infty$), termenii acestei serii se pot permuta astfel încât seria obţinută să aibă ca sumă numărul k.

4. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ două serii absolut convergente sumele cărora sunt numerele finite A şi B. Atunci

a) $A = A^{(+)} - A^{(-)}$, unde $A^{(+)}$ reprezintă suma termenilor pozitivi, iar $A^{(-)}$ – suma termenilor negativi ai seriei (1), adică seriile formate din toţi termenii pozitivi şi respectiv din toţi termenii negativi ai seriei (1) sunt de asemenea convergente, având ca sume numerele $A^{(+)}$ şi respectiv $A^{(-)}$.

b) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ şi seria formată din toate produsele posibile de câte doi termeni ai seriilor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sunt absolut convergente şi sumele lor sunt egale respectiv cu numerele A + B şi A · B.

8.2. Serii de funcţii şi de puteri.

8.2.1. Serii de funcţii. Noţiuni fundamentale.

Seria

$$f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \qquad (1)$$

unde $\{f_n(x)\}$ este un şir de funcţii definite pe mulţimea $I \subseteq R$, se numeşte *serie de funcţii* (sau *serie funcţională*).

Pentru orice $x_0 \in I$ obţinem seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$, serie care poate fi convergentă sau divergentă.

Mulţimea D a punctelor $x \in I$ pentru care seria numerică respectivă $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ este convergentă se numeşte *domeniu de convergenţă* al seriei (1).

Dacă considerăm şirul sumelor parţiale

$$S_1(x) = f_1(x);\ S_2(x) = f_1(x) + f_2(x),\ ...\ ,$$
$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x),... \qquad (2)$$

urmează că seria (1) este convergentă în punctul $x_0 \in I$, dacă şirul de funcţii al sumelor parţiale (2) este convergent în punctul x_0. Domeniul D de convergenţă al şirului (2) este domeniul de convergenţă al seriei (1), iar funcţia

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$$

se numeşte *suma* seriei (1).

În acest caz se spune de asemenea, că funcţia $f(x)$ se dezvoltă în seria (1) pe mulţimea D.

Definiţia 1. Şirul de funcţii $\{f_n(x)\}$, $n \in N$ se numeşte *convergent* pe mulţimea $D \subseteq R$ către funcţia $f(x)$, dacă

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in D,\ \exists N(\varepsilon, x) \in N : \forall n > N(\varepsilon, x) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Şirul de funcţii $\{f_n(x)\}$ definite pe mulţimea $D \subseteq R$ se numeşte *uniform convergent* pe D către funcţia $f(x)$, dacă

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in N : \forall n > N(\varepsilon),\ \forall x \in D \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Din definiţia (1) rezultă că numărul natural $N(\varepsilon, x)$ în cazul convergenţei şirului $\{f_n(x)\}$ depinde atât de ε, cât şi de x din D, iar în cazul convergenţei uniforme numărul natural $N(\varepsilon)$ depinde de ε şi este independent de $x \in D$, adică $N(\varepsilon)$ este acelaşi pentru orice x din D.

Definiţia 2. Seria (1) se numeşte *convergentă pe D* către funcţia $f(x)$, dacă şirul (2) al sumelor parţiale este convergent pe D către $f(x)$. Seria (1) se numeşte *uniform convergentă pe D* către $f(x)$, dacă şirul (2) al sumelor parţiale este *uniform convergent pe D* către $f(x)$. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ se numeşte *absolut convergentă pe D*, dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ este convergentă pe D.

Nota 1. După cum a fost spus, convergenţa pe D a unei serii de funcţii este echivalentă cu faptul, că pentru orice valoare a lui x din D este convergentă seria numerică respectivă. De aceea pentru studierea convergenţei seriei de funcţii pot fi utilizate criteriile de convergenţă ale seriilor numerice.

Exemplul 1. Să se cerceteze convergenţa seriilor de funcţii:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx^2}$.

Rezolvare.

a) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ este convergentă pentru toate valorile reale ale lui x, deoarece inegalitatea:

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$$

are loc pentru orice $x \in R$ şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă. Prin urmare, pe baza criteriului 1 de comparaţie al seriilor numerice cu termeni pozitivi, seria iniţială este convergentă şi chiar uniform convergentă pe R în baza criteriului Weierstrass de mai jos (vezi teorema 3).

b) Aplicând criteriul D' Alembert la seria formată din modulele termenilor ei, obţinem

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot n}{(n+1)\cdot x^n}\right| = |x|.$$

Deci, pentru $|x| < 1$, adică $x \in]-1,1[$ seria este convergentă, pentru $|x| > 1$, adică $x \in]-\infty,-1[$ sau $x \in]1,+\infty[$ seria este divergentă.

Pentru $x = 1$ şi $x = -1$ obţinem seriile $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, care după cum se ştie, sunt respectiv divergentă şi convergentă. Prin urmare seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ este convergentă pe mulţimea $[-1,1[$.

c) Termenii seriei respective formează o progresie geometrică cu raţia $q = e^{x^2} \ge 1$. Prin urmare, pe baza ex.1 din 8.1.1 avem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx^2}$ este divergentă pe toată axa numerică.

Vom studia acum convergenţa uniformă a seriilor de funcţii şi proprietăţile acestor serii.

Teorema 1 (*Cauchy*). Pentru ca seria de funcţii (1) să fie uniform convergentă pe $D \subseteq R$ către funcţia $f(x)$ este necesar şi suficient ca pentru orice $\varepsilon > 0$ să existe un număr natural $N(\varepsilon)$ astfel încât pentru orice n> $N(\varepsilon)$ şi orice p întreg pozitiv să fie satisfăcută inegalitatea

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + ... + f_{n+p}(x)| < \varepsilon, \qquad (3)$$

oricare ar fi x din D.

Demonstraţia necesităţii. După condiţie, şirul $\{S_n(x)\}$ al sumelor parţiale ale seriei (1) este uniform convergent către $f(x)$ pe D, adică

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in N : \forall n > N(\varepsilon), \forall x \in D => |S_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dacă $n > N(\varepsilon)$ şi p orice număr întreg pozitiv, atunci inegalitatea

$$\left|S_{n+p}(x)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

se va îndeplini de asemenea pentru orice $x\in D$.

Prin urmare, pentru orice $x\in D$ şi p natural, dacă $n>N(\varepsilon)$ avem:

$$\left|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+...+f_{n+p}(x)\right|=\left|S_{n+p}(x)-S_n(x)\right|=$$

$$=\left|[S_{n+p}(x)-f(x)]+[f(x)-S_n(x)]\right|\le\left|S_{n+p}(x)-f(x)\right|+$$

$$+\left|S_n(x)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

adică $\left|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+...+f_{n+p}(x)\right|<\varepsilon$.

Demonstraţia suficienţei. Conform condiţiei, pentru orice $\varepsilon>0$ se va găsi un număr natural $N(\varepsilon)$ astfel încât pentru orice p întreg şi pozitiv, şi pentru toate punctele x din D, dacă $n>N(\varepsilon)$, atunci este satisfăcută inegalitatea

$$\left|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+...+f_{n+p}(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}, \text{ adică}$$

$$\left|S_{n+p}-S_n(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Acum, luând în mod arbitrar $n>N(\varepsilon)$ şi x din D să mărim nelimitat pe p (n şi x fiind constante) din inegalitatea (4). Trecând la limită obţinem:

$$\left|f(x)-S_n(x)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

ceea ce înseamnă că şirul sumelor parţiale $\{S_n(x)\}$ ale seriei (1) este uniform convergent către $f(x)$ pe mulţimea D. Prin urmare, seria (1) este uniform convergentă către $f(x)$ pe D şi teorema este complet demonstrată.

Consecinţă: Dacă seria (1) este uniform convergentă pe D şi $\varphi(x)$ este mărginită pe D atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(x)\cdot f_n(x)$ este uniform convergentă pe D.

Definiţia 3. Se numeşte *restul de rangul* (*ordinul*) n al seriei (1) seria:

$$f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+...+f_{n+p}(x)+...=\sum_{p=1}^{\infty}f_{n+p}(x), \tag{5}$$

şi se notează cu $R_n(x)$.

Domeniul de convergenţă al seriei (1) este şi domeniul de convergenţă al seriei

$$R_n(x)=\sum_{p=1}^{\infty}f_{n+p}(x).$$

Teorema 2. Pentru ca seria (1) să fie uniform convergentă pe mulţimea D către funcţia $f(x)$ este necesar şi suficient ca şirul $\{R_n(x)\}$, $n\in N$ să fie uniform convergent către 0 pe mulţimea D.

Demonstraţie. Fie

$$S_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)$$

şi

$$\sigma_p(x)=f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+...+f_{n+p}(x)$$

sumele parţiale ale seriilor (1) şi (5).

Din egalitatea

$$S_{n+p}(x)=S_n(x)+\sigma_n(x)$$

rezultă că şirul $\{S_{n+p}(x)\}$, $p=1,2,...$ este uniform convergent pe D către funcţia $f(x)$ atunci şi numai atunci când şirul $\{\sigma_p\}$, $p=1,2,...$ este uniform convergent pe D către zero. Teorema este demonstrată.

Pentru stabilirea practică a convergenţei uniforme a seriilor de funcţii se folosesc criterii de suficienţă, care sunt mai simple. Un astfel de criteriu, care se aplică cel mai des, este criteriul lui Weierstrass.

Teorema 3 (*Weierstrass*). Dacă termenii seriei funcţionale (1) satisfac în domeniul D inegalităţile:

$$|f_n(x)| \leq C_n, \quad n = 1,2,... \tag{6}$$

în care numerele pozitive C_n sunt termenii unei serii numerice convergente

$$C_1 + C_2 + .. + C_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} C_n, \tag{7}$$

atunci seria (1) este uniform convergentă pe D.

Dacă există inegalităţile (6) se spune, că seria (1) este *majorată* de seria (7), sau că seria numerică (7) este o *serie majorantă* pentru (1).

Trecem acum la demonstraţia teoremei 3. Din (6) obţinem inegalitatea:

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + ... + f_{n+p}(x)| \leq C_{n+1} + C_{n+2} + ... + C_{n+p}, \tag{8}$$

care este valabilă pentru toate valorile lui x din D.

Întrucât seria (7) este convergentă, şirul $\{S_n\}$ al sumelor parţiale ale acestei serii este de asemenea convergent, adică

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \text{ unde } S_n = C_1 + C_2 + ... + C_n.$$

Deci,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) : \forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dacă $n > N(\varepsilon)$ şi p orice număr întreg pozitiv, atunci

$$|S_{n+p} - S| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Prin urmare, dacă $n > N(\varepsilon)$ şi p orice număr natural, atunci obţinem

$$C_{n+1} + C_{n+2} + ... + C_{n+p} = |S_{n+p} - S_n| = |(S_{n+p} - S) + (S - S_n)| \leq$$
$$\leq |S_{n+p} - S| + |S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Conform relaţiei (8) avem:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) : \forall n > N(\varepsilon), \forall x \in D \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + ... + f_{n+p}(x)| < \varepsilon,$$

ceea ce înseamnă (după teorema 1) că seria (1) este uniform convergentă pe D.

Exemplul 2. Să se cerceteze convergenţa uniformă a seriilor de funcţii

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \text{ şi } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Observăm că dacă seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este absolut convergentă atunci, în virtutea inegalităţilor $|a_n \sin nx| \leq |a_n|$ şi $|a_n \cos nx| \leq |a_n|$, rolul de serie majorantă pentru seriile considerate îl are seria $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Prin urmare, seriile funcţionale $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ sunt uniform convergente pe axa numerică cu singura condiţie că seria $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ să fie convergentă şi deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ să fie absolut convergentă.

Astfel, aplicând afirmaţiile din exemplul 2, conchidem că seria a) din exemplul 1 de mai sus este uniform convergentă pe mulţimea R, deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, ca serie Riemann cu $\alpha = 2 > 1$, este convergentă.

Prin urmare, seriile de forma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha}$ cu $\alpha > 1$ sunt uniform convergente pe toată axa numerică.

Să trecem acum la studiul proprietăţilor sumei unei serii de funcţii în dependenţă de proprietăţile termenilor seriei.

Noţiunea de convergenţă uniformă, introdusă mai sus, va avea un rol decisiv în cele ce vor urma, deci importanţa ei va ieşi în evidenţă din plin. Vom începe cu problema continuităţii sumei unei serii (1) formată din funcţii continue. Cititorul ştie, că suma unui număr finit de funcţii continue este continuă ([20], teorema 1 din 1.6.1.). Se impune problema: e justă oare o asemenea afirmaţie şi pentru cazul unui număr infinit de termeni?

Exemplul simplu de mai jos ne confirmă că aceasta nu are loc întotdeauna: să considerăm seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(1-x) = (1-x) + x(1-x) + x^2(1-x) + \ldots$$

pe segmentul $[0,1]$.

Pentru $x = 1$ toţi termenii seriei, şi odată cu ei şi suma seriei, se anulează. Pentru $x \in [0,1[$, însumând progresia geometrică infinit descrescătoare cu raţia $q = x < 1$, obţinem că suma acestei serii

$$f(x) = \frac{1-x}{1-q} = \frac{1-x}{1-x} = 1.$$

Deci, suma seriei iniţiale

$$f(x) = \begin{cases} 0, & pentru\ \ x = 1 \\ 1, & pentru\ \ x \in [0,1[. \end{cases}$$

Observăm că suma $f(x)$ a seriei considerate este discontinuă în punctul $x = 1$ (punctul $x = 1$ este un punct de discontinuitate de speţa 1 pentru $f(x)$).

Relevăm că în acest caz convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(1-x)$ nu este uniformă, deoarece restul de rangul n al seriei

$$R_n(x) = x^n(1-x) + x^{n+1}(1-x) + \ldots = \frac{x^n(1-x)}{1-q} = x^n$$

tinde către zero neuniform când $x \in [0,1[$. Într-adevăr, faptul că inegalitatea $x^n < \varepsilon$ (dacă $\varepsilon < 1$) nu poate să existe simultan pentru toate valorile lui x din $[0,1[$ se vede din aceea că pentru un n fix $\lim_{x \to 1} x^n = 1$.

Teorema 4. Dacă seria de funcţii (1) este uniform convergentă către funcţia $f(x)$ pe mulţimea D şi dacă toate funcţiile $f_n(x)$, $n \in N$ sunt continue pe D atunci suma $f(x)$ a seriei (1) este continuă pe D.

Demonstraţie. Fie $x_0 \in D$. Vom arăta că funcţia $f(x)$ este continuă în x_0.

Avem:

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x), \text{ unde}$$
$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x),$$
$$R_n(x) = \sum_{p=1}^{\infty} f_{n+p}(x)$$

pentru orice $x \in D$.

În particular

$$f(x_0) = S_n(x_0) + R_n(x_0).$$

Atunci, având în vedere convergenţa uniformă a seriei (1) şi teorema 2, se poate fixa un număr natural $n = n_0$ astfel încât inegalitatea

$$|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

să se verifice pentru toate valorile lui x din D, în particular şi pentru $x = x_0$, adică $|R_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ şi

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |S_n(x) + R_n(x) - S_n(x_0) - R_n(x_0)| = \\ &= |[S_n(x) - S_n(x_0)] + R_n(x) + [-R_n(x_0)]| \le \\ &\le |S_n(x) - S_n(x_0)| + |R_n(x)| + |R_n(x_0)|. \end{aligned} \tag{9}$$

Remarcăm că pentru orice număr natural n fix deci şi pentru cel ales n_0 funcţia $S_n(x)$ este suma unui număr finit de funcţii continue în punctul $x_0 \in D$. Deci ea însăşi este continuă în acest punct şi pentru $\varepsilon > 0$ dat există un $\delta > 0$ astfel încât inegalitatea $|x - x_0| < \delta$ implică $|S_n(x) - S_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Prin urmare, din relaţia (9) obţinem

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

din dată ce $|x - x_0| < \delta$.

Aceasta înseamnă că funcţia $f(x)$ este continuă în punctul $x_0 \in D$. Deoarece x_0 este arbitrar, conchidem că $f(x)$ este continuă pe D, ceea ce trebuie de demonstrat.

Teorema reciprocă teoremei 4 nu este valabilă (a se consulta [7], v.2, nota de la §2.266 cap.16).

Dacă, însă, termenii seriei (1) sunt funcţii nenegative pe D, atunci după cum a demonstrat Dini (1845-1918 – matematician italian) convergenţa uniformă pentru astfel de serii este nu numai o condiţie suficientă ci şi o condiţie necesară a continuităţii sumei seriei.

Teorema 5 (*Dini*). Presupunem că termenii seriei (1) sunt funcţii continue şi nenegative pe $[a,b]$. Dacă seria (1) are suma $f(x)$ de asemenea continuă pe $[a,b]$, atunci această seriei este uniform convergentă către $f(x)$ pe $[a,b]$.

Demonstraţia o puteţi găsi de exemplu în [7], v.2, cap.16, §2.267, Teorema 2.

Să trecem acum la problema integrării şi a derivării sumei unei serii funcţionale convergente.

Teorema 6. Dacă funcţiile $f_n(x)$, $n \in N$ sunt continue pe $[a,b]$ şi seria (1), formată din aceste funcţii este uniform convergentă către funcţia $f(x)$ pe $[a,b]$, atunci, pentru orice numere c_1, c_2 din $[a,b]$ are loc egalitatea

$$\int_{c_2}^{c_2} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{c_2}^{c_2} f_n(x). \qquad (10)$$

Demonstraţie. În virtutea teoremei 4 şi a teoremei 2 din 4.2.2. [20], existenţa tuturor integralelor din formula (10) este evidentă. Avem:

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x) = f_1(x) + \ldots + f_n(x) + R_n(x),$$

unde $R_n(x)$ este restul de ordinul n al seriei (1) şi $x \in [a,b]$. Integrând această identitate pe orice segment $[c_1,c_2] \subseteq [a,b]$ obţinem:

$$\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx = \int_{c_1}^{c_2} f_1(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f_2(x)dx + \ldots + \int_{c_1}^{c_2} f_n(x)dx + \int_{c_1}^{c_n} R_n(x)dx.$$

Aşadar, suma parţială a primilor n termeni ai seriei (10) diferă de integrala $\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx$ prin termenul complementar $\int_{c_1}^{c_2} R_n(x)dx$.

Pentru demonstrarea relaţiei (10) este necesar să stabilim doar că :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{c_1}^{c_2} R_n(x)dx = 0,$$

adică

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon): \forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow \left|\int_{c_1}^{c_2} R_n(x)dx\right| < \varepsilon.$$

Fie $\varepsilon > 0$. În baza convergenţei uniforme a seriei (1) către $f(x)$ pe $[a,b]$ şi a teoremei 2, pentru acest $\varepsilon > 0$ se va găsi un număr natural $N(\varepsilon)$ în aşa fel, încât pentru $n > N(\varepsilon)$ se satisface inegalitatea:

$$|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{c_2 - c_1},\ c_1 \neq c_2$$

pentru orice $x \in [a,b]$. Atunci pentru aceleaşi valori ale lui n vom avea:

$$\left|\int_{c_1}^{c_2} R_n(x)dx\right| \le \int_{c_1}^{c_2} |R_n(x)|dx < \int_{c_1}^{c_2} \frac{\varepsilon}{c_2 - c_1}dx = \frac{\varepsilon}{(c_2 - c_1)} \cdot (c_2 - c_2) = \varepsilon.$$

Aceasta înseamnă că $\lim_{n\to\infty}\int_{c_1}^{c_2} R_n(x)dx = 0$ şi teorema este demonstrată.

Egalitatea (10) poate fi scrisă sub forma

$$\int_{c_1}^{c_2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right\}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_{c_1}^{c_2} f_n(x)dx\right\} \text{ şi}$$

deci în cazul convergenţei uniforme a seriei funcţionale avem: *integrala sumei unei serii uniform convergente este egală cu suma seriei formată din integralele termenilor ei, cu alte cuvinte, este admisibilă integrarea termen cu termen a seriei date.*

Teorema 7. Fie funcţiile $f_n(x)$, $n \in N$ sunt definite pe $[a,b]$ şi au pe acest segment derivate continue $f_n'(x)$. Dacă seria (1) este convergentă pe $[a,b]$ iar seria formată din derivate:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + ... + f_n'(x) + ... \tag{11}$$

este uniform convergentă pe $[a,b]$, atunci suma f (x) a seriei (1) este derivabilă pe $[a,b]$ şi

$$f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x). \tag{12}$$

Demonstraţie. Să notăm cu F (x) suma seriei (11). În baza teoremei 4 funcţia F (x) este continuă pe $[a,b]$. Aplicând acum teorema 6, integrăm seria (11) termen cu termen pe $[a,x]$ unde x este o valoare arbitrară din $[a,b]$. Avem:

$$\int_a^x F(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x f_n'(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty}[f_n(t)\big|_a^x] = \sum_{n=1}^{\infty}[f_n(x) - f_n(a)] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a) = f(x) - f(a).$$

Dat fiind faptul că funcţia F (x) este continuă pe $[a,b]$, avem:

$$\left(\int_a^x F(t)dt\right)_x' = F(x)$$

(a se consulta [20], cap.4, teorema 1 din 4.2.4).

Prin urmare,

$$F(x) = \left(\int_a^x F(t)dt\right)_x' = [f(x) - f(a)]' = f'(x),$$

şi am obţinut formula (12).

Teorema este demonstrată.

Aşadar, în condiţiile indicate în teorema 7, *derivata sumei unei serii este egală cu suma seriei, formată din derivatele termenilor săi, cu alte cuvinte, este admisibilă diferenţierea seriei termen cu termen.*

Exemplul 3. Să se stabilească relaţiile dintre sumele seriilor funcţionale $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$ şi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$.

Observăm că seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$ este absolut convergentă, deoarece

$$\left|\frac{\sin nx}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$$

şi seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, ca serie Riemann cu $\alpha = 3 > 1$ este convergentă.

Notăm suma acestei serii prin f (x). Seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$, obţinută din cea iniţială prin derivarea termenilor ei, este uniform convergentă pe toată axa numerică, deoarece ca majorantă a ei serveşte seria convergentă $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (serie Riemann cu $\alpha = 2 > 1$).

Prin urmare, conform teoremei 7 avem: $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$.

Exemplul 4. *Considerăm un exemplu de serie de funcții divergente pretutindeni, pentru care seria formată din derivatele termenilor ei este uniform convergentă pe toată axa numerică.*

Fie: $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{x}{n^2}$.

Observăm că această serie este divergentă pentru orice $x \in R$, deoarece $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \cos\frac{x}{n^2} = \cos 0 = 1 \neq 0$.

Seria formată din derivatele termenilor seriei inițiale are forma $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\sin\frac{x}{n^2}\right)\cdot\frac{1}{n^2}$, care este uniform convergentă pe R având ca serie majorantă seria convergentă $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Nota 2. Menționăm că condiția teoremei 7 poate fi întrucâtva slăbită, înlocuind condiția de convergență a seriei (1) pe $[a,b]$ prin condiția de convergență a seriei (1) numai într-un punct oarecare al segmentului $[a,b]$ (a se consulta de exemplu [6], cap.10, §7).

8.2.2. Serii de puteri. Proprietăți de bază.

Teoria expusă în paragraful precedent are o aplicație importantă la studiul proprietăților seriilor de puteri.

Definiție: Seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, în care $f_n(x) = a_n x^n$ sau $f_n(x) = a_n(x-x_0)^n$, $a_n \in R$, $x_0 \in R$ se numește *serie de puteri.*

Așadar, o serie de puteri are forma:

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (1)$$

sau

$$a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0), \qquad (2)$$

unde $x_0, a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots$ sunt numere reale. Deoarece prin înlocuirea lui $(x-x_0)$ cu y seria (2) are aceeași formă cu seria (1) vom considera serii de puteri numai de forma (1). Domeniul de convergență al unei serii de puteri (1) conține cel puțin un punct și anume punctul $x = 0$, deoarece pentru $x = 0$ seria (1) este convergentă (are forma $a_0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots$) și suma ei este egală cu a_0. Există serii de puteri care au domeniul de convergență format numai dintr-un singur punct, (vezi ex. 5 *a*) de mai jos), după cum există și serii convergente pentru orice $x \in R$ (vezi ex. 5 *b* de mai jos). În legătură cu structura domeniului de convergență a seriei de puteri (1) avem următoarea teoremă fundamentală, demonstrată de Abel ((1802 – 1829 – matematician norvegian).

Teorema 1. (*Abel*). Dacă seria de puteri (1) este convergentă pentru $x = x_0 (x_0 \neq 0)$, atunci ea este absolut convergentă pentru orice x, ce satisface condiția $|x| < |x_0|$. Dacă seria de puteri (1) este divergentă pentru $x = x_1$, atunci ea este divergentă pentru orice x, ce satisface condiția $|x| > |x_1|$.

Demonstrație. Dat fiind faptul că seria de puteri (1) este convergentă pentru $x = x_0$, adică seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ este convergentă, termenul ei general $a_n x_0^n$ tinde către zero, când $n \to \infty$ (teorema 2 din 8.1.1). Aceasta înseamnă că șirul $\{a_n x_0^n\}$ este convergent și deci mărginit, adică există un număr $M > 0$, astfel încât:

$$|a_n x_0^n| \leq M, \quad n = 0,1,2,\ldots \qquad (3)$$

Fie x satisface condiția $|x| < |x_0|$. Transcriem seria (1) sub forma

$$a_0 + (a_1 x_0)\cdot(\frac{x}{x_0}) + (a_2 x_0^2)\cdot(\frac{x}{x_0})^2 + \ldots + (a_n x_0^n)\cdot(\frac{x}{x_0})^n + \ldots \qquad (4)$$

și considerăm seria formată din valorile absolute ale termenilor ei

$$|a_0| + |a_1 x_0| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right| + |a_2 x_0^2| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots \quad (5).$$

În virtutea relației (3) termenii seriei (5) nu întrec termenii respectivi ai seriei

$$M + M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right| + M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots \quad (6).$$

Termenii seriei (6) formează o progresie geometrică cu rația $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$. Prin urmare seria (6) este convergentă (ex.1 din 8.1.1.). Aplicând criteriul 1 de comparație din 8.1.3., din convergența seriei (6), reiese convergența seriei (5). Prin urmare, seria (1) este absolut convergentă pentru $|x| < |x_0|$ (teorema 1 din 8.1.3.).

Demonstrăm partea a doua a teoremei, folosind metoda reducerii la absurd. Fie în punctul x_1 seria (1) este divergentă. Presupunem că există un punct x_2, astfel încât $|x_2| > |x_1|$, în care seria (1) este convergentă. Conform primei părți a teoremei, obținem că în punctul x_1 seria (1) este convergentă. Contrazicerea obținută confirmă că seria (1) este divergentă pentru orice $|x| > |x_1|$. Teorema este demonstrată.

