MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ȘI TINERETULUI

Ion D. Ion

Gabriela Streinu-Cercel

Adrian P. Ghioca

Neculai I. Nediță

Eugen Câmpu

Nicolae Angelescu

Romeo Ilie

Boris Singer

MATEMATICĂ

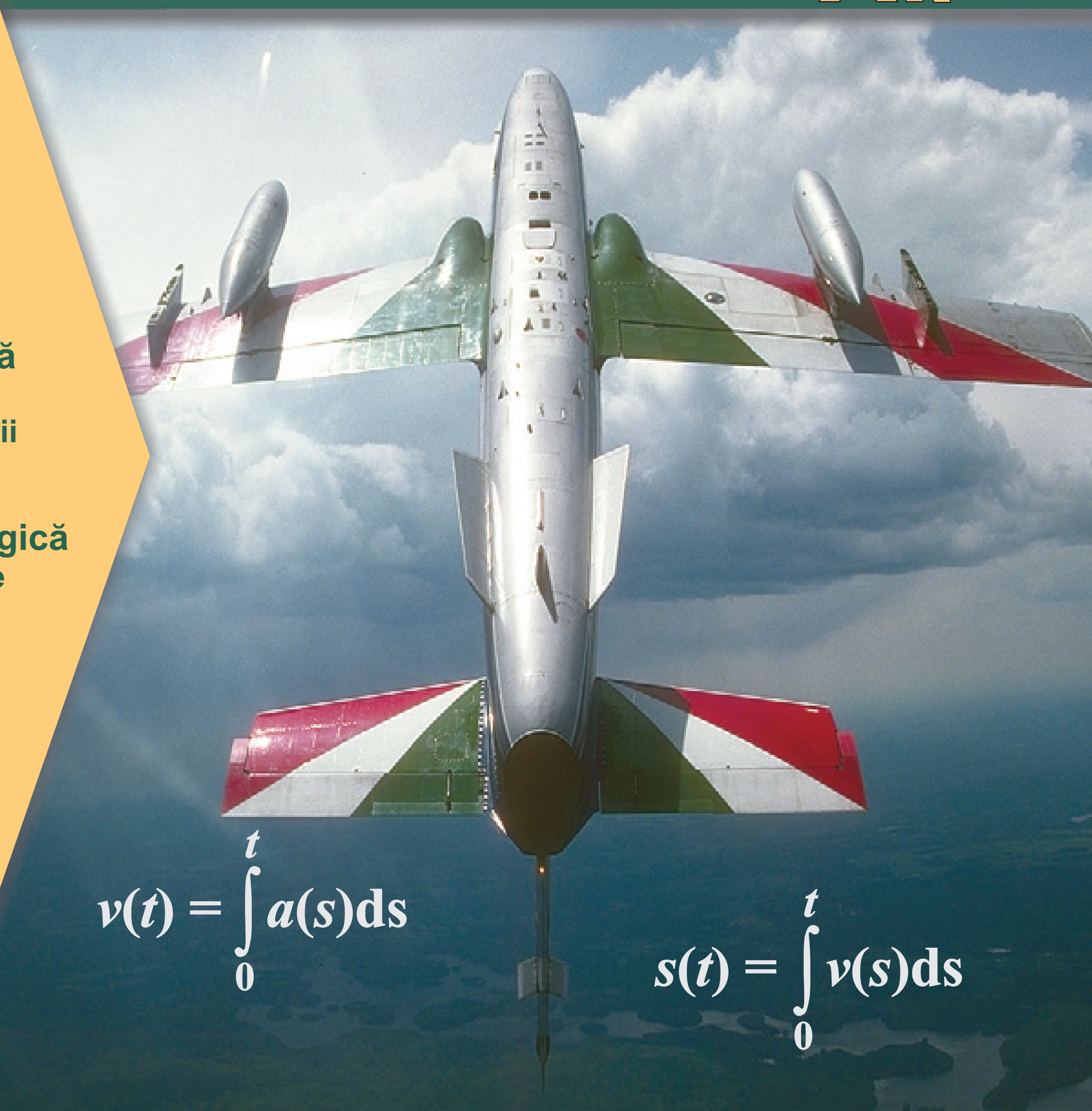
Manual pentru clasa a XII-a

M2

Filiera teoretică
Profil real
- științe ale naturii

Filiera tehnologică
- toate calificările profesionale

SIGMA



$$v(t) = \int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s$$

$$s(t) = \int_0^t v(s)\,\mathrm{d}s$$

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ȘI TINERETULUI

Ion D. Ion

Gabriela Streinu-Cercel

Adrian P. Ghioca

Neculai I. Nediță

Eugen Câmpu

Nicolae Angelescu

Boris Singer

Romeo Ilie

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a XII-a

M2

Filiera teoretică

Profil real

Specializare: științe ale naturii

Filiera tehnologică

Toate calificările profesionale

SIGMA

Manualul a fost aprobat prin Ordinul Ministrului Educației, Cercetării și Tineretului nr. 1561-43 din 23.07.2007, în urma evaluării calitative și este realizat în conformitate cu programa analitică aprobată prin Ordin al Ministrului Educației și Cercetării nr. 5959 din 22.12.2006.

Referenți: prof. grad I *Gabriela Oprea*
prof. dr. *Manuela Prajea*

Redactare: Corina Cîrtoaje, Marius Ciocîrlan

Tehnoredactare: Camelia Cristea

Coperta: Camelia Cristea

ISBN 978-973-649-365-2

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

Matematică : M2 : clasa a XII-a / Ion D. Ion, Neculai I. Nediță, Adrian P. Ghioca, ... - București : Sigma, 2007
ISBN 978-973-649-365-2

I. Ion, Ion D.
II. Nediță, Neculai I.
III. Ghioca, Adrian P.

51(075.35)

Editura SIGMA

Sediul central:
Str. G-ral Berthelot, nr. 38, sector 1, București, cod 010169
Tel. / fax: 021-313.96.42; 021-315.39.43; 021-315.39.70
e-mail: office@editurasigma.ro; web: www.editurasigma.ro

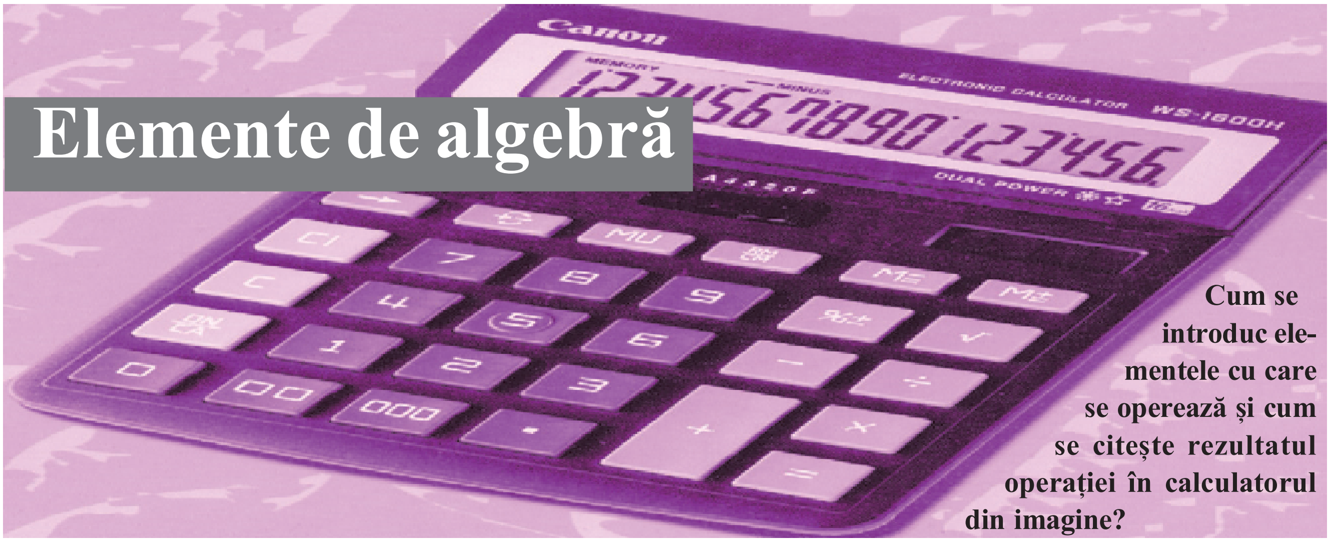
Distribuție:
Tel. / fax: 021-243.42.40; 021-243.40.52; 021-243.40.35
Puteți transmite comenzi folosind apelul UniTel la numerele:
080.10000.10; 080.10000.11 (în rețeaua ROMTELECOM)
e-mail: comenzi@editurasigma.ro; sigmadistrib@yahoo.com

Cuprins

I. Elemente de algebră

II. Elemente de analiză matematică

Elemente de algebră



Cum se introduc elementele cu care se operează și cum se citește rezultatul operației în calculatorul din imagine?

Grupuri

Legi de compoziție

Pasul decisiv care a marcat trecerea de la aritmetică la algebră a fost înlocuirea operațiilor cu numere, prin operații cu litere (simboluri) reprezentând numere. Ulterior, o treaptă superioară de abstractizare s-a realizat prin folosirea unor simboluri care reprezentau și alte obiecte matematice: mulțimi, funcții, matrice, polinoame...

Definiția unei legi de compoziție

O operație algebrică (binară) pe o mulțime nevidă M combină componentele oricărui cuplu (x, y) de elemente din M și are ca rezultat un element tot din M, notat, de exemplu, cu $x * y$. Un model pentru acțiunea unei operații este cutia neagră (black box) cu două intrări și o singură ieșire. La cele două intrări pot fi introduse, într-o ordine precizată, două elemente arbitrare $x, y \in M$ și, de fiecare dată, la ieșire se obține un element $x * y \in M$, unic determinat de cuplul (x, y). Se realizează astfel o *corespondență funcțională* $\varphi : M \times M \to M$, prin care la orice pereche ordonată $(x, y) \in M \times M$ se asociază un element unic determinat $\varphi(x, y) \in M$, notat eventual $x * y$.

Definiție. Fie M o mulțime nevidă. O funcție

$$\varphi : M \times M \to M,\ (x, y) \mapsto \varphi(x, y),$$

se numește *lege de compoziție* (*internă*) sau *operație algebrică binară* pe *mulțimea* M. Elementul $\varphi(x, y) \in M$ se numește *compusul lui* x *cu* y *prin* φ (în această ordine!).

M se numește *mulțimea suport* a operației φ.

Mulțimea M înzestrată cu operația φ se notează (M, φ).

În locul notației funcționale incomode $\varphi(x, y)$, de obicei se folosește fie notația aditivă $x + y$, fie notația multiplicativă $x \cdot y$ sau xy.

În *notația aditivă*, elementul $x + y$ se numește *suma* lui x cu y, iar legea de compoziție se numește *adunare*. Elementele x, y se numesc *termenii* sumei $x + y$.

Cum acționează o operație?

1) Pentru $a, b \in \mathbb{N}^*$, notăm cu $a \vee b$ c.m.m.d.c. al lui a și b. Pe $\mathbb{N}^*$ definim operația $(a, b) \to a \vee b$.

a) Calculați $18 \vee 12$, $(18 \vee 12) \vee 15$ și $18 \vee (12 \vee 15)$.

b) Arătați că $1 \vee a = 1$ și $a \vee a = a, \forall\, a \in \mathbb{N}^*$.

2) Fie $M = \mathbb{N}^*$. Dacă $a, b \in M$, notăm cu $a \wedge b$ c.m.m.m.c. al lui a și b. Pe M se obține legea de compoziție (internă) $M \times M \to M$, $(a, b) \to a \wedge b$.

a) Calculați $18 \wedge 12$, $(18 \wedge 12) \wedge 15$, $18 \wedge (12 \wedge 15)$.

b) Arătați că $1 \wedge a = a$ și $a \wedge a = a, \forall a \in M$.

c) Verificați că $(18 \vee 12) \cdot (18 \wedge 12) = 18 \cdot 12$.

3) Pentru $a, b \in \mathbb{Z}$ definim

$$a * b = \frac{a + b + |a - b|}{2},\quad a \circ b = \frac{a + b - |a - b|}{2}.$$

a) Calculați $4 \circ 5$; $5 \circ 4$; $3 * 4$; $4 * 3$.

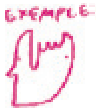
b) Arătați că $a * b = \max\{a, b\}$ și $a \circ b = \min\{a, b\}$.

c) Arătați că $a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c)$.

În *notația multiplicativă* elementul xy se numește *produsul* lui x cu y, iar legea de compoziție φ se numește *înmulțire*. Elementele x, y se numesc *factorii* produsului xy.

Uneori, obligați de tradiție sau din necesitatea de a folosi simultan mai multe legi de compoziție, utilizăm notații ca: $x \circ y, x * y, x \wedge y, x \vee y, x \perp y, x \top y, x \oplus y$ etc.

Expresia $x * y$ se citește „x compus cu y“ (sau „x stea y“) și reprezintă rezultatul acțiunii operației „$*$“ asupra cuplului (x, y).



... de legi de compoziție.

1) *Adunarea și înmulțirea numerelor naturale* asociază fiecărei perechi ordonate de numere naturale (x, y) suma lor $x + y$, respectiv produsul lor xy.

2) *Adunarea și înmulțirea matricelor pătratice* de ordin n asociază fiecărei perechi ordonate (A, B) de matrice din $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suma $A + B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, respectiv produsul $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3) *Compunerea funcțiilor*

Fie A o mulțime nevidă și $\mathcal{F}(A) = \{f \mid f : A \to A,\ f \text{ funcție}\}$. Dacă $f, g \in \mathcal{F}(A)$, funcția $f \circ g : A \to A$, definită prin $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, se numește *compusa lui f cu g* (în această ordine).

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & A \arrow[r, "f"] & A \end{tikzcd}$$

Fie $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ o mulțime finită cu n elemente. Acțiunea unei legi de compoziție φ pe M poate fi descrisă prin *tabla Cayley* a operației φ. Când n este suficient de mic, tabla operației constituie un instrument eficace de studiu.

Cayley Arthur (1821-1895), matematician englez, profesor la Cambridge, cercetător în domeniul teoriei matricelor și determinanților; a introdus calculul simbolic, teoria grupurilor, ecuații diferențiale, astronomia sferică ....

Tabla operației φ (*tabla lui Cayley*) pe mulțimea M este un tabel cu linii și coloane corespunzătoare elementelor mulțimii M. La intersecția liniei a_i cu coloana a_j din *tabla lui Cayley* se află compusul lui a_i cu a_j prin operația φ.

φ	a_1	a_2	...	a_j	...	a_n
a_1				$\vdots$		
a_2				$\vdots$		
$\vdots$				$\vdots$		
a_i	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\varphi(a_i, a_j)$		
$\vdots$						
a_n						

În notație multiplicativă avem:

$\cdot$	a_1	$\cdots$	a_j	$\cdots$	a_n
a_1	a_1a_1	$\cdots$	a_1a_j	$\cdots$	a_1a_n
$\vdots$					
a_i	a_ia_1	$\cdots$	a_ia_j	$\cdots$	a_ia_n
$\vdots$					
a_n	a_na_1	$\cdots$	a_na_j	$\cdots$	a_na_n

4) Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Notăm cu M mulțimea tuturor submulțimilor lui A (inclusiv cea vidă), $M = \{X \mid X \subseteq A\}$.
a) Câte elemente are mulțimea M?
b) Considerând pe M legile de compoziție
$M \times M \to M, (X, Y) \to X \cup Y$ și
$M \times M \to M, (X, Y) \to X \cap Y$,
calculați $X \cup Y, X \cap Y, X \cap (Y \cup Z)$ și $(X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ știind că $X = \{1, 2\}$, $Y = \{2, 3, 4\}$ și $Z = \{5, 3\}$.
c) Arătați că $\varnothing \cup X = X, A \cap X = X, \forall X \in M$.

5) Fie $\mathcal{M} = \{X \mid X \subset A\}$ mulțimea submulțimilor lui $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Dacă $X, Y \in M$, fie $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ (*diferența simetrică* a lui X și Y). Considerăm pe M legea de compoziție $M \times M \to M, (X, Y) \to X \Delta Y$
a) Calculați $X \Delta Y$ și $X \Delta X$, dacă $X = \{1, 2, 3, 5\}$ și $Y = \{2, 3, 4\}$.
b) Pentru mulțimile X și Y definite la punctul a) calculați $(X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$.
c) Demonstrați că
$\forall X \in M, \varnothing \Delta X = X$ și $X \Delta X = \varnothing$.
d) Arătați că $\forall X, Y \in M$.
$(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$.

6) Construiți tabla legii de compoziție $\varphi : M \times M \to M$, unde $M = \{a, b, c\}$, $\varphi((a, a)) = a$; $\varphi((a, b)) = b$, $\varphi((a, c)) = c$; $\varphi((b, a)) = b$; $\varphi((b, b)) = c$; $\varphi((b, c)) = a$; $\varphi((c, a)) = c$; $\varphi((c, b)) = a$; $\varphi((c, c)) = b$.

7) Construiți tabla legii de compoziție $\varphi : M \times M \to M$, $\varphi(x, y) = |x - y|$, unde $M = \{0, 1, 2, 3\}$.

8) Fie $M = \{\varnothing, X, Z, Y\}$ mulțimea părților lui $A = \{1, 2\}$, unde $X = \{1\}$, $Y = \{2\}$, $Z = \{1, 2\}$.

Completați tablele legilor de compoziție „$\cup$“, „$\cap$“ și „Δ“ (reuniunea, intersecția și diferența simetrică).

EXEMPLU

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $A = \{1, 2, ..., n\}$. O funcție $f : A \to A$ poate fi descrisă în acest caz printr-un tabel cu două linii: $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & i & ... & n \\ f(1) & f(2) & ... & f(i) & ... & f(n) \end{pmatrix}$.

Evident, f este funcție bijectivă dacă și numai dacă în a doua linie apare o singură dată fiecare dintre numerele 1, 2, ..., n.

Pentru $A = \{1, 2\}$, mulțimea $\mathscr{F}(A) = \{ \varphi \mid \varphi : A \to A\}$ este formată din elementele:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tabla operației de compunere a funcțiilor din $\mathscr{F}(A)$ este prezentată alăturat. De exemplu, $f \circ h = g$ pentru că $(f \circ h)(1) = 1 = g(1)$ și $(f \circ h)(2) = 1 = g(2)$. În tablă, la intersecția liniei lui f cu coloana lui h apare funcția g.

$\circ$	e	f	g	h
e	e	f	g	h
f	f	e	h	g
g	g	g	g	g
h	h	h	h	h

PROBLEME PROPUSE

1. Pe mulțimea $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ se definește legea de compoziție $\varphi : M \times M \to M$, $\varphi(x, y) = |x - y|$.

Alcătuiți tabla operației φ.

2. Pe $\mathbb{N}$ se definesc legile „$\vee$“ și „$\wedge$“ prin $a \vee b = \text{c.m.m.d.c.}\{a, b\}$ și $a \wedge b = \text{c.m.m.m.c.}\{a, b\}$, $\forall\, a, b \in \mathbb{N}$. Fie $H = \{d \in \mathbb{N} \mid d \text{ divide } 12\}$.

Alcătuiți tablele operațiilor „$\vee$“ și „$\wedge$“ pe H.

3. Fie $A = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$, $\mathscr{F}(A) = \{f \mid f : A \to A\}$ și $f_1, f_2, f_3 \in \mathscr{F}(A)$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{x + \sqrt{3}}{1 - x\sqrt{3}}$, $f_3(x) = \frac{x - \sqrt{3}}{1 + x\sqrt{3}}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Alcătuiți tabla operației de compunere a funcțiilor pe $H = \{f_1, f_2, f_3\}$.

4. Fie mulțimea cu trei elemente $M = \{a, b, c\}$. Câte legi de compoziție se pot defini pe M ?

5. Fie $A = \{1, 2, 3\}$ și $\mathscr{F}(A) = \{f \mid f : A \to A\}$. Stabiliți care sunt elementele mulțimii $H = \{f \in \mathscr{F}(A) \mid f \text{ bijectivă}\}$ și alcătuiți tabla operației de compunere a funcțiilor.

6. Pe mulțimea $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ se definește legea de compoziție „$*$” prin $x * y = xy - x - y + 2$, $\forall x, y \in M$.

Alcătuiți tabla operației „$*$”.

7. Pe mulțimea $A = \{\pm 1, \pm i, 0\}$ se definește legea de compoziție „$\top$” astfel:

$x \top y = xy + 3ix + 3iy - 9 - 3i$, pentru orice $x, y \in A$.

Alcătuiți tabla operației „$\top$”.

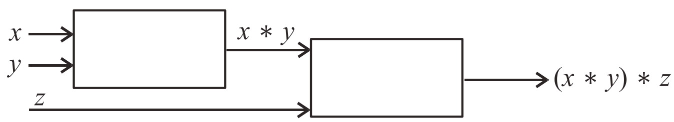
Proprietăți ale legilor de compoziție

Noțiunea de lege de compoziție, așa cum a fost introdusă în paragraful precedent, prezintă un mare grad de generalitate. În definiția unei legi de compoziție se ignoră atât natura elementelor mulțimii suport, cât și modul efectiv în care acționează operația. Singura restricție care s-a pus a fost ca la orice pereche ordonată (x, y) de elemente să se asocieze un element și numai unul. Din acest motiv, pe o mulțime suport se pot defini foarte multe legi de compoziție, în majoritatea lor neinteresante. Astfel, dacă mulțimea suport are doar 3 elemente, atunci se pot defini $3^9 = 19\,683$ legi de compoziție. Din această cauză, studiul legilor de compoziție bazat doar pe definiția lor este foarte sărac în rezultate. S-a dovedit utilă ideea de a studia legi de compoziție cu anumite proprietăți care, în multe cazuri concrete (operații cu numere, operații cu matrice etc.), s-au folosit în efectuarea calculului algebric și în stabilirea unor rezultate remarcabile, importante din punct de vedere teoretic și practic.

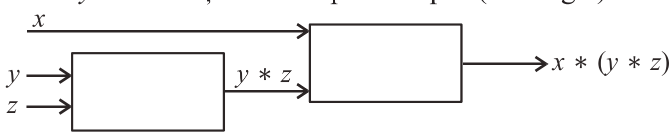
♦ *Asociativitate.*

Fie M o mulțime nevidă înzestrată cu o lege de compoziție „$*$”. Pentru a compune trei elemente x, y și z, în această ordine, trebuie să mai precizăm (prin paranteze) ordinea în care se efectuează compunerea: $(x*y)*z$ sau $x*(y*z)$.

Prezența parantezelor în expresia $(x*y)*z$ indică următoarea succesiune de calcule: se află mai întâi compusul lui x cu y și apoi acesta se compune (la dreapta!) cu z.



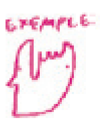
Prezența parantezelor în expresia $x*(y*z)$ impune să aflăm mai întâi $y*z\in M$ și să-l compunem apoi (la stânga!) cu x.



Vom studia în continuare doar legi de compoziție cu proprietatea că $(x*y)*z=x*(y*z),\ \forall x, y, z\in M$.

În acest sens, introducem următoarea noțiune:

Definiție. O *lege de compoziție* „$*$“ se numește *asociativă* dacă:
$$(x*y)*z=x*(y*z),\ \forall x, y, z\in M.$$



1) Adunarea și înmulțirea numerelor reale sunt legi de compoziție asociative, pentru că $\forall\ x, y, z \in \mathbb{R}$:
$$(x + y) + z = x + (y + z) \text{ și } (xy)z = x(yz).$$

2) Adunarea și înmulțirea matricelor pătratice cu elemente reale sunt asociative, pentru că $\forall\ A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
$$(A + B) + C = A + (B + C),\ (AB)C = A(BC).$$

3) Compunerea pe mulțimea $\mathcal{F}(A)$ a funcțiilor $f : A \to A$ este asociativă, pentru că $\forall f, g, h\in\mathcal{F}(A),\ \ (f\circ g)\circ h= f\circ(g\circ h)$.

4) Operația de scădere pe mulțimea $\mathbb{Z}$ nu este asociativă. Exemplu, $(3 - 7) - 1 \neq 3 - (7 - 1)$.

Identificarea unor proprietăți ale legilor de compoziție.

1) Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție „$*$“ prin $x * y = xy - x - y + 2,\ \forall\, x, y\in \mathbb{R}$.
Calculați $(x * y) * z$ și $x * (y * z)$ și deduceți că legea de compoziție „$*$“ este asociativă.

2) Pe $\mathbb{C}$ se definește legea de compoziție „$*$“ prin $u * v = uv + i(u + v) - 1 - i$, $\forall\, u, v\in \mathbb{C}$.
Calculați $(u*v)*w$ și $u*(v*w)$. Arătați că legea de compoziție „$*$“ este asociativă.

3) Pe intervalul $M = (0, \infty)$ definim legea de compoziție „$*$“ prin $x * y = e^{\ln x\cdot\ln y}$, $\forall\ x, y \in M$, unde e este baza logaritmilor naturali. Arătați că legea de compoziție „$*$“ este asociativă.

4) Fie legile de compoziție asociative „$\top$“ și „$\perp$“ definite pe mulțimile M, respectiv N. Pe $M \times N$ definim legea de compoziție „$*$“ prin
$(x, y)*(x', y')\overset{\text{def}}{=}(x \top x',\ y\perp y')$. Arătați că legea de compoziție „$*$“ este asociativă.

5) Pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ definim operația „$*$“, $(x, y)*(x', y')\overset{\text{def}}{=}(x+x',\ yy')$.
Arătați că „$*$“ este asociativă.

6) Pe $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definim operația „$*$“ prin
$A*B\overset{\text{def}}{=}AB-BA,\ \forall A, B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
a) Arătați că „$*$“ nu este asociativă.
b) Arătați că $A * A = O_2$ și
$(A*B)*C + (B*C)*A + (C*A)*B = O_2$, $\forall\ A, B, C\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

♦ *Comutativitate.*

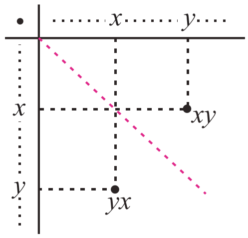
Așa cum s-a observat, proprietatea de asociativitate simplifică calculul algebric. Un plus de suplețe este oferit de operații care au proprietatea că rezultatul compunerii oricăror două elemente nu depinde de ordinea în care sunt considerate.

Definiție. O *lege de compoziție* $M \times M \to M,\ (x, y) \mapsto x * y$ se numește *comutativă* dacă $x * y = y * x,\ \forall x, y \in M$.

EXEMPLU

Adunarea și înmulțirea numerelor reale (sau complexe) sunt legi de compoziție comutative:
$\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ x + y = y + x$; $\forall\, x, y \in \mathbb{C},\ x + y = y + x$.
$\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ x \cdot y = y \cdot x$; $\forall\, x, y \in \mathbb{C},\ x \cdot y = y \cdot x$.

Dacă o operație este comutativă, atunci tabla operației este simetrică în raport cu diagonala principală; adică elementul *xy* de la intersecția liniei lui *x* cu coloana lui *y* trebuie să fie egal cu elementul *yx* de la intersecția liniei lui *y* cu coloana lui *x*, oricare ar fi $x, y \in M$.



Numeroase legi de compoziție se introduc cu ajutorul altora deja cunoscute. Aceste operații pot prelua unele proprietăți de la cele de plecare prin „mecanismul“ dat chiar de definiția lor. Astfel, comutativitatea adunării matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este o consecință a proprietății de comutativitate a adunării numerelor reale.

Într-adevăr, dacă $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$,

atunci $A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = B + A.$$

Să observăm că înmulțirea matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ nu este comutativă, cu toate că înmulțirea numerelor reale este comutativă. Pentru a susține această afirmație, trebuie să arătăm că avem cel puțin un (contra)exemplu.

EXEMPLU

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$

și $B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$, deci $AB \neq BA$.

7) Verificați dacă operația de compunere a funcțiilor de tipul $f : \{1, 2\} \to \{1, 2\}$, este comutativă. Folosiți tabla operației.

Indicație.

Funcțiile de tipul din enunț sunt

$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Tabla operației este

$\circ$	e	f	g	h
e	e	f	g	h
f	f	e	h	g
g	g	g	g	g
h	h	h	h	h

8) Fie matricele $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$.

Arătați că $A_\alpha A_\beta = A_{\alpha+\beta},\ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Arătați că operația indusă pe $M = \{A_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ de înmulțirea matricelor este comutativă.

9) Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție „$*$“ prin $x * y \overset{\text{def}}{=} xy + 2ax + by$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$, unde a, b sunt parametrii reali.

Arătați că legea de compoziție „$*$“ este comutativă dacă și numai dacă $b = 2a$.

10) Pe mulțimea M este definită o lege de compoziție asociativă și comutativă.

Arătați că oricare ar fi $x_1, x_2, x_3 \in M$ și oricare ar fi funcția bijectivă $\sigma : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ avem $x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} = x_1 x_2 x_3$.

11) Fie legile de compoziție comutative „$\top$“ și „$\perp$“ definite pe mulțimile M, respectiv N. Pe $M \times N$ definim legea de compoziție „$*$“ prin $(x, y) * (x', y') \overset{\text{def}}{=} (x \top x', y \perp y')$.

Arătați că legea de compoziție „$*$“ este comutativă.

12) Pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ definim legea de compoziție „$*$“ prin $(x, y) * (x', y') \overset{\text{def}}{=} (xx', y + y')$.

Arătați că legea de compoziție „$*$“ este comutativă.

♦ *Element neutru. Elemente simetrizabile.*

Numărul 0 are proprietatea $0 + x = x + 0 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Numărul 1 are proprietatea $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, matricele $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ au proprietățile:

$$O_2 + A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+a_{11} & 0+a_{12} \\ 0+a_{21} & 0+a_{22} \end{pmatrix} = A = A + O_2 \quad \text{și}$$

$$I_2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A = AI_2,\ \forall A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Așadar, pentru operațiile prezentate mai sus, am reușit să precizăm câte un element în mulțimea suport a operației care are efect nul la compunere cu oricare element din mulțimea suport.

Definiție. Un element $e \in M$ se numește *element neutru* pentru legea de compoziție „$*$", dacă $\forall x \in M \ \ e * x = x * e = x$.

Teoremă. Dacă o lege de compoziție admite element neutru, atunci acesta este unic.

Demonstrație.

Fie e și e' două elemente neutre pentru o lege de compoziție $M \times M \to M$, $(x, y) \mapsto x * y$. Avem $e * e' = e'$ pentru că e este element neutru. De asemenea, $e * e' = e$ pentru că și e' este element neutru. Rezultă că $e = e'$. ■

Dacă o operație pe M este notată aditiv și admite element neutru, acesta se numește *elementul zero* și se notează de regulă cu 0. Avem $0 + x = x + 0 = x$, $\forall x \in M$.

Când operația se notează multiplicativ, elementul neutru, dacă există, se notează de regulă cu 1 și se numește *elementul unitate*. Vom avea $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$, $\forall x \in M$.

În unele situații se folosesc notații specifice pentru elementul neutru: I_n pentru înmulțirea matricelor pătratice de ordin n, 1_A pentru operația de compunere a funcțiilor $f : A \to A$ etc.

1) Fie A o mulțime nevidă. Funcția identică a lui A, $1_A : A \to A$, $1_A(x) = x$ este elementul neutru al operației de compunere pe mulțimea $\mathcal{F}(A) = \{ f \mid f : A \to A\}$ pentru că $1_A \circ f = f \circ 1_A = f$, $\forall f \in \mathcal{F}(A)$.

2) Matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este elementul neutru al operației de înmulțire a matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru că $I_2 A = AI_2 = A, \forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3) Operația indusă de înmulțirea numerelor întregi pe submulțimea $2\mathbb{Z} = \{2q \mid q \in \mathbb{Z}\}$ nu admite element neutru.

13) Fie următoarele legi de compoziție:

$*$	m	n	p	q
m	m	n	p	q
n	n	m	p	q
p	p	q	n	m
q	q	p	m	n

$\circ$	α	β	γ	δ	ε
α	ε	α	δ	β	γ
β	α	β	γ	δ	ε
γ	δ	γ	α	ε	β
δ	β	δ	ε	γ	α
ε	γ	ε	β	α	δ

Pentru fiecare lege de compoziție specificați care este elementul neutru.

14) Precizați dacă următoarele legi de compoziție sunt bine definite pe mulțimile indicate și, în acest caz, determinați elementul neutru (dacă există):

a) $x * y = \dfrac{xy}{2xy - x - y + 1}$ pe $(0, 1)$;

b) $x * y = xy - 4x - 4y + 20$ pe $(4, \infty)$;

c) $x * y = \dfrac{4xy + 3}{4x + 4y + 4}$ pe $\left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right)$;

d) $x * y = x^2 y$ pe $\mathbb{R}$.

Indicație.

a) Arătăm că operația este bine definită: Fie $x, y \in (0, 1)$.

$$\frac{xy}{2xy - x - y + 1} = \frac{xy}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}}.$$

Avem: $\left|2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)\left(y - \dfrac{1}{2}\right)\right| < 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

și $2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)\left(y - \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{2} > 0$.

Ca urmare, $x * y = \dfrac{xy}{2xy - x - y + 1} > 0$.

În plus, $x * y = \dfrac{xy}{2xy - x - y + 1} < 1$ pentru că $xy - x - y + 1 > 0$.

Determinarea elementului neutru: $\forall x \in (0, 1)$, avem:

$x * e = x$, $\dfrac{xe}{2xe - x - e + 1} = x$,

$2e - 1 = x(2e - 1)$. Rezultă $e = \dfrac{1}{2} \in (0, 1)$.

Analog, dacă $\forall x \in (0, 1)$, $e * x = x$, atunci obținem $e = \dfrac{1}{2}$.

Definiție. Fie M o mulțime nevidă înzestrată cu o lege de compoziție „$*$“ asociativă și cu element neutru e.

Spunem că un *element* $x \in M$ este *simetrizabil* în raport cu legea de compoziție „$*$“ (asociativă și cu element neutru), dacă există $x' \in M$ astfel încât $x' * x = x * x' = e$. Elementul x' cu această proprietate se numește simetricul (inversul sau opusul) lui x.

Proprietate. Dacă un element este simetrizabil, atunci admite un unic element simetric.

Demonstrație. Fie $x',\ x'' \in M$ care verifică aceeași proprietate: $x' * x = x * x' = e$ și $x'' * x = x * x'' = e$. Avem
$x'' = x'' * e = x'' * (x * x') = (x'' * x) * x' = e * x' = x'$. ■

În notație multiplicativă simetricul lui x, în caz că există, se notează cu x^{-1} și se numește *inversul lui* x; în notație aditivă se notează cu $-x$ și se numește *opusul lui* x. Așadar $x^{-1}x = xx^{-1} = 1$, respectiv $(-x) + x = x + (-x) = 0$.

Cum $e * e = e$, elementul neutru este simetrizabil și simetricul său este tot e.

În notație multiplicativă avem $1^{-1} = 1$.

În notație aditivă avem $-0 = 0$.

EXEMPLU

Matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ este simetrizabilă (inversabilă) în raport cu operația de înmulțire a matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Într-adevăr, $\det(A) = 2 \neq 0$. Atunci există A^{-1},

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\quad AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

și analog $A^{-1}A = I_2$.

Teoremă. Dacă $x, y \in M$ sunt simetrizabile în raport cu o lege de compoziție „$*$“ (asociativă și cu element neutru), atunci $x * y$ și x' sunt simetrizabile. În plus avem:

(1) $\boxed{(x * y)' = y' * x'}$;

(2) $\boxed{(x')' = x\,.}$

Demonstrație. Avem: $(y' * x') * (x * y) = y' * (x' * (x * y)) =$
$= y' * ((x' * x) * y) = y' * (e * y) = y' * y = e$ și analog $(x * y) * (y' * x') = e$. Rezultă că $x * y$ este simetrizabil și deci $(x * y)' = y' * x'$. Din $x' * x = x * x' = e$, rezultă că x' este simetrizabil și $(x')' = x$. ■

Proprietățile (1) și (2) în scriere multiplicativă devin $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$, $(x^{-1})^{-1} = x$, iar în cea aditivă $-(x + y) = (-y) + (-x)$, $-(-x) = x$.

15) Fie următoarele legi de compoziție definite cu ajutorul tabelelor:

$*$	m	n	p	q
m	m	n	p	q
n	n	m	p	q
p	p	q	n	m
q	q	p	m	n

$\circ$	α	β	γ	δ	ε
α	ε	α	δ	β	γ
β	α	β	γ	δ	ε
γ	δ	γ	α	ε	β
δ	β	δ	ε	γ	α
ε	γ	ε	β	α	δ

Pentru fiecare dintre aceste legi de compoziție, scrieți care este elementul neutru și apoi scrieți care este simetricul fiecărui element.

16) Folosiți tabla compunerii funcțiilor
$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
pentru a arăta că funcțiile e și f sunt simetrizabile.

$\circ$	e	f	g	h
e	e	f	g	h
f	f	e	h	g
g	g	g	g	g
h	h	h	h	h

17) Studiați existența elementelor simetrizabile pentru următoarele legi de compoziție:

a) $x * y = \dfrac{xy}{2xy - x - y + 1}$ pe $(0,\ 1)$;

b) $x * y = xy - 4x - 4y + 20$ pe $(4, \infty)$;

c) $x * y = \dfrac{4xy + 3}{4x + 4y + 4}$ pe $\left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right)$;

d) $x * y = x^2y$ pe $\mathbb{R}$;

e) $x * y = x^{\ln y}$ pe $(0; \infty)$;

f) $x * y = e^{\ln x \ln y}$ pe $(0; \infty)$.

Indicație.

a) $\forall x \in (0, 1)$, avem: $x * x' = e$,
$\dfrac{xx'}{2xx' - x - x' + 1} = \dfrac{1}{2}$, $x' = 1 - x \in (0, 1)$.

Analog, $x' * x = e$, $x' = 1 - x \in (0, 1)$.

Exerciții rezolvate.

1) Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ definim legea de compoziție „$\circ$" prin $x \circ y \stackrel{\text{def}}{=} x + y - xy$, numită *compunerea circulară*. Să verificăm că legea de compoziție „$\circ$" este asociativă, comutativă, are element neutru și să determinăm elementele simetrizabile.

Soluție. Pentru $x, y, z \in \mathbb{Z}$, $(x \circ y) \circ z = (x + y - xy) \circ z = x + y - xy + z - (x + y - xy)z = x + y + z - xy - xz - yz + xyz$ și $x \circ (y \circ z) = x \circ (y + z - yz) = x + y + z - yz - x(y + z - yz) = x + y + z - yz - xy - xz + xyz$, de unde $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$. De asemenea, $x \circ y = x + y - xy = y + x - yx = y \circ x$, $\forall\, x, y \in \mathbb{Z}$. În concluzie, operația „$\circ$" este asociativă și comutativă. Dacă $e \in \mathbb{Z}$ este element neutru pentru „$\circ$", atunci $x = e \circ x = e + x - ex$, $\forall x \in \mathbb{Z}$, de unde $e = ex$. Luând $x = 0$, obținem $e = 0$. Cum $0 \circ x = 0 + x - 0 + x = x = x \circ 0$, $\forall\, x \in \mathbb{Z}$, rezultă că $e = 0$ este elementul neutru. Dacă $a \in \mathbb{Z}$ este simetrizabil, atunci există $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a \circ x = 0$, ceea ce revine la $(a - 1)x = a$. Această ecuație admite soluție în $\mathbb{Z}$ numai pentru $a = 0$ sau $a = 2$ și găsim $x = 0$, respectiv $x = 2$. Conchidem că elementele simetrizabile în raport cu „$\circ$" sunt 0 și 2 și avem $0' = 0$, $2' = 2$.

2) Fie $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Să verificăm că operațiile induse pe K de adunarea și înmulțirea matricelor sunt asociative și comutative.

Soluție. Cum adunarea matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este asociativă și comutativă, atunci și adunarea indusă pe K este asociativă și comutativă. De asemenea, înmulțirea matricelor din K este asociativă pentru că înmulțirea matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este asociativă. Cu toate că înmulțirea din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ nu este comutativă, operația indusă de aceasta pe K este comutativă pentru că $AA' = \begin{pmatrix} ad' - bb' & -ab' - ba' \\ ab' + ba' & ad' - bb' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d'a - b'b & -d'b - b'a \\ d'b + b'a & d'a - b'b \end{pmatrix} = A'A$.

3) Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q},\ a^2 - 2b^2 \neq 0 \right\}$. Să arătăm că orice matrice $A \in G$ este inversabilă în raport cu operația indusă.

Soluție. Fie $A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} c & 2d \\ d & c \end{pmatrix}$ din G. Să observăm că $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$, deci operația indusă pe G admite pe I_2 ca element neutru. Mai rămâne să arătăm că $\forall\ A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$, $\exists\ A' = \begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix} \in G$ cu $A'A = AA' = I_2$.

Cum $AA' = \begin{pmatrix} ax + 2by & 2(bx + ay) \\ bx + ay & ax + 2by \end{pmatrix} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, rezultă că x și y verifică sistemul $\begin{cases} ax + 2by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$. Matricea sistemului este A și $\det(A) = a^2 - 2b^2 \neq 0$. Aplicând regula lui Cramer, găsim $x = \dfrac{a}{a^2 - 2b^2} \in \mathbb{Q}$, $y = \dfrac{-b}{a^2 - 2b^2} \in \mathbb{Q}$; cum $x^2 - 2y^2 = \dfrac{a^2 - 2b^2}{(a^2 - 2b^2)^2} = \dfrac{1}{a^2 - 2b^2} \neq 0$, avem $A' \in G$. Se constată că matricea A' astfel determinată verifică și egalitatea $A'A = I_2$, deci A' este inversa lui A (în G).

Remarcă. Se putea proceda și astfel: din $\det A \neq 0$ rezultă că A este inversabilă în $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$. Calculând A^{-1} se constată că $A^{-1} \in G$ și atunci $A' = A^{-1}$.

PROBLEME PROPUSE

1. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție „$*$“, $(x, y) \mapsto x * y = xy + ax + by$.

Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât operația „$*$“ să fie comutativă și asociativă.

2. Fie $M = (0, \infty)$. Studiați proprietățile legii de compoziție „$*$“ definită pe M prin: $M \times M \to M$, $(x, y) \mapsto x * y = x^{\ln y}$.

3. Pe $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se definește legea de compoziție „$*$“ prin $A * B = AB + BA$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Studiați proprietățile acestei legi de compoziție.

4. Pe $\mathbb{R}$ se definește operația „$*$“ $(x, y) \mapsto x * y = xy - x - y - 2$.

Cercetați existența elementului neutru.

5. Fie $M = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$.

i) Dacă $x, y \in M$, arătați că $\dfrac{x+y}{1+xy} \in M$.

ii) Studiați proprietățile legii de compoziție „$*$“ definită pe M prin $M \times M \to M$, $(x, y) \mapsto x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$.

6. Fie $M = (0, \infty)$ și $a, b \in M$. Stabiliți condițiile pentru ca operația „$*$“, $(x, y) \mapsto x * y = e^{a \ln x - b \ln y}$, să fie comutativă și asociativă.

7. Fie $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Pentru orice $a \in \mathbb{R}$, fie funcția $f_a \in \mathcal{F}(A)$ definită prin

$$f_a(x, y) = \left(x + ay + \frac{a^2}{2},\ y + a\right), \forall (x, y) \in A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Fie $M = \{ f_a \mid a \in \mathbb{R} \}$.

i) Arătați că $f_a \circ f_b = f_{a-b}$.

ii) Arătați că f_{-a} este inversa lui f_a.

iii) Determinați $a \in \mathbb{R}$ dacă $f_a \circ f_3 = f_7$.

8. Fie M mulțimea matricelor $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$. Arătați că:

i) $\forall A, B \in M \Rightarrow AB \in M$;

ii) nu există $E \in M$ astfel încât $EA = A$, $\forall A \in M$;

iii) există o infinitate de matrice $F \in M$ cu $AF = A$, $\forall A \in M$.

9. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție „$*$” definită prin $x * y = xy - 7x - 7y + 56$.

a) Să se verifice că $x * y = (x-7)(y-7) + 7$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că $x * (y * z) = (x * y) * z$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

c) Să se rezolve ecuația $7^x * 49^x = 7$, $x \in \mathbb{R}$.

d) Să se rezolve inecuația $x * (x-1) * (x-2) < 7$, $x \in \mathbb{R}$.

e) Utilizând metoda inducției matematice, să se demonstreze egalitatea $x_1 * x_2 * \ldots * x_n = (x_1 - 7)(x_2 - 7)\ldots(x_n - 7) + 7$, $\forall x_1, x_2 \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

f) Să se calculeze $1 * 2 * 3 * \ldots * 2007$.

10. Se consideră legea de compoziție $x \circ y = x + y - 4$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că $e = 4$ este elementul neutru în raport cu legea de compoziție „$\circ$”.

c) Să se determine simetricul elementului 5 în raport cu legea de compoziție „$\circ$”.

d) Să se arate că $(-a) \circ a = -4$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

e) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $\underbrace{x \circ x \circ x \circ \ldots \circ x}_{\text{de } n \text{ ori}} = nx - 4(n-1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și $\forall x \in \mathbb{R}$.

f) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația: $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{2007 \text{ ori}} = 4$.

g) Să se calculeze $(-2007) \circ (-2006) \circ \ldots \circ 0 \circ \ldots \circ 2006 \circ 2007$

11. Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Pe $\mathbb{Z}$ definim legea de compoziție „$*$“ prin $x * y = axy + b(x + y) + c$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$.

a) Arătați că legea de compoziție „$*$“ este asociativă dacă și numai dacă $b^2 - b - ac = 0$.

b) Când $b^2 - b - ac = 0$, legea de compoziție „$*$“ admite element neutru dacă și numai dacă $b \mid c$.

12. Pe mulțimea M se definește legea de compoziție asociativă $M \times M \to M$, $(x, y) \mapsto xy$. Arătați că:

a) $(a^m)^n = a^{mn}$, $\forall a \in M$ și $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$;

b) $(ab)^n = a^n b^n$, $\forall a, b \in M$ cu $ab = ba$ și $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

13. Pe mulțimea M avem o lege de compoziție $M \times M \to M$, $(x, y) \mapsto xy$ asociativă cu proprietatea că există $a \in M$ astfel încât $M = \{axa \mid x \in M\}$.

Arătați că o asemenea lege de compoziție admite element neutru.

14. Fie M o mulțime cu trei elemente.

i) Câte legi de compoziție se pot defini pe M?

ii) Câte dintre acestea sunt comutative?

iii) Câte admit element neutru?

Generalizare.

Clase de resturi modulo n

Temă de sinteză

Fie $\mathbb{Z}$ mulțimea numerelor întregi și $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$.

Conform *teoremei împărțirii cu rest*, pentru orice număr $a \in \mathbb{Z}$ există numerele q, $r \in \mathbb{Z}$, unic determinate, astfel încât:

$$a = nq + r,\ 0 \leqslant r < n.$$

Numerele q și r din egalitatea precedentă se numesc *câtul*, respectiv *restul* împărțirii lui a prin n. Se mai spune că r este *redusul* modulo n al numărului $a \in \mathbb{Z}$ și se folosește notația $r = a \bmod n$.

Presupunem că $n = 7$

1) Dacă $a = 33$, atunci $33 = 7 \cdot 4 + 5$, deci $q = 4$ și $r = 5$. Putem scrie $5 = 33 \bmod 7$.

2) Dacă $a = -38$, atunci $-38 = 7 \cdot (-6) + 4$, deci $q = -6$ și $r = 4 = (-38) \bmod 7$.

Resturile posibile la împărțirea prin $n > 0$ sunt $0, 1, 2, ..., n - 1$. *Teoria congruențelor* elaborată de Gauss, cunoscută în zilele noastre și sub numele de *Aritmetică modulară*, reduce calculul cu numere întregi la calculul cu resturile $0, 1, 2, ..., n - 1$ ale împărțirii printr-un număr întreg $n > 0$ potrivit ales. Preocupări recente de Aritmetică modulară au ca obiectiv elaborarea unor algoritmi eficienți de calcul. În această perspectivă, Aritmetica modulară este partea unui domeniu modern de matematici aplicate, cunoscut sub numele de *Computer Algebra*.

Mulțimea $\mathbb{Z}_n$ a claselor de resturi modulo n

Fie n un număr întreg pozitiv. Dacă $a \in \mathbb{Z}$ folosim notația $\hat{a}$ pentru mulțimea tuturor numerelor întregi de forma $ns + a$, cu $s \in \mathbb{Z}$ („*multiplu de n plus a*”) numită *clasă de resturi* modulo n de *reprezentant* a. Așadar $\hat{a} \overset{\text{def}}{=} \{ns + a \mid s \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}$

În mod explicit, dând lui s succesiv valorile ... $-2, -1, 0, 1, 2$, ... putem scrie $\hat{a} = \{..., -2n + a, -n + a, a, n + a, 2n + a, ...\}$.

1) Presupunem că $n = 2$. Dacă $a = 0$, atunci clasa de resturi modulo 2 este

$$\hat{a} = \hat{0} = \{2s \mid s \in \mathbb{Z}\} = \{..., -4, -2, 0, 2, 4, ...\},$$

adică mulțimea numerelor întregi pare.

Dacă $a = 1$, atunci clasa de resturi modulo 2 este

$$\hat{a} = \hat{1} = \{2s + 1 \mid s \in \mathbb{Z}\} = \{..., -3, -1, 1, 3, 5, ...\},$$

adică mulțimea numerelor întregi impare.

2) Presupunem că $n = 5$. Avem:

$$\hat{3} = \{5s + 3 \mid s \in \mathbb{Z}\} = \{..., -7, -2, 3, 8, 13, ...\}$$

$$\hat{4} = \{5s + 4 \mid s \in \mathbb{Z}\} = \{..., -6, -1, 4, 9, 14, ...\}$$

$$\widehat{-7} = \{5s - 7 \mid s \in \mathbb{Z}\} = \{..., -17, -12, -7, -2, 3, ...\}$$

1) Presupunem că $n = 6$. Scrieți teorema împărțirii cu rest pentru următoarele numere întregi:

a) $a = 33$; d) $a = -4$;
b) $a = 38$; e) $a = -11$;
c) $a = 17$; f) $a = -26$.

2) Presupunem că $n = 4$. Scrieți teorema împărțirii cu rest pentru următoarele numere întregi:

a) $a = 33$; d) $a = -4$;
b) $a = 38$; e) $a = -11$;
c) $a = 17$; f) $a = -26$.

3) Presupunem că $n = 3$. Determinați $\hat{a}$, clasa de resturi modulo 3, dacă:

a) $a = 0$; d) $a = -1$;
b) $a = 1$; e) $a = -2$;
c) $a = 2$. f) $a = -3$.

4) Presupunem că $n = 4$. Determinați $\hat{a}$, clasa de resturi modulo 4, dacă:

a) $a = 0$; e) $a = -1$;
b) $a = 1$; f) $a = -2$;
c) $a = 2$; g) $a = -3$;
d) $a = 3$; h) $a = -4$.

5) Presupunem că $n = 5$. Determinați $\hat{a}$, clasa de resturi modulo 5, dacă:

a) $a = 0$; e) $a = 4$;
b) $a = 1$; f) $a = -1$;
c) $a = 2$; g) $a = -7$;
d) $a = 3$; h) $a = -3$.

6) Arătați că pentru $n = 4$:

a) $\widehat{20} = \widehat{36}$;
b) $\hat{5} = \hat{9}$;
c) $\widehat{-2} = \widehat{18}$.

Teorema 1. Fie $n > 0$ un număr întreg fixat și $a, b \in \mathbb{Z}$. Avem:

(1) $\hat{a} = \hat{b} \Leftrightarrow a \in \hat{b} \Leftrightarrow n$ divide pe $a - b$.

(2) Dacă $r = a \bmod n$, atunci $\hat{a} = \hat{r}$.

(3) Clasele de resturi $\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, ..., \widehat{n-1}$ sunt distincte.

Demonstrație.

(1) Cum $a \in \hat{a}$, din $\hat{a} = \hat{b}$ rezultă $a \in \hat{b}$.

Reciproc, dacă $a \in \hat{b}$, atunci $a = nt + b$ cu $t \in \mathbb{Z}$. Pentru $x \in \hat{a}$, $x = ns + a$ avem $x = n(s+t) + b \in \hat{b}$, deci $\hat{a} \subseteq \hat{b}$. Cum $b = n(-t) + a \in \hat{a}$, avem și $\hat{b} \subseteq \hat{a}$, deci $\hat{a} = \hat{b}$.

În fine avem:

$a \in \hat{b} \Leftrightarrow a = nt + b$ cu $t \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a - b = nt \Leftrightarrow n \mid (a - b)$.

(2) Fie $q, r \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a = nq + r$, $0 \le r < n$.

Rezultă că $a \in \hat{r}$, deci $\hat{a} = \hat{r}$ conform punctului (1)

(3) Dacă $\hat{r}_1 = \hat{r}_2$ cu $r_1, r_2 \in \{0, 1, 2, ..., n - 1\}$ rezultă că $n \mid (r_1 - r_2)$ și cum $|r_1 - r_2| < n$, avem $r_1 = r_2$. ■

Presupunem că $n = 5$.

1) Avem $\widehat{27} = \widehat{12}$ pentru că $27 - 12 = 15$ se divide prin $n = 5$. De asemenea $\widehat{-13} = \hat{7}$, pentru că $-13 - 7 = -20$ se divide prin $n = 5$.

2) $\widehat{27} = \hat{2}$ și $\widehat{-32} = \hat{3}$, pentru că $2 = 27 \bmod 5$ și $3 = (-32) \bmod 5$.

3) Avem $\hat{1} \neq \hat{3}$, pentru că $1, 3 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ și $1 \neq 3$.

Observație. Dacă $\hat{a} \neq \hat{b}$, atunci $\hat{a} \cap \hat{b} = \varnothing$.

Într-adevăr, dacă $\hat{a} \cap \hat{b} \neq \varnothing$ și $c \in \hat{a} \cap \hat{b}$, atunci, conform Teoremei 1 punctul (1), avem $\hat{a} = \hat{c} = \hat{b}$.

Dacă n este un număr întreg pozitiv, notăm cu $\mathbb{Z}_n$ mulțimea claselor de resturi modulo n,

$$\mathbb{Z}_n = \{\hat{a} \mid a \in \mathbb{Z}\}$$

Cum resturile posibile la împărțirea prin n ale numerelor $a \in \mathbb{Z}$ sunt $0, 1, 2, ..., n - 1$ și cum pentru orice $a \in \mathbb{Z}$ avem $\hat{a} = \hat{r}$, unde $r = a \bmod n$, rezultă că

$$\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, ..., \widehat{n-1}\}.$$

Numerele $0, 1, 2, ..., n - 1$ sunt numite reprezentanții *canonici* ai claselor de resturi modulo n. Conform Teoremei 1 punctul (3), clasele de resturi $\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, ..., \widehat{n-1}$ sunt distincte, deci mulțimea $\mathbb{Z}_n$ are n elemente.

1) Când $n = 5$ avem $\mathbb{Z}_5 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ și $\widehat{13} = \hat{3}$, $-\widehat{27} = \hat{3}$, pentru că $3 = 13 \bmod 5$ și $3 = (-27) \bmod 5$.

2) Când $n = 9$ avem $\mathbb{Z}_9 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}, \hat{7}, \hat{8}\}$ și $-\hat{5} = \hat{4}$, $\widehat{23} = \hat{5}$, $-\widehat{29} = \hat{7}$, pentru că $4 = (-5) \bmod 9$, $5 = 23 \bmod 9$ și $7 = (-29) \bmod 9$.

Aplicație. *Problema determinării datei Duminicii Paștelui* l-a preocupat și pe Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

La primul Sinod ecumenic de la Niceea (în anul 325) s-a convenit că la determinarea datei primei zile de Paște se va ține seama de mai mulți factori astronomici: să fie prima duminică după Luna plină (fazele Lunii se repetă la 19 ani), să fie prima duminică după echinocțiul de primăvară (situație ce se repetă la 28 de ani) și să îndeplinească și alte condiții suplimentare.

Pentru a determina data x a primei zile de Paște într-un anumit an N după procedeul lui C. Gauss, se calculează resturile unor împărțiri astfel:

$a \equiv N \pmod{19}$, $b \equiv N \pmod 4$,
$c \equiv N \pmod 7$, $d \equiv (19a + 15) \bmod 30$,
$e \equiv (2b + 4c + 6d + 6) \bmod 7$. Data căutată este suma: $x = d + e + 4$.

Dacă $x \leqslant 30$, această dată se referă la o duminică din aprilie, iar dacă $x > 30$ cifra unităților sumei obținute reprezintă o duminică din mai.

De exemplu, pentru anul 2007:

$a \equiv 2007 \pmod{19} = 12$;
$b \equiv 2007 \pmod 4 = 3$;
$c \equiv 2007 \pmod 7 = 5$;
$d \equiv (19 \cdot 12 + 15) \bmod 30 = 3$;
$e \equiv (6 + 20 + 18 + 6) \bmod 7 = 50 \pmod 7 = 1$.

Obținem $x = 3 + 1 + 4 = 8$. Cum $x \leqslant 30$, Duminica Paștelui în anul 2007 a fost pe data de 8 aprilie.

Determinați pe ce dată va fi Paștele în 2010.

Determinați data primei zile de Paște prin procedeul lui Gauss pentru:

a) anul 2008; b) anul 2009;
c)anul 2010; d) anul 2020.

7) Enumerați elementele fiecăreia dintre următoarele mulțimi:

a) $\mathbb{Z}_3$; d) $\mathbb{Z}_6$;
b) $\mathbb{Z}_4$; e) $\mathbb{Z}_7$;
c) $\mathbb{Z}_5$; f) $\mathbb{Z}_8$.

Operații cu clase de resturi modulo *n*

Definiție. Fie $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, ..., \widehat{n-1}\}$ mulțimea claselor de resturi modulo n și $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_n$. Definim *suma* $\hat{a}+\hat{b}$ și *produsul* $\hat{a}\hat{b}$ astfel $\hat{a}+\hat{b} \overset{\text{def}}{=} \widehat{a+b}$ și $\hat{a}\hat{b} \overset{\text{def}}{=} \widehat{ab}$.

Așadar clasa sumă $\hat{a}+\hat{b}$ (respectiv clasa produs $\hat{a}\hat{b}$) este egală cu clasa modulo n a sumei uzuale $a + b$ (respectiv clasa modulo n a produsului uzual ab).

Reprezentantul canonic pentru clasa sumei $\widehat{n+b}$ (clasa produs $\widehat{ab}$) se află înlocuind pe $a + b$ cu $(a + b)$ mod n (respectiv pe ab cu (ab) mod n)

Se obțin astfel două legi de compoziție pe $\mathbb{Z}_n$,

$$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n,\ (\hat{a}, \hat{b}) \to \hat{a}+\hat{b} = \widehat{a+b}$$

$$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n,\ (\hat{a}, \hat{b}) \to \hat{a}\hat{b} = \widehat{ab}$$

numite *adunarea*, respectiv *înmulțirea* claselor de resturi modulo n.

1) Dacă $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_5$, $\hat{a} = \hat{3}$, $b = \hat{4}$, atunci
$\hat{a}+\hat{b} = \hat{3}+\hat{4} = \widehat{3+4} = \hat{7} = \hat{2}$ pentru că 2 = 12 mod 5 și
$\hat{a}\hat{b} = \hat{3}\cdot\hat{4} = \widehat{12} = \hat{2}$ pentru că 2 = 12 mod 5.

2) În $\mathbb{Z}_8$ avem $\hat{4}+\hat{6} = \widehat{10} = \hat{2}$ și $\hat{4}\cdot\hat{6} = \widehat{24} = \hat{0}$, pentru că 2 = 10 mod 8 și 0 = 24 mod 8.

Observație. Fie $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_n$, $a' \in \hat{a}$ și $b' \in \hat{b}$.

Avem $a' = ns + a$, $b' = nt + b$ cu $s, t \in \mathbb{Z}$. Cum

$$a' + b' = n(s+t) + a + b \in \widehat{a+b} \text{ și}$$

$$a'b' = n(nst + sb + ta) + ab \in \widehat{ab}$$

rezultă că $\widehat{a'+b'} = \widehat{a+b}$ și $\widehat{a'b'} = \widehat{ab}$ (vezi Teorema 1).

Pe de altă parte $\hat{a}' = \hat{a}$ și $\hat{b}' = \hat{b}$. Așadar, clasa sumă (respectiv produs) pentru $\hat{a} = \hat{a}'$ și $\hat{b} = \hat{b}'$ nu depinde de reprezentanții a, b sau a', b' folosiți în construcția acesteia. Astfel în $\mathbb{Z}_7$ avem $-18 \in \hat{3}$ și $27 \in \hat{6}$, deci $\widehat{-18} = \hat{3}$ și $\widehat{27} = \hat{6}$. Calculăm

$$\hat{3}+\hat{6} = \widehat{3+6} = \hat{9} = \hat{2}$$

$$\hat{3}\cdot\hat{6} = \widehat{3\cdot 6} = \widehat{18} = \hat{4}$$

Pe de altă parte,

$$\hat{3}+\hat{6} = \widehat{-18} + \widehat{27} = \widehat{(-18)+27} = \hat{9} = \hat{2} \text{ și}$$

$$\hat{3}\cdot\hat{6} = \widehat{-18}\cdot\widehat{27} = \widehat{(-18)\cdot 27} = \widehat{-486} = \hat{4}$$

Cum $\mathbb{Z}_n$ este mulțime finită, adunarea (respectiv înmulțirea) claselor de resturi modulo n poate fi descrisă cu ajutorul tablei Cayley.

8) Completați tablele adunării și înmulțirii claselor de resturi modulo 4.

9) Verificați dacă tablele următoare reprezintă tablele adunării și înmulțirii modulo 6.

$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{5}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$

$\bullet$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{5}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

10) Fie $n = 7$, $a = -16$, $b = 32$. Calculați suma și produsul claselor de resturi $\hat{a} = \widehat{-16}$ și $\hat{b} = \widehat{32}$ din $\mathbb{Z}_7$, prin două metode.

Metoda 1.

Vom folosi reprezentanți canonici pentru clase:

$-16 = 7 \cdot (-3) + 5$ și $32 = 7 \cdot 4 + 4$.

Resturile împărțirii prin 7 ale lui -16 și 32 sunt 5, respectiv 4. Avem:
$\widehat{-16} + \widehat{32} = \hat{5} + \hat{4} = \widehat{5+4} = \hat{2}$ și
$\widehat{-16}\cdot\widehat{32} = \hat{5}\cdot\hat{4} = \widehat{5\cdot 4} = \hat{6}$, pentru că
$9 = 7 \cdot 1 + 2$ și $20 = 7 \cdot 2 + 6$.

Metoda 2.

$\widehat{-16} + \widehat{32} = \widehat{-(16)+32} = \widehat{16} = \hat{2}$, pentru că $16 = 7 \cdot 2 + 2$ și

$\widehat{-16}\cdot\widehat{32} = \widehat{(-16)\cdot 32} = \widehat{-512} = \hat{6}$, pentru că $-512 = 7 \cdot (-74) + 6$.

Pentru $n = 7$, $a = 16$ și $b = -32$ calculați produsul claselor de resturi $\hat{a} = \widehat{16}$ și $\hat{b} = \widehat{-32}$ din $\mathbb{Z}_7$.

Tablele Cayley pentru adunarea și înmulțirea claselor de resturi modulo 5 sunt:

$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$

$\cdot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{1}$	$\hat{3}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

În continuare prezentăm principalele proprietăți ale operațiilor cu clase de resturi modulo n.

Ele sunt consecințe ale proprietăților similare ale adunării și înmulțirii numerelor întregi.

Teorema 2. Adunarea claselor de resturi modulo n este asociativă, comutativă, admite ca element pentru $\hat{0}$ și orice clasă $\hat{a}\in\mathbb{Z}_n$ are ca opusă pe $-\hat{a}$. Așadar:

(1) $\forall \hat{a}, \hat{b}, \hat{c}\in\mathbb{Z}_n$, $(\hat{a}+\hat{b})+\hat{c}=\hat{a}+(\hat{b}+\hat{c})$

(2) $\forall \hat{a}, \hat{b}\in\mathbb{Z}_n$, $\hat{a}+\hat{b}=\hat{b}+\hat{a}$

(3) $\forall \hat{a}\in\mathbb{Z}_n$, $\hat{a}+\hat{0}=\hat{0}+\hat{a}=\hat{a}$

(4) $\forall \hat{a}\in\mathbb{Z}_n$, $\hat{a}+\widehat{-a}=\widehat{-a}+\hat{a}=\hat{0}$, adică $-\hat{a}=\widehat{-a}$.

Demonstrație.

(1) Folosind definiția adunării claselor de resturi modulo n, avem:

$(\hat{a}+\hat{b})+\hat{c}=\widehat{a+b}+\hat{c}=\widehat{(a+b)+c}=\hat{a}+\widehat{b+c}=\hat{a}+(\hat{b}+\hat{c})$

(3) Avem $\hat{a}+\hat{0}=\widehat{a+0}=\hat{a}$ și analog $\hat{0}+\hat{a}=\hat{a}$.

(4) Avem $a+\widehat{-a}=\widehat{a+(-a)}=\hat{0}$ și analog $\widehat{-a}+\hat{a}=\hat{0}$.

Așadar $\hat{a}$ are opusă și $-\hat{a}=\widehat{-a}$. ■

Folosind tabla adunării claselor de resturi modulo 5 se observă că $\hat{0}+\hat{0}=\hat{0}$, $\hat{1}+\hat{4}=\hat{0}$ și $\hat{2}+\hat{3}=\hat{0}$. Rezultă: $-\hat{0}=\hat{0}$, $-\hat{1}=\hat{4}=\widehat{-1}$, $-\hat{4}=\hat{1}=\widehat{-4}$, $-\hat{2}=\hat{3}=\widehat{-2}$ și $-\hat{3}=\hat{2}=\widehat{-3}$.

Teorema 3. Înmulțirea claselor de resturi modulo n este asociativă, comutativă, admite pe $\hat{1}$ ca element neutru și este distributivă față de adunare.

Așadar:

(1) $\forall \hat{a}, \hat{b}, \hat{c}\in\mathbb{Z}_n$, $(\hat{a}\hat{b})\hat{c}=\hat{a}(\hat{b}\hat{c})$

(2) $\forall \hat{a}, \hat{b}\in\mathbb{Z}_n$, $\hat{a}\hat{b}=\hat{b}\hat{a}$

(3) $\forall \hat{a}\in\mathbb{Z}_n$, $\hat{1}\hat{a}=\hat{a}\hat{1}=\hat{a}$

(4) $\forall \hat{a}, \hat{b}, \hat{c}\in\mathbb{Z}_n$, $\hat{a}(\hat{b}+\hat{c})=\hat{a}\hat{b}+\hat{a}\hat{c}$.

11) Pentru $n = 6$, $a = -15$, $b = -16$ calculați suma și produsul claselor de resturi $\hat{a}=\widehat{-15}$ și $\hat{b}=\widehat{-16}$ din $\mathbb{Z}_6$.

12) Pentru $n = 6$, $a = 4$, $b = 20$, $c = 23$, calculați:

a) $\hat{a}+\hat{b}$ și $\hat{b}+\hat{a}$; ce observați?

b) $(\hat{a}+\hat{b})+\hat{c}$ și $\hat{a}+(\hat{b}+\hat{c})$; ce observați?

c) $\hat{a}\cdot\hat{b}$ și $\hat{b}\cdot\hat{a}$; ce observați?

d) $(\hat{a}\hat{b})\hat{c}$ și $\hat{a}(\hat{b}\hat{c})$; ce observați?

e) $\hat{a}(\hat{b}+\hat{c})$ și $\hat{a}\hat{b}+\hat{a}\hat{c}$; ce observați?

13) Pentru $n = 5$, $a = -12$, $b = 7$, $c = -36$, calculați:

a) $\hat{a}+\hat{b}$ și $\hat{b}+\hat{a}$; ce observați?

b) $(\hat{a}+\hat{b})+\hat{c}$ și $\hat{a}+(\hat{b}+\hat{c})$; ce observați?

c) $\hat{a}\cdot\hat{b}$ și $\hat{b}\cdot\hat{a}$; ce observați?

d) $(\hat{a}\hat{b})\hat{c}$ și $\hat{a}(\hat{b}\hat{c})$; ce observați?

e) $\hat{a}(\hat{b}+\hat{c})$ și $\hat{a}\hat{b}+\hat{a}\hat{c}$; ce observați?

14) Calculați următorii determinanți:

a) $\begin{vmatrix} \hat{3} & \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{1} & \hat{3} \\ \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \end{vmatrix}$ în $\mathbb{Z}_5$;

b) $\begin{vmatrix} \hat{2} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{4} & \hat{8} & \hat{1} \end{vmatrix}$ în $\mathbb{Z}_{17}$.

15) Calculați A^3 dacă $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_5)$,

$A=\begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{1} & \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{5} & \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}$.

16) Fie matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$,

$A=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det A$ în $\mathbb{Z}_3$.

b) Calculați A^2 în $\mathbb{Z}_3$.

c) Arătați că $A^2-I_2=\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, în $\mathbb{Z}_3$.

Demonstrație.

(2) $\hat{a}\hat{b} = \widehat{ab} = \widehat{ba} = \hat{b}\hat{a}$

(4) $\hat{a}(\hat{b}+\hat{c}) = \hat{a}\widehat{b+c} = \widehat{a(b+c)} = \widehat{ab+ac} = \widehat{ab}+\widehat{ac} = \hat{a}\hat{b}+\hat{a}\hat{c}$.

Demonstrați afirmațiile (1) și (3) din teoremă. ■

Clase de resturi inversabile

Definiție. Fie a și b două numere întregi. Un număr $d \in \mathbb{Z}$, $d \geqslant 0$ se numește *cel mai mare divizor comun* (pe scurt, c.m.m.d.c.) al lui a și b dacă verifică condițiile:

(1) $d \mid a$ și $d \mid b$

(2) dacă $c \mid a$ și $c \mid b$, atunci $c \mid d$.

Dacă $d' \in \mathbb{Z}$, $d' \geqslant 0$ verifică de asemenea (1) și (2) atunci $d' \mid d$ și $d \mid d'$, de unde $d = d'$.

Așadar c.m.m.d.c. al lui a și b, în caz că există, este unic și folosim notația $d = (a, b)$.

Evident, dacă $a \mid b$, atunci $a = (a, b)$. În particular, cum $a \mid 0$, avem $a = (a, 0)$. De asemenea, $0 = (0, 0)$.

Fie $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ sau $b \neq 0$ și

$$M \overset{\text{def}}{=} \{ax+by \mid x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

Cum $a = a \cdot 1 + b \cdot 0$ și $b = a \cdot 0 + b \cdot 1$, avem $a, b \in M$ și în particular M conține numere întregi nenule. Dacă $z = ax + by \in M$, $z \neq 0$, atunci $-z = a(-x) + b(-y) \in M$ și deci M conține numere întregi strict pozitive. Fie

$$M^+ = \{z \in M \mid z > 0\}$$

și $d \in M^+$, cel mai mic număr din M^+astfel încât $d = au + bv$ cu $u, v \in \mathbb{Z}$. Evident d verifică condiția (2) din definiția c.m.m.d.c. Arătăm că d verifică și condiția (1). Dacă $d \nmid a$, atunci $a = dq + r$ cu $q, r \in \mathbb{Z}, 0 < r < d$. Cum $r = a - dq = a - (au + bv)q =$ $= a(1 - uq) + b(-vq) \in M^+$ se contrazice minimalitatea lui d în M^+. Rămâne adevărat că $d \mid a$ și analog se arată că $d \mid b$.

Am demonstrat astfel teorema următoare.

Teorema 4. Pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$ există c.m.m.d.c. al lui a și b. Mai mult, dacă $d = (a, b)$, atunci există $u, v \in \mathbb{Z}$ astfel încât $d = au + bv$.

Fie $a, b \in \mathbb{Z}$. Spunem că a este *prim* cu b sau că a și b sunt *relativ prime* dacă c.m.m.d.c. al lui a și b este egal cu 1, adică $(a, b) = 1$.

Acum putem demonstra următoarea teoremă.

Teorema 5. Fie $n > 1$ și $\hat{a} \in \mathbb{Z}_n$. Atunci $\hat{a}$ este inversabilă în raport cu înmulțirea claselor de resturi modulo n dacă și numai dacă a este prim cu n.

17) a) Arătați, utilizând tabla operației, că $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}$ sunt simetrizabile în raport cu înmulțirea modulo 7.

b) Arătați că nu toate elementele $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}, \hat{7}$ sunt simetrizabile în raport cu înmulțirea modulo 8.

Indicație.

a) Elementul neutru al înmulțirii modulo 7 pe $\mathbb{Z}_7 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}\}$ este 1.

$\hat{1}^{-1} = \hat{1}$, $\hat{2}^{-1} = \hat{4}$, ...

b) În $\mathbb{Z}_8$ elementele $\hat{2}$, $\hat{4}$ și $\hat{6}$ nu sunt simetrizabile în raport cu înmulțirea.

18) Determinați prin încercări soluțiile din $\mathbb{Z}_5 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ ale fiecăreia dintre ecuațiile următoare:

a) $x + \hat{3} = \hat{2}$,

b) $x \cdot x = \hat{4}$.

19) Folosind tabla înmulțirii claselor de resturi modulo 6, determinați soluțiile din $\mathbb{Z}_6$ ale fiecăreia dintre ecuațiile:

a) $\hat{5}x = \hat{2}$; b) $\hat{4}x = \hat{2}$; c) $\hat{2}x = \hat{3}$.

20) Rezolvați în $\mathbb{Z}_7$ fiecare dintre ecuațiile:

a) $\hat{2}x + \hat{4} = \hat{0}$; b) $\hat{3}x + \hat{5} = \hat{0}$.

21) Arătați că $\hat{a}(\hat{a}+\hat{1})(\hat{a}+\hat{2}) = \hat{0}$, $\forall \hat{a} \in \mathbb{Z}_6$.

22) Determinați $\hat{a} \in \mathbb{Z}_5$ astfel încât $x = \hat{2}$ să fie soluție din $\mathbb{Z}_5$ a ecuației $\hat{3}x^2 + \hat{2}x + \hat{a} = \hat{0}$.

23) Determinați $m \in \mathbb{Z}_5$ astfel încât ecuația $\hat{2}x^2 + x + \hat{m} = \hat{0}$ să aibă soluții.

24) Rezolvați sistemele următoare:

a) $\begin{cases} x + \hat{3}y = \hat{2} \\ \hat{4}x - y = \hat{2} \end{cases}$, $x, y \in \mathbb{Z}_5$;

b) $\begin{cases} \hat{3}x - \hat{4}y = \hat{2} \\ \hat{4}x - \hat{3}y = \hat{3} \end{cases}$, $x, y \in \mathbb{Z}_7$.

Demonstrație. Presupunem că există $\hat{b} \in \mathbb{Z}_n$ astfel încât $\hat{a}\hat{b} = \hat{1}$. Avem $\widehat{ab} = \hat{1}$, deci n divide pe $1 - ab$. Există deci $q \in \mathbb{Z}$ astfel încât $1 - ab = nq$. Cum $1 = ab + nq$, orice divizor comun al lui a și n este divizor al lui 1. Rezultă că $(a, n) = 1$.

Reciproc, presupunem că $(a, n) = 1$. Există $u, v \in \mathbb{Z}$ astfel încât $1 = au + nv$. Cum $\hat{n} = \hat{0}$ și $\hat{1} = \widehat{au + nv} = \widehat{au} + \widehat{nv} = \hat{a}\hat{u} + \hat{n}\hat{v} = \hat{a}\hat{u}$, rezultă că $\hat{a}$ este inversabilă și $\hat{a}^{-1} = \hat{u}$. ■

1) Numerele $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ prime cu $n = 5$ sunt 1, 2, 3, 4. Rezultă că $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$ și $\hat{4}$ din $\mathbb{Z}_5$ sunt inversabile în raport cu înmulțirea claselor de resturi modulo 5. Din tabla înmulțirii pentru clasele de resturi din $\mathbb{Z}_5$, se constată că: $\hat{1}^{-1} = \hat{1}, \hat{2}^{-1} = \hat{3}, \hat{3}^{-1} = \hat{2}$ și $\hat{4}^{-1} = \hat{4}$, pentru că $\hat{1} \cdot \hat{1} = \hat{1}, \hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{1}$ și $\hat{4} \cdot \hat{4} = \hat{1}$.

2) Numerele $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ prime cu $n = 9$ sunt 1, 2, 4, 5, 7 și 8. Rezultă că în $\mathbb{Z}_9$, clasele de resturi inversabile sunt: $\hat{1}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{7}$ și $\hat{8}$. Din tabla înmulțirii pentru clasele de resturi din $\mathbb{Z}_9$ se constată că: $\hat{1} \cdot \hat{1} = \hat{1}, \hat{2} \cdot \hat{5} = \hat{1}, \hat{4} \cdot \hat{7} = \hat{1}$ și $\hat{8} \cdot \hat{8} = \hat{1}$, de unde $\hat{1}^{-1} = \hat{1}, \hat{2}^{-1} = \hat{5}, \hat{5}^{-1} = \hat{2}, \hat{4}^{-1} = \hat{7}, \hat{7}^{-1} = \hat{4}$ și $\hat{8}^{-1} = \hat{8}$.

25) a) Arătați că ecuația $x^2 + \hat{1} = \hat{0}$ nu admite soluții în $\mathbb{Z}_3$.
b) Determinați soluțiile din $\mathbb{Z}_5$ ale ecuației $x^2 + \hat{1} = \hat{0}$.

26) a) Determinați elementele inversabile ale lui $\mathbb{Z}$ în raport cu înmulțirea .

b) Determinați elementele inversabile ale lui $\mathbb{Z}_8$ în raport cu înmulțirea claselor de resturi modulo 8.

c) Pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_8$ considerăm legea de compoziție „$*$“ prin
$(x, \hat{a}) * (y, \hat{b}) \overset{\text{def}}{=} (xy, \hat{a}\hat{b})$.

Arătați că legea de compoziție „$*$“ este asociativă, comutativă și admite ca element neutru pe $(1, \hat{1})$.

Enumerați elementele lui $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_8$ simetrizabile în raport cu legea de compoziție „$*$“.

Aplicații în Aritmetică: calculul restului

a) Dacă $\hat{a} = \hat{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, atunci $\widehat{a^k} = \widehat{b^k}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$.
b) Aflați restul împărțirii prin 7 al numărului $a = 23^{52}$.
c) În $\mathbb{Z}_7$ calculați $\hat{2}^k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ și dați o altă rezolvare pentru b).

Soluție. a) Proprietatea este evidentă pentru $k = 1$. Presupunem $k > 1$ și $\widehat{a^{k-1}} = \widehat{b^{k-1}}$. Înmulțind termen cu termen ultima relație cu $\hat{a} = \hat{b}$ se obține $\widehat{a^k} = \widehat{b^k}$.

b) Avem $\widehat{23} = \hat{2}$ în $\mathbb{Z}_7$ și aplicând punctul a) rezultă că $\widehat{23^{52}} = \widehat{2^{52}}$, deci numărul $b = 2^{52}$ dă același rest prin împărțirea cu 7 ca numărul $a = 23^{52}$. Dar $2^3 = 8$ și $\hat{8} = \hat{1}$. Avem $52 = 3 \cdot 17 + 1$, de unde $2^{52} = (2^3)^{17} \cdot 2 = 8^{17} \cdot 2$. Din $\hat{8} = \hat{1}$, rezultă $\widehat{8^{17}} = \hat{1}$, $\widehat{8^{17}} \cdot \hat{2} = \hat{2}$. Așadar $\widehat{2^{52}} = \hat{2}$ și numărul $a = 23^{52}$ dă restul 2 la împărțirea prin 7.

$\bullet$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{5}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

c) Avem $\hat{2}^2 = \widehat{2 \cdot 2} = \hat{4}$, $\hat{2}^3 = \hat{2}^2\hat{2} = \hat{4} \cdot \hat{2} = \hat{8} = \hat{1}$, $\hat{2}^4 = \hat{2}^3\hat{2} = \hat{1} \cdot \hat{2} = \hat{2}$ etc. Observăm că $\widehat{23} = \hat{2}$ și deci $\hat{a} = \widehat{23^{52}} = \widehat{23}^{52} = \hat{2}^{52} = \hat{2}^{3 \cdot 17 + 1} = \left(\hat{2}^3\right)^{17} \cdot \hat{2}^1 = \hat{1}^{17} \cdot \hat{2} = \hat{2}$. Restul împărțirii lui a prin 7 este egal cu 2.

Exerciții rezolvate.

1) *Adunarea și înmulțirea modulo n.*

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ și $T_n = \{0, 1, 2, \ldots, n - 1\}$, $a, b \in T_n$; $a + b$ și ab sunt suma, respectiv produsul lor ca numere naturale. *Suma modulo n* a lui a cu b, notată $a \oplus b$ și *produsul modulo n* al lui a cu b, notat $a \otimes b$, sunt prin definiție restul împărțirii prin n al lui $a + b$, respectiv ab. Cum restul împărțirii prin n aparține lui T_n, obținem două legi de compoziție pe T_n, $\oplus$ și $\otimes$ numite *adunarea modulo n*, respectiv *înmulțirea modulo n*.

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\otimes$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

De exemplu, pentru $n = 5$, $T_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Restul împărţirii prin 5 al lui $3 + 4 = 7$ este 2, iar cel al lui $3 \times 4 = 12$ este 2. Aşadar, $3 \oplus 4 = 2$, $3 \otimes 4 = 2$; deci suma modulo 5 a lui 3 cu 4 este egală cu 2 şi produsul modulo 5 al lui 3 cu 4 este egal cu 2.

Calculaţi elementele simetrizabile din $(T_5, \oplus)$ şi din $(T_5, \otimes)$.

Soluţie. Căutăm în tablele operaţiilor de adunare şi înmulţire ale lui T_5 acele elemente din care, prin compunere, putem obţine elementul neutru. Elementele simetrizabile din $(T_5, \oplus)$ sunt 0, 1, 2, 3, 4 iar din $(T_5, \otimes)$ sunt 1, 2, 3, 4.

2) Pe tablele operaţiilor de înmulţire ale claselor de resturi modulo 5 şi modulo 6, identificaţi clasele de resturi inversabile şi precizaţi care sunt inversele lor.

$\bullet$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{1}$	$\hat{3}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

Soluţie. Din modul cum se completează tabla unei legi de compoziţie, rezultă că o clasă de resturi $\hat{a}$ este inversabilă dacă şi numai dacă pe linia lui $\hat{a}$ se află $\hat{1}$ şi atunci $\hat{a}^{-1}$ este clasa care serveşte de etichetă pentru coloana în care se găseşte $\hat{1}$.

Din tablele operaţiilor deducem că:

(i) $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}$ sunt inversabile în $\mathbb{Z}_5$ şi $\hat{1}^{-1} = \hat{1}$, $\hat{2}^{-1} = \hat{3}$, $\hat{3}^{-1} = \hat{2}$, $\hat{4}^{-1} = \hat{4}$.

(ii) $\hat{1}$ şi $\hat{5}$ sunt inversabile în raport cu înmulţirea din $\mathbb{Z}_6$ şi $\hat{1}^{-1} = \hat{1}$, $\hat{5}^{-1} = \hat{5}$.

3) Precizaţi clasele inversabile din $\mathbb{Z}_{12}$ şi inversele lor.

Soluţie. Folosind reprezentanţii canonici, elementele lui $\mathbb{Z}_{12}$ sunt clasele $\hat{a}$ cu $0 \leqslant a < 12$.

Avem $(a, 12) = 1 \Leftrightarrow a \in \{1, 5, 7, 11\}$. În tabla înmulţirii din $\mathbb{Z}_{12}$, găsim $\hat{1}^{-1} = \hat{1}$, $\hat{5}^{-1} = \hat{5}$, $\hat{7}^{-1} = \hat{7}$ şi $\widehat{11}^{-1} = \widehat{11}$.

1. Arătaţi că $4\hat{a} = \hat{a} + \hat{a} + \hat{a} + \hat{a} = \hat{0}$, $\forall \hat{a} \in \mathbb{Z}_4$.
Mai general, $n\hat{a} = \hat{0}$, $\forall \hat{a} \in \mathbb{Z}_n$.

2. Determinaţi clasele inversabile faţă de înmulţirea din $\mathbb{Z}_8$ şi aflaţi inversele lor.

3. Rezolvaţi în $\mathbb{Z}_8$ ecuaţia $\hat{4}x^4 + \hat{4}x = \hat{0}$.

4. a) Calculaţi suma tuturor claselor de resturi din $\mathbb{Z}_4$, apoi din $\mathbb{Z}_5$.
b) Dacă n este impar, atunci în $\mathbb{Z}_n$ avem $\hat{1} + \hat{2} + ... + \widehat{n-1} = \hat{0}$.

5. Arătaţi că $10^k - 1$ se divide prin 9, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

Deduceţi că un număr natural $n \neq 0$ se divide prin 3 (respectiv 9) dacă şi numai dacă suma cifrelor sale se divide prin 3 (respectiv 9).

6. Aflaţi restul împărţirii prin 5 al lui $a = 373^{62}$.

7. Fie $\hat{2} \in \mathbb{Z}_{10}$. Calculaţi succesiv puterile $\hat{2}^2, \hat{2}^3, ...$ şi arătaţi că există $s, t \in \mathbb{N}^*$, $s < t$ astfel încât $\hat{2}^s = \hat{2}^t$. Calculaţi apoi $\hat{2}^{37}$.

Arătaţi că oricare ar fi $\hat{a} \in \mathbb{Z}_n$, există $s, t \in \mathbb{N}^*$, $s < t$ astfel încât $\hat{a}^s = \hat{a}^t$.

8. Fie $a \in \mathbb{N}$ care în reprezentarea zecimală are cifrele c_0, c_1, c_2.

Arătaţi că a se divide prin 11 dacă şi numai dacă $c_0 - c_1 + c_2$ se divide prin 11. Generalizare.

9. Fie $\hat{7} \in \mathbb{Z}_{10}$. Calculaţi succesiv puterile $\hat{7}^2, \hat{7}^3, ...$ şi arătaţi că există $m \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\hat{7}^m = \hat{1}$. Calculaţi apoi $\hat{7}^{82}$.

Arătaţi că dacă $\hat{a} \in \mathbb{Z}_n$ şi $\hat{a}$ este inversabilă, există $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\hat{a}^m = \hat{1}$.

10. Fie $\hat{a} \in \mathbb{Z}_n$. Spunem că $\hat{a}$ este nilpotentă dacă există $m \in \mathbb{N}^*$ cu $\hat{a}^m = \hat{0}$.

Determinaţi clasele nilpotente din $\mathbb{Z}_8$ şi $\mathbb{Z}_{12}$.

Arătaţi că $\hat{a} \in \mathbb{Z}_n$ este nilpotentă dacă şi numai dacă a se divide cu toţi divizorii primi ai lui n.

11. Un număr natural $p > 1$ este prim dacă şi numai dacă înmulţirea din $\mathbb{Z}_p$ are proprietatea: $\widehat{ab} = \hat{0} \Rightarrow \hat{a} = \hat{0}$ sau $\hat{b} = \hat{0}$.

12. Arătaţi că $\hat{a}^2 \neq \hat{2}$, $\forall\, \hat{a} \in \mathbb{Z}_3$. Demonstraţi că ecuaţia $\hat{3}x^2 + \hat{2} = y^2$ nu are soluţii întregi.

13. Determinaţi valorile posibile pentru $\hat{a}^3$ când $\hat{a} \in \mathbb{Z}_7$. Arătaţi că $\hat{7}x^3 + \hat{2} = y^3$ nu are soluţii întregi.

Grupuri

Algebra modernă are ca obiect studiul structurilor algebrice. O *structură algebrică* este formată din una sau mai multe mulțimi nevide înzestrate cu legi de compoziție care verifică o listă specifică de proprietăți, numite *axiomele structurii*. În acest capitol ne vom ocupa de structuri algebrice formate dintr-o mulțime nevidă G și o lege de compoziție (internă) „$*$" definită pe G, care este asociativă, are element neutru și toate elementele din G sunt simetrizabile. O astfel de structură algebrică se numește *grup*. Renunțând la cerința ca toate elementele lui G să fie simetrizabile, se obține o structură algebrică mai generală, anume structura de *monoid*.

Definiția grupului

Noțiunea de *grup* ocupă un loc central printre structurile algebrice. Teoria grupurilor a apărut ca urmare a studiului compunerii *funcțiilor bijective (permutări) ale unei mulțimi în ea însăși*.

Definiția explicită a structurii de grup este următoarea:

Definiție.

Un cuplu $(G, *)$, format cu o mulțime nevidă G și cu o lege de compoziție „$*$" pe G, se numește *grup* dacă sunt verificate următoarele condiții:

G_1. $\forall\, x, y, z \in G,\ (x * y) * z = x * (y * z)$.

G_2. $\exists\, e \in G$, astfel încât $e * x = x * e = x,\ \forall\, x \in G$.

G_3. $\forall\, x \in G, \exists\, x' \in G$ cu $x' * x = x * x' = e$.

Dacă, în plus, este verificată și axioma

G_4. $\forall\, x, y \in G,\ x * y = y * x$,

atunci G se numește *grup comutativ* sau *grup abelian*.

Elementul e din axioma G_2 se numește *element neutru*.

Elementul x' din G_3 depinde de x și se numește *simetricul lui x*.

Denumirea de grup abelian s-a dat în onoarea matematicianului norvegian N.H. Abel (1802-1829) care a studiat grupurile comutative în legătură cu rezolvarea ecuațiilor algebrice.

Ansamblul de condiții G_1, G_2, G_3 se numesc *axiomele grupului*.

Observații.

♦ Elementul neutru al unui grup este unic.

♦ Elementul x', a cărui existență este asigurată de axioma G_3, este unic determinat de x.

Dacă operația grupului este notată aditiv, atunci elementul neutru se notează cu 0 și se numește *zero*; în terminologie multiplicativă, elementul neutru se numește *unitate* și se notează cu 1.

În notație multiplicativă simetricul elementului x se notează x^{-1} și este numit *inversul lui x*, iar în notația aditivă simetricul unui element x se notează $-x$ și se numește *opusul lui x*.

Remarcă. Uneori cuplul $(G, *)$ se notează tot cu G, urmând ca cititorul să deducă din context la ce se face referire. Dacă pentru legea de compoziție a grupului G se folosește una dintre notațiile $+, \cdot, \circ$ etc., atunci în loc de $(G, *)$ scriem $(G, +)$, $(G, \cdot)$, $(G, \circ)$ etc.

Determinarea și verificarea proprietăților unor structuri algebrice.

1) Pe $\mathbb{Z}$ se definește legea de compoziție „$*$": $x * y = x + y - 2$.

Arătați că $(\mathbb{Z}, *)$ este grup abelian.

2) Pe intervalul $G = (5, \infty)$, definim $x * y = xy - 5x - 5y + 30,\ \forall\ x, y \in G$.

Arătați că:

a) dacă $x, y \in G$, atunci $x * y \in G$;

b) $(G, *)$ este grup abelian.

3) Fie G mulțimea matricelor $A_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$,

unde $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ -\alpha & 1 & -\frac{1}{2}\alpha^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Arătați că:

a) $A_\alpha A_\beta = A_{\alpha+\beta},\ \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) G este grup abelian în raport cu înmulțirea matricelor.

4) Precizați care este elementul neutru și care sunt elementele inversabile într-o structură algebrică cu următoarea tablă a operației:

$*$	a	b	c	d
a	c	a	a	b
b	c	b	b	c
c	a	b	c	d
d	c	c	d	d

5) Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x \circ y = \alpha x + \alpha y,\ x, y \in \mathbb{R}$. Determinați parametrul $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât „$\circ$" să definească pe $\mathbb{R}$ o structură de grup abelian.

Exemple de grupuri – temă de sinteză

♦ *Grupul aditiv* ($\mathbb{Z}$, +) *al numerelor întregi*

Adunarea numerelor întregi este asociativă, comutativă, admite pe 0 ca element neutru și orice număr întreg are opus. Rezultă că ($\mathbb{Z}$, +) este grup abelian și este cunoscut sub numele de *grupul aditiv al numerelor întregi*.

Analog se constată că ($\mathbb{Q}$, +), ($\mathbb{R}$, +), ($\mathbb{C}$, +) sunt grupuri abeliene, cunoscute sub numele de *grupul aditiv al numerelor raționale,* respectiv *reale*, *complexe*.

♦ *Grupurile multiplicative* ($\mathbb{Q}^*$, ·), ($\mathbb{R}^*$, ·), ($\mathbb{C}^*$, ·)

Folosim notațiile $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Produsul a două numere diferite de zero este diferit de zero și produsul a două numere raționale (respectiv reale, complexe) este un număr rațional (respectiv real, complex). Deducem că operația de înmulțire a numerelor acționează pe $\mathbb{Q}^*$ (respectiv $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$) ca legi interne de compoziție, evident asociative, comutative și admițând pe 1 ca element neutru. Cum inversul unui număr rațional (respectiv real, complex) diferit de zero există și este tot număr rațional (respectiv real, complex) diferit de zero, conchidem că ($\mathbb{Q}^*$, ·) (respectiv ($\mathbb{R}^*$, ·), ($\mathbb{C}^*$, ·)) este grup abelian, numit *grupul multiplicativ al numerelor raționale* (respectiv *reale*, *complexe*) *diferite de zero*.

♦ *Grupul aditiv* ($\mathbb{Z}_n$, +) *al claselor de resturi modulo n*

Pe mulțimea $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, ..., \widehat{n-1}\}$ a claselor de resturi modulo n s-a definit adunarea prin $\hat{a} + \hat{b} = \widehat{a+b}$. Adunarea claselor de resturi modulo n este asociativă, comutativă, admite pe $\hat{0}$ ca element neutru și orice element are opus. Rezultă că ($\mathbb{Z}_n$, +) este un grup abelian, numit *grupul aditiv al claselor de resturi modulo n*.

Să observăm că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există cel puțin un grup abelian cu n elemente, de exemplu grupul ($\mathbb{Z}_n$, +).

$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$

Tabla adunării în $\mathbb{Z}_5$

♦ *Structura algebrică* ($\mathbb{Z}_n$, ·) *este monoid dar nu este grup*. Vom vedea că ($\mathbb{Z}_n^*$, ·) este grup dacă și numai dacă n este număr prim.

♦ *Grupul lui Klein*

Fie $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ și $\mathscr{F}(A)$ mulțimea funcțiilor $f : A \to A$. Notăm $\mathscr{K} = \{1_A, u, v, w\} \subset \mathscr{F}(A)$, unde 1_A este funcția identică a mulțimii A, iar u, v, w sunt funcțiile din $\mathscr{F}(A)$ definite pentru $\forall\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ prin:

$$u(x) = (x_1, -x_2),\ v(x) = (-x_1, x_2),\ w(x) = (-x_1, -x_2).$$

Se verifică faptul că prin compunerea a două funcții din $\mathscr{K}$ se obține tot o funcție din $\mathscr{K}$. De exemplu, avem $u \circ v = w$. Tabla operației induse pe $\mathscr{K}$ de compunerea funcțiilor din $\mathscr{F}(A)$ este prezentată alăturat.

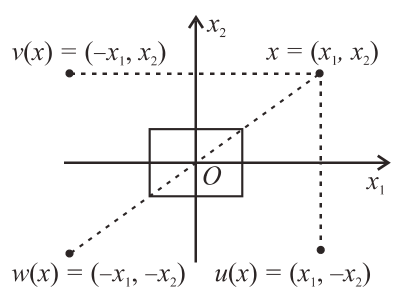
$\circ$	1_A	u	v	w
1_A	1_A	u	v	w
u	u	1_A	w	v
v	v	w	1_A	u
w	w	v	u	1_A

Tabla grupului Klein

Operația indusă pe $\mathscr{K}$ este asociativă (deoarece compunerea funcțiilor este asociativă) și admite pe $1_A \in \mathscr{K}$ ca element neutru. Din tabla operației induse se observă că orice element din $\mathscr{K}$ este simetrizabil în raport cu această operație și anume:

$$1_A^{-1} = 1_A,\ u^{-1} = u,\ v^{-1} = v,\ w^{-1} = w.$$

Așadar $\mathscr{K}$ este grup în raport cu compunerea funcțiilor și este cunoscut sub numele de *grupul lui Klein*. Din tabla operației se deduce că grupul lui Klein este abelian.



Remarcă. Dacă identificăm punctele unui plan $\mathscr{P}$, raportat la un reper cartezian x_1Ox_2, cu elementele lui $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, atunci u este simetria față de axa absciselor, v este simetria față de axa ordonatelor, iar w este simetria față de origine. Funcțiile 1_A, u, v, w invariază (global) orice dreptunghi cu centrul de simetrie în O și cu laturile paralele cu axele de coordonate.

Reguli de calcul într-un grup

SĂ NE AMINTIM

Au fost stabilite deja câteva reguli de calcul pentru elementele unei mulțimi înzestrată cu o lege de compoziție asociativă. În particular, s-au stabilit reguli de calcul privind produsele (sau sumele) iterate. Cum operația unui grup este asociativă, aceste reguli sunt adevărate și pentru grupuri.

Calculul algebric într-un grup beneficiază de reguli noi care, în esență, sunt consecințe ale faptului că orice element este simetrizabil.

Teoremă (*Regulile de simplificare*).
Fie $(G, *)$ un grup. Pentru orice $a, b, c \in G$ avem:

$\boxed{a * b = a * c \Rightarrow b = c}$ și $\boxed{b * a = c * a \Rightarrow b = c}$

simplificarea la stânga *simplificarea la dreapta*

Demonstrație.
Fie $a, b, c \in G$ cu $a * b = a * c$ și a' simetricul lui a; avem:
$b = e * b = (a' * a) * b = a' * (a * b) = a' * (a * c) = (a' * a) * c = e * c = c.$

Analog se demonstrează regula de simplificare la dreapta. ■

Teoremă. Fie $(G, *)$ grup, $a, b \in G$ și a' simetricul lui a.
Ecuația $a * x = b$ are în G soluția unică $x = a' * b$ și ecuația $y * a = b$ are în G soluția unică $y = b * a'$.

Demonstrație. Dacă $x_1, x_2 \in G$ sunt soluții ale ecuației $a * x = b$, atunci $a * x_1 = b = a * x_2$ și, simplificând cu a, obținem $x_1 = x_2$. Așadar ecuația $a * x = b$ are cel mult o soluție în G.

Fie $x = a' * b$, unde a' este simetricul lui a. Avem: $a * x = a * (a' * b) = (a * a') * b = e * b = b$, de unde rezultă că $x = a' * b$ este soluție unică (în G) a ecuației $a * x = b$.

Analog, ecuația $y * a = b$ admite soluția unică $y = b * a'$. ■

Dacă grupul G este dat în notație aditivă, atunci rezultatele din teoremele precedente se transcriu astfel:

$a + b = a + c \Rightarrow b = c$; $\quad b + a = c + a \Rightarrow b = c$;

$a + x = b \Rightarrow x = (-a) + b$; $\quad y + a = b \Rightarrow y = b + (-a)$.

Cu notație multiplicativă avem:

$ab = ac \Rightarrow b = c$; $\quad ba = ca \Rightarrow b = c$;

$ax = b \Rightarrow x = a^{-1}b$; $\quad ya = b \Rightarrow y = ba^{-1}$.

Dacă $(G, \cdot)$ este un grup dat în notație multiplicativă, $a \in G$ și $n \in \mathbb{N}^*$, atunci folosind faptul că operația grupului este asociativă definim:

$$a^n = \begin{cases} e, & \text{dacă } n = 0 \\ a, & \text{dacă } n = 1 \\ a^{n-1}a, & \text{dacă } n > 1 \\ (a^{-n})^{-1}, & \text{dacă } n < 0 \end{cases}.$$

Avem $\boxed{a^m a^n = a^{m+n}}$ și $\boxed{(a^m)^n = a^{mn}}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$.

6) Fie $G = \{e, a, b, c\}$ un grup cu patru elemente în care $a^2 = b$ și element neutru e.
Completați tabla operației grupului G.
Comparați rezultatul cu tabla operației grupului $(\mathbb{Z}_4, +)$.

7) Fie $(G, \cdot)$ grup și $a, b, c \in G$ cu $abc = e$. Arătați că $bca = cab = e$.

8) Fie $(G, \cdot)$ un grup cu n elemente și $S = \{(x, y, z) \in G \times G \times G \mid xyz = e\}$.
Arătați că mulțimea S are n^2 elemente.

9) Fie $(G, \cdot)$ un grup și $a, b \in G$ cu $ab^3 = b^3a$ și $ab^4 = b^4a$. Arătați că $ab = ba$.

10) Fie $(G, \cdot)$ un grup și $a, b \in G$ astfel încât $(ab)^2 = a^2b^2$. Arătați că $ab = ba$.

11) Fie $(G, \cdot)$ un grup și $a, b \in G$ astfel încât $aba^{-1} = b^k$, $k \in \mathbb{Z}$.
Arătați că $a^n b a^{-n} = b^{k^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

12) Fie a în grupul G. Arătați că în transcriere aditivă, $\forall\, h, k \in \mathbb{Z}$, avem:

$\boxed{ha + ka = (h + k)a,\ k(ha) = (kh)a,}$

De exemplu, în scrierea aditivă,
$5a + (-3)a = a + a + a + a + a + (-a) + (-a) + (-a) = a + a = 2a = (5 + (-3))a.$

Să indicăm exact ordinea operațiilor:

$5a + (-3)a =$

$$= \underbrace{((((a+a)+a)+a)+a)}_{} + ((\underbrace{(-a)}_{} + \underbrace{(-a)) + (-a)}_{}) =$$

$$= (((a+a)+a)+a) + (\underbrace{a}_{} + ((\underbrace{(-a)}_{} + \underbrace{(-a)) + (-a)}_{})) =$$

$$= (((a+a)+a)+a) + \underbrace{(a+(-a))}_{} + ((-a)) + (-a)) =$$

$= \ldots\ldots$

Completați șirul egalităților până obțineți rezultatul.

