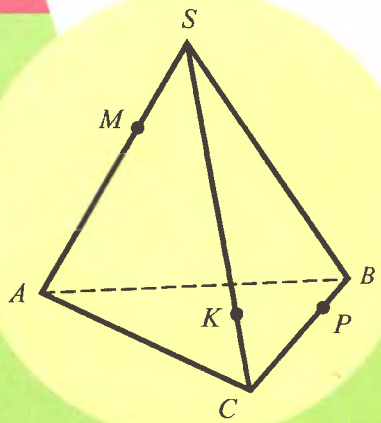
МАТЕМАТИКА

Задачи и упражнения на готовых чертежах



Е.М.Рабинович

ГЕОМЕТРИЯ

10-11 классы

В ПОМОЩЬ СТАРШЕКЛАССНИКАМ, ПРЕПОДАВАТЕЛЯМ
И АБИТУРИЕНТАМ

Е. М. Рабинович

Задачи и упражнения
на готовых чертежах

10-11 классы

ГЕОМЕТРИЯ

«ИЛЕКСА»
«ГИМНАЗИЯ»
Москва—Харьков
2006

Рабинович Е. М.

Задачи и упражнения на готовых чертежах. 10-11 классы. Геометрия.—М.: Илекса, 2006.—80 с.

ISSN 5-89237-068-2

ЛР № 064344 от 9.12.95. Подписано в печать 20.11.02.
Печать офсетная. Формат 70×90/16. Бумага книжно-журнальная.
Тираж 10 000 экз. Заказ 2576.

ООО «Илекса», 121354, г. Москва, а/я 282.
Заказы по телефонам: в Москве (495) 365-30-55

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени
«Чеховский полиграфический комбинат».
142300, г. Чехов Московской области,
тел./факс (501) 443-92-17, (272) 6-25-36.
E-mail:marketing@chpk.ru

ISBN 5-89237-068-2

© Рабинович Е. М., 2001
© ООО «Илекса», 2001

Предисловие

Учитель математики, работающий в старших классах, хорошо знает, как трудно научить учеников делать наглядные и правильные чертежи к стереометрическим задачам.

Из-за недостатка пространственного воображения стереометрическая задача, к которой нужно сделать чертеж самостоятельно, зачастую становится для ученика непосильной.

Именно поэтому использование готовых чертежей к стереометрическим задачам значительно увеличивает объем рассматриваемого на уроке материала, повышает его эффективность.

Предлагаемое пособие является дополнительным сборником задач по геометрии для учащихся 10–11 классов общеобразовательной школы и ориентировано на учебник А.В. Погорелова "Геометрия 7 — 11". Оно является продолжением аналогичного пособия для учащихся 7–9 классов.

Пособие составлено в виде таблиц и содержит более 350 задач. Задачи каждой таблицы соответствуют определенной теме школьного курса геометрии 10–11 классов и расположены внутри таблицы в порядке возрастания их сложности.

В пособии 24 таблицы для 10 класса и 26 таблиц для 11 класса, а также 4 таблицы на повторение курса планиметрии 7–9 классов.

К большинству задач приведены ответы, указания и решения.

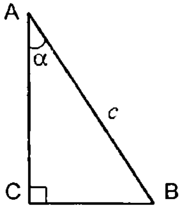
Автор надеется, что использование данного пособия будет способствовать развитию пространственного воображения у учащихся и лучшему усвоению материала школьной программы.

Повторение курса планиметрии

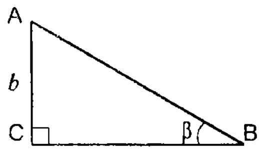
Таблица 1. **Решение треугольников.**

Найти неизвестные стороны и углы ΔABC

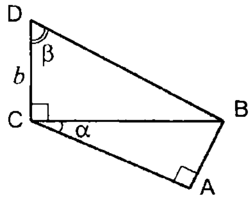
1



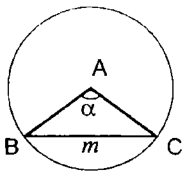
2



3

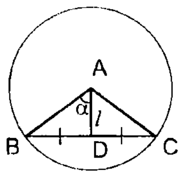


4



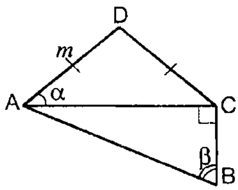
Дано:
A – центр окружности

5

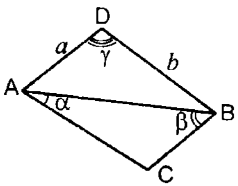


Дано:
A – центр окружности

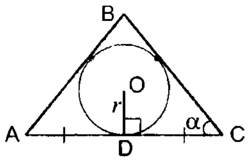
6



7

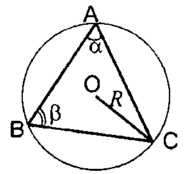


8



Дано: O – центр окружности, вписанной в ΔABC

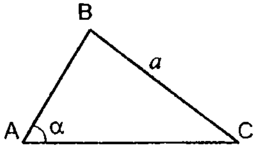
9



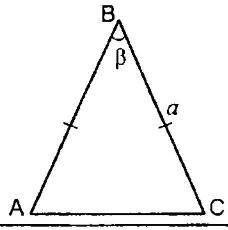
Дано: O – центр окружности, описанной около ΔABC

Найти радиус окружности, описанной около ΔABC

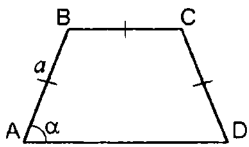
10



11



12

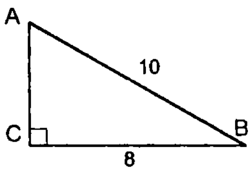


Дано: $ABCD$ – трапеция.

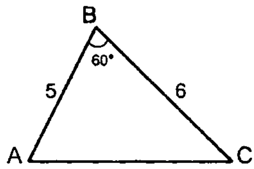
Таблица **2. Площадь треугольника.**

O – центр окружности, описанной около ΔABC, O_1 – центр окружности, вписанной в ΔABC. Найти площадь ΔABC.

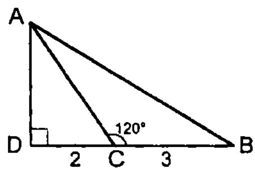
1



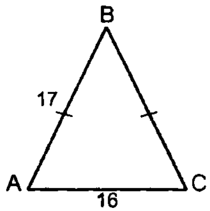
2



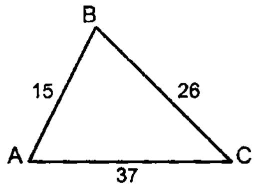
3



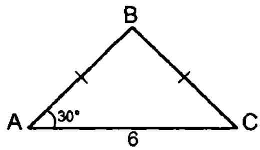
4



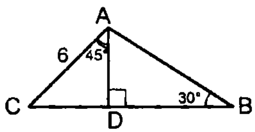
5



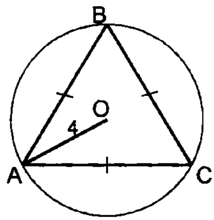
6



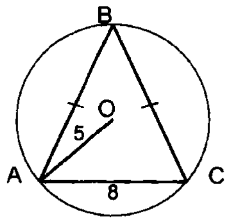
7



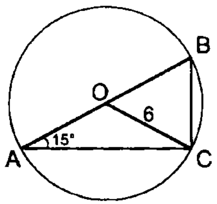
8



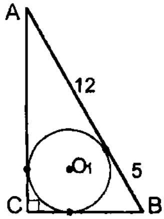
9



10



11



12

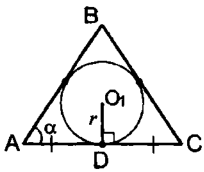


Таблица **3. Площадь четырехугольника.**

О – центр вписанной окружности.
Найти площадь четырехугольника ABCD.

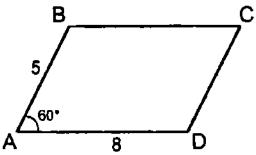
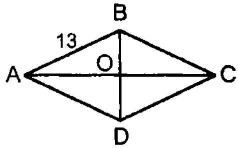
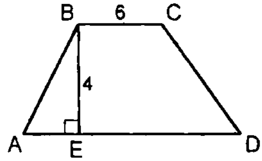
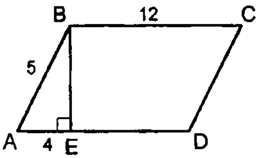
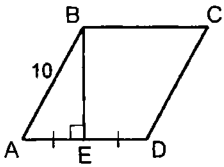
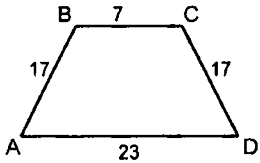
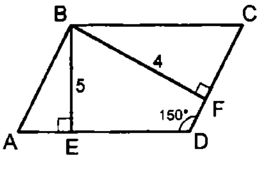
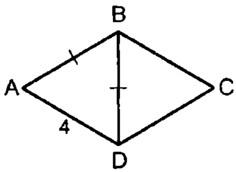
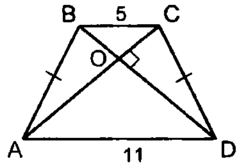
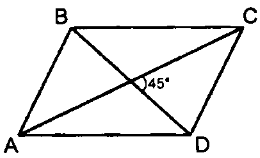
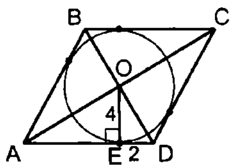
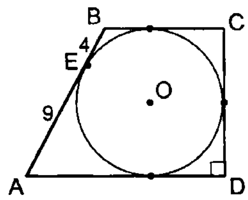
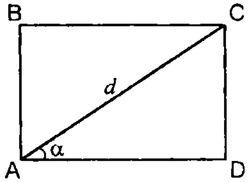
Параллелограмм	*Ромб*	*Трапеция*
1 	**5**  Дано: AC=24	**9**  Дано: AD=10
2 	**6** 	**10** 
3 	**7** 	**11** 
4  Дано: AC=9, BD=8	**8** 	**12** 

Таблица **4. Площадь четырехугольника.**

O – центр описанной окружности.
Найти площадь четырехугольника ABCD.

<table>
<tr>
<td>

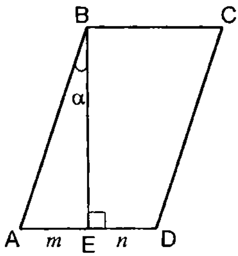
1



Дано:
ABCD – прямоугольник.

</td>
<td>

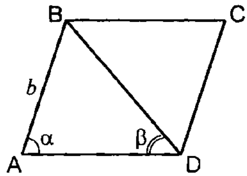
2



Дано: *ABCD* – параллелограмм.

</td>
<td>

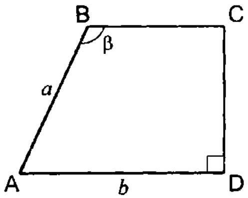
3



Дано: *ABCD* – параллелограмм.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

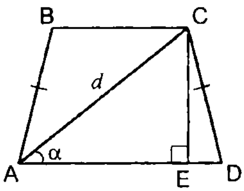
4



Дано: *ABCD* – трапеция.

</td>
<td>

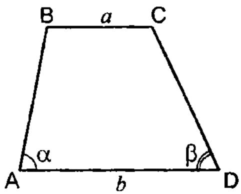
5



Дано: *ABCD* – трапеция.

</td>
<td>

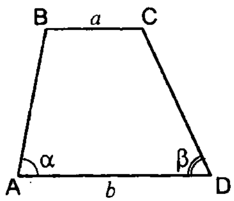
6



Дано: *ABCD* – трапеция.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

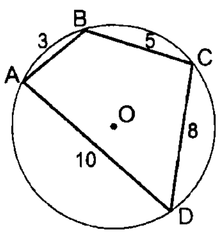
7



Дано: *ABCD* – трапеция.

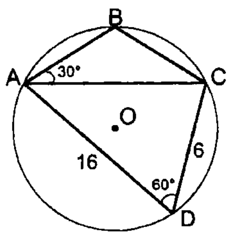
</td>
<td>

8



</td>
<td>

9

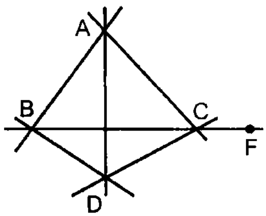


</td>
</tr>
</table>

Стереометрия. 10 класс.

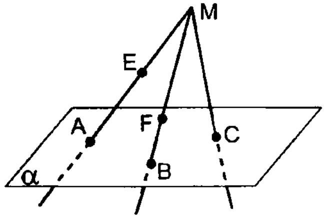
Таблица 10.1. Аксиомы стереометрии и их простейшие следствия.

1



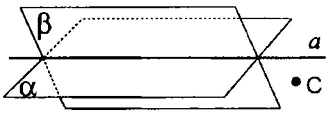
Дано: точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости.
Указать:
1) плоскости, которым принадлежит:
а) прямая AB; б) точка F; в) точка C.
2) прямую пересечения плоскостей:
а) ABC и ACD;
б) ABD и DCF.

2



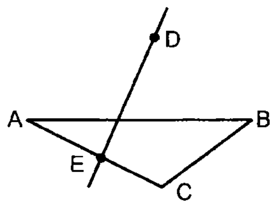
Дано: точка M лежит вне плоскости α, а точки A, B и C принадлежат этой плоскости.
1) Принадлежит ли точка F плоскости α?
2) Указать прямую пересечения плоскостей:
а) α и ABM; б) ABM и BMC.
3) Может ли точка E принадлежать плоскости α?
4) Принадлежит ли прямая AC плоскости MBC?

3



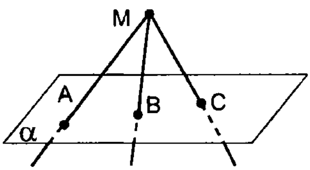
Дано: плоскости α и β пересекаются по прямой a. Может ли точка C принадлежать плоскостям α и β?

4



Дано: точка D лежит вне плоскости ABC. Пересекаются ли прямые DE и BC?

5



Дано: лучи MA, MB и MC лежат в одной плоскости и пересекают плоскость α в точках A, B и C. Доказать, что точки A, B и C лежат на одной прямой.

Таблица 10.2. Аксиомы стереометрии и их простейшие следствия.

