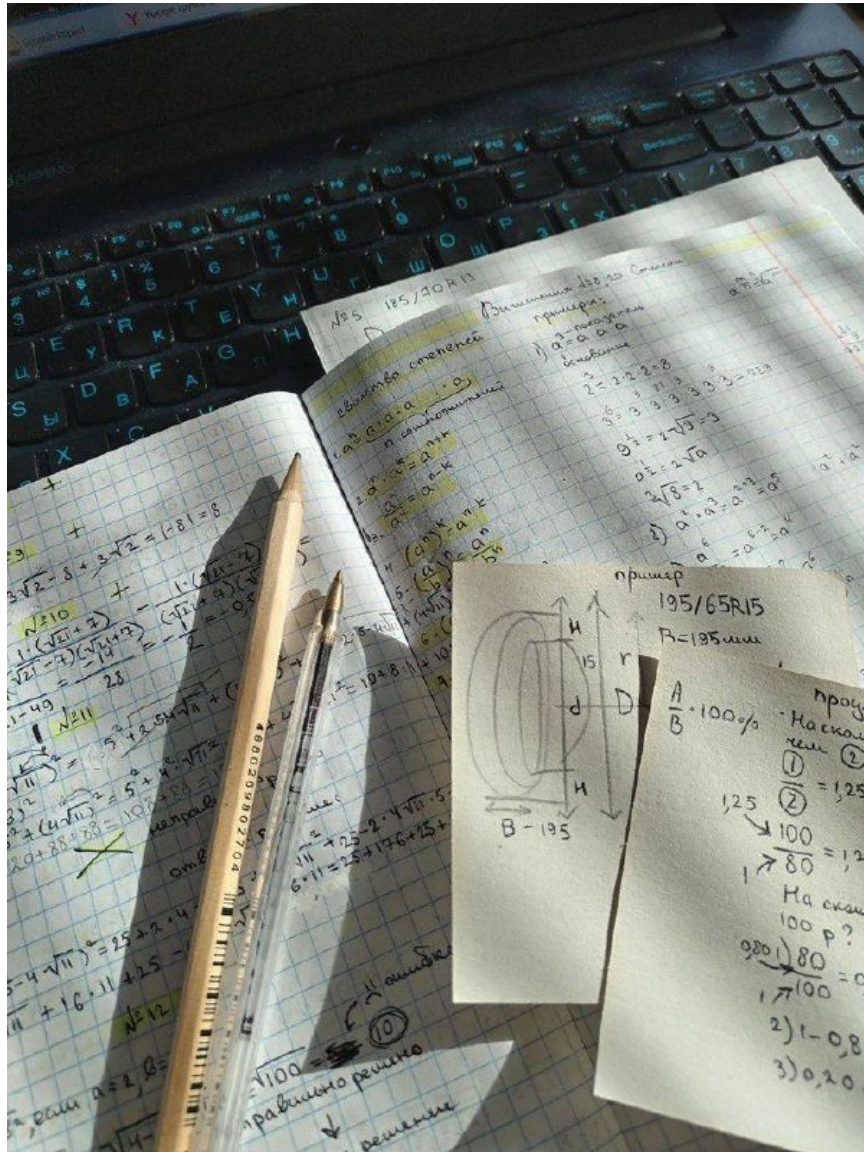


Уравнения третьей и  
четвёртой степени,  
решаемые в радикалах.

Г. Кардано и Л. Феррари



Можно ли выразить корни полинома

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

с комплексными коэффициентами

$$a_0, a_1, \dots, a_n$$

в виде «хороших» функций от этих коэффициентов? Вспомним, что для корней квадратного уравнения существует общая формула вычисления корней:

$$x^2 + ax + b = 0 \quad \lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 4b}$$

Эта формула включает в себя элементарные алгебраические операции  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $\div$  и операцию извлечения квадратного корня.

По аналогии можно сформулировать и общую задачу.

Задача. Найти выражения корней полинома степени  $n > 2$  в виде функций его коэффициентов; при этом функции должны представлять конечную комбинацию элементарных алгебраических операций и операций извлечения корней произвольных (целых) степеней.

