MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Marius Burtea **Georgeta Burtea**

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a XI-a M2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii (TC + CD)
Filiera tehnologică, toate calificările profesionale (TC), 3 ore/săptămână

editura prior&books

ARIA CURRICULARĂ - MATEMATICĂ ȘI ȘTIINȚELE NATURII

BUCUREȘTI, 2011

Manualul a fost aprobat prin Ordinul ministrului Educaţiei şi Cercetării nr. 4446 din 19.06.2006 în urma evaluării calitative organizate de către Consiliul Naţional pentru Evaluare şi Difuzarea Manualelor şi este în conformitate cu programa analitică aprobată prin Ordin al ministrului Educaţiei şi Cercetării nr. 3252 din 13.02.2006.

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
BURTEA, MARIUS
Manual de matematică M2: clasa a XI-a / Marius Burtea, Georgeta Burtea. - Bucureşti : Prior & Books Educaţional, 2011
ISBN 978-973-1908-05-2

I. Burtea, Georgeta

51(075.35)(076)

Matematică M2 – Manual pentru clasa a XI-a - Ediția a 3-a revizuită 2011
Marius Burtea, Georgeta Burtea

Editura Prior & Books Educațional, București, 2011

RDS-tel: [+4] 031 425 21 77 | [+4] 0771 633 185 | [+4] 0771 633 185
E-mail: office@bup.ro | WEB: www.bup.ro

prior & books educațional

Bucureşti, Str. Răspântiilor Nr. 32, Sector 2, cod poştal 0205448

Prefaţă

Manualul se adresează elevilor de liceu din clasa a XI-a de la următoarele filiere şi profiluri:

- Filiera tehnologică, profilul real, specializarea ştiinţele naturii (TC + CD);
- Filiera tehnologică, toate calificările profesionale (TC).

Aceste este conceput pe baza noului curriculum şcolar elaborat pentru clasa a XI-a, vizând formarea de competenţe, valori şi aptitudini în actul învăţării, elemente care să dea posibilitate elevilor să perceapă mai uşor dimensiunile realităţii înconjurătoare şi să aplice metodele matematice în situaţii cât mai diverse.

Manualul este format în esenţă din două părţi distincte.

Partea întâi, intitulată *Elemente de calcul matriceal şi sisteme de ecuaţii liniare,* cuprinde capitolele: Matrice, Determinanţi şi Sisteme de ecuaţii liniare.

Partea a doua, intitulată *Elemente de analiză matematică*, este formată din următoarele capitole: Limite de funcţii, Funcţii continuă, Funcţii derivabile şi Studiul funcţiilor cu ajutorul derivatelor.

Partea aplicativă este constituită din următoarele elemente:

- Exerciţii şi probleme rezolvate. Acestea sunt plasate în fiecare paragraf, după introducerea unei noţiuni şi a teoriei ce se dezvoltă în jurul ei. Ele oferă modele de aplicare şi folosire a elementelor teoretice în exerciţii şi probleme.
- Teste de evaluare. Ele apar după un grup de teme sau la sfârşitul capitolelor.
- Seturi de exerciţii şi probleme propuse structurate în două categorii:

  a) Exerciţii şi probleme pentru exersare, notate cu litera **E**. Parcurgerea acestora asigură însuşirea şi folosirea noţiunilor de bază învăţate într-o lecţie.

  b) Exerciţii şi probleme de sinteză, notate cu litera **S**. Acestea au un grad de dificultate mai ridicat decât cele de la Exersare şi asigură o sinteză a cunoştinţelor, conexiuni între diferite noţiuni din lecţia curentă, capitolul curent şi din capitolele anterioare.
- Teme care solicită demonstrarea unor rezultate sau rezolvarea unor cerinţe pe baza unor modele care apar în conţinutul unei lecţii.
- Seturi de probleme recapitulative care acoperă întreaga tematică a manualului. Acestea se constituie într-o rezervă de probleme pentru teme suplimentare, pentru lucrări de verificare semestrială sau verificare curentă.

Manualul se încheie cu un paragraf de „Răspunsuri şi indicaţii de rezolvare“, pentru un număr semnificativ de exerciţii şi probleme.

AUTORII

PARTEA I

Elemente de calcul matriceal. Sisteme de ecuaţii liniare

Capitolul 1

Matrice

1.1. Tabel de tip matriceal. Matrice, mulţimi de matrice

1.1.1. Tabel de tip matriceal

În diverse activităţi practice legate de înregistrarea, gruparea, analiza şi interpretarea datelor referitoare la desfăşurarea unui anumit fenomen de natură tehnică sau economică apare necesitatea organizării acestor date informative în diverse tablouri (tabele) care să servească într-o manieră optimă scopului propus.

Să considerăm următoarea situaţie practică:

Situaţia vânzărilor la 4 librării dintr-un oraş într-o perioadă de timp este prezentată în tabelul de mai jos, în care se specifică librăria, tipul de carte vândut şi numărul de exemplare vândute din fiecate tip.

Tabelul 1.1.

Produsul / Librăria	Carte şcolară	Literatură universală	Carte tehnică	Beletristică	Dicţionare
Librăria nr. 1	55	14	4	20	2
Librăria nr. 2	30	24	0	52	10
Librăria nr. 3	45	15	8	40	7
Librăria nr. 4	28	10	3	50	9

Din acest tabel putem extrage cu uşurinţă informaţii despre vânzările unor librării citind datele situate pe **linii**, precum şi informaţii privind vânzările unui anumit tip de carte, la cele 4 librării, extrăgând datele situate pe o anumită **coloană.**

EXEMPLE

- la librăria nr. 2 s-au vândut 30 de exemplare de carte şcolară, 24 de exemplare de literatură universală, nicio carte de tehnică, 52 de cărţi de beletristică şi 10 dicţionare;
- dicţionarele s-au vândut astfel: două dicţionare la librăria nr. 1, 10 la librăria nr. 2, 7 la librăria nr. 3 şi 9 la ultima librărie;
- numărul 50 situat la intersecţia liniei a patra cu coloana a patra a tabelului reprezintă numărul de cărţi de beletristică vândute la librăria nr. 4.

Datele tabelului de mai sus pot fi scrise sub o altă formă, într-un tabel format din 4 linii şi 5 coloane astfel:

$$\begin{pmatrix} 55 & 14 & 4 & 20 & 2 \\ 30 & 24 & 0 & 52 & 10 \\ 45 & 15 & 8 & 40 & 7 \\ 28 & 10 & 3 & 50 & 9 \end{pmatrix}$$

↳ *DEFINIŢIE.*

> *Un tabel în care datele sunt scrise pe linii şi pe coloane se numeşte* ***tabel de tip matriceal.***

Un tabel de tip matriceal format din m linii şi n coloane, unde $m, n \in \mathbb{N}^*$ are forma următoare:

Tabelul 1.2.

	Coloana 1	Coloana 2	Coloana 3	....	Coloana *n*
Linia 1					
Linia 2					
Linia 3					
....					
Linia *m*					

Poziţia unei date din tabelul de tip matriceal este bine precizată când se indică linia şi coloana pe care se află.

Vom utiliza notaţia literală a_{ij} pentru a indica elementul situat la intersecţia liniei i cu coloana j, unde $i \in \{1, 2, ..., m\}$ şi $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

EXEMPLU

Pentru tabelul de tip matriceal de mai sus avem:

▷ $a_{11} = 55$; $a_{12} = 14$; $a_{23} = 0$; $a_{35} = 7$; $a_{44} = 50$ etc.

▷ $28 = a_{14}$; $8 = a_{33}$; $10 = a_{25}$; $3 = a_{43}$; $9 = a_{45}$ etc.

TEMĂ

1. Să se alcătuiască două exemple de tabele de tip matriceal cu două linii şi trei coloane, rspectiv cu trei linii şi două coloane.

2. Evidenţa încasărilor (exprimate în milioane de unităţi monetare) la ghişeele unei filiale CEC pe o perioadă de o lună este redată în tabelul 1.3.

Tabelul 1.3.

Nr. săptămânii / Nr. ghişeului	Săptămâna I	Săptămâna a II-a	Săptămâna a III-a	Săptămâna a IV-a
1	120	**330**	105	**320**
2	80	110	**160**	215
3	135	**95**	**140**	190

a) Să se interpreteze datele din coloana a 3-a şi apoi cele din linia a 2-a.

b) Ce reprezintă numerele: 135, 110, 320?

c) Dacă a_{ij} reprezintă suma încasată la ghişeul cu numărul i în săptămâna j, să se determine:

$$a_{24},\ a_{31},\ a_{22},\ a_{11},\ a_{34},\ a_{13}.$$

d) După modelul $80 = a_{21}$, să se completeze:

$$95 = ...,\ 160 = ...,\ 320 = ...,\ 140 = ...,\ 330 = ...$$

1.1.2. Matrice. Mulţimi de matrice

Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ două numere naturale şi mulţimile $N_m = \{1, 2, ..., m\}$, $N_n = \{1, 2, ..., n\}$ şi $\mathbb{C}$ mulţimea numerelor complexe.

↳ DEFINIŢIE.

Se numeşte matrice[1] *de tipul* (m, n) *sau matrice cu m linii şi n coloane cu elemente din mulţimea* $\mathbb{C}$ *o funcţie*

$$A: N_m \times N_n \to \mathbb{C},\ A(i, j) = a_{ij},\ i \in N_m,\ j \in N_n.$$

Numerele $a_{ij} \in \mathbb{C}$ se numesc *elementele matricei*.

1 Noţiunea de matrice a fost introdusă în anul 1858 de matematicianul englez Arthur Cayley (1821–1895) care foloseşte notaţia $A = \left\| a_{ij} \right\|_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$. În 1919, la sugestia lui M. Bôcher, s-a introdus notaţia $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$.

Cele $m \cdot n$ elemente ale matricei vor fi aşezate într-un tabel de tip matriceal format din m linii şi n coloane, obţinându-se următoarea reprezentare a matricei:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Prescurtat, o matrice de tipul (m, n) se notează sub forma:

$$A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \text{ sau } A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1, m} \\ j=\overline{1, n}}} \text{ sau } A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}.$$

EXEMPLE

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & \sqrt{5} & -4 \end{pmatrix}$ este matrice de tipul (2, 3) cu elemente din $\mathbb{R}$.

  Elementele ei sunt:

  $$a_{11} = 1,\ a_{12} = -3,\ a_{13} = 0,\ a_{21} = 2, a_{22} = \sqrt{5},\ a_{23} = -4.$$

- $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ este o matrice de tipul (3, 3) cu elemente din $\mathbb{Z}$.

Se observă că: $0 = a_{21}$, $-2 = a_{13}$, $2 = a_{31}$, $a_{33} = a_{32} = 4$, $a_{22} = a_{23} = 1$.

De obicei, matricele se notează cu literele mari ale alfabetului latin, eventual însoţite de indici: $A, B, C, \dots, A_1, A_2, \dots$

Mulţimea tuturor matricelor de tipul (m, n) cu elemente din mulţimea numerelor complexe se notează $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. În mulţimea $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ se disting câteva submulţimi importante de matrice:

- $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ – mulţimea matricelor de tipul (m, n) cu elemente numere reale;
- $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Q})$ – mulţimea matricelor de tipul (m, n) cu elemente numere raţionale;
- $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$ – mulţimea matricelor de tipul (m, n) cu elemente numere întregi.

Deoarece $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, între mulţimile de matrice enumerate există relaţia:

$$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Q}) \subset \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}).$$

EXEMPLE

- $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -5\end{pmatrix}\in M_{2,2}\ (\mathbb{Z});$
- $B=\begin{pmatrix}0 & -2\\ \frac{5}{2} & 0,(3)\end{pmatrix}\in M_{2,2}\ (\mathbb{Q})$
- $C=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -1\\ 3 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\in M_{2,2}\ (\mathbb{R});$
- $D=\begin{pmatrix}2-i & 3 & \sqrt{2}\\ 1 & 4 & 5i\end{pmatrix}\in M_{2,3}\ (\mathbb{C}).$

Matrice particulare

1. Dacă $n=1$, matricea A este de tipul $(m,\ 1)$ şi se numeşte *matrice coloană.* Aceasta are forma

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{pmatrix}.$$

De exemplu, în calendarul lunii septembrie 2006 ziua de duminică are următoarele date 3, 10, 17, 24 scrise pe coloană.

Septembrie 2006

L	Ma	Mi	J	V	S	D
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	

Aşadar, avem matricea $A=\begin{pmatrix}3\\ 10\\ 17\\ 24\end{pmatrix}$, unde $a_{11}=3,\ a_{21}=10,\ a_{31}=17, a_{41}=24.$

2. Dacă $m=1$ matricea A este de tipul $(1,\ n)$ şi se numeşte *matrice linie.* Aceasta are următoarea scriere:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n}\end{pmatrix}.$$

De exemplu, săptămâna a 36-a a anului 2006 începe în data de 4 septembrie. Putem forma astfel matricea linie $B=\begin{pmatrix}4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10\end{pmatrix}$.

3. Dacă numărul m al liniilor este egal cu numărul n al coloanelor, matricea este de tipul (n, n) şi se numeşte **matrice pătratică de ordinul *n*.**

Mulţimea matricelor pătratice de ordinul n cu elemente în $\mathbb{C}$ se notează $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Forma generală a matricei pătratice de ordinul n este:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Sistemul ordonat de elemente $(a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn})$ din matricea pătratică A formează **diagonala principală** a matricei A, iar sistemul ordonat $(a_{1n}, a_{2n-1}, ..., a_{n1})$ se numeşte **diagonala secundară** a matricei A.

Suma elementelor diagonalei principale se numeşte **urma** matricei şi se notează tr (A).

EXEMPLU

➢ Fie matricea pătratică $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 3 & 9 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Diagonla principală este $(-2, 9, 3)$, diagonala secundară este $(5, 9, -1)$, iar urma matricei este $\operatorname{tr}(A) = -2 + 9 + 3 = 10$.

4. Matricea pătratică care are toate elementele diagonalei principale egale cu 1, iar celelalte elemente sunt egale cu zero se numeşte **matricea unitate de ordinul *n*,** notată I_n. Aceasta are forma generală:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Cazuri particulare:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Matricea de tipul (m, n) cu toate elementele egale cu zero se numeşte **matricea nulă** şi se notează $O_{m,n}$. Dacă $m = n$, matricea nulă se notează O_n. Avem:

$$O_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix};\ O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrice egale

Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$. Matricele A şi B se numesc **matrice egale** dacă $a_{ij} = b_{ij}$ pentru oricare $i \in \{1, 2, ..., m\}$ şi $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Proprietăţi ale egalităţii matricelor

1. Egalitatea matricelor este o relaţie *reflexivă* pe mulţimea matricelor:

$$\boxed{A = A,\ \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}).}$$

2. Egalitatea matricelor este o relaţie *simetrică* pe mulţimea matricelor:

$$\boxed{A = B \Rightarrow B = A,\ \forall\, A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}).}$$

3. Egalitatea matricelor este *tranzitivă:*

$$\boxed{A = B \text{ şi } B = C \Rightarrow A = C,\ \forall\, A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}).}$$

EXERCIŢIU REZOLVAT

Se dau matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 2x-1 & 2 & 5 \\ 4 & y-3 & 8 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5+3x & 2 & z^2+1 \\ t & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Să se determine $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $A = B$.

Rezolvare.

Avem: $\begin{pmatrix} 2x-1 & 2 & 5 \\ 4 & y-3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+3x & 2 & z^2+1 \\ t & 7 & 8 \end{pmatrix}.$

Aplicând egalitatea a două matrice de acelaşi tip se obţine succesiv:

$a_{11} = b_{11} \Rightarrow 2x - 1 = 5 + 3x$, cu soluţia $x = -6$;
$a_{13} = b_{13} \Rightarrow 5 = z^2 + 1$, cu soluţia $z \in \{-2, 2\}$;
$a_{21} = b_{21} \Rightarrow 4 = t$;
$a_{22} = b_{22} \Rightarrow y - 3 = 7$, cu soluţia $y = 10$.

Aşadar, $A = B$ dacă şi numai dacă $x = -6,\ y = 10,\ z = \pm 2,\ t = 4$.

Exerciţii şi probleme

Exersare

E1. Să se scrie o matrice

$$A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{Z}),\ B \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{Q}),\ C \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R}),\ X \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C}).$$

E2. Să se scrie:

a) o matrice coloană cu 4 linii;
b) o matrice linie cu 4 coloane;
c) matricea unitate de ordinul 5;
d) matricea nulă de tipul (3, 4).

E3. Se consideră matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -7 & 8 & -2 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & \sqrt{3} \\ -2 & -5 & \frac{4}{3} \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 1+i \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -i & \sqrt{5} & -7 \end{pmatrix}.$$

a) Să se precizeze tipul matricelor *A, B, C, D.*

b) Să se scrie elementele matricei B şi D precizând linia şi coloana pe care sunt aşezate. *Exemplu:* $b_{11} = 2,\ d_{13} = \sqrt{5}, \ldots$.

c) Să se completeze:

$a_{23} = \ldots,\ a_{32} = \ldots,\ a_{22} = \ldots,\ c_{31} = \ldots,\ c_{21} = \ldots,\ 1+i = \ldots,\ \sqrt{3} = \ldots,\ -4 = \ldots,$
$b_{23} = \ldots,\ d_{14} = \ldots$ şi altele.

d) Să se precizeze valoarea de adevăr a afirmaţiilor:

• $a_{11}+a_{22}+a_{33}$ reprezintă diagonala principală a matricei A.

• diagonala secundară a matricei A are suma elementelor egală cu 12.

• $a_{31}+b_{22}+c_{21}-d_{14}=\sqrt{3}+1$.

• $a_{23}\cdot b_{13}^2\cdot c_{31}^2\cdot d_{12}\geqslant -12$.

• $a_{23}=b_{21}=5d_{11}$.

E4. Matricea $X=\begin{pmatrix}3a-6 & 1-b & a^2-4\\ b^2-b & c-\sqrt{12} & 4-\sqrt{2}m\end{pmatrix}$ reprezintă matricea nulă de tipul (2, 3). Să se determine $a, b, c, m\in\mathbb{R}$.

E5. Matricea $A=\begin{pmatrix}x+1 & 0 & 0\\ 4-y^2 & 3u & 1-t\\ z^2+1 & v^2 & 1-x^2\end{pmatrix}$ reprezintă matricea unitate de ordinul 3. Să se determine numerele complexe x, y, z, t, u, v.

E6. Să se determine elementele necunoscute astfel încât să aibă loc egalitatea:

a) $\begin{pmatrix}2x+1 & -1\\ 5 & x-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y+6 & -1\\ |-5| & 4-2x+y\end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix}x+y & 2x-y\\ 4 & 2x+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & y+2\\ x+2y & 5\end{pmatrix}$.

E7. Se consideră matricele $A\in\mathcal{M}_{4,\,5-n}(\mathbb{C})$ şi $B\in\mathcal{M}_{m^2,\,2}(\mathbb{C})$. Să se determine $m, n\in\mathbb{Z}$ astfel încât să fie posibilă relaţia $A=B$.

Sinteză

S1. Să se scrie matricea $A=\left(a_{ij}\right)_{4\times4}$, ştiind că $a_{ij}=\max\{i, j\}$, $i, j=\overline{1, 4}$.

S2. Să se scrie matricea $B=\left(b_{ij}\right)_{3\times3}$, ştiind că $b_{ij}=j^{i+1}$, $i, j=\overline{1, 3}$.

S3. Să se scrie matricea $C=\left(c_{ij}\right)_{3\times4}$, ştiind că $c_{ij}=\begin{cases}2, & \text{dacă } i=j\\ 1, & \text{dacă } i>j\\ (-1)^{i+j}A_j^i, & \text{dacă } i<j\end{cases}$.

S4. Se dau matricele

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 3 & -2x & 1 \\ 5 & 6 & y^2+6 \end{pmatrix} \text{ şi } B = \begin{pmatrix} 4x & -6 & 2 \\ 0 & -x^2 & -10 \\ -4 & 0 & 2y \end{pmatrix}.$$

a) Să se scrie tr (A) şi tr (B).
b) Pentru ce valori ale lui y are loc egalitatea $a_{33} + b_{33} = a_{21} - b_{12}$?
c) Pentru ce valori ale lui x are loc egalitatea $a_{22} + 2b_{22} = a_{32} + b_{23}$?
d) Să se determine $x,\ y \in \mathbb{R}$ astfel ca $\mathrm{tr}(A) - \mathrm{tr}(B) = a_{13} + b_{31}$.

S5. Se dau matricele pătratice

$$A = \begin{pmatrix} 2^{x-1} & 0 \\ \log_2(a-1) & 4y^2 - 3x \end{pmatrix} \text{ şi } B = \begin{pmatrix} 3^x - 9^x & \lg\dfrac{y^2-2y}{3} \\ a+3bi-1 & 3! - C_n^2 \end{pmatrix}.$$

a) Să se determine $x,\ y,\ a \in \mathbb{R}$ astfel încât $A = I_2$.
b) Pentru ce numere $x,\ y,\ a,\ b,\ n \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea $O_2 = B$?

S6. Să se determine elementele necunoscute din următoarele egalităţi de matrice:

a) $\begin{pmatrix} a^2-4 & a+b \\ 3x(1-2x) & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-a & -1 \\ 2x-1 & x-2 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} C_{n+1}^2 & \sqrt{x^2+7} \\ \sqrt[3]{b^2} & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot C_n^2 & 4 \\ 4 & \log_2 a \end{pmatrix}$.

S7. Să se determine numerele reale pozitive *x, y, z, m, p* pentru care următoarele matrice sunt egale:

$$A = \begin{pmatrix} x^2 - x & 2 \\ 3 & 2^m \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{y-3} \\ 3 & m^2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3x-4 & y-5 \\ C_{z+1}^2 & p \end{pmatrix}.$$

1.2. Operaţii cu matrice

1.2.1. Adunarea matricelor

Să analizăm următoarea situaţie practică.

O agenţie turistică oferă pentru două luni de vacanţă locurile deţinute în 3 staţiuni balneare în sejururi de câte o săptămână. Evidenţa repartizării numerice pe staţiuni şi săptămâni a fost făcută pe câte o lună sub forma următoarelor tabele de tip matriceal:

Tabelul 1.4.

Săptămâna / Staţiunea	Săptămâna I	Săptămâna a II-a	Săptămâna a III-a	Săptămâna a IV-a
Staţiunea 1	10	12	14	35
Staţiunea 2	16	28	10	18
Staţiunea 3	14	25	25	42

Tabelul 1.5.

Săptămâna / Staţiunea	Săptămâna I	Săptămâna a II-a	Săptămâna a III-a	Săptămâna a IV-a
Staţiunea 1	20	16	20	25
Staţiunea 2	14	32	28	22
Staţiunea 3	51	40	15	48

Pentru o evidenţă de ansamblu privind numărul de locuri oferite în cele 3 staţiuni pe săptămâni, se poate alcătui un nou tabel de tip matriceal obţinut prin însumarea datelor numerice corespunzătoare (staţiune-săptămână) din cele două tabele. Se obţine următorul tabel de tip matriceal:

Tabelul 1.6.

Săptămâna / Staţiunea	Săptămâna I	Săptămâna a II-a	Săptămâna a III-a	Săptămâna a IV-a
Staţiunea 1	30	28	34	60
Staţiunea 2	30	60	38	40
Staţiunea 3	65	65	40	90

Dacă asociem tabelelor matriceale 1.4 şi 1.5 matricele:

$$A=\begin{pmatrix}10 & 12 & 14 & 35\\ 16 & 28 & 10 & 18\\ 14 & 25 & 25 & 42\end{pmatrix},\quad \text{respectiv}\quad B=\begin{pmatrix}20 & 16 & 20 & 25\\ 14 & 32 & 28 & 22\\ 51 & 40 & 15 & 48\end{pmatrix},$$

atunci tabelul matriceal 1.6 corespunde matricei $C=\begin{pmatrix}30 & 28 & 34 & 60\\ 30 & 60 & 38 & 40\\ 65 & 65 & 40 & 90\end{pmatrix}$.

Matricea C reprezintă suma matricelor A şi B şi se scrie $C = A + B$.

DEFINIŢIE.

Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_{m\,n}(\mathbb{C})$, unde $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ şi *$B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$. Se numeşte **suma matricelor A şi B** matricea $\boldsymbol{C=(c_{ij})_{m\times n}}$ ale cărei elemente sunt date de egalităţile $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, pentru oricare $i\in\{1, 2, ..., m\}$ şi $j=\{1, 2, ..., n\}$.*

Suma matricelor A şi B se notează $C = A + B$. Operaţia prin care oricăror două matrice din mulţimea $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ se asociază suma lor se numeşte *adunarea matricelor.*

EXEMPLU

- Dacă $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 0 & 2\\ \sqrt{5} & 4 & -1 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & 3\\ -\sqrt{5} & -2 & 0 & 4\end{pmatrix}$, atunci

$$A+B=\begin{pmatrix}3+(-1) & -2+2 & 0+1 & 2+3\\ \sqrt{5}+(-\sqrt{5}) & 4+(-2) & -1+0 & 1+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & 5\\ 0 & 2 & -1 & 5\end{pmatrix}.$$

Proprietăţile adunării matricelor

1. Adunarea matricelor este *comutativă:*

$$\boxed{A+B=B+A,\ \forall A,B\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}).}$$

Într-adevăr, dacă $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$, atunci $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ şi $B+A=(b_{ij}+a_{ij})_{m\times n}$.

Deoarece adunarea numerelor complexe este comutativă, au loc egalităţile:

$$a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij},\ \forall i\in\{1, 2, ..., m\} \text{ şi } j\in\{1, 2, ..., n\}.$$

Rezultă că $A+B=B+A$.

2. Adunarea matricelor este *asociativă:*

$$\boxed{(A+B)+C=A+(B+C),\ \forall\, A,B,C\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}).}$$

Într-adevăr, dacă $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ şi $C=\left(c_{ij}\right)_{m\times n}$, folosind proprietatea de asociativitate a numerelor complexe rezultă egalităţile matriceale:

$$(A+B)+C=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}+(c_{ij})_{m\times n}=\left((a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}\right)_{m\times n}=$$
$$=\left(a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})\right)_{m\times n}=A+(B+C)$$

3. *Matricea nulă $O_{m,n}$ este element neutru* pentru adunarea matricelor:

$$\boxed{A+O_{m,n}=O_{m,n}+A=A,\ \forall A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}).}$$

Într-adevăr,

$$A+O_{m,n}=(a_{ij}+0)_{m,n}=(a_{ij})_{m\times n}=A=(0+a_{ij})_{m\times n}=O_{m,n}+A,\ \forall A=(a_{ij})_{m\times n}.$$

4. Pentru orice matrice $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ există matricea $B\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ astfel încât $A+B=B+A=O_{m,n}$.

Dacă $A=(a_{ij})_{m\times n}$, definim matricea $B=(b_{ij})_{m\times n}$ astfel încât $b_{ij}=-a_{ij}$, $\forall\, i\in\{1, 2, ..., m\}$ şi $j\in\{1, 2, ..., n\}$.

Matricea B cu această proprietate se numeşte *opusa matricei A* şi se notează $-A=(-a_{ij})_{m\times n}$.

EXEMPLU

- Dacă $A=\begin{pmatrix}2 & -4 & \sqrt{5}\\ \frac{4}{3} & \frac{1}{6} & 0\end{pmatrix}$, atunci $-A=\begin{pmatrix}-2 & 4 & -\sqrt{5}\\ -\frac{4}{3} & -\frac{1}{6} & 0\end{pmatrix}$ şi

$$A+(-A)=\begin{pmatrix}2 & -4 & \sqrt{5}\\ \frac{4}{3} & \frac{1}{6} & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 4 & -\sqrt{5}\\ -\frac{4}{3} & -\frac{1}{6} & 0\end{pmatrix}=O_{2,3},$$

$$(-A)+A=\begin{pmatrix}-2 & 4 & -\sqrt{5}\\ -\frac{4}{3} & -\frac{1}{6} & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -4 & \sqrt{5}\\ \frac{4}{3} & \frac{1}{6} & 0\end{pmatrix}=O_{2,3}.$$

OBSERVAŢII

- ✓ Dacă $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, atunci suma $A+(-B)$ se notează $A-B$ şi se numeşte *diferenţa matricelor A şi B.*
- ✓ Operaţia prin care la oricare matrice $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ se asociază diferenţa lor se numeşte *scăderea matricelor.*

EXEMPLU

➢ Fie matricele pătratice de ordinul 2, $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Rezultă că

$$A-B=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 3+2 & -4+(-1) \\ 5+(-3) & 2+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1.2.2. Transpusa unei matrice

Se consideră următoarele matrice:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ a & b & c \end{pmatrix} \text{ şi } B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & -2 & b \\ 3 & -3 & c \end{pmatrix}.$$

Analizând structura liniilor şi coloanelor matricelor A şi B se observă că:

- liniile matricei A sunt coloane în matricea B şi reciproc;
- coloanele matricei A sunt linii în matricea B şi reciproc.

➯ *DEFINIŢIE.*

Fie $A=(a_{ij})_{m\times n}$ o matrice de tipul (m, n). Se numeşte ***transpusa matricei A****, matricea notată ${}^tA=(b_{kl})_{n\times m}$, unde $b_{kl}=a_{lk}$, $\forall k\in\{1, 2, ..., n\}$ şi $l\in\{1, 2, ..., m\}$.*

Operaţia prin care fiecărei matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ i se asociază matricea ${}^tA \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ se numeşte *operaţia de transpunere a matricelor.*

OBSERVAȚII

- ✓ Transpusa matricei A se obţine din matricea A schimbând liniile în coloane sau/şi coloanele în linii.
- ✓ Dacă matricea A este de tipul (m, n), atunci matricea ${}^tA$ este de tipul (n, m).
- ✓ Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ atunci ${}^tA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi are aceeaşi diagonală principală ca şi A.

EXEMPLE

- ➢ Matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ de tipul (2, 2) are matricea transpusă ${}^tA = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ de tipul (2, 2).
- ➢ Matricea $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, de tipul (1, 4) are matricea trnspusă ${}^tB = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ de tipul (4, 1).

EXERIŢIU REZOLVAT

Fie matricea de ordinul trei $A = \begin{pmatrix} 3 & 4-x & 9 \\ 8 & 0 & 2y-3 \\ z^2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. *Să se găsească numerele* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $A = {}^tA$.

Rezolvare.

Din condiţia $A = {}^tA$ se obţine $\begin{pmatrix} 3 & 4-x & 9 \\ 8 & 0 & 2y-3 \\ z^2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & z^2 \\ 4-x & 0 & -2 \\ 9 & 2y-3 & 1 \end{pmatrix}$.

Aplicând egalitatea matricelor se obţin ecuaţiile: $4-x=8$, $2y-3=-2$, $9=z^2$, cu soluţiile $x=-4$, $y=\frac{1}{2}$, respectiv $z=\pm 3$.

1.2.3. Înmulţirea unei matrice cu un scalar

Să pornim de la următoare situaţie practică:

Cantităţile de produse vândute de un magazin în primele trei luni ale anului la trei sortimente principale sunt consemnate în următorul tabel de tip matriceal.

Tabelul 1.7.

Produsul \ Luna	Ianuarie	Februarie	Martie
Aragaze	18	25	28
Frigidere	15	24	35
Maşini de spălat	30	45	56

În următoarele 3 luni se prognozează o creştere a vânzărilor şi de aceea se hotărăşte ca pentru aprovizionare să se dubleze cantităţile de produse vândute anterior.

Ca urmare, lista aprovizionării pe următoarele 3 luni va fi dată de următorul tabel de tip matriceal.

Tabelul 1.8.

Produsul \ Luna	Aprilie	Mai	Iunie
Aragaze	36	50	56
Frigidere	30	48	70
Maşini de spălat	60	90	112

Dacă primului tabel îi asociem matricea $A = \begin{pmatrix} 18 & 25 & 28 \\ 15 & 24 & 35 \\ 30 & 45 & 56 \end{pmatrix}$, atunci celui de-al doilea tabel îi asociem matricea $B = \begin{pmatrix} 36 & 50 & 56 \\ 30 & 48 & 70 \\ 60 & 90 & 112 \end{pmatrix} = 2A$.

Aşadar, se poate spune că matricea $B = 2A$ se obţine din matricea A înmulţind fiecare element al matricea A cu numărul real 2.

➭ DEFINIŢIE.

Fie matricea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ şi $k \in \mathbb{C}$ un număr complex. Se numeşte ***produsul dintre numărul k şi matricea A*** *o matrice $B = (b_{ij})_{m\times n}$ ale cărei elemente sunt date de egalităţile $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$, $\forall\, i \in \{1, 2, ..., m\}$ şi $j \in \{1, 2, ..., n\}$. Se scrie $k \cdot A = B$.*

Operaţia prin care oricărui număr complex şi oricărei matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ se asociază produsul $k \cdot A$ se numeşte *înmulţirea matricelor cu un scalar.*

EXEMPLU

➢ Fie $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 \\ \frac{3}{2} & -1 & -\frac{7}{3} \end{pmatrix}$ şi $k = -6$. Avem

$$-6 \cdot A = \begin{pmatrix} -6\cdot 3 & -6\cdot(-5) & -6\cdot(4) \\ -6\cdot\frac{3}{2} & -6\cdot(-1) & -6\cdot\left(-\frac{7}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 30 & -24 \\ -9 & 6 & 14 \end{pmatrix}.$$

REŢINEM!

Pentru a înmulţi o matrice cu un număr complex se înmulţeşte fiecare element al matricei cu acel număr.

Proprietăţi ale înmulţirii matricelor cu scalari

Ţinând seama de proprietăţile adunării şi înmulţirii numerelor complexe, se verifică următoarele proprietăţi ale înmulţirii matricelor cu scalari:

1. $(a+b)\cdot A = aA + bA$, $\forall a, b \in \mathbb{C}$ şi $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

2. $a(A+B) = aA + aB$, $\forall a \in \mathbb{C}$ şi $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

3. $a\cdot(b\cdot A) = (ab)\cdot A$, $\forall a, b \in \mathbb{C}$ şi $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

4. $1\cdot A = A$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

EXERCIŢII REZOLVATE

1. *Se dau matricele* $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -7 \\ 5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$. *Să se calculeze matricea* $X = 2A - 3B + \frac{1}{2}(A+B)$.

Rezolvare.

Aplicând proprietăţile înmulţirii matricelor cu scalari avem:

$$X = 2A - 3B + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = \left(2 + \frac{1}{2}\right)A + \left(-3 + \frac{1}{2}\right)B = \frac{5}{2}A - \frac{5}{2}B = \frac{5}{2}(A - B).$$

Înlocuind A şi B şi efectuând scăderea se obţine:

$$X = \frac{5}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 5 & 25 \\ -10 & -10 & 10 \end{pmatrix}.$$

2. Să se determine a, b, $c \in \mathbb{R}$ din următoarea egalitate matriceală:

$$2\begin{pmatrix} 1 \\ 7 - 4a \\ 1 - 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + (-1)^3 \begin{pmatrix} c \\ -6 - b \\ a + 4b \end{pmatrix}.$$

Rezolvare.

Înmulţim matricele cu scalarii 2 şi $(-1)^3$. Obţinem:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 14 - 8a \\ 2 - 4b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c \\ 6 + b \\ -a - 4b \end{pmatrix}.$$

Efectuăm adunarea matricelor şi se obţine egalitatea

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 14 - 8a \\ 2 - 4b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - c \\ 4 + b \\ 4 - a - 4b \end{pmatrix},$$

din care se obţine următorul sistem de ecuaţii $2 = 1 - c$, $14 - 8a = 4 + b$, $2 - 4b = 4 - a - 4b$, cu soluţia $c = -1$, $a = 2$, $b = -6$.

Exerciţii şi probleme

Exersare

E1. Să se calculeze:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} -2a & b \\ 3x & -8y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -5b \\ 2x & 6y \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} -6 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{5} & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -7 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ -\frac{5}{3} & \frac{1}{5} & \frac{\sqrt{8}}{3} \end{pmatrix}$.

E2. Să se calculeze:

a) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} i^2 & -i^4 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & i \\ -3 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

E3. Se dau matricele:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

a) Să se calculeze $A+B$, $A-B$, ${}^tA+{}^tB$, ${}^t(A+B)$, ${}^t(A-B)$.

b) Să se calculeze $A+{}^tC$, $B-{}^tC$, ${}^t(A-B+{}^tC)$.

E4. Se dau matricele pătratice:

$$A = \begin{pmatrix} 2x & 4y & 3z \\ 1 & u & -4 \\ -v & -2v & t+3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & z & v \\ -y & -v & x \\ -x & 2y & x-z \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Să se determine *x, y, z, u, v, t* astfel ca $A+B=C$.

E5. Să se determine matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dacă

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 4 & -\sqrt{5} \end{pmatrix} - X + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\sqrt{2}} & 1 \\ 2 & \frac{4}{1-\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

E6. Se dă matricea de ordinul trei, $A = \begin{pmatrix} 5 & 6-a & \sqrt{b} \\ a^2 & -1 & -10 \\ 3 & 3c+2 & n \end{pmatrix}$. Să se determine numerele reale *a, b, c, n* astfel ca ${}^tA = A$.

E7. Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Să se scrie matricea *A* sub forma:

$$A = B + C,\ A = A_1 - A_2,\ A = I_2 + E,\ A = D - I_2.$$

E8. Să se calculeze:

a) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -8 \\ \sqrt{12} & 0{,}2 \end{pmatrix}$; b) $-\frac{2}{3}\begin{pmatrix} 18 & -6 & 12 \\ \frac{15}{2} & C_3^2 & 1{,}5 \end{pmatrix}$;

c) $\left(\sqrt{2}-1\right)\begin{pmatrix} -1-\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{1-\sqrt{2}} & \sqrt{3+\sqrt{8}} \end{pmatrix}$; d) $i\begin{pmatrix} 2i^3 & 1-i \\ -3i & 4 \end{pmatrix}$.

E9. Să se determine matricea X ştiind că are loc egalitatea:

$$X = 2\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^5 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & -4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ \frac{2}{3} & 5 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

E10. Să se determine constantele x, y, z, a, b, c din egalitatea:

$$2\cdot\begin{pmatrix} x & -2y & 4z \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} + 5\cdot\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ a & 4b & 3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 13 & 22 \\ -21 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Sinteză

S1. Se dau matricele: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2^x & -4 \\ 3^y & 9 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4^x & 6 \\ \log_2 z & C_n^2 \end{pmatrix}$.

Să se determine elementele necunoscute ştiind că ${}^tA + {}^tB = C$.

S2. Să se determine $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ pentru care are loc egalitatea:

$$x\cdot\begin{pmatrix} x+1 & 2 \\ -1 & x \end{pmatrix} + 3I_2 + x\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4+y \\ z+2 & t+4 \end{pmatrix}.$$

S3. Să se determine matricea A în fiecare caz:

a) $2A + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; b) $3A + 5\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix}$;

c) $-4\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 4 \\ 12 & -1 \end{pmatrix} + 7A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} - \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1{,}5 \\ 6 & 0 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$.

S4. Să se determine matricele A, B ştiind că:

a) $A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ şi $2A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $(1+i)A+B=\begin{pmatrix}2+i & 1\\ 1 & 2+i\end{pmatrix}$ şi $A+(1-i)B=\begin{pmatrix}2-i & 1-i\\ 1-i & 2-i\end{pmatrix}$.

S5. Să se calculeze matricea:

a) $A=\sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix}1 & k\\ k^3 & k(k+1)\end{pmatrix}$; b) $A=\sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix}1 & 2^k\cdot 3^{k+1}\\ 2^k & 2^k\cdot 3^{-k}\end{pmatrix}$.

1.2.4. Înmulţirea matricelor

DEFINIŢIE.

Fie matricele $A=(a_{ij})_{m\times n}$ şi $B=(b_{ij})_{n\times p}$. Se numeşte ***produsul matricelor A şi B*** *(în această ordine) matricea $C=(c_{ik})_{m\times p}$ ale cărei elemente sunt date de egalităţile:*

$$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+a_{i3}b_{3k}+\ldots+a_{in}b_{nk},\ \forall i\in\{1,2,\ldots,m\} \text{ şi } \forall k\in\{1,2,\ldots,p\}.$$

Matricea produs se notează $C=A\cdot B$.

Operaţia prin care fiecărei perechi $(A,B)\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})\times\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ i se asociază produsul de matrice $A\cdot B$ se numeşte *înmulţirea matricelor.*

OBSERVAŢII

✓ Pentru a obţine elementul c_{ik} situat la intersecţia liniei i cu coloana k în matricea produs AB se face suma tuturor produselor dintre elementele liniei i din matricea A şi elementele omoloage din coloana k a matricei B. Omologia dintre elementele liniei i din matricea A şi elementele coloanei k din matricea B se stabileşte astfel: elementului a_{i1} îi corespunde elementul b_{1k}, elementului a_{i2} îi corespunde elementul b_{2k}, ..., elementului a_{in} îi corespunde elementul b_{nk} (vezi diagrama de mai jos).

$$\begin{pmatrix}\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\ldots & b_{1k} & \ldots\\ \ldots & b_{2k} & \ldots\\ \ldots & \vdots & \ldots\\ \ldots & b_{nk} & \ldots\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \ldots & c_{ik} & \ldots\\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

Regula de înmulţire a două matrice se numeşte pe scurt *regula de înmulţire a liniilor cu coloanele* sau *regula linie-coloană*.

✓ Din definiţie se observă că produsul AB are sens numai dacă numărul de coloane ale matricei A este egal cu numărul de linii ale matricei B. Rezultă că nu orice două matrice pot fi înmulţite.

✓ Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ atunci are sens produsul AB şi produsul BA. Aşadar, operaţia de înmulţire a matricelor este peste tot definită în mulţimea $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

EXEMPLU

➢ Să exemplificăm regula înmulţirii a două matrice. Fie matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ şi } B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

• *Calculăm produsul* $A \cdot B$. Avem: $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ *şi* $B \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$.

Rezultă că $A \cdot B \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. Notăm $A \cdot B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$.

Aplicând regula de înmulţire *linie-coloană* se obţine:

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 1\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) + 2\cdot 5 = 13;$$
$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} = 1\cdot 2 + (-1)\cdot 4 + 2\cdot(-3) = -8;$$
$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} = 3\cdot 2 + 0\cdot(-1) + 4\cdot 5 = 26;$$
$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} = 3\cdot 2 + 0\cdot 4 + 4\cdot(-3) = -6.$$

Aşadar, $AB = \begin{pmatrix} 13 & -8 \\ 26 & -6 \end{pmatrix}$.

• *Calculăm produsul* $B \cdot A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Avem:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 2\cdot 3 & 2\cdot(-1) + 2\cdot 0 & 2\cdot 2 + 2\cdot 4 \\ -1\cdot 1 + 4\cdot 3 & -1\cdot(-1) + 4\cdot 0 & -1\cdot 2 + 4\cdot 4 \\ 5\cdot 1 + (-3)\cdot 3 & 5\cdot(-1) + (-3)\cdot 0 & 5\cdot 2 + (-3)\cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & -2 & 12 \\ 11 & 1 & 14 \\ -4 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Se observă că $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Aşadar, *înmulţirea matricelor nu este operaţie comutativă.*

Proprietăţi ale înmulţirii matricelor

1. Înmulţirea matricelor este *asociativă:*

$$(AB)\cdot C = A\cdot(BC),\ \forall A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}),\ B\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C}),\ C\in\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{C}).$$

2. Înmulţirea este *distributivă* faţă de adunarea matricelor:

$$A\cdot(B+C) = AB+AC,\ \forall A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}),\ B, C\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C});$$
$$(A+B)\cdot C = AC+BC,\ \forall A, B\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}),\ C\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C}).$$

3. Matricea unitate de ordinul n este *element neutru* la înmulţirea matricelor pătratice:

$$A\cdot I_n = I_n\cdot A = A,\ \forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

4. $a\cdot(AB) = (aA)\cdot B = A\cdot(aB),\ \forall a\in\mathbb{C},\ A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}),\ B\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C}).$

EXERCIŢIU REZOLVAT

Se dau matricele

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

a) *Să se calculeze* $A+B,\ (A+B)\cdot C,\ AC+BC$ *şi să se verifice egalitatea* $(A+B)\cdot C = AC+BC$.

b) *Să se verifice dacă* $(AB)\cdot C = A\cdot(BC)$.

Rezolvare.

a) Avem: $A+B=\begin{pmatrix}4 & 0\\ -1 & 6\end{pmatrix}$; $(A+B)\cdot C=\begin{pmatrix}4 & 0\\ -1 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -4\\ 6 & 7\end{pmatrix}$;

$$AC+BC=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -2\\ 4 & 5\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}0 & -4\\ 6 & 7\end{pmatrix}.$$

Rezultă că $(A+B)\cdot C = AC+BC$.

b) Obţinem:

$$(AB)\cdot C=\left[\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 4\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -3\\ -2 & 8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -7\\ 8 & 10\end{pmatrix}.$$

$$A\cdot(BC)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ 4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -7\\ 8 & 10\end{pmatrix}.$$

Rezultă că $(AB)\cdot C = A\cdot(BC)$.

PUTERI DE MATRICE

Fie matricea pătratică $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), A\neq O_n$.

Prin definiţie, $A^0=I_n$ şi $A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{n\text{ ori}}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Se observă că $A^{n+1}=A^n\cdot A, \forall n\in\mathbb{N}$.

PROPRIETĂŢI

Cu ajutorul proprietăţii de asociativitate a înmulţirii matricelor se poate demonstra că au loc următoarele reguli de calcul:

a) $A^k\cdot A^p=A^{k+p}, k,p\in\mathbb{N}^*$;

b) $\left(A^k\right)^p=A^{kp}, k,p\in\mathbb{N}^*$;

Dacă $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ şi $AB=BA$, atunci: $\mathbb{C}$

c) $A^k\cdot B^p=B^p\cdot A^k, k,p\in\mathbb{N}^*$;

d) $(A+B)^k=C_k^0A^k+C_k^1A^{k-1}B+C_k^2A^{k-2}B^2+\ldots+C_k^{k-1}A\cdot B^{k-1}+C_k^kB^k$

(*binomul lui Newton*).

EXERCIŢII REZOLVATE

1. *Fie* $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. *Să se calculeze* $A^n, n\in\mathbb{N}^*$.

Rezolvare.

Calculăm câteva puteri consecutive ale matricei A. Avem:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se observă că A^n are forma $\quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}^* \qquad (1)$

Demonstrăm relaţia (1) prin inducţie matematică.

Pentru $n = 1$, relaţia este evident adevărată.

Presupunem că $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ şi demonstrăm că $A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix}$.

Dar, $A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix}$.

Aşadar, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. *Fie matricea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & p \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, p \in \mathbb{R}$. *Să se calculeze* A^n.

Rezolvare.

Scriem matricea A sub forma: $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & p \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3 + B.$

Deoarece $I_3 \cdot B = B \cdot I_3$, pentru calculul matricei A^n vom folosi formula binomului lui Newton:

$$A^n = (I_3 + B)^n = C_n^0 I_3 + C_n^1 B + C_n^2 B^2 + \ldots + C_n^n B^n \qquad (1)$$

Calculăm inductiv puterile matricei B:

$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & p \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & p \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B^3 = B^2 \cdot B = O_3$, iar

$B^k = O_3, \ \forall k \in \mathbb{N}, \ k \geq 3$. Cu aceste puteri ale matricei B, relaţia (1) devine:

$$A^n = I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & np + \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exerciţii şi probleme

Exersare

E1. Să se calculeze:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & i^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & \cos 0 \\ 2 & -1 & \sin \frac{\pi}{2} \\ 0 & 1 & \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

E2. Pentru fiecare pereche de matrice (A, B) să se determine $AB, BA, {}^tA\,{}^tB, {}^tB\,{}^tA$.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \sin \frac{\pi}{6} \\ \cos \frac{\pi}{2} & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -2 & \operatorname{tg} 0 \end{pmatrix}$;

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

E3. Pentru matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\\ -3 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & -4 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 5\end{pmatrix}$ să se verifice egalitatea ${}^t(A\cdot B)={}^tB\cdot{}^tA$. şi să se calculeze $AB+{}^tB\cdot{}^tA$.

E4. Se dau matricele pătratice:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}5 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 3\\ -1 & 1 & -2\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ -1 & 3 & -1\\ -4 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

Să se verifice egalităţile matriceale:

a) $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$;

b) $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$;

c) $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$.

E5. Să se calculeze următoarele puteri de matrice:

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}^2;\ \begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}^3;\ \begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}^5;\ \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}^2.$$

E6. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\ 4 & -3 & 4\\ 4 & -4 & 5\end{pmatrix}$. Să se calculeze $A^2,\ A^3,\ A^{2006}$ şi $(A^3+I)^{10}$.

E7. Se dă matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Folosind metoda inducţiei matematice să se calculeze $A^n, n\in\mathbb{N}^*$.

E8. Să se determine $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică egalitatea matriceală:

a) $X\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 10\\ 4 & 2\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 4 & 0\end{pmatrix}$.

E9. Se dă matricea $E=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ şi $f(X)=X^3-4X+2I_2$.

Să se determine matricele:

a) $B=2f(A)-f(A+I_2)$; b) $C=f(A)+2f(A-{}^tA)$.

Sinteză

S1. Să se determine matricea X care verifică egalitatea:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 9 & 5 & 4 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

S2. Se dau matricele pătratice $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Să se rezolve în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţiile matriceale:

a) $AX = I_2$; b) $AX = B$; c) $XA = B$; d) $AX = XB$; e) $BXB = A$.

S3. Să se determine matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, de forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, care verifică egalitatea $A^2 - 3A + 2I_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

S4. Să se rezolve ecuaţia matriceală:

$$2A - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + I_2 .$$

S5. Există matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică egalitatea

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot A = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}?$$

S6. Să dă matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Să se determine numerele $x,\ y \in \mathbb{R}$ astfel încât să fie verificată egalitatea $A^3 = xA^2 - yA$.

Facultatea de Inginerie economică Tg. Mureş, 2002

S7. Să se determine puterea n a matricei $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

Facultatea de inginerie Sibiu, 2002

S8. Să se determine puterea n a matricei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Universitatea Politehnică Timişoara, 2002

S9. Fie matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1-2x & x \\ -6x & 1+3x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Să se arate că $A(x) \cdot A(y) = A(x+y+xy)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se verifice egalităţile:

$A^2(x) = A\left((x+1)^2 - 1\right)$, $A^3(x) = A\left((x+1)^3 - 1\right)$.

c) Să se calculeze $A^{2006}(1)$.

S10. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Să se arate că $A = I_3 + B$ şi să se calculeze A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Să se calculeze suma $S = A + A^2 + A^3 + ... + A^{20}$.

S11. Se dau matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k^2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine matricea $C(k) = A \cdot B \cdot {}^t A$.

b) Să se calculeze suma de matrice $S = C(1) + C(2) + ... + C(20)$.

Teste de evaluare

Testul 1

1. Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ A = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $\alpha = 2a_{13} + 3a_{23}$. Dacă $\alpha = 5$, atunci:

a) $x = 1$; b) $x = -2{,}5$; c) $x \in \{0, 1\}$; d) $x \in \left\{-\frac{5}{2}, 1\right\}$.

2. Să se determine numerele reale *x, y* cu proprietatea că

$$x\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & x \end{pmatrix} + 3y\begin{pmatrix} y & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ şi $B = A^{10} + A^9$.

a) Să se calculeze $\mathrm{Tr}(B)$ şi $b_{31} + b_{22} + b_{13}$;

b) Să se calculeze $A^n,\ n \in \mathbb{N}^*$

Testul 2

1. Se consideră mulţimea de matrice $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & (-1)^x \end{pmatrix} \middle|\ x \in \mathbb{Z} \right\}$.

a) Să se arate că $I_2 \in M$.

b) Să se arate că dacă $A, B \in M$, atunci $A \cdot B \in M$.

c) Să se calculeze $A^n,\ n \in \mathbb{N}^*$ şi $A \in M$.

2. Să se determine numerele $x,\ y,\ z,\ t \in \mathbb{N}$ pentru care:

$$\begin{pmatrix} 2^x + 4^x & 3^y + 9^y \\ C_z^2 & 5A_{t+1}^2 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 18 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

3. Să se determine matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ ştiind că: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A + {}^tA\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

4. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$.

Să se arate că matricea $(AB - BA)^2$ are cel puţin două elemente nule.

Capitolul 2

Determinanţi

2.1. Determinantul unei matrice pătratice de ordin cel mult trei

În acest paragraf se va vedea cum fiecărei matrice pătratice de ordin cel mult trei i se poate asocia după anumite reguli un număr real numit determinant.

2.1.1. Determinantul de ordinul 2

Fie sistemul de două ecuaţii de gradul întâi cu necunoscutele *x, y* de forma:

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = n \end{cases} \qquad (1)$$

şi matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ formată din coeficienţii necunoscutelor x şi y.

Să rezolvăm acest sistem de ecuaţii prin *metoda reducerii.* Pentru eliminarea necunoscutei x se înmulţeşte prima ecuaţie cu $-c$ şi a doua ecuaţie cu a, după care se adună cele două ecuaţii membru cu membru. Avem:

$$\begin{cases} -acx - bcy = -cm \\ acx + ady = an \end{cases}$$

Prin adunarea ecuaţiilor se obţine ecuaţia

$$(ad - bc)y = an - cm. \qquad (2)$$

Procedând analog pentru eliminarea necunoscutei y avem:

$$\begin{cases} ax + by = m & \vert d \\ cx + dy = n & \vert (-b) \end{cases}.$$

Rezultă: $\begin{cases} adx + bdy = md \\ -bcx - bdy = -nb \end{cases}.$

Prin adunarea ecuaţiilor se obţine:

$$(ad - bc)x = md - nb. \qquad (3)$$

În ipoteza că $ad - bc \neq 0$, din ecuaţiile (2) şi (3) se obţine soluţia sistemului dată de formulele:

$$x = \frac{dm - bn}{ad - bc},\ y = \frac{an - cm}{ad - bc}. \qquad (4)$$

Se observă că numitorul fracţiilor din formulele (4) reprezintă diferenţa dintre produsul elementelor de pe diagonala principală şi produsul elementelor de pe diagonala secundară a matricei A.

Numărul $ad - bc$ se numeşte *determinantul* matricei A sau *determinantul de ordinul doi* (matricea asociată fiind de ordinul doi).

⇨ *DEFINIŢIE.*

Fie matricea pătratică de ordinul doi $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. *Numărul* $d = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ *se numeşte* ***determinantul de ordinul doi sau determinantul matricei A de ordinul doi.***

Pentru determinantul de ordinul doi se foloseşte notaţia $d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\det(A)$ sau $|A|$. Produsele $a_{11} \cdot a_{22}$, $a_{12} \cdot a_{21}$ se numesc *termenii determinantului de ordinul doi*.

EXEMPLE

- Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$. Determinantul ei este numărul

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 1 \cdot 10 - 4(-2) = 10 + 8 = 18.$$

- $\begin{vmatrix} \sqrt{2} - 1 & -1 \\ 4 & \sqrt{2} + 1 \end{vmatrix} = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) - 4 \cdot (-1) = 2 - 1 + 4 = 5.$

Revenim la formulele (4) care dau soluţia sistemului de ecuaţii (1). Folosind definiţia determinantului de ordinul doi se observă că numitorul fracţiilor este determinantul matricei A, notat

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},$$

iar numărătorii fracţiilor sunt următorii determinanţi:

$$d_x = \begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix} \text{ şi respectiv } d_y = \begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}.$$

Determinantul d_x s-a obţinut din determinantul $\det(A)$ înlocuind coloana coeficienţilor necunoscutei x cu coloana formată din termenii liberi *m, n* ai ecuaţiilor sistemului. Determinantul d_y s-a obţinut din determinantul $\det(A)$ înlocuind coloana coeficienţilor necunoscutei y cu coloana formată cu termenii liberi ai ecuaţiilor sistemului.

Astfel, soluţia sistemului de ecuaţii (1) se poate calcula cu ajutorul determinanţilor de ordinul doi după formulele:

$$\boxed{\boldsymbol{x = \frac{d_x}{\det(A)}, \quad y = \frac{d_y}{\det(A)}}} \text{ sau } x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}. \qquad (5)$$

Formulele (5) se numesc **formulele lui Cramer** pentru rezolvarea sistemului liniar de două ecuaţii cu două necunoscute.

2.1.2. Determinantul de ordinul 3

Prin analogie cu introducerea determinantului de ordinul doi, determinantul de ordinul trei va fi definit strâns legat de rezolvarea unui sistem de trei ecuaţii de gradul întâi cu trei necunoscute. Scopul introducerii acestuia este de a găsi o metodă nouă şi eficientă de rezolvare a unui astfel de sistem.

Să considerăm sistemul de trei ecuaţii liniare cu necunoscutele *x, y, z:*

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

şi matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$, formată din coeficienţii necunoscutelor *x, y, z,* numită **matricea sistemului**.

Pentru rezolvarea acestui sistem vom folosi *metoda reducerii*. Pentru început vom reduce necunoscuta z. Se înmulţeşte prima ecuaţie cu a_{23} şi apoi cu a_{33} după care se adună la ecuaţia a doua înmulţită cu $-a_{13}$, respectiv la ecuaţia a treia înmulţită cu $-a_{13}$.

Astfel, se obţine un nou sistem de două ecuaţii liniare cu necunoscutele x, y:

$$\begin{cases}(a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13})x+(a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13})y=b_1a_{23}-b_2a_{13}\\(a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13})x+(a_{12}a_{33}-a_{32}a_{13})y=b_1a_{33}-b_3a_{13}\end{cases}. \qquad (2)$$

În continuare, reducem necunoscuta y din sistemul de ecuaţii (2) înmulţind prima ecuaţie cu $(a_{12}a_{33}-a_{32}a_{13})$, iar ecuaţia a doua cu $-(a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13})$. După reducere, rezultă ecuaţia cu necunoscuta x:

$$\left[(a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13})(a_{12}a_{33}-a_{32}a_{13})-(a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13})(a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13})\right]x=$$
$$=(b_1a_{23}-b_2a_{13})(a_{12}a_{33}-a_{32}a_{13})-(b_1a_{33}-b_3a_{13})(a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13}).$$

După efectuarea calculelor obţinem ecuaţia:

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23})x= \qquad (3)$$
$$=b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{32}a_{13}+b_3a_{12}a_{23}-b_3a_{22}a_{13}-b_1a_{32}a_{23}-b_2a_{12}a_{33}$$

Coeficientul lui x din ecuaţia (3) este format din produse de câte trei elemente ale matricei A a sistemului, în fiecare produs fiind trei elemente situate pe linii şi coloane diferite.

Acest coeficient se numeşte *determinantul matricei A de ordinul trei.*

✎ *DEFINIŢIE.*

Fie matricea pătratică de ordinul trei $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$. *Numărul:*

$$d=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

se numeşte ***determinantul de ordinul 3*** *sau* ***determinantul matricei*** $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Pentru determinantul de ordinul 3 se foloseşte notaţia:

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \det(A)\text{ sau } |A|.$$

EXEMPLU

➢ Pentru matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ determinantul ei este numărul:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2\cdot4\cdot1+(-1)\cdot(-5)\cdot1+0\cdot3\cdot0-0\cdot4\cdot1-$$
$$-(-1)\cdot3\cdot1-2\cdot(-5)\cdot0=8+5+3=16$$

Revenind la ecuaţia (3), cu ajutorul determinantului de ordinul 3 aceasta se scrie sub forma:

$$\det(A)\cdot x=d_x,$$

unde d_x este determinantul matricei $\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$, obţinută din matricea A a sistemului de ecuaţii, înlocuind coloana coeficienţilor necunoscutei x cu coloana formată din termenii liberi ai ecuaţiilor sistemului.

Dacă $\det(A)\neq 0$, atunci $x=\dfrac{d_x}{\det(A)}$.

În mod analog se va proceda pentru aflarea necunoscutelor y şi z, lucru care va fi realizat în capitolul următor.

OBSERVAŢIE

✓ Pentru o matrice $A=\left(a_{11}\right)\in\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$, determinantul acesteia va fi determinantul de ordinul unu, $|A|=|a_{11}|=a_{11}$.

EXEMPLE

➢ Matricea $A=(-3)$ are determinantul $|-3|=-3$. Matricea $B=\left(1+\sqrt{5}\right)$ are determinantul $\left|1+\sqrt{5}\right|=1+\sqrt{5}$.

2.1.3. Reguli de calcul pentru determinantul de ordinul 3

Analizând definiţia determinantului de ordinul trei se observă că valoarea sa este dată de suma a şase termeni, dintre care trei au semnul plus, iar trei au semnul minus. Pentru un calcul mai uşor, bazat pe un suport logic, se poate folosi una din următoarele reguli:

A. Regula lui Sarrus

Pentru calculul determinantului de ordinul trei al matricei $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ prin regula lui Sarrus se procedează astfel:

- se copiază linia întâi şi linia a doua sub determinant (sau sub matrice);
- se însumează produsele termenilor situaţi pe diagonala principală, respectiv pe paralelele la aceasta;
- se scad produsele termenilor situaţi pe diagonala secundară cât şi produsele termenilor situaţi pe paralelele la aceasta.

Aranjarea calculelor este următoarea:

$$\begin{array}{l}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} \;a_{11} & \;a_{12} & \;a_{23} \\ \;a_{21} & \;a_{22} & \;a_{23} \end{matrix}\end{array} \begin{array}{l} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - \\ \quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21} \\ \\ \\ \end{array}$$

Această regulă de calcul pentru un determinant de ordinul trei se numeşte *regula lui Sarrus*.

EXEMPLU

Să se calculeze determinantul matricei $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Aplicând regula lui Sarrus se obţine:

$$\det(A) = \begin{array}{l}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} \;3 & \;\;4 & \;\;2 \\ \;1 & \;\;5 & \;\;7 \end{matrix}\end{array} \begin{array}{l} = 3\cdot 5\cdot 1 + 1\cdot(-1)\cdot 2 + (-2)\cdot 4\cdot 7 - \\ \quad - 2\cdot 5\cdot(-2) - 7\cdot(-1)\cdot 3 - 1\cdot 4\cdot 1 = \\ \quad = 15 - 2 - 56 + 20 + 21 - 4 = -6 \\ \\ \end{array}$$

EXERCIŢIU DE REZOLVAT

➢ *Se dă matricea:* $A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & 2 \\ 3 & m+2 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. *Să se determine* $m \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $\det(A) = 3m + 8$.