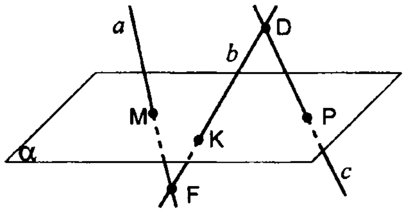
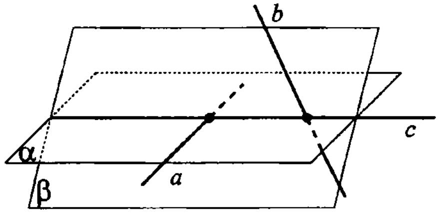
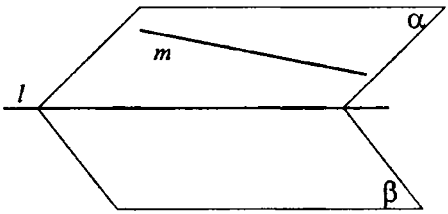
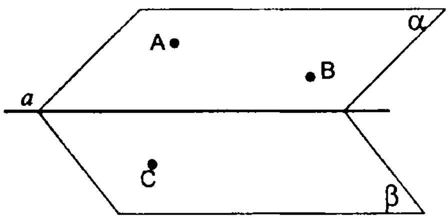
1 	Дано: прямые a, b и c пересекают плоскость α в точках M, K и P. Лежат ли прямые a, b и c в одной плоскости?
2 	Дано: прямая c – линия пересечения плоскостей α и β. Прямые a и b принадлежат плоскостям α и β соответственно. Доказать: прямые a и b не лежат в одной плоскости.
3 	Дано: плоскости α и β пересекаются по прямой l. Прямая m принадлежит плоскости α. Построить точку пересечения прямой m и плоскости β.
4 	Дано: плоскости α и β пересекаются по прямой a. Точки A и B принадлежат плоскости α, а точка C – плоскости β. Построить прямые пересечения плоскости ABC с плоскостями α и β.

Таблица 10.3. **Параллельность прямых в пространстве. Скрещивающиеся прямые.**

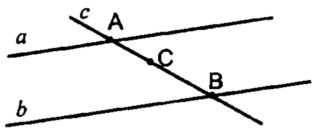
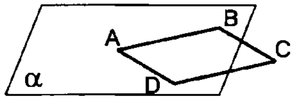
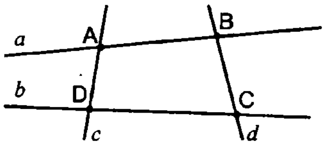
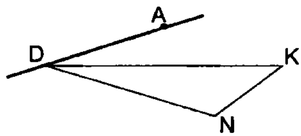
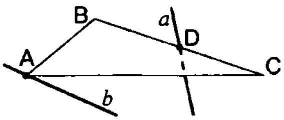
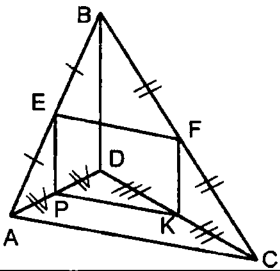
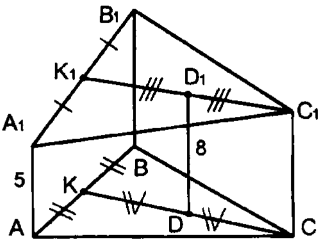
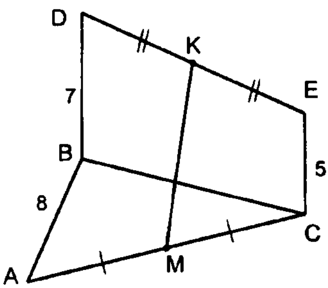
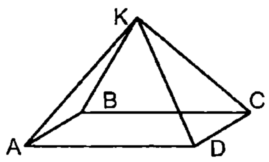
1  Дано: $a \parallel b$. Доказать: a, b и c лежат в одной плоскости.	**2**  Дано: $ABCD$ – параллелограмм. Точки A, B и D лежат в плоскости α. Доказать: точка C лежит в плоскости α.
3  Дано: прямые a и b – скрещивающиеся. Доказать: прямые c и d – скрещивающиеся.	**4**  Дано: точка A лежит вне плоскости DNK. Доказать: прямые AD и NK – скрещивающиеся.
5  Дано: $b \parallel BC$, прямая a не принадлежит плоскости ABC. Доказать: прямые a и b – скрещивающиеся.	**6**  Дано: $ABCD$ – пространственный четырехугольник. AC=16 BD=10 Найти P_{EFKP}
7  Дано: $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$. BB_1=9. Найти CC_1	**8**  Дано: $BD \parallel CE$ KM=10 Доказать: точки D и E лежат в плоскости ABC.

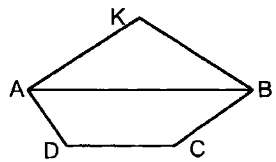
Таблица **10.4. Параллельность прямых и плоскостей.**

1



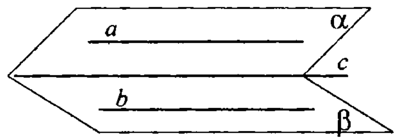
Дано: точка K лежит вне плоскости параллелограмма $ABCD$. Указать пары параллельных прямых и плоскостей.

2



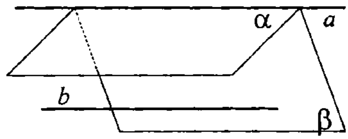
Дано: точка K лежит вне плоскости трапеции $ABCD$.
Доказать: $CD \parallel AKB$.

3



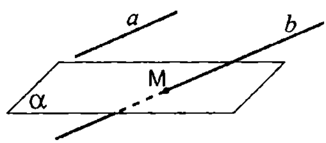
Дано: плоскости α и β пересекаются по прямой c. Прямые a и b принадлежат плоскостям α и β соответственно. $a \parallel b$. Доказать: $a \parallel b \parallel c$.

4



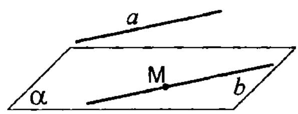
Дано: плоскости α и β пересекаются по прямой a. $b \parallel \alpha$, $b \parallel \beta$.
Доказать: $b \parallel a$.

5



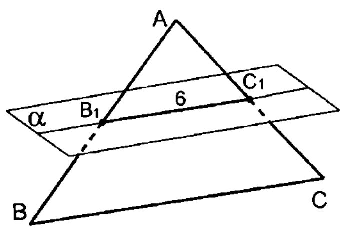
Дано: прямая b пересекает плоскость α в точке M. $a \parallel b$.
Доказать: a пересекает α.

6



Дано: $a \parallel \alpha$, $a \parallel b$, M – общая точка плоскости α и прямой b.
Доказать: b принадлежит α.

7



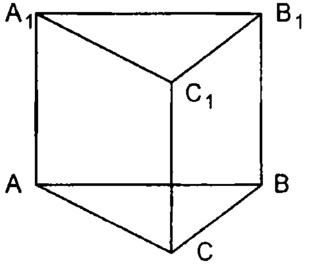
Дано: плоскость α пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках B_1 и C_1 соответственно.
$B_1C_1 \parallel BC$, $AC_1 : C_1C = 3:4$.

Найти BC.

Таблица **10.5. Признак параллельности плоскостей.**

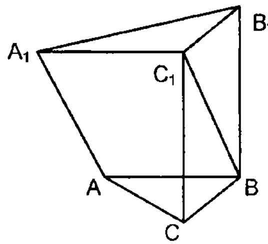
Доказать параллельность плоскостей ABC и $A_1B_1C_1$:

1



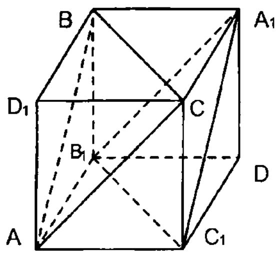
Дано: $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$, $AA_1=BB_1=CC_1$

2



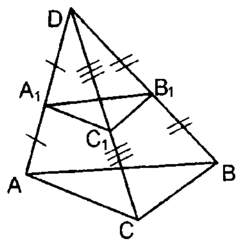
Дано: AA_1C_1B и CC_1B_1B – параллелограммы

3



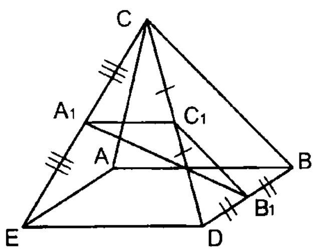
Дано: $AB_1DC_1D_1BA_1C$ – куб

4



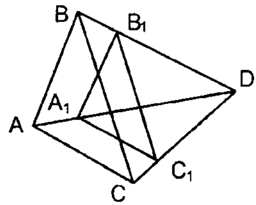
Дано: $ABCD$ – пространственный четырехугольник

5



Дано: точка C лежит вне плоскости параллелограмма $ABCD$

6



Дано: $ABCD$ – пространственный четырехугольник.
$DA_1 : A_1A = DB_1 : B_1B = DC_1 : C_1C$

Таблица 10.6. **Свойства параллельных плоскостей.**

Плоскости α и β параллельны.

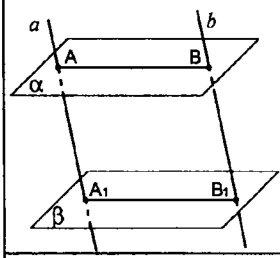
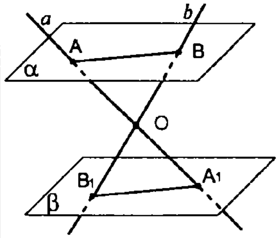
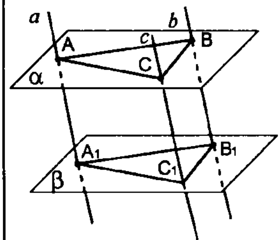
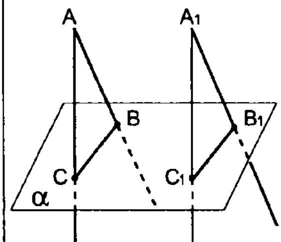
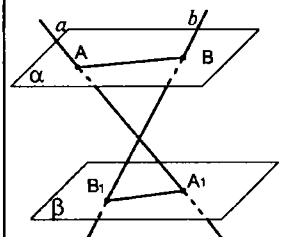
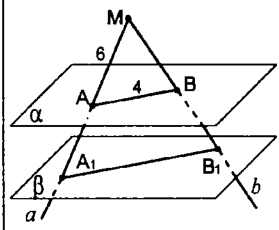
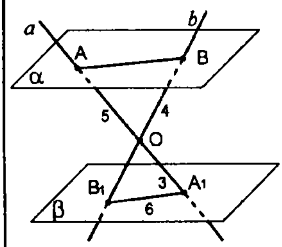
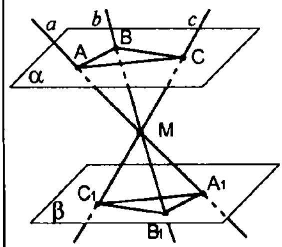
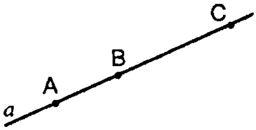
1  Дано: $a \parallel b$. Доказать: $AB = A_1B_1$	**2**  Дано: прямые a и b пересекаются в точке O. Доказать: $AB \parallel A_1B_1$
3  Дано: $a \parallel b \parallel c$. Доказать: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$	**4**  Дано: $AB \parallel A_1B_1$, $AC \parallel A_1C_1$. Доказать: $BC \parallel B_1C_1$
5  Дано: a и b – скрещивающиеся прямые. Доказать: прямые AB и A_1B_1 – скрещивающиеся.	**6**  Дано: прямые a и b пересекаются в точке M. $AA_1=3$, $MB_1=12$. Найти: A_1B_1, MB и BB_1
7  Дано: прямые a и b пересекаются в точке O. Найти: AB и OB_1	**8**  Дано: прямые a и b пересекаются в точке M. Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

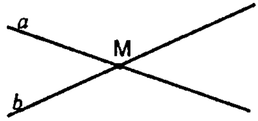
Таблица 10.7. **Изображение пространственных фигур на плоскости.**

1



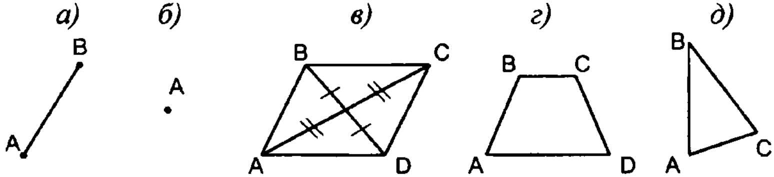
Могут ли точки *A*, *B* и *C* быть параллельными проекциями вершин ΔABC?

2



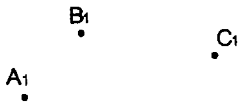
Могут ли прямые a и b быть параллельными проекциями параллельных прямых?

3



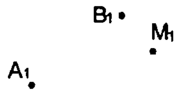
Какая из фигур может быть параллельной проекцией квадрата?

4



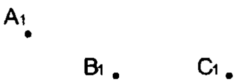
Точки A_1, B_1 и C_1 – параллельные проекции вершин параллелограмма *ABCD*.
Построить проекцию вершины *D*.

5



Точки A_1, B_1 и M_1 – параллельные проекции вершин *A* и *B* и точки пересечения медиан ΔABC соответственно.
Построить проекцию вершины *C*.

6



Точки A_1, B_1 и C_1 – параллельные проекции вершин правильного шестиугольника *ABCDEF*.
Построить проекцию шестиугольника.

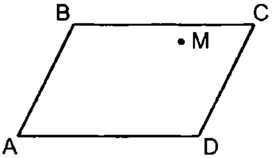
7

Четырехугольник *ABCD* – параллельная проекция прямоугольника.
Построить проекции перпендикуляров, проведенных из точки *M* к сторонам прямоугольника.

Таблица **10.8. Изображение пространственных фигур на плоскости.**

<table>
<tr>
<td>

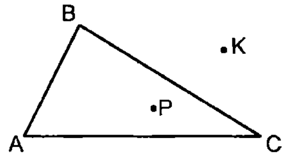
1



Четырехугольник $ABCD$ – параллельная проекция ромба.
Построить проекцию перпендикуляра, проведенного из точки M к диагонали BD.

</td>
<td>

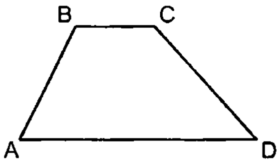
2



ΔABC – параллельная проекция равностороннего треугольника.
Построить проекции прямых, перпендикулярных сторонам треугольника, проходящих через точки P и K.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

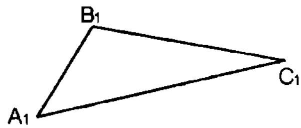
3



Четырехугольник $ABCD$ – параллельная проекция равнобокой трапеции.
Построить проекцию высоты трапеции, проведенной из вершины B.