Grupuri de matrice

Fie $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mulțimea matricelor pătrate de ordinul al doilea având coeficienții reali. Dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, notăm cu $|A|$ *determinantul* lui A și cu ${}^tA$ *transpusa* lui A, $|A| = ad - cb$, ${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

Observație. Pentru oricare două matrice $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avem:

$$\boxed{|AB| = |A| \cdot |B|, \quad {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA.}$$

Demonstrație. Pentru $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$,

$$AB = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix},$$

de unde $|AB| = (aa' + bc')(cb' + dd') - (ca' + dc')(ab' + bd') =$
$= (ad - cb)(a'd' - c'b') = |A| \cdot |B|$ și

$${}^t(AB) = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ca' + dc' \\ ab' + bd' & cb' + dd' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = {}^tB\,{}^tA. \ \blacksquare$$

Să mai observăm că ${}^t({}^tA) = A$, oricare ar fi $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Notație. $\boxed{GL_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid |A| \neq 0\}}$

O matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este inversabilă dacă și numai dacă $|A| \neq 0$; rezultă că $GL_2(\mathbb{R})$ este mulțimea tuturor matricelor inversabile din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Teoremă. $GL_2(\mathbb{R})$ înzestrat cu înmulțirea formează un grup numit *grupul general liniar de gradul al 2-lea*.

Demonstrație. Verificăm axiomele grupului.

(i) $\forall\, A, B \in GL_2(\mathbb{R})$, $AB \in GL_2(\mathbb{R})$ adică, $GL_2(\mathbb{R})$ este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor

(ii) $I_2 \in GL_2(\mathbb{R})$, adică $GL_2(\mathbb{R})$ admite element neutru

(iii) $\forall\, A \in GL_2(\mathbb{R})$, $A^{-1} \in GL_2(\mathbb{R})$, adică toate elementele lui $GL_2(\mathbb{R})$ sunt simetrizabile în raport cu înmulțirea matricelor.

Dacă $|A| \neq 0$ și $|B| \neq 0$, atunci $|AB| = |A| \cdot |B| \neq 0$ și (i) este astfel verificată. Proprietatea (ii) rezultă din $|I_2| = 1 \neq 0$, iar (iii) se obține din faptul că $1 = |I_2| = |AA^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}|$, de unde $|A^{-1}| \neq 0$.

Operația indusă pe $GL_2(\mathbb{R})$ este evident asociativă. În consecință, $GL_2(\mathbb{R})$ este grup în raport cu înmulțirea matricelor. $GL_2(\mathbb{R})$ se numește *grupul general liniar* de gradul al 2-lea peste $\mathbb{R}$. $\blacksquare$

Remarcă. Construcția precedentă poate fi reprodusă pentru matricele din $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$ și se obține *grupul general liniar* $GL_n(\mathbb{R})$ de gradul n peste $\mathbb{R}$. Analog, se introduc grupurile $GL_n(\mathbb{Q})$ și $GL_n(\mathbb{C})$ de gradul n peste $\mathbb{Q}$, respectiv $\mathbb{C}$.

Calcul algebric în grupuri de matrice.

13) Pentru $x \in \mathbb{R}$, notăm

$$A_x = \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

a) Arătați că $A_x A_y = A_{x+y}$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.
b) Arătați că mulțimea $G = \{A_x \mid x \in \mathbb{R}\}$ este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

14) Fie $\varepsilon \in \mathbb{C}$ astfel încât $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$ °i $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$.

a) Calculați A^2 și A^3.
b) Arătați că mulțimea $G = \{I_2, A, A^2\}$ este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

15) Fie

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a + 4b & 2b \\ -7b & a - 4b \end{pmatrix} \middle|\, a, b \in \mathbb{Q},\ a^2 - 2b^2 = 1 \right\}$$

Arătați că G formează grup în raport cu înmulțirea matricelor.

16) Fie $I, J, K \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$,

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Arătați că $I^2 = J^2 = K^2 = -I_2$, $IJ = K$, $JK = I$, $KI = J$, $JI = -K$, $KJ = -I$, $IK = -J$.
b) Arătați că mulțimea $H = \{\pm I_2, \pm I, \pm J, \pm K\}$ formează grup în raport cu înmulțirea matricelor, numit *grupul cuaternionilor*.

17) Fie $A = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{5} & -\sin\frac{2\pi}{5} \\ \sin\frac{2\pi}{5} & \cos\frac{2\pi}{5} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

a) Calculați A^2, A^3, A^4, A^5.
b) Completați tabla înmulțirii matricelor mulțimii $\mathcal{G} = \{I_2, A, A^2, A^3, A^4\}$.
c) Determinați, dacă există, inversa fiecăreia dintre matricele I_2, A, A^2, A^3, A^4.
d) Arătați că mulțimea $\mathcal{G} = \{I_2, A, A^2, A^3, A^4\}$ este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

Definiție. O submulțime G a lui $GL_n(\mathbb{C})$ se numește *grup de matrice* dacă verifică următoarele condiții: (i) $\forall\, A, B \in G \Rightarrow AB \in G$. (ii) $\forall\, A \in G \Rightarrow A^{-1} \in G$. (iii) $I_n \in G$.

EXEMPLU

Evident, chiar $G = GL_2(\mathbb{R})$ este grup de matrice. Submulțimile

$$SL_2(\mathbb{R}) = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid |A| = 1\},\quad O(2) = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A^{-1}\},\quad SO(2) = \{A \in O(2) \mid |A| = 1\},$$

înzestrate cu înmulțirea matricelor formează grupuri de matrice, numite respectiv *grupul special liniar* de gradul al 2-lea peste $\mathbb{R}$, *grupul ortogonal* de gradul al 2-lea și *grupul ortogonal special* de gradul al 2-lea.

Remarcă. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ pot fi definite grupurile $SL_n(\mathbb{Q})$, $SL_n(\mathbb{R})$ și $SL_n(\mathbb{C})$, numite *grupul special liniar* de gradul n peste $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, respectiv $\mathbb{C}$. De asemenea, pot fi introduse grupurile $O(n)$ și $SO(n)$, numite respectiv *grupul ortogonal* de gradul n și *grupul ortogonal special* de gradul n.

Exerciții rezolvate. 1) Fie $G = (0, \infty) \setminus \{1\}$. Operația $x * y \overset{\text{def}}{=} x^{\ln y}$ definește pe G o structură de grup abelian.

Soluție. Pentru $x, y \in G$, avem $x \neq 1$ și $\ln y \neq 0$. Rezultă $x * y = x^{\ln y} \in G$. Așadar, „$*$“ este operație pe G.

Avem $(x * y) * z = x^{\ln y} * z = (x^{\ln y})^{\ln z} = x^{\ln y \cdot \ln z} = x^{\ln(y^{\ln z})} = x * y^{\ln z} = x * (y * z)$, deci operația „$*$“ este asociativă.

Avem $x * y = x^{\ln y} = (e^{\ln x})^{\ln y} = e^{\ln x \ln y} = y^{\ln x} = y * x$, deci legea de compoziție „$*$“ este comutativă.

Dacă e este baza logaritmilor naturali, avem $x * e = x^{\ln e} = x^1 = x$, deci e este elementul neutru.

Dacă $x \in G$, atunci simetricul său x', în caz că există, satisface $x * x' = e$, ceea ce revine la $x^{\ln x'} = e$. Logaritmând obținem $\ln x' \cdot \ln x = 1$, deci $\ln x' = \dfrac{1}{\ln x}$, de unde $x' = e^{\frac{1}{\ln x}} \in G$, pentru că $x > 0$, $x \neq 1$.

Conchidem că $(G, *)$ este grup abelian.

2) a) Arătați că în orice linie (coloană) a tablei operației unui grup G cu un număr finit de elemente, fiecare element al lui G apare o dată și numai o singură dată.

b) Arătați că tabla operației unui grup $G = \{e, a, b\}$ cu trei elemente poate fi completată într-un singur mod.

Soluție. a) Presupunem că operația din G este notată multiplicativ. Fie $G = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, cu $a_i \neq a_j$ pentru $i \neq j$.

Fie $a \in G$. În linia lui a din tabla operației apar elementele aa_1, aa_2, ..., aa_i, ..., aa_n.

Dacă $i \neq j$, atunci $aa_i \neq aa_j$. Rezultă că aa_1, aa_2, ..., aa_n sunt distincte și, mai puțin ordinea, coincid cu a_1, a_2, ..., a_n.

Un raționament similar stabilește proprietatea menționată și pentru coloanele tablei.

b) Fie e element neutru în $G = \{e, a, b\}$. În tabla operației lui G vom completa pozițiile „?“ :

$\bullet$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	?	?
b	b	?	?

Nu putem avea $a^2 = a$, deoarece a s-ar repeta pe linia a doua. Nu putem avea nici $a^2 = e$, deoarece în ultima poziție a liniei lui a ar apărea b, ceea ce produce o repetiție pe coloana a treia. Rămâne adevărat că $a^2 = b$. În continuare, pentru a evita repetițiile pe linii și coloane, vom avea $ab = e$, $ba = e$, $b^2 = a$.

$\bullet$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

3) Fie $(G, \cdot)$ un grup abelian cu n elemente. Arătați că $a^n = e$, $\forall\, a \in G$.

Soluție. Fie a_1, a_2, ..., a_n elementele lui G și $b = a_1 a_2 ... a_n$. Dacă $a \in G$, atunci mulțimile $\{aa_1, aa_2, ..., aa_n\}$ și $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ coincid, mai puțin eventual ordinea. Cum G este comutativ avem:

$a_1 a_2 ... a_n = aa_1 aa_2 ... aa_n = \underbrace{aa...a}_{n \text{ ori}} a_1 a_2 ... a_n$. Așadar $b = a^n b$, adică $eb = a^n b$ și, prin simplificare cu b, obținem $e = a^n$.

Observație. Cu tehnici mai sofisticate se poate arăta că afirmația din enunțul exercițiului 3 rămâne adevărată și în grupuri necomutative.

4) Să stabilim că $O(2)$ este un grup de matrice.

Soluție. Dacă $A, B \in O(2)$, atunci ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$ și ${}^t(A^{-1}) = {}^t({}^tA) = A = (A^{-1})^{-1}$, de unde $AB \in O(2)$ și $A^{-1} \in O(2)$. De asemenea ${}^tI_2 = I_2 = I_2^{-1}$, deci $I_2 \in O(2)$. Așadar, condițiile (i), (ii) și (iii) sunt verificate de $O(2)$, deci $O(2)$ este grup de matrice.

PROBLEME PROPUSE

1. Pe $\mathbb{Z}$ definim operația $x * y = x + y - 1$. Arătați că $(\mathbb{Z}, *)$ este grup abelian.

2. Pe $\mathbb{R}$ se definește operația $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.
Arătați că $(\mathbb{R}, *)$ este grup abelian.

3. Pe $\mathbb{R}$ se definește operația $x * y = ax + by - 1$, $a, b \in \mathbb{R}$. Aflați a și b dacă $(\mathbb{R}, *)$ este grup abelian.

4. a) Dacă $x, y \in (-1, 1)$, atunci $\dfrac{x+y}{1+xy} \in (-1, 1)$.
b) Dacă $G = (-1, 1)$, arătați că $(G, *)$ este grup abelian, unde $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$ oricare ar fi $x, y \in G$.

5. Fie $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ și funcțiile $f_i : A \to A$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \dfrac{1}{x}$, $f_3(x) = -x$, $f_4(x) = -\dfrac{1}{x}$.
Fie mulțimea $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$. Arătați că $(G, \circ)$ este grup abelian.

6. Scrieți tabla operației grupului lui Klein. Dacă P este un punct pe perimetrul unui dreptunghi cu laturile paralele cu axele de coordonate și cu centrul de simetrie în origine, atunci imaginile lui P prin funcțiile 1_A, u, v, $w \in \mathscr{K}$ se găsesc tot pe perimetrul dreptunghiului.

7. Fie $G = \{e, a, b, c\}$ un grup cu elementul neutru e. Completați tabla operației lui G, știind că $a^2 = b^2 = e$ și comparați cu tabla grupului Klein.

8. Completați pătratele unui careu cu 5 linii și 5 coloane cu numere din mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ astfel încât suma numerelor din fiecare linie și din fiecare coloană să fie 15.
Indicație. Folosiți tabla unui grup cu 5 elemente.

9. Determinați rădăcinile de ordinul al 4-lea ale unității și alcătuiți tabla înmulțirii grupului $(U_4, \cdot)$.

10. Fie $A = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ și funcțiile $f_i : A \to A$, $1 \leqslant i \leqslant 6$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $f_3(x) = \dfrac{x-1}{x}$, $f_4(x) = \dfrac{1}{x}$, $f_5(x) = 1 - x$ și $f_6(x) = \dfrac{x}{x-1}$.
Fie $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$. Arătați că $(G, \circ)$ este grup necomutativ.

11. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu proprietatea $(xy)^2 = x^2y^2$, $\forall\, x, y \in G$. Arătați că $(G, \cdot)$ este abelian.

12. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu proprietatea $x^2 = e$, $\forall\, x \in G$. Arătați că $(G, \cdot)$ este grup abelian.

13. Fie $(G, \cdot)$ un grup comutativ și $a \in G$. Pe G se definește operația $x * y = xya$.
Arătați că $(G, *)$ este grup abelian.

14. Pe mulțimea G este definită o lege de compoziție asociativă „$*$“ cu proprietățile:
a) $\exists\, e \in G$ astfel încât $e * x = x$, $\forall x \in G$;
b) $\forall\, x \in G$, $\exists\, x' \in G$ astfel încât $x' * x = e$.
Arătați că $(G, *)$ este grup.

15. Fie mulțimea G cu o operație asociativă „$\cdot$“ astfel încât, oricare ar fi $a, b \in G$, ecuațiile $ax = b$ și $ya = b$ au soluții în G. Arătați că $(G, \cdot)$ este grup.

16. Fie $(G, \cdot)$ un grup multiplicativ.
a) Dacă $a \in G$, atunci $a^h a^k = a^{h+k}$, $(a^h)^k = a^{hk}$, $\forall h, k \in \mathbb{Z}$.
b) Dacă $a, b \in G$ și $ab = ba$, atunci $(ab)^h = a^h b^h$, $h \in \mathbb{Z}$.

17. Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{R}, ac \neq 0 \right\}$.
Arătați că $(G, \cdot)$ este un grup de matrice.

18. Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\}$.
Arătați că $(G, \cdot)$ este un grup de matrice.

19. Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$.
Arătați că $(G, \cdot)$ este un grup de matrice.

20. Pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, fie $A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.
a) Arătați că $A_\alpha A_\beta = A_{\alpha+\beta}$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
b) Dacă $G = \{A_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, arătați că $(G, \cdot)$ este un grup de matrice.

21. Fie $A = \begin{pmatrix} 1+i & 3i \\ 2-i & 2i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -i \\ 2+i & 1+i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.
Calculați: A^*, B^*, AB, $(AB)^*$ și B^*A^*.

22. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
Arătați că următoarele afirmații sunt echivalente:
(1) ${}^tA = A^{-1}$;
(2) $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$, $ac + bd = 0$;
(3) $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$, $ab + cd = 0$.

23. Verificați dacă $SL_2(\mathbb{R})$ este grup de matrice.

24. Verificați dacă $SO(2)$ este grup de matrice.

Grupuri de permutări

Grupurile finite, adică cele cu un număr finit de elemente, au aplicații spectaculoase în aritmetică și în combinatorică. Ele sunt de asemenea folosite în studiul simetriilor unor configurații geometrice, în clasificarea grafurilor etc. Într-un sens care va fi precizat mai târziu, studiul grupurilor finite este strâns legat de studiul permutărilor unei mulțimi finite.

Grupul permutărilor unei mulțimi

Fie A o mulțime nevidă. O funcție bijectivă $\sigma : A \to A$ se numește *permutare* a mulțimii A. Vom nota cu S_A mulțimea tuturor permutărilor mulțimii A. Cum *funcția identică* a mulțimii A,

$$1_A : A \to A, \quad 1_A(x) = x$$

este bijectivă, avem $1_A \in S_A$.

Funcția 1_A este numită încă *permutarea identică* a mulțimii A. Dacă $\sigma, \pi \in S_A$, atunci $\sigma \circ \pi \in S_A$, deoarece compusa a două funcții bijective este, de asemenea, funcție bijectivă,

$$(\sigma \circ \pi)(x) = \sigma(\pi(x)), \quad A \xrightarrow{\pi} A \xrightarrow{\sigma} A$$

Rezultă că operația de compunere a permutărilor mulțimii A este o lege de compoziție pe S_A, evident asociativă și de element neutru 1_A.

Teoremă. Dacă A este o mulțime nevidă, atunci $(S_A, \circ)$ este grup, numit *grupul permutărilor* mulțimii A.

Demonstrație. Cum legea de compoziție „$\circ$“ este asociativă, de element neutru 1_A, rămâne să arătăm că orice permutare $\sigma \in S_A$ admite inversă în raport cu operația de compunere.

După cum este cunoscut, dacă $\sigma : A \to A$ este bijectivă, atunci funcția $\sigma^{-1} : A \to A, \sigma^{-1}(y) = x \Leftrightarrow \sigma(x) = y$ este bijectivă și $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = 1_A$. ■

Grupul S_n

În continuare presupunem că A este o mulțime finită cu n elemente, $n \in \mathbb{N}^*$. Cum natura elementelor mulțimii A nu este importantă pentru studiul nostru, putem presupune că $A = \{1, 2, ..., n\}$. Cu această convenție, S_A va fi notată cu S_n și elementele lui S_n vor fi numite *permutări de gradul n*.

Vom spune că S_n este *grupul permutărilor de gradul n* sau *grupul permutărilor de n obiecte*.

O permutare $\sigma \in S_n, \sigma : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$ este complet determinată dacă pentru fiecare $i \in \{1, 2, ..., n\}$ este cunoscută imaginea sa $\sigma(i) \in \{1, 2, ..., n\}$. Din acest motiv o permutare $\sigma \in S_n$ se descrie cu un tabel cu două linii,

1) Scrieți permutările grupurilor S_1, S_2 și S_3.

2) Scrieți toate permutările mulțimii $A = \{23, 81, 121\}$.

3) Scrieți permutările din S_3 care nu sunt menționate în lista următoare:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) Scrieți toate permutările mulțimii $\{\sigma \in S_4 \mid \sigma(2) = 3, \sigma(4) = 1\}$.

5) Care dintre următoarele tabele reprezintă permutări din S_5 ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6) Considerăm permutările

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Calculați $\sigma \circ \tau$, $\tau \circ \sigma$, $\tau \circ \tau$, $\sigma \circ \sigma$, σ^3, τ^{20}.

b) Determinați σ^{-1} și să se verifice dacă $\sigma^{-1} \circ \sigma = \sigma \circ \sigma^{-1} = 1_5$.

7) Determinați permutarea π dacă:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$;

b) $\pi \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

c) $\pi \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Indicație. c) Se poate face prin încercări.

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & i & \dots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(i) & \dots & \sigma(n)\end{pmatrix},$$

în prima linie fiind trecute, în ordine naturală, numerele 1, 2, ..., i, ..., n, iar în a doua linie fiind inserate imaginile lor $\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(i), ..., \sigma(n)$ prin σ. Cum σ este funcție bijectivă, în a doua linie apar, într-o ordine care depinde de σ, tot numerele 1, 2, ..., i, ..., n, fiecare o singură dată.

Se notează cu e permutarea identică a mulțimii $A = \{1, 2, ..., n\}$.

Avem $e=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & i & .. & n\\ 1 & 2 & \dots & i & \dots & n\end{pmatrix}$ și $e\circ\sigma=\sigma\circ e=\sigma$, oricare ar fi $\sigma\in S_n$.

EXEMPLE

1) Funcția bijectivă $\sigma:\{1,2,3,4,5\}\to\{1,2,3,4,5\}$, $\sigma(1)=3, \sigma(2)=5$, $\sigma(3)=2, \sigma(4)=4$ și $\sigma(5)=1$ poate fi descrisă astfel:

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}.$$

2) Fie $\sigma, \pi\in S_4$, $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$

Cum $(\sigma\circ\pi)(i)=\sigma(\pi(i))$ și $(\pi\circ\sigma)(i)=\pi(\sigma(i))$ oricare ar fi $i\in\{1,2,3,4\}$, avem $\sigma\circ\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ \sigma(\pi(1)) & \sigma(\pi(2)) & \sigma(\pi(3)) & \sigma(\pi(4))\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ \sigma(3) & \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

$$\pi\circ\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ \pi(\sigma(1)) & \pi(\sigma(2)) & \pi(\sigma(3)) & \pi(\sigma(4))\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ \pi(4) & \pi(1) & \pi(3) & \pi(2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Se observă că $\sigma\circ\pi\neq\pi\circ\sigma$

3) Dacă $\sigma\in S_5$, $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2\end{pmatrix}$, atunci $\sigma(1)=3, \sigma(2)=1$, $\sigma(3)=5, \sigma(4)=4$ și $\sigma(5)=2$. Cum pentru orice $i\in\{1,2,3,4,5\}$ avem $\sigma^{-1}(j)=i\Leftrightarrow\sigma(i)=j$ rezultă că $\sigma^{-1}(1)=2, \sigma^{-1}(2)=5$, $\sigma^{-1}(3)=1, \sigma^{-1}(4)=4$ și $\sigma^{-1}(5)=3$, deci $\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$.

Avem $\sigma^{-1}\circ\sigma=\sigma\circ\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix}=e$.

8) Scrieți toate permutările mulțimilor:

a) $\{\sigma\in S_3 \mid \sigma(3)=3\}$;

b) $\{\sigma\in S_4 \mid \sigma(2)=3 \text{ și } \sigma(4)=1\}$;

c) $\{\sigma\in S_4 \mid \sigma(4)=4\}$.

9) Câte elemente au fiecare dintre următoarele mulțimi:

a) $A=\{\sigma\in S_6 \mid \sigma(2)=5\}$;

b) $A=\{\sigma\in S_6 \mid \sigma(2)=5\}$;

c) $A=\{\sigma\in S_6 \mid \sigma(2)=5, \sigma(4)=1\}$;

d) $A=\left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ a & b & 3 & 5 & 4\end{pmatrix} \middle| a,b\in\{1,2,3,4,5\}\right\}$.

10) Fie permutările $\sigma, \pi\in S_5$,

$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5\end{pmatrix}$ și $\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1\end{pmatrix}$.

a) Calculați $\sigma\circ\pi$, $\pi\circ\sigma$, σ^2, σ^3, σ^{21}, π^{17}.

b) Determinați σ^{-1} și π^{-1} și verificați dacă $\sigma^{-1}\circ\sigma=\sigma\circ\sigma^{-1}=e$, $\pi^{-1}\circ\pi=\pi\circ\pi^{-1}=e$.

11) Determinați $\sigma\in S_5$ dacă

a) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3\end{pmatrix}\circ\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$.

b) $\sigma\circ\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$.

12) Determinați $\sigma\in S_4$, dacă

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix}\circ\sigma\circ\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 4 & 2\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}.$$

13) Determinați $\sigma\in S_3$ dacă

$$\sigma\circ\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

14) Câte elemente are fiecare dintre următoarele mulțimi?

a) S_2; c) S_5;

b) S_3; d) S_7.

Teoremă. Grupul $(S_n, \circ)$ are $n!$ elemente.

Demonstrație. Pentru a construi o permutare $\sigma \in S_n$ precizăm succesiv valorile $\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n)$. Cum în linia a doua a lui σ,

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & i & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(i) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}$ nu putem avea numere care

să se repete, rezultă că avem n posibilități de alegere pentru $\sigma(1)$, $n - 1$ posibilități de alegere pentru $\sigma(2)$ ș.a.m.d. Concluzionăm că numărul permutărilor $\sigma \in S_n$ este

$n(n-1)(n-2) \ldots 2 \cdot 1 = n!$ ■

15) Arătați că mulțimea permutărilor unei mulțimi cu n elemente, $n \geqslant 4$, este mai numeroasă decât mulțimea părților unei mulțimi cu n elemente și mai puțin numeroasă decât mulțimea tuturor funcțiilor de la o mulțime cu n elemente în ea însăși.

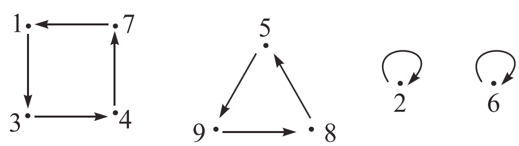
Indicație. Mulțimea părților unei mulțimi cu n elemente are 2^n elemente.

Mulțimea tuturor funcțiilor cu domeniul o mulțime A și codomeniul tot mulțimea A, când A are n elemente, are n^n elemente.

Diagrama unei permutări

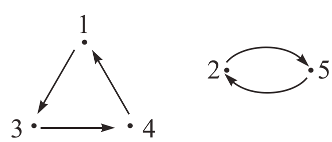
Acțiunea unei permutări $\sigma \in S_n$ asupra numerelor 1, 2, ..., n poate fi ilustrată cu ajutorul unei *diagrame*. În acest scop se consideră n puncte distincte într-un plan, asociate numerelor 1, 2, ..., n. Dacă $\sigma(i) = j$, atunci se trasează o săgeată cu originea în punctul asociat lui i și cu extremitatea în punctul asociat lui j. Configurația geometrică astfel obținută se notează cu D_σ și se numește *diagrama* permutării $\sigma \in S_n$. Punctele asociate numerelor 1, 2, ..., n se numesc *vârfurile* diagramei D_σ. Cum σ este funcție bijectivă, din fiecare vârf al diagramei D_σ „pleacă“ o singură săgeată și „sosește“ o singură săgeată.

1) Fie $\sigma \in S_9$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 4 & 7 & 9 & 6 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$. Diagrama D_σ este

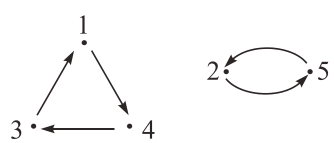


Cum $\sigma^{-1}(j) = i \Leftrightarrow \sigma(i) = j$, diagrama $D_{\sigma^{-1}}$ a permutării $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 2 & 1 & 3 & 8 & 6 & 4 & 9 & 5 \end{pmatrix}$, se obține schimbând sensul săgeților în diagrama D_σ a permutării σ.

2) Dacă $\pi \in S_5$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ atunci diagrama D_π este



iar diagrama $D_{\pi^{-1}}$ este



PROBLEME PROPUSE

1. Fie $\sigma, \pi \in S_5$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Calculați $\sigma \circ \pi$, $\pi \circ \sigma$, σ^2 și π^2.

2. Fie $\sigma \in S_4$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Determinați σ^{-1} și verificați că $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = e$.

3. Rezolvați în grupul $(S_3, \circ)$ ecuațiile $\sigma \circ x = \pi$ și $y \circ \sigma = \pi$, unde $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ și $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Fie $\sigma \in S_5$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calculați σ^2, σ^3, σ^4 și σ^{32}.

5. Fie $\sigma, \pi \in S_4$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ și $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Calculați $\sigma \circ \pi$, $\pi \circ \sigma$, $\sigma^{-1} \circ \pi$, $\sigma \circ \pi^{-1}$, $\sigma^{-1} \circ \pi \circ \sigma$.

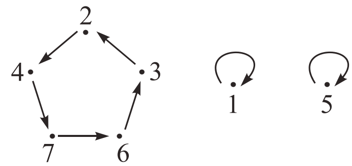
6. Rezolvați în grupul $(S_5, \circ)$ ecuațiile $\sigma \circ x = \pi$, $y \circ \sigma = \pi$, $\sigma \circ x \circ \sigma^{-1} = \pi$, unde $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ și $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

7. Fie $\sigma \in S_7$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 6 & 3 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Figurați diagramele lui σ și σ^{-1}.

8. Fie $\sigma, \pi \in S_9$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 4 & 6 & 5 & 1 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ și $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$. Figurați diagramele lui σ, π și π^{-1}.

9. Precizați permutarea $\sigma \in S_7$, dacă admite diagrama:



10. Fie următoarele permutări:

$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determinați suportul fiecărei permutări.
b) Care dintre aceste permutări sunt disjuncte?
c) Verificați dacă $\gamma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.
Verificați, de asemenea, dacă $\tau \circ \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.
d) Verificați dacă permutările e și ε sunt disjuncte.
e) Calculați $\tau^{-1}(4)$; $e^{-1}(2)$;
f) Calculați $(\tau \circ \pi) \circ \sigma$;
g) Verificați dacă $e \circ \varepsilon = \varepsilon \circ e$.

11. Arătați că grupurile $(S_1, \circ)$ și $(S_2, \circ)$ sunt comutative și că grupul $(S_3, \circ)$ nu este comutativ.

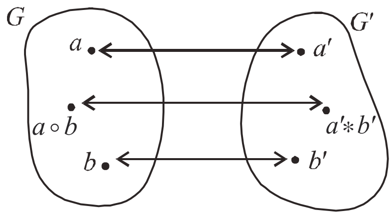
12. Pentru orice $n \geqslant 3$, grupul $(S_n, \circ)$ nu este comutativ.

13. Fie $\sigma \in S_n$ astfel încât $\sigma \circ \pi = \pi \circ \sigma$, oricare ar fi $\pi \in S_n$. Arătați că $\sigma = e$.

Morfisme de grupuri

Proprietățile algebrice ale elementelor unui grup sunt cele descrise în lista axiomelor grupului sau sunt consecințe ale axiomelor. Există grupuri ale căror elemente au proprietăți algebrice asemănătoare și putem identifica printr-o funcție acele elemente care se comportă la fel. Această funcție va fi numită morfism (izomorfism, automorfism etc.). Studiul unui grup poate să ne furnizeze informații și asupra unui alt grup dacă între aceste structuri a fost stabilit un morfism. Cu ajutorul morfismelor putem să realizăm o clasificare a grupurilor.

Pentru a studia în ce măsură proprietățile elementelor unui grup pot fi regăsite într-un alt grup, vom căuta o corespondență bijectivă *compatibilă* cu operațiile celor două grupuri.



Definiție. Fie $(G, \circ)$ și $(G', *)$ două grupuri. O funcție $f: G \to G'$ se numește *izomorfism de grupuri* dacă:

(1) $f(x \circ y) = f(x) * f(y), \forall x, y \in G$;

(2) f este bijectivă.

Spunem că grupul G este *izomorf* cu grupul G' și scriem $G \simeq G'$, dacă există un izomorfism $f: G \to G'$. În caz contrar, spunem că grupul G *nu este izomorf* cu grupul G' și scriem $G \not\simeq G'$.

Remarcă. Condiția (1) din definiția izomorfismului arată că imaginea compusului a oricăror două elemente $x, y \in G$ este egală cu compusul imaginilor (în G'); vom spune că acțiunea bijecției f este *compatibilă* cu operațiile celor două grupuri.

Dacă operațiile celor două grupuri sunt notate aditiv, atunci (1) se scrie astfel: $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in G$.

Dacă operația lui G este notată aditiv, iar cea a lui G' este notată multiplicativ, avem: $f(x+y) = f(x)f(y)$, $\forall x, y \in G$.

Teoremă. Fie $(G, \circ)$ și $(G', *)$ două grupuri. Dacă $f: G \to G'$ este izomorfism, atunci $f^{-1}: G' \to G$ este izomorfism.

Demonstrație. Fie $x', y' \in G'$. Cum f este funcție bijectivă, există $x, y \in G$ unic determinați astfel încât $f(x) = x'$ și $f(y) = y'$.

Conform definiției funcției inverse f^{-1}, avem $f^{-1}(x') = x$ și $f^{-1}(y') = y$. Dar $x' * y' = f(x) * f(y) = f(x \circ y)$, de unde $f^{-1}(x' * y') = x \circ y = f^{-1}(x') * f^{-1}(y')$; cum $f^{-1}: G' \to G$ este funcție bijectivă, rezultă că f^{-1} este izomorfism. ■

Remarcă. Între două grupuri pot exista mai multe izomorfisme. Astfel, pentru orice $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ avem un izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ la grupul $(\mathbb{R}, +)$ (vezi exemplul următor).

Identificarea unor grupuri izomorfe.

1) Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

a) Arătați că G este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

b) Funcția $f: \mathbb{R} \to G$, $f(x) = \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ este izomorfism de grupuri.

2) Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $G = \{I_2, A, A^2, A^3\}$.

a) Arătați că G este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

b) Comparați tabla înmulțirii grupului $(G, \cdot)$ cu cea a grupului $(\mathbb{Z}_4, +)$ și conchideți că $(G, \cdot) \simeq (\mathbb{Z}_4, +)$.

3) Fie $G = (3, \infty)$.

a) Dacă $x, y \in G$, atunci $x * y \overset{\text{def}}{=} xy - 3(x+y) + 12 \in G$.

b) Arătați că $(G, *)$ este grup abelian.

c) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f: \mathbb{R}_+^* \to G$, $f(x) = ax + b$ să fie izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ la $(G, *)$.

4) Pe $G_1 = (-1, \infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = xy + x + y$, iar pe $G_2 = (1, \infty)$ se definește legea de compoziție $x \circ y = xy - x - y + 2$.

Arătați că G_1 și G_2 sunt grupuri izomorfe.

Indicație.

Se consideră $f: G_1 \to G_2$, $f(x) = x + 2$.

Exemple și comentarii legate de izomorfismele de grupuri – temă de sinteză

1) $(\mathbb{R}_+^*, \cdot) \simeq (\mathbb{R}, +)$.

Soluție. Fie $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ și $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$. Cum f este funcție bijectivă și $f(xy) = \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y = f(x) + f(y)$, rezultă că f este izomorfism de grupuri. Observăm că f^{-1} în acest caz este funcția $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $f^{-1}(u) = a^u$ și avem $f^{-1}(u + v) = a^{u+v} = a^u a^v = f^{-1}(u) f^{-1}(v)$.

În legătură cu exemplul 1) să mai consemnăm faptul că putem, folosind *tablele de logaritmi*, să înlocuim calcule mai complicate ca înmulțiri, împărțiri, exponențieri prin unele mult mai simple în care intervin adunări, scăderi, înmulțiri. Acest fapt justifică încă o dată de ce este important să găsim izomorfisme între grupuri: chiar dacă două grupuri izomorfe sunt „identice“ din punct de vedere abstract, calculele pot fi mai simple sau unele proprietăți pot fi descoperite mai ușor într-unul dintre grupuri, iar rezultatele obținute pot fi transferate printr-un izomorfism în celălalt grup.

2) $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{Z} \right\}$ este grup de matrice și $(\mathbb{Z}, +) \simeq (G, \cdot)$.

Soluție. Pentru $a, b \in \mathbb{Z}$ avem $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. De asemenea, $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ și $I_2 \in G$, deci $(G, \cdot)$ este grup de matrice. Funcția $f : \mathbb{Z} \to G$, $f(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este evident bijectivă și cum $f(a+b) = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = f(a)f(b)$, rezultă că f este izomorfism, deci $(\mathbb{Z}, +) \simeq (G, \cdot)$.

3) $(\mathbb{Q}, +) \not\simeq (\mathbb{Q}_+^*, \cdot)$. *Grupul aditiv $(\mathbb{Q}, +)$ al numerelor raționale nu este izomorf cu grupul multiplicativ $(\mathbb{Q}_+^*, \cdot)$ al numerelor raționale strict pozitive.*

Soluție. Presupunem că există un izomorfism $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_+^*$. Cum f este funcție bijectivă, există $r \in \mathbb{Q}$ cu $f(r) = 2$. Cum $f\left(\frac{r}{2}\right) \in \mathbb{Q}$ și $2 = f(r) = f\left(\frac{r}{2} + \frac{r}{2}\right) = f\left(\frac{r}{2}\right) f\left(\frac{r}{2}\right) = f\left(\frac{r}{2}\right)^2$, avem $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, contradicție.

4) $(\mathbb{Z}_4, +) \simeq (U_4, \cdot)$. *Grupul aditiv $(\mathbb{Z}_4, +)$ al claselor de resturi modulo 4 este izomorf cu grupul multiplicativ $(U_4, \cdot)$ al rădăcinilor de ordin 4 ale unității.*

Soluție. Grupul U_4 este format cu rădăcinile (din $\mathbb{C}$) ale polinomului $f = X^4 - 1$. Avem $U_4 = \{1, i, -1, -i\}$. Corespondența $f : \mathbb{Z}_4 \to U_4$, $f(\hat{0}) = 1$, $f(\hat{1}) = i$, $f(\hat{2}) = -1$, $f(\hat{3}) = -i$ este bijectivă și tablele celor două grupuri sunt la fel structurate relativ la f. Rezultă că f este izomorfism, deci $(\mathbb{Z}_4, +) \simeq (U_4, \cdot)$.

Tabla grupului $(\mathbb{Z}_4, +)$

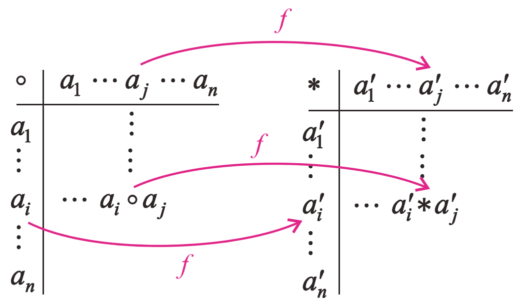
$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$

Tabla grupului $(U_4, \cdot)$

$\cdot$	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

Remarcă. Dacă două grupuri $(G, \circ)$ și $(G', *)$ sunt izomorfe și G are un număr finit de elemente, atunci G' are același număr de elemente.

Să presupunem deci, că $G = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ și $G' = \{a_1', a_2', \ldots a_n'\}$ sunt grupuri cu n elemente, iar $f : G \to G'$ este o funcție bijectivă cu $f(a_i) = a_i'$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Atunci f este izomorfism dacă și numai dacă, $\forall 1 \leqslant i, j \leqslant n$, $f(a_i \circ a_j) = a_i' * a_j'$, adică în poziții corespunzătoare din tabelele celor două grupuri, se găsesc elementele care corespund prin bijecția f. Spunem că tablele acestor două grupuri sunt la fel structurate (relativ la f).



Renunțând la condiția de bijectivitate din definiția izomorfismului, obținem noțiunea mai generală de *morfism* (*omomorfism*) de grupuri:

Definiție. Fie grupurile $(G, \circ)$ și $(G', *)$. Funcția $f: G \to G'$ (nu obligatoriu bijectivă) se numește *morfism* de grupuri dacă:

$$f(x \circ y) = f(x) * f(y),\ \forall x, y \in G.$$

1) Funcția $f: \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+^*,\ f(z) = |z|$ este morfism de la grupul multiplicativ $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ al numerelor complexe nenule la grupul multiplicativ $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ al numerelor reale pozitive nenule.

Soluție. Pentru orice număr complex $z = a + bi$, avem $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ și $|z| > 0$ dacă $z \neq 0$. Dacă $z, w \in \mathbb{C}$, atunci $f(zw) = |zw| = \sqrt{zw\overline{zw}} = \sqrt{zw\bar{z}\,\bar{w}} = \sqrt{(z\bar{z})(w\bar{w})} = \sqrt{z\bar{z}}\sqrt{w\bar{w}} =$ $= |z| \cdot |w| = f(z)f(w)$, deci f este morfism de grupuri.

2) Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*,\ f(k) = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$ este morfism de la grupul $(\mathbb{Z}, +)$ la grupul $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

Soluție. Avem $(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) =$
$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) =$
$= \cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Dacă $h, k \in \mathbb{R}$, atunci $f(h+k) = \cos\dfrac{2(h+k)\pi}{n} + i\sin\dfrac{2(h+k)\pi}{n} =$

$$= \left(\cos\frac{2h\pi}{n} + i\sin\frac{2h\pi}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) = f(h)f(k).$$

Vom preciza acțiunea unui morfism de grupuri asupra elementului neutru, precum și faptul că imaginea unui element printr-un morfism comută cu operația de trecere la invers:

Teoremă. Fie grupurile $(G, \circ)$ și $(G', *)$ având elementele neutre e și e'. Dacă $f: G \to G'$ este morfism de grupuri, atunci:

(1) $f(e) = e'$ (2) $f(x^{-1}) = f(x)^{-1},\ \forall x \in G$

Demonstrație. Trebuie arătat că f aplică elementul neutru e al lui G peste elementul neutru e' al lui G' și că imaginea inversului, în G, al oricărui element $x \in G$, este inversul, în G', al imaginii $f(x)$ a lui x prin f. Se observă că

$e' * f(e) = f(e) = f(e \circ e) = f(e) * f(e)$.

Așadar, în grupul G' avem $e' * f(e) = f(e) * f(e)$ și, simplificând cu $f(e)$, se obține $f(e) = e'$.

Pentru orice $x \in G$, avem $e' = f(e) = f(x \circ x^{-1}) = f(x) * f(x^{-1})$ și, analog, $e' = f(x^{-1}) * f(x)$. Rezultă că $f(x^{-1})$ este inversul lui $f(x)$, de unde $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$. ■

Dacă G este grup, atunci un morfism (izomorfism) $f: G \to G$ se numește *endomorfism* (respectiv *automorfism*) al grupului G.

5) Pe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ definim legea de compoziție $(\hat{a}, \hat{b}) + (\hat{c}, \hat{d}) = (\hat{a} + \hat{c}, \hat{b} + \hat{d})$.
a) Câte elemente are mulțimea $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$?
b) Arătați că $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ este grup.
c) Comparați tabla operației grupului $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ cu cea a grupului lui Klein și deduceți că $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +) \simeq (\mathcal{K}, \circ)$.

6) Arătați că funcția $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n,\ f(a) = \hat{a}$ este morfism de la grupul $(\mathbb{Z}, +)$ la grupul $(\mathbb{Z}_n, +)$.

Indicație. $\forall\ a, b \in \mathbb{Z}$,
$f(a+b) = \widehat{a+b} = \hat{a} + \hat{b} = f(a) + f(b)$.

7) Arătați că funcția $f: GL_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$, $f(A) = |A|$ este morfism de la grupul $(GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$ la grupul $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

Indicație. $\forall\ A, B \in GL_2(\mathbb{R})$ avem $f(AB) = |AB| = |A| \cdot |B| = f(A)f(B)$.

8) Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{pmatrix} \middle|\ \hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d} \in \mathbb{Z}_3 \right\}$.
a) Câte elemente are mulțimea G ?
b) Arătați că G este grup în raport cu operația: $\begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widehat{a'} & \widehat{b'} \\ \widehat{c'} & \widehat{d'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a} + \widehat{a'} & \hat{b} + \widehat{b'} \\ \hat{c} + \widehat{c'} & \hat{d} + \widehat{d'} \end{pmatrix}$
c) Arătați că funcția $f: \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \to G$, $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{pmatrix}$ este morfism surjectiv de la grupul $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), +)$ la grupul $(G, +)$.

9) Funcția $f: \mathbb{R} \to GL_2(\mathbb{R})$, $f(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ este morfism de la grupul $(\mathbb{R}, +)$ la grupul $(GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$.
a) Determinați mulțimea de numere $K = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid f(\alpha) = I_2\}$.
b) Arătați dacă $f(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este element neutru în $GL_2(\mathbb{R})$.
c) Verificați că $f(-\pi) = (f(\pi))^{-1}$.
d) Arătați că $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \left(f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)^{-1}$.

● **1.** Fie $G=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -a & 1 & -\frac{1}{2}a^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a\in\mathbb{R}\right\}$. Arătați că $(G,\cdot)$ este grup de matrice și că $(\mathbb{R},+)\simeq(G,\cdot)$.

● **2.** Fie $G=\{a+b\sqrt{2} \mid a, b\in\mathbb{Q}, a^2-2b^2=1\}$ și $G'=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b\in\mathbb{Q}, a^2-2b^2=1\right\}$.

Arătați că G este grup în raport cu înmulțirea numerelor reale, $(G', \cdot)$ este grup de matrice, iar funcția $f: G\to G'$, $f(a+b\sqrt{2})=\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ este izomorfism de la grupul $(G, \cdot)$ la grupul $(G', \cdot)$.

● **3.** Fie $G=\left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b\in\mathbb{R}, a^2+b^2\neq 0\right\}$.

Arătați că $(G, \cdot)$ este grup de matrice și funcția $f:\mathbb{C}^*\to G$, $f(a+bi)=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ este izomorfism de la grupul $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ la grupul $(G, \cdot)$.

● **4.** Fie $G=(-1, 1)$. Pe G definim legea de compoziție „$*$“ prin $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$. Arătați că $(G,*)$ este grup și că funcția $f:G\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ este izomorfism de la grupul $(G,*)$ la grupul $(\mathbb{R}, +)$.

●● **5.** Pentru orice $a\in\mathbb{R}$ definim funcția $T_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $T_a(x)=x+a$.
(i) Arătați că $T_a\circ T_b=T_{a+b}$, $\forall a, b\in\mathbb{R}$.
(ii) Mulțimea $G=\{T_a \mid a\in\mathbb{R}\}$ este grup în raport cu operația de compunere a funcțiilor.
(iii) Funcția $f:\mathbb{R}\to G$, $f(a)=T_a$ este izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}, +)$ la grupul $(G,\circ)$.

●● **6.** Fie $A=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Pentru orice $a\in\mathbb{R}$ definim $F_a: A\to A$, $F_a(x, y)=\left(x+ay+\dfrac{a^2}{2}, y+a\right)$.
(i) Arătați că $F_a\circ F_b=F_{a+b}$, $\forall a, b\in\mathbb{R}$.
(ii) Mulțimea $G=\{F_a \mid a\in\mathbb{R}\}$ este grup în raport cu operația de compunere a funcțiilor.
(iii) Funcția $f:\mathbb{R}\to G$, $f(a)=F_a$ este izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}, +)$ la grupul $(G,\circ)$.

●● **7.** Arătați că grupurile $(\mathbb{Z}, +)$ și $(\mathbb{Q}, +)$ nu sunt izomorfe.

●● **8.** Fie $f: G\to G'$ un morfism surjectiv de la grupul $(G, \cdot)$ la grupul $(G', \cdot)$. Atunci:
(i) dacă G este comutativ, atunci G' este comutativ;
(ii) dacă $x^3=e$, $\forall x\in G$, atunci $x'^3=e'$, $\forall x'\in G'$.

● **9.** Fie $G=\{e, a\}$ un grup multiplicativ cu două elemente.
(i) Arătați că tabla lui G este următoarea:

$\cdot$	e	a
e	e	a
a	a	e

(ii) Arătați că orice grup G cu două elemente este izomorf cu grupul $(\mathbb{Z}_2, +)$.

● **10.** Fie $G=\{e, a, b\}$ un grup multiplicativ cu trei elemente.
(i) Arătați că tabla lui G este următoarea:

$\cdot$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

(ii) Arătați că orice grup G cu trei elemente este izomorf cu grupul $(\mathbb{Z}_3, +)$.

●●● **11.** Fie $G=\{e, a, b, c\}$ un grup multiplicativ cu patru elemente astfel încât $x^2=e$, $\forall x\in G$.
(i) Completați tabla operației lui G.
(ii) Arătați că $G\simeq\mathscr{K}$, unde $\mathscr{K}$ este grupul lui Klein.
(iii) Arătați că $(G,\cdot)\not\simeq(\mathbb{Z}_4, +)$.

●●● **12.** Arătați că orice grup cu patru elemente este izomorf cu grupul lui Klein sau cu grupul $(\mathbb{Z}_4, +)$.

Teste de evaluare

Testul 1

(1p) **1.** Fie mulțimea $M = (1, +\infty) \setminus \{2\}$ și operația $x * y \overset{\text{def}}{=} 1 + (x-1)^{\ln\sqrt{y-1}}$.

Demonstrați că „$*$“ este comutativă.

2. Fie $G = \left\{ A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}, a \neq -2 \right\}$.

(1p) i) Arătați că $\forall\, A, B \in G$, $A \cdot B = B \cdot A$.

(1p) ii) Arătați că $A + 2I_3$ este inversabilă $\forall\, A \in G$, unde I_3 este matricea unitate.

(2p) iii) Pe G definim legea „$*$“ prin: $A * B = AB + 2(A + B + I_3)$. Arătați că $\forall A, B \in G$, $A * B \in G$ și că legea „$*$“ este asociativă, comutativă și are element neutru.

(2p) **3.** Fie mulțimea $M = \mathbb{Q} \setminus \{-2\}$ înzestrată cu operația $x * y \overset{\text{def}}{=} x + y + \frac{1}{2}xy$. Arătați că „$*$“ este o operație comutativă, asociativă, admite element neutru și orice element din M este simetrizabil.

(2p) **4.** Fie mulțimea $G = (a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$, $k > 0$ și operația $x * y = k(x-a)(y-a) + a$. Demonstrați că $(G, *)$ este grup abelian izomorf cu $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$.

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 1 oră.

Testul 2

1. Fie $M = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \middle| A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}) \right\}$.

(1p) a) Arătați că înmulțirea definită pe M este asociativă, comutativă și are element neutru.

(1p) b) Determinați elementele simetrizabile.

2. Pe mulțimea numerelor complexe $\mathbb{C}$ definim legea „$\circ$“ prin: $z_1 \circ z_2 = z_1 + z_2 - z_1 z_2$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

(1p) a) Studiați proprietățile operației „$\circ$”.

(2p) b) Determinați elementele din $\mathbb{C}$ care nu sunt simetrizabile în raport cu legea „$\circ$“.

(2p) **3.** Fie mulțimea $M = [k, +\infty)$, $k \in \mathbb{R}$ și operația $x * y \overset{\text{def}}{=} xy - k(x+y) + k^2 + k$. Arătați că legea „$*$“ este comutativă și admite element neutru.

(2p) **4.** Arătați că mulțimea

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x+4y & 2y \\ -7y & x-4y \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R}^*, y \in \mathbb{R}, x^2 - 2y^2 = 1 \right\},$$

cu înmulțirea matricelor formează grup comutativ.

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 1 oră.

Probleme de tip bacalaureat

1. Se consideră matricele

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea

$$\mathcal{H} = \left\{ H(x) \mid H(x) = I_2 + xA,\ x \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right) \right\}.$$

a) Să se arate că $I_2 \in \mathcal{H}$.

b) Să se calculeze A^2.

c) Să se arate că $2xy + x + y \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$ pentru orice $x, y \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$.

d) Să se arate că $H(x)H(y) = H(2xy + x + y)$, $\forall x, y \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$.

e) Să se arate că înmulțirea matricelor determină pe $\mathcal{H}$ o structură de grup abelian.

f) Să se arate că grupurile $(\mathcal{H}, \cdot)$ și $(\mathbb{R}, +)$ sunt izomorfe.

g) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația

$$H(x) = H\left(\frac{1}{2}\right) H\left(\frac{3}{2}\right) H\left(\frac{5}{2}\right) \ldots H\left(\frac{2007}{2}\right).$$

2. Considerăm pe $\mathbb{R}$ legea de compoziție „$\circ$" definită prin $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$.

a) Să se verifice dacă legea „$\circ$" este asociativă.

b) Să se calculeze $x \circ y - (x-2)(y-2)$.

c) Să se determine elementul neutru al legii „$\circ$".

d) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $x \circ y = x$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

e) Să se determine soluțiile ecuației $x \circ (x+1) \circ (x+2) \circ \ldots \circ (x+2006) = 2$.

3. Fie $I = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ și $\mathcal{M}_p = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{c} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \middle| \hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \in \mathbb{Z}_p \right\}$,

unde $p > 2$ este un număr natural impar.

a) Să se arate că $I \in \mathcal{M}_p$.

b) Dacă $A, B \in \mathcal{M}_p$, să se arate că $AB \in \mathcal{M}_p$.

c) Să se arate că $A^p = I$ pentru orice $A \in \mathcal{M}_p$.

d) Să se determine două matrice $A, B \in \mathcal{M}_p$ cu proprietatea că $AB \neq BA$.

e) Să se arate că $(\mathcal{M}_p, \cdot)$ este grup.

4. Se consideră mulțimile

$$\mathcal{M} = \left\{ A(x) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \middle| A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & x \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$$

și $\mathcal{N} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| ,\ x \in \mathbb{R} \right\}$, iar pe $\mathbb{R}$ se definește

legea de compoziție $x \circ y = 2xy - x - y + 1$.

a) Să se arate că $x \circ y = 2(x - \frac{1}{2})(y - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că legea de compoziție este asociativă.

c) Să se arate că, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$, $A(x)A(y) = A(2xy - x - y + 1)$.

d) Fie $\mathcal{P} = \{ C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid A(x) \cdot C = C \cdot A(x) = A(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \}$. Să se determine mulțimile $\mathcal{P} - \mathcal{N}$ și $\mathcal{M} \cap \mathcal{P}$.

5. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție „$\circ$" prin $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2$ oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se verifice că $x \circ y = 3(x+1)(y+1) - 1$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$.

c) Să se determine $e \in \mathbb{R}$ astfel încât $e \circ x = x \circ e = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

d) Să se arate că $(-1) \circ x = -1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

e) Să se arate că, dacă $x \circ y = -1$, atunci $x = -1$ sau $y = -1$.

f) Să se rezolve ecuația $\log_2 x \circ \log_2 y = -1$.

6. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție „$\circ$" definită prin $x \circ y = x + y - 9$. Se știe că legea este asociativă.

a) Să se determine elementul neutru al legii „$\circ$".

b) Să se determine simetricul elementului $x \in \mathbb{R}$, față de legea „$\circ$".

c) Să se calculeze $0 \circ 1 \circ 2 \circ \ldots \circ 5$.

d) Să se afle câte soluții reale are ecuația $4^x \circ 2^x = 11$.

e) Să se calculeze suma soluțiilor reale ale ecuației $\sqrt{x-2} \circ \sqrt{102-x} = 1$.

7. Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție "$\circ$" prin $x \circ y = xy + 3x + 3y + 6$.

a) Să se calculeze $x \circ y - (x+3)(y+3) + 3$, $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine pentru ce valori ale lui $x, y, z \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.

c) Să se determine mulțimea $\{(a, b) \in (\mathbb{Q} - \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Q} - \mathbb{Z}) \mid a \circ b \in \mathbb{N}\}$.

d) Să se afle câte soluții are ecuația $(\log_2 x) \circ (\log_3 x) = -3$, $x \in (0, \infty)$.

e) Să se afle câte elemente are mulțimea $\{x \in \mathbb{R} \mid 2^x \circ 3^x = -3\}$.

8. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea $x * y = 2xy - 2x - 2y + 3$.

a) Să se arate că $x * y = 2(x-1)(y-1)+1, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine elementul neutru al legii „$*$".

c) Să se arate că $\underbrace{x * x * x * ... * x}_{n \text{ ori}} = 2^{n-1}(x-1)^n + 1$.

d) Să se rezolve ecuația $x * x * x * x * x = 17$.

e) Să se calculeze $(-27) * (-26) * ... * 2 * 3 * ... * 27$.

9. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x \circ y = x + y + 10$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $(-10) \circ 1$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $x^2 \circ x \leqslant 10$.

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $4^x \circ 2^x = 12$.

d) Să se găsească $x, y \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ astfel încât $x \circ y \in \mathbb{Q}$.

e) Să se arate că legea „$\circ$" determină pe $\mathbb{Z}$ o structură de grup.

10. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, precum și submulțimea $G = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) | AX = XA\}$.

a) Să se verifice că $A \in G$ și $I_2 \in G$.

b) Să se găsească o matrice $T \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea $T \notin G$.

c) Să se verifice că $A^2 = I_2$.

d) Să se arate că, dacă $a, b \in \mathbb{C}$, atunci matricea $B = aI_2 + bA \in G$.

e) Să se calculeze A^{2007}.

f) Să se verifice dacă G împreună cu adunarea matricelor este grup.

11. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție „$\circ$" prin $x \circ y = 2xy - x - y + 4$.

a) Să se determine valorile lui $x, y, z \in \mathbb{R}$ pentru care are loc egalitatea $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.

b) Să se determine, dacă există, elementul neutru al legii „$\circ$".

c) Să se calculeze cardinalul mulțimii $\{x \in \mathbb{R} \mid x \circ 2 = 3\}$.

d) Să se calculeze $(-1) \circ 0 \circ 1$.

e) Să se determine, dacă există, x pentru care $x \circ x = x$.

12. Se consideră mulțimea $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b\}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ și funcția $1_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $1_{\mathbb{R}}(x) = x$.

a) Să se arate că, dacă f și $g \in G$, atunci $f \circ g \in G$.

b) Să se arate că $1_{\mathbb{R}} \in G$.

c) Să se arate că $\forall f \in G$, există $g \in G$ astfel încât $f \circ g = 1_{\mathbb{R}}$.

d) Să se arate că $1_{\mathbb{R}} \circ f = f \circ 1_{\mathbb{R}} = f$.

e) Să se arate că $f \circ g = g \circ f$ nu este adevărată pentru toate funcțiile f și g din G.

13. Pe mulțimea $M = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq -2 \right\}$.

Se introduce legea de compoziție „$\circ$" astfel: $A \circ B = A \cdot B + 2(A + B + I_3)$, unde $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se verifice dacă $A \circ B \in M$, pentru orice A și B din M.

b) Să se verifice dacă legea este comutativă.

c) Să se verifice dacă legea este asociativă.

d) Să se verifice dacă există element neutru pentru legea de compoziție.

e) Ce structură algebrică determină pe M legea „$\circ$"?

f) Să se calculeze $I_3 \circ I_3$.

14. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea „$\circ$" prin $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se verifice că $x \circ y = 3(x+1)(y+1) - 1, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

c) Să se găsească două numere $a, b \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$, pentru care $a \circ b \in \mathbb{Z}$.

d) Să se determine elementul $e \in \mathbb{R}$, care verifică relația $x \circ e = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

e) Să se arate că, dacă $x \circ y = -1$, atunci $x = -1$ sau $y = -1$.

f) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $a_1 \circ a_2 \circ ... \circ a_n = 3^{n-1}(a_1+1)(a_2+1)...(a_n+1) - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ și $\forall a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$.

Inele și corpuri

Inele

Vom studia în acest capitol o altă structură algebrică – structura de *inel*. Noțiunea de inel are ca prototip mulțimea întregilor $\mathbb{Z}$, înzestrată cu operațiile uzuale de adunare și înmulțire.

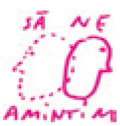
Pentru conceptul abstract de inel există modele de mare interes în Algebră (inele de matrice, inele de polinoame), în Analiza matematică (inele de funcții), în Logică (inele booleene) etc.

Cum introduceți datele într-un computer când aveți de calculat expresii în care apar mai multe operații. Exemplu: $(2 + 3 \cdot 5) : 3 - 6 : 5$.

Definiția inelului

Inelul este un obiect matematic de tipul $(R, *, \circ)$, unde R este o mulțime nevidă, iar „$*$” și „$\circ$” sunt două legi de compoziție pe R care verifică o listă de axiome. Din axiome rezultă unele proprietăți care se regăsesc la operațiile de adunare și înmulțire în cazul numerelor, matricelor, polinoamelor, funcțiilor etc.

Pentru a defini noțiunea de inel vom folosi noțiunea de *monoid*.



Definiție. O mulțime nevidă M este *monoid* în raport cu o lege de compoziție internă „$\circ$”, dacă „$\circ$” este asociativă și admite element neutru.

Definiție. Un triplet $(R, *, \circ)$, unde R este o mulțime nevidă, iar „$*$“ și „$\circ$“ sunt două legi de compoziție pe R (numite *lege aditivă*, respectiv *lege multiplicativă*), se numește *inel* dacă:

(G) $(R, *)$ este grup abelian

(M) $(R, \circ)$ este monoid

(D) „$\circ$” este distributivă față de „$*$”:
$\forall x, y, z \in R, x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z), (y * z) \circ x = (y \circ x) * (z \circ x)$.

Afirmația că $(R, *)$ este grup abelian revine la faptul că operația aditivă a unui inel R verifică axiomele:

(G_1) $\forall x, y, z \in R, (x * y) * z = x * (y * z)$

(G_2) $\exists e \in R, \ \forall x \in R, \ e * x = x * e = x$

(G_3) $\forall x \in R, \exists -x \in R, \ x * (-x) = (-x) * x = e$

(G_4) $\forall x, y \in R, \ x * y = y * x$

Afirmația că $(R, \circ)$ este monoid revine la faptul că legea multiplicativă a unui inel R este asociativă și admite element neutru:

(M_1) $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \forall x, y, z \in R$.

(M_2) $\exists u \in R$ astfel încât $u \circ x = x \circ u = x, \forall x \in R$.

1) Fie $(R, +, \cdot)$ un inel. Considerăm pe R legile de compoziție „$\top$“ și „$\perp$“ definite prin:

$a \top b = a + b - 1$,

$a \perp b = a + b - ab$.

Arătați că $(R, \top, \perp)$ este inel.

2) Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}), A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Arătați că $A^3 = O$ și $(I_3 + A)(I_3 - A + A^2) = I_3$.

3) Fie $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

Arătați că R formează inel în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor. Determinați elementele inversabile ale inelului R.

4) Fie $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Pe R considerăm legile de compoziție „$\top$“ și „$\perp$“ definite prin:

$(a, b) \top (c, d) = (a + c, b + d)$

$(a, b) \perp (c, d) = (ac, ad + bc)$.

Arătați că $(R, \top, \perp)$ este inel și determinați elementele sale inversabile.

Notații și denumiri. Vom spune că $(R, *)$ este *grupul aditiv* al inelului R, iar $(R, \circ)$ *monoidul multiplicativ* al inelului R. Ansamblul de condiții (G_1) - (G_4), (M_1), (M_2), (D) poartă numele de *axiomele inelului*. Elementele e și u de la axiomele (G_2), respectiv (M_2) sunt unic determinate (pentru că sunt elemente neutre) și se numesc *elementul zero*, respectiv *elementul unitate* al inelului R; ele sunt numerele reale 0 și 1, dacă operația aditivă este adunarea și operația multiplicativă este înmulțirea pe $\mathbb{R}$, mulțimea numerelor reale. În general, natura elementelor neutre este cea a elementelor mulțimii suport a inelului R (de exemplu matrice, polinoame, clase de resturi etc.).

Elementele $t \in R$ simetrizabile în raport cu înmulțirea (elementele inversabile) se numesc *unități* ale inelului R, printre ele fiind și elementul unitate u.

Definiție. Spunem că *inelul R nu are divizori ai lui zero*, dacă

$$x \neq e, y \neq e \Rightarrow xy \neq e,$$

unde e este elementul neutru al legii aditive, în caz contrar spunem că R este *inel cu divizori ai lui zero*.

Un *inel R* se numește *comutativ* dacă verifică și axioma:

$$(M_3)\ x \circ y = y \circ x,\ \forall\ x, y \in R.$$

Un inel R comutativ, cu cel puțin două elemente și fără divizori ai lui zero, se numește *domeniu de integritate*.

Remarcă. În literatura matematică un inel se notează de regulă cu R (de la *ring* în engleză) sau cu A (de la *anneau* în franceză). Vom folosi prima notație, rezervând litera A pentru notarea matricelor.

5) Fie $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

Arătați că R formează inel comutativ și fără divizori ai lui zero în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor.

6) Fie $a \in \mathbb{Z}_8$, $a = \hat{2}$.

Arătați că $a^3 = \hat{0}$ și $(\hat{1} + a)(\hat{1} - a + a^2) = \hat{1}$.

7) Fie R un inel și $a \in R$. Dacă $a^m = 0$, cu $m \in \mathbb{N}^*$, atunci $1 - a$ este inversabil și $(1 - a)^{-1} = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{m-1}$

8) Pe $\mathbb{R} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definim legile de compoziție „$\top$“ și „$\perp$“ prin:

$(a, b) \top (c, d) = (a + c, b + d)$

$(a, b) \perp (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Arătați că $(R, \top, \perp)$ este inel comutativ și fără divizori ai lui zero.

9) Fie $(R, +, \cdot)$ un inel și $a, b \in R$. Folosind distributivitatea înmulțirii față de adunare, calculați în două moduri produsul $(1 + a)(1 + b)$ și deduceți că, într-un inel, comutativitatea adunării este consecință a celorlalte axiome ale inelului.

Exemple de inele – temă de sinteză

♦ *Inelul* $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *al numerelor întregi*

Adunarea numerelor întregi este asociativă, comutativă, admite numărul 0 ca element neutru și orice număr întreg are opus. Așadar, $(\mathbb{Z}, +)$ este grup abelian.

Înmulțirea numerelor întregi este asociativă și admite numărul 1 ca element neutru, deci $(\mathbb{Z}, \cdot)$ este monoid.

Cum înmulțirea numerelor întregi este comutativă și distributivă față de adunare, rezultă că $\mathbb{Z}$ este inel comutativ. Dacă $x, y \in \mathbb{Z}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, atunci $xy \neq 0$, deci $\mathbb{Z}$ este domeniu de integritate.

Analog se arată că $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ și $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sunt inele comutative. În aceste inele orice număr $x \neq 0$ este inversabil. În inelul $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ singurele elemente inversabile sunt 1 și –1, $1^{-1} = 1$, $(-1)^{-1} = -1$.

♦ *Inelul* $\mathbb{Z}[i]$ *al întregilor lui Gauss*

Fie $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ *mulțimea tuturor întregilor lui Gauss*. Numerele complexe $a + bi$, cu $a, b \in \mathbb{Z}$ se numesc *întregi ai lui Gauss* (de exemplu: $2 + 3i$, $-1 + 2i$, $4 = 4 + 0i$, $i = 0 + 1 \cdot i$ sunt întregi ai lui Gauss).

Dacă $z, w \in \mathbb{Z}[i]$, $z = a + bi$, $w = c + di$, cu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, atunci $z + w = (a + c) + (b + d)i \in \mathbb{Z}[i]$ și $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i \in \mathbb{Z}[i]$. Rezultă că $\mathbb{Z}[i]$ este o parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu adunarea și înmulțirea numerelor complexe și, evident, operațiile induse pe $\mathbb{Z}[i]$ verifică axiomele (G_1), (G_4), (M_1), (M_3) și (D).

Cum $0 = 0 + 0i \in \mathbb{Z}[i]$ și $1 = 1 + 0i \in \mathbb{Z}[i]$, operațiile induse verifică și axiomele (G_2) și (M_2).

Dacă $z \in \mathbb{Z}[i]$, $z = a + bi$, atunci $-z = (-a) + (-b)i \in \mathbb{Z}[i]$, deci este verificată și axioma (G_3).

Rezultă că $\mathbb{Z}[i]$ este inel comutativ în raport cu operațiile de adunare și înmulțire a numerelor complexe (mai precis, în raport cu operațiile induse de acestea). Să mai observăm că $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ este domeniu de integritate.

♦ *Inelul* ($\mathbb{Z}_n$, +, ·) *al claselor de resturi modulo n.*

În capitolul *Legi de compoziție* am introdus pe mulțimea $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, ..., \widehat{n-1}\}$ a claselor de resturi modulo n operațiile de adunare și de înmulțire prin $\hat{a} + \hat{b} = \widehat{a+b}$ și $\hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{ab}$, $\forall \hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_n$.

S-a arătat că ($\mathbb{Z}_n$, +) este grup abelian. De asemenea, am stabilit că înmulțirea claselor de resturi modulo n este asociativă, comutativă, admite pe $\hat{1}$ ca element neutru și este distributivă în raport cu adunarea, $\hat{a}(\hat{b} + \hat{c}) = \hat{a}\hat{b} + \hat{a}\hat{c}$, $\forall \hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \in \mathbb{Z}_n$.

Rezultă că ($\mathbb{Z}_n$, +, ·) este inel comutativ, numit *inelul claselor de resturi* modulo n.

Elementul zero al inelului $\mathbb{Z}_n$ este $\hat{0}$, iar $\hat{1}$ este elementul unitate al acestui inel.

♦ *Inelul* ($\mathbb{Z}_6$, +, ·) *al claselor de resturi modulo 6.*

În efectuarea calculelor în inelul $\mathbb{Z}_n$ putem apela la tablele celor două operații. Astfel, dacă n = 6, tablele adunării și înmulțirii modulo 6 sunt cele prezentate alăturat.

+	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{5}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$

·	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{5}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

Cum $\hat{4} \neq \hat{0}$, $\hat{3} \neq \hat{0}$, iar $\hat{4} \cdot \hat{3} = \hat{0}$, rezultă că inelul $\mathbb{Z}_6$ are divizori ai lui zero.

Ecuația $\hat{4}x = \hat{2}$ are în $\mathbb{Z}_6$ două soluții, $x = \hat{2}$ și $x = \hat{5}$ pentru că în linia lui $\hat{4}$ de la tabla înmulțirii $\hat{2}$ apare de două ori: în coloana lui $\hat{2}$ și în coloana lui $\hat{5}$.

Ecuația $\hat{2}x = \hat{3}$ nu are soluții în $\mathbb{Z}_6$ pentru că în linia lui $\hat{2}$ a tablei înmulțirii nu apare $\hat{3}$.

Ecuația $\hat{5}x + \hat{3} = \hat{0}$ are soluție unică în $\mathbb{Z}_6$, anume $x = \hat{3}$. Într-adevăr, avem $\hat{5}x = -\hat{3} = \hat{3}$, iar în linia lui $\hat{5}$ a tablei înmulțirii modulo 6 se găsește $\hat{3}$ o singură dată, anume în coloana lui $\hat{3}$.

Elementele inversabile (unitățile) ale inelului $\mathbb{Z}_n$ sunt clasele care servesc de etichetă pentru liniile (coloanele) care conțin pe $\hat{1}$ în tabla înmulțirii modulo n. În inelul $\mathbb{Z}_6$ acestea sunt $\hat{1}$ și $\hat{5}$ și avem $\hat{1}^{-1} = \hat{1}$, $\hat{5}^{-1} = \hat{5}$, după cum se constată consultând tabla înmulțirii modulo 6.

♦ *Inelul* ($\mathbb{Z}_2$, +, ·) *al claselor de resturi modulo 2.*

Un interes aparte îl prezintă inelul $\mathbb{Z}_2$ datorită aplicațiilor pe care le are în tehnică (aritmetica calculatoarelor, codificarea informației) și în logică.

Tablele operațiilor lui $\mathbb{Z}_2$ sunt prezentate alăturat:

+	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{0}$

·	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$

♦ *Inelul* $\mathcal{M}_n(R)$ *al matricelor pătratice de ordinul n*

Fie R un inel. Acesta poate fi oricare din inele $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ etc. Notăm cu $\mathcal{M}_2(R)$ mulțimea tuturor matricelor pătratice de ordinul al 2-lea cu coeficienți în R, $\mathcal{M}_2(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in R \right\}$.

Fie $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A + B \overset{def}{=} \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$, $AB \overset{def}{=} \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$,

numite *suma*, respectiv *produsul* lui A cu B. Se obțin două legi de compoziție pe $\mathcal{M}_2(R)$ numite *operațiile de adunare* și *înmulțire* ale matricelor pătratice de ordinul al 2-lea cu coeficienți în inelul R.

Se observă că s-au „mimat“ în acest context regulile de adunare și de înmulțire ale matricelor cu coeficienți numerici, cunoscute din clasa a XI-a.

Matricele $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}_2(R)$, se numesc *matricea zero*, *matricea unitate* respectiv *opusa* matricei A.

Adunarea și înmulțirea matricelor din $\mathcal{M}_2(R)$ au proprietățile următoare: $\forall\ A, B, C \in \mathcal{M}_2(R)$

(G_1) $(A + B) + C = A + (B + C)$

(G_2) $O + A = A + O = A$

(G_3) $A + (-A) = (-A) + A = O$

(G_4) $A + B = B + A$

(M_1) $(AB)C = A(BC)$

(M_2) $I_2A = AI_2 = A$

(D_1) $A(B + C) = AB + AC$

(D_2) $(B + C)A = BA + CA$,

Aceste proprietăți au fost stabilite în clasa a XI-a pentru matrice cu coeficienți numerici. Ele sunt valabile și pentru operațiile unui inel arbitrar R. Din acest motiv, demonstrațiile date în cazul numeric se transferă cuvânt cu cuvânt la cazul matricelor cu coeficienți într-un inel arbitrar. Conchidem că $\mathcal{M}_2(R)$ este inel în raport cu operațiile de adunare și de înmulțire ale matricelor.

Elementul zero al acestui inel este matricea $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, iar elementul unitate este matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Inelul matricelor pătratice de ordinul n cu coeficienți într-un inel R, $\mathcal{M}_n(R)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, nu este comutativ și are divizori ai lui zero.

Vom demonstra că $\mathcal{M}_2(R)$ nu este comutativ și are divizori ai lui zero:

fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ în $\mathcal{M}_2(R)$; avem $A \neq O$, $B \neq O$, $AB = O \neq BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

♦ *Inele de funcții reale*

Fie I o mulțime de numere reale și $\mathbb{R}^I$ mulțimea tuturor funcțiilor $f : I \to \mathbb{R}$.

Dacă $f, g \in \mathbb{R}^I$, definim funcțiile

$$f + g : I \to \mathbb{R},\ (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

și

$$fg : I \to \mathbb{R},\ (fg)(x) = f(x)g(x)$$

numite *suma*, respectiv *produsul* funcției f cu funcția g.

Notăm cu 0 și 1 funcțiile $0 : I \to \mathbb{R}$ și $1 : I \to \mathbb{R}$ definite prin $0(x) = 0$, respectiv $1(x) = 1$, oricare ar fi $x \in I$, numită *funcția zero*, respectiv *funcția unitate* pe I.

EXEMPLU

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și intervalul $I = [a, b]$. În acest caz $\mathbb{R}^I = \mathbb{R}^{[a,\,b]}$ este mulțimea funcțiilor reale definite pe intervalul $I = [a, b]$.

Prin simpla verificare a axiomelor se demonstrează:

Teoremă. Mulțimea de funcții $\mathbb{R}^I$, unde $I \subseteq \mathbb{R}$ este inel comutativ în raport cu operațiile de adunare și de înmulțire a funcțiilor reale, adică oricare ar fi $f, g, h \in \mathbb{R}^I$ avem:

(G_1) $(f + g) + h = f + (g + h)$;

(G_2) $f + g = g + f$

(G_3) $0 + f = f + 0 = f$;

(G_4) $f + (-f) = (-f) + f = 0$

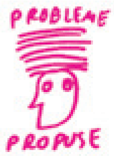
(M_1) $(fg)h = f(gh)$;

(M_2) $1 \cdot f = f \cdot 1 = f$

(M_3) $fg = gf$;

(D) $f(g + h) = fg + fh$

În particular, mulțimea $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ a șirurilor de numere reale este inel comutativ în raport cu operațiile de adunare și de înmulțire a șirurilor.



1. Fie $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

Arătați că $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ este inel comutativ și fără divizori ai lui zero în raport cu adunarea și înmulțirea numerelor reale.

2. Fie $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z} \right\}$. Arătați că R formează un inel comutativ și fără divizori ai lui zero în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor.

3. Fie $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

Arătați că R este inel comutativ fără divizori ai lui zero în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor.

4. Pe mulțimea $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ definim operațiile: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, $(a, b) \cdot (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc)$.

Arătați că $(R, +, \cdot)$ este inel comutativ fără divizori ai lui zero.

5. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi definim operațiile: $x \top y = x + y + 3$, $x \perp y = xy + 3x + 3y + 6$.

Arătați că:

a) $(\mathbb{Z}, \top)$ este grup abelian;

b) legea $\perp$ este asociativă și comutativă;

c) $x \perp (y \top z) = (x \perp y) \top (x \perp z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$;

d) $(\mathbb{Z}, \top, \perp)$ este inel comutativ fără divizori ai lui zero.

e) Găsiți elementele inversabile ale acestui inel.

6. Pe $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se definesc legile de compoziție: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$. Arătați că $(R, +, \cdot)$ este inel comutativ cu divizori ai lui zero. Găsiți elementele inversabile ale acestui inel.

7. Fie $(R_1, +, \cdot)$ și $(R_2, +, \cdot)$ două inele și $R = R_1 \times R_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in R_1, x_2 \in R_2\}$. Pe R se introduc operațiile: $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$.

Arătați că $R = R_1 \times R_2$ are o structură de inel în raport cu aceste legi de compoziție (numit *produsul direct* al inelului R_1 cu R_2).

8. Fie $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ produsul direct al inelului $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ cu $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$.

a) Alcătuiți tablele adunării și înmulțirii inelului $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

b) Verificați, folosind tablele operațiilor, că $x + x = (\hat{0}, \hat{0})$ și $x^2 = x$, $\forall x = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

9. Fie A o mulțime și $R = \{X \mid X \subseteq A\}$. Pe R definim $X \Delta Y \overset{\text{def}}{=} (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ *diferența simetrică*.

Arătați că $(R, \Delta, \cap)$ este un inel comutativ.

10. Fie inelul de funcții $\mathscr{F} = \mathbb{R}^{[1, 3]} = \{f \mid f : [1, 3] \to \mathbb{R}\}$

a) Arătați că o funcție $f \in \mathscr{F}$ este simetrizabilă în raport cu înmulțirea funcțiilor, dacă și numai dacă $f(x) \neq 0$, $\forall x \in [1, 3]$

b) Arătați că funcția $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 5$ este simetrizabilă în raport cu înmulțirea și determinați funcția $g \in \mathscr{F}$ astfel încât $fg = 1$, unde 1 este funcția constată $1 : [1, 3] \to \mathbb{R}$, $1(x) = 1$.

Trasați graficele lui f și g pe intervalul $[1, 3]$.

11. În inelul $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ se consideră șirul $f = (1, 2, 3, ..., n, ...)$. Determinați șirul $g = (b_0, b_1, b_2, ..., b_n, ...)$ astfel încât $fg = (1, 1, 1, ..., 1, ...)$.

12. Fie $\mathscr{C}$ mulțimea funcțiilor continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

a) Dacă $f, g \in \mathscr{C}$, atunci $f + g \in \mathscr{C}$ și $fg \in \mathscr{C}$.

b) $\mathscr{C}$ este inel comutativ în raport cu operațiile de adunare și înmulțire a funcțiilor.

13. Fie $\mathscr{D}$ mulțimea funcțiilor derivabile $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

a) Dacă $f, g \in \mathscr{D}$, atunci $f + g \in \mathscr{D}$ și $fg \in \mathscr{D}$.

b) $\mathscr{D}$ este inel comutativ în raport cu operațiile de adunare și înmulțire a funcțiilor.

14. Fie $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z}_6)$ inelul matricelor pătratice de ordinul al 2-lea având coeficienții în $\mathbb{Z}_6$ și $U, V, I_2, X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z}_6)$, $U = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{5} \\ \hat{5} & \hat{4} \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ cu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_6$.

a) Calculați $U + V$ și $U \cdot V$.

b) Determinați matricea X astfel încât $UX = I_2$. Deduceți că U este un element inversabil al inelului $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z}_6)$.

Reguli de calcul într-un inel

Calculul algebric care implică doar operația de adunare în inelul R beneficiază de toate regulile de calcul dintr-un grup abelian pentru că $(R, +)$ este grup abelian. Când este implicată doar înmulțirea inelului, sunt valabile toate regulile de calcul pentru o operație asociativă și cu element neutru, eventual și comutativă. În afară de acestea, într-un inel avem o serie de reguli de calcul specifice, consecințe ale axiomei care angajează cele două operații, și anume distributivitatea înmulțirii față de adunare.

Definiție. Fie $(R, *, \circ)$ inel. Operația $y - z = y + (-z)$, $y, z \in R$ se numește *diferență*.

Într-un inel $(R, *, \circ)$ au loc următoarele proprietăți:

Proprietatea 1.

$\forall\, x \in R$, $x \circ e = e \circ x = e$. În particular, dacă $(R, *, \circ)$ și $e = 0$ avem $\forall\, x \in R$, $x0 = 0x = 0$.

Demonstrăm pentru $e = 0$ și, în mod analog, se demonstrează pentru un element neutru e.

Demonstrație. Fie $y = x0 \in R$; $x0 = x(0 + 0) = x0 + x0$; $y = y + y$. În grupul $(R, +)$: $0 = y + (-y) = y + y + (-y) = y = x0$.

Analog se arată că $0x = 0$. ■

Proprietatea 2.

Într-un inel cu cel puțin două elemente avem $u \neq e$. În particular, dacă $(R, +, \cdot)$ $e = 0$ și $u = 1$ avem $1 \neq 0$.

Demonstrație. Dacă $1 = 0$, atunci $\forall\, x \in R$, $x = 1x = 0x = 0$, de unde $R = \{0\}$, contradicție. Analog se demonstrează pentru u și e. ■

Proprietatea 3. *(Regula semnelor).*

$\forall\, x, y \in R$, $(-x) \circ y = x \circ (-y) = -x \circ y$ și $(-x) \circ (-y) = x \circ y$. În particular, dacă $(R, +, \cdot)$ avem

$\forall\, x, y \in R$, $(-x)y = x(-y) = -xy$ și $(-x)(-y) = xy$.

Demonstrație. $0 = 0y = ((-x) + x)y = (-x)y + xy = xy + (-x)y$, de unde rezultă că $(-x)y$ este opusul lui xy, deci $(-x)y = -xy$. Analog, $x(-y) = -xy$. În fine, $(-x)(-y) = -(x(-y)) = -(-xy) = xy$. Analog se demonstrează pentru operația „$\circ$”. ■

Proprietatea 4. *(Distributivitatea înmulțirii față de scădere).* Într-un inel $(R, +, \cdot)$ avem $\forall\, x, y, z \in R$, $x(y - z) = xy - xz$ și $(y - z)x = yx - zx$.

Demonstrație. Avem: $x(y - z) = x(y + (-z)) = xy + x(-z) = xy + (-(xz)) = xy - xz$, și analog $(y - z)x = yx - zx$. ■

1) Rezolvați în inelul $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ ecuațiile

a) $\hat{5}x = \hat{2}$; b) $\hat{2}x = \hat{3}$; c) $\hat{2}x + \hat{4} = \hat{0}$.

2) Rezolvați în $\mathbb{Z}_{12}$ sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} \hat{3}x + \hat{4}y = \hat{7} \\ \hat{4}x + \hat{3}y = \hat{5} \end{cases}.$$

3) Determinați elementele inversabile ale inelului $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$.

4) $R = \{O, I_2, A, B\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$, unde

$$O = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}$$

a) Arătați că R este inel în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor.

b) Completați tabla adunării și tabla înmulțirii inelului R.

5) Fie $R = \{O, I_2, A, B\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$

$$O = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}$$

a) Arătați că R este inel în raport cu operațiile de adunare și înmulțire a matricelor.

b) Comparați tabla adunării și tabla înmulțirii inelului R.

c) Găsiți elementele inversabile în R.

6) Fie $R = \{0, 1, a, b\}$ un inel cu patru elemente astfel încât $1 + 1 = 0$.

a) Arătați că $x + x = 0$, $\forall\, x \in R$.

b) Completați tabla adunării inelului R și deduceți că $b = 1 + a$.

c) Completați tabla înmulțirii inelului R dacă $a^2 = 0$.

d) Comparați tablele operațiilor din R cu cele ale inelului de la ex. 4).

e) Completați tabla înmulțirii inelului R, dacă $a^2 = 1 + a$.

f) Comparați tabla operațiilor din R cu cele ale inelului de la ex. 5).

Proprietatea 5.

Într-un inel $(R, +, \cdot)$ fără divizori ai lui zero putem simplifica cu elemente diferite de 0; adică

$\forall\, x, y, z \in R,\ x \neq 0,\ xy = xz$ sau $yx = zx \Rightarrow y = z$.

Demonstrație. Dacă $xy = xz$, atunci $x(y - z) = xy - xz = 0$ și, cum $x \neq 0$, rezultă $y - z = 0$, deci $y = z$. ■

Grupul unităților unui inel

Definiție. Elementele inversabile ale unui inel R se numesc *unități* ale lui R. Notăm cu $U(R)$ mulțimea unităților inelului R.

Teoremă. Fie R un inel. $U(R)$ este grup în raport cu operația indusă de înmulțirea lui R, numit *grupul unităților* inelului R.

Demonstrație.

Fie 1 elementul unitate al lui R. Cum $1 \in U(R)$, rezultă că $U(R) \neq \varnothing$.

Dacă $u, v \in U(R)$, atunci $uv \in U(R)$ pentru că produsul a două elemente inversabile este inversabil.

Dacă $u \in U(R)$, atunci $u^{-1} \in U(R)$ pentru că u^{-1} este, de asemenea, inversabil și $(u^{-1})^{-1} = u$.

Așadar $U(R)$ este stabilă în R. Operația indusă pe $U(R)$ de înmulțirea inelului R este asociativă, admite element neutru și orice element $u \in U(R)$ admite pe $u^{-1} \in U(R)$ ca simetric. ■

7) Arătați că grupul unităților inelului $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ este $U(\mathbb{Z}) = \{1, -1\}$.

8) Arătați că grupul unităților inelului $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este grupul general liniar $GL_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid |A| \neq 0\}$.

9) Arătați că grupul unităților lui $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ este $\{1, -1, i, -i\}$.

Indicație.

Dacă $u = a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ este inversabil în $\mathbb{Z}[i]$, există $v = c + di \in \mathbb{Z}[i]$ astfel încât $uv = 1$. Prin conjugare, obținem $\bar{u} \cdot \bar{v} = 1$. Așadar, în $\mathbb{N}$ avem:
$1 = 1 \cdot 1 = uv\bar{u}\bar{v} = (u\bar{u})(v\bar{v}) = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$.
Rezultă $a^2 + b^2 = 1$, cu $a, b \in \mathbb{Z}$. Avem posibilitățile $a = 1, b = 0$ sau $a = -1, b = 0$ sau $a = 0, b = 1$ sau $a = 0, b = -1$. Așadar $u \in \{1, -1, i, -i\}$; numerele $1, -1, i$ și $-i$ sunt inversabile în $\mathbb{Z}[i]$. În concluzie, $U(\mathbb{Z}[i]) = \{1, -1, i, -i\}$.

10) Arătați că grupul unităților inelului $\mathbb{Z}_8$ este: $U(\mathbb{Z}_8) = \{\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}, \hat{7}\}$.

Indicație.

Din tabla înmulțirii modulo 8, se constată că o clasă $\hat{a} \in \mathbb{Z}_8$ este inversabilă dacă și numai dacă $\hat{a} \in \{\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}, \hat{7}\}$.

Aplicații ale operațiilor cu matrice

A. Modelul economic al lui Leontif

În 1973, premiul Nobel pentru *economie* a fost atribuit lui W. Leontief (economist american, originar din Rusia) care a elaborat o procedură de modelare matematică numită **analiză input-output**, adecvată pentru un sistem economic complex, formată cu un număr mare de sectoare între care există interacțiuni.

Presupunem că avem un sistem economic $\mathcal{E}$, format cu trei sectoare în care sunt fabricate respectiv produsele P_1, P_2, P_3. O parte din producția sistemului economic $\mathcal{E}$ este folosită în interiorul sistemului ca resurse, iar o altă parte este rezervată pentru a onora o cerere externă.

Notăm cu a_{ij} numărul unităților din produsul P_i care sunt folosite pentru realizarea unei unități din produsul P_j. Numerele a_{ij} cuantifică interacțiunile dintre sectoarele S_1, S_2, S_3.

Matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ se numește **matricea tehnologică** sau **matricea input-output.**

Dacă x_j este nivelul producției lui P_j (adică numărul de unități din produsul P_j realizate), atunci vectorul 3-dimensional

$P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ se numește **vectorul producție**.

Produsul $AP = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$ reprezintă consumul intern pentru că $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$ reprezintă partea din producția x_1 a lui S_1 consumată în interiorul sistemului $\mathcal{E}$ ș.a.m.d. Rezultă că $P - AP$ este partea de producție disponibilă, care poate fi folosită pentru a onora o cerere externă.

Presupunem că din afara sistemului economic $\mathcal{E}$ există o comandă de c_j unități din produsul P_j, $1 \leqslant j \leqslant 3$ și fie $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ numit **vectorul-comandă**. Problema fundamentală care se pune este de a planifica nivelul producției P de așa natură încât $P - AP = C$, ceea ce se mai scrie $(I_3 - A)P = C$.

Dacă matricea $I_3 - A$ este inversabilă, atunci înmulțind la stânga egalitatea $(I_3 - A)P = C$ cu $(I_3 - A)^{-1}$ se obține $P = (I_3 - A)^{-1}C$.

Determină vectorul producție $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, dacă matricea tehnologică este $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,4 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ și vectorul comandă $C = \begin{pmatrix} 2\,000 \\ 1\,000 \\ 3\,000 \end{pmatrix}$.

B. Criptarea mesajelor

Inversa unei matrice are aplicații și în criptografie, disciplină care are ca obiect elaborarea metodelor de secretizare a mesajelor.

Pentru exemplificare, vom folosi matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și inversa sa $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, și mesajul „SOSESC JOI”. Atribuim literelor alfabetului latin câte un număr natural pozitiv și blancului ▪ numărul 0. De exemplu:

$$\begin{array}{cccccccccccccc} \blacksquare & A & B & C & D & E & F & G & \ldots & O & \ldots & S & \ldots & J & Z \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & & 15 & & 19 & & 25 & 26 \end{array}$$

Mesajul se împarte în blocuri de lungimi egale (în cazul nostru 3) luând în considerare și spațiile libere (blancuri). Se adaugă eventual la sfârșitul mesajului câteva blancuri pentru a obține blocuri de lungimi egale: SOSESC▪ JOI▪ ▪

Semnele din blocuri sunt înlocuite cu numerele asociate. Se formează o matrice numerică M cu trei coloane și tot atâtea linii câte blocuri are mesajul. Se înmulțește M cu A, $MA = C$, matricea C fiind mesajul criptat care se transmite. În cazul nostru:

$\begin{matrix} \mathrm{S} & \mathrm{O} & \mathrm{S} \\ \mathrm{E} & \mathrm{S} & \mathrm{C} \\ \blacksquare & \mathrm{J} & \mathrm{O} \\ \mathrm{I} & \blacksquare & \blacksquare \end{matrix}$ devine $M = \begin{pmatrix} 19 & 15 & 19 \\ 5 & 19 & 3 \\ 0 & 10 & 15 \\ 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și atunci $MA = \begin{pmatrix} 19 & 15 & 19 \\ 5 & 19 & 3 \\ 0 & 10 & 15 \\ 9 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 15 & 42 \\ 14 & 17 & -6 \\ 10 & 25 & 5 \\ -9 & -9 & 18 \end{pmatrix}$, deci

mesajul criptat va fi $C = \begin{pmatrix} -4 & 15 & 42 \\ 14 & 17 & -6 \\ 10 & 25 & 5 \\ -9 & -9 & 18 \end{pmatrix}$.

La recepție, pentru decriptare se efectuează produsul CA^{-1} și se obține M, deoarece $CA^{-1} = (MA)A^{-1} = M(AA) = MI_3 = M$:

$CA^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 15 & 42 \\ 14 & 17 & -6 \\ 10 & 25 & 5 \\ -9 & -9 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 15 & 19 \\ 5 & 19 & 3 \\ 0 & 10 & 15 \\ 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Făcându-se corespondența dintre numere și literele

asociate, se obține mesajul: $\begin{matrix} \mathrm{S} & \mathrm{O} & \mathrm{S} \\ \mathrm{E} & \mathrm{S} & \mathrm{C} \\ \blacksquare & \mathrm{J} & \mathrm{O} \\ \mathrm{I} & \blacksquare & \blacksquare \end{matrix}$, adică SOSESC▪ JOI▪ ▪ .

Exerciții rezolvate.

1) Fie $(R, +, \cdot)$ inel și $a, b \in R$ cu $ab = ba$. Arătați că:
(i) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$,
(ii) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
(iii) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

În particular, dacă R este comutativ, atunci $\forall\ a, b \in R$, sunt adevărate (i), (ii) și (iii).

Soluție. (i) Folosind distributivitatea înmulțirii față de adunare și apoi față de scădere, avem: $(a + b)(a - b) = a(a - b) + b(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$.

(ii) Folosind definiția puterilor unui element și proprietatea de distributivitate a înmulțirii față de adunare, avem: $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = (a + b)a + (a + b)b = a^2 + ba + ab + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

2) Fie R un inel cu proprietatea (α) $1 + 1 + 1 = 0$. Arătați că:
(i) $a + a + a = 0, \forall\ a \in R$.
(ii) $(a + b)^3 = a^3 + b^3, \forall\ a, b \in R$ cu $ab = ba$.
(iii) inelele $\mathbb{Z}_3$ și $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ au proprietatea (α) și demonstrați că $\forall\ A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ cu $AB = BA$, $(A + B)^3 = A^3 + B^3$.

Soluție. (i) $a + a + a = 1 \cdot a + 1 \cdot a + 1 \cdot a = (1 + 1 + 1)a = 0 \cdot a = 0$.
(ii) $(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)a + (a^2 + 2ab + b^2)b =$
$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Dar $3a^2b = a^2b + a^2b + a^2b = 0$ și, analog, $3ab^2 = 0$, de unde $(a + b)^3 = a^3 + b^3$.
(iii) În $\mathbb{Z}_3$, $\hat{1} + \hat{1} + \hat{1} = (\hat{1} + \hat{1}) + \hat{1} = \hat{2} + \hat{1} = \widehat{2+1} = \hat{3} = \hat{0}$.

În inelul $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ avem: $I_2 + I_2 + I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1}+\hat{1}+\hat{1} & \hat{0}+\hat{0}+\hat{0} \\ \hat{0}+\hat{0}+\hat{0} & \hat{1}+\hat{1}+\hat{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$

Cum $AB = BA$, calculul puterii $(A + B)^3$ se face ca într-un inel comutativ.

Avem: $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = A^3 + B^3$ pentru că $3A^2B = O$ și $3AB^2 = O$.

3) Să rezolvăm în inelul $\mathbb{Z}_6$ ecuațiile:
(i) $\hat{5}x+\hat{2}=\hat{4}$;
(ii) $\hat{3}x+\hat{4}=\hat{1}$;
(iii) $\hat{2}x+\hat{3}=\hat{2}$.

Soluție. (i) Din $\hat{5}x+\hat{2}=\hat{4}$ rezultă $\hat{5}x=\hat{4}-\hat{2}$, deci $\hat{5}x=\hat{2}$. În linia lui $\hat{5}$ în tabla înmulțirii modulo 6 se află $\hat{2}$ numai în coloana lui $\hat{4}$, deci $x=\hat{4}$. Se putea obține soluția observând că $\hat{5}$ este inversabil în inelul $\mathbb{Z}_6$ și $\hat{5}^{-1}=\hat{5}$. Înmulțind egalitatea $\hat{5}x=\hat{2}$ cu $\hat{5}^{-1}=\hat{5}$ se obține $x=\hat{5}\cdot\hat{2}=\widehat{10}=\hat{4}$.

(ii) Din $\hat{3}x+\hat{4}=\hat{1}$ rezultă că $\hat{3}x=\hat{1}-\hat{4}=-\hat{3}=\hat{3}$.

Cu tabla înmulțirii mod 6 găsim soluțiile $x_1=\hat{1}, x_2=\hat{3}, x_3=\hat{5}$ (deci o ecuație de gradul întâi în $\mathbb{Z}_6$ poate avea mai multe soluții!).

(iii) Din $\hat{2}x+\hat{3}=\hat{2}$ rezultă $\hat{2}x=\hat{2}-\hat{3}=-\hat{1}=\hat{5}$, deci $\hat{2}x=\hat{5}$. Consultând linia $\hat{2}$ din tabla înmulțirii modulo 6 conchidem că nu există $x \in \mathbb{Z}_6$ astfel încât $\hat{2}x=\hat{5}$, deci ecuația $\hat{2}x+\hat{3}=\hat{2}$ nu admite soluții în $\mathbb{Z}_6$.

4) a) Fie $\hat{a}\in\mathbb{Z}_n$. Arătați că $\hat{a}$ este element inversabil al inelului $\mathbb{Z}_n$ dacă și numai dacă a este relativ prim cu n;

b) Determinați elementele inversabile ale inelului $\mathbb{Z}_9$ și rezolvați în inelul $\mathbb{Z}_9$ ecuația $\hat{7}x+\hat{3}=\hat{2}$.

Soluție. a) Presupunem că $\hat{a}$ este inversabilă în inelul $\mathbb{Z}_n$. Atunci există $\hat{b}\in\mathbb{Z}_n$ astfel încât $\hat{a}\hat{b}=\hat{1}$. Cum $\widehat{ab}=\hat{a}\hat{b}=\hat{1}$ avem $\widehat{ab}=\hat{1}$, de unde rezultă că numărul $ab-1$ se divide prin n. Există deci $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $ab-1=nk$. Așadar $a\cdot b+n(-k)=1$, de unde $(a, n)=1$.

Reciproc, dacă $(a, n) = 1$, există $h, k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $ah+nk=1$.

Cum $\hat{1}=\widehat{ah+nk}=\widehat{ah}+\widehat{nk}=\widehat{ah}+\hat{0}=\hat{a}\hat{h}$ rezultă că $\hat{a}$ este element inversabil al inelului $\mathbb{Z}_n$ și $\hat{a}^{-1}=\hat{h}$.

b) Elementele inelului $\mathbb{Z}_9$ sunt $\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, ..., \hat{8}$

Dintre numerele 0, 1, 2, ..., 8 sunt relativ prime cu 9 numerele 1, 2, 4, 5, 7 și 8, deci elementele inversabile ale inelului $\mathbb{Z}_9$ sunt $\hat{1}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{7}$ și $\hat{8}$. Din tabla înmulțirii inelului $\mathbb{Z}_9$ se pot determina inversele acestor clase. Prezentăm o altă metodă pe cazul $a = 7$. Algoritmul lui Euclid pentru 9 și 7 este:

$9 = 7 \cdot 1 + 2$,
$7 = 2 \cdot 3 + 1$.

Ultimul rest diferit de zero este 1 și să-l reprezentăm sub forma $7h + 9k$. Din ultima egalitate avem
$1 = 7 - 2 \cdot 3$
și folosind și prima egalitate rezultă:
$1 = 7 - 2 \cdot 3 = 7 - (9 - 7 \cdot 1) \cdot 3 = 7 \cdot 4 + 9 \cdot (-3)$

Avem: $\hat{1}=\widehat{7\cdot4+9\cdot(-3)}=\hat{7}\cdot\hat{4}+\hat{9}\cdot\widehat{(-3)}=\hat{7}\cdot\hat{4}+\hat{0}\cdot\widehat{(-3)}=\hat{7}\cdot\hat{4}$ deci $\hat{7}^{-1}=\hat{4}$. Ecuația dată se rezolvă astfel:

$\hat{7}x=\hat{2}+\widehat{(-3)}=\hat{2}+\hat{6}=\hat{8}$

și atunci $x=\hat{7}^{-1}\hat{8}=\hat{4}\hat{8}=\widehat{4\cdot8}=\widehat{32}=\hat{5}$.

1. Fie R un inel în care $x^2 = x$, $\forall\, x \in R$. Arătați că:

a) $x + x = 0$, $\forall\, x \in R$;

b) $xy = yx$, $\forall\, x, y \in R$.

2. Fie $(R, +, \cdot)$ un inel și $a, b \in R$ astfel încât $ab = ba$. Arătați că

a) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$,
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;

b) $(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + b^n =$
$= \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Fie $(R, +, \cdot)$ un inel și $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$, astfel încât $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{p \text{ ori}} = 0$. Arătați că:

a) $\forall\, x \in R$, $px = 0$, unde $px = \underbrace{x + x + \ldots + x}_{p \text{ ori}}$.

b) dacă p prim și $a, b \in R$ cu $ab = ba$, $(a + b)^p = a^p + b^p$.

c) $A^p = I_p$, $\forall\, A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_p)$, $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{c} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, p prim, $p > 2$.

Indicație. Dacă p este prim, atunci p divide coeficienții binomiali C_p^k, $\forall\, k = 1, 2, \ldots, p - 1$.

4. Rezolvați în inelul $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ sistemele de ecuații liniare:

a) $\begin{cases} \hat{3}x + \hat{2}y = \hat{4} \\ \hat{2}x + \hat{3}y = \hat{1} \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \hat{5}x + \hat{2}y = \hat{1} \\ \hat{3}x + \hat{4}y = \hat{3} \end{cases}$.

5. Fie $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ inelul claselor de resturi modulo 2.

a) Câte elemente are inelul $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$?

b) Arătați că $U + U = 0$, $\forall U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$.

c) Care sunt matricele inversabile ale inelului $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)\ +, \cdot)$?

d) Determinați inversele matricelor inversabile ale inelului $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)\ +, \cdot)$.

6. Fie $U \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), U = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Pentru ce numere reale a, b, c avem $U^2 = O_3$?

b) Dacă $U^2 = O_3$, atunci $I_2 - U$ este inversabilă și $(I_2 - U)^{-1} = I_2 + U$.

7. Fie $(R, +, \cdot)$ inel comutativ, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(R)$ și $u = \det(A) = ad - bc$.

a) Dacă u este inversabil în R, atunci matricea $A' = u^{-1} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(R)$ verifică $AA' = A'A = I_2$, adică $A' = A^{-1}$.

b) Arătați că $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_9)$ este inversabilă în $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_9)$ dacă și numai dacă $\det A \in \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{7}, \hat{8}\}$.

c) Arătați că $A = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{5} \\ \hat{8} & \hat{2} \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{1} & \hat{5} \end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_9)$ sunt inversabile în $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_9)$ și determinați inversele lor.

8. Fie R inel comutativ și $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(R)$.

a) Arătați că A are inversă în inelul $\mathcal{M}_2(R)$ dacă și numai dacă $\det A$ este inversabil în inelul R.

b) Arătați că o matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ este inversabilă în inelul $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ dacă și numai dacă $\det A = \pm 1$.

c) Arătați că o matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ este inversabilă în inelul $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ dacă și numai dacă $\det A \neq 0$.

9. Rezolvați în inelul $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ ecuațiile:

a) $\hat{7}x + \hat{3} = \hat{0}$; b) $\hat{2}x + \hat{4} = \hat{0}$; c) $\hat{4}x + \hat{5} = \hat{0}$.

10. Fie $R = \{0, 1, a, b\}$ un inel. Arătați că:

a) funcția $f : R \to R$, $f(x) = 1 + x$ este bijectivă;

b) $\sum\limits_{x \in R} f(x) = 1 + a + b$ și $1 + 1 + 1 + 1 = 0$.

11. Fie R inel în care $x^6 = x$, $\forall\, x \in R$. Arătați că $x^2 = x$, $\forall\, x \in R$.

12. Fie R inel cu 8 elemente având proprietatea că $1 + 1 = 0$. Arătați că
$x^7 + 1 = (x + 1)(x^3 + x^2 + 1)(x^3 + x + 1)$, $\forall\, x \in R$.

Corpuri

Un cadru ideal pentru efectuarea calculului algebric este oferit de inelele în care orice element nenul este inversabil în raport cu înmulțirea. Un astfel de inel este ...

Corpul. Proprietăți, exemple

Definție.
Un inel K se numește *corp* dacă $e \neq u$ și orice element nenul din K este simetrizabil în raport cu înmulțirea. Dacă înmulțirea este comutativă, K se numește *corp comutativ*.