Rezolvare.

Calculăm $\det(A)$ folosind regula lui Sarrus şi obţinem:

$$\det(A) = 5m^2 + 5m - 8.$$

Relaţia $\det(A) = 3m + 8$ devine $5m^2 + 5m - 8 = 3m + 8$, din care se obţine ecuaţia $5m^2 + 2m - 16 = 0$, cu soluţiile reale $m_1 = -2$, $m_2 = \frac{8}{5}$.

B. Regula triunghiului

Analizând termenii precedaţi de semnul „+“ ai determinantul de ordinul trei se observă că termenul $a_{11}a_{22}a_{33}$ este produsul termenilor de pe diagonala principală, iar termenii $a_{13}a_{21}a_{32}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$ sunt produsele elementelor considerate ca „vârfuri“ ale triunghiurilor având fiecare o latură paralelă cu diagonala principală. Termenii precedaţi de semnul „–“ sunt $a_{13}a_{22}a_{31}$, care este produsul elementelor diagonalei secundare şi $a_{12}a_{21}a_{33}$, respectiv $a_{11}a_{23}a_{32}$, care sunt produsul elementelor considerate ca vârfuri de triunghiuri având o latură paralelă cu diagonala secundară.

Regula de obţinere a termenilor determinantului de ordinul 3 prin acest procedeu se numeşte *regula triunghiului*. Această regulă este descrisă în continuare indicând pas cu pas modul de constituire a fiecărui produs:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

termenul $(a_{11}a_{22}a_{33})$ | termenul $(a_{13}a_{21}a_{32})$ | termenul $(a_{12}a_{23}a_{31})$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

termenul $(a_{13}a_{22}a_{31})$ | termenul $(a_{12}a_{21}a_{33})$ | termenul $(a_{11}a_{23}a_{32})$

Aşadar,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

EXEMPLU

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot 1\cdot 5 + 1\cdot(-4)\cdot(-1) + (-2)\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 1 - (-2)\cdot(-4)\cdot 5 - \\ -3\cdot 2\cdot(-1) = -20$$

C. Regula minorilor

Fie $A = (a_{ij})_{n\times n}$ o matrice pătratică de ordinul n.

DEFINIŢII

- *Se numeşte **minorul elementului** a_{ij} determinantul de ordinul $n-1$ care se obţine din determinantul matricei A suprimând linia i şi coloana j şi se notează d_{ij}.*
- *Numărul $\delta_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot d_{ij}$ se numeşte **complementul algebric** al elementului a_{ij}.*

EXEMPLU

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Minorul elementului a_{11} este $d_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ şi complementul algebric este numărul $\delta_{11} = (-1)^{1+1}\cdot d_{11} = d_{11}$.

Minorul elementului a_{23} este $d_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ şi complementul algebric este numărul $\delta_{23} = (-1)^{2+3}\cdot d_{23} = -d_{23}$.

EXERCIŢIU REZOLVAT

➢ *Se dă matricea* $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 0 & 4\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$. *Să se determine matricea* $B=(\delta_{ij})_{3\times 3}$, *unde* δ_{ij} *reprezintă complementul algebric al elementului* a_{ij} *al matricei A*, $i,\ j=\overline{1,\ 3}$.

Rezolvare.

Aplicând definiţia complementului algebric avem:

$$\delta_{11}=(-1)^{1+1}\cdot d_{11}=d_{11}=\begin{vmatrix}0 & 4\\ -2 & 1\end{vmatrix}=8;$$

$$\delta_{12}=(-1)^{1+2}\cdot d_{12}=-d_{12}=-\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 1 & 1\end{vmatrix}=5;$$

$$\delta_{13}=(-1)^{1+3}\cdot d_{13}=d_{13}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & -2\end{vmatrix}=2;$$

$$\delta_{21}=(-1)^{2+1}\cdot d_{21}=-d_{21}=-\begin{vmatrix}3 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-5;$$

$$\delta_{22}=(-1)^{2+2}\cdot d_{22}=d_{22}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1;$$

$$\delta_{23}=(-1)^{2+3}\cdot d_{23}=-d_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}=7;$$

$$\delta_{31}=(-1)^{3+1}\cdot d_{31}=d_{31}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 4\end{vmatrix}=12;$$

$$\delta_{32}=(-1)^{3+2}\cdot d_{32}=-d_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 4\end{vmatrix}=-9;$$

$$\delta_{33}=(-1)^{3+3}\cdot d_{33}=d_{33}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\end{vmatrix}=3.$$

În final se obţine $B=\begin{pmatrix}8 & 5 & 2\\ -5 & 1 & 7\\ 12 & -9 & 3\end{pmatrix}$.

Cu ajutorul minorilor şi complemenţilor algebrici ai elementelor unei matrice pătratice se va da o nouă regulă de calcul a determinantului acestuia.

⇘ *TEOREMĂ*

(Regula minorilor sau dezvoltarea determinantului **după elementele unei linii sau coloane)**

Fie $d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ *un determinant de ordinul trei. Valoarea determinantului d este egală cu suma produselor elementelor unei linii (sau coloane) cu complemenţii algebrici corespunzători.*

Aşadar:

$$d = a_{11}\delta_{11} + a_{12}\delta_{12} + a_{13}\delta_{13};$$
$$d = a_{21}\delta_{21} + a_{22}\delta_{22} + a_{23}\delta_{23};$$
$$d = a_{31}\delta_{31} + a_{32}\delta_{32} + a_{33}\delta_{33};$$

(dezvoltarea după elementele unei linii)

sau

$$d = a_{11}\delta_{11} + a_{21}\delta_{21} + a_{31}\delta_{31};$$
$$d = a_{12}\delta_{12} + a_{22}\delta_{22} + a_{32}\delta_{32};$$
$$d = a_{13}\delta_{13} + a_{23}\delta_{23} + a_{33}\delta_{33}.$$

(dezvoltarea după elementele unei coloane)

Verificarea acestor formule de dezvoltare a determinantului *d* după elementele unei linii sau coloane se poate face prin calcul direct.

EXERCIŢIU REZOLVAT

➢ *Să se calculeze determinantul matricei* $A = \begin{pmatrix} 25 & -37 & 40 \\ 22 & 53 & 50 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *folosind regula minorilor.*

Rezolvare.

Pentru aplicarea acestei reguli vom folosi linia a treia care conţine cele mai multe elemente nule. Avem:

$$\det(A) = 0 \cdot \delta_{31} + 1 \cdot \delta_{32} + 0 \cdot \delta_{33} = \delta_{32} = (-1)^{3+2} \cdot d_{32} = -\begin{vmatrix} 25 & 40 \\ 22 & 50 \end{vmatrix} =$$

$$= -(1250 - 880) = -370.$$

2.1.4. Proprietăţi ale determinanţilor

În calculul determinanţilor sau în unele probleme care cuprind determinanţi sunt utile unele proprietăţi speciale care conduc la rezultate mai uşor de obţinut. Vom verifica aceste proprietăţi pe cazuri concrete.

P_1 Dacă într-un determinant toate elementele unei linii sau unei coloane sunt nule, atunci determinantul este nul.

EXEMPLU

$$d = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = a\cdot 0\cdot z + 0\cdot y\cdot c + b\cdot 0\cdot x - c\cdot 0\cdot x - b\cdot 0\cdot z - a\cdot 0\cdot y = 0.$$

(toţi termenii determinantului conţin un factor egal cu zero).

P_2 Dacă un determinant are două linii sau două coloane identice, atunci valoarea determinantului este zero.

EXEMPLU

$$d = \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & t \\ a & b & c \end{vmatrix} = avc + cub + bta - cva - buc - atb = 0.$$

(linia întâi şi a treia sunt identice).

P_3 Dacă elementele a două linii sau două coloane ale unui determinant sunt proporţionale, atunci determinantul este nul.

EXEMPLE

$$d = \begin{vmatrix} a & a\cdot k & m \\ b & b\cdot k & n \\ c & c\cdot k & p \end{vmatrix} = abkp + mbck + aknc - mbkc - akbp - anck = 0.$$

(coloana întâi şi a doua sunt proporţionale, factorul de proporţionalitate fiind k).

$$d=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 5\\ -10 & 20 & 50\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}=-20-50+300-300+20+50=0.$$

(linia întâi şi a doua sunt proporţionale, factorul de proporţionalitate fiind $k=10$).

P_4 Dacă o linie sau o coloană a unui determinant este o combinaţie liniară de celelalte linii sau coloane, atunci determinantul este nul.

EXEMPLU

Fie determinantul $d=\begin{vmatrix}3 & -2 & -1\\ 1 & 5 & 7\\ 4 & 3 & 6\end{vmatrix}$. Se observă că linia a treia este suma celorlalte două linii. Rezultă că $d=0$. Prin calcul direct se obţine într-adevăr valoarea zero.

P_5 Dacă toate elementele unei linii sau coloane ale unui determinant sunt înmulţite cu un număr *k*, atunci valoarea determinantului se multiplică cu *k*.

EXEMPLU

Fie $d=\begin{vmatrix}2 & -5\\ 3 & 1\end{vmatrix}=17$ şi d_1 determinantul obţinut din d înmulţind elementele liniei a doua cu (–2). Atunci $d_1=\begin{vmatrix}2 & -5\\ -6 & -2\end{vmatrix}=-34$, adică $d_1=(-2)\cdot d$.

OBSERVAŢIE

✓ Această proprietate permite scoaterea unui factor comun de pe o linie sau coloană, fapt care face ca în continuare calculele să fie mai simple.

EXEMPLU

Să calculăm determinantul $d=\begin{vmatrix}20 & -30 & 40\\ 1 & 5 & -1\\ 3 & -6 & 9\end{vmatrix}$. Se observă că se poate scoate factor comun de pe linia întâi şi a treia şi se obţine:

$$d = 10 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 30 \cdot (30 - 8 + 3 - 20 + 9 - 4) = 300.$$

P$_6$ **Determinantul unei matrice pătratice este egal cu determinantul matricei transpuse: $\det(A) = \det({}^tA), \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.**

EXEMPLU

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$ şi matricea transpusă ${}^tA = \begin{pmatrix} -8 & 7 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$.

Atunci:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -8 & 5 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = -80 - 35 = -115 \quad \text{şi}$$

$$\det({}^tA) = \begin{vmatrix} -8 & 7 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = -80 - 35 = -115.$$

P$_7$ **Dacă într-un determinant se permută între ele două linii sau două coloane, atunci determinantul obţinut este opusul determinantului iniţial.**

EXEMPLU

Fie $d = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 5 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 22$ şi d_1 determinantul obţinut schimbând între ele linia a doua şi a treia. Atunci $d_1 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -22 = -d.$

P$_8$ **Dacă într-un determinant se adună la elementele unei linii sau coloane elementele altei linii, respectiv coloane, înmulţite eventual cu un acelaşi număr, atunci valoarea determinantului nu se schimbă.**

EXEMPLU

Fie determinantul $d=\begin{vmatrix}-1 & 2 & -5\\ 3 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=-15+4-10+1=-20.$ Înmulţim coloana întâi cu 2 şi o adunăm la coloana a doua. Se obţine determinantul $d_1=\begin{vmatrix}-1 & 0 & -5\\ 3 & 5 & 1\\ 2 & 5 & 0\end{vmatrix}=-75+50+5=-20.$ Aşadar, $d=d_1$.

P$_9$ **Dacă** $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, **atunci** $\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B)$**.**

EXEMPLU

Fie matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, având determinanţii $\det(A)=-2$ şi $\det(B)=-5.$ Atunci:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)(-3)+2\cdot 2 & (-1)\cdot 1+2\cdot 1\\ 1\cdot(-3)+0\cdot 2 & 1\cdot 1+0\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$$

şi $\det(A\cdot B)=10.$ Aşadar, $\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B)$.

P$_{10}$ **Într-un determinant suma produselor dintre elementele unei linii (coloane) şi complemenţii algebrici ai elementelor corespunzătoare de pe altă linie (coloană) este nulă.**

EXEMPLU

- Pentru determinantul $\left|a_{ij}\right|_{3\times 3}$ de ordinul 3 avem:

$$a_{11}\delta_{21}+a_{12}\delta_{22}+a_{13}\delta_{23}=$$

$$=a_{11}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{12}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=$$

$$=-a_{11}(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32})+a_{12}(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})-a_{13}(a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31})=0.$$

EXERCIŢII REZOLVATE

1. *Folosind proprietăţile determinanţilor să se scrie sub formă de produs valoarea determinantului* $d=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ *(determinantul Vandermonde de ordinul 3).*

Rezolvare.

Adunăm la coloana a doua şi a treia, coloana întâi înmulţită cu –1 şi se obţine:

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}.$$

Se dă factor comun pe coloana a doua şi a treia factorul $(b-a)$, respectiv $(c-a)$ şi se obţine:

$$d=(b-a)(c-a)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a \end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c+a-b-a).$$

Aşadar, se obţine în final, $d=(b-a)(c-a)(c-b)$.

2. *Se dau matricele* $A=\begin{pmatrix} 2x & -3 & 1 \\ 2x+1 & 1 & -2 \\ 2x-4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 16 & x+2 \end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$.

a) *Să se determine x ştiind că* $\det({}^tA)=\det B$.

b) *Să se determine x ştiind că* $2\det(A+I_3)=3\det(B)-4$.

Rezolvare.

a) Avem egalitatea $\begin{vmatrix} 2x & 2x+1 & 2x-4 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2x & 1 \\ 16 & x+2 \end{vmatrix}$.

Calculul determinantului matricei ${}^tA$ îl vom face folosind proprieăţile determinanţilor. Păstrăm coloana întâi şi o scădem din coloana a doua şi din coloana a treia.

Se obţine egalitatea: $\begin{vmatrix} 2x & 1 & -4 \\ -3 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 2x(x+2)-16.$

Adunăm linia a doua înmulţită cu 2 la linia întâi şi apoi adunăm linia a doua la linia a treia şi obţinem un determinant care are şi elemente nule:

$$\begin{vmatrix} 2x-6 & 9 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2x^2+4x-16.$$

Calculând determinantul după una din regulile studiate, se obţine în final ecuaţia $x^2+4x+4=0$ cu soluţia dublă $x_1 = x_2 = -2$.

b) Avem $\det(A+I_3) = \begin{vmatrix} 2x+1 & -3 & 1 \\ 2x+1 & 2 & -2 \\ 2x-4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2x-19.$

Se obţine ecuaţia $2(2x-19) = 3(2x^2+4x-16)-4$, cu soluţiile $x_1 = 1$ şi $x_2 = -\frac{7}{3}$.

Exerciţii şi probleme

Exersare

E1. Să se calculeze următorii determinanţi de ordinul doi:

a) $\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 8 & 10 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & -6 \\ -3 & \sqrt{32} \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1{,}5 & -7{,}2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 2+i & -1 \\ i^2 & 2-i \end{vmatrix}$.

E2. Să se calculeze, scriind sub forma cea mai simplă, determinanţii:

a) $\begin{vmatrix} \frac{7}{5} & \frac{8}{3} \\ 9 & 25 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{32} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{75} \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} -1-\sqrt{3} & \sqrt{5}-1 \\ 1+\sqrt{5} & \sqrt{3}-1 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} \lg 100 & 0{,}5 \\ -8 & \lg 0{,}1 \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 3! & 5! \\ 0! & 4! \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} A_4^2 & A_3^3 \\ C_5^1 & C_4^3 \end{vmatrix}$;

g) $\begin{vmatrix} 2^{x+1} & 3^{2y} \\ 9^{-y+1} & 2^{-x} \end{vmatrix}$; h) $\begin{vmatrix} (1-i)^2 & -i \\ i & (1+i)^2 \end{vmatrix}$.

E3. Se dau matricele pătratice $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 7 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -5\\ 6 & 2\end{pmatrix}$. Comparaţi numerele:

a) $\det(A)+\det(B)$ şi $\det(A+B)$.
b) $\det(AB)$ şi $\det(A)\cdot\det(B)$;
c) $\det\left[\sqrt{3}(A-I_2)\right]$ şi $\det(A+2I_2)$.

E4. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\begin{vmatrix}x & -3x\\ 4 & -2\end{vmatrix}=20$; b) $\begin{vmatrix}-5 & 3x-1\\ 2 & -x\end{vmatrix}=10$; c) $\begin{vmatrix}3x^2 & x+1\\ x & 2\end{vmatrix}=4$;

d) $\begin{vmatrix}3-x & 4x-1\\ x+1 & x\end{vmatrix}=x-5$; e) $\begin{vmatrix}x-i & i\\ 2x & x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & x\\ i & 3\end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix}3^x & x\\ 1 & 2^x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2^x & -1\\ -x & 18^x\end{vmatrix}$.

E5. Să se calculeze determinanţii de ordinul al treilea prin cele trei reguli de calcul:

a) $\begin{vmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 4 & 5\\ -2 & -1 & -1\end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix}1 & 2 & -5\\ 2 & -1 & 0\\ 4 & -1 & 0\end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix}0! & 1! & 2!\\ 1! & 2! & 0!\\ 2! & 0! & 1!\end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix}P_0 & P_1 & P_2\\ C_2^0 & C_2^1 & C_2^2\\ A_3^1 & A_3^2 & A_3^3\end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix}10 & 20 & 40\\ -1 & -5 & -7\\ 100 & 200 & 400\end{vmatrix}$;

g) $\begin{vmatrix}11 & 21 & 47\\ -1 & 18 & 7\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$; h) $\begin{vmatrix}-8 & 2 & 8\\ 3 & 7 & -3\\ -1 & 5 & 1\end{vmatrix}$.

E6. Enunţaţi câte o proprietate a determinanţilor şi daţi un exemplu de aplicare a acesteia.

E7. Folosind proprietăţile determinanţilor să se calculeze determinanţii:

a) $\begin{vmatrix}300 & 400 & 500\\ 1 & -1 & 4\\ 3 & 4 & 5\end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix}10 & -1 & 3\\ 50 & 1 & 1\\ 100 & 2 & 1\end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix}5 & 11 & -1\\ 15 & 22 & -3\\ 25 & 44 & -5\end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix}1 & a & m\\ 1 & b & n\\ 1 & c & p\end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix}x & y & y\\ y & x & y\\ y & y & x\end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix}a & b & c\\ b & c & a\\ c & a & b\end{vmatrix}$.

E8. Se consideră determinantul $d=\begin{vmatrix} 8 & -9 & 10 \\ 4 & 6 & -3 \\ 12 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

a) Să se determine complemenţii algebrici ai elementelor determinantului d.

b) Să se calculeze d folosind dezvoltarea după coloana a doua şi apoi după linia a treia.

c) Folosind proprietăţile determinanţilor, să se formeze două zerouri pe coloana întâi, apoi să se calculeze determinantul obţinut folosind dezvoltarea determinantului după coloana întâi.

Sinteză

S1. Să se calculeze valoarea expresiei: $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 8 & -25 \end{vmatrix} - 6\cdot\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 2\cdot\left|-5\right|$.

S2. Să se verifice dacă următoarea egalitate este adevărată:

$$20\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{4}{5} \\ \frac{6}{3} & \frac{7}{10} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sqrt{5}-2 & 4-\sqrt{17} \\ 4+\sqrt{17} & -\sqrt{5}-2 \end{vmatrix} + \frac{5}{3}\begin{vmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

S3. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\begin{vmatrix} x(x+2) & x+3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -14;$ b) $\begin{vmatrix} x^2+x & x-2 \\ 3x & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & 3+i \\ 3-i & -i \end{vmatrix};$

c) $\begin{vmatrix} x(x-1) & 4-x \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5x & 2 \\ x+1 & x \end{vmatrix};$ d) $\begin{vmatrix} 3^{x+2} & 9 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3^x \\ 1 & 3^{x+1} \end{vmatrix}.$

S4. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -3 & 9 & 4 \\ 7 & -1 & 5 \end{vmatrix};$ b) $\begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 & x \\ -1 & x & -1 \\ x & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1+i)^2 & 1 \\ -2 & i \end{vmatrix};$

c) $\begin{vmatrix} 2x-1 & 2 & 1 \\ 3x+2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 3 \end{vmatrix};$ d) $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ 2x & 2x-1 & x-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & x \\ 4 & 5 \end{vmatrix}.$

S5. Se consideră ecuaţia $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 2 \\ x-1 & x & -3 \\ 0 & x & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$. Dacă x_1, x_2, x_3 sunt soluţiile ecuaţiei, să se calculeze $S = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

S6. Folosind proprietăţile determinanţilor, să se calculeze următorii determinanţi scriind rezultatul sub formă de produs:

a) $\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ c & c+1 & c+2 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} a & a^2+1 & a+1 \\ b & b^2+1 & b+1 \\ c & c^2+1 & c+1 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} a-b & m-n & x-y \\ b-c & n-p & y-z \\ c-a & p-m & z-x \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & xz & xy \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} a+1 & a-1 & a^2-1 \\ b+1 & b-1 & b^2-1 \\ c+1 & c-1 & c^2-1 \end{vmatrix}$.

S7. Să se verifice egalităţile:

a) $\begin{vmatrix} 2a & 2a & a-b-c \\ b-c-a & 2b & 2b \\ 2c & c-a-b & 2c \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$;

b) $\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ x^2+y^2 & y^2+z^2 & z^2+x^2 \\ x^3+y^3 & y^3+z^3 & z^3+x^3 \end{vmatrix} = 2xyz\,(x-y)(y-z)(z-x)$.

S8. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Să se arate că are loc egalitatea $A^2 - tr(A)\cdot A + \det(A)\cdot I_2 = O_2$ (relaţia lui Hamilton-Cayley).

b) Dacă $tr(A) = 0$ şi $\det(A) = 2$, să se calculeze A^{20} şi A^{25}.

S9. Se dă matricea $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $d=\det(A)$ şi $t=\operatorname{tr}(A)$.

b) Să se calculeze $s=\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33}$, unde δ_{ii} reprezintă complementul algebric al elementului a_{ii} din matricea A, $i=1, 2, 3$.

c) Cu cât este egală suma $s_1=a_{13}\delta_{12}+a_{23}\delta_{22}+a_{33}\delta_{32}$?

d) Să se verifice egalitatea matriceală $A^3-tA^2+sA-d\cdot I_3=O_3$.

S10. Se dau matricele $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -4\\ 1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ şi $B=(b_{ij})_{3\times3}$, unde $b_{ij}=i$, dacă $i=j$ şi $b_{ij}=i-j$, dacă $i\neq j$.

a) Să se determine $\det(A)$, $\det(B)$ şi $\det(A\cdot B)$.

b) Să se verifice dacă are loc egalitatea $\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B)$.

c) Cât este suma $s=b_{11}\delta_{31}+b_{12}\delta_{32}+b_{13}\delta_{33}$?

Cărei proprietăţi a determinanţilor corespunde rezultatul?

S11. Aplicând proprietăţile determinanţilor, să se arate că următorii determinanţi sunt nuli:

a) $\begin{vmatrix}a+b & \sqrt{3} & c\\ b+c & \sqrt{3} & a\\ c+a & \sqrt{3} & b\end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix}a-b & 2 & a-b\\ a^2+b^2 & a-b & -2ab\\ -2ab & a-b & a^2+b^2\end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix}a^2 & (b+c)^2 & b+c-a\\ b^2 & (a+c)^2 & a+c-b\\ c^2 & (a+b)^2 & a+b-c\end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix}a+b+c & b+c & a\\ b+c+d & c+d & b\\ c+d+e & d+e & c\end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix}a^2bc & a+b & b\\ ab^2c & b+c & c\\ abc^2 & a+c & a\end{vmatrix}$;

f) $\begin{vmatrix}a^2b & ab^2 & abc\\ abc & b^2c & bc^2\\ a^2c & abc & ac^2\end{vmatrix}$.

2.2. Aplicaţii ale determinanţilor în geometrie

2.2.1. Ecuaţia dreptei determinată de două puncte distincte

Să considerăm planul P raportat la reperul cartezian xOy şi $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ două puncte distincte din plan[1].

Fie $E(x, y) = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$ o expresie, scrisă sub formă de determinant, care depinde de elementele arbitrare x, y.

Dezvoltând determinantul, se observă că ecuaţia $E(x, y) = 0$ reprezintă ecuaţia unei drepte (d).

Pe baza proprietăţilor determinanţilor nuli se obţine că $E(x_1, y_1) = 0$ şi $E(x_2, y_2) = 0$. Aceste ultime egalităţi exprimă faptul că punctul $A(x_1, y_1) \in d$ şi $B(x_2, y_2) \in d$.

Din unicitatea dreptei determinată de două puncte distincte din plan rezultă că dreptele d şi AB coincid.

Aşadar, *ecuaţia dreptei determinată de punctele* $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ scrisă sub formă de determinant este $E(x, y) = 0$, adică

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

EXEMPLU

- Ecuaţia dreptei determinată de punctele $A(-1, 1)$ şi $B(2, 3)$ scrisă sub formă de determinant este $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$ Prin dezvoltarea determinantului se obţine $x - 3 + 2y - 2 + y - 3x = 0$ sau $2x - 3y + 5 = 0$, care reprezintă ecuaţia dreptei AB sub formă generală.

---

[1] ***Ne reamintim!***

Ecuaţia generală a dreptei în plan: $ax + by + c = 0$, $a \neq 0$ sau $b \neq 0$.

Ecuaţia dreptei determinată de punctele $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

2.2.2. Coliniaritatea a trei puncte în plan

Să considerăm în planul P punctele distincte $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

Punctele *A, B, C* sunt coliniare dacă sunt situate pe o dreaptă. Pentru a exprima coliniaritatea punctelor $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ cu ajutorul coordonatelor se va scrie ecuaţia dreptei *AB* sub formă de determinant:

$$(AB):\ \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

şi apoi se va pune condiţia ca punctul $C(x_3, y_3)$ să aparţină dreptei *AB*, adică coordonatele punctului *C* să verifice ecuaţia dreptei *AB*.

Se obţine relaţia: $\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Aşadar, *punctele* $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ *sunt trei puncte coliniare* dacă se verifică egalitatea:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

POBLEME REZOLVATE

1. *Să se verifice dacă punctele* $A(4, 1)$, $B(-1, -9)$, $C(2, -3)$ *sunt puncte coliniare.*

Rezolvare.

Aplicăm condiţia (2) şi obţinem succesiv:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & -9 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -36+3+2+18+1+12=0 \Leftrightarrow 0=0.$$

Aşadar, punctele *A, B, C* sunt coliniare.

2. *Să se determine parametrul* $m \in \mathbb{R}$ *astfel încât punctele* $A(2m+1, m)$, $B(m-3, 3)$, $C(m+7, -m)$ *să fie pe o dreaptă.*

Rezolvare.

Condiţia de coliniaritate a trei puncte conduce la ecuaţia

$$\begin{vmatrix} 2m+1 & m & 1 \\ m-3 & 3 & 1 \\ m+7 & -m & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

care este echivalentă cu ecuaţia $m^2 + 17m - 18 = 0$ cu soluţiile $m_1 = 1$, $m_2 = -18$.

Pentru $m = 1$ punctele sunt $A(3, 1)$, $B(-2, 3)$, $C(8, -1)$.

Pentru $m = -18$ punctele sunt $A(-35, -18)$, $B(-21, 3)$, $C(-11, 18)$.

2.2.3. Aria unei suprafeţe triunghiulare

A. Distanţa de la un punct la o dreaptă

Fie h o dreaptă în plan, cu ecuaţia generală $ax + by + c = 0$ şi vectorul normal $\vec{n}(a, b)$, iar punctul $M_0(x_0, y_0)$ un punct în plan (2.

Notăm cu $M_1(x_1, y_1)$ proiecţia pe dreapta h a punctului M_0.

Aşadar, distanţa de la punctul M_0 la dreapta h este

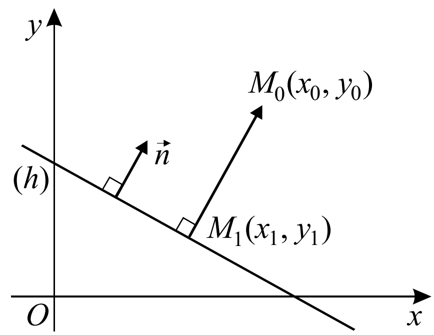


Fig. 2.1.

$$\boxed{d(M_0, h) = M_1M_0 = |\overrightarrow{M_1M_0}|.} \qquad (1)$$

Vom exprima distanţa de la punctul M_0 la dreapta h cu ajutorul coordonatelor punctului M_0 şi coeficienţilor dreptei h.

Vectorii $\vec{n}(a, b)$ şi $\overrightarrow{M_1M_0}(x_0 - x_1, y_0 - y_1)$ sunt vectori coliniari.

Produsul scalar al acestor vectori este: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1M_0} = |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{M_1M_0}| \cdot \cos 0^\circ$,

relaţie din care se obţine

$$\boxed{|\overrightarrow{M_1M_0}| = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1M_0}}{|\vec{n}|} = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.} \qquad (2)$$

Din condiţia că $M_1(x_1, y_1) \in h$ rezultă că $ax_1 + by_1 + c = 0$.

(2 ***Ne reamintim!***

- Fie $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$. Coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$ sunt $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.
- Produsul scalar al vectorilor $\vec{a}(l_1, m_1), \vec{b}(l_2, m_2)$ este $\vec{a} \cdot \vec{b} = l_1l_2 + m_1m_2$.
- $|\vec{a}| = \sqrt{l_1^2 + m_1^2}$.

Înlocuind în relaţia (2) se obţine

$$\left|\overrightarrow{M_1M_0}\right| \overset{(1)}{=} d(M_0,\, h) = \frac{|\, ax_0 + by_0 + c\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

✓ • Aşadar, *distanţa de la punctul* $M_0(x_0,\, y_0)$ *la dreapta* h *de ecuaţie* $ax + by + c = 0$ *este dată de formula:*

$$\boxed{d(M_0,\, h) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.} \qquad (3)$$

EXEMPLU

➢ Distanţa de la punctul $M_0(-3,\, 5)$ la dreapta h de ecuaţie $4x - 3y + 2 = 0$ este $\dfrac{|4\cdot(-3) - 3\cdot 5 + 2|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \dfrac{|-25|}{5} = 5.$

B. Aria unei suprafeţe triunghiulare

Să considerăm triunghiul ABC în reperul xOy având vârfurile $A(x_1,\, y_1)$, $B(x_2,\, y_2)$, $C(x_3,\, y_3)$.

Se pune problema determinării ariei suprafeţei triunghiulare (ABC) când se cunosc coordonatele vârfurilor triunghiului. Pentru aceasta se va porni de la formula:

$$\mathscr{A}_{(ABC)} = \frac{BC \cdot d(A,\, BC)}{2}$$

şi se va urmării exprimarea elementelor din formulă cu ajutorul coordonarelor vârfurilor.

Astfel avem: $\quad BC = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}\,,$

iar ecuaţia dreptei BC cu ajutorul determinantului este

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dezvoltând determinantul, de exemplu după linia întâi, se obţine ecuaţia dreptei BC ca fiind

$$x(y_2 - y_3) - y(x_2 - x_3) + x_2y_3 - x_3y_2 = 0.$$

Aplicând formula (3), se determină înălţimea din A a triunghiului, adică

$$d(A,\ BC)=\frac{|x_1(y_2-y_3)-y_1(x_2-x_3)+x_2y_3-x_3y_2|}{\sqrt{(y_2-y_3)^2+(x_2-x_3)^2}}.$$

Cu aceste determinări ale lungimii laturii (BC) şi a distanţei de la punctul A la dreapta BC, aria suprafeţei (ABC) este:

$$\mathscr{A}_{(ABC)}=\frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)-y_1(x_2-x_3)+x_2y_3-x_3y_2\right|.$$

Se observă că expresia din modul reprezintă dezvoltarea după linia întâi a determinantului

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Aşadar, aria suprafeţei triunghiulare (ABC) cu vârfurile $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$ este dată de formula:

$$\boxed{\mathscr{A}_{(ABC)}=\frac{1}{2}|\Delta|,}\quad \text{unde}\quad \Delta=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

PROBLEME REZOLVATE

1. *Se dau punctele* $A(6,\ 4)$, $B(2,\ 5)$, $C(-4,\ 3)$ şi $D(-3,\ -3)$. *Să se reprezinte punctele în plan şi să se determine:*

a) *aria suprafeţei triunghiulare* (ABC);

b) *aria suprafeţei patrulatere* ($ABCD$).

Rezolvare.

Punctele sunt reprezentate în figura 2.2.

a) Avem $\mathscr{A}_{(ABC)}=\frac{1}{2}|\Delta_1|$,

$$\text{unde}\quad \Delta_1=\begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix}=14.$$

Rezultă că

$$\mathscr{A}_{(ABC)}=\frac{1}{2}\cdot 14=7\ \text{(unităţi de arie)}.$$

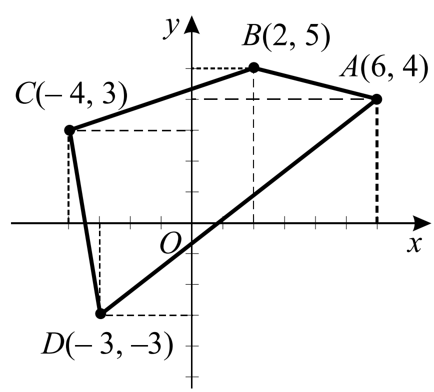


Fig. 2.2.

b) Avem $\mathscr{A}_{(ABCD)} = \mathscr{A}_{(ABC)} + \mathscr{A}_{(ACD)}$.

Dar, $\mathscr{A}_{(ACD)} = \frac{1}{2}|\Delta_2|$, unde $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 61$.

Rezultă că $\mathscr{A}_{(ACD)} = \frac{61}{2}$, iar aria suprafeţei ($ABCD$) este:

$$\mathscr{A}_{(ABCD)} = 7 + \frac{61}{2} = \frac{75}{2} \text{ (unităţi de arie).}$$

2. *Se consideră punctele* $A(2,\ m)$, $B(5,\ 1)$, $C(2m-8,\ m)$. *Să se determine* $m \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $\mathscr{A}_{(ABC)} = 12$.

Rezolvare.

Calculăm aria suprafeţei triunghiulare (ABC) după formula

$$\mathscr{A}_{(ABC)} = \frac{1}{2}|\Delta|, \text{ unde } \Delta = \begin{vmatrix} 2 & m & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 2m-8 & m & 1 \end{vmatrix}.$$

Se obţine: $\Delta = 2(m^2 - 6m + 5)$ şi $\mathscr{A}_{(ABC)} = |m^2 - 6m + 5|$.

Punând condiţia ca $\mathscr{A}_{(ABC)} = 12$ se obţine ecuaţia $|m^2 - 6m + 5| = 12$ cu soluţiile $m_1 = 7$, $m_2 = -1$.

Exerciţii şi probleme

Exersare

E1. Se dau punctele $A(2,\ -4)$ şi $B(-1,\ 3)$. Să se scrie ecuaţia dreptei AB şi să se verifice dacă punctul $C(5,\ -11)$ este coliniar cu punctele *A, B.*

E2. Care din următoarele triplete de puncte sunt formate din puncte coliniare:

a) $A(-1,\ -9)$; $B(2,\ -3)$; $C(4,\ 1)$.

b) $M(2,\ -3)$; $N(1,\ -1)$; $P(1,\ 5)$.

c) $E(-4,\ -2)$; $F(2,\ 1)$; $G(6,\ 3)$.

d) $T(2,\ -1)$; $U(3,\ 1)$; $V(m,\ 2m-5)$.

E3. Se dau punctele $A(2,-3)$, $B(m+1, 2m)$, $C(1, 5)$.
a) Să se determine ecuaţia dreptei AC.
b) Pentru ce valori ale parametrului m, punctele A, B, C sunt coliniare.
c) Să se determine triunghiul ABC cu aria 22,5.

E4. Se dau punctele $A(-3,-2)$, $B(5,-4)$, $C(-1,-3)$.
a) Să se scrie ecuaţiile laturilor triunghiului ABC.
b) Să se determine lungimile înălţimilor triunghiului ABC.
c) Să se determine $\mathscr{A}_{(ABC)}$.

E5. Patrulaterul $ABCD$ are vârfurile $A(1, 2)$, $B(8, 2)$, $C(6, 4)$, $D(3, 4)$.
a) Să se scrie ecuaţiile laturilor patrulaterului.
b) Să se scrie ecuaţiile diagonalelor patrulaterului.
c) Să se compare distanţele punctelor A şi C la diagonala $[BD]$.
d) Să se calculeze aria suprafeţei $(ABCD)$.

Sinteză

S1. Se dau punctele $A(1, 0)$, $B(-2, 4)$, $C(-1, 4)$ şi $D(3, 5)$.
a) Să se reprezinte punctele în plan şi să se scrie ecuaţiile dreptelor AB, BC, CA, CD.
b) Să se determine distanţele de la vârfurile B şi D la dreapta AC.
c) Să se compare ariile suprafeţelor (ABD), (BCD) şi (COD).
d) Dacă punctul $M(m, m+2)$ este coliniar cu B şi C, calculaţi aria suprafeţei (MAD).

S2. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât punctele $A(1, 1)$, $B(2^x, 2^{x+1}-2)$, $C(2^{x+1}-2, 2^x)$ să fie coliniare.

S3. Se dau punctele $A(\sin^2 a, \cos^2 a)$, $B(\sin^2 b, \cos^2 b)$, $C(\sin^2 c, \cos^2 c)$.
a) Să se verifice dacă $\mathscr{A}_{(OAB)} = \frac{1}{2}\left|\sin(a-b)\cdot\sin(a+b)\right|$.
b) Să se arate că pentru oricare $a, b, c \in \mathbb{R}$, punctele A, B, C sunt pe o dreaptă.

S4. Se dau punctele distincte $A(2, m)$, $B(m+1, m)$, $C(1, 2)$.
a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât punctele să fie coliniare.
b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât aria suprafeţei (ABC) să fie 1.

S5. Se consideră punctele $A(m, 2m-1)$, $B(m+1, -m+2)$. Pentru ce valori ale lui m are loc egalitatea $\mathscr{A}_{(OAB)} = \dfrac{23}{2}$.

S6. Să se determine $m, n \in \mathbb{R}$ astfel ca punctele A, B, C să fie coliniare în cazurile:

a) $A(m-1, 3)$, $B(2m, -m)$, $C(2m-3, 1+m)$.

b) $A(m-n, 1+m)$, $B(2m-n, 1)$, $C(m, n+1)$.

S7. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel ca punctul $A(1, 1)$ să fie la distanţa 3 faţă de dreapta BC, unde $B\left(0, \dfrac{2-6m}{1-m}\right)$, $C\left(1, \dfrac{7m-1}{m-1}\right)$.

S8. Se consideră punctele $A(3, 2)$, $B(2, 4)$. Să se determine punctele M situate pe dreapta $x-y-3=0$ pentru care $\mathscr{A}_{(OAM)} = \mathscr{A}_{(OBM)}$.

S9. Există puncte $A(m, 1)$, $B(1, m)$, $C(m, m)$ astfel încât $\mathscr{A}_{(ABC)} = 2$?

Teste de evaluare

Testul 1

1. Se dă expresia $E = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} - (-1)^3 \cdot |-6|^2$.

Valoarea expresiei este: a) –2; b) 2; c) 20; d) –36.

2. Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -5 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $\det(A)$ utilizând:

a) regula lui Sarrus;
b) regula triunghiului;
c) dezvoltarea după linia a doua;
d) dezvoltarea după coloana a doua;
e) dezvoltarea după coloana întâi după ce s-au obţinut două zerouri pe aceasta.
f) o proprietate a determinanţilor nuli.

3. Se dau matricele $A=\begin{pmatrix} x & -2 \\ x-1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 2x+1 \\ 5 & x-1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Suma soluţiilor ecuaţiei $\det(A+B)=\det(C^2)$ este ... .

4. Punctele $A(2m+1,\ 3)$, $B(1,\ m)$ şi $C(-4,\ 2)$ sunt coliniare dacă $m=$... .

Testul 2

1. Fie S_1, respectiv S_2 mulţimile soluţiilor ecuaţiilor:

a) $\begin{vmatrix} x-4 & 1-3x \\ 5 & -3 \end{vmatrix} - \frac{2}{3}\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}\begin{vmatrix} 5 & 1,(6) \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} y+4 & -y-5 & y+1 \\ 1 & y-1 & 3 \\ y+2 & -1 & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y+1 & -1 \\ 1 & 2y \end{vmatrix}$.

Să se determine S_1, S_2, $S_1 \cup S_2$, $S_1 \times S_2$.

2. Se dă matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon & \varepsilon^2 \\ -\varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ \varepsilon^2 & 1 & -\varepsilon \end{pmatrix}$, unde ε este soluţie a ecuaţiei $x^2+x+1=0$. Atunci $\det(A)+\det\left(\frac{1}{2}A^2\right)=$ ... .

3. Se dau matricele $A=\begin{pmatrix} x & y & b \\ a & 0 & z \\ -c & -z & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x & 0 & b \\ a & y & z \\ -c & b & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} x & 0 & y \\ a & y & 0 \\ -c & b & -z \end{pmatrix}$ şi $n = x\det(A)+a\det(B)+c\det(C)$. Atunci $n=$... .

4. Se consideră triunghiul ABC, cu $A\left(-\frac{2m}{3},\ 1\right)$ $B\left(3-m,\ -\frac{1}{4}\right)$ şi $C(1,\ 2)$. Valoarea lui $m \in \mathbb{Z}$ pentru care $d(C,\ AB)=3$ este ... .

Capitolul 3

Sisteme de ecuaţii liniare

3.1. Matrice inversabile din $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$

Să considerăm matricele pătratice de ordinul 3,

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & -3 & 1\\ -3 & 5 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

şi să calculăm produsele AB şi BA. Avem:

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -3 & 1\\ -3 & 5 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3-3+1 & -3+5-2 & 1-2+1\\ 3-6+3 & -3+10-6 & 1-4+3\\ 3-9+6 & -3+15-12 & 1-6+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I_3.$$

$$BA=\begin{pmatrix}3 & -3 & 1\\ -3 & 5 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3-3+1 & 3-6+3 & 3-9+6\\ -3+5-2 & -3+10-6 & -3+15-12\\ 1-2+1 & 1-4+3 & 1-6+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I_3.$$

Se observă că s-au obţinut egalităţile $AB=I_3$ şi $BA=I_3$. Matricea A cu această proprietate se numeşte matrice inversabilă, iar matricea B este inversa matricei A.

↳ DEFINIŢII

> ➢ *O matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n = 2, 3$ *se numeşte* ***matrice inversabilă*** *dacă există matricea* $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *astfel încât* $AB = BA = I_n$.
>
> ➢ *Matricea B se numeşte* ***inversa*** *matricei A şi se notează* $B = A^{-1}$.

În mod analog, se poate spune că matricea A este inversa matricei B şi au loc relaţiile:

$$\boldsymbol{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n} \text{ şi } \boldsymbol{(A^{-1})^{-1} = A}.$$

↳ TEOREMA 1.

> *Inversa unei matrice pătratice, dacă există, este unică.*

Demonstraţie.

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi $B, B' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = BA = I_n$ şi $AB' = B'A = I_n$, $n = 2, 3$.

Folosind asociativitatea înmulţirii matricelor şi faptul că matricea unitate I_n este element neutru pentru înmulţirea matricelor pătratice, se obţine:

$$B = B \cdot I_n = B(AB') = (BA)B' = I_n B' = B' \text{ deci } B = B'.$$

În continuare, ne punem problema existenţei inversei unei matrice pătratice şi a modului de determinare a acesteia atunci când există.

↳ TEOREMA 2.

> *O matrice pătratică* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *este matrice inversabilă dacă şi numai dacă* $\det(A) \neq 0$.

Demonstraţie.

Să presupunem că matricea A este inversabilă. Rezultă că există $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Aplicând proprietatea P_9 a determinanţilor obţinem că $\det(AA^{-1}) = \det(I_n)$, adică $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$, ceea ce implică faptul că $\det(A) \neq 0$.

Reciproc, să arătăm că dacă $\det(A) \neq 0$, atunci matricea A este inversabilă. Pentru aceasta se va realiza construcţia efectivă a matricei A^{-1}.

- ✓ Se scrie matricea transpusă ${}^{t}A$ a matricei A.
- ✓ Se defineşte matricea A^* numită *matricea adjunctă* a matricei A, ale cărei elemente reprezintă complemenţii algebrici ai elementelor matricei transpuse ${}^{t}A$.

Folosind proprietatea P_{10} a determinanţilor se arată ca:

$$AA^* = A^* A = \det(A) \cdot I_n .$$

Din această egalitate, prin înmulţirea cu factorul nenul $\frac{1}{\det(A)}$ se obţine:

$$A \cdot \left(\frac{1}{\det(A)} \cdot A^* \right) = \left(\frac{1}{\det(A)} \cdot A^* \right) \cdot A = I_n ,$$

egalităţi din care rezultă că matricea A este matrice inversabilă şi inversa ei este dată de formula

$$\boxed{\mathbf{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^* .}}$$

EXERCIŢII REZOLVATE

1. *Să se determine inversa matricei* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Rezolvare.

Calculăm determinantul matricei A pentru a stabili dacă A este matrice inversabilă. Avem:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 3 + 16 - 0 - 12 - 2 = -1 \neq 0.$$

Rezultă că A este inversabilă şi inversa ei este $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^*$.

Scriem matricea transpusă ${}^{t}A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ şi apoi determinăm matricea adjunctă A^* formată din complemenţii algebrici ai elementelor matricei ${}^{t}A$.

Se obţine $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 2 & -6 & 5 \\ -3 & 7 & -6 \end{pmatrix}$ şi prin urmare

$$A^{-1} = -A^* = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 \\ -2 & 6 & -5 \\ 3 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. *Se consideră matricea* $A = \begin{pmatrix} m & 2 & m+2 \\ -1 & m+3 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{R}$.

a) *Să se determine* $m \in \mathbb{R}$ *pentru care A este matrice inversabilă.*

b) *Pentu* $m = 1$ *să se determine* A^{-1}.

Rezolvare.

a) Matricea A este inversabilă dacă şi numai dacă $\det(A) \neq 0$. Avem:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} m & 2 & m+2 \\ -1 & m+3 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -2(m+1)^2.$$

Rezultă că matricea A este inversabilă dacă şi numai dacă $m+1 \neq 0$, adică $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

b) Pentru $m = 1$, se obţine matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, iar $\det(A) = -8$.

Rezultă ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, iar $A^* = \begin{pmatrix} 8 & -14 & -10 \\ 4 & -8 & -4 \\ -8 & 10 & 6 \end{pmatrix}$.

Se obţine:

$$A^{-1} = -\frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -14 & -10 \\ 4 & -8 & -4 \\ -8 & 10 & 6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -7 & -5 \\ 2 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exerciţii şi probleme

Exersare

E1. Să se determine care din următoarele matrice sunt inversabile:

a) $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

E2. Să se determine inversa matricei:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

E3. Să se determine $m \in \mathbb{C}$ pentru care matricea este inversabilă:

a) $\begin{pmatrix} 2 & m \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} m & 5 \\ -20 & m \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} m-3 & 7 \\ 2 & m+2 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} m^2-3m & m \\ m-3 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} m & m+1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} m^2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ m^2 & 11 & 9 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 2+m & 1 & 1 \\ m & m-1 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} \frac{3m+1}{2} & -1 & 7 \\ 4 & 9 & \frac{m-7}{2} \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$.

E4. Se dau matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -4 & 10\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}7 & 5\\ 3 & 2\end{pmatrix}$.

a) Să se arate că matricele *A, B, AB* şi *BA* sunt inversabile şi să se calculeze inversele lor.

b) Este adevărată egalitatea $(AB)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$?

c) Să se verifice egalităţile $(A^2)^{-1}=(A^{-1})^2$ şi $(B^2)^{-1}=(B^{-1})^2$.

E5. Să se determine matricea *A* a cărei inversă este:

a) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-5 & 8\\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$; b) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 4 & 2\end{pmatrix}$;

c) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\ 0 & 4 & -1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$; d) $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{11}{5} & -\frac{7}{5}\\ 0 & -2 & 1\\ \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}$.

Sinteză

S1. Care din următoarele matrice sunt inversabile:

a) $\begin{pmatrix}2^x & 5^x\\ 4^x & 10^x\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}\lg 1 & 2\\ -2 & \lg 5\end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix}\sqrt{3}-\sqrt{2} & \sqrt{5}-\sqrt{4}\\ \sqrt{5}+\sqrt{4} & \sqrt{3}+\sqrt{2}\end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix}0! & 3\\ 8 & 4!\end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix}C_4^2 & A_3^2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix}\log_2 8 & \log_3 9\\ 7 & \log_2 32\end{pmatrix}$?

S2. Să se determine inversa matricei:

a) $\begin{pmatrix}i & -i^2\\ 3 & -4i\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}\sqrt{2}+\sqrt{3} & 1-i\\ 1+i & \sqrt{3}-\sqrt{2}\end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix}\sin x & \cos x\\ -\cos x & \sin x\end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix}-1 & C_m^2 & C_m^1\\ 4 & -3 & 5\\ -\frac{1}{2} & 3 & 2\end{pmatrix}$.

S3. Să se determine valorile parametrului real m pentru care matricea A este inversabilă, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & x & 2 \\ 2 & -1 & x \\ m & x & 3 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 1 & x & -1 \\ m & 2 & x \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ m & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 5+x & -3 & x+2 \\ x-1 & 1-2x & x-2 \\ m & x & 3 \end{pmatrix}$;

S4. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^* = A^{-1}$ dacă:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & m+3 & 1 \\ -3 & m-4 & -3 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} m-3 & m & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 2m-1 & -1 & 4 \\ m & -1 & 1 \\ 3m-2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; d) $A = \begin{pmatrix} 4^m & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2^m & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

S5. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \in \{1, 2, 3\}$, două matrice inversabile astfel încât $AB = BA$. Să se arate că:

a) $AB^{-1} = B^{-1}A$; d) $A^{-1}\left(B + B^{-1}\right) = \left(B^{-1} + B\right)A^{-1}$;

b) $A^{-1}B = BA^{-1}$; e) $A^{-1}BAB^{-1} = AB^{-1}A^{-1}B$;

c) $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; f) $A^{-1}B^{-1}(A+B) = (A+B)B^{-1}A^{-1}$.

S6. Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine produsul $(I_3 - A)(I_3 + A)$.

b) Să se arate că $I_3 - A$ este matrice inversabilă şi să se calculeze $(I_3 - A)^{-1}$.

3.2. Ecuaţii matriceale

O ecuaţie matriceală este în general o ecuaţie în care necunoscuta este o matrice.

Au fost deja întâlnite la capitolul *Matrice* astfel de ecuaţii, unde matricea necunoscută s-a determinat respectând operaţiile cu matrice şi egalitatea matricelor.

Noţiunea de *matrice inversabilă* dă o nouă posibilitate de rezolvare a unor ecuaţii matriceale de forma:

a) $A \cdot X = B$, unde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ şi $\det(A) \neq 0$.

b) $X \cdot A = B$, unde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $\det(A) \neq 0$.

c) $A \cdot X \cdot C = B$, unde:
$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ şi $\det(A) \neq 0$, $\det(C) \neq 0$.

- Astfel, pentru ecuaţia $AX = B$, folosind faptul că A este inversabilă avem

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Leftrightarrow \boxed{X = A^{-1}B} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C}).$$

- Ecuaţia $XA = B$ este echivalentă cu $(XA)A^{-1} = BA^{-1} \Leftrightarrow X(A \cdot A^{-1}) = BA^{-1}$, deci $\boxed{X = BA^{-1}}$. Aşadar, ecuaţia b) are soluţie unică în mulţimea $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

- Pentru ecuaţia $AXC = B$ avem succesiv

$$A^{-1}(AXC)C^{-1} = A^{-1}BC^{-1} \Leftrightarrow (A^{-1}A)X(CC^{-1}) = A^{-1}BC^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{X = A^{-1}BC^{-1}}$$

În concluzie, ecuaţia c) are soluţie unică în mulţimea $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$

EXERCIŢII REZOLVATE

1. *Să se rezolve ecuaţia matriceală:* $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 14 & -1 \end{pmatrix}$.

Rezolvare.

Ecuaţia dată este de forma $XA = B$, unde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ şi } B = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 14 & -1 \end{pmatrix}.$$

Deoarece $\det(A)=5\neq 0$, rezultă că matricea A este inversabilă şi ecuaţia matriceală este echivalentă cu $(XA)\cdot A^{-1}=BA^{-1}$, adică $X=BA^{-1}$.

Dar, $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\cdot A^{*}=\dfrac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$. Rezultă că:

$$X=\begin{pmatrix}-5 & 5\\ 14 & -1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-10 & 5\\ 15 & 25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix}.$$

2. *Să se determine X din egalitatea:* $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 5 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 6\\ 3 & -4\end{pmatrix}$.

Rezolvare.

Relaţia din enunţ este de forma $A\cdot X\cdot B=C$, unde

$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 5 & -3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & 6\\ 3 & -4\end{pmatrix}$.

Deoarece $\det(A)=1\neq 0$ şi $\det(B)=-1\neq 0$, atunci avem:

$$A^{-1}\cdot(AXB)\cdot B^{-1}=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1},$$

relaţie din care rezultă că $X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$.

Dar, $A^{-1}=A^{*}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ şi $B^{-1}=-B^{*}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & 3\end{pmatrix}$. Se obţine, în final,

$$X=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 6\\ 3 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}35 & 20\\ -46 & -26\end{pmatrix}.$$

Exerciţii şi probleme

Exersare

E1. Să se rezolve ecuaţiile matriceale:

a) $X\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$;

b) $X\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3i & 1\\ -5 & 2i\end{pmatrix}X$.

E2. Să se rezolve ecuaţia matriceală:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot Y \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - 3I_2$.

E3. Să se determine matricea necunoscută din egalităţile:

a) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$;

b) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

E4. Se dau matricele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se determine matricea X care verifică relaţia:

a) $AXB = C$; b) $BXA = {}^tC$.

3.3. Sisteme de ecuaţii liniare cu cel mult trei necunoscute. Forma matriceală

3.3.1. Noţiuni generale

Să considerăm următoarea situaţie-problemă:

Într-un bazin apa vine prin trei robinete. Dacă robinetele funcţionează timp de trei ore, două ore, respectiv o oră, în bazin se adună 175 dal. *Dacă robinetele funcţionează timp de două ore, trei ore, respectiv două ore, în bazin se adună* 220 dal, *iar dacă robinetele funcţionează o oră, cinci ore, respectiv trei ore, în bazin se adună* 295 dal.

Câţi decalitri de apă curg într-o oră prin fiecare robinet?

Pentru rezolvarea problemei vom înregistra datele acesteia într-un tabel de tip matriceal, urmând ca apoi să analizăm aceste date, să le corelăm şi să le interpretăm.

Astfel, avem următorul tabel matriceal:

Tabelul 3.1.

Robinetul I (nr. de ore)	Robinetul II (nr. de ore)	Robinetul III (nr. de ore)	**Cantitatea de apă din bazin**
3	2	1	**175**
2	3	2	**220**
1	5	3	**295**

Notăm cu x, y respectiv z debitul robinetelor I, II, respectiv III (cantitatea de apă scursă într-o oră).

Datele referitoare la numărul de ore de funcţionare a celor trei robinete le organizăm într-o matrice A de ordinul 3, cele referitoare la cantitatea totală de apă din bazin le organizăm într-o matrice-coloană B, iar cele care reprezintă necunoscutele problemei formează o matrice-coloană X. În mod concret, avem:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 175 \\ 220 \\ 295 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Interdependenţa celor trei categorii de date se face exprimând cantitatea de apă acumulată în bazin ca fiind suma cantităţilor de apă furnizate de robinete în fiecare din cele trei tranşe de funcţionare.

Se obţine astfel următorul model matematic al problemei:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 175 \\ 2x + 3y + 2z = 220. \\ x + 5y + 3z = 295 \end{cases}$$

S-a obţinut un sistem de trei ecuaţii cu trei necunoscute în care necunoscutele *x, y, z* au exponentul 1.

➯ *DEFINIŢIE*

> *Un sistem de ecuaţii, în care fiecare ecuaţie este de gradul 1, cu una sau mai multe necunoscute se numeşte* ***sistem de ecuaţii liniare.***

Forma generală a unui sistem de *n* ecuaţii liniare cu cel mult 3 necunoscute este:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \quad (S). \\ \quad\vdots \\ a_nx + b_ny + c_nz = d_n \end{cases}$$

Asociem sistemului de ecuaţii liniare (S) următoarele matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,3}(\mathbb{C}); \quad B = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C});$$

$$C = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C}).$$

- *A* este *matricea coeficien*ţilor necunoscutelor sau *matricea sistemului*;
- *B* este *matricea termenilor liberi ai ecuaţiilor;*
- *X* este *matricea necunoscutelor* sistemului.

Un sistem de ecuaţii liniare în care matricea termenilor liberi are toate elementele zero se numeşte *sistem liniar omogen.*

- Un triplet de numere complexe $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ se numeşte *soluţie a sistemului de ecuaţii* (S) dacă înlocuind necunoscutele *x, y, z* respectiv cu aceste numere, toate ecuaţiile sistemului sunt identic satisfăcute.

Din punct de vedere al existenţei şi numărului de soluţii ale unui sistem de ecuaţii liniare se poate face următoare *clasificare:*

1. Sisteme de ecuaţii liniare care au *o singură soluţie*, numite ***sisteme compatibile determinate***.

EXEMPLU

- Sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x+y=3 \\ 4x-y=7 \end{cases}$ are soluţia unică $x=2,\ y=1$.

2. Sisteme de ecuaţii liniare care au *o infinitate de soluţii,* numite ***sisteme compatibile nedeterminate***.

EXEMPLU

- Sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+2y=8 \end{cases}$ este sistem de ecuaţii liniare compatibil nedeterminat deoarece are o infinitate de soluţii de forma $(\alpha,\ 4-\alpha),\ \alpha \in \mathbb{C}$.

3. Sisteme de ecuaţii liniare care *nu au nicio soluţie*, numite ***sisteme incompatibile***.

EXEMPLU

- Fie sistemul de ecuaţii $\begin{cases} 2x+y=0 \\ 2x+y=5 \end{cases}$. Dacă ar exista cuplul (α_1, α_2) de numere complexe care să fie soluţie a sistemului, atunci ar rezulta că $0=5$, ceea ce este fals. Rezultă că sistemul este incompatibil.

3.3.2. Forma matriceală a unui sistem de ecuaţii liniare

Se consideră sistemul (S) de n ecuaţii liniare cu cel mult 3 necunoscute, scris în forma generală:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ \quad\vdots \\ a_nx + b_ny + c_nz = d_n \end{cases}$$

cu matricele asociate:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & c_n \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix}.$$

Calculând produsul AX se obţine matricea

$$AX = \begin{pmatrix} a_1x + b_1y + c_1z \\ a_2x + b_2y + c_2z \\ \vdots \\ a_nx + b_ny + c_nz \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}).$$

Se observă că elementele matricei AX reprezintă membrul întâi al fiecărei ecuaţii a sistemului (S).

Rezultă că sistemul de ecuaţii liniare (S) se poate scrie sub forma unei ecuaţii matriceale astfel:

$$\boxed{A \cdot X = B.} \qquad (S_1)$$

Această formă de scriere reprezintă *forma matriceală* a sistemului de ecuaţii liniare.

Dacă matricea A este matrice inversabilă, atunci aplicând tehnica rezolvării unei ecuaţii matriceale se obţine soluţia sistemului, dată de:

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B.}$$

Această metodă de obţinere a soluţiei unui sistem liniar, cu matricea A inversabilă, se numeşte *metoda matriceală* de rezolvare a unui sistem liniar.

EXERCIŢII REZOLVATE

1. *Să se rezolve sistemul de ecuaţii* $\begin{cases} 2x-5y=7 \\ x+3y=-2 \end{cases}$ *prin metoda matriceală.*

Rezolvare.

Matricele asociate sistemului de ecuaţii sunt:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Forma matriceală a sistemului este $A \cdot X = B$.

Avem: $\det(A)=\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=11 \neq 0.$

Rezultă că A este matrice inversabilă şi inversa ei este $A^{-1}=\frac{1}{11}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$

Matricea X are forma $X = A^{-1} \cdot B$, adică $X=\frac{1}{11}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ care se scrie sub forma echivalentă $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Aşadar, soluţia sistemului de ecuaţii este perechea $(x=1,\ y=-1)$ care se scrie sub formă de mulţime $S=\{(1,-1)\}$.

2. *Să se rezolve prin metoda matriceală sistemul de ecuaţii:*

$$\begin{cases} 2x-y+z=6 \\ x-3y-2z=-7. \\ 3x+4y-2z=4 \end{cases}$$

Rezolvare.

Matricele asociate sistemului sunt

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

şi forma matriceală a sistemului este $A \cdot X = B$.

Calculăm $\det(A)=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}=45 \neq 0.$

Rezultă că există A^{-1} şi se găseşte $A^{-1} = \frac{1}{45} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 2 & 5 \\ -4 & -7 & 5 \\ 13 & -11 & -5 \end{pmatrix}$.

Din ecuaţia matriceală $A \cdot X = B$ se obţine $X = A^{-1} \cdot B$, adică:

$$X = \frac{1}{45} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 2 & 5 \\ -4 & -7 & 5 \\ 13 & -11 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Efectuând înmulţirile, rezultă că $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Aşadar, mulţimea soluţiilor sistemului de ecuaţii este $S = \{(2, 1, 3)\}$.

3.4. Metode de rezolvare a sistemelor de ecuaţii liniare

A. Metoda lui Cramer

În paragraful 2.1, folosind metoda reducerii pentru rezolvarea unui sistem de n ecuaţii liniare cu n necunoscute, $n \in \{2, 3\}$ s-a ajuns la exprimarea soluţiei sistemului cu ajutorul determinanţilor de ordinul 2, respectiv 3.