</td>
<td>

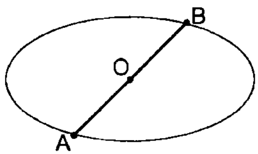
4



$\Delta A_1B_1C_1$ – параллельная проекция ΔABC, $AC = 2AB$.
Построить проекцию биссектрисы $\angle A$.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

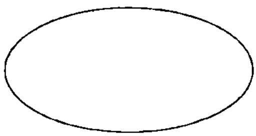
5



Дана параллельная проекция окружности. AB – проекция ее диаметра.
Построить проекцию диаметра, перпендикулярного AB.

</td>
<td>

6



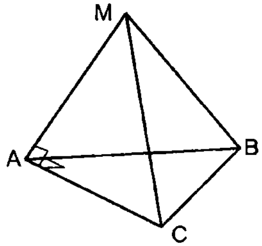
Дана параллельная проекция окружности.
Построить проекцию центра окружности.

</td>
</tr>
</table>

Таблица **10.9. Перпендикулярность прямой и плоскости.**

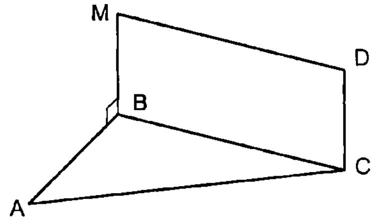
Точка M лежит вне плоскости ABC.

1



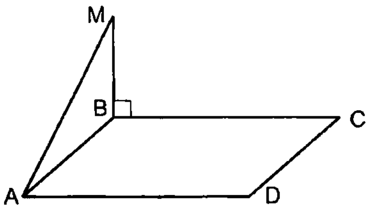
Доказать: прямая AB перпендикулярна плоскости AMC.

2



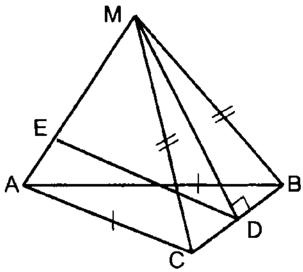
Дано: $BMDC$ – прямоугольник.
Доказать: прямая CD перпендикулярна плоскости ABC.

3



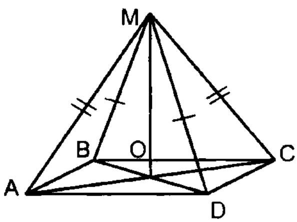
Дано: $ABCD$ – прямоугольник.
Доказать: $AD \perp AM$.

4



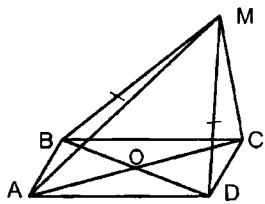
Доказать: $BC \perp DE$.

5



Дано: $ABCD$ – параллелограмм.
Доказать: прямая MO перпендикулярна плоскости ABC.

6

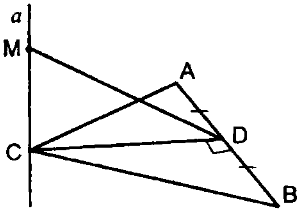


Дано: $ABCD$ – ромб.
Доказать: прямая BD перпендикулярна плоскости AMC.

Таблица 10.10. **Перпендикулярность прямой и плоскости.**

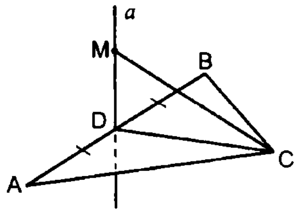
Прямая а перпендикулярна плоскости ABC.

1



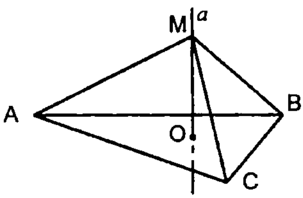
Дано: $\angle ACB=90°$, $AC=4$, $MD=3$.
Найти MC.

2



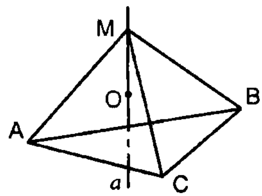
Дано: ΔABC – равносторонний.
$AB = 2\sqrt{3}$. $MD=4$.
Найти MC.

3



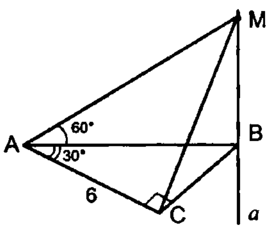
Дано: ΔABC – равносторонний.
$AB = 4\sqrt{3}$. O – центр окружности, описанной около ΔABC. $MO=3$.
Найти MB.

4



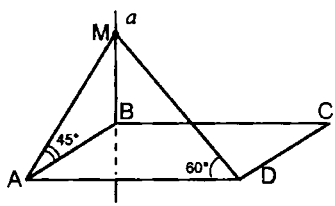
Дано: O – центр окружности, описанной около ΔABC. $\angle ACB=120°$, $AB=6$, $MO=2$.
Найти MC.

5



Найти MB.

6



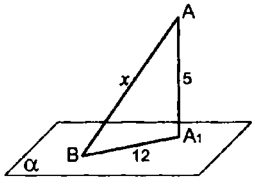
Дано: $ABCD$ – прямоугольник.
$MD=8$.
Найти AB и AD.

Таблица **10.11. Перпендикуляр и наклонная.**

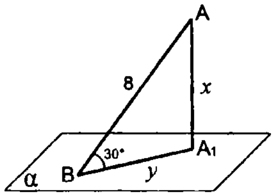
AA_1 – перпендикуляр к плоскости α, AB и AC – наклонные.

Найти x и y.

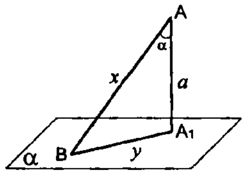
1



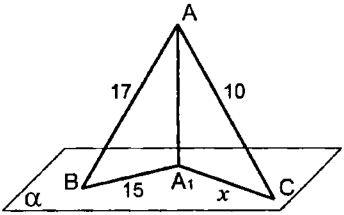
2



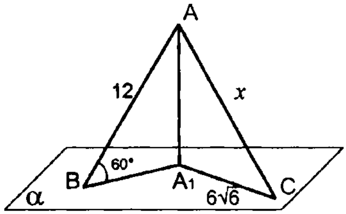
3



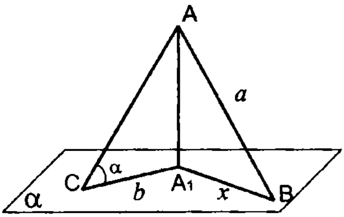
4



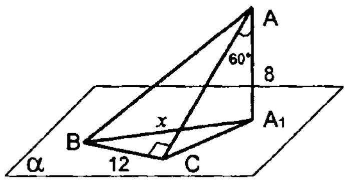
5



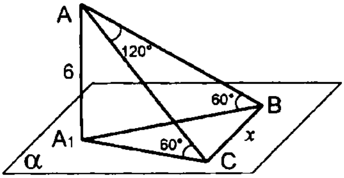
6



7



8



9

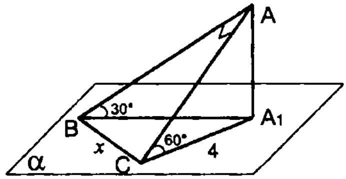


Таблица **10.12. Перпендикуляр и наклонная.**

AA_1 - перпендикуляр к плоскости α, AB и AC – наклонные.
Найти x и y.

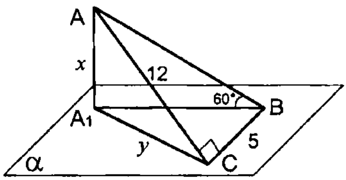
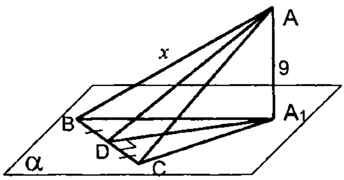
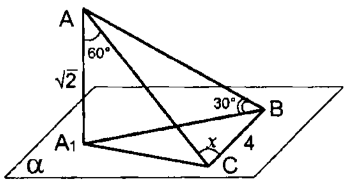
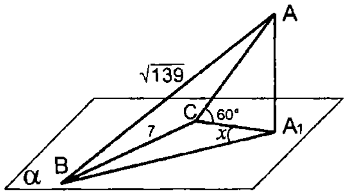
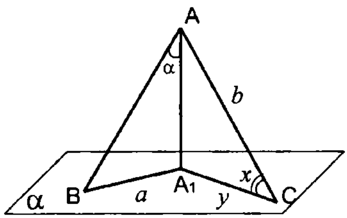
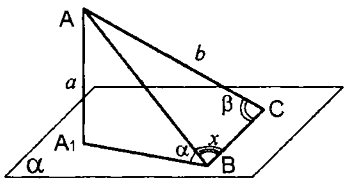
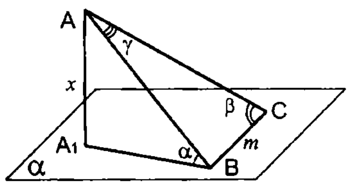
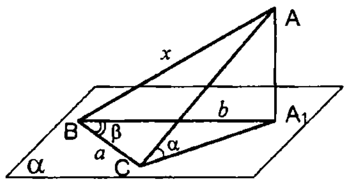
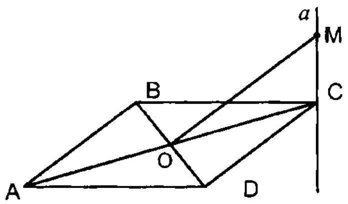
1 	**2**  Дано: $BD = 5$, $AD = 15$
3 	**4**  Дано: $AC = 10$
5 	**6** 
7 	**8** 

Таблица **10.13. Теорема о трех перпендикулярах.**

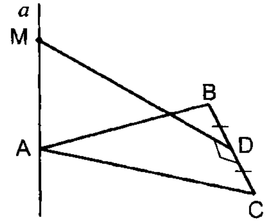
Прямая a перпендикулярна плоскости ABC.

1



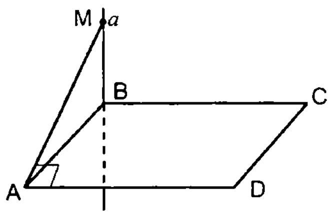
Дано: $ABCD$ – ромб.
Доказать: $MO \perp BD$.

2



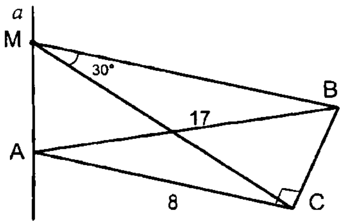
Доказать: $AB = AC$.

3



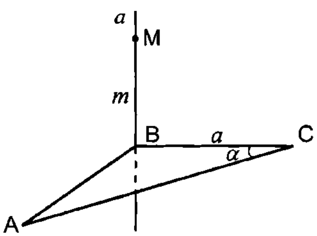
Дано: $ABCD$ – параллелограмм.
Доказать: $ABCD$ – прямоугольник.

4



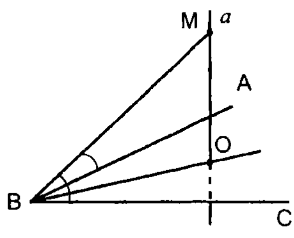
Найти MB.

5



Найти расстояние от точки M до прямой AC.

6



Доказать: BO – биссектриса угла ABC.

Таблица 10.14. Теорема о трех перпендикулярах.

Прямая a перпендикулярна плоскости ABC.

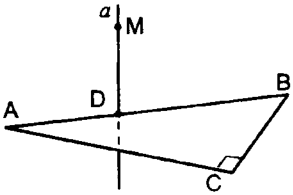
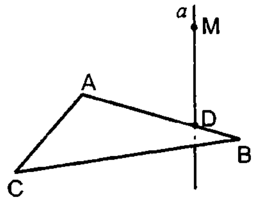
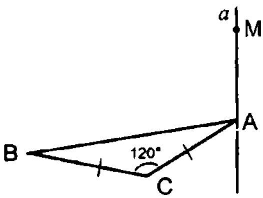
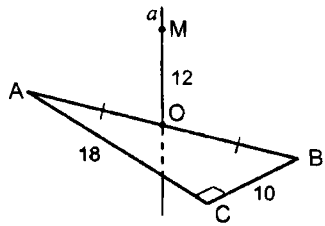
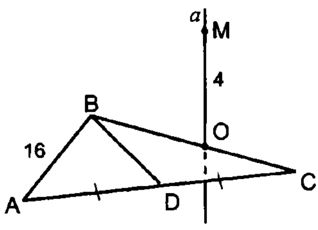
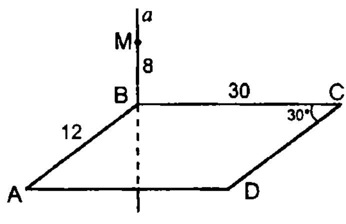
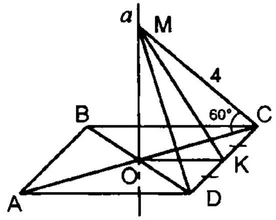
1  Построить перпендикуляры из точки M к прямым AC и BC.	**2**  Дано: ΔABC – правильный. Построить перпендикуляры из точки M к прямым AC и BC.
3  Построить перпендикуляр из точки М к прямой BC.	**4**  Найти расстояние от точки M до прямых AC и BC.
5  Дано: ΔABC – правильный. Найти расстояние от точки M до прямых AB и BD.	**6**  Дано: $ABCD$ – параллелограмм. Найти расстояние от точки M до прямых AD и DC.

Таблица **10.15. Теорема о трех перпендикулярах.**

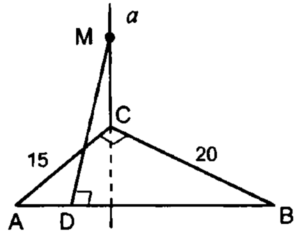
Прямая a перпендикулярна плоскости ABC.

1



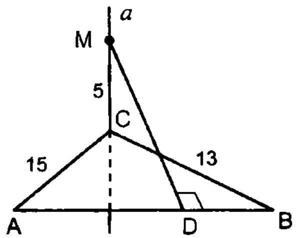
Дано: $ABCD$ – квадрат. Найти MK.