Observație.
$e \neq u$ înseamnă că elementul neutru față de legea aditivă este diferit de elementul neutru față de legea multiplicativă.

Proprietatea 1. *Un corp nu are divizori ai lui zero.*

Demonstrație. Fie $(K, +, \cdot)$ un corp și $a, b \in K$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $ab = 0$. Avem $b = 1 \cdot b = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0 = 0$, contradicție. ■

Proprietatea 2. *Elementele nenule ale unui corp formează grup cu înmulțirea.*

Demonstrație. Fie $(K, +, \cdot)$ un corp, $K^* = K \setminus \{0\}$. Dacă $a, b \in K^*$, atunci $ab \neq 0$ pentru că un corp nu are divizori ai lui zero, deci K^* este o parte stabilă a lui K în raport cu înmulțirea. Cum într-un corp $1 \neq 0$, rezultă că $1 \in K^*$. Deducem că operația indusă pe K^* de înmulțirea lui K este asociativă și admite pe 1 ca element neutru. Dacă $x \in K^*$, atunci $x \neq 0$ și fie x^{-1} inversul lui x în raport cu înmulțirea lui K. Cum $x^{-1}x = 1 \neq 0$, rezultă că $x^{-1} \neq 0$ și atunci $x^{-1} \in K^*$. Evident, x^{-1} este inversul lui x și în raport cu operația indusă pe K^* de înmulțirea lui K. Atunci $(K^*, \cdot)$ este grup, numit *grupul multiplicativ* al corpului K. ■

Proprietatea 3. *Orice domeniu de integritate finit este corp.*

Demonstrație. Fie $(R, +, \cdot)$ un domeniu de integritate. Avem $1 \neq 0$ și din $ax = ay$, $a \neq 0$ rezultă $x = y$.

Fie $a \in R$, $a \neq 0$. Funcția $f : R \to R$, $f(x) = ax$ este injectivă pentru că, dacă $f(x) = f(y)$, atunci $ax = ay$, deci $x = y$. Cum mulțimea R este finită, rezultă că f este și funcție surjectivă.

În aceste condiții, pentru $1 \in R$ există $a' \in R$ astfel încât $f(a') = 1$, adică $aa' = 1$. Analog se arată că există $a'' \in R$ astfel încât $a''a = 1$. Cum înmulțirea este asociativă, avem $a' = a''$. Rezultă că a este inversabil și $a^{-1} = a'$. ■

Caracterizarea structurii algebrice de corp prin intermediul proprietăților operațiilor

1) Fie $(K, +, \cdot)$ un corp și $a, b \in K$, $a \neq 0$. Arătați că ecuația liniară $ax + b = 0$ are soluție unică în K, anume $x = -a^{-1}b$.

2) Rezolvați în corpul $\mathbb{Z}_5$ ecuația $\hat{3}x+\hat{1}=\hat{0}$.

3) Fie K un corp comutativ, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(K)$ și $D = \det A \in K$.

a) Dacă $D \neq 0$ și $\alpha, \beta \in K$, atunci sistemul liniar $\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$ are soluție unică în K, anume $x = \begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix} D^{-1}$, $y = \begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix} D^{-1}$ (*Regula lui Cramer*).

b) Rezolvați în $\mathbb{Z}_5$ sistemul $\begin{cases} \hat{2}x + \hat{3}y = \hat{1} \\ \hat{2}x + \hat{4}y = \hat{3} \end{cases}$.

4) Fie $\mathbb{Q}$ mulțimea numerelor raționale. Se definesc legile de compoziție:
$x * y = x + y - 1$, $\forall\, x, y \in \mathbb{Q}$
$x \circ y = x + y - xy$, $\forall\, x, y \in \mathbb{Q}$.

a) Arătați că legile „$*$“ și „$\circ$“ sunt bine definite.
b) Determinați elementul neutru față de „$*$”.
c) Determinați elementul neutru față de „$\circ$”.
d) Arătați că $x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}$.
e) Demonstrați că $(\mathbb{Q}, *, \circ)$ este corp.
f) Calculați inversul lui 2.
g) Calculați $3 * 4^{-1} * (-2) \circ 2^{-1}$, unde prin 4^{-1} și 2^{-1} am notat inversul lui 4, respectiv 2, față de legea „$\circ$”.

5) Care dintre următoarele inele sunt corpuri: $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_9, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$? Justificați.

Exemple de corpuri – temă de sinteză

1) Inelele $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ și $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sunt corpuri comutative, numite respectiv *corpul numerelor raționale*, *corpul numerelor reale* și *corpul numerelor complexe*.

Demonstrație. *Pentru* ($\mathbb{Q}$, +, ·) și ($\mathbb{R}$, +, ·) axiomele corpului se verifică cu ușurință.

Pentru ($\mathbb{C}$, +, ·) să verificăm numai existența elementului invers. Fie $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Atunci $a \neq 0$ sau $b \neq 0$, deci $a^2 + b^2 \neq 0$. Deoarece $(a+bi)\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i\right) = 1$, avem $z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$.

2) Mulțimea $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ este corp în raport cu adunarea și înmulțirea numerelor reale.

Demonstrație. Fie $u, v \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $u = a + b\sqrt{2}$, $v = c + d\sqrt{2}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Avem $u + v = (a+c) + (b+d)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $uv = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, deci $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ este stabilă în raport cu adunarea și înmulțirea. Se verifică ușor că $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ este inel în raport cu operațiile induse. Elementul zero este $0 = 0 + 0\sqrt{2}$, iar unitatea este $1 = 1 + 0\sqrt{2}$.

Dacă $u \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $u = a + b\sqrt{2}$ și $u \neq 0$, atunci $a \neq 0$ sau $b \neq 0$. Rezultă că $a^2 - 2b^2 \neq 0$ (pentru că din $a^2 - 2b^2 = 0$ și $b = 0$ deducem $a = 0$, iar din $a^2 - 2b^2 = 0$ și $b \neq 0$ deducem că $2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ cu $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, ambele variante fiind contradictorii), deci numărul $u' = \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ și avem $uu' = 1$. Așadar u este inversabil în $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ și $u^{-1} = u'$.

3) Inelele ($\mathbb{Z}$, +, ·) și ($\mathbb{Z}_{12}$, +, ·) nu sunt corpuri.

Demonstrație. Ecuația $2x = 1$ nu are soluții în $\mathbb{Z}$ ($2 \neq 0$ nu este inversabil în $\mathbb{Z}$). În inelul ($\mathbb{Z}_{12}$, +, ·) avem $\hat{4} \neq \hat{0}$, $\hat{6} \neq \hat{0}$ și $\hat{4} \cdot \hat{6} = \widehat{24} = \hat{0}$. Cum un corp nu are divizori ai lui zero, rezultă că ($\mathbb{Z}_{12}$, +, ·) nu este corp.

4) Inelul ($\mathbb{Z}_p$, +, ·), $p > 1$ este corp dacă și numai dacă p este număr prim.

Demonstrație. Reamintim că un număr întreg $p > 1$ este prim dacă din $p \mid ab$, cu $a, b \in \mathbb{Z}$, rezultă $p \mid a$ sau $p \mid b$. Să observăm că din $p > 1$ rezultă $\hat{1} \neq \hat{0}$. Dacă p este prim și $\hat{a}\hat{b} = \hat{0}$ în inelul $\mathbb{Z}_p$, atunci $\widehat{ab} = \hat{0}$, deci $p \mid ab$, de unde $p \mid a$ sau $p \mid b$, adică $\hat{a} = \hat{0}$ sau $\hat{b} = \hat{0}$.

Așadar, dacă p este prim, atunci $\mathbb{Z}_p$ este domeniu de integritate finit și deci corp conform proprietății 3.

Dacă p nu este prim, există $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $p \mid ab$, $p \nmid a$, $p \nmid b$, ceea ce revine la $\hat{a}\hat{b} = \hat{0}$, $\hat{a} \neq 0$ și $\hat{b} \neq \hat{0}$. Deci $\mathbb{Z}_p$ are divizori ai lui zero dacă p nu este prim și atunci nu poate fi corp.

Astfel, inelele ($\mathbb{Z}_2$, +, ·), ($\mathbb{Z}_3$, +, ·), ($\mathbb{Z}_5$, +, ·), ($\mathbb{Z}_7$, +, ·) etc. sunt corpuri. Faptul că orice clasă $\hat{a} \in \mathbb{Z}_5$, $\hat{a} \neq \hat{0}$ este inversabilă se poate observa și pe tabla înmulțirii lui $\mathbb{Z}_5$: $\hat{1}^{-1} = \hat{1}$, $\hat{2}^{-1} = \hat{3}$, $\hat{3}^{-1} = \hat{2}$, $\hat{4}^{-1} = \hat{4}$.

$\cdot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{1}$	$\hat{3}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

Grupul multiplicativ ($\mathbb{Z}_5^*$, ·) al corpului $\mathbb{Z}_5$ are 4 elemente, $\mathbb{Z}_5^* = \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ și tabla înmulțirii acestui grup este cuprinsă în tabla înmulțiri lui $\mathbb{Z}_5$.

● **1.** Pe mulțimea $K = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definim legile de compoziție:
$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$,
$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.
Arătați că (K, +, ·) este corp comutativ.

● **2.** Pe intervalul $K = (0, \infty) \subset \mathbb{R}$ definim legile de compoziție „T“ și „⊥“ (*truc* și *antitruc*):
$$x \top y = xy, \forall\, x, y \in K \quad \text{și}$$
$$x \perp y = x^{\ln y}, \forall\, x, y \in K.$$
Arătați că tripletul (K, T, ⊥) este corp comutativ.

● **3.** Pe mulțimea $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se definesc operațiile:
$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$;
$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$, $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.
(i) Arătați că R are o structură de inel comutativ în raport cu aceste operații.
(ii) Determinați elementele inversabile ale inelului R.

●● **4.** Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pe $\mathbb{R}$ definim legile de compoziție „T“ și „⊥“ prin:
$$x \top y = ax + by - 2, \forall\, x, y \in \mathbb{R} \text{ și}$$
$$x \perp y = xy - 2x - 2y + c, \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$
Determinați a, b, c astfel încât ($\mathbb{R}$, T, ⊥) să fie corp.

5. Fie $K = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{a} & -\hat{b} \\ \hat{b} & \hat{a} \end{pmatrix} \middle| \, \hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_3 \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$.

Arătați că $A + A + A = 0$ și $(A + B)^3 = A^3 + B^3$, oricare ar fi $A, B \in K$.

6. Fie K un inel cu patru elemente.

Arătați că sunt echivalente următoarele afirmații:

i) K este corp;

ii) $\exists\, a \in K$ astfel încât $a^2 = 1 + a$.

Teste de evaluare

Testul 1

(3p) 1. Fie mulțimea $K = (0, +\infty)$ cu operațiile $x \top y = x^{\ln \sqrt[3]{y}}$, $x \perp y = xy$.

Arătați că tripletul $(K, \perp, \top)$ este corp comutativ.

(3p) 2. Câte elemente are mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ a matricelor cu elemente din $\mathbb{Z}_2$?

Câte elemente inversabile are inelului $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$?

(3p) 3. Fie inelul $\left(\left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{Z} \right\}, +, \cdot \right)$. Care este elementul unitate în raport cu înmulțirea?

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 1 oră.

Testul 2

(3p) 1. Fie mulțimea $K = (-\infty, 1)$ și operațiile: $x \top y = 1 - (1 - x)^{\ln(1-y)}$, $x \perp y = x + y - xy$.

Demonstrați că tripletul $(K, \perp, \top)$ este corp comutativ.

(3p) 2. Care este mulțimea elementelor inversabile din inelul $\mathbb{Z}_{24}$?

(3p) 3. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ și $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, cu $A \cdot X = \frac{1}{2} X$.

Atunci:

a) $X = I_n$; b) $X = O_n$; c) $X = A$;

d) $X = A + I_2$; e) X nu există.

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 1 oră.

Probleme de tip bacalaureat

1. În inelul $\mathbb{Z}_{12}$ considerăm ecuațiile $\hat{x}^4 = \hat{0}$, $\hat{x}^2 = \hat{x}$, $\hat{2}\hat{x} = \hat{4}$.

a) Să se afle câte elemente inversabile în raport cu înmulțirea are inelul $\mathbb{Z}_{12}$.

b) Să se calculeze produsul soluțiilor ecuației $\hat{2}\hat{x} = \hat{4}$.

c) Să se calculeze suma soluțiilor ecuației $\hat{x}^2 = \hat{x}$.

d) Să se afle numărul de soluții ale ecuației $\hat{x}^4 = \hat{0}$.

e) Să se afle probabilitatea ca, alegând un element din inelul $\mathbb{Z}_{12}$, acesta să fie o soluție a ecuației $\hat{x}^4 = \hat{0}$.

2. Pe mulțimea $G = (-2, +\infty)$ se definește legea $x * y = xy + 2x + 2y + 2$.

a) Să se afle elementul neutru al legii.

b) Să se afle simetricul lui 2 în raport cu legea „$*$“.

c) Să se calculeze suma soluțiilor ecuației $\hat{x}^3 = \hat{x}$ în $\mathbb{Z}_6$.

d) Să se afle probabilitatea ca un element din inelul $\mathbb{Z}_8$ să fie inversabil.

3. a) Să se afle câte soluții are ecuația $\hat{x}^3 = \hat{x}$ în inelul $\mathbb{Z}_3$.

b) Să se afle câte elemente inversabile față de adunare are inelul $\mathbb{Z}_{2006}$.

c) Să se calculeze câte soluții are ecuația $\hat{x}^3 = \hat{x}$ în inelul $(\mathbb{Z}_{16}, +, \cdot)$.

d) Să se calculeze produsul elementelor inelului $\mathbb{Z}_2$.

4. a) Să se afle câte soluții are ecuația $\hat{3}x = \hat{2}$ în inelul $\mathbb{Z}_4$.

b) Să se calculeze produsul elementelor mulțimii $\mathbb{Z}_4$.

c) Să se afle câte elemente inversabile față de înmulțire sunt într-un corp cu 3 elemente.

5. Fie p un număr prim, $p \geqslant 3$.

a) Să se demonstreze că $\mathbb{Z}_{p-1}$ este grup față de adunare.

b) Să se demonstreze că $\forall\, \hat{x} \in \mathbb{Z}_{p-1}, x \neq \hat{0}$, există $\hat{y} \in \mathbb{Z}^*_{p-1}$ astfel încât $\widehat{xy} = \hat{1}$.

c) Să se demonstreze că $(\mathbb{Z}_{p-1}, +, \cdot)$ este corp.

d) Să se arate că, dacă $\hat{x} \in \mathbb{Z}^*_{p-1}$ și $\hat{x}^2 = \hat{1}$, atunci $\hat{x} \in \{\hat{1}, \widehat{p-1}\}$.

e) Să se demonstreze că $\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \ldots \cdot \widehat{p-1} = \widehat{p-1}$.

f) Să se demonstreze că, dacă p este număr compus și nu este pătrat perfect, atunci $p \mid (p-1)!$

Polinoame

Polinoame având coeficienţi într-un corp comutativ

Definiţia polinoamelor

Fie X un simbol numit *nedeterminată* şi K un corp comutativ. Corpul K poate fi corpul $\mathbb{Q}$ al numerelor raţionale, corpul $\mathbb{R}$ al numerelor reale, corpul $\mathbb{C}$ al numerelor complexe sau un corp $\mathbb{Z}_p$ de clase de resturi, p număr prim.

Dacă a_0, a_1, ..., a_k, ... este un şir de elemente din corpul K, şir având proprietatea că doar un număr finit de elemente sunt diferite de zero, atunci expresia formală f,

$$f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_kX^k + \ldots$$

se numeşte *polinom* în nedeterminata X având coeficienţii în K; elementul a_k, $k \in \mathbb{N}$ se numeşte *coeficientul de rang k* al polinomului f, iar a_kX^k se numeşte *termenul de rang k* al lui f.

Vom nota cu $K[X]$ mulţimea tuturor polinoamelor având coeficienţii în corpul K.

Cum $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, avem $\mathbb{Q}[X] \subset \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$.

Dacă $f \in K[X]$, $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_kX^k + \ldots$, atunci termenii a_kX^k se omit când $a_k = 0$. Când $a_k = 1$, termenul $1 \cdot X^k$ se scrie mai simplu X^k.

Astfel în $\mathbb{R}[X]$ scriem:

$f = 3 + 2X + 0X^2 + 5X^3 + 0X^4 + \ldots = 3 + 2X + 5X^3$

$g = 0 + 3X + 0X^2 + 1 \cdot X^3 + 0X^4 + \ldots = 3X + X^3$.

Polinomul din $K[X]$ cu toţi coeficienţii egali cu zero se numeşte *polinomul zero* sau *polinom nul* şi se notează cu 0. Aşadar $0 = 0 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 + \ldots + 0 \cdot X^k + \ldots$

Definiţie. Fie $f, g \in K[X]$, $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_kX^k + \ldots$ şi $g = b_0 + b_1X + \ldots + b_kX^k + \ldots$

Spunem că polinomul f este *egal* cu polinomul g şi scriem $f = g$, dacă $a_k = b_k$ oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$.

Aşadar, două polinoame f şi g din $K[X]$ sunt egale dacă pentru orice $k \in \mathbb{N}$ coeficientul de rang k al lui f coincide cu coeficientul de rang k al lui g.

1) Determinaţi corpul K pentru fiecare dintre următoarele polinoame:

a) $f = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}X + \frac{1}{5}X^2$, $f \in K[X]$;

b) $f = -1 + X + X^2 - \frac{1}{2}X^3$, $f \in K[X]$;

c) $f = X^4 - 1$, $f \in K[X]$;

d) $f = X^3 - 7X + 1$, $f \in K[X]$;

e) $f = X^{10} - \frac{1}{3}X^3$, $f \in K[X]$;

f) $f = aX^2 + bX + 1$, $a, b \in \mathbb{Q}$, $f \in K[X]$;

g) $f = \sqrt{2} + X$, $f \in K[X]$;

h) $f = 1 + X + X^2 + X^3 - \sqrt{3}X$, $f \in K[X]$;

i) $f = -3 + 2\sqrt{2}X^4$, $f \in K[X]$;

j) $f = X^{11} - X^{10} + X^9 - X^8 + \sqrt{7}$, $f \in K[X]$;

k) $f = aX^2 + bX + 1$, $a, b \in \mathbb{R}$, $f \in K[X]$;

l) $f = i + X^2$, $f \in K[X]$;

m) $f = 1 + iX - X^2$, $f \in K[X]$;

n) $f = X^3 + iX^2 + iX + 1$, $f \in K[X]$;

o) $f = mX^2 - 1$, $m \in \mathbb{C}$, $f \in K[X]$;

EXEMPLU

Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = c - 1 + 4X + (2a - b)X^2$, $g = (3a - 2b)X + X^2 + dX^3$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Să determinăm numerele $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ astfel încât $f = g$.

Conform definiției egalității polinoamelor avem $f = g$ dacă și numai dacă $\begin{cases} c-1=0 \\ 3a-2b=4 \\ 2a-b=1 \\ d=0 \end{cases}$, de unde $a = -2$, $b = -5$, $c = 1$ și $d = 0$.

Fie $f \in K[X]$, $f \neq 0$, $f = a_0 + a_1X + ... + a_kX^k + ...$

Cum $f \neq 0$, cel puțin un coeficient al lui f este diferit de zero. Numărul coeficienților lui f diferiți de zero fiind finit, există un cel mai mare număr natural n astfel încât $a_n \neq 0$.

Definiție. Fie $f \in K[X]$, $f \neq 0$, $f = a_0 + a_1X + ... + a_kX^k + ...$

Cel mai mare număr natural n cu proprietatea $a_n \neq 0$ se numește *gradul* polinomului f și se notează cu grad f.

Un polinom de forma aX^n cu $a \in K$, $a \neq 0$ și $n \in \mathbb{N}$ se numește *monom*, gradul acestuia fiind egal cu n.

Dacă $f \in K[X]$, $f \neq 0$, $f = a_0 + a_1X + ... + a_kX^k + ...$ și grad $f = n$, atunci putem scrie:

$f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n$, unde $a_n \neq 0$.

Monomul a_nX^n se numește *termenul principal* al lui f, iar a_n se numește *coeficientul dominant* al lui f. Dacă $a_n = 1$ spunem că f este *polinom unitar* sau *polinom monic*.

Coeficientul a_0 se numește *termenul liber* al polinomului f. Polinoamele de grad zero și polinomul zero (al cărui grad nu se definește) se numesc *polinoame constante*.

Dacă un polinom $f \in K[X]$, $f \neq 0$ este scris $f = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$, atunci spunem că f este reprezentat sub *forma canonică*, în ordinea crescătoare a puterilor nedeterminatei. Dacă scriem $f = a_nX^n + ... + a_1X + a_0$, atunci spunem că f este reprezentat sub *forma canonică*, în ordinea descrescătoare a puterilor nedeterminatei.

p) $f = aX^2 + bX + 1$, $a, b \in \mathbb{C}$, $f \in K[X]$;

q) $f = a$, $a \in \mathbb{Q}$, $f \in K[X]$;

r) $f = a$, $a \in \mathbb{R}$, $f \in K[X]$;

s) $f = a$, $a \in \mathbb{C}$, $f \in K[X]$.

2) Care dintre următoarele polinoame sunt egale?

$f = X^2 + X + 1$;

$g = 1 + X + X^2$;

$h = 1 - X + X^2$.

3) Determinați, în fiecare caz în parte, numerele reale m și n astfel încât polinoamele f și g să fie egale:

a) $f = X^6 + X^3 + m$, $g = nX^6 + X^3 + 1$;

b) $f = X + 2n$, $g = mX + 2$;

c) $f = X^2 + m$, $g = mX^2 - n$;

d) $f = \sqrt{5}X^2 + m - n$, $g = \sqrt{5}X^2$;

e) $f = X^3 + n$, $g = nX^3 + m\sqrt{2}$.

4) Scrieți următoarele polinoame în formă canonică în ordinea descrescătoare a puterilor nedeterminatei X:

a) $f = X^2 + X^3 + 1$;

b) $f = 3X^2 + X - 2X^2 + 7X$;

c) $f = X^2 - 4X + 5X + X^3$;

d) $f = X^3 - 2X^4 + X + 5X^4 - 2$;

e) $f = iX^3 - iX^2 + 2X^4 - 1$;

f) $f = 2X - 8X^2 + 3X^3 - 8iX^2$;

g) $f = 6X - 4X + 3X - 5X$.

Exerciții rezolvate.

1) Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 1 + (\alpha^2 - 1)X + (\alpha^2 - 4\alpha + 3)X^2 + (\alpha^2 - 3\alpha + 2)X^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Precizează gradul lui f. Discuție în funcție de valorile reale ale lui α.

Soluție. Se observă că pentru $\alpha \in \{1; 2\}$ se anulează coeficientul lui X^3, cel al lui X^2 se anulează pentru $\alpha \in \{1; 3\}$, iar cel al lui X pentru $\alpha \in \{-1; 1\}$. Rezultă că pentru orice $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$, grad $f = 3$, pentru $\alpha = 2$, grad $f = 2$ și pentru $\alpha = 1$, grad $f = 0$.

2) Determinați gradul polinomului $f = (m^2 + 1)X + 1$ dacă: a) $m \in \mathbb{R}$; b) $m \in \mathbb{C}$.

Soluție. a) Dacă $m \in \mathbb{R}$, atunci $m^2 + 1 \neq 0$ și grad $f = 1$.

b) Din $m^2 + 1 = 0$, $m \in \mathbb{C}$ obținem $m \in \{-i, i\}$. Dacă $m \in \{-i, i\}$, atunci grad $f = 0$; dacă $m \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$, atunci grad $f = 1$.

Operații cu polinoame

Fie K un corp comutativ și $K[X]$ mulțimea polinoamelor în nedeterminata X având coeficienții în K. Pe mulțimea $K[X]$ introducem două operații algebrice, *adunarea* și *înmulțirea* polinoamelor și vom arăta că în raport cu acestea $K[X]$ are o structură de inel comutativ.

♦ *Adunarea polinoamelor*

Fie $f, g \in K[X]$,

$f = a_0 + a_1X + ... + a_kX^k + ...$, $g = b_0 + b_1X + ... + b_kX^k + ...$

Definim *suma* polinomului f cu polinomul g, notată cu $f + g$, prin

$$f+g \stackrel{\text{def}}{=} (a_0+b_0)+(a_1+b_1)X+...+(a_k+b_k)X^k+....$$

Să observăm că $f + g \in K[X]$, adică suma a două polinoame este tot un polinom. Această afirmație este evidentă când $f = 0$ sau $g = 0$. Astfel, dacă $f = 0 = 0 + 0X + ... + 0X^k + ...$, atunci

$$0+g=(0+b_0)+(0+b_1)X+...+(0+b_k)X^k+...=b_0+b_1X+...+ +b_kX^k+...=g.$$

Putem deci presupune că $f \neq 0$ și $g \neq 0$. Dacă $n = \text{grad} f$, $m = \text{grad}\, g$ și $n \leqslant m$, atunci $f + g = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n + 0X^{n+1} + ... + b_0 + b_1X + ... + b_mX^m + 0X^{m+1} + ... = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + ... + (a_n + b_n)X^n + b_{n+1}X^{n+1} + ... + b_mX^m + 0X^{m+1} + ...$

Rezultă că $f + g$ are un număr finit de coeficienți diferiți de 0, deci $f + g \in K[X]$.

Din calculul efectuat mai sus rezultă:

$\text{grad}(f + g) = \max\{\text{grad} f, \text{grad}\, g\}$, dacă $m \neq n$ și

$\text{grad}(f + g) \leqslant \max\{\text{grad} f, \text{grad}\, g\}$, dacă $m = n$ și $f + g \neq 0$

Dacă $f \in K[X]$, $f = a_0 + a_1X + ... + a_kX^k + ...$, atunci polinomul $(-a_0) + (-a_1)X + ... + (-a_k)X^k + ...$ se notează cu $-f$ și se numește *opusul* lui f.

Avem $f + (-f) = (-f) + f = 0$. Într-adevăr

$f + (-f) = (a_0 + (-a_0)) + (a_1 + (-a_1))X + ... + (a_k + (-a_k))X^k + ... = 0 + 0X + ... + 0X^k + ... = 0$ și analog se arată că $(-f) + f = 0$.

Principalele proprietăți ale operației de adunare a polinoamelor sunt menționate în următorul enunț.

Teorema 1. Fie K un corp comutativ și $K[X]$ mulțimea polinoamelor în nedeterminanta X având coeficienții în K. Avem:

(1) $(f + g) + h = f + (g + h)$, $\forall f, g, h \in K[X]$ (asociativitate)

(2) $f + g = g + f$, $\forall f, g \in K[X]$ (comutativitate)

(3) $0 + f = f + 0 = f$, $\forall f \in K[X]$ (polinomul 0 este element neutru)

(4) $f + (-f) = (-f) + f = 0$, $\forall f \in K[X]$ (orice polinom are opus)

Altfel spus, $K[X]$ este grup abelian în raport cu operația de adunare a polinoamelor.

5) Calculați $f + g + h$, știind că polinoamele $f, g, h \in \mathbb{C}[X]$ și

a) $f = X^2 + X + 1$,
$g = X^2 - X - 1$, $h = -2X^2$;

b) $f = X^5 - iX^3$,
$g = iX^3 - iX$,
$h = iX - 1$;

c) $f = X^4 + iX + 1 - i$,
$g = -X^4 + i$,
$h = -iX - 1$.

În fiecare caz în parte determinați gradul polinomului $f + g + h$.

6) Calculați $f + g + h$, dacă $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $g \in \mathbb{Z}_3[X]$ și $h \in \mathbb{Z}_3[X]$.

a) $f = X^3 + X^2 + X$,
$g = X^2 + X + \hat{1}$,
$h = \hat{2}X^3 + X^2 + \hat{2}X + \hat{2}$;

b) $f = X^4 + \hat{1}$,
$g = \hat{2}X^4 + \hat{1}$,
$h = \hat{1}$.

7) Pentru fiecare dintre polinoamele următoare $f, g \in \mathbb{C}[X]$ calculați:

i) $f + g$
ii) $-g$
iii) $f - g$ știind că:

a) $f = X^3 - 2X^2 + X - 1$,
$g = -X^2 + 1$;

b) $f = X^4 - X^2 + 2$,
$g = -X^4 + X^2 - 2$;

c) $f = 3X - X^2$,
$g = 3X^2 - X$;

d) $f = X^7 + X^6 + X^5$,
$g = X^4 + X^3 + X^2$;

e) $f = X^3 - 5X + 2$,
$g = X^3 - 5X + 2$;

f) $f = (1+i) + (1-i)X + iX^2 - iX^3$,
$g = -i + iX + (1-i)X^2 + (1+i)X^3$.

Demonstrație. (2) Dacă a_k și b_k sunt coeficienții de rang k ai lui f, respectiv g, atunci $a_k + b_k$ este coeficientul de rang k al lui $f + g$, iar cel al lui $g + f$ este $b_k + a_k$. Cum $a_k + b_k = b_k + a_k$, oricare ar fi k (adunarea corpului K este comutativă) rezultă că $f + g = g + f$.

Proprietatea (1) se verifică analog, iar proprietățile (3) și (4) au fost deja demonstrate în aliniatele care preced enunțul teoremei. ■

Pe $K[X]$ se poate defini și operația de scădere a polinoamelor prin:

$$f - g \overset{\text{def}}{=} f + (-g), \forall f, g \in K[X].$$

Conform acestei definiții putem simplifica scrierea polinoamelor. Astfel polinomul $3 + 2X + (-5)X^2$ poate fi scris $3 + 2X - 5X^2$, iar polinomul $(-3) + (-4)X + 2X^3$ poate fi scris $-3 - 4X + 2X^3$.

EXEMPLE

1) Dacă $f, g \in \mathbb{Q}[X]$,

$f = \frac{2}{3} - 5X + 4X^3$, $g = 1 + 2X - 3X^2$, atunci:

$$f + g = \left(\frac{2}{3} + 1\right) + (-5 + 2)X + (0 - 3)X^2 + (4 + 0)X^3 = \frac{5}{3} - 3X - 3X^2 + 4X^3,$$

$$-g = -1 - 2X + 3X^2 \text{ și}$$

$$f - g = \left(\frac{2}{3} - 1\right) + (-5 - 2)X + (0 + 3)X^2 + (4 - 0)X^3 = -\frac{1}{3} - 7X + 3X^2 + 4X^3.$$

2) Dacă $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = \hat{3} + \hat{2}X + X^2$, $g = \hat{1} + \hat{3}X + \hat{2}X^2$ atunci

$$f + g = (\hat{3} + \hat{1}) + (\hat{2} + \hat{3})X + (\hat{1} + \hat{2})X^2 = \hat{4} + \hat{0}X + \hat{3}X^2 = \hat{4} + \hat{3}X^2,$$

$$-g = (-\hat{1}) + (-\hat{3})X + (-\hat{2})X^2 = \hat{4} + \hat{2}X + \hat{3}X^2.$$

$$f - g = f + (-g) = (\hat{3} + \hat{4}) + (\hat{2} + \hat{2})X + (\hat{1} + \hat{3})X^2 = \hat{2} + \hat{4}X + \hat{4}X^2.$$

♦ *Înmulțirea polinoamelor*

Să definim acum operația de înmulțire a polinoamelor.

Fie $f, g \in K[X]$, $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_kX^k + \ldots$,
$g = b_0 + b_1X + \ldots + b_kX^k + \ldots$

Definim *produsul* lui f cu g, notat fg, prin
$fg = c_0 + c_1X + \ldots + c_kX^k + \ldots$, unde

$c_0 = a_0b_0$
$c_1 = a_0b_1 + a_1b_0$
$c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0$
…
$c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \ldots + a_kb_0 = \sum\limits_{i+j=k} a_ib_j$.
…

Evident, dacă $f = 0$ sau $g = 0$, atunci $fg = 0$.

Presupunem că $f \neq 0$ și $g \neq 0$. Fie $n = \text{grad } f$ și $m = \text{grad } g$.

Când $k > n + m$ și $i + j = k$ avem $i > n$ sau $j > m$, deci $a_i = 0$ sau $b_j = 0$ și atunci $c_k = \sum\limits_{i+j=k} a_ib_j = 0$.

Când $k = n + m$ toate produsele a_ib_j sunt egale cu 0 mai puțin cel corespunzător lui $i = n$ și $j = m$ care este egal cu $a_nb_m \neq 0$.

8) Calculați $f + g$, $-f$, $-g$ și $f - g$ dacă $f, g \in \mathbb{Z}_4[X]$ și:

a) $f = X^2 + \hat{2}$, $g = X^3 + \hat{3}X + \hat{2}$;

b) $f = \hat{3}X + \hat{1}$, $g = X^2 + X + \hat{3}$;

c) $f = X^5 + X^4 + \hat{3}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{3}X + \hat{1}$,
$g = \hat{3}X^5 + \hat{3}X^4 + X^3 + X^2 + X + \hat{3}$.

9) Determinați numerele complexe a și b știind că $f = X^4 + aX + i$, $g = -X^4 - iX + b$ și $f + g = 0$, $f, g \in \mathbb{C}[X]$.

10) Determinați $a, b \in \mathbb{Z}_3$ știind că $f = X^2 + a$, $g = bX^2 + \hat{1}$ și $f + g = \hat{0}$, $f, g \in \mathbb{Z}_3[X]$.

11) Determinați $a \in \mathbb{Z}_3$ astfel încât gradul polinomului f să fie egal cu 3 în fiecare din cazurile următoare:

a) $f = aX^4 + \hat{2}X + \hat{1}$;

b) $f = (a + \hat{1})X^3 + \hat{2}$.

În fiecare caz în parte scrieți toate polinoamele $f \in \mathbb{Z}_3[X]$ care îndeplinesc condiția dată.

12) Calculați $f \cdot g$ dacă:

a) $f = X - 1$, $g = X^2 + X + 1$ și $f, g \in \mathbb{R}[X]$;

b) $f = X + 1$, $g = X^2 - X + 1$ și $f, g \in \mathbb{R}[X]$;

c) $f = X - 1$, $g = X^3 + X^2 + X + 1$ și $f, g \in \mathbb{R}[X]$;

d) $f = X + 1$, $g = X^3 - X^2 + X - 1$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$;

e) $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, $g = X - 1$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$;

f) $f = X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$, $g = X + 1$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$;

Concluzionăm că *produsul fg al polinoamelor f și g este tot un polinom, iar dacă $f \neq 0$ și $g \neq 0$ atunci termenul (respectiv coeficientul) principal al produsului fg este egal cu produsul termenilor (respectiv coeficienților) principali ai lui f și g.*

Mai mult, dacă $f \neq 0$ și $g \neq 0$, atunci $fg \neq 0$ și

grad fg = grad f + grad g,

adică gradul produsului este egal cu suma gradelor factorilor.

Când $f \neq 0$, $g \neq 0$, iar grad $f = n$ și grad $g = m$, atunci produsul fg poate fi precizat după cum urmează:

$$fg = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)X + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)X^2 + \ldots + \left(\sum_{i+j=k} a_ib_j\right)X^k + \ldots + (a_{n-1}b_m + a_nb_{m-1})X^{n+m-1} + a_nb_mX^{n+m}.$$

Principalele proprietăți ale operației de înmulțire a polinoamelor sunt enumerate în enunțul următor:

Teorema 2. Fie K un corp comutativ și $K[X]$ mulțimea polinoamelor în nedeterminata X având coeficienții în K.

Avem:

(1) $(fg)h = f(gh)$, $\forall f, g, h \in K[X]$ (asociativitate)

(2) $fg = gf$, $\forall f, g \in K[X]$ (comutativitate)

(3) $1 \cdot f = f \cdot 1 = f$, $\forall f \in K[X]$ (polinomul 1 este element neutru)

(4) $f(g + h) = fg + fh$, $\forall f, g, h \in K[X]$ (distributivitatea înmulțirii în raport cu adunarea)

Demonstrație

(1) Fie a_i, b_i, c_i, $i \in \mathbb{N}$ coeficienții de rang i respectiv ai polinoamelor f, g și h. Fie u_k și v_k, $k \in \mathbb{N}$ coeficienții lui fg, respectiv $(fg)h$. Pentru orice $p \in \mathbb{N}$ avem:

$$v_p = \sum_{s+k=p} u_sc_k = \sum_{s+k=p}\left(\sum_{i+j=s} a_ib_j\right)c_k = \sum_{(i+j)+k} (a_ib_j)c_k.$$

Analog, dacă v'_p este coeficientul de rang p al polinomului $f(gh)$, atunci:

$$v'_p = \sum_{i+(j+k)} a_i(b_jc_k).$$

Cum înmulțirea corpului K este asociativă avem $(a_ib_j)c_k = a_i(b_jc_k)$, oricare ar fi $i, j, k \in \mathbb{N}$. Rezultă că $v_p = v'_p$, oricare ar fi $p \in \mathbb{N}$, de unde $(fg)h = f(gh)$.

Demonstrațiile pentru afirmațiile (2), (3) și (4) sunt mai ușoare și le propunem ca exercițiu. ■

Din teoremele 1 și 2 rezultă:

Corolar. Mulțimea $K[X]$ a polinoamelor în nedeterminata X cu coeficienți în corpul comutativ K este inel comutativ în raport cu adunarea și înmulțirea polinoamelor.

În cele ce urmează $K[X]$ este numit *inelul polinoamelor* în nedeterminata X având coeficienții în corpul K.

g) $f = X^2 - X + 1, g = X + 2$ și $f, g \in \mathbb{R}[X]$;

h) $f = 1 + i + (1 - i)X + iX^2$, $g = (1 - i) + (1 + i)X - iX^2$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$;

i) $f = 1 + X + X^2, g = 1 - X + X^2$ și $f, g \in \mathbb{R}[X]$;

j) $f = X^3 + X^2 + X, g = X^4 - X^2 + 1$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$.

În fiecare caz în parte determinați grad f, grad g și grad (fg).

13) Dacă $f = X - i$, $f \in \mathbb{C}[X]$ calculați:

a) f^2; b) f^3; c) $f + f^2$; d) $f^2 - f^3$.

14) Fie polinoamele

$f = (X + 1)^2 - (X - 1)^2$ și

$g = (X + 1)^3 - (X - 1)^3$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$.

a) Calculați f^2.

b) Calculați g.

c) Calculați $f^2 - g^2$.

d) Calculați $f + g$.

e) Calculați $f - g$.

f) Calculați $(f + g)(f - g)$.

15) Fie polinoamele $f = (X + 1)^2 - (X - 1)^2$ și $g = (X + i)^2 - (X - i)^2$, $f, g \in \mathbb{C}[X]$.

a) Calculați f^2.

b) Calculați g.

c) Calculați $f^2 - g^2$.

d) Calculați $f + g$.

e) Calculați $f - g$.

f) Calculați $(f + g)(f - g)$.

16) Se dau polinoamele $f_1, f_2 \in \mathbb{C}[X]$

$f_1 = (1 + i) + (1 - i)X + iX^2 - iX^3$ și

$f_2 = -i + iX + (1 - i)X^2 + (1 + i)X^3$.

Determinați polinomul $f_3 \in \mathbb{C}[X]$ știind că $f_1 + f_2 + f_3 = 0$.

17) Calculați fg știind că $f, g \in \mathbb{Z}_4[X]$ și

a) $f = X^2 + \hat{2}$,

$g = X^3 + \hat{3}X + \hat{2}$;

În particular, $\mathbb{Q}[X]$ (respectiv $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$) este numit *inelul polinoamelor* în nedeterminata X având coeficienții raționali (respectiv reali, complecși).

Dacă p este un număr prim, atunci $\mathbb{Z}_p[X]$ este numit *inelul polinoamelor* în nedeterminata X având coeficienții în corpul claselor de resturi modulo p.

De asemenea, vom nota cu $\mathbb{Z}[X]$ mulțimea polinoamelor în nedeterminata X având coeficienții întregi. Avem evident $\mathbb{Z}[X] \subset \mathbb{Q}[X]$, iar dacă f, $g \in \mathbb{Z}[X]$, atunci $f + g \in \mathbb{Z}[X]$ și $fg \in \mathbb{Z}[X]$. Rezultă că $\mathbb{Z}[X]$ este inel în raport cu operațiile de adunare și de înmulțire induse de adunarea și de înmulțirea polinoamelor din $\mathbb{Q}[X]$. Deci $\mathbb{Z}[X]$ este *inelul polinoamelor* în nedeterminata X având coeficienții întregi.

Observație. Într-un inel de polinoame $K[X]$, unde K este corp comutativ, sunt adevărate regulile de calcul dintr-un inel comutativ. Așadar, dacă f, g, $h \in K[X]$ și $n \in \mathbb{N}^*$, atunci:

(1) $f(-g) = (-f)g = -fg$ (regula semnelor)

(2) $f(g - h) = fg - fh$ (distributivitatea înmulțirii în raport cu scăderea)

(3) $(f + g)(f - g) = f^2 - g^2$

(4) $f^3 - g^3 = (f - g)(f^2 + fg + g^2)$

$f^3 + g^3 = (f + g)(f^2 - fg + g^2)$

(5) $(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{n-k} g^k$.

b) $f = \hat{3}X + \hat{1}$,

$g = X^2 + X + \hat{3}$;

c) $f = X^5 + X^4 + \hat{3}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{3}X + \hat{1}$,

$g = \hat{3}X^5 + \hat{3}X^4 + X^3 + X^2 + X + \hat{3}$.

În fiecare caz în parte determinați grad f, grad g și grad (fg).

18) Verificați proprietățile (1)-(5) din observație pentru următoarele polinoame:

a) $f = X^3 - 1$, $g = X^3 + 1$,

$f, g \in \mathbb{C}[X]$;

b) $f = X^2 + \hat{1}$, $g = X^2 + \hat{2}$,

$f, g \in \mathbb{Z}_3[X]$.

c) $f = X^2 - 1$, $g = X^2 + 1$,

$f, g \in \mathbb{C}[X]$.

d) $f = X^2 - 2X + 1$, $g = (X+1)^2$,

$f, g \in \mathbb{C}[X]$.

Exerciții rezolvate.

1) Fie polinoamele f, $g \in \mathbb{R}[X]$, $f = 2X^3 - X^2 + 3X + 1$, $g = 5X^2 - 2X + 3$. Calculați produsul fg.

Soluție. Metoda I (pe baza definiției produsului). Produsul fg este polinom de gradul $3 + 2 = 5$, deci $fg = c_5X^5 + c_4X^4 + + c_3X^3 + c_2X^2 + c_1X + c_0$, cu $c_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{0,5}$.

Notând cu a_i coeficienții lui f și cu b_j pe cei ai lui g și folosind definiția produsului, avem:

$c_0 = a_0b_0 = 1 \cdot 3 = 3$

$c_1 = a_0b_1 + a_1b_0 = 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 = 7$

$c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 = 1 \cdot 5 + 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 = -4$

$c_3 = a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0 = 3 \cdot 5 + (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 3 = 23$

$c_4 = a_2b_2 + a_3b_1 = (-1) \cdot 5 + 2 \cdot (-2) = -9$

$c_5 = a_3b_2 = 2 \cdot 5 = 10$

Așadar $fg = 10X^5 - 9X^4 + 23X^3 - 4X^2 + 7X + 3$

Metoda a II-a (folosind distributivitatea înmulțirii față de adunare)

Înmulțim succesiv pe f cu monoamele lui g și adunăm apoi monoamele de același grad (adică reducem *termenii asemenea*). Calculele pot fi organizate ca la înmulțirea numerelor naturale scrise în baza 10 (fără să mai avem corespondent pentru transfer de unitate când suma cifrelor este mai mare sau egală decât 10).

$$
\begin{array}{r}
f = 2X^3 - X^2 + 3X + 1 \;\cdot \\
g = 5X^2 - 2X + 3 \\
\hline
6X^3 - 3X^2 + 9X + 3 \\
-4X^4 + 2X^3 - 6X^2 - 2X \quad\; \\
10X^5 - 5X^4 + 15X^3 + 5X^2. \qquad\qquad \\
\hline
fg = 10X^5 - 9X^4 + 23X^3 - 4X^2 + 7X + 3
\end{array}
$$

2) Fie $f, g \in \mathbb{Z}_7[X]$, $f = \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{3}$, $g = \hat{2}X^2 + \hat{3}X + \hat{4}$. Calculați fg.

Soluție. Avem:

$$
\begin{array}{r}
f = \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{3} \\
\hline
g = \hat{2}X^2 + \hat{3}X + \hat{4} \\
\hat{5}X^2 + X + \hat{5} \\
\hat{2}X^3 + \hat{6}X^2 + \hat{2}X \\
\hline
\hat{6}X^4 + \hat{4}X^3 + \hat{6}X^2 \\
g = \hat{6}X^4 + \hat{6}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{3}X + \hat{5}
\end{array}
$$

♦ *Înmulțirea polinoamelor cu scalari*

Fie K un corp comutativ. Elementele corpului K sunt numite și *scalari*. Considerate ca elemente ale inelului $K[X]$ acestea sunt numite polinoame constante.

Dacă $a \in K$ și $f \in K[X]$, $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$, atunci produsul af al polinomului constant a cu polinomul f este, conform regulii de înmulțire a polinoamelor, următorul polinom:

$af = aa_0 + (aa_1)X + \ldots + (aa_n)X^n$

Polinomul af se numește *produsul polinomului f cu scalarul a.*

Din Teorema 2 rezultă că înmulțirea polinoamelor cu scalari are proprietățile:

(1) $(a + b)f = af + bf$ (2) $a(f + g) = af + ag$

(3) $a(bf) = (ab)f$ (4) $1 \cdot f = f$

oricare ar fi $a, b \in K, f, g \in K[X]$.

De asemenea, o verificare imediată arată că

(5) $(af)g = f(ag) = a(fg)$, $\forall a \in K$, $\forall f, g \in K[X]$.

19) Dacă $f = (X + 1)^2 + (X - 1)^2$ și $g = (X + i)^2 + (X - i)^2$, $f, g \in \mathbb{C}[X]$, calculați:

a) $2f$;

b) $3g$;

c) $2f - 3g$;

d) f^2;

e) g^2;

f) $f^2 - g^2$;

g) $5(f + g)$.

Exerciții rezolvate.

1) Determinați toate polinoamele f de grad $n \in \mathbb{N}^*$ care verifică relația:

$(1 + X + \ \ldots \ + X^n)f(X) = f(1) + f(X) + \ \ldots \ + f(X^n)$

(dacă $f = a_0 + a_1X + \ \ldots \ + a_nX^n \in \mathbb{C}[X]$ și $g \in \mathbb{C}[X]$, atunci $f(g) \overset{\text{def}}{=} a_0 + a_1g + \ \ldots \ + a_ng^n$).

Soluție. Observăm că dacă $\text{grad } f = n$ și $\text{grad } g = m$ atunci $\text{grad } f(g) = nm$.

Deci $\text{grad } (f(1) + f(X) + \ \ldots \ + f(X^n)) = n^2$ iar $\text{grad } (1 + X + \ \ldots \ + X^n) f(X) = 2n.$ Deducem că $n^2 = 2n$, deci $n = 2$. Așadar polinomul este de forma $f = aX^2 + bX + c$, $a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0$. Relația dată devine:

$(1 + X + X^2)(aX^2 + bX + c) = (a + b + c) + (aX^2 + bX + c) + (aX^4 + bX^2 + c)$.

Obținem: $aX^4 + (a + b)X^3 + (a + b + c)X^2 + (b + c)X + c = aX^4 + (a + b)X^2 + bX + a + b + 3c$.

Două polinoame sunt egale dacă au același grad și coeficienții egali.

Deci $a + b = 0$, $a + b + c = a + b$, $b + c = b$ și $c = a + b + 3c$. Deci $c = 0$, $b = -a$ și $f = aX^2 - aX$, $a \in \mathbb{C}^*$.

2) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ și $f \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât $aX^4 + bX^3 + 1 = (X - 1)^2 f(X)$.

Soluție. Evident grad $f = 2$ și coeficientul dominant al lui f este egal cu a. Așadar $f(X) = aX^2 + cX + d$, unde $c, d \in \mathbb{R}$. Rezultă că $aX^4 + bX^3 + 1 = (X - 1)^2 (aX^2 + cX + d)$.

Identificând coeficienții, după ce se efectuează produsul din membrul drept al egalității precedente, se obține sistemul: $\begin{cases} c - 2a = b \\ a - 2c + d = 0 \\ c - 2d = 0 \\ d = 1 \end{cases}$. Se obțin $a = 3$, $b = -4$, $c = 2$ și $d = 1$. În particular $f = 3X^2 + 2X + 1$.

● **1.** Determinați gradele polinoamelor
a) $f = m - 1 + (m^2 - 3m + 2)X + (m - 2)X^2$, $m \in \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{R}[X]$.
b) $g = z^2 + 1 + (1 + i)X^2 + (z + i)(z^3 + i)X^5$, $z \in \mathbb{C}$, $g \in \mathbb{C}[X]$.

● **2.** Fie $f = 1 + \bar{z}X^2 + X^3$, $g = z^3 + z^2X^2 + X^3$, $z \in \mathbb{C}$. Determinați z astfel încât $f = g$.

● **3.** Fie $f = 3 + \alpha X + (\alpha - 2)X^2$, $g = 1 - 2X + \alpha(\alpha - 3)X^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculați grad$(f + g)$ și grad fg. Discuție în funcție de valorile reale ale lui α.

●● **4.** Determinați grad f dacă $f \in \mathbb{R}[X]$,
$f = (m^2 - 3m + 2)X^3 + (m^2 - 4m + 3)X^2 + (m^2 - 1)X + 1$, $m \in \mathbb{R}$.

● **5.** Calculați $f + g$, $f - g$ și $2f + 3g$ dacă:
a) $f = 1 + X + X^2$, $g = 1 - X^2 + X^3$;
b) $f = (1 + i)^2 + (1 - i)^3X$, $g = 2i + (3 - i)X^2$.

● **6.** Calculați fg dacă:
a) $f = 1 + X$, $g = 1 - X + X^2 - X^3 + X^4$;
b) $f = 2i + (1 + i)X + iX^2$, $g = 1 + i + (1 - i)X$.

●● **7.** Fie $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$,
$f = \hat{2}X^3 + \hat{4}X^2 + \hat{3}X + \hat{1}$, $g = \hat{3}X^3 + \hat{2}X^2 + X + \hat{2}$.
Calculați: a) $f + g$; b) $f - g$; c) fg; d) $\hat{3}f + \hat{2}g$.

● **8.** Fie polinoamele $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{Z}[X]$. Determinați $f = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3$ dacă:
a) $f_1 = X^2 + X + 1$, $f_2 = X^2 - X + 1$, $f_3 = X^2 - 1$;
b) $f_1 = X^{2^n} - X^{2^{n-1}} + 1$, $f_2 = X^{2^{n-1}} - X^{2^{n-2}} + 1$,
$f_3 = X^{2^{n-1}} + X^{2^{n-2}} + 1$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

●● **9.** Fie polinoamele $f_1, f_2 \in \mathbb{Z}[X]$. Determinați $f = f_1 \cdot f_2$ dacă:
a) $f_1 = \sum\limits_{k=0}^{n-1}(n-k)X^{n-k-1}$, $f_2 = (X-1)^2$;
b) $f_1 = \sum\limits_{k=0}^{2n-1}(-1)^k(2n-k)X^{2n-k-1}$, $f_2 = (X+1)^2$.

●● **10.** Demonstrați relația:
$$(X + 2X^2 + \ldots + nX^n)(1 - X)^2 = nX^{n+2} - (n+1)X^{n+1} + X, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

●● **11.** Determinați un polinom f de gradul al doilea și un polinom g de gradul întâi astfel încât să avem: $(X - 1)f + (X^2 + 1)g = -2X - 2$.

●●● **12.** Determinați $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 + X^3 + X^2 + aX + b$ știind că este pătratul unui polinom $g \in \mathbb{R}[X]$.

●● **13.** Se dau polinoamele $f = aX + b$ și $g = AX + B$. Arătați că dacă $f(g(X)) = g(f(X))$, atunci $(a - 1)(B - b) = b(A - a)$.

● **14.** Determinați $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ astfel încât grad f = grad $g = 1$ și
$(X^2 + 2X + 2)f + (X^2 + 3X + 3)g = 1$.

●● **15.** Arătați că:
a) $f + f + f = \hat{0}$, $\forall f \in \mathbb{Z}_3[X]$;
b) $(f + g)^3 = f^3 + g^3$, $\forall f, g \in \mathbb{Z}_3[X]$;
c) Calculați $(\hat{2}X^2 + X + \hat{1})^3$.

●●● **16.** Fie a, b, c trei numere reale distincte și polinoamele $f = (X - b)(X - c)$, $g = (X - a)(X - c)$ și $h = (X - a)(X - b)$. Dacă $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$, unde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

●●● **17.** Fie $f, g, h \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât grad $f = 3$, grad $g = 2$ și grad $h = 1$.
Dacă $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$, unde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

● **18.** Determinați $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ astfel încât $X^3 - 3X^2 - 2X + 11 = a(X - 2)^3 + b(X - 2)^2 + c(X - 2) + d$.

●● **19.** Arătați că:
a) $X^n - 1 = (X - 1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + X + 1)$, $n \in \mathbb{N}$.
b) $X^n + 1 = (X + 1)(X^{n-1} - X^{n-2} + \ldots - X + 1)$, n impar.

●●● **20.** Arătați că:
$$(f+g)^n = f^n + C_n^1 f^{n-1}g + \ldots + C_n^k f^{n-k}g^k + \ldots + g^n, n \in \mathbb{N}.$$

●● **21.** Determinați polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f \neq 0$, $f(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ astfel încât $f(X) = f(X + 1)$, unde $f(X + 1) = a_n(X + 1)^n + a_{n-1}(X + 1)^{n-1} + \ldots + a_1(X + 1) + a_0$.

●● **22.** Determinați $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ dacă grad f = grad $g = 1$, $f^2(X) + g^2(X) = X^2 + 1$ și $f(2)g(2) = 2$.

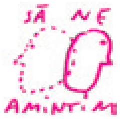
●● **23.** Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 2X^3 - 5X^2 + 3X - 4$. Determinați $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ astfel încât $f = a(X - 2)^3 + b(X - 2)^2 + c(X - 2) + d$.

●● **24.** Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ știind că există un polinom $g \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât $X^4 + X^3 + X^2 + aX + b = g^2(X)$.

Împărțirea cu rest a polinoamelor

Teorema împărțirii cu rest pentru polinoame

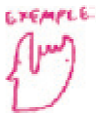
Inelul $K[X]$, unde K este corp comutativ, are proprietăți de natură aritmetică asemănătoare cu cele ale inelului $\mathbb{Z}$, al numerelor întregi.



Proprietățile aritmetice ale inelului $\mathbb{Z}$ au ca suport *teorema împărțirii cu rest* sau a *împărțirii euclidiene*. Amintim această teoremă în formularea următoare: *dacă b este un număr întreg,* $b > 0$, *atunci oricare ar fi* $a \in \mathbb{Z}$ *există* $q, r \in \mathbb{Z}$ *unic determinate astfel încât*:

$a = bq + r$ cu $0 \leqslant r < b$

Numerele q și r se numesc *câtul*, respectiv *restul* împărțirii euclidiene a lui a prin b.



1) Dacă $a = 37$ și $b = 5$, atunci $q = 7$ și $r = 2$
2) Dacă $a = -25$ și $b = 7$, atunci $q = -4$ și $r = 3$.
3) Dacă $a = 195$ și $b = 15$, atunci $q = 13$ și $r = 0$.

Teorema împărțirii cu rest pentru numere întregi este adevărată și în inelul $K[X]$, unde K este corp comutativ, în formularea următoare.

Teorema 1. Fie g un polinom din $K[X]$, $g \neq 0$. Oricare ar fi polinomul $f \in K[X]$, există polinoamele $q, r \in K[X]$ unic determinate astfel încât:

$f = gq + r$ cu grad $r <$ grad g, dacă $r \neq 0$.

Demonstrația cuprinde două etape: existența polinoamelor q și r și unicitatea lor.

Existența. Dacă $f = 0$, atunci putem lua $q = 0$ și $r = 0$.

Dacă $f \neq 0$ fie $n =$ grad f și $m =$ grad g, $f = a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0$, $g = b_mX^m + \ldots + b_1X + b_0$.

Dacă $n < m$ afirmația din enunț este adevărată dacă luăm $q = 0$ și $r = f$.

Presupunem $n \geqslant m$ și că afirmația din enunț este adevărată pentru polinomul $f_1 \in K[X]$, $f_1 \neq 0$ cu grad $f_1 < n$. Fie $f_1 \in K[X]$ definit prin

$$(1) \quad \boxed{f_1 = f - \frac{a_n}{b_m}X^{n-m}g},$$

unde cu $\frac{a_n}{b_m}$ se notează elementul $a_nb_m^{-1} \in K$.

Termenul principal al polinomului $\frac{a_n}{b_m}X^{n-m}g$ este $\frac{a_n}{b_m}X^{n-m}b_mX^m = a_nX^n$. Așadar polinoamele f și $\frac{a_n}{b_m}X^{n-m}g$ au același termen principal, deci grad $f_1 <$ grad $f = n$ când $f_1 \neq 0$.

Conform ipotezei de inducție există două polinoame $q_1, r_1 \in K[X]$ astfel încât

(2) $f_1 = gq_1 + r_1$ cu grad $r_1 <$ grad g, dacă $r_1 \neq 0$.

1) Scrieți teorema împărțirii cu rest (împărțirii euclidiene) pentru fiecare dintre exemplele următoare:

a)
$$\begin{array}{r|l} 37 & 5 \\ \cline{2-2} 35 & 5 \\ \hline =2 & \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r|l} 25 & 7 \\ \cline{2-2} 21 & 3 \\ \hline =4 & \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r|l} -25 & 7 \\ \cline{2-2} -28 & -4 \\ \hline =3 & \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r|l} 195 & 15 \\ \cline{2-2} 15 & 13 \\ \hline =45 & \\ 45 & \\ \hline == & \end{array}$$

2) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la g în cazurile:

a) $f = X^5 - 3X^2 + 2X + 1$, $g = X^2 + X$, $f, g \in \mathbb{Q}[X]$;

b) $f = 3X^2 + 5X + 1$, $g = \sqrt{3}X + 1$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$.

c) $f = \hat{3}X^2 + \hat{5}X + \hat{1}$, $g = \hat{3}X + \hat{1}$, $f, g \in \mathbb{Z}_7[X]$.

d) $f = X^3 + X^2 + X + \hat{1}$, $g = X^2 + \hat{1}$, $f, g \in \mathbb{Z}_2[X]$;

3) Fie polinoamele din $\mathbb{Z}[X]$

$f = X^6 - X^5 - X^4 + X^3 - 2X^2 + 5X - 4$

și $g = X^2 - 2X + 3$.

În acest caz câtul și restul împărțirii lui f la g sunt $X^4 + X^3 - 2X^2 - 6X - 8$, respectiv $7X + 20$.

Folosind (1) și (2) se obține $f = g\left(q_1 + \frac{a_n}{b_m}X^{n-m}\right) + r_1$ și rezultatul din enunț este adevărat dacă punem $q = q_1 + \frac{a_n}{b_m}X^{n-m}$ și $r = r_1$.

Unicitatea. Dacă $f = gq + r = gq' + r'$ cu $q, q', r, r' \in K[X]$, grad $r <$ grad g, grad $r' <$ grad g atunci $g(q - q') = r' - r$. Dacă $r' \neq r$, atunci $q \neq q'$ și avem $m >$ grad $(r' - r)$ = grad g + + grad $(q - q') \geqslant m$, deci $m > m$. Contradicție. Așadar $r = r'$, deci $g(q - q') = 0$ și cum $g \neq 0$, obținem $q - q' = 0$, de unde $q = q'$. ■

Observație. Demonstrația teoremei precedente oferă și un algoritm de calcul, adică o procedură de determinare efectivă a câtului q și restului r prin execuția de un număr finit (mai mic sau egal decât $n - m + 1$) de ori a pasului de la (1). Într-adevăr dacă $f_1 = 0$ sau $f_1 \neq 0$ cu grad $f_1 < m$, atunci $r = f_1$ și $q = \frac{a_n}{b_m}X^{n-m}$.
Dacă grad $f_1 = n_1 \geqslant m$ și $a_{n_1}^{(1)}$ este coeficientul dominant al lui f_1, atunci se aplică (1) lui $f = f_1$ și definim polinomul f_2,

$$f_2 = f_1 - \frac{a_{n_1}^{(1)}}{b_m}X^{n_1-m}g.$$

Avem $f = g\left(\frac{a_n}{b_m}X^{n-m} + \frac{a_{n_1}^{(1)}}{b_m}X^{n_1-m}\right) + f_2$ ș.a.m.d. până când se găsește un prim polinom $f_k = 0$ sau $f_k \neq 0$ și grad $f_k < m$.

Vom avea $q = \frac{a_n}{b_m}X^{n-m} + \frac{a_{n_1}^{(1)}}{b_m}X^{n_1-m} + \ldots + \frac{a_{n_k}^{(k)}}{b_m}X^{n_k-m}$ și $r = f_k$.

Această procedură de determinare a câtului q și restului r este cunoscută sub numele de *algoritmul împărțirii euclidiene* pentru polinoame având coeficienții într-un corp comutativ K.

Exerciții rezolvate.

1) Fie $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $f = 2X^5 + 9X^4 + 2X^3 - 17X^2 + 3X + 8$, $g = x^2 + 2x - 3$. Să determinăm câtul și restul împărțirii euclidiene a lui f prin g.

Soluție:

Avem $n = 5$ și $m = 2$. Folosind pasul (1) determinăm succesiv polinoamele $f_1, f_2, \ldots$ până când se obține primul polinom f_k astfel încât $f_k = 0$ sau $f_k \neq 0$ și grad $f_k < m = 2$. Avem $r = f_k$. În cazul nostru:

$$f_1 = f - \frac{2}{1}X^{5-2}g = 5X^4 + 8X^3 - 17X^2 + 3X - 8$$

$$f_2 = f_1 - \frac{5}{1}X^{4-2}g = -2X^3 - 2X^2 + 3X - 8$$

$$f_3 = f_2 - \frac{(-2)}{1}X^{3-2}g = 2X^2 - 3X - 8$$

$$f_4 = f_3 - \frac{2}{1}X^{2-2}g = -7X - 2.$$

Ca și în cazul împărțirii euclidiene a numerelor întregi, calculele precedente pot fi prezentate astfel:

4) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul g iar apoi scrieți teorema împărțirii cu rest, în fiecare dintre cazurile:

a) $f = 2X^5 + X^4 - 5X^3 - 8X + 1$, $g = X^2 - 3$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$.

b) $f = 2X^6 - 3X^4 + 2X^2 - 10X + 1$, $g = X^3 - X + 1$, $f, g \in \mathbb{Q}[X]$.

c) $f = iX^4 - (1+i)X^2 + 3iX - 1 - i$, $g = X - 2i$, $f, g \in \mathbb{C}[X]$.

5) Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 - aX^3 + (3a+7)X^2 - aX + 3$ să dea la împărțirea cu $X + 1$ restul 3.

6) Determinați a și b astfel încât restul împărțirii polinomului $f = X^4 + bX^3 + (b-2a)X^2 + 5X - 3a$ la polinomul $g = X^2 + X + 2$ să fie $X - 1$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$.

7) Determinați m, astfel încât restul împărțirii polinomului f la polinomul g să fie egal cu 0, dacă:

a) $f = X^3 + (m+1)X^2 + (m-1)X$, $g = 2X + 1$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $m \in \mathbb{R}$;

b) $f = \hat{m}X^3 + \hat{m}X + \hat{2}$, $g = X + \hat{3}$, $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$, $\hat{m} \in \mathbb{Z}_5$.

8) Descompuneți în factori în $K[X]$ polinoamele $f, g \in K[X]$, $f = X^4 + X^2 + 1$ și $g = (X^2 + X - 3)(X^2 + X - 1) + 1$ știind că:

a) $f, g \in \mathbb{Z}[X]$;

b) $f, g \in \mathbb{Q}[X]$;

c) $f, g \in \mathbb{C}[X]$.

Indicație.

a) $f = (X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d)$ cu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Efectuăm înmulțirea, apoi identificăm coeficienții și obținem $a = 1$, $c = -1$, $b = d = 1$.

$$
\begin{array}{lr|l}
f \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 2X^5+9X^4+2X^3-17X^2+3X-8 & X^2+2X-3=g \\ \cline{3-3}
2X^3g \ldots\ldots\ldots & \underline{2X^5+4X^4-6X^3} \qquad\qquad\quad & \\
f_1=f-2X^3g & 5X^4+8X^3-17X^2+3X-8 & \\
5X^2g \ldots\ldots\ldots\ldots & \underline{5X^4+10X^3-15X^2} \qquad\quad & \\
f_2=f_1-5X^2g \ldots & -2X^3-2X^2+3X-8 & \\
-2Xg \ldots\ldots\ldots\ldots & \underline{-2X^3-4X^2+6X} \quad & \\
f_3=f_2-(-2Xg) \ldots\ldots & 2X^2-3X-8 & \\
2g \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \underline{2X^2+4X-6} & \\
f_4=f_1-2g=r \ldots\ldots & -7X-2=r &
\end{array}
$$

Observație. Dacă $f, g \in \mathbb{Z}[X] \subset \mathbb{Q}[X]$ și coeficientul dominant al lui g este ± 1 (adică inversabil în $\mathbb{Z}$) atunci $q, r \in \mathbb{Z}[X]$ (vezi Exemplul 1).

2) Fie $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $f = 3X^5 + X^4 - 6X^2 + 5X - 4$ și $g = 2X^3 - X + 1$. Să determinăm câtul și restul împărțirii euclidiene a lui f prin g.

Soluție. Folosind spații libere pentru termenii care au coeficientul egal cu zero, avem:

$$
\begin{array}{l|l}
f = 3X^5 + X^4 \qquad\qquad - 6x^2 + 5X - 4 & 2X^3 - X + 1 = g \\ \hline
\underline{3X^5 \qquad - \frac{3}{2}X^3 + \frac{3}{2}X^2 \qquad\qquad} & \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{3}{4} = q \\
\quad X^4 + \frac{3}{2}X^3 - \frac{15}{2}X^2 + 5X - 4 & \\
\quad \underline{X^4 \qquad\quad - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X \qquad} & \\
\qquad \frac{3}{2}X^3 - 7X^2 + \frac{9}{2}X - 4 & \\
\qquad \underline{\frac{3}{2}X^3 \qquad\quad - \frac{3}{4}X + \frac{3}{4}} & \\
\qquad -7X^2 + \frac{21}{4}X - \frac{19}{4} = r &
\end{array}
$$

Observație. În exemplul al 2-lea, cu toate că f, g au coeficienții în $\mathbb{Z}$, q și r nu mai au coeficienții în $\mathbb{Z}$, ci în $\mathbb{Q}$, deoarece coeficientul dominant al lui g nu este inversabil în inelul $\mathbb{Z}$, dar este inversabil în $\mathbb{Q}$.

3) Fie $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = \hat{3}X^5 + \hat{4}X^4 + \hat{3}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{2}$, $g = \hat{2}X^2 + \hat{3}X + \hat{1}$.

Să determinăm câtul și restul împărțirii lui f prin g.

Soluție. Avem grad $f = 5$, grad $g = 2$. Iterând pasul (1) al teoremei anterioare, determinăm succesiv polinoamele f_1, f_2, ... până se obține primul polinom f_k astfel încât $f_k = 0$ sau $f_k \neq 0$ și grad $f_k < m$.

Altfel: $X^4 + X^2 + 1 =$
$= X^4 + 2X^2 + 1 - X^2 = (X^2+1)^2 - X^2 = \ldots$
Notăm $X^2 + X - 3 = y$ și avem
$g = y(y+2) + 1 = (y+1)^2 = \ldots$.

9) Verificați dacă polinomul $f = X^7 - 3X^6 + 2X^5 + 2X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 3X - 1$ împărțit la polinomul $g = X^2 - 2X + 1$ dă restul egal cu 0, $f, g \in \mathbb{R}[X]$.

10) Determinați relațiile dintre numerele reale m, n, p astfel încât polinomul $f = X^3 + mX + r$ să se împartă exact (adică cu restul egal cu 0) la polinomul $g = X^2 + pX + 1$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$.

Indicație. Efectuăm împărțirea și obținem condițiile: $m + p^2 - 1 = 0$ și $n + p = 0$.

11) Demonstrați că polinomul $X^5 - X^4 + 2X^3 + 1$ se împarte exact la polinomul $X^2 - X + 1$.

12) Ce condiție trebuie să îndeplinească numerele reale a, b și c pentru ca polinomul $X^4 + aX^2 + b$ să se împartă exact la polinomul $X^2 + X + c$?

13) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul $f = X^3 - 3X + aX + b$, să se împartă exact la polinomul $g = X - 1 - i$.

Indicație. $f(1 + i) = 0$ și obținem $a = 1$ și $b = 4$.

14) Să se afle câtul și restul împărțirii polinomului f și g, dacă:
$f = 6X^4 + 5X^3 - 10X^2 + 11X - 7$,
$g = 2X^2 + 3X - 2$.

15) Să se afle câtul și restul împărțirii polinomului f prin polinomul g:
$f = iX^3 - iX^2 + (3 + 4i)X + 2 - i$,
$g = X + 2i$, unde $f, g \in \mathbb{C}[X]$.

$$f_1 = f - \hat{3}\cdot\hat{2}^{-1}X^{5-2}g = \hat{2}X^4 + \hat{4}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{2}$$
$$f_2 = f_1 - \hat{2}\cdot\hat{2}^{-1}X^{4-2}g = X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{2}X + \hat{2}$$
$$f_3 = f_2 - \hat{1}\cdot\hat{2}^{-1}X^{3-2}g = \hat{3}X^2 + \hat{4}X + \hat{2}$$
$$f_4 = f_3 - \hat{3}\cdot\hat{2}^{-1}X^{2-2}g = \hat{2}X + \hat{3}$$

Rezultă că $r = f_4 = \hat{2}X + \hat{3}$ și

$$q = \hat{3}\hat{2}^{-1}X^{5-2} + \hat{2}\hat{2}^{-1}X^{4-2} + \hat{1}\cdot\hat{2}^{-1}X^{3-2} + \hat{3}\cdot\hat{2}^{-1} = \hat{4}X^3 + X^2 + \hat{3}X + \hat{4}.$$

Ca și în cazul împărțirii cu rest pentru numere întregi, calculele precedente pot fi dispuse ca mai jos:

f..........................	$\hat{3}X^5+\hat{4}X^4+\hat{3}X^3+\hat{3}X^2+\hat{2}X+2$	$\hat{2}X^2+\hat{3}X+\hat{1}=g$
$\hat{4}x^3g$.....................	$\hat{3}X^5+\hat{2}X^4+\hat{4}X^3$	$\hat{4}X^3+X^2+\hat{3}X+\hat{4}=q$
$f_1=f-\hat{4}X^3g$.....	$/\quad \hat{2}X^4+\hat{4}X^3+\hat{3}X^2+\hat{2}X+\hat{2}$	
X^2g.....................	$\hat{2}X^4+\hat{3}X^3+\ X^2$	
$f_2=f_1-X^2g$.......	$/\quad X^3+\hat{2}X^2+\hat{2}X+\hat{2}$	
$\hat{3}Xg$.....................	$X^3+\hat{4}X^2+\hat{3}X$	
$f_3=f_2-\hat{3}Xg$.......	$/\quad \hat{3}X^2+\hat{4}X+\hat{2}$	
$\hat{4}g$.......................	$\hat{3}X^2+\hat{2}X+\hat{4}$	
$f_4=f_3-\hat{4}g=r$....	$/\quad \hat{2}X+\hat{3}$	

4) Fie $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = X^4 + \hat{3}X^3 + X^2 + \hat{2}X + \hat{4}$, $g = \hat{2}X^2 + \hat{3}X + \hat{1}$. Să determinăm câtul și restul împărțirii euclidiene a lui f prin g.

Soluție. Asupra coeficienților lui f și g operăm cu operațiile de adunare și înmulțire din corpul $\mathbb{Z}_5$ al claselor de resturi modulo 5.

$$\begin{array}{l|l}
f = X^4+\hat{3}X^3+X^2+\hat{2}X+\hat{4} & \hat{2}X^2+\hat{3}X+\hat{1} \\ \hline
\quad X^4+\hat{4}X^3+\hat{3}X^2 & \hat{3}X^2+\hat{2}X+\hat{1}=q \\
\quad / \quad \hat{4}X^3+\hat{3}X^2+\hat{2}X+\hat{4} & \\
\qquad\quad \hat{4}X^3+\hat{2}X^2+\hat{2}X & \\
\qquad\quad / \quad \hat{2}X^2+\hat{0}X+\hat{4} & \\
\qquad\qquad\quad \hat{2}X^2+\hat{3}X+\hat{1} & \\
\qquad\qquad\quad / \quad \hat{2}X+\hat{3}=r &
\end{array}$$

Așadar $q = \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{1}$, $r = \hat{2}X + \hat{3}$.

16) Fie polinoamele $f, g, h \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 - X^3 + aX^2 + bX + c$, $g = X^2 + d$ și $h = X^2 - d$.

Să se determine numerele reale a, b, c, d astfel încât restul împărțirii lui f la g să fie X, iar f împărțit la h să dea restul $-X$.

17) Să se determine $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât restul împărțirii polinomului

$f = 2X^5 + 9X^4 + 2X^3 - 17X^2 + \alpha X + \beta$

prin polinomul $g = X^2 + X - 3$ să fie egal cu zero.

Indicație. Se efectuează împărțirea și se pune condiția ca restul să fie egal cu zero.

18) Să se determine restul împărțirii polinomului $f = X^{12n+4} - X^{6n+2} + 1$ prin polinomul $g = X^2 - X + 1$.

Indicație. Notăm cu $\varepsilon_k, k = \overline{1,2}$ rădăcinile polinomului f. Avem $\varepsilon_k^3 = -1$, $k = \overline{1,2}$. Calculăm $f(\varepsilon_1)$ și $f(\varepsilon_2)$.

19) Se consideră polinomul $f \in \mathbb{Z}[X]$, $f = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + 3$

Polinomul f împărțit la $X^2 - 1$ dă restul r_1 și împărțit la $X^2 + 1$ dă restul r_2. Să se determine $a, b, c \in \mathbb{Z}$ știind că

$$r_1 r_2 = 5X^2 - 28X + 15.$$

Exerciții rezolvate.

1) Determinați polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$ de gradul al 3-lea știind că împărțit la $X^2 - 3X$ obținem restul $6X - 15$ și împărțit la $X^2 - 5X + 8$ obținem restul $2X - 7$.

Soluție. Câturile împărțirii euclidiene ale lui f prin $X^2 - 3X$ și $X^2 - 5X + 8$ vor fi polinoame având grad 1, de exemplu $aX + b$, respectiv $cX + d$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ și $c \neq 0$.

Avem $f = (X^2 - 3X)(aX + b) + 6X - 15 = (X^2 - 5X + 8)(cX + d) + 2X - 7$ de unde:

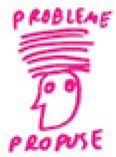
$aX^3 + (b - 3a)X^2 + (6 - 3b)X - 15 = cX^3 + (d - 5c)X^2 + (8c - 5d + 2)X - 7 + 8d.$

Prin identificarea coeficienților se obține $a = c$, $b - 3a = d - 5c$, $6 - 3b = 8c - 5d + 2$ și $-15 = -7 + 8d$, de unde: $a = c = 1$, $d = -1$, $b = -3$. Așadar $f = (X^2 - 3X)(X - 3) + 6X - 15 = X^3 - 6X^2 + 15X - 15$.

2) Arătați că restul împărțirii polinomului f prin $(X-a)(X-b)$, unde $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$, este $r = \dfrac{(X-a)f(b)-(X-b)f(a)}{b-a}$.

Soluție. Conform teoremei împărțirii cu rest, există și sunt unice polinoamele q și r cu proprietățiile: (1) $f = (X-a)(X-b)q + r$; (2) $\operatorname{grad} r < \operatorname{grad}(X-a)(X-b)$.

Deducem că $r = mX + n$, $m, n \in \mathbb{C}$. Din (1) rezultă că $f(x) = (x-a)(x-b)\cdot q(x) + r(x)$, $\forall x \in \mathbb{C}$. Deoarece $f(a) = r(a)$ și $f(b) = r(b)$, rezultă sistemul: $\begin{cases} ma + n = f(a) \\ mb + n = f(b) \end{cases}$ cu soluțiile $m = \dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$, $n = \dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$ și apoi $r = \dfrac{(X-a)f(b)-(X-b)f(a)}{b-a}$.



1. Determinați câtul și restul împărțirii euclidiene a lui f prin g dacă:
a) $f = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$ și $g = X^2 - 3X + 1$;
b) $f = X^3 - 3X^2 - X - 1$ și $g = 3X^2 - 2X + 1$.

2. Determinați câtul și restul împărțirii euclidiene a lui f prin g unde $f, g \in \mathbb{C}[X]$, dacă:
a) $f = X^4 + 2iX^3 + (1 + 2i)X^2 + 2iX + 1$ și $g = X^2 + X + 1$;
b) $f = iX^4 - (1 + i)X^2 + 3iX - 1 - i$ și $g = X + 2i$.

3. Fie $g \in \mathbb{C}[X]$, $g = X^2 + bX + c$. Determinați $b, c \in \mathbb{C}$ astfel încât restul împărțirii euclidiene a polinomului $f = X^4 + 1$ prin g să fie egal cu 0.

4. Determinați $a, b \in \mathbb{C}$ astfel încât polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + 1$ împărțit la polinomul $g = X^2 + X + 1$ să dea restul $X + i$.

5. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât restul împărțirii polinomului $f = 2X^5 + 9X^4 + 2X^3 - 17X^2 + aX + b$ prin polinomul $g = X^2 + 2X - 3$ să fie egal cu 0.

6. Fie $f, g \in \mathbb{Z}_7[X]$, $f = \hat{6}X^4 + \hat{6}X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{6}X + \hat{5}$, $g = \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{1}$. Determinați câtul și restul împărțirii lui f prin g.

7. Fie $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = \hat{3}X^5 + X^3 + \hat{2}X + \hat{4}$, $g = \hat{2}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{1}$. Determinați câtul și restul împărțirii lui f prin g.

8. Fie $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $f = 2X^4 - 3X^2 + aX + b$, $g = X^3 - 2X + 3$. Determinați restul împărțirii lui f prin g.

9. Fie $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{a}X + \hat{b}$. Determinați $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_3$ astfel încât f să fie divizibil prin polinomul $g = X^2 + X + \hat{1}$.

10. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Dacă restul împărțirii lui n prin m este r, atunci arătați că restul împărțirii polinomului $f = X^n - 1$ prin polinomul $g = X^m - 1$ este $X^r - 1$.

11. Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f prin polinomul g dacă $f = 6X^4 + 5X^3 - 10X^2 + 11X - 7$, $g = 2X^2 + 3X - 2$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$.

12. Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f prin polinomul g dacă $f = iX^3 - iX^2 + (3 + 4i)X + 2 - i$, $g = X + 2i$; $f, g \in \mathbb{C}[X]$.

Calculul valorilor unui polinom. Schema lui Horner

Relația de divizibilitate cunoscută pentru numere întregi se definește și pentru polinoame. Dacă $f, g \in K[X]$, $g \neq 0$, spunem că polinomul g *divide* polinomul f și scriem $g \mid f$, dacă există un polinom $q \in K[X]$ astfel încât $f = gq$. În acest caz spunem că g este *divizor* al lui f sau că f este *multiplu* de g sau că f *se divide* prin g.

Cum câtul și restul la împărțirea euclidiană sunt unic determinate, rezultă că polinomul $g \neq 0$ divide polinomul f dacă și numai dacă restul împărțirii euclidiene a lui f prin g este egal cu zero. În acest paragraf vom prezenta rezultate privind divizorii de forma $X - \alpha$ cu $\alpha \in K$. Studiul general al relației de divizibilitate în inelul $K[X]$, unde K este corp comutativ, se va face în paragraful următor.

Fie $f \in K[X]$, $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$ și $\alpha \in K$.

Elementul $f(\alpha) \in K$, $f(\alpha) \overset{\text{def}}{=} a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_n\alpha^n$ se numește *valoarea* polinomului f în $\alpha \in K$. Se mai spune că elementul $f(\alpha) \in K$ s-a obținut *atribuind* nedeterminatei X valoarea $\alpha \in K$.

EXEMPLE

1) Dacă $f = 2 - 3X + X^2 \in \mathbb{Q}[X]$ și $\alpha = 2$, atunci $f(\alpha) = f(2) = 2 - 3 \cdot 2 + 2^2 = 0$.

2) Dacă $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = 3 + (2 - i)X + iX^2$ și $\alpha = 3 - 2i$, atunci $f(\alpha) = f(3 - 2i) = 3 + (2 - i)(3 - 2i) + i(3 - 2i)^2 = 19 - 2i$.

3) Dacă $f = X^2 + \hat{2}X + \hat{2} \in \mathbb{Z}_3[X]$, atunci $f(\hat{0}) = \hat{2}$, $f(\hat{1}) = \hat{2}$, $f(\hat{2}) = \hat{1}$.

Teorema 1. Fie K un corp comutativ $f, g \in K[X]$ și $\alpha \in K$. Valoarea sumei (produsului) polinoamelor f, g în α este egală cu suma (respectiv produsul) valorilor lui f și g în α, adică $(f + g)(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha)$, $(fg)(\alpha) = f(\alpha)g(\alpha)$.

Demonstrație. Dacă $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots$, $g = b_0 + b_1X + b_2X^2 + \ldots$, avem:

$$f(\alpha) + g(\alpha) = (a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots) + (b_0 + b_1\alpha + b_2\alpha^2 + \ldots) =$$

$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\alpha + (a_2 + b_2)\alpha^2 + \ldots = (f + g)(\alpha) \text{ și}$$

$$f(\alpha)g(\alpha) = (a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots)(b_0 + b_1\alpha + b_2\alpha^2 + \ldots) =$$

$$= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)\alpha + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)\alpha^2 + \ldots = (fg)(\alpha). \ \blacksquare$$

1) Arătați că $X^3 - 4X^2 + X + 2 = (X - 1)(X^2 - 3X - 2)$.

2) Arătați că polinomul $f = X^3 - 4X^2 + X + 2$ este divizibil prin $g = X - 1$, unde $f, g \in \mathbb{R}[X]$.

3) Arătați că polinomul $g = X - 1$ este divizor al polinomului $f = X^3 - 4X^2 + X + 2$.

4) Arătați că polinomul $f = X^3 - 4X^2 + X + 2$ este multiplu de $g = X^2 - 3X - 2$, unde $f, g \in \mathbb{R}[X]$.

5) Fie $f = X^3 - X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$ și $\alpha = \frac{1}{2}$. Calculați $f(\alpha)$.

6) Fie $f = 2X^5 - 2X^2 + X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ și $\alpha = -\frac{1}{2}$. Calculați $f(\alpha)$.

7) Fie $f = X^2 - 3X + 1 \in \mathbb{C}[X]$ și $\alpha = 1 + i$.

a) Calculați $f(\alpha)$.

b) Calculați $f(\bar{\alpha})$, unde $\bar{\alpha} = 1 - i$.

c) Verificați relația $f(\bar{\alpha}) = \overline{f(\alpha)}$.

8) Fie polinoamele $f, g, \in \mathbb{Z}_4[X]$, $f = X^3 + \hat{2}X + \hat{2}$, $g = \hat{2}X^3 + X + \hat{1}$.

a) Calculați $f(\hat{1})$ și $g(\hat{1})$.

b) Calculați $f + g$ și $(f + g)(\hat{1})$.

c) Verificați dacă $f(\hat{1}) + g(\hat{1}) = (f + g)(\hat{1})$.

9) Fie $f = a_nX^n + \ldots + a_0$ un polinom având coeficienții în $\mathbb{C}$. Arătați că:

a) termenul liber a_0 este egal cu $f(0)$;

b) suma coeficiențiilor polinomului f este egală cu $f(1)$;

c) suma coeficienților de rang par $a_0 + a_2 + \ldots$ ai lui f este egală cu $\frac{f(1) + f(-1)}{2}$;

d) suma coeficienților de rang impar $a_1 + a_3 + \ldots$ ai lui f este egală cu $\frac{f(1) - f(-1)}{2}$.

Definiție. Fie K un corp comutativ și $f \in K[X]$. Un element $\alpha \in K$ se numește *rădăcină* a polinomului f dacă $f(\alpha) = 0$.

1) Dacă $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = -2 + X + X^2$, atunci $f(1) = 0$ și $f(-2) = 0$, deci 1 și -2 sunt rădăcini (din corpul $\mathbb{R}$) ale polinomului f.

2) Fie $f \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = X^4 + \hat{3}X^2 + \hat{2}$.

Avem $f(\hat{0}) = \hat{2}$, $f(\hat{1}) = \hat{1}$, $f(\hat{2}) = \hat{0}$, $f(\hat{3}) = \hat{0}$ și $f(\hat{4}) = \hat{1}$. Rezultă că $\hat{2}$ și $\hat{3}$ sunt rădăcini (din corpul $\mathbb{Z}_5$) ale polinomului f.

Rezultatele din următoarele două teoreme arată că pentru un polinom $f \in K[X]$ și $\alpha \in K$ putem folosi algoritmul împărțirii euclidiene a lui f prin $X - \alpha$ pentru a stabili dacă α este rădăcină a lui f.

Teorema 2 (Teorema restului). Dacă $f \in K[X]$ și $\alpha \in K$, atunci restul împărțirii euclidiene a lui f prin $X - \alpha$ este egal cu $f(\alpha)$.

Demonstrație

Evident restul împărțirii lui f prin $X - \alpha$ este un polinom constant. Așadar există $q \in K[X]$ și $r \in K$ astfel încât $f(X) = (X - \alpha)q(X) + r$.

Evaluând în α polinoamele care intervin în egalitatea precedentă și ținând cont de rezultatul din *Teorema 1*, rezultă că $f(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) + r = r$. ■

Să observăm că polinomul $f \in K[X]$ se divide prin $X - \alpha$, $\alpha \in K$ dacă și numai dacă restul împărțirii euclidiene a lui f prin $X - \alpha$ este egal cu zero. Aplicând *Teorema 2*, obținem următoarea teoremă:

Teorema 3 (Teorema factorului, Bézout)

Polinomul $f \in K[X]$ se divide prin polinomul $X - \alpha$, $\alpha \in K$ dacă și numai dacă $f(\alpha) = 0$. Altfel spus, $X - \alpha$ este divizor al polinomului f dacă și numai dacă α este rădăcină a lui f.

Teorema precedentă poate fi generalizată. Astfel:

Teorema 4. Fie $f \in K[X]$ și $\alpha, \beta \in K$, $\alpha \neq \beta$. Polinomul f se divide prin $(X - \alpha)(X - \beta)$ dacă și numai dacă $f(\alpha) = 0$ și $f(\beta) = 0$.

Demonstrație. Dacă f se divide prin $(X - \alpha)(X - \beta)$, atunci există $q \in K[X]$ astfel încât $f(X) = (X - \alpha)(X - \beta)q(X)$, de unde $f(\alpha) = 0$ și $f(\beta) = 0$.

Reciproc, presupunem că $f(\alpha) = 0$ și $f(\beta) = 0$.

Aplicând teorema factorului rezultă $f(X) = (X - \alpha)g(X)$ cu $g \in K[X]$. Avem $0 = f(\beta) = (\beta - \alpha)g(\beta)$ și cum $\beta - \alpha \neq 0$ rezultă că $g(\beta) = 0$. Aplicând din nou teorema factorului rezultă că $g = (X - \beta)q$ cu $q \in K[X]$ de unde $f = (X - \alpha)(X - \beta)q$. ■

10) Fie $f = X^2 - 7X + 10$, $f \in \mathbb{R}[X]$.
a) Calculați $f(2)$.
b) Calculați $f(5)$.
c) Calculați $f(0)$.
d) Care sunt rădăcinile reale ale polinomului f?

11) Fie $f = 3X^2 + 6X$, $f \in \mathbb{R}[X]$.
a) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $3x^2 + 6x = 0$.
b) Calculați $f(0)$.
c) Calculați $f(-2)$.
d) Care sunt rădăcinile reale ale polinomului f?

12) Fie $f = X^3 + \hat{1}$, $f \in \mathbb{Z}_2[X]$.
a) Calculați $f(\hat{0})$.
b) Calculați $f(\hat{1})$.
c) Care sunt rădăcinile polinomului f în $\mathbb{Z}_2$?

13) Fie $f = X^3 + \hat{1}$, $f \in \mathbb{Z}_3[X]$.
a) Calculați $f(\hat{0})$
b) Calculați $f(\hat{1})$
c) Calculați $f(\hat{2})$.
d) Care sunt rădăcinile polinomului f în $\mathbb{Z}_3$?

14) Fie $f = X^3 + \hat{1}$, $f \in \mathbb{Z}_4[X]$.
a) Calculați $f(\hat{0})$
b) Calculați $f(\hat{1})$
c) Calculați $f(\hat{2})$
d) Calculați $f(\hat{3})$.
e) Care sunt rădăcinile polinomului f în $\mathbb{Z}_4$?

15) Calculați restul împărțirii polinomului $f = X^4 - X^3 + X^2 - 2X - 1$ prin polinomul g dacă:
a) $g = X - 2$; b) $g = X + 2$;
c) $g = X - 1$; d) $g = X + 1$.

16) Calculați restul împărțirii polinomului $f = X^3 - 2X^2 - iX + 1 - i$ prin polinomul g dacă:
a) $g = X + i$; b) $g = X - i$;
c) $g = X + 1$; d) $g = X - 1$.

17) Fie $f \in \mathbb{R}[X]$ și $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ astfel încât $f(a) = f(b) = 0$. Arătați că f se divide prin $(X - a)(X - b)$. Generalizare.

Indicație. $f(a) = 0$, $f = (X - a) \cdot g$,
$f(b) = 0$, $g(b) = 0$, $g(X - b) \cdot q$;
$f = (X - a)(X - b) \cdot q$.
$(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \ldots (X - \alpha_n)$. Inducție.

1) Polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 - 2X^3 + X^2 - X - 2$ se divide prin $X - 2$. Într-adevăr
$f(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^3 + 2^2 - 2 - 2 = 0$.

2) Polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^5 + X^3 + 2X^2 + 2$ se divide prin $X^2 + 1$.

Avem $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ și $i \neq -i$. Dar $f(i) = i^5 + i^3 + 2i^2 + 2 = 0$, $f(-i) = (-i)^5 + (-i)^3 + 2(-i)^2 + 2 = 0$ și deci f se divide prin $(X - i)(X + i) = X^2 + 1$.

18) Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$. Determinați restul împărțirii polinomului f prin polinomul g în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) $f = X^4 - 2X^3 - X^2 + 6X - 1$, $g = X - 1$;

b) $f = -X^5 + (2+i)X^3 - iX^2 + X - 1$,
$g = X + 1 - 2i$;

c) $f = 4X^3 + 6X^2 - 7X + 9$,
$g = 2X + 1$.

Exercițiu rezolvat. Determinați un polinom de grad minim care împărțit la $X + i$ să dea restul $2i$ și împărțit la $X - i$ să dea restul $-2i$.

Soluție. Fie f polinomul căutat. Evident $\operatorname{grad} f \geqslant 1$.

Cercetăm dacă există f, cu $\operatorname{grad} f = 1$, care să verifice condițiile problemei.

Fie $f = aX + b$. Avem condițiile: $f(-i) = 2i$ și $f(i) = -2i$ și obținem $\begin{cases} -ai + b = 2i \\ ai + b = -2i \end{cases}$ cu soluțiile $b = 0$ și $a = -2$. Deci polinomul căutat este $f = -2X$.

Schema lui Horner

Fie $f \in K[X]$, $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ și $\alpha \in K$. Pentru a evalua polinomul f în $\alpha \in K$ calculăm mai întâi puterile lui α, anume $\alpha^2 = \alpha\alpha$, $\alpha^3 = \alpha^2\alpha$, ..., $\alpha^n = \alpha^{n-1}\alpha$ (în total $n - 1$ înmulțiri). Calculăm apoi produsele $a_n\alpha^n$, $a_{n-1}\alpha^{n-1}$, ..., $a_1\alpha$ (în total n înmulțiri) și în final efectuăm suma (n adunări):

$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0 = f(\alpha)$.

Cu această procedură pentru calculul lui $f(\alpha)$ sunt necesare $2n - 1$ înmulțiri și n adunări. Polinomul $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0 \in K[X]$, definit în acest manual ca expresie formală, precizează „*programul de calcul*” care aplicat fiecărui element $\alpha \in K$ conduce la valoarea $f(\alpha)$.

După cum vom constata în continuare, o procedură mai avantajoasă se va dovedi a fi algoritmul împărțirii euclidiene a lui f prin $X - \alpha$; prin n înmulțiri și n adunări vom obține atât restul $r = f(\alpha)$ cât și coeficienții câtului.

Dacă $\operatorname{grad} f = n$, $f = a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0$, atunci câtul q are gradul $n - 1$, $q = c_{n-1}X^{n-1} + \ldots + c_1X + c_0$.

Putem scrie:

$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0 = (X - \alpha)(c_{n-1}X^{n-1} + \ldots + c_1X + c_0) + r$.

19) Utilizând schema lui Horner, determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul g în fiecare dintre cazurile:

a) $f = 2X^4 - 3X^3 + 5X^2 - 7X + 9$, $g = X - 1$;

b) $f = 4X^5 - X^3 + 2X - 1$, $g = X + 2$;

c) $f = (1+i)X^3 - (2-i)X^2 + X - 3 + i$,
$g = X + 2 + i$.

20) Utilizând schema lui Horner, determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul g în fiecare dintre cazurile:

a) $f = 2X^5 - 5X^3 - 8X$,
$g = X + 3$;

b) $f = X^5$,
$g = X - 1$.

c) $f = X^4 + X^3 - 4X^2 + 5X - 3$,
$g = (X - 1)(X + 3)$;

d) $f = X^4 - 3iX^3 - 4X^2 + 5iX - 1$,
$g = X - 1 - 2i$;

e) $f = X^3 + \sqrt{2}X^2 + 2X + 2\sqrt{2}$,
$g = X + \sqrt{2}$.

Efectuând calculele din membrul drept al egalității precedente obținem:

$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0 = c_{n-1}X^n + (c_{n-2} - \alpha c_{n-1})X^{n-1} +$ $+ ... + (c_0 - \alpha c_1)X + r - \alpha c_0$ și identificând coeficienții obținem sucesiv: $c_{n-1} = a_n$

$c_{n-2} = a_{n-1} + c_{n-1}\alpha = a_{n-1} + a_n\alpha$

$c_{n-3} = a_{n-2} + c_{n-2}\alpha = a_{n-2} + a_{n-1}\alpha + a_n\alpha^2.$

...

$c_0 = a_1 + c_1\alpha = a_1 + a_2\alpha + ... + a_{n-1}\alpha^{n-2} + a_n\alpha^{n-1}.$

$r = a_0 + c_0\alpha = a_0 + a_1\alpha + ... + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_n\alpha^n = f(\alpha)$.

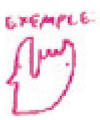
Așadar $c_{n-1}, c_{n-2}, ..., c_1, c_0$ și r se calculează succesiv (în această ordine) în funcție de $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ și α (cunoscuți) prin formulele:

$c_{n-1} = a_n, c_{n-2} = a_{n-1} + c_{n-1}\alpha, ..., c_0 = a_1 + c_1\alpha,$
$r = a_0 + c_0\alpha.$

Calculele de mai sus pot fi efectuate folosind un tabel cu două linii. În prima linie sunt trecuți coeficienții lui f în ordinea $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$, iar în a doua linie sunt inserați, pe măsură ce sunt calculați cu formulele precedente, coeficienții câtului $c_{n-1}, c_{n-2}, ..., c_1, c_0$ și restul r.

a_n	a_{n-1}	...	a_{i+1}	...	a_1	a_0	
c_{n-1}	c_{n-2}	...	c_i	...	c_0	r	α

Se observă că $c_{n-1} = a_n$, iar pentru $i < n - 1$, c_i se află adunând la a_{i+1} (care se află deasupra sa) coeficientul c_i (deja determinat) înmulțit cu α. Această modalitate de calcul este cunoscută sub numele de schema lui Horner.



1) Utilizând schema lui Horner, determinați câtul și restul împărțirii polinomului $f = X^4 - 3X^3 + 5X^2 - 3X + 2$ la $X - 2$.

X^4	X^3	X^2	X	X^0	
1	−3	5	−3	2	
1	−1	3	3	8	2
b_3	b_2	b_1	b_0	r	

Deci câtul este $c = X^3 - X^2 + 3X + 3$ și restul este $r = 8$.

2) Utilizînd schema lui Horner, determinați câtul și restul împărțirii polinomului $f = X^4 - iX^3 - (1+i)X + i$ la $X + i$.

X^4	X^3	X^2	X	X^0	
1	$-i$	0	$-1-i$	i	
1	$-2i$	-2	$i-1$	$2i+1$	$-i$
b_3	b_2	b_1	b_0	r	

Avem $c = X^3 - 2iX^2 - 2X + i - 1$ și $r = 2i + 1$.

21) Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul $f = X^4 - aX^3 + (3a+7)X^2 - aX + 3$ să dea la împărțirea cu $X + 1$ restul 3.

22) Determinați a și b astfel încât restul împărțirii polinomului $f = X^4 + bX^3 + (b-2a)X^2 + 5X - 3a$ la polinomul $X^2 + X + 2$ să fie $X - 1$.

23) Fie $f = X^{300} + X^{200} + X^{100} + 1$. Determinați restul împărțirii lui f la $X(X^2 - 1)$.

24) a) Un polinom împărțit prin $X - 1$, $X + 1$, $X + 4$ dă resturile 15, 7 și respectiv –80. Determinați restul împărțirii prin $(X-1)(X+1)(X-4)$.
b) Un polinom împărțit la $X - 1$, $X + 1$, $X - 2$ dă resturile 2, 6 și respectiv –3. Determinați restul împărțirii prin $(X-1)(X+1)(X-2)$.

25) Determinați polinomul cu coeficienți raționali de grad minim, care împărțit la $X^2 + X - 2$ dă restul $2X - 3$ și împărțit la $X^2 - X + 2$ dă restul $2X - 3$.

26) Se consideră polinomul $f = X^{2n} + X^n + 1$, iar $C_1(X)$ și $C_2(X)$ câturile împărțirii lui f la $X - 1$ respectiv $X + 1$. Arătați că $C_1(-1) = C_2(1)$.

27) a) Fie f un polinom cu proprietatea $(x+1)f(x) - (x-1)f(x+3) = x^2 - 3x + 4$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Determinați restul împărțirii polinomului f prin $(X-1)(X-2)$.
b) Fie f un polinom cu proprietatea $xf(x+1) + (x+2)f(x+3) = -x^2 + 2004$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Determinați restul împărțirii polinomului f prin $(X-3)(X+1)$.

Exerciții rezolvate.

1) Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 2X^4 - 2X^3 - 15X^2 + 10X + 3$. Calculați $f(3)$ folosind definiția și apoi cu ajutorul schemei lui Horner.

Soluție. Avem $f(3) = 2 \cdot 3^4 - 2 \cdot 3^3 - 15 \cdot 3^2 + 10 \cdot 3 + 3 = 162 - 54 - 135 + 30 + 3 = 6$.

Folosind schema lui Horner, avem

2	–2	–15	10	3	
2	4	–3	1	6	3

Rezultă că $f(3) = 6$. Se obține și câtul împărțirii lui f prin $X - 3$, $q = 2X^3 + 4X^2 - 3X + 1$.

2) Determinați câtul împărțirii polinomului $f = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - X + 1$ la polinomul $(X-1)(X-2)$, utilizând schema lui Horner.

Soluție. Conform teoremei împățirii cu rest, putem scrie: $f = (X-1)q_1 + r_1$, $\text{grad}\, r_1 = 0$, $q_1 \in \mathbb{C}[X]$ și $q_1 = (X-2)q_2 + r_2$, $\text{grad}\, r_2 = 0$, $q_2 \in \mathbb{C}[X]$.

Rezultă $f = (X-1)(X-2)q_2 + r_2(X-1) + r_1 = (X-1)(X-2)q_2 + r_2X + r_1 - r_2$ de unde deducem, ținând seama de $\text{grad}(r_2X + r_1 - r_2) < \text{grad}(X-1)(X-2)$, că q_2 reprezintă câtul cerut. Însă q_2 reprezintă câtul împărțirii lui q_1 la $X - 2$, unde q_1 este câtul împărțirii lui f la $X - 1$. Prin urmare q_2 poate fi determinat aplicând de două ori schema lui Horner:

X^4	X^3	X^2	X	X^0	
1	–2	3	–1	1	
1	–1	2	1	2	1
X^3	X^2	X	X^0		
1	–1	2	1		
1	1	4	9		2
b_2	b_1	b_0			

Obținem $q_2 = X^2 + X + 4$, care reprezintă câtul cerut.

3) Determinați $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât polinmul $f = X^3 - X^2 + \lambda X + 2$ să admită ca rădăcină pe $\alpha = -2$.

Soluție. Folosind schema lui Horner, avem:

1	–1	λ	2	
1	–3	$\lambda + 6$	$-2\lambda - 10$	–2

Rezultă că $r = -2\lambda - 10 = f(-2)$. Trebuie ca $f(-2) = 0$, adică $-2\lambda - 10 = 0$, de unde $\lambda = -5$.

4) Fie $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^3 - 9X^2 + 25X - 17$. Să se determine $r_0, r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ astfel încât $f = (X-2)^3 + r_2(X-2)^2 + r_1(X-2) + r_0$ (dezvoltarea lui f după puterile lui $X - 2$).

Soluție. Putem scrie:

$f = (X-2)q_0 + r_0$ cu $q_0 = (X-2)^2 + r_2(X-2) + r_1$

$q_0 = (X-2)q_1 + r_1$ cu $q_1 = (X-2) + r_2$

$q_1 = (X-2)q_2 + r_2$ cu $q_2 = 1$

Așadar $r_0 = f(2)$, $r_1 = q_0(2)$, $r_2 = q_1(2)$, deci pentru a determina numerele r_0, r_1, r_2, este necesar să determinăm polinoamele q_0 și q_1 și valorile $f(2)$, $q_0(2)$ și $q_1(2)$.