În continuare se va da o rezolvare de sine stătătoare a sistemelor de n ecuaţii liniare cu n necunoscute, $n \in \{2, 3\}$ folosind determinanţi.

➯ *DEFINIŢIE*

*Un sistem de n ecuaţii liniare cu n necunoscute se numeşte **sistem de tip Cramer**[1] dacă determinantul matricei sistemului este nenul.*

Rezolvarea unui sistem de tip Cramer se va face folosind determinanţi, prin metoda denumită metoda lui Cramer.

[1] Gabriel **Cramer** (1704–1752), matematician şi fizician elveţian. Este creatorul determinanţilor (1730). Are lucrări în domeniul curbelor algebrice de ordin superior.

Metoda lui Cramer pentru $n = 2$

Fie sistemul liniar (S) cu două ecuaţii şi două necunoscute $\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = n \end{cases}$ şi matricele asociate:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}.$$

- Dacă sistemul (S) este de tip Cramer, atunci este compatibil determinat şi soluţia sa se calculează cu formulele:

$$\boxed{\boldsymbol{x = \frac{d_x}{d};\quad y = \frac{d_y}{d}}}$$

unde $d = \det(A)$, iar $d_x = \begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix};\quad d_y = \begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}$,

numite *formulele lui Cramer.*

EXERCIŢIU REZOLVAT

Să se determine soluţia sistemului de ecuaţii:

$$\begin{cases} 7x - 6y = 5 \\ 8x - 7y = -10 \end{cases}.$$

Rezolvare.

Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$ cu determinantul $d = \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = -1.$

Deoarece $d \neq 0$, sistemul este de tip Cramer şi soluţia se află cu formulele lui Cramer:

$$x = \frac{d_x}{d},\ y = \frac{d_y}{d},$$

unde $d_x = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -10 & -7 \end{vmatrix} = -95;\ d_y = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 8 & -10 \end{vmatrix} = -110.$

Aşadar, sistemul este compatibil determinat şi soluţia lui este:

$$x = 95,\ y = 110.$$

Metoda lui Cramer pentru $n = 3$

Fie sistemul de trei ecuaţii liniare cu trei necunoscute:

$$(\mathrm{S})\ \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

şi matricea asociată

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

- Dacă sistemul (S) este sistem de tip Cramer, atunci acesta este compatibil determinat şi soluţia se calculează cu formulele:

$$\boxed{\boldsymbol{x = \frac{d_x}{d},\ y = \frac{d_y}{d},\ z = \frac{d_z}{d},}}$$

unde $d = \det(A)$, iar

$$d_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\ d_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},\ d_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix},$$

numite *formulele lui Cramer*.

EXERCIŢIU REZOLVAT

Să rezolvăm sistemul de ecuaţii asociat problemei enunţate la începutul paragrafului 3.3.1: $\begin{cases} 3x + 2y + z = 175 \\ 2x + 3y + 2z = 220. \\ x + 5y + 3z = 295 \end{cases}$

Rezolvare.

Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, iar determinantul ei este:

$$d = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Rezultă că sistemul de ecuaţii este sistem de tip Cramer şi are soluţie unică dată de formulele lui Cramer:

$$x=\frac{d_x}{d},\ y=\frac{d_y}{d},\ z=\frac{d_z}{d},$$

unde:

$$d_x=\begin{vmatrix}175 & 2 & 1\\ 220 & 3 & 2\\ 295 & 5 & 3\end{vmatrix}=5\cdot\begin{vmatrix}35 & 2 & 1\\ 44 & 3 & 2\\ 59 & 5 & 3\end{vmatrix}=5\cdot\begin{vmatrix}35 & 2 & 1\\ -26 & -1 & 0\\ -46 & -1 & 0\end{vmatrix}=5\cdot\begin{vmatrix}-26 & -1\\ -46 & -1\end{vmatrix}=-100;$$

$$d_y=\begin{vmatrix}3 & 175 & 1\\ 2 & 220 & 2\\ 1 & 295 & 3\end{vmatrix}=5\cdot\begin{vmatrix}3 & 35 & 1\\ 2 & 44 & 2\\ 1 & 59 & 3\end{vmatrix}=5\cdot\begin{vmatrix}4 & 35 & 1\\ 4 & 44 & 2\\ 4 & 59 & 3\end{vmatrix}=5\cdot4\cdot\begin{vmatrix}1 & 35 & 1\\ 0 & 9 & 1\\ 0 & 24 & 2\end{vmatrix}=-120;$$

$$d_z=\begin{vmatrix}3 & 2 & 175\\ 2 & 3 & 220\\ 1 & 5 & 295\end{vmatrix}=5\cdot\begin{vmatrix}3 & 2 & 35\\ 2 & 3 & 44\\ 1 & 5 & 59\end{vmatrix}=5\cdot\begin{vmatrix}0 & -13 & -142\\ 0 & -7 & -74\\ 1 & 5 & 59\end{vmatrix}=5\cdot\begin{vmatrix}-13 & -142\\ -7 & -74\end{vmatrix}=-160.$$

Soluţia sistemului este $x=\frac{-100}{-4}=25;\ y=\frac{-120}{-4}=30;\ z=\frac{-160}{-4}=40.$ În concluzie, debitele celor trei robinete sunt: 25 dal, 30 dal, respectiv 40 dal.

B. Metoda lui Gauss

Să considerăm următoarea situaţie-problemă:

Un magazin pune în vânzare trei tipuri de produse P_1, P_2, P_3 *aflate în stoc în număr de 10, 25, respectiv 20 de bucăţi, valorând în total* 2400 *unităţi monetare (u.m.).*

După epuizarea tipului P_1 *în stoc mai rămân* 12, *respectiv 14 bucăţi de tipul* P_2, *respectiv* P_3, *în valoare totală de* 1070 u.m. *După epuizarea tipului* P_2 *în stoc mai rămân* 6 *bucăţi de tipul* P_3, *în valoare de* 150 u.m.

Care este preţul pe unitatea de produs din fiecare tip?

Pentru rezolvare vom aşeza datele problemei în următorul tabel matriceal:

Tabelul 3.2.

Produse de tip P_1	Produse de tip P_2	Produse de tip P_3	**Valoare totală**
10	25	20	2 400 u.m.
0	12	14	1 070 u.m.
0	0	6	150 u.m.

Notăm cu x, y respectiv z preţul unui produs de tipul P_1, P_2, respectiv P_3. Modelul matematic al problemei este următorul sistem de 3 ecuaţii liniare cu 3 necunoscute:

$$\begin{cases} 10x+25y+20z=2400 \\ \qquad\ \ 12y+14z=1070 \\ \qquad\qquad\quad 6z=150 \end{cases}. \qquad (1)$$

Se observă că soluţia sistemului se află pornind de la ultima ecuaţie. Avem $z=\dfrac{150}{6}=25$ (u.m.). Prin înlocuire, din ecuaţia a doua se obţine $y=60$ (u.m.), iar din ecuaţia întâi se obţine $x=40$ (u.m.). Aşadar, preţul pe unitatea de produs este: 40 u.m., 60 u.m., respectiv 25 u.m.

OBSERVAŢII

- ✓ Trebuie remarcată forma *triunghiulară* a sistemului (1) şi simplitatea rezolvării lui cu cunoştinţe elementare, pornind de la ultima ecuaţie către prima.
- ✓ Se pune întrebarea dacă un sistem oarecare, de ecuaţii liniare se poate aduce la o astfel de formă şi dacă da, cum se procedează? Răspunsul este afirmativ şi procedeul va fi dat de *metoda lui Gauss*[2].

Metoda lui Gauss sau *metoda eliminării succesive* constă în eliminarea câte unei necunoscute din ecuaţiile sistemului astfel încât sistemul să aibă o formă triunghiulară sau trapezoidală.

Transformările care se fac asupra unui sistem şi care conduc la sisteme echivalente cu sistemul dat sunt:

- ➢ înmulţirea unei ecuaţii cu un număr nenul;
- ➢ adunarea unei ecuaţii la altă ecuaţie înmulţită eventual cu un număr nenul;
- ➢ schimbarea ordinii de scriere a două ecuaţii în sistem.

[2] Carl Friedrich **Gauss** (1777–1855), matematician german. A fost profesor la Universitatea din Göttingen (1795–1798). A avut contribuţii deosebite în teoria numerelor, geometrie, analiză matematică, fizică.

Metoda lui Gauss este aplicabilă pentru orice fel de sistem de ecuaţii liniare. Exemplificăm aplicarea metodei lui Gauss pe câteva sisteme de ecuaţii.

Exemplu

1. *Să se rezolve sistemul de ecuaţii liniare:*

$$(\mathrm{S})\ \begin{cases} \boxed{x-2y-z=2} & \big|(-2) \\ 2x-y-z=1 \\ 2x+y+z=3 \end{cases}.$$

Pasul 1. Se păstrează prima ecuaţie şi în raport cu ea se elimină necunoscuta x din celelalte două ecuaţii. Pentru aceasta se înmulţeşte prima ecuaţie cu -2 şi se adună la celelalte ecuaţii. Astfel sistemul (S) este echivalent cu sistemul (S′):

$$(S')\ \begin{cases} x-2y-z=2 \\ \boxed{3y+z=-3} & \Big|\cdot\left(-\dfrac{5}{3}\right). \\ 5y+3z=-1 \end{cases}$$

Pasul 2. Se elimnă necunoscuta y din a treia ecuaţie, păstrând primele două ecuaţii neschimbate. Ecuaţia de referinţă (în raport cu care se face eliminarea) este a doua ecuaţie, care se înmulţeşte cu $-\frac{5}{3}$ şi se adună la a treia ecuaţie.După această transformare elementară se obţine sistemul (S'') echivalent cu (S'):

$$(S'')\ \begin{cases} x-2y-z=2 \\ 3y+z=-3. \\ \boxed{\dfrac{4}{3}z=4} \end{cases}$$

Acest sistem are formă triunghiulară. Din ultima ecuaţie se obţine $z=3$. Înlocuind în ecuaţia a doua se obţine $y=-2$, iar din prima ecuaţie se obţine $x=1$. Aşadar, soluţia sistemului de ecuaţii este tripletul $(1,\ -2,\ 3)$.

2. *Să se rezolve sistemul de ecuaţii:* $\begin{cases} 5x-y+z=9 \\ 2x+3y-4z=3. \\ x-7y+9z=3 \end{cases}$

Permutăm prima şi a treia ecuaţie între ele şi se obţine sistemul echivalent cu cel dat:

$$\begin{cases} \boxed{x-7y+9z=3} & \big|(-2);\,(-5) \\ 2x+3y-4z=3 & \\ 5x-y+\quad z=9 & \end{cases}.$$

Eliminăm necunoscuta x din a doua şi a treia ecuaţie păstrând ca ecuaţie de referinţă pe prima. Se obţine următorul sistem de ecuaţii echivalent cu predecentul:

$$\begin{cases} x-7y+\ \ 9z=3 \\ \quad \boxed{17y-22z=-3}\ \big|(-2). \\ \quad 34y-44z=-6 \end{cases}$$

Se elimină necunoscuta y din ecuaţia a treia păstrând ca ecuaţie de referinţă ecuaţia a doua. Se obţine sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} x-7y+\ 9z=3 \\ \quad 17y-22z=-3. \\ \qquad \boxed{0\cdot z=0} \end{cases}$$

Din ultima ecuaţie a sistemului obţinut se deduce că z poate fi orice număr complex. În acest caz necunoscuta z se notează parametric $z=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{C}$ şi reprezintă o necunoscută secundară a sistemului de ecuaţii.

Din a doua ecuaţie a sistemului *triunghiular* se obţine $y=\dfrac{22\alpha-3}{17}$, iar din prima ecuaţie se determină $x=\dfrac{\alpha+30}{17}$.

În concluzie, sistemul iniţial este sistem compatibil nedeterminat şi mulţimea soluţiilor este $S=\left\{\left(\dfrac{\alpha+30}{17},\dfrac{22\alpha-3}{17},\alpha\right)\middle|\ \alpha\in\mathbb{C}\right\}$.

PRECIZARE

Dacă ultima ecuaţie a sistemului adus la forma triunghiulară (trapezoidală) are două sau mai multe necunoscute, se păstrează una dintre acestea ca necunoscută principală, iar celelalte vor fi considerate necunoscute secundare şi se vor nota cu parametrii.

EXEMPLU

➤ *Să se rezolve sistemul de ecuaţii:* $\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ -3x - 2y + z = 0 \end{cases}.$

Pentru uşurinţa calculelor se pot permuta necunoscutele sistemului alegând ca primă necunoscută pe y. Avem:

$$\begin{cases} y + 2x + 3z = 1 & \big| \cdot 2 \\ -2y - 3x + z = 0 \end{cases}.$$

Eliminăm necunoscuta y din a doua ecuaţie înmulţind prima ecuaţie cu 2 şi adunând-o la a doua ecuaţie. Se obţine sistemul trapezoidal:

$$\begin{cases} y + 2x + 3z = 1 \\ \quad\;\; x + 7z = 2 \end{cases}.$$

Considerăm necunoscută secundară pe z pe care o notăm parametric $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$, iar x şi y sunt considerate necunoscute principale ale sistemului. Se obţine:

$$\begin{cases} y + 2x + 3z = 1 \\ \quad\;\; x + 7z = 2 \\ \qquad\quad\; z = \alpha \end{cases},$$

de unde rezultă $x = 2 - 7\alpha$, $y = 11\alpha - 3$, $z = \alpha$.

Aşadar, mulţimea soluţiilor sistemului este:

$$S = \left\{ (2 - 7\alpha, 11\alpha - 3, \alpha) \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{C} \right\}.$$

PRECIZARE

Dacă în sistemul de ecuaţii liniare adus la forma triunghiulară, apar ecuaţii contradictorii (membrul întâi este nul, iar al doilea este nenul), atunci sistemul este incompatibil.

EXEMPLU

➤ *Să se rezolve sistemul de ecuaţii:* $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 2 \\ x + \quad\;\; 2z = 0 \\ 5x - y + 4z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}.$

Pentru a elimina mai uşor necunoscuta x este preferabil să permutăm prima ecuaţie cu a doua obţinându-se:

$$\begin{cases} x + \quad\quad 2z = 0 & \Big|(-3);\ (-5);\ (-1) \\ 3x - 2y + 4z = 2 \\ 5x - \ \ y + 4z = 1 \\ x + 2y + \ \ z = 1 \end{cases}.$$

Înmulţim prima ecuaţie de referinţă cu (-3), (-5) şi (-1) şi o adunăm respectiv la a doua, a treia şi a patra ecuaţie. Se obţine sistemul:

$$\begin{cases} x + 0y + 2z = 0 \\ \quad -2y - 2z = 2 \\ \quad\ \ -y - 6z = 1 & \Big|(-2);\ (2) \\ \quad\ \ 2y - \ \ z = 1 \end{cases}.$$

Permutăm ecuaţia a treia cu a doua şi continuăm eliminarea necunoscutei y din ecuaţiile a treia şi a patra. Se obţine sistemul:

$$\begin{cases} x + 0y + 2z = 0 \\ \quad -y - 6z = 1 \\ \quad\quad\quad 10z = 0 & \Big|\cdot\dfrac{13}{10} \\ \quad\quad -13z = 3 \end{cases} \text{ echivalent cu } \begin{cases} x + 0y + 2z = 0 \\ \quad -y - 6z = 1 \\ \quad\quad\quad 10z = 0 \\ \quad\quad\quad 0z = 3 \end{cases}.$$

Din ultima ecuaţie se obţine o contradicţie $(0 = 3)$ şi ca urmare sistemul este incompatibil.

EXERCIŢIU REZOLVAT

Să se discute şi să se rezolve sistemul de ecuaţii, α fiind un parametru real:

$$\begin{cases} x + \ \ y + \ \ z = 3 \\ 2x - \ \ y + 3z = 8 \\ x - 5y + \alpha z = 8 \end{cases}.$$

Rezolvare.

Folosim metoda lui Gauss şi obţinem succesiv:

$$\begin{cases} x + \ \ y + \quad\quad z = 3 \\ \quad -3y + \quad\quad z = 2 \\ \quad -6y + (\alpha - 1)z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ -3x \ \ + \ \ z = 2 \\ (\alpha - 3)z = 1 \end{cases}.$$

Discuţia şi rezolvarea sistemului pornesc de la ultima ecuaţie.

Dacă $\alpha = 3$, ultima ecuaţie este contradictorie $(0 = 1)$, deci sistemul este incompatibil.

Dacă $\alpha \neq 3$, sistemul este compatibil determinat, cu soluţia:

$$z = \frac{1}{\alpha - 3};\ y = \frac{7 - 2\alpha}{3(\alpha - 3)};\ x = \frac{11\alpha - 37}{3(\alpha - 3)}.$$

Aşadar, pentru $\alpha \neq 3$ soluţia sistemul iniţial este tripletul:

$$\left(\frac{11\alpha - 37}{3(\alpha - 3)}, \frac{7 - 2\alpha}{3(\alpha - 3)}, \frac{1}{\alpha - 3}\right).$$

Exerciţii şi probleme

Exersare

E1. Să se scrie matricele asociate următoarelor sisteme de ecuaţii:

a) $\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 8x - y = 2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - 4y = 1 \\ 5x - 6y = -8 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 4x + y + 3z = 0 \\ 9x - 2y - z = 4 \end{cases}$; d) $\begin{cases} a + b - c = 6 \\ 3a - 2b + c = 11 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} 3x + 2y - z = -x + y + 1 \\ x - y + 3z = ix - 2 \\ ix - iy + z = 2(x - 1) \end{cases}$; f) $\begin{cases} 3(x - 1) + 4(2 - y) = 3(z - 2) \\ 2(1 + x) + 3(z - y) = 5(x - y) \\ 3(x - y) + 4(y - z) = 2(x + y - z) \end{cases}$.

E2. Care din sistemele de numere $(-3, -2)$; $(-2, -4)$; $(-6, 2)$; $(i, 1)$ sunt soluţii ale sistemelor de ecuaţii:

a) $\begin{cases} 2x + y = -8 \\ 3x - 4y = 10 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + y = -4 \\ 2x + 5y = -2 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} (2 - i)x - 4y = -3 + 2i \\ 2ix + iy = -2 + i \end{cases}$; d) $\begin{cases} 3(x - i) + i(y - 1) = 0 \\ (1 + i)(x + 1) + (1 - i)(y + 1) = 2 \end{cases}$.

E3. Se dă sistemul de ecuaţii $\begin{cases}(a+3)x-3y=8\\4x-(2b+3)y=18\end{cases}$, $a,\ b\in\mathbb{R}$. Să se determine a şi b astfel încât soluţia sistemului să fie:

a) $(1,\ -2)$; b) $\left(-\frac{7}{4},\ -5\right)$.

E4. Să se scrie sub formă matriceală şi să se rezolve sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases}3x-4y=7\\2x-3y=5\end{cases}$; b) $\begin{cases}2x-3y=1\\5x-7y=3\end{cases}$;

c) $\begin{cases}3(x+y)-2(x+2y)=5\\4(x-y)-y+2x=2\end{cases}$; d) $\begin{cases}2x+y-3z=-6\\4x+y+z=10\\-3x+y+2z=-1\end{cases}$;

e) $\begin{cases}2(3x-y)+5z=3+y\\4(x+y-z)+2y=3+z\\2x-3y+10z=2\end{cases}$; f) $\begin{cases}x+y+z=a\\2x+5y-3z=b\\x+3y-2z=c\end{cases}$.

E5. Să se determine care din următoarele sisteme sunt de tip Cramer şi să se rezolve prin regula lui Cramer:

a) $\begin{cases}x-8y=5\\3x+9y=11\end{cases}$; b) $\begin{cases}2(x-y)-3(x+y)=1\\8x-5(x-3y)=4\end{cases}$;

c) $\begin{cases}3x-4y+2z=3\\5x+y+3z=6\\x-6y+z=-4\end{cases}$; d) $\begin{cases}x-2y+2z=10\\2x-y-z=2\\x+y-z=4\end{cases}$.

E6. Să se rezolve sistemele de ecuaţii prin regula lui Cramer:

a) $\begin{cases}x+2y=4\\2x+5y=9\end{cases}$; b) $\begin{cases}-2x+5y=-1\\3x-7y=2\end{cases}$;

c) $\begin{cases}4x+3y=17\\6x+5y=-3\end{cases}$; d) $\begin{cases}x+y+z=2\\2x+3y-z=5\\3x+y+3z=4\end{cases}$;

e) $\begin{cases}x+2y-4z=-2\\-3x+4y+z=13\\2x-y+3z=9\end{cases}$; f) $\begin{cases}-2x+y+3z=-1\\x+y+2(y+z)=4\\2(x+z)-(3y+x)=10\end{cases}$.

E7. Se consideră sistemul de ecuaţii $A \cdot X = B$, unde

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

a) Să se rezolve sistemul de ecuaţii prin metoda matriceală.
b) Să se scrie ecuaţiile sistemului.
c) Să se rezolve sistemul de ecuaţii prin regula lui Cramer.

E8. Să se rezolve prin metoda lui Gauss sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = -1 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 2x + 5y + 3z = 17 \\ 4x - 6y - 3z = 0 \\ 6x + 10y - 10z = 8 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ 2x + 3y - 2z = 4 \\ x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$;

f) $\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ x + 2y - z = 2 \\ 2x + 3y + z = 6 \\ 3x + 4y + 3z = 10 \end{cases}$;

g) $\begin{cases} 2x - 3y + z = -1 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - 10y + 8z = -1 \\ 4x - 15y + 9z = 0 \end{cases}$;

h) $\begin{cases} 2x - 3y - z = 1 \\ x - y - 2z = -3 \end{cases}$;

i) $\begin{cases} a - 2b + c = 10 \\ 3a - 2b - c = 7 \end{cases}$;

j) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ x + 3y - z = 1 \end{cases}$.

Sinteză

S1. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să fie de tip Cramer şi să se rezolve în acest caz:

a) $\begin{cases} x - my + z = 2m \\ x - 2y + z = -1 \\ mx + m^2 y - 2z = 2 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x + my - z = 8 \\ 2x - y - 2z = 6 \\ mx + 2y + z = 4 \end{cases}$.

S2. Pentru ce valori ale parametrului *m* sistemul de ecuaţii nu este de tip Cramer?

a) $\begin{cases} x+(m+1)y+z=2 \\ mx+y-z=0 \\ x-2y-mz=3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x+3y+(m+2)z=0 \\ 3x+y+mz=4 \\ 3x-y+z=6 \end{cases}$.

S3. Să se rezolve prin metoda matriceală, metoda lui Cramer şi metoda lui Gauss sistemul de ecuaţii:

a) $\begin{cases} \frac{1}{4}(5x-2y)+1=x-\frac{1}{5}(y+2) \\ \frac{1}{7}(5x+3y)+\frac{1}{14}(9y-11)=x+y \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+3y=\frac{7}{9}(5x+12z) \\ 9y+20z=6(x-48y) \\ 2x+3y+4z=128 \end{cases}$.

S4. Să se rezolve prin regula lui Cramer sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases} x+y-(2-i)z=-2+2i \\ x+iy-(1+i)z=-1 \\ ix-iz=-1-i \end{cases}$; b) $\begin{cases} C_3^1x-C_3^2y+4C_3^3z=2 \\ 2C_5^1x-4C_5^0y+C_5^2z=6 \\ A_3^2x-2A_3^1y+A_3^3z=0 \end{cases}$.

S5. Să se rezolve prin metoda lui Gauss sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases} 2(x+2y)=3z+11 \\ 5x-3y=6-5z-2x \\ 3(x-z)=15-y+5z \\ 6(x-y)+11z=-4-y \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x+y=2-z \\ x+3y=5-z \\ x+y=-7-5z \\ 2x+3y=14+3z \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x+y=3z-1 \\ 2x+y=2z+1 \\ x+y+z-3=0 \\ x+2y-3z-1=0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 3x+4z=-2(2+y) \\ 5y+7z=4(x+2) \\ 11x-31y-47z=-68 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} 2x+7y-4z=0 \\ 5x-2y-8z=0 \\ 12x+3y-20z=0 \end{cases}$; f) $\begin{cases} x-4y+(2m+3)z=0 \\ x-my-z=0 \\ 2x+y=8,\ m\in\mathbb{R} \end{cases}$.

S6. Se dă sistemul de ecuaţii $\begin{cases} 2x+y+(m+1)z=m \\ x+(m-1)y+mz=2m \\ 5x+4y+3(m+1)z=3 \end{cases}$.

a) Pentru ce valori ale parametrului $m \in \mathbb{R}$ sistemul este compatibil determinat?
b) Să se rezolve sistemul de ecuaţii obţinut pentru $m=0$, $m=-1$, $m=2$.

S7. Se dă sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=2 \\ a^2x+b^2y+c^2z=4 \end{cases}$.

Ştiind că *a, b, c* sunt numere reale diferite, să se rezolve sistemul.

S8. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} (2m-1)x+3y-mz=1 \\ 3x+(2m-1)y+(m-1)=3 \\ (m-2)x+(m-2)y+z=2 \end{cases}$.

a) Să se scrie matricea A a sistemului şi să se rezolve ecuaţia $\det(A)=0$.
b) Pentru ce valori ale parametrului m sistemul nu este de tip Cramer?
c) Dacă sistemul este de tip Cramer să se determine soluţia sistemului notată (x_m, y_m, z_m).
d) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât să aibă loc relaţia $x_m+2y_m-z_m>1$.

S9. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x+y+z=2^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R} \\ x+y+2z=4^{\alpha} \end{cases}$.

a) Să se determine soluţia $(x(a), y(a), z(a))$ a sistemului de ecuaţii.
b) Să se determine mulţimea $A=\{a \in \mathbb{R} \mid y(a)>1\}$.

ASE Bucureşti, 1998

S10. Sistemul de ecuaţii $\begin{cases} ax+y+z=4 \\ (\alpha+1)x+(\beta+1)y+2z=7, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ x+2\beta y+z=4 \end{cases}$ este compatibil determinat pentru:

a) $\alpha=1, \beta \neq 0$; b) $\alpha \neq 1, \beta \neq 0$; c) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; d) $\alpha=1, \beta=\frac{1}{2}$.

Universitatea Galaţi, 2004

S11. Să se discute după $m \in \mathbb{R}$ şi să se rezolve sistemul: $\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ x - y + z = -1 \\ x + 2y + mz = m \end{cases}$.

S12. Sistemul de ecuaţii $\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x + my + 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ are numai soluţia nulă (0, 0, 0) dacă:

a) $m \neq -1,\ m \neq 2$; b) $m = 0$; c) $m = 2$; d) $m \in \mathbb{R}$.

Politehnică Bucureşti, 2004

S13. Pentru golirea unui bazin cu apă se utilizează trei robinete. Timpul de funcţionare a fiecărui robinet şi cantitatea de apă evacuată exprimată în hectolitri sunt date în tabelul matriceal alăturat.

Tabelul 3.3.

Robinetul I (nr. de ore)	Robinetul II (nr. de ore)	Robinetul III (nr. de ore)	Cantitatea de apă evacuată (în hl)
2 ore	3 ore	6 ore	220 hl
3 ore	2 ore	6 ore	210 hl
2 ore	2 ore	3 ore	145 hl

Să se determine debitul fiecărui robinet.

S14. Dacă tatăl ar avea cu 7 ani mai mult decât are, atunci vârsta actuală a fiului mai mic ar fi $\frac{1}{6}$ din vârsta tatălui. Peste 15 ani vârsta fiului mai mare va fi $\frac{1}{2}$ din vârsta tatălui. Să se determine vârsta fiecăruia, dacă peste 18 ani cei doi copii vor avea împreună cât vârsta tatălui lor.

S15. Se consideră sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} x + my - 2z = 2 \\ 2x + (2m-1)y + z = n,\ m,\ n \in \mathbb{R} \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$.

a) Să se rezolve sistemul pentru $m = 1$ şi $n = 5$.

b) Să se discute după valorile lui $m,\ n \in \mathbb{R}$ şi să se rezolve sistemul.

Universitatea Braşov, 2002

Teste de evaluare

Testul 1

1. Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3-x & x \\ x+6 & -2 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel ca matricea A să nu fie inversabilă.

b) Să se calculeze A^{-1} dacă $x = 2$.

2. Fie sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ 2mx + m^2 y + 3z = 3m \end{cases}$.

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluţie unică.

b) Să se rezolve sistemul obţinut dacă $m = 3$.

Universitatea Construcţii Bucureşti, 2004

3. Pentru 3 creioane, o gumă şi 7 caiete un elev plăteşte 45 lei. Dacă ar cumpăra 5 creioane, 3 gume şi două caiete ar plăti 28 lei. Ştiind că 4 creioane, 5 gume şi 5 caiete costă împreună 42 lei, să se afle preţul fiecărui obiect.

Testul 2

1. Să se calculeze inversele matricelor:

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 3 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Se dau matricele $A = (a_{ij})_{3\times 3}$, unde $a_{ij} = \begin{cases} C_{2i}^{i},\ i > j \\ i, \quad i = j \\ -i, \quad i < j \end{cases}$ şi $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 45 \end{pmatrix}$

Să se rezolve ecuaţia matriceală $AX = B$.

3. Se dă sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} (1+m)x+y+z=1 \\ x+(1+m)y+z=m \\ x+y+(1+m)z=m^2 \end{cases}$, $m^2 \in \mathbb{R}$

a) Să se calculeze determinantul sistemului.
b) Pentru ce valori ale lui m sistemul este compatibil determinat?
c) Să se rezolve sistemul pentru $m=2$.
d) Să se rezolve sistemul pentru $m=0$.

Universitatea Baia Mare, 2005

Probleme recapitulative

1. Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care $A^3+aA^2+bA=O_2$.

2. Să se determine matricea $A=\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ştiind că $A^2+4I_2=4A$, şi apoi să se afle A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

Ştiinţe economice Cluj, 1996

3. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Să se calculeze A^2 şi A^3.
b) Să se determine $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $A^3=\alpha A^2+\beta A+I_3$.

Universitatea Bacău, 1997

4. Fie $E(X)=X^2-4X+4I_3$. Dacă $A=\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $E(A)=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Universitatea Craiova, 2003

5. Fie $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Să se calculeze $(I_3+A)^n$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Universitatea Politehnică, 1994

6. Fie $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Să se calculeze $S=A+A^2+A^3+...+A^{10}$.

7. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}a & 0 & b\\ 0 & c & 0\\ d & 0 & e\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, cu proprietatea că $ae=bd$.

a) Să se demonstreze că există $x, y\in\mathbb{R}$ astfel încât $A^2=xA+yE$, unde $E=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

b) Să se arate că pentru oricare $n\in\mathbb{N}^*$, există $a_n, b_n\in\mathbb{R}$, cu proprietatea că $A^n=x_nA+y_nE$.

Facultatea de Sociologie, 1997

8. Fie $A=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$. Dacă $C=AB$, să se calculeze C^{101}.

9. Să se rezolve sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases}A+B=I_2\\ 2A+3B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\end{cases}$; b) $\begin{cases}A+3B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\\ 3A+4B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\end{cases}$.

10. Să se determine matricea $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ştiind că

$$A\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ a & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\ a & 1\end{pmatrix}\cdot A=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 4 & 4\end{pmatrix}.$$

11. Să se determine $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, ştiind că:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4i \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

12. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţiile:

a) $\begin{vmatrix} x & x & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 4 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 0$; b) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ -1 & x & 1 \\ 1 & -2 & x \end{vmatrix} = 5$; c) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$.

13. Fie $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$. Să se rezolve ecuaţiile în $\mathbb{R}$:

a) $\begin{vmatrix} 1 & x & ab \\ 1 & a & bx \\ 1 & b & ax \end{vmatrix} = 0$; d) $\begin{vmatrix} 2x & x & 2x+1 \\ x+1 & 2x-1 & x+2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$;

b) $\begin{vmatrix} 2x+1 & x+1 & x+2 \\ 2x+7 & x+4 & x+5 \\ 2x+13 & x+7 & x+8 \end{vmatrix} = 0$; e) $\begin{vmatrix} x^2 & 2x & 1 \\ x^2 & 2x-1 & 2 \\ 2 & x & x \end{vmatrix} = 0$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & x+b & x+a \\ x^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 0$; f) $\begin{vmatrix} x & a & a \\ a & 2x-a & a \\ b & x & 0 \end{vmatrix} = 0$.

14. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru ca matricea A să fie inversabilă:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a^2+1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a^3 \end{pmatrix}$.

15. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Universitatea Bacău, 1998

16. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} x+m & m \\ 1-m & x+2m \end{pmatrix}$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care matricea A este inversabilă $\forall x \in \mathbb{R}$.

17. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Să se calculeze inversa matricei A^4.

18. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze B^{-1}.

19. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} x+3y-z=3 \\ 2x+y-4z=-1 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y-3z=1 \\ 4x+y-5z=1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y+2z=3 \\ 3x+y+4z=1 \\ x-y+3z=1 \end{cases}$.

20. Se consideră sistemul $\begin{cases} 2x+y+3z=1 \\ mx+y-2z=1 \\ (2m-1)x+2y+z=n \end{cases}$. Dacă $A = \{(m, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \text{sistemul este compatibil nedeterminat}\}$ şi $\alpha = \sum_{(m,n)\in A} (m^2+n^2)$, atunci:

a) $\alpha = 18$; b) $\alpha = 26$; c) $\alpha = 32$; d) $\alpha = 13$; e) $\alpha = 25$.

21. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ şi $X(a) = I_2 + aA, a \in \mathbb{Z}$.

a) Calculaţi $A^3 - 3A$;
b) Determinaţi că $X(a) \cdot X(b) = X(a+b+3ab)$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{Z}$;
c) Arătaţi că $X(a)$ este matrice inversabilă oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$.

Bacalaureat 2011

PARTEA a II-a

Elemente de analiză matematică

Capitolul 1

Limite de funcţii

1.1. Mulţimi de puncte pe dreapta reală

1.1.1. Relaţia de ordine pe mulţimea $\mathbb{R}$

Este cunoscut faptul că mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale se poate pune în corespondenţă cu punctele unei drepte d. Fiecărui număr real x i se asociază un punct $M \in d$. Numărul x se numeşte *abscisa* punctului M şi se scrie $M(x)$ (fig. 1.1).

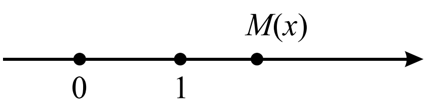


Fig. 1.1.

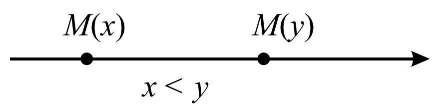


Fig. 1.2.

Dreapta d pe care s-a ales o *origine,* o *unitate de măsură* şi un sens pozitiv se numeşte *axă numerică* (axa numerelor reale).

Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, iar $M(x)$, $M(y)$ sunt punctele asociate, numărul x este mai mic decât y şi se scrie $x < y$, dacă pe axa numerelor punctul $M(x)$ este în stânga punctului $M(y)$ (fig. 1.2.).

Pentru oricare numere reale x, y sunt posibile doar următoarele situaţii:

$$\boxed{x < y,\ x = y \ \text{ sau } \ y < x} \quad (\textit{legea tricotomiei}).$$

Vom spune că $x \leqslant y$ dacă $x < y$ sau $x = y$.

Relaţia „$\leqslant$“ se numeşte *relaţia de ordine* pe mulţimea $\mathbb{R}$.

Se verifică uşor că relaţia de ordine „$\leqslant$“ are proprietăţile:

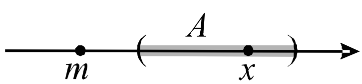
- *reflexivitatea: pentru orice* $x \in \mathbb{R}$, $x \leqslant x$;
- *antisimetria: dacă* $x \leqslant y$ şi $y \leqslant x$, *atunci* $x = y$;
- *tranzitivitatea: dacă* $x, y, z \in \mathbb{R}$ şi $x \leqslant y$, $y \leqslant z$, *atunci* $x \leqslant z$.

1.1.2. Mulţimi mărginite

Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulţime de numere reale.

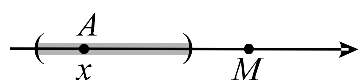
↳ *DEFINIŢII*

- *Numărul* $m \in \mathbb{R}$ *se numeşte* ***minorant*** *al mulţimii* A *dacă* $m \leqslant x$, $\forall x \in A$ *(fig. 1.3.).*
- *Numărul* $M \in \mathbb{R}$ *se numeşte* ***majorant*** *al mulţimii* A *dacă* $x \leqslant M$, $\forall x \in A$ *(fig. 1.4.).*



$m \leq x, \forall x \in A$

Fig. 1.3.



$x \leq M, \forall x \in A$

Fig. 1.4.

Lecturând fig. 1.3. şi fig. 1.4., se observă că dacă mulţimea $A \subset \mathbb{R}$ are un minorant, ea are o infinitate de minoranţi. De asemenea, dacă mulţimea $A \subset \mathbb{R}$ are un majorant, ea are o infinitate de majoranţi.

EXEMPLE

- *Să se determine mulţimea majoranţilor şi mulţimea minoranţilor pentru*

  a) $A = (2, 3)$; b) $A = [-1, 0] \cup [1, 3]$.

Rezolvare.

a) Studiind desenul din fig. 1.5., se observă că mulţimea minoranţilor este $\mathcal{M}_1 = (-\infty, 2]$, iar mulţimea majoranţilor este mulţimea $\mathcal{M}_2 = [3, +\infty)$.

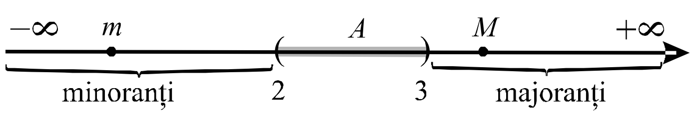


Fig. 1.5.

b) Să observăm desenul din fig. 1.6.

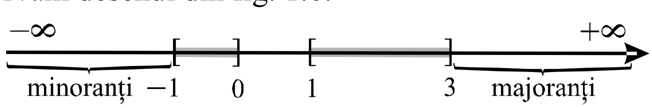


Fig. 1.6.

Mulţimea minoranţilor este $\mathcal{M}_1 = (-\infty, -1]$, iar mulţimea majoranţilor este $\mathcal{M}_2 = [3, +\infty)$.

DEFINIŢII

> - *O mulţime $A \subset \mathbb{R}$ se numeşte* ***mărginită inferior (minorată)*** *dacă are cel puţin un minorant.*
> - *O mulţime $A \subset \mathbb{R}$ se numeşte* ***mărginită superior (majorată)*** *dacă are cel puţin un majorant.*
> - *O mulţime $A \subset \mathbb{R}$ se numeşte* ***mărginită*** *dacă este mărginită inferior şi mărginită superior.*
> - *O mulţime $A \subset \mathbb{R}$ se numeşte* ***nemărginită*** *dacă nu este mărginită inferior sau nu este mărginită superior.*

Din definiţia mulţimilor mărginite rezultă că dacă $A \subset \mathbb{R}$ este mărginită, atunci există numerele a, $b \in \mathbb{R}$, cu proprietatea că:

$$\boxed{a \leqslant x \leqslant b,\ \forall x \in A.} \qquad (1)$$

Cu alte cuvinte, o mulţime $A \subset \mathbb{R}$ este mărginită dacă există un interval $I = [a, b]$ cu proprietatea că $A \subset [a, b]$.

Proprietatea de mărginire a unei mulţimi $A \subset \mathbb{R}$ poate fi exprimată folosind proprietăţi ale modulului unui număr real. Avem următoarea caracterizare:

• O mulţime $A \subset \mathbb{R}$ este mărginită dacă şi numai dacă există $M \in (0, \infty)$ cu proprietatea că

$$\boxed{|x| \leqslant M,\ \forall x \in A.} \qquad (2)$$

EXEMPLU

- *Să se arate că mulţimile următoare sunt mărginite:*

a) $A = \left\{ \dfrac{(-1)^n}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$; b) $A = \left\{ \dfrac{2x}{x^2+1} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$; c) $A = \{2\sin x \,|\, x \in \mathbb{R}\}$.

Soluţie.

a) Se observă că $\left| \dfrac{(-1)^n}{n} \right| = \dfrac{1}{n} \leqslant 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi se ia $M = 1$.

b) Avem: $\left| \dfrac{2x}{x^2+1} \right| \leqslant 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (verificare) şi se ia $M = 1$.

c) Deoarece $|\sin x| \leqslant 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că $|2\sin x| \leqslant 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$ şi se consideră $M = 2$.

Dacă $A \subset \mathbb{R}$ este mulţime mărginită inferior, mulţimea minoranţilor săi este un interval de forma $\mathscr{M}_1 = (-\infty,\ m]$. Numărul real m, cel mai mare minorant al mulţimii A, se numeşte **margine inferioară** a mulţimii A şi se notează inf A (fig. 1.7.).

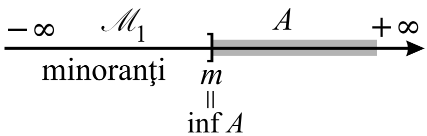


Fig. 1.7.

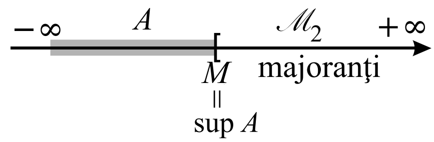


Fig. 1.8

Dacă $A \subset \mathbb{R}$ este mulţime mărginită superior, mulţimea majoranţilor săi este un interval de forma $\mathscr{M}_2 = [M,\ \infty)$. Numărul real M, cel mai mic majorant al mulţimii A, se numeşte **margine superioară** a mulţimii A şi se notează sup A (fig. 1.8.).

O mulţime mărginită $A \subset \mathbb{R}$ are margine inferioară şi margine superioară. Marginile unei mulţimi mărginite sunt unice.

Pentru o mulţime $A \subset \mathbb{R}$ care este nemărginită inferior nu există margine inferioară. În acest caz, se convine să se considere ca $\inf A = -\infty$.

De asemenea, o mulţime $A \subset \mathbb{R}$ care este nemărginită superior nu are margine superioară. În acest caz se convine să se considere că $\sup A = +\infty$.

Simbolurile $-\infty$, $+\infty$ sunt numite **numere improprii** sau **numere infinite**.

Mulţimea formată din toate numerele reale (numere finite), împreună cu $-\infty$ şi $+\infty$ se numeşte **dreapta încheiată** şi se notează $\overline{\mathbb{R}}$.

Aşadar, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty,\ \infty\}$ sau $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty,\ \infty]$.

PROBLEME REZOLVATE

Să se arate că următoarele mulţimi sunt nemărginite:

a) $A = \mathbb{N}$; b) $A = \mathbb{Z}$; c) $A = \{n^2 | n \in \mathbb{N}\}$.

Soluţie

a) Pentru a arăta că o mulţime nu este mărginită, se arată că aceasta nu are cel puţin un minorant sau nu are cel puţin un majorant. Deoarece $0 \leqslant x$, $\forall x \in \mathbb{N}$, rezultă că mulţimea $\mathbb{N}$ este mărginită inferior. Mulţimea minoranţilor este $M = (-\infty,\ 0]$, deci $\inf A = 0$.

Vom arăta că $\mathbb{N}$ nu este mărginită superior. Dacă presupunem că $M \in (0,\ \infty)$ este un majorant pentru mulţimea $\mathbb{N}$, atunci $n \leqslant M$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (fig. 1.9.).

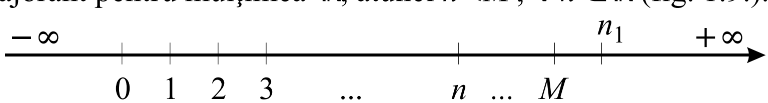


Fig. 1.9.

Dar $[M] \in \mathbb{N}$, iar numărul $n_1 = 1 + [M]$ este număr natural şi $n_1 > M$, deci M nu ar fi majorant pentru $\mathbb{N}$, ceea ce contrazice alegerea lui M. Aşadar, mulţimea $\mathbb{N}$ nu este mărginită superior şi avem $\sup \mathbb{N} = +\infty$.

b) Deoarece $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, iar $\mathbb{N}$ este nemărginită, rezultă că şi mulţimea $\mathbb{Z}$ este nemărginită superior. Mai mult, mulţimea $\mathbb{Z}$ este nemărginită şi inferior (demonstraţi!).

c) Procedăm analog punctului a). Dacă ar exista $M \in (0, \infty)$ majorant al mulţimii A, atunci $n^2 \leqslant M$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ sau $n \leqslant \sqrt{M}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Luând $m = \left[\sqrt{M}\right] + 1$ se obţine că $m^2 \in A$ şi $M < m^2$, deci se contrazice faptul că M este majorant pentru A.

Observaţie

✓ Mulţimile $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sunt mulţimi nemărginite inferior şi superior.

Referitor la simbolurile $-\infty$ şi $+\infty$ sunt acceptate următoarele operaţii:

• $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$;	• $(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$;
• $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$;	• $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$;
• $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$;	• $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$;
• $(+\infty) + a = +\infty$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$;	• $a + (+\infty) = +\infty$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$;
• $(-\infty) + a = -\infty$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$;	• $a + (-\infty) = -\infty$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$;
• $a \cdot (+\infty) = +\infty$, dacă $a > 0$;	• $a \cdot (-\infty) = -\infty$, dacă $a > 0$;
• $a \cdot (+\infty) = -\infty$, dacă $a < 0$;	• $a \cdot (-\infty) = +\infty$, dacă $a < 0$;
• $\dfrac{a}{+\infty} = 0$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$;	• $\dfrac{a}{-\infty} = 0$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$.

Pentru operaţii de forma: $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$, $0 \cdot (+\infty)$, $0 \cdot (-\infty)$, $(+\infty) \cdot 0$, $(-\infty) \cdot 0$, $\dfrac{+\infty}{+\infty}$, $\dfrac{-\infty}{-\infty}$, $\dfrac{+\infty}{-\infty}$, $\dfrac{-\infty}{+\infty}$ nu se atribuie niciun sens.

1.1.3. Intervale de numere reale

Fie $a,\ b \in \mathbb{R},\ a < b$ şi punctele $A(a),\ B(b)$ asociate acestora pe axa numerică.

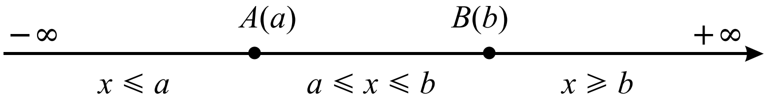


Fig. 1.10

Punctele A şi B determină pe axa numerică mulţimi de puncte reprezentate de segmentele $[AB]$ şi de semidreptele cu extremităţile A şi B (fig. 1.10).

Aceste mulţimi pot fi caracterizate cu ajutorul absciselor. Astfel, vom avea:

- $\{x \in \mathbb{R} | a < x < b\} \overset{\text{not}}{=} (a,\ b)$ *interval deschis*;
- $\{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x \leqslant b\} \overset{\text{not}}{=} [a,\ b]$ *interval închis*;
- $\{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x < b\} \overset{\text{not}}{=} [a,\ b)$ *interval închis la stânga şi deschis la dreapta*;
- $\{x \in \mathbb{R} | a < x \leqslant b\} \overset{\text{not}}{=} (a,\ b]$ *interval deschis la stânga şi închis la dreapta.*

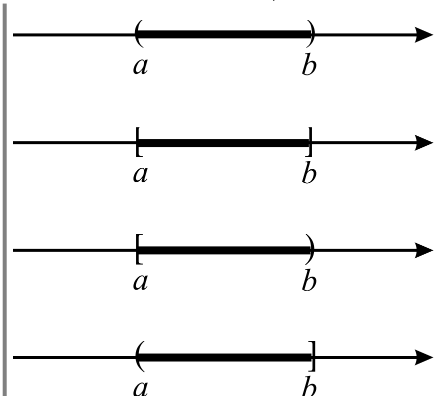


Fig. 1.11.

Intervalele definite mai sus se numesc intervale mărginite. Numerele a şi b se numesc extremităţile intervalului. Din punct de vedere geometric, un interval mărginit reprezintă un segment de dreaptă (fig. 1.11).

În cazul în care $a = b$, atunci $[a,\ a] = \{a\}$.

- $\{x \in \mathbb{R} | x > b\} \overset{\text{not}}{=} (b,\ \infty)$ – *interval deschis la stânga şi nemărginit la dreapta*;
- $\{x \in \mathbb{R} | x < a\} \overset{\text{not}}{=} (-\infty,\ a)$ – *interval deschis la dreapta şi nemărginit la stânga*;
- $\{x \in \mathbb{R} | x \geqslant b\} \overset{\text{not}}{=} [b,\ \infty)$ – *interval închis la stânga şi nemărginit la dreapta;*
- $\{x \in \mathbb{R} | x \leqslant a\} \overset{\text{not}}{=} (-\infty,\ a]$ – *interval închis la dreapta şi nemărginit la stânga.*

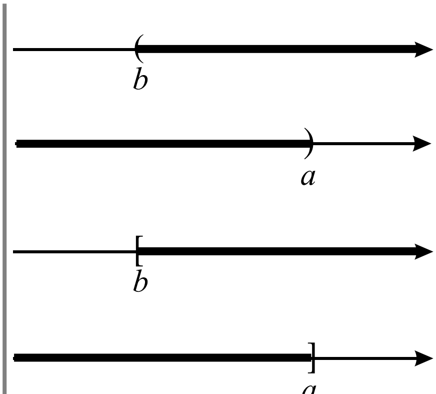


Fig. 1.12.

Imaginile geometrice ale acestor intervale sunt semidrepte (fig. 1.12.).

Intervale simetrice

Fie a un număr real pozitiv. Un interval de forma $[-a, a]$ sau $(-a, a)$ se numeşte *interval simetric.* Imaginea geometrică a unui interval simetric este un segment pe axa numerică cu mijlocul situat în origine (fig. 1.13).

Fig. 1.13.

Avem: $[-a, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid -a \leqslant x \leqslant a\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leqslant a\}$;

$(-a, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid -a < x < a\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < a\}$

Intervale centrate într-un punct

Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $r \in (0, \infty)$. Intervalele de forma $(a-r, a+r)$ sau $[a-r, a+r]$ se numesc *intervale centrate în a.* Imaginea geometrică a unui interval centrat în $a \in \mathbb{R}$ este un segment cu mijlocul situat în punctul $A(a)$ (fig. 1.14).

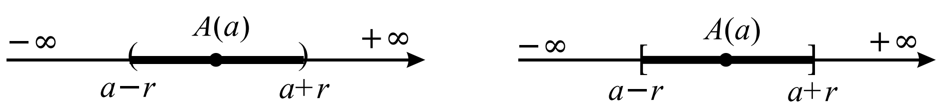


Fig. 1.14.

Folosind proprietăţi ale modulului de numere reale se obţine:

$$(a-r, a+r) = \{x \in \mathbb{R} \mid a-r < x < a+r\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -r < x-a < r\} =$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < r\}.$$

$$[a-r, a+r] = \{x \in \mathbb{R} \mid a-r \leqslant x \leqslant a+r\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -r \leqslant x-a \leqslant r\} =$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| \leqslant r\}.$$

OBSERVAŢIE

✓ Pentru oricare punct $x_0 \in \mathbb{R}$ există o infinitate de intervale centrate în x_0, de exemplu $(x_0 - n, x_0 + n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Oricare interval de forma (a, b) sau $[a, b]$, cu $a < b$ este interval centrat în $x_0 = \frac{a+b}{2}$ (fig. 1.15).

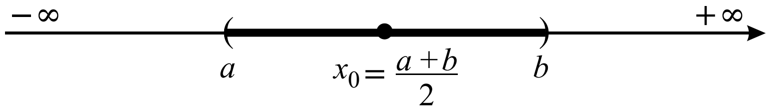


Fig. 1.15

Dacă $I = (a, b)$ şi $x_0 \in I$, atunci există intervale centrate în x_0 incluse în *I*. Într-adevăr, dacă luăm $\varepsilon = \min(x_0 - a, b - x_0)$, atunci $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a, b)$ (fig. 1.16.).

Fig. 1.16.

1.1.4. Vecinătăţile unui punct pe axa reală

⇘ *DEFINIŢII*

> ➢ *Se numeşte* ***vecinătate a punctului*** $x_0 \in \mathbb{R}$ *orice interval deschis* $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ *cu proprietatea că* $x_0 \in I$.
>
> ➢ *Se numeşte* ***vecinătate a lui*** $-\infty$ *orice interval deschis* $I = (-\infty, a) \subset \mathbb{R}$.
>
> ➢ *Se numeşte* ***vecinătate a lui*** $+\infty$ *orice interval deschis* $I = (a, \infty) \subset \mathbb{R}$.

Se observă uşor că oricare ar fi $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ el are o infinitate de vecinătăţi. Mulţimea vecinătăţilor lui $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ se notează $\mathcal{V}(x_0)$.

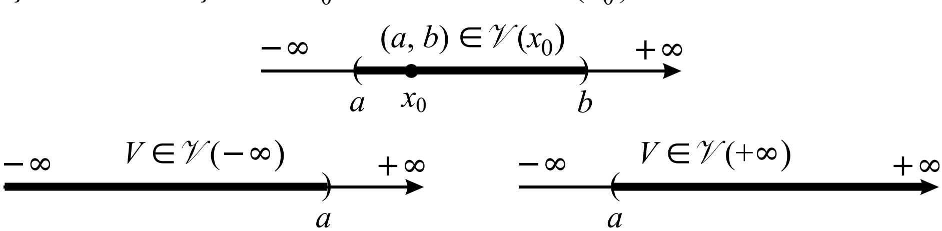


Fig. 1.17.

EXEMPLU

- Mulţimile $(-1, 1)$, $(-\infty, 1)$, $(-1, \infty)$ sunt vecinătăţi ale lui $x_0 = 0$. Totodată, mulţimea $(-\infty, 1) \in \mathcal{V}(-\infty)$, iar $(-1, \infty) \in \mathcal{V}(+\infty)$.

Proprietăţi ale vecinătăţilor

- Dacă $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x_0)$, atunci şi $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x_0)$.
- Dacă $V_1, V_2, ..., V_n \in \mathcal{V}(x_0)$, atunci $V_1 \cap V_2 \cap ... \cap V_n \in \mathcal{V}(x_0)$ pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$.
- Dacă $V \in \mathcal{V}(x_0)$, atunci oricare interval deschis $I = (a, b)$ cu proprietatea $V \subset I$ este vecinătate a lui x_0.
- Dacă $V \in \mathcal{V}(x_0)$ şi $y \in V$, atunci $V \in \mathcal{V}(y)$.

După cum s-a arătat, dacă $x_0 \in (a, b)$, atunci există un interval I centrat în x_0 cu proprietatea că $I \subset (a, b)$. Aşadar, oricare ar fi $V \in \mathcal{V}(x_0)$, există cel puţin o vecinătate

$$\boxed{V_1 = (x_0 - r, x_0 + r) \in \mathcal{V}(x_0).}$$

Această proprietate permite ca în multe cazuri să se lucreze numai cu vecinătăţi centrate.

TEOREMA 1 (de separare).

Fie $x, y \in \mathbb{R}, x < y$. Atunci există vecinătăţile $V_1 \in \mathcal{V}(x)$ şi $V_2 \in \mathcal{V}(y)$, cu proprietatea că $V_1 \cap V_2 = \varnothing$.

Demonstraţie.

Alegem $z \in (x, y)$ şi vecinătăţile $V_1 \in \mathcal{V}(x)$, $V_1 = (-\infty, z)$, $V_2 \in \mathcal{V}(y)$, $V_2 = (z, +\infty)$ (fig. 1.18) .

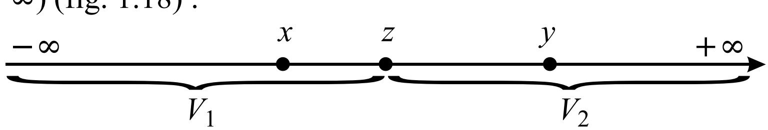


Fig. 1.18.

Avem $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ şi teorema este demonstrată.

Puncte de acumulare ale unei mulţimi

↬ *DEFINIŢIE.*

Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulţime nevidă. Numărul $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte ***punct de acumulare*** *al mulţimii A dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$ mulţimea $V \cap A$ are cel puţin două elemente.*

Mulţimea punctelor de acumulare ale mulţimii A se notează A'.

O mulţime $A \subset \mathbb{R}$ poate avea mai multe puncte de acumulare sau niciunul.

Numărul $x_0 \in A$ se numeşte *punct izolat* al mulţimii A dacă nu este punct de acumulare al mulţimii A.

EXEMPLE

- Intervalele $(a, b), [a, b], [a, b), (a, b]$ au mulţimea punctelor de acumulare intervalul $[a, b]$.
- Dacă $A = \mathbb{Q}$, atunci $A' = \overline{\mathbb{R}}$.
- Mulţimea $\mathbb{N}$ are un singur punct de acumulare $+\infty$, iar mulţimea $\mathbb{Z}$ are punctele de acumulare $-\infty$ şi $+\infty$.
- Orice mulţime finită nu are puncte de acumulare, ea este formată doar din puncte izolate.

Exerciţii şi probleme

Exersare

E1. Să se determine mulţimile de minoranţi şi majoranţi pentru mulţimile:

a) $A=(-3,5]$;
b) $A=(-2,3)$;
c) $A=[-5,4]$;
d) $A=(-2,1)\cup(3,5)$;
e) $A=(1,5]\cup[6,11]$;
f) $A=[-1,1)\cup\{3\}$.

E2. Să se determine mulţimea minoranţilor şi mulţimea majoranţilor pentru mulţimile:

a) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x^2-3x=0\right\}$;
b) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x^2-3x\leqslant 0\right\}$;
c) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\sqrt{x-3}\leqslant 2\right\}$;
d) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,|x-3|\leqslant 1\right\}$;
e) $A=\left\{x\in(0,\infty)\,\middle|\,2^{x-3}\leqslant 0,25\right\}$;
f) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,0,125\leqslant 4^x\leqslant 0,25\right\}$;
g) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\log_2(x-1)\leqslant 2\right\}$;
h) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\log_2(x-1)\leqslant\log_4(3-x)\right\}$.

E3. Să se arate că următoarele mulţimi sunt mulţimi mărginite:

a) $A=\left\{\sin x\mid x\in\mathbb{R}\right\}$;
b) $A=\left\{\dfrac{2n}{n+1}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}$;
c) $A=\left\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}$;
d) $A=\left\{n\in\mathbb{N}\,\middle|\,\dfrac{48}{n+1}\in\mathbb{N}\right\}$;
e) $A=\left\{\dfrac{2}{x^2+1}\,\middle|\,x\in\mathbb{R}\right\}$;
f) $A=\left\{\dfrac{x+1}{x^2+x+1}\,\middle|\,x\in\mathbb{R}\right\}$.

E4. Să se scrie cu ajutorul intervalelor mulţimile:

a) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,|x|\leqslant 3\right\}$;
b) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,|x-1|\leqslant 2\right\}$;
c) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,|x-2|\geqslant 1\right\}$;
d) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\dfrac{1}{x}\leqslant 1\right\}$;
e) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\dfrac{x-1}{x^2-4}\geqslant 0\right\}$;
f) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\dfrac{x^2-4}{x^2-9}\leqslant 1\right\}$;
g) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,2^{x+1}\leqslant 16^x\cdot(0{,}25)^{x+1}\right\}$;
h) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\sqrt{x-3}\leqslant x-3\right\}$.

E5. Să se precizeze care dintre mulţimile următoare sunt vecinătăţi ale numărului $x_0 = 0$, respectiv $x_1 = -1$;

a) $V_1 = (-5, 7)$; b) $V_2 = (-1, 0)$; c) $V_3 = (0, \infty)$;
d) $V_4 = (-1, \infty)$; e) $V_5 = \mathbb{N}$; f) $V_6 = \mathbb{Z}$;
g) $V_7 = \mathbb{Q}$; h) $V_8 = \mathbb{R}$; i) $V_9 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

E6. Să se precizeze care dintre mulţimile următoare sunt vecinătăţi pentru $+\infty$:

a) $V_1 = (-6, \infty)$; b) $V_2 = (100, \infty)$; c) $V_3 = (\sqrt{2}, \infty)$;
d) $V_4 = (-\infty, 10)$; e) $V_5 = \mathbb{Z}$; f) $V_6 = \mathbb{Q}$;
g) $V_7 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; h) $V_8 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; i) $V_9 = \mathbb{R}$;

E7. Să se determine punctele de acumulare în $\overline{\mathbb{R}}$ pentru mulţimile:

a) $A = [0, 3)$; b) $A = \{0, 3\}$; c) $A = (-\infty, 3)$;
d) $A = (-2, 2) \cup (3, 5)$; e) $A = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$; f) $A = (1, 2) \cup \{5\}$.

E8. Să se demonstreze că următoarele mulţimi sunt nemărginite (inferior sau superior):

a) $A = (-\infty, 3]$; b) $A = (-1, \infty)$;

c) $A = \left\{(-1)^n n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$; d) $A = \left\{\dfrac{1}{x} \,\middle|\, x \in (0, 1)\right\}$;

e) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| \geqslant 2\right\}$; f) $A = \left\{\dfrac{x-1}{x-2} \,\middle|\, x \in (2, \infty)\right\}$;

g) $A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid 7 \text{ divide } x\right\}$.

1.2. Limita unei funcţii într-un punct

Fie $f:D \to \mathbb{R}$ o funcţie reală de variabilă reală şi $x_0 \in D'$ un punct de acumulare pentru D. Ne propunem să studiem ce se întâmplă cu valorile funcţiei f atunci când argumentul x este din ce în ce mai aproape de punctul x_0.

Întrebarea care se pune este dacă şi valorile $f(x)$ ale funcţiei se apropie din ce în ce mai mult de un anumit număr $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Cu alte cuvinte, problema care se pune este dacă pentru valorile argumentului x într-o vecinătate suficient de mică $V \in \mathcal{V}(x_0)$, valorile $f(x)$ ale funcţiei f aparţin unei vecinătăţi oricât de mici a unui număr $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

EXEMPLE

1. Fie $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x+1$ şi $x_0 = -1$ punct de acumulare pentru $\mathbb{R}$.

Considerăm vecinătatea $V_n = \left(-1-\frac{1}{n}, -1+\frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$ a lui $x_0 = -1$.