2



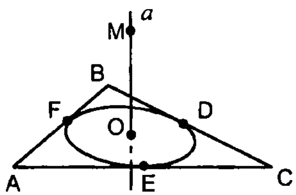
Дано: $MD = 13$. Найти MC.

3



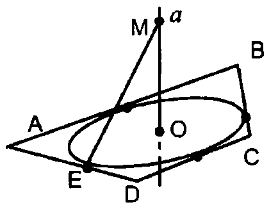
Дано: $AB = 14$. Найти MD.

4



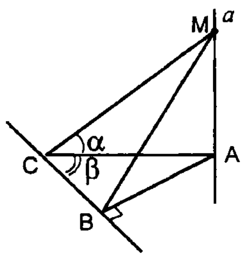
Дано: ΔABC – правильный, O – центр окружности, вписанной в ΔABC, AB=12, OM=4. Найти расстояние от точки M до прямой BC.

5



Дано: O – центр окружности, вписанной в трапецию $ABCD$, AD=BC, CD=9, AB=16, ME=10. Найти OM.

6

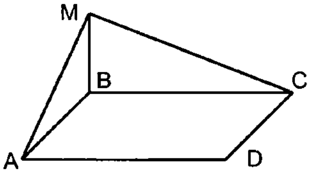


Найти $\angle MCB$.

Таблица **10.16. Перпендикулярность плоскостей.**

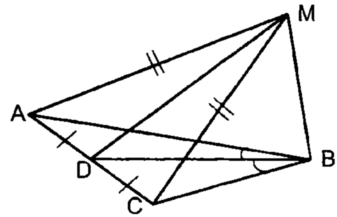
Точка M лежит вне плоскости ABC.

1



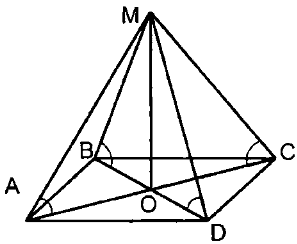
Дано: *ABCD* – прямоугольник. Прямая *MB* перпендикулярна плоскости *ABC*. Доказать перпендикулярность плоскостей *AMB* и *MCB*.

2



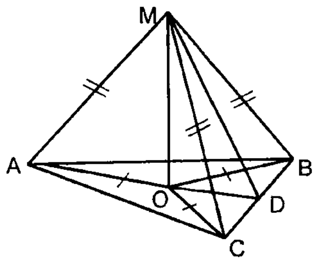
Доказать перпендикулярность плоскостей *AMC* и *DMB*.

3



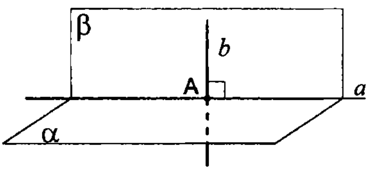
Дано: *ABCD* – квадрат. Доказать перпендикулярность плоскостей: 1) *AMC* и *ABC*; 2) *AMC* и *BMD*.

4



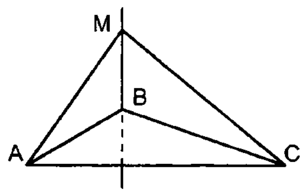
Доказать перпендикулярность плоскостей *AMD* и *ABC*.

5



Дано: прямая *a* – линия пересечения перпендикулярных плоскостей α и β. Прямая *b* принадлежит плоскости β и перпендикулярна прямой *a*. Доказать: $b \perp \alpha$.

6

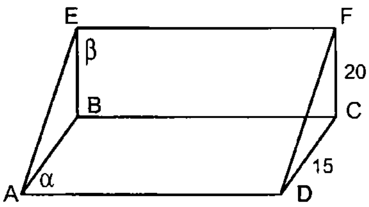


Дано: плоскости *AMB* и *BMC* перпендикулярны плоскости *ABC*. Доказать: прямая *MB* перпендикулярна плоскости *ABC*.

Таблица 10.17. Перпендикулярность плоскостей.

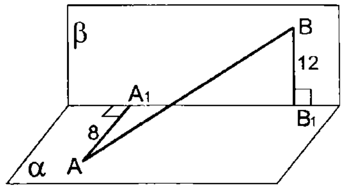
Плоскости α и β перпендикулярны.

1



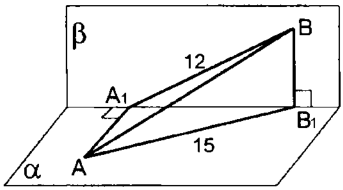
Дано: *ABCD* и *BCFE* – прямоугольники. Найти расстояние между прямой *BC* и плоскостью *ADF*.

2



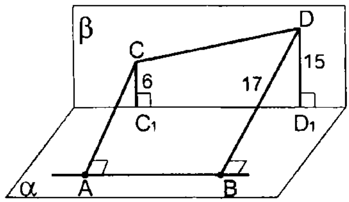
Дано: точки *A* и *B* принадлежат плоскостям α и β соответственно. $A_1B_1 = 9$.
Найти *AB*.

3



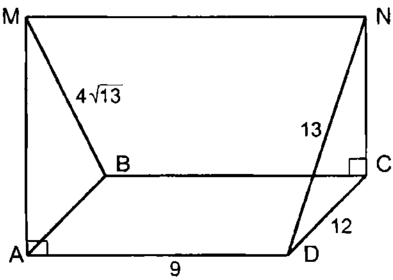
Дано: точки *A* и *B* принадлежат плоскостям α и β соответственно. $A_1B_1 = 9$.
Найти *AB*.

4



Дано: точки *A* и *B* принадлежат плоскости α, а точки *C* и *D* – плоскости β. $AB \parallel C_1D_1$.
Найти *AC*.

5

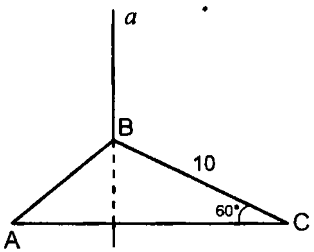


Дано:
ABCD – прямоугольник.
Плоскости *AMB* и *DNC* перпендикулярны плоскости *ABC*.
Найти *MN*.

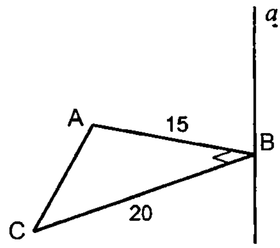
Таблица **10.18. Расстояние между скрещивающимися прямыми.**

Прямая a перпендикулярна плоскости ABC. Найти расстояние между прямыми a и AC (рис.1-3).

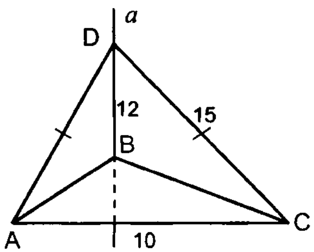
1



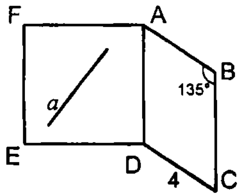
2



3

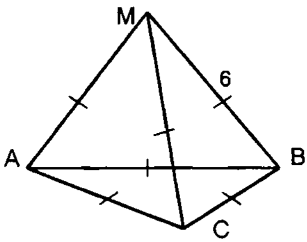


4



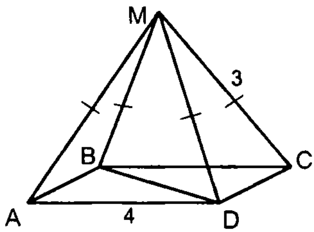
Дано: *ABCD* – параллелограмм. Плоскости *ABC* и *ADE* перпендикулярны. Прямая *a* принадлежит плоскости *ADE*. Найти расстояние между прямыми *a* и *BC*

5



Дано: точка *M* лежит вне плоскости *ABC*. Найти расстояние между прямыми *AC* и *BM*.

6



Дано: *ABCD* – квадрат. Точка *M* лежит вне плоскости *ABC*. Найти расстояние между прямыми *AM* и *BD*.

Таблица **10.19. Декартовы координаты в пространстве.**

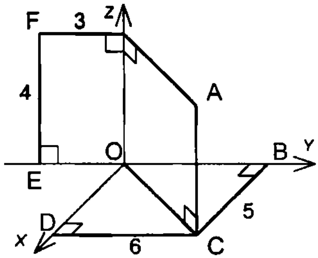
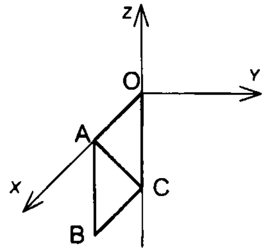
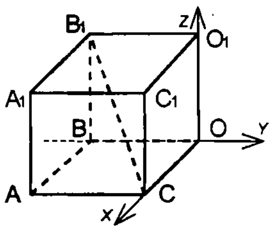
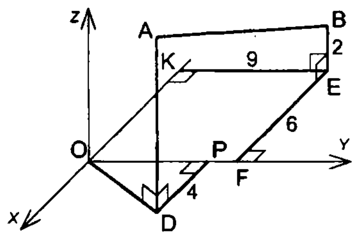
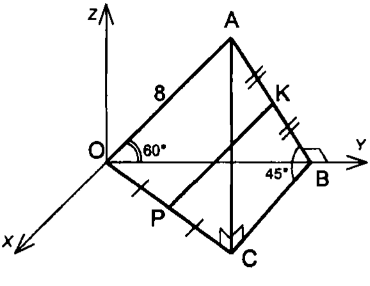
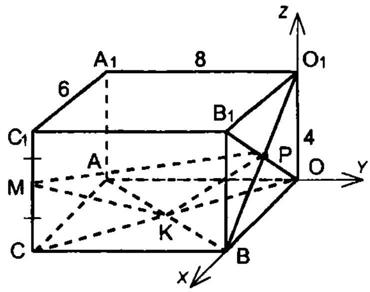
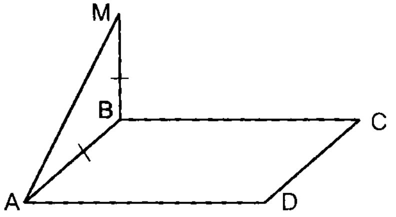
1	2
 Найти координаты точек A, B, C, D, E, F	 Дано: $ABCO$ – квадрат, $AC=2\sqrt{2}$ Найти координаты точек A, B и C.
3	**4**
 Дано: $ABOCA_1B_1O_1C_1$ – куб. $B_1C=4\sqrt{3}$. Найти координаты вершин куба.	 Дано: $OP=7$, $AD=8$. Найти длину отрезка AB и координаты его середины.
5	**6**
 Найти координаты точек P и K и длину отрезка PK.	 Дано: $AOBCA_1O_1B_1C_1$ – прямоугольный параллелепипед. Найти периметр ΔMPK.

Таблица **10.20. Угол между скрещивающимися прямыми.**

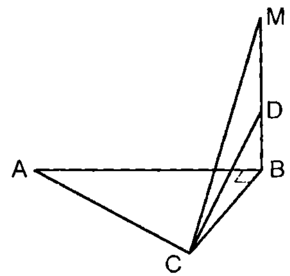
Прямая MB перпендикулярна плоскости ABC (рис.1-3, 5, 6).

1



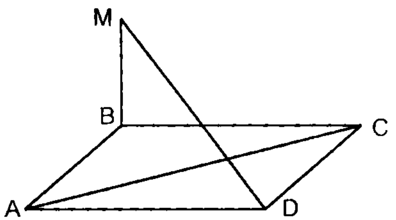
Дано: *ABCD* – прямоугольник.
Найти угол между прямыми:
1) *MB* и *AD*; 2) *AM* и *CD*;
3) *AM* и *BC*.

2



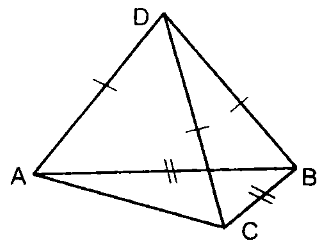
Найти угол между прямыми *AB* и *CD*.

3



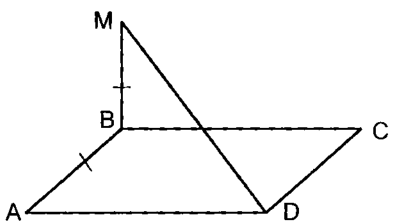
Дано: *ABCD* – ромб. Найти угол между прямыми *MD* и *AC*.

4



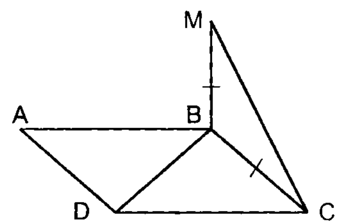
Дано: точка *D* лежит вне плоскости *ABC*. Найти угол между прямыми *AC* и *BD*.

5



Дано: *ABCD* – квадрат. Найти угол между прямыми *MD* и *BC*.

6

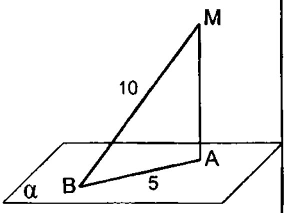


Дано: *ABCD* – квадрат. Найти угол между прямыми *CM* и *BD*.

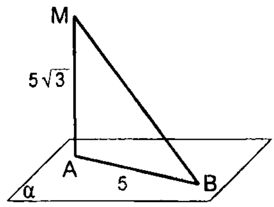
Таблица **10.21. Угол между прямой и плоскостью.**

Прямая MA перпендикулярна плоскости ABC.
Найти угол между прямой MB и плоскостью ABC (рис. 3-6).

1

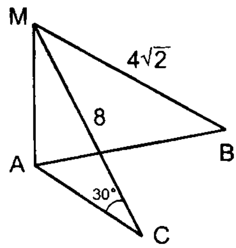


2

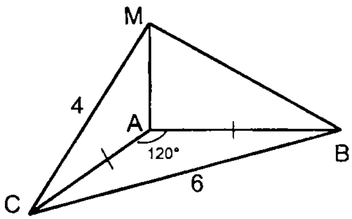


Дано: прямая MA перпендикулярна плоскости α.
Найти угол между прямой MB и плоскостью α.

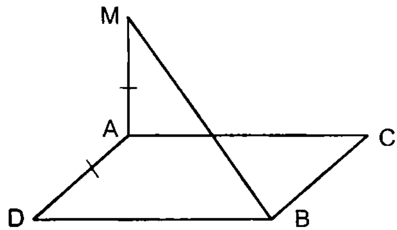
3



4

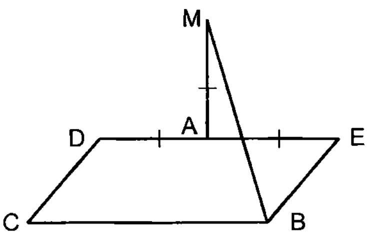


5



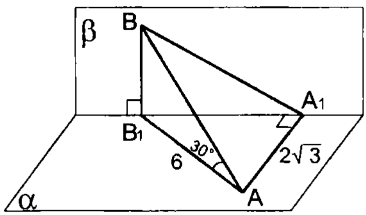
Дано: *ACBD* – квадрат.