Așadar, teorema lui Abel afirmă că dacă x_0 este un punct de convergență pentru seria (1), atunci seria (1) este absolut convergentă și, deci, convergentă pe intervalul $]-|x_0|, |x_0|[$. Dacă x_1 este un punct de divergență pentru seria (1), atunci seria (1) diverge în toate punctele intervalelor $]-\infty, -|x_1|[$ și $]|x_1|, +\infty[$.

Fie seria (1) are un punct de convergență, diferit de zero, și un punct de divergență (bineînțeles, tot diferit de zero). Prin urmare, în baza teoremei 1, există o infinitate de puncte de convergență și o

infinitate de puncte de divergență, în particular, există punctul r_1 cu $r_1 > 0$, în care seria (1) converge și punctul R_1 cu $R_1 > 0$, în care seria (1) diverge. Evident că $r_1 < R_1$. Dacă $\frac{r_1 + R_1}{2}$ este un punct de convergență pentru seria (1) atunci notăm $r_2 = \frac{r_1 + R_1}{2}$ și $R_2 = R_1$. Dacă însă $\frac{r_1 + R_2}{2}$ este un punct de divergență pentru seria (1), atunci notăm $r_2 = r_1$ și $R_2 = \frac{r_1 + R_1}{2}$. În mod analog introducem numerele r_3 și R_3 etc. Obținem două șiruri monotone:

$$r_1 \le r_2 \le r_3 \le \ldots \le r_n \le \ldots$$

în punctele căruia seria (1) este convergentă și

$$R_1 \ge R_2 \ge R_3 \ge \ldots \ge R_n \ge \ldots$$

în punctele căruia seria (1) este divergentă. Întrucât aceste șiruri sunt monotone și mărginite, ele sunt convergente, având o limită comună, deoarece

$$R_n - r_n \le \frac{R_1 - r_1}{2^{n-1}} \to 0, \text{ când } n \to \infty.$$

Notăm $R = \lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} R_n$.

Să demonstrăm că în interiorul intervalului $]-R, R[$ seria (1) este convergentă, iar în intervalele $]-\infty, -R[$ și $]R, +\infty[$, seria (1) este divergentă. Într-adevăr, fie $x_0 \in]-R, R[$, adică $|x_0| < R$. Pentru un n suficient de mare se va îndeplini condiția $|x_0| < r_n$, unde r_n este un punct de convergență pentru seria (1).

Pe baza teoremei 1, seria (1) este absolut convergentă în punctul x_0. Fie x_1 aparține intervalului $]-\infty, -R[$ sau intervalului $]R, +\infty[$, adică x_1 satisface condiția $|x_1| > R$. Atunci pentru un n

suficient de mare avem $|x_1| > R_n$, unde punctul R_n este un punct de divergență pentru seria (1). În baza teoremei 1 seria (1) diverge în punctul x_1.

Dacă seria (1) este convergentă numai în punctul $x_0 = 0$, considerăm R = 0, iar dacă seria (1) este convergentă pentru orice $x \in R$, considerăm $R = +\infty$. Astfel am demonstrat următoarea teoremă generală:

Teorema 2 (*Abel*). Pentru orice serie de puteri (1) există un număr $R \geq 0$ finit sau infinit astfel încât

a) seria (1) este absolut convergentă pe intervalul deschis $]-R, R[$;

b) pentru orice x astfel încât $|x| > R$, seria (1) este divergentă.

Numărul R din teorema 2 se numește *rază de convergență* a seriei (1), iar intervalul deschis $]-R, R[$ – *intervalul de convergență* al acestei serii.

În felul acesta s – a dovedit a fi rezolvată problema despre structura domeniului de convergență al seriei (1): el reprezintă intervalul deschis $]-R, R[$. Numai despre extremitățile lui nu se poate face o afirmație generală: după cum vom vedea din exemple, în punctele $x = \pm R$ seria (1) poate fi atât convergentă (absolut sau nu), cât și divergentă.

Raza de convergență a intervalului de convergență al seriei de puteri (1) se determină în unele cazuri folosind criteriile de convergență ale seriilor cu termeni pozitivi.

Teorema 3. Fie (1) o serie de puteri. Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = k$ (finită sau infinită), atunci

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{k}, & \text{dacă } 0 < k < +\infty, \\ 0, & \text{dacă } k = +\infty, \\ \infty, & \text{dacă } k = 0. \end{cases}$$

Demonstrație. Fie $x_0 \in R$. Aplicând criteriul lui D'Alembert la seria numerică $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x_0^n|$ obținem:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}\cdot x_0^{n+1}}{a_n x_0^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|x_0|\cdot\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x_0|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,$$

care există în virtutea ipotezei teoremei. Deci urmează că seria (1) este absolut convergentă pentru $|x_0|\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, adică pentru $|x_0| < \lim\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ și divergentă pentru $|x_0| > \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. De unde rezultă imediat afirmația teoremei (3).

Teorema 4. Fie (1) o serie de puteri. Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = k$ (finită sau infinită), atunci

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{k}, & \text{dacă } 0 < k < +\infty, \\ 0, & \text{dacă } k = +\infty, \\ \infty, & \text{dacă } k = 0. \end{cases}$$

Demonstrație. Fie $x_0 \in R$. Aplicând criteriul radical al lui Cauchy la seria numerică $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x_0^n|$ avem:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x_0^n|} = |x_0|\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|},$$

care există în virtutea ipotezei teoremei. Deci seria (1) este absolut convergentă pentru $|x_0|\cdot\lim\sqrt[n]{|a_n|} < 1$, adică pentru $|x_0| < \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$ și divergentă pentru $|x_0| > \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$. De unde afirmația teoremei 4 rezultă imediat.

Exemplul 5. Să se determine domeniul de convergenţă al seriilor de puteri:

$$a)\sum_{n=0}^{\infty} n!\cdot x^n;\quad b)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!};\quad c)\sum_{n=1}^{\infty}\left(4+\frac{1}{n}\right)^n\cdot x^{2n};$$

$$d)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n}.$$

Rezolvare.

a) Aplicând criteriul D'Alembert, avem:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Prin urmare, seria este convergentă numai în punctul $x = 0$, adică R = 0.

b) Aplicând criteriul D'Alembert, avem:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right|=|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=|x|\cdot 0=0<1,$$

pentru orice $x\in R$.

Prin urmare, seria este convergentă pe toată axa numerică, adică $R=+\infty$.

c) Aplicând criteriul radical al lui Cauchy, avem:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(4+\frac{1}{n}\right)^n\cdot x^{2n}}=\lim_{n\to\infty}x^2\cdot\left(4+\frac{1}{n}\right)=4x^2<1.$$

De unde $|x|<\frac{1}{2}$. Prin urmare, $R=\frac{1}{2}$. Dacă $x=\pm\frac{1}{2}$ obţinem seria numerică:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(4+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{2^{2n}}=\sum_{n=1}^{\infty}4^n\left(1+\frac{1}{4n}\right)^n\cdot\frac{1}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{4n}\right)^n$$

cu termeni pozitivi, care este divergentă, deoarece

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{4n}\right]^{\frac{1}{4}}=e^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{e}\neq 0.$$

Astfel, domeniul de convergenţă al seriei iniţiale este intervalul $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$.

d) Aplicând criteriul lui D'Alembert, avem:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n+1)}{n(-1)^{n+2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

Dacă $x = 1$, obţinem seria lui Leibniz $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$, care este convergentă (neabsolut). Dacă $x = -1$, obţinem seria armonică:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{(-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n+1}\cdot\frac{1}{n}=(-1)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

care este divergentă. Prin urmare, domeniul de convergenţă al seriei este semiintervalul $]-1,1]$.

Seriile de puteri sunt de o deosebită importanţă în cercetările teoretice şi în ştiinţele aplicate. Vom prezenta, în cele ce urmează, mai multe proprietăţi ale lor.

Teorema 5. Fie (1) o serie de puteri şi R > 0 raza ei de convergenţă. Pentru orice număr 0 < r < R, seria (1) este uniform convergentă pe [–r,r].

Demonstraţie. Deoarece 0 < r < R, urmează, în virtutea teoremei 1, că seria (1) este absolut convergentă pentru $|x|\leq r$. Seria convergentă $\sum_{n=1}^{\infty}|a^n|\cdot r^n$ cu termeni pozitivi serveşte ca o serie majorantă pentru seria (1) pe [–r,r]. Conform criteriului lui Weierstrass (teorema 3 din 8.2.1.) seria (1) este uniform convergentă pe [–r,r] cu orice 0 < r < R.

Consecinţă. Suma f (x) a seriei de puteri (1) este o funcţie uniform continuă pe [–r,r] cu 0 < r < R.

Într-adevăr pe orice segment [–r,r] cu 0 < r < R, seria (1) este uniform convergentă şi funcţiile $a_nx^n, n\in N$ sunt continue pe [–r,r]. În virtutea teoremei 4 din 8.2.1, suma f (x) a seriei (1) este continuă pe [-r,r] şi deci conform teoremei lui Cantor (1.6.4. din [20], funcţia f(x) este uniform continuă pe acest segment.

Teorema 6. Fie (1) o serie de puteri şi R > 0 raza ei de convergenţă. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$, formată din derivatele termenilor seriei (1), are acelaşi interval de convergenţă ca şi seria (1).

Demonstraţie. Aplicând criteriul lui D'Alembert la seria $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$, avem că raza ei de convergenţă este egală cu

$$R^* = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{na_n}{(n+1)a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R,$$

unde R este raza de convergenţă a seriei (1).

Consecinţa 1: Orice serie de puteri (1) poate fi derivată termen cu termen în intervalul său de convergenţă.

Într-adevăr dacă aplicăm teorema 7 din 8.2.1 la seria (1), obţinem acest rezultat.

Consecinţa 2. Suma seriei, formată din derivatele termenilor seriei (1), este o funcţie uniform continuă pe [-r,r] cu 0 < r < R, unde R > 0 este raza de convergenţă a seriei (1).

Consecinţa 3. Dacă seria (1) are raza de convergenţă R > 0, atunci:

a) seria, formată din derivatele de ordinul n ale termenilor seriei (1), are aceeaşi rază de convergenţă R ca şi seria (1);

b) suma f(x) a seriei (1) este indefinit derivabilă pe intervalul de convergenţă $]-R,R[$ şi $f^{(n)}(x)$ este egală cu suma seriei din a), pentru orice $x\in\,]-R,R[$.

Exemplul 6. Să se calculeze suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Seria formată din derivatele termenilor seriei date, are forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(n+1)\cdot x^n}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^n=1-x+x^2-x^3+...+(-1)^n\cdot x^n+....$$

Raza de convergenţă a seriei date este R = 1. Pentru $|x|<1$ seria $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ este convergentă şi suma ei este egală cu $\frac{1}{1-q}=\frac{1}{1+x}$.

Dacă f(x) este suma seriei iniţiale, atunci obţinem relaţia:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x} \text{ pentru } |x|<1.$$

De unde $f(x)=\int\frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)+C$. Pentru x = 0, avem f(0) = 0 şi deci C = 0.

Prin urmare suma seriei iniţiale este egală cu ln (1+x).

Teorema 7 (*Abel*). Dacă seria de puteri (1) este convergentă (fie şi neabsolut) pentru x = R (sau x = –R), atunci suma ei rămâne pentru această valoare continuă la stânga (respectiv pentru x = –R – continuă la dreapta).

Demonstraţie. Fie în punctul x = R seria (1) este convergentă. Întrucât seria (1) este convergentă pe $[0,R]$, seria numerică convergentă $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n R^n|$ serveşte ca o serie majorantă pentru seria (1) pe $[0,R]$. Deci seria (1) este uniform convergentă către f(x) pe $[0,R]$ (pe baza criteriulu lui Weierstrass).

În virtutea teoremei 4 din 8.2.1, funcţia f (x) este continuă la stânga în punctul x = R, adică:

$$\lim_{x\to R-0} f(x)=f(R-0)=\lim_{x\to R-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n R^n.$$

Similar se demonstrează că f (x) este continuă la dreapta în punctul x = –R, dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(-1)^n\cdot R^n$ este convergentă.

Consecinţă. Fie pentru funcţia f (x) s – a obţinut dezvoltarea în serie de puteri numai în intervalul deschis:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad -R<x<R$$

unde $R>0$ este raza de convergenţă a seriei date. Dacă funcţia f (x) este definită şi continuă, iar seria rămâne convergentă şi la una din extremităţile acestui interval, de exemplu pentru x = R, atunci dezvoltarea rămâne adevărată şi pentru x = R (a se consulta [7], v. 2, cap. 16, § 3, 274).

Teorema 8. Seria de puteri (1) se poate întotdeauna integra termen cu termen pe segmentul $[0,x]$, în care $|x|<R$, unde $R>0$ este raza de convergenţă a seriei (1).

Într-adevăr considerăm numărul real r între $|x|$ şi R. În baza teoremei 5 seria (1) este uniform convergentă pe segmentul $[-r,r]$ şi atunci, în virtutea teoremei 6 din 8.2.1, în intervalul închis $[0,x]$ seria (1) poate fi integrată termen cu termen, adică:

$$\int_0^x f(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n t^n dt=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\ldots+\frac{a_{n-1}}{n}x^n+\ldots$$

Nota 1. Dacă seriile de puteri:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \text{ şi}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n+\ldots$$

au în vecinătatea punctului x = 0 (vom avea în vedere nu numai vecinătatea bilaterală $[-\delta,\delta]$ a punctului x = 0, ci şi vecinătatea unilaterală de forma $[0,\delta[$ sau $]-\delta,0]$) aceeaşi sumă, aceste serii sunt identice, adică $a_n=b_n$ pentru orice n = 0,1,2…

Această afirmaţie, care stabileşte unicitatea dezvoltării unei funcţii în serie de puteri, a fost pentru prima oară enunţată de Euler.

Nota 2. Intervalul de convergenţă al seriei de puteri (2) are forma $]x_0-R,x_0+R[$, unde R este raza de convergenţă a seriei de forma (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n \text{ cu } y=x-x_0.$$

Toate proprietăţile referitoare la seriile de forma (1), demonstrate mai sus, rămân valabile şi pentru seriile de forma (2) pe intervalul lor de convergenţă $]x_0-R,x_0+R[$.

8.2.3. Serii Taylor şi Mac Laurin.

Fie f (x) o funcţie definită pe un interval $I\subseteq R$, indefinit derivabilă într-o vecinătate oarecare $V(x_0,\delta)\subseteq I\subseteq R$ a punctului $x_0\in I$.

După cum se ştie ([20], 6.2.3.) formula Taylor pentru această funcţie are forma:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),\quad x\in V(x_0,\delta),$$

unde $R_n(x)$ se numeşte *restul de ordinul n* al formulei Taylor şi are diverse forme:

a) forma Lagrange:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\quad 0<\theta<1,$$

b) forma Cauchy:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1},\quad 0<\theta<1,$$

etc.

Dacă şirul $\{R_n(x)\}$ pentru $x\in V(x_0,\delta)$ este convergent către zero, adică $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ pentru orice $x\in V(x_0,\delta)$, atunci seria

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots, \quad (1)$$

numită *serie Taylor* a funcţiei f (x) în punctul x_0, este convergentă către f (x) pe mulţimea $V(x_0,\delta)$.

Deci,

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots=$$
$$=f(x_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-x_0)^n,\ x\in V(x_0,\delta) \qquad (2)$$

Formula (2) se numeşte *formula de dezvoltare* a funcţiei f (x) în serie Taylor într-o vecinătate oarecare $V(x_0,\delta)\subseteq I\subseteq R$ a punctului $x_0\in I$.

Aşadar, *pentru ca seria Taylor (1) a funcţiei f (x) în punctul* x_0 *să fie convergentă către funcţia f (x) într-o vecinătate oarecare* $V(x_0,\delta)$ *a punctului* x_0 *este necesar şi suficient ca* $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

O condiţie mai practică este dată de următoarea teoremă.

Teorema 1. Pentru ca seria Taylor (1) a funcţiei f (x) în punctul x_0 să fie convergentă către f (x) într-o vecinătate oarecare $V(x_0,\delta)$ a punctului $x_0\in R$ este necesar şi suficient ca derivatele de orice ordin ale acestei funcţii să fie mărginite pe mulţimea $V(x_0,\delta)$.

Demonstraţie. Considerăm restul $R_n(x)$ în forma Lagrange:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

unde $\xi=[x_0+\theta(x-x_0)]\in\,]x_0,x[\,\subset V(x_0,\delta)$ dacă $x>x_0$ sau $\xi\in\,]x,x_0[\,\subset V(x_0,\delta)$, dacă $x<x_0$.

Întrucât, după condiţia teoremei există un număr M > 0, astfel încât $|f^{(n)}(x)|\le M$, pentru orice $n\in N$ şi orice $x\in V(x_0,\delta)$, obţinem:

$$|R_n(x)|\le M\cdot\left|\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right|. \qquad (3)$$

Observăm că seria:

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n=\sum_{n=0}^{\infty}M\cdot\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

este convergentă pentru orice $x\in V(x_0,\delta)$. Într-adevăr, aplicând criteriul D'Alembert, avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{M\cdot|x-x_0|^{n+2}\cdot(n+1)!}{(n+2)!\cdot M\cdot|x-x_0|^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-x_0|}{n+2}=0<1$$

pentru orice $x\in V(x_0,\delta)$.

Prin urmare,

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}=0.$$

Trecând la limită în relaţia (3) când $n\to\infty$ obţinem: $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ şi teorema este demonstrată.

Dacă în formula (2) considerăm $x_0=0\in I$ şi funcţia f (x) este indefinit derivabilă într-o vecinătate oarecare a punctului $x_0=0$, obţinem formula:

$$f(x)=f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}f^{(n)}(0)\cdot\frac{x^n}{n!},$$

care se numeşte *serie Mac Laurin* a funcţiei f (x).

În încheiere, menţionăm, că seria Taylor pentru funcţia f (x) în punctul dat poate să nu fie convergentă către f (x) într-o vecinătate oarecare a punctului considerat (dacă, bineînţeles, $\lim_{n\to\infty}R_n(x)\ne 0$).

Vom considera un exemplu de acest fel: fie funcţia

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{dacă } x\ne 0,\\ 0, & \text{dacă } x=0,\end{cases}$$

definită într-o vecinătate oarecare $V(0,\delta)$ a punctului $x_0=0$.

Observăm că f (x) este derivabilă de o infinitate de ori pe toată axa numerică, iar toate derivatele ei în punctul $x_0 = 0$ sunt egale cu zero. Într-adevăr, dacă $x \neq 0$, atunci

$$f'(x) = \left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' = \frac{2}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Derivând $f'(x)$, obținem $f''(x)$ pentru $x \neq 0$ etc.

Dacă, însă, $x = 0$, atunci:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{1}{e^{\frac{1}{(\Delta x)^2}}} = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{\Delta x} = y \\ y \to \infty \end{array} \right| = \lim_{y \to \infty} \frac{y}{e^{y^2}} = \lim_{y \to \infty} \frac{(y)'_y}{\left(e^{y^2}\right)'_y} =$$

$$= \lim_{y \to \infty} \frac{1}{2y \cdot e^{y^2}} = 0$$

(am aplicat regula L'Hospital pentru a ridica o nedeterminare de forma $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$).

$$f''(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(\Delta x) - f'(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot f'(\Delta x) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{(\Delta x)^4} \cdot \frac{1}{e^{\frac{1}{(\Delta x)^2}}} = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{\Delta x} = y \\ y \to \infty \end{array} \right| = \lim_{y \to \infty} \frac{2y^4}{e^{y^2}}.$$

Aplicând de două ori regula L'Hospital pentru ridicarea nedeterminării de forma $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, obținem că $f''(0) = 0$.

Continuând mai departe acest procedeu obținem că:

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = \ldots = 0.$$

Prin urmare, funcției f (x) îi corespunde o serie de puteri după puterile lui x (serie Mac Laurin), toți coeficienții căreia sunt egali cu zero:

$$0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \ldots + 0 \cdot x^n + \ldots$$

Evident că suma acestei serii este identic egală cu zero pentru orice $x \in V(0, \delta)$, și prin urmare, coincide cu funcția f (x) numai în punctul $x = 0$.

Observăm că restul de ordinul n al seriei (2) cu $x_0 = 0$ pentru funcția inițială f (x) este egal cu:

$$R_n(x) = f(x) - S_n(x) = f(x) - \left[f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right] =$$

$$= f(x) - 0 = f(x)$$

pentru orice $x \in V(0, \delta)$.

Deci, $R_n(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $x \neq 0$, $x \in V(0, \delta)$ și $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) \neq 0$, pentru $x \neq 0$, $x \in V(0, \delta)$.

8.2.4. Dezvoltarea funcțiilor elementare în serii de puteri. Aplicații.

Vom studia dezvoltările funcțiilor elementare în serie Mac Laurin.

1) Dezvoltarea în serie Mac Laurin a funcțiilor e^x, sin$x$, cos$x$.

Funcțiile e^x, $\sin x$, $\cos x$ sunt indefinit derivabile și:

$$\left(e^x\right)^{(n)} = e^x, \quad (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

(a se consulta [20], ex. 2, 3, 4 din 2.3.1.).

Observăm că derivatele de orice ordin de la aceste funcții sunt mărginite pe orice interval $]-H, H[$, $H > 0$. Într-adevăr

$$e^{-H} < e^{x} < e^{H}, \quad \left|\sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right| \le 1, \quad \left|\cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right| \le 1.$$

Prin urmare în virtutea teoremei 1 din 8.2.3. obținem următoarele dezvoltării în serie Mac Laurin:

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}; \quad (1)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad (2)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}. \quad (3).$$

Aceste formule sunt valabile pentru orice $x \in R$, deoarece numărul H > 0 din intervalul $]-H, H[$ este arbitrar.

Dacă $x = 1$, atunci formula (1) are forma:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

Această formulă ne permite să calculăm numărul irațional e cu orice exactitate. De exemplu dacă trebuie să calculăm valoarea lui e cu exactitatea de trei cifre zecimale după virgulă $(\alpha = 10^{-3})$ atunci procedăm astfel, avem:

$$R_n(1) = f(x) - S_n(1) = e - \left[2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\right] \text{ și}$$

$$R_n(1) \le \alpha = 10^{-3}.$$

Fie $R_n(1)$ în formă Lagrange:

$$R_n(1) = \frac{e^{\theta}}{n!}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Dacă $n \ge 3$, atunci $\frac{e^{\theta}}{n} < 1$ pentru orice $0 < \theta < 1$.

Deci, $R_n(1) = \frac{e^{\theta}}{n!} = \frac{e^{\theta}}{n}\cdot\frac{1}{(n-1)!} < \frac{1}{(n-1)!} \le \frac{1}{10^3}$.

De unde $(n-1)! \ge 10^3$.

Observăm că: $5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$, $6! = 120\cdot 6 = 720$, $7! = 720\cdot 7 > 10^3$

Prin urmare,

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \approx 2{,}718.$$

În general formulele (1), (2), (3) sunt utilizate pentru calcularea valorilor funcțiilor respective cu exactitatea dorită.

2) Dezvoltarea în serie Mac Laurin a funcțiilor hiperbolice shx și chx.

Dacă în formula (1) înlocuim pe x cu ($-x$) obținem formula

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!} \quad (4),$$

Această formulă este valabilă de asemenea pentru orice $x \in R$.

Folosind seriile (1) și (4), obținem următoarele dezvoltări în serie Mac Laurin ale funcțiilor: $shx = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$ și $chx = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$, definite pe R:

$$shx = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (5)$$

$$chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (6)$$

care sunt convergente pentru orice $x \in R$.

3) Dezvoltarea în serie Mac Lauren a binomului generalizat $(1+x)^r$, $x \in R$.

Fie $f(x) = (1+x)^r$, unde r orice număr real. Funcția f (x) este indefinit derivabilă pe R însă estimarea restului din seria Mac

Laurin prezintă unele greutăţi. De aceea vom merge spre dezvoltarea acestei funcţii pe o altă cale. Observăm că funcţia f (x) satisface ecuaţiei diferenţiale de ordinul 1

$$(1+x)\cdot f'(x)=r\cdot f(x)$$

cu condiţia iniţială f (0) = 1.

Vom afla soluţia particulară $\varphi(x)$ a acestei ecuaţii diferenţiale (care există şi este unică în virtutea teoremei Cauchy din 7.1.1.) ca suma unei serii de puteri

$$\varphi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots.$$

Întrucât $\varphi(0)=1=a_0$, avem:

$$\varphi(x)=1+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots.$$

Derivând-o termen cu termen în intervalul ei de convergenţă, obţinem:

$$\varphi'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots.$$

Substituind $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ în ecuaţia diferenţială de mai sus, avem:

$$(1+x)(a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+(n+1)a_{n+1}x^n+\ldots)=$$
$$=r(1+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots).$$

Egalând coeficienţii de pe lângă aceleaşi puteri ale lui x din diferite părţi ale egalităţii, obţinem:

$$a_1=r,\quad a_1+2a_2=ra_1,\quad 3a_3+2a_2=ra_2,\ \ldots,$$
$$na_n+(n+1)a_{n+1}=ra_n,\ldots.$$

De unde,

$$a_1=r,$$
$$a_2=\frac{ra_1-a_1}{2}=\frac{a_1(r-1)}{2}=\frac{r(r-1)}{2!},$$
$$a_3=\frac{a_2(r-2)}{3}=\frac{r(r-1)(r-2)}{3!},\ \ldots,$$
$$a_n=\frac{r(r-1)(r-2)\cdot\ldots\cdot(r-n+1)}{n!}\quad \text{etc.}$$

Prin urmare,

$$\varphi(x)=1+rx+\frac{r(r-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{r(r-1)(r-2)\cdot\ldots\cdot(r-n+1)}{n!}x^n+\ldots.$$

Dacă r este un număr natural, atunci începând cu termenul x^{r+1}, toţi coeficienţii seriei sunt egali cu zero, şi seria se transformă într-un polinom. Pentru r fracţionar sau pentru r întreg negativ avem o serie infinită. Aflăm intervalul de convergenţă al acestei serii, aplicând criteriul D'Alembert :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{r(r-1)(r-2)\cdot\ldots\cdot(r-n+2)(r-n+1)x^n(n-1)!}{n!r(r-1)(r-2)\cdot\ldots\cdot(r-n+2)x^{n-1}}\right|=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(r-n+1)x}{n}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{r}{n}-1+\frac{1}{n}\right)\right|=|x|.$$

Aşadar, seria converge pentru $|x|<1$, adică $x\in]-1,1[$.