Pentru $n=1$ şi $n=2$, avem situaţiile redate în fig. 1.19, respectiv fig. 1.20.

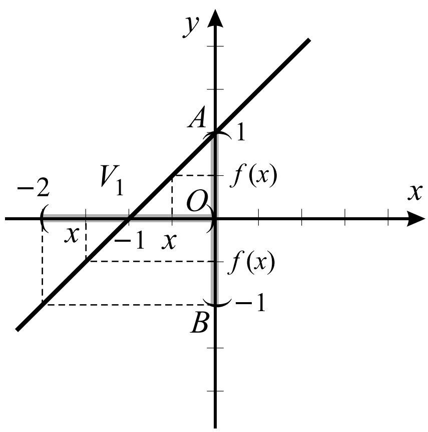


Fig. 1.19.

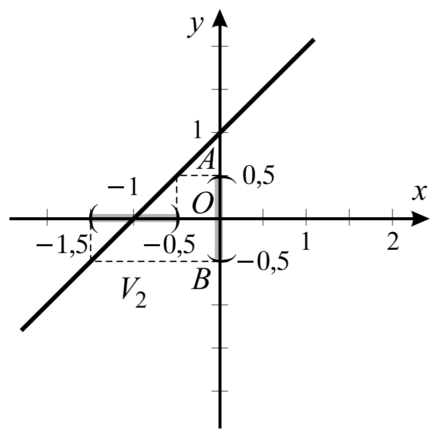


Fig. 1.20

Lecturând graficele din figurile de mai sus se desprind următoarele concluzii:

- Pentru $x \in V_1 = (-2, 0)$, valorile funcţiei f aparţin intervalului $(-1, 1)$, ilustrat geometric de segmentul (AB). Aşadar, dacă $x \in (-2, 0)$ atunci $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$.
- Pentru $x \in V_2 = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, valorile funcţiei f aparţin intervalului $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Aşadar, $-\frac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}$, $\forall x \in \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

- Pentru valori ale lui $x \in V_2$, deci mai apropiate de punctul $x_0 = -1$, valorile $f(x)$ aparţin unui interval care este "mai mic". Observând că intervalele $(-1, 1)$ şi $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ sunt vecinătăţi ale lui 0, putem spune că, în al doilea caz, valorile lui f aparţin unei vecinătăţi "mai mici" a lui 0.
- Dacă $V_n = \left(-1-\frac{1}{n}, -1+\frac{1}{n}\right)$, atunci avem că $-1-\frac{1}{n} < x < -1+\frac{1}{n}$ sau $-\frac{1}{n} < x+1 < \frac{1}{n}$, deci $f(x) \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, adică $f(x)$ este într-o vecinătate foarte mică a lui 0. Cu alte cuvinte, se observă că dacă x se apropie de $x_0 = -1$, atunci valorile funcţiei se apropie foarte mult de 0.

2. Fie $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ şi $x_0 = +\infty$ punct de acumulare pentru $\mathbb{R}$. Considerăm vecinătăţile lui $+\infty$, $V_a = (a, \infty)$. Pentru $a \in \{1, 2, 3\}$, avem situaţiile redate în fig. 1.21, 1.22, 1.23.

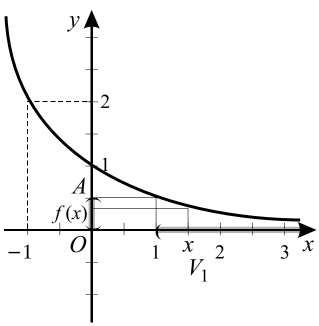


Fig. 1.21

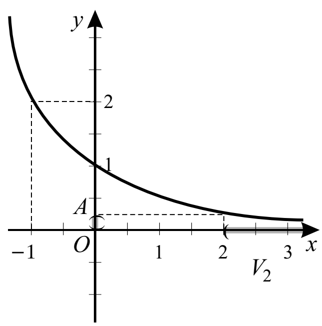


Fig. 1.22

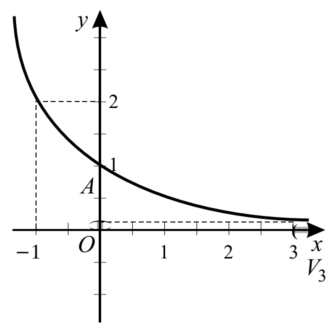


Fig. 1.23.

Se observă că :

- pentru $x \in V_1 = (1, \infty)$, avem $f(x) \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$;
- pentru $x \in V_2 = (2, \infty)$, avem $f(x) \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$;
- pentru $x \in V_3 = (3, \infty)$, avem $f(x) \in \left(0, \frac{1}{8}\right)$.

Mai general, fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $V_n = (n, +\infty)$ vecinătate pentru $+\infty$.

Dacă $x \in V_n$, deci $x > n$, folosind monotonia funcţiei exponenţiale *f*, rezultă că $0 < f(x) < f(n)$. Această relaţie se mai scrie

$$\boxed{0 < f(x) < \frac{1}{2^n},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x \in V_n.}$$

Deoarece pentru *n* valori ale lui *n* mai apropiate de $+\infty$ valorile pentru $\frac{1}{2^n}$ sunt foarte aproape de zero, putem spune că şi valorile funcţiei *f* sunt foarte apropiate de zero.

Aşadar, pentru valori ale lui *x* din ce în ce mai mari, mai apropiate de $+\infty$, valorile funcţiei sunt mai apropiate de 0. Într-o altă formulare, putem spune că pentru valori ale lui *x* tinzând la $+\infty$, valorile lui *f* tind la 0.

Ca o primă observaţie asupra comportamentului valorilor funcţiilor considerate în cele două cazuri, se poate afirma că dacă *x* tinde către un punct x_0, atunci valorile $f(x)$ ale funcţiei tind către o anumită valoare ℓ (în cazurile de mai sus $\ell = 0$). Mai mult, dacă $V \in \mathscr{V}(\ell)$ este o vecinătate a punctului ℓ, observăm că există o vecinătate $U \in \mathscr{V}(x_0)$ cu proprietatea că $\forall x \in U$, atunci $f(x) \in V$. (fig. 1.24, respectiv fig. 1.25).

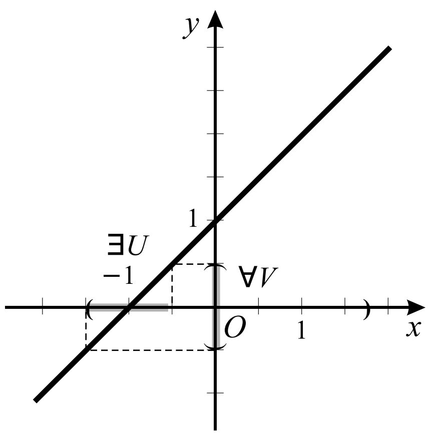


Fig. 1.24.

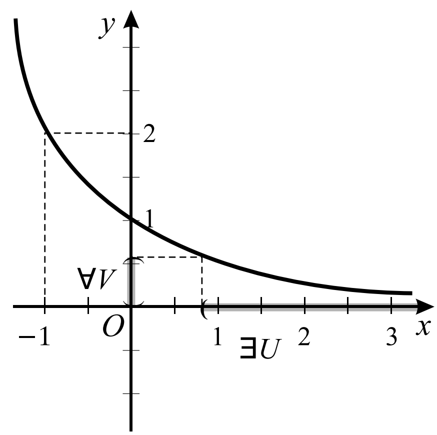


Fig. 1.25.

☞ *DEFINIŢIE*

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie reală de variabilă reală şi $x_0 \in D'$ un punct de acumulare pentru D. Numărul $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte ***limita funcţiei f în punctul x_0*** *dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathscr{V}(\ell)$ există o vecinătate $\mathscr{U} \in \mathscr{V}(x_0)$ cu proprietatea că dacă $x \in (\mathscr{U} \cap D) \setminus \{x_0\}$, atunci $f(x) \in V$.*

Dacă ℓ este limita funcţiei f în x_0, se foloseşte scrierea $\ell = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ şi se citeşte: „limita funcţiei f pentru x tinzând la x_0“ sau „limită din $f(x)$ când x tinde către x_0“.

Pentru funcţiile din exemplele considerate rezultă că $\lim\limits_{x \to -1}(x+1) = 0$, respectiv $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\dfrac{1}{2^x}\right) = 0$.

OBSERVAŢII

- ✓ Problema existenţei limitei unei funcţii f într-un punct x_0 se poate pune chiar dacă funcţia nu este definită în x_0, dar x_0 este punct de acumulare al domeniului de definiţie.
- ✓ Problema existenţei limitei unei funcţii nu are sens într-un punct care nu este punct de acumulare pentru domeniul de definiţie.

Astfel, dacă $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, atunci problema existenţei limitei se pune numai în $x_0 = \infty$, acesta fiind singurul punct de acumulare în $\overline{\mathbb{R}}$ al mulţimii $\mathbb{N}$.

Astfel de funcţii definesc şiruri de numere reale (a_n). Definiţia limitei în $x_0 = +\infty$ este echivalentă cu afirmaţia: „Numărul $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ este limită pentru şirul (a_n) dacă în afara oricărei vecinătăţi $V \in \mathcal{V}(\ell)$ se află un număr finit de termeni ai şirului“.

➯ *TEOREMA 2 (de unicitate a limitei).*

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie reală de variabilă reală şi $x_0 \in D'$ un punct de acumulare pentru D. Dacă funcţia f admite limită în punctul x_0, atunci aceasta este unică.

Demonstraţie.

Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că funcţia f admite în x_0 limitele distincte $\ell_1, \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$. Din teorema de separare rezultă că există vecinătăţile $V_1 \in \mathcal{V}(\ell_1)$ şi $V_2 \in \mathcal{V}(\ell_2)$ astfel încât $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ (fig. 1.26).

Fig. 1.26

Deoarece ℓ_1 şi ℓ_2 sunt limite ale funcţiei f în x_0 rezultă că:

- există vecinătatea $\mathscr{U}_1 \in \mathscr{V}(x_0)$ cu proprietatea că dacă $x \in (\mathscr{U}_1 \cap D) \setminus \{x_0\}$, atunci $f(x) \in V_1$ (1);
- există vecinătatea $\mathscr{U}_2 \in \mathscr{V}(x_0)$ cu proprietatea că dacă $x \in (\mathscr{U}_2 \cap D) \setminus \{x_0\}$, atunci $f(x) \in V_2$ (2).

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă că pentru $x \in (\mathscr{U}_1 \cap \mathscr{U}_2 \cap D) \setminus \{x_0\}$ am avea că $f(x) \in V_1 \cap V_2 = \varnothing$, ceea ce nu se poate. Această contradicţie arată că presupunerea $\ell_1 \neq \ell_2$ este falsă. Aşadar, limita funcţiei f în punctul x_0 este unică.

1.3. Limite laterale

Să considerăm funcţia reală de variabilă reală $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -2x-1, & x \leqslant 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$$

al cărui grafic este reprezentat în fig. 1.27.

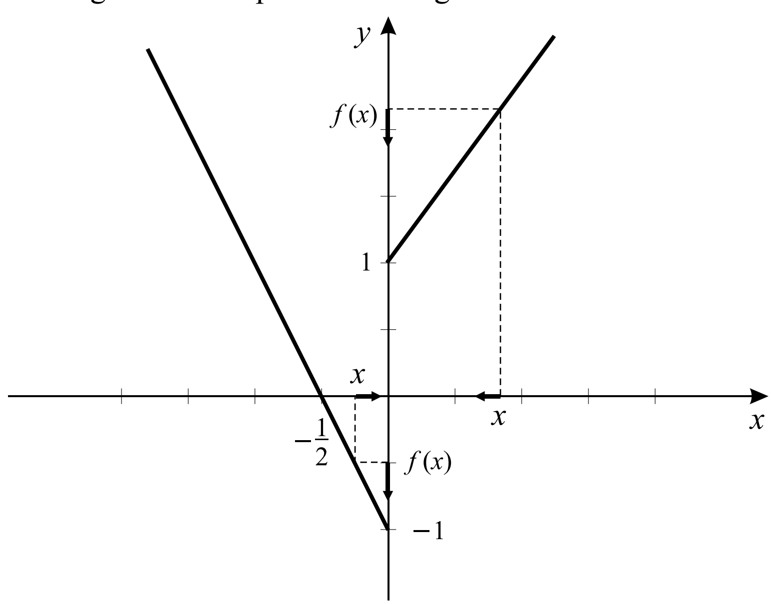


Fig. 1.27.

Lecturând graficul redat în figura de mai sus în legătură cu comportarea funcţiei f în jurul punctului de acumulare $x_0 = 0$ din domeniul de definiţie se pot desprinde următoarele concluzii:

- Pentru valori ale lui $x < 0$, din ce în ce mai apropiate de 0, valorile funcţiei f sunt din ce în ce mai aproape de -1. Cu alte cuvinte, pentru x tinzând la 0, dar cu valori negative, valorile funcţiei f tind către -1.
- Pentru valori ale lui $x > 0$, din ce în ce mai apropiate de 0, valorile funcţiei f sunt din ce în ce mai apropiate de 1. Cu alte cuvinte, pentru x tinzând la 0, dar cu valori pozitive, valorile funcţiei f tind către 1.

Dacă considerăm restricţiile funcţiei f la intervale $(-\infty, 0)$ şi, respectiv $(0, \infty)$, cele două concluzii se pot reformula astfel:

✓ funcţia $f_{|(-\infty, 0)}$ are limita $\ell_s = -1$ în punctul $x_0 = 0$;

✓ funcţia $f_{|(0, \infty)}$ are limita $\ell_d = 1$ în punctul $x_0 = 0$.

Aceste noi formulări conduc la următoarele definiţii:

DEFINIŢII

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie reală de variabilă reală şi $x_0 \in D'$ un punct de acumulare pentru D şi $A = D \cap (-\infty, x_0)$, $B = D \cap (x_0, \infty)$.

- *Numărul $\ell_s \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte* ***limita la stânga a funcţiei f în punctul*** *x_0 dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f_{|A}(x) = \ell_s$.*
- *Numărul $l_d \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte* ***limita la dreapta a funcţiei f în punctul*** *x_0 dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f_{|B}(x) = l_d$.*
- *Limitele la stânga şi la dreapta ale funcţiei f în punctul $x_0 \in D'$ se numesc* ***limitele laterale ale funcţiei f în punctul*** *x_0.*

Pentru limita la stânga a funcţiei f în punctul x_0 se folosesc notaţiile: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ sau $f(x_0 - 0)$ sau $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x)$, iar pentru limita la dreapta a funcţiei f în punctul x_0 se folosesc notaţiile $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ sau $f(x_0 + 0)$ sau $\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x)$.

OBSERVAŢII

- ✓ Dacă funcţia $f{:}D \to \mathbb{R}$ are limită la stânga în punctul $x_0 \in D'$, atunci aceasta este unică.
- ✓ Dacă funcţia $f{:}D \to \mathbb{R}$ are limită la dreapta în punctul $x_0 \in D'$, atunci aceasta este unică.
- ✓ Este posibil ca o funcţie $f{:}D \to \mathbb{R}$ să admită în $x_0 \in D'$ limită laterală la stânga, dar să nu aibă limită laterală la dreapta sau reciproc.
- ✓ Fie $f{:}(a, b) \to \mathbb{R}$. Atunci limita la stânga în a şi limita la dreapta în b nu au sens. Dacă funcţia f are limite în punctele a şi b, acestea coincid cu limita la deapta în a şi limita la stânga în b.

⇘ *TEOREMA 3*

(de caracterizare a limitei cu ajutorul limitelor laterale).

Fie $f{:}D \to \mathbb{R}$ o funcţie reală de variabilă reală şi $x_0 \in D'$ un punct de acumulare pentru D. Dacă funcţia f are limite laterale în x_0, atunci f are limită în x_0 dacă şi numai dacă limitele laterale sunt egale. În acest caz:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0).$$

Teorema 3 este utilă, în special, în cazul funcţiilor definite printr-o acoladă.

- Funcţia $f{:}\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -2x-1, & x \leqslant 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$ are limite laterale în $x = 0$ şi

$f(0-0) = -1$ şi $f(0+0) = 1$. Conform teoremei 3 rezultă că funcţia f nu are limită în punctul $x = 0$.

- Pentru funcţia $f{:}\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+m, & x \leq 1 \\ 4x, & x > 1 \end{cases}$, avem că $f(1-0) = 1+m$

şi $f(1+0) = 4$. Conform teoremei 3 funcţia f are limită în $x_0 = 1$, dacă şi numai dacă $1 + m = 4$, deci pentru $m = 3$.

1.4. Calculul limitelor de funcţii

1.4.1. Limitele unor funcţii elementare

LIMITA FUNCŢIEI CONSTANTE

Fie $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Dacă $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ este punct de acumulare al mulţimii $\mathbb{R}$, atunci:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} c = c.}$$

(limita unei constante este egală cu acea constantă).

Într-adevăr, fie $V \in \mathcal{V}(c)$, $V = (a, b)$ o vecinătate a lui c (fig. 1.28).

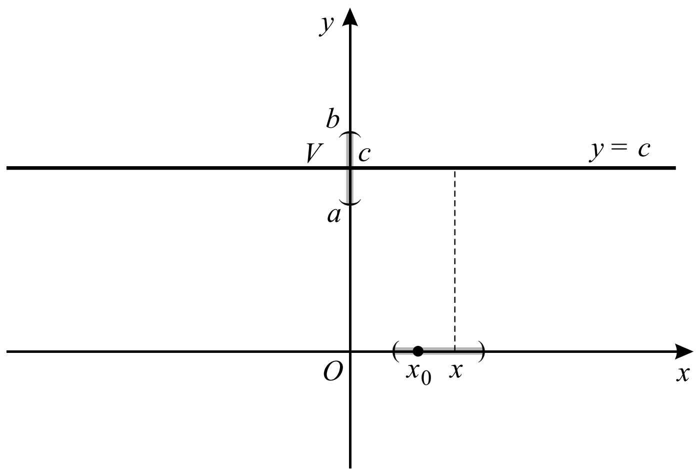


Fig. 1.28.

Dacă $\mathcal{U} \in \mathcal{V}(x_0)$, avem că $f(x) = c$, $\forall x \in \mathcal{U}$ şi se obţine că $f(x) \in V$, $\forall x \in \mathcal{U}$. Aşadar, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$.

LIMITA FUNCŢIEI DE GRADUL I

Fie $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, a, $b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Dacă $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ atunci avem:

- $\lim\limits_{x \to x_0}(ax + b) = ax_0 + b$, dacă $x_0 \in \mathbb{R}$;
- $\lim\limits_{x \to -\infty}(ax + b) = a \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & a > 0 \\ +\infty, & a < 0 \end{cases}$;
- $\lim\limits_{x \to \infty}(ax + b) = a \cdot (+\infty) = \begin{cases} -\infty, & a < 0 \\ +\infty, & a > 0 \end{cases}$.

Pentru justificarea rezultatelor de mai sus, vom lectura graficul funcţiei de gradul 1 în fiecare caz.

✓ Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ şi $a \in \mathbb{R}^*$. În funcţie de semnul lui a reprezentările graficului sunt redate în fig. 1.29 şi, respectiv, fig. 1.30.

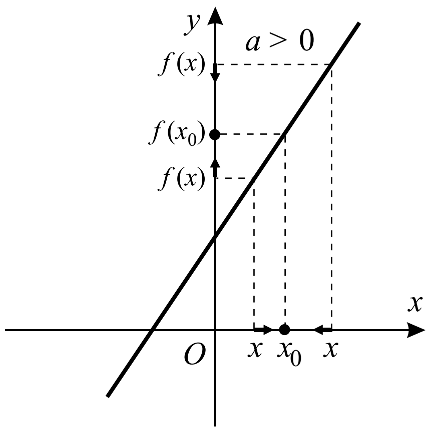


Fig. 1.29.

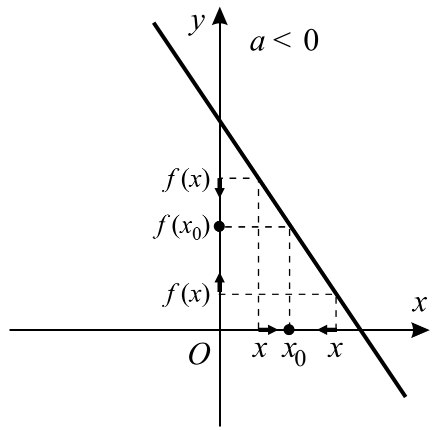


Fig. 1.30.

Lecturând graficul din fig. 1.29, se observă că pentru $a > 0$:

➢ $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$, adică $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} (ax + b) = ax_0 + b$;

➢ $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$, adică $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} (ax + b) = ax_0 + b$.

Pentru cazul $a < 0$, prin lecturarea graficului din fig. 1.30 se obţine:

➢ $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$, adică $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} (ax + b) = ax_0 + b$;

➢ $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$, adică $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} (ax + b) = ax_0 + b$.

Aşadar, pentru oricare $x_0 \in \mathbb{R}$ se obţine că funcţia de gradul 1 are limite laterale în x_0 şi aceste limite laterale sunt egale.

În concluzie, conform *teoremei* 3 obţinem că funcţia de gradul 1 are limită în orice punct $x_0 \in \mathbb{R}$ şi

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} (ax + b) = ax_0 + b.}$$

✓ Fie $x_0 = \pm\infty$ şi $a \in \mathbb{R}^*$ .Reprezentările grafice sunt redate în fig. 1.31. şi fig. 1.32.:

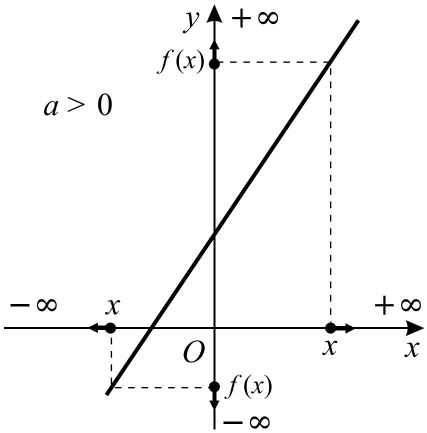


Fig. 1.31.

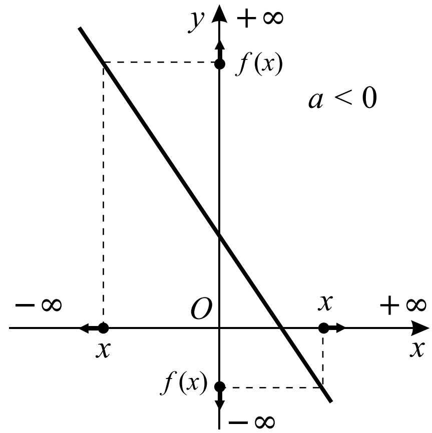


Fig. 1.32.

Prin lectură grafică se obţine:

- Dacă $a > 0$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty}(ax+b) = +\infty$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty}(ax+b) = -\infty$.
- Dacă $a < 0$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty}(ax+b) = -\infty$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty}(ax+b) = +\infty$.

EXEMPLE

- $\lim\limits_{x\to 4}(2x-3) = 2\cdot 4 - 3 = 5;$
- $\lim\limits_{x\to -2}(-3x+5) = -3\cdot(-2)+5 = 11;$
- $\lim\limits_{x\to \infty}(3x-14) = 3\cdot\infty = +\infty;$
- $\lim\limits_{x\to -\infty}(3x-14) = 3\cdot(-\infty) = -\infty;$
- $\lim\limits_{x\to -\infty}(-2x+1) = -2\cdot(-\infty) = +\infty.$

LIMITA FUNCŢIEI DE GRADUL 2

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $a, b, c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$. Calculul limitei funcţiei în punctul $x_0\in\mathbb{R}$ se obţine prin lecturarea reprezentărilor graficului redate în fig. 1.33 şi fig. 1.34.

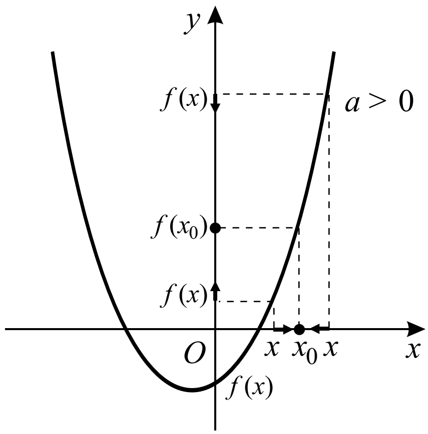


Fig. 1.33.

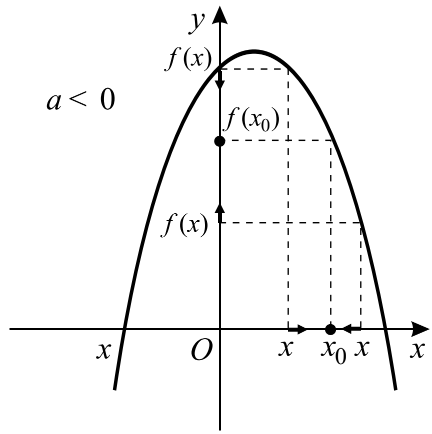


Fig. 1.34.

Rezultă că funcţia de gradul 2 are limite laterale egale în orice punct $x_0\in\mathbb{R}$ şi că $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Aşadar, $\lim\limits_{x\to x_0}(ax^2+bx+c)=ax_0^2+bx_0+c$.

Pentru $x_0=\pm\infty$ avem reprezentările grafice în fig. 1.35 şi 1.36.

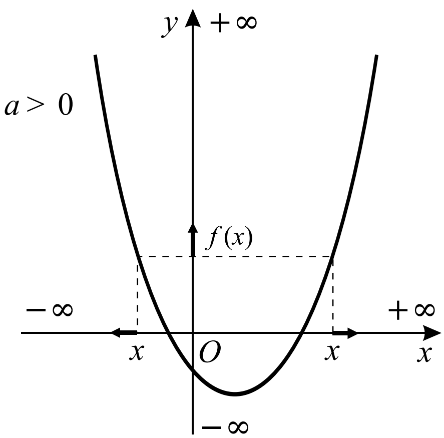


Fig. 1.35.

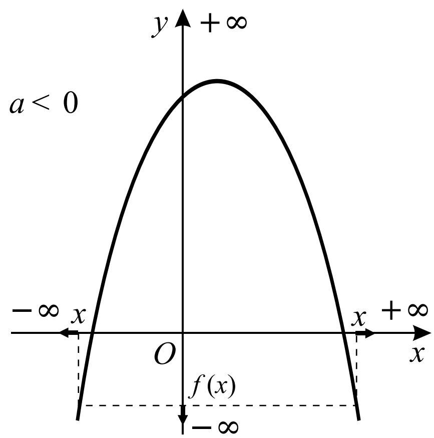


Fig. 1.36.

Pentru $a>0$, rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

Pentru $a<0$, rezultă că

$$\lim_{x\to\infty}(ax^2+bx+c)=-\infty \text{ şi } \lim_{x\to-\infty}(ax^2+bx+c)=-\infty.$$

Aşadar,

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}(ax^2+bx+c)=\begin{cases} ax_0^2+bx_0+c, & x_0\in\mathbb{R} \\ a\cdot(\pm\infty), & x_0=\pm\infty \end{cases}.}$$

EXEMPLE

- $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2-x)=2\cdot 3^2-3=15$;
- $\lim\limits_{x\to 1}(-2x^2+3x+1)=-2\cdot 1^2+3\cdot 1+1=2$;
- $\lim\limits_{x\to -\infty}(2x^2-x+1)=\infty$;
- $\lim\limits_{x\to +\infty}(-3x^2+4x)=-\infty$.

LIMITA FUNCŢIEI RADICAL DE ORDINUL 2

Fie $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$ şi $x_0\in(0,\infty)$. Graficul funcţiei este redat în fig. 1.37.

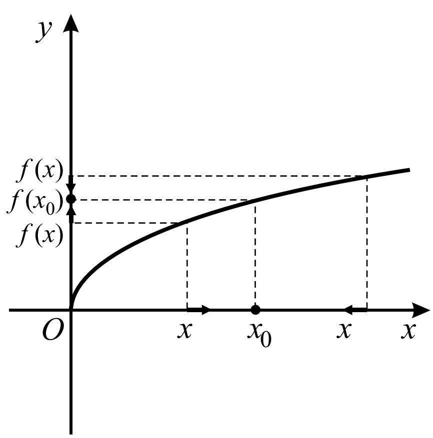


Fig. 1.37.

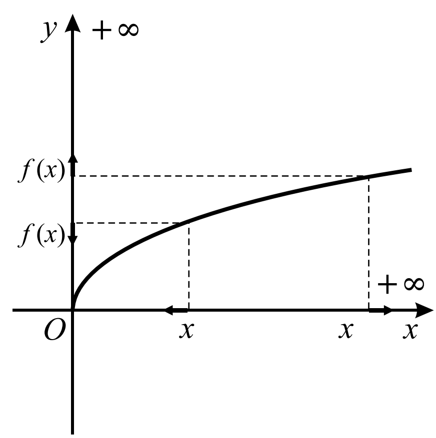


Fig. 1.38.

Se observă că pentru $x_0\in[0,+\infty)$ avem că:

- $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)=f(x_0)$, adică $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$;
- $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)=f(x_0)$, adică $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$.

Aşadar, funcţia radical de ordinul 2 are limite laterale egale în oricare punct $x_0 \in (0, \infty)$ şi astfel $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$. Dacă $x_0 = 0$, atunci limita funcţiei radical de ordinul 2 este dată de limita laterală la dreapta.

Din lectura graficului (fig. 1.38) se obţine că $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} = 0$. De asemenea, din fig. 1.38 se obţine că $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x} = +\infty$.

Aşadar,

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \begin{cases} \sqrt{x_0}, & x_0 \in [0, +\infty) \\ +\infty, & x_0 = +\infty \end{cases}.}$$

LIMITA FUNCŢIEI RADICAL DE ORDINUL 3

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ şi $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

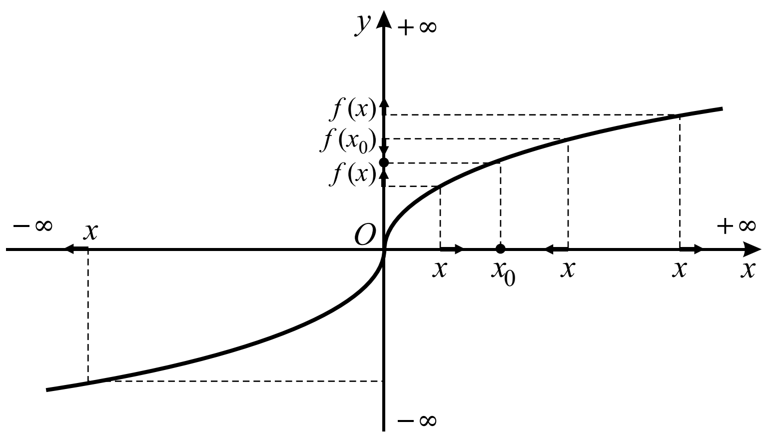


Fig. 1.39.

Lecturând graficul funcţiei redat în fig. 1.39 se obţine că funcţia radical de ordinul 3 are limite laterale egale în x_0, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ şi

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \sqrt[3]{x} = \begin{cases} \sqrt[3]{x_0}, & x_0 \in \mathbb{R} \\ +\infty, & x_0 = +\infty. \\ -\infty, & x_0 = -\infty \end{cases}}$$

EXEMPLE

- $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}=\sqrt{4}=2;$
- $\lim\limits_{x\to \frac{1}{9}}\sqrt{x}=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3};$
- $\lim\limits_{x\to \infty}\sqrt{x}=+\infty;$
- $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt[3]{x}=-\infty;$
- $\lim\limits_{x\to 27}\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{27}=3;$
- $\lim\limits_{x\to \frac{1}{8}}\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}.$

LIMITA FUNCŢIEI EXPONENŢIALE

Fie $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$, $f(x)=a^x$, $a\in(0,\infty)/\{1\}$. Pentru studiul limitei funcţiei exponenţiale în puncte $x_0\in\mathbb{R}$ studiem reprezentările grafice din fig. 1.40 şi 1.41.

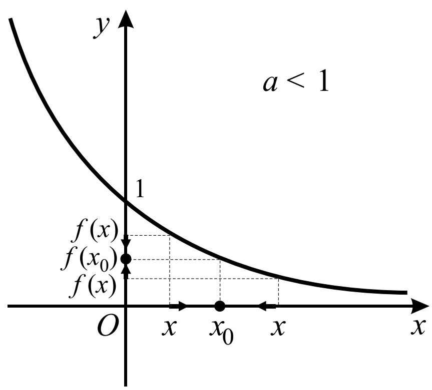


Fig. 1.40.

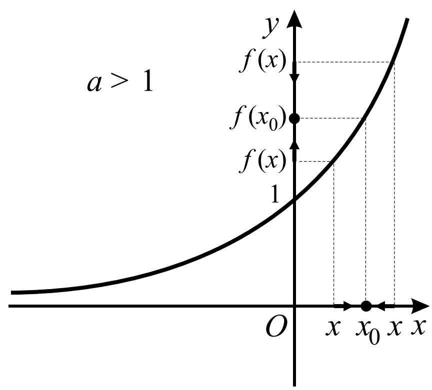


Fig. 1.41.

Se observă că în punctul $x_0\in\mathbb{R}$ funcţia exponenţială are limite laterale egale şi:

- $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}f(x)=f(x_0)$, adică $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}a^x=a^{x_0};$
- $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}f(x)=f(x_0)$, adică $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}a^x=a^{x_0}.$

Pentru $x_0 = \pm\infty$ studiem reprezentările grafice din fig. 1.42 şi fig. 1.43:

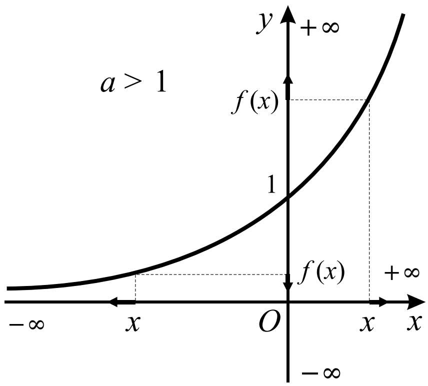


Fig. 1.42.

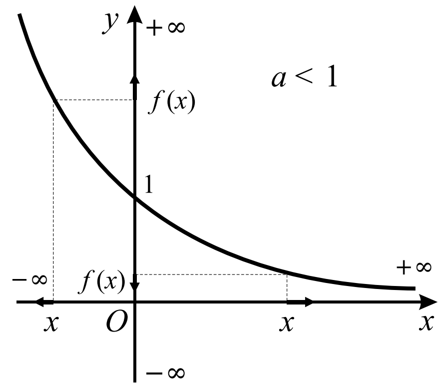


Fig. 1.43.

Se observă că pentru $a > 1$ avem:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, adică $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$;
- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$, adică $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$.

Pentru $a < 1$ se obţine:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, adică $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$;
- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, adică $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = 0$.

Aşadar, funcţia exponenţială are limită în orice punct $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ şi

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} a^x = \begin{cases} a^{x_0}, & x_0 \in \mathbb{R} \\ 0, & x_0 = +\infty,\ a < 1 \text{ sau } x_0 = -\infty,\ a > 1 \\ +\infty, & x_0 = +\infty,\ a > 1 \text{ sau } x_0 = -\infty,\ a < 1 \end{cases}.}$$

EXEMPLE

▷ $\lim\limits_{x \to 2} 3^x = 3^2 = 9$;

▷ $\lim\limits_{x \to -2} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$;

▷ $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^x = \infty$;

▷ $\lim\limits_{x \to -1} 4^x = 4^{-1} = \frac{1}{4}$;

▷ $\lim\limits_{x \to -\infty} 5^x = 0$;

▷ $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x = 0$.

LIMITA FUNCŢIEI LOGARITMICE

Fie $f:(0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$. Pentru calculul limitei funcţiei logaritmice în punctul $x_0 \in (0, \infty)$ studiem reprezentările grafice redate în fig. 1.44 şi 1.45.

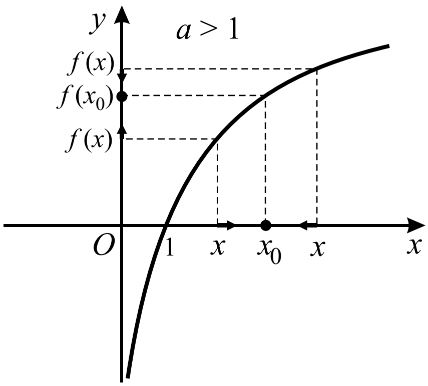


Fig. 1.44.

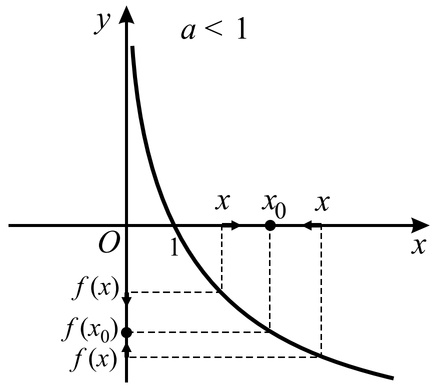


Fig. 1.45.

Rezultă că funcţia logaritmică are limite laterale egale pentru $x_0 \in (0, \infty)$ şi:

- $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$, adică $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \log_a x = \log_a x_0$;
- $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$, adică $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \log_a x = \log_a x_0$.

Aşadar, funcţia logaritmică are limită în orice punct $x_0 \in (0, \infty)$ şi $\lim\limits_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0$.

Domeniul de definiţie al funcţiei logaritmice are ca puncte de acumulare şi punctele $x_0 = 0$ şi $x_0 = +\infty$.

Pentru $x_0 = 0$, limita funcţiei există numai în partea dreaptă.

Pentru calculul limitelor funcţiei logaritmice în $x_0 = 0$ şi $x_0 = +\infty$, studiem reprezentările grafice redate în fig. 1.46 şi fig. 1.47.

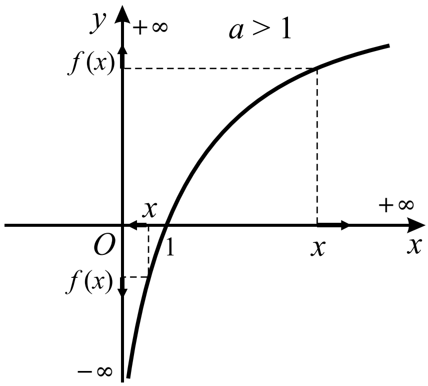


Fig. 1.46.

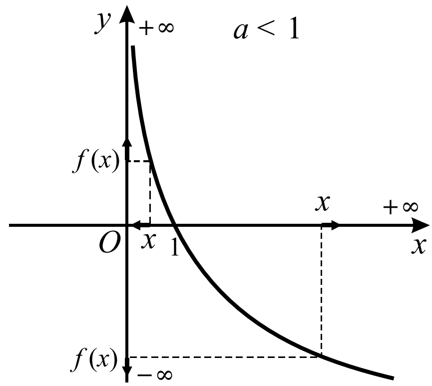


Fig. 1.47.

Rezultă că funcţia logaritmică are limite în punctele $x_0 = 0$ şi $x_0 = +\infty$ şi anume:

• pentru $a > 1$:

➢ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$, adică $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log_a x = -\infty$;

➢ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, adică $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = +\infty$.

• pentru $a < 1$:

➢ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$, adică $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log_a x = +\infty$;

➢ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, adică $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = -\infty$.

În concluzie, funcţia logaritmică are limită în orice punct de acumulare al domeniului de definiţie şi avem:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \log_a x = \begin{cases} \log_a x_0, & x_0 \in (0, \infty) \\ +\infty, & x_0 = 0,\ a<1 \text{ sau } x_0 = +\infty,\ a>1. \\ -\infty, & x_0 = 0,\ a>1 \text{ sau } x_0 = +\infty,\ a<1 \end{cases}}$$

EXEMPLE

▷ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log_3 x = -\infty$;

▷ $\lim\limits_{x\to\infty} \log_3 x = \infty$;

▷ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log_{0,1} x = +\infty$;

▷ $\lim\limits_{x\to 64} \log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} 64 = -6$;

▷ $\lim\limits_{x\to 8} \log_2 x = \log_2 8 = 3$;

▷ $\lim\limits_{x\to\infty} \log_{0,(3)} x = -\infty$.

PROBLEME REZOLVATE

1. *Să se studieze existenţa limitelor funcţiei $f:D \to \mathbb{R}$ în punctele specificate:*

a) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 3x+5, & x \leqslant 0 \\ 2^x + 4, & x > 0 \end{cases},\ x_0 = 0;$

b) $f:(0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \ln x, & x \in (0, 1) \\ x^2 - 1, & x \in [1, \infty) \end{cases},\ x_0 \in \{0, 1\}.$

Rezolvare.

a) Calculăm limitele laterale ale funcţiei *f* în $x_0 = 0$. Rezultă:

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{x \to 0}(3x+5) = 3 \cdot 0 + 5 = 5;$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{x \to 0}(2^x + 4) = 2^0 + 4 = 5.$

Aşadar, funcţia *f* are limite laterale în $x_0 = 0$ şi acestea sunt egale. Rezultă că funcţia *f* are limită în $x_0 = 0$ şi $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 5$.

b) În cazul $x_0 = 0$, dacă funcţia *f* are limită în $x_0 = 0$, atunci aceasta este dată de limita laterala în dreapta punctului. Se obţine că $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$.

Pentru cazul $x_0 = 1$, calculăm limitele laterale. Se obţine:

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \ln x = \ln 1 = 0$ şi $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{x \to 1}(x^2 - 1) = 1^2 - 1 = 0.$

Aşadar, limitele laterale ale funcţiei *f* în punctul $x_0 = 1$ sunt egale şi rezultă că $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$.

2. *Să se determine constantele reale a şi b pentru care funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + a + b$ verifică condiţiile:*

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 6 \text{ şi } \lim_{x \to -1} f(x) + 2\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

Rezolvare.

Avem succesiv:

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4a + 2b + a + b = 5a + 3b = 6$ şi

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) + 2\lim\limits_{x \to 0} f(x) = a - b + a + b + 2(a+b) = 4a + 2b = 0.$

Rezultă sistemul $\begin{cases} 5a+3b=6 \\ 4a+2b=0 \end{cases}$ cu soluţia $a=-6,\ b=12$, deci

$$f(x)=-6x^2+12x+6.$$

3. *Să se determine valorile constantelor reale pentru care funcţia* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} 2^x, & x\leqslant 0 \\ ax+b, & x\in(0,1) \\ a^2x^2+bx-2, & x\geqslant 1 \end{cases}$$

are limită în fiecare punct $x_0\in\mathbb{R}$.

Rezolvare.

Restricţiile funcţiei f la intervalele $(-\infty,0)$, $(0,1)$ şi $(1,\infty)$ au limită în fiecare punct, fiind funcţie exponenţială, respectiv funcţie de gradul 1 şi 2.

Rămâne să studiem existenţa limitelor în punctele $x_0=0$ şi $x_0=1$. Avem:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim_{x\to 0}2^x=2^0=1 \text{ şi } \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{x\to 0}(ax+b)=b.$$

Funcţia f are limită în $x_0=0$ dacă şi numai dacă $b=1$.

Pentru $x_0=1$ se obţine:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim_{x\to 1}(ax+b)=a+b=a+1 \text{ şi}$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim_{x\to 1}(a^2x^2+bx-2)=a^2+b-2=a^2-1.$$

Funcţia f are limită în $x_0=1$ dacă şi numai dacă $a+1=a^2-1$. Rezultă ecuaţia $a^2-a-2=0$ cu soluţiile $a=-1$ şi $a=2$. Aşadar,

$$f(x)=\begin{cases} 2^x, & x\leqslant 0 \\ -x+1, & x\in(0,1) \\ x^2+x-2, & x\geqslant 1 \end{cases} \text{ sau } f(x)=\begin{cases} 2^x, & x\leqslant 0 \\ 2x+1, & x\in(0,1). \\ 4x^2+x-2, & x\geqslant 1 \end{cases}$$

Exerciţii şi probleme

Exersare

E1. Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{x\to 3} 3$; b) $\lim\limits_{x\to 0} 5^3$; c) $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}} \sqrt[3]{3}$;

d) $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)$; e) $\lim\limits_{x\to \pi}\left(-\dfrac{x}{\pi}+1\right)$; f) $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-x+2)$;

g) $\lim\limits_{x\to +\infty}(5^3+1)$; h) $\lim\limits_{x\to -1} \ln 3$. i) $\lim\limits_{x\to \infty} \log\left(\dfrac{1}{5}\right)^x$.

E2. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left[(x+1)^2+1\right]$; b) $\lim\limits_{x\to \infty}\left[2x+(x-1)^2\right]$; c) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^2-3)$;

d) $\lim\limits_{x\to -\infty}(-3x+2+x^2)$; e) $\lim\limits_{x\to +\infty}(-5x-7x^2)$; f) $\lim\limits_{x\to 9}(\sqrt{x})$;

g) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log_3 x$; h) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log_{0,3} x$; i) $\lim\limits_{x\to \infty} \log_{\frac{1}{2}} x$.

E3. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 1}(2^{\log_2 x})$; b) $\lim\limits_{x\to 0} 3^{\log_3(x^2+1)}$; c) $\lim\limits_{x\to 5} \log_5 2^x$; d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \log_3\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$.

E4. Să se studieze existenţa limitei funcţiei *f* în punctele specificate:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2x^2+3, & x\leqslant 1\\ 5x-1, & x>1\end{cases},\ x_0\in\{1, 2\}$;

b) $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x+3, & x\in(0, 1)\\ 4^x, & x\in(1, +\infty)\end{cases},\ x_0\in\{1, 0, +\infty\}$.

Sinteză

S1. Să se determine parametrii reali pentru care:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left[(a-1)x+3\right]=6$; b) $\lim\limits_{x\to 3}(5+6ax)=23$;

c) $\lim\limits_{x\to a}(ax+3x-3)=5$; d) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=3$;

e) $\lim\limits_{x\to 1}(a^2x^2+2ax+11)=a+14$; f) $\lim\limits_{x\to a+1}\sqrt[3]{x}=3$;

g) $\lim\limits_{x\to a-1}\sqrt{x}=a-1$; h) $\lim\limits_{x\to a} 2^{ax}=16$.

S2. Să se studieze existenţa limitei funcţiei $f:D \to \mathbb{R}$ pe domeniul de definiţie:

a) $f:(0, 1) \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \log_2 x, & x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \\ 2x - 2, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}$;

b) $f:(0,2] \cup \{3\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \in (0, 1) \\ \log_2 x, & x \in [1, 2] \\ 0, & x = 3 \end{cases}$.

S3. Să se determine constantele reale pentru care funcţia f are limită în punctele specificate:

a) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} ax^2 + (a+2)x, & x \leqslant 1 \\ \sqrt[3]{x}, & x > 1 \end{cases},\ x_0 = 1$;

b) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} (x + a)^2 + (x - 1)^2, & x \leqslant 1 \\ (x - 1 + a)(x + 4 - a), & x > 1 \end{cases},\ x_0 = 1$;

c) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leqslant 2 \\ \log_2 x, & x \in (2, 4) \\ ax^2 + bx + 6, & x \geqslant 4 \end{cases},\ x_0 \in \{2, 4\}$;

d) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 2^{ax}, & x \leqslant 1 \\ 4^{bx}, & x \in (1, 3) \\ 8^{(a+2)x}, & x \geqslant 3 \end{cases},\ x_0 \in \{1, 3\}$.

S4. Să se studieze existenţa limitei funcţiei $f:D \to \mathbb{R}$ în punctele specificate:

a) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|,\ x_0 \in \{-1, 0, 1\}$;

b) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x - 3|,\ x_0 \in \{0, 3, 4\}$;

c) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x - 3| + x,\ x_0 \in \{-5, 3, 5\}$;

d) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} |x|, & x \leqslant 1 \\ \sqrt{x}, & x > 1 \end{cases},\ x_0 \in \{0, 1\}$;

e) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} |x^2 - 1|, & x \leqslant 2 \\ \sqrt{x^2} + 1, & x > 2 \end{cases},\ x_0 \in \{-1, 1, 2\}$.

1.4.3. Limitele funcţiilor trigonometrice

LIMITA FUNCŢIEI SINUS ŞI COSINUS

Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to[-1, 1]$ $f(x)=\sin x$. Deoarece funcţia sinus este funcţie periodică cu perioada principală $T=2\pi$, pentru studiul limitele funcţiei pe domeniul maxim de definiţie $\mathbb{R}$, este suficient studiul limitei funcţiei $x_0\in[0, 2\pi]$. Graficul funcţiei f restricţionată la intervalul $[0, 2\pi]$ este reprezentat în fig. 1.48.

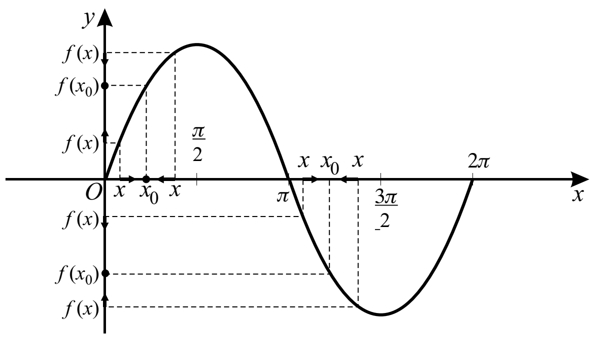


Fig. 1.48.

Se observă că pentru $x_0\in[0, 2\pi]$:

- $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)=f(x_0)$, adică $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \sin x=\sin x_0$;
- $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)=f(x_0)$, adică $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \sin x=\sin x_0$.

Aşadar, funcţia sinus are limite laterale egale în orice punct $x_0\in[0, 2\pi]$. Rezultă că funcţia sinus are limită în oricare punct $x_0\in[0, 2\pi]$ şi $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$.

Din periodicitatea funcţiei sinus se obţine că:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0,\ \forall x_0\in\mathbb{R}.}$$

Fiind funcţie periodică, funcţia sinus nu are limită la $-\infty$, respectiv la $+\infty$.
În mod analog, pentru funcţia cosinus $f:\mathbb{R}\to[1, -1]$, $f(x)=\cos x$, se obţine

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0,\ \forall x_0\in\mathbb{R}}$$

Funcţia cosinus este periodică şi nu are limită la $-\infty$, respectiv la $+\infty$.

LIMITA FUNCŢIEI TANGENTĂ ŞI COTANGENTĂ

Fie $f:\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{tg}x$. Funcţia tangentă este funcţie periodică de perioadă principală $T=\pi$. Pentru calculul limitelor în punctele de acumulare $x_0\in\mathbb{R}$ folosim reprezentarea graficului care este redat în fig. 1.49.

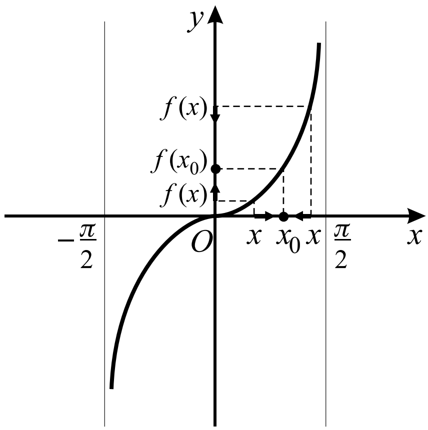


Fig. 1.49.

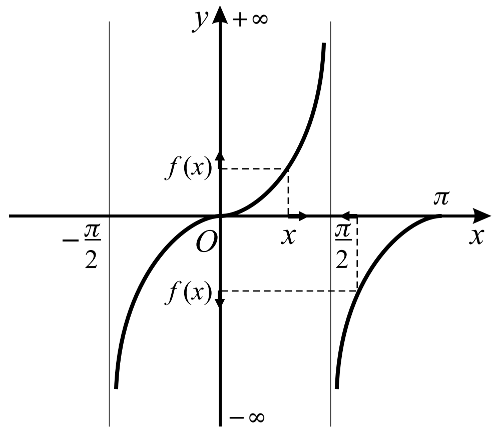


Fig. 1.50.

Se observă că pentru orice $x_0\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ funcţia tangentă are limite laterale egale. Rezultă că funcţia tangentă are limită în $x_0\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, adică

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}x_0.}$$

Pentru cazul $x_0=\frac{\pi}{2}$ şi, mai general, $x_0=\frac{\pi}{2}+k\pi$, studiem graficul din fig. 1.50. Rezultă că:

$$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}}\operatorname{tg}x=+\infty \text{ şi } \lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x>\frac{\pi}{2}}}\operatorname{tg}x=-\infty.$$

Aşadar, funcţia tangentă are limite laterale în $x_0=\frac{\pi}{2}$, dar nu are limită în punctul $x_0=\frac{\pi}{2}$. În general, din periodicitatea funcţiei tangentă rezultă că aceasta nu are limită în punctele $x_0=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $\forall k\in\mathbb{Z}$ şi în $x_0=-\infty$, respectiv la $x_0=+\infty$.

În mod analog, pentru funcţia cotangentă ctg:$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ rezultă:

- $\lim\limits_{x \to x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0$, dacă $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$;
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \operatorname{ctg} x = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \operatorname{ctg} x = +\infty$;
- $\lim\limits_{\substack{x \to k\pi \\ x<k\pi}} \operatorname{ctg} x = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to k\pi \\ x>k\pi}} \operatorname{ctg} x = +\infty$.

LIMITELE FUNCŢIILOR TRIGONOMETRICE INVERSE

Folosind reprezentările geometrice ale graficelor funcţiilor trigonometrice inverse redate în fig. 1.51–1.54 se obţin următoarele concluzii:

- $\lim\limits_{x \to x_0} \arcsin x = \arcsin x_0$, $x_0 \in [-1, 1]$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} \arccos x = \arccos x_0$, $x_0 \in [-1, 1]$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$;
- $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2}$;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\dfrac{\pi}{2}$;
- $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{arcctg} x = 0$;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi$.

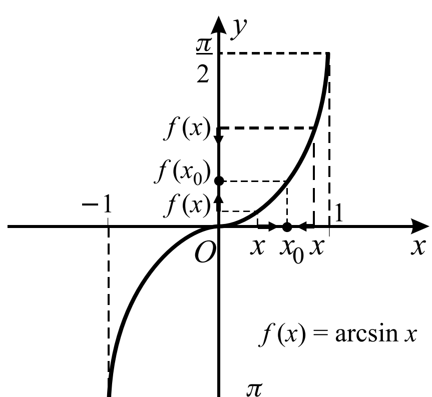


Fig. 1.51.

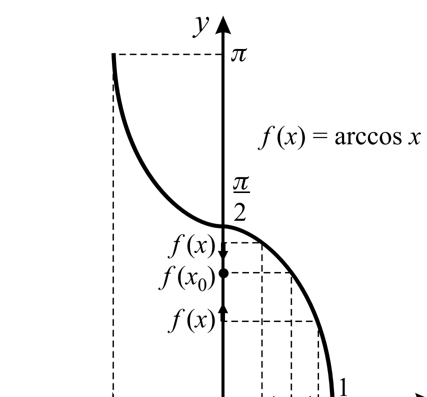


Fig. 1.52.

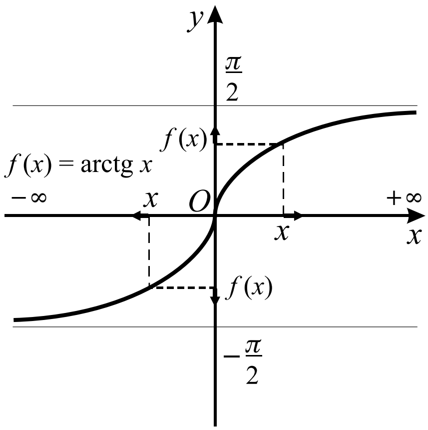


Fig. 1.53.

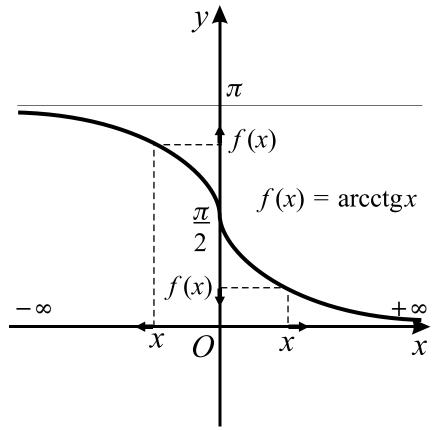


Fig. 1.54.

Exemple

- $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x = \arcsin 0 = 0;$
- $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \arcsin x = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$;
- $\lim\limits_{x\to 1} \arcsin x = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \arcsin x = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$;
- $\lim\limits_{x\to -1} \arcsin x = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \arcsin x = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$;
- $\lim\limits_{x\to 0} \arccos x = \arccos 0 = \frac{\pi}{2};$
- $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \arccos x = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$;
- $\lim\limits_{x\to 1} \arccos x = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \arccos x = \arccos 1 = 0$;
- $\lim\limits_{x\to -1} \arccos x = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \arccos x = \arccos(-1) = \pi$;
- $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \arccos x = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$;
- $\lim\limits_{x\to -\frac{\sqrt{3}}{2}} \arccos x = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$;

- $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 0 = 0$;
- $\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$;
- $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$;
- $\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\dfrac{\pi}{3}$;
- $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} 0 = \dfrac{\pi}{2}$;
- $\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$;
- $\lim\limits_{x\to -\frac{\sqrt{3}}{3}} \operatorname{arctg} x = -\operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{3}}{3} = -\dfrac{\pi}{6}$;
- $\lim\limits_{x\to -1} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg}(-1) = \pi - \operatorname{arcctg} 1 = \dfrac{3\pi}{4}$;
- $\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \operatorname{arcctg} \sqrt{3} = \dfrac{5\pi}{6}$.

Exerciţii şi probleme

Exersare

E1. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \sin x$; b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \cos x$; c) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}} \sin x$; d) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{6}} \cos x$;

e) $\lim\limits_{\substack{x\to \pi \\ x<\pi}} \sin x$; f) $\lim\limits_{\substack{x\to \pi \\ x>\pi}} \cos x$; g) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\pi \\ x>2\pi}} \sin x$; h) $\lim\limits_{\substack{x\to -\pi \\ x<-\pi}} \cos x$.

E2. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x$; b) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x$; c) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x$; d) $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{\pi}{2} \\ x>\frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} x$;

d) $\lim\limits_{\substack{x\to \pi \\ x>\pi}} \operatorname{tg} x$; f) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x$; g) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} x$; h) $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}} \operatorname{ctg} x$;

i) $\lim\limits_{\substack{x\to \pi \\ x<\pi}} \operatorname{ctg} x$; j) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\pi \\ x>2\pi}} \operatorname{ctg} x$.

E3. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \arcsin x$; b) $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \arccos x$; c) $\lim\limits_{x \to -\frac{\sqrt{3}}{2}} \arccos x$;

d) $\lim\limits_{x \to -\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin x$; e) $\lim\limits_{x \to -\frac{\sqrt{2}}{2}} \arccos x$; f) $\lim\limits_{x \to \frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin x$.

E4. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\sqrt{3}}{3}} \operatorname{arctg} x$; b) $\lim\limits_{x \to \frac{\sqrt{3}}{3}} \operatorname{arcctg} x$; c) $\lim\limits_{x \to -\frac{\sqrt{3}}{3}} \operatorname{arctg} x$;

d) $\lim\limits_{x \to -\frac{\sqrt{3}}{3}} \operatorname{arcctg} x$; e) $\lim\limits_{x \to -\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x$; f) $\lim\limits_{\substack{x \to \sqrt{3} \\ x > \sqrt{3}}} \operatorname{arctg} x$.

Sinteză

S1. Să se determine valorile parametrului $a \in \mathbb{R}$ pentru care au loc egalităţile:

a) $\lim\limits_{x \to a} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$; b) $\lim\limits_{x \to a} \arccos x = 0$; c) $\lim\limits_{x \to a} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}$;

d) $\lim\limits_{x \to a} \arcsin x = \frac{\pi}{4}$; e) $\lim\limits_{x \to a} \arccos x = \pi$; f) $\lim\limits_{x \to a} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{4}$.

S2. Să se studieze existenţa limitei funcţiei $f: D \to \mathbb{R}$ în punctele specificate:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leqslant 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$, $x_0 \in \{0, -\infty, +\infty\}$;

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leqslant \pi \\ 3(x-\pi)^2, & x > \pi \end{cases}$, $x_0 \in \{0, \pi, 2\pi\}$;

c) $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \arccos x, & x \in [-1, 0) \\ x^2 + 2x + \frac{\pi}{2}, & x \in [0, 1] \end{cases}$, $x_0 \in \{-1, 0, 1\}$;

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & x \leqslant 0 \\ \arcsin x, & x \in (0, 1) \\ \operatorname{arcctg} x, & x \in [1, +\infty) \end{cases}$, $x_0 \in \{-\infty, 0, 1, +\infty\}$.

S3. Să se determine valorile parametrilor reali, pentru care funcţia $f:D \to \mathbb{R}$ are limită pe domeniul de definiţie.

a) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leqslant 0 \\ ax + b, & x \in (0, 1) \\ \operatorname{arctg} x, & x \geqslant 1 \end{cases}$

b) $f:[-2, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} a, & x \in [-2, -1) \\ \arcsin x, & x \in [-1, 1] \\ b, & x \in (1, 2] \end{cases}$;

S4. Să se studieze existenţa limitei funcţiei $f:D \to \mathbb{R}$ în punctele specificate:

a) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin|x|,\ x_0 \in \{-1, 0, 1\}$;

b) $f:\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = |\sin x|,\ x_0 \in \left\{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\right\}$;

c) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |-\cos x|,\ x_0 \in \left\{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\right\}$;

d) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |\operatorname{arctg} x|,\ x_0 \in \{-1, 0, 1\}$.

S5. Să se studieze existenţa limitei funcţiei $f:D \to \mathbb{R}$ în punctele specificate:

a) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 2^x - 1, & x \leq 0 \\ \log_2 x, & x > 0 \end{cases},\ x_0 = 0$;

b) $f:[0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}, & x \in [0, 3) \\ \sin(\pi x), & x \geq 3 \end{cases},\ x_0 = 3$;

c) $f:[-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x + a, & x \in [-1, 0] \\ \arcsin x, & x \in (0, 1] \end{cases},\ x_0 = 0$;

d) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \arcsin x, & x \in [-1, 1] \\ m + \log_2|x|, & x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \end{cases},\ x_0 \in \{-1, 0, 1\}$.