6



Дано: *BCDE* – квадрат.

7



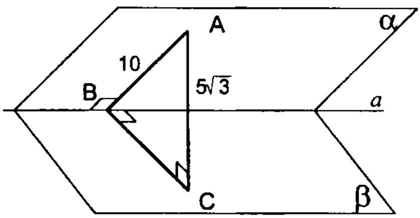
Дано: плоскости α и β перпендикулярны. Найти угол между прямой *AB* и плоскостью β.

Таблица 10.22. Угол между плоскостями.

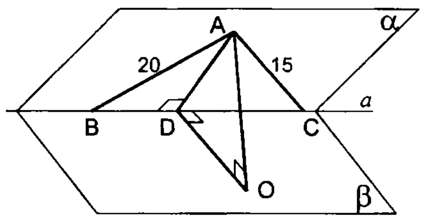
Плоскости α и β пересекаются по прямой a.

Найти угол между плоскостями α и β.

1

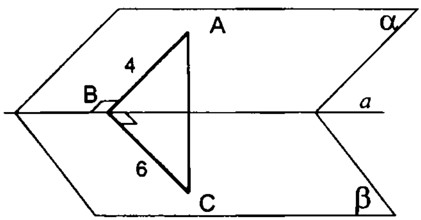


2



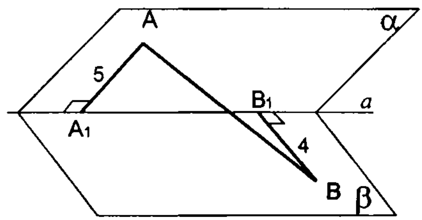
Дано: $\angle BAC = 90°$, $AO = 6$.

3



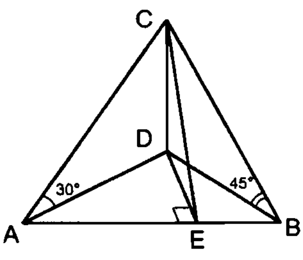
Дано: $AC = 2\sqrt{7}$.

4



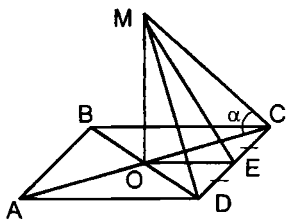
Дано: $AB = 11$, $A_1B_1 = 10$.

5



Дано: прямая CD перпендикулярна плоскости ADB, $\angle ADB = 90°$. Найти угол между плоскостями ACB и ADC.

6

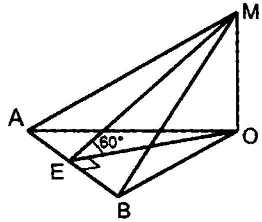


Дано: $ABCD$ – квадрат. Прямая MO перпендикулярна плоскости ABC. Найти угол между плоскостями MDC и ABC.

Таблица 10.23. Площадь ортогональной проекции многоугольника.

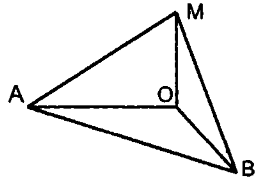
Прямая МО перпендикулярна плоскости АОВ (рис.1-4).

1



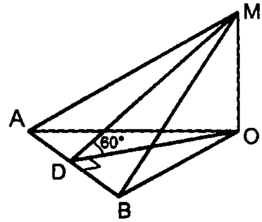
Дано: $S_{AMB} = 8$
Найти S_{AOB}.

2



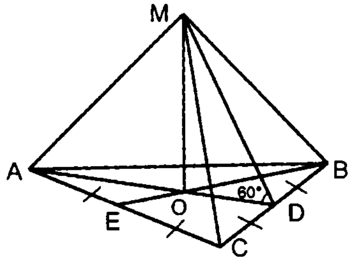
Дано: $S_{AOB} = 8$, $S_{AMB} = 8\sqrt{2}$.
Найти угол между плоскостями AMB и AOB.

3



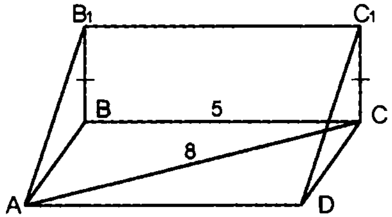
Дано: $AB = 14$, $OB = 15$, $AO = 13$.
Найти S_{AMB}.

4



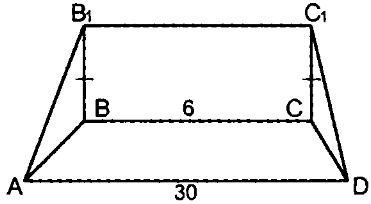
Дано: ΔABC – равносторонний.
$S_{AMC} = Q$. Найти S_{ABC}

5



Дано: $ABCD$ – ромб. Прямые BB_1 и CC_1 перпендикулярны плоскости ABC. $S_{AB_1C_1D} = 24\sqrt{2}$.
Найти угол между плоскостями ABC и AB_1C_1.

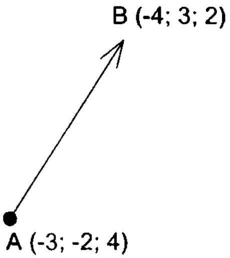
6



Дано: $ABCD$ – трапеция. Прямые BB_1 и CC_1 перпендикулярны плоскости ABC. $AB = CD = 15$.
$S_{AB_1C_1D} = 108\sqrt{3}$. Найти угол между плоскостями ABC и AB_1C_1.

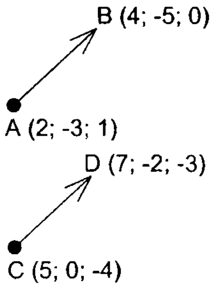
Таблица **10.24. Векторы в пространстве.**

1



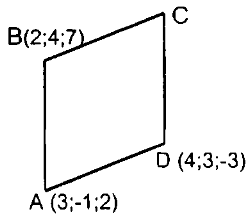
Найти $|\overline{AB}|$.

2



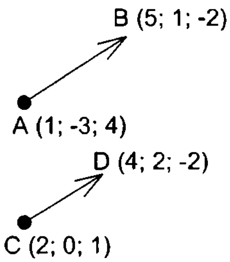
Равны ли векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$?

3



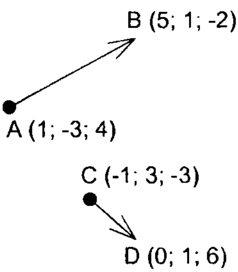
Дано: *ABCD* – параллелограмм. Найти координаты вершины *C*.

4



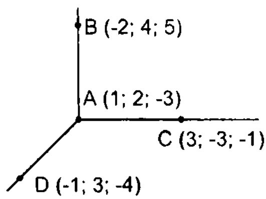
Коллинеарны ли векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$?

5



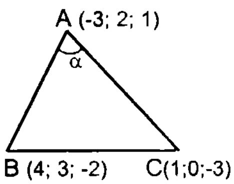
Перпендикулярны ли векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$?

6



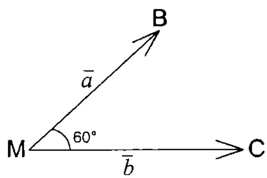
Доказать: **прямая** *AB* перпендикулярна плоскости *ADC*.

7



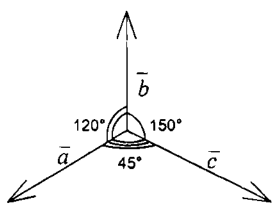
Найти $\cos\alpha$

8



Дано: $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 2$.
Найти:
1) $|\bar{a} + \bar{b}|$
2) $|\bar{a} - \bar{b}|$
3) $|2\bar{a} - 3\bar{b}|$

9



Дано: $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 3$, $|\bar{c}| = 1$.

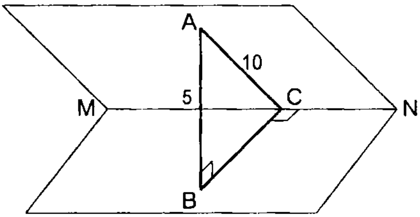
Найти $(\bar{a} + \bar{c})(\bar{b} - \bar{c})$

Стереометрия. 11 класс.

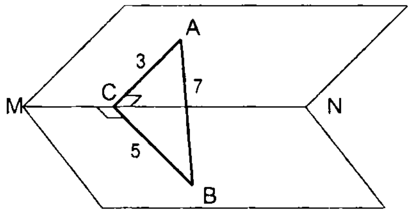
Таблица **11.1. Двугранный угол. Трехгранный угол.**

MN - ребро двугранного угла. Точки A и B лежат в разных гранях двугранного угла (рис.1-4). (abc) - трехгранный угол (рис. 5, 6).

1

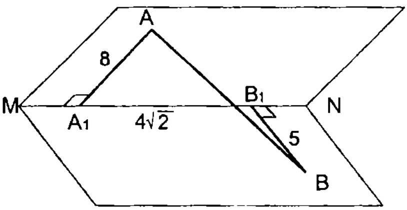


2



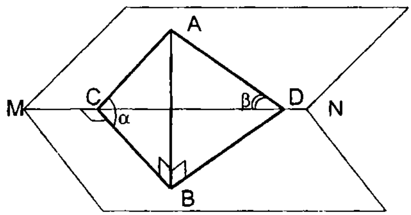
Найти величину двугранного угла.

3



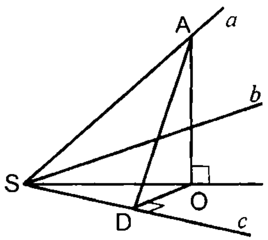
Дано: величина двугранного угла равна 60°. Найти AB.

4



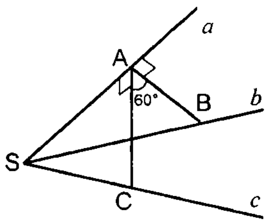
Найти $\angle ADB$.

5



Дано: $\angle(ab) = \angle(ac) = \angle(bc) = 60°$. Найти величину двугранного угла при ребре c.

6

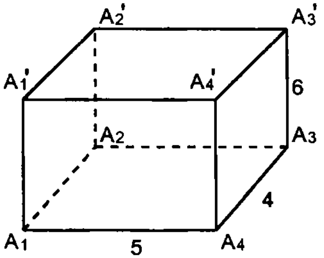


Дано: $\angle(ab) = \angle(ac) = 45°$. Найти $\angle(bc)$.

Таблица 11.2. **Прямая призма.**

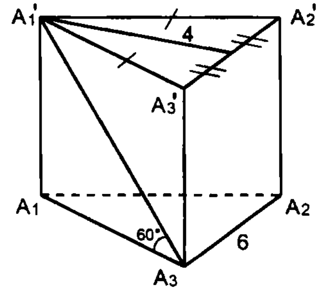
$A_1A_2\ldots A_nA_1'A_2'\ldots A_n'$ – *прямая призма.*

1



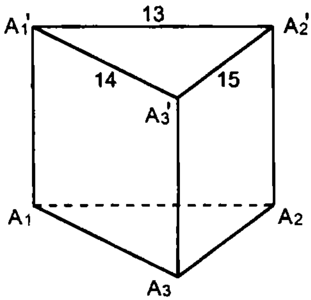
Дано: $A_1A_2A_3A_4$ – прямоугольник.
Найти: 1) *S*бок; 2) *S*полн.

2



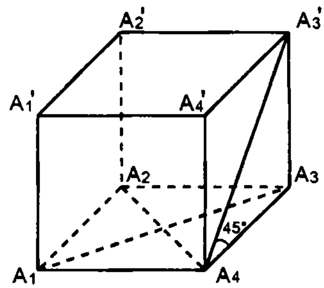
Найти: 1) *S*бок; 2) *S*полн.

3



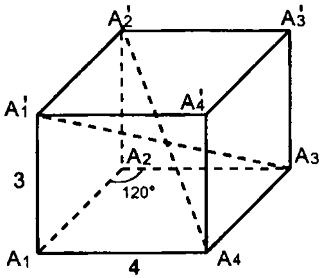
Дано: *S*полн. = 378. Найти A_1A_1'.

4



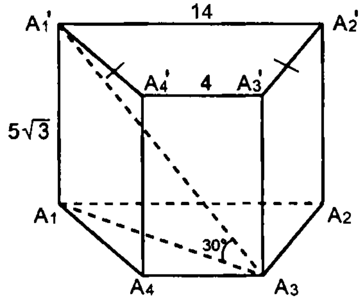
Дано: $A_1A_2A_3A_4$ – ромб. $A_1A_3 = 24$, $A_2A_4 = 10$. Найти *S*полн.

5



Дано: $A_1A_2A_3A_4$ – ромб.
Найти: $A_1'A_3$, $A_2'A_4$.

6



Дано: $A_1A_2A_3A_4$ – трапеция.
Найти *S*полн.

Таблица **11.3. Правильная призма.**

$A_1A_2 \dots A_nA_1'A_2' \dots A_n'$ – правильная призма.
Найти: 1) площадь боковой поверхности призмы;
2) площадь полной поверхности призмы.