Întrucât funcţia $\varphi(x)$ este unică, avem:

$$(1+x)^r=1+rx+\frac{r(r-1)}{2!}x^2+\ldots+$$
$$+\frac{r(r-1)(r-2)\cdot\ldots\cdot(r-n+1)}{n!}x^n+\ldots,\tag{7}$$

care este convergentă pentru orice $x\in]-1,1[$ şi orice $r\in R$.

Dacă înlocuim pe x cu ($-x$) seria (7) se transformă în seria

$$(1-x)^r=1-rx+\frac{r(r-1)}{2!}x^2-\ldots+$$
$$+(-1)^n\frac{r(r-1)(r-2)\cdot\ldots\cdot(r-n+1)}{n!}x^n+\ldots,\tag{8}$$

care este convergentă pentru orice $x\in]-1,1[$ şi pentru orice $r\in R$.

Este important să subliniem, că în cazul lui r raţional, suma seriei (7) dă întotdeauna valoarea aritmetică a radicalului.

Vom aplica seriile (7) şi (8) la dezvoltarea altor funcţii în serie Mac Laurin.

a) Înlocuind r = –1 în seriile (7) şi (8) obţinem seriile

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+...+(-1)^{n+1}x^n+... \text{ şi}$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+...+x^n+...$$

care sunt convergente pentru $|x|<1$, formule cunoscute anterior.

Integrând termen cu termen aceste serii pe $[0,x]$, unde $|x|<1$, obţinem:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t}=\int_0^x (1-t+t^2-t^3+...)dt;$$

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t}=\int_0^x (1+t+t^2-t^3+...)dt;$$

sau

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+..., \quad (9)$$

$$\ln(1-x)=-(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+\frac{x^n}{n}+...), \quad (10)$$

care sunt convergente pentru $|x|<1$.

Propunem cititorului să demonstreze că seria (9) este convergentă şi pentru $x=1$ (a se consulta, de exemplu [2], pag.426).

Cu ajutorul seriilor (9) şi (10) se pot calcula logaritmii naturali de la numerele reale cuprinse între zero şi 2. De exemplu, dacă considerăm $x=1$ în seria (9), obţinem formula

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...,$$

care reprezintă suma seriei lui Leibniz.

Vom deduce formula pentru calcularea logaritmilor naturali de la oricare numere pozitive.

Scăzând termen cu termen seriile (9) şi (10) obţinem seria:

$$\ln(1+x)-\ln(1-x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=2(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+...).$$

Notăm în continuare

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{k+1}{k}.$$

De unde, $x=\frac{1}{2k+1}$. Pentru orice k > 0, avem: $0<x<1$, de aceea

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln\frac{k+1}{k}=2\left[\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{3(2k+1)^3}+...+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(2n+1)(2k+1)^{2n+1}}+...\right], \text{ adică}$$

$$\ln(k+1)-\ln k=2\left[\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{3(2k+1)^3}+\frac{1}{5(2k+1)^5}+...+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(2n+1)(2k+1)^{2n+1}}+...\right], \quad (11)$$

care este valabilă pentru orice k > 0.

Notă. Drept aplicaţie a dezvoltării (11) serveşte deducţia cu ajutorul ei a unei formule importante în analiză, ce poartă numele lui Stirling ((1692-1770 – matematician englez), (a se consulta de exemplu [7], v.2, cap.15, 6.257):

$$n!=\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot e^{\frac{\theta}{12n}}, \quad 0<\theta<1.$$

Dacă neglijăm ultimul factor, obţinem formula aproximativă

$$n!=\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

care ne permite să calculăm valoarea factorialului n! pentru valori mari ale lui n. Factorul omis ne dă posibilitatea să evaluăm cu uşurinţă eroarea relativă, care este, evident, mai mică decât $e^{\frac{\theta}{12n}}-1$.

b) Dacă în seria (7) înlocuim x prin x^2 şi considerăm r = –1, obţinem formula

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+...+(-1)^{n+1}x^{2n}+...,$$

care este valabilă pentru orice $|x|<1$.

Integrând termen cu termen această serie pe $[0,x]$, unde $|x| < 1$, avem:

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ...$$

Se poate de demonstrat că această formulă este valabilă pe [-1,1].

c) Dacă în seria (8) înlocuim x prin x^2 şi considerăm $r = -\frac{1}{2}$, obţinem formula

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + ... +$$

$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot(2n)}x^{2n} + ...$$

Pe baza teoremei despre integrarea seriei de puteri pentru $|x| < 1$ avem:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + ... + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ... =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Se poate de demonstrat că această formulă este valabilă pe [-1,1].

Dacă considerăm $x = 1$, atunci obţinem formula pentru calcularea numărului π cu orice exactitate:

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5} + ... + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7} + ...$$

Notă. Procedeul expus în dezvoltarea funcţiei $f(x) = (1+x)^r$, $r \in R$ în serie Mac Laurin se foloseşte la determinarea soluţiilor unor ecuaţii diferenţiale, care nu se reduc în cuadraturi.

Exemplu 7. Să se integreze ecuaţia diferenţială de ordinul 2:

$$xu'' + u' + xu = 0.$$

Această ecuaţie reprezintă cel mai simplu caz al aşa-numitei *ecuaţii a lui Bessel* (1784-1846 – astronom german), care se

întâlneşte adesea în fizica matematică şi în aplicaţiile ei. Ne punem problema, deci, să găsim aşa o soluţie u (x) a ei, care ar permite dezvoltarea în serie Mac Laurin pe toată axa numerică. Aşadar, fie

$$u(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ...$$

Considerând-o uniform convergentă pe R, derivând – o de două ori termen cu termen şi substituind rezultatele în ecuaţia iniţială avem:

$$a_1 + \sum_{n=2}^{\infty}(a_{n-2} + n^2a_n)x^{n-1} = 0.$$

Egalând coeficienţii de pe lângă aceleaşi puteri ale lui x din diferite părţi ale egalităţii obţinem, prin inducţie, că toţi coeficienţii cu indici impari $a_{2m-1} = 0$ $(m = 1,2,3,...)$, iar coeficienţii cu indici pari a_{2m} $(m = 1,2,3,...)$ se vor exprima cu ajutorul formulei recurente

$$a_{2m} = -\frac{1}{4m^2}\cdot a_{2m-2}$$

prin a_0: $a_{2m} = (-1)^m \frac{1}{(m!)^2 2^{2m}} a_0$.

Prin urmare, făcând abstracţie de un factor constant a_0, obţinem definitiv seria:

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{x^{2m}}{(m!)^2 2^{2m}},$$

care se verifică direct că este convergentă pentru orice $x \in R$ şi satisface ecuaţiei diferenţiale date. Suma acestei serii se numeşte *funcţia Bessel de ordinul zero* şi se notează $B_0(x)$ (a se consulta ex.8.67, 8.69 de la pag.166 din [22]) şi [7], v. 2, cap. 16, 3.276).

În încheiere menţionăm că seriile de puteri se aplică pe larg la calcularea valorilor aproximative ale acelor integrale definite, care nu pot fi exprimate prin funcţii elementare sau sunt dificile la calculare (a se consulta 4.1.6 din [20]). Considerăm două exemple de acest fel:

1) **Să se calculeze integrala** $\int_0^a e^{-x^2}dx$.

Rezolvare.

Dacă înlocuim în formula (1) variabila x prin $\left(-x^2\right)$ obținem seria:

$$e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots,$$

care este convergentă pe R.

Integrând această serie termen cu termen pe $[0,a]$, $a\in R$, avem:

$$\int_0^a e^{-x^2}dx=a-\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{2!\cdot 5}-\frac{a^7}{3!\cdot 7}+\ldots.$$

Cu ajutorul acestei formule putem calcula integrala inițială pentru orice $a\in R$, cu orice grad de precizie.

2) **Să se calculeze integrala** $\int_0^a \frac{\sin x}{x}dx$, $a\in R$.

Rezolvare.

Aplicând formula (2) obținem seria

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots,$$

care este convergentă pentru orice $x\in R$. Integrând termen cu termen, avem:

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x}dx=a-\frac{a^3}{3\cdot 3!}+\frac{a^5}{5\cdot 5!}-\frac{a^7}{7\cdot 7!}+\ldots,\quad a\in R.$$

Această formulă ne permite de a calcula integrala inițială cu orice grad de precizie.

8.3. Serii Fourier.

În știință și tehnică ne întâlnim adesea cu fenomene și procese periodice, adică fenomene și procese, care se reproduc la un anumit interval de timp T, numită perioadă. Ca exemplu pot servi mișcările oscilante și de rotație a diferitelor detalii în mașini și aparate, mișcările periodice ale corpurilor cerești și particulelor elementare, oscilațiile acustice și electromagnetice, curentul alternativ etc. Diverse mărimi legate de fenomenele și procesele periodice considerate, după scurgerea perioadei T, își recapătă valorile lor anterioare, deci reprezintă funcții periodice de timpul t, caracterizate prin egalitatea: $\varphi(t+T)=\varphi(t)$. Așa sunt, de exemplu, intensitatea și tensiunea curentului alternativ, sau – în alte procese periodice mecanice – deplasarea, viteza și accelerația diverselor organe de mașini.

În paragraful acesta ne vom ocupa cu dezvoltarea funcțiilor în serii de funcții periodice. Compartimentul acesta al matematicii se numește *analiză armonică*. Acest punct de vedere se generalizează în dezvoltarea funcțiilor în serii în raport cu unele sisteme de funcții ortogonale la definirea cărora trecem acum.

8.3.1. Sistemul ortogonal de funcții. Seria generalizată Fourier.

Fie $\varphi_1(x)$ și $\varphi_2(x)$ două funcții definite și continue pe $[a, b]$.

Dacă $\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx=0$, atunci funcțiile $\varphi_1(x)$ și $\varphi_2(x)$ se numesc *ortogonale pe* $[a, b]$.

Se numește *normă* a funcției $\varphi(x)$ pe $[a, b]$ numărul

$$\lambda=\|\varphi(x)\|=\sqrt{\int_a^b \varphi^2(x)dx}.$$

Dacă $\lambda=1$, atunci funcția $\varphi(x)$ se numește *normată* pe $[a, b]$.

Sistemul de funcţii $\{\varphi_n(x)\}, n \in N$, unde $\varphi_n(x), n \in N$ sunt funcţii continue pe $[a, b]$, se numeşte *sistem ortogonal* pe $[a,b]$ dacă funcţiile $\varphi_n(x), n \in N$ două câte două sunt ortogonale, adică:

$$\int_a^b \varphi_n(x) \cdot \varphi_m(x) dx = 0, n \neq m, n, m \in N.$$

Sistemul $\{\varphi_n(x)\}, n \in N$ de funcţii continue pe $[a,b]$ se numeşte *sistem ortonormat pe* $[a,b]$, dacă acest sistem este ortogonal şi funcţiile $\varphi_n(x), n \in N$ sunt normate pe $[a,b]$, adică

$$\int_a^b \varphi_n(x) \cdot \varphi_m(x) dx = \begin{cases} 1, & \text{dacă} \quad n = m \\ 0, & \text{dacă} \quad n \neq m \end{cases}$$

Ca exemplu considerăm sistemul de funcţii:

$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$ (1)

Vom demonstra că acest sistem de funcţii este ortogonal pe $[-\pi, \pi]$.

În raţionamentele de mai jos vom folosi următoarea afirmaţie cunoscută: dacă $f(x)$ este continuă pe $[-a, a]$ şi impară pe acest segment, adică $f(-x) = -f(x)$ pentru orice $x \in [-a, a]$, atunci

$$\int_{-a}^{a} f(x) dx = 0$$ ([20], exemplul 2 din 4.2.5).

Arătăm acum că sistemul (1) este ortogonal pe $[-\pi, \pi]$. Într-adevăr, considerând $1 = \cos(0 \cdot x)$, avem:

a) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \sin nx dx = 0$, pentru orice $m=0,1,2,\ldots$, $n=1,2,\ldots$ şi $m \neq n$ (în virtutea afirmaţiei de mai sus: funcţia $f(x) = \cos mx \cdot \sin nx$ este impară pe $[-\pi, \pi]$);

b) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m+n} \cdot \sin(m+n)x + \frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\right]\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

pentru orice $m = 0,1,2,\ldots$, $n = 0,1,2, \ldots$ şi $m \neq n$;

c) $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}[\cos(n-m)x - \cos(n+m)x] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n-m} \cdot \sin(n-m)x + \frac{1}{n+m}\sin(n+m)x\right]\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

pentru orice $m = 1,2,\ldots$, $n = 1,2, \ldots$ şi $m \neq n$.

Observăm că:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2} dx = \frac{1}{2}(2\pi + 0) = \pi, \quad (2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2nx}{2} dx = \frac{1}{2}(2\pi - 0) = \pi, \quad (3)$$

pentru orice $n = 1,2,3, \ldots$. Dacă $n = 0$, adică $\cos n \cdot x = 1$, avem $\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi$.

Prin urmare, sistemul (1) este un sistem ortogonal de funcţii pe $[-\pi, \pi]$ dar nu este normat.

Remarcăm că sistemul de funcţii :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \quad (4)$$

este deja ortonormat pe $[-\pi, \pi]$.

Propunem cititorului să arate că sistemul (1) nu este ortogonal pe $[0, \pi]$.

Pe parcurs vom considera numai sisteme ortogonale de funcţii în care norma acestor funcţii este diferită de zero.

Fie seria

$$a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x), \quad (5),$$

unde funcţiile $\varphi_n(x), n \in N$ formează un sistem ortogonal de funcţii pe $[0, T]$, funcţiile $\varphi_n(x), n \in N$ sunt continue pe $[0, T]$ şi periodice cu perioada T. Presupunem că seria (5) este uniform convergentă pe $[0, T]$ către funcţia $f(x)$. Observăm că în acest caz funcţia f(x) este de asemenea periodică cu perioada T. Deci, pentru orice $x \in [0,T]$ avem :

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x).$$

Înmulţim relaţia de mai sus cu funcţia $\varphi_k(x), k=1,2,...$. Obţinem egalitatea :

$$f(x)\varphi_k(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)\cdot\varphi_k(x). \tag{6}$$

Funcţiile $\varphi_k(x), k=1,2,....$ fiind continue pe [0, T], sunt mărginite pe [0, T] şi pe baza consecinţei din teorema 1 (din 8.2.1), obţinem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)\cdot\varphi_k(x)$, este uniform convergentă pe [0, T]. Integrând egalitatea (6) parte cu parte, avem :

$$\int_0^T f(x)\varphi_k(x)dx=a_1\int_0^T\varphi_1(x)\cdot\varphi_k(x)dx+a_2\int_0^T\varphi_2(x)\cdot\varphi_k(x)dx+...+$$

$$+a_k\int_0^T\varphi_k^2(x)dx+a_{k+1}\int_0^T\varphi_{k+1}(x)\cdot\varphi_k(x)dx+... .$$

În virtutea ortogonalităţii sistemului de funcţii $\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_k(x),...$, rezultă că toţi termenii din partea dreaptă a relaţiei de mai sus sunt egali cu zero în afară de termenul $a_k\int_0^T\varphi_k^2(x)dx$. Prin urmare,

$$\int_0^T f(x)\varphi_k(x)dx=a_k\int_0^T\varphi_k^2(x)dx.$$

De unde

$$a_k=\frac{\int_0^T f(x)\varphi_k(x)dx}{\int_0^T\varphi_k^2(x)dx}, \quad k=1,2,3, ... \tag{7}$$

Dacă sistemul de funcţii $\varphi_1(x),\varphi_2(x),....,\varphi_k(x),....$ este ortonormat atunci formula (7) se transformă în formula:

$$a_k=\int_0^T f(x)\cdot\varphi_k(x)dx\ , \quad k=1, 2, ... \tag{8}$$

Definiţie: Seria (5) cu coeficienţii $a_1,a_2,...,a_k,...$ calculaţi după formula (7) se numeşte *serie generalizată Fourier* ((1768–1830) – matematician francez) *în raport cu sistemul ortogonal de funcţii* $\{\varphi_n(x)\}, n\in N$ pe $[0,T]$.

Seria (5) cu coeficienţii $a_1,a_2,...,a_k,...$ calculaţi după formula (8) se numeşte *serie generalizată Fourier în raport cu sistemul ortonormat de funcţii* $\{\varphi_n(x)\}, n\in N$ pe $[0,T]$.

Remarcăm că dacă funcţia f(x) este periodică cu perioada T, atunci orice două integrale ale acestei funcţii luate pe intervale de lungime T sunt egale între ele (bineînţeles, se presupune că aceste integrale există), adică pentru orice numere a şi b este adevărată egalitatea

$$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_b^{b+T} f(x)dx. \tag{9}$$

Într-adevăr $\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^{b+T} f(x)dx+\int_{b+T}^{a+T} f(x)dx.$

Avem: $$\int_{b+T}^{a+T} f(x)dx=\begin{vmatrix}x-T=u\\x=u+T\\dx=du\\u\in[b,a]\end{vmatrix}=\int_b^a f(u+T)du=\int_b^a f(u)du=$$

$$=\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx.$$

Prin urmare,

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{b+T} f(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx,$$

adică am obţinut formula (9).

Dacă seria (5) nu este uniform convergentă pe $[0, T]$, atunci suma seriei (5) poate să nu coincidă cu funcţia f(x) pe $[0, T]$. De aceea în caz general vom spune doar că seria (5) cu coeficienţii calculaţi după formulele (7) este *generată de funcţia* f(x). Această legătură a ei cu funcţia dată f(x) se notează de obicei astfel:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

evitându-se semnul egalităţii.

În virtutea formula (9), integralele din formulele (7) şi (8) pot fi considerate pe orice interval de lungime T, adică

$$a_k = \frac{\int_a^{a+T} f(x)\varphi_k(x)dx}{\int_a^{a+T} \varphi_k^2(x)dx}, \quad a \in R \tag{10}$$

şi respectiv

$$a_k = \int_a^{a+T} f(x)\varphi_k(x)dx, \quad a \in R. \tag{11}$$

8.3.2. Seria trigonometrică Fourier.

Considerăm sistemul ortogonal de funcţii

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots \tag{1}$$

pe $[-\pi, \pi]$. Admitem că seria

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots =$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{2}$$

este uniform convergentă către funcţia f(x) pe $[-\pi, \pi]$. Observăm că în acest caz f(x) este continuă pe $[-\pi, \pi]$, periodică cu perioada $T=2\pi$, şi definită pe toată axa numerică, deoarece

$$f(x+2\pi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n(x+2\pi) + b_n \sin(x+2\pi) =$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = f(x),$$

pentru orice $x \in [-\pi, \pi]$.

Pe baza formulelor (7) din 8.3.1., obţinem:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot 1dx}{\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

De unde

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx. \tag{3}$$

Aplicând formulele (7), (2) şi (3) din 8.3.1 avem:

$$a_k = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx, \tag{4}$$

$$b_k = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx, \tag{5}$$

pentru orice $k=1,2,\ldots$.

Unind formulele (3) şi (4) obţinem formula :

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

(prin aceasta şi se explică notaţia coeficientului de pe lângă funcţia 1 din sistemul ortogonal (1), adică a termenului liber al seriei (2), sub forma $\frac{a_0}{2}$).

Dacă termenul liber al seriei (2) este notat sub forma a_0, atunci formula (3) se transformă în formula $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ şi nu poate fi unită cu formula (4). Observăm că în egalităţile (3) – (6) limitele de integrare pot fi luate de la 0 până la 2π, iar pe baza formulei (9) din 8.3.1. de la a până la $(a + 2\pi)$, unde a este orice număr real.

Formulele (1) – (6) sunt cunoscute sub denumirea de *formulele Euler – Fourier*; coeficienţii seriei (2), calculaţi cu ajutorul acestor formule, se numesc *coeficienţii Fourier* ai funcţiei date f(x), iar seria trigonometrică (2), cu coeficienţii Fourier, se numeşte *serie Fourier*. Pe parcursul acestui capitol vom studia exclusiv seriile Fourier.

Din raţionamentele de mai sus rezultă nemijlocit următoarele:

a) dacă f(x) este suma unei serii trigonometrice (2) uniform convergente pe $[-\pi, \pi]$, atunci această serie este seria Fourier a funcţiei date f(x);

b) dacă f(x) este dezvoltată în seria (2) uniform convergentă pe $[-\pi, \pi]$, o aşa dezvoltare este unică (în virtutea formulelor (5) şi (6)).

În general, dacă f(x) este o funcţie periodică cu perioada $T=2\pi$, continuă pe $[-\pi, \pi]$, atunci în baza formulelor (5) şi (6), această funcţie „generează" seria Fourier (2) corespunzătoare ei. Se scrie astfel

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx .$$

Însă ca şi în cazul seriilor de puteri, nu se poate afirma, că seria Fourier a funcţiei f(x) converge către această funcţie. Dacă, seria Fourier (2) a funcţiei f(x) converge către această funcţie în toate punctele ei de continuitate, semnul ~ se înlocuieşte prin semnul de egalitate şi în acest caz se spune, că funcţia f(x) se *dezvoltă în serie Fourier*.

Se poate arăta, că funcţia f(x), care satisface anumite condiţii, se dezvoltă în serie Fourier. Formulăm fără demonstraţie doar câteva criterii suficiente de dezvoltare a funcţiei date în serie Fourier.

Teorema 1 (*Dirichlet*). Dacă funcţia f(x) este periodică cu perioada $T=2\pi$ şi este continuă pe $[-\pi, \pi]$ sau are un număr finit de puncte de discontinuitate de speţa 1, iar segmentul $[-\pi, \pi]$ poate fi împărţit într-un număr finit de segmente astfel, încât în interiorul fiecăruia f(x) este monotonă, atunci seria Fourier a funcţiei f(x) este convergentă pentru toate valorile reale ale lui x. În punctele de continuitate ale funcţiei $f(x)$ suma acestei serii este egală cu $f(x)$, iar în punctele de discontinuitate ale funcţiei $f(x)$ suma seriei este egală cu media aritmetică a valorilor limitelor la stânga şi la dreapta ale funcţiei $f(x)$. În acest caz seria Fourier a funcţiei $f(x)$ este uniform convergentă pe orice segment, care împreună cu extremităţile lui aparţin unui interval de continuitate a funcţiei $f(x)$.

Funcţia care satisface condiţiile teoremei Dirichlet (cu excepţia periodicităţii) se numeşte *monotonă pe porţiuni pe* $[-\pi, \pi]$.

Teorema 2. Dacă funcţia $f(x)$ este periodică cu perioada $T= 2\pi$ şi este continuă împreună cu derivata ei $f'(x)$ pe $[-\pi, \pi]$ sau au pe acest segment un număr finit de puncte de discontinuitate de speţa 1, atunci seria Fourier a funcţie $f(x)$ este convergentă pentru toate valorile reale ale lui x. În punctele de continuitate ale funcţiei $f(x)$ suma acestei serii este egală cu $f(x)$, iar în punctele de discontinuitate ale funcţiei $f(x)$ suma seriei este egală cu media aritmetică a valorilor limitelor la stânga şi la dreapta ale funcţiei $f(x)$. În acest caz seria Fourier a funcţiei $f(x)$ este uniform convergentă pe orice segment, care aparţine împreună cu extremităţile lui, unui interval de continuitate a funcţie $f(x)$.

Funcţia $f(x)$, care satisface condiţiile acestei teoreme, cu excepţia periodicităţii ei, se numeşte *funcţie netedă pe porţiuni pe segmentul* $[-\pi, \pi]$.

Menţionăm că în loc de segmentul $[-\pi, \pi]$ se poate considera segmentele de forma $[a, a + 2\pi]$ de lungimea 2π unde a este orice număr real (în virtutea formulei 9 din 8.3.1.). Demonstraţiile teoremelor 1 şi 2 le puteţi găsi de exemplu în [7], v.2, cap. 24, 2.402; [9],v.2, cap 6, § 15.167.

Trebuie să avem în vedere că există şi alte criterii suficiente de dezvoltare a funcţie date în serie Fourier (de exemplu: criteriile lui

Dini şi Lipschitz ([17],v.3, cap. 19, §2.684.)), însă pentru rezolvarea multor probleme practice se folosesc aceste două criterii. Menţionăm că criteriile formulate în teoremele 1 şi 2 nu pot fi comparate între ele, în general vorbind, deoarece există funcţii care satisfac teoremei 1 şi nu satisfac teoremei 2 şi viceversa.

Nota 1. Fiecare termen $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ (n=1, 2, ...) al seriei Fourier (2) reprezintă o expresie analitică a oscilaţiei armonice simple:

$$A\sin(nx+\alpha_n) = A(\sin nx \cos\alpha_n + \cos nx \sin\alpha_n) = (A\sin\alpha_n)\cos nx + (A\cos\alpha_n)\sin nx,$$

unde $A\sin\alpha_n = a_n$, $A\cos\alpha_n = b_n$, În acest caz A se numeşte *amplitudine*, iar α_n – fază iniţială. Astfel, a dezvolta funcţia f(x) în serie Fourier, înseamnă a descompune oscilaţia compusă caracterizată de funcţia f(x) în serie de oscilaţii armonice simple. În legătura cu acest fapt unele mărimi sinusoidale care fac parte din dezvoltarea (2), se numesc componente armonice ale funcţiei $f(x)$ sau pur şi simplu armonicele ei (prima, a doua etc.). Însuşi procesul descompunerii funcţiei periodice în armonice simple poartă denumirea de *analiză armonică*.