Calculele pot fi organizate astfel:

f				
q_0			r_0	2
q_1		r_1	2	
q_2	r_2	2		

sau explicit

1	–9	25	–17	
1	–7	11	5	2
1	–5	1	2	
1	–3	2		

Rezultă că $r_0 = 5$, $r_1 = 1$ și $r_2 = -3$, de unde $f = (X-2)^3 - 3(X-2)^2 + (X-2) + 5$.

5) Fie $f \in K[X]$, $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$ și $f' \overset{\text{def}}{=} a_1 + 2a_2X + \ldots + na_nX^{n-1}$ (*derivata formală* a polinomului f). Arătați că f se divide prin $(X - \alpha)^2$ dacă $f(\alpha) = 0$ și $f'(\alpha) = 0$.

Soluție. Avem $f(X) = (X - \alpha)q(X) + f(\alpha)$, deci $f(X) - f(\alpha) = (X - \alpha)q(X)$.

Dar $f(X) - f(\alpha) = a_n(X^n - \alpha^n) + a_{n-1}(X^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \ldots + a_1(X - \alpha) =$

$= (x - \alpha)\left(a_n(X^{n-1} + X^{n-2}\alpha + \ldots + \alpha^{n-1}) + a_{n-1}\left(X^{n-2} + X^{n-3}\alpha + \ldots + \alpha^{n-2}\right) + \ldots + a_2(X + \alpha) + a_1\right)$.

Rezultă că, $q = a_n(X^{n-1} + X^{n-2}\alpha + \ldots + \alpha^{n-1}) + a_{n-1}\left(X^{n-2} + X^{n-3}\alpha + \ldots + \alpha^{n-2}\right) + \ldots + a_2(X + \alpha) + a_1$ și atribuind lui X valoarea α, obținem $q(\alpha) = na_n\alpha^{n-1} + (n-1)a_{n-1}\alpha^{n-2} + \ldots + 2a_2\alpha + a_1 = f'(\alpha)$.

Din $f(X) = (X - \alpha)q(X) + f(\alpha)$ și $f(\alpha) = 0 = f'(\alpha)$ rezultă că $(X - \alpha)^2$ divide pe f.

Dacă $f = X^4 - 2X^3 + 5X^2 + pX + q$, atunci $f' = 4X^3 - 6X^2 + 10X + p$. Din $f(1) = 0$ și $f'(1) = 0$ rezultă $4 + p + q = 0$ și $8 + p = 0$. Avem $p = -8$, $q = 4$ și în acest caz f se divide prin $(X - 1)^2$.

PROBLEME PROPUSE

1. Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$ folosind schema lui Horner, calculați $f(\alpha)$ dacă:
a) $f = X^5 - 5X^4 + 18X^3 - 15X^2 + X + 4$ și $\alpha = 3$;
b) $f = X^5 + (1 + 2i)X^4 - (1 + 3i)X^2 + 7$ și $\alpha = -2 - i$.

2. Folosind schema lui Horner, dezvoltați polinomul f după puterile lui $X - \alpha$ dacă:
a) $f = X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 4X + 1$ și $\alpha = 1$;
b) $f = X^4 + 2iX^3 - (1+i)X^2 - 3X + 7 + i$ și $\alpha = -i$.

3. Folosind schema lui Horner aflați câtul și restul împărțirii polinomului $f \in \mathbb{Z}_7[X]$, $f = \hat{5}X^4 + \hat{3}X^2 + X + \hat{2}$ prin polinomul $g = X + \hat{5}$.

4. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 - X + 1$. Folosind schema lui Horner, determinați $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât:

$$\frac{x^3 - x + 1}{(x-2)^5} = \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{a}{(x-2)^3} + \frac{b}{(x-2)^4} + \frac{c}{(x-2)^5},$$

oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$.

5. Fie $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = X^3 + \hat{2}X^2 + X + \hat{1}$. Determinați toate polinoamele $g = \hat{a}X^3 + \hat{b}X^2 + \hat{c}X + \hat{d}$ din $\mathbb{Z}_3[X]$ astfel încât $f^* = g^*$.

6. Arătați că polinomul $f = (X^2 + X - 1)^{2n-1} - X$ din $\mathbb{R}[X]$ împărțit la polinomul $X^2 - 1$ dă restul 0.

7. Arătați că polinomul $f = nX^{n+2} - (n+1)X^{n+1} + X$ din $\mathbb{R}[X]$ este divizibil prin $(X - 1)^2$.

8. Determinați, $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât restul împărțirii polinomului $f = X^3 + \lambda X^2 - (3\lambda + 2)X + 2$ la $X - 1$ să fie egal cu 5.

9. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât restul împărțirii polinomului $f = X^4 + aX^3 + (2b - 1)X + b$ la $X + 1$ să fie egal cu 1 și cel al împărțirii la $X - 1$ să fie egal cu 5.

10. Determinați polinoamele $f \in \mathbb{R}[X]$, $f \neq 0$ care verifică relația $Xf(X) = (X - 3)f(X + 1)$, unde $f(X+1) = a_n(X+1)^n + a_{n-1}(X+1)^{n-1} + \ldots + a_1(X+1) + a_0$ dacă $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$.

11. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul $f = aX^4 + bX^3 - 3$ să se dividă prin polinomul $g = (X - 1)^2$, unde $f, g \in \mathbb{R}[X]$.

12. Determinați polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 + aX^2 + bX + c$, dacă $f(k) = 2^k$ pentru $k \in \{1, 2, 3\}$.

13. Determinați polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$, dacă $f(i) = 1 + i$ și $f(i + 1) = -6 + 5i$.

14. Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^{6n+5} + X^{3n+4} + 1$ și $g = X^2 + X + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Arătați că f se divide prin g.

15. Fie $f = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}[X]$. Determinați numerele reale a, b, c, d astfel încât $f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = n^4$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Relația de divizibilitate pentru polinoame

Și în acest paragraf K este un corp comutativ. Vom arăta că inelul de polinoame $K[X]$ are proprietăți aritmetice asemănătoare cu cele ale inelului $\mathbb{Z}$ al numerelor întregi.

Date fiind polinoamele d și f din $K[X]$, spunem că *d divide* pe f, și scriem $d \mid f$, dacă există $q \in K[X]$ astfel încât $f = dq$.

În acest caz se mai spune că d este *divizor* al lui f sau că f este *multiplu* al lui d.

Să observăm că dacă polinomul d este divizor comun pentru polinoamele f și g, atunci d divide polinomul $f\varphi + g\psi$, oricare ar fi $\varphi, \psi \in K[X]$. Într-adevăr, fie $q_1, q_2 \in K[X]$ astfel încât $f = dq_1$ și $g = dq_2$.

Avem: $f\varphi + g\psi = dq_1\varphi + dq_2\psi = d(q_1\varphi + q_2\psi) = dq$, unde $q = q_1\varphi + q_2\psi$.

Cel mai mare divizor comun pentru două polinoame

Definiție. Fie $f, g \in K[X]$. Un polinom $d \in K[X]$ se numește *cel mai mare divizor comun* (prescurtat c.m.m.d.c.) al lui f și g dacă are proprietățile:

(α) $d \mid f$ și $d \mid g$ (adică d este divizor comun al lui f și g) și

(β) dacă $h \mid f$ și $h \mid g$, atunci $h \mid d$ (adică orice alt divizor comun h al lui f și g este divizor și al lui d).

Cel mai mare divizor comun al lui f și g se notează cu c.m.m.d.c. (f, g) sau cu (f, g), la fel ca perechea ordonată de componente f și g.

Evident, dacă $f \mid g$, atunci c.m.m.d.c. $(f, g) = f$. Așadar pentru a dovedi existența c.m.m.d.c. este suficient să considerăm cazul a două polinoame $f, g \in K[X]$ astfel încât grad $f \geqslant$ grad$g$ și $g \nmid f$.

În aceste condiții există $q_1, r_1 \in K[X]$, $r_1 \neq 0$, astfel încât:

(1) $f = gq_1 + r_1$ cu grad $r_1 <$ grad g. Cum $r_1 \neq 0$, există $q_2, r_2 \in K[X]$ astfel încât

(2) $g = r_1q_2 + r_2$ cu grad $r_2 <$ grad r_1, dacă $r_2 \neq 0$.

Cum, $r_2 \neq 0$, există $q_3, r_3 \in K[X]$ astfel încât

(3) $r_1 = r_2q_3 + r_3$ cu grad $r_3 <$ grad r_2 dacă $r_3 \neq 0$ ș.a.m.d.

Cum grad $g >$ grad $r_1 >$ grad $r_2 > \ldots$ există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $r_i \neq 0$ pentru $1 \leqslant i \leqslant n$ și $r_{n+1} = 0$, adică

(n) $\quad r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$ cu grad $r_n <$ grad r_{n-1}, $r_n \neq 0$

și

$(n+1)$ $\quad r_{n-1} = r_nq_{n+1} + 0$.

Secvența (1), (2), ..., (n), $(n + 1)$ de împărțiri cu rest poartă numele de *algoritmul lui Euclid* pentru polinoamele f și g, iar r_n este numit *ultimul rest nenul* din algoritmul lui Euclid pentru f și g.

Arătăm că polinomul $d = r_n$ verifică (α) și (β) din definiția c.m.m.d.c. al lui f și g.

Din $(n + 1)$ rezultă că $r_n \mid r_{n-1}$ și apoi din

(n) rezultă că $r_n \mid r_{n-2}$ ș.a.m.d. până când, în final din (2) și din (1) rezultă că $r_n \mid g$ și $r_n \mid f$. Așadar r_n verifică (α).

Dacă $h \mid f$ și $h \mid g$, atunci folosind succesiv (1), (2), ..., (n) rezultă că h divide $r_1, r_2, \ldots, r_n$, de unde rezultă că h verifică (β). În final c.m.m.d.c. $(f, g) = r_n$, ultimul rest nenul din algoritmul lui Euclid pentru f și g.

1) Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul $f = X^5 - (m+1)X^3 - mX + 1$ să fie divizibil cu $X + 1$.

2) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât polinomul $f = X^3 - 3X + aX + b$ să fie divizibil cu $X - 1 - i$.

3) Fie polinomul
$f = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1 \in \mathbb{R}[X]$

a) Calculați $f(1)$.

b) Calculați $f(-1)$.

c) Este polinomul f divizibil cu $X - 1$?

4) Arătați că
$X^{n+1} - (n+1)X + n \,\vdots\, (X-1)^2$.

Dați alte două exemple de polinoame de grad $n + 1$ divizibile cu g.

Indicație. Obținem sistemul

$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases}$, adică $\begin{cases} 1 - n - 1 + n = 0 \\ n + 1 - n - 1 = 0 \end{cases}$.

5) Demonstrați că polinomul f se divide cu polinomul g în fiecare dintre cazurile:

a) $f = X^{n+1} - (n+1)X + n, \quad g = (X-1)^2$

b) $f = (2n-1)X^{2n} + 2nX^{2n-1} + 1$, $g = (X+1)^2$.

6) Determinați $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul $mX^4 + nX^3 - 3$ să fie divizibil prin $(X-1)^2$.

7) Fie polinoamele $f, g \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^4 + 1$, $g = X^2 + \alpha X + \beta$.

Să se determine α, β astfel încât $g \mid f$.

1) Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 + X^3 + 2X^2 + X - 1$, $g = X^3 + X^2 + X + 1$. Determinați (f, g).

Soluție. Aplicând algoritmul lui Euclid obținem:

(1) $f(X) = g(X) \cdot X + X^2 - 1$

(2) $g(X) = (X^2 - 1)(X + 1) + 2X + 2$

(3) $X^2 - 1 = (2X+2) \cdot \frac{1}{2}(X-1) + 0$, deci c.m.m.d.c. $(f, g) = 2X + 2$.

2) Fie $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = X^5 + \hat{3}X^4 + \hat{3}X^3 + X^2 + \hat{3}X + \hat{4}$, $g = \hat{2}X^4 + \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{4}$. Determinați (f, g).

Soluție. Aplicând algoritmul lui Euclid obținem:

(1) $f = gq_1 + r_1$, unde $q_1 = \hat{3}X + \hat{2}$, $r_1 = \hat{2}X^2 + \hat{2}X + \hat{1}$.

(2) $g = r_1q_2 + r_2$, unde $q_2 = X^2 + \hat{3}X + \hat{1}$, $r_2 = \hat{2}X + \hat{3}$.

(3) $r_1 = r_2q_3 + r_3$, unde $q_3 = X + \hat{2}$, $r_3 = \hat{0}$.

Deci, $(f, g) = \hat{2}X + \hat{3}$.

Observații

♦ Dacă $d, f, g \in K[X]$ și $\alpha \in K^* = K \setminus \{0\}$ atunci d este divizor comun pentru f și g dacă și numai dacă αd are această proprietate. Într-adevăr dacă $f = dq_1$ și $g = dq_2$, atunci $f = \alpha d(\alpha^{-1}q_1)$ și $g = \alpha d(\alpha^{-1}q_2)$. Implicația reciprocă se verifică asemănător.

În particular dacă d = c.m.m.d.c. (f, g) și a este coeficientul dominant al lui d, atunci polinomul $a^{-1}d$ este monic (sau unitar) și evident $a^{-1}d$ = c.m.m.d.c. (f, g).

♦ Dacă d = c.m.m.d.c (f, g), atunci există două polinoame $\varphi, \psi \in K[X]$ astfel încât $d = f\varphi + g\psi$.

Într-adevăr, arătăm că resturile $r_1, r_2, \ldots, r_n$ din algoritmul lui Euclid au această proprietate. Acest fapt se verifică imediat pentru r_1 și r_2.

Dacă $r_{i-2} = f\varphi_{i-2} + g\psi_{i-2}$ și $r_{i-1} = f\varphi_{i-1} + g\psi_{i-1}$, cu φ_{i-2}, φ_{i-1}, ψ_{i-2}, $\psi_{i-1} \in K[X]$, atunci $r_i = r_{i-2} - r_{i-1}q_i = f(\varphi_{i-2} - \varphi_{i-1}q_i) + g(\psi_{i-2} - \psi_{i-1}q_i)$ și proprietatea cerută rezultă prin inducție matematică. În particular $d = r_n = f\varphi_n + g\psi_n$ și putem lua $\varphi = \varphi_n$, $\psi = \psi_n$.

Definiție. Fie $f, g \in K[X]$. Dacă c.m.m.d.c. $(f, g) = 1$, atunci spunem că f este *prim* cu g. Se mai spune în acest caz că polinoamele f și g sunt *prime între ele*.

Evident c.m.m.d.c. $(f, g) = 1$ dacă și numai dacă există $\varphi, \psi \in K[X]$ astfel încât $f\varphi + g\psi = 1$.

1) Polinoamele $X - a$ și $X - b$, $a \neq b$ sunt prime între ele. Într-adevăr $\frac{1}{b-a}(X-a) - \frac{1}{b-a}(X-b) = 1$.

2) Dacă $a, b \in \mathbb{C}[X]$, $a \neq b$ și $m, n \in \mathbb{N}^*$, atunci polinoamele $(X-a)^n$ și $(X-b)^m$ sunt prime între ele.

8) Folosind algoritmul lui Euclid, găsiți polinoamele $u, v \in \mathbb{C}[X]$ astfel încât $uf + vg = d$, unde d este c.m.m.d.c. al polinoamelor f și g dacă:

a) $f = X^4 + 2X^3 - X^2 - 4X - 2$, $g = X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 2$;

b) $f = 4X^4 - 2X^3 - 16X^2 + 5X + 9$, $g = 2X^3 - X^2 - 5X + 4$.

9) Determinați polinoamele f de gradul întâi astfel încât:

a) $f(X^2)$ să se dividă cu $f(X)$

b) $f(X^2 - 1)$ să se dividă cu $f(X)$.

10) Fie polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = 2X^4 + 3X^2 + \alpha X^2 - 1$, $g = 2X^2 + X - \beta$.

Să se determine α și β astfel încât f să se dividă cu g.

11) Fie polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 - 4X^3 + 4X^2 + \alpha X + \beta$, $g = X^2 - 4X + \beta$.

Să se determine parametrii α și β astfel încât polinomul f să se dividă cu polinomul g și în acest caz să se determine câtul.

12) Fiind date polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 + aX^2 + bX + c$, $g = (X - 1)^3$ să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $g \mid f$.

13) Fie polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = (X^2 + X + 1)^{4n+1} - X$, $n \in \mathbb{N}$, $g = X^2 + 1$.

Arătați că $g \mid f$.

14) Fie polinomul $f, g \in \mathbb{R}[X]$. Arătați că următoarele polinoame sunt prime între ele:

a) $f = X^4 - X^3 - 4X^2 + 4X + 1$, $g = X^3 - 2X^2 + 1$.

b) $f = 3X^3 - 2X^2 + X + 2$, $g = X^3 - 2X^2 + 2X - 1$.

15) Fie $f, g, h \in \mathbb{C}[X]$. Arătați că dacă $f \mid gh$, f și g sunt prime între ele atunci $f \mid h$.

Teorema 1. Fie $f, g, h \in K[X]$. Avem:

(1) c.m.m.d.c. $(hf, hg) = h \cdot$ c.m.m.d.c. (f, g) sau cu notații mai simple $(hf, hg) = h(f, g)$.

(2) Dacă $(f, g) = 1$ și $(f, h) = 1$, atunci $(f, gh) = 1$, adică dacă f este prim cu g și h, atunci este prim și cu gh.

(3) Dacă $f \mid gh$ și $(f, g) = 1$, atunci $f \mid h$, adică dacă f divide produsul gh și este prim cu unul dintre factori, atunci f divide celălalt factor.

Demonstrație

(1) Când $h = 0$ proprietatea este evidentă. Dacă $h \neq 0$, atunci înmulțind cu h în egalitățile (1), (2), ..., (n), $(n + 1)$ din algoritmul lui Euclid pentru f și g se obține algoritmul lui Euclid pentru hf și hg, iar ultimul rest nenul este $hr_n = h(f, g)$.

(2) Fie φ_1, ψ_1 și φ_2, ψ_2 din $K[X]$ astfel încât $1 = f\varphi_1 + g\psi_1$ și $1 = f\varphi_2 + h\psi_2$. Avem $1 = f\varphi_1 + g\psi_1(f\varphi_2 + h\psi_2) = f(\varphi_1 + g\psi_1\varphi_2) + {}$ $+gh\psi_1\psi_2 = f\varphi + gh\psi$ cu $\varphi = \varphi_1 + g\psi_1\varphi_2$ și $\psi = \psi_1\psi_2$, deci $(f, gh) = 1$.

(3) Fie $\varphi, \psi \in K[X]$ astfel încât $1 = f\varphi + g\psi$. Avem $h = f\varphi h + g\psi h$ și cum $f \mid gh$ rezultă că $f \mid h$. ■

16) Fiind date polinomale $f, g \in \mathbb{C}[X]$ $f = X^2 + 2X + 2$; $g = X^2 + 3X + 3$ să se determine c.m.m.d.c. al polinoamelor f și g.

17) Să se arate că polinomul $g = (X^2 - 1)(X^2 + X + 1)$, divide polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^{4^n} + X^3 - X - 1, n \in \mathbb{N}^*$.

Indicație. $g = 0$, $x \in \{-1, 1, \varepsilon, \overline{\varepsilon}\}$, $f(1) = f(-1) = 0$.
$4^n = (3 + 1)^n = 3q + 1$, $q \in \mathbb{N}^*$.
$f(\varepsilon) = f(\overline{\varepsilon}) = 0, g \mid f$.

18) Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = AX^{n+2} + BX^n + 2$, $g = (X - 1)^2$.
Să se determine A, B astfel încât $g \mid f$.

19) Fie polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = (X^2 + X + 1)^{4n+1} - X$, $g = X^2 + 1, n \in \mathbb{N}$
Să se arate că $g \mid f$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Exerciții rezolvate.

1) Determinați c. m. m. d. c. al polinoamelor $f = X^3 + X^2 + 1$ și $g = X^2 + X + 1$.

Împărțim f la g:
$$\begin{array}{rrr|l} X^3 + X^2 + & & 1 & X^2 + X + 1 \\ \cline{4-4} -X^3 - X^2 - X & & & X \\ \cline{1-1} / \quad / & -X + 1 = r_1 & & \end{array}$$

Împărțim $g = X^2 + X + 1$ la $r_1 = -X + 1$:
$$\begin{array}{r|l} X^2 + X + 1 & -X + 1 \\ \cline{2-2} -X^2 + X & -X - 2 \\ \cline{1-1} / \quad 2X + 1 & \\ -2X + 2 & \\ \cline{1-1} / \quad 3 = r_2 & \end{array}$$

Împărțim $r_1 = -X + 1$ la $r_2 = 3$ și obținem restul $r_3 = 0$. Deci 3 este un c. m. m. d. c. al polinoamelor f și g.

2) Determinați c. m. m. d. c. al polinoamelor $f = X^5 + X^4 - X^3 - 3X^2 - 3X - 1$ și $g = X^4 - 2X^3 - X^2 - 2X + 1$.

Împărțim f la g:
$$\begin{array}{r|l} X^5 + X^4 - X^3 - 3X^2 - 3X - 1 & X^4 - 2X^3 - X^2 - 2X + 1 \\ \cline{2-2} -X^5 + 2X^4 + X^3 + 2X^2 - X & X + 3 \\ \cline{1-1} / \quad 3X^4 \quad -X^2 - 4X - 1 & \\ -3X^4 + 6X^3 + 3X^2 + 6X - 3 & \\ \cline{1-1} / \quad 6X^3 + 2X^2 + 2X - 4 = r_1 & \end{array}$$

Împărțim r_1 la 2 și înmulțim $X^4 - 2X^3 - X^2 - 2X + 1$ cu 3. Efectuăm apoi împărțirea lui $3X^4 - 6X^3 - 3X^2 - 6X + 3$ la $3X^3 + X^2 + X - 2$:

$$\begin{array}{r|l} 3X^4-6X^3-3X^2-6X+3 & 3X^3+X^2+X-2 \\ \cline{2-2} \underline{-3X^4-\ \ X^3-\ \ X^2+2X} & X \\ -7X^3-4X^2-4X+3 & \end{array}$$

Înmulțim $3X^3+X^2+X-2$ cu 7 și $-7X^3-4X^2-4X+3$ cu –3 și continuăm împărțirea:

$$\begin{array}{r|l} 21X^3+\ 7X^2+\ 7X-14 & 21X^3+12X^2+12X-9 \\ \cline{2-2} \underline{-21X^3-12X^2-12X+9} & 1 \\ -5X^2-\ 5X-5 & \end{array}$$

Împărțim $-5X^2-5X-5$ la –5 și apoi efectuăm împărțirea lui $21X^3+12X^2+12X-9$ la X^2+X+1:

$$\begin{array}{r|l} 21X^3+12X^2+12X-9 & X^2+X+1 \\ \cline{2-2} \underline{-21X^3-21X^2-21X} & 21X-9 \\ /\quad -9X^2-\ 9X-9 & \\ \underline{9X^2+\ 9X+9} & \\ /\qquad /\quad / & \end{array}$$

Am obținut restul zero, deci c.m.m.d.c. este ultimul rest nenul, adică X^2+X+1.

Cel mai mic multiplu comun a două polinoame

Definiție. Fie $f, g \in K[X]$. Un polinom $m \in K[X]$ se numește *cel mai mic multiplu comun* (prescurtat c.m.m.m.c.) al lui f și g dacă

(α') $f \mid m$ și $g \mid m$ (adică m este multiplu comun al lui f și g) și

(β') dacă $f \mid h$ și $g \mid h$, atunci $m \mid h$ (adică orice alt multiplu h al lui f și g este multiplu și al lui m).

Pentru cel mai mic multiplu comun al lui f și g folosim notația c.m.m.m.c. (f, g) sau mai simplu $[f, g]$.

Teorema 2. Oricare ar fi $f, g \in K[X]$ cel mai mic multiplu comun al lui f și g există și verifică relația

$$[f,g]=\frac{fg}{(f,g)}$$

Demonstrație. Relația de demonstrat se scrie și astfel: $fg = md$, unde $m = [f, g]$ și $d = (f, g)$. Fie $d = (f, g)$ și $f_1, g_1 \in K[X]$ astfel încât $f = df_1$, $g = dg_1$. Avem $d = (f, g) = (df_1, dg_1) = d(f_1, g_1)$ și simplificând cu d obținem $1 = (f_1, g_1)$, adică f_1 și g_1 sunt polinoame prime între ele.

Fie $m=\dfrac{fg}{d}=f_1g=fg_1$. Rezultă că m este multiplu comun al lui f și g.

Fie $h \in K[X]$ un multiplu comun al lui f și g. Avem $h = fq_1 = gq_2$ cu $q_1, q_2 \in K[X]$. Din $fq_1 = gq_2$ rezultă $df_1q_1 = dg_1q_2$ și simplificând cu d obținem $f_1q_1 = g_1q_2$. Cum $(f_1, g_1) = 1$ și $f_1 \mid g_1q_2$ rezultă că $f_1 \mid q_2$. Din $h = gq_2$ rezultă că $m = f_1g$ divide h. Analog se arată că $m \mid h$ și deci $\dfrac{fg}{d}=m=[f,g]$. ■

20) Fie polinoamele $f, g, \in \mathbb{C}[X]$, $f=X^9-1$ și $g=X^6-1$.

a) Determinați polinomul $m \in \mathbb{C}[X]$, c.m.m.m.c. al polinoamelor f și g.

b) Determinați polinomul d, c.m.m.d.c. al polinoamelor f și g.

c) Calculați produsul fg.

d) Verificați relația $fg = m \cdot d$.

21) Fie polinoamele $f, g, \in \mathbb{C}[X]$. Determinați c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. al polinoamelor f și g în fiecare dintre cazurile:

a) $f=X^6-7X^4+8X^3-7X+7$;
$g=3X^6-7X^4+3X^3-7X$;

b) $f=X^4-4X^3+1$;
$g=X^4-2X^3-3X^2+X+1$

c) $f=X^6-9X^4-10X^3-9X^2+1$,
$g=X^4-4\sqrt{2}X^3+6X^2+4\sqrt{2}X+1$.

Calculați, în fiecare caz în parte, $f \cdot g$.

Verificați, în fiecare caz în parte, relația $fg = (f, g) \cdot [f, g]$.

22) Aflați polinoamele f și g cunoscând că cel mai mare divizor comun al lor este X^4+4, cel mai mic multiplu comun este X^4+3X^2-4, $f(1)=10$ și $g(-1)=20$.

Exercițiu rezolvat.

Fie polinoamele $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^4 + X^3 - 3X^2 - X + 2$, $g = X^3 + 3X^2 - X - 3$. Să se calculeze $d = (f, g) =$ c.m.m.d.c. (f, g) și $m = [f, g] =$ c.m.m.m.c. (f, g).

Soluție. Împărțim pe f la g și obținem $f = gq_1 + r_1$ cu $q_1 = X - 2$ și $r_1 = 4X^2 - 4$.

Împărțind pe g la r_1 obținem $g = r_1q_2 + r_2$ cu $q_2 = \frac{1}{4}X + \frac{3}{4}$ și $r_2 = 0$. Rezultă că c.m.m.d.c. $(f, g) = X^2 - 1$ dacă punem condiția să fie polinom monic. Împărțind polinomul fg la $X^2 - 1$ se obține: $m =$ c.m.m.m.c. $(f, g) = X^5 + 4X^4 - 10X^2 - X + 6$.

Observație. Dacă $f \in K[X]$ și $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$, atunci polinoamele f și αf au aceeași divizori în $K[X]$. Din acest motiv în algoritmul lui Euclid pentru două polinoame f și g din $\mathbb{Z}[X]$ putem evita coeficienții fracționari înmulțind oricare dintre polinoamele f, g, r_1, r_2, ..., r_n cu un număr întreg nenul potrivit ales. Astfel în exercițiul rezolvat precedent atunci când împărțim pe $g = X^3 + 3X^2 - X - 3$ la $r_1 = 4X^2 - 4$ putem înlocui pe g cu $4g$ sau pe r_1 cu $\frac{1}{4}r_1 = X^2 - 1$.

Polinoame ireductibile

Vom introduce noțiunea de *polinom ireductibil* peste un corp comutativ K. Vom arăta că polinoamele ireductibile au în aritmetica inelului $K[X]$ rolul pe care îl au numerele prime în aritmetica lui $\mathbb{Z}$.

Definiție. Fie K un corp comutativ și $f \in K[X]$, grad $f = n > 0$. Spunem că polinomul f este *ireductibil* peste K dacă nu există $g, h \in K[X]$ astfel încât

$$f = gh \text{ cu grad } g < n \text{ și grad } h < n.$$

În caz contrar spunem că f este *reductibil* peste K.

Proprietăți.

1. *Orice polinom $f \in K[X]$ de grad 1 este ireductibil peste K.*

Într-adevăr dacă $f = gh$ cu grad $g < 1$, grad $h < 1$, atunci g și h sunt polinoame constante nenule și la fel va fi $f = gh$. Contradicție.

Astfel $2X - 3 \in \mathbb{Q}[X]$ este ireductibil peste $\mathbb{Q}$

- $X + \sqrt{2} \in \mathbb{R}[X]$ este ireductibil peste $\mathbb{R}$,
- $\hat{3}X + \hat{2} \in \mathbb{Z}_5[X]$ este ireductibil peste $\mathbb{Z}_5$.

2. *Dacă un polinom $f \in K[X]$, grad $f = n > 1$ este ireductibil peste K, atunci $f(a) \neq 0$, oricare ar fi $a \in K$, adică polinomul f nu are rădăcini în K.* Reciproc, dacă $n =$ grad f *este egal cu* 2 *sau cu* 3 *și* $f(a) \neq 0$, $\forall a \in K$, *atunci f este ireductibil peste K.*

Într-adevăr dacă $f(a) = 0$ cu $a \in K$, atunci conform teoremei lui Bézout avem $f(X) = (X - a)q(X)$ cu $q(X) \in K[X]$.

Cum grad$(X - a) = 1 < n$ și grad $q(X) = n - 1 < n$ rezultă că f este reductibil peste K. Contradicție.

23) Fie polinomul $f \in K[X]$. Stabiliți dacă următoarele polinoame sunt ireductibile peste K:

a) $f = X^2 + X + 1$, $f \in \mathbb{R}[X]$;

b) $f = X^2 + 2$, $f \in \mathbb{Q}[X]$;

c) $f = X^2 + X + \hat{1}$, $f \in \mathbb{Z}_2[X]$;

d) $f = X^4 + X^2 + \hat{1}$, $f \in \mathbb{Z}_3[X]$;

e) $f = X^3 + 2X - 1$, $f \in \mathbb{R}[X]$;

f) $f = X^2 - 2$, $f \in \mathbb{Q}[X]$;

24) Fie polinoamele $f, g, \in \mathbb{R}[X]$, $f = (X^2 + X + 1)^9$, $g = X^2 + 1$.

a) Arătați că $g \mid f$.

b) Stabiliți dacă polinomul f este ireductibil peste $\mathbb{R}$.

c) Stabiliți dacă polinomul f este ireductibil peste $\mathbb{C}$.

d) Stabiliți dacă polinomul g este ireductibil peste $\mathbb{R}$.

e) Stabiliți dacă polinomul g este ireductibil peste $\mathbb{C}$.

Indicație. a) $g(X) = (X - i)(X + i)$ $g \mid f$ dacă și numai dacă $f(i) = 0$ și $f(-i) = 0$. Avem $(i^2 + i + 1)^9 = 0$ și $((-i)^2 - i + 1)^9 = 0$.

Reciproc, dacă $n = 2$ sau $n = 3$ și f este reductibil peste K, avem $f = gh$ cu $g, h \in K[X]$, grad $g < n$ și grad $h < n$. Cum n este egal cu 2 sau cu 3, rezultă că grad $g = 1$ sau grad $h = 1$. Dacă grad $g = 1$, atunci $g = aX + b$ cu $a, b \in K$, $a \neq 0$.

Avem $g(c) = 0$, unde $c = -ba^{-1} \in K$ și atunci $f(c) = g(c)h(c) = 0h(c) = 0$. Contradicție.

1) Polinomul $X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ este ireductibil peste $\mathbb{Q}$. Într-adevăr, în caz contrar există $r \in \mathbb{Q}$ astfel încât $r^2 - 2 = 0$, deci $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Contradicție.

2) Polinomul $X^2 - 2 \in \mathbb{R}[X]$ este reductibil peste $\mathbb{R}$ pentru că $X^2 - 2 = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$ cu $X - \sqrt{2} \in \mathbb{R}[X]$ și $X + \sqrt{2} \in \mathbb{R}[X]$.

3) Polinomul $f = X^3 + \hat{2}X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_5[X]$ este ireductibil peste corpul $\mathbb{Z}_5$ pentru că $f(\hat{0}) = \hat{1} \neq \hat{0}$, $f(\hat{1}) = \hat{4} \neq \hat{0}$, $f(\hat{2}) = \hat{3} \neq \hat{0}$, $f(\hat{3}) = \hat{4} \neq \hat{0}$, $f(\hat{4}) = \hat{3} \neq \hat{0}$.

În continuare vom determina polinoamele ireductibile peste corpul $\mathbb{C}$ al numerelor complexe și peste corpul $\mathbb{R}$ al numerelor reale. Vom folosi *teorema fundamentală a algebrei*.

Teorema 3. (d'Alembert-Gauss)

Oricare ar fi $f \in \mathbb{C}[X]$, grad$f > 0$, există $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $f(z) = 0$. Altfel spus, orice polinom de grad mai mare sau egal cu 1 având coeficienții complecși admite cel puțin o rădăcină complexă.

Nu se cunoaște o demonstrație elementară pentru teorema fundamentală a algebrei. O admitem fără demonstrație.

Corolarul 1. Singurele polinoame ireductibile peste $\mathbb{C}$ sunt polinoamele de gradul întâi din $\mathbb{C}[X]$.

Demonstrație. Se folosesc rezultatele de la proprietățile (1) și (2) pentru cazul $K = \mathbb{C}$. ■

Cum $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, avem $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$. Fie $f \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$, grad $f = n > 0$. Conform teoremei fundamentale a algebrei există $z = u + vi \in \mathbb{C}$ cu $u, v \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(z) = 0$.

Dacă $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$, atunci avem:

$$a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1z + a_0 = 0.$$

Considerăm conjugatul $\bar{z} = a - bi$ al numărului complex $z = a + bi$, avem:

$$0 = \bar{0} = \overline{a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1z + a_0} = a_n\bar{z}^n + a_{n-1}\bar{z}^{n-1} + ... + a_1\bar{z} + a_0 = f(\bar{z})$$

Am demonstrat astfel următoarea teoremă:

Teorema 4. Dacă z este o rădăcină complexă a polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$ atunci și $\bar{z}$ este rădăcină a lui f.

Corolarul 2. Singurele polinoame ireductibile peste corpul $\mathbb{R}$ al numerelor reale sunt:

(1) polinoamele de gradul întâi: $aX + b$ cu $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$;

(2) polinoamele de gradul al doilea:
$aX^2 + bX + c$ cu $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b^2 - 4ac < 0$.

25) Determinați numerele reale a și b astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul g, unde $f, g \in \mathbb{R}[X]$:

a) $f = (a+1)X^4 + (b+2)X^3 - 3X - 1$ și $g = (X-1)(X+1)$;

b) $f = X^5 - 3X^4 + 4X^3 + aX + bX - 2$ și $g = X^2 - 3X + 2$;

c) $f = X^4 - X^3 + 5X^2 + aX + b$ și $g = X^2 + 4$.

În fiecare caz în parte verificați dacă polinomul g este reductibil sau ireductibil peste $\mathbb{R}[X]$.

Indicație.

c) $f = g \cdot (X^2 - X + 1) + r(X)$,
$r(X) = (a+4)X + b - 4$;
$r(X) = 0 \Rightarrow a = -4, b = 4$.

26) Polinomul $f = X^2 - 3X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$ este ireductibil peste $\mathbb{Q}$ dar este reductibil peste $\mathbb{R}$ astfel

$$f = \left(X - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Dați exemplu de un alt polinom din $\mathbb{Z}[X]$ ireductibil peste $\mathbb{Q}$, dar reductibil peste $\mathbb{R}$.

27) Polinomul $f = X^2 + X + 1 \in \mathbb{R}[X]$ este ireductibil peste $\mathbb{R}$ dar este reductibil peste $\mathbb{C}$ astfel:

$$f = \left(X + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Dați exemplu de un alt polinom din $\mathbb{R}[X]$ ireductibil peste $\mathbb{R}$, dar reductibil peste $\mathbb{C}$.

28) Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$
$f = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + aX + b$.

Determinați numerele reale a și b și rădăcinile lui f, știind că una dintre rădăcini este $x_1 = 1 + i$.

Demonstrație

Având în vedere Exemplele (1) și (2) este suficient să arătăm că, dacă $f \in \mathbb{R}[X]$ este ireductibil și $n = \text{grad } f > 1$, atunci $n = 2$.

Fie $z = u + iv \in \mathbb{C}$ cu $u, v \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(z) = 0$. Cum f este ireductibil peste $\mathbb{R}$, avem $v \neq 0$. Mai știm $f(\overline{z}) = 0$ și cum $v \neq 0$ rezultă că $z \neq \overline{z}$. Din $f(z) = 0$, $f(\overline{z}) = 0$ și $z \neq \overline{z}$ rezultă, conform Teoremei 4, paragraful anterior că f se divide prin polinomul $(X - z)(X - \overline{z}) = X^2 - 2uX + u^2 + v^2 \in \mathbb{R}[X]$. Cum și $f \in \mathbb{R}[X]$ din algoritmul împărțirii euclidiene a polinoamelor rezultă că există $q \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât $f(X) = (X^2 - 2uX + u^2 + v^2)q(X)$.

Cum f este ireductibil peste $\mathbb{R}$, avem $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$, și deci $f = aX^2 + bX + c$, unde $a = q \neq 0$, $b = -2uq$ și $c = q(u^2 + v^2)$. Avem $b^2 - 4ac = -4v^2q^2 < 0$. ■

Descompunerea polinoamelor în produs de polinoame ireductibile

Conform teoremei fundamentale a aritmeticii orice număr natural mai mare decât 1 se reprezintă în mod unic ca produs de numere prime. Acest rezultat rămâne adevărat și în inelul $\mathbb{Z}$: orice număr întreg a, $|a| > 1$ se reprezintă în mod unic (mai puțin semnul factorilor) în produs de numere prime.

Astfel:

$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = (-2) \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-5)$ etc.

Două polinoame $f, g \in K[X]$ se numesc polinoame *asociate în divizibilitate* dacă se divid reciproc, adică $f \mid g$ și $g \mid f$.

Se observă că două polinoame nenule f și g sunt asociate în divizibilitate dacă $g = af$ cu $a \in K$, $a \neq 0$.

Rezultatul corespunzător teoremei fundamentale a aritmeticii pentru inelul $K[X]$, K un corp comutativ este dat în următoarea...

Teorema 5. Dacă $f \in K[X]$, grad $f = n > 1$, atunci există polinoamele ireductibile $f_1, f_2, \ldots, f_r \in K[X]$ unic determinate mai puțin o asociere în divizibilitate astfel încât:

$$f(X) = f_1(X)f_2(X) \ldots f_r(X) \text{ cu } r \geqslant 1.$$

Demonstrație. Pentru partea de existență a descompunerii în factori ireductibili demonstrăm prin inducție matematică după $n = \text{grad } f$.

Dacă $n = 1$, atunci f este ireductibil peste K și afirmația din enunț este adevărată cu $r = 1$ și $f_1 = f$.

Presupunem că $n > 1$. Dacă f este ireductibil, din nou luăm $r = 1$ și $f_1 = f$. Dacă f este reductibil atunci există $g, h \in K[X]$ astfel încât $f = gh$, grad $g < n$, grad $h < n$.

Presupunând afirmația din enunț adevărată pentru polinoamele din $K[X]$ de grad mai mic decât n, rezultă că g și h se reprezintă ca produse de polinoame ireductibile și atunci aceeași proprietate are și $f = gh$.

Partea de unicitate este propusă ca exercițiu. ■

29) Să se determine polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + b$ știind că $f(i) = 1 + i$ și $f(1 + i) = -6 + 5i$.

Indicație. Se ține cont de puterile lui i în calcularea lui $f(i)$, respectiv $f(i + 1)$ și apoi se identifică coeficienții numerelor complexe despre care trebuie să arătăm că sunt egale.

30) Să se determine polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = aX^3 + bX^2 + xX + d$,

știind că $f(-1) = 0$ și $f\left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right) = 0$.

31) Fie polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^3 + 1$. Descompuneți f în factori ireductibili peste:

a) $\mathbb{Z}$; b) $\mathbb{Q}$; c) $\mathbb{R}$; d) $\mathbb{C}$

32) Fie polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^3 - 1$. Descompuneți f în factori ireductibili peste:

a) $\mathbb{Z}$; b) $\mathbb{Q}$; c) $\mathbb{R}$; d) $\mathbb{C}$.

33) Descompuneți în factori ireductibili polinomul

$f = \hat{3}X^5 + \hat{3}X^3 + \hat{3}X + \hat{4} \in \mathbb{Z}_5[X]$.

Indicație. Considerăm funcția polinomială asociată și calculăm

$f(\hat{0}) = \hat{4}$; $f(\hat{1}) = \hat{3} + \hat{3} + \hat{3} + \hat{4} = \hat{3}$;

$f(\hat{2}) = \hat{0}$; $f(\hat{3}) = \hat{3}$; $f(\hat{4}) = \hat{1}$.

Rezultă că f are rădăcina $\hat{2}$. Din teorema lui Bézout obținem că $X - \hat{2} \mid f$, adică $X + \hat{3} \mid f$.

34) Descompuneți în factori ireductibili fiecare dintre polinoamele:

a) $g = \hat{2}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{2} \in \mathbb{Z}_5[X]$;

b) $f = X^3 + \hat{6} \in \mathbb{Z}_7[X]$;

c) $h = X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{5}X + \hat{3} \in \mathbb{Z}_7[X]$.

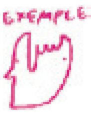
Observație. În descompunerea $f = f_1 f_2 \dots f_r$ dând în factor coeficienții dominanți ai polinoamelor ireductibile $f_1, f_2, \dots, f_r$, avem:

$f = a f_1 f_2 \dots f_r$ cu $a \in K$, $a \neq 0$ și $f_1, f_2, \dots, f_r$ polinoame monice ireductibile.

Din rezultatele precedente deducem:

Corolarul 3. Dacă $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$ cu $n > 0$ și $a_n \neq 0$, atunci există numerele complexe $z_1, z_2, \dots, z_n$ unic determinate astfel încât: $f = a_n(X - z_1)(X - z_2) \dots (X - z_n)$

Corolarul 4. Dacă $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$ cu $n > 0$ și $a_n \neq 0$ atunci f se descompune în mod unic sub forma: $f = a_n(X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_s)(X^2 + \beta_1 X + \gamma_1) \dots (X^2 + \beta_t X + \gamma_t)$ unde α_i, $\beta_j, \gamma_j \in \mathbb{R}$, $\beta_j^2 - 4\gamma_j < 0$ pentru $1 \leqslant i \leqslant s$, $1 \leqslant j \leqslant t$ și $s + 2t = n$.



1) Polinomul $f = X^n + X^{n-1} + \dots + X - n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ este reductibil peste $\mathbb{Z}$, deoarece $f(1) = 0$.

2) Polinomul $f = X^3 + X + 1$ este ireductibil peste $\mathbb{Z}$. Într-adevăr, dacă f ar fi reductibil am putea scrie: $f = gh$, $\operatorname{grad} g = 1$, $\operatorname{grad} h = 2$, $g, h \in \mathbb{Z}[X]$. Atunci $X^3 + X + 1 = (X + a)(X^2 + bX + c)$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Rezultă $ac = 1$, deci $a = \pm 1$.

Din descompunerea lui f rezultă $f(-a) = 0$. Însă $f(1) = 3 \neq 0$ și $f(-1) = -1 \neq 0$.

Indicație.

a) $\left.\begin{array}{l} g(\hat{0}) = \hat{2} \\ g(\hat{1}) = \hat{2} \\ g(\hat{2}) = \hat{1} + \hat{2} + \hat{2} = \hat{0} \\ g(\hat{3}) = \hat{4} + \hat{2} + \hat{2} = \hat{3} \\ g(\hat{4}) = \hat{3} + \hat{3} + \hat{2} = \hat{3} \end{array}\right| \Rightarrow (X + \hat{3}) \mid f$

b) $f(\hat{0}) = \hat{6}$, $f(\hat{1}) = \hat{0}$, $f(\hat{2}) = \hat{0}$, $f(\hat{3}) = \hat{5}$, ...

Rezultă $f(X) = (X - \hat{1})(X - \hat{2}) \dots$

35) Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^3 - X^2 - 5X + 5$ și $g = X^6 - 1$. Descompuneți fiecare din polinoamele f și g în $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ și $\mathbb{C}[X]$.

36) Fie polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$. Descompuneți în factori ireductibili peste $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ polinomul f, dacă:

a) $f = X^4 + 1$; b) $f = X^4 - X^2 + 1$.

37) Descompuneți polinomul $f = X^6 + 1 \in \mathbb{C}[X]$ în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$ și $\mathbb{C}$.

Aplicație a inelului $\mathbb{Z}_2[X]$. *Codificarea mesajelor*

Fie A o mulțime numită alfabet, cu două elemente, anume simbolurile 0 și 1 numite litere. Cu ajutorul literelor alfabetului A putem forma 2^m secvențe diferite cu m termeni $a_0 a_1 \dots a_{m-1}$ ($a_i \in A$) numite *cuvinte de lungime m peste alfabetul A*. Notăm cu D_m mulțimea cuvintelor de lungime m peste alfabetul A.

Fie C o submulțime cu 2^m elemente a lui D_n, unde $m < n$. Mulțimea C se numește *cod* iar elementele sale *cuvinte-cod*. Putem fixa o bijecție $g : D_m \to C \subset D_n$ prin care *codificăm* mesajele date prin cuvinte de lungime n din C. Se poate folosi aritmetica inelului $\mathbb{Z}_2[X]$ pentru a perfecta codificarea și decodificarea mesajelor îndată ce se cunoaște *cheia* codului (în cazul nostru, un polinom $p \in \mathbb{Z}_2[X]$).

Pentru a simplifica scrierea polinoamelor din $\mathbb{Z}_2[X]$, notăm elementele corpului $\mathbb{Z}_2$ cu 0 și 1 ; corpul $\mathbb{Z}_2$ este înzestrat cu operațiile de adunare și înmulțire care au tabelele alăturate:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Se observă că $a + a = 0$, $\forall a \in \mathbb{Z}_2$, de unde rezultă că $f + f = 0$, $\forall f \in \mathbb{Z}_2[X]$.

Să notăm cu P_n mulțimea polinoamelor $f \in \mathbb{Z}_2[X]$ de grad mai mic decât n, $f = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1}$ ($a_i \in \mathbb{Z}_2$). Evident, P_n are 2^n elemente, iar aplicația $(*)$ $D_n \to P_n$, $a_0 a_1 \dots a_{n-1} \mapsto a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1}$ este bijectivă.

Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m < n$ și $p \in \mathbb{Z}_2[X]$ un polinom de gradul $n - m$. Deoarece un polinom $f \in P_n$ se divide prin p dacă și numai dacă există un polinom $q \in P_m$ astfel încât $f = pq$, rezultă că mulțimea $\mathscr{C}$ a polinoamelor din P_n care se divid prin p are 2^m elemente.

Submulțimea C a lui D_n formată cu cuvintele din D_n care prin bijecția $(*)$ corespund polinoamelor din $\mathscr{C}$ se numește (n, m) - *codul polinomial* generat de p. Dacă $f \in \mathscr{C}$, atunci f se numește *polinom-cod*.

Fie acum bijecția $(**)$ $D_m \to P_m$, $b_0 b_1 \dots b_{m-1} \mapsto b_0 + b_1 X + \dots + b_{m-1} X^{m-1}$. Dacă $g \in P_m$, atunci g este numit *polinom-mesaj*. Există $q, r \in \mathbb{Z}_2[X]$ unic determinați astfel încât: $X^{n-m} g = pq + r$, $r \in P_{n-m}$.

Presupunem că $r = c_0 + c_1X + \ldots + c_{n-m-1}X^{n-m-1}$, $c_i \in \mathbb{Z}$ și fie
$f \overset{def}{=} r + X^{n-m}g = c_0 + c_1X + \ldots + c_{n-m-1}X^{n-m-1} + b_0X^{n-m} + \ldots + b_{m-1}X^{n-1}$. Avem $f \in \mathscr{C}$.

Într-adevăr, cum $r + r = 0$, avem $f = r + X^{n-m}g = r + pq + r = pq$, de unde $f \in \mathscr{C}$.

Se obține corespondența $P_m \to \mathscr{C}$, $g \to f$ care evident este bijectivă. Așadar, de la mesaje (din D_m) la cuvinte-cod (din $C \subset D_n$) se trece astfel: mesajul $b_0b_1\ldots b_{m-1}$ trece prin bijecția $(**)$ în polinomul-mesaj $g = b_0 + b_1X + \ldots + b_{m-1}X^{m-1}$, căruia îi corespunde polinomul-cod $f = r + X^{n-m}g$. În fine, polinomul-cod f trece prin inversa bijecției $(*)$ în cuvântul-cod $c_0c_1\ldots c_{n-m-1}b_0b_1\ldots b_{m-1}$, unde c_0, c_1, ... c_{n-m-1} sunt coeficienții restului împărțirii lui $X^{n-m}q$ prin p.

Evident, un cuvânt $u \in D_n$, $u = a_0a_1 \ldots a_{n-1}$ se găsește în C dacă și numai dacă polinomul
$f = a_0 + a_1X + \ldots + a_{n-1}X^{n-1}$ se divide prin p.

Fie (6, 3)-codul polinomial generat de polinomul $p = 1 + X + X^3 \in \mathbb{Z}_2[X]$.

a) Să se codifice mesajul 110.

b) Care dintre cuvintele 111001 și 110011 sunt cuvinte-cod?

Soluție. a) Mesajului 110 îi corespunde prin $(**)$ polinomul-mesaj $g = 1 + X$ și atunci
$X^{n-m}g = X^{6-3}(1 + X) = X^3 + X^4$. Făcând împărțirea cu rest în $\mathbb{Z}_2[X]$ a polinomului $X^3 + X^4$ prin polinomul $P = 1 + X + X^3$ se obține restul $r = 1 + X^2$. Așadar, polinomul-cod corespunzător lui $g = 1 + X^2$ este $g = r + X^3g = 1 + X^2 + X^3 + X^4$, căruia îi corespunde cuvântul cod 101110.

b) Cuvântului 111001 din D_6 îi corespunde prin $(*)$ polinomul $f = 1 + X + X^2 + X^5$. Se constată că f se divide prin p, deci 111001 este cuvânt cod. Cuvântului 110011 îi corespunde prin $(*)$ polinomul $1 + X + X^4 + X^5$ care împărțit la p dă restul X, deci 110011 nu este cuvânt cod.

Exerciții rezolvate.

1) Descompuneți în factori ireductibili peste $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ și $\mathbb{C}$ polinomul $f = X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 2$ știind că admite rădăcina $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Soluție. Polinomul f având coeficienții reali, admite și rădăcina $\bar{z} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ și deci se divide prin polinomul $(X - z)(X - \bar{z}) = X^2 + X + 1$. Împărțind pe f prin $X^2 + X + 1$ se găsește câtul $X^2 - 2$, deci $f = (X^2 - 2)(X^2 + X + 1)$

Cum discriminatul lui $X^2 + X + 1$ este $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 = -3 < 0$ polinomul $X^2 + X + 1$ este ireductibil peste $\mathbb{R}$ și cu atât mai mult peste $\mathbb{Q}$ (pentru că, $\mathbb{Q}[X] \subset \mathbb{R}[X]$).

Cum și $X^2 - 2$ este ireductibil peste $\mathbb{Q}$ (pentru că rădăcinile sale nu sunt în $\mathbb{Q}$) rezultă că
$f = (X^2 - 2)(X^2 + X + 1)$ este descompunerea în factori ireductibili peste $\mathbb{Q}$ a lui f.

Acum este evident că descompunerile lui f în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$ și $\mathbb{C}$ sunt:

$$f = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})(X^2 + X + 1) \text{ respectiv } f = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})\left(X + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

2) Descompuneți polinomul $f = X^4 + X^2 + 1$ în factori ireductibili peste: a) $\mathbb{Q}$; b) $\mathbb{R}$; c) $\mathbb{C}$.

Soluție. Putem scrie $f = X^4 + 2X^2 + 1 - X^2 = (X^2 + 1)^2 - X^2 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$

Polinoamele $X^2 + X + 1$ și $X^2 - X + 1$ sunt ireductibile peste $\mathbb{Q}$ și $\mathbb{R}$ deoarece discriminanții sunt negativi. Peste $\mathbb{C}$, aceste polinoame se pot descompune astfel:

$$X^2 + X + 1 = \left(X + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right), \quad X^2 - X + 1 = \left(X - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right),$$

deci $f = \left(X + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)$.

3) Descompuneți în factori ireductibili peste corpul $\mathbb{Z}_3$ polinomul $f = X^3 + \hat{2}X^2 + X + \hat{2} \in \mathbb{Z}_3[X]$.

Soluție. Valorile $f(\alpha)$ ale polinomului f când $\alpha \in \mathbb{Z}_3$ sunt:

α	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$f(\alpha)$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$

Rezultă că f se divide prin $X - \hat{1} = X + \hat{2}$. Folosind schema lui Horner, avem:

$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$

deci câtul împărțirii lui f prin $X - \hat{1}$ este $X^2 + \hat{1}$. Cum gradul lui $X^2 + \hat{1}$ este 2 și cum $X^2 + \hat{1}$ nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_3$, rezultă că este ireductibil peste $\mathbb{Z}_3$. Descompunerea căutată este:

$$f = (X - \hat{2})(X^2 + \hat{1}).$$

4) Fie $n \geqslant 2$, $f = (X - a_1)(X - a_2)\ \dots\ (X - a_n) + 1$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ distincte. Demonstrați că f este ireductibil peste $\mathbb{Z}$.

Soluție. Presupunem că $f = gh$ cu $g, h \in \mathbb{Z}[X]$, grad $g < n$, grad $h < n$.

Avem $f(a_i) = -1$, adică $g(a_i)h(a_i) = -1$, $i = \overline{1,n}$. Cum $g(a_i), h(a_i) \in \mathbb{Z}$, rezultă $g(a_i) = 1$ și $h(a_i) = -1$ sau $g(a_i) = -1$ și $h(a_i) = 1$. În ambele cazuri avem $g(a_i) + h(a_i) = 0$, $i = \overline{1,n}$. Fie $q = g + h$. Avem grad $q < n$. Presupunem $q \neq 0$. Deoarece $q(a_i) = 0, i = \overline{1,n}$, înseamnă că putem scrie $q(X) = (X - a_i)(X - a_2)\dots(X - a_n)s(X)$, grad $s \geqslant 0$. Rezultă grad $q \geqslant n$, contradicție! Deci $q = 0$ și prin urmare $h = -g$ iar $f = -g^2$. Deducem $f(x) \leqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, fals deoarece dacă alegem $x_0 = \max\left\{ |a_i| \,\middle|\, i = \overline{1,n} \right\} + 1$ rezultă $f(x_0) > 0$.

5) a) Câte polinoame de grad mai mic sau egal cu 4 sunt în $\mathbb{Z}_2[X]$?

b) Determinați polinoamele ireductibile peste $\mathbb{Z}_2$ de grad cel mult 4.

Soluție. a) Dacă $f \in \mathbb{Z}_2[X]$ și are gradul cel mult 4, atunci $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4$, cu $a_i \in \mathbb{Z}_2 = \{\hat{0}, \hat{1}\}$. Cum pentru fiecare a_i avem două posibilități, există $2^5 = 32$ polinoame de grad cel mult 4 în $\mathbb{Z}_2[X]$.

b) Singurele polinoame de grad 1 din $\mathbb{Z}_2[X]$ sunt X și $\hat{1} + X$ și acestea sunt ireductibile.

Dacă $f \in \mathbb{Z}_2[X]$ este ireductibil peste $\mathbb{Z}_2[X]$ și $n =$ grad $f > 1$, atunci $a_0 = f(\hat{0}) \neq \hat{0}$, $a_0 + a_1 + \dots + a_n = f(\hat{1}) \neq \hat{0}$. Singurele polinoame de gradul al 2-lea sau al 3-lea care îndeplinesc aceste condiții sunt $\hat{1} + X + X^2$, $\hat{1} + X + X^3$, $\hat{1} + X^2 + X^3$ și vor fi ireductibile peste $\mathbb{Z}_2$.

Polinoamele de gradul al 4-lea care îndeplinesc condițiile $f(\hat{0}) \neq \hat{0}, f(\hat{1}) \neq \hat{0}$ sunt $\hat{1} + X + X^4$, $\hat{1} + X^2 + X^4$, $\hat{1} + X^3 + X^4$, $\hat{1} + X + X^2 + X^3 + X^4$ și fie f unul dintre acestea. Dacă f este reductibil, descompunerea sa în factori ireductibili conține numai factori de gradul al 2-lea, deci numai pe $X^2 + X + \hat{1}$. Așadar $f = (\hat{1} + X + X^2)^2 = \hat{1} + X^2 + X^4$. Conchidem că polinoamele ireductibile de gradul al 4-lea sunt $\hat{1} + X + X^4$, $\hat{1} + X^3 + X^4$ și $\hat{1} + X + X^2 + X^3 + X^4$.

6) Determinați polinoamele monice (unitare) ireductibile de gradul al 2-lea din inelul $\mathbb{Z}_3[X]$.

Soluție. Cum termenul liber al polinomului ireductibil de grad mai mare sau egal cu 2, nu poate fi egal cu $\hat{0}$, rezultă că polinomalele căutate sunt de forma $X^2 + \hat{a}X + \hat{1}$ sau $X^2 + \hat{a}X + \hat{2}$. Punând condiția ca acestea să nu aibă rădăcini în $\mathbb{Z}_3$, se arată că polinoamele căutate sunt $X^2 + \hat{1}$, $X^2 + X + \hat{2}$ și $X^2 + \hat{2}X + \hat{2}$.

1. Folosind algoritmul lui Euclid, determinați c.m.m.d.c. al polinoamelor:
a) $f = X^4 + 3X^3 + X^2 - 2$ și
$g = X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ din $\mathbb{Q}[X]$.
b) $f = X^5 + X^2 - X + 1$ și
$g = 3X^4 - 5X^3 + 8X + 1$ din $\mathbb{Q}[X]$.

2. Folosind algoritmul lui Euclid, determinați c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. ale polinoamelor $f, g \in \mathbb{Z}_7[X]$, $f = X^4 + X^2 + \hat{2}X + \hat{2}$ și $g = X^2 + \hat{3}X + \hat{6}$.

3. Determinați c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. pentru polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$ în cazurile:
a) $f = X^6 - 7X^4 + 8X^3 - 7X + 7$,
$g = 3X^6 - 7X^4 + 3X^3 - 7X$.
b) $f = X^4 - 4X^3 + 1$,
$g = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + X + 1$.
c) $f = X^6 - 9X^4 - 10X^3 - 9X^2 + 1$,
$g = X^4 - 4\sqrt{2}X^3 + 6X^2 + 4\sqrt{2}X + 1$.

4. Arătați că polinoamele $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^4 - X^3 - 4X^2 + 4X + 1$, $g = X^3 - 2X^2 + 1$ sunt prime între ele.

5. Determinați c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. pentru polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^9 - 1$, $g = X^6 - 1$.

6. Fie $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^3 + aX^2 + 11X + 6$, $g = X^3 + bX^2 + 14X + 8$. Determinați a și b astfel încât f și g să admită un divizor comun de gradul al doilea.

7. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât c.m.m.d.c. (f, g) să fie un polinom de gradul al doilea, unde: $f = 2X^3 - 7X^2 + aX + 2$, $g = X^3 - 3X^2 + bX + 3$.

8. Descompuneți în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$ și peste $\mathbb{C}$ polinoamele: $f = X^4 + 4$ și $g = X^6 + 27$.

9. Fie $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^3 - 2$
a) Arătați că f este ireductibil peste $\mathbb{Q}$.
b) Descompuneți pe f în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$ și peste $\mathbb{C}$.

10. Descompuneți în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_5$ polinomul $f = X^4 + X^3 + \hat{2}X^2 + X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_5[X]$.

11. Descompuneți în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$ polinomul $f = X^{12} - 1$, $f \in \mathbb{R}[X]$.

12. Descompuneți în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$ polinomul $f = X^7 + X^6 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, $f \in \mathbb{R}[X]$.

13. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ și $f = mX(1 - X^n) - nX(1 - X^m)$. Demonstrați că f poate fi decompus sub forma $(1 - X)^2 g(X)$ și determinați polinomul g.

14. Descompuneți polinomul $X^8 + X^4 + 1$ în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$.

15. Demonstrați că polinomul $f = (X-1)^2(X-2)^2 + 1$ nu se poate descompune în produs de două polinoame cu coeficienți numere întregi.

16. Descompuneți în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_5$ polinomul $f \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = X^4 + X^3 + \hat{2}X^2 + X + \hat{1}$.

17. Determinați $\hat{a} \in \mathbb{Z}_3$ astfel încât polinomul $f = \hat{2}X^3 + \hat{a}X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_3[X]$ să fie ireductibil peste $\mathbb{Z}_3$.

18. Fie $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^3 - 2$.
a) Arătați că f este ireductibil peste $\mathbb{Q}$.
b) Descompuneți polinomul f în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$ și peste $\mathbb{C}$.

19. Descompuneți în factori ireductibili polinoamele de gradul al patrulea din $\mathbb{Z}_2[X]$.

20. Determinați polinoamele ireductibile peste $\mathbb{Z}_3$ de grad cel mult 3.

21. Fie $f, g \in \mathbb{Z}[X]$, $h = fg$ și p un număr prim. Dacă toți coeficienții lui h se divid prin p, atunci cel puțin unul dintre polinoamele f și g are toți coeficienții divizibili prin p.

22. (*Criteriul lui Eisenstein*).
Fie $f \in \mathbb{Z}[X]$, $f = a_0 + a_1X + .. + a_nX^n$, $n > 0$, $a_n \neq 0$ astfel încât există un număr prim p cu proprietățile: $p \mid a_0$, $p \mid a_1$, ..., $p \mid a_{n-1}$, $p \nmid a_n$, $p^2 \nmid a_0$. Arătați că:
a) dacă $f = gh$ cu $g, h \in \mathbb{Z}[X]$, atunci grad $g = n$ sau grad $h = n$;
b) f este ireductibil peste $\mathbb{Q}$.

23. Arătați că polinoamele $X^4 - 2$, $X^4 - 15$, $X^5 - px + p$, $X^{p-1} + ... + X + 1$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ și p este prim, sunt ireductibile peste $\mathbb{Q}$.

24. (*Criteriul reducerii*).
Fie $f = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$, $n > 0$, p prim astfel încât $p \nmid a_n$ și $\hat{f} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1X + ... + \hat{a}_nX^n \in \mathbb{Z}_p[X]$ este ireductibil peste corpul $\mathbb{Z}_p$.
a) Arătați că f este ireductibil peste $\mathbb{Q}$.
b) Arătați că polinomul $5X^4 - 3X^3 + 6X^2 + 4X + 3$ este ireductibil peste $\mathbb{Q}$.

Rădăcini ale polinoamelor

Fie K un corp comutativ și $f \in K[X]$ astfel încât grad $f = n > 0$, Un element $\alpha \in K$ se numește *rădăcină* a polinomului f dacă $f(\alpha) = 0$. Aplicând teorema lui Bézout, rezultă că polinomul $X - \alpha \in K[X]$ divide polinomul f adică există $q(X) \in K[X]$ astfel încât $f(X) = (X - \alpha)q(X)$.

Există polinoame de grad mai mare decât 0 care nu admit nici o rădăcină în corpul coeficienților. Astfel, dacă $f = X^2 + X + \hat{2} \in \mathbb{Z}_3[X]$, atunci $f(\hat{0}) = \hat{2} \neq \hat{0}$, $f(\hat{1}) = \hat{1} \neq \hat{0}$ și $f(\hat{2}) = \hat{2} \neq \hat{0}$, deci f nu admite rădăcini în corpul $\mathbb{Z}_3$.

De asemenea, dacă $f = X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$, avem $f(\alpha) \neq 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ pentru că din $\alpha^2 + 1 = 0$ rezultă $\alpha^2 = -1 < 0$. Contradicție.

Pe de altă parte, conform *teoremei fundamentale a algebrei* (teorema d'Alembert Gauss) orice polinom $f \in \mathbb{C}[X]$ de grad mai mare decât 0 admite cel puțin o rădăcină în $\mathbb{C}$.

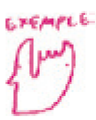
Aplicând teorema d'Alembert-Gauss se poate demonstra următorul rezultat:

Teorema 1. Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0$ cu $a_n \neq 0$ și $n > 0$. Există numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$, nu neapărat distincte, astfel încât $f = a_n(X - x_1)(X - x_2) \ldots (X - x_n)$ numită *descompunerea în factori liniari* a lui f.

Demonstrație. Inducție matematică după n = grad f. Dacă $n = 1$, atunci $f = a_1X + a_0 = a_1\left(X + \frac{a_0}{a_1}\right) = a_1(X - x_1)$ cu $x_1 = -\frac{a_0}{a_1}$.

Presupunem că $n > 1$ și că rezultatul este adevărat pentru polinoame de grad $n - 1$ din $\mathbb{C}[X]$. Conform teoremei d'Alembert-Gauss există $x_1 \in \mathbb{C}$ astfel încât $f(x_1) = 0$. Aplicând teorema lui Bézout, există $q \in \mathbb{C}[X]$ astfel încât $f(X) = (X - x_1)q(X)$. Evident grad $q = n - 1 > 0$ și coeficientul dominant al lui q este a_n. Conform ipotezei de inducție există $x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ astfel încât $q = a_n(X - x_2)\ldots(X - x_n)$, de unde

$$f = a_n(X - x_1)(X - x_2)\ldots(X - x_n). \blacksquare$$



1) Dacă $f = X^3 - 1 \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$, atunci $f = (X - 1)(X^2 + X + 1) = (X - 1)(X - \varepsilon)(X - \varepsilon^2)$ este descompunerea în factori liniari a lui f, unde $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) Dacă $f = X^4 - 1 \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$, atunci $f = (X^2 - 1)(X^2 + 1) = (X - 1)(X + 1)(X - i)(X + i)$ este descompunerea în factori liniari a lui f.

1) Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$.
a) Calculați $f(1)$.
b) Calculați $f(2)$.
c) Calculați $f(3)$.
d) Verificați dacă $f = (X - 1)(X - 2)(X - 3)$.
e) Care sunt rădăcinile reale ale lui f?

2) Fie polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = 4X^4 + 3X^2 - 1$.
a) Calculați $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
b) Calculați $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.
c) Calculați $f(i)$.
d) Calculați $f(-i)$.
e) Arătați că polinomul f este divizibil cu $X^2 + 1$.
f) Calculați $g = (4X^2 - 1)(X^2 + 1)$
g) Arătați că $f = g$.
h) Care sunt rădăcinile reale ale polinomului g?
i) Care sunt rădăcinile complexe ale polinomului f?

3) Fie polinomul, $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^4 - 2X^3 - 6X^2 + 16X - 16$. Știind că $2\sqrt{2}$ este rădăcină a polinomului f, descompuneți f în factori liniari în:
a) $\mathbb{Q}[X]$;
b) $\mathbb{R}[X]$;
c) $\mathbb{C}[X]$.

4) Fie $f = X^3 + \hat{2}X + \hat{1}$, $f \in \mathbb{Z}_3[X]$.
a) Calculați $f(\hat{0})$
b) Calculați $f(\hat{1})$
c) Calculați $f(\hat{2})$.
d) Are polinomul f rădăcini în $\mathbb{Z}_3$?

Observații

♦ Dacă $f \in \mathbb{C}[X]$, grad $f = n$ și $f = a_n(X - x_1)(X - x_2) \ldots (X - x_n)$ cu $x_i \in \mathbb{C}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, atunci

$f(x_i) = a_n(x_i - x_1)(x_i - x_2)\ldots(x_i - x_i)\ldots(x_i - x_n) = 0$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n$, adică $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt rădăcini din $\mathbb{C}$ pentru f. Dacă pentru un număr $z \in \mathbb{C}$ avem $f(z) = 0$, atunci $a_n(z - x_1)(z - x_2) \ldots (z - x_n) = 0$ și deci există i astfel încât $z - x_i = 0$, adică $z = x_i$. Așadar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt singurele rădăcini (nu neapărat distincte) din $\mathbb{C}$ ale lui f.

♦ În cazuri particulare de polinoame, o descompunere ca cea din enunțul teoremei precedente poate avea loc și când $K \neq \mathbb{C}$.

Astfel dacă $f \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = \hat{2}X^3 + X^2 + \hat{3}X + \hat{4}$, atunci $f(\hat{1}) = \hat{0}, f(\hat{2}) = \hat{0}$ și $f(\hat{4}) = \hat{0}$. Așadar $\hat{1}$, $\hat{2}$ și $\hat{4}$ sunt rădăcini din $\mathbb{Z}_5$ pentru f și avem: $f = \hat{2}(X - \hat{1})(X - \hat{2})(X - \hat{4})$, adică $f = \hat{2}(X + \hat{4})(X + \hat{3})(X + \hat{1})$.

Rădăcini multiple

Fie $f \in K[X]$, grad$f = n > 0$ și $\alpha \in K$ o rădăcină a lui f. Cum $f(\alpha) = 0$, rezultă că $X - \alpha \mid f$, deci există $q_1 \in K[X]$ astfel încât

$$f = (X - \alpha)q_1$$

Să observăm că $(X - \alpha)^2$ divide pe f dacă și numai dacă $q_1(\alpha) = 0$. Într-adevăr, dacă $(X - \alpha)^2 \mid f$, atunci $f = (X - \alpha)^2 q_2$ cu $q_2 \in K[X]$. Din $f = (X - \alpha)q_1 = (X - \alpha)^2 q_2$ obținem $q_1 = (X - \alpha)q_2$ și deci $q_1(\alpha) = 0$. Reciproc, dacă $X - \alpha \mid q_1$, atunci evident $(X - \alpha)^2 \mid f$.

Analog se arată că $(X - \alpha)^3 \mid f$ dacă și numai dacă $f(\alpha) = q_1(\alpha) = q_2(\alpha) = 0$ unde q_1 este câtul împărțirii lui f prin $X - \alpha$, iar q_2 câtul împărțirii lui q_1 prin $X - \alpha$.

În general avem:

Teorema 2. Fie $f \in K[X]$, grad$f = n > 0$, $\alpha \in K$ și $e \in \mathbb{N}^*$, $e \leqslant n$. Atunci $(X - \alpha)^e \mid f$ și $(X - \alpha)^{e+1} \nmid f$ dacă și numai dacă

$$f(\alpha) = q_1(\alpha) = q_2(\alpha) = \ldots = q_{e-1}(\alpha) = 0 \text{ și } q_e(\alpha) \neq 0,$$

unde $q_1, q_2, \ldots, q_e$ sunt respectiv câturile împărțirii prin $X - \alpha$ ale polinoamelor $f, q_1, q_2, \ldots, q_{e-1}$.

Definiție. Fie $f \in K[X]$, grad$f = n > 0$, $e \in \mathbb{N}^*$ și $\alpha \in K$ astfel încât $f(\alpha) = 0$. Spunem că α este rădăcină de *ordin de multiplicitate* e a polinomului f dacă $(X - \alpha)^e \mid f$ și $(X - \alpha)^{e+1} \nmid f$.

Când $e = 1, 2, 3, \ldots$ spunem că α este respectiv rădăcină *simplă*, *dublă*, *triplă* ... . De asemenea, dacă $e > 1$ spunem că α este rădăcină *multiplă*.

5) Fie polinomul

$f = X^4 + X^3 + X^2 + X + \hat{1}$, $f \in \mathbb{Z}_2[X]$.

a) Calculați $f(\hat{0})$

b) Calculați $f(\hat{1})$

c) Arătați că polinomul f nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_2$.

6) Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 + 2X^3 + aX^2 + bX + c$.

Determinați a, b, c astfel încât f împărțit la $X - 1$ să dea restul -15 și să admită pe $1 - i$ ca rădăcină. Aflați apoi toate rădăcinile lui f.

7) Fie polinomul

$f \in \mathbb{R}[X]$, $f = (X - 1)^2(X - 2)$.

a) Scrieți polinomul în forma canonică după puterile descrescătoare ale lui X.

b) Calculați f'.

c) Calculați $f(1)$.

d) Calculați $f(2)$.

e) Calculați $f'(1)$.

f) Determinați rădăcinile reale ale polinomului f specificând și ordinul de multiplicitate.

g) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$.

8) Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 - 6X^2 + 12X - 8$.

a) Calculați $f(2)$.

b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la $X - 2$.

c) Determinați rădăcinile reale ale polinomului f și specificați ordinul de multiplicitate al acestora.

9) Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 - (m + 1)X^3 + (2n - m)X^2 + X + 1$. Determinați numerele reale m și n știind că f admite rădăcina dublă $\alpha = 2$.

Exerciții rezolvate.

1) Fie $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^4 - 3X^3 + X^2 + 4$. Arătați că $\alpha = 2$ este rădăcină dublă a polinomului f.

Soluție. Avem $f(2) = 0$, deci $\alpha = 2$ este rădăcină a polinomului f. Împărțim polinomul f prin $X - 2$ și găsim $f = (X - 2)q_1$, unde $q_1 = X^3 - X^2 - X - 2$. Cum $q_1(2) = 0$ rezultă că $X - 2$ divide polinomul q_1 și efectuând împărțirea găsim $q_1 = (X - 2)q_2$, unde $q_2 = X^2 + X + 1$. Cum $q_2(2) = 7 \neq 0$ rezultă că $\alpha = 2$ este rădăcină dublă a polinomului $f = X^4 - 3X^3 + X^2 + 4$.

Pentru determinarea câturilor q_1 și q_2 folosim „în cascadă" schema lui Horner ca mai jos.

f				
q_1			$f(2)$	2
q_2		$q_1(2)$	2	
q_3	$q_2(2)$	2		

sau explicit

1	–3	1	0	4	
1	–1	–1	–2	0	2
1	1	1	0	2	
1	3	7	2		

2) Fie $f = X^5 - 5X^4 + 14X^3 - 22X^2 + 17X - 5$. Arătați că $\alpha = 1$ este rădăcină triplă a lui f și precizați apoi care este descompunerea în factori liniari a lui f.

Soluție. Folosind „în cascadă" schema lui Horner pentru împărțirea cu $X - 1$, avem:

Rezultă că $f = (X - 1)^3(X^2 - 2X + 5)$. Cum rădăcinile polinomului $X^2 - 2X + 5$ sunt $1 + 2i$ și $1 - 2i$, descompunerea în factori liniari a lui f este:

$f(X) = (X - 1)(X - 1)(X - 1)(X - 1 - 2i)(X - 1 + 2\mathrm{i}) = (X - 1)^3(X - 1 - 2i)(X - 1 + 2i)$.

1	–5	14	–22	17	–5	
1	–4	10	–12	5	0	1
1	–3	7	–5	0	1	
1	–2	5	0	1		
1	–1	4	1			

3) Fie $f \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = X^4 - X^3 + X^2 - \hat{2}X + \hat{3}$.

Determinați multiplicitatea rădăcinii $\alpha = \hat{3} \in \mathbb{Z}_5$ pentru polinomul f.

Soluție. Folosind schema Horner „în cascadă", avem

$\hat{1}$	$-\hat{1}$	$\hat{1}$	$-\hat{2}$	$\hat{3}$	
$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	
$\hat{1}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{3}$		

Rezultă că $f = (X - \hat{3})^2(X^2 + \hat{2}) = (X + \hat{2})^2(X^2 + \hat{2})$ și $\alpha = \hat{3}$ este rădăcină dublă pentru f.

Dacă $f \in K[X]$, $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_2X^2 + a_1X + + a_0$, atunci polinomul $f' \in K[X]$

$$f' \overset{\text{def}}{=} na_nX^{n-1} + (n-1)a_{n-1}X^{n-2} + ... + 2a_2X + a_1$$

se numește *derivata* formală a polinomului f. Regulile de derivare pentru funcțiile polinomiale reale de variabilă reală se regăsesc și la derivata formală a polinoamelor:

$$(f+g)' = f' + g',\ (fg)' = f'g + fg',\ (af)' = af',$$

$$f(g(X))' = f'(g(X))g'(X)$$

Dacă $f(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$, atunci notăm cu $f(g(X))$ pe $a_n g(X)^n + a_{n-1}g(X)^{n-1} + \dots + a_1 g(X) + a_0$.

4) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ și rezolvați ecuația $x^3 - ax^2 + 2x + b = 0$ știind că admite soluția dublă $x = -1$.

Soluție. Considerăm polinomul asociat $f = X^3 - aX^2 + 2X + b = 0$ și aplicăm schema lui Horner.

X^3	X^2	X	X^0	
1	$-a$	2	b	
1	$-a-1$	$a+3$	$b-a-3$	-1

Avem deci prima condiție: $b - a - 3 = 0$ (1)

X^2	X	X^0	
1	$-a-1$	$a+3$	
1	$-a-2$	$2a+5$	-1

a doua condiție este $2a + 5 = 0$ (2)

Rezultă $a = -\dfrac{5}{2}$, $b = \dfrac{1}{2}$ și obținem $X^3 + \dfrac{5}{2}X^2 + 2X + \dfrac{1}{2} = (X+1)^2\left(X - \dfrac{1}{2}\right)$. Deci $x_1 = x_2 = -1$ și $x_3 = \dfrac{1}{2}$.

5) Demonstrați că polinomul $(X^2+1)^{3n+1} + (X+1)^{2n+1} + X^{n+2} + X^{6n+1}$ este divizibil prin polinomul $X^2 + X + 1$ dacă și numai dacă n este par.

Soluție. Fie x_1, x_2 rădăcinile polinomului $X^2 + X + 1$, $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Atunci $X^2 + X + 1 = (X - x_1)(X - x_2)$. Pentru a demonstra că $X^2 + X + 1 \mid f$ este necesar și suficient să arătăm că x_1, x_2 sunt rădăcini ale lui f. Fie $\alpha \in \{x_1, x_2\}$. Atunci $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ și $\alpha^3 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0$. Avem: $f(\alpha) = (\alpha^2+1)^{3n+1} + (\alpha+1)^{2n+1} + \alpha^{n+2} + \alpha^{6n+1} = (-\alpha)^{3n+1} + (-\alpha^2)^{2n+1} + \alpha^{n+2} + (\alpha^3)^{2n} \cdot \alpha =$
$= (-\alpha)^{3n} \cdot (-\alpha) - \alpha^{4n+2} + \alpha^{n+2} + \alpha = -(-1)^n \cdot \alpha - \alpha^{n+2}(\alpha^{3n} - 1) + \alpha = \alpha(1 - (-1)^n)$. Conchidem că $f(\alpha) = 0$ dacă și numai dacă n este par.

6) Fie $f \in K[X]$, grad $f = n \geqslant 2$ și $\alpha \in K$.

a) Arătați că $(X - \alpha)^2 \mid f(X) \Leftrightarrow f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$.

b) Arătați că polinomul $f = nX^{n+2} - (n+1)X^{n+1} + X$ se divide prin $(X-1)^2$.

Soluție a) Dacă $(X-\alpha)^2 \mid f(X)$ avem $f(X) = (X-\alpha)^2 q(X)$ cu $q(X) \in K[X]$. Folosind regulile de derivare avem:

$$f'(X) = 2(X-\alpha)q(X) + (X-\alpha)^2 q'(X), \text{ de unde } f(\alpha) = f'(\alpha) = 0.$$

Reciproc, presupunem că $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$.

Din $f(\alpha) = 0$ rezultă că $f(X) = (X-\alpha)g(X)$ cu $g(X) \in K[X]$.

Derivând, obținem $f'(X) = g(X) + (X-\alpha)g'(X)$ și cum $f'(\alpha) = 0$ rezultă că $g(\alpha) = 0$, deci $g(X) = (X-\alpha)q(X)$ cu $q \in K[X]$ și atunci $f(X) = (X-\alpha)^2 q(X)$.

b) Avem $f'(X) = (n+2)nX^{n+1} - (n+1)^2 X^n + 1$ și se constată că $f(1) = f'(1) = 0$.

Relații între rădăcini și coeficienți

Fie K un corp comutativ și $f \in K[X]$, $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ cu $n > 0$ și $a_n \neq 0$.

Presupunem că f se descompune în factori liniari în $K[X]$, adică există $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$ astfel încât

$$f = a_n(X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_n)$$

Conform teoremei d'Alembert-Gauss acest lucru este posibil pentru orice polinom f de grad mai mare decât 0 dacă $K = \mathbb{C}$.

Elementele $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$ sunt rădăcinile lui f din K, adică $f(x_i) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Între coeficienții $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ ai polinomului f și rădăcinile sale $x_1, x_2, \dots, x_n$ există o legătură, care se descrie prin *relațiile lui Viète* obținute prin identificarea coeficienților din egalitatea

$$a_n(X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_n) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0.$$

Să examinăm cazurile $n = 2$, $n = 3$ și $n = 4$.

♦ Egalitatea $a_2(X - x_1)(X - x_2) = a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ mai poate fi scrisă sub forma

$$a_2 X^2 - a_2(x_1 + x_2)X + a_2 x_1 x_2 = a_2 X^2 + a_1 X + a_0,$$

de unde, prin identificarea coeficienților, obținem:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{a_1}{a_2} \\ x_1 x_2 = \dfrac{a_0}{a_2} \end{cases}$$

(prin $\dfrac{a_1}{a_2}$ se notează $a_1 a_2^{-1} \in K$ etc.)

♦ Egalitatea $a_3(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3) = a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ se mai scrie sub forma

$$a_3 X^3 - a_3(x_1 + x_2 + x_3)X^2 + a_3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)X - a_3 x_1 x_2 x_3 = a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0,$$ de unde:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{a_2}{a_3} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{a_1}{a_3} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{a_0}{a_3} \end{cases}$$

♦ Din egalitatea

$$a(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4) = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e,$$

obținem

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\dfrac{d}{a} \\ x_1x_2x_3x_4 = \dfrac{e}{a} \end{cases}$$

10) Scrieți relațiile lui Viète pentru fiecare dintre polinoamele:

a) $f = 3X^2 + 2X + 1$;
b) $f = 4X^3 + 3X^2 + 2X + 1$;
c) $f = 5X^4 + 4X^3 + 3X^2 + 2X + 1$;
d) $f = 3 + 2X + X^2$;
e) $f = 4 + 3X + 2X^2 + X^3$;
f) $f = 5 + 4X + 3X^2 + 2X^3 + X^4$.

11) Scrieți relațiile lui Viète pentru fiecare dintre polinoamele:

a) $f = 4X^2 - 5X + 1$;
b) $f = -2X^2 + 3$;
c) $f = -X^3 - 2X^2 + X - 5$;
d) $f = 2X^3 - X + 1$;
e) $f = 2X^3 - X^2 + X$;
f) $f = 2X^3 - X^2 + 1$;
g) $f = X^4 + X^3 - X^2 + 1$;
h) $f = X^4 - 2X^2$;
i) $f = -X^4 + 2$;
j) $f = 2X^4 + X$.

12) Fie $f \in \mathbb{Z}[X]$, $f = X^4 + 12X - 5$. Să se arate că f are două rădăcini a căror sumă este egală cu 2. Să se afle rădăcinile polinomului.

13) Determinați rădăcinile polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$, știind că între acestea există relațiile precizate în fiecare caz:

a) $f = 6X^3 - 47X^2 + 64X + 12$ și $x_1 = 3x_2$;
b) $f = X^4 + 10X^3 + 35X^2 + 50X + 24$ și $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$.

14) Determinați rădăcinile polinomului f, dacă acestea verifică relația indicată $f = X^3 - 13X + 12$, $x_1 - x_2 = 2$.

15) Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 - 2X^2 + 2X - 1$. Determinați rădăcinile polinomului f știind că acestea sunt în progresie geometrică.

Observație.

Relațiile lui Viète sunt simetrice în raport cu $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Rezultatul general este:

Teorema 3. Fie $f \in K[X]$, $f = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$ un polinom de grad $n > 0$. Pentru $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ avem $f = a_n(X - x_1)(X - x_2) \ldots (X - x_n)$ dacă și numai dacă:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} & (1) \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} & (2) \\ \ldots & \ldots \\ x_1 \ldots x_{k-1}x_k + x_1 \ldots x_{k-1}x_{k+1} + \ldots + x_{n-k+1} \ldots x_{n-1}x_n = (-1)^k \dfrac{a_{n-k}}{a_n} & (k) \\ \ldots & \ldots \\ x_1x_2 \ldots x_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n} & (n) \end{cases}$$

Demonstrație

Presupunem că $f = a_n(X - x_1)(X - x_2) \ldots (X - x_n)$ cu $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$, nu neapărat distincte. Avem $a_n(X - x_1)(X - x_2) \ldots (X - x_n) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$.

Efectuăm produsele din membrul stâng al egalității precedente și scriem rezultatul ca un polinom în X după puterile descrescătoare ale lui X.

Identificând coeficienții se obțin relațiile (1) – (n) din enunțul teoremei.

Să observăm că membrul stâng al relației (k) este o sumă de C_n^k termeni, fiecare termen fiind un produs de k factori luați dintre $x_1, x_2, \ldots, x_n$, în ordinea crescătoare a indicilor.

Reciproc, presupunem că elementele $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$, nu neapărat distincte, verifică relațiile (1) – (n) din enunțul teoremei și fie polinomul $g \in K[X]$, $g = a_n(X - x_1)(X - x_2) \ldots (X - x_n)$.

Evident, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ coincid cu rădăcinile lui g din K. Avem $g = f$ pentru că

$$g = a_n X^n - a_n(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)X^{n-1} + \ldots + (-1)^n a_n x_1 x_2 \ldots x_n =$$

$$= a_n X^n - a_n\left(-\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)X^{n-1} + \ldots + (-1)^n a_n (-1)^n \frac{a_0}{a_n} =$$

$$= a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 = f.$$

Când $K = \mathbb{C}$, din teorema fundamentală a algebrei rezultă că pentru orice polinom f, grad $f = n$, $n > 0$ avem $f = a_n(X - x_1) \ldots (X - x_n)$ cu $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$, așa cum se cere în enunțul teoremei 3. ■

Egalitățile (1) – (n) din enunțul teoremei 3 sunt cunoscute sub numele de *relațiile lui Viète* și descriu legăturile dintre rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ale polinomului f și coeficienții acestuia. Ele pot folosi la determinarea efectivă a rădăcinilor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dacă se cunoaște o relație suplimentară între acestea.

16) Dacă x_1, x_2 sunt rădăcinile polinomului $f = aX^2 + bX^2 + c$, $f \in \mathbb{C}[X]$ și cei trei coeficienți a, b, c formează o progresie aritmetică, să se arate că este verificată relația: $2(x_1 + x_2) + x_1x_2 + 1 = 0$.

17) Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului $f = X^3 + pX + q$, $f \in \mathbb{R}[X]$, arătați că $12(x_1^7 + x_2^7 + x_3^7) =$
$= 7\left(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3\right)\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^2$

18) Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului $f = X^3 - 5X + 2$, să se calculeze $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$.

19) Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$
$f = X^2 + pX + q$.
Să se determine numerele reale p și q astfel ca diferența rădăcinilor polinomului să fie 4, iar diferența cuburilor rădăcinilor să fie 208.

20) Fie polinomul $f = X^3 - 3X^2 + X - 1$, $f \in \mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile x_1, x_2 și x_3. Determinați un polinom $g \in \mathbb{R}[X]$ care are rădăcinile α_1, α_2 și α_3, știind că:

a) $\alpha_1 = x_1^2$,
$\alpha_2 = x_2^2$,
$\alpha_3 = x_3^2$;

b) $\alpha_1 = 3x_1 + x_2 + x_3$,
$\alpha_2 = x_1 + 3x_2 + x_3$,
$\alpha_3 = x_1 + x_2 + 3x_3$;

c) $\alpha_1 = x_1^2 + x_2^2$,
$\alpha_2 = x_1^2 + x_3^2$,
$\alpha_3 = x_2^2 + x_3^2$

d) $\alpha_1 = 1 + \dfrac{1}{x_1^2}$,
$\alpha_2 = 1 + \dfrac{1}{x_2^2}$,
$\alpha_3 = 1 + \dfrac{1}{x_3^2}$.

Exerciții rezolvate.

1) Determinați rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ ale polinomului $f = 2X^3 - X^2 - 7X - 3 \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$, știind că $x_1 + x_2 = 1$.

Soluție. Relațiile lui Viète pentru polinomul f sunt: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{1}{2} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -\dfrac{7}{2} \\ x_1x_2x_3 = \dfrac{3}{2} \end{cases}$.

Cum $x_1 + x_2 = 1$, din prima relație se obține $x_3 = -\dfrac{1}{2}$. Apoi, din ultima relație rezultă că $x_1x_2 = -3$. Cum $x_1 + x_2 = 1$ și $x_1x_2 = -3$, x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - x - 3 = 0$, deci $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$, $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$.

2) Determinați λ și rădăcinile polinomului $f = X^4 - 2X^3 - 6X^2 + \lambda X - 3 \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$, știind că $x_1x_2 = 3$.

Soluție. Relațiile lui Viète pentru polinomul f de gradul al 4-lea pot fi scrise astfel:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 & (1) \\ x_1x_2 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_3x_4 = -6 & (2) \\ x_1x_2(x_3 + x_4) + (x_1 + x_2)(x_3x_4) = -\lambda & (3) \\ x_1x_2x_3x_4 = -3 & (4) \end{cases}$$

făcând în relațiile (2) și (3) grupări de termeni care adesea ușurează rezolvarea. Cum $x_1x_2 = 3$, din ultima relație rezultă că $x_3x_4 = -1$. Acum primele două relații pot fi scrise $\begin{cases} (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) = 2 \\ (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = -8 \end{cases}$ de unde $x_1 + x_2 = 4$ și $x_3 + x_4 = -2$ ca soluții ale ecuației $x^2 - 2x - 8 = 0$. Din a treia relație se obține acum $\lambda = 10$. În continuare, din $x_1 + x_2 = 4$ și $x_1x_2 = 3$ se obțin $x_1 = 3$ și $x_2 = 1$, iar din $x_3 + x_4 = -2$ și $x_3x_4 = -1$ rezultă că $x_3 = -1 + \sqrt{2}$ și $x_4 = -1 - \sqrt{2}$.

3) Rezolvați ecuația $x^3 + 6x^2 + 6x - 4 = 0$ știind că soluțiile sunt în progresie aritmetică.

Soluție. Avem condiția $x_1 + x_3 = 2x_2$ și relațiile lui Viète: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -6 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 6 \\ x_1x_2x_3 = 4 \end{cases}$. Relațiile $x_1 + x_2 + x_3 = -6$ și $x_1 + x_3 = 2x_2$ conduc la $x_2 = -2$. Din ultima relație deducem $x_1x_3 = -2$. Avem $x_1 + x_3 = -4$ și $x_1x_3 = -2$, deci x_1, x_3 sunt soluțiile ecuației $x^2 + 4x - 2 = 0$, adică $x_{1,3} = -2 \pm \sqrt{6}$. Soluțiile ecuației sunt $-2 - \sqrt{6}, -2$ și $-2 + \sqrt{6}$.

4) Fie $f = X^3 + X^2 + aX + b \in \mathbb{C}[X]$. Determinați rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale lui f știind că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 8$ și că restul împărțirii lui $f(X-1)$ la $X+1$ este -4.

Soluție. Calculăm expresia $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ în funcție de a și b: scriem că x_1, x_2, x_3 verifică ecuația $f(x) = 0$, adică: $x_1^3 + x_1^2 + ax_1 + b = 0$; $x_2^3 + x_2^2 + ax_2 + b = 0$; $x_3^3 + x_3^2 + ax_3 + b = 0$. Adunând, obținem $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - a(x_1 + x_2 + x_3) - 3b$. Avem: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 1 - 2a$ și înlocuind, obținem: $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 2a - 1 + a - 3b = 3a - 3b - 1$. Deci $3a - 3b - 1 = 8$, de unde $a - b = 3$. Restul împărțirii polinomului $f(X-1)$ la $X+1$ este egal cu valoarea lui $f(X-1)$ în $x = -1$, deci $f(-2) = -4$. Obținem: $-2a + b = 0$ și apoi $a = -3, b = -6$. Rezolvăm ecuația $x^3 + x^2 - 3x - 6 = 0$ și obținem soluțiile $x_1 = 2$, $x_{2,3} = \dfrac{-3 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

5) Fie ecuația $x^3+x+m=0,\ m\in\mathbb{R}$. Determinați m astfel încât $x_1^5+x_2^5+x_3^5=10$, unde x_1,x_2,x_3 sunt soluțiile ecuației.

Soluție. Avem relațiile: $ax_1^3+bx_1^2+cx_1+d=0;\ ax_2^3+bx_2^2+cx_2+d=0;$
$ax_3^3+bx_3^2+cx_3+d=0$. Înmulțindu-le cu x_1^n, x_2^n și respectiv x_3^n, obținem:
$ax_1^{n+3}+bx_1^{n+2}+cx_1^{n+1}+dx_1^n=0;\ ax_2^{n+3}+bx_2^{n+2}+cx_2^{n+1}+dx_2^n=0;\ ax_3^{n+3}+bx_3^{n+2}+cx_3^{n+1}+dx_3^n=0.$

Prin adunare rezultă relația: $aS_{n+3}+bS_{n+2}+cS_{n+1}+dS_n=0$ (1), unde $S_n=x_1{}^n+x_2{}^n+x_3{}^n\ \ \forall n\in\mathbb{N}^*$ și $S_0=3$.

Fie acum ecuația $x^3+x+m=0$. Relația (1) se scrie: $S_{n+3}+S_{n+1}+mS_n=0,\ \ \forall n\in\mathbb{N}$.

Din n = 2 rezultă $S_5=-S_3-mS_2$ iar din n = 0 rezultă $S_3=-S_1-mS_0=-3m$;
$S_2=x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=-2$. Obținem $S_5=5m$ și m = 2.

Rădăcini complexe ale polinoamelor având coeficienții reali

Fie $f = a_nX^n + ... + a_1X + a_0,\ a_n \neq 0,\ n > 0$ un polinom cu coeficienți reali. Dacă $z\in\mathbb{C}$, $z = a + bi$, cu $a, b\in\mathbb{R}$, $b \neq 0$ este o rădăcină a lui f, atunci:

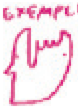
$$0=\overline{0}=\overline{a_nz^n+...+a_1z+a_0}=a_n\overline{z}^n+...+a_1\overline{z}+a_0=f(\overline{z}),$$

deci și $\overline{z}=a-bi$ este rădăcină a lui f. Cum $b \neq 0$, avem $\overline{z}\neq z$, deci f se divide prin

$$(X-z)(X-\overline{z})=X^2-2aX+a^2+b^2\in\mathbb{R}[X].$$

Așadar $f = (X^2 - 2aX + a^2 + b^2)q(x)$ cu $q(x)\in\mathbb{R}[X]$. Rezultă că problema determinării rădăcinilor polinomului f de grad n, $n > 1$ având coeficienții reali se reduce la o problemă mai simplă a determinării rădăcinilor polinomului q de grad $n - 2$ cu coeficienți reali.

EXEMPLE



1) Fie $f\in\mathbb{R}[X]$, $f = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + aX + b$. Să se determine $a, b\in\mathbb{R}$ și rădăcinile lui f știind că una dintre ele este $z = 1 + i$.

Soluție. Polinomul f admite și rădăcina $\overline{z}=1-i$ și deci se divide prin $(X-z)(X-\overline{z})=X^2-2X+2$.

Efectuând împărțirea lui f prin $X^2 - 2X + 2$ se obține câtul $q = X^2 + 4X + 9$ și restul $r = (a + 10)X + b - 18$. Cum $r = 0$, rezultă că $a = -10$ și $b = 18$ și

$$f = (X^2 - 2X + 2)(X^2 + 4X + 9)$$

Rădăcinile polinomului $q = X^2 + 4X + 9$ sunt $-2+i\sqrt{5}$ și $-2-i\sqrt{5}$, deci rădăcinile lui f sunt $1 + i$, $1 - i$, $-2+i\sqrt{5}$ și $-2-i\sqrt{5}$.

2) Fie polinomul $f = (X^2 + X + 1)^{4n+1} - X\in\mathbb{R}[X]$, $n\in\mathbb{N}$. Să se arate că f se divide prin $X^2 + 1$.

Soluție. Avem $f(i) = (i^2 + i + 1)^{4n+1} - i = i^{4n+1} - i = i - i = 0$. Așadar f admite rădăcina $z = i$. Cum f are coeficienții reali, f admite și rădăcina $\overline{z}=-i$, deci se divide prin $(X - i)(X + i) = X^2 + 1$.

21) Fie polinomul
$f = X^4 - 7X^3 + 19X^2 - mX + n,\ f\in\mathbb{R}[X]$.
Determinați numerele reale m și n știind că polinomul f admite rădăcina $2 + i$.

22) Fie polinomul
$f = X^3 - 3X^2 + aX + b,\ f\in\mathbb{R}[X]$.
Determinați numerele reale a și b știind că f admite rădăcina $1 + i$.

23) Fie polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, $f = X^4 + aX^3 + bX + c$. Determinați numerele reale a, b și c știind că f admite rădăcina $\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$ și că între rădăcinile lui f există relația $x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3=5$.

24) Fie polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, $f = X^3 + mX^2 + 2X + m - 1$. Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f să se calculeze $x_1^3+x_2^3+x_3^3$. Să se determine rădăcinile polinomului f dacă se divide cu $X - 1$.

25) Fie polinoamele $f, g\in\mathbb{R}[X]$, $f = nX^{n+1} - (n + 1)X^n + 1$, $n\in\mathbb{N}^*$, $g = (X - 1)^2$. Să se arate că polinomul f se divide prin g. Să se afle rădăcinile polinomului f pentru $n = 3$.

Indicație.
$f=(X-1)^2(nX^{n-1}+...+3X^2+2X+1)$.

Rădăcini ale polinoamelor având coeficienți raționali

Dacă $d \in \mathbb{N}$, $d > 1$ și d nu se divide prin pătratul unui număr prim, atunci un număr u real de forma $u = a + b\sqrt{d}$ cu $a, b \in \mathbb{Q}$ se numește *număr pătratic*.

Astfel numerele: $2-3\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}+\sqrt{6}$, $-\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{5}$ sunt numere pătratice. Dacă $u = a + b\sqrt{d}$ și $u' = a' + b'\sqrt{d}$ se verifică ușor că $u = u' \Leftrightarrow a = a'$ și $b = b'$, cu un raționament asemănător celui prin care se arată că $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Dacă $u = a + b\sqrt{d}$ este un număr pătratic atunci $u^* = a - b\sqrt{d}$ se numește *conjugatul lui u*. Astfel $(1+3\sqrt{2})^* = 1-3\sqrt{2}$, $\left(2-\frac{2}{3}\sqrt{5}\right)^* = 2+\frac{2}{3}\sqrt{5}$. Ca și în cazul numerelor complexe, operația de conjugare a numerelor pătratice are proprietățile:

(a) $(u+v)^* = u^* + v^*$, $(uv)^* = u^* v^*$

(b) $(u^*)^* = u$

(c) $u^* = u \Leftrightarrow u \in \mathbb{Q}$,

oricare ar fi numerele pătratice u și v. În plus, $(u^n)^* = (u^*)^n$, oricare ar fi numărul pătratic u.

Teorema 4. Fie $f = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Q}[X]$, $a_n \neq 0$, $n > 1$ și $u = a + b\sqrt{d}$ un număr pătratic.

(1) Dacă $f(u) = 0$, atunci $f(u^*) = 0$.

(2) Dacă $f(u) = 0$ și $b \neq 0$, atunci polinomul f se divide prin $(X-u)(X-u^*) = X^2 - (u+u^*)X + uu^* = X^2 - 2aX + a^2 - db^2 \in \mathbb{Q}[X]$.

Demonstrație

(1) Avem $0 = 0^* = (a_n u^n + a_{n-1}u^{n-1} + \ldots + a_1 u + a_0)^* =$
$= a_n (u^*)^n + a_{n-1}(u^*)^{n-1} + \ldots + a_1 u^* + a_0 = f(u^*)$.

(2) Evident. ■

1) Determinați rădăcinile polinomului $f = X^4 - 4X^3 - 4X^2 + 16X + 12 \in \mathbb{Q}[X]$, știind că una dintre rădăcinile sale este $x_1 = 1+\sqrt{3}$.

Soluție. Polinomul f admite și rădăcina $x_2 = x_1^* = 1-\sqrt{3}$ și deci se divide prin polinomul $(X - x_1)(X - x_2) = X^2 - 2X - 2$.

Efectuând împărțirea lui f prin $X^2 - 2X - 2$ se obține câtul $q(X) = X^2 - 2X - 6$. Așadar $f(X) = (X^2 - 2X - 2)(X^2 - 2X - 6)$.

Cum rădăcinile polinomului $X^2 - 2X - 6$ sunt $1+\sqrt{7}$ și $1-\sqrt{7}$, rezultă că rădăcinile lui f sunt: $1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{7}$ și $1-\sqrt{7}$.

2) Determinați $a, b \in \mathbb{Q}$ și rădăcinile polinomului $f = X^4 + aX^3 - X^2 - 2X + b \in \mathbb{Q}[X]$ știind că f admite rădăcina $u = 2+\sqrt{2}$.

26) Fie polinomul $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^5 - 3X^4 - 19X^3 + 91X^2 - 80X - 50$. Determinați toate rădăcinile polinomului f știind că $3 + i$ și $1-\sqrt{2}$ sunt rădăcini ale lui f.

27) Determinați rădăcinile polinomului $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^4 - 2X^3 - 3X^2 - 6X - 18$, știind că una dintre ele este $x_1 = 1-\sqrt{7}$.

28) Determinați $a, b \in \mathbb{Q}$ și rădăcinile polinomului $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^4 - 10X^3 + aX^2 - 34X + b$, știind că una dintre rădăcini este: $x_1 = 3+\sqrt{5}$.