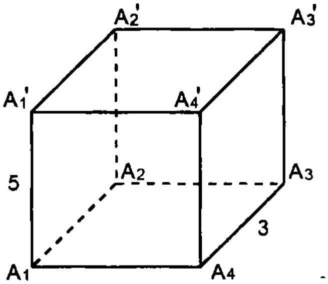
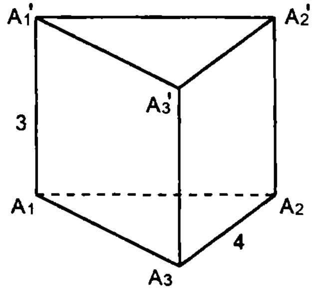
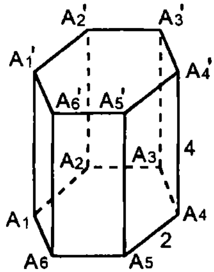
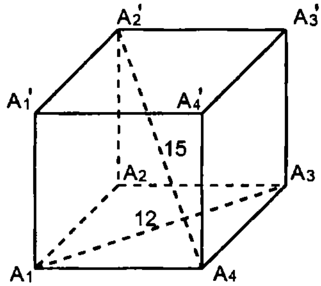
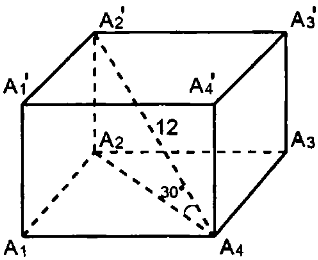
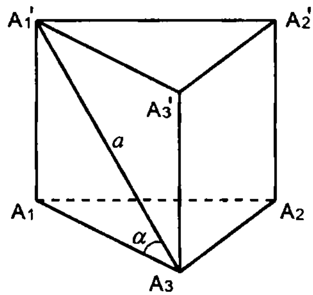
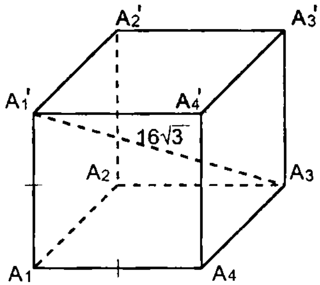
1 	**2** 
3 	**4** 
5 	**6** 

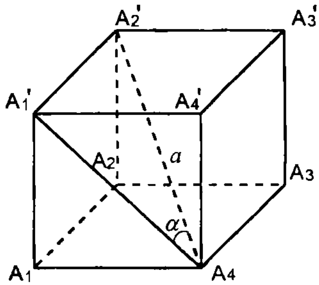
Таблица **11.4. Правильная призма.**

$A_1A_2\ldots A_nA_1'A_2'\ldots A_n'$ – правильная призма.
Найти: 1) площадь боковой поверхности призмы;
2) площадь полной поверхности призмы.

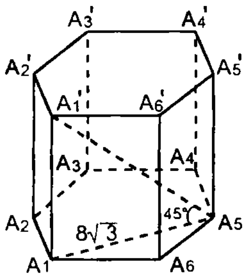
1



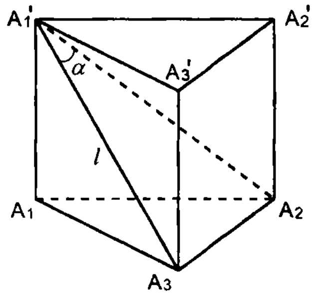
2



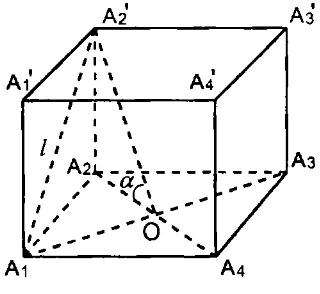
3



4



5



6

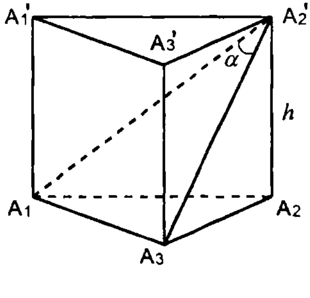
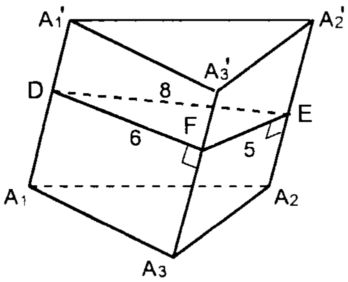


Таблица 11.5. **Наклонная призма.**

$A_1A_2A_3A_1'A_2'A_3'$ – наклонная призма.

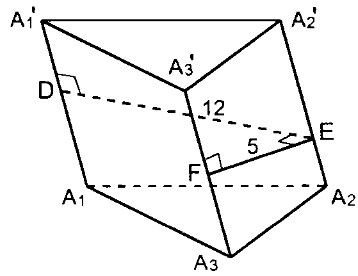
Найти площадь боковой поверхности призмы.

1



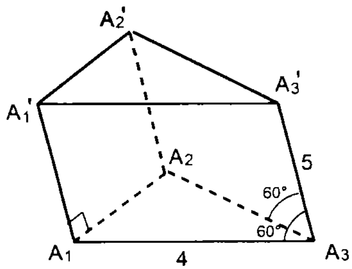
Дано: $A_1A_1' = 4$.

2



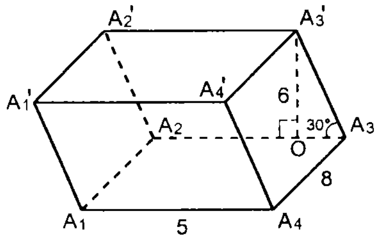
Дано: $A_1A_1' = 10$.

3 (*)



Дано: $\Delta A_1A_2A_3$ – правильный.

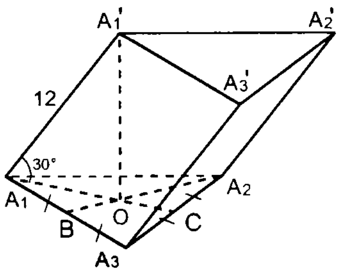
4



Дано: $A_1A_2A_3A_4$ – прямоугольник.

$A_3'O$ – высота призмы.

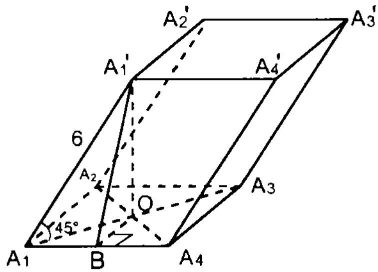
5



Дано: $\Delta A_1A_2A_3$ – правильный.

$A_1'O$ – высота призмы.

6



Дано: $A_1A_2A_3A_4$ – квадрат.

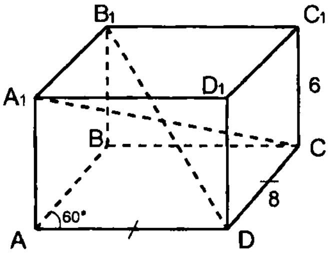
$A_1'O$ – высота призмы.

(*) Попробуйте доказать, что в условии задачи можно не указывать, что $\angle A_1'A_1A_2 = 90°$

Таблица 11.6. Параллелепипед.

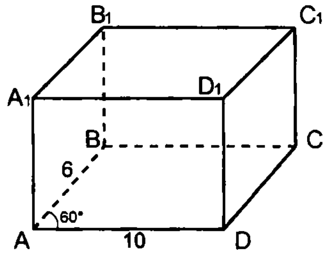
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямой параллелепипед.
Найти площадь полной поверхности параллелепипеда (рис. 2-6).

1



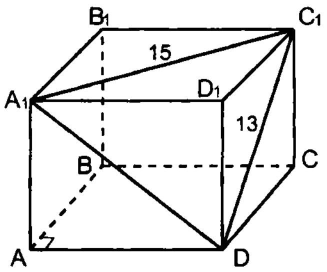
Найти: A_1C, B_1D.

2



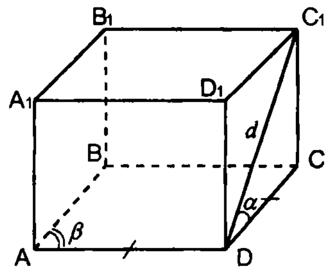
Дано: $AC = B_1D$.

3

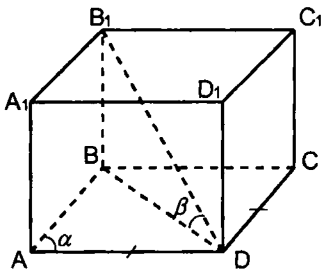


Дано: $A_1D = \sqrt{106}$

4



5



Дано: $B_1D = d$.

6

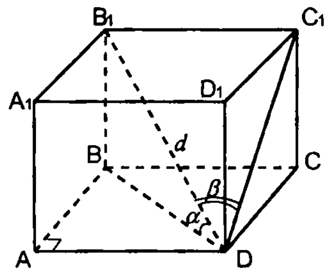
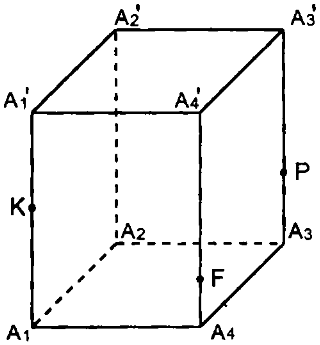


Таблица 11.7. **Построение сечений призмы.**

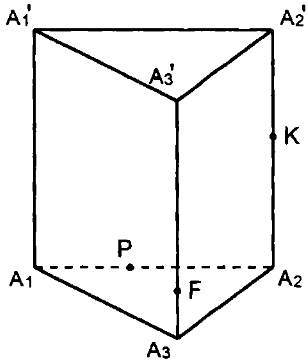
$A_1A_2\ldots A_nA_1'A_2'\ldots A_n'$ – призма. Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через точки K, P и F.

1

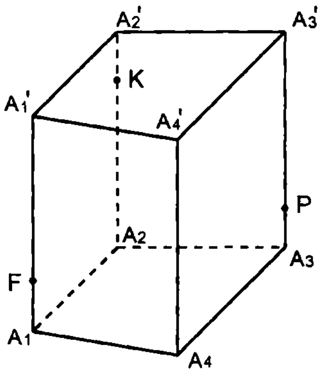


Дано: $A_1A_2A_3A_4$ – параллелограмм.

2



3



4

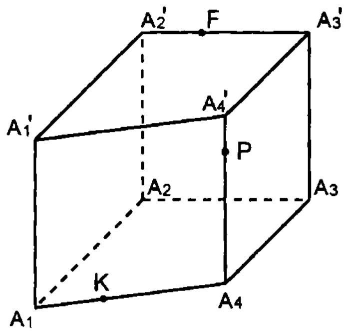
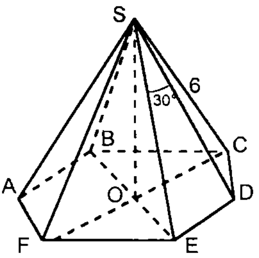


Таблица **11.8. Правильная пирамида.**

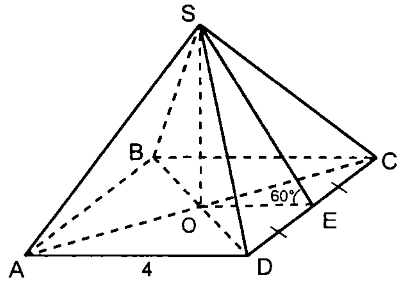
SO – высота правильной пирамиды.
Найти площадь полной поверхности пирамиды (рис. 2-6).

1

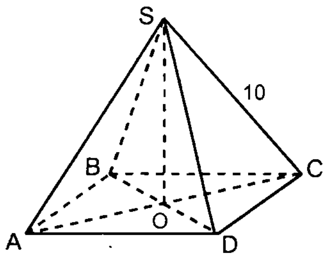


Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

2

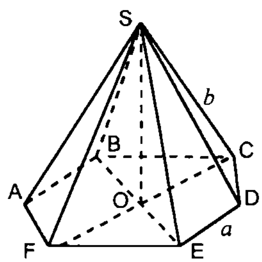


3

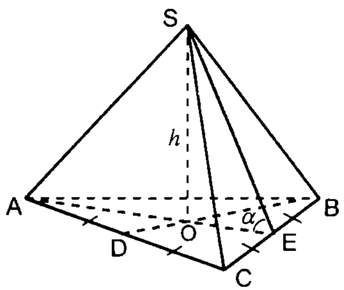


Дано: $SO = 2\sqrt{7}$.

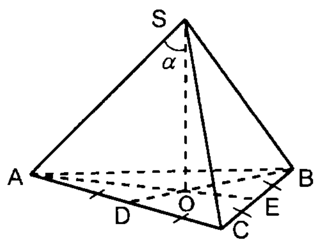
4



5



6

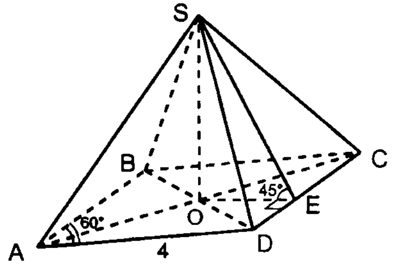


Дано: $AB = a$

Таблица **11.9. Пирамида.**

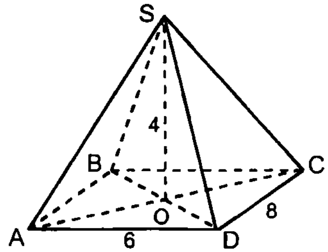
SO – высота пирамиды.
Найти площадь полной поверхности пирамиды (рис. 1, 2, 5, 6).

1



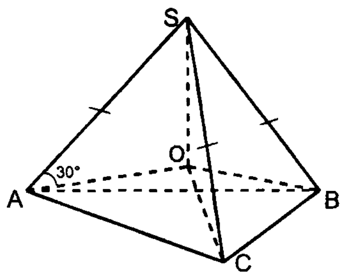
Дано: $ABCD$ – ромб.

2



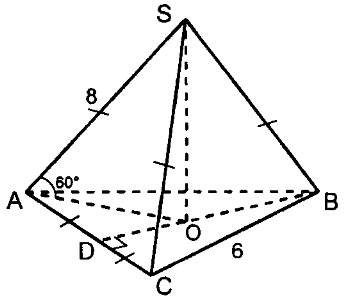
Дано: $ABCD$ – прямоугольник.

3



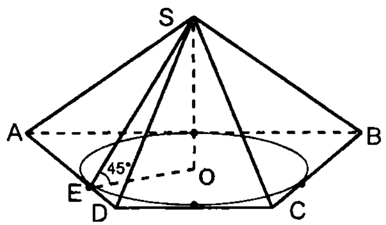
Дано: $AB = 5\sqrt{3}$, $\angle ACB = 150°$.
Найти SO.

4



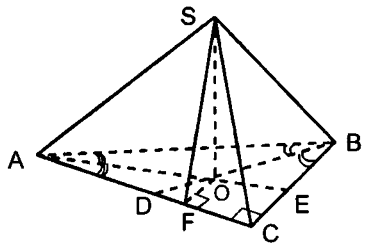
Найти AC.

5



Дано: $ABCD$ – трапеция. $AB = 9$, $CD = 4$, $AD = BC$. O – центр вписанной окружности.