În încheiere să studiem descompunerea în serie Fourier a funcţiei $f(x)$ periodice cu perioada T=21 şi monotonă pe porţiuni pe [–l, l] sau netedă pe porţiuni pe acest segment. Dacă vom recurge la substituţia $x=\frac{l\cdot y}{\pi}$, unde $-\pi \le y \le \pi$, vom obţine funcţia $\varphi(y) = f\left(\frac{ly}{\pi}\right)$, periodică cu perioada T=2π:

$$\varphi(y+2\pi) = f\left[\frac{l}{\pi}(y+2\pi)\right] = f\left(\frac{ly}{\pi}+2l\right) = f\left(\frac{ly}{\pi}\right) = \varphi(y)$$

şi monotonă pe porţiuni pe [–π, π] sau netedă pe porţiuni pe acest segment. În virtutea teoremelor 1 şi 2 obţinem seria

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos ny + b_n \sin ny,$$

coeficienţii căreia se determină după formulele lui Euler – Fourier (6) şi (5) :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{ly}{\pi}\right)\cos ny\,dy, \quad n=0,1,2,\ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{ly}{\pi}\right)\sin ny\,dy, \quad n=1,2,\ldots.$$

Din substituţia $x=\frac{ly}{\pi}$ revenim la variabila iniţială x considerând $y=\frac{\pi x}{l}$ în formulele de mai sus. Atunci vom obţine dezvoltarea funcţiei date $f(x)$ în serie Fourier de tip puţin modificat:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi nx}{l} + b_n \sin\frac{\pi nx}{l}. \tag{7}$$

În cazul de faţă se vor lua cosinusurile şi sinusurile unghiurilor multiple nu lui x, ca în cazul seriei (2), ci lui $\frac{\pi x}{l}$. Pentru calcularea coeficienţilor seriei (7) se obţin formulele:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{ly}{\pi}\right)\cos ny\,dy = \left| \begin{array}{l} y=\frac{\pi x}{l} \\ dy=\frac{\pi}{l}dx \\ x\in[-l,l] \end{array} \right| = \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\cdot\frac{\pi}{l}dx =$$

$$= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx, \quad n=0,1,2\ldots, \tag{8}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{ly}{\pi}\right)\sin ny\,dy = \left| \begin{array}{l} y=\frac{\pi x}{l} \\ dy=\frac{\pi}{l}dx \\ x\in[-l,l] \end{array} \right| = \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\cdot\frac{\pi}{l}dx =$$

$$= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx, \quad n=1,2\ldots. \tag{9}$$

Menţionăm că dacă funcţia $f(x)$ este periodică cu perioada $T=2l=2\pi$, adică $l=\pi$, atunci seria (7) se transformă în seria (2), iar formulele (8) şi (9) se transformă respectiv în formulele (6) şi (5).

8.3.3. Diverse dezvoltări în seria Fourier.

1. Dezvoltarea în serie Fourier ale funcţiilor pare şi impare.

Reamintim că funcţia $f(x)$, definită pe $[-l, l]$, se numeşte *pară* (*impară*), dacă $f(-x) = f(x)$ şi respectiv $f(-x) = -f(x)$ pentru orice $x\in[-l,l]$. De asemenea se ştie că

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{dacă } f(x) \text{ este impară}, \\ 2\int_0^l f(x)dx, & \text{dacă } f(x) \text{ este pară} \end{cases}$$

(a se consulta ex.1 şi 2 din 4.2.5. [20]).

Fie că funcţia pară $f(x)$ este periodică cu perioada $T=2l$ şi este monotonă (sau netedă) pe porţiuni pe $[-l, l]$, atunci există seria Fourier (7) (din 8.3.2.) cu coeficienţii calculaţi după (8) şi (9) din 8.3.2.. Întrucât $f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}$ este o funcţie pară pe $[-l, l]$, iar funcţia $f(x)\cdot\sin\frac{\pi nx}{l}$ este impară pe $[-l, l]$, obţinem:

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx \text{ , } n=0,1,2\dots, \tag{1}$$

$$b_n = 0 \text{ , } n = 1,2, \dots \tag{2}$$

şi seria (7)din 8.3.2. are forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi nx}{l}. \tag{3}$$

Prin urmare seria Fourier „generată" de o funcţie pară $f(x)$ conţine numai cosinusuri (adică are forma (3)).

Similar, seria Fourier „generată" de o funcţie impară $f(x)$ conţine numai sinusuri, adică are forma :

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi nx}{l}, \tag{4}$$

deoarece în acest caz funcţia $f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}$ este impară şi

$$a_n = 0, \text{ pentru orice } n = 0,1,2 \dots,$$

iar funcţia $f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}$ este pară şi

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cdot\sin\frac{\pi nx}{l}dx. \tag{5}$$

Menţionăm de asemenea că orice funcţie $f(x)$ definită pe $[-l, l]$ poate fi reprezentată sub forma unei sume de două funcţii, dintre care una este pară, iar cealaltă impară:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

unde $f_1(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ este pară şi $f_2(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ este impară (a se consulta [20], proprietatea 5 din 1.3.6).

Evident că seria Fourier (7) din 8.3.2. a funcţiei $f(x)$, periodice cu perioada $T=2l$, este compusă tocmai din dezvoltarea în raport cu cosinus a funcţiei pare $f_1(x)$ şi dezvoltarea în raport cu sinus a funcţiei impare $f_2(x)$ pe $[-l, l]$.

2. **Dezvoltarea în serie Fourier a funcţiei definite pe $[0, l]$.**

Fie funcţia $f(x)$ definită numai pe segmentul $[0, l]$. Dacă dorim s-o dezvoltăm în serie Fourier de forma (7) din 8.3.2. pe acest segment, extindem în mod arbitrar definirea acestei funcţii pe segmentul $[-l, 0]$ cu condiţia ca funcţia nouă $\varphi(x)$ să se dezvolte deja în serie Fourier pe $[-l, l]$ ($\varphi(x)$ fiind, bineînţeles, periodică cu $T = 2l$).

Modul arbitrar, subliniat mai sus, de definire a funcţiei $\varphi(x)$ ne permite să obţinem diverse serii Fourier pentru $f(x)$ pe $[0, l]$. Acest mod arbitrar de definire a funcţiei $\varphi(x)$ pe $[-l, 0]$ se poate de asemenea folosi în aşa fel, încât să obţinem pentru $f(x)$ pe $[0, l]$ dezvoltarea în serie Fourier numai în raport cu cosinus, adică de forma (13) sau numai în raport cu sinus, adică de forma (4). Într-adevăr, să presupunem că funcţia $\varphi(x)$ este pară pe $[-l, l]$, adică $\varphi(-x)= \varphi(x)$

pentru orice $x \in [-l, l]$ şi $\varphi(x) \equiv f(x)$ pe [0, l]. Dacă $\varphi(x)$ satisface condiţiile teoremelor 1 sau 2, atunci există seria Fourier a acestei funcţii şi seria Fourier are forma (3), unde aplicând formulele (1), obţinem:

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx,\ n = 0,1,2\ \ldots\ . \quad (6)$$

Prin urmare, la calcularea coeficienţilor a_n conform formulei (6) din seria (3) figurează numai valorile funcţiei iniţiale f(x) pe [0, l].

În mod analog, dacă vom extinde definirea funcţiei $f(x)$ pe [$-l$, 0] cu o funcţie nouă $\varphi(x)$, care se dezvoltă în serie Fourier pe [$-l$,l], este impară pe [$-l$,l] şi coincide cu $f(x)$ pe [0,l], atunci dezvoltarea funcţiei $f(x)$ în serie Fourier are forma (4), coeficienţii acestei serii fiind calculaţi cu ajutorul formulei

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx,\ \ \mathrm{i} = 1,2,\ldots\ . \quad (7)$$

Aşadar, dacă sunt satisfăcute anumite condiţii, orice funcţie definită pe [0, l] poate fi dezvoltată în serie Fourier atât în raport cu cosinus, adică de forma (3), cât şi în raport cu sinus, adică de forma (4). Punctul x = 0 şi x = l cer un studiu special. În aceste puncte cele două dezvoltări se comportă diferit. Extinzând definirea funcţiei $f(x)$ în alt mod cuvenit pe [$-l$,0] vom obţine dezvoltări în serie Fourier pentru $f(x)$ în care vor figura ambele funcţii cos şi sin.

Exemplul 1. Să se dezvolte în serie Fourier în raport cu cosinus funcţia $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2}$ pe [0, π] şi să se aplice această dezvoltare la calcularea sumelor următoarelor serii numerice:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

Rezolvare. Completăm funcţia $f(x)$ pe [$-\pi$, 0] astfel încât funcţia nouă $\varphi(x)$ sa fie pară pe [$-\pi$, π] şi periodică cu perioada T=2π. Propunem cititorului să demonstreze că $\varphi(x)$ este continuă în punctele $x = \pi k$, $k \in Z$. Prin urmare,

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx\ ,$$

pentru orice $x \in [0, \pi]$.

După formulele (1) se pot calcula uşor coeficienţii acestei serii:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2}\right)dx = -\frac{\pi^2}{3}$$

şi mai departe (integrând prin părţi de două ori)

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2}\right)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2}\right)\cdot\frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi} +$$

$$+\frac{2}{\pi n^2}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\cos nx\ \bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\cos nx dx = \frac{1}{n^2}\ (n = 1,2,\ldots)\ .$$

Prin urmare,

$$\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} = -\frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\cos nx,$$

pentru orice $x \in [0, \pi]$.

Dacă considerăm x = 0, $x = \frac{\pi}{2}$ şi $x = \pi$ obţinem respectiv următoarele formule:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{48},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

3. Dezvoltarea în serie Fourier a funcţiei neperiodice definite pe un segment arbitrar.

Toată teoria construită mai sus a pornit de la ipoteza, că funcţia dată este definită pentru toate valorile reale ale lui x şi are perioada T=2l . Dar de cele mai multe ori avem de a face cu funcţii neperiodice şi definite pe un segment oarecare [a, b]. Pentru ca să aplicăm unei astfel de funcţii teoria expusă mai sus, introducem în locul ei o funcţie auxiliară $\varphi(x)$ periodică cu perioada $T = 2l = b-a$, care se dezvoltă în serie Fourier şi care coincide cu $f(x)$ pe [a,b].

În acest caz seria Fourier (7) din 8.3.2. este convergentă către funcția inițială $f(x)$ în fiecare punct de continuitate al ei, ce aparține segmentului $[a, b]$. Întrucât valorile integralelor din formulele (8) și (9) din 8.2.2., nu se schimbă dacă segmentul $[-l, l]$ se înlocuiește prin orice alt segment $[a, a+2l]$, $a \in R$ de lungimea $2l = (b - a)$, adică $l = \dfrac{b-a}{2}$, obținem:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \varphi(x)\cdot \cos\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{1}{l}\int_{a}^{a+2l} \varphi(x)\cdot \cos\frac{\pi n x}{l}dx =$$

$$= \frac{2}{b-a}\int_{a}^{a+(b-a)} \varphi(x)\cdot \cos\frac{\pi n x}{l}dx =$$

$$= \frac{2}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\sin\frac{2\pi n x}{b-a}dx, \quad n = 1,2,\ldots , \qquad (8)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \varphi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{2}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\sin\frac{2\pi n x}{b-a}dx, \quad n = 1,2,\ldots$$

și în orice punct $x \in [a,b]$ de continuitate a funcției $f(x)$ pe $[a, b]$ avem egalitatea

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi n x}{b-a} + b_n \sin\frac{2\pi n x}{b-a} \ . \qquad (9)$$

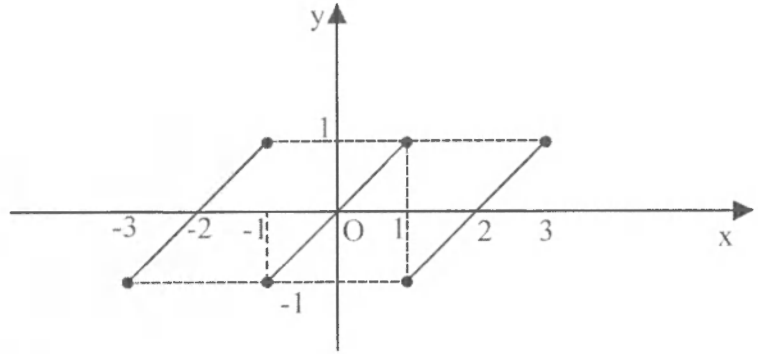
unde coeficienții a_n și b_n se calculează după formulele (8) și (9).

Exemplul 2. Să se dezvolte în serie Fourier funcția $f(x) = x$, definită pe [-1, 1] și considerând – o periodică cu perioada $T=2l =$ $=2$ (adică $l = 1$).

Rezolvare. Graficul acestei funcții are forma de mai jos.

Funcția $f(x)$ este impară și satisface condițiile teoremelor 1 sau 2. De aceea seria Fourier „generată" de funcția $f(x)$ are forma (4):

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \pi n x,$$



unde, conform formulei (5),avem:

$$b_n = 2\int_0^1 x\cdot \sin \pi n x dx = 2\left[(-x)\cdot \frac{\cos \pi n x}{\pi n}\Big|_0^1 + \frac{1}{\pi n}\int_0^1 \cos \pi n x dx\right] =$$

$$= 2\left[-\frac{\cos \pi n}{\pi n} + \frac{1}{\pi^2 n^2}\sin(\pi n x)\Big|_0^1\right] =$$

$$= -\frac{2\cos \pi n}{\pi n} = 2\cdot(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{\pi n}, \quad n = 1,2\ldots \ .$$

Prin urmare, pentru orice $x \in]-1,1[$ avem:

$$x = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot \sin \pi n x \ .$$

În particular, pentru $x = \dfrac{1}{2}$ obținem:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot \sin\frac{\pi n}{2} = \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right).$$

De unde

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}.$$

Observăm că punctele $x = \pm 1$, sunt puncte de discontinuitate de speţa 1:

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = 1 \quad , \quad \lim_{x \to -1+0} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = 1 \quad , \quad \lim_{x \to 1+0} f(x) = -1$$

Prin urmare, sumele seriei Fourier în aceste două puncte sunt egale cu

$$S(\pm 1) = \frac{1+(-1)}{2} = 0.$$

8.3.4. Abaterea medie pătratică a funcţiilor. Aproximaţia funcţiei prin polinoame trigonometrice.

Să considerăm o funcţie $f(x)$ pe $[a, b]$ şi să evaluăm eroarea comisă când această funcţie este înlocuită printr-o altă funcţie $\varphi(x)$. Ca măsură a erorii se poate considera

$$Sup_{[a,b]} |f(x) - \varphi(x)| ,$$

numită *abatere maximă* dintre $f(x)$ şi $\varphi(x)$. Uneori ca măsură a erorii este mai natural să considerăm *abaterea medie pătratică*, definită prin egalitatea

$$\delta^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx .$$

Fie $f(x)$ satisface condiţiile teoremelor 1 sau 2 din 8.3.2. pe segmentul $[-, l]$, atunci ea „generează" seria (7) cu coeficienţii (8) şi (9) din 8.3.2.

Considerăm polinomul trigonometric de ordinul n

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\frac{\pi k x}{l} + b_k \sin\frac{\pi k x}{l} ,$$

care reprezintă suma parţială a seriei (7) din 8.3.2.

Admitem fără demonstraţie următoarea teoremă.

Teorema 1 (*Weierstrass*). Printre toate polinoamele trigonometrice $T_n(x)$ de ordinul n cea mai mică abatere medie pătratică de la funcţia $f(x)$ are acel polinom coeficienţii căruia sunt coeficienţii Euler – Fourier, calculaţi cu ajutorul formulelor (8) şi (9) din 8.3.2. (a se consulta [8], v. 2, § 55.7; [9], v. 2, § 15.168).

În cazul acesta se arată că abaterea medie pătratică minimă este egală cu

$$\delta^2_{\min} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2). \qquad (1)$$

Întrucât $\delta^2_{\min} \geq 0$, pentru orice n avem :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx .$$

Observăm că sumele parţiale ale seriei $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ sunt mărginite superior. Prin urmare, această serie cu termeni pozitivi este convergentă. Trecând la limită în inegalitatea de mai sus când $n \to \infty$ obţinem relaţia:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx ,$$

care se numeşte *inegalitatea lui Bessel.*

Să remarcăm fără demonstraţie că pentru orice funcţie $f(x)$ periodică cu $T=2l$ şi monotonă (sau netedă) pe porţiuni pe $[-l, l]$ abaterea medie pătratică ce se obţine prin înlocuirea funcţiei date cu suma parţială a primilor n termeni ai seriei Fourier (7) tinde la zero când $n \to \infty$.

Prin urmare, din formula (1) de mai sus rezultă egalitatea

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx ,$$

care se numeşte *egalitatea lui Liapunov* (1911–1973 – matematician rus) şi Parsevale (1755–1836 – matematician francez).

8.3.5. Forma complexa a seriei Fourier.

Fie $f(x)$ o funcție periodică cu perioada $T=2l$ și satisface condițiile teoremei Dirichlet din 8.3.2 pe $[-l, l]$.

Atunci în punctele de continuitate

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l}+b_n \sin\frac{\pi n x}{l}, \qquad (1)$$

unde

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx, \quad n=0,1,2,\ldots \quad \text{și}$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx, \quad n=1,2,\ldots .$$

Transformăm termenul general $a_n \cos\frac{\pi n x}{l}+b_n \sin\frac{\pi n x}{l}$ al seriei cu ajutorul formulelor lui Euler:

$$a_n \cos\frac{\pi n x}{l}+b_n \sin\frac{\pi n x}{l}=a_n\frac{e^{\frac{i\pi n x}{l}}+e^{-\frac{i\pi n x}{l}}}{2}+b_n\frac{e^{\frac{i\pi n x}{l}}-e^{-\frac{i\pi n x}{l}}}{2i}=$$

$$=\frac{a_n}{2}\left(e^{\frac{i\pi n x}{l}}+e^{-\frac{i\pi n x}{l}}\right)-\frac{ib_n}{2}\left(e^{\frac{i\pi n x}{l}}-e^{-\frac{i\pi n x}{l}}\right)=\frac{a_n-ib_n}{2}\cdot e^{\frac{i\pi n x}{l}}+$$

$$+\frac{a_n+ib_n}{2}\cdot e^{-\frac{i\pi n x}{l}}.$$

Notăm $C_0=\frac{a_0}{2}, \quad C_n=\frac{a_n-ib_n}{2}, \quad C_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}$.

Atunci

$$a_n \cos\frac{\pi n x}{l}+b_n \sin\frac{\pi n x}{l}=C_n\cdot e^{\frac{i\pi n x}{l}}+C_{-n}\cdot e^{\frac{i\pi(-n)x}{l}}$$

și suma parțială a seriei Fourier (1) are forma

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{p} a_n \cos\frac{\pi n x}{l}+b_n \sin\frac{\pi n x}{l}=C_0+\sum_{n=1}^{p} C_n\cdot e^{\frac{i\pi n x}{l}}+C_{-n}\cdot e^{\frac{i\pi(-n)x}{l}}=$$

$$=\sum_{n=1}^{p} C_n\cdot e^{\frac{i\pi n x}{l}}.$$

Trecând în această egalitate la limită când numărul natural $p\to+\infty$ și notând limita

$$\lim_{p\to+\infty}\sum_{n=-p}^{p} C_n\cdot e^{\frac{i\pi n x}{l}}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\cdot e^{\frac{i\pi n x}{l}},$$

obținem:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\cdot e^{\frac{i\pi n x}{l}} \qquad (2).$$

Reieșind din notațiile de mai sus pentru C_n, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$ obținem:

$$C_0=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,$$

$$C_n=\frac{a_n-ib_n}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx-\frac{i}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\left(\cos\frac{\pi n x}{l}-i\sin\frac{\pi n x}{l}\right)dx=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{\frac{i\pi(-n)x}{l}}dx,$$

$$C_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot e^{\frac{i\pi(+n)x}{l}}dx, \quad n=1,2,\ldots .$$

Remarcăm că coeficienții C_0, C_n, C_{-n}, $n=1,2,\ldots$ pot fi uniți prin formula

$$C_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot e^{\frac{i\pi(-n)x}{l}}dx, \qquad (3)$$

unde $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$. În formulele (3) integrala se poate calcula pe orice segment de lungimea $2l$.

Seria (2) cu coeficienții calculați după formulele (3) se numește *serie Fourier în formă complexă.*

În electrotehnică și radiotehnică se aplică următoarea terminologie: expresiile $e^{\frac{i\pi nx}{l}}$ se numesc *armonice*, numerele $\alpha_n = \frac{\pi n}{l}$, $n = 0,\pm1,\pm2,...$ se numesc *numere de undă a funcției f(x)*. Mulțimea numerelor de undă se numește *spectru*. Dacă depunem numerele α_n pe axa numerică, obținem așa numitul *spectru discret*. Coeficienții C_n din (3) se numesc *amplitudini complexe*.

Să notăm că în unele lucrări de electrotehnică și radiotehnică ansamblul modulelor de amplitudini $|C_i|$ de asemenea se numește *spectru al funcției f(x)*.

8.3.6. Integrala Fourier.

Fie *f(x)* o funcție, care pe fiecare segment [$-l$, l], $l \in R$, $l \neq 0$ este monotonă (sau netedă) pe porțiuni și *f(x)* este absolut integrabilă pe $]-\infty,+\infty[$, adică integrala improprie $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ este convergentă, ceea ce înseamnă că

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx = A < +\infty .$$

În aceste condiții funcția *f(x)* „generează" seria Fourier :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi nx}{l} + b_n \sin\frac{\pi nx}{l}, \qquad (1)$$

unde

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi nt}{l}dt, \quad n = 0,1,2,... , \qquad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi nt}{l}dt, \quad n = 1,2,... , \qquad (3)$$

care este convergentă pe R și în punctele de continuitate suma acestei serii coincide cu *f(x)* , iar în punctele c_i de discontinuitate (de speța 1!) suma ei coincide cu

$$\frac{1}{2}[f(c_i - 0) + f(c_i + 0)].$$

Substituind în seria (1) coeficienții a_n și b_n prin expresiile lor din (2) și (3), obținem următoarea egalitate :

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi nt}{l}dt\cdot\cos\frac{\pi nx}{l} + \right.$$

$$\left. + \int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi nt}{l}dt\cdot\sin\frac{\pi nx}{l}\right] =$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty} f(t)\cos\frac{\pi n}{l}(t - x)dt. \qquad (4)$$

Egalitatea (4) are loc pentru orice $x \in]-l,l[$ în care funcția *f* este continuă.

Să studiem problema formei dezvoltării (4) dacă trecem la limită când $l \to +\infty$.

Observăm mai întâi că

$$\lim_{l\to+\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt = 0 ,$$

deoarece

$$\left|\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt\right| \leq \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}|f(t)|dt < \frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt = \frac{1}{2l}\cdot A \to 0,$$

când $l \to +\infty$.

Astfel, trecând la limită în egalitatea (4), când $l\to+\infty$, obținem :

$$f(x) = \lim_{l\to+\infty}\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n}{l}(t - x)dt , \qquad (5)$$

Fie $\frac{\pi n}{l} = \alpha_n$. Atunci $\Delta\alpha_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{\pi}{l}$ și prin urmare, $\Delta\alpha_n \to 0$, când $l \to +\infty$.

Egalitatea (5) are forma

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\lim_{l\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\alpha_n\cdot\int_{-l}^{l}f(t)\cos\alpha_n(t-x)dt \qquad (6)$$

Suma din partea dreaptă a egalității (6) ne amintește într-o măsură oarecare o sumă integrală în raport cu variabila α alcătuită pentru intervalul $0\le\alpha\le+\infty$. Se poate demonstra, că limita sumei scrisă în partea dreaptă a egalității (6) este egală cu integrala

$$\int_0^{+\infty}d\alpha\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)dt\ .$$

Atunci în fiecare punct de continuitate al funcției *f(x)* va fi satisfăcută egalitatea:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}d\alpha\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)dt\,, \qquad (7)$$

iar în punctele c_i de discontinuitate ale funcției *f(x)* în partea stângă a egalității (7) vom avea :

$$\frac{1}{2}[f(c_i-0)+f(c_i+0)].$$

Partea dreaptă a egalității (7) se numește *integrala Fourier* pentru funcția *f(x)* .

Transformăm egalitatea (7) astfel :

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}d\alpha\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)[\cos\alpha t\cdot\cos\alpha x+\sin\alpha t\cdot\sin\alpha x]dt=$$

$$=\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t dt\right]\cdot\cos\alpha x d\alpha+\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t dt\right]\cdot\sin\alpha x d\alpha=$$

$$=\int_0^{+\infty}[U(\alpha)\cos\alpha x+V(\alpha)\sin\alpha x]d\alpha, \qquad (8)$$

unde

$$U(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t dt, \qquad (9)$$

$$V(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t dt. \qquad (10)$$

Formula (8) cu coeficienții calculați după formulele (9) și (10) se numește *reprezentarea funcției f(x) prin integrala Fourier*. Se mai spune că formula (8) reprezintă dezvoltarea funcției *f(x)* în armonici de frecvența α variind în mod continuu de la 0 la $(+\infty)$. Legea distribuției amplitudinilor și a fazelor inițiale în funcție de frecvența α este exprimată prin funcțiile $U(\alpha)$ și $V(\alpha)$ din formulele (9) și (10).

Să considerăm unele cazuri particulare ale formulei (8).

1^0). Fie *f(x)* o funcție pară pe ***R*** , care satisface condițiile de reprezentare prin integrala Fourier. Luând în considerație că:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\lim_{l\to+\infty}\int_{-l}^{l}f(x)dx,$$

precum și proprietatea

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\begin{cases}2\int_0^a f(x)dx, & \textit{dacă } f(x) \textit{ este pară,}\\ 0, & \textit{dacă } f(x) \textit{ este impară}\end{cases}$$

din egalitățile (9) și (10) , obținem:

$$U(\alpha)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(t)\cos\alpha t dt,\ \text{ și } V(\alpha)=0.$$

Astfel integrala Fourier a funcției pare *f(x)* are forma

$$f(x)=\int_0^{+\infty}U(\alpha)\cdot\cos\alpha x d\alpha\,, \qquad (11)$$

unde

$$U(\alpha)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(t)\cos\alpha t dt\,. \qquad (12)$$

2^0). Similar punctului precedent, obținem că dacă *f(x)* este impară pe **R** și satisface condițiile de reprezentare prin integrala Fourier, atunci

$$U(\alpha)=0 \quad \text{şi} \quad V(\alpha)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\sin\alpha t dt.$$

Prin urmare, integrala Fourier a funcţiei impare are forma

$$f(x)=\int_0^{+\infty} V(\alpha)\sin\alpha x\cdot d\alpha, \qquad (13)$$

unde $$V(\alpha)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\sin\alpha t\cdot dt. \qquad (14)$$

3^0). Dacă funcţia $f(x)$ este definită numai pe semi intervalul $[0,+\infty[$ şi satisface condiţiile de reprezentare prin integrala Fourier, atunci formula (11) prelungeşte funcţia $f(x)$ în mod par pe $]-\infty,+\infty[$, iar formula (13) este o prelungire impară a funcţiei $f(x)$ pe toată axa numerică.

Menţionăm încă o dată că în punctele c_i de discontinuitate ale funcţiei $f(x)$ în partea stângă a egalităţilor (11) şi (13) se va scrie $\frac{1}{2}[f(c_i-0)+f(c_i+0)]$ (în loc de funcţia $f(x)$).

Notă. Întrucât $|\cos\alpha t|\le 1$, $|\sin\alpha t|\le 1$, pentru orice $\alpha\in R$, avem

$$\int_{-l}^{l}|f(t)\cos t\alpha|dt \le \int_{-l}^{l}|f(t)|dt \quad \text{şi}$$

$$\int_{-l}^{l}|f(t)\sin t\alpha|dt \le \int_{-l}^{l}|f(t)|dt .$$

Prin urmare, dacă $f(x)$ este absolut convergentă pe $]-\infty,+\infty[$ atunci integralele

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha t dt , \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha t dt ,$$

sunt convergente şi deci funcţiile $U(\alpha)$ şi $V(\alpha)$, calculate după formulele (9), (10), (12) şi (14) există.