29) Fie polinomul $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = 2X^4 - X^3 + 39X^2 + 18X + 54$.

a) Știind că $x_1 = 3\sqrt{2}$ este o rădăcină a polinomului f, determinați încă o rădăcină a lui f.

b) Calculați $(X-3\sqrt{2})(X+3\sqrt{2})$.

c) Arătați că f se divide cu polinomul $X^2 - 18$.

d) Calculați câtul împărțirii polinomului f la $X^2 - 18$.

e) Determinați toate cele patru rădăcini ale lui f.

30) Fie polinomul $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = 2X^5 - 5X^4 - 2X^3 + 6X^2 - 1$.

a) Știind că $x_1 = 1+\sqrt{2}$ este o rădăcină a polinomului f, determinați încă o rădăcină a lui f.

b) Calculați $(X-1-\sqrt{2})(X-1+\sqrt{2})$.

c) Arătați că f se divide cu polinomul $X^2 - (1-\sqrt{2})^2$.

d) Calculați câtul împărțirii polinomului f la $X^2 - (1-\sqrt{2})^2$.

e) Determinați toate cele cinci rădăcini ale lui f.

Soluție. Polinomul f se divide prin

$(X-u)(X-u^*)=X^2-(u+u^*)X+uu^*=X^2-4X+2$.

Împărțirea euclidiană a lui f prin X^2-4X+2 dă câtul $q=X^2+(a+4)X+4a+13$ și restul $r=14(a+3)X+b-8a-26$. Cum $r=0$, rezultă $a=-3$ și $b=2$, deci

$f=(X^2-4X+2)(X^2+X+1)$

Rădăcinile lui f sunt $2+\sqrt{2}$, $2-\sqrt{2}$, $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ și $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

31) Fie polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, $f(X)=X^6-7X^5+14X^4+17X^3+15X^2-6X-10$.

a) Știind că f are rădăcina $x_1=3+i$, determinați încă o rădăcină x_2 a lui f.

b) Știind că f mai are o rădăcină $x_3=1-\sqrt{2}$, determinați încă o rădăcină x_4 a lui f.

c) Determinați toate rădăcinile lui f.

Rădăcini raționale ale polinoamelor având coeficienți întregi

Așa cum s-a mai observat, determinarea rădăcinilor unui polinom având coeficienții numerici este de regulă o problemă complicată atunci când gradul acestuia este mare. Un caz favorabil este atunci când avem informații suplimentare asupra rădăcinilor, altele decât cele date de relațiile lui Viète.

Când polinomul are coeficienții întregi, putem delimita o mulțime finită de numere raționale printre care se află cu siguranță eventuale rădăcini raționale și, în particular, rădăcinile întregi ale polinomului dat.

Avem:

Teorema 5. Fie $f\in\mathbb{Z}[X]$, $f=a_nX^n+\dots a_1X+a_0$, $a_n\neq 0$, $n>0$ un polinom având coeficienții întregi și $r=\frac{p}{q}$ cu $p, q\in\mathbb{Z}$, $q\neq 0$ un număr rațional dat sub formă de fracție ireductibilă. Avem:

(1) dacă r este rădăcină a lui f, atunci $p \mid a_0$ și $q \mid a_n$.

(2) dacă a este o rădăcină întreagă a lui f, atunci $a \mid a_0$.

(3) dacă $a_n=\pm1$, atunci orice rădăcină rațională a lui f este întreagă.

Demonstrație. Reamintim că două numere întregi p și q sunt *prime între ele* dacă c.m.m.d.c. $(p, q)=1$ și în acest caz spunem că fracția $\frac{p}{q}$ este *ireductibilă*, ceea ce revine la faptul că p și q nu admit un divizor comun d astfel încât $|d|>1$.

Se știe că pentru $a, b, c\in\mathbb{Z}$ avem următoarele proprietăți:

(α) dacă a este prim cu b și cu c, atunci a este prim și cu bc.

β) dacă $a \mid bc$ și a este prim cu b, atunci $a \mid c$.

Să demonstrăm acum afirmațiile din enunțul teoremei.

(1) Cum $f\left(\frac{p}{q}\right)=0$, avem $a_n\frac{p^n}{q^n}+a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}+\dots+a_1\frac{p}{q}+a_0=0$

și înmulțind cu q^n obținem:

$a_0q^n=-p(a_np^{n-1}+\dots+a_1q^{n-1})$ și $a_np^n=-q(a_{n-1}p^{n-1}+\dots+a_0q^{n-1})$.

Rezultă că $p \mid a_0q^n$ și $q \mid a_np^n$. Cum p este prim cu q rezultă că p este prim cu q^n și q este prim cu p^n, deci $p \mid a_0$ și $q \mid a_n$.

(2) $a=\frac{a}{1}$ și cum fracția $\frac{a}{1}$ este ireductibilă se aplică rezultatul de la (1).

(3) Cum $a_n=\pm1$ și $q \mid a_n$, rezultă că $r\in\mathbb{Z}$. ■

32) Fie polinomul $f\in\mathbb{Z}[X]$,

$f=12X^4-28X^3+5X^2+7X-2$.

a) Scrieți divizorii întregi ai lui -2.

b) Scrieți divizorii întregi ai lui 12.

c) Determinați mulțimea numerelor care pot fi rădăcini raționale ale lui f.

d) Calculați $f(2)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f(1)$, $f(-1)$.

e) Determinați rădăcinile raționale ale lui f.

33) Să se determine rădăcinile raționale ale polinomului $f\in\mathbb{Z}[X]$,

$f=2X^4+3X^2+6X-4$.

34) Să se determine rădăcinile raționale ale polinomului $f\in\mathbb{Z}[X]$,

$f=X^5-2X^4-4X^3+4X^2-5X+6$.

35) Determinați rădăcinile raționale ale fiecăruia dintre polinoamele următoare:

a) $f=X^4-X^3-12X^2+6X+36$;

b) $f=12X^3+8X^2-X-1$

c) $f=X^5+X^4-5X^3-X^2+8X-4$.

36) Determinați rădăcinile următoarelor polinoame știind că ele admit rădăcini raționale:

a) $f=X^4-2X^3-5X^2+8X+4$;

b) $f=6X^4-17X^3-X^2+8X-2$;

c) $f=X^3+3X-14$;

d) $f=X^5+7X^4+18X^3+22X^2+13X+3$;

e) $f=10X^4-13X^3+15X^2-18X-24$.

Exerciții rezolvate.

1) Determinați rădăcinile raționale ale polinomului $f = 2X^3 + 3X^2 + 6X - 4 \in \mathbb{Z}[X]$.

Determinați apoi toate rădăcinile lui f.

Soluție. Avem $n = 3$, $a_n = 2$ și $a_0 = -4$. Divizorii întregi ai lui a_n sunt 1, –1, 2, –2, iar cei ai lu a_0 sunt 1, –1, 2, –2, 4, –4. Fracțiile ireductibile $\frac{p}{q}$ cu $q \mid 2$ și $p \mid -4$ sunt: –4, –2, –1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4.

Eventualele rădăcini raționale ale polinomului f sunt printre numerele din lista precedentă.

Cum

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	-108	-20	-9	$-\frac{13}{2}$	0	7	36	196

rezultă că singura rădăcină rațională a lui f este $r = \frac{1}{2}$.

Împărțind pe f prin $X - \frac{1}{2}$ găsim $f = \left(X - \frac{1}{2}\right)(2X^2 + 4X + 8)$.

Cum rădăcinile polinomului $2X^2 + 4X + 8$ sunt $-1 + i\sqrt{3}$ și $-1 - i\sqrt{3}$ rezultă că rădăcinile lui f sunt $\frac{1}{2}, -1 + i\sqrt{3}$ și $-1 - i\sqrt{3}$.

2) Determinați rădăcinile raționale ale polinomului $f = X^5 - 2X^4 - 4X^3 + 4X^2 - 5X + 6 \in \mathbb{Z}[X]$.

Soluție. Cum $a_5 = 1$, rădăcinile raționale ale lui f sunt întregi și sunt divizori ai lui $a_0 = 6$, adică printre numerele ±1, ±2, ±3, ±6. Evaluând polinomul f pentru fiecare divizor al lui 6 se constată că:

$f(-6) \neq 0$, $f(-3) \neq 0$, $f(-2) = 0$, $f(-1) \neq 0$, $f(1) = 0$, $f(2) \neq 0$, $f(3) = 0$ și $f(6) \neq 0$.

Rezultă că rădăcinile raționale ale lui f sunt –2, 1 și 3.

3) Arătați că polinomul $f = X^3 + pX^2 + pX + p$, unde p este un număr întreg prim, $p \geqslant 2$, nu poate fi scris ca produsul a două polinoame cu coeficienți raționali.

Soluție. Presupunem contrariul. Din grad $f = 3$ rezultă $f = g \cdot h$, unde grad $g = 1$ și grad $h = 2$. Deoarece $g \in \mathbb{Q}[X]$ are grad 1, rezultă că g are o rădăcină rațională x_0. Atunci $f(x_0) = g(x_0) \cdot h(x_0) = 0$, deci f admite rădăcina rațională x_0. Rezultă $x_0 \in \{\pm 1, \pm p\}$. Însă: $f(1) = 3p + 1 \neq 0$; $f(-1) = p - 1 \neq 0$; $f(p) = 2p^3 + p^2 + p \neq 0$ și $f(-p) = -p^2 + p \neq 0$. Deducem că f nu poate fi descompus în produsul a două polinoame cu coeficienți raționali.

PROBLEME PROPUSE

1. Determinați ordinul de multiplicitate al rădăcinii $\alpha = 2$ a polinomului $f = X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8$.

2. Determinați ordinul de multiplicitate al rădăcinii $\alpha = -2$ a polinomului $f = X^5 + 7X^4 + 17X^3 + 8X^2 - 16X - 8$.

3. Determinați λ astfel încât polinomul $f = X^5 + \lambda X^2 + \lambda X + 1 \in \mathbb{R}[X]$ să admită rădăcina $\alpha = -1$. Determinați apoi ordinul de multiplicitate al rădăcinii $\alpha = -1$.

4. Determinați rădăcinile polinoamelor $X^3 - 8$, $X^6 - 1$ și $X^4 + i$ din $\mathbb{C}[X]$ și precizați care sunt descompunerile în factori liniari din $\mathbb{C}[X]$ ale acestor polinoame.

5. Determinați a și b astfel încât polinomul $f = aX^4 + bX^3 + 1 \in \mathbb{C}[X]$ să admită pe $\alpha = 1$ ca rădăcină multiplă și precizați care este descompunerea lui f în factori liniari în acest caz.

6. Determinați rădăcinile polinomului f, știind că acestea verifică relația indicată între rădăcini:

a) $f = 3X^3 + 7X^2 - 18X + 8$, $x_1 + x_2 = -3$;

b) $f = X^3 - 13X + 12$, $x_1 - x_2 = 2$;

c) $f = X^4 - (4 + 5i)X^3 - 4(3 - 5i)X^2 + 6(4 + 5i)X + 36$, $x_1x_2 = x_3x_4$;

d) $f = X^3 - 12X^2 + aX + 60$, $x_1^2 = x_2^2 + x_3^2$.

7. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f = 2X^3 + 2X^2 - 3X - 1$. Determinați un polinom g ale cărui rădăcini sunt $\frac{x_2 + x_3}{x_1}, \frac{x_1 + x_3}{x_2}, \frac{x_1 + x_2}{x_3}$.

8. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f = X^3 - 5X + 2$. Calculați $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$.

9. Fie $f = 2X^3 - 12X^2 + 6X + a \in \mathbb{C}[X]$. Determinați rădăcinile lui f știind că acestea formează o progresie aritmetică.

10. Fie $f = 2X^3 - 7X^2 + 7X + a \in \mathbb{C}[X]$. Determinați rădăcinile lui f știind că acestea formează o progresie geometrică.

11. Fie $f = X^4 + 6X^3 + 8X^2 + aX + b \in \mathbb{C}[X]$. Determinați a și b știind că trei dintre rădăcinile lui f sunt în progresie aritmetică și a patra este egală cu suma celorlalte.

12. Fie $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile polinomului $f = X^3 + pX + q$, unde $p, q \in \mathbb{Z}$. Pentru $n \in \mathbb{N}$ fie $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$.
a) Calculați S_n pentru $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
b) Arătați că $S_n \in \mathbb{Z}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

13. Fie $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile polinomului $f = X^3 - X - a$, $a \in \mathbb{R}$ și $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, $n \in \mathbb{N}$.
a) Arătați că $S_n \in \mathbb{R}$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.
b) Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $S_6 \geqslant S_5$.

14. Fie $f = X^4 + (a+1)X^3 + \left(a^2 + \frac{1}{2}a + 1\right)X^2 + 2X - 5$, $a \in \mathbb{R}$ și $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ rădăcinile lui f. Arătați că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 < 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

15. Determinați rădăcinile polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$ dacă admite rădăcina indicată în fiecare caz:
a) $f = X^4 - 7X^3 + 19X^2 - 23X + 10$, $x_1 = 2 + i$;
b) $f = X^4 - 2X^3 - X - 2$, $x_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$.

16. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ și rădăcinile polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$ știind că admite rădăcina indicată în fiecare caz:
a) $f = X^4 + aX^3 + 49X^2 + bX + 78$, $x_1 = 3 + 2i$
b) $f = X^4 + aX^3 + bX^2 - X + 1$, $x_1 = i$.

17. Determinați un polinom $f \in \mathbb{R}[X]$ de grad minim știind că admite rădăcina dublă -1 și rădăcina simplă i.

18. Determinați un polinom $f \in \mathbb{R}[X]$ de grad minim știind că admite rădăcina dublă $1 + i\sqrt{2}$.

19. Fie polinomul $f = (X - 1)^m - (X + 1)^n \in \mathbb{R}[X]$. Arătați că polinomul f se divide prin $X^2 + X + 1$ dacă și numai dacă $m - n$ se divide prin 6.

20. Găsiți descompunerile în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$ și peste $\mathbb{C}$ ale polinoamelor $f = X^3 - 2$ și $g = X^4 + 1$.

21. Arătați că polinomul $f = (X + 1)^{n+3} + X^{2n+3}$ $f \in \mathbb{R}[X]$ este divizibil prin $X^2 - X + 1$.

22. Pentru care valori ale lui $n \in \mathbb{N}^*$ polinomul $f = (X - 1)^n + X^n + 1 \in \mathbb{R}[X]$ este divizibil prin $X^2 - X + 1$?

23. Arătați că polinomul $f = (X + 1)^7 - X^7 - 1 \in \mathbb{R}[X]$ este divizibil prin $X^2 + X + 1$ și descompuneți pe f în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$ și peste $\mathbb{C}$.

24. Determinați rădăcinile polinomului $f \in \mathbb{Q}[X]$ știind că una dintre ele este cea indicată:
a) $f = X^4 - 4X^3 - 4X^2 + 16X + 12$, $x_1 = 1 + \sqrt{3}$;
b) $f = X^4 - 2X^3 - 3X^2 - 6X - 18$, $x_1 = 1 - \sqrt{7}$;
c) $f = X^4 - 2X^3 - 25X^2 + aX + b$, $x_1 = 4 - \sqrt{2}$;
d) $f = X^4 - 10X^3 + aX^2 - 34X + b$, $x_1 = 3 - \sqrt{5}$.

25. Determinați $a, b, c \in \mathbb{Q}$ și rădăcinile polinomului $f = X^4 - 10X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{Q}[X]$ știind că restul împărțirii lui f la $X - 1$ este egal cu 3 și că polinomul f admite rădăcina $x_1 = -1 + \sqrt{2}$.

26. Determinați rădăcinile raționale ale polinoamelor:
a) $f = 4X^4 - 7X^2 - 5X - 1$;
b) $g = X^4 + 4X^3 - 2X^2 - 12X + 9$.

27. Fie $f \in \mathbb{Z}[X]$ astfel încât $f(0)$ și $f(1)$ sunt numere impare. Arătați că $f(a) \neq 0$ oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$.

28. Arătați că polinomul $X^3 - 2$ nu are rădăcini raționale. Deduceți că polinomul $X^3 - 2$ este ireductibil peste $\mathbb{Q}$.

29. Găsiți un polinom $f \in \mathbb{Z}[X]$, $f \neq 0$ care să admită ca rădăcină numărul $\alpha = 2\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$.

30. Fie $f \in \mathbb{Z}[X]$, $f \neq 0$. Dacă f admite o rădăcină în $\mathbb{Z}$, atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}$, numărul $f(0)f(1)f(2) \dots f(n)$ se divide prin $(n + 1)!$

31. Fie $f \in \mathbb{Z}[X]$, $f \neq 0$ un polinom de grad par. Dacă toți coeficienții lui f sunt impari, atunci f nu are rădăcini raționale.

32. Fie $f, g \in \mathbb{Z}[X]$, $h = fg$. Dacă toți coeficienții lui h se divid prin 2, atunci unul dintre polinoamele f sau g are toți coeficienții divizibili cu 2.
Arătați că proprietatea rămâne adevărată dacă înlocuiți pe 2 cu un număr prim p oarecare.

Ecuații algebrice având coeficienți numerici (în $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$)

Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = a_n X^n + a^{n-1} X_{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$ cu $a_n \neq 0$ și $n > 0$ un polinom cu coeficienți complecși. Egalitatea $\boxed{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,\ x \in \mathbb{C}}$ se numește *ecuație algebrică* (având coeficienți numerici) în *necunoscuta x*, asociată polinomului f.

Gradul ecuației algebrice este prin definiție gradul polinomului asociat f, iar *soluțiile* ecuației algebrice sunt rădăcinile (din $\mathbb{C}$) ale polinomului f. O soluție $\alpha \in \mathbb{C}$ a ecuației algebrice se numește *simplă* (*dublă*, *triplă*, ...) dacă α este rădăcină simplă (respectiv dublă, triplă, ...) a polinomului asociat f.

Ca o consecință a teoremei fundamentale a algebrei (teorema d'Alembert-Gauss) orice ecuație algebrică de grad n având coeficienți numerici admite n soluții complexe $x_1, x_2, \ldots, x_n$, nu neapărat distincte.

Determinarea efectivă a soluțiilor unei ecuații algebrice este o problemă dificilă și adesea imposibilă când gradul acesteia este mare. Pentru unele tipuri particulare de ecuații algebrice avem o descriere satisfăcătoare a soluțiilor. Este în primul rând cazul ecuațiilor algebrice de forma:

$$\boxed{x^n - a = 0 \text{ cu } a \in \mathbb{C},\ a \neq 0 \text{ și } n \in \mathbb{N}^*,}$$

numite *ecuații binome*.

Soluțiile ecuațiilor binome de grad n, $x^n - a = 0$, $a \in \mathbb{C}$ se numesc *radicali* de ordin n din a sau *rădăcini de ordin n* ale numărului complex a.

Un rezultat clasic stabilește că orice ecuație algebrică de grad $n \leqslant 4$ are soluții exprimabile prin radicali, în funcție de coeficienții acesteia. În cazul ecuațiilor de gradul al doilea

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0,\ a, b, c \in \mathbb{C},\ a \neq 0,}$$

acest rezultat se stabilește cu mijloace elementare, soluțiile fiind de forma

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Un rezultat cunoscut sub numele de teorema Abel-Ruffini stabilește că ecuația algebrică generală de grad $n > 4$ nu are soluții exprimabile prin radicali.

În acest paragraf vom studia câteva tipuri particulare de ecuații algebrice (*ecuații binome*, *ecuații de gradul al II-lea*, *ecuații bipătrate*, *ecuații reciproce*) ale căror soluții pot fi efectiv determinate și sunt exprimabile prin radicali.

Ecuații binome

Dacă $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ și $n \in \mathbb{N}^*$, atunci există un unic număr real $b > 0$ astfel încât $b^n = a$; numărul b se numește *radicalul aritmetic* de ordin n al lui a și se notează cu $\sqrt[n]{a}$. Pe baza acestui rezultat se poate stabili numărul soluțiilor reale ale ecuației,

(1) $\boxed{x^n - a = 0 \text{ cu } n \in \mathbb{N}^*,\ a \in \mathbb{R},\ a \neq 0}$ numită *ecuație binomă* de grad n cu coeficienți reali.

Avem:

Cazul n par. Dacă $a > 0$ ecuația (1) are două soluții reale, anume $\sqrt[n]{a} > 0$ și $-\sqrt[n]{a} < 0$, iar dacă $a < 0$, atunci ecuația (1) nu are soluții reale.

Cazul n impar. Ecuația (1) are o singură soluție reală, anume $\sqrt[n]{a} > 0$ când $a > 0$ și $-\sqrt[n]{-a} < 0$ când $a < 0$.

Când $a = 0$, ecuația are soluție unică $x = 0$.

1) a) Demonstrați egalitatea $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + xa + a^2)$.
b) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $x^3 - 1 = 0$.
c) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x^3 - 1 = 0$.
d) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $x^3 - 8 = 0$.
e) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x^3 - 8 = 0$.

2) a) Arătați că: $x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - xa + a^2)$.
b) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $x^3 + 1 = 0$.
c) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x^3 + 1 = 0$.
d) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $x^3 + 27 = 0$.
e) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x^3 + 27 = 0$.

1) Ecuația $x^4 - 2 = 0$ are două *soluții* reale și anume $\sqrt[4]{2}$ și $-\sqrt[4]{2}$.

2) Ecuația $x^2 + 5 = 0$ nu are *soluții* reale.

3) Ecuația $x^3 - 27 = 0$ are o unică soluție reală și anume $\sqrt[3]{27} = 3$.

4) Ecuația $x^3 + 8 = 0$ are o unică soluție reală și anume $-\sqrt[3]{-(-8)} = -\sqrt[3]{8} = -2$.

Ecuația de forma $\boxed{(2)\ x^n - a = 0 \text{ cu } n \in \mathbb{N}^*,\ a \in \mathbb{C},\ a \neq 0,}$ este numită *ecuație binomă* de grad n cu coeficienți complecși.

1) Soluțiile ecuației binome $x^3 - 2 = 0$ sunt

$$\sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Într-adevăr, în acest caz $x^3 - 2 = (x - \sqrt[3]{2})(x^2 + x\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})$, de unde $x - \sqrt[3]{2}$ cu soluția $\sqrt[3]{2}$ și $x^2 + x\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} = 0$ cu soluțiile $\sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2) Soluțiile ecuației binome $x^4 + 1 = 0$ sunt

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Într-adevăr ecuația este echivalentă cu $x^4 + 1 + 2x^2 - 2x^2 = 0$, adică $(x^2+1)^2 - 2x^2 = 0$. Obținem $(x^2 + 1 - x\sqrt{2})(x^2 + 1 + x\sqrt{2}) = 0$ și, rezolvând fiecare ecuație de gradul al doilea, aflăm soluțiile cerute.

Ecuații de gradul al II-lea având coeficienții complecși

Să considerăm o ecuație de gradul al II-lea având coeficienți complecși

(9) $\boxed{ax^2 + bx + c = 0,\ a, b, c \in \mathbb{C},\ a \neq 0.}$

Pentru orice număr $z \in \mathbb{C}$ putem scrie:

$$az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right).$$

Numărul $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$ se numește *discriminantul* ecuației (9). Fie $\delta \in \mathbb{C}$ o rădăcină de ordinul al 2-lea a numărului complex Δ. Se mai folosește notația $\delta = \sqrt{\Delta}$, chiar dacă în cazul $\Delta \neq 0$ există două rădăcini distincte de ordinul al 2-lea ale lui Δ. Așadar avem $\delta^2 = \Delta$ și putem scrie $az^2 + bz + c = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right) =$ $= a\left(z + \frac{b - \delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b + \delta}{2a}\right)$ și deci numărul $z \in \mathbb{C}$ este soluție a ecuației (9) dacă și numai dacă $z = \frac{-b + \delta}{2a}$, adică

$z = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ sau, $z = \frac{-b - \delta}{2a}$, adică $z = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

3) a) Arătați că $x^4 - a^4 = (x - a)(x + a)(x^2 + a^2)$.
b) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $X^4 - 1 = 0$.
c) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $X^4 - 1 = 0$.
d) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $x^4 - 81 = 0$.
e) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x^4 - 81 = 0$.

4) a) Arătați că $x^4 + a^4 = (x^2 + a^2)^2 - 2x^2a^2$.
b) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $X^4 + 1 = 0$.
c) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $X^4 + 1 = 0$.
d) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $x^4 + 81 = 0$.
e) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x^4 + 81 = 0$.
f) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $x^4 + 625 = 0$.
g) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x^4 + 625 = 0$.

5) Formați ecuația care are următoarele soluții:
a) $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = i,\ x_4 = -i$;
b) $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, $x_{5,6} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

6) Fie ecuația de gradul al doilea: $x^2 - 8x - 3ix + 13 + 13i = 0$
a) Arătați că $\Delta = 3 - 4i$.
b) Determinați numerele reale u și v astfel încât $\sqrt{3 - 4i} = u + vi$
c) Verificați că $\sqrt{3 - 4i} = 2 - i$ și $\sqrt{3 - 4i} = -2 + i$
d) Determinați soluțiile ecuației date.
e) Verificați în două moduri (prin calcul direct și prin relațiile lui Viète) că

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 + 3i \\ x_1x_2 = 13 + 13i \end{cases}.$$

7) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $x^2 - (3 + 5i)x - (4 - 3i) = 0$.

Exercițiu rezolvat. Să se determine soluțiile din $\mathbb{C}$ ale ecuației $x^2 - 3ix - 3 + i = 0$.

Soluție. Avem $\Delta = b^2 - 4ac = (-3i)^2 - 4(-3+i) = 3 - 4i$.
Să determinăm $\delta = u + iv \in \mathbb{C}$ astfel încât $\delta^2 = \Delta = 3 - 4i$. Așadar $(u + iv)^2 = 3 - 4i$, de unde $\begin{cases} u^2 - v^2 = 3 \\ 2uv = -4 \end{cases}$

Avem $u^2 + v^2 = |\delta|^2 = |\delta^2| = |\Delta| = \sqrt{9+16} = 5$. Din $u^2 - v^2 = 3$ și $u^2 + v^2 = 5$ rezultă $u^2 = 4$ și $v^2 = 1$. Așadar $u = \pm 2$, $v = \pm 1$ și cum $uv = -2 < 0$, una dintre valorile posibile pentru δ este $\delta = 2 - i$, cealaltă valoare fiind $-\delta = -2 + i$. Deci soluțiile din $\mathbb{C}$ ale ecuației propuse sunt $x_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$, adică $x_1 = \dfrac{3i+2-i}{2}$, deci $x_1 = 1 + i$ și $x_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$, adică $x_2 = \dfrac{3i-2+i}{2}$, deci $x_2 = -1 + 2i$.

Ecuații de gradul al II-lea având coeficienții reali

Considerăm cazul în care coeficienții ecuației (9) sunt numere reale. În acest caz discriminantul $\Delta = b^2 - 4ac$ este un număr real. Dacă $\Delta \geqslant 0$ și $\delta = \sqrt{\Delta}$ este radicalul aritmetic al lui Δ, ecuația (9) are soluții reale

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ și } x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Dacă $\Delta < 0$, atunci $-\Delta > 0$ și putem lua $\delta = i\sqrt{-\Delta}$. În acest caz soluțiile ecuației (9) sunt numere complexe conjugate

$$x_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ și } x_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

EXEMPLE

1) Ecuația $3x^2 + 7x - 6 = 0$ are discriminantul $\Delta = 49 + 72 = 121 > 0$ și $\delta = \sqrt{121} = 11$. Soluțiile ecuației sunt $x_1 = \dfrac{-7+\sqrt{121}}{6}$, adică $x_1 = \dfrac{2}{3}$ și $x_2 = \dfrac{-7-\sqrt{121}}{6}$, adică $x_2 = -3$.

2) Ecuația $x^2 - 6x + 13 = 0$ are discriminantul $\Delta = 36 - 52 = -16 < 0$ și soluțiile ecuației sunt numerele complexe conjugate.

$x_1 = \dfrac{6+i\sqrt{16}}{2}$, adică $x_1 = 3 + 2i$ și $x_2 = \dfrac{6-i\sqrt{16}}{2}$, adică $x_2 = 3 - 2i$.

Ecuații bipătrate

O ecuație de forma

(10) $\boxed{ax^4 + bx^2 + c = 0 \text{ cu } a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0}$

se numește *ecuație bipătrată*. Pentru rezolvarea unei ecuații bipătrate se face substituția $y = x^2$ și se obține ecuația de gradul al II-lea,

(11) $\boxed{ay^2 + by + c = 0 \text{ cu } a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0}$

Dacă y_1 și y_2 sunt soluțiile ecuației (11), x_1, x_2 soluțiile ecuației binome $x^2 - y_1 = 0$, iar x_3, x_4 soluțiile ecuației binome $x^2 - y_2 = 0$, atunci x_1, x_2, x_3, x_4 sunt soluțiile ecuației bipătrate (10). Cum

8) Fie ecuația de gradul al doilea $x^2 + 3x + 3 = 0$
a) Arătați că $\Delta = -3$
b) Arătați că soluțiile ecuației date sunt $x_1 = -\dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ și $x_2 = -\dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
c) Calculați $x_1 + x_2$ și x_1x_2.
d) Arătați că $x^2 + 3x + 3 = (x - x_1)(x - x_2)$.

9) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:
a) $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$;
b) $x^2 - x + \dfrac{1}{4} = 0$;
c) $x^2 - 2x + 9 = 0$.

10) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuațiile:
a) $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$;
b) $x^2 - x + \dfrac{1}{4} = 0$;
c) $x^2 - 2x + 9 = 0$.

11) Fie ecuația bipătrată $x^8 + 2x^4 - 3 = 0$.
a) Rezolvați ecuația $y^2 + 2y - 3 = 0$.
b) Rezolvați ecuația $x^4 = 1$.
c) Rezolvați ecuația bipătrată.

$y_1 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ și $y_2 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, atunci soluțiile ecuației bipătrate (10) sunt

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},\ x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

După cum se observă, soluțiile ecuației bipătrate sunt exprimabile prin radicali (în funcție de coeficienții ecuației).

Observație. Ecuația bipătrată este un caz particular al unei ecuații de forma

(12) $\boxed{ax^{2n} + bx^n + c = 0 \text{ cu } a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0, n \in \mathbb{N}^*.}$

Făcând substituția $y = x^n$ se obține ecuația $ay^2 + by + c = 0$. Dacă y_1, y_2 sunt soluțiile ecuației $ay^2 + by + c = 0$, atunci cele $2n$ soluții ale ecuației (12) sunt soluțiile ecuațiilor binome $x^n - y_1 = 0$ și $x^n - y_2 = 0$.

12) Fie ecuația bipătrată $x^4 - 7x^2 + 6 = 0$

a) Rezolvați ecuația $y^2 - 7y + 6 = 0$.

b) Rezolvați ecuația $x^2 = 1$.

c) Rezolvați ecuația $x^2 = 6$.

d) Rezolvați ecuația bipătrată.

13) Să se rezolve ecuația bipătrată:

$x^8 + 5x^4 - 36 = 0$.

14) Să se rezolve în $\mathbb{C}$ următoarele ecuații bipătrate:

a) $x^4 - x^2 - 6 = 0$;

b) $x^4 - (3 + 5i)x^2 - (4 - 3i) = 0$.

c) $x^4 - a(a + b)x^2 + a^3b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$.

d) $x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + a^4 + b^4 = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$.

e) $x^4 + 6x^2 + 25 = 0$.

f) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$.

g) $x^6 - (1 + i)x^3 + i = 0$.

Exerciții rezolvate.

1) Să rezolvăm ecuația bipătrată $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$.

Soluție. Notăm cu $y = x^2$ și avem ecuația $y^2 - 2y - 3 = 0$ cu soluțiile $y_1 = 3$ și $y_2 = -1$. Ecuația binomă $x^2 - 3 = 0$ are soluțiile $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$, iar ecuația binomă $x^2 + 1 = 0$ are soluțiile $x_3 = i$, $x_4 = -i$.

Rezultă că soluțiile ecuației bipătrate $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ sunt $\sqrt{3}, -\sqrt{3}, i$ și $-i$.

2) Să rezolvăm ecuația bipătrată $x^4 + 6x^2 + 25 = 0$.

Soluție. Notând $y = x^2$ obținem ecuația $y^2 + 6y + 25 = 0$ cu soluțiile $y_1 = -3 + 4i$, $y_2 = -3 - 4i$. Pentru a rezolva ecuația binomă $x^2 - (-3 + 4i) = 0$ căutăm pe x sub forma $x = u + iv$ cu $u, v \in \mathbb{R}$. Din $(u + iv)^2 = -3 + 4i$ rezultă $\begin{cases} u^2 - v^2 = -3 \\ 2uv = 4 \end{cases}$. Se obțin soluțiile $u_1 = 1$, $v_1 = 2$ și $u_2 = -1$ și $v_2 = -2$ de unde $x_1 = 1 + 2i$, $x_2 = -1 - 2i$. Analog se arată că ecuația binomă $x^2 - (3 + 4i) = 0$ are soluțiile $x_3 = 1 - 2i$ și $x_4 = -1 + 2i$.

Ecuații reciproce

Ecuațiile algebrice de forma

(13) $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$

(14) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$

(15) $ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$,

unde $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ se numesc *ecuații reciproce* respectiv de gradul al 3-lea, al 4-lea și al 5-lea.

O ecuație algebrică de grad n,

(16) $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$, $a_i \in \mathbb{C}, i = \overline{0, n}$.

se numește *ecuație reciprocă* dacă $a_{n-i} = a_i$ pentru $i = \overline{0, n}$ (adică coeficienții egali depărtați de extreme sunt egali).

Ecuația reciprocă de gradul I este $ax + a = 0$ cu $a \neq 0$, iar cea de gradul al II-lea este de forma $ax^2 + bx + a = 0$, $a \neq 0$ și determinarea soluțiilor acestora nu ridică probleme.

15) Fie ecuația reciprocă $2x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$.

a) Verificați că $x_1 = -1$ este soluție a ecuației date.

b) Arătați că $2x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(2x^2 + x + 2)$.

c) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $2x^2 + x + 2 = 0$.

d) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația reciprocă dată.

O verificare directă arată că ecuațiile reciproce de grad impar admit soluția $\alpha = -1$. Împărțind polinoamele $aX^3 + bX^2 + bX + a$ și $aX^5 + bX^4 + cX^3 + cX^2 + bX + a$ prin $X + 1$, de exemplu, folosind schema lui Horner

a	b	b	a	
a	$b-a$	a	0	-1

a	b	c	c	b	a	
a	$b-a$	$c-b+a$	$b-a$	a	0	-1

se obțin câturile $aX^2 + (b - a)X + a$, respectiv $aX^4 + (b - a)X^3 + (c - b + a)X^2 + (b - a)X + a$.

Rezultă că ecuațiile reciproce (13) și (15) pot fi scrise

(13′) $(x + 1)(ax^2 + (b - a)x + a) = 0$

(15′) $(x + 1)(ax^4 + (b - a)x^3 + (c - b + a)x^2 + (b - a)x + a) = 0$.

Așadar rezolvarea ecuației reciproce de gradul al III-lea revine la a rezolva următoarea ecuație de gradul al II-lea

(13″) $ax^2 + (b - a)x + a = 0$ iar rezolvarea ecuației reciproce de gradul al V-lea revine la rezolvarea următoarei ecuații reciproce de gradul al IV-lea

(15″) $ax^4 + (b - a)x^3 + (c - b + a)x^2 + (b - a)x + a = 0$,

Rămâne să clarificăm cum se determină soluțiile ecuației reciproce de gradul al IV-lea.

(14) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$

Cum $a \neq 0$, rezultă că soluțiile ecuației (14) sunt diferite de zero. Putem deci să împărțim termenii ecuației (14) prin x^2 și se obține

(14′) $a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$.

Notăm cu $y=x+\frac{1}{x}$ și se observă că $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$.

Ecuația (13′) se mai scrie

(16) $ay^2 + by + c - 2a = 0$.

Dacă y_1 și y_2 sunt soluțiile ecuației (16) atunci soluțiile ecuației (14) sunt soluțiile x_1, x_2 ale ecuației $x^2 - y_1x + 1 = 0$ și soluțiile x_3, x_4 ale ecuației $x^2 - y_2x + 1 = 0$.

16) Fie ecuația reciprocă
$2x^3 + 5x^2 + 5x + 2 = 0$

a) Verificați că $x_1 = -1$ este soluție a ecuației date.

b) Arătați că $2x^3 + 5x^2 + 5x + 2 = (x + 1)(2x^2 + 3x + 2)$

c) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $2x^2 + 3x + 2 = 0$.

d) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația reciprocă dată.

17) Fie ecuația reciprocă
$x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$

a) Împărțiți ecuația dată la $x^2 (x \neq 0)$ și verificați dacă ați obținut
$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-2=0$.

b) Notând $x+\frac{1}{x}=y$, calculați $x^2+\frac{1}{x^2}$.

c) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $y^2 + 3y - 4 = 0$.

d) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $x^2 - x + 1 = 0$.

e) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $x^2 + 4x + 1 = 0$.

f) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația reciprocă dată.

18) Rezolvați ecuațiile reciproce:

a) $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$.

b) $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$.

c) $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$.

d) $2x^3 - (1 + i)x^2 - (1 + i)x + 2 = 0$.

e) $2x^4 + x^3 + x^2 + x + 2 = 0$.

Indicații:

a), e) Împărțiți ecuația la x^2 $(x \neq 0)$ și faceți substituția $x+\frac{1}{x}=y$.

b), c), d) Verificați că $x_1=-1$ este soluție a ecuației date și, după ce dați factor comun pe $x + 1$, obțineți o ecuație reciprocă de grad par.

Exerciții rezolvate.

1) Rezolvați ecuația $3x^3 + x^2 + x + 3 = 0$.

Soluție. Se observă că ecuația este o ecuație reciprocă de gradul al III-lea. Admite deci soluția $x_1 = -1$ și poate fi scrisă sub forma: $(x + 1)(3x^2 - 2x + 3) = 0$

Soluțiile ecuației $3x^2 - 2x + 3 = 0$ sunt $\frac{1+2\sqrt{2}i}{3}$ și $\frac{1-2\sqrt{2}i}{3}$.

Deci, soluțiile ecuației date sunt: $x_1=-1$, $x_2=\frac{1+2\sqrt{2}i}{3}$ și $x_3=\frac{1-2\sqrt{2}i}{3}$.

2) Rezolvați ecuația reciprocă $2x^4 + x^3 + x^2 + x + 2 = 0$.

Soluție. Împărțind prin x^2 putem scrie $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+x+\frac{1}{x}+1=0$ și notând cu $y=x+\frac{1}{x}$, avem $2y^2 + y - 3 = 0$. Soluțiile ecuației $2y^2 + y - 3 = 0$ sunt $y_1 = 1$ și $y_2=-\frac{3}{2}$. Soluțiile ecuației date sunt soluțiile ecuației $x+\frac{1}{x}=1$ și ale ecuației $x+\frac{1}{x}=-\frac{3}{2}$. Aceste ecuații se mai scriu $x^2 - x + 1 = 0$ și $2x^2 + 3x + 2 = 0$.

Obținem soluțiile $x_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $x_2=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, $x_3=\frac{-3+i\sqrt{7}}{4}$, $x_4=\frac{-3-i\sqrt{7}}{4}$.

3) Rezolvați ecuația reciprocă $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$.
Soluție. Ecuația dată admite soluția $x = -1$ și atunci ecuația poate fi scrisă astfel:
$(x + 1)(x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1) = 0$.

Ecuația $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ este reciprocă de gradul al IV-lea. Împărțind cu x^2 și notând cu $y=x+\frac{1}{x}$, se obține $y^2 + y = 0$, de unde $y_1 = 0$ și $y_2 = -1$. Ecuația $x+\frac{1}{x}=0$ are soluțiile i și $-i$, iar ecuația $x+\frac{1}{x}=-1$ are soluțiile $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ și $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Așadar -1, i, $-i$, $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ și $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ sunt soluțiile ecuației date.

1. Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuațiile:
a) $x^2 + (3 + 2i)x + 5 + i = 0$;
b) $x^2 - 2ix - \sqrt{3} = 0$;
c) $(1 + i)x^2 - (5 + i)x + 6 + 4i = 0$.

2. Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuațiile:
a) $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$;
b) $x^6 + (2i - 1)x^3 - 1 - i = 0$;
c) $ix^4 + (1 - i)x^2 - 1 = 0$.

3. Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația:
$\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^3+\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^2+\left(\frac{x-i}{x+i}\right)+1=0$.

4. Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuațiile:
a) $x^4 - x^2 - 6 = 0$;
b) $x^4 - (3 + i)x^2 + 3i = 0$;
c) $x^4 - (3 + 5i)x^2 - 4 + 3i = 0$.

5. Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuațiile:
a) $x^4 - a(a + b)x^2 + a^3b = 0$;
b) $x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + a^4 + b^4 = 0$ unde $a, b \in \mathbb{R}$.

6. Discutați natura soluțiilor ecuațiilor următoare, în funcție de parametrul $m \in \mathbb{R}$.
a) $x^4 - 2(m + 1)x^2 + 2m + 5 = 0$;
b) $(m - 1)x^4 - mx^2 + m = 0$.

7. Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuațiile:
a) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$;
b) $x^6 - (1 + i)x^3 + i = 0$.

8. Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuațiile reciproce
a) $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$;
b) $2x^3 - (1 + i)x^2 - (1 + i)x + 2 = 0$.

9. Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuațiile reciproce
a) $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$;
b) $20x^5 - 81x^4 + 62x^3 + 62x^2 - 81x + 20 = 0$.

10. Dacă o ecuație reciprocă admite pe 1 ca soluție, atunci aceasta este multiplă.

11. Dacă x este o soluție a unei ecuații reciproce, atunci și $\frac{1}{x}$ este soluție a acesteia.

12. Demonstrați că orice ecuație reciprocă de grad impar admite pe -1 ca soluție.

13. Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $x^8 + 5x^4 - 36 = 0$.

14. Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația
$(x + 2)(x + 3)(x + 4) = (2x + 1)(3x + 1)(4x + 1)$.

15. Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația
$(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 2) - 2 = 0$.

16. Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația
$(x^2 - 5x + 3)^2 + 4(x^2 - 5x + 3) + 3 = 0$.

17. Arătați că ecuația
$x^2 - 2(a + b + c)x + 3(ab + bc + ca) = 0$, are toate soluțiile reale.

Indicație. $\Delta=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\geqslant 0$.

18. Precizați natura soluțiilor ecuației bipătrate $x^4 - 2(m + 1)x^2 + 2m + 5 = 0$ în funcție de parametrul $m \in \mathbb{R}$.

19. Fie polinomul $f \in \mathbb{Q}[X]$,
$f = x^4 + x^3 - 29x^2 + ax + b$. Determinați $a, b \in \mathbb{Q}$ astfel ca $x_1=3+\sqrt{2}$ să fie rădăcină a polinomului f și determinați soluțiile ecuației $f(x) = 0$ pentru valorile lui a, b obținute.

Teste de evaluare

Testul 1

1. Se consideră ecuațiile $x^4+ax^2+bx+2=0$ și $x^3-3x+2m=0$, $a,b,m\in\mathbb{R}$.

(1p) a) Rezolvați ecuațiile în cazul $a=-1$, $b=2$ și $m=-1$.

(2p) b) Determinați a, b și m astfel încât ecuațiile să admită o soluție dublă comună.

(2p) **2.** Pentru ce valori ale lui $n\in\mathbb{N}$ polinomul $f=(X^4+X^2)^n+X^n+X^{3n}$ este divizibil cu X^2-X+1?

(1p) **3.** Determinați numărul de soluții reale ale ecuației $x^4+(a-2)x^3-(2a+1)x^2+(2-a)x+2a=0$, $a\in\mathbb{R}$.

(2p) **4.** Știind că x_1,x_2,x_3 sunt soluțiile ecuației $f(x)=x^3+ax^2+b=0$, calculați valoarea expresiei $E=\dfrac{f(x_2+x_3)}{x_1}+\dfrac{f(x_3+x_1)}{x_2}+\dfrac{f(x_1+x_2)}{x_3}$.

(1p) **5.** Rezolvați și discutați în raport cu parametrul real m ecuația: $(x^2+1)(x-1)^2=mx^2$.

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 1 oră.

Testul 2

1. Se consideră ecuația
$(m+1)x^3-(m^2+5m-5)x^2+(m^2+5m-5)x-m-1=0$,
$m\in\mathbb{R}$, $m\neq-1$.

(1p) a) Arătați că, $\forall m\neq-1$, soluțiile ecuației sunt în progresie geometrică.

(2p) b) Notând cu x_2 soluția care nu depinde de m, determinați m astfel încât x_1,x_2,x_3 să fie termeni succesivi ai unei progresii aritmetice.

(2p) c) Pentru $m=2$, rezolvați ecuația.

(1p) **2.** Fie x_1,x_2,x_3 soluțiile ecuației $x^3-x^2-2x+4=0$. Determinați un polinom $f\in\mathbb{Z}[X]$ de grad minim care are ca rădăcină numărul $x_1^5+x_2^3+x_3^2$.

(1p) **3.** Determinați $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât restul împărțirii polinomului $f=X^{81}+X^{27}+X^9+X^3+X$ la X^2-1 să fie $aX+b$.

(1p) **4.** Fie $f\in\mathbb{Q}[X]$ având rădăcina $\sqrt[3]{2}$. Arătați că $(X^3-2)\mid f$.

(1p) **5.** Rezolvați și discutați în raport cu parametrul m ecuația:
$$\frac{(x+1)^5+(x-1)^5}{(x+1)^3+(x-1)^3}=m,\ m\in\mathbb{R}.$$

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 1 oră.

Probleme de tip bacalaureat

1. Se consideră mulțimea
$$F_2=\left\{\hat{a}_2X^2+\hat{a}_1X+\hat{a}_0 \mid \hat{a}_0,\hat{a}_1,\hat{a}_2\in\mathbb{Z}_3\right\}.$$

a) Să se determine numărul polinoamelor de gradul al doilea din F_2.

b) Să se calculeze cardinalul mulțimii F_2.

c) Să se determine polinoamele $f\in F_2$ pentru care $\hat{0}$, $\hat{1}$ și $\hat{2}$ din $\mathbb{Z}_3$ sunt simultan rădăcini.

d) Să se calculeze $s(\hat{x})=\sum\limits_{f\in F_2} f(\hat{x})$, $\hat{x}\in\mathbb{Z}_3$.

2. Se consideră polinoamele $f=8X^3-6X-1$, $g=4X^3-3X$ și mulțimea
$$M=\left\{h\left(\cos\frac{\pi}{9}\right) \mid h\in\mathbb{Q}[X]\right\}.$$

a) Să se arate că f nu are rădăcini raționale.

b) Să se determine câtul și restul împărțirii lui f la g.

c) Să se arate că $f\left(\cos\frac{\pi}{9}\right)=0$.

d) Să se verifice relația $\cos\frac{\pi}{9}\notin\mathbb{Q}$.

3. Se consideră polinomul $f = X^3 - 6X + 2$, $f \in \mathbb{C}[X]$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$. Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, notăm cu $S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$, iar $S_0 = 3$.

a) Să se calculeze $f(-2) \cdot f(2)$.

b) Să se arate că polinomul f nu are rădăcini raționale.

c) Să se arate că toate rădăcinile polinomului f sunt reale.

d) Să se calculeze suma $S = x_1 + x_2 + x_3$.

e) Să se arate că $S_{k+3} - 6S_{k+1} + 2S_k = 0$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

f) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $S_n \subset \mathbb{Z}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

4. Se consideră polinomul $f = X^4 - 5X + 3$, $f \in \mathbb{C}[X]$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

a) Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

b) Să se calculeze $f(1) f(-1)$.

c) Să se arate că polinomul f nu are rădăcini raționale.

d) Să se calculeze $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$.

5. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 - X^2 + aX - 6$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

a) Să se determine a astfel încât restul împărțirii lui f la $(X-1)(X-2)$ să nu depindă de X.

b) Să se determine a astfel încât $x_1^2(x_1^2 - 1) + x_2^2(x_2^2 - 1) + x_3^2(x_3^2 - 1) = 4x_1x_2x_3$.

c) Să se arate că, dacă $a = 0$, atunci polinomul nu are rădăcini raționale.

6. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = (X+1)(X+2)(X+3)(X+4) + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

a) Să se calculeze $f(0)$.

b) Să se calculeze $f - (X^2 + 5X + 5)^2$.

c) Să se afle numărul de rădăcini reale ale polinomului f.

d) Să se calculeze produsul $x_1x_2x_3x_4$.

e) Să se calculeze suma $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

7. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^8 + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \in \mathbb{C}$.

a) Să se calculeze expresia $f - (X^4 - \sqrt{2}X^2 + 1)(X^4 + \sqrt{2}X^2 + 1)$.

b) Să se afle numărul de rădăcini reale ale polinomului f.

c) Să se afle restul împărțirii lui f la $X^4 - \sqrt{2}X^2 + 1$.

8. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^4 - 5X^2 + 6$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

a) Să se afle câte soluții reale are ecuația $x^2 - 5x + 6 = 0$.

b) Să se determine numărul de rădăcini reale ale polinomului f.

c) Să se afle câte rădăcini raționale are polinomul f.

d) Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

e) Să se calculeze suma $x_1^{2005} + x_2^{2005} + x_3^{2005} + x_4^{2005}$.

9. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^4 + X^2 + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

a) Să se calculeze suma $f(-1) + f(1)$.

b) Să se afle numărul rădăcinilor raționale ale polinomului f.

c) Să se calculeze expresia $f - (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$.

d) Să se calculeze suma $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

e) Să se calculeze produsul $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$.

10. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ și polinomul $g \in \mathbb{C}[X]$, $g = X^2 + X + 1$ cu rădăcinile $y_1, y_2 \in \mathbb{C}$.

a) Să se calculeze suma $y_1 + y_2$.

b) Să se determine restul împărțirii polinomului f la polinomul g.

c) Să se calculeze produsul $(X-1)f$.

d) Să se calculeze produsul $f(y_1) \cdot f(y_2)$.

11. Polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^2 - X + 1$ are rădăcinile $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$. Notăm cu $S_n = x_1^n + x_2^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se afle restul împărțirii polinomului $X^3 + 1$ la polinomul f.

b) Să se afle modulul rădăcinii x_1.

c) Să se calculeze x_1^3.

d) Să se calculeze S_3.

e) Să se calculeze probabilitatea ca S_n să fie egal cu -2 când $n \in \{1, 2, ..., 8\}$.

12. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^3 + X^2 + X + 1$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

a) Să se calculeze $f(-1)$.

b) Să se afle restul împărțirii polinomului $f = X^3 + X^2 + X + 1$ la polinomul $g = X + 1$.

c) Să se calculeze probabilitatea ca o rădăcină a polinomului f, aleasă la întâmplare, să fie reală.

d) Să se calculeze suma $x_1 + x_2 + x_3$.

e) Să se calculeze suma $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.

13. Polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^2 + 2X + 4$ are rădăcinile $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$. Notăm cu $S_n = x_1^n + x_2^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se afle restul împărțirii polinomului $X^3 - 8$ la polinomul f.

b) Să se afle modulul rădăcinii x_1.

c) Să se calculeze x_1^6.

d) Să se calculeze S_3.

e) Să se calculeze $S_1 + S_3$.

Parcurgând „Elemente de algebră" ați dobândit următoarele competențe specifice?

1. Recunoașterea structurilor algebrice, a mulțimilor de numere, de polinoame și de matrice

2.1. Identificarea unei structuri algebrice, prin verificarea proprietăților acesteia

2.2 Determinarea și verificarea proprietăților unei structuri

3.1. Verificarea faptului că o funcție dată este morfism sau izomorfism

3.2. Aplicarea unor algoritmi în calculul polinomial sau în rezolvarea ecuațiilor algebrice

4. Explicarea modului în care sunt utilizate, în calcule specifice, proprietățile operațiilor unei structuri algebrice

5.1. Utilizarea structurilor algebrice în rezolvarea de probleme practice

5.2. Determinarea unor polinoame sau ecuații algebrice care îndeplinesc condiții date

6.1. Exprimarea unor probleme practice, folosind structuri algebrice sau calcul polinomial

6.2. Aplicarea, prin analogie, în calcule cu polinoame, a metodelor de lucru din aritmetica numerelor

Elemente de analiză matematică

Primitive

Matematica între fizică și filozofie

Isaac Newton (matematician și fizician englez, 1642-1727)

Gottfried-Wilhelm Leibniz (matematician și filozof german, 1646-1716)

„Consider că obiectele matematice nu sunt formate din particule infinitezimale, ci determinate de o mișcare continuă; liniile sunt rezultate prin mișcarea continuă a punctelor, iar suprafețele sunt date de mișcarea continuă a liniilor.“

„Există o limită pe care viteza poate s-o atingă la capătul mișcării, dar pe care nu o poate depăși. Tot astfel, poate fi determinată valoarea limitei cantităților și rapoartelor care încep sau încetează și, deoarece această limită este certă, problema de a o determina este strict geometrică.“

„ … m-am mulțumit să explic infinitul prin incomparabil, adică să presupun cantități care sunt incomparabil mai mari sau mai mici decât ale noastre“.

„Se poate spune că infinitul și infinitul mic sunt atât de puternic fundamentate, încât rezultatele din geometrie sau din natură se comportă ca și cum ar fi realități perfecte … toate fiind supuse puterii rațiunii. Fără rațiune nu ar exista nici știință, nici lege, ceea ce ar contrazice natura principiului suprem“.

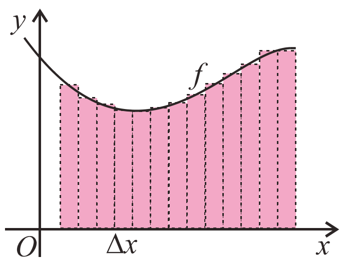
Probleme care conduc la noțiunea de integrală

Calculul diferențial (cu derivate și integrale) a fost descoperit de Newton studiind mișcarea corpurilor și, în aceeași perioadă, de Leibniz, studiind geometria. Unele dintre notațiile introduse de Leibniz sunt folosite și astăzi.

Când un mobil se mișcă cu o viteză variabilă $v(t)$, spațiul ΔS parcurs în fiecare interval mic de timp Δt depinde de viteza pe care a avut-o mobilul în acest interval ($\Delta S = v(t) \cdot \Delta t$). Pentru a găsi distanța totală parcursă de mobil trebuie să „adunăm“ toate distanțele parcurse cu viteze diferite în intervalele oricât de mici (infinitezimale), Δt.

♦ Remarcați diferența dintre ideea lui Newton despre linii și concepția că ele sunt mulțimi de puncte.

♦ Dați exemple de „cantități“ sau „rapoarte“ care pot fi supuse unui proces de trecere la limită.



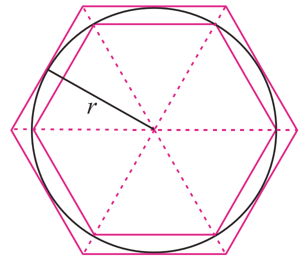
Aria suprafeței dintre graficul unei funcții continue, pozitive și axa Ox se obține, în mod aproximativ, „însumând“ ariile dreptunghiurilor infinitezimale aflate între graficul funcției și axa Ox.

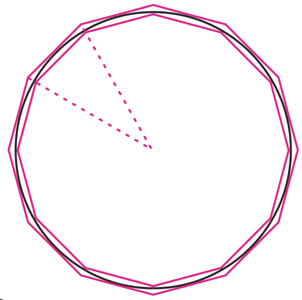
Prin figuri și mărimi „infinitezimale“ vom înțelege, în mod vag, figuri și mărimi care sunt „foarte mici“.

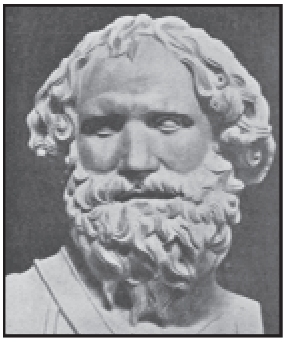
♦ Observați că, pentru Leibniz, noțiunea de infinit este o „realitate perfectă“ datorită consecințelor sale.

♦ Ce credeți că înțelege Leibniz prin *principiul suprem*?

Arhimede a elaborat metode care au stat, două milenii mai târziu, la baza calculului integral. Pentru a calcula aria cercului, Arhimede a folosit poligoane regulate înscrise și circumscrise cercului, începând cu hexagonul regulat și dublând numărul laturilor până la poligoane cu 96 de laturi.

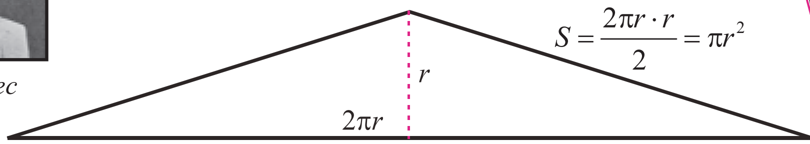





Arhimede, învățat grec (287-212 î.Hr.)

Să observăm că triunghiurile având ca bază o latură a poligonului circumscris și vârful în centrul cercului au înălțimea egală cu raza. Perimetrul poligonului circumscris este aproximativ egal cu circumferința. Rezultă că aria cercului, aproximată de aria poligonului circumscris, este egală cu aria unui triunghi cu baza cât circumferința și înălțimea cât raza

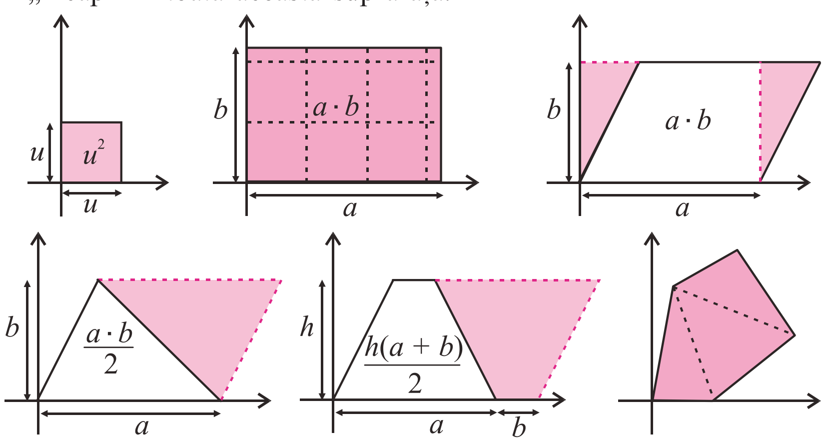
$$S = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$$



Aproximarea unei figuri geometrice curbe cu pătrate și, mai general, cu poligoane, se numește *cuadratură*.

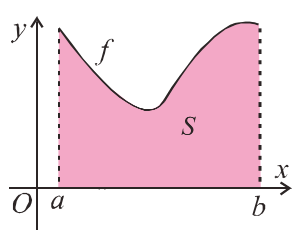
Instrumentul matematic care ne va ajuta să „adunăm" mărimi infinitezimale este cel de *integrală*. Vom dezvolta teoria integralei pentru a calcula ariile unor suprafețe (plane) curbilinii, lungimile unor curbe, dar și pentru a modela, studia și rezolva probleme din fizică, tehnică, economie etc.

Pentru a măsura o suprafață, o vom compara cu suprafața unui pătrat. În mod intuitiv, aria unei suprafețe este numărul care arată câte pătrate sau fracțiuni de pătrat cu latura unitate „încap" în toată această suprafață.



Pentru stabilirea ariei unei suprafețe vom încerca să o descompunem, sau să o aproximăm, cu alte figuri (poligoane) de arie cunoscută. Dintr-o figură geometrică mărginită de linii curbe, prin decupare nu rezultă numai un număr finit de poligoane.

Ne propunem să calculăm aria unei suprafețe mărginită de axa Ox și graficul unei funcții continue pozitive $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Pentru a calcula această arie, notată $\int_a^b f(t)\,dt$, vom dezvolta un instrument matematic numit *integrală*.

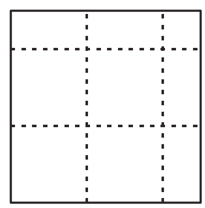


Cum calculăm arii de poligoane ?

Temă de sinteză

1) Care este numărul maxim de pătrate cu latura 1 care se pot decupa dintr-un pătrat cu latura 2 ?

Decupați și rearanjați bucățile unui pătrat cu latura 2,5 pentru ca să compuneți cât mai multe pătrățele unitate. Câte puteți obține?



2) Tăiați un trapez dreptunghic în două bucăți din care să alcătuiți un dreptunghi.

Găsiți mai multe metode pentru acest decupaj.

3) Calculați aria ΔABC cu laturile $a = 3$, $b = 4$ și ...

i) $m(\hat{C}) = 90°$ ii) $m(\hat{C}) = 120°$

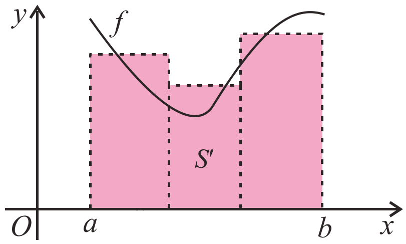
iii) $c = 5$ iv) $c = 6$

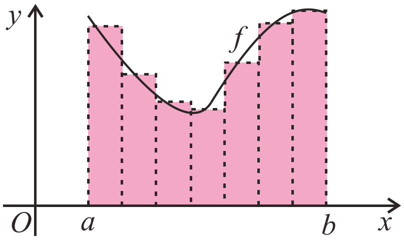
Indicație. Se pot folosi formulele:

$$S = \frac{ab\sin C}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

unde $p = \frac{a+b+c}{2}$.

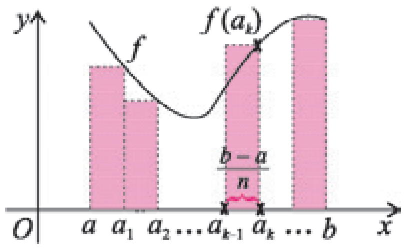
Putem forma din dreptunghiuri suprafața S' ca în figurile alăturate: intervalul $[a, b]$ se împarte în intervale mici, iar pe fiecare astfel de interval se construiește un dreptunghi care are ca înălțime o valoare oarecare a funcției f, luată pe acest interval. Dacă intervalele în care s-a împărțit $[a, b]$ sunt toate destul de mici, atunci S' aproximează bine suprafața căutată S.





În cele ce urmează vom preciza acest procedeu pentru a obține formule de calcul.

Considerăm o funcție pozitivă și continuă $f:[a, b]\to\mathbb{R}$. Împărțim $[a, b]$ în n intervale egale de lungime $\dfrac{b-a}{n}$, având capetele: $a_0 = a$, $a_1 = a + \dfrac{b-a}{n}$, ..., $a_n = a + n\cdot\dfrac{b-a}{n} = b$.



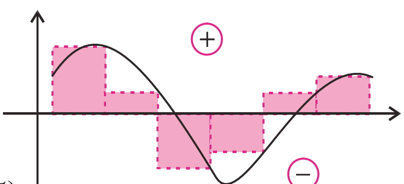
Construim dreptunghiurile având ca baze intervalele $[a_{k-1}, a_k]$ și înălțimi $f(a_k), k=\overline{1,n}$.

Aria suprafeței ocupată de toate aceste dreptunghiuri este:

$$S_n = f(a_1)\cdot\frac{b-a}{n}+...+f(a_n)\cdot\frac{b-a}{n} = \sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}$$

$$\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}}$$

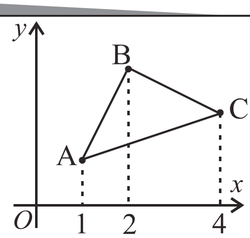
Dacă f nu este pozitivă, suma adună ariile dreptunghiurilor din semiplanul pozitiv și scade ariile dreptunghiurilor din semiplanul negativ (valoarea $f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)$ este negativă pe intervalele pe care f este negativă).

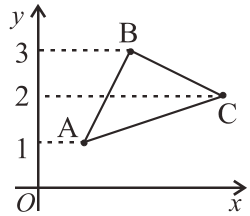


Acum putem enunța, dar fără a face și demonstrația, următoarea ...

Teoremă. Dacă funcția $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ este continuă, atunci șirul $\left(S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)\cdot\dfrac{b-a}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge la un număr, notat $\int_a^b f(x)dx$, pe care-l vom citi *integrala funcției f pe [a, b]*.

4) Calculați aria ΔABC în modurile sugerate de următoarele 3 reprezentări:





$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Calculul ariilor unor suprafețe prin metoda cuadraturii.

5) Împărțiți fiecare dintre intervalele $[0, 2]$, $[-1, 3]$, $[4, 99]$, $[-8, -2]$ în cinci intervale egale și calculați lungimea acestor intervale și capetele lor.

6) Calculați aria acoperită de toate dreptunghiurile care au ca bază un interval obținut împărțind $[-1, 5]$ în 4 intervale egale și ca înălțime valoarea funcției în capătul din dreapta intervalului pentru:

i) $f:[-1, 5]\to\mathbb{R}, f(x) = x^2$

ii) $f:[-1, 5]\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 - x$

iii) $f:[-1, 5]\to\mathbb{R}, f(x) = \ln(x + 2)$

7) Calculați

$$\int_a^b 2t\,dt = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} 2\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}$$

dacă intervalul $[a, b]$ este:

i) $[0, x]$; ii) $[-1, 9]$; iii) $[-1, 1]$.

Reprezentați în plan suprafața cuprinsă între graficul funcției $t\mapsto 2t$ și axa Ox pe intervalul $[a, b]$ în fiecare caz.

Indicație. $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

8) Calculați

$$\int_0^x t^2\,dt = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{kx}{n}\right)^2\cdot\frac{x}{n}$$

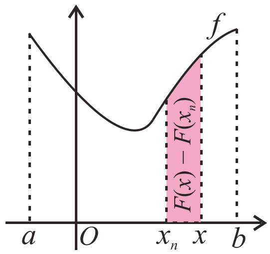
Reprezentați în plan suprafața cuprinsă între graficul funcției $t\mapsto t^2$ și axa Ox pe intervalul $[0, 3]$.

Indicație. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Metoda folosită de Arhimede ne conduce, conform teoremei precedente, la un calcul dificil: limita unui șir de sume. Acest calcul va fi evitat cu ajutorul derivatei. Rolul derivatei este prezentat în următoarea teoremă care va fi studiată în capitolele următoare.

Teoremă. Considerăm o funcție continuă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ și fie $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, funcția definită prin $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, $x\in[a,b]$. Atunci F este derivabilă și $F'=f$.

Vom explica această teoremă. Considerăm șirul $(x_n)_n\to x$, $x\in(a,b]$. $F(x)-F(x_n)$ este aria trapezului curbiliniu format între graficul funcției f și Ox pe intervalul $[x_n, x]$. Dacă împărțim aria trapezului la lungimea bazei, obținem



$\dfrac{F(x)-F(x_n)}{x-x_n}\underset{x_n\to x}{\longrightarrow} f(x)$, adică $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F(x)-F(x_n)}{x-x_n}=F'(x)$.

Funcția F a cărei derivată este funcția f se va numi primitiva funcției f. Studiul primitivelor este subiectul acestui capitol.

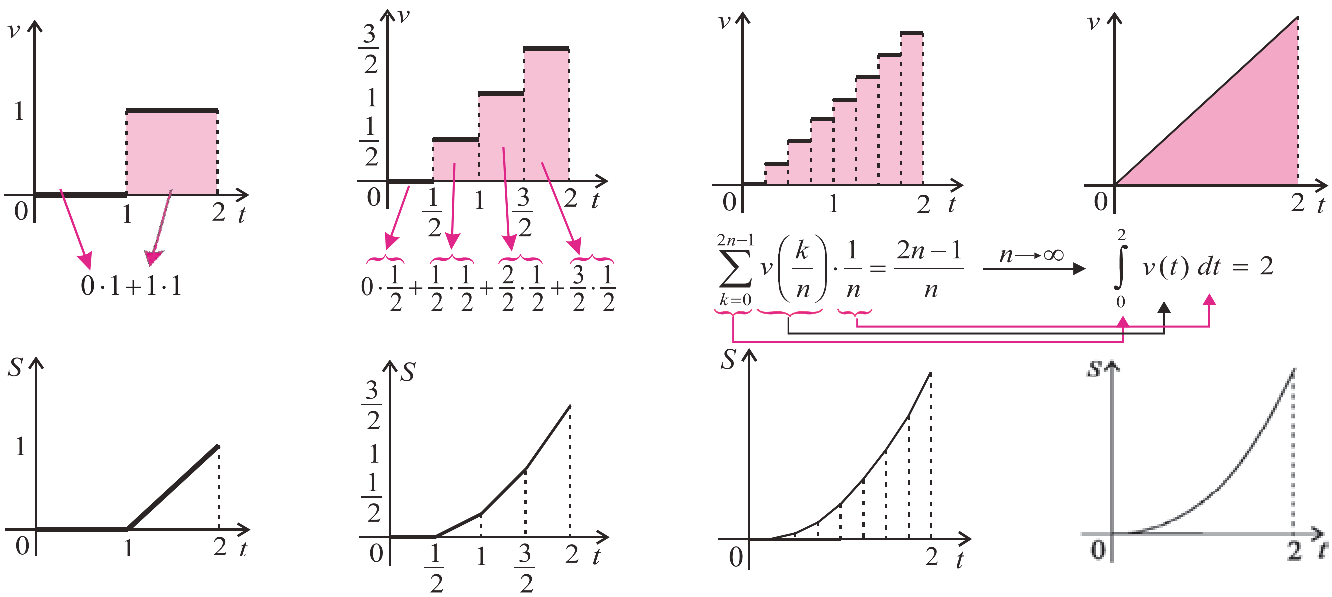
9) Fie funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.
Calculați funcția $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ definită prin $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ și $F'=f$, în următoarele cazuri:
i) $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=3$
ii) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=x$
iii) $f:[-1,3]\to\mathbb{R}, f(x)=2x^2$

10) Fie funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.
Găsiți o funcție $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ astfel încât $F'=f$ în următoarele cazuri:
i) $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}, f(x)=\cos x$
ii) $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x$
iii) $f:[1,10]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x}$
iv) $f:[-10,-1]\to\mathbb{R},\ f(x)=-\dfrac{1}{x}$
v) $f:[-10,1]\to\mathbb{R}, f(x)=2x$
vi) $f:[-10,1]\to\mathbb{R}, f(x)=x^2$
vii) $f:[-10,1]\to\mathbb{R}, f(x)=x+\sin x$

Aplicație în fizică

Un mobil pleacă la ora 0 și, în primele 2 secunde, se mișcă cu accelerația constantă a = 1m/s^2. Viteza mobilului la momentul t din intervalul [0, 2] este $v(t)=at=t$ (în m/s).

Să construim câteva modele care descriu aproximativ mișcarea mobilului și să calculăm distanța parcursă cu ajutorul acestor modele. Împărțim intervalul de timp [0, 2] în intervale tot mai mici. Considerăm că, pe aceste intervale mici, mobilul păstrează viteza din primul moment al intervalului.

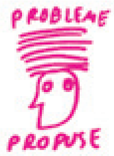


În cadrul fiecărui model, sumele reprezintă distanța parcursă în 2 secunde și, totodată, aria de sub grafice.

Graficele din rândul al doilea reprezintă distanța parcursă de mobil până la momentul $x\in[0,2]$, adică primitiva funcției v, $F(x)=\int_0^x v(t)\,dt=\int_0^x t\,dt=\dfrac{x^2}{2}$. Se verifică ușor că funcția F are ca derivată funcția v.

Newton sau Leibniz nu au demonstrat importantele teoreme pe care le-au descoperit. Ei s-au mulțumit să constate că aceste teoreme se pot aplica în natură sau în geometrie. Au trecut circa 150 de ani pentru ca matematicianul Cauchy să demonstreze teoremele fundamentale ale analizei matematice.

Demonstrația unei propoziții matematice trebuie să conțină raționamentele care ne conduc, pas cu pas, la convingerea că propoziția este adevărată. Acest drum este deschis acelor persoane care stăpânesc noțiunile, care se îndoiesc de fiecare afirmație și au nevoie de certitudini. Dacă nu ai înțeles o demonstrație, trebuie să mai zăbovești asupra ei, să verifici din nou fiecare etapă, să cauți exemplele simple în care se aplică. Vei înțelege numai după ce te vei fi familiarizat cu conceptele importante. Cel mai important este însă să poți folosi ce ai învățat în rezolvarea de exerciții și, mai târziu, în aplicații practice.

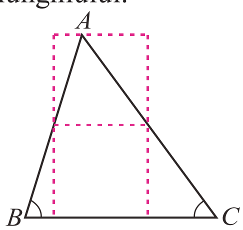


1. Care este cel mai mare număr de pătrate cu latura 1 care se poate obține dacă se decupează și se rearanjează bucățile unui pătrat cu latura 3,5 ? Ce proporție dintr-un pătrat unitar rămâne?

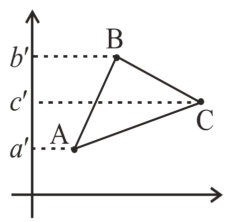
2. a) Tăiați un triunghi dreptunghic cu laturile 3, 4, 5 în două bucăți din care să formați un dreptunghi și calculați aria dreptunghiului. În câte moduri puteți face acest decupaj ?
b) Tăiați un triunghi cu baza 6 și înălțimea 4 în bucăți din care alcătuiți un dreptunghi. Calculați aria dreptunghiului, egală cu aria triunghiului.

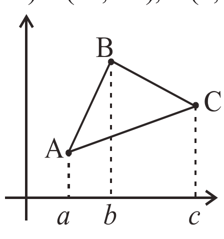
3. Calculați aria ΔABC cu laturile a, b, c dacă se cunosc latura a și unghiurile B și C.

Indicație. Fie h înălțimea din A. Avem $h\operatorname{tg}B + h\operatorname{tg}C = a$.



4. Calculați aria ΔABC în modurile sugerate de reprezentările următoare, dacă:
i) A(1, 1), B(–2, 3), C(4, –2)
ii) A(0, 0), B(–2, 3), C(2, –3)
iii) A(–1, –1), B(2, –1), C(–1, 2)

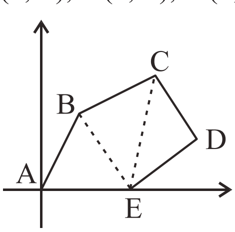


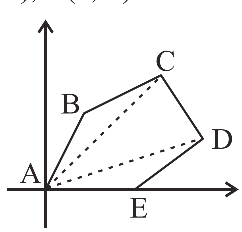


$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a' & b' & c'\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}b-a & c-a\\ b'-a' & c'-a'\end{vmatrix}$$

5. Calculați aria suprafeței pentagonului $ABCDE$ în modurile sugerate în reprezentările următoare, dacă:
i) $A(0, 0)$, $B(1, 2)$, $C(4, 4)$, $D(6, 1)$, $E(3, 0)$;
ii) $A(0, 0)$, $B(1, 1)$, $C(4, 3)$, $D(6, 1)$, $E(3, 0)$.

Propuneți alte moduri de împărțire a pentagonului.



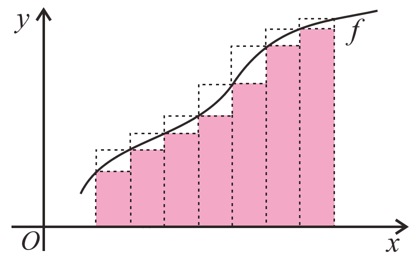


6. Calculați diferența dintre ariile poligoanelor regulate cu n laturi, circumscrise și înscrise cercului de rază 1, pentru $n \in \{3, 4, 6, 12\}$.

7. Fie funcția $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ crescătoare. Atunci

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(a+(k-1)\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}$$

Formulați un enunț asemănător pentru o funcție descrescătoare.



8. Calculați $\sum_{k=1}^{6} f\left(a+k\frac{b-a}{6}\right)\cdot\frac{b-a}{6}$ pentru:
i) $f:[-1, 5]\to\mathbb{R}, f(x) = x$;
ii) $f:[-1, 5]\to\mathbb{R}, f(x) = -x$;
iii) $f:[-1, 5]\to\mathbb{R}, f(x) = x^2$;
iv) $f:[-1, 5]\to\mathbb{R}, f(x) = 2^x$;
v) $f:[-1, 5]\to\mathbb{R}, f(x) = |x|$.

9. Calculați $\int_a^b t^3 dt = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)^3\cdot\frac{b-a}{n}$.

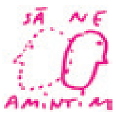
Indicație. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

10. Fie funcția $f:[-3, 0]\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x$. Determinați funcția $F(x)=\int_{-3}^{x} f(t)\, dt$ și derivata ei, F'.

11. Fie funcția $f:[a, b]\to\mathbb{R}$. Găsiți o funcție $F:[a, b]\to\mathbb{R}$ astfel încât $F' = f$ în următoarele cazuri:
i) $f:[-10, 1]\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$;
ii) $f:[-10, 1]\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^x$;
iii) $f:[-10, 1]\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Primitive și integrala nedefinită a unei funcții. Primitive uzuale

Temă de sinteză



I. *Reguli de derivare* (fără precizarea condițiilor în care au)

- $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- $(\lambda f)' = \lambda \cdot f', \lambda \in \mathbb{R}$
- $(fg)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
- $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$
- $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$

II. *Tabelul derivatelor funcțiilor elementare*

f	D_f	f'	$D_{f'}$
c (constantă)	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
$x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$n \cdot x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}^*$	$(0, +\infty)$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$(0, +\infty)$
$\sqrt{x}$	$[0, +\infty)$	$\dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$	$(0, +\infty)$
$a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$a^x \cdot \ln a$	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$(0, \infty)$	$\dfrac{1}{x}$	$(0, \infty)$
$\log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1$	$(0, \infty)$	$\dfrac{1}{x \cdot \ln a}$	$(0, \infty)$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{tg}\, x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\mathrm{ctg}\, x$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$\arccos x$	$[-1, 1]$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$\mathrm{arctg}\, x$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{arcctg}\, x$	$\mathbb{R}$	$-\dfrac{1}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$

Definiție. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și funcțiile $f : I \to \mathbb{R}$, $F : I \to \mathbb{R}$. Funcția F se numește *primitivă* a lui f dacă:

(1) F este derivabilă; (2) $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in I$.

Spunem că *o funcție f admite primitive pe intervalul I* dacă există o primitivă a funcției f.

Aceleași noțiuni se definesc și pentru funcțiile $f : I \to A$, $A \subset \mathbb{R}$.

1) Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^7$. Funcția $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{x^8}{8}$ este o primitivă a funcției f, deoarece F este derivabilă și $F' = f$.

2) Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = 2^x$. Funcția $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{2^x}{\ln 2} + 17$ este o primitivă a funcției f.

3) Dacă funcția $f : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă, atunci f este o primitivă a lui f'.

Teoremă. Fie I un interval și funcția $f : I \to \mathbb{R}$ care admite primitive. Dacă $F_1, F_2 : I \to \mathbb{R}$ sunt două primitive ale funcției f, atunci există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $F_1(x) = F_2(x) + c$, $\forall\, x \in I$.

Demonstrație. Fie F_1, F_2 primitive ale funcției f. Atunci $\forall\, x \in I$, $F_1'(x) = f(x)$, $F_2'(x) = f(x)$, $F_1'(x) - F_2'(x) = 0$, $(F_1(x) - F_2(x))' = 0$.

O funcție cu derivata 0 pe un interval este constantă. Rezultă că $\exists\, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $F_1(x) - F_2(x) = c$, $\forall\, x \in I$. ■

Consecințe. Fie funcția $f : I \to \mathbb{R}$, I interval.

1. Dacă $F_0 : I \to \mathbb{R}$ este o primitivă a lui f, atunci orice altă primitivă F a funcției f este de forma $F = F_0 + c$, unde $c \in \mathbb{R}$. Cu alte cuvinte, dacă o funcție admite primitivă, atunci admite o infinitate de primitive și oricare două primitive ale funcției f diferă printr-o constantă.

2. Dacă f admite o primitivă, atunci oricare ar fi $c \in \mathbb{R}$ și $a \in I$, există o primitivă F a lui f cu $F(a) = c$.

Demonstrăm **2.** Fie $a \in I$, $c \in \mathbb{R}$ și $F_0 : I \to \mathbb{R}$ o primitivă a lui f. Funcția $F = F_0 - F_0(a) + c$ este o primitivă a lui f cu $F(a) = c$. ■

Observație. În teorema anterioară, este important faptul că domeniul de definiție este interval.

Fie $D = [0, 1] \cup [2, 3]$ și funcțiile $f(x) = x$,

$$F_0(x) = \frac{x^2}{2} \text{ și } F_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}, & x \in [0, 1] \\ \dfrac{x^2}{2} + 1, & x \in [2, 3] \end{cases} \text{ definite pe } D.$$

Avem $F_0' = F_1' = f$. Dar F_1 nu se poate scrie sub forma $F_1 = F_0 + c$, $c \in \mathbb{R}$; pe fiecare dintre intervalele [0, 1] și [2, 3] avem constante diferite: $F_1 = F_0$ pe [0, 1] și $F_1 = F_0 + 1$ pe [2, 3].

Putem determina primitive?

1) Determinați câte o primitivă pentru următoarele funcții definite pe $\mathbb{R}$:

a) $f_1(x) = 3x^3$;
b) $f_2(x) = 3x^3 - x^2$;
c) $f_3(x) = 4x^3 + \sqrt[3]{x} - \frac{1}{2}x + 1$;
d) $f_4(x) = \sin x + 1$.

2) Determinați câte trei primitive pentru fiecare din următoarele funcții:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$;
b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$;
c) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$;
d) $f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$;
e) $f : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
f) $f : \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$;
g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$;
h) $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

3) Determinați primitiva F a funcției $f(x) = \cos x + \sin x$, cu $F(0) = 1$.

Indicație.

Primitivele funcției f sunt de forma $F(x) = \sin x - \cos x + c$, unde c este o constantă (deoarece $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$). Din condiția $F(0) = 1$ se determină c.

4) Determinați primitiva F a funcției $f(x) = -\cos x + \sin x$, cu $F(0) = 0$.

5) Determinați funcția F, dacă $F'(x) = e^{\sin x}\cos x$ și $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e + 3$.

Indicație. Se cere să alegem dintre primitivele funcției $f(x) = e^{\sin x}\cos x$, primitiva care are valoarea $e + 3$ pentru $x = \dfrac{\pi}{2}$. Deoarece derivata lui $\sin x$ este $\cos x$ și primitiva lui e^x este tot e^x, rezultă că primitivele lui f sunt de forma $F(x) = e^{\sin x} + c$, $c \in \mathbb{R}$. Într-adevăr, $(e^{\sin x})' = e^{\sin x} \cdot (\sin x)' = e^{\sin x}\cos x$.

Definiție.

Fie un interval I și o funcție $f: I \to \mathbb{R}$ care admite primitive. Mulțimea tuturor primitivelor funcției f se notează prin $\int f(x)\,dx$ și se numește *integrala nedefinită a funcției f*.

Deci $\boxed{\int f(x)\,dx = \{F : I \to \mathbb{R} \mid F \text{ este primitivă a funcției } f\}}$.

De notat că integrala nedefinită a unei funcții f este o mulțime de funcții, nu o funcție sau un număr.

Observații.

♦ Există funcții care nu admit primitive.

De exemplu $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

♦ Putem nota argumentul funcției f cu t, s, u ... Integrala nedefinită se notează atunci $\int f(t)\,dt$, $\int f(s)\,ds$, $\int f(u)\,du$...

Pentru a lucra cu integrale nedefinite, vom stabili câteva reguli de calcul cu mulțimi de funcții:

Definiție.

Fie $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ două mulțimi nevide de funcții reale definite pe intervalul I și $\lambda \in \mathbb{R}$. Definim:

$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \{ f + g \mid f \in \mathcal{A}, g \in \mathcal{B} \}$,

$f + \mathcal{A} = \{ f \} + \mathcal{A}$, unde $f: I \to \mathbb{R}$,

$\lambda + \mathcal{A} = \{ \lambda + f \mid f \in \mathcal{A} \}$,

$\lambda\mathcal{A} = \{ \lambda f \mid f \in \mathcal{A} \}$,

$\mathcal{A} \circ g = \{ f \circ g \mid f \in \mathcal{A} \}$, unde $g: J \to I$ este o funcție definită pe intervalul J.

Notăm $\mathscr{C}_I = \{ \varphi : I \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ este funcție constantă pe } I \}$.

Atunci când intervalul I este subînțeles, notăm $\mathscr{C} = \mathscr{C}_I$.

Observații. 1. $\mathscr{C} + \mathscr{C} = \mathscr{C}$

2. $\lambda\mathscr{C} = \mathscr{C}$, pentru $\lambda \neq 0$.

Teoremă.

Dacă funcția $f: I \to \mathbb{R}$ admite o primitivă F, atunci $\int f(x)\,dx = F + \mathscr{C}$. Egalitatea se mai scrie $\int f(x)\,dx = F(x) + \mathscr{C}$.

Demonstrație.

$\int f(x)\,dx = \{ G : I \to \mathbb{R} \mid G \text{ primitivă a funcției } f \} =$

$= \{ F + c \mid c \in \mathbb{R} \} = F + \{\varphi : I \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ constantă}\} = F + \mathscr{C}$. ■

6) Verificați:

a) $\int 2^x\,dx = \dfrac{2^x}{\ln 2} + \mathscr{C}$, $x \in \mathbb{R}$.

b) $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln x + \mathscr{C}$, $x \in (0, \infty)$.

7) Calculați următoarele integrale folosind numai formulele de derivare, știind că domeniul fiecărei funcții este un interval:

a) $\int \sin x\,dx$ b) $\int \cos x\,dx$

c) $\int \sin mx\,dx$ d) $\int \cos mx\,dx$

e) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx$ f) $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,dx$

g) $\int e^x\,dx$ h) $\int e^{-x}\,dx$

8) Cu ajutorul definiției determinați următoarele integrale nedefinite:

a) $\int (ax+b)^n\,dx$, $b, x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$;

b) $\int \dfrac{1}{x+a}\,dx$, $x > -a$, $a \in \mathbb{R}$;

c) $\int \dfrac{1}{2x-1}\,dx$, $x > \dfrac{1}{2}$;

d) $\int \sqrt[3]{4x^2}\,dx$, $x \in \mathbb{R}$;

e) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$, $x > -1$;

f) $\int \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx$, $x > -\dfrac{1}{2}$;

g) $\int \sin 2x\,dx$, $x \in \mathbb{R}$;

h) $\int e^{2x}\,dx$, $x \in \mathbb{R}$.

9) Determinați primitiva funcției $f(x) = x^2$, al cărei grafic conține punctul $M(2, 3)$.

Indicație. $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + c$ este o primitivă pentru f (avem $F'(x) = f(x)$). Determinăm c astfel încât $F(2) = 3$.

10) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $F(x) = e^{-x}(a\cos 4x + b\sin 4x)$ să fie o primitivă a funcției $f(x) = e^{-x}\cos 4x$.

1) Calculăm $\int \cos x\,dx$. O funcție F derivabilă cu $F'(x) = \cos x$ este funcția $F(x) = \sin x$, deci $\int \cos x\,dx = \sin x + \mathscr{C}$.

2) $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + \mathscr{C}$, $x \in \mathbb{R}$.

3) Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă, $\int f'(x)\,dx = f(x) + \mathscr{C}$.

Să stabilim câteva reguli de calcul cu integrale nedefinite.

Teoremă.
Dacă $f, g : I \to \mathbb{R}$ admit primitive și $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, atunci funcțiile $f + g$ și λf admit primitive și, în plus, au loc relațiile:

(1) $\int f(x)dx = \int f(x)dx + \mathscr{C}$

(2) $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

(3) $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$.

Demonstrație.
Fie $F, G : I \to \mathbb{R}$ primitive ale funcției f respectiv g. Atunci: $F + G$ este derivabilă pe I și $(F+G)' = F' + G' = f + g$, deci $f + g$ admite primitive pe I, iar $F + G$ este o primitivă a sa.

$\int (f(x) + g(x))\,dx = F + G + \mathscr{C} = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.

λF este derivabilă, $(\lambda F)' = \lambda F' = f$; deci λf are primitiva λF.

$\int \lambda f(x)dx = \lambda F + \mathscr{C} = \lambda F + \lambda \mathscr{C} = \lambda(F + \mathscr{C}) = \lambda \int f(x)dx$. ■

1) $\int (x+1)\,dx = \int x\,dx + \int dx = \frac{x^2}{2} + x + \mathscr{C}$; $x \in \mathbb{R}$.

2) $\int \frac{1}{2x-1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x - \frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|x - \frac{1}{2}\right| + \mathscr{C}$

pentru $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ sau pentru $x \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.

3) $\int \left(\frac{1}{x} - \cos x\right)dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \cos x\,dx = \ln x - \sin x + \mathscr{C}$; $x > 0$.

O mulțime foarte importantă de funcții care admit primitive este dată în următoarea teoremă a cărei demonstrație va fi făcută în capitolul următor.

Teoremă.
O funcție continuă pe un interval admite primitive pe acel interval.

Indicație.
$F'(x) = e^{-x}[(4b - a)\cos 4x - (4a + b)\sin 4x]$.
Deoarece $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, obținem sistemul $\begin{cases} F'(0) = f(0) \\ F'\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$, cu $a = \ldots$, $b = \ldots$

11) Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admite primitive și $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$.
Arătați că funcția $g(x) = f(ax + b)$, $x \in \mathbb{R}$, admite primitive. În plus, dacă F este o primitivă a funcției f, atunci $G(x) = \frac{1}{a}F(ax + b)$, $x \in \mathbb{R}$, este o primitivă a funcției g.

12) Determinați următoarele integrale nedefinite și precizați intervalele maxime de definiție ale lor:

a) $\int \left(x^2 - x + \frac{1}{x}\right)dx$;

b) $\int \left(e^{2x} + 2\sqrt{x}\right)dx$;

c) $\int \frac{2x-1}{x^3}dx$;

d) $\int (x^2 - \sin x)\,dx$;

e) $\int \frac{x-3}{x+5}dx$;

f) $\int (\sin 2x - \cos 2x)\,dx$;

g) $\int (e^{3x} - \sin 3x)\,dx$.

13) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.
Arătați că f admite primitive.

14) Arătați că funcția $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, admite primitive și găsiți o primitivă a sa.

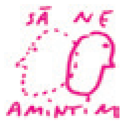
Indicație. $f(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.
Deoarece funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$, rezultă că admite primitive. Există

Observații.

♦ Teorema nu ne arată și cum calculăm primitivele unei funcții continue.

♦ Toate funcțiile elementare (polinomiale, radicali, exponențiale, logaritmi, trigonometrice) sunt continue pe orice interval din domeniul lor de definiție și, ca urmare, admit primitive.

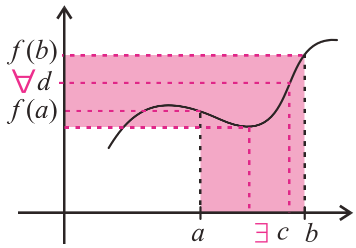
♦ Reciproca teoremei nu este adevărată. Există funcții care admit primitive dar nu sunt continue.



Proprietatea lui Darboux.

Spunem că funcția $f: I \to \mathbb{R}$, I interval, are proprietatea lui Darboux dacă

„$\forall\ [a, b] \subset I$ și $\forall\ d$ între $f(a)$ și $f(b)$, $\exists\ c \in [a, b]$ cu $f(c) = d$“.



Cu alte cuvinte, o funcție cu proprietatea lui Darboux transformă orice subinterval din domeniu într-un interval.

Teoremă.
Derivata oricărei funcții derivabile pe un interval are proprietatea lui Darboux.

Teoremă. Dacă $f: I \to \mathbb{R}$ admite primitive pe intervalul I, atunci funcția f are proprietatea lui Darboux pe I.

Consecință. Fie $f: I \to \mathbb{R}$. Dacă imaginea funcției f pe un subinterval $J \subset I$ nu este interval, atunci f nu admite primitive pe I.

Fie $f: I \to \mathbb{R}$,

• Dacă f este continuă pe I, atunci f admite primitive pe I.

• Dacă f admite primitive pe I, atunci f are proprietatea lui Darboux pe I.

• Dacă f nu are proprietatea lui Darboux pe I, atunci f nu admite primitive pe I.

• O funcție cu puncte de discontinuitate de speța I nu admite primitive deoarece nu are proprietatea lui Darboux.

$$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}, & x\geqslant 0\\ -\dfrac{x^2}{2}+c, & x<0\end{cases},\ c\in\mathbb{R},$$

astfel încât $F'(x) = f(x)$. Se pune condiția ca F să fie continuă. Obținem $c = 0$. Deoarece F este derivabilă și $F'(x) = f(x)$, rezultă că F este o primitivă a lui f.

15) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2x-1, & x>1\\ x^2, & x\leqslant 1\end{cases}$.

Arătați că f admite primitive și găsiți o primitivă a sa.

16) Demonstrați că următoarele funcții admit primitive și găsiți primitivele lor:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2-1, & \text{dacă } x\leqslant 1\\ \sqrt{x-1}, & \text{dacă } x>1\end{cases}$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x-\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x<-1\\ \sin\pi x, & \text{dacă } x\geqslant -1\end{cases}$;

17) a) Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = [x]$ nu admite primitive pe $\mathbb{R}$.
b) Fie I un interval deschis. Demonstrați că $f: I \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$, admite primitive pe I dacă și numai dacă I nu conține nici un număr întreg.

18) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}x^3+x+1, & \text{dacă } x\leqslant 0\\ 2^x+1, & \text{dacă } x>0\end{cases}.$$

a) Studiați monotonia funcției f.
b) Determinați $\mathrm{Im} f$.
c) Arătați că f nu admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Primitive uzuale; tabel de integrale nedefinite

Cu ajutorul tabelului derivatelor obținem următoarea listă de integrale nedefinite importante; unele formule de integrare rezultă direct din formulele de derivare, alte formule sunt deduse prin aplicarea unor metode de integrare. Fiecare formulă este adevărată pe orice interval din mulțimea pe care este definită atât funcția f de sub semnul integral, cât și primitiva sa F. Constantele folosite sunt $n \in \mathbb{N}$ și $a \in \mathbb{R}$.

1. $\boxed{\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathscr{C},\ n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}}$

2. $\boxed{\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + \mathscr{C},\quad a \neq -1,\ x \in (0, +\infty)}$

3. $\boxed{\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + \mathscr{C},\ x \in \mathbb{R}^*}$

4. $\boxed{\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + \mathscr{C},\ a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\},\ x \in \mathbb{R}}$

5. $\boxed{\int \frac{1}{x^2 - a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + \mathscr{C},\ a \neq 0, x \in \mathbb{R},\ x^2 - a^2 \neq 0}$

6. $\boxed{\int \frac{1}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \mathscr{C},\ a \neq 0, x \in \mathbb{R}}$

7. $\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + \mathscr{C},\ a \neq 0,\ x^2 \pm a^2 > 0}$

8. $\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + \mathscr{C},\ a > 0,\ a^2 - x^2 > 0}$

9. $\boxed{\int \sin x\,dx = -\cos x + \mathscr{C},\ x \in \mathbb{R}}$

10. $\boxed{\int \cos x\,dx = \sin x + \mathscr{C},\ x \in \mathbb{R}}$

11. $\boxed{\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + \mathscr{C},\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}}$

12. $\boxed{\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + \mathscr{C},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}}$

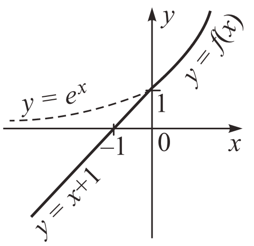
13. $\boxed{\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + \mathscr{C},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}}$

14. $\boxed{\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + \mathscr{C},\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}}$

Aceste formule se verifică folosind proprietatea „ $\int f(x)\,dx = F(x) + \mathscr{C} \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$ “.

Exerciții rezolvate – temă de sinteză

1) Reprezentați grafic funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leqslant 0 \\ e^x, & x > 0 \end{cases}$. Arătați că f admite primitive și determinați o primitivă.



Soluție. Graficul lui f, redat în desenul alăturat, este format dintr-o semidreaptă de ecuație $y = x + 1$ ($x \leqslant 0$) și din graficul de ecuație $y = e^x$ ($x > 0$).

$\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = 1 = f(0)$; atunci f este continuă pe $\mathbb{R}$, prin urmare are o primitivă

$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0] \\ e^x + c, & \text{dacă } x \in (0; \infty) \end{cases}$, $c \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$. Impunem condiția ca F să fie continuă. Avem: $\lim\limits_{x \nearrow 0} F(x) = 0 = F(0)$, $\lim\limits_{x \searrow 0} F(x) = c + 1$, deci $0 = c + 1$.

Prin urmare, $F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x, & \text{dacă } x \in (-\infty; 0] \\ e^x - 1, & \text{dacă } x \in (0; \infty) \end{cases}$. Verificăm derivabilitatea lui F pe $\mathbb{R}$.

Funcția F este derivabilă pe $\mathbb{R}^*$. Cum F este continuă pe $\mathbb{R}$ și $\lim\limits_{x \nearrow 0} F'(x) = \lim\limits_{x \nearrow 0}(x+1) = 1$, $\lim\limits_{x \searrow 0} F'(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} e^x = 1$ rezultă că F este derivabilă în 0 și $F'(0) = 1 = f(0)$.

În concluzie, F este primitiva funcției f.

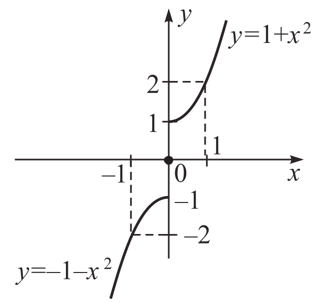
2) Calculați următoarele integrale: a) $\int(10x^4-8x^3+4x^2)dx=10\frac{x^5}{5}-\frac{8x^4}{4}+4\frac{x^3}{3}+\mathscr{C}=2x^5-2x^4+\frac{4x^3}{3}+\mathscr{C}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) $\int\frac{3-x^2}{x}dx=3\int\frac{1}{x}dx-\int x\,dx=3\ln|x|-\frac{x^2}{2}+\mathscr{C}$; $x>0$ sau $x<0$.

c) $\int\sqrt[3]{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+\mathscr{C}=\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+\mathscr{C}$, $x\in\mathbb{R}$.

d) $\int\frac{5}{4x^2+9}dx=\frac{5}{4}\int\frac{1}{x^2+\frac{9}{4}}dx=\frac{5}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x}{3}+\mathscr{C}$, $x\in\mathbb{R}$.

3) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(1+x^2)\operatorname{sgn}x$. Să arătăm că f nu admite primitive și să o reprezentăm grafic.



Soluție. Graficul lui f, redat în desenul alăturat, este format din două porțiuni de parabolă, de ecuații $y=-1-x^2$ ($x<0$) și $y=1+x^2$ ($x>0$), și dintr-un punct $O(0,0)$. Mulțimea $f(\mathbb{R})$ este proiecția graficului pe axa Oy.

$$f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1-x^2, & x<0\end{cases};\quad f(\mathbb{R})=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\cup\{0\}\text{ nu este interval,}$$

deci f nu admite primitive.

4) Determinați numărul a astfel încât funcția $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\leqslant 0\\ x+a, & x>0\end{cases}$, $x\in\mathbb{R}$, să admită primitive.

Soluție. Avem: $\lim\limits_{x\nearrow 0}f(x)=0$; $\lim\limits_{x\searrow 0}f(x)=a$; $f(0)=0$. Dacă $a=0$, atunci f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci admite primitive. Dacă $a\neq 0$, atunci f are un punct de discontinuitate de speța I și, ca urmare, nu admite primitive. Așadar soluția problemei este $a=0$.

PROBLEME PROPUSE

● **1.** Reprezentați grafic funcțiile de integrat și calculați următoarele integrale:

a) $\int(x+1)^2dx$;

b) $\int\frac{x^3-x^2-x-2}{x^2}dx$, $x>0$;

c) $\int(x^2-e^x)dx$;

d) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$, $x>0$;

e) $\int\frac{dx}{x^2+4}$;

f) $\int\frac{1}{x^2-16}dx$, $x>4$;

g) $\int\frac{5}{9-4x^2}dx$, $x<-\frac{3}{2}$.

● **2.** Determinați următoarele integrale nedefinite:

a) $\int\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}}dx$, $x>0$;

b) $\int\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{3x-1}\right)dx$, $x>\frac{1}{3}$;

c) $\int\left(3^{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}\right)dx$, $x>1$;

d) $\int\frac{1}{x^2-5x+6}$, $x>3$;

e) $\int\frac{2x+1}{2x-1}dx$, $x>\frac{1}{2}$;

f) $\int\frac{x}{3x-4}dx$, $x>\frac{4}{3}$;

g) $\int\frac{x^2}{x^2-1}dx$, $x<-1$;

h) $\int\frac{x}{4x^2-9}dx$, $x<-\frac{3}{2}$;

i) $\int\frac{x^2-1}{x^2+4}dx$;

j) $\int\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}dx$, $x\in\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$;

k) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$;

l) $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x} dx,\ x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$;

3. Determinați următoarele integrale nedefinite:

a) $\int \frac{1+\cos^4 x}{\cos^2 x} dx,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

b) $\int \frac{\sin x + \sin 2x}{\cos x} dx,\ x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$;

c) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x},\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

4. Calculați primitivele următoarelor funcții:

a) $f: (-1; 1) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}$;

b) $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}$;

c) $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = |\sin x|$;

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |e^x - 1|$.

5. Utilizând definiția, calculați:

a) $\int e^x (x+1)\, dx,\ x \in \mathbb{R}$;

b) $\int (\cos x - x \sin x)\, dx,\ x \in \mathbb{R}$;

c) $\int \left(2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right) dx,\ x > 0$;

d) $\int \frac{(1+\cos^2 x)\sin x}{\cos^2 x} dx,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

6. Determinați următoarele integrale nedefinite:

a) $\int \left(\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right) dx,\ x > 0$;

b) $\int \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx,\ x \in (-1, 1)$;

c) $\int \left(\frac{1}{4x^2+1} - \frac{1}{2x+1}\right) dx,\ x < -\frac{1}{2}$;

d) $\int \frac{dx}{x^2-1},\ x > 1$;

e) $\int (\sin 2x - \cos 2x)^2\, dx$;

f) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2-1} dx,\ x \in (-1, 1)$;

g) $\int \frac{2x+3}{(x-1)(x+4)} dx,\ x > 1$;

h) $\int \frac{1}{4x^2-9} dx,\ x > \frac{3}{2}$.