1.5. Operaţii cu limite de funcţii

1.5.1. Adunarea, produsul, câtul, puteri de limite de funcţii

Fie $f, g: D \to \mathbb{R}$ două funcţii reale de variabilă reală, $x_0 \in D'$ un punct de acumulare al mulţimii D şi $\ell_1 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $\ell_2 = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.[1]

Referitor la operaţiile cu limite de funcţii are loc următorul rezultat:

TEOREMA 1 (Operaţii cu limite de funcţii)

- *Dacă* $\ell_1 + \ell_2$ *are sens în* $\overline{\mathbb{R}}$, *atunci*

$$\lim_{x \to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Limita sumei este egală cu suma limitelor.

- *Dacă* $\ell_1 - \ell_2$ *are sens în* $\overline{\mathbb{R}}$, *atunci*

$$\lim_{x \to x_0}(f(x)-g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Limita diferenţei este egală cu diferenţa limitelor.

- *Dacă* $\ell_1 \cdot \ell_2$ *are sens în* $\overline{\mathbb{R}}$, *atunci*

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right).$$

Limita produsului este egală cu produsul limitelor.

- *Dacă* $\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$ *are sens în* $\overline{\mathbb{R}}$, *atunci* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$.

Limita raportului este egală cu raportul limitelor.

- *Dacă* $(\ell_1)^{\ell_2}$ *are sens în* $\overline{\mathbb{R}}$, *atunci*

$$\lim_{x \to x_0}(f(x))^{g(x)} = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}.$$

Limita puterii este egală cu puterea limitelor.

---

[1] ***Ne reamintim!***

Fie $f, g: D \to \mathbb{R}$ şi $A = \{x \in D \mid g(x) = 0\}$. Atunci au loc următoarele operaţii cu funcţii:

$f \pm g, f \cdot g: D \to \mathbb{R}, (f+g)(x) = f(x) + g(x), (f-g)(x) = f(x) - g(x), (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x);$

$\dfrac{f}{g}: D \setminus A \to \mathbb{R}, \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}.$

EXEMPLE

- $\lim\limits_{x\to\pi}(\sin x+\cos x)=\lim\limits_{x\to\pi}\sin x+\lim\limits_{x\to\pi}\cos x=0+(-1)=-1;$
- $\lim\limits_{x\to 9}(x+1+\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to 9}(x+1)+\lim\limits_{x\to 9}\sqrt{x}=10+3=13;$
- $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+\ln x+\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to 1}x^2+\lim\limits_{x\to 1}\left(\ln x+\sqrt{x}\right)=$

$$=1+\lim_{x\to 1}\ln x+\lim_{x\to 1}\sqrt{x}=1+\ln 1+1=2.$$

Mai general, dacă $f_1, f_2, ..., f_n : D\to\mathbb{R}$ *şi* $\lim\limits_{x\to x_0} f_k(x)=l_k,\ k\in\{1, 2, ..., n\}$, *atunci:*

$$\lim_{x\to x_0}\left(f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)\right)=\lim_{x\to x_0}f_1(x)+\lim_{x\to x_0}f_2(x)+...+\lim_{x\to x_0}f_n(x),$$

dacă operaţia $\ell_1+\ell_2+...+\ell_n$ *are sens în* $\overline{\mathbb{R}}$.

EXEMPLE

- $\lim\limits_{x\to 1}(x^2\sqrt{x})=\left(\lim\limits_{x\to 1}x^2\right)\left(\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x}\right)=1\cdot 1=1;$
- $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x+1)\cdot\sin x=\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x+1)\cdot\lim\limits_{x\to\pi}\sin x=1\cdot\sin\pi=0;$
- $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(x^2+x+1\right)\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\cos x\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+x+1\right)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{x}\cdot\cos x\right)=$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\cos x\right)=0\cdot\cos 0=0.$$

Mai general, dacă $f_1, f_2, ..., f_n : D\to\mathbb{R}$ *sunt funcţii cu proprietatea că* $\lim\limits_{x\to x_0} f_k=\ell_k,\ k\in\{1, 2, ..., n\}$, *iar operaţia* $\ell_1\cdot\ell_2\cdot...\cdot\ell_n$ *are sens în* $\overline{\mathbb{R}}$, *atunci:*

$$\lim_{x\to x_0}\left[f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot...\cdot f_n(x)\right]=\left(\lim_{x\to x_0}f_1(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to x_0}f_2(x)\right)\cdot...\cdot\left(\lim_{x\to x_0}f_n(x)\right).$$

Dacă $f_1=f_2=...=f_n=f$, *atunci* $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^n=\left(\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\right)^n$.

EXEMPLE

- $\lim\limits_{x\to 2} x^5 = \left(\lim\limits_{x\to 2} x\right)^5 = 2^5 = 32;$
- $\lim\limits_{x\to 1} (\mathrm{arctg}\, x)^4 = \left(\lim\limits_{x\to 1} \mathrm{arctg}\, x\right)^4 = \left(\frac{\pi}{4}\right)^4;$
- $\lim\limits_{x\to \infty} (x^2+1)^3 = \infty^3 = \infty;$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} (\mathrm{arctg}\, x)^3 = \left(\lim\limits_{x\to -\infty} \mathrm{arctg}\, x\right)^3 = \left(-\frac{\pi}{2}\right)^3 = -\frac{\pi^3}{8};$
- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{5x^2+3}{3x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(5x^2+3)}{\lim\limits_{x\to 1}(3x+1)} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} 5x^2 + \lim\limits_{x\to 1} 3}{\lim\limits_{x\to 1} 3x + \lim\limits_{x\to 1} 1} = \frac{5+3}{3+1} = 2;$
- $\lim\limits_{x\to 2} (x+1)^{2x} = \left(\lim\limits_{x\to 2}(x+1)\right)^{\lim\limits_{x\to 2} 2x} = \left(\lim\limits_{x\to 2} x + \lim\limits_{x\to 2} 1\right)^4 = 3^4 = 81.$

TEMĂ

1. Calculaţi:

a) $\lim\limits_{x\to 1} (x+1)\cdot(x+2)^2;$ b) $\lim\limits_{x\to e} (1+\ln x)\cdot(1+2\ln x);$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)^3;$ d) $\lim\limits_{x\to 3} \left(x^2+1\right)^{3-x}.$

2. Determinaţi valorile parametrilor reali pentru care au loc egalităţile:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\sqrt{x} + a\sqrt[3]{x}\right) = 3;$ b) $\lim\limits_{x\to 3} \left[(x-3) + a\ln x\right] = \ln 9;$

c) $\lim\limits_{x\to a} \left(2^x + 4^x\right) = 6;$ d) $\lim\limits_{x\to a+1} \frac{2+x}{3+x} = \frac{3}{4}.$

3. Determinaţi parametrii reali pentru care funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$f(x) = \begin{cases} x + ax^2 + \ln x, x \geq 1 \\ x + a^2\sqrt[3]{x}, \quad x < 1 \end{cases}$, are limită în $x_0 = 1$.

1.5.2. Limitele funcţiilor compuse

Fie $f\colon D \to \mathbb{R}$ şi $u\colon A \to D$ funcţii reale de variabilă reală, iar $h\colon A \to \mathbb{R}$ funcţia compusă a acestora.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\ \underset{x_0}{A} \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "h = f \circ u"'] & \end{tikzcd}$$

Fig. 1.55.

Dacă $x_0 \in A'$ este un punct de acumulare pentru mulţimea *A*, condiţiile în care funcţia *h* are limită în punctul x_0 sunt date de următorul rezultat:

➯ *TEOREMA 2 (de existenţă a limitei funcţiilor compuse).*

Fie $x_0 \in A'$ şi $u(x_0) = u_0 \in D'$ puncte de acumulare pentru mulţimile A, respectiv D. Dacă sunt îndeplinite condiţiile:

a) $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = u_0$;

b) $u(x) \neq u_0$, *pentru oricare* $x \in A \setminus \{x_0\}$;

c) $\lim\limits_{y \to u_0} f(y) = \ell$,

atunci $\lim\limits_{x \to x_0} f(u(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(y)$.

PROBLEME REZOLVATE

1. *Să se calculeze:*

a) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt[3]{x^2 + x + 8}$; b) $\lim\limits_{x \to 3} \log_2 (x + 5)$;

c) $\lim\limits_{x \to 1} \sin (x^2 - 1)$; d) $\lim\limits_{x \to \infty} \ln (2x^2 + 3x + 1)$.

Soluţie.

a) Fie $f, u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $u(x) = x^2 + x + 8$. Avem:

$$\lim_{x \to 0} u(x) = \lim_{x \to 0} \left(x^2 + x + 8\right) = 8.$$

Atunci:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x^2+x+8}=\lim_{x\to 0} f(u(x))=\lim_{y\to 8} f(y)=\lim_{y\to 8}\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{8}=2.$$

OBSERVAŢIE

✓ Din rezolvarea anterioară se desprinde concluzia că pentru calculul limitei date se poate proceda în mod practic astfel:

- se notează $y=u(x)$ şi se scrie funcţia $f\big(u(x)\big)$ sub forma $f(y)$;
- se află valoarea y_0 a limitei $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)$;
- se calculează apoi $\lim\limits_{y\to y_0} f(y)$.

b) Avem $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $u:(-\infty,-5)\to(0,\infty)$, $f(x)=\log_2 x, u(x)=x+5$. Se obţine:

$$y_0=\lim_{x\to 3} u(x)=\lim_{x\to 3}(x+5)=8 \text{ şi } \lim_{y\to 8}\log_2 y=\log_2 8=3.$$

Aşadar, $\lim\limits_{x\to 3}\log_2(x+5)=3.$

c) Avem $f,u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$, $u(x)=x^2-1.$

Se obţine

$$\lim_{y\to 0}\sin y=\sin 0=0.$$

Aşadar, $\lim\limits_{x\to 1}\sin(x^2-1)=0.$

d) Considerăm $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $u:(0,\infty)\to(0,\infty)$, $f(x)=\ln x$,

$$u(x)=2x^2+3x+1.$$

Se obţine:

$\lim\limits_{x\to\infty} u(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2+3x+1)=\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\ln(2x^2+3x+1)=\lim\limits_{y\to\infty}\ln y=\infty.$

OBSERVAŢIE

✓ În cazul în care *f* şi *u* sunt funcţii elementare, vom avea

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(u(x))=f\left(\lim_{x\to x_0} u(x)\right),}$$

relaţie care permite un calcul mai direct al limitelor de funcţii compuse.

Astfel, avem:

- $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{x^2+x+8}=\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 0}(x^2+x+8)}=\sqrt[3]{8}=2;$
- $\lim\limits_{x\to 3}\log_2(x+5)=\log_2\left(\lim\limits_{x\to 3}(x+5)\right)=\log_2 8=3;$
- $\lim\limits_{x\to 1}\sin(x^2-1)=\sin\left(\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)\right)=\sin 0=0;$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\ln(2x^2+3x+1)=\ln\left(\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2+3x+1)\right)=\ln\infty=\infty.$

2. *Să se determine constantele reale pentru care au loc relaţiile:*

a) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{2x^2+3x+a}=3;$ b) $\lim\limits_{x\to -1}e^{2x+a}=e^{-1};$ c) $\lim\limits_{x\to 3}\log_3\left(\sqrt[3]{x+a}\right)=2.$

Soluţie.

a) Avem $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{2x^2+3x+a}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 2}(2x^2+3x+a)}=\sqrt{a+14}=3.$

Rezultă $a+14=9$ şi $a=-5$.

b) Se obţine $\lim\limits_{x\to -1}e^{2x+a}=e^{\lim\limits_{x\to -1}(2x+a)}=e^{a-2}=e^{-1}$ şi rezultă $a-2=-1$ şi $a=1$.

c) Avem:

$$\lim_{x\to 3}\log_3\left(\sqrt[3]{x+a}\right)=\log_3\left(\lim_{x\to 3}\sqrt[3]{x+a}\right)=\log_3\sqrt[3]{\lim_{x\to 3}(x+a)}=$$
$$=\log_3\sqrt[3]{a+3}=2.$$

Rezultă că $\sqrt[3]{a+3}=3^2$ şi $a+3=729$, deci $a=726$.

TEMĂ

1. Determinaţi valorile parametrului a pentru care au loc egalităţile:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\sqrt{x+1}+a\ln(x+e)\right]=5;$ b) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-a}\right)=3;$

c) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 2x+2a\cdot\cos 4x)=8;$ d) $\lim\limits_{x\to 1}\left(2^x+3^{ax}\right)^{x+1}=25.$

1.5.3. Criterii de existenţă a limitei unei funcţii

Fie $f, g: D \to \mathbb{R}$ două funcţii reale de variabilă reală şi $x_0 \in D'$ un punct de acumulare pentru *D*.

TEOREMA 3 (criteriul majorării)

- *Dacă* $f(x) \leqslant g(x), \forall x \in D$ *şi* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, *atunci*
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$
- *Dacă* $f(x) \leqslant g(x), \forall x \in D$ *şi* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, *atunci*
$$\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty.$$
- *Dacă există* $\ell \in \mathbb{R}$ *cu proprietatea că* $\left| f(x) - \ell \right| \leqslant g(x), \forall x \in D$ *şi* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, *atunci*
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.$$

EXEMPLE

- Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{x+1}$; b) $\lim\limits_{x \to \infty} (-x^2 - x^3)$; c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(x \sin \dfrac{1}{x^2} \right)$.

Soluţie.

a) Fie $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$, $x \in (0, \infty)$. Avem
$$f(x) = \frac{x^2 - 1 + 1}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1} \geqslant x - 1, \ \forall x \in (0, \infty).$$
Din inegalitatea $f(x) \geqslant x - 1$, aplicând criteriul majorării, rezultă:
$$\lim_{x \to \infty} f(x) \geqslant \lim_{x \to \infty} (x - 1) = \infty, \text{ deci } \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$
b) Fie $f(x) = -x^2 - x^3$, $x \in \mathbb{R}$. Se observă uşor că
$$f(x) \leqslant -x^3, \ x \in \mathbb{R} \text{ şi } \lim_{x \to \infty} f(x) \leqslant \lim_{x \to \infty} (-x^3) = -\infty.$$
Aşadar, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$.

c) Avem $|f(x)| = \left| x \sin \frac{1}{x^2} \right| = |x| \cdot \left| \sin \frac{1}{x^2} \right| \leqslant |x|, \forall x \in \mathbb{R}^*$.

Aşadar, $|f(x) - 0| \leqslant |x|, \forall x \in \mathbb{R}^*$ şi, deoarece $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$, conform criteriului majorării se obţine că $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

TEOREMA 4 (criteriul cleştelui).

Fie $f, g, h: D \to \mathbb{R}$ funcţii reale de variabilă reală şi $x_0 \in D'$ punct de acumulare pentru D. Dacă sunt verificate condiţiile:

a) $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x), \forall x \in D$;

b) $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

EXEMPLE

Să se calculeze: a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \cdot \left[\frac{1}{x}\right]$; b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x \sin^2 \frac{1}{x}}{x+1}$.

Soluţie.

a) Folosind proprietatea funcţiei parte întreagă se obţine:

$$\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x}\right] \leqslant \frac{1}{x}, \; x \in (0, \infty)$$

şi rezultă inegalitatea $1 - x < x\left[\frac{1}{x}\right] \leqslant 1$. Deoarece $\lim\limits_{x \to 0} (1 - x) = 1$ aplicând criteriul cleştelui pentru $f(x) = x\left[\frac{1}{x}\right]$, $g(x) = 1 - x$, $h(x) = 1$, se obţine că $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

b) Considerând funcţiile $f, g, h: (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x \sin^2 \frac{1}{x}}{x+1}, \; g(x) = 0, \; h(x) = \sin^2 \frac{1}{x},$$

se observă uşor că $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x), \forall x \in (0, \infty)$ şi $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$,

$$\lim_{x \to \infty} h(x) = \lim_{x \to \infty} \sin^2 \frac{1}{x} = \left(\lim_{x \to \infty} \sin \frac{1}{x} \right)^2 = \left(\sin\left(\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \right) \right)^2 = (\sin 0)^2 = 0.$$

Aşadar, conform criteriului cleşte se obţine că $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Exerciţii şi probleme

Exersare

E1. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 4}\left(x^2-3x+\sqrt{x}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to 3}\left(2x-1+\ln\dfrac{x}{3}\right)$;

c) $\lim\limits_{x\to \pi}(\sin x+3\cos x)$; d) $\lim\limits_{x\to 1}\left(2^x+3^x-4^x\right)$;

e) $\lim\limits_{x\to 9}(3x^2-27x+\log_3 x)$; f) $\lim\limits_{x\to -1}\left(2^x+3^x-\sqrt[3]{x}\right)$.

E2. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-2\right)\left(x^2-3\right)$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2\log_3 x\right)$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+2^x\right)\sqrt[3]{x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{2^x}{8}\cdot\dfrac{3^x}{27}\right)$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2^x+1\right)\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}\right)$; f) $\lim\limits_{x\to 2\pi}(1-\cos x)(1+\sin x)$.

E3. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2+x+1}$; b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4x-10}{2x-3}$; c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\sin x+\cos x}{1+\sin x+\sqrt{x}}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$; e) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x+\operatorname{tg} x}{\sin x+2}$; f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arcsin x+\arccos x}{\pi+\operatorname{arctg} x}$.

E4. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 1}(x+1)^{\sqrt{x}}$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(\sin x)^{1+x}$; c) $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+x-1\right)^{x+1}$;

d) $\lim\limits_{x\to \pi}(1+\sin x)^{\cos x}$; e) $\lim\limits_{\substack{x\to \pi\\ x>\pi}}(\sin x+\operatorname{tg} x)^{\pi+x}$; f) $\lim\limits_{x\to 1}(\operatorname{arctg} x)^{\sqrt{x}}$.

Sinteză

S1. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)^2$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}\right)^4$; c) $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\sin x+\cos x)^2$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x\operatorname{tg} x)^{x+1}$; e) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x\sqrt{x}+\dfrac{2x+1}{x^2-x+1}\right)$; f) $\lim\limits_{x\to 1}\left(2^x-3^x+1\right)^{\sqrt{x}}$;

g) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}(2\arcsin x+\arccos x)^x$; h) $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arcctg} x}$; i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arccos x}{1+\arcsin x}$.

S2. Să se determine constantele reale pentru care au loc egalităţile:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a\pi+\arcsin x}{\pi+\arccos x}=2$; b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)^2+(x-2)^2}{a+\sqrt[3]{x}}=1$;

c) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}+2x}{2+\sqrt{x}}=1$; d) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2^x+4^x}{2\cdot 2^x+3\cdot 4^x}=\dfrac{3}{8}$.

S3. Să se studieze existenţa limitelor funcţiei $f:D\to\mathbb{R}$ în punctele specificate:

a) $f(x)=\begin{cases} x\operatorname{tg}x,\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\\ \sin x,\ x\in\left[\dfrac{\pi}{2},+\infty\right)\end{cases},\ x_0\in\left\{0,\dfrac{\pi}{2}\right\}$;

b) $f(x)=\begin{cases}(x-1)\sqrt{x},\ x\in(0,1)\\ \left(1-\sqrt[3]{x}\right),\ x\in(-\infty,0]\cup[1,+\infty)\end{cases},\ x_0\in\{0,1\}$;

c) $f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{x-1}{x^2+x+1}\right)^3,\ x\in(-\infty,0]\\ (-1+\sin x)^3,\ x\in(0,+\infty)\end{cases},\ x_0=0.$

S4. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 1}(\sin x)\sqrt[3]{x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+x\ln(x+1)\right)^2$;

c) $\lim\limits_{x\to 2}(2^x-1)\lg(x+8)$; d) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt[3]{7x+\sqrt{x}}\right)^5$;

e) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{e^{x+1}}{1+2^{x+1}}$; f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2+12}-\sqrt[3]{10-x}}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(x\sin x)}{1+\sin(\arccos x)}$; h) $\lim\limits_{x\to 0}\log_2\left(2+\log_3(x+9)\right)$.

S5. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\left[\dfrac{1}{x^2}\right]$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[x]}{x}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x+x}{x^2}$; e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\cos x}{x^2+1}$; f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[x]+[3x]}{x}$.

1.6. Cazuri exceptate la calculul limitelor de funcţii

În mulţimea $\overline{\mathbb{R}}$ următoarelor operaţii nu li se atribuie niciun sens:

$$\infty-\infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty.$$

În cazul în care în calculul limitelor de funcţii se ajunge la asemenea situaţii, numite cazuri exceptate, nu se poate preciza direct care este limita finală.

EXEMPLE

➢ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$. Prin folosirea operaţiilor cu limite de funcţii avem:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-4\right)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-2)}=\frac{0}{0}\text{ (caz exceptat)}$$

şi, astfel, nu putem spune care este rezultatul.

În acest caz, limita cerută se poate calcula astfel:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4.$$

➢ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin x}$. Prin calcul direct, cu operaţii cu limite de funcţii se obţine:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\sin 2x}{\lim\limits_{x\to 0}\sin x}=\frac{0}{0}\text{ (caz exceptat).}$$

Pentru depăşirea acestui caz de excepţie se prelucrează expresia de sub limită şi se obţine:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cdot\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}2\cos x=2\cos 0=2.$$

➢ $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(x+1)^3-x^3\right]$. Şi în acest caz, prin calcul direct se ajunge la operaţia $\infty-\infty$ care nu are sens în $\overline{\mathbb{R}}$. Prelucrând expresia $(x+1)^3-x^3$ se obţine:

$$\lim_{x\to\infty}\left[(x+1)^3-x^3\right]=\lim_{x\to\infty}(x^3+3x^2+3x+1-x^3)=\lim_{x\to\infty}(3x^2+3x+1)=\infty.$$

➢ $\ell = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(x^2+1\right)\cdot\dfrac{1}{2x^2+1}\right]$. Prin calcul direct se obţine:

$$\ell = \lim_{x\to\infty}\left(x^2+1\right)\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2+1} = \infty\cdot 0,$$

deci operaţie care nu are sens în $\overline{\mathbb{R}}$.

Pentru calculul limitei se scrie expresia $\left(x^2+1\right)\cdot\dfrac{1}{2x^2+1}$ sub forme echivalente şi se obţine:

$$\ell = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2}.$$

➢ $\ell = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}\cdot\ln\left(\dfrac{1}{x^x}\right)\right)$. Prin calcul direct se obţine:

$$\ell = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\ln\frac{1}{x^x}\right) = 0\cdot\ln\left(0_+\right) = 0\cdot(-\infty),$$

deci o operaţie care nu are sens în $\overline{\mathbb{R}}$.

Pentru a evita această operaţie avem:

$$\ell = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}(-\ln x^x) = -\lim_{x\to\infty}\frac{x\ln x}{x} = -\lim_{x\to\infty}\ln x = -\infty.$$

Aceste exemple permit să se facă următoarele observaţii:

➢ În cazurile exceptate $\infty-\infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$, $0\cdot\infty$,..., nu se poate cunoaşte direct rezultatul final, iar acest rezultat final depinde de funcţiile care apar în calcul, el putând fi orice număr din $\overline{\mathbb{R}}$, eventual să nu existe. De aceea, aceste cazuri se numesc *cazuri de nedeterminare.*

Pentru calculul limitelor de funcţii în cazurile de nedeterminare se folosesc anumite tehnici speciale sau sunt folosite anumite limite fundamentale.

1.6.1. Limitele funcţiilor raţionale

Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$, unde $a_0, a_1,...,a_n\in\mathbb{R}$, $a_0\neq 0$ şi $n\in\mathbb{N}$ se numeşte *funcţie polinomială de gradul n.*

În particular, funcţia de gradul 1 şi funcţia de gradul 2 sunt funcţii polinomiale de gradul 1, respectiv 2.

Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcţie polinomială de gradul n şi $x_0\in\mathbb{R}$, conform operaţiilor cu limite de funcţii elementare $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Fie $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funcţii polinomiale şi $A=\{x\in\mathbb{R}\mid g(x)=0\}$. Funcţia $h:\mathbb{R}\setminus A\to\mathbb{R}$, $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ se numeşte *funcţie raţională.*

EXEMPLE

- Funcţiile $h_1:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $h_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h_1(x)=\dfrac{1}{x}$, $h_2(x)=\dfrac{x-1}{x^2+2}$ sunt funcţii raţionale.

Fie $h:D\to\mathbb{R}$, $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ o funcţie raţională, unde f şi g sunt funcţii polinomială de grad cel mult 2 şi $x_0\in D'$ un punct de acumulare al mulţimii D.

Calculul limitei funcţiei h în punctul x_0 conduce la următoarele situaţii:

1. Cazul $x_0\in D$. Având în vedere operaţiile cu limite de funcţii avem:

$$\lim_{x\to x_0} h(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

2. Cazul $g(x_0)=0$ şi $f(x_0)=k\neq 0$. Rezulta că $\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}=\dfrac{k}{0}$.

În acestă situaţie se calculează limitele laterale ale funcţiei f în punctul x_0.
Pentru calculul acestor limite laterale se folosesc următoarele „reguli“:

$$\frac{1}{\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ y<0}} y}=-\infty \text{ şi } \frac{1}{\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ y>0}} y}=+\infty,$$

reguli notate simbolic astfel: $\dfrac{1}{0_{(-)}}=-\infty$, $\dfrac{1}{0_{(+)}}=+\infty$.

3. Cazul $f(x_0)=g(x_0)=0$. Această situaţie conduce la nedeterminarea $\dfrac{0}{0}$ care se soluţionează folosind descompunerea în produs de factori a expresiilor $f(x)$ şi

$g(x)$ urmată de simplificarea fracţiei prin factorul comun $(x-x_0)$.[2]

Avem:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)f_1(x)}{(x-x_0)g_1(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)},$$

urmând să se examineze ultima limită găsită.

4. Cazul $x_0=+\infty$ sau $x_0=-\infty$.

Această situaţie conduce la cazul de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$, a cărui soluţionare se face folosind „regula factorului comun forţat". În raport cu gradele funcţiilor polinomiale *f* şi *g* se obţin următoarele rezultate:

a) Dacă grad $f<\text{grad}\, g$, atunci $\lim\limits_{x\to\pm\infty}h(x)=0$.

b) Dacă grad $f>\text{grad}\, g$, atunci $\lim\limits_{x\to\pm\infty}h(x)=\frac{a_0}{b_0}\cdot(\pm\infty)$,

unde a_0, b_0 sunt coeficienţii termenilor care dau gradul funcţiilor polinomiale *f* şi *g*.

c) Dacă grad $f=\text{grad}\, g$, atunci $\lim\limits_{x\to\pm\infty}h(x)=\frac{a_0}{b_0}$.[3]

EXEMPLE

➢ $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x^2-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(2-\frac{3}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}}{x\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{2}{\infty}=0;$$

➢ $$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-5x+1}{-x+4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{-x\left(1-\frac{4}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{-1+\frac{4}{x}}=$$

$$=(-\infty)\cdot\left(\frac{3}{-1}\right)=+\infty;$$

➢ $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2-x-3x^2}{4x^2-x+5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}-3\right)}{x^2\left(4-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}-3}{4-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}=-\frac{3}{4}.$$

Ne reamintim!

[2] $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, unde x_1, x_2 sunt soluţiile reale ale ecuaţiei $ax^2+bx+c=0$.

[3] $\frac{k}{+\infty}=0, \frac{k}{-\infty}=0$.

EXERCIŢII REZOLVATE

✓ *Să se calculeze următoarele limite de funcţii raţionale:*

a) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+2x-1}{5x-4}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-2}{x^2-1}$; c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+1}{(x+2)^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$; e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}$.

Soluţii

a) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+2x-1}{5x-4}=\dfrac{3\cdot(-2)^2+2(-2)-1}{5\cdot(-2)-4}=\dfrac{7}{-14}=-\dfrac{1}{2}$;

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-2}{x^2-1}=\dfrac{1-2}{1-1}=\left(\dfrac{-1}{0}\right)$. În acest caz se calculează limitele laterale ale funcţiei în punctul $x_0=1$, folosind totodată semnul expresiei x^2-1:

$$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{x-2}{x^2-1}=\frac{-1}{0_{(-)}}=+\infty;\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x-2}{x^2-1}=\frac{-1}{0_{(+)}}=-\infty.$$

Deoarece limitele laterale în $x_0=1$ sunt distincte, rezultă că funcţia $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-1}$, $x\neq\pm 1$ nu are limită în acest punct.

c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+1}{(x+2)^2}=\dfrac{5}{0_{(+)}}=+\infty$;

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-2}{x-3}=\dfrac{-1}{-2}=\dfrac{1}{2}$;

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-1}=\left(\dfrac{2}{0}\right)$.

În acest caz vom calcula limitele laterale pentru funcţia $h(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, $x\neq 1$:

$$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{0_{(-)}}=-\infty,\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{0_{(+)}}=+\infty.$$

Aşadar, nu există $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}$.

1.6.2. Soluţionarea cazului de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$ în calculul limitelor de funcţii în care apar radicali

Regula factorului comun forţat folosită în cazul de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$ în calculul limitelor funcţiilor raţionale poate fi folosită şi în calculul funcţiilor care conţin radicali.

EXEMPLE

➢ Să se calculeze

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+3}}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{2x+\sqrt{x+1}}$; d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}+x}{x+\sqrt{x^2+1}}$.

Soluţie.

Se observă că toate limitele de mai sus sunt în cazul de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$.

a) Folosind operaţiile cu limite de funcţii avem:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2}}=\sqrt{1}=1.$$

b) Se obţine succesiv: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{2x+1}{2x+3}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{2x+3}}=\sqrt{1}=1.$

c) Folosind metoda factorului comun forţat obţinem:

$$\ell=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{2x+\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x}{x\left(2+\frac{\sqrt{x+1}}{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}{x\left(2+\sqrt{\frac{x+1}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}{2+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$

şi folosind operaţii cu limite de funcţii, se obţine: $\ell=\frac{\sqrt{1}+1}{2+0}=\frac{2}{2}=1.$

d) Combinând operaţiile cu limite de funcţii şi metoda factorului forţat se obţine:

$$\ell=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}+x}{x+\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}+x}{x+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}+1\right)}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}+1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{\sqrt[3]{1}+1}{1+\sqrt{1}}=\frac{2}{2}=1.$$

În cazul în care se calculează limite de funcţii cu radicali de ordinul doi la $-\infty$, trebuie să se aibă în vedere că $\sqrt{x^2}=|x|$.

EXEMPLE

➢ Să se calculeze: a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}$.

Soluţie.

Se observă că există cazul de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$.

a) Avem succesiv: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{-1}{1}=-1.$$

b) Se obţine:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{2x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{2+\frac{1}{x}}=\frac{-\sqrt{1+0+0}}{2+0}=-\frac{1}{2}.$$

Exerciţii şi probleme

Exersare

E1. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{x+1}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x+1}{3x+1}$; c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2}{3x+x^2+1}$; d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x+2}{4x^2-3}$.

E2. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{2}{x}$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\dfrac{x}{2x+2}$; c) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{3x+1}{x^2-1}$;

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}}\dfrac{2x}{x^2-16}$; e) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{2x^2+3x-4}{x^2-3x+2}$; f) $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}\dfrac{5x^2-19}{x^2+3x+2}$.

E3. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}$; b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2}{(x+1)^2}$; c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-4}{x^2-4x+4}$;

d) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{6x}{-x^2+6x-9}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+11}{x^2(x+1)}$; f) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x+3}{1+2x+x^2}$.

E4. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x-4}{9x^2-9}$; b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$; c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{x^2-7x+12}$; e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2}{x^2-2x}$; f) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+4x+4}{2x^2+4x}$.

E5. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x+3}{-x+4}$; b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4-x^2}{2x^2+x+1}$; c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-2x+11}{6x-11}$;

d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2-x^2}{3x^2+4x+11}$; e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^2+6x+3}{2x+1}$; f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{6x^2-3x+11}{2x+6}$;

g) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x-2}{4x^2+6x+1}$; h) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x}{(x^2+1)(x-1)^2}$.

E6. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2\sqrt{x+1}}{\sqrt{3+x}}$; b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{4x^2+3}}$; c) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+\sqrt{x}}{3x+2\sqrt{x}+1}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}+x}{2x+3}$; e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+2x}{2\sqrt{x^2-1}+x}$; f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}+2\sqrt{x+1}}{3\sqrt{x-1}+\sqrt{4x+1}}$;

g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-1}{\sqrt{9x^2-x+7}}$; h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2-3x+5}}{3x-4}$.

Sinteză

S1. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+1)^2+(x-1)^2-4}{x^2-1}$; b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+1)^3-|x-1|^3-8}{x^2-3x+2}$;

c) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(2x-1)^2+(x-1)^2-10}{(x-2)^2+(x-1)^2-1}$; d) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{(x-3)^2+x^2-9}$;

e) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-2)^2-(x-1)^2+x^2-2}{2x^2-3x+1}$; f) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x-1)^2+(x+1)^2-4}{4x^2-(x+3)^2}$.

S2. Să se determine limitele funcţiei $f:D\to\mathbb{R}$ în punctele specificate:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x-2}, & x\in(-\infty,2)\\[2mm] \dfrac{-x^2}{x^2-4}, & x\in(2,+\infty)\end{cases}$, $x_0=2$; b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{2x^2-x-2}, & x\in(-\infty,1)\\[2mm] \dfrac{x^2-4x+3}{9(x-1)}, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$, $x_0=1$.

S3. Să se determine constantele reale pentru care funcţia $f:D\to\mathbb{R}$ are limită finită în punctele specificate:

a) $f(x)=\dfrac{2x+a}{x-1}$, $x_0=1$; b) $f(x)=\dfrac{3x+ax^2}{x-3}$, $x_0=3$;

c) $f(x)=\dfrac{(x-a)^2-4}{x^2-1}$, $x_0=1$; d) $f(x)=\dfrac{x-a^2}{x-1}+\dfrac{2x+a^2}{x^2-1}$, $x_0=1$.

S4. Să se calculeze limitele de funcţii:

a) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x^2-1}{2x^2-5x+3}+\dfrac{6x^2-x-5}{4x^2-3x-1}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{x-2}{5x^2-4x-12}-\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-16}\right)$;

c) $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{(x+1)^2+x^2-1}{x^2+3x+2}+\dfrac{(x-1)^2+3x-1}{2x^2+3x+1}\right)$.

S5. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{3x^2+4x+1}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^2+3}{2x^2+6x+1}\cdot\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+4}}\right)$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+4x}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}\right)$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+4x}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.

1.6.4. Limite fundamentale în calculul limitelor de funcţii

Pentru soluţionarea cazului de nedeterminare $\dfrac{0}{0}$ în calculul limitelor de funcţii se pot folosi următoarele limite fundamentale:

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\, x}{x}=1$;
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$;
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\, x}{x}=1$;
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$;
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$.
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^r-1}{x}=r,\ r\in\mathbb{R}$;

În cazul funcţiilor compuse aceste limite fundamentale se extind, folosind teorema de existenţă a limitelor de funcţii compuse, astfel:

Dacă $u{:}D\to\mathbb{R}$ este o funcţie reală de variabilă reală, $x_0\in D'$ este punct de acumulare pentru D şi $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0$, atunci:

- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin u(x)}{u(x)}=1$;
- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\mathrm{tg}\, u(x)}{u(x)}=1$;
- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\arcsin u(x)}{u(x)}=1$;
- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\mathrm{arctg}\, u(x)}{u(x)}=1$;
- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\ln(1+u(x))}{u(x)}=1$;
- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{a^{u(x)}-1}{u(x)}=\ln a$;
- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{(1+u(x))^r-1}{u(x)}=r$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$; c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\mathrm{tg}(x^2-1)\pi}{x-1}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)}{x}$; e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^x-2}{x-1}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9^x-e^x}{3^x-e^x}$.

Rezolvare.

Folosind limitele fundamentale şi operaţiile cu limite de funcţii se obţine:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(3x)}{3x}\cdot 3\right)=3\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{3x}=3\cdot 1=3;$

b) $$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot 3x}{\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot 2x}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{3}{2};$$

c) $$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\mathrm{tg}(x^2-1)\pi}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\mathrm{tg}(x^2-1)\pi}{(x^2-1)\pi}\cdot\frac{(x^2-1)\pi}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\mathrm{tg}(x^2-1)\pi}{(x^2-1)\pi}\cdot$$

$$\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^2-1)\pi}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^2-1)\pi}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)\pi}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+1)\pi}{1}=2\pi.$$

d) $$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x+x^2)}{x+x^2}\cdot\frac{x+x^2}{x}\right)=$$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)}{x+x^2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{x}=1\cdot\lim\limits_{x\to 0}(x+1)=1.$$

e) $$\lim\limits_{x\to 1}\frac{2^x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2(2^{x-1}-1)}{x-1}=2\cdot\lim\limits_{x\to 1}\frac{2^{x-1}-1}{x-1}=2\cdot\ln 2=\ln 4.$$

f) În acest caz, vom scrie funcţia dată sub forma:

$$f(x)=\frac{9^x-e^x}{3^x-e^x}=\frac{9^x-1+1-e^x}{3^x-1+1-e^x}=\frac{\frac{9^x-1}{x}-\frac{e^x-1}{x}}{\frac{3^x-1}{x}-\frac{e^x-1}{x}}.$$

Rezultă că: $$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{9^x-1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}}=\frac{\ln 9-\ln e}{\ln 3-\ln e}=\frac{2\ln 3-1}{\ln 3-1}.$$

2. *Să se calculeze:* a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+2\sin 5x}{\sin 2x-3\sin 3x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\operatorname{arctg} x}{x+\arcsin x}$.

Rezolvare. Limitele sunt în cazul de nedeterminare $\dfrac{0}{0}$. Folosind operaţiile cu limite de funcţii şi limitele fundamentale se obţine:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+2\sin 5x}{\sin 2x-3\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3+2\cdot\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot 5}{\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot 2-3\cdot\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3}=\frac{3+2\cdot 5}{2-3\cdot 3}=\frac{-13}{7};$$

$$\text{b) } \lim_{x\to 0}\frac{x+\operatorname{arctg} x}{x+\arcsin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}}{1+\dfrac{\arcsin x}{x}}=\frac{1+1}{1+1}=1.$$

3. *Să se calculeze:* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{x^2}$.

Rezolvare. Limita este în cazul de nedeterminare $\dfrac{0}{0}$, dar nu se observă direct care dintre limitele fundamentale se poate folosi. Pentru calculul limitei, expresia dată trebuie adusă la o formă în care să se poată identifica folosirea unei limite fundamentale.

Astfel, avem:

$$\cos 3x-\cos x=-2\sin\frac{3x-x}{2}\cdot\sin\frac{3x+x}{2}=-2\sin x\cdot\sin 2x.$$

Rezultă că:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}-2\cdot\frac{\sin x\cdot\sin 2x}{x^2}=-2\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin 2x}{x}\right)=$$

$$=-2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2\right)=-4.$$

Alte limite de funcţii în cazul de nedeterminare $\dfrac{0}{0}$

În cazul în care pentru soluţionarea cazului de nedeterminare $\dfrac{0}{0}$ nu se pot folosi limitele fundamentale este necesar a căuta alte procedee de soluţionare.

Vom exemplifica unele procedee în cazul în care funcţiile ale căror limite se cer conţin radicali.

PROBLEME REZOLVATE

✓ *Să se calculeze:* a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{x}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)x}{\sqrt{x^2+1}-1}$; e) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$.

Rezolvare. Se observă că limitele sunt în cazul $\frac{0}{0}$. Pentru evitarea nedeterminrii folosim *metoda expresiilor conjugate.* Această metodă constă în amplificarea fracţiilor cu expresiile conjugate ale expresiilor cu radicali. [4]

a) Avem: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+1)-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$.

b) Avem: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$.

c) Avem: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\right)}{x\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x^2+1)-(x+1)}{x\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(x-1)}{x\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\right)}=-\frac{1}{2}$.

d) În acest caz, vom amplifica fracţia dată prin expresiile conjugate ale numărătorului şi numitorului. Avem:

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)x}{\sqrt{x^2+1}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=$$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(x+1-1)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{(x^2+1-1)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{2}{2}=1$$

Ne reamintim!

[4] Perechi de expresii conjugate: • $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ şi $\sqrt{a}+\sqrt{b}$; • $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ şi $\sqrt{a}-\sqrt{b}$;

• $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ şi $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$; • $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ şi $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$.

e) Avem: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\frac{1}{3}.$$

Calculul limitelor de funcţii în cazul de nedeterminare $0\cdot\infty$

Fie $f, g{:}D\to\mathbb{R}$ şi $x_0\in D'$ un punct de acumulare pentru D astfel încât $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$.

Pentru calculul limitei $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)$, în cazul în care aceasta există, se aduce expresia $f(x)\cdot g(x)$ la una din formele $\dfrac{f(x)}{\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)}$ sau $\dfrac{g(x)}{\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)}$, caz în care se obţin nedeterminări de forma $\dfrac{0}{0}$, respectiv $\dfrac{\infty}{\infty}$ şi se aplică procedee specifice acestor cazuri.

PROBLEMĂ REZOLVATĂ

✓ *Să se calculeze:* *a)* $\lim\limits_{x\to 0}(x\ \mathrm{ctg}\,x)$; *b)* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{tg}\,x$.

Rezolvare. Cazul de nedeterminare este $0\cdot\infty$.

a) Avem: $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot\mathrm{ctg}\,x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\mathrm{tg}\,x}=1;$

b) Avem: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot\mathrm{tg}\,x=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{x-\dfrac{\pi}{2}}{\mathrm{ctg}\,x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{x-\dfrac{\pi}{2}}{\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)}=\left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{x-\dfrac{\pi}{2}}{\cos x}\right)=$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x-\dfrac{\pi}{2}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}=-1.$$

Exerciţii şi probleme

Exersare

E1. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5x)}{6x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{x(x+1)}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x^2)}{3x^2}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{\sin(4x)}$;

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}$; f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4}$; g) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sin(1-x^2)}{2x+2}$; h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(3x-3)}{\sin(x^2-1)}$.

E2. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}2x}{3x}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\mathrm{tg}(x-1)\pi}{(x^2-1)}$; c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\mathrm{tg}(3x-9)}{x^2-9}$;

d) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin(x-\pi)}{\mathrm{tg}(x-\pi)}$; e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\mathrm{tg}(x^2-1)}{\sin(x^2-x)}$; f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\mathrm{tg}(x-1)^2}{(x-1)\sin(x^2-1)}$;

E3. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(3x)}{5x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(x^2)}{x^2+x^3}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(10x)}{\arcsin(5x)}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(5x)}{\sin(10x)}$; e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\mathrm{arctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{16x^2-\pi^2}$; f) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\dfrac{\mathrm{arctg}(9x^2-1)}{\arcsin(3x+1)}$.

E4. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{5x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+6x)}{8x}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x^2)}{x^2+x^3}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x}{\ln(1+8x)}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{5x}}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\ln(1+3x^2)}$.

E5. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{6x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{x^2}-1}{x^2+x^3}$; c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{8^x-8}{x-1}$;

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^{x+1}-8}{x-2}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-3^x}{x}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^x}{2^x-1}$.

Sinteză

S1. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\sin 9x}{3x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+3\sin 5x+x}{x+x^2}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\operatorname{tg} x)}{x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(\sin x)}{2x}$; e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-4x+3)}{\sin(3x-4x+1)}$; f) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\operatorname{tg}(x^2+x-2)}{\operatorname{tg}(x^2+5x+6)}$;

g) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\arcsin\left(x^2-1\right)}{\arcsin\left(x^2+x\right)}$; h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{arctg}\left(x^2-6x+5\right)}{\arcsin\left(x^2+4x-5\right)}$.

S2. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 2x}{\sin 5x\sin 3x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-5\sin x}{\sin 4x-2\sin 3x}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(\arcsin x)}{\sin(\operatorname{arctg} x)}$.

S3. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 3x)}{\sin 5x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2-3^x)}{\sin x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x\sin x)}{\ln(1+x\sin 5x)}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+\ln(x+1))}{\ln(1+\ln(x^2+1))}$.

S4. Să se calculeze valoarea expresiei $E=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$, dacă $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} ax-\sin ax}{\operatorname{tg} bx-\sin bx}=\dfrac{1}{8}$.

S5. Pentru care valori ale lui $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+2\sin 2x+\ldots+n\sin nx}{x+x^2}=14$?

S6. Să se determine constantele reale pentru care au loc egalitățile:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2+x+1}{x+2}-ax\right)=3+b$; b) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x^2+3x+a}{x-1}-bx\right)=a$;

c) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+x}-ax-b\right)=\dfrac{3}{2}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin xa}{(x+2)\sin 3x}=2$;

e) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{a\ln(4-x)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2^x-8}{x^2-9}$; f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^{x+2}-16}{4^x-2^4}=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x-a^2}$.

1.7 Asimptotele funcţiilor reale

Asimptote orizontale

Să considerăm funcţiile exponenţiale $f, g : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$,

$$f(x) = 2^x,\ g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Graficele acestor funcţii sunt redate în fig.1.56 şi 1.57.

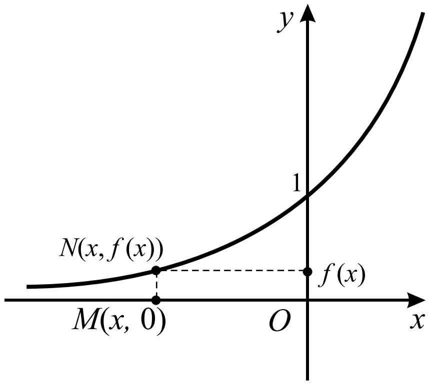


Fig. 1.56

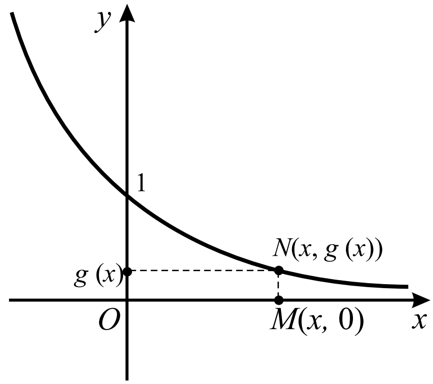


Fig. 1.57

Se ştie că $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2^x = 0$ şi $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$a

Din punct de vedere geometric aceste rezultate arată că lungimea segmentului $[MN]$, unde $M(x, 0)$, $N(x, f(x))$, respectiv $M(x, 0)$, $N(x, g(x))$ tinde la zero când x tinde spre $-\infty$, respectiv $+\infty$.

Lecturând graficele din figurile 1.56 şi 1.57, se observă că dreapta $y = 0$, axa Ox, este din ce în ce mai aproape de graficele funcţiilor în vecinătatea punctelor $-\infty$, respectiv $+\infty$.

⇘ *Definiţie*

> *Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie reală de variabilă reală pentru care $-\infty$, respectiv $+\infty$ sunt puncte de acumulare ale lui D.*
>
> - *Dreapta de ecuaţie $y = a$, $a \in \mathbb{R}$, se numeşte* ***asimptotă orizontală*** *spre $-\infty$ a funcţiei f, dacă $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$.*
> - *Dreapta de ecuaţie $y = a$, $a \in \mathbb{R}$, se numeşte* ***asimptotă orizontală*** *spre $+\infty$ a funcţiei f, dacă $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$.*

OBSERVAŢII

- ✓ Problema asimptotelor orizontale pentru o funcţie f, $f:D \to \mathbb{R}$ se pune numai la $+\infty$ sau $-\infty$ şi numai în cazul în care $+\infty$, respectiv $-\infty$ sunt puncte de acumulare pentru D.
- ✓ Dreapta $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ a funcţiei exponenţiale $f:\mathbb{R} \to (0,+\infty)$, $f(x) = a^x$, $a > 1$.
- ✓ Dreapta $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ a funcţiei exponenţiale $f:\mathbb{R} \to (0,+\infty)$, $f(x) = a^x$, $a \in (0, 1)$.

PROBLEMĂ REZOLVATĂ

Să se determine asimptotele orizontale ale funcţiilor:

a) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$; b) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x|x|}{x^2+1}$;

c) $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

Rezolvare

a) $+\infty$ şi $-\infty$ sunt puncte de acumulare pentru domeniul de definiţie al funcţiei f. Avem:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = 0.$$

Aşadar, dreapta $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ şi spre $-\infty$ a funcţiei f.

b) Şi în acest caz, problema existenţei asimptotelor orizontale, se pune şi la $+\infty$ şi la $-\infty$. Avem:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x|x|}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1;$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x|x|}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{x^2+1} = -1$$

Rezultă că dreapta $y = 1$ este asimptota spre $+\infty$, iar dreapta $y = -1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ a funcţiei f.

c) Problema existenţei asimptotei orizontale se pune numai la $+\infty$. Avem:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}} = 1,$$

deci dreapta $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

Asimptote verticale

Să lecturăm graficele funcţiilor logaritmice $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$.

$$f(x)=\log_a x,\ a>0,\ a\neq 1.$$

redate în fig. 1.58. şi 1.59.

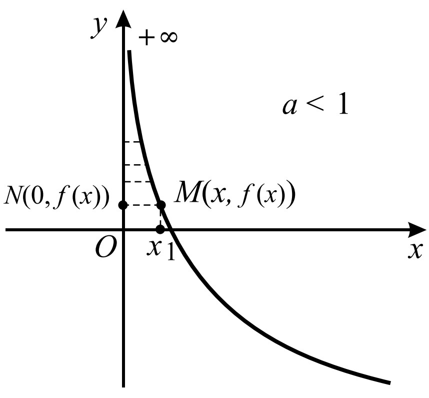


Fig. 1.58.

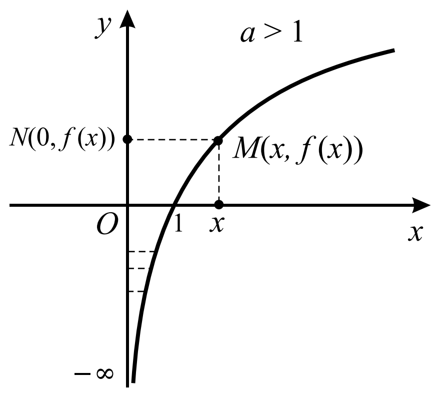


Fig. 1.59.

Se observă că lungimea segmentului $[MN]$, unde $M(x, f(x))$, $N(0, f(x))$ tinde spre zero, când x se apropie de $x_0=0$. Din punct de vedere geometric se observă că graficele sunt din ce în ce mai aproape de dreapta de ecuaţie $x=0$, axa Oy.

De asemenea, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$, când $a<1$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$, pentru $a>1$.

➯ *Definiţii*

Fie $f:D\to\mathbb{R}$ o funcţie reală de variabilă reală şi $x_0\in D'\cap\mathbb{R}$, punct de acumulare pentru D.

- *Dreapta $x=x_0$ se numeşte* ***asimptotă verticală*** *a funcţiei f, dacă cel puţin una dintre limitele laterale $f(x_0-0)$ sau $f(x_0+0)$ există şi este infinită.*
- *Dreapta $x=x_0$ se numeşte* ***asimptotă verticală la stânga*** *a funcţiei f, dacă $f(x_0-0)$ este $+\infty$ sau $-\infty$.*
- *Dreapta $x=x_0$ se numeşte* ***asimptotă verticală la dreapta****, a funcţiei f, dacă $f(x_0+0)$ este $+\infty$ sau $-\infty$.*
- *Dreapta $x=x_0$ se numeşte* ***asimptotă verticală bilaterală*** *a funcţiei f, dacă ambele limite laterale ale funcţiei f în x_0 sunt infinite.*

OBSERVAȚII

- ✓ Funcţia logaritmică $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \log_a x$, are asimptota verticală dreapta de ecuaţie $x = 0$.
- ✓ Există funcţii care au oricâte asimptote verticale.

EXEMPLU

- ➢ Funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{\sin(\pi x)}$ are asimptote verticale dreptele de exucaţie $x = n,\ n \in \mathbb{Z}$.

PROBLEME REZOLVATE

1. *Să se determine asimptotele verticale ale funcţiei $f:D \to \mathbb{R}$:*

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-2)}.$$

Rezolvare.

Domeniul de definiţie este $D = \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$.

• Dacă $x_0 \in D$, atunci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}$, deci dreapta $x = x_0$ nu este asimptotă verticală.

• Dacă $x_0 = 1$, atunci se obţine că:

$$f(1-0) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{0_{(+)}} = +\infty \quad \text{şi}$$

$$f(1+0) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{0_{(-)}} = -\infty$$

Aşadar, dreaptă $x = 1$ este asimptotă verticală bilaterală.

Dacă $x_0 = 2$, se obţine că $f(2-0) = \dfrac{2}{0_{(-)}} = -\infty$ şi $f(2+0) = \dfrac{2}{0_{(+)}} = +\infty$.

Aşadar dreapta $x = 2$ este asimptotă verticală bilaterală.

2. *Se consideră funcţia* $f:\mathbb{R} \setminus \{-1,1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2 + ax - 2a^2}{x^2 - 1},\ a \in \mathbb{R}$.

Să se determine valorile parametrului a pentru care funcţia f are o singură asimptotă verticală.

Rezolvare.

Asimptotele verticale pot fi dreptele de ecuaţie $x = 1$ şi $x = -1$.

Dacă $x = 1$ este asimptotă verticală, trebuie ca $x = -1$ să nu fie asimptotă verticală şi reciproc.

Rezultă că fracţia $\dfrac{x^2+ax-2a^2}{(x-1)(x+1)}$ trebuie să se simplifice fie cu $x+1$, fie cu $x-1$.

Dacă $g(x)=x^2+ax-2a^2$, rezultă că $g(1)=0$ sau $g(-1)=0$. Se obţin ecuaţiile $1+a-2a^2=0$ şi $1-a-2a^2=0$, cu soluţiile $a\in\left\{1,-1,\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right\}$.

Pentru $a=1$ se obţine $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}$, pentru $a=-1$ se obţine $f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$, iar pentru $a\in\left\{-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right\}$ se obţine $f(x)=\dfrac{2x+1}{2(x+1)}$, respectiv $f(x)=\dfrac{2x-1}{2(x-1)}$.

Se observă uşor că fiecare din funcţiile obţinute au o singură asimptotă verticală.

Asimptote oblice

Fie $f:D\to\mathbb{R}$, o funcţie reală de variabilă reală astfel încât $+\infty$ şi $-\infty$ să fie puncte de acumulare pentru D.

Dacă $y=mx+n$ este o dreaptă oarecare, $m\in\mathbb{R}^*$, fie $A(x,f(x))\in\mathcal{G}_f$ şi $B(x,mx+n)$ punct situat pe dreapta $y=mx+n$ (fig. 1.60 şi 1.61).

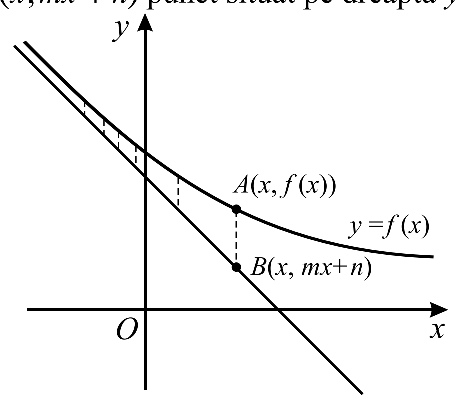


Fig. 1.60.

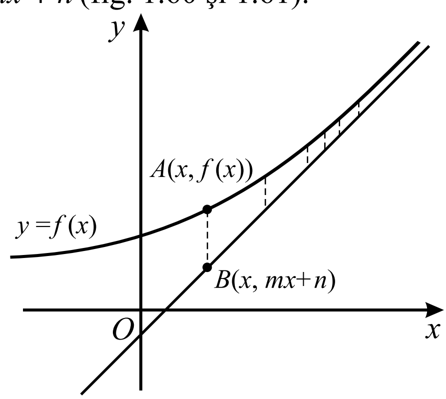


Fig. 1.61.

Lungimea segmentului $[AB]$ este $\ell(x)=|f(x)-mx-n|$. Dacă dreapta $(d):y=mx+n$ este asimptota graficului funcţiei f, atunci $\lim\limits_{x\to-\infty}\ell(x)=0$, respectiv $\lim\limits_{x\to+\infty}\ell(x)=0$.

➪ *Definiţie*

*Dreapta $y=mx+n$, $m\in\mathbb{R}^*$, se numeşte **asimptotă oblică** spre $-\infty$, respectiv $+\infty$ a funcţiei f, dacă distanţa dintre dreaptă şi imaginea geometrică a graficului, măsurată pe verticală, tinde la zero, când x tinde la $+\infty$, respectiv $-\infty$.*

Având în vedere că $\ell(x) = |f(x) - mx - n|$ obţinem că $y = mx + n$ este asimptotă oblică la $+\infty$ dacă $\lim\limits_{x\to\infty} |f(x) - mx - n| = 0$, ceea ce conduce la $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - mx - n\right) = 0$. Din această egalitate se obţine că

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{f(x)}{x} - m\right) = n \in \mathbb{R}.$$

Deoarece $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, obţinem că este necesar ca $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x} - m\right) = 0$, altfel limita ar fi infinită. Aşadar, dreapta $y = mx + n$ este asimptotă oblică la $+\infty$, dacă $m = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, iar $n = \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right)$.

În mod analog, se obţin condiţiile ca $y = mx + n$ să fie asimptotă oblică la $-\infty$.

REŢINEM!

- Dacă dreapta $d: y = mx + n$ este asimptotă oblică la $+\infty$ pentru funcţia $f: D \to \mathbb{R}$, atunci $m = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $n = \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right)$ şi reciproc.
- Un rezultat analog are loc pentru $-\infty$.

PROBLEMĂ REZOLVATĂ

Să se determine asimptotele oblice ale funcţiilor $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$; b) $f(x) = xe^{-x}$; c) $f(x) = \dfrac{x|x|}{x+1}$.

Rezolvare.

a) Avem: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x(x-1)} = 1$, iar

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x) - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1} = 1.$$

Aşadar, cele două limite există şi $m = 1$, $n = 1$, deci dreapta $y = x + 1$ este asimptotă oblică la $+\infty$.

Analog, se obţine că $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 1$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - x) = 1$, deci dreapta $y = x + 1$ este asimptotă oblică la $-\infty$.

b) Avem: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{e^{x}}=\dfrac{1}{+\infty}=0.$

Aşadar, f nu are asimptotă oblică la $+\infty$.

Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{xe^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=e^{\infty}=\infty$ funcţia nu are asimptotă oblică la $-\infty$.

c) Domeniul de definiţie este $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ şi avem:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x^2}{x+1}, & x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0]\\[2mm] \dfrac{x^2}{x+1}, & x\in(0,+\infty)\end{cases}$$

Rezultă că:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x+1}=-1=m\in\mathbb{R}^*$$

şi

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)=1=n.$$

Dreapta de ecuaţie $y=-x+1$ este asimptotă oblică la $-\infty$.

Pentru cazul $x_0=+\infty$ obţinem:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=1=m\in\mathbb{R}^*$$

şi

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x}{x+1}\right)=-1=n.$$

Dreapta de ecuaţie $y=x-1$ este asimptotă oblică la $+\infty$.

OBSERVAŢII

- ✓ O funcţie f poate avea asimptote oblice diferite la $+\infty$ şi la $-\infty$.
- ✓ Dacă o funcţie f are asimptotă orizontală la $+\infty$ sau la $-\infty$, atunci ea nu poate avea şi asimptotă oblică la $+\infty$, respectiv $-\infty$.

Exerciţii şi probleme

Exersare

E1. Să se determine asimptotele orizontale ale funcţiilor $f: D \to \mathbb{R}$, în cazurile:

a) $f(x)=\frac{1}{x}$; b) $f(x)=\frac{1}{x-3}$; c) $f(x)=\frac{x}{4-x}$;

d) $f(x)=\frac{3x}{2x-1}$; e) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$; f) $f(x)=\frac{2x}{3x+5}$;

g) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{2x+1}$; h) $f(x)=\frac{3x^2-1}{2x^2+x+1}$; i) $f(x)=\frac{x|x|}{x^2+x+1}$.

E2. Să se determine asimptotele verticale ale funcţiilor $f: D \to \mathbb{R}$, în cazurile:

a) $f(x)=\frac{1}{x-1}$; b) $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$; c) $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$;

d) $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-4}$; e) $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2-3x+2}$; f) $f(x)=\ln(x+1)$;

g) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$; h) $f(x)=\frac{2}{2^x-1}$.

E3. Să se determine asimptotele oblice ale funcţiilor $f: D \to \mathbb{R}$, în cazurile:

a) $f(x)=\frac{x^2}{x-2}$; b) $f(x)=\frac{2x^2+x}{x-1}$; c) $f(x)=\frac{1-x^2}{2+x}$;

d) $f(x)=\frac{x^2+2|x|}{x-1}$; e) $f(x)=\frac{x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$; f) $f(x)=\frac{x^2-2|x|}{2x-1}$.

Sinteză

S1. Să se determine asimptotele funcţiilor $f: D \to \mathbb{R}$, în cazurile:

a) $f(x)=\frac{x}{(x-1)(x-3)}$; b) $f(x)=\frac{x|x|}{x^2-1}$; c) $f(x)=\frac{x^2}{(x-1)(x-5)}$;

d) $f(x)=\sqrt{\frac{1+x}{x-1}}$; e) $f(x)=\frac{x^2}{|x^2-1|}$; f) $f(x)=\frac{x^2}{|x-1|}$;

g) $f(x)=\frac{x^2}{x^2-|x|}$; h) $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$.

S2. Să se determine asimptotele funcţiilor $f:D\to\mathbb{R}$, în cazurile:

a) $f(x)=x\cdot 2^{\frac{1}{x}}$; b) $f(x)=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$;

c) $f(x)=(x-1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$; d) $f(x)=\sqrt{\frac{x^3+1}{x-1}}$.

S3. Să se determine parametri reali pentru care funcţia $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-ax+a+1}$ are o singură asimptotă verticală.