Substituind $U(\alpha)$ din (12) în formula (11), avem:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(t)\cos\alpha t dt\right)\cos\alpha x d\alpha=$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\cos\alpha t dt\right)\cos\alpha x d\alpha$$

Dacă notăm:

$$F(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\cos\alpha t dt, \qquad (15)$$

atunci $$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} F(\alpha)\cos\alpha x d\alpha. \qquad (16)$$

Formula (15) se numeşte *transformata cosinus a lui Fourier* a funcţiei pare $f(x)$ în formă directă, iar formula (16) – *transformata cosinus a lui Fourier* a funcţiei pare $f(x)$ în formă inversă.

Similar, substituind $V(\alpha)$ din (14) în (13) avem:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\sin\alpha t dt\right)\sin\alpha x dx .$$

Funcţia $$\Phi(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\sin\alpha t dt, \qquad (17)$$

se numeşte *transformata sinus a lui Fourier* a funcţiei impare $f(x)$ în formă directă, iar formula

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\Phi(\alpha)\sin\alpha x d\alpha \qquad (18)$$

se numeşte *transformata sinus* a lui Fourier a funcţiei impare $f(x)$ în formă inversă.

8.3.7. Integrala Fourier în formă complexă. Transformata Fourier.

Deoarece funcția $\cos\alpha(t-x)$ din relația (7) din 8.3.6. este pară, schimbând α *prin* $(-\alpha)$, egalitatea (7) din 8.3.6. are forma

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)dt. \qquad (1)$$

După formula lui Euler $\cos\alpha(t-x)=\frac{1}{2}\left[e^{i\alpha(t-x)}+e^{-i\alpha(t-x)}\right]$ și

$$f(x)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\alpha(t-x)}dt\right)d\alpha+\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i(-\alpha)(t-x)}dt\right)d\alpha.$$

Evident că cu ajutorul substituției $z=-\alpha$, ușor se constată că integralele din partea dreaptă sunt egale între ele. Prin urmare,

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\alpha(t-x)}dt\right)d\alpha \qquad (2)$$

Formula (2) se numește *reprezentarea funcției f(x)* în integrala Fourier în formă complexă. Scriem formula (2) astfel :

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\alpha t}\cdot e^{-i\alpha x}dt\right)d\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\alpha t}\cdot dt\right)\cdot e^{-i\alpha x}d\alpha=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\alpha t}\cdot dt\right)\cdot e^{-i\alpha x}d\alpha$$

Notăm:

$$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\alpha t}dt, \qquad (3)$$

atunci

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\alpha)\cdot e^{-i\alpha x}\cdot d\alpha. \qquad (4)$$

Funcția $F(\alpha)$ se numește *transformata (directă) Fourier* a funcției *f(x)*. Așadar transformata (directă) Fourier caracterizează trecerea de la funcția *f(x)* la funcția $F(\alpha)$ cu ajutorul formulei (3).

Funcția *f(x)* din (4) se numește *transformata (inversă) Fourier* a funcției $F(\alpha)$. Astfel transformata (inversă) Fourier caracterizează trecerea de la funcția $F(\alpha)$ la funcția *f(x)* cu ajutorul formulei (4).

Funcția $F(\alpha)$ din (3) se mai numește *caracteristica spectrală* a funcției *f(x)*, iar $|F(\alpha)|$ - *amplitudinea spectrului* funcției *f(x)*.

Menționăm că, dacă *f(x)* este pară atunci formulele (3) și (4) se transformă în formulele (15) și (16), din 8.3.6., iar dacă *f(x)* este impară, atunci formulele (3) și (4) se transformă în formulele (17) și (18) din 8.3.6. Se poate de arătat că dacă *f(x)* și $F(\alpha)$ satisfac condițiile respective pentru existența integralelor din formulele (3) și (4), atunci $f(\pm\infty)=0$ *și* $F(\pm\infty)=0$.

Propunem cititorului să demonstreze următoarele proprietăți ale transformatei (directe) Fourier:

1^0. Dacă $F_1(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)e^{i\alpha t}dt$ și

$$F_2(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(t)e^{i\alpha t}dt,$$

atunci pentru orice constante C_1 și C_2 avem :

$$C_1F_1(\alpha)\pm C_2F_2(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}[C_1f_1(t)\pm C_2f_2(t)]\cdot e^{i\alpha t}dt.$$

2^0. Dacă $F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\alpha t}dt$, atunci

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f'(t)e^{i\alpha t}dt=F^*(\alpha)=-i\alpha\cdot F(\alpha).$$

3^0. Dacă $F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\alpha t}dt$, atunci

$$F^*(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(kt)e^{i\alpha t}dt=\frac{1}{k}F\left(\frac{\alpha}{k}\right).$$

4^0. Dacă $F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\alpha t}dt$, atunci

$$F^*(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t\pm\beta)e^{i\alpha t}dt=e^{\mp i\alpha\beta}\cdot F(\alpha).$$

8.4. Exerciții la capitolul 8

8.1. Serii numerice

1. Să se cerceteze natura seriilor numerice

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$; *b)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$; *c)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n\cdot n!}$; *e)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n+1}$; *f)* $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$;

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{3^n\cdot n!}$; *h)* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2n\cdot arctg\frac{1}{n}\right)^n$;

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{10n}}$; *j)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}}$; *k)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2}{7^n+4}$;

l) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$; *m)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{4^n\cdot(n!)^2}$; *n)* $\sum_{n=1}^{\infty}arctg\, n$;

o) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2+4)^2}$; *p)* $\sum_{n=1}^{\infty}\pi^n\cdot\arcsin\frac{1}{3^n}$; *r)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^3+1}$;

s) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$; *t)* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$; *u)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^n}{(2n-1)!}$.

2. Să se studieze convergența absolută și semiconvergența seriilor

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; *b)* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n+5}{3^n}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$; *d)* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot tg\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\alpha)}{n^2}$, $\alpha\in R$; *f)* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\sin\frac{2}{n^3}$;

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n)}{3^n}$; *h)* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2^n\cdot n}$;

i) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{\ln n}$; *j)* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\sin\frac{1}{n}$.

8.2. Serii funcționale și de puteri.

3. Să se determine domeniul de convergență al seriilor funcționale:

a) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n$; *b)* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^n$, $x\neq\frac{1}{2}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{e^{nx}}$; *d)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+x)^n}{n^n}$; *e)* $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2x}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{x}{2^n}$; *g)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^{2n}}$; *h)* $\sum_{n=1}^{\infty}(3-x^2)^n$;

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$, $x\neq-1$; *j)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sin x+\sqrt{3}\cos x)^n}{3^n}$.

4. Să se afle domeniul de convergență al seriilor de puteri:

a) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n(n-1)}$; *b)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}$; *c)* $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\cdot 3^n\cdot x^n$;

$d)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n^2}{(n!)^2}\left(x+\frac{1}{3}\right)^n;$ $\qquad e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}\cdot x^{n+1};$

$f)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)(x+3)^n}{3^{n+1}};$ $\qquad g)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3(n+1)}}{(2n+1)\cdot 8^{n+1}};$

$h)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{3n-2}}{2^{3n}(n+1)\ln(n+1)};$ $\qquad i)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n;$

$j)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^n\cdot(x+1)^n}{2^n\cdot n^n};$ $\qquad k)\ \sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}\cdot x^{2(n-1)};$

$l)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-5)^n}{(n+1)^2\cdot 2^{n+1}};$ $\qquad m)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{(2n)!};$

$n)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{4n-3};$ $\qquad o)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n^2+1};$ $\qquad p)\ \sum_{n=1}^{\infty}x^n tg\frac{1}{n};$

$r)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+1)!};$ $\qquad s)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{6^n\cdot\sqrt[3]{n}};$ $\qquad t)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(x-3)}{\sqrt[3]{n}};$

$u)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\cdot\frac{x^n}{5^n};$ $\qquad v)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x+10)^n}{n^n};$ $\qquad w)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^{2n}}{2n};$

5. Să se calculeze următoarele integrale cu exactitate de 0,001:

$a)\ \int_0^1 arctg\left(\frac{x^2}{2}\right)dx;$ $\qquad b)\ \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx;$ $\qquad c)\ \int_0^{0,5}\frac{\sin x^2}{x}dx;$

$d)\ \int_0^{0,1}\frac{e^x-1}{x}dx;$ $\qquad e)\ \int_{0,3}^{0,5}\frac{1+\cos x}{x^2}dx;$ $\qquad f)\ \int_0^1\sin x^2 dx;$

$g)\ \int_0^1\cos\frac{x^2}{4}dx;$ $\qquad h)\ \int_0^{0,5}\sqrt{1+x^3}\,dx;$ $\qquad i)\ \int_0^{0,5}\frac{dx}{1+x^5};$

$j)\ \int_0^{0,8}\frac{1-\cos x}{x}dx.$ $\qquad k)\ \int_0^1\frac{\sin x^2}{x}dx;$ $\qquad l)\ \int_0^{1/3}e^{-x^2}dx.$

8.3. Serii Fourier.

6. Să se dezvolte în serie Fourier următoarele funcții periodice cu perioada $T = 2\pi$ pe $[-\pi, \pi]$:

$a)\ f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ x-1, & 0\le x\le\pi;\end{cases}$ $\qquad b)\ f(x)=\begin{cases}-x+\frac{1}{2}, & -\pi\le x<0,\\ 0, & 0\le x\le\pi;\end{cases}$

$c)\ f(x)=|x|;$ $\qquad d)\ f(x)=\frac{\pi+x}{2};$

$e)\ f(x)=\begin{cases}x, & -\pi\le x\le 0,\\ 2x, & 0\le x\le\pi;\end{cases}$ $\qquad f)\ f(x)=\frac{\pi^2}{12}-\frac{x^2}{4}.$

7. Să se dezvolte în serie Fourier următoarele funcții periodice cu perioada $T=2l$ pe $[-l, l]$:

$a)\ f(x)=|x|,\ l=1;$ $\qquad b)\ f(x)=e^x,\ l=2;$

$c)\ f(x)=10-x,\ l=5;$ $\qquad d)\ f(x)=\begin{cases}0, & -2\le x<0,\\ x, & 0\le x<1,\\ 2-x, & 1\le x\le 2,\ l=2;\end{cases}$

$e)\ f(x)=3-x,\ l=2;$ $\qquad f)\ f(x)=2x-3,\ l=3;$

8. Să se dezvolte funcția

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0<x\le 1\\ 2-x, & 1<x\le 2\end{cases}$$

pe $[0,2]$: a) în serie de sinusuri;
b) în serie de cosinusuri.

9. Folosind dezvoltarea în serie Fourier a funcției $f(x)$ pe segmentul $[-l, l]$ să se calculeze suma seriei numerice respective:

$a)\ f(x)=x^2$ pe $[-\pi,\pi]$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n^2}$ și $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2};$

$b)\ f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\le x\le 0\\ \frac{x^2}{\pi}, & 0\le x\le\pi,\end{cases}$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3-(-1)^n}{n^2};$

$c)\ f(x)=\begin{cases}0, & -3\le x\le 0,\\ x, & 0\le x\le 3,\end{cases}$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2};$

d) $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<1,\\ -1, & 1<x\le 2,\end{cases}$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$;

e) $f(x)=\begin{cases}-2x, & -\pi\le x\le 0,\\ 3x, & 0\prec x\le \pi,\end{cases}$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}$.

8.5. Indicații și răspunsuri la capitolul 8.

8.1. Serii numerice.

1. *a) conv.; b) conv.; c) div.; d) conv.; e) div.;*
f) div. $\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\right)$; *g) conv.; h) div.;*
i) div. $\left(\lim_{n\to\infty}a_n=1\neq 0\right)$ *j) div.* $\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2n}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/3}}\right)$
k) conv.; l) div. $\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\sim\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
m) div.; n) div. $\left(\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{\pi}{2}\neq 0\right)$; *o) conv.; p) div.; r) conv.;*
s) conv.; t) conv.; u) div. .

2. a) semiconv.; b) conv. abs.; c) conv. abs.; d)semiconv.; e) conv. abs.; f) conv. abs.; g) conv. abs.; h) conv. abs.; i) semiconv.; j) semiconv.;

8.2. Serii funcționale și de puteri.

3. *a)* $]-\infty,+\infty[$; *b)* $]-\infty,0[\cup\left]\frac{2}{3},+\infty\right[$; *c)* $[0,+\infty[$;
d) div. pe R $\left(\lim_{n\to\infty}a_n=e^x\neq 0\right)$ *e)* $]0,+\infty[$; *f)* $]-\infty,+\infty[$;
g) $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$; *h)* $]-2,-\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2},2[$; *i)* $]0,+\infty]$; *j)* $]-\infty,+\infty[$.

4. *a)* $[-1,1]$; *b)* $]-2,4[$; *c)* $\left]-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right[$; *d)* $]-\infty,+\infty[$; *e)* $[-1,1[$;
f) $]-6,0[$; *g)* $[-2,2[$; *h)* $[-3,1[$; *i)* $]-4,4[$; *j)* $]-2,0[$;
k) $\left]-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$; *l)* $[3,7[$; *m)* $]-\infty,+\infty[$; *n)* $[-1,1[$; *o)* $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$;
p) $[-1,1[$; *r)* $]-\infty,+\infty[$; *s)* $\left[-\frac{6}{5},\frac{6}{5}\right]$; *t)* $\left[\frac{8}{3},\frac{10}{3}\right]$; *u)* $]-5e,5e[$;
v) $]-e-10,e-10[$; *w)* $[1,3]$.

5. a) 0,162; b) 0,855; c) 0,493; d) 0,103; e) 2,568; f) 0,310; g) 0,994; h) 0,508; i) 0,484; j) 0,156; k) 0,946; l) 0,321.

8.3. Serii Fourier.

6. *a)* $\frac{\pi-2}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)}+\frac{\pi-2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2kx}{2k}$;
b) $\frac{\pi+1}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}-\frac{\pi+1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2kx}{2k}$;
c) $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$; *d)* $\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$;
e) $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)}{(2k-1)^2}+3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}\cdot(-1)^{k+1}$; *f)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}(-1)^{n+1}$.

7. *a)* $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$;
b) $sh2\left[\frac{1}{2}+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\cos\frac{\pi n x}{2}-\pi n\sin\frac{\pi n x}{2}}{4+n^2\pi^2}\right]$;

c) $\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi n x}{5}\right)}{n}$;

d) $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}+\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(2n+1)\cdot\frac{\pi x}{2}}{(2n+1)^2}$;

e) $2+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cdot\sin\frac{\pi n x}{2}$; f) $-3+\frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{\pi n x}{3}$;

8. a) $\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\left[(2n+1)\cdot\frac{\pi x}{2}\right]}{(2n+1)^2}$;

b) $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$.

9. a) $\frac{\pi^2}{12}$ și $\frac{\pi^2}{6}$; b) $\frac{7\pi^2}{12}$; c) $\frac{\pi^2}{8}$; d) $\frac{\pi}{4}$; e) $\frac{7\pi^2}{20}$.

ANEXĂ.

Lucrarea de control nr.1.

„Funcții de mai multe variabile reale”

Problema 1.

1. Să se arate că $x^2 z''_{xx}=y^2 z''_{yy}$, dacă $z=e^{xy}$.
2. Să se demonstreze că $4z''_{yy}=z''_{xx}$, dacă $z=e^{-\cos(2x+y)}$.
3. Fie $z=\ln\left(x^2+y^2+2y+1\right)$. Să se arate că $z''_{xx}+z''_{yy}=0$.
4. Să se arate că funcția $z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ satisface ecuația $x^2 z''_{xx}+2xyz''_{xy}+y^2 z''_{yy}=0$.
5. Să se demonstreze că $4z''_{yy}=z''_{xx}$, dacă $z=\sin^2(y-2x)$.
6. Fie $z=\frac{y}{x}$. Să se arate că $x^3 z''_{xx}+2x^2 yz''_{xy}+y^2 z''_{yy}=0$.
7. Fie $z=\sqrt{\frac{y}{x}}$. Să se demonstreze că $x^2 z''_{xx}=y^2 z''_{yy}$.
8. Să se arate că funcția $z=\varphi(xy)+x\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ satisface ecuația $x^2 z''_{xx}=y^2 z''_{yy}$.
9. Fie $z=\sqrt{\frac{x}{y}}$. Să se demonstreze că $x^2 z''_{xx}-\left(y^2 z'_y\right)'_y=0$.
10. Fie $z=\frac{\sin(x-y)}{x}$. Să se arate că $\left(x^2\cdot z'_x\right)'_x=x^2\cdot z''_{yy}$.
11. Să se demonstreze că $\left(x^2\cdot z'_x\right)'_x=y^2\cdot z''_{yy}$, dacă $z=e^{\frac{y}{x}}$.
12. Să se arate că $z''_{xx}=4z''_{yy}$, dacă $z=\frac{y}{y^2-4x^2}$.

13. Să se demonstreze că $xz''_{xy} + yz''_{yy} + z'_y = 1$, dacă $z = x + y + \left(\frac{x}{y}\right)^2$.

14. Fie $z = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + x - y\right)$. Să se arate că $x^2 z''_{xx} + 2xyz''_{xy} + y^2 z''_{yy} = x^2 + y^2$.

15. Să se arate că $z = \left(x^3 + \sqrt[5]{x}\right)\ln\left(y^2 + 1\right)$ verifică ecuația $z \cdot z''_{xy} = z'_x \cdot z'_y$.

16. Fie $z = \sin^2(2x+1) + 2y\sin 2(2x+1)$. Să se demonstre -ze că $z'_x = z'_y + y \cdot z''_{xy}$.

17. Să se verifice că $z''_{yy} = a^2 z''_{xx}$. Dacă $z = \frac{1}{\sqrt{x - ay}} + \sqrt[3]{(x + ay)^2}$.

18. Fie $z = \ln(ax + dy)$. Să se arate că $xz''_{xx} + yz''_{xy} + z'_x = 0$.

19. Fie $z = 2\cos^2\left(x - \frac{y}{2}\right)$. Să se demonstreze că $2z''_{yy} + z''_{xy} = 0$.

20. Să se arate că funcția $z = e^{\frac{x}{y}}$ verifică ecuația $yz''_{xy} = z'_y - z'_x$.

21. Fie $z = \frac{xy}{x - y}$. Să se arate că $z''_{xx} + 2z''_{xy} + z''_{yy} = \frac{2}{x - y}$.

22. Să se demonstreze că funcția $u = \frac{x}{y} f(x) + \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ verifică ecuația $xyu''_{xy} + y^2 u''_{yy} + xu'_x + 2yu'_y = 0$.

23. Fie $z = arctg\frac{y}{x}$. Să se demonstreze că $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$.

24. Să se arare că $xz''_{xy} + yz''_{yy} = 0$ dacă $z = x \cdot f\left(\frac{y}{x}\right)$.

25. Să se arate că $x^2 z'_x + \frac{1}{y} z'_y = \frac{1}{z}$ dacă funcția $z = f(x, y)$ este definită implicit de ecuația $z^2 + \frac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$.

26. Să se arate că funcția $z = y\ln\left(x^2 - y^2\right)$ satisface ecuația $xz''_{xx} + yz''_{xy} = 0$.

27. Fie $z = y \cdot \sin\left(\frac{y}{x}\right)$. Să se arate că $x^2 z''_{xx} = y^2 z''_{yy}$.

28. Să se arate că $x^3 z''_{xx} + y^3 z''_{yy} + x^2 yz''_{xy} = x^2$, dacă $z = \frac{x^2}{2y} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$.

29. Fie $z = e^{x^2 + y^2}$. Să se arate că $2xyz''_{xx} - \left(1 + 2x^2\right)z''_{xy} = 0$.

30. Să se demonstreze că funcția $z = arctg\frac{y}{1 + x^2}$ satisface ecuația $\frac{1}{2xy} z'_x + \frac{1}{1 + x^2} z'_y = 0$.

Problema 2. Să se calculeze derivata funcției $u = f(x, y, z)$ în punctul $A(x_1, y_1, z_1)$ în direcția vectorului $\vec{a}$, dacă:

1. $u = x^2 y^3 z^4$, $A(1,1,-1)$, $\vec{a} = \{2,2,1\}$.
2. $u = \mathrm{tg}\,x - \sin^3 y + \mathrm{ctg}\,z$, $A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right)$ $\vec{a} = \overrightarrow{grad\,u}(A)$.
3. $u = \ln\left(e^x + e^y + e^z\right)$, $A(1,1,1)$, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ cu $B(2,0,-1)$.
4. $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $A(1,-1,0)$, $\vec{a} = \{2,3,4\}$.

5. $u = \ln\frac{xy}{z}$, $A(2,1,1)$, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ cu $B(3,-1,4)$.

6. $u = \operatorname{arctg}(xy) + \arcsin(xz)$, $A(1,1,0)$, $\vec{a} = \overrightarrow{\operatorname{grad} u}(A)$.

7. $u = x + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{2}{z}$, $A(1,-1,-1)$, $\vec{a} = \{3,4,5\}$.

8. $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$, $A(1,1,-1)$, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ cu $B(2,-2,2)$.

9. $u = \frac{1}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{16}$, $A(1,1,-1)$, $\vec{a} = \{1,-1,2\}$.

10. $u = 2x^2 + xy + xz + yz$, $A(1,0,3)$, $\vec{a} = \overrightarrow{\operatorname{grad} u}(A)$.

11. $u = x^3 + y^3 + z^2 + 12xy + 2z$, $A(3,1,-2)$, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ cu $B(3,4,2)$.

12. $u = (x + y^2)\cdot e^{x(y^2+z^2-1)}$, $A(1,1,0)$, $\vec{a} = \{1,3,5\}$.

13. $u = x^2 + y^2 + z^2 + xz + 2y$, $A(3,4,5)$, $\vec{a} = \overrightarrow{\operatorname{grad} u}(A)$.

14. $u = \frac{1}{x} + \frac{y^2}{z^2} - 6y + 5xz$, $A(1,-1,-2)$, $\vec{a} = \{1,2,3\}$.

15. $u = x + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + 2xyz$, $A(1,3,-1)$, $\vec{a} = \{-1,1,2\}$.

16. $u = x^3 + z^3 + 4x^2y + 3xz^2$, $A(0,2,-1)$, $\vec{a} = \overrightarrow{\operatorname{grad} u}(A)$.

17. $u = \sin(x+y) + \cos(x+z)$, $A\left(0,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$, $\vec{a} = \{1,\sqrt{2},\sqrt{6}\}$.

18. $u = \ln(3x^2 + 2y^3 + 7z)$, $A(-1,2,1)$, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ cu $B(2,3,-1)$.

19. $u = z^2 + \arcsin\frac{x}{\sqrt{y}}$, $A(1,4,1)$, $\vec{a} = \overrightarrow{\operatorname{grad} u}(A)$.

20. $u = \operatorname{arctg}\frac{x^3 z}{y}$, $A(-2,4,1)$, $\vec{a} = \{4,3,1\}$.

21. $u = \frac{x-y+z}{x+y-z}$, $A(4,3,1)$, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ cu $B(5,2,1)$.

22. $u = \frac{4}{x^2+y^2+z^2}$, $A(-2,2,2)$, $\vec{a} = \{1,-1,-1\}$.

23. $u = \ln(3x - 2y + z^2)$, $A(2,1,1)$, $\vec{a} = \{2,\sqrt{2},\sqrt{3}\}$.

24. $u = x^3y + xy^3 + yz^3$, $A(1,3,1)$, $\vec{a} = \overrightarrow{\operatorname{grad} u}(A)$.

25. $u = 5x^2y + 3xy^2 + yz^2$, $A(1,1,-1)$, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ cu $B(-1,1,2)$

26. $u = 2x^2 + xy + yz + z + 1$, $A(-1,2,1)$, $\vec{a} = \overrightarrow{\operatorname{grad} u}(A)$.

27. $u = \frac{xy}{z^3}$, $A(3,4,2)$, $\vec{a} = \{1,2,3\}$.

28. $u = \operatorname{arctg}(xyz^2)$, $A(2,3,1)$, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ cu $B(1,2,-1)$.

29. $u = \frac{x+y}{x^2+y^2+x^2}$, $A(1,1,\sqrt{2})$, $\vec{a} = \{1,2,-1\}$.

30. $u = \ln(2x + 3y + 4xz)$, $A(1,-1,1)$, $\vec{a} = \overrightarrow{\operatorname{grad} u}(A)$.

Problema 3. Fie $z = f(x,y)$ şi $A(x_0, y_0, z_0)$.

a) Să se cerceteze la maxim şi minim funcţia $z = f(x,y)$;

b) Să se alcătuiască ecuaţiile planului tangent şi a normalei la suprafaţa $z = f(x,y)$ în punctul A.

1. $z = x^3 + y^3 - 15xy$, $A(1,-1,15)$.
2. $z = x^3 + xy + y^2 - x$, $A(0,1,1)$.
3. $z = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $A(1,-1,-1)$.
4. $z = (y-x)^2 + (y+2)^3$, $A(2,2,64)$.
5. $z = x^3 + y^3 - 9xy - 27$, $A(1,-1,-18)$.
6. $z = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 8x + 8y$, $A(0,1,9)$.
7. $z = 2x^2 + 6xy + 5y^2 - x + 4y - 5$, $A(1,0,-4)$.
8. $z = x^3 + y^3 - 3axy$, $A(1,0,1)$.

9. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$, $A(1,1,2)$.

10. $z = x^2 + xy + y^2 - mx - ny$, $A(1,0,1-m)$.

11. $z = x^3 + xy^2 + 3axy$, $A(1,1,2-3a)$.

12. $z = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 4\ln y$, $A(1,1,3)$.

13. $z = x^2 - 2xy + 2y^3 + 2y^4$, $A(1,0,1)$.

14. $z = 2 + (x-y)^2 + (y-1)^4$, $A(1,0,2)$.

15. $z = y^3 + x^2y - 3xy$, $A(1,-1,1)$.

16. $z = y^2 - 2xy - 2x^3 + 2x^4$, $A(0,1,1)$.

17. $z = 3 + (x-y)^4 + (x-2)^6$, $(1,1,4)$.

18. $z = x \cdot e^{x+y^2}$, $A(1,0,e)$.

19. $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$, $A(1,-1,9)$.

20. $z = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$, $A(1,0,1)$.

21. $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$, $A(1,1,-5)$.

22. $z = x^3 + y^3 - 3xy + 1$, $A(1,-1,4)$.

23. $z = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}$, $A(1,-1,29)$.