6

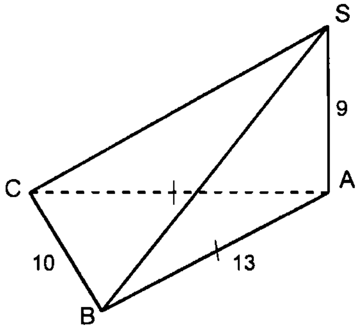


Дано: $AB = a$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle SFO = \beta$

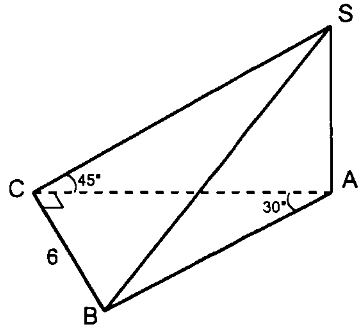
Таблица **11.10. Пирамида.**

SA – высота пирамиды.
Найти площадь полной поверхности пирамиды.

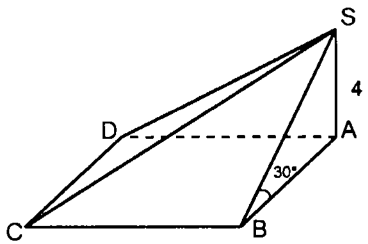
1



2

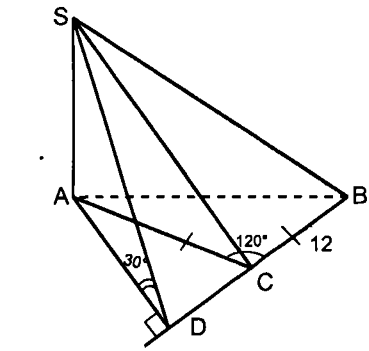


3



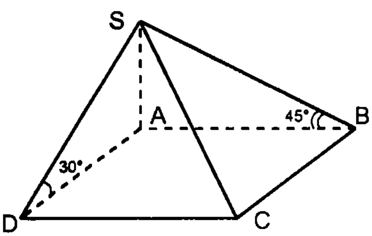
Дано: $ABCD$ – квадрат.

4



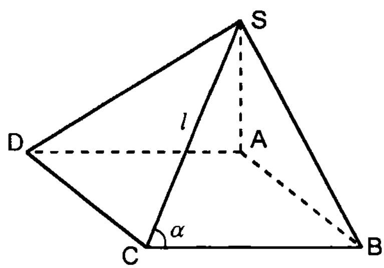
Дано: ΔABC – основание пирамиды.

5



Дано: $ABCD$ – прямоугольник.
$SC = 6\sqrt{5}$

6



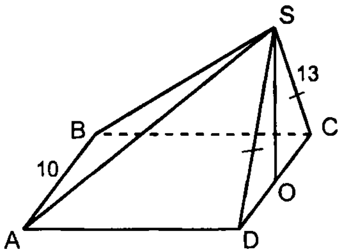
Дано: $ABCD$ – квадрат.

Таблица 11.11. Пирамида. Усеченная пирамида.

SO – высота пирамиды. Найти площадь полной поверхности пирамиды (рис. 1-3).

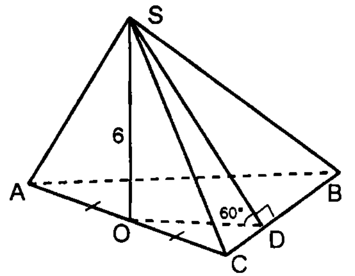
$A_1A_2\ldots A_nA_1'A_2'\ldots A_n'$ – правильная усеченная пирамида (рис. 4-6)

1



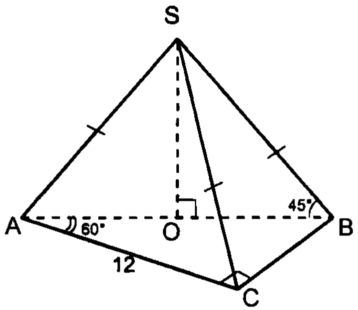
Дано: $ABCD$ – квадрат.

2

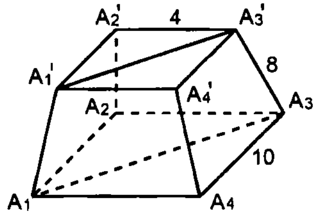


Дано: ΔABC – правильный.

3

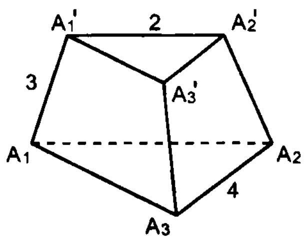


4

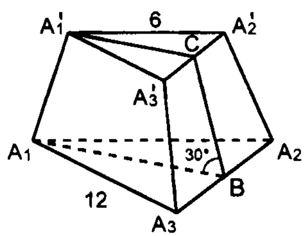


Найти $S_{A_1A_1'A_3'A_3}$.

5



6

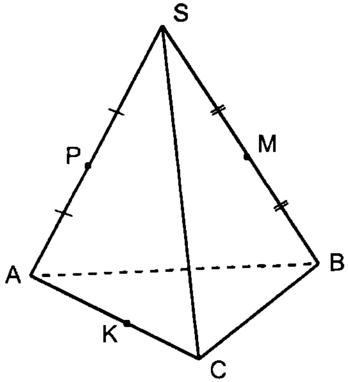


Найти площадь полной поверхности усеченной пирамиды.

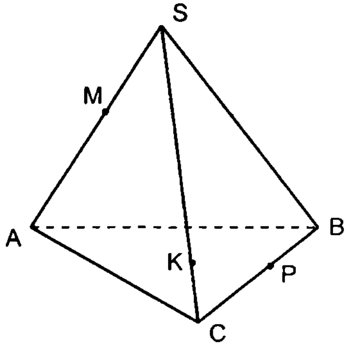
Таблица 11.12. **Построение сечений пирамиды.**

S – вершина пирамиды. Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки M, P и K.

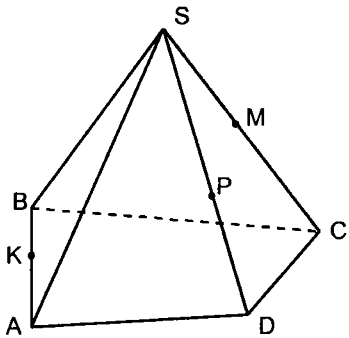
1



2



3



4

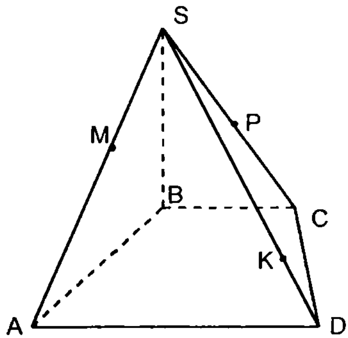
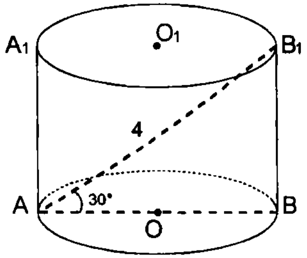


Таблица **11.13. Цилиндр.**

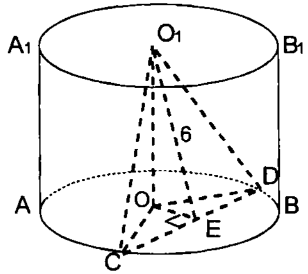
OO_1 – ось цилиндра, AA_1B_1B – осевое сечение цилиндра.

1



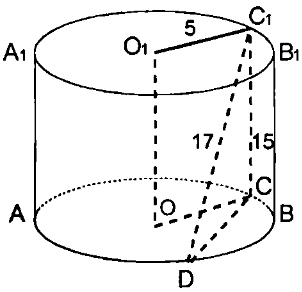
Найти высоту и радиус основания цилиндра.

2



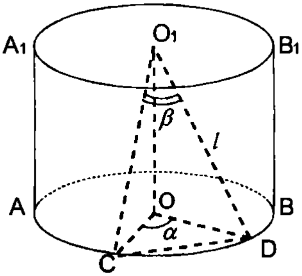
Дано: $\angle O_1EO = 45°$, $\angle EOC = 60°$.
Найти S_{CO_1D}.

3



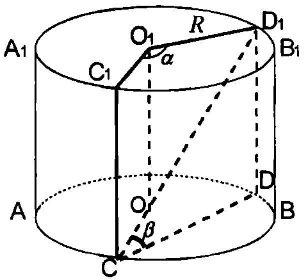
Найти расстояние между прямыми C_1D и OO_1.

4



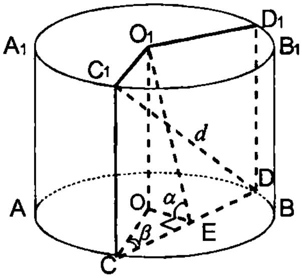
Найти высоту и радиус основания цилиндра.

5



Найти $S_{CC_1D_1D}$.

6



Найти $S_{CC_1D_1D}$.

Таблица 11.14. Конус.

SO – высота конуса.

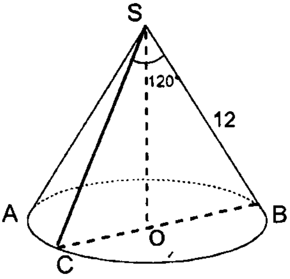
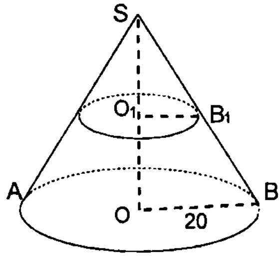
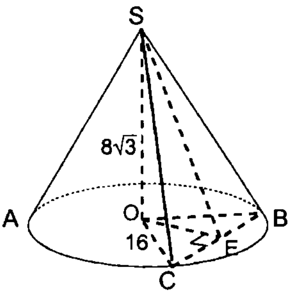
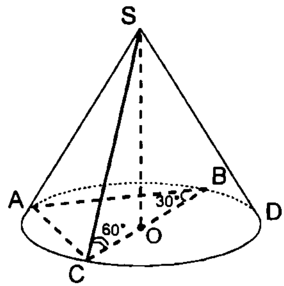
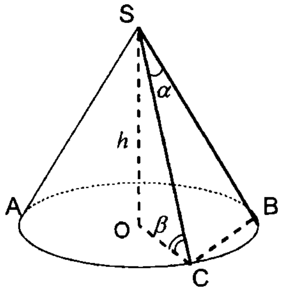
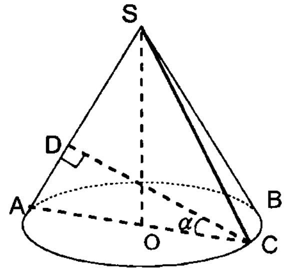
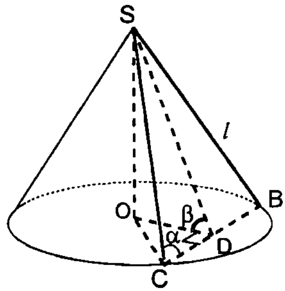
1  Найти SO и OB.	**2**  Дано: $SO = 16$, $SO_1 = 4$. Найти площадь сечения конуса плоскостью, проходящй через точку O_1 параллельно основанию конуса.
3  Дано: $\angle COB = 60°$. Найти $\angle SEO$.	**4**  Дано: $AC = 6$. Найти S_{ASC}.
5  Найти S_{BSC}.	**6**  Дано: $CD = m$. Найти S_{ASC}.

Таблица 11.15. Конус. Усеченный конус.

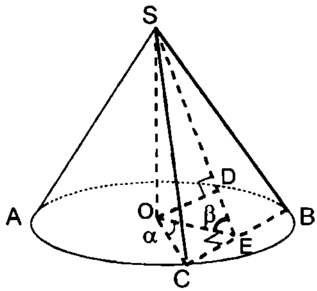
SO – высота конуса (рис. 1-3), O и O_1 – центры оснований усеченного конуса (рис. 4-6).

1



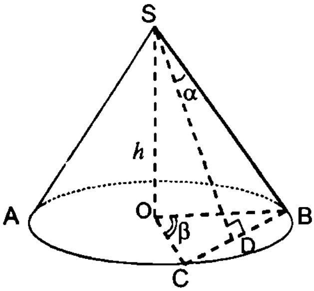
Найти SO и OC.

2



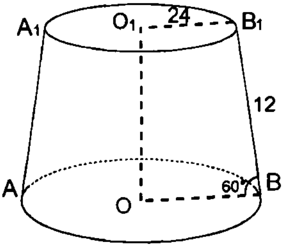
Дано: $OD = a$. Найти S_{BSC}.

3



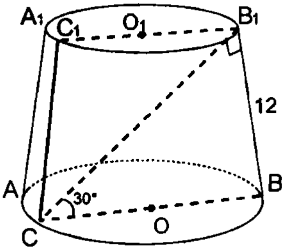
Найти SB.

4



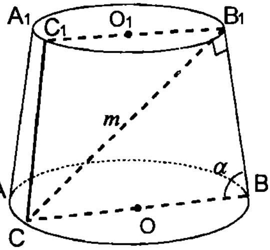
Найти OB и OO_1.

5



Найти $S_{CC_1B_1B}$.

6

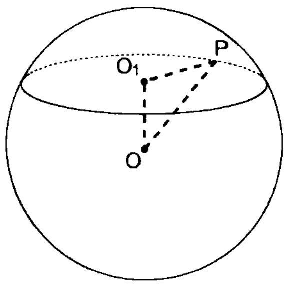


Найти $S_{CC_1B_1B}$.

Таблица 11.16. Шар.

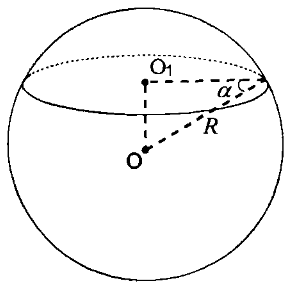
O – центр шара, O_1 – центр круга – сечения шара плоскостью.

1



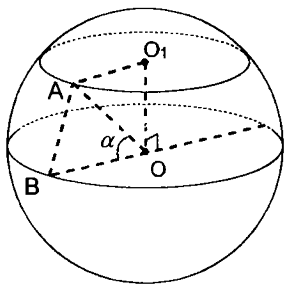
Дано: $OO_1 = 5$, $OP = 13$. Найти площадь сечения шара плоскостью.

2



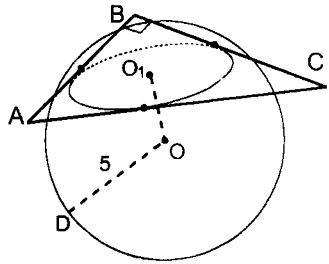
Найти площадь сечения шара плоскостью.