7. Demonstrați că următoarele funcții admit primitive pe $\mathbb{R}$: a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$;

b) $f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$;

c) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$;

8. Demonstrați că următoarele funcții admit primitive și găsiți primitivele lor:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9x^2+1}, & \text{dacă } x < 0 \\ e^x, & \text{dacă } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ e^{2x-1}, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$;

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \big|2x - |x-1|\big|$;

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \max\{x^2 - 2x, x - 2\}$;

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(x+1)e^{nx}+1}{e^{nx}+1}$.

9. Demonstrați că următoarele funcții admit primitive pe $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$;

b) $f(x) = \begin{cases} \cos^2\frac{1}{2x}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$.

10. Pentru ce $a \in \mathbb{R}$, funcțiile admit primitive?

a) $f(x) = \begin{cases} (\sin x + 1)^{\frac{a}{x}}, & x \in \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right) \\ 1, & x = 0 \\ x^x, & x > 0 \end{cases}$;

b) $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$;

d) $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$;

e) $f(x)=\begin{cases}e^{2x-1}, & x\leqslant 1\\ ax+1, & x>1\end{cases}$;

f) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-3x}, & x\leqslant 0\\ \dfrac{\ln(1+ax)}{x}, & x>0\end{cases}$;

g) $f(x)=\begin{cases}(1-x)^{\frac{a}{x}}, & x\in(-\infty,0)\\ 0, & x=0\\ x\ln x, & x>0\end{cases}$.

11. Demonstrați că următoarele funcții nu admit primitive pe $\mathbb{R}$: a) $f(x)=[x]-x$;

b) $f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0\\ \sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & x=0\\ 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\end{cases}$.

12. Demonstrați că funcția $f(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Q}\\ x^2, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ nu admite primitive pe $\mathbb{R}$.

13. Fie funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ și $c\in(a,b)$. Demonstrați că dacă f admite primitive pe $[a,c]$ și pe $[c,b]$, atunci f admite primitive pe $[a,b]$.

14. Fie $f, g: I\to\mathbb{R}$. Demonstrați că dacă f admite primitive pe I iar g este derivabilă cu derivata continuă, atunci funcția $f\cdot g$ admite primitive pe I.

Teste de evaluare

Testul 1

(2p) 1. Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left[\dfrac{x}{2}\right]$ *nu* admite primitive. Reprezentați grafic funcția f pe intervalul $[-2, 8]$.

2. Calculați următoarele integrale nedefinite:

(1p) a) $\displaystyle\int\frac{x^2}{x-2}dx,\ x>2$;

(2p) b) $\displaystyle\int\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x}}\,dx,\ x>0$;

(2p) c) $\displaystyle\int\frac{6}{4x^2+9}dx,\ x\in\mathbb{R}$;

(1p) d) $\displaystyle\int\frac{\sin^3 x}{1+\cos x}dx,\ 0<x<\pi$.

(1p) 3. Arătați că funcția următoare admite primitive și calculați o primitivă a ei:

$f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=15|x-2|\sqrt{x}$.

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 1 oră.

Testul 2

(2p) 1. Arătați că funcția

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0\\ e^x, & x\geqslant 0\end{cases}$, admite primitive.

2. Calculați următoarele integrale nedefinite:

(1p) a) $\displaystyle\int\frac{x-1}{x+1}dx,\ x>-1$;

(2p) b) $\displaystyle\int\sqrt[5]{x\sqrt{x}}\,dx,\ x>0$;

(2p) c) $\displaystyle\int\frac{20}{4x^2-25}dx,\ x>2$;

(1p) d) $\displaystyle\int\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx,\ 0<x<\frac{\pi}{2}$.

(1p) 3. Arătați că funcția următoare admite primitive și calculați o primitivă a ei:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2\cdot e^{|2x-4|}$.

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 1 oră.

Probleme de tip bacalaureat

1. Se consideră funcțiile $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2(x-1)}{x+1}$ și $g(x) = f(x) - \ln x$.

a) Să se arate că $g'(x) = -\dfrac{(1-x)^2}{x(1+x)^2}$, pentru $x \in (0, +\infty)$.

b) Să se calculeze $f(1)$, $g(1)$ și $g'(1)$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

d) Să se arate că dreapta de ecuație $x = 0$ este asimptotă verticală la graficul funcției.

e) Să se calculeze $\int g'(x)dx$.

f) Să se arate că funcția g este descrescătoare pe intervalul $[1, +\infty)$.

g) Să se demonstreze că

$\dfrac{2(x-1)}{x+1} \leqslant \ln x,\ \forall x \in [1, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 4x + 1$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că $f(x) \geqslant 2x \cdot (x-2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) Să se determine punctul de extrem local al funcției f.

d) Să se arate că funcția f este crescătoare pe $[1, \infty)$.

e) Să se arate că $f(x) \geqslant -2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

f) Să se calculeze $\int \dfrac{f(x)}{x}dx$.

3. Se consideră funcțiile $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_0(x) = xe^x$, $f_{n+1}(x) = f_n'(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se calculeze $f_0(0)$.

b) Să se calculeze $f_1(x)$, pentru $x \in \mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $\int f_1(x)dx$.

d) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $f_n(x) = e^x(x+n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

4. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, se consideră funcțiile $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + e^{-x}$ și $f_{n+1}(x) = f_n'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că $f_0(-x) = f_0(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că $f_0(x) \geqslant 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $f_1(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

d) Să se calculeze $\int f_1(x)dx$.

e) Utilizând metoda inducției matematice, să se demonstreze că $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{2k}(x) = f_0(x)$ și $f_{2k+1}(x) = f_1(x)$.

5. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \dfrac{2}{(x^2+1)(x^2+3)}$.

a) Să se demonstreze că

$f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} - \dfrac{1}{x^2+3}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int f(x)dx$

c) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

d) Să se arate că funcția f este descrescătoare pe intervalul $[0, +\infty)$.

e) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

f) Să se demonstreze că, pentru orice $x \in [0, \infty)$, $0 < f(x) \leqslant \dfrac{2}{3}$.

g) Să se calculeze

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(1) + f(\sqrt{3}) + f(\sqrt{5}) + \ldots + f(\sqrt{2n+1})\right)$.

6. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x + 1$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int f(x)dx$.

c) Să se găsească o primitivă a lui f care se anulează în 0.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x \cdot f'(x)}{x^4}$.

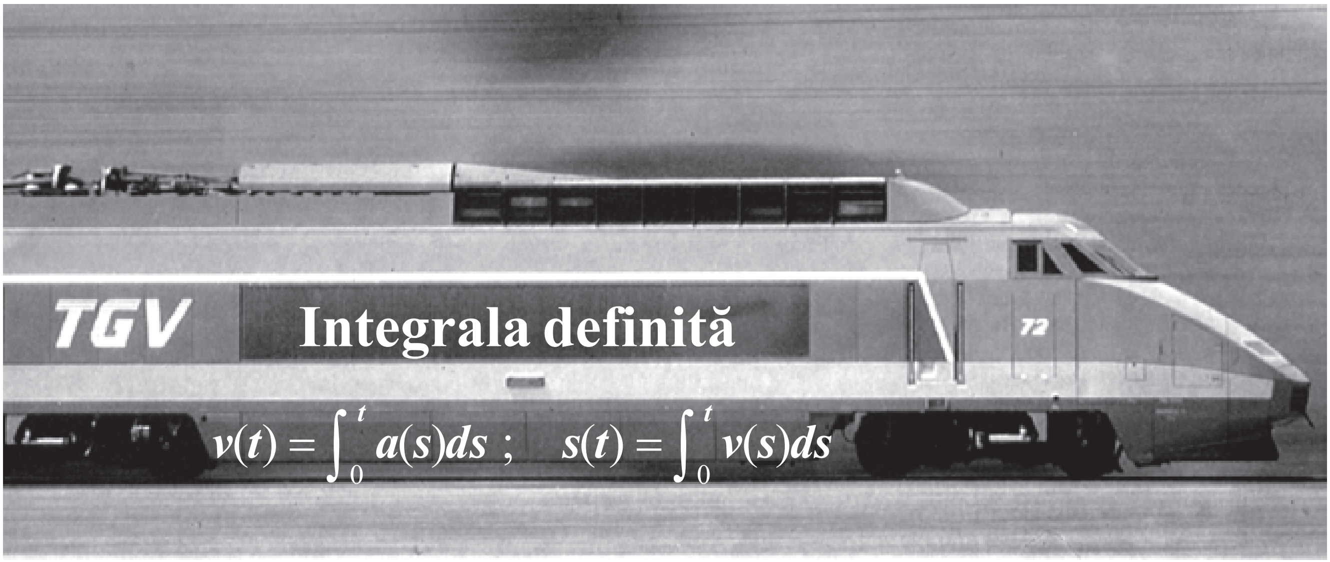
7. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$.

a) Să se calculeze $f'(x)$.

b) Să se calculeze $\int f(x)dx$

c) Să se afle câte puncte de extrem local are f.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)+3}{x-1}$.



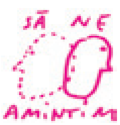
Integrale definite

Originile integralei definite pot fi urmărite încă din Antichitate și sunt legate de *probleme geometrice*, cum ar fi determinarea lungimii unei curbe, a ariei unei suprafețe, a volumului și centrului de greutate ale unui corp. Începând din secolul al XVI-lea, ideea de integrală definită începe să se cristalizeze și în legătură cu rezolvarea unor *probleme de fizică*, referitoare la studiul mișcărilor neuniforme, la determinarea masei și densității unei bare, la determinarea lucrului mecanic al unei forțe etc. Un moment important din istoria matematicilor s-a petrecut la sfârșitul secolului al XVII-lea, atunci când Leibniz și Newton au pus în evidență legătura profundă între noțiunea de integrală și noțiunea de derivată, exprimată prin celebra formulă $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$ care le poartă astăzi numele. La clarificarea deplină a ideii de integrală s-a ajuns un secol mai târziu, prin contribuțiile matematicianului francez Augustin Cauchy (1789-1857), care a folosit sume integrale de un tip particular și prin contribuțiile matematicianului german Bernhard Riemann (1826-1866), care a introdus sumele integrale, ce-i poartă numele, utilizate până în prezent.

O trăsătură comună a exemplelor care au condus la introducerea conceptului de integrală este trecerea de la descrierea locală, instantanee a tendinței unui fenomen, realizată printr-un *proces de derivare*, la descrierea globală a fenomenului, realizată printr-un *proces de integrare*, care „însumează" comportamentul fenomenului în toate momentele (sau în toate punctele).

Integrala definită a unei funcții continue

Vom considera un interval $I \subset \mathbb{R}$, o funcție continuă $f : I \to \mathbb{R}$ și două numere $a, b \in I$. Vom accepta fără demonstrație că orice funcție continuă pe un interval admite primitive pe acel interval.



Dacă $F, G : I \to \mathbb{R}$ sunt primitive ale funcției f, atunci există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât să avem $F = G + c$ ($F(x) = G(x) + c$, $\forall\, x \in I$), de unde rezultă că
$F(b) - F(a) = (G(b) + c) - (G(a) + c) = G(b) - G(a)$.

În consecință, numărul $F(b) - F(a)$ *nu* depinde decât de funcția f și de a și b, ceea ce ne permite să dăm următoarea ...

Folosind formula Leibniz-Newton, calculați următoarele integrale:

1) a) $\int_0^1 (x-1)^5 dx$; b) $\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx$;

c) $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^5}dx$; d) $\int_1^3 \frac{2}{3x-1}dx$;

e) $\int_0^5 \frac{3x-1}{3x+1}dx$; f) $\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}dx$;

g) $\int_0^2 \frac{x^2-4}{x^2+4}dx$; h) $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx$.

Definiție. Fie $F: I \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcției continue $f: I \to \mathbb{R}$. Se numește *integrală definită (sau integrală) a funcției f de la a la b* numărul real notat și definit prin relația:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (\textit{formula Leibniz-Newton}).$$

Formula se mai scrie:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b,$$

unde s-a notat $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$ (citim „$F(x)$ luat de la a la b“).

Comentarii și denumiri.

♦ Formula Leibniz-Newton poate să rezulte dintr-o altă definiție a integralei, bazată pe *sume integrale*. Sumele integrale au condus la rezolvarea problemelor de geometrie sau de fizică, semnalate în introducerea precedentă.

Integrala $\int_a^b f(x)dx$ reprezintă un număr real. Denumirea ei de integrală „definită“ se folosește prin opoziție cu denumirea de integrală „nedefinită“, integrala nedefinită $\int f(x)dx$ fiind mulțimea tuturor primitivelor lui f pe I.

♦ Calculul integralei $\int_a^b f(x)dx$ începe prin găsirea unei primitive F a lui f, după care se calculează diferența $F(b) - F(a)$.

♦ Simbolul $\int_a^b f(x)dx$ se citește „integrală de la a la b din f de x (simbol) dx“. Semnul $\int$ se numește *semn de integrare*; a și b se numesc *limite de integrare* (a este *limita inferioară* și b este *limita superioară*); f se numește *funcția de integrat*; intervalul $[a, b]$, în cazul $a < b$, se numește *interval de integrare*; x se numește *variabila de integrare*. Variabila de integrare se poate nota și cu alte litere, cum ar fi $s, t, u, v, y, z \in \mathbb{R}$.

ATENȚIE

Variabila de integrare *nu* joacă nici un rol în definiția integralei și, de aceea, ea poate să lipsească:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b fdx = \int_a^b f.$$

O scriere de forma $\int_a^x f(x)dx$ *nu* are sens deoarece limita de integrare și variabila de integrare au roluri diferite și *nu* pot fi notate la fel.

EXEMPLE

1) $\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8-1}{3} = \frac{7}{3}$.

Funcția $f(x) = x^2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, este continuă pe $\mathbb{R}$ și admite primitiva $F(x) = \frac{1}{3}\cdot x^3, \forall x \in \mathbb{R}$.

2) a) $\int_0^4 \sqrt{x}dx$; b) $\int_{-3}^1 \sqrt{1-x}dx$;

c) $\int_0^{12} \sqrt{2x+1}dx$; d) $\int_0^4 (2x+1)\sqrt{2x+1}dx$;

e) $\int_0^1 x\sqrt[3]{x}dx$; f) $\int_0^5 x\sqrt{3x+1}dx$;

g) $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{5x+1}}dx$; h) $\int_0^3 \frac{1}{(5x+1)\sqrt{5x+1}}dx$;

i) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$; j) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$.

3) a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$;

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}\frac{x}{2}dx$; d) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \mathrm{ctg}\frac{x}{2}dx$;

e) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x + \cos x)^2 dx$; f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$;

g) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x dx$; h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + x\cdot\cos x)dx$.

Indicații. $\sin^3 x = (1 - \cos^2 x)\sin x$; $\cos^3 x = (1 - \sin^2 x)\cos x$; $\sin x + x \cdot \cos x = f'(x)$.

4) a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x dx$;

c) $\int_0^1 (e^x + xe^x)dx$; d) $\int_1^2 (\ln x + 1)dx$.

Indicații. a) $4\sin^4 x = (1 - \cos 2x)^2$; b) $4\cos^4 x = (1 + \cos 2x)^2$; c) $e^x + x \cdot e^x = f'(x)$; d) $\ln x + 1 = g'(x)$.

5) Calculați următoarele integrale:

a) $\int_0^{\sqrt{2}} x^5 dx$; b) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} x^5 dx$;

c) $\int_{-3}^3 x^7 dx$; d) $\int_{-\sqrt{5}}^{-1} x^7 dx$;

e) $\int_0^4 \sqrt{x\sqrt{x}}dx$; f) $\int_{-4}^{-1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$;

g) $\int_{-8}^{-1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$; h) $\int_{-2}^{-1} \frac{x^2+1}{x}dx$.

6) Calculați următoarele integrale:

a) $\int_{-1}^1 e^x dx$; b) $\int_1^2 10^x dx$;

c) $\int_0^2 (\sqrt{2})^x dx$.

2) $\int_2^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_2^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{1-8}{3} = -\frac{7}{3}$.

Funcția $f(t) = t^2$, $t \in \mathbb{R}$, este continuă pe $\mathbb{R}$ și admite primitiva $F(t) = \frac{1}{3} \cdot t^3$, $t \in \mathbb{R}$.

3) $\int_2^3 \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u}\Big|_2^3 = \left(-\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

Funcția $f(u) = \frac{1}{u^2}, u \in (0, \infty)$, este continuă pe intervalul $(0, \infty)$ și admite primitiva $F(u) = -\frac{1}{u}, u \in (0, \infty)$.

4) $\int_{-2}^{-3} \frac{1}{y^2} dy = -\frac{1}{y}\Big|_{-2}^{-3} = \left(-\frac{1}{-3}\right) - \left(-\frac{1}{-2}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$.

Funcția $f(y) = \frac{1}{y^2}$, $\forall\, y \in (-\infty, 0)$, este continuă pe intervalul $(-\infty, 0)$ și admite primitiva $F(y) = -\frac{1}{y}, \forall y \in (-\infty, 0)$.

5) $\int_0^1 (\sqrt{x} + \sqrt{1-x}) dx = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x^3} - \sqrt{(1-x)^3}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(1-0) - \frac{2}{3}(0-1) = \frac{4}{3}$.

Funcția $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}, \forall\, x \in [0,1]$, este continuă pe intervalul $[0, 1]$ și admite primitiva

$$F(x) = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x^3} - \sqrt{(1-x)^3}\right), \forall\, x \in [0,1].$$

Observații.

♦ $\int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0$.

♦ $\int_b^a f(x) dx = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x) dx$.

♦ Funcția $\varphi : I \to \mathbb{R}$, definită prin $\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt, \forall x \in I$, este unica primitivă a lui f pe I pentru care $\varphi(a) = 0$.

Avem $\varphi(x) = F(x) - F(a)$, $\forall\, x \in I$, deci $\varphi = F - F(a)$, iar unicitatea lui φ rezultă din proprietățile primitivelor.

♦ Avem: $\lim\limits_{x \to b} \int_a^x f(t) dt = \lim\limits_{x \to b} \big(F(x) - F(a)\big) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt$;

$\lim\limits_{x \to a} \int_x^b f(t) dt = \lim\limits_{x \to a} \big(F(b) - F(x)\big) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt$;

Funcția F este derivabilă, deci F este continuă.

♦ Fie o funcție $g : A \to B$, unde A, $B \subset \mathbb{R}$ sunt mulțimi nevide. Fie două numere a, $b \in A$, $a < b$ astfel încât $[a, b] \subset A$ și astfel încât funcția $h : [a, b] \to \mathbb{R}$, definită prin $h(x) = g(x)$, $x \in [a, b]$, să fie continuă. Atunci definim integralele

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b h(x) dx \text{ și } \int_b^a g(x) dx = \int_b^a h(x) dx.$$

7) Calculați următoarele integrale:

a) $\int_{-4}^4 \frac{1}{x^2 - 25} dx$;

b) $\int_{-1}^3 \frac{1}{x^2 + 3} dx$;

c) $\int_0^4 \frac{x}{x^2 - 25} dx$;

d) $\int_{-1}^3 \frac{x}{x^2 + 3} dx$.

Indicații. Se folosesc formulele și observațiile următoare:

a) $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + \mathscr{C}$, $a \neq 0$, pe un interval $I \subset \mathbb{R} \setminus \{-a, a\}$;

b) $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \mathscr{C}$, $a \neq 0$;

c) $(x^2 - 25)' = 2x$; d) $(x^2 + 3)' = 2x$.

8) Calculați următoarele integrale:

a) $\int_0^\pi \sin x \, dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$;

c) $\int_{\frac{3\pi}{4}}^\pi \frac{1}{\cos^2 x} dx$; d) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x} dx$;

e) $\int_{\frac{2\pi}{3}}^\pi \operatorname{tg} x \, dx$; f) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} \operatorname{ctg} x \, dx$.

9) Calculați următoarele integrale:

a) $\int_0^{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$;

b) $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3}} dx$;

c) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx$;

d) $\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{1}{\sqrt{9 - 4x^2}} dx$.

Indicație.

Se folosesc formulele:

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + \alpha}\right| + \mathscr{C}$, $\alpha \neq 0$, pe un interval pe care $x^2 + \alpha > 0$;

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + \mathscr{C}$, $a > 0$, pe intervalul $(-a, a)$.

Proprietăți ale integralei definite

În acest paragraf, vom considera un interval $I \subset \mathbb{R}$, funcțiile continue $f, g : I \to \mathbb{R}$ și numerele $a, b \in I$, $a < b$ (în particular, putem avea $I = [a, b]$). Fie $F : I \to \mathbb{R}$ o primitivă a lui f și $G : I \to \mathbb{R}$ o primitivă a lui g.

Teoremă. *Proprietatea de liniaritate a integralei.*
Pentru orice numere $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ avem

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Demonstrație.
Funcția $H = \lambda F + \mu G$ este o primitivă a funcției $\lambda f + \mu g$, deci

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)dx = H(b) - H(a) = (\lambda F(b) + \mu G(b)) - (\lambda F(a) + \mu G(a)) =$$

$$= \lambda(F(b) - F(a)) + \mu(G(b) - G(a)) = \lambda \int_a^b f dx + \mu \int_a^b g dx. \ ■$$

Consecințe.

♦ Pentru $\mu = 0$, avem $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$.

♦ Pentru $\lambda = 1$ și $\mu = \pm 1$, avem

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\, dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

EXEMPLU

Să calculăm integrala $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\, dx$.

Folosind formula $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ și proprietatea de liniaritate, avem $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx =$

$$= \frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$$

Teoremă. *Proprietatea de aditivitate a integralei.*
Pentru orice număr $c \in I$ avem $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Demonstrație. Conform formulei Leibniz-Newton, avem

$$\int_a^c f dx + \int_c^b f dx = (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f dx. \ ■$$

EXEMPLU

Să calculăm integrala $I = \int_{-1}^{2} \left(|\,x\,| + \sqrt{x^2 - 2x + 1}\right) dx$.

Fie funcția $f(x) = |\,x\,| + \sqrt{x^2 - 2x + 1} = |\,x\,| + \sqrt{(x-1)^2} =$ $= |\,x\,| + |\,x - 1\,|, \forall x \in [-1, 2]$. Funcția f este continuă și are explicitarea: $f(x) = -2x + 1$, dacă $x \in [-1, 0]$; $f(x) = 1$, dacă $x \in [0, 1]$; $f(x) = 2x - 1$, dacă $x \in [1, 2]$. Aplicăm de două ori proprietatea de aditivitate a integralei și obținem

$$\int_{-1}^{2} f\, dx = \int_{-1}^{0} (-2x + 1)dx + \int_0^1 1dx + \int_1^2 (2x - 1)dx =$$

$$= (-x^2 + x)\Big|_{-1}^{0} + x\Big|_0^1 + (x^2 - x)\Big|_1^2 = 2 + 1 + 2 = 5.$$

10) Calculați integrala $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - 2x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$.

Indicație. Conform proprietății de liniaritate, integrala se scrie $I = I_1 + I_2$, unde

$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ și $I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-2x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$.

Se folosesc apoi tabelul cu primitive și observația: $(1 - x^2)' = -2x$.

11) Calculați integrala $I = \int_1^8 \frac{(1 + \sqrt{x})^2}{\sqrt[3]{x}} dx$.

Indicație. Conform proprietății de liniaritate, integrala se scrie $I = I_1 + I_2 + I_3$, unde

$I_1 = \int_1^8 x^{-\frac{1}{3}} dx$, $I_2 = 2\int_1^8 x^{\frac{1}{6}} dx$ și $I_3 = \int_1^8 x^{\frac{2}{3}} dx$.

12) Calculați integrala $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x + 4}{x^2 + 1} dx$.

Indicație. Conform proprietății de liniaritate, integrala se scrie $I = I_1 + 4I_2$,

unde $I_1 = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x}{x^2 + 1} dx$ și $I_2 = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 + 1} dx$.

13) Calculați integrala $I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1 + e^x} dx$.

Indicație. $\frac{e^{2x}}{1 + e^x} = e^x - \frac{e^x}{1 + e^x}$; se aplică proprietatea de liniaritate a integralei.

14) Calculați $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos 2x}\, dx$.

Indicație. $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$; $\sqrt{1 + \cos 2x} = \sqrt{2}\,|\cos x|$; se explicitează modulul și se aplică proprietatea de aditivitate a integralei $I = I_1 + I_2 + I_3$, unde

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\,|\cos x|\,dx$$

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2}\,|\cos x|\,dx$$

$$I_3 = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{2}\,|\cos x|\,dx$$

Teoremă. *Proprietatea de pozitivitate a integralei*

Dacă $f \geqslant 0$ pe $[a, b]$, atunci $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$.

Teoremă. *Proprietatea de monotonie a integralei.*

Dacă $f \leqslant g$ pe $[a, b]$, atunci $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$.

Demonstrație. Avem $g - f \geqslant 0$ pe $[a, b]$. Conform proprietăților de liniaritate și pozitivitate, avem

$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b (g(x) - f(x))dx \geqslant 0.$$

Prin urmare, $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$. ■

Consecințe.

1) Dacă $f < g$ pe (a, b), atunci $\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$.

Într-adevăr, $\int_a^b (g - f)dx > 0$.

2) Dacă numerele $m, M \in \mathbb{R}$ sunt astfel încât $m \leqslant f(x) \leqslant M$, $\forall x \in [a, b]$, atunci $m(b-a) = \int_a^b m dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b M dx = M(b-a)$ (*inegalitățile mediei*).

3) Avem $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$ (*inegalitatea modulului*).

Într-adevăr, $\forall x \in [a, b]$ avem $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$. Conform proprietății de monotonie, $-\int_a^b |f(x)|dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$, deci $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$.

EXEMPLE

1) Considerăm funcția $f(x) = x^2$, $x \in [-1, 2]$.

Să găsim $c \in (-1, 2)$ astfel încât $\int_{-1}^2 x^2 dx = 3f(c)$.

Rezolvare.

Avem $\int_{-1}^2 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_{-1}^2 = \frac{8-(-1)}{3} = \frac{9}{3} = 3$. Ecuația devine:

$$3 = 3f(c)\,;\ f(c) = 1\,;\ c^2 = 1\,;\ c = \pm 1.$$

Soluția din intervalul $(-1, 2)$ este $c = 1$.

2) Considerăm funcția $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, $x \in [2, 5]$. Să arătăm că $\sqrt{3} < \int_2^5 f(x)dx < \sqrt{6}$.

Rezolvare. Avem $f'(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} > 0$. Rezultă că f este strict crescătoare, deci $\frac{1}{\sqrt{3}} = f(2) < f(x) < f(5) = \frac{2}{\sqrt{6}}$, $\forall x \in (2, 5)$.

Conform proprietății de monotonie, avem

$$\sqrt{3} = \int_2^5 \frac{1}{\sqrt{3}}dx < \int_2^5 f(x)dx < \int_2^5 \frac{2}{\sqrt{6}}dx = \sqrt{6}.$$

15) Arătați că funcțiile următoare sunt continue și calculați integralele definite ale acestora:

a) $f:[-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-1, 0] \\ x^3, & x \in (0, 1] \end{cases}$;

b) $f:[0, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1] \\ \frac{1}{x^2}, & x \in (1, 4] \end{cases}$;

c) $f:[-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x \in [-1, 0] \\ 1+x^2, & x \in (0, 1] \end{cases}$.

Indicații. Se aplică proprietatea de aditivitate a integralei. De exemplu, integrala funcției f de la punctul a) este

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 x\,dx + \int_0^1 x^3 dx.$$

16) Arătați că funcțiile următoare sunt continue și calculați integralele definite ale acestora:

a) $f:[-2, 8] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2}, & x \in [-2, 2] \\ \sqrt{2x}, & x \in (2, 8] \end{cases}$

b) $f:\left[-\frac{1}{4}, 2\right] \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \begin{cases} \sqrt{4x+1}, & x \in \left[-\frac{1}{4}, 0\right] \\ \frac{1}{\sqrt{4x+1}}, & x \in (0, 2] \end{cases}$;

c) $f:[0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 1+\cos x, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$

17) Calculați următoarele integrale:

a) $\int_{-2}^2 |x|dx$;

b) $\int_{-2}^2 |x^3|dx$;

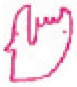
c) $\int_0^3 |x-1|dx$;

d) $\int_{-1}^2 |2x-1|dx$.

Indicație. Se explicitează modulele și se aplică proprietatea de aditivitate a integralei. De exemplu, la d):

$$\int_{-1}^2 |2x-1|dx = -\int_{-1}^{\frac{1}{2}} (2x-1)dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 (2x-1)dx$$

EXEMPLE



1) Să calculăm integrala $I=\int_2^4 x^3dx$.

Funcția $f:[2,4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$, admite primitiva $F:[2,4]\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^4}{4}$.

$I=F(x)\Big|_2^4=F(4)-F(2)=\frac{4^4}{4}-\frac{2^4}{4}=60$.

2) Să calculăm integrala $I=\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x^3}dx$

Funcția $f:[-2,-1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^3}=x^{-3}$, admite primitiva $F:[-2,-1]\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^{-3+1}}{-3+1}=-\frac{1}{2x^2}$.

$I=F(x)\Big|_{-2}^{-1}=F(-1)-F(-2)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=-\frac{3}{8}$.

3) Să calculăm integrala $I=\int_{-2}^{0}\frac{1}{x-1}dx$.

Funcția $f:[-2,0]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x-1}$, admite primitiva $F:[-2,0]\to\mathbb{R}$, $F(x)=\ln|x-1|$.

$I=F(x)\Big|_{-2}^{0}=F(0)-F(-2)=\ln 1-\ln 3=-\ln 3$.

4) Să calculăm integrala $I=\int_0^1(\sqrt{x}+\sqrt{1-x})dx$.

Conform proprietății de liniaritate, funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=x^{\frac{1}{2}}+(1-x)^{\frac{1}{2}}$, admite primitiva

$F:[0,1]\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}-\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}=\frac{2}{3}(\sqrt{x^3}-\sqrt{(1-x)^3})$. Verificarea se face prin derivare.

$I=F(x)\Big|_0^1=F(1)-F(0)=\frac{2}{3}(1-0)-\frac{2}{3}(0-1)=\frac{4}{3}$.

5) Să calculăm integrala $I=\int_{-8}^{0}\sqrt[3]{x}dx$.

Funcția $f:[-8,0]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$, admite primitiva $F:[-8,0]\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}=\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{x^4}$.

$I=F(x)\Big|_{-8}^{0}=F(0)-F(-8)=\frac{3}{4}(0-\sqrt[3]{8^4})=-\frac{3}{4}\cdot 16=-12$.

6) Să calculăm integrala $I=\int_1^2\frac{1}{\sqrt{5x^2-4}}dx$. Transformăm funcția de integrat astfel încât să aplicăm o formulă din tabel.

$$I=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x^2-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\ln\left|x+\sqrt{x^2-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}\right|\Bigg|_1^2=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{4}{5}}\right|\Bigg|_1^2=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

7) Să calculăm integrala $I=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$.

Conform tabelului, $I=\frac{1}{2}\cdot(x\cdot\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\cdot\arcsin 1=\frac{\pi}{4}$.

8) Să calculăm integrala $I=\int_0^2\sqrt{3x^2+4}dx$.

Transformăm funcția de integrat astfel încât să aplicăm o formulă din tabel.

$$I=\sqrt{3}\cdot\int_0^2\sqrt{x^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left[x\cdot\sqrt{x^2+\frac{4}{3}}+\frac{4}{3}\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+\frac{4}{3}}\right)\right]\Bigg|_0^2=4+\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\ln(2+\sqrt{3}).$$

9) Să calculăm integrala $I=\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx$.

Folosim identitatea $\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\cos 2x$, liniaritatea integralei și consultăm tabelul.

$$I=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}dx-\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\pi}\cos 2x dx=\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{4}\cdot\sin 2x\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2};\quad\left(\left(\frac{1}{2}\cdot\sin 2x\right)'=\cos 2x\right).$$

10) Să calculăm integrala $I=\int_0^{\pi}\operatorname{tg}\frac{x}{3}dx$.

Consultând tabelul, $\int\operatorname{tg} t\,dt=-\ln(\cos t)+\mathscr{C}$, $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ și ținând seama că $\left(\frac{x}{3}\right)'=\frac{1}{3}$, avem

$$I=-3\cdot\ln\left(\cos\frac{x}{3}\right)\Big|_0^{\pi}=-3\cdot\left(\ln\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)-\ln(\cos 0)\right)=-3\cdot\ln\frac{1}{2}=3\cdot\ln 2$$

Verificarea primitivei: $\left(-3\cdot\ln\left(\cos\frac{x}{3}\right)\right)'=-3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{-\sin\frac{x}{3}}{\cos\frac{x}{3}}=\operatorname{tg}\frac{x}{3}$.

Exerciții rezolvate.

Calculați următoarele integrale:

1) $\int_0^{12}x\sqrt{2x+1}dx=\sqrt{2}\cdot\int_0^{12}x\sqrt{x+\frac{1}{2}}dx=\sqrt{2}\int_0^{12}\left(x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\sqrt{x+\frac{1}{2}}dx=\sqrt{2}\int_0^{12}\left(x+\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}dx-\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{12}\left(x+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}dx=$

$=\sqrt{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}+1}\Big|_0^{12}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}+1}\Big|_0^{12}=\frac{1}{10}\cdot\sqrt{(2x+1)^5}\Big|_0^{12}-\frac{1}{6}\cdot\sqrt{(2x+1)^3}\Big|_0^{12}=391+\frac{11}{15}.$

2) $\int_{-1}^{1}\left|e^{2x}-1\right|dx=\int_{-1}^{0}(1-e^{2x})dx+\int_0^1(e^{2x}-1)dx=\left(x-\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(\frac{1}{2}\cdot e^{2x}-x\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\cdot(e^{-2}+e^2)-1.$

3) $I=\int_{-1}^{1}\frac{\left|x-|x|\right|}{1+|x|}dx$. Explicităm modulele și aplicăm aditivitatea și liniaritatea integralei.

$I=\int_{-1}^{0}\frac{|x+x|}{1-x}dx+\int_0^1\frac{|x-x|}{1+x}dx=\int_{-1}^{0}\frac{-2x}{1-x}dx+\int_0^1 0dx=2\int_{-1}^{0}\frac{x}{x-1}dx=2\int_{-1}^{0}\frac{x-1+1}{x-1}dx=$

$=2\int_{-1}^{0}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)dx=2\cdot\int_{-1}^{0}1dx+2\int_{-1}^{0}\frac{1}{x-1}dx=2x\Big|_{-1}^{0}+2\cdot\ln|x-1|\Big|_{-1}^{0}=2-2\ln 2.$

4) $\int_0^1\frac{x^2}{x^2-4}dx=\int_0^1\frac{x^2-4+4}{x^2-4}dx=\int_0^1 1dx+4\int_0^1\frac{1}{x^2-2^2}dx=1+4\cdot\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\Big|_0^1=1-\ln 3.$

5) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}\sqrt{x^2-2}dx=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}\sqrt{x^2-(\sqrt{2})^2}dx=\left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}-\frac{2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right|\right)\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}=\sqrt{6}-\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3}).$

6) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg} x\,dx=-\ln(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\ln\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)+\ln(\cos 0)=-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}=\ln\sqrt{2}.$

7) $\int_0^{\pi}\frac{\cos^2 x}{1+\sin x}dx=\int_0^{\pi}\frac{1-\sin^2 x}{1+\sin x}dx=\int_0^{\pi}\frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{1+\sin x}dx=\int_0^{\pi}(1-\sin x)dx=(x+\cos x)\Big|_0^{\pi}=\pi-2.$

PROBLEME PROPUSE

Calculați următoarele integrale:

1. a) $\int_{-2}^{0}(1+x)dx$;

b) $\int_{0}^{3}(1+2x)dx$;

c) $\int_{0}^{3}(2x-1)^2dx$; d) $\int_{0}^{1}(3x^2+2x+1)dx$;

e) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}(x^3-x)dx$; f) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}x(x^4+1)dx$;

g) $\int_{0}^{1}x^2(x^2-1)^2dx$; h) $\int_{0}^{1}(x^2+1)^3dx$.

2. a) $\int_{1}^{2}\frac{1}{x^3}dx$; b) $\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x^3}dx$;

c) $\int_{1}^{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2dx$; d) $\int_{0}^{1}\frac{2+x^2}{1+x^2}dx$;

e) $\int_{1}^{e}\frac{x+1}{x}dx$; f) $\int_{1}^{2}\frac{(x+1)^2}{x}dx$;

g) $\int_{-e}^{-1}\frac{1}{x}dx$; h) $\int_{-2}^{-1}\frac{(x-1)^2}{x}dx$;

i) $\int_{1}^{2}\frac{2x-1}{x^3}dx$; j) $\int_{1}^{\sqrt{2}}\frac{x^2+5}{x^7}dx$.

3. a) $\int_{1}^{4}\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}dx$; b) $\int_{1}^{3}\sqrt[3]{x\sqrt{x}}dx$;

c) $\int_{1}^{8}\frac{5\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x}}dx$; d) $\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx$;

e) $\int_{-1}^{1}e^xdx$; f) $\int_{1}^{2}10^xdx$;

g) $\int_{0}^{2}(\sqrt{2})^xdx$; h) $\int_{0}^{\pi}\sin x dx$.

4. a) $\int_{-2}^{2}|x|dx$; b) $\int_{-2}^{2}|x^3|dx$;

c) $\int_{0}^{3}|x-1|dx$; d) $\int_{-1}^{2}|2x-1|dx$.

5. Arătați că funcțiile următoare sunt continue și calculați integralele lor. Reprezentați graficele funcțiilor de integrat și subgraficele lor (dacă $f \geqslant 0$):

a) $f:[-2, 2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^3, & x\in[-2, 0]\\ x^2, & x\in(0, 2]\end{cases}$;

b) $f:[0, 4]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in[0, 1]\\ \frac{1}{x^2}, & x\in(1, 4]\end{cases}$;

c) $f:[0, 2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x\in[0, 1]\\ (x-1)^3, & x\in(1, 2]\end{cases}$;

d) $f:[-1, 1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\in[-1, 0]\\ \frac{1}{x^2+1}, & x\in(0, 1]\end{cases}$;

e) $f:[0, \pi]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\\ 1+\cos x, & x\in\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]\end{cases}$;

f) $f:[-2, 2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\frac{|x+1|-|x-1|}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$;

g) $f:[-2, 2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\min\{|x|, |x-1|\},\ x\in[-2, 2]$;

h) $f:[0, 4]\to\mathbb{R},\ f(x)=\max\{x^2, 2^x\},\ x\in[0, 4]$.

Calculați următoarele integrale

6. a) $\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(2x+1)^5dx$; b) $\int_{-2}^{-1}\left(x-\frac{1}{x}\right)dx$;

c) $\int_{0}^{\frac{3}{2}}\frac{2x-1}{2x+1}dx$; d) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x^2+x}{x^2-1}dx$.

7. a) $\int_{1}^{3}\frac{x^2}{x+1}dx$; b) $\int_{-2}^{0}\frac{x+5}{(x+4)^3}dx$;

c) $\int_{0}^{3}\left|\frac{x-1}{x+1}\right|dx$; d) $\int_{0}^{3}\frac{1}{|x-2|+1}dx$.

8. a) $\int_{0}^{\pi}\cos\frac{x}{3}\,dx$; b) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin 3x\,dx$;

c) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx$; d) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$.

9. Arătați că funcțiile următoare sunt continue și calculați integralele lor.

a) $f:[-2, 8]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+2}, & x\in[-2, 2]\\ \sqrt{2x}, & x\in(2, 8]\end{cases}$;

b) $f:\left[-\frac{1}{4}, 2\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{4x+1}, & x\in\left[-\frac{1}{4}, 0\right]\\ \frac{1}{\sqrt{4x+1}}, & x\in(0, 2]\end{cases}$.

Metode de calcul al integralelor definite. Integrarea funcțiilor raționale

Definiție. O *funcție rațională f*, definită pe un interval I, este de forma $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $\forall x\in I$, unde P, $Q\in \mathbb{R}[X]$ și $Q(x)\neq 0$ pe I.

Pentru a calcula integrala definită a unei funcții raționale, va fi suficient să știm să calculăm o primitivă a sa, urmând apoi să aplicăm formula Leibniz-Newton.

Deci ne vom ocupa în cele ce urmează de metodele de calcul ale integralelor nedefinite ale funcțiilor raționale.

SĂ NE AMINTIM ... câteva integrale nedefinite ale unor funcții raționale importante. Intervalul de definiție al acestor integrale este inclus în domeniul funcției. Formulele se verifică prin derivare.

$\boxed{\int x^n\,dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+\mathscr{C}}$, $n\in\mathbb{N}$; $\boxed{\int \dfrac{1}{x}\,dx=\ln|x|+\mathscr{C}}$

$\boxed{\int x^{-n}\,dx=\dfrac{x^{-n+1}}{-n+1}+\mathscr{C}}$, $n\in\{2, 3, 4, ...\}$.

$\boxed{\int \dfrac{1}{x^2+a^2}\,dx=\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}+\mathscr{C}}$; $\boxed{\int \dfrac{1}{x^2-a^2}\,dx=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|+\mathscr{C}}$

$\boxed{\int \dfrac{P'(x)}{P(x)}\,dx=\ln|P(x)|+\mathscr{C}}$, unde $P\in\mathbb{R}[X]$, $P(x)\neq 0$, $\forall x\in I$.

$\boxed{\int \dfrac{P'(x)}{1+P^2(x)}\,dx=\operatorname{arctg}P(x)+\mathscr{C}}$, unde $P\in\mathbb{R}[X]$.

EXEMPLU

$$\int\frac{14x^6}{4x^{14}-4x^7+2}\,dx=\int\frac{(2x^7-1)'}{1+(2x^7-1)^2}\,dx=\operatorname{arctg}(2x^7-1)+\mathscr{C}$$

Definiție. O funcție rațională se numește *funcție rațională simplă* dacă are una din formele:

(1) $f(x)=P(x)$, $P\in\mathbb{R}[X]$

(2) $f(x)=\dfrac{A}{(x-a)^n}$, $A,\ a\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}^*$

(3) $f(x)=\dfrac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^n}$, $A,\ B,\ a,\ b\in\mathbb{R}$, $\Delta=a^2-4b<0$, $n\in\mathbb{N}^*$

Importanța funcțiilor raționale simple rezultă din următoarea...

Teoremă. Orice funcție rațională se poate descompune, în mod unic, în sumă de funcții raționale simple.

EXEMPLU

$$\frac{-4x^3+9x^2-5x+16}{(x^2+1)(x-2)^2}=\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{2}{(x-2)^2}-\frac{5}{x-2}.$$

Verificați egalitatea prin aducere la același numitor.

1) Calculați următoarele integrale nedefinite și precizați un interval de definiție:

a) $\int(x^5-2x+1)\,dx$; b) $\int\left(x^3-\dfrac{3}{x}\right)dx$;

c) $\int\dfrac{3x^2}{x^3-1}\,dx$; d) $\int\dfrac{x^5-2x+1}{x^3}\,dx$;

e) $\int\dfrac{2x}{1+x^2}\,dx$; f) $\int\dfrac{2x}{1+x^4}\,dx$;

g) $\int\dfrac{2x}{(1+x^2)^3}\,dx$; h) $\int\dfrac{x^7-3x^4+1}{x^2+1}\,dx$;

i) $\int\left(2x^2+3-\dfrac{5}{x}\right)dx$;

j) $\int\left(2x^5+x-\dfrac{5}{x^2+1}\right)dx$;

k) $\int\dfrac{12x^3-x+2}{3x^4-\dfrac{x^2}{2}+2x-\sqrt{2}}\,dx$;

l) $\int\dfrac{6x-1}{1+(3x^2-x+5)^2}\,dx$;

m) $\int\dfrac{2x-3}{x^4-6x^3+11x^2-6x+2}\,dx$.

2) Aplicați teorema împărțirii cu rest pentru împărțirea polinomului P la polinomul Q și apoi descompuneți funcția $f=\dfrac{P}{Q}$ în funcții raționale simple.

a) $P=(X-1)^3$, $Q=X$

b) $P=(X-1)^3$, $Q=X+2$

c) $P=(X-1)^3$, $Q=X^2-1$

d) $P=(X^2-X+1)^2$, $Q=(X-1)^3$

e) $P=X^4-1$, $Q=X^3$

f) $P=X^5-X+1$, $Q=-3X^2$

g) $P=(X-1)^3$, $Q=X+1$

h) $P=X^6+2$, $Q=X+1$

i) $P=X^5-X^2-4X+2$, $Q=X+1$

j) $P=X^5-X^2-4X+2$, $Q=(X+2)^2$

k) $P=X^5-X^2-4X+2$, $Q=X^2(X+2)^2$

l) $P=X^5-X^2-4X+2$, $Q=\dfrac{1}{2}X^2$

Pentru a integra funcțiile raționale este suficient să știm:
I. cum descompunem o funcție rațională în funcții raționale simple;
II. cum integrăm funcțiile raționale simple.

Să tratăm pe rând aceste două cerințe.

I. Descompunerea în funcții raționale simple – temă de sinteză

Fie $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Conform teoremei împărțirii cu rest, există și sunt unice polinoamele C, $R \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât $f(x)=C(x)+\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ și $\operatorname{grad}R < \operatorname{grad}Q$. Pentru a descompune $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ în funcții raționale simple, descompunem polinomul Q în factori ireductibili, care pot fi numai de gradul I (de forma $x-a$) sau de gradul al II-lea (de forma x^2+ax+b, cu $a^2-4b<0$). Distingem mai multe cazuri în care este necesar să determinăm coeficienții reali $A, B, C, \ldots$ de la numărătorul funcțiilor raționale simple.

Dacă $\operatorname{grad}Q=1$, atunci $\dfrac{R(x)}{x-a}=\dfrac{A}{x-a}$ (pentru $Q(x)=x-a$).

Dacă $\operatorname{grad}Q=2$, putem avea una dintre următoarele situații:

- $\dfrac{R(x)}{(x-a)^2}=\dfrac{A}{(x-a)^2}+\dfrac{B}{x-a}$ (pentru $Q(x)=(x-a)^2$);
- $\dfrac{R(x)}{(x-a)(x-b)}=\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}$ ($a\neq b$, $Q(x)=(x-a)(x-b)$);
- $\dfrac{R(x)}{x^2+ax+b}=\dfrac{Ax+B}{x^2+ax+b}$ ($Q(x)=x^2+ax+b$, $a^2-4b<0$).

Dacă $\operatorname{grad}Q=3$, putem avea una dintre următoarele situații:

- $\dfrac{R(x)}{(x-a)^3}=\dfrac{A}{(x-a)^3}+\dfrac{B}{(x-a)^2}+\dfrac{C}{x-a}$ (pentru $Q(x)=(x-a)^3$);
- $\dfrac{R(x)}{(x-a)^2(x-b)}=\dfrac{A}{(x-a)^2}+\dfrac{B}{x-a}+\dfrac{C}{x-b}$ ($Q(x)=(x-a)^2(x-b)$);
- $\dfrac{R(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}+\dfrac{C}{x-c}$;
- $\dfrac{R(x)}{(x^2+ax+b)(x-c)}=\dfrac{Ax+B}{x^2+ax+b}+\dfrac{C}{x-c}$.

Dacă $\operatorname{grad}Q=4$, putem întâlni mai multe situații dintre care vom prezenta numai două:

- $\dfrac{R(x)}{(x-a)^2(x^2+bx+c)}=\dfrac{A}{(x-a)^2}+\dfrac{B}{x-a}+\dfrac{Cx+D}{x^2+bx+c}$;
- $\dfrac{R(x)}{(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)}=\dfrac{Ax+B}{x^2+ax+b}+\dfrac{Cx+D}{x^2+cx+d}$.

Celelalte cazuri se obțin considerând toate descompunerile posibile ale unui polinom de gradul al IV-lea în factori ireductibili de gradul I și de gradul al II-lea. De fiecare dată când unul dintre factori apare la o putere $n>1$ vom considera toate funcțiile raționale simple care au la numitor acel factor la o putere $k \leqslant n$, $k \in \mathbb{N}$.

m) $P=X^5-X^2-4X+2$, $Q=\sqrt{2}X-1$

n) $P=X^5-X^2-4X+2$, $Q=X-\sqrt{2}$

3) Descompuneți în funcții raționale simple:

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^3-6x^2+11x-6}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^4-2x^2+1}$

c) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^4+x^2+1}$

d) $f(x)=\dfrac{x^2-2}{(x^2+1)(x-2)^2}$

e) $f(x)=\dfrac{x^3-x+7}{(x+1)^3x}$

Indicații.

a) $x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)$,

$\dfrac{1}{x^3-6x^2+11x-6}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x-3}$.

Aducem la același numitor și identificăm coeficienții termenilor de același grad.

Obținem sistemul $\begin{cases}A+B+C=0\\5A+4B+3C=0\\6A+3B+2C=1\end{cases}$

cu soluțiile $A=\dfrac{1}{2}$, $B=-1$, $C=\dfrac{1}{2}$,

ca urmare, $f(x)=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x-3}=\ldots$

b) $x^4-2x^2+1=(x^2-1)^2=(x-1)^2(x+1)^2$.

$\dfrac{x^2+x+1}{x^4-2x^2+1}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{x+1}+\dfrac{D}{(x+1)^2}$

Prin identificare obținem sistemul

$\begin{cases}A+C=0\\A+B-C+D=1\\-A+2B-C-2D=1\\-A+B+C+D=1\end{cases}$

cu soluțiile $A=0$, $B=\dfrac{3}{4}$, $C=0$, $D=\dfrac{1}{4}$.

c) $x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$,

$\dfrac{x-1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}=\dfrac{Ax+B}{x^2+x+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2-x+1}$.

d) $\dfrac{x^2-2}{(x^2+1)(x-2)^2}=\dfrac{Ax+B}{x^2+1}+\dfrac{C}{(x-2)^2}+\dfrac{D}{x-2}$

e) $\dfrac{x^3-x+7}{(x+1)^3x}=\dfrac{A}{(x+1)^3}+\dfrac{B}{(x+1)^2}+\dfrac{C}{x+1}+\dfrac{D}{x}$

Pentru calcularea coeficienților care apar la numărătorul funcțiilor raționale simple, sunt două metode:

Metoda I.

Identificarea coeficienților polinoamelor obținute prin aducerea la același numitor a funcțiilor raționale.

Metoda II.

Dăm valori necunoscutei în ecuația obținută după aducerea la același numitor a funcțiilor raționale.

Exerciții rezolvate.

Să descompunem în funcții raționale simple următoarele funcții:

1) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-5x+6}$

Soluții. $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, deci $\dfrac{x}{x^2-5x+6}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-3}$; obținem $x=A(x-3)+B(x-2)$.

Metoda I. Avem $x=x(A+B)-3A-2B$. Identificăm coeficienții polinoamelor; obținem $\begin{cases}A+B=1\\3A+2B=0\end{cases}$, de unde $A=-2$, $B=3$ și

$f(x)=-\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{x-3}$.

Metoda II. În identitatea $x=A(x-3)+B(x-2)$, dăm lui x, pe rând, valorile $x=2$ și $x=3$:

$\begin{cases}2=A(2-3)+B(2-2)\\3=A(3-3)+B(3-2)\end{cases}$. Obținem $B=3$ și $A=-2$,

de unde $f(x)=-\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{x-3}$.

2) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^3-4x^2+5x-2}$

Soluții. Avem $x^3-4x^2+5x-2=(x-1)^2(x-2)$; $\dfrac{x+1}{x^3-4x^2+5x-2}=\dfrac{A}{(x-1)^2}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x-2}$. Prin aducere la același numitor obținem $x+1=A(x-2)+B(x-1)(x-2)+C(x-1)^2$.

Metoda I.

$x+1=x^2(B+C)+x(A-3B-2C)-2A+2B+C$,

de unde $\begin{cases}B+C=0\\A-3B-2C=1\\-2A+2B+C=1\end{cases}$. Rezolvăm sistemul și

obținem $A=-2$, $B=-3$, $C=3$,

$f(x)=-\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{2}{(x-1)^2}+\dfrac{3}{(x-2)}$.

Metoda II. Dăm lui x, pe rând, valorile 0, 1, 2 în identitatea $x+1=A(x-2)+B(x-1)(x-2)+C(x-1)^2$.

Obținem sistemul $\begin{cases}1=A(-2)+B(-1)(-2)+C(-1)^2\\2=A(-1)+B\cdot 0+C\cdot 0\\3=A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot 1^2\end{cases}$.

Soluția sistemului este $A=-2$, $B=-3$, $C=3$,

$f(x)=-\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{2}{(x-1)^2}+\dfrac{3}{(x-2)}$.

3) $f(x)=\dfrac{1}{x^4-x^3+x-1}$

Soluții. $x^4-x^3+x-1=(x-1)(x+1)(x^2-x+1)$. Avem $\dfrac{1}{x^4-x^3+x-1}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2-x+1}$,

$1=A(x+1)(x^2-x+1)+B(x-1)(x^2-x+1)+(Cx+D)(x+1)(x-1)$.

Metoda I. Identificăm coeficienții în ecuația $1=x^3(A+B+C)+x^2(-2B+D)+x(2B-C)+A-B-D$

Obținem $\begin{cases}A+B+C=0\\-2B+D=0\\2B-C=0\\A-B-D=1\end{cases}$, $A=\dfrac{1}{2}$, $B=\dfrac{-1}{6}$, $C=\dfrac{-1}{3}$, $D=\dfrac{-1}{3}$

Rezultă $f(x)=\dfrac{1}{2(x-1)}-\dfrac{1}{6(x+1)}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{x+1}{x^2-x+1}$.

Metoda II. Dăm lui x valorile 1, -1 și $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$, care este o soluție a ecuației $x^2-x+1=0$. Obținem

$\begin{cases}1=A\cdot 2\\1=B\cdot(-2)\cdot 3\\1=\left(C\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}+D\right)\dfrac{-3+i\sqrt{3}}{2}\end{cases}$, $A=\dfrac{1}{2}$, $B=-\dfrac{1}{6}$, $C=-\dfrac{1}{3}$, $D=-\dfrac{1}{3}$

$f(x)=\dfrac{1}{2(x-1)}-\dfrac{1}{6(x+1)}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{x+1}{x^2-x+1}$.

II. Integrarea funcțiilor raționale simple.

♦ $\boxed{\int (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0)\, dx = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots + a_0 x + \mathscr{C}}$.

♦ $\boxed{\int \frac{A}{(x-a)^n}\, dx = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + \mathscr{C},\ n \in \{2, 3, 4, \ldots\}}$.

♦ $\boxed{\int \frac{A}{x-a}\, dx = A \ln|x-a| + \mathscr{C}}$.

♦ *Calculul integralelor* $\int \frac{Ax+B}{x^2+ax+b}\, dx$, $\Delta = a^2 - 4b < 0$.

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+ax+b}\, dx = \frac{A}{2}\int \frac{(x^2+ax+b)'}{x^2+ax+b}\, dx + \left(B - \frac{1}{2}Aa\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4}} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln(x^2+ax+b) + \frac{2B-aA}{\sqrt{|\Delta|}} \cdot \operatorname{arctg}\frac{2x+a}{\sqrt{|\Delta|}} + \mathscr{C}.$$

$$\boxed{\int \frac{Ax+B}{x^2+ax+b}\, dx = \frac{A}{2}\ln(x^2+ax+b) + \frac{2B-aA}{\sqrt{|\Delta|}} \cdot \operatorname{arctg}\frac{2x+a}{\sqrt{|\Delta|}} + \mathscr{C}}.$$

Nu trebuie să reținem această formulă, ci doar modul de calcul.

♦ *Integrale de forma* $\int \frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^2}\, dx$, $\Delta = a^2 - 4b < 0$.

Vom calcula integrala cu ajutorul unor integrale mai simple:

1) $\int \frac{t}{(t^2+1)^2}\, dt = \frac{1}{2}\int \frac{(t^2+1)'}{(t^2+1)^2}\, dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2} + \mathscr{C}$

2) $\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\, dt = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + \frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1} + \mathscr{C}$.

3) $\int \frac{pt+q}{(t^2+1)^2}\, dt = p\int \frac{t\, dt}{(t^2+1)^2} + q\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{-p+qt}{2(1+t^2)} + \frac{q}{2}\operatorname{arctg} t + \mathscr{C}$

4) $\int f(pt+q)\, dt = \frac{1}{p}F(pt+q) + \mathscr{C}$, $\forall f$ continuă și $F \in \int f(t)\, dt$

5) $\int \frac{pt+q}{(t^2+r^2)^2}\, dt = \frac{1}{r^3}\int \frac{p\frac{t}{r} + \frac{q}{r}}{\left[\left(\frac{t}{r}\right)^2 + 1\right]^2}\, dt = \frac{1}{r^2}F\left(\frac{t}{r}\right)$, cu $F \in \int \frac{ps + \frac{q}{r}}{(s^2+1)^2}\, ds$

6) $\int \frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^2}\, dx = 8\int \frac{A(2x+a) + 2B - aA}{\left[(2x+a)^2 + |\Delta|\right]^2}\, dx = 8F(2x+a) + \mathscr{C}$,

unde $F \in \int \frac{pt+q}{(t^2+r^2)^2}\, dt$, $p = A$, $q = 2B - aA$, $r = \sqrt{|\Delta|}$.

4) Calculați integralele următoare și verificați prin derivare rezultatul obținut:

a) $\int (x^3 - 7)\, dx$ b) $\int \left(-\frac{1}{2}x^{100} - \sqrt{2}\right) dx$

c) $\int \frac{-2\, dx}{(x-2)^2}$ d) $\int \frac{3\, dx}{(x+3)^5}$

e) $\int \frac{dx}{(3x-2)^5}$ f) $\int \frac{dx}{x+1}$

g) $\int \frac{-3\, dx}{3x-2}$ h) $\int \frac{dx}{x^2+1}$

i) $\int \frac{dx}{x^2 + \sin^2 a}$ j) $\int \frac{dx}{x^2 + \operatorname{tg}^2 a}$

k) $\int \frac{dx}{4x^2+1}$ l) $\int \frac{2\, dx}{4x^2+3}$

m) $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$ n) $\int \frac{3x+5}{x^2+x+1}\, dx$

o) $\int \frac{2x-3}{x^2 - 2x\cos a + 1}\, dx$ p) $\int \frac{(x+1)\, dx}{x^2+x+2}$

q) $\int \frac{(-x+1)\, dx}{x^2+2x+2}$ r) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

s) $\int \frac{dx}{(4x^2+1)^2}$ t) $\int \frac{dx}{(4x^2+3)^2}$

u) $\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2}$ v) $\int \frac{(x+1)\, dx}{(x^2+1)^2}$

x) $\int \frac{(-x+2)\, dx}{(4x^2+1)^2}$ y) $\int \frac{(2x+1)\, dx}{(x^2+2x+5)^2}$

5) Calculați integralele nedefinite ale următoarelor funcții raționale:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 3}$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x-1}{x^2+2x+5}$

c) $f: (a, b) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{(a-b)x}{x^2 - (a+b)x + ab}$

d) $f: (-1, 1) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^4}{(x^2-1)(x+3)}$

e) $f: (0, 3) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^5 - x^4 + 1}{x^3 - 9x}$

f) $f: (3; \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^3 - 2x + 3}{x(x^2-1)(x^2-9)}$

g) $f: (1, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^4+1}{(x-1)^2}$

Exerciții rezolvate.

1) Să calculăm: $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 - x^3 + x - 1}$, $0 < x < 1$ și $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^4 - x^3 + x - 1}$.

Soluție. $x^4 - x^3 + x - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$. Descompunem în funcții raționale simple:

$$f(x) = \frac{1}{x^4 - x^3 + x - 1} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{6(x+1)} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x+1}{x^2 - x + 1}; \ \int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{6}\ln(x+1) - \frac{1}{3}\int \frac{x+1}{x^2 - x + 1}dx .$$

$$\int \frac{x+1}{x^2 - x + 1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2 - x + 1)'}{x^2 - x + 1}dx + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{2}\ln(x^2 - x + 1) + \sqrt{3} \cdot \operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \mathscr{C} .$$

Rezultă: $\displaystyle\int f(x)\,dx = \frac{1}{6}\ln\frac{(1-x)^3}{x^3+1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \mathscr{C}$ și $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^4 - x^3 + x - 1} = \frac{1}{6}\ln\frac{7}{18} - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{9}$.

2) Calculați: $\displaystyle I = \int_0^1 \frac{x-1}{(x^2 + 4x + 5)^2}dx$.

Soluție. $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x^2+4x+5)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+4x+5)'}{(x^2+4x+5)^2}dx - 3\int \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2} = -\frac{1}{2(x^2+4x+5)} - 3\mathscr{I}$, unde $\displaystyle\mathscr{I} = \int \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2}$.

$$\mathscr{I} = \int \frac{dx}{\left[(x+2)^2 + 1\right]^2} = F(x+2) + \mathscr{C} \text{ , unde } F \in \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + \frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1} + \mathscr{C} .$$

$$\mathscr{I} = \int \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+2) + \frac{1}{2}\frac{x+2}{x^2+4x+5} + \mathscr{C}$$

$$\int \frac{x-1}{(x^2+4x+5)^2}dx = -\frac{1}{2(x^2+4x+5)} - 3\mathscr{I} = -\frac{1}{2}\frac{3x+7}{x^2+4x+5} - \frac{3}{2}\operatorname{arctg}(x+2) + \mathscr{C} . \text{ Rezultă } I = \frac{1}{5} - \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{7} .$$

● **1.** Calculați integralele nedefinite ale următoarelor funcții raționale:

a) $\displaystyle f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x + 2} = -\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2}, \ x > 2;$

b) $\displaystyle f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^4 - 2x^2 + 1} = \frac{3}{4(x-1)^2} + \frac{1}{4(x+1)^2}, \ x < -1;$

c) $\displaystyle f(x) = \frac{x+1}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$.

● **2.** Calculați următoarele integrale definite:

$\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^3(x+2)}dx$; $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}dx$;

$\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2 - 1}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}dx$; $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2 + 2}{x(x^2+1)(x^2+4)}dx$;

$\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{x^2}{x^4 + x^2 - 2}dx$; $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x - 2}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}dx$;

$\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2 - 1}{(x^2+1)(x^2 - x + 1)}dx$; $\displaystyle\int_3^4 \frac{x^2 - x + 1}{x^4 - 8x^2 + 12}dx$;

$\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2}{(x+1)^2(x^2 - 6x + 10)}dx$.

●● **3.** Calculați:

a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2}{x^2 - 1}dx$;

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2(x+1)}dx$;

c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{1 + |x - 1|}$.

●● **4.** Calculați: $\displaystyle\int \frac{(x+3)dx}{x(x+2)(x+4)(x+6)}$, pe un interval pe care $x(x+2)(x+4)(x+6) \neq 0$.

●● **5.** Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $f'(x) = m \cdot g(x)$ și $g'(x) = n \cdot f(x)$, m, n constante nenule.

a) Calculați $\displaystyle\int \frac{f(x)dx}{af(x) + bg(x)}$, pe un interval pe care $af(x) + bg(x) \neq 0$.

b) Aplicație: $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$.

Metode de calcul al integralelor definite.
Integrarea prin părți și schimbarea de variabilă

Metodele de calcul urmăresc transformarea unor integrale „complicate“ în integrale care să poată fi calculate mai ușor.

Vom considera două intervale I, $J \subset \mathbb{R}$ și două variabile de integrare $x \in I$, $t \in J$.

Vom mai considera două funcții f, $g : I \to \mathbb{R}$ continue și o funcție $\varphi : J \to I$ derivabilă, cu derivata $\varphi' : J \to \mathbb{R}$ continuă.

Teoremă. *Formula de integrare prin părți.*

Presupunem că funcțiile f, $g : I \to \mathbb{R}$ sunt derivabile, cu derivatele f', $g' : I \to \mathbb{R}$ continue. Fie două numere a, $b \in I$.

Atunci: $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx$.

Demonstrație.

Formula de derivare a produsului a două funcții derivabile, $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),\ \forall x \in I$, arată că funcția produs $f \cdot g$ este o primitivă a funcției $f' \cdot g + f \cdot g'$.

Folosind formula Leibniz-Newton și liniaritatea integralei, obținem $(f \cdot g)(b) - (f \cdot g)(a) = \int_a^b [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]\,dx =$

$= \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$, adică

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx\ .\ \blacksquare$$

Observații.

♦ Uneori, se folosește *scrierea pur formală* $f'(x)\,dx = df(x)$ care face ca relația să capete un aspect simetric:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\,df(x).$$

♦ Formula se aplică ori de câte ori funcția de integrat se poate descompune în produsul a două „părți“ $f(x)$ și $g'(x)$, alese astfel încât $\int_a^b g(x)f'(x)\,dx$ să fie mai ușor de calculat.

EXEMPLU

Să se calculeze integrala $\mathscr{I} = \int_0^1 xe^{2x}dx$.

Soluție. Luăm funcția $f(x) = x$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Rezultă că $g'(x) = e^{2x}$, deci putem lua $g(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$. Înseamnă că am făcut alegerea: $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x,\ g(x) = \frac{1}{2}e^{2x},\ a = 0, b = 1$. Funcțiile f și g verifică ipotezele din teoremă. Rezultă

$$\mathscr{I} = \int_0^1 xe^{2x}dx = \int_0^1 x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx = x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)\Bigg|_0^1 - \int_0^1\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)\cdot(x)'dx =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}(e^2-1) = \frac{1}{4}(e^2+1).$$

1) Calculați următoarele integrale cu ajutorul formulei de integrare prin părți:

a) $\int_1^2 \ln x dx$; b) $\int_0^1 \ln(3x+1)dx$.

Indicații. Integralele se scriu în forma:

a) $\int_1^2 (\ln x)(x)'dx$;

b) $\int_0^1 (\ln(3x+1))(x)'dx$.

2) Calculați următoarele integrale cu ajutorul formulei de integrare prin părți:

a) $\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx$; b) $\int_0^{2\pi} x\cos x\,dx$;

c) $\int_1^2 x\ln x\,dx$.

Indicații. Integralele se scriu în forma:

a) $\int_0^{2\pi} x\,(-\cos x)'dx$; b) $\int_0^{2\pi} x\,(\sin x)'dx$;

c) $\int_1^2 \ln x\left(\frac{x^2}{2}\right)'dx$.

3) Calculați următoarele integrale cu ajutorul formulei de integrare prin părți:

a) $\int_0^1 x2^x\,dx$; b) $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$;

c) $\int_1^2 x\ln\frac{x+1}{x}dx$.

Indicații. Integralele se scriu în forma:

a) $\int_0^1 x\left(\frac{2^x}{\ln 2}\right)'dx$; b) $\int_1^e \ln x\left(-\frac{1}{x}\right)'dx$;

c) $\int_1^2 \ln\frac{x+1}{x}\left(\frac{x^2}{2}\right)'dx$.

4) Calculați integralele următoare cu ajutorul a două integrări prin părți:

a) $\int_0^{\pi} x^2\sin x\,dx$; b) $\int_0^{\pi} x^2\cos x\,dx$;

c) $\int_{-1}^1 x^2e^{2x}dx$; d) $\int_{-1}^1 x^2e^{-x}dx$.

Calculul lui I poate fi prezentat schematic astfel:

$f(x)=x,\ g'(x)=e^{2x};\ f'(x)=1,\ g(x)=\frac{1}{2}e^{2x},\ \forall x\in\mathbb{R};$

$$\mathscr{I}=\int_0^1 \underbrace{x}_{f}\underbrace{e^{2x}}_{g'}dx=\underbrace{x}_{f}\underbrace{\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)}_{g}\Bigg|_0^1-\int_0^1 \underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{g}\cdot \underbrace{1}_{f'}\,dx.$$

Teoremă. *Formula de schimbare de variabilă.*

Presupunem că funcția $\varphi : J \to I$ este derivabilă, cu derivata continuă și funcția $f : I \to \mathbb{R}$ este continuă. Fie două numere $\alpha, \beta \in J$. Atunci: $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx$.

Se fac schimbările, de variabilă și de simbol,

$$\varphi(t) = x \text{ și } \varphi'(t)dt = dx,\ t\in J \text{ și } x\in I.$$

Demonstrație.

Constatăm că $\beta(\varphi\ ,)\alpha(\varphi) \in I$. Funcția f fiind continuă, admite o primitivă $F : I \to \mathbb{R}$, deci $F' = f$. Formula de derivare a funcției compuse, $(F\circ\varphi)'(t)=F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t),\ \forall t\in J$, arată că $F\circ\varphi$ este o primitivă a funcției $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$.

Conform formulei Leibniz-Newton, aplicată de două ori, avem

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt=F\circ\varphi\Big|_\alpha^\beta=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F\Big|_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}=$$

$$=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx.\ ■$$

Observații.

♦ Schimbând rolul variabilelor x și t, formula se mai scrie

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt.$$

Se fac schimbările, de variabilă și de simbol,

$$\varphi(x)=t \text{ și } \varphi'(x)dx=dt,\ x\in J \text{ și } t\in I.$$

♦ Dacă trebuie să transformăm integrala $\int_a^b f(x)\,dx$, unde $a, b \in I$, atunci, „*citind invers formula*“, trebuie ca a și b să fie valori ale lui φ, adică trebuie ca să existe $\alpha, \beta \in J$ astfel încât $\varphi(\alpha) = a$ și $\varphi(\beta) = b$. În acest caz,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt.$$

Se fac schimbările, de variabilă și de simbol,

$$x = \varphi(t) \text{ și } dx = \varphi'(t)dt,\ t\in J \text{ și } x\in I.$$

♦ Folosind „*scrierea pur formală*“ $d\varphi(t) = \varphi'(t)dt$, formula de schimbare de variabilă devine $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,d\varphi(t)=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx$.

1) Să calculăm integrala $\mathscr{I}=\int_0^{\pi/4}\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx$.

Soluție. Avem $(\cos x + \sin x)' = \cos x - \sin x$, deci integrala are forma

$$\mathscr{I}=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\cos x+\sin x}(\cos x+\sin x)'dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx.$$

Indicații. Integralele se scriu în forma:

a) $\int_0^\pi x^2(-\cos x)'\,dx$; b) $\int_0^\pi x^2(\sin x)'dx$;

c) $\int_{-1}^1 x^2\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx$; d) $\int_{-1}^1 x^2\left(-e^{-x}\right)'dx$.

5) Calculați integralele următoare, folosind formula de integrare prin părți:

a) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin^2 x}dx$; b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{ctg}^2 x\,dx$;

c) $\int_0^{2\pi} e^x\sin x\,dx$; d) $\int_0^{2\pi} e^x\cos x\,dx$.

Indicații.

a) $\frac{1}{\sin^2 x}=(-\mathrm{ctg}\,x)'$; b) $\mathrm{ctg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}-1$;

c), d) se integrează de două ori prin părți.

6) Uitlizând formula de schimbare de variabilă, calculați integralele următoare:

a) $\int_0^1\frac{x}{x^4+1}dx$; b) $\int_0^1\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$;

c) $\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$; d) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$;

e) $\int_0^1\frac{1}{2x^2-2x+1}dx$; f) $\int_0^1 xe^{-x^2}dx$;

g) $\int_e^{e^2}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx$; h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)e^x dx$.

Indicații.

a), b), d), f) $x^2 = t$; c) $x^3 + 1 = t$;

e) $x-\frac{1}{2}=t$; g) $\ln x = t$; h) $e^x\sin x = t$.

7) Utilizând formula de schimbare de variabilă, calculați integralele următoare:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos 2x\,dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cos x\,dx$;

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$; d) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{1-\cos x}dx$;

e) $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{1-\sin x}dx$; f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+\cos x}dx$;

g) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin x}}dx$; h) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos x}}dx$.

Indicații. a) $\cos x = t$; b) $\sin x = t$;

c) $\cos x = t$; d) $\mathrm{ctg}\frac{x}{2}=t$; e) $\frac{\pi}{2}-x=t$;

f) $\cos x = t$; g) $\sin x = t$; h) $\cos x = t$.

Luăm: $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{4}$; $\varphi(x) = \cos x + \sin x = t$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$;

$f(t) = \frac{1}{t}$, $\forall t \in (0, \infty)$. Funcțiile care rezultă, $\varphi : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to (0, \infty)$ și $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, verifică ipotezele din teoremă: φ este derivabilă, cu derivata continuă și f este continuă. Făcând schimbările, de variabilă și de simbol, $\varphi(x) = \cos x + \sin x = t$ și $d\varphi(x) = \varphi'(x)dx = (\cos x - \sin x)dx = dt$, obținem

$$\mathscr{I} = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\pi/4)} f(t)\,dt = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{t}dt = \ln t \Big|_1^{\sqrt{2}} = \ln\sqrt{2}.$$

Calculul lui I poate fi prezentat schematic astfel:

$$\mathscr{I} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}dx \quad \left|\begin{array}{l} \cos x + \sin x = t,\ t \in (0, \infty) \\ (\cos x + \sin x)'dx = dt \end{array}\right| \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \sqrt{2} \end{array}$$

$$\mathscr{I} = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{t}dt = \ln\sqrt{2}.$$

2) Să calculăm integrala $\mathscr{I} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x}}{x+\sqrt{x}}dx$.

Soluție. Notăm $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{x+\sqrt{x}}$, $\forall x \in (0, 1]$. Pentru a scăpa de radicali, facem schimbarea de variabilă

$x = \varphi(t) = \sin^2 t$, $\forall t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Avem: $\varphi(t) \in (0, 1]$, $\forall t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$; funcția $\varphi : \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \to (0, 1]$ este derivabilă, cu derivata continuă; numerele $\frac{1}{2}$ și 1 sunt valori ale lui φ și anume, pentru $t = \frac{\pi}{4}$, $x = \sin^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$ și pentru $t = \frac{\pi}{2}$, $x = \sin^2\frac{\pi}{2} = 1$;

$dx = \varphi'(t)dt = 2\sin t\cos t\,dt$. Aplicând teorema, rezultă

$$\mathscr{I} = \int_{\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)}^{\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)} f(x)\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t + \sin t} \cdot 2\sin t\cos t\,dt =$$

$$= 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin t + 1}dt = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin t)\,dt = 2(t + \cos t)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}$$

$$\left(\frac{\cos^2 t}{1 + \sin t} = 1 - \sin t\right).$$

Calculul lui I poate fi prezentat schematic astfel:

$$\mathscr{I} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x}}{x+\sqrt{x}}dx \quad \left|\begin{array}{l} x = \sin^2 t, t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \\ dx = (\sin^2 t)'dt = 2\sin t\cos t\,dt \end{array}\right| \begin{array}{l} t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 1 \end{array}$$

$$\mathscr{I} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t + \sin t} 2\sin t\cos t\,dt = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}.$$

8) Utilizând formula de schimbare de variabilă, calculați integralele următoare:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x}dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^6 x}dx$;

c) $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{3 + \sin^2 x}dx$; d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{(\cos x + \sin x)^3}dx$.

Indicații. a), b) $\operatorname{tg} x = t$; c) $\cos x = t$; d) $\cos x + \sin x = t$.

9) Arătați că avem relațiile:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10} x\,dx$;

b) $\int_0^1 x^a(1-x)^b dx = \int_0^1 x^b(1-x)^a dx\ (a, b > 0)$.

Indicații. Se fac schimbările de variabilă:

a) $x = \frac{\pi}{2} - y$; b) $x = 1 - y$.

10) Fie funcția $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \begin{cases} 2 \cdot \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$. Arătați că f este continuă și calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

Indicație. Se simplifică fracția cu $\sqrt{x} - 1$ și se face schimbarea de variabilă $x = t^2$.

11) Fie funcția $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}, & x \in (0, 1] \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$.

Arătați că f este continuă și calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

Indicație. Se amplifică fracția cu conjugata numărătorului, se simplifică, se notează $\sqrt{x+1} = t$ și se face schimbarea de variabilă $x = t^2 - 1$.

12) Fie funcția $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{1 - \sqrt{1 - x^2}}, & x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 2, & x = 0 \end{cases}$.

Arătați că f este continuă și calculați $\int_{-1}^1 f(x)dx$.

Aplicații – temă de sinteză

♦ *Funcții pare și funcții impare*

Fie un număr $a > 0$, o funcție continuă $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ și integrala $\mathscr{I} = \int_{-a}^{a} f(x)\,dx$.

Făcând schimbarea de variabilă $x = -t$, $\forall\, t \in [-a, 0]$, avem

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-t)\cdot(-1)\,dt = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx.$$

Dacă f este *funcție pară* ($f(-x) = f(x)$, $\forall\, x \in [-a, a]$), atunci

$$\mathscr{I} = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Dacă f este *funcție impară* ($f(-x) = -f(x)$, $\forall\, x \in [-a, a]$), atunci $\mathscr{I} = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx =$

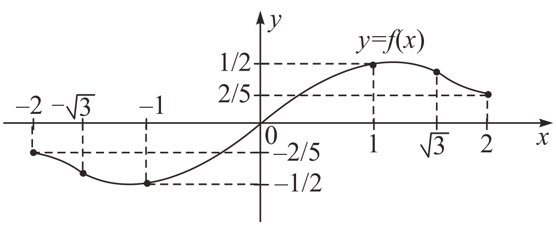
$$= -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

EXEMPLE

1) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{x}{1+x^2}\,dx = 0$.

Într-adevăr, $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ este funcție impară.

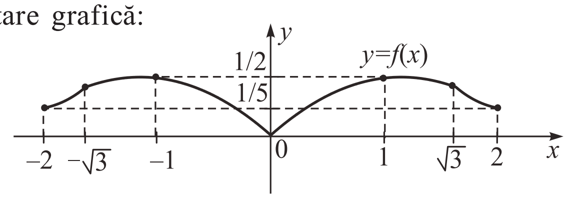
Pentru a reprezenta grafic funcția, stabilim semnele derivatelor $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ și $f''(x) = \dfrac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$. Graficul lui f este simetric față de O și este reprezentat în figura următoare.



2) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{|x|}{1+x^2}\,dx = 2\int_{0}^{2} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int_{0}^{2} \frac{(1+x^2)'}{1+x^2}\,dx = \ln(1+x^2)\Big|_0^2 = \ln 5$.

Într-adevăr, $f(x) = \dfrac{|x|}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ este funcție pară.

Deoarece graficul lui f este simetric față de axa Oy și f coincide cu funcția precedentă pe $[0, 2]$, rezultă următoarea reprezentare grafică:



♦ *Funcții periodice.*

Fie un număr $T > 0$ și o mulțime nevidă $A \subset \mathbb{R}$ astfel încât $\forall\, x \in A$ să avem $x \pm T \in A$. Fie o funcție continuă $f : A \to \mathbb{R}$, periodică de perioadă T (adică $f(x + T) = f(x)$, $\forall\, x \in A$). Atunci

Indicație. Se amplifică fracția cu conjugata numitorului și se face schimbarea de variabilă $x = \sin t$, $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

$$\mathscr{I} = \int_{-1}^{1} (1 + \sqrt{1-x^2})\,dx = 2 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt.$$

13) Utilizând formula de schimbare de variabilă, calculați integralele următoare:

a) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{x+3}\,dx$; b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$;

c) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\,dx$; d) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

Indicații. Se fac schimbările de variabilă: a), b) $x = t^2$; c), d) $x = \sin^2 t$. Se obțin integralele:

a) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{2t^2}{t^2+3}\,dt$; b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{2t^2}{1+t}\,dt$;

c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t\,dt$; d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2(1-\sin t)\sin t\,dt$.

14) Calculați integralele următoare:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\sqrt{1+x}}{2+x}\,dx$; b) $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{1}{3+\sqrt{1+x}}\,dx$;

c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{1+e^x}\,dx$; d) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5+3\cos x}\,dx$.

Indicații.

a), b) Se notează $\sqrt{1+x} = t$ și se face schimbarea de variabilă $x = t^2 - 1$.

c) Se notează $e^x = t$ și se face schimbarea de variabilă $x = \ln t$.

d) Se notează $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$ și se face schimbarea de variabilă $x = 2\operatorname{arctg} t$.

15) Calculați integralele următoare:

a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{x^9}{1+x^2+x^4}\,dx$; b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x| e^{x^2}\,dx$.

Indicații. Funcții: a) impară; b) pară.

16) Calculați integralele următoare:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2-4|x|+4}\,dx$; b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin|2x|\,dx$.

Indicație. Funcțiile de integrat sunt pare.

$\forall\, n \in \mathbb{Z}$ și $\forall\, a, b \in A$, $a < b$, astfel încât $[a, b] \subset A$, avem

$$\int_{a+nT}^{b+nT} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx .$$

Într-adevăr, în prima integrală se face schimbarea de variabilă $x = y + nT$, $\forall\, y \in [a, b]$.

EXEMPLU

Să calculăm integrala $\mathscr{I} = \int_0^{\pi} |\sin 5x|\, dx$.

Rezolvare. Făcând schimbarea de variabilă $x = \frac{t}{5}$, $\forall t \in [0, 5\pi]$, avem

$\mathscr{I} = \int_0^{5\pi} |\sin t| \cdot \frac{1}{5} dt = \frac{1}{5} \cdot \int_0^{5\pi} |\sin t| dt$.

Funcția $f(t) = |\sin t|$, $\forall t \in \mathbb{R}$, este periodică de perioadă $T = \pi$. Conform proprietății de aditivitate a integralei și aplicației 2, avem: $\mathscr{I} = \frac{1}{5}\left[\int_0^{\pi}|\sin t|dt + \int_{\pi}^{2\pi}|\sin t|dt + \int_{2\pi}^{3\pi}|\sin t|dt + \int_{3\pi}^{4\pi}|\sin t|dt + \int_{4\pi}^{5\pi}|\sin t|dt\right] =$

Exerciții rezolvate.

1) Să calculăm integrala $\mathscr{I} = \int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

Soluție. Fie funcția (continuă) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $\forall x \in (0, \infty)$. Facem schimbarea de variabilă $x = \varphi(t) = t^2$, $\forall t \in (0, \infty)$; funcția $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ este derivabilă, cu derivata continuă; pentru $t = 1$ avem $x = 1$ și pentru $t = \sqrt{e}$ avem $x = e$; $dx = \varphi'(t)dt = 2tdt$. Aplicând formula de schimbare de variabilă, rezultă $\mathscr{I} = \int_{\varphi(1)}^{\varphi(\sqrt{e})} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln(t^2)}{t} 2t\, dt = 4\int_1^{\sqrt{e}} \ln t\, dt$. Utilizând metoda integrării prin părți (evident, ipotezele se verifică), deducem că $\mathscr{I} = 4\int_1^{\sqrt{e}} (\ln t)(t)'dt = 4t\ln t\Big|_1^{\sqrt{e}} - 4\int_1^{\sqrt{e}} t \cdot (\ln t)'dt = 2\sqrt{e} - 4\int_1^{\sqrt{e}} 1dt = 4 - 2\sqrt{e}$.

„Părțile“ au fost: $g(t) = \ln t$, $h'(t) = 1$; $g'(t) = \frac{1}{t}$, $h(t) = t$ $(t > 0)$.

2) Să calculăm integrala $\mathscr{I} = \int_0^{\pi} x \cdot \sin x\, dx$.

Soluție. Luăm „părțile“: $f(x) = x$, $g'(x) = \sin x$; $f'(x) = 1$, $g(x) = -\cos x$ $(x \in \mathbb{R})$. Aplicând formula de integrare prin părți (evident, ipotezele se verifică), deducem că

$$\mathscr{I} = \int_0^{\pi} x \cdot (-\cos x)'dx = -x\cos x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-\cos x)(x)'dx = \pi + \int_0^{\pi}\cos x\, dx = \pi + \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi .$$

3) Să calculăm integrala $\mathscr{I} = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{(x+1)^2} dx$.

Soluție. Fie „părțile“: $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $g'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$, $\forall x \in [0, 1]$. Rezultă:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2};\quad \int \frac{1}{(x+1)^2}dx = -\frac{1}{x+1} + \mathscr{C} \text{ și luăm } g(x) = -\frac{1}{x+1}.$$

Aplicăm formula de integrare prin părți (evident, ipotezele se verifică) și obținem

$$\mathscr{I} = \int_0^1 (\operatorname{arctg} x)\left(-\frac{1}{x+1}\right)' dx = -\frac{\operatorname{arctg} x}{x+1}\Bigg|_0^1 - \int_0^1\left(-\frac{1}{x+1}\right)(\operatorname{arctg} x)'dx = -\frac{\pi}{8} + \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}dx .$$

Folosind metoda coeficienților nedeterminați, obținem descompunerea în fracții simple:

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{-x+1}{x^2+1}\right) \qquad \left(A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}, C = \frac{1}{2}\right).$$

Deoarece $\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1}$, rezultă

$$\mathscr{I} = -\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = -\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\ln(x+1)\Big|_0^1 - \frac{1}{4}\ln(x^2+1)\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{1}{4}\ln 2 .$$

4) Să calculăm integrala $\mathscr{I} = \int_0^1 \frac{x^5}{x^3+1}dx$.

Soluție. Integrala se poate calcula descompunând funcția de integrat în fracții simple. Observând însă că funcția de integrat se poate aduce la forma

$$f(x) = \frac{x^5}{x^3+1} = \frac{x^3 \cdot x^2}{x^3+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{x^3+1}\cdot(x^3)',\ \forall x \in [0, 1],$$

integrala se calculează, mai simplu, cu schimbarea de variabilă $\varphi(x) = x^3 = t$, cu $x, t \in [0, 1]$.

Funcția $\varphi : [0, 1] \to [0, 1]$ este derivabilă, cu derivata continuă; $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ este continuă; $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$. Făcând schimbările, de variabilă și de simbol, $\varphi(x) = x^3 = t$ și $\varphi'(x)dx = 3x^2dx = dt$ rezultă

$$\mathscr{I} = \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}\int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} \frac{x^3}{x^3+1}\cdot 3x^2dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{t}{t+1}dt = \frac{1}{3}\int_0^1\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{1}{3}(t-\ln(t+1))\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1-\ln 2).$$

5) Să calculăm integrala $\mathscr{I} = \int_{1/5}^5 \frac{\ln x}{1+x^2}dx$.

Soluție. Deoarece *nu* putem găsi o primitivă a funcției de integrat, vom apela la un artificiu de calcul. Vom face schimbarea de variabilă $x = \varphi(y) = \frac{1}{y}$, cu $x, y \in \left[\frac{1}{5}, 5\right]$. Funcția $\varphi : \left[\frac{1}{5}, 5\right] \to (0, \infty)$ este derivabilă, cu derivata continuă; funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$ este continuă; $\frac{1}{5} = \varphi(5)$ și $5 = \varphi\left(\frac{1}{5}\right)$;

$dx = \left(\frac{1}{y}\right)'dy = -\frac{1}{y^2}dy$. Rezultă: $\mathscr{I} = \int_{\frac{1}{5}}^5 f(x)dx = \int_{\varphi(5)}^{\varphi\left(\frac{1}{5}\right)} f(x)dx = \int_5^{\frac{1}{5}} f(\varphi(y))\varphi'(y)dy =$

$$= \int_5^{\frac{1}{5}} \frac{\ln\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{1}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)dy = -\int_5^{1/5}\frac{-\ln y}{y^2+1}dy = \int_5^{1/5}\frac{\ln y}{1+y^2}dy = -\int_{1/5}^5 \frac{\ln y}{1+y^2}dy = -\int_{1/5}^5\frac{\ln x}{1+x^2}dx = -\mathscr{I}.$$

La sfârșit, am scris limitele de integrare în ordine crescătoare (cu schimbarea semnului integralei) și am înlocuit variabila y cu variabila x.

Se obține ecuația $I = -I$, care are soluția unică $I = 0$, deci $I = 0$.

Aplicație.

Considerăm un mobil care se mișcă în intervalul de timp $[0, u]$ cu viteza $v(t)$, accelerația $a(t)$ și parcurge în primele t (secunde) distanța $s(t)$, $t \in [0, u]$. Care este relația dintre accelerația, viteza și spațiul parcurs de acest mobil?

Să studiem câteva exemple simple:

1) Mișcarea cu viteză constantă v. Avem $v(t) = v$ constant pe un interval $[0, u]$. Accelerația mobilului la momentul t este $a(t) = v'(t) = 0$. În intervalul $[0, t]$ mobilul parcurge spațiul $s(t) = \int_0^t v(x)dx = \int_0^t v dx = v\cdot t$. Avem $s'(t) = v(t) = v$.

2) Mișcarea unui mobil cu accelerație constantă $a(t) = a$, $t \in [0, u]$. Avem: $v(t) = \int_0^t a(x)dx = \int_0^t adx = at$, $v'(t) = a$; $s(t) = \int_0^t v(x)dx = \int_0^t ax\,dx = \frac{at^2}{2}$; $s'(t) = v(t) = at$.

Este cazul căderii corpurilor în câmp gravitațional. Accelerația gravitațională pe Terra este constantă $g \cong 9{,}8$ m/s^2. Viteza obiectului după t secunde este $v(t) = gt$ și distanța parcursă de obiect după t secunde de cădere liberă este $s(t) = \frac{gt^2}{2}$.

PROBLEME PROPUSE

1. Aplicând metoda de integrare prin părți, calculați următoarele integrale:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x}dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cdot \mathrm{tg}^2 x\, dx$;

c) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{arctg}\, x}{x^2}dx$; d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \ln(1+\cos x)\, dx$.

2. Aplicând metoda de integrare prin părți, calculați următoarele integrale:

a) $\int_1^3 (x^2+1)e^{x-1}dx$; b) $\int_0^2 e^x \cdot \min\{1, x^2\}dx$;

c) $\int_0^{\pi} (x \cdot \sin x)^2\, dx$; d) $\int_0^{\pi} (x \cdot \cos x)^2\, dx$.

3. Aplicând metoda de integrare prin părți, calculați următoarele integrale:

a) $\int_0^{\pi} e^x \sin x\, dx$; b) $\int_0^{\pi} e^{x} \cos x\, dx$;

c) $\int_1^e \sin(\ln x)dx$; d) $\int_1^e \cos(\ln x)dx$.

4. Aplicând metoda schimbării de variabilă, calculați următoarele integrale:

a) $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$; b) $\int_{e^e}^{e^3} \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)}dx$;

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x)e^x dx$; d) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin x}}dx$.

5. Aplicând metoda schimbării de variabilă, calculați următoarele integrale:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{1+\cos x + \sin x}dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{(\cos x + \sin x)^2}dx$;

c) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^4 x}dx$; d) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{1}{\sin^6 x}dx$.

6. Aplicând metoda schimbării de variabilă, calculați următoarele integrale:

a) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x-4}dx$; b) $\int_0^4 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$;

c) $\int_0^1 \frac{1+2\sqrt{x}}{1+x}dx$; d) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}dx$.

7. Aplicând metoda schimbării de variabilă, calculați următoarele integrale:

a) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$; b) $\int_{-1}^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$;

c) $\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{x}}dx$; d) $\int_0^1 \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}dx$.

8. Aplicând metoda schimbării de variabilă, calculați următoarele integrale:

a) $\int_0^1 \arcsin x\, dx$; b) $\int_0^1 \arccos x\, dx$;

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}dx$; d) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\cos x\sqrt{\cos 2x}}dx$.

9. Calculați următoarele integrale:

a) $\int_{-1}^1 \frac{x^5+1}{\sqrt{x^2+1}}dx$; b) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2-2|x|+2}dx$;

c) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{1+\sin^4 x}dx$; d) $\int_{-1}^1 |x^3| e^{-x^2}dx$.

10. Calculați următoarele integrale:

a) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\arcsin x|\, dx$; b) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} |\mathrm{arc\,tg}\, x|\, dx$;

c) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin x|}{4-\sin^2 x}dx$.

Indicație: Se va studia paritatea funcțiilor.

11. Calculați următoarele integrale:

a) $\int_0^1 \frac{x+\sqrt{x}}{x+1}dx$; b) $\int_0^1 x\sqrt{1-\sqrt{x}}\, dx$;

c) $\int_0^1 \sqrt{1+\sqrt{x}}\, dx$.

12. Calculați următoarele integrale ($a > 0$):

a) $\int_0^a \frac{x^4+a^2x^2}{x^3+a^3}dx$; b) $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$;

c) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx$; d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^3 x\, dx$.

13. Calculați următoarele integrale:

a) $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{|\cos x|}{1+\cos x}dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\cos x - \sin x|}{1+\cos x+\sin x}dx$;

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}dx$; d) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 x}{2-3\sin^2 x}dx$.

14. Arătați că funcțiile următoare sunt continue și calculați integralele indicate:

a) $\int_{-1}^1 f(x)dx, f: [-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{1-\sqrt{1-x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$;

b) $\int_0^1 f(x)dx;\ f: [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}, & x \in [0, 1) \\ \dfrac{1}{3}, & x = 1 \end{cases}$;

c) $\int_0^2 f(x)\,dx$; $f:[0,2]\to\mathbb{R}$,
$f(x)=\max\{\ln(1+x),\ln(1+x^2)\},\ \forall x\in[0,2]$.

15. Calculați următoarele integrale ($n \in \mathbb{N}^*$):

a) $\int_{-2}^{2}\sqrt{|x^2-1|}\,dx$; b) $\int_0^1 x\cdot\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx$;

c) $\int_{-1}^{0}\sqrt{4x^2+4x+4}\,dx$; d) $\int_0^1\dfrac{1-n\sqrt{x}}{1+n\sqrt{x}}\,dx$.

16. Calculați următoarele integrale:

a) $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$; b) $\int_1^e\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2 dx$.

17. Calculați următoarele integrale ($n \in \mathbb{N}^*$):

a) $\int_0^{\pi}\dfrac{1}{5-4\sin x}\,dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{x}{1+\sin 2x}\,dx$;

c) $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-x}\sin x\,dx$; d) $\int_0^{\pi}\left(\dfrac{x^2}{2\pi}-x\right)\cos nx\,dx$.

18. Calculați următoarele integrale ($a > 0$):

a) $\int_{\frac{1}{a}}^{a}\dfrac{\ln x}{1+x^2}\,dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\operatorname{tg}x)\,dx$;

c) $\int_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$; d) $\int_0^a\dfrac{\ln(a+x)}{a^2+x^2}\,dx$.

19. Calculați următoarele integrale:

a) $\int_0^{\pi}\dfrac{x\cdot\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x\,dx$.

20. Aplicând metoda integrării prin părți, stabiliți o relație între integralele I_n și I_{n-1} ($n \in \mathbb{N}^*$) și calculați I_0, I_1, I_2, I_3, în următoarele cazuri:

a) $I_n=\int_0^1 x^n e^x\,dx$; b) $I_n=\int_0^1 x^{2n}\cdot\sqrt{1-x^2}\,dx$;

c) $I_n=\int_0^1\dfrac{(1-x)^n}{n!}e^x\,dx$; d) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{\cos^{2n+1}x}\,dx$.

21. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ fie $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$. Stabiliți o relație între I_n și I_{n-2} ($n \geqslant 2$) și calculați I_0, I_1, I_2, I_3.

22. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ fie $I_n=\int_0^1\dfrac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$. Stabiliți o relație între I_n și I_{n-1} ($n \geqslant 2$) și calculați I_0, I_1, I_2, I_3.

Teste de evaluare

Test 1

(2p) **1.** Fie funcția $f:[0;3]\to\mathbb{R}$,
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}, & \text{dacă } x\in(0,3]\\ 2, & \text{dacă } x=0\end{cases}.$$
Arătați că f este continuă și calculați integrala $\int_0^3 f(x)\,dx$.

(2p) **2.** Calculați integrala $\int_1^2\dfrac{2x+1}{x^2(x+1)}\,dx$.

(2p) **3.** Calculați integrala $\int_0^5\ln(x+|x-2|)\,dx$.

(2p) **4.** Calculați integrala $\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{|\sin x|}{3+\sin^2 x}\,dx$.

(1p) **5.** Calculați integrala $\int_0^9 e^{\sqrt{x}}\,dx$.

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 1 oră.

Test 2

(2p) **1.** Fie funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$,
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}, & \text{dacă } x\in[0,1)\\ \dfrac{1}{2}, & \text{dacă } x=1\end{cases}.$$
Arătați că f este continuă și calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

(2p) **2.** Calculați integrala $\int_2^3\dfrac{x+1}{x(x-1)^2}\,dx$.

(2p) **3.** Calculați integrala $\int_0^3 x\cdot e^{x+|x-1|}\,dx$.

(2p) **4.** Calculați integrala $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$.

(1p) **5.** Calculați integrala $\int_{-1}^{1}x\cdot\arcsin x\,dx$.

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 1 oră.

Probleme de tip bacalaureat

1. Se consideră funcțiile
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^{2004}$ și
$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F(x) = \int_0^x f(t)\,dt,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $f(1)$.

b) Să se verifice că $(x-1)f(x) = x^{2005} - 1,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

c) Să se arate că $f(x) > 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

d) Să se arate că $F'(x) = f(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

e) Să se arate că funcția F este bijectivă.

f) Să se calculeze $\int_0^a g(x)\,dx$, unde $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este inversa funcției F și $a = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2005}$.

2. Se consideră integrala $I_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt$, unde $x \in [0, 1]$ și $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se arate că $0 \leqslant \frac{t^n}{1+t} \leqslant 1$, oricare ar fi $t \in [0, 1]$ și $n \in \mathbb{N}$.

b) Să se arate că $0 \leqslant I_n(x) \leqslant \frac{1}{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ și $x \in [0, 1]$.

c) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(x) = 0$, pentru $x \in [0, 1]$.

d) Să se arate că $I_n(x) + I_{n-1}(x) = \frac{x^n}{n}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ și $x \in [0, 1]$.

3. Se consideră funcția
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + \frac{1}{x+1}$.

a) Să se calculeze $f'(x),\ x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

c) Să se afle câte puncte de inflexiune are graficul funcției f.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$.

e) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^3}\int_0^x f(t)\,dt$.

4. Se consideră funcția
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{3x^3 + 3x - 1}{x^2 + 1}$.

a) Să se verifice că $f(x) = 3x - \frac{1}{x^2+1},\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $f'(x),\ x \in \mathbb{R}$.

c) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

d) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

e) Să se arate că funcția f este bijectivă.

f) Dacă notăm cu $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ inversa funcției f, să se calculeze $\int_{-1}^{\frac{5}{2}} g(x)\,dx$.

5. Se consideră funcția
$f: (0; +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right),\ \alpha \in (0; +\infty)$.

a) Dacă $f(x) = \ln(x+\alpha) - A \cdot \ln x$, să se calculeze A.

b) Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției.

c) Să se calculeze $f'(x)$.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{f(1)}{\alpha}$.

e) În cazul $\alpha = 1$, dacă $\int\limits_{2005}^{2006} f'(x)\,dx = \ln\left(1 - \frac{B}{2006^2}\right)$, să se calculeze B.

6. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{x^2}$.

a) Să se calculeze $f'(x),\ x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

c) Să se determine $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

d) Să se determine $\int_0^1 f'(x)\,dx$.

e) Să se determine $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{f(x)}$.

7. Se consideră funcțiile $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_0(x) = \sin x$ și $f_{n+1}(x) = f_n'(x)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ și $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $f_0(\pi)$.

b) Să se arate că $\lim\limits_{x\to\infty} f_0(x)$ nu există.

c) Să se calculeze $f_1(\pi)$.

d) Să se calculeze $\int_0^{2\pi} f_1(x)\,dx$.

e) Să se determine $f_{10}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

f) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_n(x)}{n} = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

8. Se consideră funcția

$f : \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3 - x - 1}{x^2 - 1}$.

a) Să se afle valorile lui $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$ pentru care are loc egalitatea $f(x) = x - \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

b) Să se determine ecuația asimptotei oblice la graficul funcției f către $+\infty$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

d) Să se calculeze $\int_2^4 f(x)\,dx$.

e) Să se determine mulțimea $\left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \,\middle|\, f'(x) > 1 \right\}$.

9. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2 + 1}$.

a) Să se verifice că $f(x) = x^2 - 1 + \dfrac{1}{x^2 + 1}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - x^2)$.

c) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

d) Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$ și strict crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

e) Să se arate că graficul funcției f nu admite asimptotă către ∞.

f) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

10. Se consideră funcția

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $f(1) \cdot f(-1) \cdot f'(1) \cdot f'(-1)$.

c) Să se arate că $-\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{x}{1 + x^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

d) Să se arate că, dacă $x, y \in \mathbb{R}$ și $f(x) + f(y) = 1$, atunci $xy = \pm 1$.

e) Să se calculeze $\int_0^2 f(x)dx$.

f) Să se calculeze $f(0) \cdot f'(0)$.

11. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \sqrt{2x^2 + 3}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f'(x)dx$.

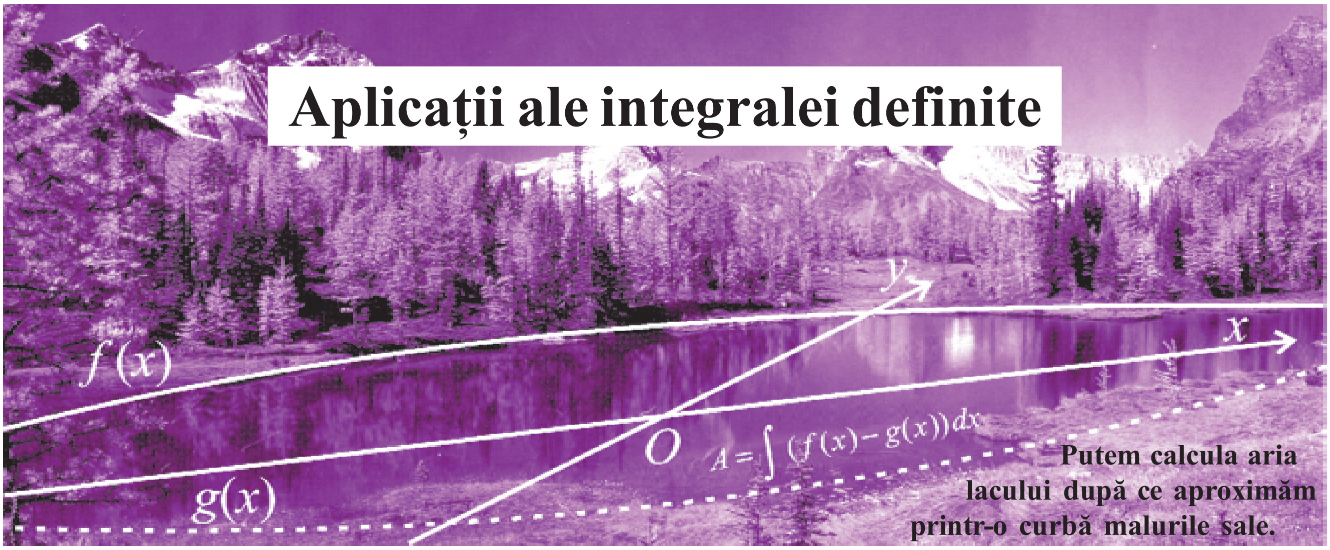
c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

d) Să se arate că dreapta $y = \sqrt{2} \cdot x$ este asimptotă oblică către $+\infty$ la graficul lui f.