24. $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y$, $A(1,1,2)$.

25. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$, $A(1,-1,0)$.

26. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$, $A(-1,1,5)$.

27. $z = 2 - \sqrt[3]{x^2+y^2}$, $A(1,1,2-\sqrt[3]{2})$.

28. $z = -\dfrac{2}{3}x^3 + 2xy - y^2 - 1$, $A(3,0,-19)$.

29. $z = e^{\frac{x}{2}}(x+y^2)$, $A(0,1,1)$.

30. $z = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430$, $A(1,0,432)$.

Problema 4. Să se calculeze valoarea cea mai mare si valoarea cea mai mică a funcției $z = f(x,y)$ pe domeniul închis și mărginit.

1. $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ în triunghiul mărginit de dreptele $x = 0,\ y = 0, 2x + 3y - 12 = 0$.

2. $z = x^2 - 3xy + y^2 - 2x$ în pătratul $0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 4$.

3. $z = x^3 + y^3 - 3xy$ în dreptunghiul $0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3$.

4. $z = \dfrac{1}{2}x^2 - xy$ în domeniul mărginit de parabola $y = \dfrac{1}{3}x^2$ și dreapta $y = 3$.

5. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ în triunghiul mărginit de dreptele $y = x + 1,\ y = 0,\ x = 3$.

6. $z = 2x + y - xy$ în pătratul $1 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2$.

7. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ în dreptunghiul mărginit de dreptele $x = 0,\ y = 0,\ x = 1,\ y = 2$.

8. $z = x^2 - 2y^2 + 4$ în domeniul mărginit de semicircumferință $y = \sqrt{4 - x^2}$ și axa OX.

9. $z = 5x^2 + 3xy + y^2 + 4$ în triunghiul mărginit de dreptele $x + y = 1,\ x = -1,\ y = -1$.

10. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$ în dreptunghiul mărginit de dreptele $y = 1,\ y = -1,\ x = 0,\ x = 3$.

11. $z = 5x^2 - 3xy + y^2$ în pătratul mărginit de dreptele $x = 1,\ x = 3,\ y = 2,\ y = 4$.

12. $z = x^2 - xy - 2$ în domeniul mărginit de parabola $y = 4x^2 - 4$ și axa OX.

13. $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ în triunghiul mărginit de dreptele $x = 1,\ y = 1,\ x + y = 1$.

14. $z = 2x + y - xy + 1$ în pătratul $0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 4$.

15. $z=5x^2-3xy+y+x+4$ în dreptunghiul $0\le x\le 1, 1\le y\le 3$.

16. $z=x^2+y^2+x+1$ în domeniul mărginit de circumferinţa $x^2+y^2=4x$.

√17. $z=x^2+2xy-y^2+5x+3$ în triunghiul mărginit de dreptele $x+y+1=, y=0, x=-3$.

18. $z=5x^2-2xy+3y^2+2x$ în pătratul $1\le x\le 4, 0\le y\le 3$.

19. $z=x^2+xy-3y^2+y+1$ în dreptunghiul $0\le x\le 2, 0\le y\le 3$.

20. $z=x^2+3xy+x+2y-1$ în domeniul mărginit de curbele $y=2x^2, y=8$.

21. $z=3x+2y-xy$ în triunghiul mărginit de dreptele $y=x, x=3, y=0$.

22. $z=xy-2x-y-2$ în dreptunghiul $0\le x\le 3, 0\le y\le 4$.

23. $z=2x+3y-xy+x^2$ în pătratul $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$.

24. $z=4-2x-y^2$ în cercul $x^2+y^2\le 4x$.

25. $z=x^2+2xy-y^2-2x+2y$ în triunghiul mărginit de dreptele $y=x+2, x=2, y=0$.

26. $z=6xy-9x^2+x+y+2$ în dreptunghiul $1\le x\le 2, 2\le y\le 5$.

27. $z=x^2+y^2-xy-x-y+2$ în pătratul $1\le x\le 3, 2\le y\le 4$.

28. $z=x^2+2xy-10y$ în domeniul mărginit de circumferinţa $x^2+y^2=2y$.

29. $z=3x-xy+y^2-2$ în triunghiul mărginit de dreptele $y=x, y=4, x=0$.

30. $z=x^2+6y^2+5xy+4$ în domeniul mărginit de parabola $y=2-x^2$ şi axa OX.

Lucrarea de control nr. 2

„Calculul integral al funcţiei de mai multe variabile reale. Câmpuri scalare şi vectoriale”.

Problema 1.

1. Să se calculeze $\iint\limits_D x^2 y\,dxdy$, unde D este mărginit de curbele $y=2x^2, y=0, x=1$.
2. Să se calculeze aria figurii mărginită de curbele $x^2+y^2=72$ şi $6y=-x^2$.
3. Să se calculeze aria figurii mărginită de curba polară $\rho=2\sin^2 2\theta$.
4. Să se calculeze $\iint\limits_D e^y\,dxdy$, unde D este mărginit de curbele $y=\ln x,\ y=0,\ x=2$.
5. Să se calculeze aria figurii mărginită de curbele $y=\sqrt{2-x^2}$ şi $y=x^2$.
6. Să se calculeze aria figurii mărginită de curba polară $\rho=2\sqrt{\cos 2\theta}$.
7. Să se calculeze $\iint\limits_D y\sin xy\,dxdy$, unde D este mărginit de curbele $y=\dfrac{\pi}{2}$, $y=\pi$, $x=1, x=2$.
8. Să se determine masa figurii (plăcii) materiale mărginită de coroana circulară $x^2+y^2\ge 4$, $x^2+y^2\le 25$, situată în cadranul 2, dacă densitatea de suprafaţă $\gamma(x,y)=\dfrac{2x-3y}{x^2+y^2}$.
9. Să se calculeze $\iint\limits_D y^2\cos\dfrac{xy}{2}\,dxdy$, unde D este mărginit de liniile $x=0, y=\sqrt{2\pi}$, $y=2x$.

10. Să se calculeze aria figurii mărginită de curbele $x = y^2+1$, $x + y = 3$.

11. Să se calculeze aria curbei mărginită de curba polară $\rho = 3\sin3\theta$.

12. Să se afle masa figurii materiale mărginită de curbele $x= 2$, $y^2 = 2x$, dacă densitatea de suprafață $\gamma(x,y)=\dfrac{7x^2}{8+2y}$.

13. Să se calculeze $\iint\limits_D 4ye^{2xy}dxdy$, unde D este mărginit de dreptele $y = \ln3$, $y = \ln4$, $x = \dfrac{1}{2}$, $x = 1$.

14. Să se afle aria figurii mărginită de curbele $y^2 = 4 - x$, $y = x+2$, $y = 2$, $y = -2$.

15. Să se afle aria figurii mărginită de circumferințele $y^2 - 2x+x^2 = 0$, $y^2 - 4y+x^2 = 0$.

16. Să se calculeze aria figurii mărginită de curba polară $\rho = 4\cos3\theta$.

17. Să se determine masa figurii materiale mărginită de elipsa $x^2+\dfrac{y^2}{4} = 1$, dacă densitatea de suprafață $\gamma(x,y)=x^2y$.

18. Să se calculeze $\iint\limits_D x(2x+y)dxdy$, unde D este mărginit de curbele $y = 1 - x^2$, $y = 0$.

19. Să se calculeze aria figurii mărginită de curbele $y^2 - 4y+x^2 =0$, $y^2 - 6y+x^2 = 0$, $y = \sqrt{3}\,x$, $x = 0$.

20. Să se afle aria figurii mărginită de curbele $y = 3\sqrt{x}$, $y =\dfrac{3}{x}$, $x = 9$.

21. Să se afle masa figurii materiale mărginită de curbele $x = 2$, $y^2 = 8x$, dacă densitatea de suprafață $\gamma(x,y)=7x+3y^2$.

22. Să se afle masa figurii materiale mărginită de elipsa $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$, dacă densitatea de suprafață $\gamma(x,y)=11xy^3$.

23. Să se calculeze $\iint\limits_D(24xy-48x^3y^3)dxdy$, dacă D este mărginit de curbele $x = 1$, $y = x^2$, $y = -\sqrt{x}$.

24. Să se calculeze $\iint\limits_D 4y^2\sin(2xy)dxdy$, dacă D este mărginit de curbele $x = 0$, $y = \sqrt{2\pi}$, $y = 2x$.

25. Să se calculeze aria figurii mărginită de curbele $x^2 - 2x+y^2 =0$, $x^2 - 8x+y^2 = 0$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$, $y = \sqrt{3}\,x$.

26. Să se calculuze aria figurii mărginită de curba polară $\rho =3\cos5\theta$.

27. Să se determine masa figurii materiale mărginită de curbele $y^2 = 2x$, $x = \dfrac{1}{2}$, dacă densitatea de suprafață $\gamma(x,y)=4x+9y^2$.

28. Să se calculeze $\iint\limits_D y^2e^{\frac{-xy}{4}}dxdy$, dacă D este mărginit de dreptele $y = x$, $y = 2$, $x = 0$.

29. Să se calculeze aria figurii mărginită de curbele $x = y^2$, $y^2 = 4 - x$.

30. Să se calculeze aria figurii mărginită de curba polară $\rho = 2\cos^2\theta$.

Problema 2.

1. Să se calculeze $\iiint\limits_V(2x^2+3y+z)dxdydz$, dacă V este paralelipipedul $2\le x\le 3$, $-1\le y\le 2$, $0\le z\le 4$.

2. Să se calculeze volumul corpului mărginit de suprafețele $y = 16\sqrt{2x}$, $y = \sqrt{2x}$, $z = 0$, $x+z = 2$.

3. Să se calculeze masa corpului omogen (densitatea de volum $\gamma(x,y,z)=const=1$) mărginit de suprafetele $x^2+y^2=3$, $2y-z=0$, $z=0$.

4. Să se calculeze volumul corpului mărginit de suprafețele $x^2+y^2=2y$, $z=\frac{5}{4}-x^2$, $z=0$.

5. Să se calculeze $\iiint_V \frac{zdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, dacă V este corpul mărginit de suprafețele sferice $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2=9$ și semiplanele $y\geq 0$, $z\geq 0$, $y\leq\frac{1}{\sqrt{3}}x$.

6. Să se afle volumul corpului mărginit de suprafețele $z^2=4-x$, $x^2+y^2=4x$.

7. Să se afle masa corpului omogen (densitatea de volum $\gamma(x,y,z)=const.=1$) mărginit de suprafețele $x^2+y^2=4$, $z=4-x-y$, $z=0$.

8. Să se calculeze $\iiint_V (3x^2+y^2)dxdydz$, dacă V este mărginit de suprafețele $z=10y$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

9. Să se calculeze volumul corpului mărginit de suprafețele $x^2+y^2=4y$, $z=4-x^2$, $z=0$.

10. Să se calculeze masa corpului omogen (densitatea de volum $\gamma(x,y,z)=const.=1$) mărginit de suprafețele $x^2+y-1=0$, $y-2z=0$, $z=0$.

11. Să se afle volumul corpului mărginit de suprafețele $y=2x$, $z=0$, $y=0$, $z=y^2$, $x=3$.

12. Să se afle masa corpului mărginit de suprafețele $x=\sqrt{2(y^2+z^2)}$, $x=4$, dacă densitatea de volum $\gamma(x,y,z)=x$.

13. Să se calculeze $\iiint_V 8y^2ze^{2xyz}dxdydz$, dacă V este mărginit de suprafețele $x=-1$, $x=0$, $y=2$, $y=0$, $z=1$, $z=0$.

14. Să se afle volumul corpului mărginit de suprafețele $z=0$, $z=2-x$, $y=2\sqrt{x}$, $y=\frac{1}{4}x^2$.

15. Să se afle masa corpului omogen (densitatea de volum $\gamma(x,y,z)=const.=1$) mărginit de suprafețele $x^2+y-2=0$, $3y-2z=0$, $z=0$.

16. Să se calculeze volumul corpului mărginit de suprafețele $x^2+y^2=9x$, $x^2+y^2=12x$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=0$, $y=0$.

17. Să se afle masa corpului mărginit de suprafețele $x^2+y^2=2y$, $x^2+y^2=4y$, $z=0$, $z=6$, $x=0$, dacă densitatea de volum $\gamma(x,y,z)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

18. Să se calculeze $\iiint_V y^2z\cos(xyz)dxdydz$, dacă V este mărginit de suprafețele $x=1$, $x=0$, $y=0$, $y=2$, $z=0$, $z=36$.

19. Să se afle volumul corpului mărginit de suprafețele $z=0$, $x=0$, $y=0$, $z=y^2+1$, $x+y=1$.

20. Să se afle masa corpului omogen (densitatea de volum $\gamma(x,y,z)=const.=1$) mărginit de suprafețele $z^2=4-y$, $x^2+y^2=4y$.

21. Să se calculeze volumul corpului mărginit de suprafețele $x+z=6$, $y=\sqrt{3x}$, $z=4y$, $z=0$.

22. Să se calculeze $\iiint_V x^2z\sin(xyz)dxdydz$, dacă V este mărginit de suprafețele $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=2$, $y=\pi$, $z=1$.

23. Să se calculeze volumul corpului mărginit de suprafețele $z=0$, $z=16-x^2$, $x^2+y^2=16$.

24. Să se afle masa corpului mărginit de suprafețele $x^2+y^2=2x$, $y=0$, $z=0$, $z=3$, dacă densitatea de volum $\gamma(x,y,z)=z\sqrt{x^2+y^2}$.

25. Să se calculeze $\iiint_V x^2\sin(\pi xy)dxdydz$, dacă V este mărginit de suprafețele $x=1$, $y=2x$, $y=0$, $z=0$, $z=4\pi$.

26. Să se afle volumul corpului mărginit de suprafețele $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x+y = 2$, $z = 2x^2+3y^2$.

27. Să se calculeze volumul corpului mărginit de suprafețele $x^2 + y^2 = 2z$, $x^2 + y^2 = 5y$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$.

28. Să se calculeze $\iiint\limits_V y^2 zch(xyz)dxdydz$, dacă V este cubul $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$.

29. Să se afle masa corpului omogen (densitatea de volum $\gamma(x, y, z) = const. = 1$) mărginit de suprafețele $z = 9\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 22 - x^2 - y^2$.

30. Să se calculeze volumul corpului mărginit de suprafețele $y = 1 - 2x^2$, $y = -1$, $z = x^2 + 2y + y^2 - 2$, $z = x^2 + 2y + y^2 + 1$.

Problema 3. Să se calculeze integralele curbilinii:

1. $\oint\limits_L (x+y)dx + (x-y)dy$, unde L este circumferința $x^2 + y^2 = 16$, orientată în sens pozitiv.

2. $\int\limits_L \frac{ds}{\sqrt{8 - x^2 - y^2}}$, unde L este segmentul OB cu $O\ (0,0)$ și $B\ (2,2)$.

3. $\oint\limits_L (x^2 - y)dx + (y^2 + x)dy$, unde L este elipsa $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t$, orientată în sens pozitiv.

4. $\int\limits_L \left(4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}\right)ds$, unde L este segmentul de dreaptă AB cu $A(-1,0)$, $B(1,0)$.

5. $\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)dx + \left(x^2 + y^2\right)dy$, unde L este segmentul de dreaptă AB cu $A(-1,1)$, $B(3,2)$.

6. $\int\limits_L \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}ds$, unde L este arcul cardioidei $\rho = 2(1 + \cos\theta)$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

7. $\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)dx + \left(x^2 - y^2\right)dy$, unde L este linia poligonală ABC cu $A(2,0)$, $B(5,3)$, $C(5,0)$.

8. $\int\limits_L \sqrt{2y}\,ds$, unde L este primul arc al ciocloidei $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$.

9. $\int\limits_L 2xydx - x^2dy$, unde L este arcul parabolei $y = \frac{1}{4}x^2$ din punctul $O\ (0,0)$ în punctul $A(2,1)$.

10. $\int\limits_L \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, unde L este segmentul de dreaptă AB cu $A(1,2)$, $B(5,7)$.

11. $\oint\limits_L xdx - ydy$, unde L este conturul triunghiului cu vârfurile în punctele $A(-1,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$, orientat în sensul pozitiv.

12. $\int\limits_L \frac{(y^2 - x^2)xy}{(x^2 + y^2)^2}dS$, unde L este arcul curbei polare $\rho = 9\sin 2\theta$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

13. $\int\limits_L 2xydx - x^2dy + 7dz$, unde L este segmentul de dreaptă OA cu $O\ (0,0,0)$, $A\ (2,1,-1)$.

14. $\int\limits_L \left(x^2+y^2+z^2\right)dS$, unde L este arcul curbei $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \sqrt{3}\,t$, $t \in [0, 2\pi]$.

15. $\int\limits_L \frac{y}{x}dx + xdy$, unde L este arcul curbei $y = \ln x$ din punctul $A(1,0)$ în punctul $B(e,1)$.

16. $\int\limits_L ydS$, unde L este arcul astroidei $y = \sin^3 t$, $x = \cos^3 t$, cuprins între punctele $A(1,0)$, $B(0,1)$.

17. $\int_L 2xy^2dx + x^2dy$, unde L este arcul parabolei $y = \frac{1}{8}x^3$ din punctul O (0,0) în punctul A(2,1).

18. $\int_L \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dS$, unde L este arcul cardioidei $\rho = 1 + \cos\Theta$, $\Theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

19. $\int_L xydx + (y - x)dy$, unde L este arcul curbei $y = x^3$ din punctual O (0,0) în punctul B(1,1).

20. $\int_L (x + y)dS$, unde L este conturul triunghiului cu vârfurile în punctele O(0,0), A(− 1,0), B(0,1).

21. $\int_L xy^2dx - yz^2dy - x^2zdz$, unde L este segmentul de dreaptă OA cu O (0,0,0), A (− 2,4,5).

22. $\int_L \frac{z^2dS}{x^2+y^2}$, unde L este arcul curbei x=2cos$t$, y=2sin$t$, z=2t, $t\in[0,\pi]$.

23. $\int_L \cos ydx - \sin xdy$, unde L este segmentul de dreaptă AB cu A(2π, -2π), B(-2π, 2π).

24. $\int_L ydS$, unde L este arcul parabolei $y^2 = 2x$, tăiat de parabola x^2=2y.

25. $\int_L ydx + xdy$, unde L este arcul de circumferință x=Rcos$t$, y=Rsin t din punctul $A(R,0)$ în punctul $B(0,R)$.

26. $\int_L (x^2+y^2)dS$, unde L este circumferință $x^2+y^2=4x$.

27. $\int_L$ 2xydx + y^2dy+z^2dz, unde L este arcul curbei x=2cos$t$, y=2sin t, z=4t din punctul $A(2,0,0)$ în punctul $B(2,0,8\pi)$.

28. $\int_L (x+z)dS$, unde L este arcul curbei $x = t$, $y = \sqrt{\frac{3}{2}}t^2$, $z=t^3$, $t\in[0,1]$.

29. $\int_L xdx+ydy - (x - y+1)dz$, unde L este segmentul de dreaptă AB cu $A(1,1,1)$, $B(2,3,4)$.

30. $\int_L \sqrt{2+z^2}\left(2z - \sqrt{x^2+y^2}\right)$dS, unde L este arcul curbei $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $t\in[0,2\pi]$.

Problema 4.

1) Să se calculeze fluxul câmpului vectorial $\vec{b}$(M)= $\overline{rot a(M)}$ pe fața exterioară a suprafeței S=S_1+S_2.

2) Să se calculeze circulația câmpului vectorial $\vec{a}$(M) de-a lungul conturului L format de la intersecția suprafețelor S_1 și S_2. Direcția conturului se consideră în sens pozitiv.

3) Să se verifice răspunsurile din punctele precedente cu ajutorul *formulelor Gauss – Ostrogadschi* și *Stoches*.

1. $\vec{a}(M)=\{2(x - z), 2y - xz, 4 - 2x\}$,
S_1: $x^2+y^2+2z+3=0$, S_2: $z= - 2$.
2. $\vec{a}(M)=\{ - x, 2y, z\}$, S_1: $2x^2+2y^2+3z - 2=0$, S_2: $z= - 2$.
3. $\vec{a}(M)=\{x^3, y^3, z^3\}$, S_1: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, S_2: $z=0$.
4. $\vec{a}(M)=\{x+2, y - xz, 3 - z\}$, S_1: $x^2+y^2+2z+1=0$, S_2: $z= - 1$.
5. $\vec{a}(M)=\{3x - 1, y - x+z, 4z\}$, S_1: $2x^2 - y + 2z^2=2$, S_2: $y=0$.
6. $\vec{a}(M)=\{2y+z, x - y, 2z\}$ S_1: $z=\sqrt{x^2+y^2}=2$, S_2: $z=4$.
7. $\vec{a}(M)=\{xy, yz, zx\}$, S_1: $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$,
S_2: $z=\sqrt{x^2+y^2}$ (înăuntrul conului).

8. $\vec{a}(M)=\{2x+z, 2y-xz, 3+x\}$, $S_1: x^2+y^2+2z-3=0$, $S_2: z=1$.

9. $\vec{a}(M)=\{y+2z, x+2z, x-2y\}$, $S_1: 2x^2+y+2z^2=8$, $S_2: y=0$.

10. $\vec{a}(M)=\{x^2, xy, 3z\}$, $S_1: x^2+y^2=z^2$, $S_2: z=4$.

11. $\vec{a}(M)=\{xz, z, y\}$, $S_1: x^2+y^2=1-z$, $S_2: z=0$.

12. $\vec{a}(M)=\{3x-y, 2y+z, 2z-x\}$, $S_1: 2x^2+2y^2+z=6$, $S_2: z=-2$.

13. $\vec{a}(M)=\{x-6, y-xz, 1+z^2\}$, $S_1: x^2+y^2+2z-5=0$, $S_2: z=2$.

14. $\vec{a}(M)=\{x^2, x, xz\}$, $S_1: z=x^2+y^2$, $S_2: z=1$.

15. $\vec{a}(M)=\{3x+1, y-x+z, 4z\}$, $S_1: 2x^2+2z^2=2+y$, $S_2: y=0$.

16. $\vec{a}(M)=\{3z, 4-xz, x^2+3x\}$, $S_1: x^2+y^2+2z-7=0$, $S_2: z=3$.

17. $\vec{a}(M)=\{z, yz, -xy\}$, $S_1: z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, $S_2: z=0$.

18. $\vec{a}(M) = \{3x^2, -2x^2y, 2x-1\}$, $S_1: z = \sqrt{x^2+y^2}$, $S_2: z = 4$.

19. $\vec{a}(M) = \{x, x+z, y+z\}$, $S_1: 3x^2+3y^2+z = 3$, $S_2: z = 0$.

20. $\vec{a}(M) = \{x+z, y-xz, 2x-z\}$, $S_1: x^2+y^2-2z-5 = 0$, $S_2: z = -2$.

21. $\vec{a}(M) = \{x^2+xy, y^2+yz, z^2+xz\}$, $S_1: z = \sqrt{2-x^2-y^2}$,

$S_2: z = \sqrt{x^2+y^2}$ (înăuntrul conului).

22. $\vec{a}(M) = \{2x, 2y-xz, 4+z^2\}$, $S_1: x^2+y^2-2z-3 = 0$, $S_2: z = -1$.

23. $\vec{a}(M) = \{2xy, 2xz, z^2\}$, $S_1: z = -\sqrt{x^2+y^2}$, $S_2: z = -2$.

24. $\vec{a}(M) = \{-x, 2y, yz\}$, $S_1: z = -\sqrt{9-x^2-y^2}$, $S_2: z = 0$.

25. $\vec{a}(M) = \{z, x+y, y\}$, $S_1: x^2+y^2+2z-3 = 0$, $S_2: z = 1$.

26. $\vec{a}(M) = \{x+z, z, 2x-y\}$, $S_1: z = \sqrt{1-x^2-y^2}$, $S_2: z = 0$.

27. $\vec{a}(M) = \{x+1, y-2-xz, z\}$, $S_1: x^2+y^2-2z+5 = 0$, $S_2: z = 3$.

28. $\vec{a}(M) = \{3x+z, 3y-xz, 1+x\}$, $S_1: z = \sqrt{2x^2+2y^2}$, $S_2: z = 2$.

29. $\vec{a}(M) = \{2x-z, 2y-xz, z-x\}$, $S_1: x^2+y^2-2z+1 = 0$, $S_2: z = 1$.

30. $\vec{a}(M) = \{x+z, z+3y, y\}$, $S_1: z = \sqrt{4-x^2-y^2}$,

$S_2: z = \sqrt{x^2+y^2}$ (înăuntrul conului).

Problema 5. Să se stabilească dacă cîmpul vectorial a vectorului $\vec{a}(M)$ este sau nu

a) solenoidal:

1. $\vec{a}(M) = \{x+z, -2(y+z), z-x\}$.
2. $\vec{a}(M) = \{3x^2y, -2xy^2, -2xz^2\}$.
3. $\vec{a}(M) = \{yz, x-y, z^2\}$.
4. $\vec{a}(M) = \{x^2-y^2, y^2-z^2, z^2-x^2\}$.
5. $\vec{a}(M) = \{zy-2x, xz+2y, xy\}$
6. $\vec{a}(M) = \{(\alpha-\beta)x, (\gamma-\alpha)y, (\beta-\gamma)z\}$.
7. $\vec{a}(M) = \{2xyz, -y(yz+1), z\}$.
8. $\vec{a}(M) = \{x^2y, -2xy^2, 2xyz\}$.
9. $\vec{a}(M) = \{x^2-z^2, -3xy, (3y-2x)z\}$.
10. $\vec{a}(M) = \{3x, 4(x-y), (z-x-y)\}$.

b) potențial:

11. $\vec{a}(M) = \{3x^2, 4(x-y), (x-z)\}$.
12. $\vec{a}(M) = \{3(x-z), (x^2-z^2), 3z\}$.
13. $\vec{a}(M) = \{6x^2, 3\cos(3x+2z), \cos(3y+2z)\}$.
14. $\vec{a}(M) = \{(zy-2x), (xz+zy), xy\}$.
15. $\vec{a}(M) = \{xy(3x-4y), x^2(x-4y), 3z^2\}$.
16. $\vec{a}(M) = \{z^2, xz+y, x^2y\}$.
17. $\vec{a}(M) = \{(2x-yz), (2x-xy), yz\}$.
18. $\vec{a}(M) = \{(z-y), (x+z), x^2-y^2\}$.
19. $\vec{a}(M) = \{6xy, (3x^2-2y), z\}$.
20. $\vec{a}(M) = \{z^2, (xz+y), x^2y\}$

c) armonic:

21. $\vec{a}(M) = \{(y-z), (z-x), (x-y)\}$.
22. $\vec{a}(M) = \{yz, xz, xy\}$.
23. $\vec{a}(M) = \{(2+yz), (2+xz), (2+xy)\}$.
24. $\vec{a}(M) = \{6xyz^2, 3x^2z^2, 6x^2yz\}$.
25. $\vec{a}(M) = \{(x+y), (y+z), (x-z)\}$.
26. $\vec{a}(M) = \{x^2z, xz, y-xz^2)\}$.
27. $\vec{a}(M) = \{y+z, xy, -xz\}$.