S4. Să se determine parametrii reali pentru care funcţia $f:D\to\mathbb{R}$, admite asimptota indicată:

a) $f(x)=\frac{ax^2+2a+bx}{x-1}$, $y=a^2x+2$;

b) $f(x)=\frac{(x+a)(x+a+1)}{x+a+2}$, $y=x-a+3$.

Teste de evaluare

Testul 1

1. Dacă $\ell_1=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$, $\ell_2=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x^2-3}$, atunci $\ell_1+\ell_2$ este egal cu:

a) 1; b) 3; c) $+\infty$; d) $-\infty$

2. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-5x+4)}{\sin(x-1)}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x}}{2x+1}$.

3. Fie $f:\mathbb{R}^{*}\quad\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+ax+3}{x}$. Dacă dreapta $y=bx+2$ este asimptotă a funcţiei *f*, atunci

a) $a+b=3$; b) $a\cdot b=3$; c) $2a+b=3$; d) $a^2+b^2=3$.

Testul 2

1. Să se calculeze limitele de funcţii:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arcsin x}{\sin x\; arctg\, x}$; b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{3x-1}$.

2. Dacă $l_1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-a^x}{x}=1$, atunci:

a) $a=2$; b) $a=4$; c) $a=3\cdot e^{-1}$; d) $a=1$.

3. Funcţia $f:D\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{ax^2+1}{x^2+2bx+1}$ are o singură asimptotă dacă:

a) $a=b=0$; b) $a=b=1$; c) $a\in\mathbb{R}, b\in(-1,1)$; d) $b\in\mathbb{R}$, $a=7$.

Testul 3

1. Să se calculeze: a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-4x-4}{x^2-4}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2^x-3^x)^2}{x\sin x}$.

2. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=4$.

3. Să se determine valorile parametrului real a ştiind că dreapta $y=ax+a+1$ este asimptotă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+a^2}$

4. Să se studieze dacă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea că $2f(x)+3f(-x)=x^2-1$, $\forall x\in\mathbb{R}$, are limită în oricare punct $x_0\in\mathbb{R}$.

Testul 4

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^3+a^3, x\le a\\ x+1, \quad x>a\end{cases}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care funcţia f are limită în oricare $x_0\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2+ax+3, x\le 1\\ \dfrac{3x+b}{x^2+2}, \quad x>1\end{cases}$. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât f să aibă limită în $x=1$ şi să existe $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

3. Fie $f:D\to\mathbb{R}, f(x)=ax+\sqrt{bx^2+cx-1}$, $a,b\in(0,+\infty), c\in\mathbb{R}$. Să se determine parametrii a, b, c astfel încât dreapta $y=2x+1$ să fie asimptotă oblică spre $+\infty$, iar $y=-1$ să fie asimptotă spre $-\infty$.

Capitolul 2

Funcţii continue

Fie $f : D \to \mathbb{R}$, o funcţie reală de variabilă reală şi $x_0 \in D'$ un punct de acumulare pentru mulţimea D.

În calculul limitei funcţiei f în punctul x_0 s-a avut în vedere studiul comportării valorilor funcţiei f în vecinătatea punctului x_0, dar fără a avea în vedere valoarea funcţiei în x_0.

De asemenea, în calculul limitelor de funcţii s-a observat că pentru funcţiile elementare studiate $f : D \to \mathbb{R}$, limita acestora în punctele de acumulare $x_0 \in D$ este egală cu valoarea funcţiei în x_0, adică $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2.1. Funcţii continue într-un punct

2.1.1 Problema continuităţii unei funcţii într-un punct

Să considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \le -1 \\ x+1, & x \in (-1,2) \\ 1, & x = 2 \\ 2x-1, & x \in (2,+\infty) \end{cases}$$

al cărei grafic este reprezentat în fig. 2.1.

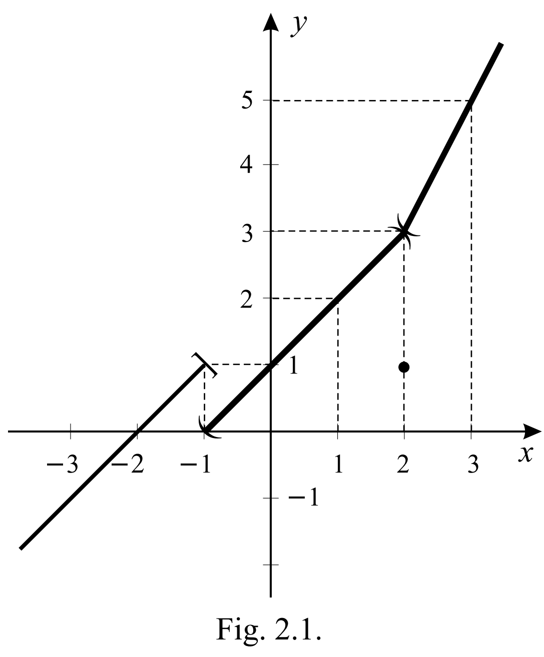


Fig. 2.1.

Lecturând imaginea geometrică a graficului funcţiei f constatăm că există două *întreruperi* ale acestuia, şi anume în $x_0 = -1$ şi în $x_0 = 2$.

Să studiem ce se întâmplă cu limitele funcţiei f în aceste puncte de întrerupere şi într-un punct oarecare $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$, în care graficul nu prezintă întrerupere.

Avem: $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x) = \lim\limits_{x\to -1}(x+2) = 1$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = \lim\limits_{x\to -1}(x+1) = 0.$

De asemenea, avem că $f(-1) = 1.$

Aşadar, în punctul $x_0 = -1$ funcţia *f* nu are limită. Pentru $x_0 = 2$ se obţine:

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = \lim_{x\to 2}(x+1) = 3 \text{ şi } \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \lim_{x\to 2}(2x-1) = 3, \text{ iar } f(2) = 1.$$

În acest caz, funcţia *f* are limită în $x_0 = 2$, dar limita nu este egală cu valoarea funcţiei în $x_0 = 2.$

Dacă $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ se obţine că $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$

Aşadar,

- într-un punct de *întrerupere* al graficului, funcţia *f* nu are limită sau dacă aceasta limită există ea nu este egală cu valoarea funcţiei în acest punct;
- în punctele în care graficul funcţiei *f* nu se întrerupe, deci are imaginea de curbă continuă, limita funcţiei *f* există şi este egală cu valoarea funcţiei în acest punct.

Aceste observaţii sugerează introducerea următoarei noţiuni:

➯ *Definiţie.*

*Fie $f: D \to \mathbb{R}$ o funcţie reală de variabilă reală şi $x_0 \in D$ un punct de acumulare pentru D. Funcţia f se numeşte **funcţie continuă în punctul $x_0 \in D$ dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.***

➯ *Definiţii.*

Fie $f: D \to \mathbb{R}$ o funcţie reală de variabilă reală şi $x_0 \in D$.

- *Funcţia f se numeşte **discontinuă în punctul $x_0 \in D$ dacă nu este continuă în** x_0.*
- *Punctul $x_0 \in D$ se numeşte **punct de discontinuitate al funcţiei f, dacă funcţia f nu este continuă în x_0.***
- *Punctul de discontinuitate $x_0 \in D$ se numeşte de **speţa întâi**, dacă limitele laterale ale funcţiei în x_0 există şi sunt finite.*
- *Punctul de discontinuitate $x_0 \in D$ se numeşte de **speţa a doua,** dacă cel puţin o limită laterală a funcţiei f în x_0 nu există sau este infinită.*

EXEMPLE

- Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$ are $x_0=0$ punct de discontinuitate de primă speţă deoarece $f(0-0)=0,\ f(0+0)=1, f(0)=0.$
- Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$ are $x_0=0$ punct de discontinuitate de speţa a doua deoarece $f(0-0)=1,\ f(0+0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{1}{x}=+\infty.$

OBSERVAŢII

- ✓ Revenind la funcţia *f* studiată anterior, rezultă că ea este continuă în oricare punct $x_0\in\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$ şi discontinuă în punctele $x_0=-1$ şi $x_0=2.$
- ✓ Într-un punct izolat al domeniului de definiţie al funcţiei $f:D\to\mathbb{R}$, această funcţie se consideră funcţie continuă.
- ✓ Egalitatea $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ din definiţia continuităţii presupune:

  i) existenţa limitei funcţiei în x_0;
  ii) egalitatea acestei limite cu valoarea funcţiei în x_0.
- ✓ Funcţia $f:D\to\mathbb{R}$ este discontinuă în punctul de acumulare $x_0\in D$, dacă nu are loc egalitatea $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Acest fapt presupune una din situaţiile:

  i) limita fincţiei *f* nu există în x_0;
  ii) limita funcţiei *f* exista în x_0, dar nu este egală cu valoarea funcţiei în x_0.

✎ *DEFINIŢIE.*

O funcţie $f:D\to\mathbb{R}$ este ***continuă pe mulţimea $A\subset D$*** *dacă este continuă în oricare punct $x_0\in A$. Mulţimea pe care o funcţie este continuă se numeşte* ***domeniu de continuitate*** *al funcţiei şi se va nota D_c.*

OBSERVAŢIE

- ✓ Având în vedere rezultatul obţinut în capitolul *Limite de funcţii*, că dacă $f:D\to\mathbb{R}$ este funcţie elementară şi $x_0\in D$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, rezultă că funcţiile elementare sunt continue pe întreg domeniul de definiţie.

REȚINEM!

> ➢ Funcţiile polinomiale, radical, putere, exponenţiale, logaritmice, trigonometrice, raţionale sunt funcţii continue pe domeniul de definiţie.

PROBLEME REZOLVATE

✓ *Să se studieze continuitatea funcţiei* $f:D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\begin{cases}2x-1, x\le 1\\ x^2, \quad x>1\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases}x^2-1, x\le 0\\ \ln x, \quad x>0\end{cases}$; c) $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+1, x\le 1\\ 2x+a^2, \quad x>1\end{cases}$.

Rezolvare.

a) Funcţia este continuă pentru orice $x_0\in(-\infty,1)$, respectiv $x_0\in(1,+\infty)$, deoarece este restricţie a unei funcţii de gradul 1, respectiv de gradul 2 la aceste intervale.

Studiem continuitatea funcţiei în $x_0=1$. Rezultă:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim_{x\to 1}(2x-1)=1;\qquad \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim_{x\to 1}x^2=1,\ f(1)=1.$$

Aşadar, limita funcţiei *f* în $x_0=1$ există şi este egală cu valoarea funcţiei în $x_0=1$, deci funcţia *f* este continuă în $x_0=1$.

În concluzie, funcţia *f* este continuă pe $\mathbb{R}$.

b) Funcţia *f* este continuă pe $(-\infty,0)$, fiind restricţie de funcţie de gradul 2 pe acest interval şi este continuă pe $(0,+\infty)$ fiind funcţie logaritmică pe acest interval.

Problema continuităţii se pune în $x_0=0$. Avem:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim_{x\to 0}(x^2-1)=-1 \quad \text{şi} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln x=-\infty.$$

Aşadar, funcţia *f* nu are limită în $x_0=0$ şi astfel nu este continuă în $x_0=0$. Domeniul de continuitate al funcţiei *f* este $D_c=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

c) Pe intervalele $(-\infty,1)$ şi $(1,+\infty)$ funcţia *f* este continuă fiind restricţia unor funcţii de gradul 2 şi gradul 1 pe aceste intervale.

Studiem continuitatea funcţiei *f* în $x_0=1$. Avem:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim_{x\to 1}(x^2+ax+1)=2+a,$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(2x+a^2)=2+a^2 \text{ şi } f(1)=a+2.$$

Funcţia f este continuă în $x_0 = 1$ dacă şi numai dacă $2 + a = 2 + a^2$, deci dacă $a \in \{0,1\}$.

În concluzie:

- pentru $a \in \{0,1\}$ domeniul de continuitate al funcţiei f este $D_c = \mathbb{R}$;
- pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ domeniul de continuitate al funcţiei f este $D_c = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Exerciţii şi probleme

Exersare

E1. Să se studieze continuitatea funcţiei $f : D \to \mathbb{R}$ în punctele specificate:

a) $f(x) = x^2 - 7x,\ x_0 \in \{-1, 0, 1\}$; b) $f(x) = x + 2|x|,\ x_0 \in \{-1, 0, 2\}$;

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1},\ x_0 \in \{-2, 1\}$; c) $f(x) = x - \sqrt{x},\ x_0 \in \{0, 4\}$.

E2. Să se studieze continuitatea funcţiilor în punctele specificate:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ 2x - 1, & x > 1 \end{cases},\ x_0 = 1$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x < 0 \\ x + 1, & x \ge 0 \end{cases},\ x_0 = 0$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & x \le 0 \\ \dfrac{\arcsin x}{x}, & x \in (0,1), \\ \ln x, & x \ge 1 \end{cases}\ x_0 \in \{0, 1\}$,

d) $f : \{-1\} \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 3, & x = -1 \\ 3 + x, & x \in (0,1), \\ \dfrac{x+3}{2x-1}, & x \ge 1 \end{cases}\ x_0 \in \{-1, 1\}$.

E3. Să se studieze natura punctelor de discontinuitate pentru funcţia $f : D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2, & x \le 1 \\ 2x - 1, & x > 1 \end{cases}$; b) $f(x) = \begin{cases} 2^x - 2, & x \le 0 \\ 3^x - 2^x, & x > 0 \end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x-1}, & x<1\\ 3x-1, & x\geq 1\end{cases}$; d) $f(x)=\begin{cases}\ln x, & x>0\\ 2, & x=0\\ \dfrac{1}{x}, & x<0\end{cases}$.

E4. Să se studieze continuitatea funcţiei $f:D\to\mathbb{R}$, în funcţie de parametrii reali:

a) $f(x)=\begin{cases}x+a, & x\leq 1\\ x^2+x+1, & x>1\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases}2^x+2^a, & x\leq 0\\ ax+3, & x>0\end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(ax)}{2x}, & x<0\\ 2a^2, & x=0\\ 5x+2a, & x>0\end{cases}$; d) $f(x)=\begin{cases}2ax+1, & x\leq 0\\ x+a, & x\in(0,1)\\ 3x+b, & x\geq 1\end{cases}$.

Sinteză

S1. Să se studieze continuitatea funcţiei $f:D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(ax+x^2)}{x}, & x<0\\ \ln(x+e^3), & x\geq 0\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{6x^2+4a^2+4ax}, & x\leq 1\\ x^2+4a, & x>1\end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases}2a+\dfrac{\arcsin x}{x}, & x\in[-1,0)\\ \dfrac{\ln(1+ax)}{x}, & x>0\\ -1+\sin a\pi, & x=0\end{cases}$; d) $f(x)=\begin{cases}2^x+a, & x\leq a\\ 3^x+a, & x>a\end{cases}$.

S2. Să se determine constantele reale pentru care funcţia $f:D\to\mathbb{R}$ este continuă, în cazurile:

a) $f(x)=\begin{cases}9^{ax}-4\cdot 3^{ax+1}+12, & x\leq 1\\ a-ax-15x^2, & x>1\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases}3^{bx}+2x, & x\leq 2a-1\\ 9x-4^{bx}, & x\geq a^2\end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases}2^{ax}\cdot 3^{bx}, & x<1\\ 12, & x=1\\ 3^{ax-1}\cdot 2^{1+bx}, & x>1\end{cases}$; d) $f(x)=\begin{cases}2^{ax}+3^{bx}, & x<1\\ x^2-3x+7, & x\in[1,2]\\ 2^{ax}+3^{bx}-8, & x>2\end{cases}$.

S3. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia $f: D \to \mathbb{R}$ este continuă şi are loc condiţia data:

a) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - x, & x < 1 \\ ax^2 + bx + 3, & x \geq 1 \end{cases}$ şi $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ există;

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1 + \sin^2 x)}{x}, & x < 0 \\ ax + b, & x \geq 0 \end{cases}$ şi există $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

2.2. Operaţii cu funcţii continue

Fie $f, g: D \to \mathbb{R}$ două funcţii reale de variabilă reală şi $x_0 \in D$. Folosind operaţiile cu limite de funcţii se obţine următorul rezultat pentru funcţii continue:

TEOREMA 1

Dacă funcţii $f, g: D \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue în punctul $x_0 \in D$, atunci:

a) funcţia $f + g$ este continuă în punctul x_0;

b) funcţia $f - g$ este continuă în punctul x_0;

c) funcţia $f \cdot g$ este continuă în punctul x_0;

d) funcţia $\frac{f}{g}$ este cotinuă în punctul x_0, dacă $g(x_0) \neq 0$;

e) funcţia f^g este continuă în punctul x_0, dacă operaţiile f^g şi $(f(x_0))^{g(x_0)}$ au sens în $\mathbb{R}$.

OBSERVAŢII

✓ Proprietăţile a), b), c) se pot extinde sub forma:

- dacă *f, g* sunt continue în $x_0 \in D$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci funcţia $\alpha f + \beta g$ este continuă în $x_0 \in D$.

✓ Dacă funcţiile $f_1, f_2, ..., f_n: D \to \mathbb{R}$ sunt continue în $x_0 \in D$, atunci:

- funcţia sumă $f_1 + f_2 + ... + f_n$ este continuă în $x_0 \in D$;
- funcţia produs $f_1 \cdot f_2 \cdot ... \cdot f_n$ este continuă în $x_0 \in D$.

✓ Dacă funcţiile $f, g: D \to \mathbb{R}$ sunt continue pe mulţimea $A \subset D$, atunci şi funcţiile $f + g, f - g, f \cdot g, \frac{f}{g}$ sunt continue pe mulţimea A.

Teorema 1 ne arată faptul următor: efectuând operaţiile elementare cu funcţii continue se obţine ca rezultat funcţii continue. În cazul în care se operează cu funcţii care nu sunt continue nu se poate afirma nimic despre continuitatea rezultatului.

EXEMPLE

1. Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}-2, x\le 0\\ 2, \quad x>0\end{cases}$; $g(x)=\begin{cases}1, \quad x\le 0\\ -2, x>0\end{cases}$, funcţii discontinue în $x_0=0$.

Se obţine că $(f+g)(x)=\begin{cases}-1, x\le 0\\ 0, \quad x>0\end{cases}$; $(f-g)(x)=\begin{cases}-3, x\le 0\\ 4, \quad x>0\end{cases}$;

$(f\cdot g)(x)=\begin{cases}-2, x\le 0\\ -4, x>0\end{cases}$; $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\begin{cases}-2, x\le 0\\ -1, x>0\end{cases}$

şi $f\pm g,\ f\cdot g,\ \dfrac{f}{g}$ sunt funcţii discontinue în punctul $x_0=0$.

2. Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}-1, x\le 0\\ 1, \quad x>0\end{cases}$; $g(x)=\begin{cases}1, \quad x\le 0\\ -1, x>0\end{cases}$, funcţii discontinue în $x_0=0$.

Se obţine că $(f+g)(x)=0$, $(f\cdot g)(x)=-1$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=-1, x\in\mathbb{R}$, deci funcţiile $f+g, f\cdot g, \dfrac{f}{g}$ sunt continue în $x_0=0$.

Având în vedere calculul cu limite de funcţii compuse se obţine:

TEOREMA 2
(continuitatea funcţiilor compuse).

> *Fie $f:D\to\mathbb{R}$, $u:A\to D$ funcţii reale de argument real şi $h:A\to\mathbb{R}$, $h(x)=(f\circ u)(x)$ funcţia compusă. Dacă funcţia u este continuă în $x_0\in A$ şi funcţia f este continuă în punctul $u_0=u(x_0)$, atunci funcţia h este continuă în punctul $x_0\in A$.*

OBSERVAŢII

- ✓ Dacă funcţia u este continuă pe A şi f continuă pe D, atunci funcţia compusă $h=f\circ u$ este continuă pe A.
- ✓ Dacă una din funcţiile f sau u, sau amândouă nu sunt continue, nu se poate afirma nimic despre continuitatea funcţiei compuse.

TEMĂ

Studiaţi cazul funcţiilor:

a) $f,u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x,\quad u(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Q}\\ x+1, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$;

b) $f,u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Q}\\ x+1, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases},\ u(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Q}\\ x-1, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$.

Exerciţii şi probleme

Exersare

E1. Să se studieze continuitatea funcţiilor $f,g:D\to\mathbb{R}$ şi a funcţiilor $f+g$, $f-g, f\cdot g, \dfrac{f}{g}$, în cazurile:

a) $f(x)=x-1,\ g(x)=x+1$; b) $f(x)=x^2-1,\ g(x)=3x-x^2$;

c) $f(x)=2^x,\ g(x)=x$; d) $f(x)=\ln x;\ g(x)=\ln\dfrac{1}{x}$;

e) $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\le 0\\ x+1, & x>0\end{cases},\quad g(x)=x-1$;

f) $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\le 0\\ x-1, & x>0\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}1-x, & x\le 0\\ x+1, & x>0\end{cases}$.

E2. Să se studieze continuitatea funcţiilor compuse $f\circ g$ şi $g\circ f$ în cazul funcţiilor $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

a) $f(x)=x-1, g(x)=2x-3$; b) $f(x)=x^2+1,\ g(x)=x-1$;

c) $f(x)=\sqrt{x^2+1},\ g(x)=x-1$; d) $f(x)=\ln(x^2+1),\ g(x)=2x-1$.

Sinteză

S1. Se dau funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x+a, & x\le 0\\ x^2+1, & x>0\end{cases}, g(x)=\begin{cases}2ax, & x\le 0\\ x-x^2, & x>0\end{cases}$.

Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care funcţia $f+g$ este continuă pe $\mathbb{R}$.

S2. Să se studieze continuitatea funcţiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ şi f^2 în cazurile:

a) $f(x)=\begin{cases}-1, & x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases}x, & x\le 1\\ -1, & x>1\end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases}x+a, & x\le 1\\ 2x+1, & x>1\end{cases}$; d) $f(x)=\begin{cases}2x+a, & x\le 2\\ x+a, & x>2\end{cases}$.

S3. Să se studieze continuitatea funcţiei $f\circ g$ în cazurile:

a) $f(x)=2x-4,\ g(x)=\operatorname{sgn}(x), x\in\mathbb{R}$

b) $f(x)=3x-6,\ g(x)=|x-1|,\ x\in\mathbb{R}$;

c) $f(x)=\begin{cases}1, & x\le 1\\ 2, & x>1\end{cases}, g(x)=2x-1, \in\mathbb{R}$;

d) $f(x)=\begin{cases}1-x, & x\le 1\\ 0, & x>1\end{cases}, g(x)=\begin{cases}a^2, & x\le 1\\ x, & x>1\end{cases}$.

S4. Să se studieze continuitatea funcţiilor $f\circ g,\ g\circ f$ în cazurile:

a) $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\le 0\\ x+1, & x>0\end{cases}, g(x)=\begin{cases}\ln x, & x>1\\ x, & x\le 1\end{cases}$;

b) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\ge 0\\ \sqrt[3]{x}, & x<0\end{cases}, g(x)=\begin{cases}x^2, & x\ge 0\\ 1+x^3, & x<0\end{cases}$.

2.3. Semnul unei funcţii continue pe un interval

Fie $I\subset\mathbb{R}$ un interval şi $f:I\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă. Imaginea geometrică a graficului funcţiei f pe intervalul I este o curbă care nu are întreruperi (fig. 2.2).

Lecturând graficul din fig. 2.2 se poate observa că dacă $a,b\in I, a<b$ şi λ este un număr între $f(a)$ şi $f(b)$, dreapta de ecuaţie $y=\lambda$ intersectează graficul funcţiei f într-un punct $M(\alpha,\lambda)$. Aşadar, pentru orice valoare intermediară λ dintre $f(a)$ şi $f(b)$, există $\alpha\in[a,b]$ astfel încât $f(\alpha)=\lambda$.

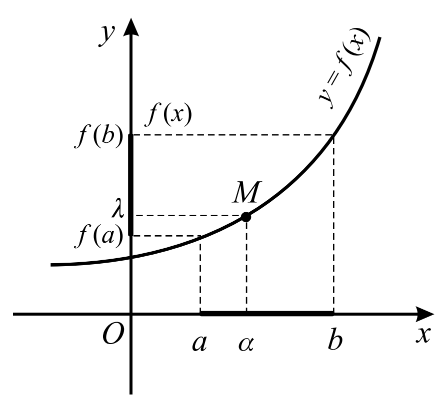


Fig. 2.2.

✎ DEFINIŢIE

Funcţia $f:I\to\mathbb{R}$ are ***proprietatea lui Darboux***[1] ***pe intervalul*** *I dacă oricare ar fi $a,b\in I, a<b$ şi oricare ar fi λ cuprins între valorile $f(a)$ şi $f(b)$, există un punct $c\in(a,b)$ astfel înct $f(c)=\lambda$.*

Legătura între funcţiile continue şi funcţiile care au proprietatea lui Darboux este dată de următoarea teoremă:

✎ TEOREMA 3

Orice funcţie continuă pe un interval are proprietatea lui Darboux pe acel interval.

EXERCIŢIU REZOLVAT

Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2+3x, & x\le 1\\ 5-x, & x>1\end{cases}$ are proprietatea lui Darboux pe oricare interval $I\subset\mathbb{R}$.

Rezolvare.

Pe intervalele $(-\infty,1)$ şi $(1,\infty)$ funcţia *f* este restricţia unei funcţii polinomiale de gradul 2, respectiv gradul 1. Rezultă că *f* este continuă pe aceste intervale.

Deoarece $f(1-0)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(x^2+3x)=4$, $f(1+0)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(5-x)=4$ şi $f(1)=4$, funcţia *f* este continuă şi în $x=1$. Aşadar, funcţia *f* este continuă pe $\mathbb{R}$ şi, din teorema 3, ea are proprietatea lui Darboux pe orice interval $I\subset\mathbb{R}$.

OBSERVAŢII

- ✓ Dacă o funcţie $f:D\to\mathbb{R}$ este discontinuă pe un interval $I\subset D$, nu rezultă că *f* nu are proprietatea lui Darboux.
- ✓ Dacă funcţia $f:D\to\mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux pe intervalul $I\subset D$, atunci ea poate avea numai discontinuităţi de speţa a doua pe *I*.
- ✓ O funcţie $f:D\to\mathbb{R}$, care are discontinuităţi de speţa întâi pe un interval $I\subset D$ nu are proprietatea lui Darboux pe acest inteval.
- ✓ Dacă $f:D\to\mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux pe intervalul $I\subset D$, atunci în mod necesar, mulţimea $f(I)=\{f(x)\,|\,x\in I\}$ este tot interval.
- ✓ O funcţie neconstatnă $f:D\to\mathbb{R}$ care are un număr finit de valori nu are proprietatea lui Darboux pe intervalul *I*.

---

[1] Jean-Gaston **Darboux** (1842 -1917) - matematician francez. A fost profesor în domeniile geometriei, mecanicii, teoriei ecuaţiilor diferenţiale, analizei matematice.

Consecinţe ale proprietăţii lui Darboux

Consecinţa 1.

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *o funcţie continuă pe* $[a,b]$.

Dacă $f(a)\cdot f(b)<0$, *atunci există* $c\in(a,b)$ *astfel încât* $f(c)=0$.

Consecinţa 2.

Fie $f:I\to\mathbb{R}$ *o funcţie continuă pe I. Dacă f nu se anulează pe intervalul I atunci funcţia f are acelaşi semn pe I.*

Într-adevăr, dacă *f* nu ar avea acelaşi semn pe *I*, atunci ar exista $a,b\in I$ astfel încât $f(a)\cdot f(b)<0$. Aplicând consecinţa 1, există $c\in(a,b)$ astfel încât $f(c)=0$, ceea ce contrazice ipoteza.Aşadar, *f* păstrează acelaşi semn pe tot intervalul.

Aceste consecinţe permit ca pentru o funcţie continuă să se poată stabili semnul pe un interval pe care ea nu se anulează cunoscând semnul funcţiei într-un punct al intervalului.

EXERCIŢIU REZOLVAT

Să se stabilească semnul funcţiei $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-3)\ln(x-1)$.

Rezolvare.

Ecuaţia $f(x)=0$ are soluţiile $x_1=2$, $x_2=3$. Deoarece *f* este continuă pe $(1,\infty)$ şi nu se anulează pe intervalele $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,\infty)$, ea are semn constant pe fiecare din aceste intervale. Pentru determinarea semnului funcţiei pe fiecare interval stabilim semnul unor valori particulare ale funcţiei.

Astfel, $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\ln 2>0$; $f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}<0$ şi $f(4)=\ln 3>0$.

Rezultă următorul tabel de semn:

x	1 2 3 ∞
$f(x)=(x-3)\ln(x-1)$	+ + + + + + 0 − − − − − − − 0 + + + + + + +

În concluzie:

- $f(x)>0$ pentru $x\in(1,2)\cup(3,\infty)$;
- $f(x)<0$ pentru $x\in(2,3)$.

Exerciţii şi probleme

Exersare

E1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x+1$. Să se arate că f are proprietatea lui Darboux pe intervalele $I_1=(-2,2)$ şi $I_2=[0,3]$. Există intervale pe care f nu are proprietatea lui Darboux?

E2. Să se stabilească dacă funcţia $f:D\to\mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux pe intervalul dat:

a) $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \sin x, & x>0 \end{cases}$, $I=[-1,1]$;

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x\in(-1,0) \\ x+\cos x, & x\in[0,+\infty) \end{cases}$, $I=(-1,2]$;

c) $f(x)=\begin{cases} \arcsin x, & x\in[-1,0] \\ x+3^x, & x\in(0,+\infty) \end{cases}$, $I=\left[-\dfrac{1}{2},2\right]$.

E3. Să se stabilească semnul funcţiei $f:D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=x^3-x$; b) $f(x)=2^x-1$;

c) $f(x)=3^{x+1}-9$; d) $f(x)=\sin x$, $x\in[0,2\pi]$.

Sinteză

S1. Să se arate că funcţiile $f:D\to\mathbb{R}$, au proprietatea lui Darboux pe oricare interval din domeniul de definiţie:

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x^2}, & x>1 \\ 0{,}25, & x=1 \\ \dfrac{\sin(4x-4)}{8x^2-8}, & x\in(0,1) \end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases} x^2+5x-6, & x\le 1 \\ \dfrac{\sqrt{x-1}\sin(x-1)}{3(x^2-1)}, & x>1 \end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases} 0, & x=2 \\ \left(1+3^{\frac{1}{x-2}}\right)^{-1}, & x>2 \end{cases}$; d) $f(x)=\begin{cases} 0, & x\in\mathbb{Z} \\ \sin(\pi x), & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} \end{cases}$.

S2. Folosind consecinţa 1 a proprietăţii lui Darboux, să se arate că următoarele ecuaţiile au cel puţin o soluţie pe intervalul dat:

a) $x^3+4x^2-5=0,\ I=[0,2]$; b) $x^3+5x-27=0,\ I=[0,3]$;

c) $x+2^x-2=0,\ I=[0,1]$; d) $x+1+\sin x=0,\ I=\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$;

e) $x+\ln x=0,\ I=(0,1)$.

S3. Să se stabilească semnul funcţiei $f:D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=x(2^x-1)$; b) $f(x)=(x-1)(3^x-2^x)$;

c) $f(x)=(3^x-1)\log_2(x+2)$; d) $f(x)=\dfrac{2^x-1}{x-2}$;

e) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-3}$; f) $f(x)=(x^3-x)(x^4-16)$.

S4. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $(2^x-1)(x^2-1)\geq 0$; b) $(x-x^3)(1-\sqrt{x+1})\leq 0$;

c) $\left(x-1+\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x}-1\right)\leq 0$; d) $(2^x-3^x)\left(2-\log_2(x+1)\right)\leq 0$.

S5. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+e^x$.

a) Să se arate că funcţia f este strict monotonă pe $\mathbb{R}$.

b) Folosind proprietatea lui Darboux, să se arate că funcţia f este surjectivă.

Teste de evaluare

Testul 1

1. Să se studieze continuittea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}, & x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}\\ 1, & x\in\{-1,0,1\}\end{cases}.$$

2. Să se determine parametrul real pentru care funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}x+2^{ax}, & x\leq 1\\ 4^{ax}-1, & x>1\end{cases}$$

este continuă pe $\mathbb{R}$.

3. Să se stabilească semnul funcţiei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\left(2^{x-1}-1\right)(3^{x-1}-9).$$

Testul 2

1. Să se studieze continuitatea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}, & x\in(-\infty,0)\\ ax+b, & x\in[0,1]\\ \dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$

în funcţie de parametrii reali a şi b.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Q}\\ x^2, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

a) Fie $I=[2,3]$. Există valori ale lui $x\in I$ pentru care $f(x)=3{,}5$?

b) Funcţia f are proprietatea lui Darboux pe I ?

3. Să se rezolve inecuaţia $(2^x-16)(x-x^3)\le 0$.

Testul 3

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x[x]$. Să se studieze continuitatea funcţiei f în $x_0\in\mathbb{Z}$.

2. Să se studieze continuitatea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2+a+x, & x\le a\\ 2x+ax^2, & x>a\end{cases}$

pentru $a\in\mathbb{R}$.

3. Să se stabilească semnul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(2^x-2^a)(x-a)$ în funcţie de valorile parametrului real a.

Testul 4

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$, dată de relaţia $f(n)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n^2 2^x+3^{-x}}{2^x n+2^{-x}}$.

Să se calculeze suma $f(1)+f(2)+...+f(n)$.

2. Să se arate dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este funcţie continuă şi $f(a)\ge a, f(b)\le b$, atunci există $x_0\in[a,b]$ cu proprietatea că $f(x_0)=x_0$.

3. Să se studieze semnul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}(2^x-2)(\log_2 x-1), & x>0\\ x^3-x, & x\le 0\end{cases}$.

Capitolul 3

Funcţii derivabile

3.1. Derivata unei funcţii într-un punct

3.1.1. Tangenta la o curbă într-un punct

Fie $f: D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$ o funcţie continuă, $\mathcal{G}_f$ imaginea geometrică a graficului acesteia şi $M_0(x_0, f(x_0))$, $M(x, f(x))$ puncte pe curba $\mathcal{G}_f$ (fig. 3.1).

Dreapta M_0M este secantă curbei $\mathcal{G}_f$ şi face cu axa Ox un unghi de măsură α. Panta (coeficientul unghiular) al dreptei M_0M este egală cu

$$\boxed{m = tg\alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.}$$

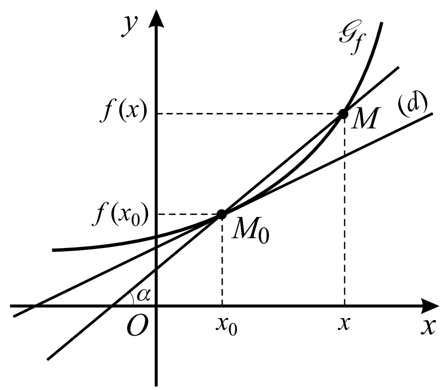


Fig. 3.1.

Lecturând graficul din figura 3.1. se observă că atunci când punctul M se apropie de punctul M_0 dreapta M_0M tinde să se suprapună cu dreapta (d), tangenta la curba $\mathcal{G}_f$ în punctul M_0.

Dacă punctul M se apropie de punctul M_0 atunci x tinde către x_0. Rezultă că panta tangentei (d) la curba $\mathcal{G}_f$ în punctul $x_0 \in D$ este

$$\boxed{m' = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

când aceasta există.

Dacă $m' = \pm\infty$, atunci tangenta în punctul x_0 este o dreaptă verticală.

REŢINEM!

Funcţia $f: D \to \mathbb{R}$, continuă în punctul $x_0 \in D$, admite tangentă în x_0 dacă şi numai dacă există $m' = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbb{R}}$ şi panta tangentei este m'.

EXERCIŢIU REZOLVAT

Să se studieze dacă graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *admite tangentă în punctul specificat:*

a) $f(x)=x^2-3x, x_0=4;$ b) $f(x)=\begin{cases}x^2, x\le 0\\ x^3, x>0\end{cases}, x_0=0;$

c) $f(x)=|x|, x_0=0.$

Rezolvare.

Se va studia existenţa limitei raportului $R(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ în punctul x_0 specificat.

a) Avem:

$$R(x)=\frac{x^2-3x-4^2+3\cdot 4}{x-4}=\frac{(x^2-4^2)-3(x-4)}{x-4}=\frac{(x-4)(x+1)}{x-4}=x+1.$$

Rezultă că $\lim\limits_{x\to 4}R(x)=\lim\limits_{x\to 4}(x+1)=5.$ Aşadar, curba $\mathcal{G}_f$ admite tangentă în punctul $M_0(4,4)$ cu panta $m=5$ şi ecuaţia $y-4=5(x-4)$ de unde rezultă că $y=5x-16.$[1]

b) Vom calcula limitele laterale în $x_0=0$ ale raportului $R(x)$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}R(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{x^2-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x=0;\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}R(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x^3-0}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x^2=0.$$

Rezultă că există $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0,$ deci curba $\mathcal{G}_f$ admite tangentă în punctul $M_0(0,0)$ cu panta $m=0$ şi ecuaţia $y-0=0(x-0)$, adică $y=0$.

c) Avem : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{|x|-0}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{-x}{x}=-1$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{|x|-0}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{x}{x}=1.$

Rezultă că nu există $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, deci $\mathcal{G}_f$ nu admite tangentă în punctul $M_0(0,0)$.

---

[1] **Ne reamintim!**
Ecuaţia dreptei determinată de punctul $M_0(x_0,y_0)$ şi panta m este $y-y_0=m(x-x_0)$.)

3.1.2. Funcţii derivabile într-un punct

Din rezolvarea exerciţiului anterior se observă că există funcţii numerice $f:D\to\mathbb{R}$ pentru care limita în x_0 a raportului $R(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ există, dar şi funcţii pentru care această limită nu există.

➯ *DEFINIŢII*

Fie funcţia $f:D\to\mathbb{R}, D\subset\mathbb{R}$ şi $x_0\in D$ un punct de acumulare al mulţimii D.

- ***Funcţia f admite derivată în punctul** $x_0\in D$ dacă există $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ în $\overline{\mathbb{R}}$.*
- *Valoarea acestei limite notată $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ se numeşte **derivata funcţiei f în punctul x_0.***
- *Funcţia f se numeşte **funcţie derivabilă** în punctul $x_0\in D$ dacă limita $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ există şi este finită.*

OBSERVAŢIE

✓ Dacă funcţia *f* este derivabilă în punctul $x_0\in D$ rezultă că are derivată în x_0. Reciproca acestei afirmaţii nu este adevărată.

EXEMPLU

Să considerăm că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x}$ şi $x_0=0$.

Avem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{0_{(+)}}=+\infty.$$

Aşadar, funcţia *f* are derivată în punctul $x_0=0$, $f'(0)=+\infty$, dar nu este derivabilă în $x_0=0$.

EXERCIŢIU REZOLVAT

✓ *Să se studieze derivabilitatea funcţiei* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *în punctul* $x_0 = 0$*:*

a) $f(x)=\sin x + x$; b) $f(x)=\begin{cases} x^2+x,\ x\le 0 \\ 3x^2+x, x>0 \end{cases}$.

Rezolvare.

a) Avem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x + x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}+1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}+1=2.$$

Rezultă că *f* este derivabilă în $x_0 = 0$ şi $f'(0)=2$.

b) Avem:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to 0}(x+1)=1 \quad \text{şi}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2+x}{x}=\lim_{x\to 0}(3x+1)=1.$$

Rezultă că $f'(0)=1$ şi *f* este derivabilă în $x_0 = 0$.

Interpretarea geometrică a derivatei într-un punct

Fie $f:D\to\mathbb{R}, D\subset\mathbb{R}$ o funcţie care admite derivată în punctul $x_0 \in D$.

Din punct de vedere geometric, existenţa derivatei funcţiei *f* în punctul x_0 este echivalentă cu faptul că graficul funcţiei admite tangentă în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ a cărei pantă este

$$\boxed{m = f'(x_0).}$$

Ecuaţia tangentei în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ este:

$$\boxed{\begin{aligned} & y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0), \text{ dacă } f'(x_0)\in\mathbb{R}; \\ & x = x_0, \text{ dacă } f'(x_0)=\pm\infty. \end{aligned}}$$

TEMĂ

Să se scrie ecuaţia tangentei în $x_0 = 0$ la graficul funcţiei *f* din exerciţiul rezolvat mai sus.

➯ *DEFINIŢII*

Fie $f:D \to \mathbb{R}$ o funcţie numerică şi $A \subset D$ o mulţime nevidă.

- *Funcţia f se numeşte* ***funcţie derivabilă pe mulţimea*** *A dacă este derivabilă în fiecare punct $x_0 \in A$.*
- *Mulţimea $D_{f'} = \{x \in A \mid \exists f'(x) \text{ şi } f'(x) \in \mathbb{R}\}$ se numeşte* ***domeniul de derivabilitate*** *al funcţiei f.*
- *Funcţia $f': D_{f'} \to \mathbb{R}$ care asociază la fiecare punct $x_0 \in D_{f'}$ numărul real $f'(x_0)$ se numeşte* ***derivata funcţiei f sau funcţia derivată*** *a funcţiei f.*

Avem că

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Folosind notaţia $x - x_0 = h$ se obţine scrierea

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Cum $x_0 \in D$ este un număr ales arbitrar, rezultă că legea de corespondenţă a funcţiei f' se poate scrie astfel:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \forall x \in D_{f'}.} \qquad (1)$$

Operaţia prin care funcţia f' se obţine din funcţia f se numeşte **operaţia de derivare** a funcţiei f.

PROBLEMĂ REZOLVATĂ

Să se calculeze funcţia derivată pentru funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dacă:

a) $f(x) = x^2 + 2x + 3$; b) $f(x) = 2^x + 1$.

Rezolvare.

a) Conform relaţiei (1), pentru $x \in \mathbb{R}$ avem:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + 2(x+h) + 3 - x^2 - 2x - 3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \to 0}(2x + h + 2) = 2x + 2$$

Aşadar, $f'(x) = 2x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Avem: $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{2^{x+h}-2^x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{2^x(2^h-1)}{h}=2^x\cdot\ln 2.$

Rezultă că $f'(x)=2^x\ln 2, \forall x\in\mathbb{R}.$

3.1.3. Derivabilitate şi cotinuitate

Legătura dintre cele două proprietăţi locale, continuitatea şi derivabilitatea, ale funcţiilor reale de variabilă reală este realizată de următorul rezultat.

TEOREMA 1.

Orice funcţie derivabilă într-un punct este continuă în acel punct.

Demonstraţie.

Fie $f:D\to\mathbb{R}, D\subset\mathbb{R}$ şi $x_0\in D$ un punct în care funcţia f este derivabilă. Să demonstrăm că $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Avem:

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0$$

Rezultă că $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, adică f este continuă în punctul x_0.

OBSERVAŢIE

✓ Reciproca teoremei de mai sus este în general o propoziţie falsă. Altfel spus, o funcţie poate fi continuă într-un punct fără a fi derivabilă în acel punct.

Aşadar, continuitatea într-un punct este condiţie necesară pentru derivabilitatea funcţiei în acel punct.

EXEMPLU

Funcţia *modul,* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x|$ este continuă în $x_0=0$, dar nu este derivabilă în $x_0=0$ (temă).

EXERCIŢIU REZOLVAT

Să se determine numerele reale a, b astfel încât funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+b, x\le 0\\ e^{3x}, \quad x>0\end{cases}$ *să fie derivabilă în* $x_0=0$.

Rezolvare.

Deoarece proprietatea de continuitate a unei funcţii într-un punct este condiţie necesară pentru derivabilitatea funcţiei în acel punct, impunem condiţia ca f să fie continuă în $x_0 = 0$.

Din $f(0-0) = f(0+0) = f(0)$ se obţine egalitatea $b = 1$.

Funcţia f este derivabilă în $x_0 = 0$. Rezultă că $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ există şi este finită.

Aşadar, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{x^2+ax+b-1}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{e^{3x}-1}{x} \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{x(x+a)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{e^{3x}-1}{3x}\cdot 3$,

egalitate din care se obţine $a = 3$.

În concluzie, pentru $a = 3$ şi $b = 1$ funcţia f este derivablă în $x_0 = 0$.

3.1.4. Derivate laterale

Am văzut că pentru o funcţie numerică $f : D \to \mathbb{R}$ existenţa derivatei într-un punct $x_0 \in D$ depinde de existenţa limitei raportului $R(x) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, existenţă care poate fi dovedită studiind limitele laterale ale acesteia. Legat de aceste limite laterale se vor introduce noţiunile de derivată la stânga şi de derivată la drepata într-un punct.

➯ *DEFINIŢII*

Fie $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$ un punct de acumulare al lui D.

- *Funcţia f are* ***derivată la stânga în punctul x₀****, dacă limita* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *există în* $\overline{\mathbb{R}}$*. Această limită se notează* $f'_s(x_0)$ *şi se numeşte* ***derivata la stânga în punctul*** x_0 *a funcţiei f.*
- *Funcţia f* ***are derivată la dreapta în punctul*** x_0*, dacă limita* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *există în* $\overline{\mathbb{R}}$*. Această limită se notează* $f'_d(x_0)$ *şi se numeşte* ***derivata la dreapta în punctul*** $\boldsymbol{x_0}$ *a funcţiei f.*
- *Funcţia f se numeşte funcţie* ***derivabilă la stânga (la dreapta) în punctul*** $\boldsymbol{x_0 \in D}$***,*** *dacă derivata la stânga (la dreapta) în* x_0 *există şi este finită.*

EXEMPLE

1. Pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$, avem:

$$f_s'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{-x}{x}=-1 \quad \text{şi} \quad f_d'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x}{x}=1.$$

Rezultă că *f* este derivabilă la stânga în $x_0=0$, respectiv derivabilă la dreapta în $x_0=0$.

2. Pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0\\ \ln x, x>0\end{cases}$, avem:

$$f_s'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{x-0}{x}=1 \quad \text{şi}$$

$$f_d'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln x-0}{x}=\left(\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln x\right)=(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty.$$

În concluzie, funcţia *f* are derivate laterale în $x_0=0$ diferite şi este derivabilă la stânga în $x_0=0$.

Legătura dintre derivatele laterale ale unei funcţii *f* într-un punct şi derivata funcţiei în acel punct este dată de următorul rezultat.

TEOREMA 2

Fie $f:D\to\mathbb{R}, D\subset\mathbb{R}$ şi $x_0\in D$ un punct de acumulare al lui D.

- *Funcţia f are deribată în punctul x_0 dacă şi numai dacă derivatele laterale în x_0 sunt egale. În acest caz $f_s'(x_0)=f_d'(x_0)=f'(x_0)$.*
- *Funcţia f este derivabilă în punctul x_0 dacă şi numai dacă f este derivabilă la stânga şi la dreapta în x_0 şi derivatele laterale sunt egale.*

PROBLEME REZOLVATE

Să se stabilească derivabilitatea funcţiilor următoare în punctele specificate:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x|x-1|$, $x_0=1$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^3+3x, & x\le 0\\ -x^3+3x, x>0\end{cases}, x_0=0.$

Rezolvare.

a) Explicitând modulul se obţine: $f(x)=\begin{cases}-x^2+x, x\in(-\infty,1]\\ x^2-x,\ \ x\in(1,+\infty)\end{cases}.$

Avem:

$$f_s'(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{-x^2+x}{x-1}=\lim_{x\to 1}(-x)=-1;$$

$$f_d'(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x^2-x}{x-1}=\lim_{x\to 1}x=1.$$

Deoarece $f_s'(1)\neq f_d'(1)$, rezultă că f nu este derivabilă în $x_0=1$.

b) Avem:

$$f_s'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{x^3+3x}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(x^2+3)=3.$$

$$f_d'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{-x^3+3x}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(-x^2+3)=3.$$

Deoarece $f_s'(0)=f_d'(0)=3$, rezultă că f este derivabilă în $x_0=0$ şi $f'(0)=3$.

Exerciţii şi probleme

Exersare

E1. Să se stabilească dacă graficul funcţiei $f:D\to\mathbb{R}$ admite tangentă în punctul specificat, dacă:

a) $f(x)=3x^2-4x$, $x_0=2$; b) $f(x)=\begin{cases}2x^2-3x, & x\le 0\\ 5x^2-3x, & x>0\end{cases}$, $x_0=0$;

c) $f(x)=x+|x-1|$, $x_0=1$; d) $f(x)=x^2|x|$, $x_0=0$.

E2. Să se arate că funcţia $f:D\to\mathbb{R}$ are derivată în punctul specificat şi să se calculeze aceasta:

a) $f(x)=3x+11$, $x_0=-1$; b) $f(x)=x^2-3x-11$, $x_0=2$;

c) $f(x)=\dfrac{1}{x+5}$, $x_0=0$; d) $f(x)=\sqrt{x+1}$, $x_0=0$;

e) $f(x)=2^x+3$, $x_0=-1$; f) $f(x)=\sin x+\sin 2x$, $x_0=0$.

E3. Să se studieze derivabilitatea funcţiei $f: D \to \mathbb{R}$ în punctul specificat şi să se scrie ecuaţia tangentei în acest punct:

a) $f(x) = 2x - x^2$, $x_0 \in \{0,1,2\}$; b) $f(x) = x^3$, $x_0 \in \{0,1,-1\}$;

c) $f(x) = \sin x + x$, $x_0 \in \{0,\pi\}$; d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, $x_0 \in \{-1,0,1\}$.

E4. Să se determine derivatele laterale ale funcţiei $f: D \to \mathbb{R}$ în punctele date:

a) $f(x) = |x-1|$, $x_0 = 1$; b) $f(x) = x + |x|$, $x_0 = 0$;

c) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \le -1 \\ x^2 - 1, & x > -1 \end{cases}$, $x_0 = -1$ d) $f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x), & x \le 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$.

Sinteză

S1. Să se studieze dacă următoarele funcţii $f: D \to \mathbb{R}$ admit tangentă la grafic în punctele specificate:

a) $f(x) = \begin{cases} x + |x| + 1, & x < 0 \\ \cos x, & x \ge 0 \end{cases}$, $x_0 \in \{-1,0,1\}$;

b) $f(x) = \begin{cases} e^{x+1}, & x \ge -1 \\ \dfrac{1+e^{x+1}}{2}, & x < -1 \end{cases}$, $x_0 \in \{-1,0\}$;

c) $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} - 1, & x \le 0 \\ \ln(1+2x), & x > 0 \end{cases}$, $x_0 \in \{-1,0,2\}$.

S2. Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea funcţiei $f: D \to \mathbb{R}$ în punctele specificate:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & x < 0 \\ 2x - 1, & x \ge 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$;

b) $f(x) = \begin{cases} 4x - a, & x > 2 \\ x^2 + ax + b, & x \le 2 \end{cases}$, $x_0 = 2$;

c) $f(x) = \min(x, 2x-1)$, $x_0 = 1$;

d) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} + a, & x \ge 1 \\ \arccos x + b, & x \in [0,1) \end{cases}$, $x_0 = 1$.

S3. Fie $f:D\to\mathbb{R}$ şi $x_0\in D$, punct de continuitate al funcţiei f. Punctul $M(x_0, f(x_0))$ se numeşte *punct unghiular* al graficului funcţiei f dacă funcţia f are derivate laterale diferite în x_0 şi cel puţin una dintre ele este finită.

Să se studieze dacă punctul de abscisă x_0 este punct unghiular în cazurile:

a) $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\le 1\\ x^2+x-1, & x>1\end{cases}, x_0=1;$ b) $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\le 0\\ e^x, & x>0\end{cases}, x_0=0;$

c) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ \sin x, & x\ge 0\end{cases}, x_0=0;$ d) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\le \pi\\ x-\pi, & x>\pi\end{cases}, x_0=\pi.$

S4. Fie $f:D\to\mathbb{R}$ şi x_0 punct de continuitate al funcţiei f. Punctul $M(x_0, f(x_0))$ se numeşte *punct de întoarcere* al graficului funcţiei f dacă funcţia f are derivate laterale în x_0 infinite şi de semne contrare.

Să se determine dacă punctul de abscisă x_0 este punct de întoarcere în cazurile:

a) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & x\le 1\\ \sqrt{x-1}, & x>1\end{cases}, x_0=1;$ b) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-3}, & x\ge 3\\ 2\sqrt{3-x}, & x<3\end{cases}, x_0=3.$

S5. Să se determine parametrii reali pentru care graficele funcţiilor $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ admit tangentă comună în punctul de abscisă $x_0\in\mathbb{R}$.

a) $f(x)=2x+a, g(x)=x^2+bx+b, x_0=1;$

b) $f(x)=x^2+ax+b, g(x)=2x^2-x+1, x_0=1.$

S6. Se dau funcţiile $f,g:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+ax^2+b, g(x)=3x^2+cx+1.$ Să se determine:

a) $c\in\mathbb{R}$ pentru care tangenta la graficul funcţiei g în punctul de abscisă $x_0=1$ este paralelă cu dreapta de ecuaţie $y=7x-6$.

b) $a,b\in\mathbb{R}$, ştiind că tangenta în punctul $x_0=1$, la graficul funcţiei f este paralelă cu dreapta $y=5x+1$, iar în punctul de abscisă $x_0=-1$, tangenta are ecuaţia $y=x+5$.

S7. Se dau funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x^2+ax+b,\ g(x)=x^2+bx+a.$ Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care graficele celor două funcţii admit tangentă comună.

3.2. Derivatele unor funcţii elementare

Fie $f: D \to \mathbb{R}$ o funcţie reală de variabilă reală şi $D_{f'}$ domeniul de derivabilitate.

Funcţia derivată este dată de $f': D_{f'} \to \mathbb{R}, f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Cu ajutorul acestei relaţii se pot determina funcţiile derivate pentru câteva funcţii elementare pe domeniul lor de derivabilitate.

Derivata funcţiei constante

Funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = c \in \mathbb{R}$, are domeniul de continuitate $D_c = \mathbb{R}$, iar $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Aşadar, funcţia constantă este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Se scrie: $\boxed{c' = 0.}$

Derivata funcţiei putere cu exponent natural

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*$. Domeniul de continuitate este $D_c = \mathbb{R}$.

Avem:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{C_n^1 x^{n-1} h + C_n^2 x^{n-2} h^2 + \ldots + C_n^n h^n}{h} =$$
$$= C_n^1 x^{n-1} = n x^{n-1}$$

Aşadar, funcţia putere este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f'(x) = nx^{n-1}, x \in \mathbb{R}$. Se scrie:

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$$

EXEMPLE

- Dacă $f(x) = x$, se obţine $f'(x) = 1, x \in \mathbb{R}$ şi se scrie $\boxed{x' = 1.}$
- Dacă $f(x) = x^2$, se obţine $f'(x) = 2x, x \in \mathbb{R}$ şi se scrie $\boxed{(x^2)' = 2x.}$

Derivata funcţiei putere cu exponent număr real

Fie $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$. Domeniul de continuitate al funcţiei f este $D_c = (0, +\infty)$. Derivata funcţiei f este:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \lim_{h \to 0} x^\alpha \left[\frac{\left(1 + \frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{h} \right] = x^{\alpha - 1} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\left(1 + \frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{\left(\frac{h}{x}\right)} =$$
$$= \alpha \cdot x^{\alpha - 1}.$$

Rezultă că f este derivabilă pe $(0,+\infty)$ şi $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}, \forall x\in(0,+\infty)$. Se scrie:

$$\boxed{(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.}$$

EXEMPLE

➢ Pentru $f(x)=\sqrt{x}, x\in(0,+\infty)$ se obţine că

$$f'(x)=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x\in(0,+\infty).$$

REŢINEM! $\boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}},\ x\in(0,\ +\infty).}$

➢ Pentru $f(x)=\sqrt[3]{x}, x\in(0,+\infty)$ se obţine că $f'(x)=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $x\in(0,+\infty)$.

REŢINEM! $\boxed{\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, x\in(0,+\infty).}$

Derivata funcţiei logaritmice

Fie $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x$. Domeniul de continuitate al funcţiei f este $D_c=(0,+\infty)$. Derivata funcţiei f este:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{x\cdot\frac{h}{x}}=\frac{1}{x},$$

având în vedere limita fundamentală $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln(1+y)}{y}=1$. Rezultă că funcţia logaritmică este derivabilă pe $(0,+\infty)$ şi $f'(x)=\dfrac{1}{x}, x\in(0,+\infty)$. Se scrie: $\boxed{(\ln x)'=\dfrac{1}{x}.}$

OBSERVAŢIE

✓ Pentru funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\log_a x$, folosind transformarea $f(x)=\dfrac{\ln x}{\ln a}$ se obţine că $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}, x\in(0,+\infty)$.

REŢINEM! $\boxed{(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a},\ x \in (0,+\infty),\ a > 0, a \neq 1.}$

Derivata funcţiei exponenţiale

Funcţia $f:\mathbb{R} \to (0,+\infty), f(x) = a^x, a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ are domeniul de continuitate $D_c = \mathbb{R}$. Derivata funcţiei *f* este:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \cdot \lim_{h\to 0}\left(\frac{a^h - 1}{h}\right) = a^x \ln a, x \in \mathbb{R}.$$

Rezultă că funcţia exponenţială este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f'(x) = a^x \ln a$. Se scrie:

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a,\ x \in \mathbb{R}.}$$

În particular,

$$\boxed{(e^x)' = e^x,\ x \in \mathbb{R}}$$

Derivatele funcţiilor trigonometrice sinus şi cosinus [2]

Funcţiile trigonometrice $f,g:\mathbb{R} \to [-1,1], f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$ au domeniul de continuitate $D_c = \mathbb{R}$. Avem:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} =$$

$$= \left(\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right)\cdot\left(\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)}\right) = \cos x, x \in \mathbb{R}$$

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\frac{h}{2}\cdot\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} =$$

$$= -\left(\lim_{h\to 0}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\right)\cdot\left(\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)}\right) = -\sin x, x \in \mathbb{R}$$

---

[2] **Ne reamintim!**

- $\sin a - \sin b = 2\sin\dfrac{a-b}{2}\cdot\cos\dfrac{a+b}{2}$
- $\cos a - \cos b = -2\sin\dfrac{a-b}{2}\cdot\sin\dfrac{a+b}{2}$

Aşadar, funcţiile trigonometrice sinus şi cosinus sunt funcţii derivabile pe $\mathbb{R}$ şi $f'(x) = \cos x$, $g'(x) = -\sin x$, $x \in \mathbb{R}$. Se scrie:

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}, \quad \boxed{(\cos x)' = -\sin x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sistematizând rezultatele de mai sus se obţine tabelul:

Funcţia	**Domeniul de derivabilitate**	**Derivata**	**Scrierea uzuală**
$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = c$	$\mathbb{R}$	$f':\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f'(x) = 0$	$c' = 0$
$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f':\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f'(x) = 1$	$x' = 1$
$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f':\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f'(x) = 2x$	$(x^2)' = 2x$
$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f':\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f'(x) = nx^{n-1}$	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
$f:[0,+\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$	$(0,+\infty)$	$f':(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[3]{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f':\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
$f:(0,+\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$(0,+\infty)$	$f':(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$
$f:(0,+\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln x$	$(0,+\infty)$	$f':(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{x}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$f:(0,+\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_a x$, $a > 0, a \neq 1$	$(0,+\infty)$	$f':(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
$f:\mathbb{R} \to (0,+\infty),\ f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$f':\mathbb{R} \to (0,+\infty)$, $f'(x) = e^x$	$(e^x)' = e^x$
$f:\mathbb{R} \to (0,+\infty),\ f(x) = a^x$	$\mathbb{R}$	$f':\mathbb{R} \to (0,+\infty)$, $f'(x) = a^x \ln a$	$(a^x)' = a^x \ln a$
$f:\mathbb{R} \to [-1,1],\ f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$f':\mathbb{R} \to [-1,1]$, $f'(x) = \cos x$	$(\sin x)' = \cos x$
$f:\mathbb{R} \to [-1,1],\ f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$f':\mathbb{R} \to [-1,1]$, $f'(x) = -\sin x$	$(\cos x)' = -\sin x$

TEMĂ

1. Aplicând formulele obţinute, să se calculeze derivatele funcţiilor $f : D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = 2007, x \in \mathbb{R}$; b) $f(x) = 5\sqrt{2}, x \in \mathbb{R}$;

c) $f(x) = \sin 5, x \in \mathbb{R}$; d) $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$;

e) $f(x) = x^{2007}, x \in \mathbb{R}$; f) $f(x) = \log_3 x, x \in (0, +\infty)$;

g) $f(x) = \log_{0,3} x, x \in (0, +\infty)$; h) $f(x) = 2^x, x \in (0, +\infty)$;

i) $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}, x \in \mathbb{R}$; j) $f(x) = \log_3(5x^2) - \log_3(5x), x > 0$;

k) $f(x) = x^{\frac{7}{3}}, x > 0$; l) $f(x) = e^{2x}, x \in \mathbb{R}$.

2. Pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 4^x$, să se calculeze $f'(0), \big(f(1)\big)', f'(-1)$.

3. Pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x}$, să se calculeze

$$f'(-1),\ \big(f(-1)\big)',\ f'(27),\ \big(f(27)\big)',\ f'\left(\frac{1}{8}\right),\ \left(f\left(\frac{1}{8}\right)\right)'.$$

3.3. Operaţii cu funcţii derivabile

Calculul derivatei unei funcţii oarecare, derivabile pe o mulţime *D*, folosind definiţia derivatei într-un punct este destul de laborioasă. De aceea sunt necesare reguli de calcul care să evite folosirea limitelor de funcţii.

3.3.1. Derivata sumei şi a produsului

Fie $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$, punct de acumulare al lui *D*.

➭ *TEOREMA 1*

Dacă funcţiile $f, g : D \to \mathbb{R}$ sunt derivabile în punctul $x_0 \in D$, atunci:

- *funcţia $f + g$ este funcţie derivabilă în punctul $x_0 \in D$ şi*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

- *funcţia $f \cdot g$ este derivabilă în punctul $x_0 \in D$ şi*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

Demonstrație.