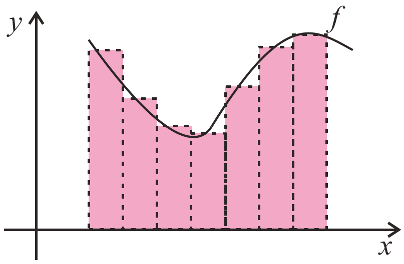
e) Să se rezolve ecuația $f(x) + f(2x) = f(3x) + f(4x)$.

f) Să se calculeze $f(2)'$.

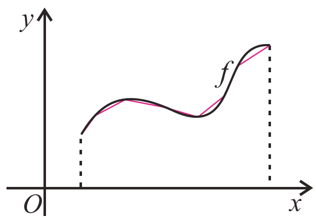
Aplicații ale integralei definite



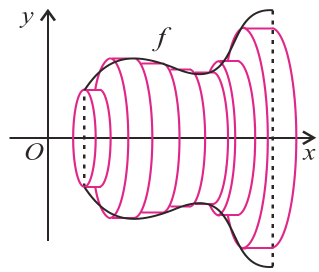
Pentru a defini aria, volumul sau lungimea unor figuri geometrice, vom folosi niște figuri cunoscute: dreptunghiuri (pentru arii), paralelipipede sau cilindrii (pentru volume) sau segmente (pentru lungimi).



Pentru a calcula aria unei suprafețe curbilinii plane o vom aproxima cu dreptunghiuri foarte subțiri (de lățime infinitezimală *dx*) și vom însuma ariile acestor dreptunghiuri.



Pentru a calcula lungimea unei curbe, vom aproxima curba cu o linie poligonală formată din segmente foarte scurte și vom însuma lungimile acestor segmente.



Pentru a calcula volumul unui corp, să ne imaginăm că-l vom aproxima cu felii foarte subțiri (de grosime infinitezimală *dx*, cu aria bazei $S(x)$) și vom însuma volumele acestor felii: $S(x)\,dx$.

Aria unei suprafețe plane

Aria unei suprafețe mărginită de grafice de funcții

Teoremă. Fie funcțiile $f, g:[a, b]\to\mathbb{R}$ continue (sau continue pe porțiuni). Presupunem că $g(x) \leqslant f(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Suprafața dintre graficele funcțiilor f și g pe $[a, b]$ este

$$\Gamma=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\leqslant x\leqslant b \text{ și } g(x)\leqslant y\leqslant f(x)\}$$

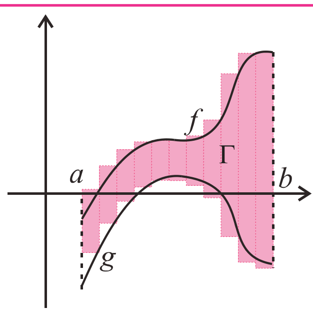
Aria suprafeței Γ este $\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$.

Demonstrație.

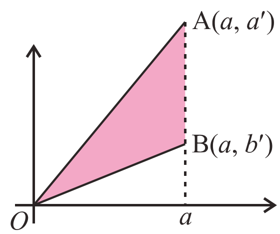
Fie Γ suprafața dintre graficele funcțiilor f și g pe $[a, b]$.

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, Γ este aproximată de reuniunea dreptunghiurilor cu baza $\frac{b-a}{n}$ și înălțimea

$$f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)-g\left(a+k\frac{b-a}{n}\right), k=\overline{1, n}.$$



1) Calculați cu ajutorul integralei aria ΔOAB, unde $A(a, a')$, $B(a, b')$.



Indicație. OA este graficul funcției $f:[0, a]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{a'}{a}x$.

2) Calculați aria subgraficului funcției $\{x\}=x-[x]$ pe $[-1, 4]$ (unde $\{x\}$ este partea fracționară și $[x]$ este partea întreagă ale lui x).

Aria suprafeței Γ este aproximată de

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)-g\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right]\frac{b-a}{n}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}-\sum_{k=1}^{n}g\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}$$

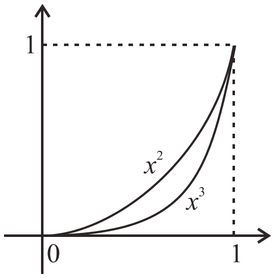
Conform raționamentelor făcute la interpretarea geometrică a integralei definite, șirul (S_n) converge la

$$\text{aria}(\Gamma)=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx=\int_a^b[f(x)-g(x)]\,dx. \ ■$$

Observație. Aria suprafeței dintre graficele funcțiilor continue (sau continue pe porțiuni) $f, g:[a, b]\to\mathbb{R}$ este $\int_a^b|f(x)-g(x)|\,dx$.

EXEMPLU

Calculați aria suprafeței situată între graficele funcțiilor $x\mapsto x^2$ și $x\mapsto x^3$ și punctele lor de intersecție.



Rezolvare. Abscisele intersecțiilor celor două grafice se obțin rezolvând ecuația $x^2 = x^3$. Rezultă soluțiile $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

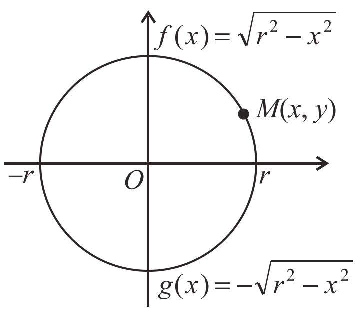
Aria căutată este

$$S=\int_0^1|x^2-x^3|\,dx=\int_0^1(x^2-x^3)\,dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

Aplicații.

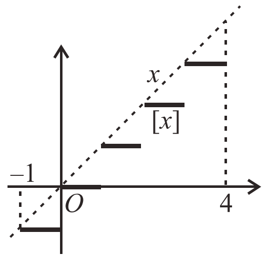
♦ *Aria cercului* – **temă de sinteză**

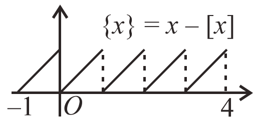
Reamintim că cercul de centru O și rază r, $r > 0$ reprezintă locul geometric al punctelor din plan aflate la distanța r de punctul O.



Notăm $\mathscr{C}(0, r)$ cercul de centru O și rază r și avem ecuația carteziană generală:

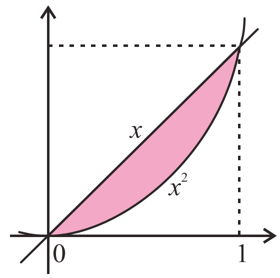
$$\mathscr{C}(O, r): x^2 + y^2 = r^2$$





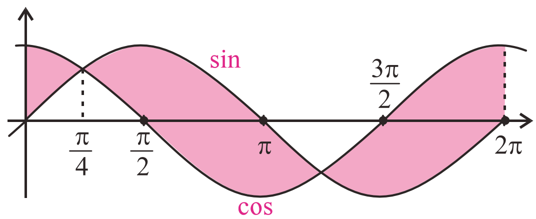
3) Calculați aria suprafeței dintre graficele funcțiilor $x\mapsto x$ și $x\mapsto x^2$, între intersecțiile acestor grafice.

Indicație. Se calculează abscisele punctelor de intersecție ale graficelor.



4) Calculați aria suprafeței cuprinsă între graficele funcțiilor sin și cos pe intervalul $[0, 2\pi]$.

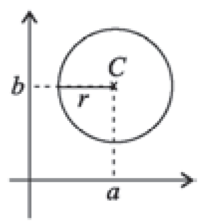
Indicație. Se calculează abscisele punctelor de intersecție ale graficelor. Se stabilesc intervalele pe care $\sin x > \cos x$ pentru a explicita $|\sin x - \cos x|$.



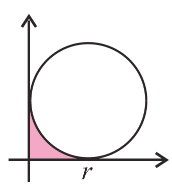
5) Explicitați funcțiile ale căror grafice descriu cercul $\mathscr{C}(C, r)$:

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

Calculați aria cercului $\mathscr{C}(C, r)$.



6) Calculați aria suprafeței hașurate.



și trecând la ecuația explicită

$$\mathscr{C}(O, r):\ y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

deducem că aria $\left(\mathscr{C}(O, r)\right) = \text{aria}\left(\Gamma_{f,g}\right)$, unde:

$$f, g : [0, r] \to \mathbb{R},\ f(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}\ \text{ iar }\ g(x) = \sqrt{r^2 - x^2}\ .$$

Vom demonstra că: aria $(\mathscr{C}(O, r)) = \pi r^2$

$$\text{aria}(\mathscr{C}(O, r)) = \int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2} - (-\sqrt{r^2 - x^2}))dx = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}dx =$$

$$= 4 \cdot \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}dx\ .$$

Cu ajutorul schimbării de variabilă $x = r\sin t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, deducem:

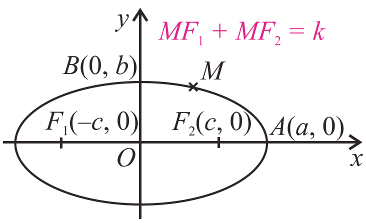
$$\text{aria}(\mathscr{C}(0, r)) = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\cos t dt = 4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t dt =$$

$$= 4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2}dt = 4r^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}dt + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt\right) =$$

$$= 4r^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = r^2 \cdot \pi\ .\ \blacksquare$$

♦ *Aria elipsei* – **temă de sinteză**

Elipsa reprezintă locul geometric al punctelor din plan care au suma distanțelor față de două puncte fixe, numite focare, constantă.



Știm din clasa a XI-a că ecuația carteziană generală a elipsei este:

$$\mathscr{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ .$$

Utilizând ecuațiile explicite: $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ deducem că aria $(\mathscr{E}) = \text{aria}\ (\Gamma_{f,g})$, unde

$f, g : [-a, a] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ iar $g(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

Vom demonstra că:

$$\text{aria}(\mathscr{E}) = \pi ab.$$

$$\text{aria}(\mathscr{E}) = \text{aria}(\Gamma_{f,g}) = \int_{-a}^{a} (g(x) - f(x))dx = \int_{-a}^{a} \frac{2b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx =$$

$$= \frac{2b}{a} \cdot \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{4b}{a} \cdot \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx\ .$$

7) Calculați integrala $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$ prin schimbarea de variabilă $x = r\cos t$.

8) Calculați aria suprafeței cuprinsă între graficele funcțiilor f, g dacă

a) $f(x) = x$, $g(x) = x^2 - x$, $x \in [1, 3]$;

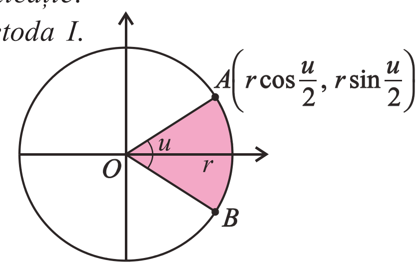
b) $f(x) = x$, $g(x) = e^x$, $x \in [0, 2]$;

c) $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$, $x \in [-1, 1]$.

9) Într-un cerc de rază r, considerăm două raze care fac unghiul u (în radiani). Aria sectorului de cerc dintre cele două raze este $\frac{ur^2}{2}$.

Indicație.

Metoda I.



Sectorul AOB este situat între graficele funcțiilor $f, g : [0, r] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x\,\text{tg}\frac{u}{2}, & x \leqslant r\cos\frac{u}{2} \\ \sqrt{r^2 - x^2}, & x > r\cos\frac{u}{2} \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} -x\,\text{tg}\frac{u}{2}, & x \leqslant r\cos\frac{u}{2} \\ -\sqrt{r^2 - x^2}, & x > r\cos\frac{u}{2} \end{cases}.$$

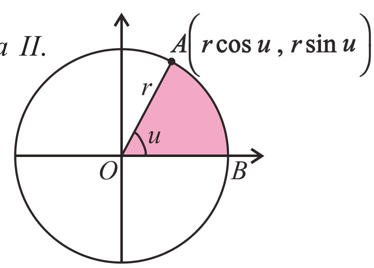
$$S = \int_0^r (f(x) - g(x))dx =$$

$$= 2\int_0^{r\cos\frac{u}{2}} x\,\text{tg}\frac{u}{2}dx + 2\int_{r\cos\frac{u}{2}}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx =$$

$$= 2\text{tg}\frac{u}{2} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^{r\cos\frac{u}{2}} + 2r^2\int_{\frac{u}{2}}^{0} (-\sin^2 t)dt =$$

$$= r^2\frac{\sin u}{2} + r^2\int_0^{\frac{u}{2}} (1 - \cos 2t)dt = \ldots$$

Metoda II.



Utilizând schimbarea de variabilă $x = a\sin t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ obținem:

$$\text{aria}(\mathscr{E}) = \frac{4b}{a} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}\, a \cos t dt = 4ab \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt =$$

$$= 4ab \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \right) = 4ab \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2} \right) dt = 4ab \cdot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) =$$

$$= ab\pi .$$ ■

Observație.

Elipsa de semiaxe a și b se poate obține prin proiecția unui cerc de rază a pe un plan care face cu planul cercului unghiului α, cu $\cos\alpha = \frac{b}{a}$.

Ca urmare, aria elipsei este produsul dintre aria cercului și cosinusul unghiului dintre plane, deci:

$$\pi a^2 \cdot \cos\alpha = \pi a^2 \frac{b}{a} = \pi ab .$$

Aria sectorului AOB este subgraficul funcției pozitive $h : [0, r] \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \begin{cases} x \operatorname{tg} u, & x \leqslant r\cos u \\ \sqrt{r^2 - x^2}, & x \geqslant r\cos u \end{cases}.$$

$$S = \int_0^{r\cos u} x \operatorname{tg} u \, dx + \int_{r\cos u}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \ldots$$

10) Calculați aria determinată de cercul $\mathscr{C}$: $x^2 + y^2 = 2$, dreapta $y = \sqrt{7}x$ și semiaxa Ox, cu $x > 0$.

11) Calculați aria suprafeței determinată de elipsa $\mathscr{E}$: $4x^2 + 9y^2 = 36$, dreapta $y = \frac{2\sqrt{5}}{3}x$ și semiaxa Ox, cu $x > 0$.

I. Să se calculeze aria mulțimii $\Gamma_{f,g}$ pentru:

● **1.** $f, g : [0, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x}$.

● **2.** $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

● **3.** $f, g : [1, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = x$.

● **4.** $f, g : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2 - x$, $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

● **5.** $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x}$.

●● **6.** $f, g : [0 , 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$.

● **7.** $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = e^x$.

● **8.** $f, g : [1, e] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$, $g(x) = x - 1$.

●● **9.** $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 3^{-x} + \frac{2}{3}$,.

●● **10.** $f, g : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$.

II. 1. Să se calculeze aria mulțimii cuprinse între parabola de ecuație $y^2 = 9x$ și dreapta de ecuație $y = 9x$.

● **2.** Interiorul cercului $\mathscr{C}$: $x^2 + y^2 = 16$ este despărțit de parabola de ecuație $y^2 = 4x$ în două regiuni. Să se găsească aria fiecăreia dintre ele.

●● **3.** Interiorul elipsei $\mathscr{E}$: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ este despărțit de dreapta: $y = 2x - 2$ în două regiuni. Să se găsească aria fiecăreia dintre ele.

●●● **4.** Interiorul elipsei $\mathscr{E} : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ este despărțit de cercul $\mathscr{C}$: $(x - 5)^2 + y^2 = 25$ în două regiuni. Să se calculeze aria fiecăreia dintre ele.

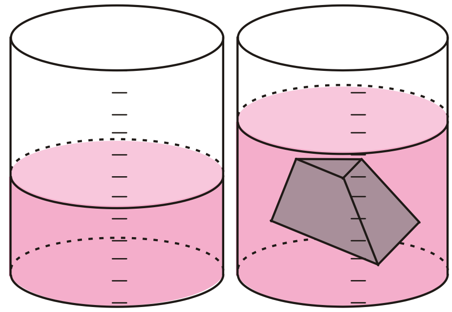
●● **5.** Să se calculeze aria mulțimii cuprinse între hiperbola: $\mathscr{H} : \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ și dreapta de ecuație $d : y = x - 4$, pentru $x > 0$.

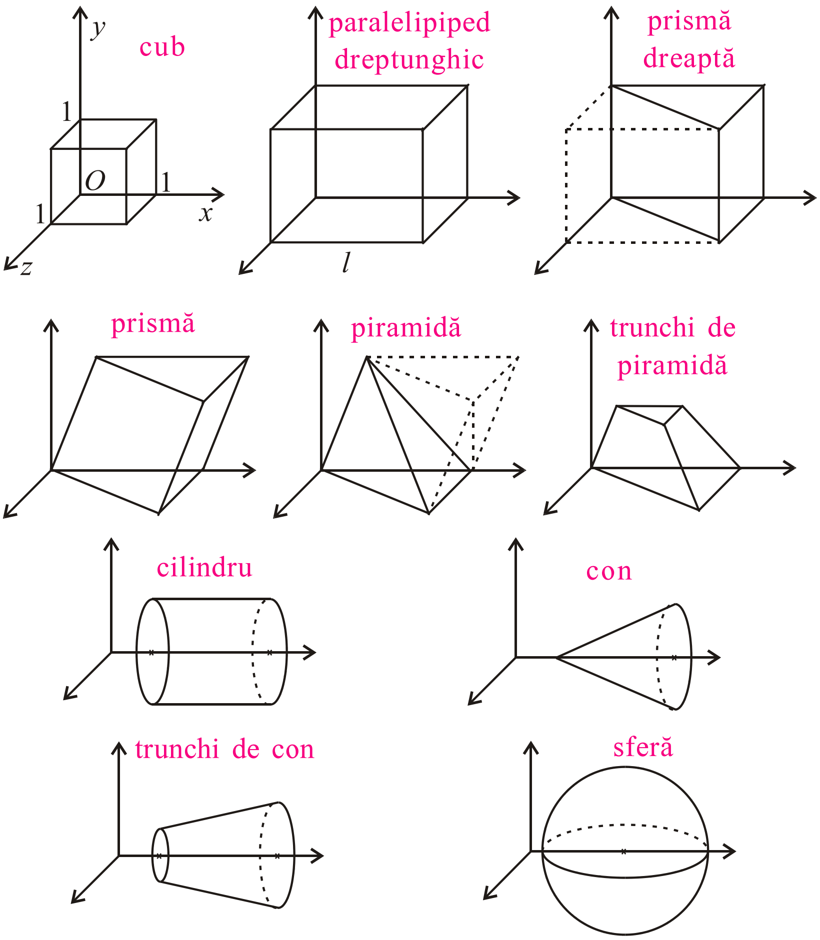
●● **6.** Să se calculeze aria cuprinsă între parabolele de ecuații: $y^2 = 3x$ și $y = 4x^2$.

Volumul unui corp de rotație

În mod intuitiv, volumul unui corp (în spațiul tridimensional) este numărul care arată câte cuburi și fracțiuni de cub cu latura unitate „încap“ (pot fi distribuite) în tot interiorul corpului.

Am învățat formule pentru calculul volumului anumitor corpuri geometrice. Volumul unui corp mai complicat nu poate fi calculat cu ajutorul unei formule simple, dar putem să-l aflăm dacă reușim să-l scufundăm într-un vas gradat; avem $1\,l = 1\text{dm}^3 = 0{,}001\text{m}^3$.





Cum calculăm volume ?

Temă de sinteză

1) Asociați fiecare dintre corpurile geometrice alăturate cu formula potrivită pentru calculul volumului său:

a) $\frac{4\pi r^3}{3}$; b) l^3; c) $\frac{\pi(R^2+r^2+Rr)\cdot h}{3}$;

d) $\frac{\pi r^2 h}{3}$; e) $l\cdot L\cdot h$; f) $\frac{A_b\cdot h}{3}$;

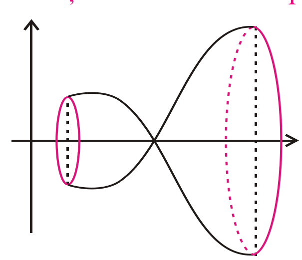
g) $\pi r^2 h$; h) $\frac{(A_B+A_b+\sqrt{A_B A_b})\cdot h}{3}$; i) $A_b\cdot h$

2) Care dintre corpurile geometrice alăturate se pot obține prin rotirea graficului unei funcții în jurul axei Ox?

3) Calculați volumul unui tetraedru regulat și al unui cub, ambele de latură l. Comparați volumele obținute.

4) Secționăm o piramidă cu un plan paralel cu baza și obținem o piramidă și un trunchi de piramidă de volume egale. Care este raportul dintre înălțimile piramidei și trunchiului de piramidă?

Lutul a fost unul dintre cele mai folosite materiale utilizate la confecționarea de vase. În antichitate, oamenii au observat că vasele de lut „perfect rotunde“ sunt mai încăpătoare, mai rezistente și mai frumoase decât cele cu forme neregulate. Pentru a fabrica cât mai repede vase de lut rotunde, oamenii au inventat „roata olarului“. Mult mai târziu, principiul roții olarului a fost folosit pentru proiectarea strungurilor. Există astăzi strunguri programabile deservite de specialiști care stăpânesc noțiuni de matematică precum axe, coordonate, grafice, arii sau volume. Uneltele au rostul de a ajuta oamenii să confecționeze cât mai repede și mai exact obiectele pe care le imaginează și le proiectează. Matematica îi învață cum să gândească, pentru a descoperi acele proprietăți ale obiectelor de care au nevoie și pe care intenționează să le realizeze.



Un corp de rotație este caracterizat de o axă de rotație și de o generatoare. Ne vom ocupa în continuare de volumele corpurilor de rotație, care au ca axă de rotație Ox și ca generatoare graficul unei funcții.

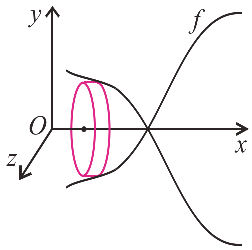
Definiție.

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Mulțimea punctelor din spațiu

$$\mathcal{V} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leqslant x \leqslant b, \text{ și } 0 \leqslant \sqrt{y^2 + z^2} \leqslant |f(x)|\right\}$$

se numește *corpul de rotație* în jurul axei *Ox* determinat de funcția *f*.

Pentru aproximarea volumului unui corp de rotație determinat de o funcție continuă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, vom considera o diviziune a intervalului $[a, b]$, de exemplu diviziunea lui $[a, b]$ în n părți egale ($a < a + \frac{b-a}{n} < a + 2\frac{b-a}{n} < \ldots < a + n\frac{b-a}{n} = b$).



Numărul $\pi f^2\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \cdot \frac{b-a}{n}$ este volumul cilindrului cu raza $f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ și înălțime $\frac{b-a}{n}$. Acest volum aproximează volumul obținut prin rotirea în jurul axei *Ox* a graficului funcției *f* pe intervalul $\left[a + (k-1)\frac{b-a}{n},\ a + k\frac{b-a}{n}\right]$.

Volumul V al corpului de rotație determinat de $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este aproximat de $V_n = \sum_{k=1}^{n} \pi f^2\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \cdot \frac{b-a}{n}$, suma volumelor tuturor cilindrilor, în sensul că

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \pi \sum_{k=1}^{n} f^2\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \cdot \frac{b-a}{n} = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx .$$

Rezultă următoarea teoremă, care ne indică formula de calcul pentru volumul unui corp de rotație.

Teoremă.

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Corpul de rotație determinat de f are volumul

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx .$$

Observație.

Dacă funcția $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci funcția f^2 este continuă pe $[a, b]$ și $\int_a^b f^2(x)\,dx$ are sens.

5) Calculați volumul corpului de rotație determinat de funcția f. Desenați (schițați) corpul obținut în fiecare caz.

a) $f : [-1, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$

b) $f : [-1, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - x^2$

c) $f : [1, 5] \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln x$

d) $f : [0, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1] \\ \frac{x}{2}, & x \in (1, 2] \end{cases}$

e) $f : [0, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1] \\ -x, & x \in (1, 2] \end{cases}$

f) $f : [-1, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x$

g) $f : [1, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - \ln x$

h) $f : [-1, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$

i) $f : [-1, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x - \cos x$

j) $f : [0, 3] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1] \\ x, & x \in (1, 2] \\ 1, & x \in (2, 3] \end{cases}$

k) $f : [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$

l) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|$

6) Se consideră curba de ecuație $y^2 = x^3$. Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația curbei în jurul axei *Oy* pe intervalul $[1, 2]$.

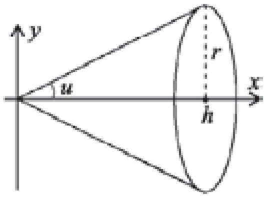
ATENȚIE

De multe ori, folosirea în practică (în fizică, chimie, tehnică) a unor concepte matematice se bazează pe aproximări, pe utilizarea de modele ideale pe care le dorim cât mai apropiate de realitatea studiată. Vom folosi în acest capitol aproximarea unor forme geometrice generate de niște funcții cu ajutorul diviziunilor domeniului funcției.

Aplicații.

♦ *Volumul conului*

Teoremă. Volumul conului de rotație cu raza r și înălțimea h este $\dfrac{\pi h r^2}{3}$.

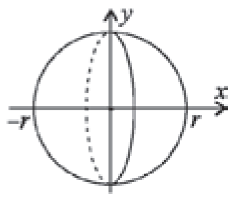


Demonstrație. Generatoarea conului este graficul funcției $f: [0, h] \to \mathbb{R},\ f(x) = x\,\mathrm{tg}\,u = \dfrac{r}{h}x$.

$$V = \pi\int_0^h f^2(x)\,dx = \pi\int_0^h x^2\frac{r^2}{h^2}\,dx = \pi\frac{x^3}{3}\frac{r^2}{h^2}\Big|_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}.\ ■$$

♦ *Volumul sferei*

Teoremă. Volumul sferei cu raza r este $\dfrac{4\pi r^3}{3}$.



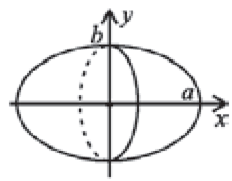
Demonstrație. Din ecuația cercului $\mathscr{C}(0, r)$: $x^2 + y^2 = r^2$ deducem $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$.

Sfera este corpul geometric de rotație determinat de funcția $f: [-r, r] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.

$$V = \pi\int_{-r}^{r} f^2(x)\,dx = \pi\int_{-r}^{r}(r^2 - x^2)\,dx = \pi\left(r^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-r}^{r} = \frac{4\pi r^3}{3}\ ■$$

♦ *Volumul elipsoidului*

Teoremă.
Volumul elipsoidului format prin rotirea elipsei de ecuație $\mathscr{E}: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ în jurul axei Ox este $\dfrac{4\pi ab^2}{3}$.



Demonstrație.

Din ecuația elipsei $\mathscr{E}: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, deducem $y = \pm b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}$.

Elipsoidul este generat de graficul funcției

$f: [-a, a] \to \mathbb{R},\ f(x) = b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}$.

Volumul elipsoidului este

$$V = \pi\int_{-a}^{a} f^2(x)\,dx = \pi\int_{-a}^{a} b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx =$$

$$= \pi b^2\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_{-a}^{a} = \frac{4\pi ab^2}{3}.\ ■$$

PROBLEME PROPUSE

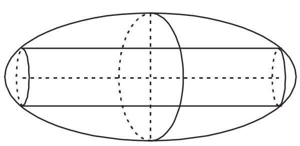
● **1.** Calculați volumul conului de rotație cu raza $r = 4$ cm și înălțimea $h = 6$ cm.

● **2.** Calculați volumul unei sfere cu raza $r = 2$ cm.

● **3.** Calculați volumul elipsoidului cu semiaxele $a = 2$ cm și $b = 3$ cm.

●● **4.** Calculați masa unei piese de forma unui elipsoid de rotație din care lipsește un cilindru, conform schiței de mai jos. Se știe că densitatea materialului este de 5kg/dm^3 și dimensiunile sunt date în decimetri.

Elipsoidul are semiaxa mare 5, semiaxa mică 2, iar cilindrul are diametrul 2.



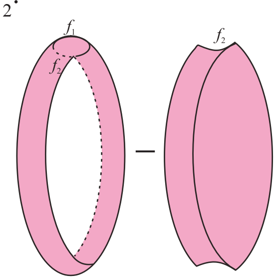
Indicație. Se intersectează elipsa cu semiaxa mare 5 și semiaxa mică 2 de ecauție $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} - 1 = 0$ cu dreapta de ecuație $y = 1$.

●● **5.** *Volumul torului.*

Se rotește în jurul axei Ox cercul de ecuație $\mathscr{C}: x^2 + (y - b)^2 = r^2$, unde $|b| \geq r > 0$.
Care este volumul corpului obținut (tor)?

Indicație. Cercul $\mathscr{C}$ este descris de graficele funcțiilor $f_1(x) = b + \sqrt{r^2 - x^2}$ și $f_2(x) = b - \sqrt{r^2 - x^2}$.

Volumul torului se obține din volumul de rotație determinat de f_1, din care se scade volumul de rotație determinat de f_2.



Teste de evaluare

Testul 1

1. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

(1p) a) Calculați $f'(x)$ și determinați imaginea lui f.

(2p) b) Rezolvați inecuația $\dfrac{1}{1+x^2} \leqslant \dfrac{x^2}{2}$.

(2p) c) Calculați aria mulțimii plane:

$$A = \left\{(x, y) \,\middle|\, -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ și } \frac{x^2}{2} \leqslant y \leqslant \frac{1}{1+x^2}\right\}.$$

(2p) **2.** Reprezentați grafic $f: [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 2x)^7$ și calculați aria mulțimii plane $A = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2 \text{ și } (x^2 - 2x)^7 \leqslant y \leqslant 0\}$.

(2p) **3.** Reprezentați și calculați aria mulțimii D din semiplanul superior, cuprinsă între parabola de ecuație $y^2 = x + 4$, axa Ox și dreapta de ecuație $x + y = 2$.

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 1 oră.

Testul 2

1. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x^2e^{-x}$.

(1p) a) Calculați $f'(x)$, $f''(x)$.

(2p) b) Calculați aria determinată de $x = 0$, $x = 2$, axa Ox și graficul funcției $f(x) = 1 - x^2e^{-x}$.

2. Fie $a \in (0, +\infty)$ și $f: [-a, a] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

(2p) a) Determinați $V(a)$ - volumul corpului de rotație obținut prin rotirea graficului lui f în jurul axei Ox.

(2p) b) Calculați $\lim\limits_{a\to\infty} V(a)$.

(2p) **3.** Reprezentați și calculați aria mulțimii D din plan, cuprinsă între curba de ecuație $y = x + \sin x$, axa Ox și dreapta de ecuație $x = 2\pi$.

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 1 oră.

Probleme de tip bacalaureat

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$.

a) Să se afle ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1}$.

d) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinsă între axa Ox, graficul funcției f și dreptele $x = 2$ și $x = -2$.

e) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 f(x)$.

2. Fie numerele $0 < a < b < 1$ și funcția $f:[a; b] \to [a; b]$, $f(x) = x^2 - (a+b-1)x + ab$.

a) Să se determine $f(a)$ și $f(b)$.

b) Să se arate că f este strict crescătoare și convexă pe $[a; b]$.

c) Să se arate că f este bijectivă;

d) Să se determine aria delimitată de graficul funcției f pe $[a; b]$.

e) Să se arate că $\displaystyle\int_a^b f^{-1}(x)dx > \frac{b^2 - a^2}{2}$.

f) Să se arate că, dacă $a, b \in \mathbb{Q}$, atunci $\displaystyle\int_a^b f^{-1}(x)dx \in \mathbb{Q}$.

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcției f, axa Ox și dreptele $x = 0$ și $x = 1$.

c) Să se afle câte puncte de inflexiune are graficul funcției f.

d) Să se calculeze cât este $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$.

e) Să se afle câte puncte de extrem local are funcția f.

4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2(x^2 + 3) - \log_2(x^2 + 2)$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

c) Să se arate că funcția f este crescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$ și descrescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

d) Să se determine ecuația asimptotei la graficul funcției f către $-\infty$.

e) Să se arate că $0 < f(x) \leqslant \log_2 3 - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

f) Să se arate că

$\int_0^x \log_2(t^2+a^2)dt = x\ln(x^2+a^2) - \dfrac{2x}{\ln 2} + \dfrac{2a}{\ln 2}\cdot \operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$,

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall a \in \mathbb{R}^*$.

g) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

5. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}$.

a) Să se determine asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției f.

b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}^*$.

c) Să se afle cel mai mic număr real a, cu proprietatea că $f(x) < a$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

d) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcției f, axa Ox și dreptele $x=\dfrac{1}{2}$ și $x = 1$.

e) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\left((f(x)-1)\dfrac{x^3}{x+1}\right)$.

6. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-2x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

c) Să se determine câte puncte de inflexiune are graficul funcției f.

d) Să se determine câte puncte de extrem local are funcția f.

e) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = -1$ și $x = 1$.

7. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x + 1$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

c) Să se determine câte puncte de inflexiune are graficul funcției f.

d) Să se determine câte puncte de extrem local are funcția f.

e) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

8. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

c) Să se afle câte puncte de inflexiune are graficul funcției f.

d) Să se afle câte puncte de extrem local are funcția f.

e) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

9. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 1$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine mulțimea $\{x\in\mathbb{R} \mid f'(x)>0\}$.

c) Să se calculeze suma $f(0) + f(1) + \dots + f(n)$.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(0)+f(1)+\dots+f(n)}{n^3}$.

e) Să se calculeze aria suprafeței plane, cuprinsă între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = -1$ și $x = 1$.

10. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}-\{-1, 2\}\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$.

a) Să se calculeze expresia

$f(x)-\dfrac{1}{3(x-2)}+\dfrac{1}{3(x+1)}$, $x\in\mathbb{R}-\{-1, 2\}$.

b) Să se determine asimptotele verticale la graficul funcției f.

c) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele $x = 3$ și $x = 4$.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 f(x)$.

e) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}(f(3)+f(4)+\dots+f(n))$.

11. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}.$$

a) Să se calculeze expresia $f(x)-2+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}$, $x\in[0,\infty)$.

b) Să se determine asimptota orizontală către $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in[0,\infty)$.

d) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

e) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$.

12. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{2x+1}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}.$$

a) Să se demonstreze că are loc egalitatea

$$f(x)=\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{(x+1)^2+1},\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

b) Să se calculeze $f(0)+f(1)+f(2)+\ldots+f(9)$.

c) Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3f(x))$.

e) Să se calculeze aria cuprinsă între graficul funcției f, axa Ox și dreptele verticale de ecuații $x=0$ și $x=1$.

13. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e-1}{e^{x+1}}$.

a) Să se arate că $f(x)=\frac{1}{e^x}-\frac{1}{e^{x+1}}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int f(x)dx$.

c) Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

d) Să se arate că $f'(x)=-f(x)$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

e) Să se calculeze $\int f'(x)dx$.

f) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

Parcurgând „Elemente de analiză matematică” ați dobândit următoarele competențe specifice?

1. Identificarea legăturilor dintre o funcție continuă și derivata sau primitiva acesteia

2. Stabilirea unor proprietăți ale calculului integral, prin analogie cu proprietăți ale calculului diferențial

3. Utilizarea algoritmilor pentru calcularea unor integrale definite

4. Explicarea opțiunilor de calcul al integralelor definite, în scopul optimizării soluțiilor

5. Determinarea ariei unei suprafețe plane și a volumului unui corp, folosind calculul integral, și compararea rezultatelor cu cele obținute prin aplicarea unor formule cunoscute din geometrie

6. Aplicarea calculului diferențial sau integral în probleme practice

Probleme recapitulative

Grupuri

1. Fie $M=\left\{\begin{pmatrix} x & z \\ 0 & y \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{R}, xy \neq 0\right\}$. Să se studieze proprietățile operației induse pe M de înmulțirea matricelor.

2. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x * y \overset{\text{def}}{=} x + y + ax + by$, unde a, $b \in \mathbb{R}$. Determinați a și b astfel încât legea de compoziție „$*$“ să fie asociativă și comutativă.

3. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x * y \overset{\text{def}}{=} xy - x - y - 2$; $a, b \in \mathbb{R}$.
Arătați că legea „$*$“ nu admite element neutru.

4. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție: $x * y \overset{\text{def}}{=} ax + by$; $a, b \in \mathbb{R}^*$. Determinați a și b astfel încât legea „$*$“să fie asociativă.

5. Se consideră operația $x * y \overset{\text{def}}{=} x + ay$, $a \in \mathbb{R}$. Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât legea să fie asociativă.

6. Se consideră legea de compoziție $x * y \overset{\text{def}}{=} 2xy - 2x - 2y + a$, $a \in \mathbb{R}$. Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât legea de compoziție să fie asociativă.

7. Se consideră legea $x * y = xy + 4a(x + y)$, $a \in \mathbb{R}$. Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât „$*$“ să fie asociativă.

8. Se consideră operația $x * y \overset{\text{def}}{=} x + y - \frac{1}{2}xy$. Arătați că legea este asociativă, admite element neutru, elementele lui $M = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ sunt simetrizabile și legea este comutativă.

9. Fie $M = \{x + y\sqrt{5} \mid x, y \in \mathbb{Q}, x^2 - 5y^2 = 1\}$. Arătați că M are element neutru și determinați elementele simetrizabile (inversabile).

10. Fie $M = (3, 5) \subset \mathbb{R}$ și legea: $x * y \overset{\text{def}}{=} xy - 4(x + y) + 20$. Arătați că „$*$“ este operație comutativă pe M.

11. Fie $M = (2, 4) \subset \mathbb{R}$ și legea: $x * y \overset{\text{def}}{=} xy - 3(x + y) + 12$. Arătați că legea „$*$“ este o operație comutativă. Determinați elementul neutru.

12. Fie $M = (1, +\infty) - \{2\}$ și legea de compoziție $x * y \overset{\text{def}}{=} 1 + (x-1)^{\ln\sqrt{y-1}}$. Arătați că „$*$“ este comutativă.

13. Fie $M=\left\{\begin{pmatrix} x+4y & 2y \\ -7y & x-4y \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R}, x^2 - 2y^2 = 1\right\}$, $M \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Arătați că înmulțirea indusă pe M în raport cu $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este comutativă.

14. Fie operația $x * y \overset{\text{def}}{=} (1-m)x + my - m$. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât legea „$*$“ să fie comutativă.

15. Fie $M=\left\{A_x=\begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{1}{2}\right\}$, $M \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Arătați că înmulțirea indusă pe M de înmulțirea matricelor este asociativă, admite element neutru și este comutativă.

16. Fie $M = [5, 7]$ și legea de compoziție: $x * y = xy - 6(x + y) + 42$. Arătați că „$*$" este o lege de compoziție internă asociativă, comutativă și cu element neutru. Determinați elementele simetrizabile.

17. Fie mulțimea $M = (0, +\infty) \setminus \{1\}$ și funcția $x * y \overset{\text{def}}{=} e^{\ln x \ln y}$. Arătați că legea „$*$" este lege de compoziție internă, asociativă, cu element neutru, comutativă și toate elementele din M sunt simetrizabile.

18. Pe $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ se definesc legile de compoziție: $x * y \overset{\text{def}}{=} \dfrac{x + y}{2}$ (media aritmetică),

$x \mathrm{T} y \overset{\text{def}}{=} \sqrt{xy}$ (media geometrică), $x \perp y \overset{\text{def}}{=} \dfrac{2xy}{x + y}$ (media armonică).

Arătați că aceste legi de compoziție sunt comutative și nu sunt asociative. Admit element neutru?

19. Fie mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & y \end{pmatrix} \middle| \; x, y \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Determinați elementul neutru și elementele simetrizabile ale lui M în raport cu înmulțirea matricelor.

20. Fie mulțimea $M = \{x + y\sqrt{7} \mid x, y \in \mathbb{Q}, x^2 - 7y^2 = 1\}$. Arătați că toate elementele lui M sunt simetrizabile în raport cu operația indusă.

21. Fie mulțimea $G = (3, +\infty)$ și funcția $x * y \overset{\text{def}}{=} xy - 3(x + y) + 12$.

a) Arătați că „$*$" este lege de compoziție internă și că $(G, *)$ este grup abelian.

b) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f : \mathbb{R}_+^* \to G$, $f(x) = ax + b$ să fie un izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ la grupul $(G, *)$.

c) Arătați că $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{x \text{ de } n \text{ ori}} = (x - 3)^n + 3, \forall x \in G$.

22. Se consideră pe $\mathbb{Z}$ legea de compoziție: $x * y \overset{\text{def}}{=} x + y - 2$. Demonstrați că $(\mathbb{Z}, *)$ este grup abelian și funcția $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x - 2$ este un izomorfism de la grupul $(\mathbb{Z}, *)$ la grupul $(\mathbb{Z}, +)$.

23. Fie $G = (2, +\infty)$ și legea $x * y \overset{\text{def}}{=} xy - 2(x + y) + 6$. Demonstrați că „$*$" este o lege de compoziție internă și $(G, *)$ este grup abelian. Calculați $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{x \text{ de } n \text{ ori}}$.

24. Fie $G = (-3, 3) \subset \mathbb{R}$ și aplicația: $x * y = \dfrac{9(x + y)}{9 + xy}$. Arătați că „$*$" este o lege de compoziție internă și $(G, *)$ este grup abelian.

Funcția: $f : \mathbb{R} \to G$, $f(x) = \dfrac{2(e^{9x} - 1)}{e^{9x} + 1}$ este izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}, +)$ la grupul $(G, *)$. Arătați că și $f^{-1} : G \to \mathbb{R}$ este izomorfism de grupuri.

25. Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \middle| \; x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \neq 0 \right\}$, $G \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Arătați că $(G, \cdot)$ este grup abelian.

b) Arătați că $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ este izomorf cu grupul $(G, \cdot)$.

26. Fie mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \; x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}$, $G \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Arătați că $(G, \cdot)$ este grup, unde „$\cdot$" este operația indusă de operația de înmulțire a matricelor.

27. Fie mulțimea $G = (3, +\infty)$ și operația $x * y \overset{\text{def}}{=} xy - 3(x+y) + 12$. Arătați că:

a) $(G, *)$ este grup abelian.

b) funcția $f : G \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x - 3$ este izomorfism de la grupul $(G, *)$ la grupul $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$, grupul multiplicativ al numerelor reale strict pozitive.

28. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi se definesc legile de compoziție $x * y \overset{\text{def}}{=} x + y + 1$, $x \perp y \overset{\text{def}}{=} x + y - 1$. Arătați că $(\mathbb{Z}, *)$ și $(\mathbb{Z}, \perp)$ sunt grupuri izomorfe, $(\mathbb{Z}, *) \simeq (\mathbb{Z}, \perp)$, $f(x) = x + 2$.

29. Se consideră mulțimea $G = (E, A, A^2)$, unde $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$ și ε este o rădăcină cubică complexă a unității, $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$, $\varepsilon^3 = 1$. Arătați că $(G, \cdot)$ ese grup în raport cu înmulțirea matricelor.

30. Arătați că pe mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Q},\ x^2 + y^2 \neq 1 \right\}$ înmulțirea matricelor determină o structură de grup. Arătați că acest grup $(G, \cdot)$ este izomorf cu grupul $(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), \cdot)$, unde $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{x + y\sqrt{3} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$, $f : G \to \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $f(A) = x + y\sqrt{3}$, $A = \begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix}$. Arătați că $f^{-1} : \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \to G$ este izomorfism de grupuri.

31. Fie mulțimea $G = (1, +\infty)$ și operația $x * y \overset{\text{def}}{=} xy - x - y + 2$.

a) Arătați că „$*$" este o lege de compoziție internă și că $(G, *)$ este grup abelian.

b) Demonstrați că: $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = (x-1)^n + 1$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

32. Fie mulțimea $G = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ și legea „$*$": $x * y = \frac{1}{2}(1 + x + y - xy)$. Arătați că $(G, *)$ este grup.

33. Fie mulțimea $G = (m, +\infty)$ și operația „$*$": $x * y \overset{\text{def}}{=} xy - m(x+y) + m^2 + m$, $m \in \mathbb{R}$. Demonstrați că $(G, *)$ este grup abelian.

34. Se consideră legea de compoziție $z_1 * z_2 \overset{\text{def}}{=} z_1 z_2 - (z_1 + z_2)i - 1 + i$, „$*$": $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

a) Arătați că mulțimea $\mathbb{C}_1 = \mathbb{C} \setminus \{i\}$ cu operația „$*$" este grup comutativ, $(\mathbb{C}_1, *)$.

b) Demonstrați: $z * z * \ldots * z = (z - i)^n + i$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

35. Se consideră mulțimea $G = M_x = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \ln x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \right\}$. Arătați că înmulțirea matricelor determină pe G o structură de grup comutativ, $(G, \cdot)$.

36. Se consideră mulțimea $G = \mathbb{Q} \setminus \{k\}$, $k \in \mathbb{Q}^*$ și legea de compoziție: $x * y \overset{\text{def}}{=} x + y - \frac{xy}{k}$. Arătați că $(G, *)$ este grup abelian.

37. Fie grupul comutativ $(G, \cdot)$ și $a \in G$ fixat. Se definește legea de compoziție pe $G : x * y \overset{\text{def}}{=} xya$. Arătați că $(G, *)$ este grup comuativ.

38. Se consideră mulțimea de funcții: $G = \{f : \mathbb{R} \to (0, +\infty) \mid f(x) = e^{ax},\ a \in \mathbb{R}\}$.

a) Arătați că G este grup multiplicativ, $(G, \cdot)$.

b) $(G, \cdot)$ este izomorf cu grupul $(\mathbb{R}, +)$, grupul aditiv al numerelor reale.

39. Fie mulțimea $G = (0, 1)$ și operația $x * y \overset{\text{def}}{=} \dfrac{xy}{2xy - x - y + 1}$. Arătați:

a) $(G, *)$ este grup abelian

b) funcția $f : G \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \dfrac{1}{x} - 1$ este izomorfism de la grupul $(G, *)$ la grupul $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$.

40. Pe mulțimea numerelor complexe se definesc operațiile: $z_1 \perp z_2 = z_1 + z_2 + a \cdot i$, $a \in \mathbb{R}$; $z_1 \top z_2 = z_1 + z_2 - a$. Arătați că $(\mathbb{C}, \perp)$, $(\mathbb{C}, \top)$ sunt grupuri izomorfe: $f : (\mathbb{C}, \perp) \to (\mathbb{C}, \top)$, $f(z) = iz$.

Inele și corpuri

1. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se definesc operațiile: $x \perp y = x + y - 3$, $x \top y = xy - 3x - 3y + 12$. Arătați că $(\mathbb{Z}, \perp, \top)$ este o structură de inel.

2. Pe mulțimea $\mathbb{C}$ a numerele complexe se consideră operațiile: $z_1 + z_2$, $z_1 * z_2 = x_1x_2 + y_1y_2i$, unde $z_1 = x_1 + y_1i$, $z_2 = x_2 + y_2i$. Arătați că $(\mathbb{C}, +, *)$ este un inel comutativ.

3. Pe mulțimea $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se introduc următoarele legi de compoziție: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2, x_1y_2 + x_2y_1)$.
Arătați că $(A, +, \cdot)$ este inel comutativ.

4. Fie mulțimea $A = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z} \right\}$. Arătați că $(A, +, \cdot)$ este inel comutativ, „+“ și „·“ fiind operațiile de adunare și înmulțire a matricelor.

5. Fie operațiile definite pe mulțimea $\mathbb{Q}$: $x \perp y \overset{\text{def}}{=} x + y + 2$, $x \top y \overset{\text{def}}{=} xy + 2(x + y) + 2$. Arătați că tripletul $(\mathbb{Q}, \perp, \top)$ este o structură de corp.

6. Fie mulțimea $K = \left\{ \begin{pmatrix} x + y & y \\ y & x - y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Q} \right\}$, $K \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Arătați că mulțimea K împreună cu operațiile induse de adunarea și înmulțirea matricelor este un corp comutativ $(K, +, \cdot)$.

7. Fie mulțimea $K = \{x + iy\sqrt{3} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ dotată cu operațiile obișnuite de adunare și înmulțire.
Arătați că tripletul $(K, +, \cdot)$ este un corp.

8. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definesc operațiile: $x \perp y \overset{\text{def}}{=} x + y - 2$, $x \top y \overset{\text{def}}{=} 2xy - 4(x + y) + 10$. Arătați că $(\mathbb{R}, \perp, \top)$ este o structură de corp.

Polinoame

1. Găsiți rădăcinile raționale ale polinomului $f = 12X^3 - 8X^2 + 13X - 2 \in \mathbb{Z}[X]$.

2. Demonstrați că un polinom $f \in \mathbb{Z}[X]$ nu are rădăcini întregi dacă $f(0)$ și $f(1)$ sunt numere impare.

3. Determinați ordinul de multiplicitate al rădăcinii:

a) $\alpha = 2$ pentru $f = X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8 \in \mathbb{Z}[X]$;

b) $\alpha = -2$ pentru $f = X^5 + 7X^4 + 16X^3 + 8X^2 - 16X - 16 \in \mathbb{Z}[X]$.

4. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 + aX + b$. Construiți polinomul g ale cărui rădăcini sunt x_1^2, x_2^2, x_3^2.

5. Determinați rădăcinile polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 2X^3 - 12X^2 + 6X + a$ știind că acestea formează o progresie aritmetică.

6. Determinați rădăcinile polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 2X^3 - 7X^2 + 7X + a$, știind că acestea formează o progresie geometrică.

7. Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^4 + 6X^3 + 8X^2 + aX + b$. Determinați a și b știind că trei dintre rădăcinile lui f sunt în progresie aritmetică și a patra este egală cu suma celorlalte.

8. Determinați rădăcinile polinomului $f \in \mathbb{Q}[X]$ știind că admite rădăcina indicată:

a) $f = X^4 + aX^3 - X^2 - 2X + b$, $x = 2 + \sqrt{3}$;

b) $f = X^4 - 2X^3 + aX^2 + bX + 1$, $x = 1 - \sqrt{2}$.

9. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 + aX^3 + 3X^2 + 2X + b$. Determinați a și b știind că f admite rădăcina $z = 1 + i$.

10. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 2X^3 - aX^2 + 2aX - a + 2$. Determinați a știind că f admite rădăcina $z = 2 + i\sqrt{3}$.

11. Arătați că polinomul $f = X^{3n} + X^{3m+1} + X^{3p+2}$ se divide cu polinomul $g = X^2 + X + 1$.

12. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + aX + b$. Determinați rădăcinile lui f știind că una dintre ele este $z = 1 + i$.

13. Determinați rădăcinile raționale ale polinomului:

a) $4X^4 - 7X^2 - 5X - 1$;

b) $X^4 + 4X^3 - 2X^2 - 12X + 9$;

c) $6X^4 + 19X^3 - 7X^2 - 26X + 12$.

14. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 + mX^3 + 2X^2 - 8$ împărțit la $g = X - 2$ să dea restul 4.

15. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 + 4X^3 - X^2 + 6X - m$ să se dividă cu $X + 2$.

16. Arătați că polinomul $f = (X^2 + X + 1)^{4n+1} - X$ se divide cu $X^2 + 1$.

17. Arătați că polinomul $f = X^{6p-1} + X + 1$ se divide cu $X^2 + X + 1$.

18. Determinați numerele reale m și n știind că polinomul $f = 2X^3 + mX^2 + 4X + 4n$ are rădăcina dublă $\alpha = 2$.

19. Arătați că polinomul $f = X^{n+1} - X^{n-2} - 3X + 3$ este divizibil cu $g = (X-1)^2$. Găsiți câtul împărțirii polinomului f la polinomul g.

20. Demonstrați că $P(X) = (1+X)^{6m+1} - (1+X)^{6p+1}$ se divide cu $X^2 + X + 1$, unde $m, p \in \mathbb{N}$.

Primitive. Integrale nedefinite. Integrale definite

Determinați primitivele următoarelor funcții:

1. $f(x) = x\sqrt{1 + 9x^2}$, $x \in \mathbb{R}$;

2. $f(x) = x^2 \cdot \sqrt[3]{x^3 - 27}$, $x \in \mathbb{R}$;

3. $f(x)=(x^3-1)\sqrt{x^4-4x+1}, x\in(2,\infty)$;

4. $f(x)=e^x\sin(e^x), x\in\mathbb{R}$;

5. $f(x)=\sin^n x\cos x, x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$;

6. $f(x)=e^x\cos(e^x), x\in\mathbb{R}$;

7. $f(x)=\dfrac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$;

8. $f(x)=\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$;

9. $f(x)=\dfrac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}, x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$;

10. $f(x)=\dfrac{e^{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x}, x\in(0,\pi)$;

11. $f(x)=\dfrac{\sin^3 x}{\cos x}, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$;

12. $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}, x>1$;

13. $f(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}, x>0$;

14. $f(x)=x^2e^{x^3}, x\in\mathbb{R}$;

15. $f(x)=\dfrac{x}{\ln\left(x^{x^2}\right)}, x>1$;

16. $f(x)=e^{2x^2+\ln x}, x>0$;

17. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{4x^2+1}}, x\in\mathbb{R}$;

18. $f(x)=\dfrac{x}{x^4+1}, x\in\mathbb{R}$;

19. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}, x\in(-1,1)$;

20. $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+2\cos x}}, x\in\left(0,\dfrac{2\pi}{3}\right)$;

21. $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$;

22. $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\sin x}}, x\in(0,\pi)$;

23. $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^{2x}+1}, x\in\mathbb{R}$;

24. $f(x)=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}, x\in\mathbb{R}$;

25. $f(x)=\dfrac{x^3}{(1+x^2)^2}, x\in\mathbb{R}$;

26. $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}, x>1$;

27. $f(x)=\dfrac{\ln^3 x}{x}, x>1$;

28. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}, x\in\mathbb{R}$;

29. $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}, x\in(0,\pi)$;

30. $f(x)=\dfrac{1}{\cos x}, x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$;

31. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x(1-\ln^2 x)}, x>e$;

32. $f(x)=\dfrac{\ln\sqrt{x}}{x}, x>1$;

33. $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}, x\in\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$;

35. $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}, x\in\mathbb{R}$;

36. $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}, x\in\mathbb{R}$;

37. $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, x\in(0,1)$.

Determinați următoarele integrale nedefinite:

38. $\int \frac{xdx}{2x^2+3x+1}, x>-\frac{1}{2}$;

39. $\int \frac{xdx}{2x^2-3x-2}, x>2$;

40. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx, x>4$;

41. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx, x<-2$;

42. $\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}, x>\frac{3}{2}$;

43. $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx, x>1$;

44. $\int \frac{32xdx}{(2x-1)(4x^2-16x+15)}, x>\frac{5}{2}$;

45. $\int \frac{xdx}{x^4-3x^2+2}, x>\sqrt{2}$;

46. $\int \frac{(2x^2-5)dx}{x^4-5x^2+6}, x>\sqrt{3}$;

47. $\int \frac{3x^3-2x^2-x+2}{x^4-x^2}dx, x>1$;

48. $\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}dx, x>2$;

49. $\int \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 dx, x>1$;

50. $\int \frac{(x^3+1)dx}{x^3-x^2}, x>1$;

51. $\int \frac{x^2-3x+3}{(x-2)^3}dx, x>2$;

52. $\int \frac{dx}{x^4-x^2}, x>1$;

53. $\int \frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+4)^2}, x>-2$;

54. $\int \frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}dx, x>5$;

55. $\int \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 dx, x>0$;

56. $\int \frac{x^5dx}{(x-1)^2(x^2-1)}, x>1$;

57. $\int \frac{(x^2-2x+3)dx}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}, x>3$;

58. $\int \frac{7x^3-9}{x^4-5x^3+6x^2}dx, x>3$;

59. $\int \frac{dx}{x^3+x^2}, x>0$;

60. $\int \frac{xdx}{x^3-1}, x>1$;

61. $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx, x>1$;

62. $\int \frac{(x^4+1)dx}{x^3-x^2+x-1}, x>1$;

63. $\int \frac{x^2dx}{x^4-1}, x>1$;

64. $\int \frac{dx}{x^4+x^3+x^2+x}, x>0$;

65. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}, x>-1$;

66. $\int \frac{(x^5+2x^3+4x+4)}{x^4+2x^3+2x^2}dx,\ x>0$;

67. $\int \frac{(x^3-6)dx}{x^4+6x^2+8},\ x\in\mathbb{R}$;

68. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}dx,\ x\in\mathbb{R}$;

69. $\int \frac{(5x^2-12)dx}{(x^2-6x+13)^2},\ x\in\mathbb{R}$;

70. $\int \frac{(3x+5)dx}{(x^2+2x+2)^2},\ x\in\mathbb{R}$;

71. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2},\ x\in\mathbb{R}$;

72. $\int \frac{(x^3+1)dx}{(x^2-4x+5)^2},\ x\in\mathbb{R}$;

73. $\int \frac{2x^3+6x^2+6x+4}{(x^2-2x+2)^2}dx,\ x\in\mathbb{R}$;

74. $\int \frac{dx}{(x^4-1)^2},\ x\in\mathbb{R}$;

75. $\int \frac{xdx}{(1+x^2)(1+x)^2},\ x>-1$;

76. $\int \frac{(x^2-4)dx}{x^4-2x^2+1},\ x>1$.

Calculați integralele nedefinite:

77. $\int \sin 3x\cos 5xdx,\ x\in\mathbb{R}$;

78. $\int \sin 10x\sin 15xdx,\ x\in\mathbb{R}$;

79. $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}dx,\ x\in\mathbb{R}$;

80. $\int \sin^2 x\cos^4 xdx,\ x\in\mathbb{R}$;

81. $\int \sin^3 x\cos^2 xdx,\ x\in\mathbb{R}$;

82. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx,\ x\in(0,\pi)$;

83. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}dx,\ x\in(0,\pi)$;

84. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x},\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

85. $\int \frac{dx}{\sin^5 x\cos^3 x},\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

86. $\int \frac{dx}{3+5\cos x},\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

87. $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\mathrm{dx},\ x\in(0,\pi)$;

88. $\int \frac{\sin x}{1-\sin x}dx,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

89. $\int \frac{1+\mathrm{tg}\,x}{1-\mathrm{tg}\,x}\mathrm{dx},\ x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$;

90. $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3}dx,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

91. $\int \frac{\sin 2x\,\mathrm{dx}}{1+\sin^2 x},\ x\in\mathbb{R}$;

92. $\int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx,\ x\in\mathbb{R}$;

93. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 6\sin x + 5}dx,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

94. $\int \frac{dx}{1+\mathrm{tg}x},\ x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$;

95. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x}dx,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

96. $\int \frac{\cos x}{\cos^3 x + \sin^3 x}dx,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

97. $\int \frac{\cos 2x dx}{\sin x + \sin 3x},\ x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$;

98. $\int \frac{\cos^4 x\, dx}{1+\cos^2 x},\ x \in \mathbb{R}$.

99. Arătați că funcțiile următoare sunt continue și calculați integralele indicate:

a) $\int_{-1}^{3} f(x)dx;\ f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1, 1] \\ x, & x \in (1, 3] \end{cases}$;

b) $\int_0^5 f(x)dx,\ f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & , x \in [0, 1] \\ \sqrt[4]{(x-1)^3} & , x \in (1, 5] \end{cases}$;

c) $\int_0^1 f(x)dx,\ f(x) = \min\{x, \sqrt{1-x}\}$;

d) $\int_0^2 f(x)dx,\ f(x) = \max\{1, \ln(1+x^2)\}$;

e) $\int_0^1 f(x)dx,\ f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x^2+x} - \frac{1}{x}, & x \in (0, 1] \\ -1 & , x = 0 \end{cases}$;

f) $\int_0^1 f(x)dx,\ f(x) = \begin{cases} \frac{(x-\sqrt{x})^2}{1-x}, & x \in [0, 1) \\ 0 & , x = 1 \end{cases}$;

g) $\int_0^1 f(x)dx,\ f(x) = \begin{cases} \mathrm{arctg}\frac{1}{x}, & x \in (0, 1] \\ \frac{\pi}{2} & , x = 0 \end{cases}$;

h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx,\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}, & x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{1}{3} & , x = 0 \end{cases}$.

Calculați integralele următoare:

100. a) $\int_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{1}{x(x^2+1)}dx$;

b) $\int_0^1 \frac{(x-1)^2}{x^2+1}dx$;

c) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{(x-1)^2}{x(x^2+1)}dx$;

d) $\int_{-2}^{0} \frac{3x+2}{x^3+x^2-2}dx$.

101. a) $\int_0^1 \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx$;

b) $\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$;

c) $\int_{-1}^{1} \frac{x^3+1}{\sqrt{x^2+3}}dx$;

d) $\int_{-2}^{2} (2x^5+4)\sqrt{4-x^2}\,dx$.

102. a) $\int_1^2 \sqrt{x^2-1}dx$;

b) $\int_{-3}^{1} \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$;

c) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}dx$;

d) $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$.

103. a) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$;

b) $\int_2^3 \frac{\ln x}{(x-1)^3}dx$;

c) $\int_0^1 e^x \ln(1+e^x)dx$;

d) $\int_0^1 \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx$.

104. a) $\int_{-\pi}^{\pi}|\sin x|dx$;   b) $\int_{-2\pi}^{0}\sin|x|dx$;

c) $\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1-\sin^2 x}dx$;   d) $\int_{0}^{2\pi}\sqrt{1-\cos^2 x}dx$.

105. a) $\int_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{|x^2-1|}{x(x^2+1)}dx$;   b) $\int_{-1}^{1}|e^x-1|dx$;

c) $\int_{-1}^{1}e^{x+|x|}dx$;   d) $\int_{0}^{3}e^{x+|x-1|}dx$.

106. a) $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx$;   b) $\int_{0}^{2}x\cdot e^{|x-1|}dx$;

c) $\int_{0}^{2\pi}x|\sin x|dx$;   d) $\int_{0}^{2\pi}x|\cos x|dx$.

107. a) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos^2 x}{1-2\sin^2 x}dx$;   b) $\int_{0}^{\pi}\frac{|\cos x|}{4-3\cos^2 x}dx$;

c) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}^4 x\,dx$;   d) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}^5 x\,dx$.

108. a) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin x\sqrt{\cos 2x}dx$;   b) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos x\sqrt{\cos 2x}dx$;

c) $\int_{0}^{\pi}\frac{1}{1+|\cos 5x|}dx$;   d) $\int_{0}^{\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{(2-\cos x)^2+\sin^2 x}}dx$.

109. a) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\cdot\sin^2 x\,dx$;   b) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\cdot\cos^2 x\,dx$;

c) $\int_{0}^{\pi}x^2\sin 2x\,dx$;   d) $\int_{0}^{\pi}x^2\cos 2x\,dx$.

110. a) $\int_{0}^{\pi}|\cos nx|dx$;   b) $\int_{0}^{\pi}\sin^2 nx\,dx$;

c) $\int_{0}^{2\pi}\arccos(\cos nx)dx$;   d) $\int_{0}^{\pi}\frac{1}{1+|\sin nx|}dx$.

111. a) $\int_{0}^{1}\arcsin\sqrt{x}dx$;   b) $\int_{0}^{1}\arccos\sqrt{x}dx$;

c) $\int_{0}^{1}x\cdot\arcsin\sqrt{x}dx$;   d) $\int_{0}^{1}\sqrt{x}\cdot\arccos\sqrt{x}dx$.

112. a) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)e^x dx$;   b) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2+\sin 2x}{1+\cos 2x}e^x dx$;

c) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$;   d) $\int_{0}^{\pi}\frac{x\cdot\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$.

113. Calculați integrala $\int_{0}^{2}f(x)dx$, unde $f(x)=\lim_{n\to\infty}(1+x^{2n})^{\frac{1}{n}}$, $\forall x\in[0,2]$.

114. Stabiliți inegalitățile următoare: a) $1\leqslant\int_{0}^{1}\sqrt{x^4+1}dx\leqslant\sqrt{2}$;   b) $2\sqrt{e}\leqslant\int_{0}^{1}e^{x^2}dx+\int_{0}^{1}e^{1-x^2}dx\leqslant 1+e$.

114. Calculați următoarele limite:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n(1-x^n)\,dx$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{\sin nx}{n+x}dx$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^8 \frac{n\cdot\sqrt[3]{x}-1}{n\cdot\sqrt[3]{x}+1}dx$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^4 \frac{n\cdot\sqrt{x}-1}{nx\sqrt{x}+1}dx$.

115. Folosind metoda integrării prin părți, stabiliți o relație între integralele I_n și I_{n-1} ($n \geqslant 1$) și calculați integralele I_0, I_1, I_2, I_3, în următoarele situații:

a) $I_n=\int_1^e(\ln x)^n dx$; b) $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{e^x}dx$; c) $I_n=\int_0^1 x^n\cdot\sqrt{1-x}\,dx$; d) $I_n=\int_0^1(1-x^2)^n dx$.

Aplicații ale integralei definite

1. Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3x-1}{x+2}$.

a) Stabiliți monotonia lui f.

b) Determinați $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pentru care: $f(x)=\alpha+\frac{\beta}{x+2}$, $\forall x\neq -2$.

c) Calculați aria suprafeței limitată de graficul funcției, axa Ox și dreptele de ecuații $x = -1$ și $x = 0$.

2. Fie $f:[0, \pi]\to\mathbb{R}$, $f(x) = \cos 2x + 2\sin x$.

a) Calculați $f'(x)$, $\forall\ x \in (0, \pi)$ și determinați punctele de extrem ale funcției.

b) Calculați aria curinsă între graficul funcției și axa Ox.

3. Fie $f:(-1, +\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln(1 + x)$.

a) Calculați $f'(x)$ și stabiliți intervalele de monotonie.

b) Pentru $\alpha \in (-1, 0)$, calculați $A(\alpha)$ - aria suprafeței cuprinsă între graficul lui f, axa Ox și dreptele $x = \alpha$ și $x = 0$.

c) Calculați $\lim\limits_{\alpha\to-1}A(\alpha)$.

4. Fie $f:[0, 3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{3-x}$.

a) Calculați $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$.

b) Determinați o primitivă a lui f pe $[0, 3]$.

c) Calculați aria suprafeței determinată de graficul funcției și axa Ox.

d) Calculați volumul corpului de rotație obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox.

5. Fie $f:\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \cos 3x$.

a) Calculați $f'(x)$, $f''(x)$.

b) Reprezentați grafic funcția f.

c) Calculați aria suprafeței determinată de graficul funcției f și axa Ox.

d) Calculați volumul corpului de rotație obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox.

6. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^x + 4e^{-x}$.

a) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

b) Fie $S = \{(x, y)\mid 0 \leqslant x \leqslant \ln 4$ și $0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$. Calculați aria lui S și volumul corpului obținut prin rotirea lui S în jurul axei Ox.

c) Fie $S'=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\ln 4$ și $f(x)\leqslant y\leqslant 5\}$. Calculați aria lui S și volumul corpului obținut prin rotirea lui S în jurul axei Ox.

7. Fie $f: \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \sin^2 4x$.

a) Fie $S = \left\{(x, y) \middle| 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} \text{ și } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\right\}$. Calculați aria suprafeței S.

b) Demonstrați că $\sin^4 4x = \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\cos 16x - \frac{1}{2}\cos 8x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

c) Calculați volumul corpului obținut prin rotirea lui S în jurul axei Ox.

8. Fie $f: (1, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x \ln x}$.

a) Calculați $\int f(x)dx$.

b) Pentru $\alpha \in (1, e)$, soluție a ecuației $f(x) = x$, notăm: $S(\alpha) = \{(x, y) | \alpha \leqslant x \leqslant e \text{ și } f(x) \leqslant y \leqslant x\}$. Calculați aria lui $S(\alpha)$.

9. Fie $f: (-1, 1) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.

a) Arătați că f este bijectivă și calculați f^{-1}.

b) Fie $S = \{(x, y) | 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1 \text{ și } f^{-1}(x) \leqslant y \leqslant f(x)\}$. Calculați aria lui S.

10. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.

a) Arătați că $f(x) + f(-x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Calculați: $\int_{-3}^{3} f(x)dx$.

c) Fie $S = \{(x, y) | 0 \leqslant x \leqslant 1,\ f(x) \leqslant y \leqslant 1\}$. Calculați aria lui S și volumul corpului de rotație obținut prin rotirea lui S în jurul axei Ox.

11. O sferă și un cub au fiecare aceeași arie totală, S. Care are volumul mai mare?
Indicație. Se calculează în funcție de S raza sferei și latura cubului.

12. Reprezentați și calculați aria subgraficului Γ_f:

a) $f: [-2, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{4x^2}{|x+1| + |x-1|}$;

b) $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = |\sin x - \sqrt{3} \cdot \cos x|$.

13. Reprezentați și calculați aria mulțimii D din semiplanul superior ($y \geqslant 0$), mărginită de:
a) parabola de ecuație $y = -x^2 + 2x + 3$ și axa Ox;
b) parabola de ecuație $y^2 = x$, axa Ox și dreapta de ecuație $x + y = 2$.

Teme de sinteză pentru pregătirea examenului de bacalaureat

Tema 1 – Tipuri de raționament logic:

inducția matematică (clasa a IX-a)

1. Folosind metoda inducției matematice demonstrați următoarele egalități:

a) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2 + 3 + \ldots + 2n = n(2n + 1)$

b) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

2. Demonstrați prin inducție matematică:

a) $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$, $\forall\, n \geqslant 1$.

b) $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \ldots + (n-1)n^2 = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$, $\forall\, n \geqslant 1$.

3. Calculați $S_1 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n + 1)$.

4. a) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $\frac{1}{k(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+2}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$.

b) Calculați suma $S = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+2)}$, $n \in \mathbb{N}^*$ și verificați prin metoda inducției matematice rezultatul.

5. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $\frac{1}{k(k+3)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+3}$, $k \in \mathbb{N}^*$. Calculați suma $S = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n(n+3)}$, $n \in \mathbb{N}^*$ și verificați prin metoda inducției matematice rezultatul obținut.

6. Demonstrați prin inducție matematică:

a) $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}, \forall n \geqslant 1.$

b) Numărul $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ este multiplu de 19, $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Pentru orice $n \geqslant 1$ natural, notăm $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ (citim „n factorial”).

a) Calculați: 1!; 2!; 3!; 4!; 5!;

b) Arătați că $(n + 1)! = n!(n + 1)$;

c) Demonstrați prin inducție matematică egalitatea: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$.

Tema 2 – Metode de numărare:

probleme de numărare (clasa a IX-a); mulțimi finite ordonate; permutări ; aranjamente; combinări; binomul lui Newton; probabilități (clasa a X-a)

1. Determinați câte numere de 2 cifre se pot forma utilizând numai cifre din mulțimea $\{0, 1\}$.

2. Determinați câte submulțimi are o mulțime cu 4 elemente.

3. Calculați în câte moduri se pot permuta 3 elemente distincte.

4. Determinați câte submulțimi nevide are o mulțime cu 6 elemente.

5. Fie mulțimea $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
a) Determinați câte submulțimi cu 3 elemente are mulțimea M.
b) Determinați câte numere cu 6 cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii M.

6. Calculați valoarea sumei $C_9^1 + 2C_9^2 + 3C_9^3 + ... + 9C_9^9$.

7. Determinați câte triunghiuri se pot forma utilizând segmente având lungimile din mulțimea $\{1, 2, 3\}$.

8. Determinați câte numere de forma $\overline{ab}$, cu $a < b$, există.

9. Determinați câte submulțimi cu 2 elemente are o mulțime cu 9 elemente.

10. Se consideră binomul lui Newton $\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{2x}\right)^n$. Dacă suma primilor trei coeficienți binomiali este 22, determinați n.

11. Determinați numerele naturale m și n, $n \leqslant m$, știind că $\begin{cases} A_m^n - 120 = 0 \\ 20P_n = A_m^n \end{cases}$, unde A_m^n sunt aranjamente de m elemente luate câte n și P_n reprezintă permutările a n elemente.

12. Determinați probabilitatea ca un element din mulțimea $\{1, 2, ..., 10\}$ să fie număr par.

13. Calculați probabilitatea ca un element al mulțimii $\{1, 2, 3, ..., 10\}$ să fie impar.

14. Calculați probabilitatea ca un element din mulțimea $\{1, 2, ..., 5\}$ să fie număr par.

15. Calculați probabilitatea ca un număr n din mulțimea $\{0, 1, 2, ..., 100\}$ să fie pătrat perfect.

16. Calculați probabilitatea ca un element din mulțimea $\{1, 2, ..., 12\}$ să fie impar.

17. Calculați probabilitatea ca un element din mulțimea $\{1, 2, ..., 10\}$ să fie număr prim.

18. Calculați probabilitatea ca un element din mulțimea $\{1, 2, ..., 10\}$ să nu fie divizibil cu 3.

19. Calculați probabilitatea ca un element din mulțimea $\{1, 2, ..., 9\}$ să fie număr prim.

20. Determinați probabilitatea ca un element x din mulțimea $\{-2, 0, 1, 2, 3\}$ să fie soluție a ecuației $x^3 - 3x + 2 = 0$.

21. Calculați probabilitatea ca un element al mulțimii $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ să fie soluție a ecuației: $x^3 - 4x = 0$.

22. Calculați probabilitatea ca un element n din mulțimea $\{1, 2, 4, 8\}$ să verifice relația $\log_2 n + \log_{2n} 2 \in (0, \ 2)$.

23. Calculați probabilitatea ca un element al mulțimii $\{1, 2, 3, ..., 10\}$ să se dividă cu 6.

Tema 3 – Mulțimi de numere:

mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ (clasele a IX-a și a X-a); mulțimea numerelor complexe $\mathbb{C}$ (clasa a X-a)

1. Dacă $x \in [1,2]$, calculați expresia $\left(\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\right)^2$.

2. Calculați $\log_2 3 \cdot \log_3 4$.

3. Calculați $\log_2 3 + \log_2 4 - \log_2 6$.

4. Verificați care dintre numerele următoare este mai mare: 2^4 sau 4^2.

5. Calculați $i^4 - i^2$.

6. Determinați conjugatul numărului complex $z = 5 - 6i$.

7. Determinați în ce cadran este argumentul numărului complex $z = -1 - i$.

8. Determinați partea reală a numărului $(1 + i)(1 - 2i)$.

9. Determinați modulul numărului complex $z = 4 + 3i$.

10. Determinați conjugatul numărului complex $2i - 1$.

11. Determinați modulul numărului complex $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

12. Calculați i^{2006}.

13. Determinați partea reală a numărului $\frac{1}{2+3i}$.

14. Dacă $z=\frac{1+i}{1-i}$, atunci:

a) Calculați $|z|$.

b) Determinați z^{2006}.

15. Determinați conjugatul numărului complex $\frac{1}{3+i}$.

16. Determinați conjugatul numărului $\frac{1}{4+3i}$.

17. Determinați modulul numărului $\frac{1+i}{1-i}$.

18. Determinați modulul numărului complex $\frac{1-2i}{2-i}$.

19. Calculați $\left|\frac{1}{1+3i}\right|$.

20. Determinați modulul numărului $(2 + 3i)^2$.

21. Determinați partea imaginară a numărului $\frac{1+2i}{2+i}$.

22. Determinați modulul numărului $\frac{2+3i}{1+i}$.

23. Calculați conjugatul numărului $\frac{1}{2+i}$.

Tema 4 – Elemente de calcul matricial și sisteme de ecuații liniare (clasa a XI-a)

1. Se consideră mulțimea $\mathcal{G} = \left\{ A(x) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \,\middle|\, A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

a) Calculați determinantul matricei $A(x)$.

b) Calculați inversa matricei $A(x)$.

c) Determinați matricea $B = 2A(x) - A^2(x)$.

d) Calculați soluția ecuației $A(x)^{2006} = A(1)$.

e) Determinați rangul matricei B, unde $B = A^4 + 3A^2 + 2I_2$.

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2m & 6 & m \\ 5 & 5(m-1) & m \\ m & 8 & m+1 \end{pmatrix}$, unde $m \in \mathbb{R}$. Arătați că $\det A = 5(m^3 - m^2 - 6)$.

3. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calculați A^2.

b) Arătați că matricea A este inversabilă și găsiți A^{-1}.

c) Rezolvați ecuația $AX = B$.

d) Calculați A^n, unde $n \geqslant 1$.

e) Determinați o matrice $C \neq I_2$ cu proprietatea $AC = CA$.

f) Rezolvați sistemul: $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases}$.

4. Fie $\mathcal{M} = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & 5y \\ y & x \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{Z},\ x^2 - 5y^2 = 1 \right\}$.

a) Arătați că $I_2 \in \mathcal{M}$.

b) Arătați că, pentru oricare $A, B \in \mathcal{M}$, $A \cdot B \in \mathcal{M}$.

c) Arătați că, pentru oricare $A \in \mathcal{M}$, există A^{-1} și $A^{-1} \in \mathcal{M}$.

d) Arătați că există $A \in \mathcal{M}$, $A \neq I_2$.

e) Arătați că ecuația $x^2 - 5y^2 = 1$ are o infinitate de soluții în $\mathbb{Z}$.

5. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, precum și submulțimea $G = \{X(a) \mid a \in \mathbb{R} \text{ și } X(a) = I_2 + aA\}$.

a) Verificați că $A^2 = 7A$.

b) Verificați că $I_2 \in G$.

c) Arătați că $X(a)X(b) = X(a + b + 7ab)$.

d) Arătați că $X(a)X\left(-\frac{1}{7}\right) = X\left(-\frac{1}{7}\right)$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

e) Arătați că, dacă $a \neq -\frac{1}{7}$, atunci $X(a)X\left(\frac{-a}{1+7a}\right) = I_2$.

f) Verificați dacă G este grup comutativ.

g) Utilizând metoda inducției matematice, să se demonstreze că $(X(a))^n = X\left(7^{n-1}\left(a+\frac{1}{7}\right)^n - \frac{1}{7}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

6. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, precum și submulțimea $G = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) | AX = XA\}$.

a) Verificați că $A \in G$ și $I_2 \in G$.

b) Găsiți o matrice $T \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea $T \notin G$.

c) Verificați că $A^2 = I_2$.

d) Arătați că, dacă $a, b \in \mathbb{C}$, atunci matricea $B = aI_2 + bA \in G$.

e) Calculați A^{2005}.

f) Verificați dacă G este grup, unde legea de compoziție e dată de adunarea matricelor.

7. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculați determinantul matricei A.

b) Verificați că $A^2 = 3A$.

c) Utilizând metoda inducției matematice, arătați că $A^n = 3^{n-1}A, \forall\ n \in \mathbb{N}^*$.

d) Determinați numărul real m, astfel încât $(I_2 + A)(I_2 + mA) = I_2$.

Fie matricea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

e) Arătați că $X^2 - (a + d)X + (ad - bc)I_2 = 0$.

f) Arătați că, dacă $X^3 = O_2$, atunci $X^2 = O_2$.

8. Pe mulțimea $M = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq -2 \right\}$. Se introduce legea de compoziție „$\circ$“ astfel: $A \circ B = A \cdot B + 2(A + B + I_3)$, unde $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Verificați dacă $A \circ B \in M$, pentru orice A și B din M.

b) Verificați dacă legea este comutativă.

c) Verificați dacă legea este asociativă.

d) Verificați dacă există element neutru pentru legea de compoziție.

e) Determinați ce structură algebrică determină pe M legea „$\circ$“.

f) Calculați $I_3 \circ I_3$.

Tema 5 – Structuri algebrice:

grup; inel; corp (clasa a XII-a)

1. Pe mulțimea $G = (-2, +\infty)$ se definește legea $x * y = xy + 2x + 2y + 2$.

a) Aflați elementul neutru al legii.

b) Aflați simetricul lui 2 în raport cu legea „$*$“.

c) Calculați suma soluțiilor ecuației $\hat{x}^3 = \hat{x}$ în $\mathbb{Z}_6$.

d) Aflați probabilitatea ca un element din $\mathbb{Z}_8$ să fie inversabil.

e) Aflați câte soluții reale are ecuația $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x \circ y = xy + x + y,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $a \circ b = (a + 1)(b + 1) - 1,\ \forall a, b \in \mathbb{R}$.

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $x \circ x < 0$.

c) Rezolvați în $(0, \infty)$ ecuația $(\log_3 x) \circ (\log_4 x) = -1$.

d) Găsiți $x, y \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ astfel încât $x \circ y \in \mathbb{Z}$.

e) Arătați că legea „$\circ$” determină pe intervalul $(-1, \infty)$ o structură de grup.

3. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $a \circ b = \frac{1}{2}(a + b - ab + 1)$.

a) Determinați elementul neutru al legii de compoziție, e.

b) Determinați x pentru care nu există y astfel încât $x \circ y = e$.

4. Pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție internă $x \circ y = 2xy + 2(x + y) + k$, k fiind o constantă reală.

a) Arătați că $x \circ y = y \circ x$, oricare x și y numere reale.

b) Arătați că există o valoare k_0 a lui k pentru care legea este asociativă.

c) Pentru k_0 determinat la **b)**, arătați că există element neutru e.

d) Verificați dacă, pentru oricare x, există y astfel încât $x \circ y = e$.

e) Rezolvați ecuația $x \circ 4 = 5$.

f) Rezolvați sistemul $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = -1 \\ 3x - 2y - 5z = 2 \end{cases}$.

Tema 6 – Inele de polinoame având coeficienți într-un corp comutativ ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$, p prim) (clasa a XII-a)

1. Fie polinomul $f(X) = X^2 + 3X + 9$ cu rădăcinile x_1 și x_2. Notăm cu $S_n = x_1^n + x_2^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculați S_1.

b) Calculați S_2.

c) Calculați restul împărțirii polinomului $X^3 - 27$ la f.

d) Arătați că $x_1^3 = 27$.

e) Calculați S_6.

2. Se consideră polinomul $f = X^4 - X + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

a) Calculați expresia $f - \left(X^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$.

b) Determinați mulțimea $\left\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < \frac{1}{2}\right\}$.

c) Aflați numărul de rădăcini pozitive ale polinomului f.

d) Aflați $a \in \mathbb{C}$ pentru care $f = a(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4)$.

e) Calculați produsul $(2 - x_1)(2 - x_2)(2 - x_3)(2 - x_4)$.

3. Să se determine valoarea polinomului $P = X^2 + \hat{3}X \in \mathbb{Z}_5[X]$ în $\hat{2}$.

4. Se consideră polinomul $f = X^2 + X + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$.

a) Determinați restul împărțirii polinomului $X^3 - 1$ la polinomul f.

b) Calculați expresia $x_1^3 - x_2^3$.

c) Calculați suma $x_1 + x_2 + x_1x_2$.

d) Calculați suma $x_1^{2004} + x_2^{2004}$.

e) Calculați suma $1 + x_1 + x_1^2 + ... + x_1^{21}$.

5. Fie polinomul $f = X^3 + 2X^2 - 3X + 1$ având rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

a) Calculați $x_1 + x_2 + x_3$.

b) Calculați $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.

6. Se consideră polinoamele $f = X^3 + aX^2 + bX + 5$, $a, b \in \mathbb{R}$ și $g = X^3 + X^2 + 2X + 2$. Notăm cu $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile polinomului g.

a) Determinați a și b, știind că polinomul $X + 1$ divide pe f și că $f(3) = -3$.

b) Calculați suma $x_1 + x_2 + x_3$.

c) Aflați restul împărțirii polinomului g la polinomul $X^2 - X$.

d) Aflați numărul de valori reale pe care le poate lua expresia $E = x_1^2 + x_2 + x_3$, când permutăm rădăcinile x_1, x_2 și x_3 în toate modurile posibile.

e) Determinați numărul de soluții reale ale ecuației $g(3^x) = 0$.

Tema 7 – Funcții definite pe $\mathbb{N}$ (șiruri): exemple de șiruri: progresii aritmetice; progresii geometrice (clasa a X-a)

1. Aflați câte submulțimi cu 3 elemente ale mulțimii $\{1, 2, ..., 6\}$ au elementele în progresie aritmetică.

2. Dați exemplu de 3 numere care se află atât în progresie aritmetică, cât și în progresie geometrică.

3. Verificați dacă există 4 numere care se află atât în progresie aritmetică, cât și geometrică.

4. Calculați sumele:

a) $S_1 = 16+17+18+...+143$;

b) $S_2 = 23+28+33+...+158$.

5. Calculați suma: $S = 1+2+2^2+...+2^{63}$.

6. Determinați partea întreagă a numărului: $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^{100}}$.

7. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră $S_n = \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

a) Verificați dacă $\frac{2}{n(n+2)} = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

b) Calculați S_4.

c) Calculați S_n, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

d) Găsiți cel mai mic număr natural nenul n, pentru care $S_n > \frac{14}{15}$.

e) Calculați $S_{30} - S_{20}$.

8. Fie sumele $S_{2n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$, $A_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}$ și $T_n = 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$.

a) Arătați că $S_4 = A_2$.

b) Demonstrați că $S_{2n} = 1+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2n-1}+\left(\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2n}\right)(1-2)$.

c) Arătați că $S_{2n} = T_{2n} - T_n$.

d) Arătați că $A_n = T_{2n} - T_n$.

e) Arătați că $S_{2n} = A_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

f) Arătați că $S_{2n} - \ln 2 = (T_{2n} - \ln 2n) - (T_n - \ln n)$.

9. Se consideră suma: $S_n = \ln\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{3^2}\right)+...+\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

a) Calculați S_2.

b) Calculați S_4.

c) Calculați $\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$

d) Calculați $1-\frac{1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$.

e) Calculați $S_n = \ln\frac{n+1}{2n}$.

Tema 8 – Funcții:

funcția de gradul I; funcția de gradul al II-lea (clasa a IX-a); funcția polinomială; funcția putere; funcția radical; funcția exponențială; funcția logaritmică; funcții trigonometrice directe și inverse; operații cu funcții: operații algebrice (clasele a X-a și a XII-a)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-3x+p$, unde $p \in \mathbb{R}$. Aflați pentru ce valoare a lui p funcția admite un minim egal cu $-\frac{1}{4}$, pentru valoarea p găsită.

2. Să se determine minimul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x - 2$.

3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x$.

a) Rezolvați ecuația $f(x) = 0$.

b) Calculați $f(0)$.

c) Arătați că $f(x) = (x-1)^2 - 1$.

d) Determinați mulțimea $f(\mathbb{R}) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R})\}$.

4. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x-3$. Calculați produsul $f(1)f(2)\cdots f(10)$.

5. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)^{2006} - x^{2006}$.

a) Calculați $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Verificați că $f(-1-x) + f(-1+x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) Arătați că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

d) Rezolvați ecuația $f(x) = 0$.

e) Determinați intervalele de convexitate și de concavitate ale funcției f.

6. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 1$. Determinați imaginea funcției f.

7. Se consideră funcția $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=2x-1$.

a) Calculați suma $f(1)+f(2)+...+f(2005)$.

b) Arătați că mulțimea $\mathbb{Z}-\{f(x) \mid x\in\mathbb{Z}\}$ este infinită.

c) Verificați dacă, $x \neq y \in \mathbb{Z}$, atunci $f(x) \neq f(y)$.

8. Fie funcția $f(x) = \log_3(3-2x)$, $f: D \to \mathbb{R}$.

a) Determinați D, domeniul maxim de definiție al funcției f.

b) Rezolvați ecuația $\log_3(3-2x) = 0$.

c) Determinați coordonatele punctului de intersecție al graficului funcției f cu axa Ox.

d) Determinați coordonatele punctului de intersecție al graficului funcției f cu axa Oy.

e) Demonstrați că, dacă $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in D$, atunci $\log_3\frac{3-2x_1}{3-2x_2} > 0$.

f) Calculați $f(1) \cdot f(0) \cdot f(-3)$.

Tema 9 – Studiul proprietăților funcțiilor folosind analiza matematică:

limite de funcții (asimptote); continuitate; derivabilitate; reprezentarea grafică a funcțiilor (clasa a XI-a)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x$.

a) Calculați $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

c) Determinați câte puncte de extrem local are funcția f.

d) Determinați câte puncte de inflexiune are graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 1 - x$.

a) Calculați $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Determinați câte puncte de extrem are funcția f.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

d) Determinați asimptota funcției la $-\infty$.

3. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - \dfrac{x}{e}$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

b) Calculați $f'(x)$.

c) Calculați valoarea maximă a funcției f.

d) Verificați dacă funcția f este concavă sau convexă.

e) Determinați soluțiile din intervalul $(0, \infty)$ pentru inecuația $x^e \leqslant e^x$.

4. Aflați pentru ce valoare a parametrului real a, funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}, & x > 1 \\ ax^2, & x \le 1 \end{cases}$ este continuă pe $\mathbb{R}$.

5. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3+x-1}{x^2+1}$.

a) Arătați că $f(x) = x - \dfrac{1}{x^2+1}, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Determinați asimptotele funcției f.

c) Calculați $f'(x)$.

d) Arătați că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

e) Găsiți numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcției f.

f) Calculați $\int_{-1}^{0} f^2(x)dx$.

6. Se consideră funcția $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)x}$.

a) Calculați expresia $f(x) + \dfrac{1}{(x+1)} - \dfrac{1}{x}$, $x \in [0, \infty)$.

b) Calculați $f'(x)$, $x \in [0, \infty)$.

c) Determinați asimptota la graficul funcției f către $+\infty$.

d) Calculați valoarea sumei $f(1) + f(2) + \ldots + f(2006)$.

e) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}(f(1) + f(2) + \ldots + f(n))$.

7. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-3)(x+3)$.

a) Calculați suma soluțiilor ecuației $f(x)=0,\ x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați numărul soluțiilor ecuației $f'(x)=0,\ x\in\mathbb{R}$.

c) Determinați numărul punctelor de extrem local ale funcției f.

d) Calculați $f(x)-x^2$.

e) Determinați valoarea minimă a funcției f pe $\mathbb{R}$.

8. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=xe^x$.

a) Calculați $f'(x)$.

b) Determinați mulțimea $\{x\in\mathbb{R} \mid f'(x)>0\}$.

c) Determinați valoarea minimă a lui f.

d) Determinați dacă graficul funcției f are asimptote.

9. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x-x+1$.

a) Calculați $f'(x),\ x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați câte puncte de extrem local are funcția f.

c) Determinați asimptota la graficul f către $-\infty$.

d) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

10. Fie polinomul de gradul al 19-lea, $f_0(x)=\dfrac{x^{20}-1}{x-1}$ și

$f_{n+1}(x)=f_n'(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ și $\forall n\in\mathbb{N}$.

a) Calculați $f_0(1)$.

b) Calculați $f_1(0)$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(n)$.

d) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_0(0)+f_1(0)+\ldots+f_n(0)}{n}$.

11. Se consideră funcția $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{4x}{(x-1)^2(x+1)^2}$.

a) Calculați $f'(x)$.

b) Calculați $f(x)-\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

c) Calculați $f(2)+f(3)+\ldots+f(100)$.

d) Determinați ecuația asimptotei către ∞ la graficul funcției f.

Tema 10 – Primitive, integrale definite, aplicații ale integralei definite (clasa a XII-a)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^{2006}-x+1$.

a) Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

c) Determinați câte puncte de inflexiune are graficul funcției.

d) Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

e) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)\,dt}{x^{2007}}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x^2+x}$.

a) Dacă $f(x)=\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{x+1}$, calculați $a+b$.

b) Dacă $\int\limits_{2005}^{2006} f'(x)\,dx=\dfrac{A}{2005\cdot 2006\cdot 2007}$, calculați A.

c) Determinați ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției.

d) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$.

e) Dacă $\int\limits_1^2 f(x)\,dx=\ln B$, aflați B.

3. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x-x$.

a) Calculați $f'(x)$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

c) Calculați $\int_0^1 e^x\,dx$.

d) Aflați câte puncte de extrem local are funcția f.

e) Calculați $\int\limits_1^2 f(2x)\,dx-\int\limits_1^2 f(x)\,dx$.

4. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}$.

a) Calculați expresia $f(x)-2+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}$, $x\in[0,\infty)$.

b) Determinați asimptota orizontală către $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Calculați $f'(x)$, $x\in[0,\infty)$.

d) Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

e) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$.

Tema 11 – Ecuații, inecuații și sisteme de ecuații (clasele IX-XII)

1. Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $x^2 - x + 20 = 0$.

2. Determinați câte soluții reale are ecuația $x^2 + x + 1 = 0$.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $3^{x^2} = 3^9$.

4. Determinați mulțimea soluțiilor ecuației $2(1 + x) = 3 + 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

5. Dacă x_1, x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - 12x + 4 = 0$ și $S = \frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}}$, Calculați S.

6. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $4^x = 16$.

7. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_2(x^2 + 5) = 3$.

8. Determinați câte soluții reale are ecuația $2^3 = 4^{2x-1}$.

9. Rezolvați ecuația $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$.

10. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x^6 = 1$.

11. Determinați soluția ecuației $\sqrt{2^x} = 512$.

12. Determinați soluția ecuației $4C_x^3 = 5C_{x+1}^2$.

13. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2^{x^2} = 2^{x^3}$.

14. Determinați numărul soluțiilor ecuației $(x + 1)^4 = (x + 1)^2$ în mulțimea $[0, \infty)$.

15. Dacă z_1, z_2, z_3 sunt soluțiile ecuației $z^3 = 1$, Calculați $z_1 + z_2 + z_3$.

16. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2^{x^2} = 2^1$.

17. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $3^{2x^2-1} = 27$.

18. Pe $\mathbb{R}$ se considera legea de compoziție „$\circ$" definită prin $x \circ y = x + y - 9$. Se știe că legea este asociativă.

  a) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $4^x \circ 2^x = 11$.

  b) Calculați suma soluțiilor reale ale ecuației $\sqrt{x-2} \circ \sqrt{102-x} = 2$.

19. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2^{x^2-1} + 2^{1-x^2} = 2$.

20. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2^{x^2} = 8$.

21. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Notăm cu x_1 și x_2 soluțiile ecuației $f(x) = 0$.

  a) Calculați $f(-3)$.

  b) Calculați $x_1 + x_2$.

  c) Calculați x_1x_2.

  d) Rezolvați inecuația $f(x) \geqslant 0$.

  e) Găsiți un element $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, pentru care $f(a) \in \mathbb{N}$.

  f) Calculați produsul $f(0)f(1)...f(2005)$.

22. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x - 7$. Notăm cu $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ soluțiile ecuației $f(x) = 0$.

  a) Determinați x_1 și x_2.

  b) Arătați că $x_1 + x_2 \in \mathbb{Z}$ și $x_1x_2 \in \mathbb{Z}$.

  c) Utilizând metoda inducției matematice, arătați că $x_1^n + x_2^n \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$.

  d) Rezolvați inecuația $f(t) < 0$, $t \in \mathbb{R}$.

  e) Determinați $y \in \mathbb{R}$ pentru care $f(y)$ ia valoarea minimă.

  f) Găsiți $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ astfel încât $f(a) \in \mathbb{N}$.

Tema 12 – Calcul analitic și vectorial în geometria plană:
coliniaritate, concurență, paralelism (clasele IX-XI)

1. Într-un reper cartezian considerăm punctele $A(1, -1)$, $B(3, -3)$ și $C(1, 1)$.
a) Determinați panta dreptei AB.
b) Scrieți ecuația dreptei AB.
c) Calculați distanța de la A la BC.
d) Calculați aria triunghiului ABC.
e) Calculați raza cercului circumscris triunghiului ABC.
f) Calculați raza cercului înscris triunghiului ABC.

2. Într-un reper cartezian considerăm punctele $A(1, -1)$, $B(3, -3)$ și $C(1, 1)$.
a) Determinați coordonatele mijlocului segmentului BC.
b) Calculați lungimea segmentului BC.
c) Scrieți ecuația medianei din A a triunghiului ABC.
d) Scrieți ecuația mediatoarei laturii BC a triunghiului ABC.
e) Scrieți ecuația înălțimii din A a triunghiului ABC.
f) Determinați câte paralelograme putem forma utilizând vârfurile triunghiului dat C, A, B în această ordine.

3. Calculați perimetrul triunghiului ABC, având vârfurile $A(1, 0)$, $B(2, 0)$ și $C(0, 1)$.

4. Calculați aria triunghiului ABC, având vârfurile $A(1, 0)$, $B(2, 0)$ și $C(0, 1)$.

5. Determinați pentru ce valoare reală a lui m punctele $A(1, m)$, $B(3, 5)$ și $C(-1, -3)$ sunt coliniare.

6. Determinați pentru ce valori reale ale lui a și b punctul $A(a, b)$ este mijlocul segmentului BC, unde $B(-1, 2)$ și $C(2, 4)$.

7. Calculați $a \in \mathbb{R}$ știind că dreptele $d: x - 2y + 1 = 0$ și $d: ax + 3y = 0$ sunt paralele.

8. Determinați distanța de la punctul $A(2, 4)$ la dreapta $d: x - y + 1 = 0$, în sistemul cartezian xOy.

9. Determinați ecuația dreptei suport a înălțimii triunghiului ABC dusă din vârful A, unde $A(-1,0)$, $B(2,1)$ și $C(3,-1)$.

10. Determinați a dacă dreptele $d_1: x + y - 7 = 0$ și $d_2: 2x - ay - 14 = 0$ sunt paralele.

11. Determinați ecuația unei drepte paralele cu dreapta $2x + y = 3$.

12. Găsiți ecuația unei drepte perpendiculare pe dreapta $x + y + 2 = 0$.

13. Calculați distanța de la punctul $A(0, 2)$ la dreapta $d: x + 2y - 4 = 0$ în sistemul cartezian xOy.

14. Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru ca vectorii $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{v}_2 = a\vec{i} + 6\vec{j}$ să fie perpendiculari.

15. Dacă M este mijlocul segmentului AB, calculați $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$.

16. În reperul cartezian $\{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ se consideră punctul A de abscisă 2, situat pe Ox, vectorul $\overrightarrow{OC}(-2,2)$ și punctul $B(2,2)$.
a) Scrieți în funcție de versorii axelor de coordonate $\vec{i}, \vec{j}$, vectorul $\overrightarrow{AC}$.
b) Determinați ecuația dreptei AB.
c) Calculați $\cos(\widehat{AOC})$.
d) Calculați aria triunghiului AOC.
e) Determinați coordonatele centrului de greutate al triunghiului BOC.
f) Determinați modulul vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.

Tema 13 – Trigonometrie și aplicații ale trigonometriei în geometria plană (clasa a IX-a)

1. Calculați $\sin\frac{\pi}{3}$.

2. Calculați $\mathrm{tg}\pi$.

3. Calculați $\sin 30° - \cos 60° + \cos 90°$.

4. Calculați $\sin^2 30° + \cos^2 30°$.

5. Calculați $\mathrm{tg}\frac{\pi}{3} \cdot \mathrm{ctg}\frac{\pi}{3}$.

6. Dacă $\sin x = \frac{1}{3}$, Calculați $|\cos x|$.

7. Calculați $\sin 45° + \sin(-45°)$.

8. Calculați $\sin 30° - \cos 60°$.

9. Calculați $\sin\frac{\pi}{4} + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

10. Calculați $\sin 0° + \cos 0° - \mathrm{tg}^2 0°$.

11. Calculați $\mathrm{tg}30° + \mathrm{tg}45°$.

12. Determinați cel mai mic element din mulțimea $\{\sin 0°, \cos 0°\}$.

13. Un triunghi are măsurile unghiurilor $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ în progresie aritmetică. Determinați măsura unghiului $\widehat{B}$.

14. Calculați aria unui triunghi echilateral cu latura de lungime $\sqrt{2}$.

15. Cât este latura c a triunghiului ABC știind că $a = 5$, $b = 3$ și $\cos\widehat{C} = -\frac{1}{15}$?

16. Un triunghi ABC are laturile $AB = 3$, $BC = 4$ și $AC = 5$. Aflați $\cos\widehat{B}$.

17. Un triunghi are măsurile unghiurilor A, B, C în progresie geometrică de rație 3. Determinați măsura unghiului B.

18. Într-un triunghi ABC, se cunosc $AB = 1$, $BC = \sqrt{3}$ și $CA = 2$. Determinați $\cos\widehat{A}$.

19. Calculați aria unui triunghi cu laturile având lungimile 3, 3, 2.

20. Calculați aria unui triunghi cu laturile având lungimile 3, 4, 5.

21. Calculați aria triunghiului ABC, dacă $AB = 6$, $AC = 7$ și $\sin(\hat{A}) = \frac{1}{3}$.

22. Calculați aria triunghiului ABC dacă $a = 8$, $b = 5$ și $\mu(\widehat{C}) = \frac{\pi}{4}$.

23. Determinați aria unui triunghi ABC dacă $AB = 2$, $AC = 3$ și $\mu(B\hat{A}C) = \frac{\pi}{6}$.

24. Calculați aria unui triunghi echilateral cu perimetrul 6.

25. Calculați raza cercului înscris în triunghiul cu laturile de lungimi 2, 3 și 4.

26. Un cub $ABCDA'B'C'D$ „plin“ cu apă, așezat cu fața $ABCD$ „în jos“ se rotește în jurul axei determinate de centrele fețelor $ADD'A'$ și $BCC'B'$ astfel încât poziția finală a feței $ABCD$ a cubului să facă un unghi de 45° cu poziția sa inițială. Știind că latura cubului este de 4 cm, Aflați câți cm^3 de apă rămân în cub după rotație.

Indicații și răspunsuri

Grupuri

pag.7. 2.

$\vee$	1	2	3	4	6	12
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	2	2
3	1	1	3	1	3	3
4	1	2	1	4	2	4
6	1	2	3	2	6	6
12	1	2	3	4	6	12

$\wedge$	1	2	3	4	6	12
1	1	2	3	4	6	12
2	2	2	6	4	6	12
3	3	6	3	12	6	12
4	4	4	12	4	12	12
6	6	6	6	12	6	12
12	12	12	12	12	12	12

3.