28. $\vec{a}\,(M) = \{yz+3x, xz-3y, 6z+xy\}$.

29. $\vec{a}\,(M) = \left\{\frac{x}{yz}, \frac{y}{xz}, -\frac{(x+y)\ln z}{xy}\right\}$.

30. $\vec{a}\,(M) = \{2+yz, xz, xy\}$.

Lucrarea de control nr. 3

"Ecuații diferențiale ordinare"

Problema 1. Să se testeze și să se afle soluția generală a ecuației diferențiale de ordinul întâi:

1. $y'\sin x - y\cos x = 1$. 2. $xydx + \sqrt{1+x^2}\,(1+y^2)dy = 0$.
3. $xyy' = y^2+2x^2$. 4. $(x^2\ln y - x)y' = y$.
5. $(x+y-1)dx + (e^y+x)dy = 0$. 6. $y' - y\sin x = e^{-\cos x}\sin 2x$.
7. $(2x-y)dx + (x+y)dy = 0$. 8. $y - xy' = 2(1+x^2y')$.
9. $(x^2-4)y' - 4y = -(x+2)y^2$. 10. $ye^x + (y+e^x)y' = 0$.
11. $y'x\ln x + y = 3x^2\ln^2 x$ 12. $xy' = y + \sqrt{x^2+y^2}$.
13. $dy - \sqrt{xy}\,dx = 0$. 14. $xy' - y(2y\ln x - 1) = 0$.
15. $(e^x\sin y + x)dx = (y - e^x\cos y)dy$. 16. $y' + 2xy - xe^{-x^2} = 0$.
17. $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}\,dy = 0$. 18. $y'\cos^2 x\ln y + y = 0$.
19. $x^2y^2y' - xy^3 = 1$. 20. $(x^2+\sin y)dx + (2+x\cos y)dy = 0$.
21. $(1-x^2)y' + xy = 1$. 22. $xy' = y\left(1+\ln\frac{y}{x}\right)$.
23. $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$. 24. $y' - y = e^x\sqrt{y}$.
25. $(2x+y)dx + (x-y)dy = 0$. 26. $(x^2+y^2)dx + xydy = 0$.
27. $xy' - 2y + x^2 = 0$. 28. $(1+e^x)yy' = e^x$.
29. $y' - \frac{1}{x}y - 2xy^2 = 0$. 30. $(y+\sin y)dx + (x+x\cos y)dy = 0$.

Problema 2. Să se afle soluția particulară a ecuației diferențiale cu condițiile inițiale indicate:

1. $y'' - 5y' + 6y = x^2 - x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{1}{9}$.
2. $y'' - 2y' + 5y = x^2 - 1$, $y(0) = -3$, $y'(0) = \frac{1}{5}$.
3. $y'' - 4y' + 4y = -x^2 - 3x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = \frac{4}{3}$.
4. $y'' + 2y' + 10y = -\sin 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{3}{4}$.
5. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
6. $y'' - 3y' - 4y = 17\sin x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$.
7. $y'' + y' = e^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
8. $y'' + 5y' - 6y = 2\cos x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = \frac{1}{2}$.
9. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 - 4x + 2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
10. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(3-4x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
11. $y'' + 2y' - 10y = -\cos 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{3}{4}$.
12. $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.
13. $y'' + 9y = \frac{9}{\cos 3x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.
14. $y'' + 2y' - 8y = 3\sin x$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.
15. $y'' - y' = e^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
16. $y'' + 6y' = 9x^2 - 12x + 2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.
17. $y'' - y' = x + 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
18. $y'' - 3y' = x + \sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
19. $y'' - y' = 2(1-x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
20. $y'' - 3y' - 4y = 5\sin x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$.
21. $y'' - 2y' + y = 9e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
22. $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x}{1+e^{-x}}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

23. $y''-3y'=\cos x,\ y(0)=0,\ y'(0)=2.$

24. $y''-10y'+25y=(1+5x)e^{5x},\ y(0)=1,\ y'(0)=2.$

25. $y''+9y'=5\cos 3x,\ y(0)=0,\ y'(0)=1.$

26. $y''-2y'+5y=16e^{3x},\ y(0)=3,\ y'(0)=1.$

27. $y''-y=\sin x,\ y(0)=0,\ y'(0)=2.$

28. $y''+y=\dfrac{1}{\sin x},\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1,\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}.$

29. $y''-4y=6e^{2x},\ y(0)=0,\ y'(0)=0.$

30. $y''+6y=2\sin 2x,\ y(0)=2,\ y'(0)=4.$

Problema 3. Să se integreze sistemul de ecuații diferențiale, reducîndu – l la o ecuație diferențială de ordinul doi:

1. $\begin{cases} y'_t=12x+5y \\ x'_t=5x+12y. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} y'_t=x+3y \\ x'_t=x-y. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} y'_t=x+4y \\ x'_t=x+y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} y'_t=3x+y \\ x'_t=-4x-2y. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} y'_t=x-y \\ x'_t=y-x. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} y'_t=2x-4y \\ x'_t=x-3y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} y'_t=x+y \\ x'_t=x-2y. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} y'_t=4x+5y \\ x'_t=y. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} y'_t=x-5y \\ x'_t=-2x-2y. \end{cases}$

10. $\begin{cases} y'_t=2x+6y \\ x'_t=3x-y \end{cases}$ 11. $\begin{cases} y'_t=2x+3y \\ x'_t=x+4y. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} y'_t=-2x+11y \\ x'_t=5x+4y. \end{cases}$

13. $\begin{cases} y'_t=-2x+y \\ x'_t=-3x+2y. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} y'_t=2x+y \\ x'_t=x+4y \end{cases}$ 15. $\begin{cases} y'_t=x+3y \\ x'_t=3x+y. \end{cases}$

16. $\begin{cases} y'_t=4x-y \\ x'_t=3x-y \end{cases}$ 17. $\begin{cases} y'_t=3x+y \\ x'_t=x-3y. \end{cases}$ 18. $\begin{cases} y'_t=3x+6y \\ x'_t=x-2y. \end{cases}$

19. $\begin{cases} y'_t=-3x+9 \\ x'_t=5x+4y. \end{cases}$ 20. $\begin{cases} y'_t=-2x+9y \\ x'_t=x+6y. \end{cases}$ 21. $\begin{cases} y'_t=6x-4y \\ x'_t=7x+3y. \end{cases}$

22. $\begin{cases} y'_t=4x+3y \\ x'_t=3x+4y. \end{cases}$ 23. $\begin{cases} y'_t=2x+7y \\ x'_t=-3x+y. \end{cases}$ 24. $\begin{cases} y'_t=x-y \\ x'_t=2x+y. \end{cases}$

25. $\begin{cases} y'_t=11x-y \\ x'_t=x-11y. \end{cases}$ 26. $\begin{cases} y'_t=7x+5y \\ x'_t=5x+7y. \end{cases}$ 27. $\begin{cases} y'_t=9x+y \\ x'_t=3x+2y. \end{cases}$

28. $\begin{cases} y'_t=y-3x \\ x'_t=3x-y. \end{cases}$ 29. $\begin{cases} y'_t=10x+5 \\ x'_t=5x+10y. \end{cases}$ 30. $\begin{cases} y'_t=5y+x \\ x'_t=x-y. \end{cases}$

Lucrarea de control nr. 4
„Serii”

Problema 1. Să se calculeze suma seriei numerice:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+6)(n+7)}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{4n^2+8n+3}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+5^n}{15^n}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+9)(n+10)}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{9}{9n^2+21n-8}$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n-3^n}{15^n}$;

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+5)(2n+7)}$; 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{9n^2+3n-2}$; 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n+5^n}{10^n}$;

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+7)(n+8)}$; 11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7}{49n^2+7n-12}$; 12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+2)}$;

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n+2^n}{10^n}$; 14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}$; 15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7^n+2^n}{14^n}$;

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{49n^2-70n-24}$; 17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}$; 18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n-4^n}{20^n}$;

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{12}{36n^2-12n-35}$; 20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}$; 21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+n+2}$;

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7^n+3^n}{21^n}$; 23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+3)(n+4)}$; 24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{6}{4n^2-9}$;

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+8^n}{24^n}$; 26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$; 27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4n^2+4n-3}$;

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n+2^n}{18^n}$; 29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}$; 30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{25n^2+5n-6}$;

Problema 2. Să se cerceteze natura seriei numerice:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{5n^3-1}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-3}{7^n}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n+2)!}{n^5}$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2-1}$; 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot5\cdot6\cdot\ldots\cdot(n+3)}{5\cdot7\cdot9\cdot\ldots\cdot(2n+3)}$; 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3n!}$;

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{5n}\right)^{n^2}$; 8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$; 9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-1)(6n+3)}$;

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{(n-1)!}$; 11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{5^n}$; 12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+4}{2n^3+3}$;

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{n^n}$; 14. $\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{2\pi}{3^n}$; 15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot6\cdot11\cdot\ldots\cdot(5n-4)}{5\cdot7\cdot9\cdot\ldots\cdot(2n+3)}$;

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{\sqrt{n7^n}}$; 17. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{1}{5^n}\right)^n$; 18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{(4n+3)^3}}$;

19. $\sum_{n=1}^{\infty}tg\frac{\pi}{3^n}$; 20. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+7}\right)^n$; 21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(2n)!}$;

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{5^n}$; 23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+3}{6n^3+5}$; 24. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^n\frac{1}{n^7}$;

25. $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)tg\frac{\pi}{3^n}$; 26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n!}$; 27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n2^n}}$;

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{n^2}$; 29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)3^n}$; 30. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{n+3}{2n+5}\right)^n$.

Problema 3. Să se afle domeniul de convergenţă al seriei de puteri:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{\frac{n}{3}}}{n!}x^n$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{3^n}(x+3)^n$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^nx^n}{\sqrt{(2n-1)3^n}}$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+6}{6^n}(x-6)^n$; 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n^2+1)}x^n$; 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5}{5^n}(x+5)^n$;

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^n$; 8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4}{4^n}(x+4)^n$; 9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^nn!}{(n+1)^n}x^n$;

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3}{3^n}(x-3)^n$; 11. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^nx^n$; 12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n}(x-2)^n$;

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^nx^n}{\sqrt{n}}$; 14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n!}$; 15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$;

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+8)^n}{n^2}$; 17. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)x^n$; 18. $\sum_{n=1}^{\infty}2n^2(x+2)^n$;

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)}$; 20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt{n^2+1}}$; 21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\sqrt{2n+1}}$;

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2^n\ln(n+1)}$; 23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$; 24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{n^2}}{(n+1)^n}$;

25. $\sum_{n=1}^{\infty}(2n^2-2n+1)x^n$; 26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n5^n}$; 27. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{n^2}x^n$;

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+6}{6^n}(x+6)^n$; 29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(3n)!}x^n$; 30. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{n^2}\right)(x+1)^n$.

Problema 4. Să se dezvolte în seria Fourier funcţia $f(x)$ pe intervalul dat cu perioada T:

1. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0 \\ \dfrac{x}{2} + 1, & 0 \le x \le \pi, \quad T = 2\pi. \end{cases}$

2. $\begin{cases} f(x) = x, \ x \in [-1,1], \\ T = 2. \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} 7 - 3x, & -\pi \le x \le 0, \\ 0, & 0 < x \le \pi, \quad T = 2\pi. \end{cases}$

4. $\begin{cases} f(x) = x, \ x \in [1,3] \\ T = 2. \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ 3 - 8x, & 0 \le x \le \pi, \quad T = 2\pi. \end{cases}$

6. $\begin{cases} f(x) = x, \ 0 \le x \le 1, \\ T = 2. \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} 2x - 11, & -\pi \le x \le 0, \\ 0, & 0 < x < \pi, \quad T = 2\pi. \end{cases}$

8. $\begin{cases} f(x) = e^x, \ x \in [-2,2], \\ T = 4. \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ 3 - 8x, & 0 \le x \le \pi, \quad T = 2\pi. \end{cases}$

10. $\begin{cases} f(x) = 10 - x, \ x \in [5,15], \\ T = 10. \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ 6x - 5, & 0 < x \le \pi, \quad T = 2\pi. \end{cases}$

12. $\begin{cases} f(x) = x - 1, \ x \in [-5,5], \\ T = 10. \end{cases}$

13. $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & -\pi \le x \le 0, \\ 0, & 0 < x \le \pi, \quad T = 2\pi. \end{cases}$

14. $\begin{cases} f(x) = 1 + x, \ x \in [-1,1], \\ T = 2. \end{cases}$

15. $f(x) = \begin{cases} 5 - x, & -\pi \le x \le 0, \\ 0, & 0 < x \le \pi, \quad T = 2\pi. \end{cases}$

16. $\begin{cases} f(x) = 2x + 3, \ x \in [-1,3], \\ T = 2. \end{cases}$

17. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ 4x - 3, & 0 \le x \le \pi, \quad T = 2\pi. \end{cases}$

18. $\begin{cases} f(x) = 1 - |x|, \ x \in [-3,3], \\ T = 6. \end{cases}$

19. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x < \pi, \quad T = 2\pi.. \end{cases}$

20. $\begin{cases} f(x) = |x| - 3, \ x \in [-4,4], \\ T = 8. \end{cases}$

21. $f(x) = \begin{cases} x - 2, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & 0 < x \le \pi, \quad T = 2\pi. \end{cases}$

22. $\begin{cases} f(x) = x - 1, \ x \in [-2,2] \\ T = 4. \end{cases}$

23. $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \le x < 0, \\ \dfrac{x}{2} + 1, & 0 \le x \le \pi, \quad T = 2\pi. \end{cases}$

24. $\begin{cases} f(x) = 4x - 3, \ x \in [-5,5], \\ T = 10 \end{cases}$

25. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ 3 - x, & 0 < x \le \pi, \quad T = 2\pi. \end{cases}$

26. $\begin{cases} f(x) = x, \ 1 \le x < 3 \\ T = 2 \end{cases}$

27. $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \le x \le 0, \\ 2, & 0 < x \le 2, \quad T = 4. \end{cases}$

28. $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}, \ x \in [-\pi,\pi], \\ T = 2\pi. \end{cases}$

29. $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \le x < 0, \\ 1 - x, & x \in [0, 1], \quad T = 2. \end{cases}$

30. $\begin{cases} f(x) = 3x + 1, \ 0 < x \le \pi, \\ T = 2\pi \end{cases}$

Lucrarea de control nr. 5*)

„Funcția complexă de o variabilă complexă”

Problema 1.

1. $\ln\left(\sqrt{3-i}\right)$; 2. 1^i; 3. $(1+i)^{\sqrt{2}}$; 4. $\ln\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$;

5. $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{1+i}$; 6. $\sin(1+i)$; 7. $e^{1+\frac{\pi}{2}i}$; 8. $\cos(2+i)$;

9. $(1-i)^{3-3i}$; 10. $\operatorname{Arc}\sin i$; 11. $\operatorname{Ln}(-1-i)$; 12. $(-1)^{\sqrt{5}}$

13. $\operatorname{Arccos}\left(\dfrac{\pi^3}{3}\right)$; 14. $\ln(1-i)$; 15. $\operatorname{Arcth}\pi i$;

16. $\ln(-\sqrt{3}-i)$; 17. $\operatorname{Arctg}(1-i)$; 18. $\operatorname{Arcsh}(1-i)$;

19. $\operatorname{Arc}\sin 3$; 20. $\operatorname{sh}\left(1+\dfrac{\pi}{2}i\right)$; 21. $\ln 1^i$;

22. $\operatorname{Arcch}\dfrac{\pi i}{2}$; 23. $\operatorname{Arccos} i$; 24. $\operatorname{Arctg}\dfrac{i}{3}$; 25. $\ln(1+i)$;

26. $(1+i)^i$; 27. $\ln i^{\frac{1}{i}}$; 28. $\operatorname{Ln}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}\right)$; 29. $\operatorname{Atcctg}\left(\sqrt{3+i}\right)$;

30. $\operatorname{Arccos}(1+i)$.

Problema 2. Să se cerceteze analiticitatea funcției $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, unde $z=x+iy$, și să se calculeze $f'(z_0)$, dacă

1. $u=3x^2y-y^3$, $v=3xy^2-x^3$, $z_0=-1+i$;
2. $f(z)=\dfrac{e^z}{z}$, $z_0=1+i$;
3. $u=e^x(x\cos x-y\sin y)$, $v=e^x(x\sin x+y\sin y)$, $z_0=-1+\pi i$;
4. $f(z)=(1+z)\cdot \operatorname{Im}z^2$, $z_0=-1$;
5. $u=x^3-3xy^2+x^2-y^2$, $v=3x^2y-y^3+2xy$, $z_0=\dfrac{2}{3}i$;

*) Ultimele două lucrări de control sunt introduse pentru a acoperi modulul „Analiză matematică 3”.

6. $f(z)=5e^{2z}$, $z_0=1-i$; 7) $u=e^{1+y}\cos x$, $v=-e^{1+y}\sin x$, $z_0=\dfrac{\pi}{2}+i$;
8. $f(z)=\left|z-1\right|^2$, $z_0=1$;
9. $u=2xy-2x$, $v=y^2-2y-x^2+2$, $z_0=1$;
10. $f(z)=\operatorname{sh}3z$, $z_0=2+i$;
11. $u=x^3-3xy^2+3x$, $v=3x^2y-y^3+3y+1$, $z_0=-1-i$;
12. $f(z)=i\operatorname{ch}3z$, $z_0=i$;
13. $u=e^{1+3y}\cos 3x$, $v=-e^{1+3y}\sin 3x$, $z_0=\dfrac{\pi}{3}+i$;
14. $f(z)=2\sin 2z$, $z_0=\dfrac{\pi}{8}i$;
15. $u=x^2+2x-y^2$, $v=2xy+2y$, $z_0=i$;
16. $f(z)=(z+1)\cdot \operatorname{Re}z$, $z_0=-1$;
17. $u=e^{-1-y}\cos x$, $v=e^{-1-y}\sin x$, $z_0=\pi-i$;
18. $f(z)=z\cos z$, $z_0=\dfrac{\pi}{4}i$;
19. $u=e^{1-2x}\cos 2y$, $v=-e^{1-2x}\sin 2y$, $z_0=\dfrac{\pi}{4}i$;
20. $f(z)=2\operatorname{ch}2z$, $z_0=1+i$;
21. $u=e^{1+2y}\cos 2x$, $v=-e^{1+2y}\sin 2x$, $z_0=\dfrac{\pi}{6}$;
22. $f(z)=z\cdot e^z$, $z_0=1-i$;
23. $u=e^x\cos y+1$, $v=e^x\sin y+1$, $z_0=1+\dfrac{\pi}{4}i$;
24. $f(z)=z^3+2z+1$, $z_0=2+3i$;
25. $u=x$, $v=y$, $z_0=5+3i$;
26. $f(z)=z\bar{z}$, unde $\bar{z}=x-iy$ și $z_0=0$;
27. $u=2e^x\cos y$, $v=2e^x\sin y$, $z_0=2-3i$;
28. $f(z)=z^2+4iz$, $z_0=2+i$;
29. $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $z_0=2-i$;

30. $f(z) = 2\sin z - z$, $\quad z_0 = \dfrac{\pi}{3} i$.

Problema 3. Să se calculeze integrala

1. $\int\limits_{AB} (1+i+4z)dz$, unde AB este segmentul de parabolă $y = x^2+1,\ x \in [0,2]$;

2. $\int\limits_{L} (z^3 + z\bar{z})dz$, unde $\bar{z} = x - iy$, L este semicircumferinţa $|z| = 2,\ 0 \le \arg z \le \pi$;

3. $\int\limits_{L} \bar{z}e^{z} dz$, unde $\bar{z} = x - iy$ şi L este segmentul de dreaptă, ce uneşte punctele $z_1 = 0,\ z_2 = \pi - i\pi$;

4. $\int\limits_{1+i}^{3+i} (3z^2+z+5)dz$; 5. $\int\limits_{0}^{2i} z\cos 2z dz$; 6. $\int\limits_{i+1}^{i} (z+1)e^{iz} dz$;

7. $\int\limits_{L} z \operatorname{Re} z dz$, unde L este semicircumferinţa $|z-1| = 1,\ \operatorname{Im} z \ge 0$;

8. $\int\limits_{L} \cos^2 z dz$, unde L este segmentul de dreaptă, ce uneşte punctele $z_1 = \dfrac{\pi}{2},\ z_2 = \pi + i$;

9. $\int\limits_{1}^{i} (3z^5+2z^4)dz$; 10. $\int\limits_{0}^{1+i} (z+i)e^{z} dz$; 11. $\int\limits_{0}^{2+i} \sin z \cos z dz$;

12. $\int\limits_{L} (z+i)\operatorname{sh} z\, dz$, unde L este circumferinţa $|z-i| = 1$,

13. $\int\limits_{L} |z| \cdot z\, dz$, unde L este semicircumferinţa $|z| = 2,\ \operatorname{Re} z \ge 0$.

14. $\int\limits_{L} |z| \cdot \operatorname{Im} z^2 dz$, unde L este semicircumferinţa $|z-2| = 2$, $\operatorname{Im} z \ge 0$;

15. $\int\limits_{L} (z + \operatorname{sh} z)dz$, unde L este circumferinţă $|z+i| = 1$.

16. $\int\limits_{L} (\cos iz + \operatorname{ch} z)dz$, unde L este linia poligonală ce uneşte punctele $z_1 = 0,\ z_2 = 2,\ z_3 = 2+i$;

17. $\int\limits_{L} z^{-2} dz$, unde L este segmentul de dreaptă ce uneşte punctele $z_1 = 1,\ z_2 = 2+2i$;

18. $\int\limits_{L} (5z^3+4z+3)dz$, unde L este segmentul de parabolă $y = 2x^2$, ce uneşte punctele $z_1 = 0,\ z_2 = 1+2i$;

19. $\int\limits_{L} z \cdot \bar{z} dz$, unde $\bar{z} = x - iy$, iar L este circumferinţă $|z+1| = 2$.

20. $\int\limits_{0}^{1-i} (z+i)e^{-z} dz$; 21. $\int\limits_{-1}^{\frac{\pi}{i}i} \sin^2 z dz$; 22. $\int\limits_{-1}^{\frac{\pi}{4}i} z \sin z\, dz$;

23. $\int\limits_{L} (\cos iz + ze^{-z})dz$, unde L este arcul de circumferinţă $|z| = 2,\ \operatorname{Im} z \ge 0,\ \operatorname{Re} z \ge 0$;

24. $\int\limits_{L} (\sin iz + z^2)dz$, unde L este linia poligonală, ce uneşte punctele $z_1 = 0,\ z_2 = 2,\ z_3 = 3+i$;

25. $\int\limits_{L} \operatorname{Re}(\cos z)\sin z dz$, unde L este segmentul de dreaptă, ce uneşte punctele $z_1 = \dfrac{\pi}{4} + i,\ z_2 = \dfrac{\pi}{4} - i$;

26. $\int\limits_{L} \sin \bar{z}$, unde $\bar{z} = x - iy$ şi L este arcul de parabolă $y = x^2$, ce uneşte punctele $z_1 = 1+i,\ z_2 = -1+i$;

27. $\int\limits_{1-i}^{1+i} ze^z dz$; 28. $\int\limits_L \sin iz \cdot dz$; 29. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}+i} \cos iz \cdot dz$;

30. $\int\limits_L z \operatorname{Im} z^2 dz$, unde conturul L este mulţimea punctelor $\operatorname{Re} z = 1$, $|\operatorname{Im} z| \le 1$

Problema 4. Să se dezvolte funcţia $f(z)$ în seria Laurent în vecinătatea punctului z_0 şi să se afle domeniul de convergenţă al acestei serii.