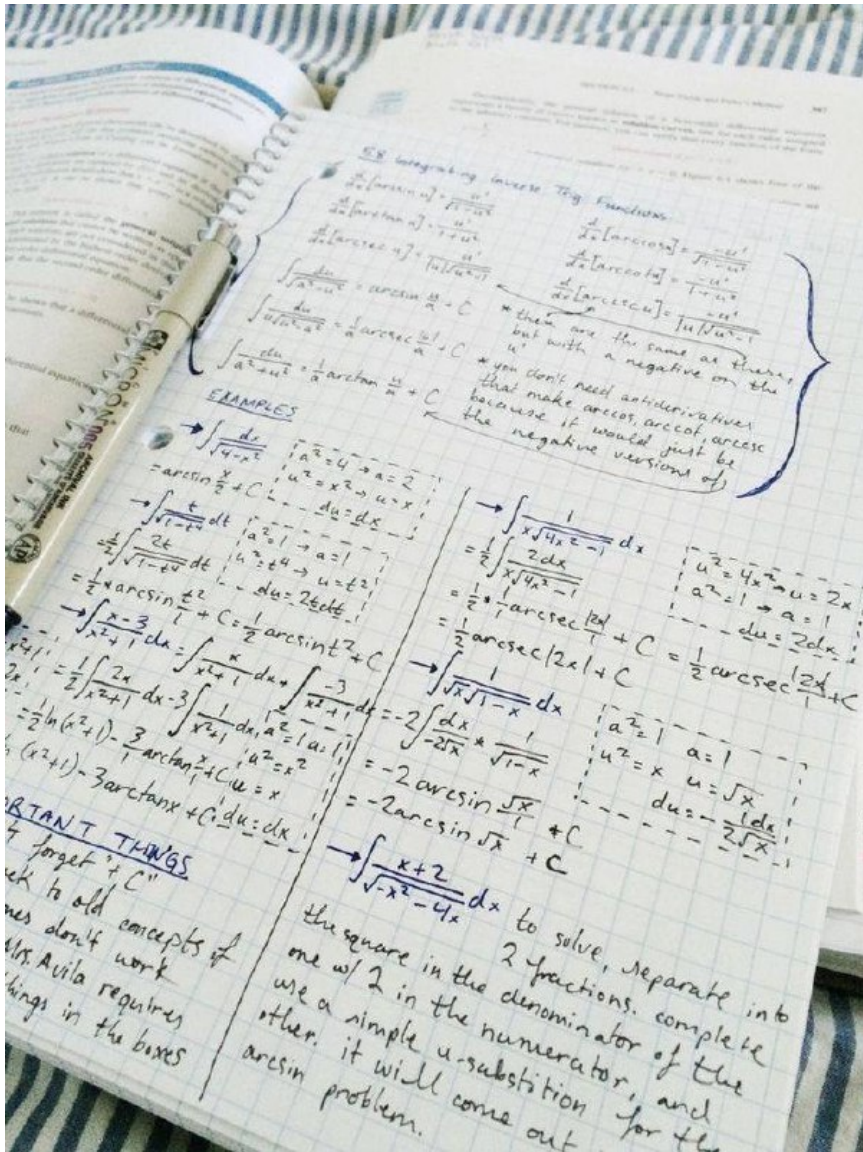
Поставленная задача называется задачей о разрешимости уравнения в радикалах<sup>1)</sup>.

$$x^m - 1 = 0$$

при

$$m = 2n, n \in \mathbb{N}$$

разрешимо в радикалах.



Оказывается, что любое уравнение третьей или четвертой степени разрешимо в радикалах. Перед тем, как изложить способы их решения, сделаем два упрощения. Первое из них заключается в том, что уравнение  $f(x)=0$  делится на старший коэффициент полинома  $f(x)$ .

Полином называется нормализованным, если его старший коэффициент равен

1

. Операция деления полинома на его старший коэффициент называется нормализацией полинома.

Очевидно, что нормализованный полином имеет те же корни (и в тех же кратностях), что и исходный. Для простоты обозначений, будем считать, что полином уже нормализован:

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n.$$

Второе упрощение заключается в замене переменной (подстановке):

$$x = y + a$$



. Ее результатом будет новый полином той же степени, что и исходный, относительно переменной

$$y: F(y) \rightarrow f(y+\alpha)$$

. Корни нового полинома связаны с корнями старого по формуле  $\lambda_j = \Lambda_j + \alpha$ ; так что, найдя корни одного полинома, легко установим и корни другого. Подберем теперь параметр

$\alpha$  так, чтобы обратить в нуль коэффициент при  $y^{n-1}$  в полиноме  $F(y)$ .