$\circ$	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	f_2	f_3
f_2	f_2	f_3	f_1
f_3	f_3	f_1	f_2

4. Pentru fiecare dintre cele 9 poziții ale tablei unei operații pe M avem 3 posibilități, deci pe M pot fi definite 3^9 legi de compoziție. **5.** Când $A = \{1, 2, 3\}$, H are 6 elemente.

pag. 13. 1. $a = 0$ sau $a = 1$. **2.** Cum $x = e^{\ln x}$, unde e este baza logaritmilor naturali, avem $x * y = e^{\ln x \cdot \ln y}$, de unde rezultă ușor că legea de compoziție „$*$“ este comutativă și asociativă. Elementul neutru este numărul e. Dacă $x \in (0, \infty)$, $x \neq 1$, atunci x este simetrizabil și $x' = e^{1/\ln x}$. **3.** Legea de compozițe „$*$“ este comutativă, are pe $\frac{1}{2}I_2$ ca element neutru și nu este asociativă. **4.** Nu admite element neutru. **5.** (i) Pentru $b \in (-1, 1)$, funcția $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x+b}{1+bx}$ este strict crescătoare pe $[-1, 1]$ și $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$. **6.** $a = 1$, $b = -1$ sau $a = b = 0$. **8.** (iii) Orice matrice $F = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{R}$. **12.** Inducție după m și n. **13.** Fie $b \in M$ astfel încât $a = aba$. Dacă $y \in M$, există $x \in M$ astfel încât $y = axa$. Fie $e = ab$ și $f = ba$. Avem $ey = abaxa = axa = y$ și $yf = axaba = axa = y$ și, în particular, $ef = f$, $ef = e$. Așadar $e = f$ este elementul neutru. **14.** (i) 3^9; (ii) 3^6; (iii) 3^5.

pag. 20. 1. $n\hat{a} = \underbrace{\hat{a}+\hat{a}+\ldots+\hat{a}}_{n\text{ ori}} = \widehat{\underbrace{a+a+\ldots+a}_{n\text{ ori}}} = \widehat{na} = \hat{0}$. **2.** $\hat{1}^{-1} = \hat{1}, \hat{3}^{-1} = \hat{3}, \hat{5}^{-1} = \hat{5}, \ \hat{7}^{-1} = \hat{7}$. **3.** $x \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}, \hat{7}\}$.

4. b) Cum $1+2+\ldots+n-1 = \dfrac{(n-1)n}{2}$ și $\dfrac{n-1}{2} = q \in \mathbb{N}^*$ când n este impar, avem $\hat{1}+\hat{2}+\ldots+\widehat{n-1} = \widehat{qn} = \hat{0}$.
6. $r = 4$. **7.** Avem $\hat{2} = \hat{2}^5$, de unde $\hat{2}^{37} = \hat{2}^{5\cdot7+2} = \left(\hat{2}^5\right)^7 \cdot \hat{2}^2 = \hat{2}^7\hat{2}^2 = \hat{2}^9 = \hat{2}^5\hat{2}^4 = \hat{2}^5 = \hat{2}$. Termenii șirului $\hat{a}, \hat{a}^2, \ldots, \hat{a}^i, \ldots$ nu pot fi distincți pentru că $\mathbb{Z}_n$ este mulțime finită, deci există $s, t \in \mathbb{N}^*$, $s < t$ astfel încât $\hat{a}^s = \hat{a}^t$. **8.** Avem $10 \equiv -1 \pmod{11}$, deci $10^i \equiv (-1)^i \pmod{11}$, de unde $c_0 + c_1 10 + c_2 10^2 \equiv c_0 - c_1 + c_2 \pmod{11}$.

9. Avem $\hat{7}^4 = \hat{1}$ și deci $\hat{7}^{82} = \hat{7}^{4\cdot20+2} = \left(\hat{7}^4\right)^{20}\hat{7}^2 = \hat{9}$. Aplicând ex. 7, există $s < t$ astfel încât $\hat{a}^s = \hat{a}^t$ și înmulțind cu $\left(\hat{a}^{-1}\right)^s$, obținem $\left(\hat{a}^m\right) = \hat{1}$ cu $m = t - s$. **10.** Dacă a are aceeași divizori primi cu n, există $s \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n \mid a^s$ și atunci $\hat{a}^s = \widehat{a^s} = \hat{0}$. **11.** Se folosește faptul că un număr $p > 1$ este prim dacă și numai dacă din $p \mid ab$ rezultă $p \mid a$ sau $p \mid b$. **12.** Avem $\hat{a}^2 = \hat{0}$ dacă $a = 3k$ și $\hat{a}^2 = \hat{1}$ dacă $a = 3k + 1$ sau $a = 3k + 2$. Dacă există $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $3a^2 + 2 = b^2$, atunci $\hat{2} \neq \hat{b}^2 = \widehat{b^2} = \widehat{3a^2+2} = \hat{3}\hat{a}^2 + \hat{2} = \hat{2}$. Contradicție. **13.** $\hat{a}^3 \in \left\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{6}\right\}$. Dacă există $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $7a^3 + 2 = b^3$, atunci $\hat{2} \neq \hat{b}^3 = \widehat{7a^3} + \hat{2} = \hat{2}$. Contradicție.

pag.26. 3. $a = b = 1$. **4.** Elementul neutru este numărul 0, iar dacă $x \in G$, atunci simetricul său este $x' = -x$. Operația „$*$“ este asociativă și comutativă.
11. Avem $xyxy = xxyy$. Înmulțind la stânga cu x^{-1} și la dreapta cu y^{-1}, obținem $yx = xy$.
12. Avem $(xy)^2 = e = ee = x^2y^2$ și se aplică ex. 11. **13.** Elementul neutru este a^{-1} și simetricul lui x este $x' = x^{-1}a^{-2}$.
14. Fie $x'' \in G$ astfel încât $x'' * x' = e$. Avem $x * x' = e * (x * x') = (x'' * x') * (x * x') = x'' * (x' * x) * x' = x'' * e * x' = x'' * x' = e$ deci x' este simetric la stânga și la dreapta pentru x. Din $x * e = x * (x' * x) = (x * x') * x = e * x = x$ rezultă că e este element neutru și la dreapta. **15.** Fie $a, b \in G$. Există $e, y \in G$ astfel încât $ae = a$ și $b = ya$. Avem $be = ya \cdot e = ya = b$, deci e este element neutru la dreapta. Analog există $e' \in G$ astfel încât $e'b = b$, $\forall\, b \in G$. Evident $e' = e =$ elementul neutru al lui G. Dacă $a \in G$ există $a', a'' \in G$ astfel încât $a'a = e = aa''$ și cum $a' = a'e = a'(aa'') = (a'a)a'' = ea'' = a''$, rezultă că există a^{-1} și $a^{-1} = a' = a''$. **17.** Se observă că $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -ba^{-1}c^{-1} \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} \in G$ și atunci $(G, \cdot)$ este grup. **18.** Avem $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$, de unde rezultă că $(G, \cdot)$ este grup. **20.** Se observă că $A_\alpha^{-1} = A_{-\alpha}$. **22.** Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $|A| \neq 0$. Atunci pentru $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avem $B = A^{-1} \Leftrightarrow AB = I_2 \Leftrightarrow BA = I_2$. Așadar, $A^{-1} = {}^tA \Leftrightarrow A\,{}^tA = I_2 \Leftrightarrow {}^tAA = I_2$, ceea ce revine la afirmațiile din enunțul exercițiului.

pag.30. 6. Din $\sigma \circ x = \pi$ rezultă $x = \sigma^{-1} \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

pag.34-37. 1. Fie A_a matricea din G asociată lui $a \in \mathbb{R}$. Avem $A_aA_b = A_{a+b}$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ și $A_a^{-1} = A_{-a}$, de unde rezultă că $(G, \cdot)$ este grup. Funcția $f : \mathbb{R} \to G$, $f(a) = A_a$ este bijectivă și $f(a + b) = A_{a+b} = A_aA_b = f(a)f(b)$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$. Rezultă că $(\mathbb{R}, +) \simeq (G, \cdot)$. **2.** Avem $f\left((a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})\right) = f\left(ac+2bd+(ad+bc)\sqrt{2}\right) = \begin{pmatrix} ac+2bd & ad+bc \\ 2(ad+bc) & ac+2bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 2d & c \end{pmatrix} = f(a+b\sqrt{2}) \cdot f(c+d\sqrt{2})$. **4.** Se verifică cu mijloacele analizei matematice că f este funcție bijectivă. Pentru $x, y \in G$ avem $f(x * y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{1+y}{1-y}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y} = f(x) + f(y)$. **8.** (i) Fie $x', y' \in G$. Există $x, y \in G$ astfel încât $x' = f(x)$, $y' = f(y)$. Avem $x'y' = f(x)f(y) = f(xy) = f(yx) = f(y)f(x) = y'x'$. (ii) $x'^3 = f(x)^3 = f(x)f(x)f(x) = f(x^3) = f(e) = e'$.

11. (i)

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

(ii) Dacă $f : G \to \mathbb{Z}_4$ este izomorfism, fie $x \in G$ astfel încât $f(x) = \hat{3}$. Avem $\hat{2} = \hat{3} + \hat{3} = f(x) + f(x) = f(x^2) = f(e) = \hat{0}$. Contradicție.

12. Fie G un grup cu patru elemente. Dacă $x^2 = e$, $\forall\, x \in G$, atunci $(G, \cdot) \simeq (\mathcal{K}, \circ)$ (vezi ex. 11). În caz contrar, există $a \in G$ astfel încât $a^2 \neq e$. Fie $b = a^2$. Evident $b \neq e$ și $b \neq a$ și fie $c = ab$. Avem $c \neq e$, $c \neq a$, $c \neq b$, deci $G = \{e, a, b, c\}$. Acum tabla operației lui G se completează astfel:

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

și comparând cu tabla grupului $(\mathbb{Z}_4, +)$ se deduce că $(G, \cdot) \simeq (\mathbb{Z}_4, +)$.

Test 1. 1. $x, y \in M$, $x-1>0$, $x-1 \neq 1$; $y-1>0$, $y-1 \neq 1$, $1+(x-1)^{\ln\sqrt{y-1}} > 1$, $\ln\sqrt{y-1} \neq 0$; $1+(x-1)^{\ln\sqrt{y-1}} \neq 2$; $x*y \neq y*x$; $1+(x-1)^{\ln\sqrt{y-1}} = 1+(y-1)^{\ln\sqrt{x-1}}$; $(x-1)^{\frac{1}{2}\ln(y-1)} = (y-1)^{\frac{1}{2}\ln(x-1)}$; $\frac{1}{2}\ln(y-1)\cdot\ln(x-1) = \frac{1}{2}\ln(x-1)\cdot\ln(y-1)$. **2.** iii) $e_* = -I_3$. **3.** $x*y = \frac{1}{2}(xy+2x+2y) = \frac{1}{2}(x+2)(y+2)-2$; $x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{-2\}$, $x+2 \neq 0$, $y+2 \neq 0$; $x*y = \frac{1}{2}(x+2)(y+2)-2 \neq -2$; $x*y = \frac{1}{2}(x+2)(y+2) = y*x$; $(x*y)*z = x*(y*z)$; $x*e = e*x = x$, $e=0$, $\forall x, y \in \mathbb{Q}\setminus\{-2\}$; $x*x' = x'*x = e$, $x' = -\frac{2x}{x+2} = -2+\frac{4}{x+2} \neq -2$.
4. $x, y \in G$, $x>a$, $y>a$; $k(x-a)(y-a)+a>a$; $x*y \in G$; $(x*y)*z = x*(y*z)$, $\forall x, y, z \in G$; $\exists e \in G$, $x*e = e*x = x$, $e = a+\frac{1}{k} \in G$; $x*x' = x'*x = e$, $x' = a+\frac{1}{k^2(x-a)} > a$; $x*y = y*x$, $\forall x, y \in G$; $f: G \to \mathbb{R}$, $f(x) = k(x-a)$ bijecție.

Test 2. 1. a) $e_{\cdot} = I_3$. **3.** $x*y = (x-k)(y-k)+k$; $x-k \geqslant 0$, $y-k \geqslant 0$, $x*y \geqslant k$; $e*x = x*e = x$; $e = 2k \in M$. **4.** $\forall A_1, A_2 \in G$, $A_1 = \begin{pmatrix} x_1+4y_1 & 2y_1 \\ -7y_1 & x_1-4y_1 \end{pmatrix}$, $x_1 \in \mathbb{R}^*$, $y_1 \in \mathbb{R}$, $x_1^2-2y_1^2 = 1$,
$A_2 = \begin{pmatrix} x_2+4y_2 & 2y_2 \\ -7y_2 & x_2-4y_2 \end{pmatrix}$, $x_2 \in \mathbb{R}^*$, $y_2 \in \mathbb{R}$, $x_2^2-2y_2^2 = 1$;

$$A_1A_2 = \begin{pmatrix} x_1x_2+2y_1y_2+4(x_1y_2+x_2y_1) & 2(x_1y_2+x_2y_1) \\ -7(x_1y_2+x_2y_1) & x_1x_2+2y_1y_2-4(x_1y_2+x_2y_1) \end{pmatrix};$$

$x = x_1x_2+2y_1y_2$, $y = x_1y_2+x_2y_1$, $x^2-2y^2 = (x_1x_2+2y_1y_2)^2-2(x_1y_2+x_2y_1)^2 = (x_1^2-2y_1^2)(x_2^2-2y_2^2) = 1$, $A_1A_2 \in G$; $(A_1A_2)A_3 = A_1(A_2A_3)$, $\forall A_1, A_2, A_3 \in G$; $E = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\det A = 1 \neq 0$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} x-4y & -2y \\ 7y & x+4y \end{pmatrix} \in G$, $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, $\forall A \in G$. Deci $(G, \cdot)$ este grup abelian.

Probleme de tip bacalaureat

1. a) $I_2 = H(0)$. **b)** $2A$.

c) $x, y > -\frac{1}{2} \Rightarrow (2x+1)(2y+1) > 0 \Rightarrow 4xy+2x+2y > -1 \Rightarrow 2xy+x+y > -\frac{1}{2}$.

d) $H(x)H(y) = (I_2+xA)(I_2+yA) = I_2+(x+y)A+2xyA = H(x+y+2xy)$.

e) Se obține din punctele anterioare și proprietățile înmulțirii matricelor; $(H(x))^{-1} = H\left(\frac{-x}{1+2x}\right)$ și $\frac{-x}{1+2x} > -\frac{1}{2}$ pentru $x > -\frac{1}{2}$.

f) $f: H \to \mathbb{R}$, $f(H(x)) = \ln(2x+1)$ este izomorfismul căutat.

g) Aplicând izomorfismul f în ambii membri obținem $\ln(2x+1) = \ln(2^{2004}\cdot 1004!)$, de unde $x = \frac{2^{1004}\cdot 1004!-1}{2}$.

2. a) Din calcul legea este asociativă. **b)** $(x \circ y)-(x-2)(y-2) = 2$. **c)** $e = 3$.

d) Din $x \circ y = x$ și din **b)** rezultă $(x-2)(y-2) = x-2$, $\forall y \in \mathbb{R}$, de unde $x = 2$.

e) Din **b)** deducem că: $x_1 \circ x_2 \circ ... \circ x_n = (x_1 - 2)(x_2 - 2)...(x_n - 2) + 2$ (inducție matematică); $x \in \{-2004, -2003, ..., 0, 1, 2\}$.

3. a) Notăm $X(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}) = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{c} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$; $I_3 = X(\hat{0}, \hat{0}, \hat{0}) \in \mathcal{M}_p$.

b) Se obține $X(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}) \cdot X(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = X(\widehat{a+x}, \widehat{b+y+az}, \widehat{c+z}) \in \mathcal{M}_p$.

c) Din **b)**, prin inducție matematică, se obține $X^n(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}) = X\left(\widehat{na}, \widehat{nb + \frac{n(n-1)ac}{2}}, \widehat{nc}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și deoarece p este impar, avem $\widehat{pa} = \widehat{pb + \frac{p(p-1)ac}{2}} = \widehat{pc} = \hat{0}$, deci $X^p(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}) = I$.

d) Utilizând egalitatea de la **b)**, alegem $\hat{a}, \hat{c}, \hat{x}, \hat{z}$ astfel încât $\widehat{az} \neq \widehat{xc}$. De exemplu, $X(\hat{0}, \hat{1}, \hat{2})$ și $X(\hat{1}, \hat{1}, \hat{2})$ nu comută.

e) Din $A^p = I$ rezultă $A^{-1} = A^{p-1} \in \mathcal{M}_p$ și din **a)**, **b)**, **c)**, **d)**, proprietățile înmulțirii matricelor și ale operațiilor din $\mathbb{Z}_p$, deducem că $(\mathcal{M}_p, \cdot)$ este grup necomutativ.

4. a) Calcul direct. **b)** Se arată că, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$, avem $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.

c) $A(x)A(y) = \begin{pmatrix} x & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & 0 & 1-y \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-y & 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy-x-y+1 & 0 & x+y-2xy \\ 0 & 0 & 0 \\ x+y-2xy & 0 & 2xy-x-y+1 \end{pmatrix} = A(2xy-x-y+1)$.

d) Fie $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, $A(x)C = A(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, implică

$\begin{pmatrix} ax + g(1-x) & bx + h(1-x) & cx + i(1-x) \\ 0 & 0 & 0 \\ gx + a(1-x) & hx + b(1-x) & ix + c(1-x) \end{pmatrix} = A(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, de unde rezultă că pentru orice $x \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} x(a-g) + g = x \\ x(b-h) + h = 0 \\ x(c-i) + i = 1-x \\ x(g-a) + a = 1-x \\ x(h-b) + b = 0 \\ x(i-c) + c = x \end{cases}$. Se obține astfel că $a = i = 1$ și că $b = c = g = h = 0$. Din $CA(x) = A(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, mai

rezultă și $d = f = 0$. În aceste condiții $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e \in \mathbb{R}$, deci $\mathcal{P} - \mathcal{N} = \varnothing$ și $\mathcal{M} \cap \mathcal{P} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

5. a) Fie $x, y \in \mathbb{R}$. $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2 = 3(x+1)(y+1) - 1$;

b) Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$; $(x \circ y) \circ z = (3(x+1)(y+1) - 1) \circ z = 3[3(x+1)(y+1) - 1 + 1](z+1) - 1 =$

$=[9(x+1)(y+1)(z+1)-1=3(x+1)[3(y+1)(z+1)-1+1]-1=x\circ(y\circ z)$.

c) $3ex+3x+3e+2=x$ implică $x(3e+2)+3e+2=0$, deci $e=-\dfrac{2}{3}$.

d) $(-1)\circ x=3(x+1)((-1)+1)-1=-1$.

e) Din $x\circ y=-1$, rezultă $3(x+1)(y+1)-1=-1$, deci $(x+1)(y+1)=0$, adică $x=-1$ sau $y=-1$.

f) $\log_2 x\circ\log_2 y=-1$ implică, conform punctului **e)**, $\log_2 x=-1$ sau $\log_2 y=-1$, deci $x=\dfrac{1}{2}$ sau $y=\dfrac{1}{2}$.

6. a) Notăm cu $e\in\mathbb{R}$ elementul neutru al legii; avem $x\circ e=e\circ x=x,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x+e-9=x,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow e=9$. Deci „$\circ$" are element neutru.

b) Notăm cu x' simetricul elementului x față de legea „$\circ$". Atunci $x\circ x'=x+x'-9=9$, deci $x'=18-x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

c) $0\circ\ldots\circ 5=0+\ldots+5-9\cdot 5=-30$.

d) $4^x\circ 2^x=11\Leftrightarrow 4^x+2^x-9=11$. Notăm 2^x cu t și obținem $t^2+t-20=0$, de unde $t_1=4$ și $t_2=-5$; din $2^x=4$ rezultă $x=2$, iar $2^x=-5$ nu are soluție. Deci ecuația are o singură soluție reală.

e) Ecuația se mai scrie $\sqrt{x-2}+\sqrt{102-x}=10$, $x\in[2,\ 102]$. Prin ridicare la pătrat, ea devine $x-2+102-x+2\sqrt{x-2}\sqrt{102-x}=100$, care are soluțiile $x=2$ și $x=102$. Deci suma soluțiilor este 104.

7. a) Se verifică prin calcul direct că expresia este egală cu 0.

b) $(x\circ y)\circ z=(x+3)(y+3)(z+3)-3=x\circ(y\circ z),\ \forall x,\ y,\ z\in\mathbb{R}$.

c) Pentru a găsi $a,b\in\mathbb{Q}\backslash\mathbb{R}$ astfel încât $a\circ b\in\mathbb{N}$, egalăm $a\circ b$ cu un număr natural. Considerăm $a\circ b=(a+3)(b+3)-3=k$, pentru $k\in\mathbb{N}, k\geqslant 3$, de unde $(a+3)(b+3)=k$, adică $a+3=\dfrac{k}{b+3}$. Obținem $a=\dfrac{k}{b+3}-3$, deci $\left\{\left(\dfrac{k}{b+3}-3,b\right)\middle|\, b\in\mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}, k\in\mathbb{N}, k\geqslant 3\right\}$, mulțimea având o infinitate de perechi $(a,\ b)$ de forma de mai sus.

d) $(\log_2 x)\circ(\log_3 x)=-3\Leftrightarrow(\log_2 x+3)(\log_3 x+3)-3=-3\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(\log_2 x+3)(\log_3 x+3)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(\log_2 x=-3 \text{ sau } \log_3 x=-3\right)\Rightarrow$ ($x_1=2^{-3}=\dfrac{1}{8}$ sau $x_2=3^{-3}=\dfrac{1}{27}$). Ecuația are două soluții reale.

e) $2^x\circ 3^x=-3\Leftrightarrow(3^x+3)(2^x+3)-3=-3\Leftrightarrow(3^x+3)(2^x+3)=0$, de unde $2^x=-3$ și $3^x=-3$; ecuațiile nu au soluții, deci mulțimea nu are nici un element.

8. a) Se verifică prin calcul direct. **b)** $e=\dfrac{3}{2}$.

c) $x*x=2(x-1)^2+1$; $x*x*x=2^2(x-1)^3+1$. Se demonstrează prin inducție matematică că

$\underbrace{x*x*\ldots*x}_{n \text{ ori}}=2^{n-1}(x-1)^n+1$.

d) Din punctul **c)** avem $x*x*x*x*x=17\Leftrightarrow 2^4(x-1)^5+1=17\Leftrightarrow(x-1)^5=1$; obținem $x=2$.

9. a) $(-10)\circ 1=1$.

b) Inecuația dată este echivalentă cu $x^2+x\leqslant 0$, cu soluția pozitivă $x\in[-1,0]$.

c) Notând $2^x=y$, $y>0$ ecuația devine $y^2+y-2=0$, cu soluția pozitivă $y=1$, de unde obținem $x=0$.

d) Considerăm $x=\dfrac{1}{2}$ și căutăm $y\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ astfel încât $x\circ y=\dfrac{1}{3}$. Găsim $y=-\dfrac{61}{6}\in\mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$.

e) Se verifică axiomele grupului.

10. a) $A\cdot A=A\cdot A\Rightarrow A\in G$;, $I_2\cdot A=A\cdot I_2=A\Rightarrow I_2\Rightarrow G$.

b) $\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-c&-d\\-a&-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-b&-a\\-d&-c\end{pmatrix}\Leftrightarrow b=c$ și $a=d$ Rezultă

$G=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}, x, y\in\mathbb{C}\right\}$ și $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\notin G$.

c) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I_2\Rightarrow A^2=I_2$

d) $B=aI_2+bA=\begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix}\in G$.

e) $A^2 = I_2 \Rightarrow A^{2007} = A \cdot A^{2006} = A \cdot I_2^{1003} = A$.

f) Da. Adunarea este asociativă, are invers și element neutru în G.

11. a) $x\circ y=2xy-x-y+4$; $(x\circ y)\circ z=4xyz-2xy-2yz-2xz+x+y+z+6z$;
$x\circ(y\circ z)=4xyz-2xy-2xz-2yz+x+y+z+6x$. Deci $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$, dacă și numai dacă $x = z$.
b) Notăm cu e elementul neutru al legii „∘“ și din $x\circ e=x$, rezultă $(2x-1)e = 2x - 4$, deci legea nu are element neutru. **c)** $x\circ 2=3\Rightarrow 4x-x-2+4=3x+2=3\Rightarrow x=\frac{1}{3}$. Cardinalul mulțimii este 1.
d) $(-1)\circ 0=5; (-1)\circ 0\circ 1=5\circ 1=8$.

e) Din $x\circ x=2x^2-2x+4=x$ rezultă $2x^2-3x+4=0; \Delta<0$ deci nu există x care să verifice proprietatea.

12. a) $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$; $(f\circ g)(x)=a(cx+d)+b=acx+ad+b\in G$.

b) $1_{\mathbb{R}} = 1 \cdot x + 0 \in G$.

c) $f(x)=ax+b$, $c=\frac{1}{a}$, $d=\frac{-b}{a}$, $g(x)=cx+d$; conform **a)** rezultă $(f\circ g)(x)=x=1_{\mathbb{R}}$, deci există $g(x)=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}\in G$.

d) $(1_{\mathbb{R}}\circ f)x=f(x)=(f\circ 1_{\mathbb{R}})(x)=(ax+b)$.

e) $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = 3x - 1$; $(f\circ g)(x)=2(3x-1)+1=6x-1$; $(g\circ f)(x)=3(2x+1)-1=6x+2$; rezultă $f\circ g\neq g\circ f$.

13. a) Prin calcul direct.

b) $A\circ B=B\circ A$, deci legea e comutativă.

c) Da, $(A\circ B)\circ C=ABC+2AC+2BC+2C+2AB+4A+4B+4I_3+2C+2I_3=A\circ(B\circ C)$.

d) $-I_3$ este element neutru. **e)** Monoid comutativ. **f)** $I_3\circ I_3=I_3+6I_3=7I_3$.

14. a) Se verifică prin calcul direct.
b) $(x\circ y)\circ z=3(x\circ y+1)(z+1)-1=3^2(x+1)(y+1)(z+1)-1=x\circ(y\circ z)$.

c) $a\circ b=3(a+1)(b+1)-1$. Luăm $a=\frac{15}{2}-1$, $b=\frac{2}{3}-1$ și obținem cerința.

d) $x\circ e=x$ sau $3(x + 1)(e + 1) = x + 1$ sau $e+1=\frac{1}{3}$ sau $e=-\frac{2}{3}$.

e) $x\circ y=-1$ sau $3(x+1)(y + 1) = 0$ de unde rezultă $x + 1 = 0$ sau $y + 1 = 0$.

f) Pentru $n = 2$ și $n = 3$ s-a verificat. Apoi

$\underbrace{a_1\circ a_2\circ\ldots\circ a_n}_{x}\circ a_{n+1}=x\circ a_{n+1}=3(x+1)(a_{n+1}+1)-1=3^n(a_1+1)\ldots(a_n+1)(a_{n+1}+1)-1$.

Inele și corpuri

pag.42. 5. Elementul zero al inelului ($\mathbb{Z}$, T, $\perp$) este -3, iar elementul unitate este -2. **6.** Elementele inversabile sunt $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, -1)$. **14.** a) $U + V = O$; $UV = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}$; b) $UX = \begin{pmatrix} \hat{3}a+\hat{5}b & \hat{3}b+\hat{5}d \\ \hat{5}a+\hat{4}c & \hat{5}b+\hat{4}d \end{pmatrix}$; $a = \hat{2}, b = \hat{5}, c = \hat{5}, d = \hat{3}$. Cum $XU = I_2$ și $UX = I_2$, U element inversabil.

pag.48. 1. Din $(1 + 1)^2 = 1 + 1$ rezultă $1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1$, de unde $1 + 1 = 0$. Pentru $x \in R$ avem $x + x = (1 + 1)x = 0x = 0$. De asemenea $x + y = (x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + xy + yx + y^2 = x + xy + yx + y$, de unde $xy + yx = 0$, deci $xy = -yx = yx$. **2.** b) Avem $k!(p-k)!\,C_p^k = p! = (1\cdot 2\cdot\ldots\cdot p-1)p$. Rezultă că p divide unul dintre factori și acesta nu poate fi decât C_p^k când $1 \leqslant k \leqslant p$. **3.** c) Fie $B = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{c} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$. Avem $B^3 = O_3$ și $A^3 = (I_3 + B)^p = I_3 + C_p^1 B + C_p^2 B^2 = I_3$ pentru că C_p^1 și C_p^2 se divid cu p. **10.** Dacă $f(x) = f(y)$ atunci $1 + x = 1 + y$, deci $x = y$. Așadar f este injectivă și cum R este finit, f este și surjectivă. Avem $f(0) + f(1) + f(a) + f(b) =$
$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + a + b$. Cum f este bijectivă, aceeași sumă este $0 + 1 + a + b$. Rezultă că $1 + 1 + 1 + 1 = 0$.
11. Din $1 = (-1)^6 = -1$ rezultă $1 + 1 = 0$ și deci $x + x = 0, \forall x \in R$. Avem $(1+x) = (1+x)^6 = \sum_{k=0}^{6} C_6^k x^k = 1 + x^2 + x^4 + x$, de unde $x^4 = -x^2 = x^2$. Așadar $x = x^6 = x^4x^2 = x^2x^2 = x^4 = x^2$. **12.** Avem $x + x = 0$, $\forall\, x \in R$ și atunci
$x^7 + 1 = (x + 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = (x + 1)((x^6 + x^4 + x^3) + (x^5 + x^3 + x^2) + (x^3 + x + 1)) =$
$= (x + 1)(x^3 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)$.

pag.50-51. 4. $a = b = 1$, $c = 6$. **6.** Presupunem că K este corp. Cum $(K, +)$ este grup abelian cu patru elemente, avem $1 + 1 + 1 + + 1 = 0$. Avem $(1 + 1)(1 + 1) = 1 + 1 + 1 + 1 = 0$ și cum K este corp, rezultă $1 + 1 = 0$. Cum $(K^*, \cdot)$ este grup de ordin 3, avem $a^3 = 1$ pentru $a \in K^*$, $a \neq 1$, ceea ce se mai scrie $(a + 1)(a^2 + a + 1) = 0$. Dar $a + 1 \neq 0$, deci $a^2 + a + 1 = 0$. Reciproc, presupunem că există $a \in K$ astfel încât $a^2 = 1 + a$. Dacă $1 + 1 \neq 0$, atunci $K = \{0, 1, 1 + 1, 1 + 1 + 1\}$ și nu există $a \in K$ astfel încât $a^2 = 1 + a$. Rămâne adevărat că $1 + 1 = 0$. Egalitatea $a^2 = 1 + a$ se mai scrie $a(1 + a) = 1$, deci a și $1 + a$ sunt inversabili. Se observă că $K = \{0; 1; a; 1 + a\}$ și deci K este corp.

Test 1. 1. $x, y \in K$, $x \top y \in K$, $x \perp y \in K$; $(K, \perp, \top)$ este corp comutativ. Se verifică axiomele structurii de corp. $e_{\perp} = 1$, $e_T = e^3$, $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Test 2. 1. $x \perp y \in K$, $x \top y \in K$, $e_{\perp} = 0$; $e_{\top} = 1 - e$; $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $x'_{\top} = 1 - e^{\frac{1}{\ln(1-x)}}$, $\forall x \in K$, $x \neq e_{\top}$.

Probleme de tip bacalaureat

1. **a)** Elementele inversabile din inelul $\mathbb{Z}_{12}$ sunt $\{\hat{1}, \hat{5}, \hat{7}, \widehat{11}\}$, deci sunt 4 elemente.

b) Ecuația $\hat{2}\hat{x} = \hat{4}$ are soluțiile $\hat{x} = \hat{2}$ și $\hat{x} = \hat{8}$, deci două soluții. Produsul lor este $\hat{4}$.

c) Soluțiile ecuației $\hat{x}^2 = \hat{x}$ sunt $\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{4}, \hat{9}\}$, deci suma lor este $\hat{2}$.

d) Soluțiile ecuației $\hat{x}^4 = \hat{0}$ sunt $\{\hat{0}, \hat{6}\}$, deci numărul lor este 2.

e) Probabilitatea este $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

2. a) Elementul neutru este –1. **b)** Simetricul lui 2 este $-\frac{7}{4}$.

c) Suma soluțiilor este $\hat{0}+\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{4}+\hat{5}=\hat{3}$. **d)** 0,5.

3. a) $\hat{x}^3 = \hat{x}$ are în $\mathbb{Z}_3$ soluțiile $\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\}$.

b) Orice element $\hat{x} \in \mathbb{Z}_{2006}$ are inversul $-\hat{x}$ față de adunare; 2006 elemente. **c)** 5 soluții. **d)** $\hat{0} \cdot \hat{1} = \hat{0}$.

4. a) $\hat{x} \in \{\hat{2}\}$. O soluție. **b)** $\hat{0} \cdot \hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{0}$. **c)** Două.

5. a) Se verifică regulile grupului.

b) $\hat{x} \in \mathbb{Z}_{p-1} \Rightarrow (x, p) = 1$. Rezultă că există $a, b \in \mathbb{Z}^*$, astfel încât $xa + pb = 1$, deci $\hat{x}\hat{a} = \hat{1}$.

c) Se verifică axiomele corpului.

d) $\hat{x}^2 = \hat{1} \Rightarrow (\hat{x}-\hat{1})(\hat{x}+\hat{1}) = \hat{0}$, de unde $\hat{x} = \hat{1}$ sau $\hat{x} = -\hat{1} = \widehat{p-1}$.

e) $\forall \hat{x} \in \{\hat{2}, \hat{3}, \ldots \widehat{p-2}\}$, există $\hat{y} \in \{\hat{2}, \hat{3}, \ldots \widehat{p-2}\}$ astfel încât $\hat{x} \neq \hat{y}$ și $\hat{x}\hat{y} = \hat{1}$ (conform **b)** și **d)**). Deci

$\hat{1} \cdot \hat{2} \ldots \widehat{p-2} \cdot \widehat{p-1} = \hat{1} \cdot \widehat{p-1} \cdot (\hat{2} \cdot \ldots \cdot \widehat{p-2}) = \widehat{p-1}$.

f) Dacă p este număr compus, atunci există $1 < d < p$ astfel încât $d \mid p$ și $d \neq \frac{p}{d}$. Atunci $\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \ldots \cdot \widehat{p-1}$ este divizibil cu $d \cdot \frac{p}{d} = p$.

Polinoame

pag.59. 1. grad $f = 2$ dacă $m \neq 2$ și grad $f = 0$ dacă $m = 0$, grad $g = 5$ dacă $z \neq \pm i$, $\frac{-i \pm \sqrt{3}}{2}$, grad $g = 0$ pentru $z = -i$ și grad $g = 2$ în rest. **2.** $f = g$ pentru $z \in \left\{1, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right\}$. **3.** grad$(f + g)$ este 2 dacă $\alpha \neq 1 \pm \sqrt{3}$ este 1 dacă $\alpha = 1 \pm \sqrt{3}$ și $\alpha \neq 2$ și este 0 în rest. gradfg este 4 dacă $\alpha \notin \{0, 2, 3\}$ este 3 dacă $\alpha \in \{0, 2, 3\}$.
6. b) $fg = (1 + i)X^3 + (1 + i)X^2 + 2(1 + 2i)X + 2(i - 1)$. **7.** $fg = \hat{4}X^6 + \hat{3}X^5 + \hat{4}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{2}$.
11. $f = aX^2 + 2X + a$, $g = -aX + a - 2$, $a \neq 0$. **12.** $g = X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{3}{8}$. **14.** $f = X + 2$, $g = -X - 1$.

15. Cum $3\hat{a} = \hat{a} + \hat{a} + \hat{a} = \widehat{a+a+a} = \widehat{3a} = \hat{0}$, $\forall \hat{a} \in \mathbb{Z}_3$, rezultă că $f + f + f = 3f = 0$, $\forall f \in \mathbb{Z}_3[X]$. Avem $(f + g)^3 = f^3 + 3f^2g + 3fg^2 + g^3 = f^3 + g^3$ și deci $(\hat{2}X^2 + X + \hat{1})^3 = (\hat{2}X^2 + X)^3 + \hat{1}^3 = (\hat{2}X^2)^3 + X^3 + \hat{1}^3 = \hat{2}^3X^6 + X^3 + \hat{1} = \hat{2}X^6 + X^3 + \hat{1}$
16. Calculând $\alpha f + \beta g + \gamma h$ și egalând apoi coeficienții cu 0 se obține un sistem omogen de trei ecuații liniare de determinant nenul în necunoscutele α, β, γ, deci $\alpha = \beta = \gamma = 0$. **17.** Se poate folosi indicația de la exercițiul precedent. **18.** $a = 1$, $b = 3$, $c = -2$, $d = 3$. **21.** $f = a$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. **22.** $f = \frac{3}{5}X + \frac{4}{5}$, $g = \frac{4}{5}X - \frac{3}{9}$ sau $f = \frac{4}{5}X - \frac{3}{5}$, $g = \frac{3}{5}X + \frac{4}{5}$ etc. **23.** $a = 2$, $b = 7$, $c = 7$, $d = -2$. **24.** $a = \frac{3}{8}$, $b = \frac{9}{64}$.

pag.64. 1. a) $q = 2X^2 + 3X + 11$, $r = 25X - 5$; b) $q = \frac{1}{3}X - \frac{7}{9}, r = -\frac{26}{9}X - \frac{2}{9}$.

2. a) $q = X^2 + (2i - 1)X + 1$, $r = 0$; b) $q = iX^3 + 2X^2 - (1 + 5i)X + 5(i - 2)$, $r = 9 + 19i$. **3.** $b = 0$, $c = \pm$i sau $b = \pm\sqrt{2}$, $c = 1$ sau $b = \pm i\sqrt{2}$, $c = -1$. **4.** $a = 2 - i$, $b = 3 - i$. **5.** $a = 10$, $b = -6$. **6.** $q = \hat{2}X^2 + \hat{3}X + \hat{5}, r = 0$.

7. $q=\hat{4}X^2+\hat{4}X+\hat{2}$, $r=\hat{3}X+\hat{2}$. **8.** $r = 7X^2 + (a - b)X + b$. **9.** $a=\hat{2}$, $b=\hat{1}$. **10.** Dacă $n = mq + r$, atunci $X^n - 1 = X^{mq+r} - X + X - 1 = (X^m - 1)g(X) + X^r - 1$ cu $g(X) \in \mathbb{Q}[X]$.

pag.70. 1. a) $f(3) = 196$; b) $f(-2 - i) = -19 - 18i$. **2.** a) $f = (X - 1)^4 + 6(X - 1)^3 + 9(X - 1)^2 - 3$; b) $f = (X + i)^4 - 2i(X + i)^3 - (1 + i)(X + i)^2 - 5(X + i) + 7 + 5i$. **3.** $q=\hat{5}X^3+\hat{3}X^2+\hat{2}X+\hat{5}, r=\hat{5}$. **4.** Se dezvoltă polinomul $X^3 - X + 1$ după puterile lui $X - 2$. Avem $X^3 - X + 1 = (X - 2)^3 + 6(X - 2)^2 + 11(X - 2) + 7$, de unde $a = 6$, $b = 11$, $c = 7$. **5.** $g\in\left\{\hat{2}X^2+\hat{2}X+\hat{1},\ X^3+\hat{2}X^2+X+\hat{1},\ \hat{2}X^3+\hat{2}X^2+\hat{1}\right\}$. **6.** Cum $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ și $f(1) = f(-1) = 0$ rezultă că $X^2 - 1$ divide f. **7.** Avem $f(1) = 0$ și $f'(1) = 0$, unde $f' = (n + 2)\, nX^{n+1} - (n + 1)^2X^n + 1$, de unde rezultă că $(X - 1)^2$ divide f. **8.** $\lambda = -2$. **9.** $a = -1$, $b = 2$. **10.** Atribuind lui X valorile 0, 3 și 2 se deduce că $f(1) = f(2) = f(3) = 0$, deci $f(X) = (X - 1)(X - 2)(X - 3)q(X)$ cu $q(X) \in \mathbb{R}[X]$. Folosind acum relația dată se deduce că, $q(X) = q(X + 1)$, deci $q(X) = a \in \mathbb{R}^*$, de unde $f = a(X - 1)(X - 2)(X - 3)$ cu $a \neq 0$. **11.** $a = -9$, $b = 12$. **12.** Condițiile $f(k) = 2^k$, $k = 1, 2, 3$ reprezintă un sistem Cramer în necunoscutele a, b, c. Se obține $a = -5$, $b = 10$, $c = -4$. **13.** $f = X^4 + 2X^3 - X^2 + 3X - 1$. **14.** Avem $X^2 + X + 1 = (X - \varepsilon)(X - \varepsilon^2)$ unde $\alpha=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Cum $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$ și $\varepsilon^3 = 1$, se verifică $f(\varepsilon) = f(\varepsilon^2) = 0$, deci $X^2 + X + 1$ divide f. **15.** $a = 4$, $b = -6$, $c = 4$, $d = -1$.

pag.81. 1. a) $(f, g) = X^2 + X + 1$. **2.** $(f, g) = 1$, $[f, g] = fg$. **4.** Se calculează c.m.m.d.c. și se găsește $(f, g) = 1$. **5.** $(f, g) = X^3 - 1$ și $[f, g] = (X^3 - 1)(X^3 + 1)(X^6 + X^3 + 1)$. **6.** $a = 6$, $b = 7$. **7.** $a=\frac{49}{8}$, $b=\frac{19}{16}$.

8. $f = (X^2 - 2X + 2)(X^2 + 2X + 2) = (X - i - 1)(X + i - 1)(X - i + 1)(X + i + 1)$.

$$g=(X^2+3)(X^2-3X+3)(X^2+3X+3)=(X+i\sqrt{3})(X-i\sqrt{3})\left(X-\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(X-\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X+\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X+\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

9. Se arată că $X^3 - 2$ nu are rădăcini în $\mathbb{Q}$. $f=(X-\sqrt[3]{2})(X^2+\sqrt[3]{2}X+\sqrt[3]{4})=(X-\sqrt[3]{2})(X-\varepsilon^2\sqrt[3]{2})(X-\varepsilon\sqrt[3]{2})$ unde $\varepsilon=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **10.** Avem $f(\hat{2})=f(\hat{3})=\hat{0}$, deci f se divide prin $(X-\hat{2})(X-\hat{3})$. Se obține $f=(X-\hat{2})(X-\hat{3})(X^2+X+\hat{1})$ și $X^2+X+\hat{1}$ este ireductibil.

11. $f=(X-1)(X+1)(X^2+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)\cdot(X^2+\sqrt{3}X+1)$.

12. $f=(X+1)(X^2+1)(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)$. **13.** Avem $f(1) = f'(1) = 0$, deci $(1 - X)^2$ divide pe f.

14. $X^8+X^4+1=(X^4+1)^2-X^4=(X^2+X+1)(X^2-X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1)$.

15. Se presupune contrariul și se obține o contradicție. **16.** $f=(X+\hat{2})^2(X^2+\hat{1})$

17. $\hat{a}=\hat{1}$. **21.** $f = a_0 + a_1X + ... + a_mX^m$, $g = b_0 + b_1X + ... + b_nX^n$ cu $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$ și $h = c_0 + c_1X + ... + c_{m+n}X^{m+n}$. Dacă rezultatul din enunț nu este adevărat, fie s și t minimi astfel încât $p\nmid a_s$ și $p\nmid b_t$. Cum $c_{s+t}=\sum\limits_{i+j=s+t}a_ib_j$ rezultă că $p \mid a_1b_t$, deci $p \mid a_s$ sau $p \mid b_t$. Contradicție. **22.** Presupunem prin absurd că $f = g_1h$, $g = b_0 + b_1X + ...+ b_uX^u$, $h = c_0 + c_1X + ... + c_vX^v$ cu $b_u \neq 0$, $c_v \neq 0$, $u < n$, $v < n$. Avem $p \mid b_0$ și $p\nmid c_0$ sau $p\nmid b_0$ și $p \mid c_0$. În primul caz există $k \in \mathbb{N}^*$ a.î. p divide $b_0, b_1, ..., b_{k-1}$ și $p\nmid b_k$. Din $a_k = b_kc_0 + ... + b_0c_k$ rezultă că $p \mid b_kc_0$, deci $p \mid b_k$ sau $p \mid c_0$. Absurd. **23.** Se aplică exercițiul precedent. **24.** Dacă $f = gh$ cu $g, h \in \mathbb{Z}[X]$ de grade $u < n$, $v < n$, atunci $\hat{f}=\hat{g}\hat{h}$ cu $\mathrm{grad}\hat{g}=u<n$ și $\mathrm{grad}\hat{h}=v<n$. Contradicție.

pag 92-93. 1. 2 rădăcină triplă. **2.** –2 rădăcină simplă. **3.** $\lambda = 5$, –1 rădăcină dublă.

4. $X^3-8=(X-2)(X-i\sqrt{3}+1)(X+i\sqrt{3}+1)$, $X^4+i=(X-z_0)(X-z_1)(X-z_2)(X-z_3)$, unde $z_k=\cos\frac{3\pi+2k\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi+2k\pi}{8}$, $k = 0, 1, 2, 3$. **5.** $a = 3$, $b = -4$, $f=3(X-1)^2\left(X+\frac{1-i\sqrt{2}}{3}\right)\left(X+\frac{1+i\sqrt{2}}{3}\right)$.

6. a) $x_1 = 1$, $x_2 = -4$, $x_3 = \frac{2}{3}$; c) $x_1 = 2+\sqrt{10}$, $x_2 = 2-\sqrt{10}$, $x_3 = 2i$, $x_4 = 3i$. **7.** $g = X^3 - 5X - 2$.

8. $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = -50$. **9.** $a = 20$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$. **10.** $a = 2$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. **11.** $a = -6$, $b = -9$, $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = -3$. **12.** $S_0 = 3$, $S_1 = 0$, $S_2 = -2p$, $S_3 = -3p$, $S_4 = 2p^2$. Avem $S_n + pS_{n-2} + qS_{n-3} = 0$, oricare ar fi $n \geqslant 3$. Acum prin inducție rezultă că $S_n \in \mathbb{Z}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}$. **13.** $a \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup [1, +\infty)$.

14. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = -a^2 + a - 1 < 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$. **17.** $f = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$. **18.** $f = X^4 - 4X^3 + 10X^2 - 12X + 9$. **19.** Fie ε o rădăcină a polinomului $X^2 + X + 1$. Dacă $X^2 + X + 1$ divide f, atunci $f(\varepsilon) = 0$. Rezultă că $(-1)^{m-n}\varepsilon^{2(m-n)} = 1$, deci $(-1)^{m-n} = 1$ și $\varepsilon^{2(m-n)} = 1$. Deducem că $m - n$ se divide cu 2 și 3, deci cu 6. **22.** Dacă ε este rădăcină a polinomului $X^2 - X + 1$, atunci $\varepsilon^3 = -1$. Din $f(\varepsilon) = 0$ rezultă că $n = 6k + 2$ sau $n = 6k + 4$, $k \in \mathbb{Z}$. **26.** a) $-\frac{1}{2}$; b) 1 și -3. **27.** Dacă există $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât $f(a) = 0$, atunci $f(X) = (X - a)g(X)$ cu $g(X) \in \mathbb{Z}[X]$. Rezultă $f(0) = -ag(0)$ și $f(1) = (1 - a)g(1)$. Cum unul din numerele $-a$ și $1 - a$ este par, se obține o contradicție. **29.** $f = X^3 + 12X - 30$. **30.** Dacă $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât $f(a) = 0$, atunci $f(X) = (X - a)g(X)$ cu $g(X) \in \mathbb{Z}[X]$. Avem $f(0)f(1) \ldots f(n) = -a(1 - a)(2 - a) \ldots (n - a)g(0)g(1) \ldots g(n)$. Folosind formula pentru aranjamente se arată că $(n + 1)!$ divide produsul a $n + 1$ numere întregi consecutive. **31.** Dacă $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_{2n}X^{2n}$ cu $a_{2n} \neq 0$ și $r = \frac{p}{q}$ este număr rațional scris sub formă inductibilă și dacă $f(r) = 0$ avem $a_0q^{2n} + a_1pq^{2n-1} + \ldots + a_{2n-1}p^{2n-1}q + a_{2n}p^{2n} = 0$ membru stâng al egalității precedente este impar. Contradicție.

pag 99-102. 1. a) $x_1 = -1 + i$, $x_2 = -2 - 3i$. **2.** a) $x_1 = -1$, $x_2 = -i$, $x_3 = i$. **3.** $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. **4.** c) $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $x_{3,4} = \pm(2+i)$. **5.** a) $x_{1,2} = \pm a$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{ab}$. **7.** a) 1, ε, ε^2, 2, 2ε, $2\varepsilon^2$ unde $\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

Probleme de tip bacalaureat

1. a) $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$. **b)** $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$. **c)** $f \equiv 0$. **d)** $\hat{0}$.

2. a) Se verifică direct că f nu are rădăcini în $\left\{\pm1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}\right\}$.

b) $C = 2$, $R = -1$. **c)** $f\left(\cos\frac{\pi}{9}\right) = 2g\left(\cos\frac{\pi}{9}\right) - 1 = 2\left(4\cos^3\frac{\pi}{9} - 3\cos\frac{\pi}{9}\right) - 1 = 2\cos\frac{\pi}{3} - 1 = 0$.

d) Se deduce din **a)** și **c)**.

3. a) $f(-2) = 6$, $f(2) = -2$, deci $f(-2) \cdot f(2) = -12$.

b) Dacă polinomul f ar avea rădăcina $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ cu $(p, q) = 1$, atunci $p \mid 2$ și $q \mid 1$, de unde rezultă că $r \in \{\pm1, \pm2\}$. Cum $r \in \{\pm1, \pm2\}$ nu sunt rădăcini, rezultă că polinomul f nu are rădăcini raționale.
c) Cum $f(-\infty) = -\infty$, $f(-2) = 6$, $f(1) = -2$ și $f(\infty) = \infty$, polinomul f va avea trei rădăcini reale.
d) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.
e) Scriem că x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcini ale polinomului $f : x_1^3 - 6x_1 + 2 = 0$; $x_2^3 - 6x_2 + 2 = 0$ și $x_3^3 - 6x_3 + 2 = 0$. Înmulțind relațiile anterioare cu x_1^k, x_2^k respectiv x_3^k și adunându-le, obținem $S_{k+3} - 6S_{k+1} + 2S_k = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
f) Cum $S_0 = 3$, $S_1 = 0$, $S_2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 12$, relația $S_n \in \mathbb{Z}$ va fi adevărată $\forall n \in \mathbb{N}$. Într-adevăr, verficarea fiind făcută, să arătăm că $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. Din relația anterioară, avem $S_{n+1} = 6S_{n-1} - 2S_{n-2} \in \mathbb{Z}$, ceea ce trebuia arătat.

4. a) Conform relațiilor lui Viète, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

b) $f(1) \cdot f(-1) = -1 \cdot 9 = -9$.

c) Fie $\frac{p}{q}$ o rădăcină rațională a lui f, $(p, q) = 1$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Atunci din $q \mid 1$ și $p \mid 3$ rezultă $q \in \{\pm 1\}$, $p \in \{\pm 3, \pm 1\}$, deci singurele rădăcini raționale posibile ar fi $\pm 1, \pm 3$. Acestea nu sunt rădăcini pentru f, deci f nu are rădăcini raționale.

d) x_i rădăcină pentru f implică $x_i^4 = 5x_i - 3, \forall i = \overline{1, 4}$. Atunci $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 5(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) - 12 = -12$.

5. a) $f(x) = (x - 1)(x - 2)\, q(x) + r$, rezultă $f(1) = f(2)$, deci $a = -4$;

b) $x_1x_2x_3 = 6$; $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ și $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a$, deci $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 - 2a$

$$\left.\begin{array}{l} x_1^3 - x_1^2 + ax_1 - 6 = 0 \\ x_2^3 - x_2^2 + ax_2 - 6 = 0 \\ x_3^3 - x_3^2 + ax_3 - 6 = 0 \end{array}\right| \overset{(+)}{\Rightarrow} x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 1 + 2a + a - 18 = 0, \text{ de unde } x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 19 - 3a;$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1^4 - x_1^3 + ax_1^2 - 6x_1 = 0 \\ x_2^4 - x_2^3 + ax_2^2 - 6x_2 = 0 \\ x_3^4 - x_3^3 + ax_3^2 - 6x_3 = 0 \end{array}\right| \overset{(+)}{\Rightarrow} x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 19 + 3a + a - 2a^2 - 6 = 0, \text{ de unde}$$

$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 2a^2 - 4a + 25$. Înlocuind în relație obținem $2a^2 - 4a + 25 - 1 + 2a = 24$, adică $a^2 = a$, de unde $a \in \{0, 1\}$.

c) Rădăcinile raționale se găsesc printre divizorii termenului liber (presupunând că ele există). Dar nici un divizor nu este soluție, așadar f nu are rădăcini raționale.

6. a) $f(0) = 25$.

b) Se verifică prin calcul direct că expresia este egală cu 0.

c) Rezolvând ecuația $x^2 + 5x + 5 = 0$, obținem două soluții reale. Deci polinomul f are 4 rădăcini reale.

d) Produsul $x_1 \ldots x_4$ este egal cu 25.

e) Suma $x_1 + \ldots + x_4$ este egală cu -10.

7. a) Se verifică prin calcul direct că expresia este egală cu 0.

b) Polinomul f nu are rădăcini reale.

c) Din **a)**, $(x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1) \mid f$, deci restul este egal cu 0.

8. a) Cum $x_1, x_2 \in \{2, 3\}$, rezultă că soluțiile sunt reale și strict pozitive. Două soluții.

b) Vom rezolva ecuația $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$. Notăm $x^2 = t$ și obținem $t^2 - 5t + 6 = 0$ cu rădăcinile $t_1 = 2$ și $t_2 = 3$. Deci rădăcinile ecuației inițiale sunt: $x_1 = \sqrt{2}; x_2 = -\sqrt{2}; x_3 = \sqrt{3}; x_4 = -\sqrt{3}$. Prin urmare, f are patru rădăcini reale.

c) Fie $\frac{p}{q}$ o rădăcină rațională a lui f; atunci $q \mid 1$ și $p \mid 6$, deci $\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$.
Se observă ușor că acestea nu sunt rădăcini, deci f nu are rădăcini raționale.

d) Utilizând relațiile lui Viète, avem $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

e) Dacă x_1 este rădăcină a lui f, atunci $-x_1$ este rădăcină a lui f. Exponenții la care apar rădăcinile în sumă fiind impari, rezultă că $x_1^{2005} + x_2^{2005} + x_3^{2005} + x_4^{2005} = 0 \in \mathbb{N}$.

9. a) $f(-1) + f(1) = 6$.

b) Dacă f are rădăcina rațională $r=\dfrac{p}{q}$ cu $(p, q) = 1$, atunci $p \mid 1$ și $q \mid 1$, deci $r \in \{\pm 1\}$. Dar 1 și –1 nu sunt rădăcini pentru f, deci polinomul f nu are rădăcini raționale.

c) $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2 - X^2 = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$. Deci expresia este egală cu 0.

d) Suma este 0.

e) Produsul este 1.

10. a) $y_1 + y_2 = -1$, conform relațiilor lui Viète.

b) $f = g(X^3 + 1)$.

c) $(X - 1)f = (X - 1)(X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1) = X^6 - 1$.

d) $f(y_1) = g(y_1)(y_1^3 + 1) = 0$, deci $f(y_1)f(y_2) = 0$.

11. a) Restul este 0. **b)** $|x_1| = 1$. **c)** $x_1^3 = -1$. **d)** $S_3 = -2$. **e)** Probabilitatea este $\dfrac{1}{8}$.

12. a) $f(-1)=0$.

b) Conform teoremei restului, dacă $f(-1)=0$, atunci restul împărțirii lui f la $X + 1$ este 0.

c) f are o rădăcină reală și două complexe, deci probabilitatea este $\dfrac{1}{3}$.

d) $x_1 + x_2 + x_3 = -1$.

e) x_1 este rădăcină a lui f, $x_1^3 + x_1^2 + x_1 + 1 = 0$, de unde $x_1^4 + x_1^3 + x_1^2 + x_1 = 0$. Analog obținem $x_2^4 + x_2^3 + x_2^2 + x_2 = 0$ și $x_3^4 + x_3^3 + x_3^2 + x_3 = 0$. Adunând ultimele trei relații vom avea: $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = -(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1 + x_2 + x_3)$. Calculând parantezele din membrul drept obținem: $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 3$.

13. a) Restul împărțirii este 0. **b)** Cum $x_1^3 = 8$, rezultă că $|x_1| = 2$. **c)** $x_1^6 = 8^2 = 64$.

d) $S_3 = x_1^3 + x_2^3 = 16$. **e)** $S_1 = x_1 + x_2 = -2$, $S_1 + S_3 = 14$.

Primitive

pag.114-117. 7. a), b) și c): funcția f este continuă. **9.** a) Fie $G(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$. Se arată că G este derivabilă și $G'(x) = f(x) + \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}, & x = 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} = f(x) + h(x)$. G' admite primitive, h este continuă, deci f admite primitive;

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & , \text{dacă } x = 0 \end{cases} + \dfrac{1}{2}$ se ține seama de a). **10.** b) $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} + \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$. Funcția $g(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ admite primitive. Rezultă că f admite primitive $\Leftrightarrow h(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ admite primitive $\Leftrightarrow a = 0$;

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases} + \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ a - 1, & x = 0 \end{cases}$. Rezultă $a = 1$; d) $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} - \begin{cases} \cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} + \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$.

Rezultă $a = 0$. **11.** a) f are discontinuități de primă speță (pentru orice $x_0 \in \mathbb{Z}$);

b) $f(x)=\begin{cases} x, & x\leqslant 0 \\ 0, & x>0 \end{cases}+\begin{cases} 0, & x\leqslant 0 \\ \sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$. Arătăm că funcția $g(x)=\begin{cases} 0 & , x\leqslant 0 \\ \sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$ nu admite primitive. Presupunem că G ar fi o primitivă a lui g. Atunci $G(x)=\begin{cases} c_1, & x\leqslant 0 \\ x\sin\frac{1}{x}+c_2, & x>0 \end{cases}$. Se arată că G nu este derivabilă în $x = 0$; c) $f(x)=\begin{cases} 0, & x=0 \\ 2x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \end{cases}-\begin{cases} 0, & x=0 \\ \cos\frac{1}{x}, & x\neq 0 \end{cases}+\begin{cases} \frac{1}{2}, & x=0 \\ 0, & x\neq 0 \end{cases}$. **12.** f nu are proprietatea lui Darboux. $\left(\frac{1}{4}\in\left(f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right), f\left(\frac{1}{3}\right)\right)\right.$ și $\left. f(x)\neq\frac{1}{4},\ \forall x\in\left(\frac{1}{3},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)$. **13.** Fie $F'_1(x) = f(x)$, $\forall\, x \in [a, c]$ și $F'_2(x) = f(x)$, $\forall\, x \in [c, b]$. Atunci $F(x)=\begin{cases} F_1(x) & , x\in[a,c] \\ F_2(x)+F_1 c)-F_2(c), & x\in(c,b] \end{cases}$ este primitivă a lui f. **14.** Fie F o primitivă a lui f. Avem: $(F\cdot g)' = f\cdot g + F\cdot g' \Rightarrow f\cdot g = (F\cdot g)' - F\cdot g'$. $(F\cdot g)'$ admite primitive iar $F\cdot g'$ este continuă.

Test 1. **1.** Nu are proprietatea lui Darboux. **2.** a) $\frac{x^2}{2}+2x+4\ln(x-2)+\mathscr{C}$; b) $\frac{9}{13}\cdot\sqrt[9]{x^{13}}+\mathscr{C}$; c) $\operatorname{arctg}\frac{2x}{3}+\mathscr{C}$; d) $\frac{1}{2}\cdot\cos^2 x-\cos x+\mathscr{C}$. **3.** Funcția f este continuă. $F(x)=x\sqrt{x}(20-6x)$ pentru $x\leqslant 2$ și $F(x)=x\sqrt{x}(6x-20)+32\sqrt{2}$ pentru $x > 2$.

Test 2. **1.** f este continuă. **2.** a) $x - 2\ln(x + 1) + \mathscr{C}$; b) $\frac{10}{13}\cdot\sqrt[10]{x^{13}}+\mathscr{C}$; c) $\ln\frac{2x-5}{2x+5}+\mathscr{C}$; d) $-2\operatorname{ctg}2x + \mathscr{C}$. **3.** f este continuă. $F(x) = -e^{4-2x}$ pentru $x \leqslant 2$ și $F(x) = e^{2x-4} - 2$ pentru $x > 2$.

Probleme de tip bacalaureat

6. a) $f'(x) = 3x^2 + 1$. **b)** $\int f(x)dx=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+x\right)$. **c)** $F(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+x$.

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x\cdot(3x^2+1)}{x^4}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x^3+3x}{x^4}=0$.

7. a) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$.

b) $\int f(x)dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-5x\right)$

c) $f'(x)=0\Rightarrow x^2-\frac{4}{3}x+1=0,\ \Delta<0$, deci $f'(x)=0$ nu are soluții reale; rezultă f nu are nici un punct de extrem local.

d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)+3}{x-1}=f'(1)=2$.

Integrala definită

pag.125. 3. a) $\frac{72}{5}$; b) $2\sqrt{3}$; c) $16\sqrt{2}-2$; d) $\frac{\pi}{4}$; e) $e-\frac{1}{e}$; f) $\frac{90}{ln10}$; g) $\frac{2}{\ln 2}$; h) 2. **4.** a) 4; b) 8; c) $\frac{5}{2}$; d) $\frac{9}{2}$. **5.** a) $-\frac{4}{3}$; b) $\frac{13}{12}$; c) $\frac{7}{12}$; d) $\frac{4}{3}+\frac{\pi}{4}$; e) $\frac{\pi}{2}$; f) 4 + 4ln2; g) $\frac{11}{4}$; h) $\frac{3}{\ln 2}+\frac{56}{3}$. **6.** a) $\frac{21}{4}$; b) $-\frac{3}{2}+\ln 2$; c) $\frac{3}{2}-\ln 4$; d) 1 – ln3. **7.** a) 2 + ln2; b) $\frac{11}{32}$; c) 1; d) ln6. **8.** a) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; b) $\frac{2+\sqrt{2}}{6}$; c) $\frac{\pi}{4}$; d) $\frac{\pi}{4}$. **9.** a) 24; b) $\frac{7}{6}$.

pag.130. 3. a) $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; b) $\ln\frac{4}{3}+\frac{1}{2}$; c) $4\ln 2-1$. **5.** Se aplică metoda primitivelor surori. $J_1=\int\frac{f(x)dx}{af(x)+bg(x)}$, $J_2=\int\frac{g(x)}{af(x)+bg(x)}dx$, $a\cdot J_1+b\cdot J_2=x+\mathscr{C}$; $nbJ_1+maJ_2=\int\frac{bg'(x)+af'(x)}{af(x)+bg(x)}dx=\ln|af(x)+bg(x)|+\mathscr{C}$. Din aceste două relații se determină I_1.

pag.137-140. 1. a) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}-\ln 2$; b) $\text{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}-1$; $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}-\ln 2-\frac{\pi^2}{18}$; c) $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; d) $\frac{\pi}{2}-1$. **2.** a) $6e^2-2$; b) e^2-2; c) $\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}$; d) $\frac{\pi^3}{6}+\frac{\pi}{4}$. **3.** Două integrări prin părți; a) $\frac{1}{2}(1+e^{\pi})$; b) $-\frac{1}{2}(1+e^{\pi})$; c) $\frac{e}{2}(\sin 1-\cos 1)+\frac{1}{2}$; d) $\frac{e}{2}(\sin 1+\cos 1)-\frac{1}{2}$. **4.** a) $\frac{1}{3}(2-\sqrt{2})$; b) ln(ln3); c) calculați $(e^x\cos x)'$; –1; d) $\frac{1}{3}(4-\sqrt{2})$. **5.** a) $\ln\frac{1+\sqrt{2}}{2}$; b) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\frac{1}{\sin^2 x}=-(\text{ctg}\,x)'$; $2\sqrt{3}$; d) $\frac{48\sqrt{3}}{5}$. **6.** a) 2(1 – ln3); b) 4(1 – ln3); c) 4 + ln2 – π; d) $\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})$. **7.** a) $\frac{\pi}{4}$; b) $\frac{\pi}{8}$; c) $2-\frac{\pi}{2}$; d) $\frac{\pi}{4}+e-1-\text{arctg}\,e$. **8.** a) $\frac{\pi}{2}-1$; b) 1; c) 1; d) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{\pi}{4}$. **9.** Se folosesc paritatea și imparitatea unor funcții; a) $2\ln(1+\sqrt{2})$; b) $\frac{\pi}{2}$; c) 0; d) $1-\frac{2}{e}$. **10.** a) $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}-2$; b) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}-\ln 4$; c) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. **11.** a) $3-\ln 2-\frac{\pi}{2}$; b) $\frac{64}{315}$; c) $\frac{8}{15}(1+\sqrt{2})$. **12.** a) $x = at$; $a^2\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\ln 2-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}\right)$; b) $x = \sin t$; $\frac{\pi}{2}-1$; c) $\frac{1}{x}=t$; $\ln\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; d) $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$. **13.** a) $\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}-2$; b) $2\ln\frac{1+\sqrt{2}}{2}$; c) $1-\frac{\pi}{4}$; d) $\frac{\pi}{18}-\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{6}+1}$. **14.** a) 0; b) $3-\frac{3}{2}\ln 3-\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$; c) $\ln 50+2\,\text{arctg}\,2-3-\frac{\pi}{2}$. **15.** a) $\frac{\pi}{2}+2\sqrt{3}-\ln(2+\sqrt{3})$; b) amplificare cu $1+\sqrt{x}$; $x=\sin^2 t$; $\frac{4}{3}-\frac{3\pi}{8}$; c) $2x+1=t$; $1+\frac{3}{2}\ln\sqrt{3}$; d) $\frac{4}{n}-1-\frac{4}{n^2}\ln(n+1)$.

16. a) $x=\ln t$; $2-\frac{\pi}{2}$; b) $2-\frac{5}{e}$; . **17.** a) $\frac{1}{3}\left(\pi+2\,\text{arctg}\frac{4}{3}\right)$; b) x = arctg$t$; $\frac{1}{4}\ln 2$; c) $x=y+n\pi$; $\frac{1}{2}(-1)^n e^{-n\pi}(1-e^{-\pi})$; d) $\frac{1}{n^2}$. **18.** Se stabilesc ecuații pe care le verifică integralele; a) $x=\frac{1}{y}$; 0; b) $x=\frac{\pi}{4}-y$; $\frac{\pi}{8}\ln 2$; c) arctg$x$ = y; $\frac{\pi}{8}\ln 2$; d) $x=ay$; $\frac{\pi}{8a}(2\ln a+\ln 2)$. **19.** a) $x = \pi - y$; $\frac{\pi^2}{4}$; b) funcția se aduce la forma $(f(x)e^x)'$; $e^{\frac{\pi}{2}}$. **20.** a) $I_n = e - nI_{n-1}$; $e-1$; 1; $e-2$; $-2e+6$; b) $(2n+1)I_n = (2n-1)I_{n-1}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{16}$; $\frac{\pi}{32}$; $\frac{5\pi}{256}$;

c) $I_n = I_{n-1} - \frac{1}{n!}$; $e-1$; $e-2$; $e-\frac{5}{2}$; $e-\frac{16}{6}$;

d) $2nI_n = 2^{n-1}\sqrt{2} + (2n-1)I_{n-1}$; $\ln(1+\sqrt{2})$; $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$; $\frac{1}{8}(7\sqrt{2}+3\ln(1+\sqrt{2}))$; $\frac{1}{48}(67\sqrt{2}+15\ln(1+\sqrt{2}))$.

21. $nI_n = (n-1)I_{n-2}$; $\frac{\pi}{2}$; 1; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{2}{3}$. **22.** $I_n = \frac{1}{(n-1)2^n} + \frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1}$; 1; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{1}{8}(2+\pi)$; $\frac{1}{32}(8+3\pi)$.

Test.1. 1. $7+\frac{2}{3}$. **2.** $\frac{1}{2}+\ln\frac{4}{3}$. **3.** $13\ln 2 - 3$. **4.** $\ln 3$. **5.** $4e^3 + 2$.

Test.2. 1. $2(1-\ln 2)$. **2.** $1+\ln\frac{3}{4}$. **3.** $\frac{1}{4}(5e^5+e)$ **4.** $\frac{1}{3}(4-\sqrt{2})$. **5.** $\frac{\pi}{4}$.

Probleme de tip bacalaureat

1 a) $f(1) = 2005$.

b) Se verifică prin calcul direct.

c) $f(x) = \frac{x^{2005}-1}{x-1}$, pentru $x \neq 1$. Cum $f(1) > 0$, rezultă $f(x) > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

d) $\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$, deci $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

e) Cum $F'(x) > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, rezultă că F este strict crescătoare, deci injectivă. Din $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \infty$ și $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$, rezultă că F este surjectivă. Deci F este bijectivă.

f) Fie $I = \int_0^a g(x)dx$. Schimbăm variabila: $g(x) = t \Rightarrow x = F(t)$. Pentru $x = 0$ avem $F(t) = 0$, deci $t = 0$ iar pentru $x = a$, avem $F(t) = a = F(1)$, adică $t = 1$. Deci

$$I = \int_0^1 tF'(t)dt = \int_0^1 tf(t)dt = \int_0^1 (t+t^2+..+t^{2005})dt = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2006} = a-1+\frac{1}{2006} = a-\frac{2005}{2006}.$$

2. a) Evident, folosind $0 \leqslant t \leqslant 1$, adică $0 \leqslant t^n \leqslant 1$.

b) Se obține din **a)** prin integrarea inegalităților.

c) Se aplică criteriul cleștelui în **b)**.

d) $I_n(x) = \int_0^x t^{n-1}dt - \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}dt = \frac{x^n}{n} - I_{n-1}(x)$.

3. a) $f'(x) = 2x - \frac{1}{(x+1)^2}$.

b) $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{x+1}\right)dx = \left.\left(\frac{x^3}{3} + \ln(x+1)\right)\right|_0^1 = \frac{1}{3} + \ln 2$.

c) $f''(x) = 2 + \frac{2}{(x+1)^3}$, deci există un singur punct de inflexiune.

d) $f'(1) = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$.

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^3}\left(\frac{x^3}{3} + \ln x\right) = \frac{1}{3}$.

4. a) Se verifică prin calcul direct.

b) $f'(x)=3+\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

c) $f'(x)=3+\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{3x^4+6x^2+3+2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{1}{(x^2+1)^2}\left(3\left(x^2+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{3}(3x+1)^2+\dfrac{23}{12}\right)>0$ $\forall\, x\in\mathbb{R}$ rezultă că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

d) $\int_0^1 f(x)dx=3\cdot\dfrac{x^2}{2}-\operatorname{arctg}x\,\Big|_0^1=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\pi}{4}$.

e) Cum f este strict crescătoare, rezultă că este injectivă; apoi $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, arată că f este surjectivă.

f) Fie $I=\int_{-1}^{\frac{5}{2}}g(x)dx$; notăm $g(x)=t\Rightarrow x=f(t)$ și $dx=f'(t)dt$. Apoi $x=-1\Rightarrow t=0$ și $x=\dfrac{5}{2}\Rightarrow t=1$. Deci $I=\int_0^1 t\cdot f'(t)dt=tf(t)\Big|_0^1-\int_0^1 f(t)dt=2-\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$.

5. a) $\ln(x+\alpha)-A\ln x=\ln\dfrac{x+\alpha}{x^A}=\ln\dfrac{x+\alpha}{x}$, deci $A=1$.

b) $y=0$. **c)** $f'(x)=\dfrac{\alpha}{x(x+\alpha)}$. **d)** 1.

e) $\int_{2005}^{2006}f'(x)dx=f(x)\Big|_{2005}^{2006}=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\Bigg|_{2005}^{2006}=\ln\left(\dfrac{2005\cdot2007}{2006^2}\right)=\ln\dfrac{(2006-1)(2006+1)}{2006^2}=\ln\left(1-\dfrac{1}{2006^2}\right)$, deci $B=1$.

6. a) $f'(x)=2xe^{x^2}$. **b)** $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}e^{x^2}=1$.

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=0$. **d)** $\int_0^1 f'(x)=f(x)\Big|_0^1=e-1$.

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{f(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-f(0)}{f'(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{x^2}-1}{2xe^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x}=0$.

7. a) $f_0(\pi)=\sin\pi=0$.

b) Dacă $x_n=2n\pi$, atunci $f_0(x_n)=0$ și $\lim\limits_{n\to\infty}f_0(x_n)=0$. Dacă $y_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$, atunci $f_0(y_n)=1$ și $\lim\limits_{n\to\infty}f_0(y_n)=1$. Deci $\lim\limits_{x\to\infty}f_0(x)$ nu există.

c) $f_1(\pi)=\cos\pi=-1$.

d) $\int_0^{2\pi}f_1(x)dx=\int_0^{2\pi}\cos x\,dx=\sin x\Big|_0^{2\pi}=0$.

e) $f_0(x)=\sin x$; $f_1(x)=-\cos x$; $f_2(x)=-\sin x$; $f_3(x)=-\cos x$; $f_4(x)=\sin x$. Deci valoarea funcției se repetă din 4 în 4, rezultă $f_{10}(x)=f_2(x)=-\sin x$.

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_0(x)+f_1(x)+\ldots+f_n(x)}{n}=0$ deoarece numărătorul este constant, putând lua una din valorile 0, $\cos x$, $\cos x-\sin x$, $-\sin x$. Cum numitorul tinde la ∞, rezultă fracția tinde la 0.

8. a) Se verifică prin calcul direct că $f(x)=x-\dfrac{1}{x^2-1}$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,\ 1\}$.

b) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$; $\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-x-1}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x-1-x^3+x}{x^2-1}=0$. Deci asimptota oblică la graficul lui f este $y=x$.

c) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

d) $\int_2^4 f(x)dx=\int_2^4\left(x-\frac{1}{x^2-1}\right)dx=\int_2^4 x\,dx-\int_2^4\frac{1}{x^2-1}dx=\frac{x^2}{2}\Big|_2^4-\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}\Big|_2^4=\ 6-\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}$.

e) $f'(x)=1+\frac{2x}{(x^2-1)^2}>1\Leftrightarrow x>0$. Deci mulțimea este $(0,\ \infty)\setminus\{1\}$.

9. a) Se verifică prin calcul direct.

b) $\lim_{x\to\infty}(f(x)-x^2)=\lim_{x\to\infty}\left(-1+\frac{1}{x^2+1}\right)=-1$.

c) $f'(x)=2x-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

d) $f'(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2}(x^4+2x^2+1-1)=\frac{2x^3(x^2+2)}{(x^2+1)^2}$, rezultă că $f'(x)<0$, $\forall\, x<0$, deci f este strict descrescătoare pe $(-\infty,\ 0]$ și $f'(x)>0$, $\forall\, x>0$, deci f este strict crescătoare pe $[0,\ \infty)$.

e) $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ și $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$, rezultă că f nu admite asimptotă către ∞.

f) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(x^2-1)dx+\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\frac{1}{3}-1+\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}$.

10. a) $f'(x)=\frac{2x}{(1+x^2)^2}$.

b) $f(1)f(-1)f'(1)f'(-1)\ =\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-2}{4}=-\frac{1}{16}$.

c) $-\frac{1}{2}\leqslant\frac{x}{1+x^2}\leqslant\frac{1}{2}\Leftrightarrow-1\leqslant\frac{2x}{1+x^2}\leqslant1\Leftrightarrow-(1+x^2)\leqslant2x\leqslant1+x^2\Leftrightarrow(x-1)^2\geqslant0$ și $(1+x)^2\geqslant0$.

d) Calcul direct. **e)** $\int_0^2\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)=2-\operatorname{arctg}x\Big|_0^2=2-\operatorname{arctg}2$. **f)** 0.

11. a) $f'(x)=\frac{1}{2}(2x^2+3)^{-\frac{1}{2}}\cdot4x=\frac{2x}{\sqrt{2x^2+3}}$.

b) $\int_0^1 f'(x)dx=f(1)-f(0)=\sqrt{5}-\sqrt{3}$. **c)** $\lim_{x\to\infty}\sqrt{2x^2+3}=\infty$.

d) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+3}-\sqrt{2}x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{2x^2+3}+\sqrt{2}\cdot x}=0$.

e) Funcția e monotonă pe $[0,\ \infty)$ și pe $(-\infty,\ 0]$, deci unica soluție este $x=0$. **f)** 0.

Aplicații ale integralei definite

pag.144. I. 1. $\frac{32}{3}$. **2.** $\frac{32}{3}$. **3.** $\frac{10}{3}$. **4.** $\pi - 2$. **5.** $\frac{1}{6}$. **6.** $\frac{3}{\ln 2}-\frac{8}{3}$. **7.** $e+\frac{1}{e}-2$. **8.** $1-\frac{(e-1)^2}{2}$. **9.** $\frac{2}{3\ln 3}$.

pag.148-150.Test.1. 1. $f'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, $\operatorname{Im} f=(0;1]$, $x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$; $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$. **3.** $3+\frac{1}{3}$.

Test.2.1. $f'(x)=e^{-x}(x^2-2x)$, $f''(x)=-e^{-x}(x^2-4x+2)$. **2.** $V(a)=\pi\operatorname{arctg} a+\frac{a\pi}{1+a^2}$, $\lim\limits_{a\to\infty}V(a)=\frac{\pi^2}{2}$. **3.** $2\pi^2$.

Probleme de tip bacalaureat

1. a) Asimptota este $y = 0$.

b) $f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+4)^2}$, $x\in\mathbb{R}$. **c)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=-\frac{2}{25}$.

d) $\int_{-2}^{2} f(x)dx=2\int_0^2\frac{dx}{x^2+4}=\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big|_0^2=\frac{\pi}{4}$. **e)** $\lim\limits_{x\to\infty}x^2 f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+4}=1$.

2. a) $f(a)=a,\ f(b)=b$.

b) $\frac{a+b-1}{2}<a$, iar funcția fiind de gradul al doilea și convexă este crescătoare pe $\left[\frac{a+b-1}{2};+\infty\right)$.

c) Folosim continuitatea și monotonia funcției *f*.

d) Aria este $\int_a^b f(x)dx=\frac{x^3}{3}\Big|_a^b-(a+b-1)\frac{x^2}{2}\Big|_a^b+abx\Big|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2}-\frac{(b-a)^3}{6}$.

e) Evident, deoarece se observă că $\int_a^b f(x)dx+\int_a^b f^{-1}(x)dx=b^2-a^2$ și $\int_a^b f(x)dx=\frac{b^2-a^2}{2}-\frac{(b-a)^3}{6}$.

f) Evident, deoarece în acest caz $\int_a^b f^{-1}(x)dx=\frac{b^2-a^2}{2}+\frac{(b-a)^3}{6}$.

3. a) $f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

b) $t=\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\Big|_0^1=\frac{e-e^{-1}}{2}=\frac{e^2-1}{2e}$.

c) Cum $f''(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}>0$, rezultă că nu are puncte de inflexiune.

d) $f'(0)=0$.

e) Cum $f'(x)=0$ are o soluție și derivata își schimbă semnul la stânga și la dreapta lui 0, avem un punct de extrem local.

4. a) $f'(x)=\frac{2x}{(x^2+3)\ln 2}-\frac{2x}{(x^2+2)\ln 2}$. **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=0$.

c) $f'(x)=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{2x^3+4x-2x^3-6x}{(x^2+2)(x^2+3)}=-\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{2x}{(x^2+2)(x^2+3)}$, deci $f'(x)>0$, $x<0$, sau $f'(x)<0$, $x>0$.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{\ln 2}\cdot \ln\frac{x^2+3}{x^2+2} = 0$, deci $y=0$ este asimptotă orizontală.

e) Din c) și d) rezultă $0 < f(x) \leqslant \log_2 3 - 1$.

f) $\int_0^x \log_2(t^2+a^2)dt = t\log_2(t^2+a^2)dt\,\Big|_0^x - \frac{2}{\ln 2}\int_0^x \frac{t^2}{t^2+a^2}dt = x\log_2(x^2+a^2) - \frac{2}{\ln 2}\int_0^x\left(1-\frac{a^2}{t^2+a^2}\right)dt =$

$= x\log_2(x^2+a^2) - \frac{2x}{\ln 2} + \frac{2a}{\ln 2}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$.

g) Aria $= \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \log_2(x^2+3)dx - \int_0^1 \log_2(x^2+2)dx = \log_2 4 - \frac{2}{\ln 2} + \frac{2\sqrt{3}}{\ln 2}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} -$

$-\log_2 3 + \frac{2}{\ln 2} - \frac{2\sqrt{2}}{\ln 2}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} = 2 - \log_2 3 + \frac{2}{\ln 2}\left(\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

5. a) Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$, $y=1$ este asimptotă la graficul funcției f către $+\infty$.

b) $f'(x) = \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)' = \left(1-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3}$, $x \in \mathbb{R}^*$.

x	$-\infty$	0	∞
$f'(x)$	$-$	|	$+$
$f(x)$	$1 \searrow -\infty$	|	$-\infty \nearrow 1$

c) Din tabelul de variație, rezultă că $f(x) \in [0, 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci cel mai mic $a \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x) < a$, $\forall x \in \mathbb{R}$ este $a = 1$.

d) $\left|\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx\right| = \left|\int_{\frac{1}{2}}^1\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx\right| = \left|\left(x+\frac{1}{x}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^1\right| = \left|2-2-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

e) $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-1)\frac{x^3}{x+1} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x^3}{x+1}\right) = -1$.

6. a) $f'(x) = 4x^3 - 2$. **b)** $f'(2) = 30$.

c) $f''(x) = 12x^2$, deci nu are puncte de inflexiune.

d) Un punct de extrem local: $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\right)$. **e)** $A = \int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 (x^4-2x)dx = \left(\frac{x^5}{5} - x^2\right)\Big|_{-1}^1 = \frac{2}{5}$.

7. a) $f'(x) = 2x+3$. **b)** $f'(2) = 7$.

c) $f''(x) = 2$, deci funcția nu are puncte de inflexiune.

d) Punctul $x = -\frac{3}{2}$ este singurul punct de extrem local.

e) $\int_0^1 (x^2+3x+1)dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + x\right)\Big|_0^1 = \frac{17}{6}$.

8. a) $f'(x) = 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. **b)** $f'(1) = 2$.

c) $f''(x) = 2$, deci f nu are puncte de inflexiune.

d) Cum $f'(x) = 0$ are soluția $x = 0$, funcția are un punct de extrem local: $(0, 1)$.

e) $\int_0^1 |f(x)|dx = \int_0^1 (x^2+1)dx = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$.

9. a) $f'(x) = 2x + 1$. **b)** $f'(x) > 0,\ \forall x > -\frac{1}{2}$.

c) $f(0)+f(1)+...+f(n) \ =\sum_{k=0}^{n}(k^2+k+1)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{(n+1)(n^2+2n+3)}{3}$.

d) Din **c)** rezultă că $\lim_{n\to\infty}\frac{f(0)+f(1)+...+f(n)}{n^3}=\frac{1}{3}$.

e) $A=\int_{-1}^{1}|f(x)|dx=\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}(x^2+x+1)=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{8}{3}$

10. a) Se verifică prin calcul direct că $f(x)-\frac{1}{3(x-2)}+\frac{1}{3(x+1)}=0,\ \forall x\in\mathbb{R}-\{-1,2\}$.

b) $\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}f(x)=-\infty,\ \lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}f(x)=+\infty$ și $\lim_{\substack{x\to2\\x>2}}f(x)=\infty,\ \lim_{\substack{x\to2\\x<2}}f(x)=-\infty$, deci $x = -1$ și $x = 2$ sunt asimptote verticale la graficul lui f. Rezultă că f admite două asimptote verticale.

c) $\int_3^4 f(x)dx=\frac{1}{3}\int_3^4\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{1}{3}\ln\frac{x-2}{x+1}\Big|_3^4=\frac{1}{3}\left(\ln\frac{2}{5}-\ln\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{3}\left(\ln4-\ln\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{3}\ln\frac{8}{5}=\ln\frac{2}{5}$.

d) $\lim_{x\to\infty}x^2f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x+1)(x-2)}=1$.

e) $\lim_{n\to\infty}(f(3)+f(4)+...+f(n))=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-...-\frac{1}{n+1}\right)=$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{11}{18}$

11. a) Se verifică prin calcul direct că $f(x)-2+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}=0,\ \forall x\in[0,\infty)$.

b) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=2$, deci $y = 2$ este asimptotă orizontală la graficul funcției f.

c) $f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}$.

d) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 2dx-\int_0^1\frac{1}{x+1}dx-\int_0^1\frac{1}{x+2}dx=2x\Big|_0^1-\ln(x+1)\Big|_0^1-\ln(x+2)\Big|_0^1=2-\ln2-\ln3+\ln2=2-\ln3$.

e) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}(2x-\ln(x+1)-\ln(x+2)+\ln2)=2$.

Probleme recapitulative

Grupuri.

1. $AB \in M, \forall A, B \in M, (AB)C = A(BC),\ I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A \neq 0,\ A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{z}{xy} \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix}$, $AB \neq BA$.

2. $a = b, a \in \{0, -1\}$. **3.** $x * e = x, \forall x \in \mathbb{R}$; $x = 0, e = -2$, dar pentru $x = 1, x * e = e - 1 - e - 2 \neq 1 = x$. **4.** $a = b = 1$. **5.** $a \in \{0, 1\}$. **6.** $a = 3$. **7.** $a \in \left\{0, \frac{1}{4}\right\}$. **8.** $e = 0,\ x' = \frac{2x}{x-2} \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}, (x*y)*z = x*(y*z); x * y = y * z, \forall x, y, z \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$. **9.** $e = 1 + 0\sqrt{5}, a = x + y\sqrt{5}, a^{-1} = x - y\sqrt{5}$. **10.** $x*y = (x-4)(y-4)+4 = y*x$. **11.** $x*y = y*x$; $x*e = x \Rightarrow e = 4 \notin M$. **12.** $x, y \in M, x * y \in M$; $x*y = y*x$, $1+(x-1)^{\ln\sqrt{y-1}} = 1+(y-1)^{\ln\sqrt{x-1}}$, $\frac{1}{2}\ln(y-1)\ln(x-1) = \frac{1}{2}\ln(x-1)\ln(y-1), \forall x, y \in M$. **13.** $A_1A_2 \in M, A_1A_2 = A_2A_1, \forall A_1, A_2 \in M$. **14.** $m = \frac{1}{2}$. **15.** $A_x \cdot A_y \in M, E = A_0, A_xA_y = A_yA_x, \forall A_x, A_y \in M$. **16.** $x*y = (x-6)(y-6)+6; (x*y)*z = x*(y*z)$; $e = 7 \in M$; $x*y = y*x, x \in \{5, 7\}; x' = 6 + \frac{1}{x-6},\ x' \in \{5, 7\}$. **17.** $x, y \in M,\ x*y \in M, (x*y)*z = x*(y*z)$, $e_* = e$, $x*y = y*x$, $x*x' = e, e^{\ln x \ln x'} = e$, $\ln x \ln x' = 1$, $x' = e^{\frac{1}{\ln x}}, \forall x \in M$. **18.** Nu există $e_*, e_\top, e_\perp$.

19. $A_1A_2 \in M, \forall A_1, A_2 \in M$; $I = I_2$. Dacă $A \in M$ există A^{-1} dacă și numai dacă $x \neq 0$ și $y = 0$. $A^{-1} = \begin{pmatrix} x^{-1} & 0 \\ -x^{-1}y^{-1}z & y^{-1} \end{pmatrix}$. **20.** $a_1, a_2 \in M, a_1a_2 \in M$; $a = x + y\sqrt{7},\ x, y \in \mathbb{Q}, x^2 - 7y^2 = 1,\ \ e = 1, x^{-1} = x - y\sqrt{7}$, $\forall x, y \in \mathbb{Q}, x^2 - 7y^2 = 1$. **21.** a) $x * y = (x-3)(y-3)+3, x, y \in G$; $x - 3 > 0, y - 3 > 0, x * y > 3, x * y \in G$. b) $a \neq 0$, f este bijectivă ; $f(xy) = f(x) * f(y), a = 1, b = 3$. c) Inducție matematică. **22.** $x * y \in \mathbb{Z}, \forall x, y \in \mathbb{Z}$, $(x * y) * z = x * (y * z), e = 2, x' = 2 - x, x * y = y * x, \forall x, y, z \in \mathbb{Z}; f(x) = x - 2$ este bijectivă; $f(x * y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$. **23.** $x * y = (x-2)(y-2)+2$, $\underbrace{x*x*x*...*x}_{x \text{ de } n \text{ ori}} = (x-2)^n + 2, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. **24.** $(x*y)*z = x*(y*z)$; $e = 0$; $x' = -x$; $x*y = y*x$; $f : \mathbb{R} \to G$, bijectivă și $f(x+y) = f(x)*f(y)$; $f^{-1} : G \to \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \frac{1}{3}\ln\frac{x+3}{x-3}$ bijectivă, $f^{-1}(x*y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$. **25.** $A_1, A_2 \in G, A_1A_2 \in G, E = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A^{-1} = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, $x^2 + y^2 \neq 0$; $f^{-1} : \mathbb{C}^* \to G, f^{-1}(z) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$; $f : G \to \mathbb{C}^*, f(A) = z,\ A = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$, $z = x + iy$. f este bijectivă, $f(AB) = f(A) \cdot f(B)$. **28.** $A_1A_2 \in G, A_1, A_2 \in G, (A_1A_2)A_3 = A_1(A_2A_3), I_3 \in G,\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x & xz - y \\ 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.

27. a) $x, y \in G,\ x*y = (x-3)(y-3)+3, x*y \in G$; $(x*y)*z = x*(y*z)$, $e = 4 \in G, x' = 3 + \frac{1}{x-3} = \frac{3x-8}{x-3} \in G$, $x*y = y*x, \forall x, y \in G$. b) $f : G \to \mathbb{R}_+^*$, f bijectivă și $f(x*y) = f(x)\cdot f(y), \forall x, y \in G$. **28.** $e_* = -1,\ e_\perp = 1$; $x'_* = -2 - x \in \mathbb{Z}, x'_\perp = 2 - x \in \mathbb{Z}$; f bijectivă, $f(x*y) = f(x) \perp f(y)$. **29.** $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon+1 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$; $A^3 = E, A^{-1} = A^2$, $(A^2)^{-1} = E$. **30.** $A_1, A_2 \in G, A_1A_2 \in G$. $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{x^2 - 3y^2}\begin{pmatrix} x & -y \\ -3y & x \end{pmatrix} \in G, f : G \to \mathbb{Q}(\sqrt{3})$,

$f(A)=x+y\sqrt{3},\ A=\begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix}$ este bijectivă, $f^{-1}:\mathbb{Q}(\sqrt{3})\to G,\ f^{-1}(x+y\sqrt{3})=A,\ f(z_1z_2)=f(z_1)\cdot f(z_2);\ z_1=x_1+y_1\sqrt{3},$ $z_2=x_2+y_2\sqrt{3};\ x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2\in\mathbb{Q}.$

31. a) $x*y=(x-1)(y-1)+1\in G,\ e=2\in G,\ \ x'=1+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x}{x-1},\ \ x*y=y*x$. b) Inducție matematică.

32. $x*y=1-(x-1)(y-1),\ x,\ y\in G,\ x*y\in G;\ e=-1\in G, x'=1+\dfrac{4}{x-1}\in G,\ \ x*y=y*x$. **33.** a) $e = m + 1$, $x'=\dfrac{1-m^2+mx}{x-m},\ \ x*y=y*x$. **34.** $z_1 * z_2 =(z_2 - i)(z_2 - i) + i,\ e = 1 + i,\ z'=\dfrac{2+iz}{z-i}\in\mathbb{C}_1$. b) Inducție matematică.

35. $A_x\cdot A_y\in G,\ A_xA_y=A_{xy}=A_{yx};\ I_3=A_1,\ A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -\ln x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **36.** $x, y\in G,\ x*y\in G;\ e=0,\ x'=\dfrac{x}{x-k},\ x\neq k$.

37. $a\in G,\ x,\ y\in G,\ x*y\in G;\ \ a\cdot a'=a'\cdot a=e,\ e_*=a',\ x'_*{*}x=x*x'_*=e_*=a',\ x'_*=x'a'a',\ xy=yx,$ $x*y=y*x$. **38.** a) $e^{ax}\cdot e^{bx}=e^{(a+b)x}\in G$. a) $(e^{ax}e^{bx})e^{cx}=e^{(a+b+c)x}=e^{ax}\cdot(e^{bx}e^{cx});\ e=1,\ (e^{ax})'=e^{-ax}$; b) $f:G\to\mathbb{R}$, $f(e^{ax})=a$, f este bijectivă și $f(e^{ax}e^{bx})=f(e^{ax})+f(e^{bx})$. **39.** a) $x*y=\dfrac{xy}{xy+(x-1)(y-1)}\in G,$ $e=\dfrac{1}{2}\in(0,1),\ x'=1-x\in(0,1),\ x*y=y*x$. b) f bijectivă și $f(x*y)=f(x)\cdot f(y)$. **40.** $z_1, z_2\in\mathbb{C},\ z_1\perp z_2\in\mathbb{C},$ $z_1\top z_2\in\mathbb{C};\ e_\perp=-ai,\ e_\top=a;\ z'_\perp=-z-2ai,\ z'_\top=-z+2a;$ f bijectivă, $f(z_1\perp z_2)=f(z_1)\top f(z_2)$.

Inele și corpuri

1. $x\perp y\in\mathbb{Z},\ x\top y\in\mathbb{Z},\ (\mathbb{Z},\perp)$ este grup abelian, $e_\perp=3,\ x'_\perp=6-x,\ e_\top=4,\ (\mathbb{Z},\top)$ este monoid; $x\top(y\perp z)=$ $=(x\top y)\perp(x\top z)$. **2.** $(\mathbb{C},+)$ este grup abelian, $e_\top=0,\ z'=-z,\ z_1+z_2=z_2+z_1$; $(\mathbb{C},*)$ monoid comutativ, $e_*=1+i;\ z*(z_1+z_2)=(z*z_1)+(z*z_2)$. **3.** $z_1,\ z_2\in A,\ z_1+z_2\in A,\ z_1z_2\in A;\ e_+=(0,0);\ -z=(-x,-y);$ $z_1+z_2=z_2+z_1;\ e_\cdot=(1,0),\ z_1z_2=z_2z_1;\ z(z_1+z_2)=zz_1+zz_2;\ (A,+,\cdot)$ este inel comutativ; **4.** $A_1+A_2\in A;$ $A_1, A_2\in A;\ e_+=O_2,\ -A=A',\ A_1+A_2=A_2+A_1;\ A_1\cdot A_2\in A,\ A_1,\ A_2\in A;\ e_\cdot=I_2;\ A(A_1+A_2)=AA_1+AA_2.$
5. $(A,\perp,\top)$ este inel comutativ. $x\in A,\ x'\in A,\ x\top x'=x'\top x=e_\top,\ e_\top=-1;\ x\perp y=(x+2)(y+2)-2,\ x\perp x'=-1,$ $(x+2)(x'+2)-2=-1,\ \ x'=-2+\dfrac{1}{x+2},\ \forall x\in\mathbb{Q}\setminus\{-2\},\ e_\perp=-2;\ x\top(y\perp z)=x\top y\perp x\top z$. **6.** $A_1,\ A_2\in K,$ $A_1A_2\in K,\ A_1+A_2\in K,\ e=O_2,\ (K,+)$ este grup abelian. $A_{x,y}=\begin{pmatrix} x+y & y \\ y & x-y \end{pmatrix}$, $(K-\{O_2\},\ \cdot)$ este grup abelian. $e=I_2$. $A^{-1}_{x,y}=\begin{pmatrix} \dfrac{x-y}{x^2-2y^2} & \dfrac{-y}{x^2-2y^2} \\ -\dfrac{y}{x^2-2y^2} & \dfrac{x+y}{x^2-2y^2} \end{pmatrix}$; $A_1(A_2+A_3)=A_1A_2+A_1A_3;\ A_1A_2=A_2A_1$. **7.** $z_1,\ z_2\in K,\ z_1+z_2\in K,\ z_1z_2\in K,$ $e_+=0,\ e_\cdot=1,\ (K,+)$ grup abelian, $(K,\cdot)$ grup abelian, $z(z_1+z_2)=zz_1+zz_2$. **8.** $(K,\perp)$ grup abelian, $(K-e_\perp,\top)$ grup abelian. $x\top(y\perp z)=x\top y\perp x\top z$.

Primitive. Integrale nedefinite. Integrale definite.

99. a) $\frac{14}{3}$; b) $\frac{2}{3}+\frac{32\sqrt{2}}{7}$; c) $\frac{5\sqrt{5}-7}{12}$; d) $2\ln 5-4+2\sqrt{e-1}+2\operatorname{arctg}2-2\operatorname{arctg}\sqrt{e-1}$; e) $1-2\ln 2$; f) $\frac{17}{6}-4\ln 2$; g) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$; h) $\frac{2}{\pi}$. **100.** a) ln3; b) $1-\ln 2$; c) $\ln 3-\frac{\pi}{3}$; d) $\frac{\pi}{2}-\ln 3$. **101.** a) $\frac{8}{15}$; b) $\frac{2}{15}$; c) ln3; d) 8π. **102.** a) $\sqrt{3}-\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})$; b) 2π; c) $\frac{4}{35}(16-9\sqrt{2})$; d) $\frac{\pi}{2}-1$. **103.** a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{8}\left(2+\ln\frac{27}{16}\right)$; c) $1-e+(1+e)\ln(1+e)-\ln 4$; d) $-2\operatorname{arctg}\alpha+\ln\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$, unde $\alpha=\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}$. **104.** a) 4; b) 0; c) 4; d) 4. **105.** a) $2\ln\frac{5}{3}$; b) $e+\frac{1}{e}-2$; c) $\frac{1}{2}(1+e^2)$; d) $\frac{e}{2}(1+e^4)$. **106.** a) $2-\frac{2}{e}$; b) $2e-2$; c) 4π; d) 4π. **107.** a) $\frac{\pi}{12}+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$; b) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$; c) $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}$; d) $\frac{1}{4}(-1+\ln 4)$. **108.** a) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\ln(1+\sqrt{2})$; b) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$; c) 2; d) 1. **109.** a) $\frac{1}{16}(\pi^2+4)$; b) $\frac{1}{16}(\pi^2-4)$; c) $-\frac{1}{2}\pi^2$; d) $\frac{\pi}{2}$. **110.** a) 2; b) $\frac{\pi}{2}$; c) π^2; d) 2. **111.** a) $\frac{\pi}{4}$; b) $\frac{\pi}{4}$; c) $\frac{5\pi}{32}$; d) $\frac{4}{9}$. **112.** a) $e^{\pi/2}$; b) $e^{\pi/4}$; c) $\frac{\pi}{4}$; d) $\pi\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$.

114. Se minorează și se majorează funcțiile $\sqrt{x^4+1}$ și $e^{x^2}+e^{1-x^2}$. **115.** a) $I_n=e-nI_{n-1}$; $e-1$; 1; $e-2$; $6-2e$; b) $I_n=-\frac{1}{e}+nI_{n-1}$; $1-\frac{1}{e}$; $1-\frac{2}{e}$; $2-\frac{5}{e}$; $6-\frac{16}{e}$; c) $(2n+3)I_n=2nI_{n-1}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{15}$; $\frac{16}{105}$; $\frac{32}{315}$; d) $(2n+1)I_n=2nI_{n-1}$; 1; $\frac{2}{3}$; $\frac{8}{15}$; $\frac{48}{105}$.

Aplicații ale integralei.

1. a) f este strict crescătoare pe $(-\infty,-2)$ și pe $(-2,+\infty)$; b) $\alpha=3$, $\beta=-7$; c) $|3-7\ln 2|$.

2. a) $f'(x)=-2\cos x(2\sin x-1)$; 0, $\frac{\pi}{2}$, π puncte de minim, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ puncte de maxim; b) 4. **3.** a) $f'(x)=\frac{x+2}{x+1}$, f strict crescătoare pe $(-1,+\infty)$; b) $A(\alpha)=\frac{\alpha^2}{2}-\alpha+(\alpha+1)\ln(\alpha+1)$; c) $\lim_{\alpha\to-1}A(\alpha)=\frac{3}{2}$.

4. a) $\lim_{h\nearrow 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=-\infty$; b) $F(x)=\left(6-2x-\frac{(3-x)^2}{5}\right)\sqrt{3-x}$; c) $\frac{9}{4}$; d) $\frac{45\pi}{2}$. **5.** a) $f'(x)=-3\sin 3x$, $f''(x)=-9\cos 3x$; c) $2+\frac{\pi}{9}$; d) $\frac{\pi^2}{4}+\frac{2\pi}{3}$. **6.** a) f strict descrescătoare pe $(-\infty,\ln 2)$, strict crescătoare pe $(\ln 2,+\infty)$; b) $S=6$; $V=\pi(15-8\ln 4)$; c) $5\ln 4-6$. **7.** a) $\frac{\pi}{8}$; b) $\sin^4 4x=(\sin^2 4x)^2=\left(\frac{1-\cos 8x}{2}\right)^2=\frac{7}{8}-\frac{1}{2}\cos 8x+\frac{1}{8}\cos 16x$ c) $V=\frac{3\pi^2}{32}$. **8.** a) $F(x)=\ln|\ln x|+\mathscr{C}$; b) $A=-\frac{1}{2}\ln(\ln\alpha)-\left(1-\frac{\alpha}{e}\right)$. **9.** a) $f^{-1}(y)=\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$.

10. b) $\int_{-3}^{3}f(x)dx=2\int_0^3(f(x)+f(-x))dx=6$; c) $S=\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$. **12.** a) $\frac{22}{3}$; b) 8. **13.** a) $\frac{32}{3}$; b) $\frac{7}{6}$.

$$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \mathscr{C},\ \alpha \neq -1$$
$$\int a^{x}\,dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + \mathscr{C},\ a \in \mathbb{R}_{+}^{*} \setminus \{1\}$$
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + \mathscr{C}$$
$$\int \frac{1}{x^{2}-a^{2}}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + \mathscr{C},\ a \neq 0$$
$$\int \frac{1}{x^{2}+a^{2}}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \mathscr{C},\ a \neq 0$$
$$\int \sin x\,dx = -\cos x + \mathscr{C}$$
$$\int \cos x\,dx = \sin x + \mathscr{C}$$
$$\int \frac{1}{\cos^{2} x}\,dx = \operatorname{tg} x + \mathscr{C}$$
$$\int \frac{1}{\sin^{2} x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + \mathscr{C}$$
$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + \mathscr{C}$$
$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = -\ln|\sin x| + \mathscr{C}$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^{2}+a^{2}}}\,dx = \ln\left(x + \sqrt{x^{2}+a^{2}}\right) + \mathscr{C},\ a \neq 0$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^{2}-a^{2}}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^{2}-a^{2}}\right| + \mathscr{C}$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + \mathscr{C},\ a > 0$$