1. $f(z) = (z+i)^2 \cdot e^{\frac{1}{z}}$, $z_0 = 0$; 2. $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z+3)}$, $z_0 = 0$;

3. $f(z) = \dfrac{1}{(z+2)}$, $z_0 = i$; 4. $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)}$, $z_0 = 1$;

5. $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)}$, $z_0 = 0$; 6. $f(z) = \dfrac{1}{z^2+z}$, $z_0 = i$;

7. $f(z) = z^2 \cos\dfrac{1}{z-2}$, $z_0 = 2$; 8. $f(z) = \dfrac{1}{3z-4}$, $z_0 = 2i$;

9. $f(z) = ze^{\frac{1}{z-1}}$, $z_0 = 1$; 10. $f(z) = \dfrac{z^2-1}{z^2+1}$, $z_0 = i$;

11. $f(z) = \sin\dfrac{z}{1+z}$, $z_0 = -1$; 12. $f(z) = \dfrac{1}{z(z-5)}$, $z_0 = 2$;

13. $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)^2(z+2)}$, $z_0 = -1$; 14. $f(z) = \dfrac{z+i}{z^2}$, $z_0 = -i$;

15. $f(z) = z\sin\dfrac{z+1}{z}$, $z_0 = 0$; 16. $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)(z^2+2)}$, $z_0 = 0$;

17. $f(z) = \dfrac{1}{z(z+1)}$, $z_0 = i$; 18. $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z+2)}$, $z_0 = 2$;

19. $f(z) = \dfrac{1}{z^2-4}$, $z_0 = 1$; 20. $f(z) = \dfrac{1}{z^2+4}$, $z_0 = 2i$;

21. $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2}$, $z_0 = 0$; 22. $f(z) = \dfrac{1}{3z+5}$, $z_0 = 1$;

23. $f(z) = \sin\dfrac{z+1}{z-1}$, $z_0 = 1$; 24. $f(z) = \dfrac{z}{1+z^2}$, $z_0 = -i$;

25. $f(z) = ze^{\frac{1}{1+z}}$, $z_0 = -1$; 26. $f(z) = \dfrac{1}{z^2+9}$, $z_0 = 0$;

27. $f(z) = \cos\dfrac{z-1}{z+i}$, $z_0 = -i$; 28. $f(z) = \dfrac{1}{z^2-z}$, $z_0 = 1$;

29. $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)^2(z-1)}$, $z_0 = 2$; 30. $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z-1)^2}$, $z_0 = 1$;

Problema 5. Să se aplice teoremele Cauchy la calcularea următoarelor integrale (orientarea conturului L se consideră pozitivă):

1. $\int\limits_L \dfrac{\sin \pi(z+1)}{z^2-2z+2} dz$, unde L: $|z-1-i| = 2$;

2. $\int\limits_L \dfrac{e^z}{z^2(z+1)} dz$, unde L: $|z| = 2$;

3. $\int\limits_L \dfrac{e^z}{z^4-z^2-2} dz$, unde L: $|z+i| = 1$;

4. $\int\limits_L \dfrac{\cos z}{z^2-4} dz$, unde L: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$;

5. $\int\limits_L \dfrac{dz}{z^3+1}$, unde L: $x^2+y^2+2x = 0$;

6. $\int\limits_L \dfrac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2} dz$, unde L: $x^2+y^2-2x = 0$;

7. $\int_L \frac{dz}{(z-1)^n(z-2)^m}$, unde L: $|z| = r$, $r < 1$, $m, n \in N$;

8. $\int_L z^3 \sin\frac{1}{z}dz$, unde L: $|z-i| = 2$;

9. $\int_L \frac{z-1}{z^2+z-2}dz$, unde L: $|z+2| = 4$;

10. $\int_L \frac{zdz}{z^3+8}$, unde L: $|z-1-i\sqrt{3}| = 2{,}5$;

11. $\int_L \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, unde L: $|z-1-i| = 2$;

12. $\int_L \frac{\sin z \cdot \sin(z+1)}{z^2-z}dz$, unde L: $|z| = 3$;

13. $\int_L \frac{dz}{(z^2+4)(z+4)}$, unde L: $|z-i| = 4$;

14. $\int_L \frac{\sin(z+\pi i)}{z(e^2+1)}dz$, unde L: $|z| = 4$;

15. $\int_L \frac{shz}{z^4-1}dz$, unde L: $|z-1| = 1{,}5$;

16. $\int_L \frac{ch(z+1)}{z^2+1}dz$, unde L: $x^2+\frac{y^2}{4} = 1$;

17. $\int_L \frac{e^z\cos\pi z}{z^2-2z}dz$, unde L: $|z| = 3$;

18. $\int_L \frac{chzdz}{(z+1)^2(z-1)}$, unde L: $|z| = 2$;

19. $\int_L \frac{zshz}{(z^2+1)^2}dz$, unde L: $|z+i| = 1{,}5$;

20. $\int_L \frac{e^{iz}}{(z^2-1)^2}dz$, unde L: $|z-1| = 1$;

21. $\int_L \frac{dz}{(z^2+2)^3(z^2-2)}$, unde L: $|z| = 1{,}5$;

22. $\int_L z(ctg\,\pi z)dz$, unde L: $|z-1| = \sqrt{2}$;

23. $\int_L \sin\frac{1}{z}dz$, unde L: $|z-1| = 2$;

24. $\int_L \left(\sin\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}e^{z^2}\right)dz$, unde L: $|z-1-i| = 2$;

25. $\int_L (z-1)e^{\frac{1}{z}}dz$, unde L: $|z+1| = 2$;

26. $\int_L \frac{e^{iz}}{(z-\pi)^3}dz$, unde L: $|z| = 4$;

27. $\int_L \frac{ctg\pi z}{z^2-\frac{\pi^2}{4}}dz$, unde L: $|z-1| = 0{,}8$;

28. $\int_L \frac{e^z ch\,z\,dz}{(z^2-9)^3(e^z+1)^2}$, unde L: $|z+i\cdot\frac{\pi}{2}| = 1$;

29. $\int_L \frac{e^z}{z(z-1)^2}dz$, unde L: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} = 1$;

30. $\int_L \frac{z\,dz}{\sin^2 z\cos z}$, unde L: $|z-1| = 2$.

Lucrarea de control nr. 6

„Calculul operațional”

Problema 1. Să se restabilească originalul după imaginea lui:

1. $F(p) = \dfrac{1}{p^3+8}$; 2. $F(p) = \dfrac{p+2}{p^2-4p+7}$;

3. $F(p) = \dfrac{e^{-3p}}{(p+1)^2}$; 4. $F(p) = \dfrac{1}{(p^2-1)^2(p^2+2p+2)}$;

5. $F(p) = \dfrac{p}{(p^2+1)(p^2+2)}$; 6. $F(p) = \dfrac{1}{(p^2+2)^2}$;

7. $F(p) = \dfrac{p}{(p-1)(p^2+4)}$; 8. $F(p) = \dfrac{p^2}{p^4+4p^2+3}$;

9. $F(p) = \dfrac{1}{p^2(p^2+9)}$; 10. $F(p) = \dfrac{p}{p^3-1}$;

11. $F(p) = \dfrac{2p}{p^2-1}e^{-p}$; 12. $F(p) = \dfrac{p^3}{p^4-1}$;

13. $F(p) = \dfrac{p}{(p+1)^3(p+2)^2}$; 14. $F(p) = \dfrac{p+1}{(p-3)^3(p-1)^3}$;

15. $F(p) = \dfrac{p^2}{p^4+4p^2+3}$; 16. $F(p) = \dfrac{1}{(p-1)^2(p^2-9)}$;

17. $F(p) = \dfrac{p^2+2}{(p+3)(p^2-1)}$; 18. $F(p) = \dfrac{13p+1}{p(p-1)^2(p+2)}$;

19. $F(p) = \dfrac{p+4}{(p^3-1)}$; 20. $F(p) = \dfrac{1}{p^2}\sin\dfrac{1}{p}$;

21. $F(p) = \dfrac{e^p}{p^2} + \dfrac{5e^{-3p}}{p^2+2}$; 22. $F(p) = \dfrac{1}{p}\cos\dfrac{1}{p}$;

23. $F(p) = \dfrac{p^3+2p^2+3}{p^5+2p^4+p^3}$; 24. $F(p) = \dfrac{p}{(p^2-1)^2}$;

25. $F(p) = \dfrac{p^2+p+1}{p^3-3p^2+3p-1}$; 26. $F(p) = \dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$;

27. $F(p) = \dfrac{p-3}{(p+1)^2(p^2-2p)}$; 28. $F(p) = \dfrac{p^2}{(p^2+1)^2}$;

29. $F(p) = \dfrac{1}{p^4-5p^2+6}$; 30. $F(p) = \dfrac{e^{-\frac{p}{3}}}{p(p^2+2)}$.

Problema 2. Să se afle soluția particulară a ecuației diferențiale cu condițiile inițiale indicate:

1. $x'''+x'' = \sin t$, $x(0) = 1,\ x'(0) = 1,\ x''(0) = 0$.
2. $x''+2x' = \cos t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
3. $x'''-x''+x' = 4$, $x(0) = 1,\ x'(0) = 2,\ x''(0) = -2$.
4. $x''+2x'-3x = e^{-t}$, $x(0) = 0,\ x'(0) = 1$.
5. $x'''+x'' = 1$, $x(0) = x'(0) = 0,\ x''(0) = 1$.
6. $x''-x' = t\,e^t$, $x(0) = 0,\ x'(0) = -1$.
7. $x'''-x' = \cos t$, $x(0) = 1,\ x'(0) = x''(0) = 0$.
8. $x''-2x'+3x = t - \sin t$, $x(0) = 1,\ x'(0) = 0$.
9. $x''+9x = \cos 3t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
10. $x''+3x'+x = 1+t+t^2$, $x(0) = 0,\ x'(0) = 2$.
11. $x''+2x'+x = \sin t$, $x(0) = x'(0) = 1$.
12. $x''-3x'-4x = 10\sin t$, $x(0) = 0,\ x'(0) = 1$.
13. $x''+2x'+x = 9e^{2t}$, $x(0) = x'(0) = 0$.
14. $x''+16x = e^{-t}$, $x(0) = 0,\ x'(0) = 1$.
15. $x'''-3x''+3x'-x = 5(1+5t)$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.
16. $x''-3x'+2x = 2(3+2t)$, $x(0) = -1,\ x'(0) = 1$.
17. $x'''+x'' = 2t^2$, $x(0) = -3,\ x'(0) = 1,\ x''(0) = 0$.
18. $x''-2x' = t\sin t$, $x(0) = 0,\ x'(0) = -1$.
19. $x'''-x' = 1-t$, $x(0) = 0,\ x'(0) = 1,\ x''(0) = -1$.
20. $x'''-x'' = t\,e^t$, $x(0) = 1,\ x'(0) = -1 = x''(0)$.

21. $x''+4x=\sin\frac{3}{2}t\cos\frac{t}{2}$, $\quad x(0)=1,\ x'(0)=0.$

22. $x'''+3x'-4x=0$, $\quad x(0)=x'(0)=0,\ x''(0)=2.$

23. $x''+2\alpha x'+(\alpha^2+\beta^2)=0$, $\quad x(0)=0,\ x'(0)=1.$

24. $x'''+x'=e^{2t}$, $\quad x(0)=x''(0)=0,\ x'(0)=1.$

25. $x''-x'+x=t\,e^{t}$, $\quad x(0)=0,\ x'(0)=2.$

26. $x'''+x=t^2e^{t}$, $\quad x(0)=x'(0)=x''(0)=0.$

27. $x''-x=t\cos 2t$, $\quad x(0)=1,\ x'(0)=0.$

28. $x'''-2x''+x'=4$, $\quad x(0)=x'(0)=1,\ x''(0)=2.$

29. $x''+4x'=2\cos t\cos 3t$, $\quad x(0)=x'(0)=1.$

30. $x'''+x'=t\,e^{t}+\sin t$, $\quad x(0)=x'(0)=0,\ x''(0)=1.$

Problema 3. Să se rezolve sistemul de ecuații diferențiale liniare cu condițiile inițiale indicate:

1. $\begin{cases} x'_t=y-z, \\ y'_t=x+y, \\ z'_t=x+y, \end{cases}$ $\quad x(0)=1, y(0)=2,\ z(0)=3.$

2. $\begin{cases} x'_t+y'_t-y=e^{t}, \\ 2x'_t+y'_t-2y=2\cos t, \end{cases}$ $\quad x(0)=1,\ y(0)=-1.$

3. $\begin{cases} x'_t=-x+y+z, \\ y'_t=x-y+z, \\ z'_t=x+y-z, \end{cases}$ $\quad x(0)=y(0)=1,\ z(0)=-1.$

4. $\begin{cases} x'_t+y'_t=0, \\ x'_t+2y'_t+x=0, \end{cases}$ $\quad x(0)=1,\ y(0)=-1.$

5. $\begin{cases} x'_t=-2x-2y-4z, \\ y'_t=-2x+y-2z, \\ z'_t=x+y+2z, \end{cases}$ $\quad x(0)=y(0)=1,\ z(0)=-1.$

6. $\begin{cases} x'_t+x+2y=2t, \\ -2x'_t+y'_t-y=e^{t}, \end{cases}$ $\quad x(0)=y(0)=1.$

7. $\begin{cases} x'_t+y-z=0, \\ y'_t-z=0, \\ x+z-z'_t=0, \end{cases}$ $\quad x(0)=1,\ y(0)=2,\ z(0)=3.$

8. $\begin{cases} x'_t+y=0, \\ y'_t-2x-2y=0, \end{cases}$ $\quad x(0)=1,\ y(0)=-1.$

9. $\begin{cases} x'_t-x+2y=3, \\ 3x'_t+y'_t-4x+2y=0, \end{cases}$ $\quad x(0)=y(0)=1.$

10. $\begin{cases} x'_t=y+z, \\ y'_t=x+y, \\ z'_t=x-z, \end{cases}$ $\quad x(0)=y(0)=z(0)=1.$

11. $\begin{cases} x'_t+7x-2y=0, \\ y'_t+2x-5y=0, \end{cases}$ $\quad x(0)=0,\ y(0)=0.$

12. $\begin{cases} x'_t=x+z, \\ y'_t-x=0, \\ z'_t=x+y-z, \end{cases}$ $\quad x(0)=1,\ y(0)=-1,\ z(0)=2.$

13. $\begin{cases} x'_t=x-y, \\ y'_t=2x+2y, \end{cases}$ $\quad x(0)=1,\ y(0)=-1.$

14. $\begin{cases} x'_t=2x-2y+4z, \\ y'_t=-2x+y+2z, \\ z'_t=3x+y+2z, \end{cases}$ $\quad x(0)=y(0)=z(0)=0.$

15. $\begin{cases} x'_t-x-2y=t, \\ 2x+2y'_t-3y=t, \end{cases}$ $\quad x(0)=3,\ y(0)=2.$

16. $\begin{cases} x_t' + 2x + y = 1, \\ x_t' + 4y_t' + 3y = 0, \end{cases}$ $\quad x(0) = y(0) = 0.$

17. $\begin{cases} x_t' + y = 2x + z, \\ y_t' = x + z, \\ z_t' + 2z = y - 3x, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0,\ y(0) = z(0) = 0.$

18. $\begin{cases} x_t' + y_t' + y = e^t, \\ 2x + y_t' + 2y = \sin t, \end{cases}$ $\quad x(0) = y(0) = 0.$

19. $\begin{cases} x_t' + y + z = 0, \\ y_t' + x + z = 0, \\ z_t' + x - y = 0, \end{cases}$ $\quad x(0) = -1,\ y(0) = 0,\ z(0) = 1.$

20. $\begin{cases} x + x_t' = y + e^t, \\ y + y_t' = x + e^t, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

21. $\begin{cases} x_t' = y + z, \\ y_t' = 3x + z, \\ z_t' = 3y + x, \end{cases}$ $\quad x(0) = y(0) = 0,\ z(0) = 1.$

22. $\begin{cases} x_t' - 2x + 2y = 1 + 2t, \\ y_t' + 2x + y = 0, \end{cases}$ $\quad x(0) = y(0) = 0.$

23. $\begin{cases} x_t' = 2x + y + z, \\ y_t' = x - z, \\ z_t' = 3x - y + 2z, \end{cases}$ $\quad x(0) = y(0) = 1,\ z(0) = 0.$

24. $\begin{cases} x_t' = 3y + x, \\ y_t' = x + y + e^t, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

25. $\begin{cases} x_t' = x - y + z + t, \\ y_t' = x + y - z + t^2, \\ z_t' = x + y + z, \end{cases}$ $\quad x(1) = y(1) = z(1) = 0.$

26. $\begin{cases} x_t' + y_t' + x = e^t, \\ y_t' + 2x + y = 1, \end{cases}$ $\quad x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

27. $\begin{cases} 3x_t' = 2x + y - z, \\ 2y_t' = x + 2y + z, \\ 6z_t' = x - y - z, \end{cases}$ $\quad x(1) = y(1) = z(1) = 1.$

28. $\begin{cases} x_t' = 3y - x + 1, \\ y_t' = x + y + e^t, \end{cases}$ $\quad x(0) = 1,\ y(0) = -1.$

29. $\begin{cases} x_t' = y - z + 1, \\ y_t' = 2x + y + 2z, \\ z_t' = x + y + z + 4, \end{cases}$ $\quad x(0) = y(0) = z(0) = 0.$

30. $\begin{cases} 3x_t' + 2x + y_t' = 1, \\ x_t' + 4y_t' + 5y = 0, \end{cases}$ $\quad x(0) = 1,\ y(0) = -1.$

Bibliografie

1. Piscunov N.S., Calcul diferenţial şi integral, V.1 şi V.2, Chişinău, 1991, 1992.
2. Şipaciov V.S., "Matematica superioară", Chişinău, 1992.
3. Marcel Roşculeţ, Analiză matematică, Bucureşti, 1979.
4. Mariana Craiu, Vasile Tănase, Analiză matematică, Bucureşti, 1980.
5. Valter Olariu, Analiză matematică, Bucureşti, 1981.
6. Ignatieva A.V. ş.a., Curs de matematică superioară, Chişinău, 1971.
7. Fihtengolţ G.M., Bazele analizei matematice, V.1,2 Chişinău, 1968, 1970.
8. Кудрявцев Л.Д., Курс математического анализа, т.1,2, Москва. 1981.
9. Смирнов В.И., Курс высшей математики, т.1,2, Москва, 1967.
10. Ильин В.А., Позняк Э.Г., Основы математического анализа, т.1,2, Москва, 1971.
11. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И., Курс математического анализа, Москва, 1968.
12. Глаголев А.А., Солнцева Т.В., Курс высшей математики, Москва, 1971.
13. Карташев А.П., Рождественский Б.Л., Математический анализ, Москва, 1984.
14. Пизо Ш., Заманский М., Курс математики, Москва,1971.
15. Рождественский Б.Л., Лекции по математическому анализу, Москва, 1972.
16. Бермант А.Ф., Араманович И.Г., Краткий курс математического анализа для втузов, Москва, 1969.
17. Фихтенгольц Г.М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т. 2 , 3, Москва, 1970, 1969.
18. Кудрявцев Л.Д., Краткий курс математического анализа, Москва, 1969.
19. Мордкович А.Г., Солодовников А.С., Математический анализ, Москва, 1990.
20. Ion Şcerbaţchi, Curs de analiză matematică, Chişinău, 2000.
21. Ion Şcerbaţchi "Analiză matematică (probleme)", V.1, Chişinău, 1998.

22. Ion C. Şcerbaţchi "Analiză matematică (probleme)", V.2, Chişinău, 1998.
23. J. Douchet et B. Zwahlen, Calcul différentiel et intégral, t. 2 Fonctions réelles de plusieurs variables réelles, Loasanne, PPUR, 1993.
24. Сборник задач по математике для Втузов, под ред. Ефимова А.В. и Демидовича Б.П., Т.2, Москва, 1986.
25. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г., "Дифференциальные уравнения", Москва, 1980.
26. Петровский И.Г. "Лекции по теории обыкновеных дифференциальных уравнений", Москва, 1970.
27. Lavrientiev M. A. "Sur une equation différentielle du premier ordre", Math Zeitschrift, Bd.23, 1925, p.197-209.
28. Матвеев Н.М., "Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений", Москва, 1963.
29. Воробьев Н.Н., "Теория рядов", Москва, 1973.
30. Романовский П.И., "Ряды фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа", Москва, 1980.
31. Dicţionar de analiză matematică, Bucureşti, 1989.
32. Щербаков Б.А., Коренева Л.В., «О полиномиальных уравнений», Исследования по функциональному анализу и дифференциальным уравнениям, Кишинев, Штиинца, 1981.

Cuprins

Prefaţa 3

Capitolul 5. CALCULUL DIFERENŢIAL AL FUNCŢIILOR DE MAI MULTE VARIABILE.

5.1. Funcţia de mai multe variabile
5.1.1. Dependenţa funcţională dintre variabile........ 5
5.1.2. Planul euclidian şi spaţiul euclidian. Funcţii de 2 şi 3 variabile reale........ 6
5.1.3. Spaţiul R^n. Funcţii de mai multe variabile........ 9
5.2. Limita funcţiei de mai multe variabile 21
5.3. Funcţii continue
5.3.1. Continuitatea funcţiei de mai multe variabile într-un punct. Proprietăţi de bază........ 32
5.3.2. Continuitatea funcţiei de mai multe variabile pe un domeniu. Continuitatea uniformă 36
5.4. Derivatele şi diferenţialele funcţiilor de mai multe variabile
5.4.1. Derivatele parţiale ale funcţiilor de mai multe variabile 38
5.4.2. Funcţii diferenţiabile de mai multe variabile 40
5.4.3. Diferenţialele funcţiei de mai multe variabile 51
5.4.4. Derivarea funcţiilor compuse de mai multe variabile. Derivata totală. 55
5.4.5. Derivarea funcţiilor omogene. Formula Euler. 61
5.5. Funcţii implicite.
5.5.1. Funcţii implicite şi derivarea lor. 65
5.5.2. Aplicaţii geometrice. 72
5.6. Derivata în raport cu o direcţie. Gradientul funcţiei. 78
5.7. Derivatele şi diferenţialele de ordin superior.
5.7.1. Derivatele parţiale de ordin superior. 82
5.7.2. Diferenţialele de ordin superior. 88
5.7.3. Formula Taylor pentru funcţii de mai multe variabile. 94
5.8. Extremele funcţiei de mai multe variabile.
5.8.1. Maximele şi minimele funcţiilor de mai multe variabile. 99
5.8.2. Metoda pătratelor mici. 107
5.8.3. Extremele condiţionate. Valoarea cea mai mare şi valoarea cea mai mică ale funcţiei de mai multe variabile 110

5.9. Exerciţii la capitolul 5. 118
5.10. Indicaţii şi răspunsuri la capitolul 5. 120

Capitolul 6. **CALCULUL INTEGRAL AL FUNCŢIEI DE MAI MULTE VARIABILE REALE.**

6.1. Integralele ce depind de parametri.
6.1.1. Integralele proprii ce depind de parametri. 124
6.1.2. Integralele improprii cu parametri. 134
6.1.3. Integralele Euler (funcţiile Γ "gamma" şi B "beta"). 138
6.2. Integralele curbilinii.
6.2.1. Integralele curbilinii de speţa 1 (după lungimea arcului). 152
6.2.2. Aplicaţiile integralei curbilinii de speţa 1. 163
6.2.3. Integralele curbilinii de speţa 2 (după coordonate). 165
6.2.4. Independenţa integralei curbilinii de speţa 2 de forma drumului de integrare. 177
6.3. Integralele duble.
6.3.1. Definiţia integralei duble. Criterii de integrabilitate. 190
6.3.2. Proprietăţile integralelor duble. 196
6.3.3. Calculul integralelor duble. 198
6.3.4. Aplicaţiile integralelor duble. 205
6.3.5. Formula Green-Ostrogradski. 213
6.3.6. Schimbarea de variabile într-o integrala dublă. 220
6.4. Integralele triple.
6.4.1. Definiţia integralei triple şi proprietăţile ei de bază. 236
6.4.2. Calculul integralei triple. 241
6.4.3. Schimbarea de variabile în integrala triplă. 250
6.4.4. Aplicaţiile integralei triple. 268
6.5. Integralele de suprafaţă.
6.5.1. Integralele de suprafaţă de speţa 1. 271
6.5.2. Integralele de suprafaţă de speţa 2. 277
6.5.3. Relaţia dintre integralele de suprafaţă de speţa 1 şi 2. 287
6.6. Formulele Gauss-ostrogradschi şi Stokes.
6.6.1. Formula Gauss-ostrogradschi. 292
6.6.2. Formula Stokes. 296
6.7. Elemente ale teoriei câmpurilor.
6.7.1. Câmpuri scalare şi vectoriale. 300
6.7.2. Operatorii diferenţiali de ordinul 1 şi 2. Operatorii Hamilton şi Laplace. 304
6.7.3. Fluxul şi divergenţa câmpului vectorial. 312

6.7.4. Circulaţia şi rotorul câmpului vectorial. 317
6.8. Exerciţii la capitolul 6. 319
6.9. Indicaţii şi răspunsuri la capitolul 6. 338

Capitolul 7. ECUAŢII DIFERENŢIALE ORDINARE

7.1. Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi.
7.1.1. Noţiuni generale. 348
7.2. Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi integrabile în cuadraturi.
7.2.1. Ecuaţia $y' = g(x)$. 361
7.2.2. Ecuaţia $y' = g(y)$. 364
7.2.3. Ecuaţii în diferenţiale totale. 367
7.2.4. Ecuaţii diferenţiale cu variabile separate şi separabile. 370
7.2.5. Ecuaţii diferenţiale omogene. 376
7.2.6. Ecuaţii diferenţiale liniare. 382
7.2.7. Ecuaţia Bernoulli. 389
7.2.8. Ecuaţia Riccati. 391
7.2.9. Factorul integrant. 396
7.3. Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi nerezolvabile în raport cu derivata, dar integrabile în cuadraturi.
7.3.1. Ecuaţia care nu conţine în mod explicit funcţia căutată. 401
7.3.2. Ecuaţia care nu conţine în mod explicit variabila independentă. 403
7.3.3. Ecuaţia Lagrange. 405
7.3.4. Ecuaţia Clairaut. 409
7.4. Ecuaţii diferenţiale de ordin superior. Noţiuni generale. ... 411
7.5. Ecuaţii diferenţiale de ordin superior ce admit micşorarea ordinului.
7.5.1. Ecuaţia $y^{(n)} = f(x)$. 415
7.5.2. Ecuaţia $F\left(x, y^{(n)}\right) = 0$. 416
7.5.3. Ecuaţia $F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}\right) = 0$. 418
7.5.4. Ecuaţia $F\left(y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$. 418
7.5.5. Ecuaţia $F\left(y^{(n-2)}, y^{(n)}\right) = 0$. 419
7.5.6. Ecuaţia $F\left(y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0$. 420
7.5.7. Ecuaţia $F\left(x, y, y', ..., y^{(n)} = 0\right)$, unde funcţia F este omogenă în raport cu $y, y', ..., y^{(n)}$. 421

7.6. Ecuaţii diferenţiale liniare de ordin superior.
7.6.1. Noţiuni generale despre ecuaţii liniare de ordin superior. . 423
7.6.2. Ecuaţii liniare omogene cu coeficienţi arbitrari. 425
7.6.3. Ecuaţii liniare omogene cu coeficienţi constanţi. 436
7.6.4. Ecuaţii liniare neomogene cu coeficienţi arbitrari. 443
7.6.5. Ecuaţii liniare neomogene cu coeficienţi constanţi. 448
7.6.6. Ecuaţia diferenţială Euler. 459
7.6.7. Ecuaţia diferenţială Cebâsev. 461
7.7. Sisteme de ecuaţii diferenţiale. 462
7.8. Exerciţii la capitolul 7. 472
7.9. Indicaţii şi răspunsuri la capitolul 7. 475

Capitolul 8. SERII

8.1. Serii numerice.
8.1.1. Serii numerice. Noţiuni generale. 479
8.1.2. Serii cu termeni pozitivi. 490
8.1.3. Serii cu termeni oarecare. 507
8.2. Serii de funcţii şi de puteri.
8.2.1. Serii de funcţii. 514
8.2.2. Serii de puteri. Proprietăţi de bază. 528
8.2.3. Serii Taylor şi MacLaurin. 539
8.2.4. Dezvoltarea funcţiilor elementare în serii de puteri. Aplicaţii. 543
8.2. Serii Fourier.
8.2.1. Sistemul ortogonal de funcţii. Seria generalizată Fourier. .553
8.2.2. Seria trigonometrică Fourier. Teorema Dirichlet. 558
8.2.3. Diverse dezvoltări în seria Fourier. 564
8.2.4. Abaterea medie pătratică a funcţiilor. Aproximaţia funcţiei prin polinoame trigonometrice. 570
8.2.5. Forma complexă a seriei Fourier. 572
8.2.6. Integrala Fourier. 574
8.2.7. Integrala Fourier în formă complexă. Transformata Fourier. 580
8.3. Exerciţii la capitolul 8. 582
8.4. Indicaţii şi răspunsuri la capitolul 8. 586

Anexă: Lucrări de control. 589

Bibliografie 630

Cuprins 632