Folosind operațiile cu limite de funcții și definiția derivatei într-un punct se obține:

$$(f+g)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+$$

$$+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0).$$

$$(f\cdot g)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x)+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\cdot f(x_0)\right)=$$

$$=\left(\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)+\left(\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)\cdot\lim_{x\to x_0}f(x_0)=$$

$$=f'(x_0)\cdot g(x_0)+g'(x_0)\cdot f(x_0).$$

În acest calcul s-a avut în vedere că funcțiile *f*, *g*, fiind derivabile, numerele $f'(x_0), g'(x_0)$ sunt reale și $f'(x_0)+g'(x_0)\in\mathbb{R}$. De asemenea, din derivabilitatea funcțiilor f și g rezultă că acestea sunt funcții continue în x_0 și $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0), \lim_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$.

OBSERVAȚII

✓ Dacă funcțiile $f,g:D\to\mathbb{R}$ sunt funcții derivabile pe *D*, atunci funcțiile $f+g$ și $f\cdot g$ sunt funcții derivabile pe *D*. Regulile de derivare pentru sumă și produs sunt:

$$\boxed{(f+g)'=f'+g'} \text{ și } \boxed{(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'} \qquad (1)$$

✓ Luând funcția constantă $g(x)=c, x\in\mathbb{R}$, regula produsului conduce la:

$$\boxed{(cf)'=cf'}$$

Pentru $c=-1$, se obține: $(-f)'=-f'$ și $(f-g)'=f'-g'$.

Așadar, reținem:

$$\boxed{(cf)'=cf'}\ ;\ \boxed{(f-g)'=f'-g'.}$$

✓ Regulile de calcul din relația (1) se pot extinde la un număr oarecare de funcții derivabile. Se obține:

$$\boxed{\begin{gathered}(f_1+f_2+...+f_n)'=f_1'+f_2'+...+f_n',\ n\in\mathbb{N}^*\\ (f_1\cdot f_2\cdot...\cdot f_n)'=\sum_{k=1}^{n}(f_1\cdot f_2\cdot...\cdot f_{k-1}\cdot f_k'\cdot f_{k+1}\cdot...\cdot f_n).\end{gathered}}$$

În particular, când funcţiile sunt egale se obţine:

$$\boxed{(f^2)' = 2 \cdot f \cdot f'}\ ;\ \boxed{(f^3)' = 3 \cdot f^2 \cdot f'}$$

sau mai general

$$\boxed{(f^n)' = n \cdot f^{n-1} \cdot f',\ \ n \in \mathbb{N}^*.}$$

EXERCIŢIU REZOLVAT

Să se calculeze derivatele funcţiilor $f : D \to \mathbb{R}$, folosind regulile de calcul:

a) $f(x) = x + x^3, x \in \mathbb{R}$; b) $f(x) = x + \ln x, x \in (0, +\infty)$;

c) $f(x) = x \ln x, x \in (0, +\infty)$; d) $f(x) = (x-1)^5 e^x, x \in \mathbb{R}$

Rezolvare.

Funcţiile sunt derivabile pe domeniul de definiţie.

a) Vom avea: $f'(x) = \left(x + x^3\right)' = x' + (x^3)' = 1 + 3x^2,\ x \in \mathbb{R}$

b) Obţinem: $f'(x) = (x + \ln x)' = x' + (\ln x)' = 1 + \dfrac{1}{x},\ x \in (0, +\infty)$;

c) Aplicăm regula de derivare a produsului:

$$f'(x) = (x \ln x)' = x'(\ln x) + x(\ln x)' = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1,\ x \in (0, +\infty);$$

d) Se obţine:

$$f'(x) = \left[(x-1)^5 e^x\right]' = \left[(x-1)^5\right]' e^x + (x-1)^5 (e^x)' =$$
$$= 5 \cdot (x-1)^4 (x-1)' e^x + (x-1)^5 e^x = 5(x-1)^4 e^x + (x-1)^5 e^x =$$
$$= (x-1)^4 (x+4) e^x, x \in \mathbb{R}.$$

3.3.2. Derivata câtului

➯ *Teorema 4.*

Fie $f, g : D \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$ astfel încât $g(x_0) \neq 0$. Dacă funcţiile f şi g sunt derivabile în punctul $x_0 \in D$, atunci funcţia $\dfrac{f}{g}$ este derivabilă în x_0 şi are loc relaţia

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \quad (1)$$

Demonstrație.

Din derivabilitatea funcțiilor *f, g* în punctul x_0 rezultă continuitatea acestora în punctul x_0, deci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$.

Avem succesiv:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{(x-x_0)g(x)g(x_0)} =$$

$$= \frac{1}{g^2(x_0)}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{x-x_0} =$$

$$= \frac{1}{g^2(x_0)}\left[\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x_0)-\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}f(x_0)\right] =$$

$$= \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

adică relația (1).

OBSERVAȚII

✓ Dacă $f,g:D\to\mathbb{R}$ sunt funcții derivabile pe *D* și $g(x)\neq 0, x\in D$, atunci $\frac{f}{g}$ este derivabilă pe *D* și rezultă regula de derivare a câtului:

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}}$$

Dacă $f=1$, atunci se obține: $\boxed{\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}.}$

PROBLEMĂ REZOLVATĂ

Să se calculeze derivatele funcțiilor $f,g:D\to\mathbb{R}$*, în cazurile:*

a) $f(x) = tgx, D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$;

b) $f(x) = ctgx, D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Rezolvare.

Aplicând regula de derivare a câtului, se obţine:

$$a)\ (\mathrm{tg}\,x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \in D.$$

$$b)\ (\mathrm{ctg}\,x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos x^2}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad x \in D.$$

REŢINEM!

$$\boxed{(\mathrm{tg}\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x}} \quad \text{sau} \quad \boxed{(\mathrm{tg}\,x)' = 1 + \mathrm{tg}^2 x}$$

$$\boxed{(\mathrm{ctg}\,x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}} \quad \text{sau} \quad \boxed{(\mathrm{ctg}\,x)' = -1 - \mathrm{ctg}^2 x}$$

Exerciţii şi probleme

Exersare

E1. Să se calculeze derivatele funcţiilor $f : D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^3 + 3x + 1$; b) $f(x) = 2x - x^4$;

c) $f(x) = x + 2\sqrt{x}$; d) $f(x) = x^3 + \sin x + \cos x$;

e) $f(x) = 2x^3 + \ln x$; f) $f(x) = 2^x + 3^x - x$;

g) $f(x) = \log_2 x + \log_3 x$; h) $f(x) = 4\sin x - 5\cos x + \sqrt{3}$;

i) $f(x) = x^2 + \log_3 x + \sin x$; j) $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{2} + \mathrm{tg}\,x$;

k) $f(x) = (x-1)^2 + (x+1)^2$; l) $f(x) = 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2} + \log_{0,5} x$;

m) $f(x) = \log_3 x^3 + \log_2 x^4$; n) $f(x) = 2\mathrm{tg}\,x - \mathrm{ctg}\,x$;

p) $f(x) = x\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}x$; q) $f(x) = 2^{x+1} + 3^{x-1}$.

E2. Să se calculeze derivatele funcţiilor $f:D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=x\log_2 x$; b) $f(x)=x^2\sqrt{x}$;

c) $f(x)=x\sin x$; d) $f(x)=x^2\cos x$;

e) $f(x)=(2^x-1)(3^x-1)$; f) $f(x)=(2\ln x+1)\log_2 x$;

g) $f(x)=(x-\sqrt{x})(x+\sqrt[3]{x})$; h) $f(x)=(3-x^2)^3$;

i) $f(x)=(x-\sqrt{x})^3$; j) $f(x)=x\ln x+\ln^2 x$;

k) $f(x)=x\sin^2 x$; l) $f(x)=(x-1)^2e^x$.

E3. Să se calculeze derivatele funcţiilor $f:D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\dfrac{1}{x}$; b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$; c) $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$;

d) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$; e) $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$; f) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-x+1}$;

g) $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$; h) $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$; i) $f(x)=\dfrac{1+tgx}{\sin x}$;

j) $f(x)=\dfrac{x+1+\ln x}{x+1-\ln x}$; k) $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$; l) $f(x)=\dfrac{1+e^x}{2+e^x}$;

m) $f(x)=\dfrac{\mathrm{tg}x}{1+\mathrm{tg}x}$; n) $f(x)=\dfrac{1-\mathrm{tg}x}{1+\mathrm{ctg}x}$.

E4. Pentru funcţia $f:D\to\mathbb{R}$ să se rezolve ecuaţia $f'(x)=0$ precizând mulţimile D şi $D_{f'}$ în fiecare caz:

a) $f(x)=x^3-12x$; b) $f(x)=2x^3-15x^2+24x+5$;

c) $f(x)=(x^2+6x-15)e^x$; d) $f(x)=x^2\ln x$;

e) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-6x+8}$; f) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+3}{x^2-5x+7}$;

g) $f(x)=\dfrac{\sin x+2}{\cos x}$; h) $f(x)=\dfrac{x^2+3}{\sqrt{x}}$;

Sinteză

S1. Să se calculeze derivatele funcţiilor $f:D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\dfrac{x\sin x+\cos x}{x\cos x-\sin x}$; b) $f(x)=e^{-x}\left(1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}\right), n\in\mathbb{N}^*$.

S2. Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{3x^2-2}{x-1}$.

a) Să se calculeze derivata funcţiei *f*.

b) Să se determine punctele $M(x_0, f(x_0))$ de pe graficul funcţiei *f* în care tangenta ese paralelă cu dreapta $y=2x-1$.

c) Să se determine punctele $M(x_0, f(x_0))$ de pe graficul funcţiei *f* în care tangenta este perpendiculară pe dreapta $y=x$.

S3. Se consideră funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x+a}{x^2+1}, g(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care are loc egalitatea $e^x f'(x)+g'(x)=\dfrac{2g(x)}{x^2+1}, x\in\mathbb{R}$.

S4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x+m}{x^2+x+1}$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care $f'(x)<0, \forall\in\mathbb{R}$.

S5. Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x(x^2+mx+m)$:

a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ cu proprietatea că $f'(x)\le 0$ dacă şi numai dacă $x\in[-2,2]$.

b) Pentru $m=1$ se notează $g(x)=\dfrac{e^x}{f'(x)}$. Să se calculeze:

$$S_n=g(0)+g(1)+...+g(n), n\in\mathbb{N}.$$

3.3.4 Derivarea funcţiilor compuse

S-a arătat anterior că prin adunarea, înmulţirea şi împărţirea de funcţii derivabile într-un punct se obţin funcţii derivabile. În cazul funţiilor compuse avem rezultatul:

↳ *TEOREMA 5*

Fie I, J intervale de numere reale şi funcţiile $u:I\to J$, $f:J\to\mathbb{R}$, $h:I\to\mathbb{R}$, $h=f\circ u$. Dacă funcţia u este derivabilă în punctul $x_0\in I$, iar funcţia f este derivabilă în punctul $u(x_0)=y_0\in J$, atunci funcţia compusă h este derivabilă în punctul $x_0\in I$ şi are loc egalitatea

$$\boxed{(f\circ u)'(x_0)=f'(u(x_0))\cdot u'(x_0).}$$

OBSERVAŢII

- ✓ Dacă funcţiile f şi u sunt derivabile pe domeniul de definiţie, atunci funcţia compusă $h = f \circ u$ este derivabilă pe domeniul de definiţie şi există egalitatea:

$$\boxed{(f \circ u)' = (f' \circ u) \cdot u'}$$

- ✓ Teorema se poate extinde la o compunere de mai multe funcţii. Pentru trei funcţii avem:

$$\boxed{(f \circ g \circ h)' = (f' \circ g \circ h) \cdot (g' \circ h) \cdot h'}$$

Prin particularizarea funcţiei f se obţin următoarele reguli de derivare cu funcţii compuse, pe domeniul de existenţă:

• $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$;	• $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u',\ \alpha \in \mathbb{R}$;
• $(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$;	• $(\sqrt[3]{u})' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{u^2}} \cdot u'$;
• $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$;	• $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$;
• $(e^u)' = e^u \cdot u'$;	• $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$;
• $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;	• $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;
• $(\mathrm{tg}\, u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;	• $(\mathrm{ctg}\, u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$.

EXERCIŢIU REZOLVAT

Să se calculeze derivatele funcţiilor $f : D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = (\ln x)^3, x \in (0, +\infty)$; b) $f(x) = e^{x^2+x}, x \in \mathbb{R}$;

c) $f(x) = \sin(3x+5),\ x \in \mathbb{R}$; d) $f(x) = \sqrt{x^2+x}, x \in (0, +\infty)$;

e) $f(x) = \ln(x^2+x+3),\ x \in \mathbb{R}$; f) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}, x \in (1, +\infty)$.

Rezolvare. Avem:

a) $f'(x) = ((\ln x)^3)' = 3(\ln x)^2 \cdot (\ln x)' = 3(\ln x)^2 \cdot \dfrac{1}{x} = 3 \cdot \dfrac{\ln^2 x}{x}; x \in (0, +\infty)$;

b) $f'(x) = (e^{x^2+x})' = e^{x^2+x} \cdot (x^2+x)' = e^{x^2+x} \cdot (2x+1);\ x \in \mathbb{R}$;

c) $f'(x) = (\sin(3x+5))' = \cos(3x+5) \cdot (3x+5)' = 3\cos(3x+5);\ x \in \mathbb{R}$.

d) $f'(x)=\left(\sqrt{x^2+x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+x}}\cdot(x^2+x)'=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}};\ x\in(0;+\infty);$

e) $f'(x)=(\ln(x^2+x+3))'=\dfrac{1}{x^2+x+3}\cdot(x^2+x+3)'=\dfrac{2x+1}{x^2+x+3};\ x\in\mathbb{R};$

f) Avem: $f'(x)=\left(\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}}\cdot\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)'=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\cdot\dfrac{2}{(x+1)^2}=$

$$=\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)\cdot(x+1)}};\ x\in(1,+\infty).$$

OBSERVAȚIE

✓ Fie $f,g:I\to R,\ f(x)>0,\ x\in I$. Deoarece $\boxed{f^g=e^{g\cdot\ln f}}$, folosind formula de derivare a funcţiei compuse, obţinem:

$$(f^g)'=(e^{g\cdot\ln f})'=e^{g\cdot\ln f}\cdot(g\cdot\ln f)'$$

sau

$$\boxed{(f^g)'=f^g\cdot(g\cdot\ln f)'=f^g\cdot\left(g\cdot\frac{f'}{f}+g'\ln f\right)}\qquad(1)$$

EXEMPLE

1. Fie $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^x$. Folosind relaţia (1), derivata ei se obţine astfel:

$$f'(x)=(x^x)'=(e^{x\ln x})'=e^{x\ln x}(x\ln x)'=x^x\left(\ln x+x\frac{1}{x}\right)=x^x(\ln x+1),\ x>0.$$

2. Dacă $f:(0,\infty)\to R,\ f(x)=x^{\ln x}$, aplicând formula (1) se obţine:

$$f'(x)=(x^{\ln x})'=x^{\ln x}(\ln^2x)'=x^{\ln x}\cdot2\ln x(\ln x)'=2\cdot x^{\ln x}\cdot\frac{\ln x}{x}.$$

3. Fie $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^{\sin x}$. Se obţine:

$$f'(x)=\left(e^{\sin x\cdot\ln x}\right)'=x^{\sin x}(\sin x\cdot\ln x)'=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right),x>0$$

3.3.5 Derivarea funcţiilor inverse

Ne reamintim că o funcţie $f: A \to B$ este o funcţie inversabilă dacă este funcţie bijectivă (injectivă şi surjectivă).

În cazul în care o funcţie reală de variabilă reală are inversă şi această inversă este derivabilă, derivata acesteia se poate calcula folosind numai derivata funcţiei date.

➯ *TEOREMA 4*

Fie $I, J \subset \mathbb{R}$ intervale de numere reale şi $f: I \to J$ o funcţie continuă şi bijectivă. Dacă funcţia f este derivabilă în punctul $x_0 \in I$ şi $f'(x_0) \neq 0$, atunci funcţia inversă $f^{-1}: J \to I$ este derivabilă în punctul $y_0 = f(x_0)$ şi are loc egalitatea: $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

OBSERVAŢIE

✓ Dacă funcţia $f: I \to J$ este continuă, bijectivă, derivabilă pe I şi $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$, atunci f^{-1} este derivabilă pe J şi are loc egalitatea:

$$\boxed{(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}}$$

APLICAŢII

Derivata funcţiei arcsinus.

Funcţia $f: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \arcsin x$ este funcţia inversă a restricţiei funcţiei sinus la intervalul $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Dacă $y_0 \in [-1, 1]$, fie $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ cu proprietatea că $y_0 = \sin x_0$. Aplicând formula derivatei inversei, obţinem:

$$f'(y_0) = (\arcsin)'(y_0) = \frac{1}{\cos x_0} = \frac{1}{\cos(\arcsin y_0)} = \frac{1}{\sqrt{1 - y_0^2}}, \ \forall y_0 \in (-1, 1)$$

Aşadar, funcţia arcsinus este funcţie derivabilă pe intervalul $(-1, 1)$ şi există egalitatea:

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \ x \in (-1, 1).}$$

În punctele $y_0 = -1$ şi $y_0 = 1$ funcţia arcsinus nu este derivabilă, dar are derivată infinită.

În mod analog, se obţin rezultatele:

- Funcţia $f:[-1, 1] \to [0, \pi]$, $f(x) = \arccos x$ este funcţie derivabilă pe intervalul $(-1, 1)$ şi $\boxed{(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1, 1)}$

- Funcţia $f:\mathbb{R} \to \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$ este funcţie derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi

$$\boxed{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}}$$

- Funcţia $f:\mathbb{R} \to (0, \pi)$, $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ este funcţie derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi

$$\boxed{(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}}$$

Aplicând formulele de calcul pentru derivarea funcţiilor compuse, se obţin următoarele reguli de derivare, în condiţiile de existenţă:

• $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;	• $(\arccos u)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
• $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;	• $(\operatorname{arcctg} u)' = \dfrac{-1}{1+u^2} \cdot u'$.

EXERCIŢIU REZOLVAT

Să se calculeze derivatele funcţiilor $f:D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \arcsin(x^2)$, $x \in [0, 1)$; b) $f(x) = \arccos \dfrac{1}{x}$, $x \in (1, +\infty)$;

c) $f(x) = \operatorname{arctg}(x-1)$, $x \in \mathbb{R}$; d) $f(x) = \operatorname{arcctg}(2x-1)$, $x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. Avem:

a) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot (x^2)' = \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$, $x \in [0, 1)$

b) $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}} \cdot \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \dfrac{-1}{x^2} = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, $x \in (1, +\infty)$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{1+(x-1)^2} \cdot (x-1)' = \dfrac{1}{x^2-2x+2}$, $x \in \mathbb{R}$

d) $f'(x)=\dfrac{-1}{1+(2x-1)^2}\cdot(2x-1)'=\dfrac{-2}{4x^2-4x+2}=\dfrac{-1}{2x^2-2x+1},\ x\in\mathbb{R}$

Exerciţii şi probleme

Exersare

E1. Să se calculeze derivatele funcţiilor $f:D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=(x^2+1)^3,\ x\in\mathbb{R}$;
b) $f(x)=\ln(x^2+1),\ x\in\mathbb{R}$;

c) $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x},\ x\in(-1,1)$;
d) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{1+x}},\ x\in(0,+\infty)$;

e) $f(x)=x\,e^{x^2},\ x\in\mathbb{R}$;
f) $f(x)=\sin(x^2+1),\ x\in\mathbb{R}$;

g) $f(x)=\cos(x^2+x+1),\ x\in\mathbb{R}$;
h) $f(x)=\sqrt{\sin x},\ x\in(0,\pi)$;

i) $f(x)=x\sqrt{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$;
j) $f(x)=\sqrt{x\,e^x},\ x\in(0,+\infty)$.

E2. Să se calculeze derivatele funcţiilor $f:D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\ln(1+\sin^2 x),\ x\in\mathbb{R}$;
b) $f(x)=\ln(1+e^x),\ x\in\mathbb{R}$;

c) $f(x)=\sqrt{1+\sin^2 x},\ x\in\mathbb{R}$;
d) $f(x)=\sin(x\sqrt{x}),\ x\in(0,+\infty)$;

e) $f(x)=\arcsin\left(\dfrac{x}{2}\right),\ x\in(0,2)$;
f) $f(x)=\arccos\left(\dfrac{1}{x-1}\right),\ x\in(3,+\infty)$.

E3. Să se determine domeniul de derivabilitate pentru funcţiile $f:D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\sqrt{x-1},\ x\in[1,+\infty)$;
b) $f(x)=e^{\sqrt{x}},\ x\in[0,+\infty)$;

c) $f(x)=\left|x^2-1\right|^3,\ x\in\mathbb{R}$;
d) $f(x)=\ln(1+e^{|x|}),\ x\in\mathbb{R}$;

e) $f(x)=\arcsin|x|,\ x\in[-1,1)$;
f) $f(x)=\arccos|x|,\ x\in[-1,1]$.

E4. Fie funcţiile $f:[0,+\infty)\to[3,+\infty),\ f(x)=x^2+3$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=x^3$.

a) Să se arate că f şi g sunt bijective. b) Să se calculeze $(f^{-1})'(4)$ şi $(g^{-1})'(8)$.

Sinteză

S1. Să se calculeze derivatele funcţiei $f:D\to\mathbb{R}$, specificând domeniul de derivabilitate:

a) $f(x)=\sqrt{\left|x^2-1\right|},\ x\in\mathbb{R}$;
b) $f(x)=\sqrt{1-\ln x},\ x\in(0,e]$;

c) $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2},\ x\in\mathbb{R}$;
d) $f(x)=\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2},\ x\in\mathbb{R}$;

e) $f(x)=x^{\sqrt{x}},\ x>0$;
f) $f(x)=x^{\ln(x+1)},\ x>0$.

S2. Să se rezolve ecuaţia $f'(x)=0$ pentru fiecare funcţie $f:D\to\mathbb{R}$, precizând D şi $D_{f'}$:

a) $f(x)=(2x^2-6x)^3$; b) $f(x)=\cos^2 x-\cos 2x,\ x\in[0,\pi]$;

c) $f(x)=\sqrt{x^2+6x+5}$; d) $f(x)=\ln(3x^2+2x)$;

e) $f(x)=3^{x^3-3x^2}$; f) $f(x)=\operatorname{arctg}(4x^3-3x^2+1)$;

g) $f(x)=\dfrac{2x+1}{e^{x^2}}$; h) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+4}{3x+8}}$.

S3. Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+2^x$.

a) Să se arate că funcţia f este inversabilă.

b) Să se calculeze $(f^{-1})'(3)$.

S4. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x+\ln(x-1)$.

a) Să se arate că funcţia f este inversabilă.

b) Să se calculeze $(f^{-1})'(2)$ şi $(f^{-1})'(e+2)$.

3.4. Derivata de ordinul doi

Fie $f:D\to\mathbb{R}$ o funcţie reală de variabilă reală. Dacă funcţia f este derivabilă pe mulţimea D, funcţia $f':D\to\mathbb{R}$ care asociază fiecărui punct $x_0\in D$ numărul real $f'(x_0)$, reprezintă *derivata funcţiei f* sau *derivata de ordinul întâi a funcţiei f.*

În mod natural, se poate pune problema derivabilităţii funcţiei f' într-un punct al mulţimii D sau pe o submulţime a acesteia.

➯ *DEFINIŢIE*

Funcţia $f:D\to\mathbb{R}$ se numeşte ***de două ori derivabilă*** *într-un punct $x_0\in D$ dacă:*

- *funcţia f este derivabilă într-o vecinătate V a punctului x_0;*
- *funcţia f' este derivabilă în punctul x_0.*

În cazul în care funcţia f este de două ori derivabilă în $x_0\in D$, derivata funcţiei f' în punctul $x_0\in D$ se numeşte *derivata de ordinul doi* (sau *derivata a doua*) *a funcţiei f* în punctul x_0 şi se foloseşte notaţia $f''(x_0)$. Rezultă că:

$$\boxed{f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}}$$

Dacă funcţia f' este derivabilă pe mulţimea $A\subset D$, atunci funcţia f este de două ori derivabilă pe mulţimea A.

Funcţia $(f')': A \to \mathbb{R}$ se numeşte *derivata de ordinul doi* sau *derivata a doua* a funcţiei f şi se notează f'' sau $f^{(2)}$.

OBSERVAŢII

- ✓ Dacă funcţia $f: D \to \mathbb{R}$ este derivabilă numai în punctul $x_0 \in D$ şi nu pe o vecinătate a lui x_0, atunci nu se poate defini derivata a doua a funcţiei f în x_0.
- ✓ Dacă funcţia f este de două ori derivabilă în punctul $x_0 \in D$, atunci derivata sa f' este definită pe o întreagă vecinătate a lui x_0.

PROBLEME REZOLVATE

1. *Să se studieze dacă funcţia* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *este de două ori derivabilă în punctul specificat:*

a) $f(x) = 3x^2 + x + 1,\ x_0 = 0;$ b) $f(x) = \sin x,\ x_0 = \pi;$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 0 \\ x^3, & x > 0 \end{cases},\ x_0 = 0.$

Rezolvare.

a) Funcţia f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f'(x) = 6x + 1,\ x \in \mathbb{R}$.

Funcţia f' este funcţie de gradul 1, deci este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi, în particular, în punctul $x_0 = 0$. Se obţine:

$$f''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{6x + 1 - 1}{x} = 6$$

b) Funcţia sinus este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi are derivata $f'(x) = \cos x$ care este derivabilă pe $\mathbb{R}$, deci şi în $x_0 = \pi$. Obţinem:

$$f''(\pi) = \lim_{x \to \pi} \frac{\cos x - \cos \pi}{x - \pi} = \lim_{x \to \pi} \frac{-2\sin\frac{x+\pi}{2} \cdot \sin\frac{x-\pi}{2}}{x - \pi} =$$

$$= -\sin\frac{2\pi}{2} \cdot \lim_{x \to \pi} \frac{\sin\frac{x-\pi}{2}}{\frac{x-\pi}{2}} = 0$$

c) Funcţia f este continuă în $x_0 = 0$. Se obţine:

$$f'_s(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = 0; \quad f'_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x^3 - 0}{x - 0} = 0;$$

deci funcţia f este derivabilă în $x_0 = 0$ şi $f'(0) = 0$.

Deoarece pe intervalele $(-\infty, 0)$ şi $(0, +\infty)$ funcţia f este restricţie de funcţii elementare, ea este derivabilă pe aceste intervale şi vom avea, folosind regulile de calcul ale derivatelor: $f'(x) = \begin{cases} 2x, & x \leqslant 0 \\ 3x^2, & x > 0 \end{cases}$

Dacă notăm $g = f'$, se obţine:

$$g'_s(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{2x - 0}{x - 0} = 2$$

$$g'_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{3x^2 - 0}{x - 0} = 0$$

Aşadar, funcţia f' nu este derivabilă în $x_0 = 0$, iar f nu este de două ori derivabilă în $x_0 = 0$.

2. *Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, pentru care funcţia:*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} a \sin x, & x \leqslant 0 \\ x^3 + bx, & x > 0 \end{cases}$$

este de două ori derivabilă în $x_0 = 0$.

Rezolvare.

Funcţia este continuă pe $\mathbb{R}$, după cum se verifică imediat. Avem:

$$f'_s(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{a \sin x - 0}{x - 0} = a; \quad f'_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{x^3 + bx}{x} = \lim_{x \to 0}(x^2 + b) = b.$$

Funcţia f este derivabilă în $x_0 = 0$, dacă $f'_s(0) = f'_d(0)$, deci dacă $a = b$.

Cum f' este derivabilă pe $(-\infty, 0)$ şi $(0, +\infty)$, ca fiind restricţie de funcţii elementare pe aceste intervale, ea este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi avem:

$$f'(x) = \begin{cases} a \cos x, & x \leqslant 0 \\ 3x^2 + a, & x > 0 \end{cases}$$

Condiţia de derivabilitate a funcţiei f' în $x_0 = 0$ conduce la egalitatea $(f')'_s(0) = (f')'_d(0)$. Obţinem $f''_s(0) = 0$ şi $f''_d(0) = 0$. Aşadar f este de două ori derivabilă în $x_0 = 0$ dacă $a = b \in \mathbb{R}$.

OBSERVAŢIE

- ✓ Studiind tabelul derivatelor funcţiilor elementare, se observă că derivatele acestor funcţii sunt, de asemenea, funcţii elementare sau restricţii de funcţii elementare la domeniul de derivabilitate al acestor funcţii.
  În consecinţă, funcţiile elementare sunt derivabile de două ori pe domeniul lor de derivabilitate.

EXEMPLU

- Funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$ este derivabilă pe $D=(0,+\infty)$, are derivata $f':(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f'(x)=\frac{1}{x}$, care este restricţia unei funcţii raţionale pe $(0,+\infty)$. Rezultă că f este de două ori derivabilă pe $(0,+\infty)$ şi $f''(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$.

TEMĂ

Scrieţi derivatele de ordinul al doilea pentru funcţiile elementare studiate, folosind regula:

$$\boxed{f''(x)=(f')'(x),\ x\in A}$$

Exerciţii şi probleme

Exersare

E1. Să se stuieze dacă funcţia $f:D\to\mathbb{R}$ este de două ori derivabilă în punctele specificate:

a) $f(x)=x^3+x,\ x_0\in\{-1,0\}$; b) $f(x)=x\,e^x,\ x_0\in\{0,1\}$

c) $f(x)=\sin x+\cos x,\ x_0\in\{0,\pi\}$; d) $f(x)=\sqrt{x}+x,\ x_0\in\{1,4\}$;

e) $f(x)=\frac{x}{x^2+1},\ x_0\in\{0,1\}$; f) $f(x)=\frac{\sin x}{1+\sin x},\ x_0\in\{0,\pi\}$;

g) $f(x)=\frac{e^x}{1+e^x},\ x_0\in\{0,1\}$; h) $f(x)=x^2\ln x,\ x_0\in\{1,e\}$.

E2. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este derivabilă de două ori în punctul specificat:

a) $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\leq 0\\ 5x^4, & x>0\end{cases},\ x_0=0$; b) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\leq 0\\ x^3+x, & x>0\end{cases},\ x_0=0$

c) $f(x)=x^3|x|,\ x_0=0$; d) $f(x)=\begin{cases}x^3\ln x, & x>0\\ x^3, & x\leq 0\end{cases},\ x_0=0$

E3. Folosind regulile de calcul cu derivate, să se calculeze derivata de ordinul doi pentru $f:D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=2x^2+5x$; b) $f(x)=x^3-4x$; c) $f(x)=e^x+x$;

d) $f(x)=x+\ln x$; e) $f(x)=x\ln x$; f) $f(x)=x^2e^x$;

g) $f(x)=x^2\ln x$; h) $f(x)=\sin^2 x$; i) $f(x)=\cos^3 x$;

j) $f(x)=x\sin x+\cos x$; k) $f(x)=x^2\sqrt{x},\ x>0$; l) $f(x)=x\operatorname{tg} x$;

m) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$; n) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

Sinteză

S1. Să se arate că:

a) dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x$, atunci:

$$f'(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\ f''(x)=\sin(x+\pi).$$

b) dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x$, atunci:

$$f'(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\ f''(x)=\cos(x+\pi).$$

S2. Să se verifice dacă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{2x}(3+4x)$ verifică egalitatea:

$$f''(x)-2f'(x)+f(x)=e^{2x}(4x+11),\ x\in\mathbb{R}$$

S3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x\sin x$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ cu proprietatea că:

$$f''(x)-af'(x)+af(x)=0,\ x\in\mathbb{R}$$

S4. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ ştiind că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{-2x}(\sin x+\cos x)$ verifică egalitatea:

$$f''(x)+(a+b)f'(x)+(ab+2)f(x)=0,\ x\in\mathbb{R}.$$

S5. Să se determine funcţia polinomială de gradul doi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+c$ care verifică relaţiile: $f(2)=9,\ f'(1)=2$ şi $f''(0)=8$.

S6. Există o funcţie polinomială de gradul trei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^3+bx^2+cx+1$, care să verifice condiţiile $f(-1)=-6,\ f'(1)=-3$ şi $f''(2)=4$?

S7. Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ dacă $f:D\to\mathbb{R}$ este de două ori derivabilă pe D.

a) $f(x)=\begin{cases}x^3+ax, & x\leqslant 0\\ x^3+bx^2+c, & x>0\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases}x^3+3x+a-1, & x\leqslant 2\\ ax^2+bx+c, & x>2\end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases}a\sin x+b\cos x, & x\leqslant\pi\\ c\sin^2 x+x^2, & x>\pi\end{cases}$; d) $f(x)=\begin{cases}2x^3+cx^2+8x+b, & x<0\\ 3, & x=0\\ x^2+ax+b, & x>0\end{cases}$.

3.5 Regulile lui l'Hôspital

În calculul cu limite de funcţii s-au întâlnit cazurile de nedeterminare: $\frac{0}{0}$ şi $\frac{\infty}{\infty}$. Calculul cu derivate oferă o metodă simplă şi unitară de soluţionare a acestor cazuri de nedeterminare. O metodă bazată pe calculul cu derivate a fost dată de matematicianul francez François l'Hôspital[3] în anul 1696 şi este cunoscută sub numele de *regula lui l'Hôspital*.

➯ *TEOREMA 7*

(regula lui l'Hôspital pentru cazul $\frac{0}{0}$)

Fie $f, g: I \to \mathbb{R}$, funcţii de variabilă reală, $I \subset \mathbb{R}$ interval şi x_0 punct de acumulare pentru I. Dacă:

a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$;

b) funcţiile f şi g sunt derivabile pe $I \setminus \{x_0\}$;

c) $g'(x) \neq 0,\ \forall x \in I \setminus \{x_0\}$;

d) există $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$,

atunci funcţia $\frac{f}{g}$ are limită în punctul x_0 şi $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

EXEMPLU

➢ *Să se calculeze:* a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^7 - 1}{x^6 - 1}$; b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{\sin x}$.

Rezolvare

a) Se observă că limita este în cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$, iar funcţiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^7 - 1$, $g(x) = x^6 - 1$ satisfac condiţiile teoremei. Avem:

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x^7 - 1)'}{(x^6 - 1)'} = \lim_{x \to 1} \frac{7 \cdot x^6}{6 \cdot x^5} = \frac{7}{6} \in \mathbb{R}$$

Aşadar, $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^7 - 1}{x^6 - 1} = \frac{7}{6}$.

---

[3] Guillaume François Antoine **l'Hôspital** (1661-1704), matematician francez. A publicat primul tratat de calcul infinitezimal în 1696.

b) Funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x - 1$, $g(x) = \sin x$ îndeplinesc condiţiile teoremei. Avem:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(2^x - 1)'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2^x \ln 2}{\cos x} = \ln 2.$$

Rezultă că: $\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{\sin x} = \ln 2$

↬ *TEOREMA 8*

(regula lui l'Hôspital pentru cazul $\frac{\infty}{\infty}$)

Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ interval şi x_0 punct de acumulare pentru I. Dacă:

a) $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \lim_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty$;

b) funcţiile f şi g sunt derivabile pe $I \setminus \{x_0\}$;

c) $g'(x) \neq 0,\ \forall x \in I \setminus \{x_0\}$;

d) există $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$,

atunci funcţia $\frac{f}{g}$ are limită în punctul x_0 şi $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

EXEMPLU

➢ *Să se calculeze:* a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$; b) $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{x + \ln x}$.

Rezolvare

a) Avem: $\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{\infty} = 0$. Rezultă că: $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

b) Avem: $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{(\ln x)'}{(x + \ln x)'} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 1$. Rezultă că: $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{x + \ln x} = 1$.

OBSERVAŢIE

✓ Există cazuri în care nedeterminarea $\frac{0}{0}$ şi $\frac{\infty}{\infty}$ nu se soluţionează la prima aplicare a regulii lui l'Hôspital şi este necesară aplicarea repetată a acesteia.

EXEMPLU

➢ *Să se calculeze:* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\ln(x+1)}{x^2}$.

Rezolvare

a) Limita este în cazul de nedeterminare $\dfrac{0}{0}$. Avem:

$$\ell_1 = \lim_{x\to 0} \frac{(x-\ln(x+1))'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\dfrac{1}{x+1}}{2x} = \frac{0}{0}.$$

Aşadar, se obţine o nouă limită în cazul de nedeterminare $\dfrac{0}{0}$. Cu o nouă aplicare a regulii lui l'Hôspital, rezultă:

$$\ell_2 = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{(x+1)^2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

În concluzie, $\ell_1 = \dfrac{1}{2}$, deci $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\ln(x+1)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

OBSERVAŢIE

✓ Cazul de nedeterminare $0\cdot\infty$ poate fi soluţionat cu regula lui l'Hôspital prin transformarea sa în caz $\dfrac{0}{0}$ sau $\dfrac{\infty}{\infty}$. Pentru aceasta se foloseşte una din scrierile:

$$\boxed{f\cdot g = \frac{f}{\dfrac{1}{g}} \quad \text{sau} \quad f\cdot g = \frac{g}{\dfrac{1}{f}}}$$

EXEMPLU

➢ *Să se calculeze:* a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x$; b) $\lim\limits_{x\to -\infty} x\,e^x$.

Rezolvare

a) Alegem $f, g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$, funcţii care îndeplinesc condiţiile aplicării regulii lui l'Hôspital. Avem:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{(\ln x)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = 0. \quad \text{Rezultă că } \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = 0.$$

b) Scriem expresia $x \cdot e^x = \dfrac{x}{e^{-x}}$. Se obţine:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{(x)'}{(e^{-x})'} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \frac{1}{-\infty} = 0. \quad \text{Rezultă că } \lim_{x\to -\infty} (x\, e^x) = 0$$

Exerciţii şi probleme

Exersare

E1. Să se calculeze

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 1}$; b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$; c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 4x + 3}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{2006} - 1}{x^{2007} - 1}$; e) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 4x + 3}$; f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + \sin x}{x^2 + \sin x}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + \ln(x+1)}{x \sin x}$; h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x + 3\sin 8x}{\sin 7x - \sin 2x}$.

E2. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x^2 + \sin^2 x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 3x}{1 - \cos x}$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - \cos x}{x^2 + x}$; e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{2e^x - 2 - 2x - x^2}$; f) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}$.

E3. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^3 + 4x + 9}{x^3 + 3x + 16}$; b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^2 - x + \ln x}{2x^2 + x - \ln x}$; c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin x)}$;

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln(2x)}{\operatorname{ctg}(3x)}$; e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + \sin 2x)}{\ln(1 + \sin x)}$; f) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln(x^2 + x + 1)}{x}$.

E4. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to \infty} x \ln \dfrac{x}{x+1}$; b) $\lim\limits_{x\to \pi} (x - \pi) \operatorname{ctg} x$; c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x \ln \dfrac{x}{x^2 + 1}$;

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \arcsin x \ln x$; e) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{-\frac{1}{x}} \ln x$; f) $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} (x+2) e^{\frac{1}{x+2}}$.

Teste de evaluare

Testul 1

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+ax+1$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care tangenta la graficul funcţiei f în punctul $x_0=1$ trece prin punctul $M(2, 1)$.

2. Să se determine derivatele laterale ale funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x+1}, & x\geqslant 0\\ \sin x, & x<0\end{cases}$

în punctul $x_0=0$.

3. Să se calculeze derivatele de ordinul doi pentru funcţia f, în cazurile:

a) $f:(0, +\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln(x+1)$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}x-\ln(x^2+1)$.

Testul 2

1. Să se determine derivabilitatea funcţiei

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x\sin x, & x>0\\ ax^2+a^2-1, & x\leqslant 0\end{cases}$ pe mulţimea $\mathbb{R}$.

2. Să se calculeze derivatele funcţiilor $f:D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x^2+x+2}$; b) $f(x)=x\sqrt{x^2+x+2}$.

3. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+\ln(x+1)}{3x+\ln(2x+1)}$.

Testul 3

1. Să se calculeze: a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{\sin^2 x}$.

2. Să se calculeze derivatele funcţiilor $f:D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$; b) $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$.

3. Să se determine valorile parametrilor $a, b, c\in\mathbb{R}$ pentru care funcţia $f:D\to\mathbb{R}$ este de două ori derivabilă pe D.

a) $f(x)=\begin{cases}a^x-x-1, & x\leqslant 0\\ b\sin x+c, & x>0\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases}x^3\ln x+a, & x>0\\ b\cos x+1, & x\leqslant 0\end{cases}$.

Capitolul 4

Studiul funcţiilor cu ajutorul derivatelor

4.1 Rolul derivatei întâi în studiul funcţiilor

4.1.1 Determinarea intervalelor de monotonie

Un rol important în studiul funcţiilor cu ajutorul derivatelor îl are următorul rezultat:

➯ *TEOREMA 1 (Lagrange)*

Fie $f:[a, b]\to\mathbb{R}$, $a<b$. *Dacă:*

a) funcţia f este continuă pe intervalul $[a, b]$,

b) funcţia f este derivabilă pe intervalul deschis (a, b),

atunci există cel puţin un punct $c\in(a, b)$, *asfel încât:*

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).} \qquad (1)$$

Relaţia (1) se numeşte *formula lui Lagrange* [1] sau *formula creşterilor finite*.

Pentru determinarea intervalelor de monotonie ale unei funcţii numerice este utilă următoarea consecinţă a teoremei lui Lagrange. [2]

---

[1] Joseph Louis **Lagrange** (1736-1813), matematician francez. Opera sa matematică cuprinde lucrări de algebră, mecanică, teoria numerelor, calcul infinitezimal, dinamică.

[2] **Ne amintim!**

Funcţia $f:I\to\mathbb{R}$ se numeşte:
- monoton crescătoare pe *I*, dacă $\forall x_1, x_2\in I, x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\leqslant f(x_2)$
- monoton descrescătoare pe I, dacă $\forall x_1, x_2\in I, x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\geqslant f(x_2)$

TEOREMA 2

Fie $f:I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe intervalul I. Atunci:

a) funcţia f este monoton crescătoare pe intervalul I, dacă şi numai dacă $f'(x) \geqslant 0, \forall x \in I$;

b) funcţia f este monoton descrescătoare pe intervalul I, dacă şi numai dacă $f'(x) \leqslant 0, \forall x \in I$.

Demonstraţie.

a) „⇒" Fie *f* monoton crescătoare pe *I*. Atunci $\forall x, x_0 \in I$, $x \neq x_0$, rezultă că:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0.$$

Prin trecere la limită, se obţine:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$$

deci $f'(x_0) \geqslant 0, \forall x_0 \in I$.

„⇐" Presupunem că $f'(x) \geqslant 0, \forall x \in I$ şi fie $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Aplicând teorema lui Lagrange funcţiei *f* pe intervalul $[x_1, x_2]$, rezultă că $\exists c \in (x_1, x_2)$ astfel încât

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot f'(c).$$

Dar $x_2 - x_1 \geqslant 0$, $f'(c) \geqslant 0$, de unde rezultă că $f(x_2) \geqslant f(x_1)$, deci funcţia *f* este monoton crescătoare pe *I*.

b) Temă.

OBSERVAŢII

- ✓ Dacă *f* este derivabilă pe *I* şi $f'(x) > 0, \forall x \in I$, respectiv $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, atunci funcţia *f* este strict crescătoare pe *I*, respectiv strict descrescătoare pe *I*.
- ✓ Dacă *f* este strict crescătoare (strict descrescătoare) pe *I* nu rezultă că $f'(x) > 0$ (respectiv $f'(x) < 0$), $\forall x \in I$.

Stabilirea intervalelor de monotonie ale unei funcţii

Din teorema 2, rezultă că determinarea intervalelor de monotonie ale unei funcţii derivabile *f* se reduce la determinarea intervalelor pe care derivata f' păstrează acelaşi semn.

Pentru stabilirea intervalelor de monotonie ale unei funcţii $f:D \to \mathbb{R}$ se procedează astfel:

- se calculează derivata f' a funcţiei f pe domeniul de derivabilitate $D_{f'} \subset D$;
- se rezolvă ecuaţia: $f'(x) = 0,\ x \in D_{f'}$;
- se determină semnul funcţiei f' pe intervalele pe care acestea nu se anulează;
- se stabilesc intervalele de monotonie în funcţie de semnul derivatei.

Pentru a indica monotonia funcţiei f pe intervalul I, cu ajutorul semnului derivatei se alcătuieşte un tabel de monotonie a funcţiei, de forma:

x	$\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{I}$
$f'(x)$	+ + + + + + + + + + + + + + + +
$f(x)$	↗ ↗ ↗ ↗

x	$\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{I}$
$f'(x)$	− − − − − − − − − − − − −
$f(x)$	↘ ↘ ↘ ↘

PROBLEME REZOLVATE

1. *Să se stabilească intervalele de monotonie ale funcţiei:*

a) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 3x + 2$; b) $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x|x-2|$.

Rezolvare

a) Funcţia f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f'(x) = 3x^2 - 3$. Soluţiile ecuaţiei $f'(x) = 0$ sunt $x_1 = -1$ şi $x_2 = 1$. Tabelul de monotonie este:

x	$-\infty$ -1 1 $+\infty$
$f'(x) = 3x^2 - 3$	+ + + + + + 0 − − − − 0 + + + + + +
$f(x)$	↗ ↗ ↘ ↘ ↗ ↗

Aşadar, funcţia f este strict crescătoare pe intervalele $(-\infty, -1)$ şi $(1, +\infty)$ şi este strict descrescătoare pe intervalul $(-1, 1)$.

b) Avem $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \geqslant 2 \\ -x^2 + 2x, & x < 2 \end{cases}$. Studiem derivabilitatea funcţiei f în punctul $x_0 = 2$. Obţinem $f'_s(2) = -2$ şi $f'_d(2) = 2$, deci f nu este derivabilă în $x_0 = 2$.

Domeniul de derivabilitate al funcţiei f este $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, iar

$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2, & x > 2 \\ -2x + 2, & x < 2 \end{cases}$. Ecuaţia $f'(x) = 0$ are soluţia $x_1 = 1$.

Alcătuim tabelul de monotonie

x	$-\infty$ 1 2 $+\infty$
$f'(x)$	+ + + + + + 0 − − − − | + + + + + +
$f(x)$	↗ ↗ ↘ ↘ ↗ ↗

Rezultă că f este strict crescătoare pe intervalele $(-\infty, 1)$ şi $(2, +\infty)$ şi este strict descrescătoare pe intervalul (1, 2).

2. *Să se determine parametrul real m, astfel încât funcţia* $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - m\ln(x^2+1)$ *să fie monoton crescătoare pe* $\mathbb{R}$.

Rezolvare

Funcţia f este derivabilă pe $\mathbb{R}$, iar $f'(x) = 1 - \dfrac{2mx}{x^2+1} = \dfrac{x^2-2mx+1}{x^2+1}$. Funcţia este monoton crescătoare pe $\mathbb{R}$, dacă $f'(x) \geqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Aceasta revine la condiţia $x^2 - 2mx + 1 \geqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Rezultă că $\Delta = 4m^2 - 4 \leqslant 0$ şi se obţine $m \in [-1, 1]$.

4.1.2 Determinarea punctelor de extrem

Fie $f:D \to \mathbb{R}$ o funcţie reală de variabilă reală.

➭ *DEFINIŢII*

- *Un punct* $x_0 \in D$ *se numeşte* ***punct de maxim relativ (local)*** *al funcţiei f dacă există o vecinătate V a punctului* x_0 *astfel încât* $f(x) \leqslant f(x_0)$, $\forall x \in V \cap D$,
- *Un punct* $x_0 \in D$ *se numeşte* ***punct de minim relativ (local)*** *al funcţiei f dacă există o vecinătate V a punctului* x_0 *astfel încât* $f(x) \geqslant f(x_0)$, $\forall x \in V \cap D$.
- *Dacă* $x_0 \in D$ *este punct de maxim local, valoarea* $f(x_0)$ *a funcţiei f se numeşte* ***maximul relativ (local)*** *al funcţiei, iar punctul* $A(x_0, f(x_0))$ *de pe curba asociată graficului funcţiei se numeşte* ***punct de maxim relativ*** *al graficului. (fig. 4.1.)*
- *Dacă* $x_0 \in D$ *este punct de minim local, valoarea* $f(x_0)$ *a funcţiei f se numeşte* ***minimul relativ (local)*** *al funcţiei, iar punctul* $A(x_0, f(x_0))$ *de pe curba asociată graficului funcţiei se numeşte* ***punct de minim relativ*** *al graficului. (fig. 4.2.)*

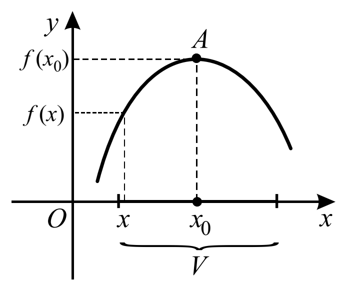


Fig. 4.1.

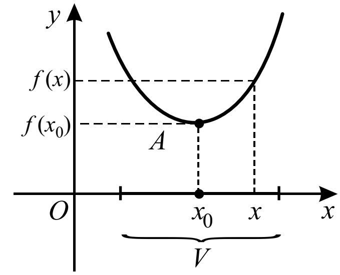


Fig. 4.2.

- *Punctele de maxim relativ sau minim relativ ale unei funcţii se numesc, în general,* ***puncte de extrem relativ*** *ale funcţiei.*
- *Valoarea funcţiei în punctele de extrem relativ se numesc* ***extreme relative ale funcţiei****.*
- *Punctele de maxim şi de minim relativ ale curbei asociate graficului unei funcţii se numesc* ***puncte de extrem relativ ale graficului****.*

➯ *DEFINIŢII*

Fie $f:D \to \mathbb{R}$ *o funcţie reală.*

- *Un punct* $x_0 \in D$ *se numeşte* ***punct de maxim absolut al funcţiei f*** *dacă* $f(x) \leqslant f(x_0)$, $\forall x \in D$.
- *Un punct* $x_0 \in D$ *se numeşte* ***punct de minim absolut al funcţiei f*** *dacă* $f(x) \geqslant f(x_0)$, $\forall x \in D$.
- *Dacă* $x_0 \in D$ *este un punct de maxim absolut al funcţiei f, valoarea* $f(x_0)$ *se numeşte* ***maximul absolut al funcţiei f****.*
- *Dacă* $x_0 \in D$ *este un punct de minim absolut al funcţiei f, valoarea* $f(x_0)$ *se numeşte* ***minimul absolut al funcţiei f****.*
- *Punctele de maxim absolut şi de minim absolut se numesc* ***puncte de extrem absolut ale funcţiei f****.*

Un rol important în determinarea punctelor de extrem ale unei funcţii îl are următoarea teoremă:

➯ *TEOREMA 3 (Fermat[3])*

Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ *şi* $x_0 \in (a,b)$ *un punct de extrem al funcţiei f. Dacă funcţia f este derivabilă în punctul* x_0*, atunci* $f'(x_0) = 0$.

OBSERVAŢIE

Reciproca teoremei lui Fermat nu este propoziţie adevărată. Dacă derivata unei funcţii *f* se anulează în $x_0 \in (a,b)$ nu rezultă că x_0 este punct de extrem al funcţiei *f*.

EXEMPLU

- Funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ are $f'(0) = 0$, dar $x_0 = 0$ nu este punct de extrem.

[3] Pierre **Fermat** (1601-1665), matematician francez. A făcut descoperiri importante în analiza matematică şi teoria numerelor, iar împreună cu *Rene Descartes* a pus bazele geometriei analitice.

Stabilirea punctelor de extrem ale unei funcţii

Din teorema lui Fermat rezultă că, în cazul unei funcţii f derivabile pe un interval $I \subset (a,b)$, punctele de extrem se găsesc printre soluţiile ecuaţiei $f'(x) = 0$.

Pentru stabilirea naturii punctelor de extrem se foloseşte semnul derivatei funcţiei pe acest interval şi monotonia funcţiei pe intervalul I .

REŢINEM!

Fie $f: I \to \mathbb{R}$, o funcţie derivabilă pe intervalul $I = [a,b]$, $x_0 \in (a,b)$ şi $f'(x_0) = 0$.

- *Dacă pe o vecinătate a punctului x_0, în stânga lui x_0, derivata f' este negativă, iar în dreapta lui x_0, derivata f' este pozitivă, punctul x_0 este punct de minim (local) al funcţiei f. (fig. 4.3.)*
- *Dacă pe o vecinătate a punctului x_0, în stânga lui x_0, derivata f' este pozitivă, iar în dreapta lui x_0, derivata f' este negativă, punctul x_0 este punct de maxim (local) al funcţiei f. (fig. 4.4.)*

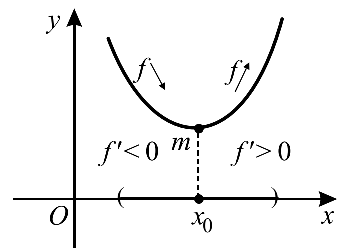


Fig. 4.3.

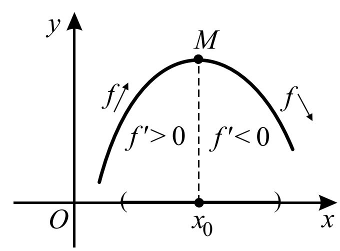


Fig. 4.4.

PROBLEMĂ REZOLVATĂ

✓ *Să se determine punctele de extrem ale funcţiilor:*

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$; b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \left|x^2 - 1\right|$.

Rezolvare

a) Funcţia f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi are derivata $f(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$. Soluţiile ecuaţiei $f'(x) = 0$ sunt $x_1 = -1$ şi $x_2 = 1$. Alcătuim tabelul de semn al derivatei şi de monotonie a funcţiei f.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$- - - -$	0	$+ + + +$	0	$- - - -$	
$f(x)$	0	↘	-1 m	↗	M 1	↘	0

Din tabel se observă că punctul $x_0 = -1$ este punct de minim, $x_0 = 1$ este punct de maxim, iar $-1 = f(-1)$ şi $1 = f(1)$ sunt valorile extreme ale funcţiei.

b) Domeniul de derivabilitate al funcţiei este $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, iar derivata este:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ -2x, & x \in (-1, 1) \end{cases}$$

Soluţia ecuaţiei $f'(x) = 0$ este $x = 0$. Alcătuim tabelul de semn şi monotonia:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$- - - -$	$\vert$	$+ +$	0	$- -$	$\vert$	$+ + + + + +$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0 m	↗	M 1	↘	0 m	↗	$+\infty$

Obţinem că punctele $x = -1$ şi $x = 1$ sunt puncte de minim relativ, iar $x = 0$ este punct de maxim relativ pentru funcţia f. Numerele $0 = f(-1) = f(1)$ şi $1 = f(0)$ sunt valori extreme ale funcţiei.

OBSERVAŢIE

✓ Punctele $x_1 = -1$ şi $x_2 = 1$ sunt puncte de extrem ale funcţiei, deşi funcţia nu este derivabilă în acestea.

Stabilirea unei inegalităţi

PROBLEMĂ REZOLVATĂ

✓ *Fie* $f:(-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln(x+1)$

a) Să se determine punctele de extrem ale funcţiei.

b) Să se arate că $\ln(x+1) \leqslant x$, $\forall x(-1, +\infty)$

Rezolvare

a) Funcţia f este derivabilă pe $(-1, +\infty)$ şi

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1},\ x \in (-1, +\infty)$$

Tabelul de semn şi monotonie este:

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$- - - - - - - - -$	0	$+ + + + + + + +$	
$f(x)$		↘	0 m	↗	

Rezultă că funcţia are un punct de minim $x = 0$, iar valoarea sa minimă este $f(0) = 0$.

b) Deoarece valoarea minimă a funcţiei f este $f(0) = 0$, rezultă că $f(x) \geqslant 0$, $\forall x \in (-1, +\infty)$, adică $x \geqslant \ln(x+1)$, $\forall x \in (-1, +\infty)$.

TEMĂ

Atătaţi că: a) $\sin x \leqslant x$, $\forall x \in [0, +\infty)$; b) $\operatorname{tg} x \geqslant x$, $\forall x \in [0, +\infty)$;

c) $e^x \geqslant x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Probleme de maxim şi minim

Determinarea punctelor de extrem şi a valorilor extreme ale unei funcţii $f: D \to \mathbb{R}$ cu ajutorul derivatei oferă o metodă eficientă în rezolvarea problemelor de optimizare.

PROBLEME REZOLVATE

1. *Dintr-o sârmă, având lungimea L, să se confecţioneze un cadru dreptunghiular care să cuprindă o suprafaţă cu aria cea mai mare.*

Rezolvare

Notăm cu x o dimensiune a cadrului cerut (fig. 4.5.).

Atunci cealaltă dimensiune a cadrului este $L_1 = \dfrac{L-2x}{2}$. Aria suprafeţei delimitată de cadru este modelată de funcţia:

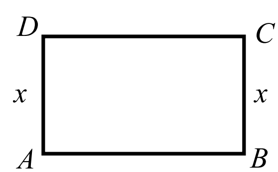


Fig. 4.5.

$$f: \left[0, \frac{L}{2}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = x\,\frac{L-2x}{2},$$

funcţie derivabilă.

Obţinem $f'(x) = \dfrac{L}{2} - 2x$, $x \in \left[0, \dfrac{L}{2}\right]$. Tabelul de semn al derivatei este:

x	0		$\frac{L}{4}$		$\frac{L}{2}$
$f'(x)$	+ + + + + + + + + + +		0	− − − − − − − −	
$f(x)$		$\nearrow$	M	$\searrow$	

Se obţine că $x = \dfrac{L}{4}$ este punct de maxim al funcţiei f. Pentru $x = \dfrac{L}{4}$ cadrul va avea formă pătrată, deci maximul ariei se realizează pentru o formă pătrată a cadrului.

2. *Să se determine conul cu volumul maxim înscris într-o sferă de rază R*

Rezolvare

Fie x înălţimea conului înscris în sferă (fig. 4.6.). Volumul conului este $\mathcal{V}(x)=\dfrac{\pi r^2\cdot x}{3}$, unde r este raza conului. Din triunghiul dreptunghic ABE, cu teorema înălţimii se obţine egalitatea

$$BD^2 = AD\cdot DE \quad \text{sau} \quad r^2 = x(2R-x).$$

Aşadar, $\mathcal{V}(x)=\dfrac{\pi x^2(2R-x)}{3}$, iar volumul conului este modelat matematic de funcţia:

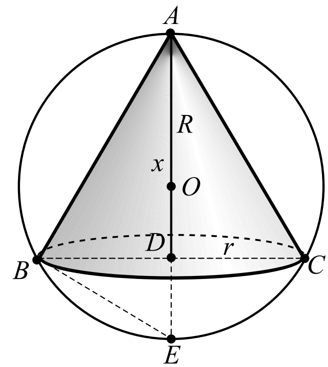


Fig. 4.6.

$$\mathcal{V}:[0,\,2R]\to\mathbb{R},\ \mathcal{V}(x)=\frac{2\pi R x^2-\pi x^3}{3}.$$

Obţinem $\mathcal{V}'(x)=\dfrac{4\pi R x-3\pi x^2}{3}$, care are soluţiile $x=0$, $x=\dfrac{4R}{3}$.

Stabilim tabelul de semn şi monotonie:

x	0	$\frac{4R}{3}$	$2R$
$\mathcal{V}'(x)$	+ + + + + + + + +	0	− − − − − − − −
$\mathcal{V}(x)$	↗	M	↘

Maximul volumului se obţine pentru $x=\dfrac{4R}{3}$ şi este egal cu $\mathcal{V}=\dfrac{32\pi R^3}{81}$.

Exerciţii şi probleme

Exersare

E1. Să se studieze dacă se poate aplica teorema lui Lagrange funcţiilor:

a) $f:[-3,\,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2-3x$; b) $f:[1,\,e]\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln x$;

c) $f:[1,\,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$; c) $f:[0,\,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x|2x-1|$.

E2. Să se stabilească intervalele de monotonie ale funcţiei $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=x^2-4x$; b) $f(x)=3x-x^3$; c) $f(x)=x^4-8x^2$;

d) $f(x)=x\,e^x$; e) $f(x)=x\ln x$; f) $f(x)=x-\ln x$;

g) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$; h) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

E3. Să se determine punctele de extrem pentru funcţia $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=x^3-6x$; b) $f(x)=(x-1)e^x$; c) $f(x)=\dfrac{x^2+4x-1}{x-1}$;

d) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$; e) $f(x)=x-2\operatorname{arctg}x$; f) $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$;

g) $f(x)=(x^2-x+1)e^{-x}$; h) $f(x)=\sqrt{x-1}$.

Sinteză

S1. Să se determine constantele reale pentru care se poate aplica teorema lui Lagrange funcţiei f:

a) $f:[-1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2+ax, & x \leqslant 1 \\ 5x+bx^2, & x>1 \end{cases}$;

b) $f:[0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} a+\sin x, & x \leqslant \pi \\ a\cos x+bx, & x>\pi \end{cases}$.

S2. Să se studieze monotonia funcţiei $f: D \to \mathbb{R}$ şi să se determine punctele de extrem, în cazurile:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-4x-1}{x+1}$; b) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^4+4}$; c) $f(x)=x^2\ln x$;

d) $f(x)=x\sqrt{x-1}$; e) $f(x)=x-2\sqrt{x^2+1}$; f) $f(x)=\ln x-\dfrac{5}{2}\operatorname{arctg}x$;

g) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x}$; h) $f(x)=\ln\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)$;

i) $f(x)=\operatorname{arctg}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)$; j) $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

S3. Să se determine valoarea parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia $f: D \to \mathbb{R}$ este monotonă pe D.

a) $f(x)=x^3+mx$; b) $f(x)=(x^2+m)e^{2x}$;

c) $f(x)=2x^3+5mx^2+6x-1$; d) $f(x)=x^2+x-m\ln x$.

S4. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = (x^2 + mx + 1)e^{2x}$$

are două puncte de extrem.

S5. Fie $f: \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{m - x}{x^2 - 3x + 2}$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia f nu admite puncte de extrem.

S6. Fie $f: \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + 2bx + 5}{x - a}$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia f admite puncte de extrem punctele $x = -1$ şi $x = 3$

S7. Se dă funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx^3 + nx^2 + p(x+1)$. Să se determine $m, n, p \in \mathbb{R}$ pentru care punctul $A(1,1)$ este punct de extrem al graficului funcţiei, iar tangenta la graficul funcţiei f în punctul $B(0, p)$ formează cu axa Ox un unghi cu măsura de 45°.