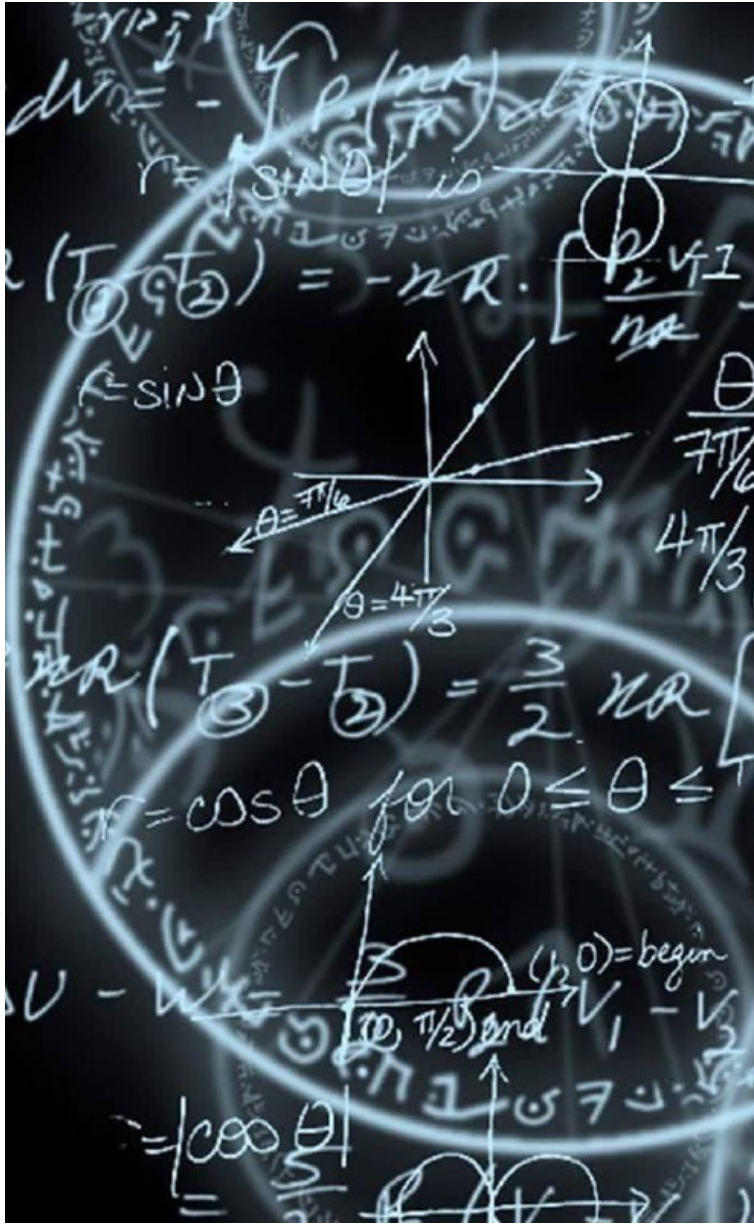
Используя формулу бинома Ньютона, получаем  $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = (y + \alpha)^n + a_1 (y + \alpha)^{n-1} + \dots + a_n$

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = (y + \alpha)^n + a_1 (y + \alpha)^{n-1} + \dots + a_n$$

Понятно, что если положить

$\alpha = -a_1/n$ , то коэффициент при  $y^{n-1}$  исчезнет. Для простоты обозначений будем считать, что полином уже предварительно подвергнут такому преобразованию:

$$f(x) = x^n + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n.$$



## Уравнение третьей степени: формула Кардано

Рассмотрим уравнение третьей степени:

$$x^3 + px + q = 0$$

Сделаем в этом уравнении замену переменной:

$x = u + v$ , введя две неизвестные  $u$  и  $v$ ; получим:

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q = 0.$$

Сгруппируем:

Сгруппируем:

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

Подчиним теперь неизвестные  $u$  и  $v$  условию

$$3uv + p = 0 \quad uv = -p/3.$$

Тогда предыдущее уравнение приведет к виду

$$u^3 + v^3 = -q.$$

Итак, для определения неизвестных величин  $u$  и  $v$  мы получили систему уравнений

систему уравнений

$$u^3 + v^3 = -q.$$

$$uv = -p/3.$$

Возведя последнее уравнение в куб, получим

$$u^3 v^3 = -p^3/27.$$

Два полученных равенства, связывающие  $u^3$  и  $v^3$ , позволяет утверждать, что эти величины являются решениями квадратного уравнения:

$$t^2 + qt - p^3/27 = 0.$$

Выражение

$$\Delta = q^2 + p^3/27$$

называется дискриминантом кубического уравнения.

## ЧЕТВЁРТАЯ СТЕПЕНЬ В РАДИКАЛАХ



Четвёртая степень для алгебраических уравнений является наивысшей, при которой существует аналитическое решение в радикалах в общем виде (то есть при любых значениях коэффициентов).

Так как функция является многочленом чётной степени, она имеет один и тот же предел при стремлении к плюс и к минус бесконечности. Если, то функция возрастает до плюс бесконечности с обеих сторон, а значит, имеет глобальный минимум. Аналогично, если, то функция убывает до минус бесконечности с обеих сторон, а значит, имеет глобальный максимум

## ЛОДОВИКО ФЕРРАРИ

С 15 лет Луиджи Феррари был учеником у миланского математика Джероламо Кардано и быстро обнаружил выдающиеся способности. К этому времени Кардано уже был известен алгоритм решения кубических уравнений; Феррари сумел найти аналогичный способ для решения уравнений четвёртой степени. Оба алгоритма Кардано опубликовал в своей книге «Высокое искусство».

В 1540 г. восемнадцатилетний Феррари стал профессором Миланского университета, но в 1556 году вернулся в родную Болонью, где тоже стал профессором математики. Однако вскоре, не дожив до 44 лет, он скоропостижно скончался — согласно упорным слухам, отравленный то ли собственной сестрой, то ли её любовником. Он так и не успел опубликовать ни одного математического сочинения.