S8. Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \setminus \{b\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x - b}$. Să se studieze monotonia funcţiei f şi să se determine punctele de extrem, ştiind că dreptele $x = 1$ şi $y = x + 4$ sunt asimptote ale funcţiei f.

S9. Să se determine dreptunghiul de perimetru maxim înscris într-un cerc dat.

S10. Dintre toate dreptunghiurile care au aceeaşi arie, să se determine cel de perimetru minim.

S11. Un triunghi isoscel cu perimetrul $3P$ se roteşte în jurul bazei. Să se determine triunghiul care generează un corp de volum maxim.

S12. Se consideră funcţia $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ şi intervalul $I_n = [n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}^*$

a) Să se arate că funcţiei f i se poate aplica teorema lui Lagrange pe intervalul I_n.

b) Să se aplice teorema lui Lagrange funcţiei f pe intervalul I_n. Dacă $c_n \in I_n$ are proprietatea că $f'(c_n) = f(n+1) - f(n)$, să se determine c_n.

c) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc inegalitatea

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}.$$

d) Să se demonstreze că pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$ are loc:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > \ln n.$$

4.2. Rolul derivatei a doua în studiul funcţiilor

4.2.1. Determinarea intervalelor de convexitate şi de concavitate

Fie $f:I \to \mathbb{R}$, o funcţie derivabilă pe intervalul I.

- *Funcţia f se numeşte convexă pe intervalul I, dacă tangenta în oricare punct al graficului funcţiei f se află sub acest grafic. (fig. 4.7.)*

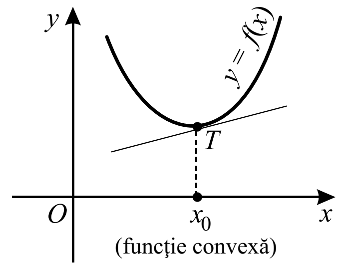


Fig. 4.7.

- *Funcţia f se numeşte concavă pe intervalul I, dacă tangenta în oricare punct al graficului funcţiei f se află deasupra acestui grafic. (fig. 4.8.)*

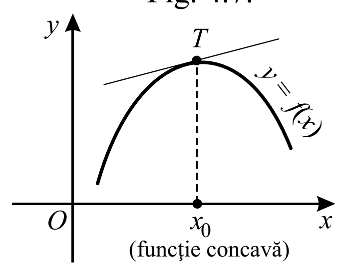


Fig. 4.8.

Se spune că graficul unei funcţii convexe este o curbă convexă, iar graficul unei funcţii concave este o curbă concavă.

Pentru studiul convexităţii şi concavităţii unei funcţii $f:I \to \mathbb{R}$, de două ori derivabile pe I, se poate utiliza semnul derivatei a doua pe acest interval.

TEOREMA 4

Fie $f:I \to \mathbb{R}$, o funcţie de două ori derivabilă pe intervalul I. Atunci:

a) funcţia f este convexă pe intervalul I dacă şi numai dacă derivata a doua este pozitivă pe intevalul I.

b) funcţia f este concavă pe intervalul I dacă şi numai dacă derivata a doua este negativă pe intevalul I.

După cum rezultă din teorema 4, problema determinării intervalelor de convexitate şi concavitate ale funcţiei f, se reduce la determinarea intervalelor pe care derivata a doua păstrează acelaşi semn.

PROBLEMĂ REZOLVATĂ

✓ *Să se determine intervalele de convexitate şi concavitate ale funcţiilor:*

a) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$; b) $f:\mathbb{R} \setminus \{1,\ -1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

Rezolvare

a) Funcţia f este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi

$$f'(x) = 3x^2 - 6x, \text{ iar } f''(x) = 6x - 6,\ x \in \mathbb{R}.$$

Ecuaţia $f''(x) = 0$ are soluţia $x = 1$. Alcătuim tabelul de semn pentru derivata a doua, sub forma:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$	$- - - - - - - - -$		0	$+ + + + + + + +$	
$f(x)$		$\frown$		$\smile$	

Din tabel rezultă că funcţia f este concavă pe intervalul $(-\infty, 1)$ şi este convexă pe intervalul $(1, +\infty)$.

b) Funcţia f este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{-1,\ 1\}$ şi

$$f'(x) = \frac{-1 - x^2}{(x^2 - 1)^2}, \text{ iar } f''(x) = \frac{2x(x^2 - 1)(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^4}.$$

Ecuaţia $f''(x) = 0$ are soluţia $x = 0$. Tabelul de semn pentru derivata a doua este următorul:

x	$-\infty$	-1		0		1		$+\infty$
$f''(x)$	$- - - -$	|	$+ + +$	0	$- - -$	|	$+ + + +$	
$f(x)$	$\frown$	|	$\smile$		$\frown$	|	$\smile$	

Aşadar, funcţia f este convexă pe intervalele $(-1, 0)$ şi $(1, +\infty)$ şi este concavă pe intervalele $(-\infty, -1)$ şi $(0, 1)$

4.2.2. Determinarea punctelor de inflexiune

Fie $f:[a, b] \to \mathbb{R}$, şi $x_0 \in (a, b)$.

DEFINIŢIE

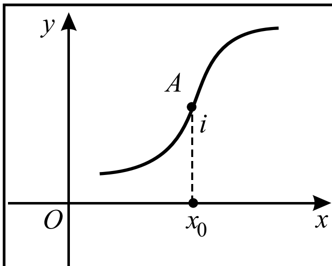


Fig. 4.9.

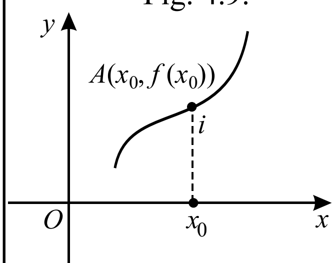


Fig. 4.10.

- *Punctul $x_0 \in (a, b)$ se numeşte* ***punct de inflexiune al funcţiei*** *$f:[a, b] \to \mathbb{R}$, dacă funcţia f este continuă în x_0, are derivată în x_0 şi dacă într-o parte a lui x_0 funcţia f este convexă, iar în cealaltă parte a lui x_0 funcţia f este concavă.(fig.4.9. şi fig.4.10.)*

- *Dacă x_0 este punct de inflexiune al lui f, atunci punctul $A(x_0, f(x_0))$ se numeşte* ***punct de inflexiune al graficului funcţiei f****.*

OBSERVAŢII

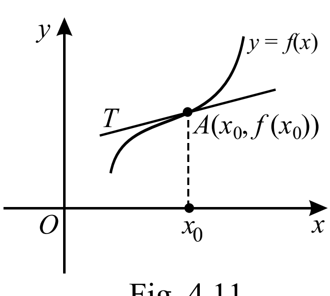


Fig. 4.11.

✓ Dacă x_0 este punct de inflexiune al funcţiei f, atunci graficul funcţiei f admite tangentă în punctul $A(x_0, f(x_0))$. Mai mult, tangenta la grafic în punctul A traversează graficul funcţiei f (fig. 4.11.)

✓ Dacă funcţia $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ este derivabilă de două ori în punctul de inflexiune $x_0 \in (a, b)$, atunci $f''(x_0) = 0$.

Pentru o funcţie de două ori derivabilă $f:I \to \mathbb{R}$, punctele de inflexiune sunt printre soluţiile ecuaţiei $f''(x_0) = 0$. Determinarea acestora se face studiind semnul derivatei a doua pe domeniul de definiţie.

PROBLEMĂ REZOLVATĂ

✓ *Să se determine punctele de inflexiune ale funcţiei* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} x^3, & x\leqslant 0 \\ x^4-x^3, & x\in(0,1) \\ 1-x^3, & x\in[1,+\infty) \end{cases}.$$

Rezolvare.

Domeniul de derivabilitate al funcţiei f este $D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$, deoarece $f_s'(1)=1$ şi $f_d'(1)=-3$. Derivata funcţiei f este

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2, & x\leqslant 0 \\ 4x^3-3x^2, & x\in(0,1) \\ -3x^2, & x\in(1,+\infty) \end{cases}.$$

Funcţia f este de două ori derivabilă pe $D_{f''}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ şi

$$f''(x)=\begin{cases} 6x, & x\leqslant 0 \\ 12x^2-6x, & x\in(0,1) \\ -6x, & x\in(1,+\infty) \end{cases}.$$

Studiind semnul derivatei a doua se obţine:

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$- - - -$	0	$- - -$	0	$+ + +$	$\vert$	$- - - -$	
$f(x)$		$\frown$		$\frown$	i	$\smile$		$\frown$	

Rezultă că funcţia f este concavă pe intervalele $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ şi $(1,+\infty)$ şi este convexă pe intervalul $\left(\frac{1}{2},1\right)$. De asemenea, punctul $x=\frac{1}{2}$ este punct de inflexiune al funcţiei f.

OBSERVAŢIE

✓ Punctul $x=1$ nu este punct de inflexiune pentru f, deşi derivata f'' are semne contrare în jurul său. În $x=1$ funcţia f nu are derivată.

Exerciţii şi probleme

Exersare

E1. Să se determine intervalele de convexitate şi de concavitate pentru funcţiile $f:D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=x^2-3x$; b) $f(x)=-3x^2+6x-11$;

c) $f(x)=x^3-12x$; d) $f(x)=3x^2-2x^3$;

e) $f(x)=\dfrac{x}{x+3}$; f) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$;

g) $f(x)=\dfrac{x}{x^3+1}$; h) $f(x)=x^2e^{-x}$;

i) $f(x)=x\ln x$; j) $f(x)=\operatorname{arctg}x+\dfrac{x^3}{3}$.

E2. Să se determine punctele de inflexiune pentru funcţiile $f:D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=x^3-1$; b) $f(x)=x^4-4x^3$;

c) $f(x)=(x^2+1)e^{-x}$; d) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$;

e) $f(x)=\ln(x^2+1)$; f) $f(x)=xe^{-x^2}$;

g) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$; h) $f(x)=\sin^2x$.

E3. Să se determine intervalele de convexitate, de concavitate şi punctele de inflexiune pentru funcţiile $f:D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+2, & x\leqslant 1\\ 2x^2-5x+3, & x>1\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases}x^3+x+1, & x\leqslant 0\\ x+\ln(x^2+1), & x>0\end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases}xe^x, & x\leqslant 0\\ x^2+x, & x>0\end{cases}$.

Sinteză

S1. Să se determine intervalele de monotonie, convexitate şi concavitate pentru funcţiile $f:D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=x^4-4x^2+1$; b) $f(x)=\dfrac{4x-x^2}{x+2}$; c) $f(x)=x-\arcsin x$;

d) $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$; e) $f(x)=(x^2-x+2)e^x$; f) $f(x)=x^3\ln x$.

S2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + ax + b)e^x$.

a) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ ştiind că $x = 1$ este punct de extrem, iar $x = -2$, este punct de inflexiune pentru funcţia *f*.

b) Pentru valorile lui *a, b* găsite, să se determine intervalele de monotonie, convexitate, concavitate şi punctele de extrem şi de inflexiune ale funcţiei *f*.

S3. Să se determine punctele de extrem şi de inflexiune ale funcţiei $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + ax^3 + 85x - 2$, ştiind că $f''(-3) = 0$.

S4. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b\,\mathrm{arctg}\,x$.

a) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ ştiind că $f'(1) = 2$ şi $f''(-1) = 1$.

b) Pentru valorile lui *a* şi *b* găsite, determinaţi intervalele de monotonie, convexitate şi concavitate şi punctele de inflexiune ale funcţiei *f*.

S5. Fie $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + a^2}$, $a \in (0, +\infty)$.

a) Să se determine *a* ştiind că ecuaţia tangentei la graficul funcţiei *f* în punctul de inflexiune cu abscisa pozitivă este $x + 24y - 9 = 0$.

b) Pentru $a = \sqrt{3}$, să se studieze monotonia funcţiei, intervalele de convexitate-concavitate şi să se afle punctele de extrem şi de inflexiune ale funcţiei.

4.3. Reprezentarea grafică a funcţiilor

Fie $f:D \to \mathbb{R}$, o funcţie reală de variabilă reală.

Graficul funcţiei *f este mulţimea*

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\} = \{(x, y) \mid x \in D \text{ şi } y = f(x)\}.$$

Reprezentarea geometrică a mulţimii $G_f \subset D \times \mathbb{R}$ într-un reper cartezian se numeşte ***reprezentarea graficului funcţiei*** *sau* ***curba reprezentativă a funcţiei****, notată $\mathscr{G}_f$. Astfel,*

$$\mathscr{G}_f = \{M(x, f(x)) \mid x \in D\}.$$

Când nu este pericol de confuzie, reprezentarea geometrică a graficului se denumeşte, prin abuz de limbaj, *graficul funcţiei*[4].

Relaţia $y = f(x)$, $x \in D$ se numeşte *ecuaţia curbei reprezentative a funcţiei* în raport cu reperul cartezian ales.

A reprezenta grafic o funcţie $f:D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ înseamnă a trasa (desena) curba $\mathscr{G}_f$ într-un reper cartezian.

[4] René **Sluse** a dat în 1659 prima reprezentare grafică a unei funcţii.

Reprezentarea grafică a unei funcţii pune în evidenţă anumite proprietăţi locale şi globale ale acesteia.

Pentru obţinerea reprezentării grafice se recomandă parcurgerea următoarelor etape de determinare succesivă a unor elemente caracteristice ale funcţiei.

1. Domeniul de definiţie *D*. Acesta este dat în enunţ sau în caz contrar se determină ca fiind mulţimea formată din toate punctele pentru care au sens operaţiile prin care este definită funcţia (domeniu maxim de definiţie).

2. Domeniu de studiu. Acesta este, de regulă, domeniul maxim de definiţie sau o submulţime a acestuia în cazul când funcţia are proprietăţi speciale.

- Dacă funcţia este periodică, cu perioada principală *T,* este suficient să se facă studiul funcţiei pe intervalul $[0, T]$ sau alt interval de lungime *T.*
- Dacă funcţia este pară sau impară, domeniul de studiu poate fi mulţimea $D \cap (0, +\infty)$.

3. Limitele funcţiei la capetele domeniului de definiţie şi asimptotele funcţiei. Limitele la capetele domeniului de definiţie dau informaţii despre comportarea funcţiei în aceste puncte şi despre eventualele asimptote.

- **Asimptotele verticale:** sunt dreptele de ecuaţie $x = c$ astfel încât cel puţin una din limitele laterale $f(c-0)$ sau $f(c+0)$ este infinită.
- **Asimptotele orizontale:** sunt dreptele de ecuaţie $y = a,\ a \in \mathbb{R}$, cu proprietatea că
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \quad \text{sau} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = a.$$
- **Asimptotele oblice:** sunt dreptele de ecuaţie $y = mx + n$, unde
$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}^* \ \text{ şi } \ n = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] \in \mathbb{R}.$$

4. Intersecţiile graficului cu axele de coordonate

- $\mathcal{G}_f \cap Ox$: Se rezolvă ecuaţia $f(x) = 0,\ x \in D$ şi se reţin soluţiile $x_k \in D$. Punctele de intersecţie au coordonatele $(x_k, 0)$.
- $\mathcal{G}_f \cap Oy$: Dacă $0 \in D$, atunci $\mathcal{G}_f \cap Ox = \{A(0, f(0))\}$.

5. Studiul funcţiei cu prima derivată. În această etapă se determină:

- Domeniul de continuitate, de derivabilitate şi derivata f' a funcţiei.
- Se rezolvă ecuaţia $f'(x) = 0$ şi se stabileşte semnul primei derivate.
- Se stabilesc intervalele de monotonie şi punctele de extrem.

6. Studiul funcţiei cu a doua derivată

- Se calculează f'' pe domeniul de existenţă.
- Se rezolvă ecuaţia $f''(x) = 0$ şi se stabileşte semnul derivatei a doua.
- Se stabilesc intervalele de convexitate-concavitate şi punctele de inflexiune.

7. Tabelul de variaţie a funcţiei. Rezultatele obţinute în etapele anterioare se trec într-un tabel numit *tabel de variaţie a funcţiei* care are forma următoare:

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	
$f''(x)$	

- Pe linia întâi se trece domeniul de definiţie şi valorile remarcabile ale lui x găsite în etapele anterioare.
- Pe linia a doua se trece semnul primei derivate, iar pe linia a patra se trece semnul derivatei a doua.
- Pe linia a treia se trec limitele funcţiei la capetele lui D, monotonia şi convexitatea-concavitatea funcţiei, valorile funcţiei în punctele remarcabile, etc.

8. Interpretarea tabelului de variaţie şi trasarea graficului funcţiei. Într-un reper cartezian xOy se trasează asimptotele, se reprezintă punctele de extrem, punctele de inflexiune, punctele de intersecţie ale curbei $\mathcal{G}_f$ cu axele Ox, Oy. Se unesc aceste puncte printr-o linie curbă respectând informaţiile din tabelul de variaţie

PROBLEME REZOLVATE

1. *Să se reprezinte grafic funcţia* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-3x+2$.

Rezolvare

Domeniul de definiţie.

Domeniul de definiţie este $D=\mathbb{R}$ şi coincide cu domeniul de studiu al funcţiei.

Asimptotele funcţiei.

Fiind funcţie polinomială, funcţia f nu are asimptote. Avem:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \text{ şi } \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

Intersecţia cu axele de coordonate

- $\mathcal{G}_f \cap Ox$. Rezolvăm ecuaţia $f(x)=0$. Rezultă că $x^3-3x+2=0$, ecuaţie care se scrie sub forma $(x-1)(x^2+x-2)=0$ şi are soluţiile $x\in\{-2,1\}$. Punctele de intersecţie sunt $A(-2,0)$ şi $B(1,0)$.
- $\mathcal{G}_f \cap Oy$. Deoarece $0\in D$, obţinem punctul de intersecţie $C(0,2)$.

Studiul funcţiei folosind derivata întâi.

Funcţia este continuă şi derivabilă pe $\mathbb{R}$. Se obţine:

$$f'(x) = 3x^2 - 3,\ x \in \mathbb{R}.$$

Ecuaţia $f'(x) = 0$ are soluţiile $x \in \{-1, 1\}$. Tabelul de semn şi de monotonie:

x	$-\infty$	2	-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+ + + +$	0	$- - - -$	0	$+ + + +$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 0 \nearrow$	4 M	$\searrow$	0 m	$\nearrow$	$+\infty$

Rezultă că funcţia este strict crescătoare pe intervalele $(-\infty, -1)$ şi $(1, +\infty)$ şi este strict descrescătoare pe intervalul $(-1, 1)$. Punctul $x = -1$ este punct de maxim, iar punctul $x = 1$ este punct de minim.

Studiul funcţiei folosind a doua derivată.

Funcţia f este funcţie de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f''(x) = 6x,\ x \in \mathbb{R}$. Ecuaţia $f''(x) = 0$ are soluţia $x = 0$.

Tabelul de semn şi de convexitate-concavitate este:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$- - - - - - - -$	0	$+ + + + + + +$	
$f(x)$		$\frown$	2 (i)	$\smile$	

Rezultă că funcţia f este convexă pe intervalul $(0, +\infty)$ şi concavă pe intervalul $(-\infty, 0)$. Punctul $x = 0$ este punct de inflexiune al funcţiei f.

Tabelul de variaţie a funcţiei.

Sistematizând datele obţinute, se alcătuieşte următorul tabel de variaţie:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+ + + +$	0		$- - - -$		0	$+ + + +$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4 M	$\searrow$	2	$\searrow$	0 m	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$		$- - - - - - - -$ $\frown$			0 (i)	$+ + + + + + +$ $\smile$			

Graficul funcţiei *f*.

Interpretând datele din tabelul de variaţie se obţine graficul din fig. 4.12.

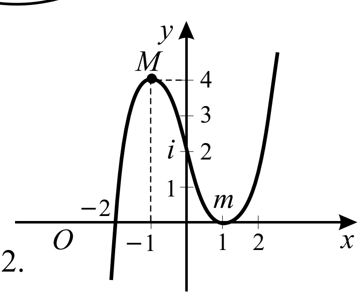


Fig. 4.12.

2. *Să se reprezintee grafic pe domeniul maxim de definiţie funcţia* $f : D \to \mathbb{R}$, *dată de legea de corespondenţă:* $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

Rezolvare

Domeniul de definiţie.

Domeniul maxim de definiţie este $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ şi coincide cu domeniul de studiu.

Asimptotele funcţiei:

- *Asimptotele orizontale*. Deoarece
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x-1} = -\infty \text{ şi } \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x-1} = +\infty,$$
rezultă că nu există asimptote orizontale.
- *Asimptote verticale*. Problema existenţei asimptotelor verticale se pune în punctul $x = 1$. Avem:
$$f(1-0) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0_{(-)}} = -\infty$$
şi
$$f(1+0) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0_{(+)}} = +\infty.$$
Rezultă că dreapta $x = 1$ este asimptotă verticală bilaterală.
- *Asimptote oblice*. Calculăm:
$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$
şi
$$n = \lim_{x\to -\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{x-1} = 1.$$

Rezultă că dreapta $y = x + 1$ este asimptotă oblică spre $-\infty$. Din calcul rezultă că $y = x + 1$ este asimptotă oblică şi spre $+\infty$.

Studiul folosind derivata întâi.

Funcţia f este funcţie raţională şi este derivabilă pe întreg domeniul de definiţie $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Avem:
$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Ecuaţia $f'(x) = 0$ are soluţiile $x \in \{0, 2\}$. Tabelul de semn şi monotonie:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+ + + +$	0	$- -$	$\vert$	$- -$	0	$+ + + +$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0 M	$\searrow$	$-\infty \vert +\infty$	$\searrow$	4 m	$\nearrow$	$+\infty$

Rezultă că funcţia este strict crescătoare pe intervalele $(-\infty, 0)$ şi $(2, +\infty)$, şi este strict descrescătoare pe intervalele $(0, 1)$ şi $(1, 2)$. Punctul $x = 0$ este punct de maxim local, iar $x = 2$ este punct de minim local.

Studiul folosind a doua derivată.

Funcţia derivată f' este funcţie raţională. Rezultă că f este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ şi $f''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3}, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Tabelul de semn pentru f'' şi intervalele de convexitate-concavitate ale funcţiei f:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$- - - - - - - -$	$\vert$	$+ + + + + + + +$
$f(x)$	$\frown$	$\vert$	$\smile$

Funcţia f este concavă pe intervalul $(-\infty, 1)$, este convexă pe intervalul $(1, +\infty)$ şi nu are puncte de inflexiune.

Tabelul de variaţie a funcţiei.

Sistematizând datele obţinute, se alcătuieşte următorul tabel:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+ + + +$	0	$- -$	$\vert$	$- -$	0	$+ + + +$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0 M	$\searrow$	$-\infty \vert +\infty$	$\searrow$	4 m	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$		$- - - - - - - -$ $\frown$			$\vert$		$+ + + + + + + +$ $\smile$		

Graficul funcţiei f.

Interpretând datele din tabelul de variaţie a funcţiei f, se obţine graficul din fig. 4.13.

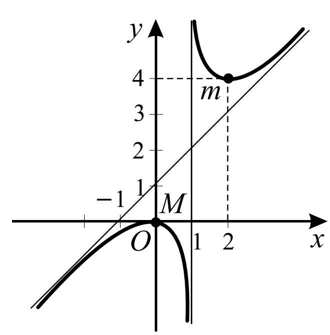


Fig. 4.13.

3. *Să se reprezinte grafic funcţia* $f\!:\!D \to \mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

Rezolvare

Domeniul de definiţie.

Domeniul maxim de definiţie este $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ şi este domeniul de studiu al funcţiei.

Asimptotele funcţiei:

- *Asimptotele orizontale*. Avem:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}=\sqrt{1}=1$$

şi

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\right)=-1.$$

Rezultă că dreapta $y=1$ este asimptotă orizontală la $+\infty$, iar dreapta $y=-1$ este asimptotă orizontală la $-\infty$.

- *Asimptote verticale*. Problema existenţei asimptotelor verticale se pune în $x=0$. Rezultă că:

$$f(0-0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\frac{1}{0_{(-)}}=-\infty$$

şi

$$f(0+0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\frac{1}{0_{(+)}}=+\infty.$$

Aşadar, dreapta $x=0$ este asimptotă verticală bilaterală.

- *Asimptote oblice*. Funcţia nu are asimptote oblice, deoarece la ambele ramuri $(\pm\infty)$ are asimptote orizontale.

Intersecţia cu axele de coordonate.

Curba $\mathcal{G}_f$ nu intersectează axele de coordonate.

Studiul folosind derivata întâi.

Funcţia f este derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ şi se obţine:

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2\sqrt{x^2+1}},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Tabelul de semn pentru f' şi monotoni a funcţiei f:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$	$\vert$	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$
$f(x)$	$\searrow\ \searrow\ \searrow\ \searrow$	$\vert$	$\searrow\ \searrow\ \searrow\ \searrow$

Funcţia este descrescătoare pe intervalele $(-\infty,\ 0)$ şi $(0,\ +\infty)$ şi nu are puncte de extrem.

Studiul folosind a doua derivată.

Funcţia f este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ şi se obţine:

$$f''(x) = \frac{3x^2+2}{x^3(x^2+1)\sqrt{x^2+1}},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Tabelul de semn pentru f'' şi de convexitate-concavitate pentru f:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$	$\vert$	$+\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +$
$f(x)$	$\frown$	$\vert$	$\smile$

Funcţia este concavă pe intervalul $(-\infty,\ 0)$ şi convexă pe intervalul $(0,\ +\infty)$ şi nu are puncte de inflexiune.

Tabelul de variaţie a funcţiei.

Sistematizând datele obţinute se alcătuieşte următorul tabel:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$	$\vert$	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$
$f(x)$	$-1\ \searrow\ \searrow\ \searrow$	$-\infty \mid +\infty$	$\searrow\ \searrow\ \searrow\ \searrow\ 1$
$f''(x)$	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$ $\frown$	$\vert$	$+\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +$ $\smile$

Graficul funcţiei *f*.

Interpretând datele din tabelul de variaţie se obţine graficul din fig. 4.14.

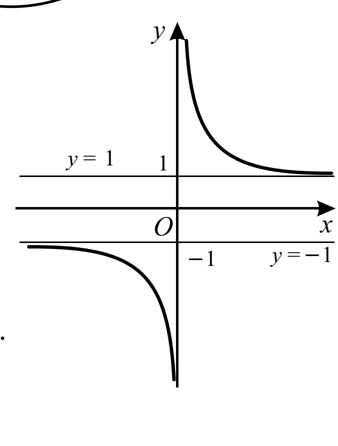


Fig. 4.14.

Exerciţii şi probleme

Exersare

E1. Să se reprezinte grafic funcţiile $f:D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2$; b) $f(x) = 8 - x^3$; c) $f(x) = -2x^3 + 3x^2$;

d) $f(x) = x^5 - 5x^4$; e) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$; f) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$;

g) $f(x) = 16 - x^4$; h) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$; i) $f(x) = (x-1)^2(x+1)$;

j) $f(x) = x^3(1-x)$; k) $f(x) = (1-x)^3 x$; l) $f(x) = (x-1)^2(x+2)^2$.

E2. Să se reprezinte grafic funcţiile $f:D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$; b) $f(x) = \dfrac{1-x}{x-2}$; c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$;

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$; e) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$; f) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$;

g) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-9}$; h) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)(x-2)}$.

E3. Să se reprezinte graficul funcţiilor $f:D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x\sqrt{x}$; b) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$; c) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$;

d) $f(x) = xe^x$; e) $f(x) = x^2 e^x$; f) $f(x) = x\ln x$;

g) $f(x) = \ln(x^2+1)$; h) $f(x) = \ln(x^2-1)$; i) $f(x) = x^2 \ln x$;

j) $f(x) = 2\operatorname{arctg} x$; k) $f(x) = x - \ln x$; l) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

Sinteză

S1. Să se reprezinte grafic funcţiile $f:D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x|x|$; b) $f(x) = x|x-1|$;

c) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 1 \\ 2x^3 - 1, & x > 1 \end{cases}$; d) $f(x) = \begin{cases} xe^x, & x \leqslant 0 \\ x\ln x - 1, & x > 0 \end{cases}$;

e) $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x \leqslant 0 \\ 1 - \sqrt{x+1}, & x > 0 \end{cases}$; f) $f(x) = |x|\ln(x^2)$.

S2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + ax}{x-1}$, $a \in \mathbb{R}$.

Să se reprezinte graficul funcţiei f ştiind că are asimptota $y = x - 1$.

S3. Să se reprezinte graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2+ax}{x+1}$, ştiind că are un extrem în $x=-3$.

S4. Se consideră funcţia $f:D\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{ax+3}$.

a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care funcţia are o asimptotă paralelă cu a doua bisectoare.

b) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care funcţia are un punct de extrem situat pe axa Oy.

c) Pentru $a=-4$, să se reprezinte grafic funcţia f.

S5. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^3}{3}+x-\sin x$. Să se reprezinte grafic funcţia f''.

S6. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x+a}{x^2+b^2}$. Să se reprezinte grafic funcţia f ştiind că tangenta în origine este prima bisectoare.

S7. Se consideră $f:D\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{ax^2+2}{x-1}$.

a) Pentru care $a\in\mathbb{R}$, graficul funcţiei este tangent dreptei $y+2x=10$?

b) Să se traseze graficul funcţiei f pentru $a=1$.

Teste de evaluare

Testul 1

1. Să se studieze monotonia funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x+a}{x^2+x+1}$, ştiind că $f'(1)=0$.

2. Să consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(x^2+4x+m)$.

a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care funcţia este definită pe $\mathbb{R}$.

b) Pentru ce valori ale lui $m\in\mathbb{R}$, punctul $A(-2,0)$ este punct de extrem al graficului funcţiei f.

c) Pentru $m=9$, să se studieze monotonia funcţiei f şi să se afle punctele de extrem ale acesteia.

3. Studiaţi convexitatea şi concavitatea funcţiei

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{arctg}x-\ln(x^2+1).$$

Testul 2

1. Fie $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5$.

a) Să se arate că f este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

b) Să se arate că $f'(0) = 0$. Este $x = 0$ un punct de extrem al funcţiei f?

2. Fie $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$.

a) Să se studieze derivabilitatea funcţiei f.

b) Să se precizeze extremele funcţiei f.

c) Să se arate că semitangentele laterale în punctul $x = 1$ sunt perpendiculare.

3. Fie $f:\mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$. Să se determine punctele în care tangenta la graficul funcţiei este paralelă cu prima bisectoare.

Testul 3

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x \leqslant 2 \\ ax + b, & x > 2 \end{cases}$.

a) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care f este continuă pe $\mathbb{R}$.

b) Există valori ale lui a pentru care f este derivabilă pe $\mathbb{R}$?

c) Dacă $f(1) = 5$ şi $f'(3) = 4 + b$, să se traseze graficul funcţiei $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x^2 + 1)$.

2. Fie $f:[0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x) - \dfrac{2x}{x+2}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in [0, +\infty)$.

b) Să se studieze monotonia funcţiei f.

c) Să se arate că $\ln(1+x) \geqslant \dfrac{2x}{x+2}$, $\forall x \in [0, +\infty)$.

3. Se dau funcţiile $f:D_1 \to \mathbb{R}$, $g:D_2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = e^x(x^2 + x - 6)$.

a) Să se afle D_1 şi D_2.

b) Să se studieze derivabilitatea funcţiilor f şi g şi să se calculeze f' şi g'.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \dfrac{g(x)}{f(x)}$.

Testul 4

1. Se consideră funcţia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}x-x+\dfrac{x^3}{3}$.

a) Să se calculeze f' şi f''.
b) Să se studieze monotonia funcţiei f.
c) Să se arate că $\operatorname{arctg}x\geqslant x-\dfrac{x^3}{3}$, $x\in[0,+\infty)$.

2. Să se reprezinte grafic funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x}{\sqrt{2}}$.

3. Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1-x}{x^2}$ şi $M\,(a,\,f(a))\in\mathcal{G}_f$, $a\in\mathbb{R}\setminus\{0,2,3\}$.
Notăm cu N punctul în care tangenta la grafic în punctul M intersectează din nou graficul funcţiei. Să se determine valorile parametrului a pentru care coeficientul unghiular al tangentei la grafic în punctul N este egal cu 3.

Probleme recapitulative

1. Să se determine limitele de funcţii:

a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{20}-2x^{10}+1}{(x-1)^2}$; b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}$;

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+\sin 2x+...+\sin nx}{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x+...+\operatorname{tg}nx}$; d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin(8x)}{\sin(2x)}$;

e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x}{x^2}$; f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^x+3^x+4^x-3}{5^x+6^x-2}$.

2. Fie $L=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left[x+\sqrt{x}+\ln^2 x\right]}{3x+1}$. Atunci:

a) $L=3$; b) $L=0$; c) $L=\ln 2$; d) $L=\dfrac{1}{3}$; e) $L=1$.

3. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$.

Facultatea de Chimie Constanţa, 1997

4. Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ pentru care $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a\cos x+b\cos 2x+c}{x^4}=1$.

5. Să se studieze continuitatea funcţiilor $f:D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=\begin{cases} 5x^2-3, & x\leqslant 1 \\ a-x, & x>1 \end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x<0 \\ a+\ln(x+1), & x\geqslant 0 \end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b, & x\leqslant 1 \\ 2x+a, & x\in(1,2) \\ x^3-ax+2, & x\geqslant 2 \end{cases}$.

6. Să se studieze continuitatea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} a+e^x, & x\leqslant 0 \\ \dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{b}}{x}, & x>0 \end{cases}.$$

Universitatea Piteşti, 1995

7. Să se determine parametrii reali *a, b, c* pentru care funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & x\leqslant 0 \\ ax^2+bx+c, & x>0 \end{cases}$$ este continuă şi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\in\mathbb{R}$.

Universitatea Politehnică Bucureşti, 2004

8. Să se determine $a, b, c\in\mathbb{R}$, pentru care funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} ae^{2x}, & x\leqslant 0 \\ -2\sin x+b\cos 4x, & x>0 \end{cases}$$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

9. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\max\left\{\dfrac{x}{x-1},\dfrac{x}{x+1}\right\}$.

a) Să se expliciteze $f(x)$.

b) Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea funcţiei *f.*

10. Fie $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} ax^2-3x+1, & x\in[-1,0) \\ x^2+bx-c, & x\in[0,1] \end{cases}$.

a) Să se determine $a, b, c\in\mathbb{R}$, pentru care funcţia este derivabilă pe $(-1,1)$ şi $f(-1)=f(1)$.

b) Pentru valorile găsite, să se studieze derivabilitatea funcţiei $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.

11. Se consideră $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)$ şi

$F:(-1,0)\cup(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,

$$F(x)=\frac{c+bx+a\ln(x+1)}{x}.$$

Dacă $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=1$ şi $x^2F'(x)=f(x)$, $\forall x\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$, iar $\alpha=F(2)$, atunci:

a) $\alpha=\ln\sqrt{3}$; b) $\alpha=2$; c) $\alpha=\ln 6$; d) $\alpha=1$; e) $\alpha=2\ln 2$.

ASE Bucureşti, 2001

12. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x-\sqrt{x^2m^2+mx+1}, & x\leqslant 1\\ \sqrt{x-1}+|m|\sqrt{x}, & x>1\end{cases}$.

Dacă $A=\left\{m\in\mathbb{R}\,\middle|\, f \text{ este continuă pe } \mathbb{R}\right\}$ şi $\alpha=\sum\limits_{m\in A}m^2$, atunci:

a) $\alpha=1$; b) $\alpha=\dfrac{34}{25}$; c) $\alpha=\dfrac{25}{4}$; d) $\alpha=\dfrac{58}{9}$; e) $\alpha=\dfrac{81}{64}$.

13. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(-1)^{[x]}\left(x+a\left[\dfrac{x}{2}\right]+b\right)+3$, unde $a, b\in\mathbb{R}$.

Dacă

$A=\left\{(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,\middle|\, f \text{ este periodică de perioadă 2 şi este continuă în } x=1\right\}$,

iar $S=\sum\limits_{(a,b)\in A}(a+b)$, atunci:

a) $S=2$; b) $S=-1$; c) $S=0$; d) $S=-3$; e) $S=4$.

ASE Bucureşti, 2002

14. Se consideră funcţia $f:[0,2]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}px, & x\in[0,1)\\ m, & x=1\\ x^3+q, & x\in(1,2]\end{cases}$$

şi mulţimea $A=\left\{(p,m,q)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,\middle|\, f \text{ este derivabilă pe } (0,2)\right\}$.

Dacă $S=\sum\limits_{(p,m,q)\in A}(p+m+q)$, atunci:

a) $S=7$; b) $S=-1$; c) $S=0$; d) $S=10$; e) $S=8$.

ASE Bucureşti, 1998

15. Să se determine asimptotele funcţiei $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3|x-2|}{x-1}$; b) $f(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|}$;

c) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3|x-2|}{x(x-1)}$.

16. Se consideră funcţia $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x + e^x$.

a) Arătaţi că $x \cdot f'(x) = 1 + x \cdot e^x$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $A(1, e)$.

c) Calculaţi $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

Bacalaureat, 2011

17. Fie $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2 - x - \dfrac{4 \ln x}{x}$. Să se determine coordonatele punctului în care tangenta la graficul funcţiei este paralelă cu asimptota oblică a funcţiei.

18. Fie $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x^2 + ax + b}{x+1}$.

a) Să se afle parametrii $a,\ b \in \mathbb{R}$ pentru care dreapta $y = 2x + 3$ este asimptotă a funcţiei.

b) Pentru $a = 5$, să se determine b astfel încât funcţia f să admită asimptotă verticală.

Facultatea de Ştiinţe Economice Timişoara, 1995

19. Pentru ce valori ale lui $m \in \mathbb{R}$, funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 + (m-2)x + 2 - m}$$

are domeniul de derivabilitate $\mathbb{R}$?

Universitatea Politehnică Bucureşti, 1990

20. Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1 + ax}{1 - x^2} \cdot e^{2x},\ a \in \mathbb{R}.$$

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 f(x)$.

b) Pentru care valori ale lui a există egalitatea $3f'(0) - f(0) = 11$?

21. Fie $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{(x+2)^{33} + (x-2)^{33}}{(x+2)^{33} - (x-2)^{33}}$ şi $T = f'(-2) + f'(0) + f'(2)$.

Atunci:

a) $T = \dfrac{1}{2}$; b) $T = \dfrac{33}{2}$; c) $T = 1$; d) $T = \dfrac{3}{2}$; e) $T = \dfrac{22}{3}$.

ASE Bucureşti, 2000

22. Fie $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \ln(1-x), & x \leqslant 0 \\ ax^2 + bx + c, & x > 0 \end{cases}$. Să se determine valorile $a, b, c \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia f este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$.

ASE Bucureşti, 1990

23. Pentru ce valori ale parametrilor $a, b, c \in \mathbb{R}$, funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + bx + c, & x \leqslant 1 \\ \operatorname{arctg}(x-1), & x > 1 \end{cases}$$

este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$.

ASE Bucureşti, 1994

24. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x - \pi| \sin x$.

a) Să se arate că funcţia f este derivabilă în $x = \pi$.

b) Funcţia f este de două ori derivabilă în $x = \pi$?

25. Fie $f:\mathbb{R} \to (1, +\infty)$, $f(x) = 4^x + 2^x + 1$.

a) Să se arate că f este funcţie inversabilă.

b) Să se determine f^{-1} şi $\left(f^{-1}\right)'(3)$.

Universitatea Politehnică Bucureşti, 1987

26. Fie $f:\mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.

a) Să se arate că există numerele $a, b, c \in \mathbb{R}$ pentru care:

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}.$$

b) Să se calculeze $S = f''(1) + f''(2) + \ldots + f''(10)$.

27. Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^2 \operatorname{tg} x}$.

ASE Bucureşti, 1990

28. Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$.

Universitatea Politehnică Bucureşti, 1990

29. Fie $M = \left\{ n \in \mathbb{N} \middle| \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cos x - \sin x}{x^n} \in \mathbb{R} \right\}$. Dacă $m = \sum\limits_{n \in M} n$, atunci:

a) $m = 3$; b) $m = 6$; c) $m = 4$; d) $m = 15$; e) $m = 10$.

ASE Bucureşti, 2000

30. Se consideră funcţia $f : [-1, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt{x + 5 - 4\sqrt{x+1}} + \sqrt{x + 10 - 6\sqrt{x+1}}.$$

Dacă $B = \left\{ x_0 \in (-1, +\infty) \mid f \text{ nu este derivabilă în } x_0 \right\}$ şi $S = \sum\limits_{b \in B} \left(f'_d(b) - f'_s(b) \right)^2$, atunci:

a) $S = \dfrac{1}{4}$; b) $S = \dfrac{13}{36}$; c) $S = \dfrac{1}{9}$; d) $S = \dfrac{11}{36}$; e) $S = \dfrac{3}{2}$.

ASE Bucureşti, 1998

31. Se consideră funcţia $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_a(x) = \sqrt[3]{4(e^x - x - 1) - x^3 + (a-3)x^2}, \ a \in \mathbb{R}.$$

Dacă $A = \left\{ a \in \mathbb{R} \middle| f_a \text{ este derivabilă în } x = 0 \right\}$, atunci:

a) $A \subset \left(-3, -\dfrac{1}{2}\right)$; b) $A \subset \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$; c) $A \subset \left(\dfrac{5}{2}, 5\right)$;

d) $A \subset \left(\dfrac{9}{2}, \dfrac{13}{2}\right)$; e) $A \subset (7, 15)$.

ASE Bucureşti, 2000

32. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2|x-a| - |x-b|,\ a, b \in \mathbb{R}$.

Fie $A = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid f$ este derivabilă pe $\mathbb{R}\}$ şi $S = \sum_{(a,b)\in A}(a^2 + b^2)$,

atunci:

a) $S = 13$; b) $S = 26$; c) $S = 17$; d) $S = 5$; e) $S = 4$.

ASE Bucureşti, 2001

33. Fie funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} xe^x, & x \leqslant 1 \\ ax + b, & x > 1 \end{cases}$.

Dacă f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $A = \sum_{k=1}^{10} f'(k)$, atunci:

a) $A = 20e$; b) $A = 0$; c) $A = 100e$; d) $A = 11e$; e) $A = e$.

34. Să se determine numărul de elemente ale mulţimii:

$$A = \left\{ a \in \mathbb{R} \,\middle|\, \lim_{x\to 1} \frac{x^{2n} - 2x^n - a}{(x-1)^2} = b \in \mathbb{R} \right\}.$$

35. Fie $a = \lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^5) - \ln^5(1+x)}{x^6}$. Atunci:

a) $a = \dfrac{5}{2}$; b) $a = \dfrac{5}{6}$; c) $a = \dfrac{\sqrt{e}}{2}$; d) $a = \dfrac{6}{5}$; e) $a = \dfrac{3}{2}$.

ASE Bucureşti, 2001

36. Să se calculeze $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})}$.

37. Fie $f:\mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + 2}{x - 1}$.

a) Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia admite asimptota $y = x + 2$.

b) Să se reprezinte graficul funcţiei f pentru $a = 1$ şi $b = 1$.

c) Pentru $a = b = 1$, să se determine aria triunghiului determinat de axa Ox şi asimptotele funcţiei f.

38. Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}$.

a) Să se traseze graficul funcţiei *f*.

b) Să se determine în ce raport împarte dreapta $y = \dfrac{x}{2}$ aria patrulaterului determinat de axa *Ox* şi asimptotele funcţiei *f*.

39. Să se demonstreze că pentru oricare $m \in \mathbb{R}$, funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + mx)e^{-x}$, admite un maxim şi un minim local.

40. Se consideră funcţia $f:D \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = ax + \sqrt{bx^2 + cx + 1},\ a, b, c \in (0, +\infty).$$

a) Să se determine *a, b, c* ştiind că funcţia admite o asimptotă oblică la $+\infty$ paralelă cu dreapta $y = 4x + 5$, iar către $-\infty$ o asimptotă orizontală $y = -1$.

b) Să se construiască graficul funcţiei pentru valorile lui *a, b, c* determinate.

41. Se dă funcţia $f:D \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x^2 + ax}{bx + 2}$.

a) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care extremele funcţiei se obţin pentru $x = -8$ şi $x = 4$.

b) Pentru valorile lui *a, b* determinate, să se reprezinte graficul funcţiei *f*.

42. Fie $f:D \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{m(x+1)^3}{x^2 + x + m}$, $m \in \mathbb{R}^*$.

a) Pentru ce valori ale lui *m* funcţia admite două asimptote paralele cu axa *Oy*?

b) Pentru ce valori ale lui *m* funcţia este monotonă pe $\mathbb{R}$?

c) Pentru $m = 1$, să se reprezinte graficul funcţiei *f*.

d) Fie *A, B* punctele în care graficul funcţiei *f*, pentru $m = 1$, intersectează axele de coordonate. În ce puncte graficul funcţiei admite tangente paralele cu dreapta *AB* ?

Indicaţii de rezolvare şi răspunsuri

Partea I. Elemente de calcul matriceal. Sisteme de ecuaţii liniare

Capitolul 2. Determinanţi 2.1. Determinantul unei matrice pătratice de ordin cel mult trei. 2.1.4. Proprietăţile determinanţilor. (pag.52)

E2. d) 2; e) 24; f) 18; g) -7; h) 3. **E3.** a) $\det(A)+\det(B)<\det(A+B)$; b) egalitate. **E4.** a) 2; b) -8; c) $1; -\frac{4}{5}$; d) $1, -\frac{6}{5}$. **E5.** a) 26; b) 18; c) -10; d) -4; e) 3; f) 0; g) 0; h) 0. **E8.** a) $\delta_{11}=21, \delta_{12}=-40, \delta_{13}=-52, \delta_{21}=59, \ldots$; b) $d=8$. **S1.** 31. **S3.** a) $\{-9, 10\}$; b) $\{-1, 9\}$; c) $\left\{-2, \frac{9}{7}\right\}$; d) 2. **S4.** a) $x^2-x-90=0$; $x\in\{-9, 10\}$; b) $-4x=0$; $x=0$; c) $x^2-10x+9=0$, $x\in\{1, 9\}$; d) $x=1$. **S5.** Ecuaţia este $x^3-6x^2=5x=0$, cu soluţiile $x\in\{0, 1, 5\}$ şi $S=126$. **S6.** a) $(b-a)(c-a)(b-c)$; b) Se scade coloana întâi din celelalte; d) se adună la linia întâi celelalte linii; se obţine $d=0$; e) se scade coloana întâi din a doua şi a treia, se dă factor comun pe coloana a doua, a treia, ... Se obţine $d=(y-x)(z-x)(xy+xz+yz)$; f) $d=2(b-a)(c-a)(c-b)$. **S7.** a) Se adună toate liniile la prima linie şi se dă factor $(a+b+c)$ de pe această linie; b) Se scade coloana întâi din coloana a doua şi a treia, se dă factor comun pe coloana a doua şi a treia etc.

S10. a) $\det(A)=0$, $\det(B)=18$; $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$; c) $s=0$, proprietatea P_{10}. **S11.** a) Se adună coloana a treia la prima, se dă factor de pe coloana întâi şi a doua şi se obţin coloane identice; b) Se adună coloana a treia la prima şi se obţin două coloane proporţionale; c) Se scade prima coloană din a doua coloană şi se obţin coloane proporţionale.

2.2. Aplicaţii ale determinanţilor în geometrie. 2.2.3 Aria unei suprafeţe triunghiulare. (pag. 62)

E1. $AB: 7x+3y-2=0$; A, B, C sunt coliniare. **E2.** a), c), d) sunt triplete de puncte coliniare.

E3. a) $-x-y+13=0$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{2}|10m-5|=22{,}5$; $m\in\{-4, 5\}$.

E4. a) $(AB): x+4y+11=0$; b) $\mathrm{d}(C, AB)=\frac{|-1-12+11|}{\sqrt{1+16}}=\frac{2\sqrt{17}}{17}$; c) 2.

S1. a) $(AC): 2x+y-2=0$; b) $\mathrm{d}(B, AC)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\mathrm{d}(D, AC)=\frac{9\sqrt{5}}{5}$; d) $M(2, 4)$.

S2. Se obţine ecuaţia $3\cdot 2^{2x}-10\cdot 2^{x}+8=0$; $x\in\left\{1, \log_2\frac{4}{3}\right\}$. **S4.** a) $m\in\{1, 2\}$; b) $m\in\{0, 3\}$. **S5.** $m\in\left\{-\frac{8}{3}, 3\right\}$. **S6.** a) $m\in\{-2, 2\}$; b) $m=0$ sau $m=2n$.

S7. $(BC):(m+1)x+(1-m)y+6m-2=0$ şi $m=-1$. **S8.** Se ia $M(a+3,\ a)$ şi se obţine ecuaţia $|a-6|=|2a+12|$, cu soluţia $a\in\{-18,\ -2\}$. **S9.** $m\in\{-1,\ 3\}$.

Teste de evaluare. Testul 1. 1. b; **3.** $\frac{4}{5}$; **4.** $m\in\left\{-3,\ \frac{5}{2}\right\}$. **Testul 2. 1.** $S_1=\left\{\frac{3}{2}\right\}$; $S_2=\left\{-2,\ -\frac{9}{5}\right\}$; **2.** -2; **3.** $(xz-ab-cy)^2$; **4.** 4.

Capitolul 3. Sisteme de ecuaţii liniare 3.1. Matrice inversabile (pag. 70)

E2. a) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5 & -1\\ 8 & -2\end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$. **E3.** Condiţia este $\det(A)\neq 0$; a) $m\neq\pm 10i$; f) $m\neq\pm i$; g) $m^2-3m\neq 0$; h) $m\in\mathbb{R}\setminus\{1,\ -119\}$. **E5.** Se foloseşte formula $(A^{-1})^{-1}=A$. **S1.** Se verifică: $\det(A\neq 0\Rightarrow b)$, d) . **S2.** a) $\begin{pmatrix}-4i & -1\\ -3 & i\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}\sqrt{2}-\sqrt{3} & -1\\ 1+i & -\sqrt{2}-\sqrt{3}\end{pmatrix}$. **S3.** a) Se impune condiţia $\det(A)\neq 0,\quad \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow(m-1)x^2-2x+2m-3\neq 0,\quad \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4-4(m-1)(2m-3)<0\Leftrightarrow m\in(-\infty,\ \frac{1}{2})\cup(2,\ \infty)$. **S4.** $A^*=A^{-1}\Leftrightarrow\det(A)=1$ etc.

3.2. Ecuaţii matriceale. (pag. 74) E1. a) $X=\begin{pmatrix}-7 & 3\\ -12 & 5\end{pmatrix}$; b) $X=\begin{pmatrix}-7 & 3\\ -12 & 5\\ 3 & -1\end{pmatrix}$; c) $X=\begin{pmatrix}7 & -4\\ -5 & 3\end{pmatrix}$. **E2.a)** $X=\begin{pmatrix}-2 & 3 & -1\\ 3 & -4 & 2\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}10 & 7 & 2\\ 8 & 5 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$.

3.3. Sisteme de ecuaţii liniare (pag. 90) E1. a) $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 8 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7\\ 2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$; b) $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\\ 5 & -6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -8\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$; c) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 4 & 1 & 3\\ 9 & -2 & -8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 4\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$; d) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6\\ 11\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$. **E2.** a) $(-2,\ -4)$; b) $(-6,\ 2)$; c) $(i,\ 1)$.

E3. a) $a=-1,\ b=2$; b) $a=b=1$. **E4.** a) $x=1,\ y=-1$; b) $x=2,\ y=1$; c) $x=-23,$ $y=-28$; d) $x=2,\ y=-1,\ z=3$; e) $x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{3},\ z=\frac{1}{5}$; f) $x=-a+5b-8c,$ $y=a-3b+5c,\ z=a+3c-2b$. **E5.** a) Da, $x=\frac{133}{33}$, $y=-\frac{4}{33}$; b) Nu; c) Da,

$x=\frac{65}{3}$, $y=-\frac{4}{3}$, $z=-\frac{101}{3}$; d) Da, $x=6,\ y=4,\ z=6$. **E6.** a) $x=2,\ y=1$; b) $x=3$, $y=1$; c) $x=47,\ y=-57$; d) $x=1,\ y=1,\ z=0$; e) $x=2,\ y=4,\ z=3$; f) $x=3$, $y=-1,\ z=2$. **E7.** $x=1,\ y=2,\ z=3$. **E8.**a) $x=3,\ y=1$; b) $x=2, y=-1$; c) $x=3$, $y=-1,\ z=-1$; d) $x=3,\ y=1,\ z=2$; e) incompatibil; f) com- patibil nedeterminat: $x=6-5\alpha,\ y=3\alpha-2,\ z=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$; i) compatibil nedeterminat: $a=\frac{17}{4}+\alpha,\ b=\alpha$, $c=\frac{23}{4}-\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$. **S1.** a) $\Delta=4-m^2,\ \Delta\neq 0\Rightarrow,\Rightarrow m\in\mathbb{R}\setminus\{-2,\ 2\}$ $x=2m+1$, $y=\frac{2m+1}{2-m}$, $z=\frac{2m^2+2m-2}{2-m}$; b) $\Delta=-(m+1)(2m+1),\ m\in\mathbb{R}\setminus\left\{-1,\ -\frac{1}{2}\right\}$, $x=\frac{14m-8}{(m+1)(2m+1)}, y=\frac{10}{2m+1}, z=\frac{-6m^2-16}{(2m+1)(m+1)}$.**S2.** a) $\Delta=0\Rightarrow(m^2-4)(m-1)=$ $=0\Rightarrow m\in\{-1,\ -2,\ 2\}$; b) $\Delta=5m-19=0$. **S3.** a) $x=-2,\ y=3$. **S4.** a) $x=i,\ y=0$, $z=1$; b) $x=-1,\ y=1,\ z=2$. **S6.** a) $\Delta=m(m-2),\ m\in\mathbb{R}\setminus\{0,\ 2\}$; b) Incompatibil pentru $m=0$ şi $m=2$. **S7.** $\Delta\neq 0$ fiind determinat Vandermonde: $x=\frac{(b-2)(c-2)}{(b-a)(c-a)}$, $y=\frac{(2-a)(c-2)}{(b-a)(c-b)}, z=\frac{(2-a)(2-b)}{(c-a)(c-b)}$.**S8.**a) $\Delta=6m(m-2),\ m\in\{0,\ 2\}$; b) $m\in\{0,\ 2\}$; c) $x=\frac{5m-6}{2m(m-2)}$, $y=\frac{-m-2}{2m(m-2)}$, $z=\frac{4}{m}$; d) $m\in\left(-\frac{1}{2},\ 2\right)\setminus\{0\}$. **S9.** $\Delta=\beta(1-\alpha)$. Dacă $\alpha\neq 1,\ \beta\neq 0$, se obţine un sistem Cramer. Pentru $\alpha=1$ sau $\beta=0$ se obţin necunoscute secundare. **S11.** $\Delta=3(2-m)$. Pentru $m\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$ sistemul este de tip Cramer. Soluţia este $x=-\frac{4}{3}, y=\frac{2}{3}, z=1$. Pentru $m=2$ sistemul este compatibil simplu nedeterminat: $x=-\frac{4\alpha}{3},\ y=1-\frac{\alpha}{3},\ z=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$. **S12.** $\Delta=(m+1)(2-m)$. Se pune condiţia $\Delta\neq 0$ şi se obţine $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1,\ 2\}$. **S13.** $x=20,\ y=30,\ z=15$. **S15.** a) $x=3$, $y=-1,\ z=0$; b) $\Delta=5(m-3)$. Pentru $m\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$ se obţine un sistem de tip Cramer. Pentru $m=3$ şi $n\neq 3$ sistemul este incompatibil. Pentru $m=3,\ n=3$ sistemul este compatibil simplu nedeterminat: $x=-1-13\alpha,\ y=1+5\alpha,\ z=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$.

Probleme recapitulative (pag. 97) **1.** $a=-5,\ b=-2$. **2.** $x=2,\ y=0,\ A^n=2^nI_2$. **3.** $\alpha=3, \beta=-3$. **5.** $A^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, A^3=O_3$. Se obţine $(I_3+A)^n=C_n^0I_3+C_n^1A+C_n^2A^2$. **8.** $C^2=4C$ şi $C^n=4^{n-1}C$. **9.** a) $A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$; b) $A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4&-5\\11&-4\end{pmatrix}$,

$B=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 5\\ -7 & 3\end{pmatrix}$. **10.** $a=11$. **11.** $A=\begin{pmatrix}1 & i\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. **12.** a) $x\in\left\{1,-\frac{5}{4}\right\}$; b) $x=0$; c) $\Delta=(x-1)^2(x^2+2x+2)$, $x=1$. **13.** a) $x\in\{a,b\}$; b) $x\in\mathbb{R}$; c) $x\in\{a,b\}$. **14** a) $a\in\mathbb{R}^*$; b) $\det(A)=a^3(a+1)(a^2+1)$. **15.** a) $X=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; b) $x=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & -4 & 8\\ 9 & -16 & 1\\ 4 & -24 & 16\end{pmatrix}$. **16.** $\det(A)=X^2+3mX+2m$. Se pune condiţia $\Delta<0$ şi se obţine $9m^2-8m<0$, $m\in\left(0,\frac{8}{9}\right)$. **17.** $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, iar $(A^4)^{-1}=(A^{-1})^4=\begin{pmatrix}34 & -21\\ -21 & 13\end{pmatrix}$. **18.** Fie $C=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. Atunci $B=A^{-1}CA$ şi $B^{-1}=(A^{-1}CA)^{-1}=A^{-1}C^{-1}A$ etc. **20.** $\alpha=13$.

Partea a II-a. Elemente de analiză matematică

Capitolul 1. Limite de funcţii. (pag. 151) E1. a) 6; b) 5; c) -3; d) 1; e) 2; f) $\frac{11}{6}$. **E2.** a) 2; b) 0; c) 0; d) 1; e) 0; f) 0. **E3.** a) 0; b) 2; c) 1; d) $\frac{2}{3}$; e) 0; f) $\frac{2}{5}$. **E4.** a) 2; b) 0; c) 125; d) 1; f) $\frac{\pi}{2}$. **S2.** a) $a=\frac{3}{2}$; b) $a=10$; c) $a=1$; d) $a=1$. **S3.** a) $f(0+0)=0$, $f\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=+\infty$, $f\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=1$; b) $f(0+0)=0$; $f(0-0)=1$; $f(1-0)=0$; $f(1+0)=0$; c) $f(0-0)=-1$, $f(0+0)=-1$. **S4.** a) 0; b) 0; c) 3; d) 2; e) $\frac{1}{2}$; f) 2; g) 0; h) 2. **S5.** a) 1; b) 2; c) 0; d) 0; e) 0; f) 4.

Capitolul 2. Funcţii continue. (pag. 183). E1. a), b), c) funcţii continue. **E2.** a) $f(1-0)=1=f(1+0)$; $f(1)=1$, continue. **E3.** a) Prima speţă; b) Prima speţă; c) Speţa a doua; d) Speţa a doua. **E4.** a) $f(1-0)=1+a$, $f(1+0)=3$. Funcţie continuă dacă $a=2$ şi şi discontinuă dacă $a\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$. b) Pentru $a=1$, $b=-1$ f continuă pe $\mathbb{R}$; pentru $a=1$, $b\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, f continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{1\}$; pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $b=-1$ f continuă pe $\mathbb{R}^*$, $b\in\mathbb{R}^*\setminus\{1\}$, f continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$; c) $a=1$ f continuă pe $\mathbb{R}$; pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ f continuă pe $\mathbb{R}^*$; d) pentru $a=0$, $D_c=\mathbb{R}$, pentru $a=\frac{1}{2}$, $D_c=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **S1.** a) $a=2$, $D_c=\mathbb{R}$, $a\neq 2$, $D_c=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. b) $a=\frac{1}{2}$, $D_c=\mathbb{R}$; $a=\pm\frac{1}{2}$, $D_c=\mathbb{R}\setminus\{1\}$; c) $a=-1$, $D_c=\mathbb{R}$; $a\neq -1$, $D_c=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. d) $a=0$, $D_c=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **S2.** a) $a\in\{1,2\}$; b) Dacă $2a-1<a^2$, $D_c=(-\infty,2a-1]\cup[a^2,\infty)$. Dacă $a=1$, $b=1$, $D_c=\mathbb{R}$; dacă $a=1$, $b\neq 1$, $D_c=\mathbb{R}\setminus\{1\}$; c) $a=2$, $b=1$; d) $a=b=1$ sau $a=\log_2 3$, $b=\log_{3.} 2$. **S3.** a) $a=6$, $b=-7$; b) $a=1$, $b=0$.

Capitolul 3. Funcţii derivabile. (pag. 202). E2. Funcţii elementare. a) $f'(-1)=3$; b) $f'(2)=1$; c) $f'(0)=-\frac{1}{25}$; d) $f'(0)=\frac{1}{2}$; e) $f'(-1)=\frac{1}{2}\ln 2$; f) $f'(0)=3$. **E3.** Funcţii derivabile. **E4.** a) $f_s'(1)=-1$; $f_d'(1)=1$; b) $f_s'(0)=0$; $f_d'(0)=2$; c) $f_s'(-1)=1$; d) $f_s'(1)=\pi$, $f_d'(1)=1$. **S2.** a) Discontinuă în $x=0$; b) derivabilă dacă $a=0$, $b=4$; c) continuă, nederivabilă; d) pentru $a=b$ funcţie continuă; nu este derivabilă. **S3.** a) Funcţie continuă, $f_s'(1)=0$, $f_d'(1)=3$. Punct unghiular: b) Da; c) Da. **S4.** a) Da; b) Da; **S6.** a) Panta tangentei este $m=c+6$. Condiţie: $c+6=7$; b) $a=1$, $b=4$.

Capitolul 4. Studiul funcţiilor cu ajutorul derivatelor. (pag. 255) E3. f) $D=(0,\infty)$, $D_{f'}=(0,\infty)$, $f'(x)=\ln x+1$, $f''(x)=\frac{1}{x}$, $x=-\frac{1}{e}$ punct de extrem. i) $D=(0,\infty)$; $f'(x)=\frac{x-1}{x}$, $f''(x)=\frac{1}{x^2}$. Punctul $x=1$ de minim. Dreapta $x=0$ asimptotă verticală.

CUPRINS