3



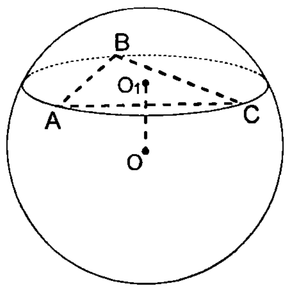
Дано: $AB = m$.
Найти O_1A.

4



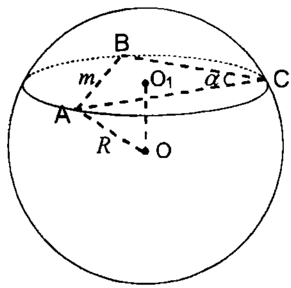
Дано: плоскость ABC пересекает шар. $AB = 9$, $BC = 12$. Найти OO_1.

5



Дано: $AB = BC = 40$, $AC = 48$, $OO_1 = 5$. Найти радиус шара.

6

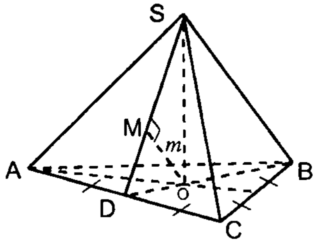


Найти OO_1.

Таблица **11.17. Вписанный и описанный шар.**

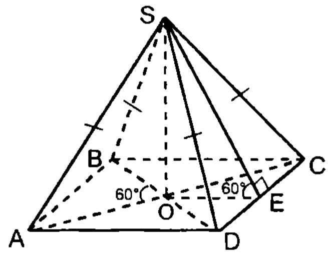
Найти радиус вписанного шара (рис. 1-2).
Найти радиус описанного шара (рис. 3-6).

1



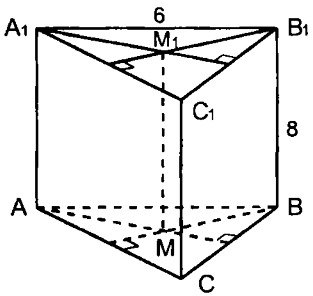
Дано: $SABC$ – правильная треугольная пирамида. $\angle SDO = \alpha$.

2



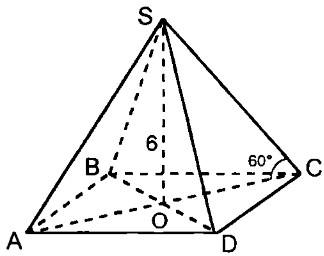
Дано: $SABCD$ – четырехугольная пирамида. $ABCD$ – прямоугольник. $AC = 12$.

3



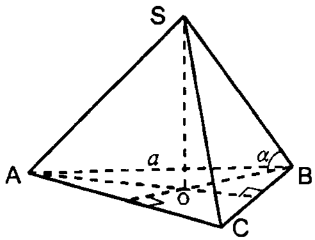
Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма.

4



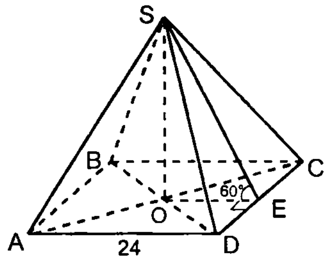
Дано: $SABC$ – правильная четырехугольная пирамида.

5



Дано: $SABC$ – правильная треугольная пирамида.

6

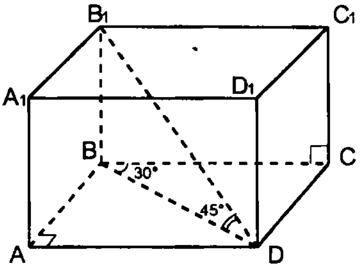


Дано: $SABC$ – правильная четырехугольная пирамида.

Таблица 11.18. Объем параллелепипеда.

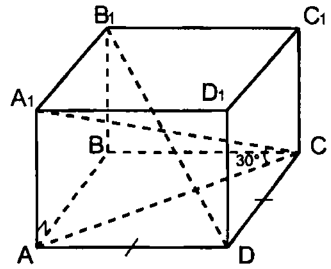
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед. Найти объем параллелепипеда.

1



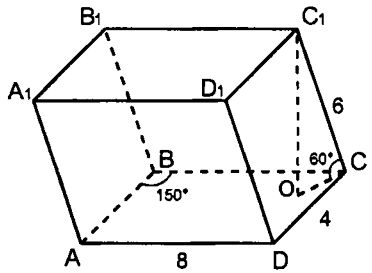
Дано: $B_1D = 10\sqrt{2}$.

2



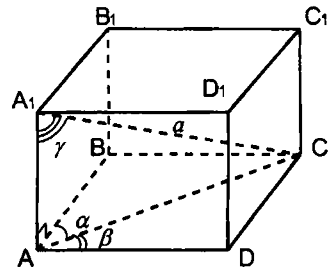
Дано: $A_1C = 12$, $B_1D = 10$.

3

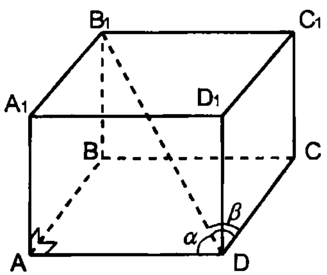


Дано: C_1O – высота параллеле-пипеда.

4

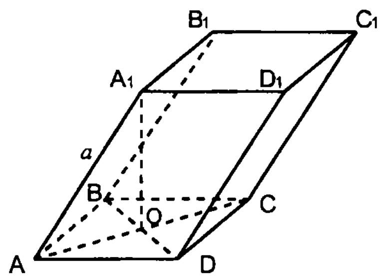


5



Дано: $B_1D = d$.

6

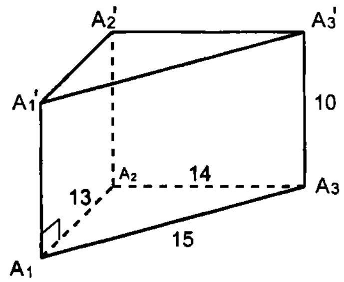


Дано: A_1O – высота параллелепипе-да, $ABCD$ – квадрат. $\angle A_1AO = \alpha$.

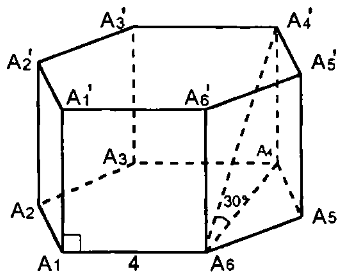
Таблица **11.19. Объем призмы.**

$A_1A_2\ldots A_nA_1'A_2'\ldots A_n'$ – призма. Найти объем призмы.

1

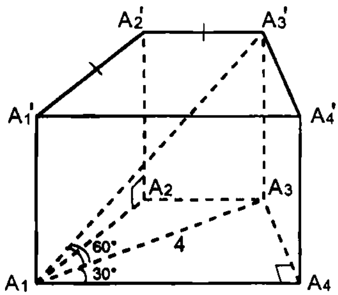


2



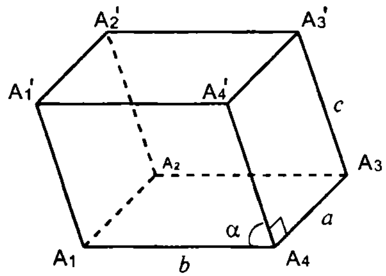
Дано: $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ – правильный шестиугольник.

3



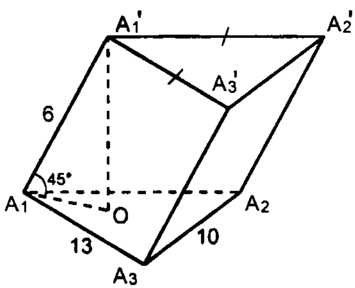
Дано: $A_1A_2A_3A_4$ – трапеция.

4



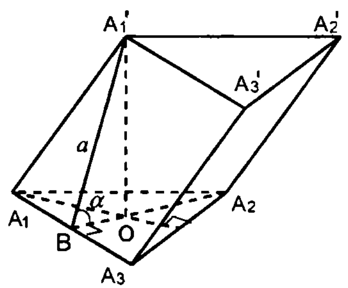
Дано: $A_1A_2A_3A_4$ – прямоугольник.

5



Дано: $A_1'O$ – высота призмы.

6

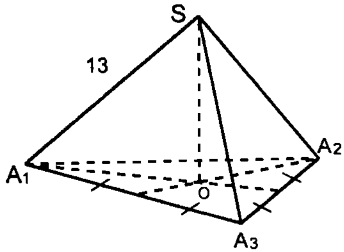


Дано: $\Delta A_1A_2A_3$ – правильный. $A_1'O$ – высота призмы.

Таблица **11.20. Объем пирамиды.**

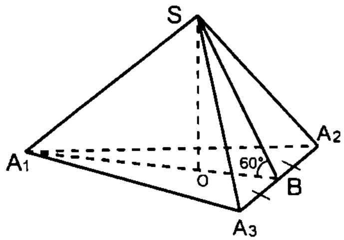
$SA_1A_2...A_n$ – пирамида, SO – высота пирамиды.
Найти объем пирамиды.

1



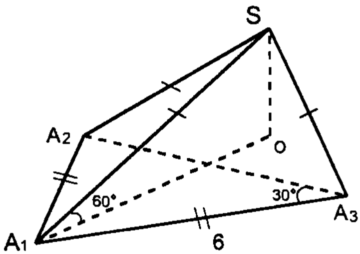
Дано: $\Delta A_1A_2A_3$ – правильный.
$A_1A_2 = 12\sqrt{3}$.

2

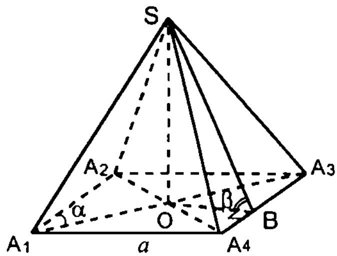


Дано: $A_1A_2 = A_1A_3 = 10$, $A_2A_3 = 12$.
O – центр окружности, вписанной в $\Delta A_1A_2A_3$.

3

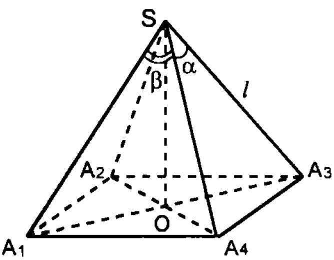


4



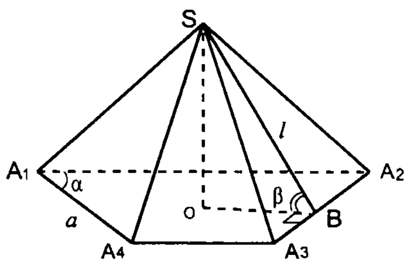
Дано: $A_1A_2A_3A_4$ – ромб.

5



Дано: $A_1A_2A_3A_4$ – прямоугольник.

6

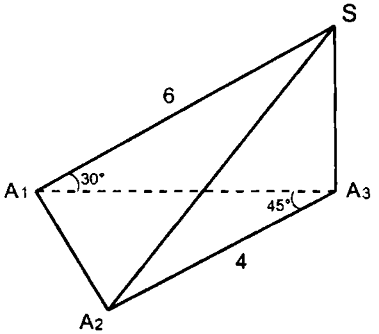


Дано: $A_1A_2A_3A_4$ – трапеция.
$A_1A_4 = A_2A_3$. O – центр окружности, вписанной в трапецию.

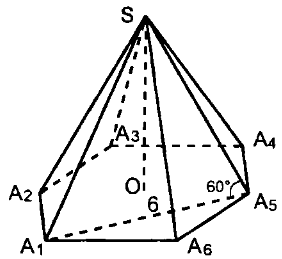
Таблица **11.21. Объем пирамиды.**

$SA_1A_2...A_n$ – пирамида. SO – высота пирамиды (рис. 2, 4-6), SA_3 – высота пирамиды (рис. 1, 3). Найти объем пирамиды.

1

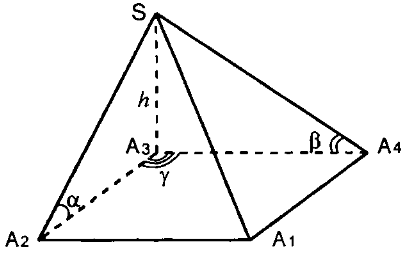


2



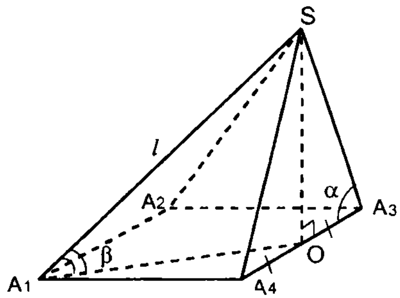
Дано: $SA_1A_2A_3A_4A_5A_6$ – правильная шестиугольная пирамида.

3



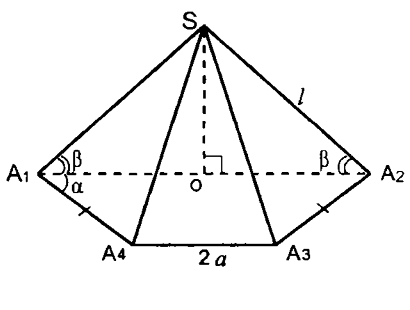
Дано: $A_1A_2A_3A_4$ – параллелограмм.

4



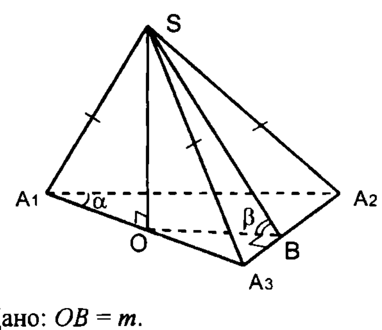
Дано: $A_1A_2A_3A_4$ – прямоугольник.

5



Дано: $A_1A_2A_3A_4$ – трапеция.

6



Дано: $OB = m$.

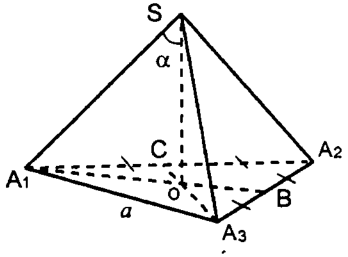
Таблица 11.22. Объем пирамиды. Объем усеченной пирамиды.

$SA_1A_2...A_n$ – правильная пирамида, SO – высота пирамиды (рис.1-3);

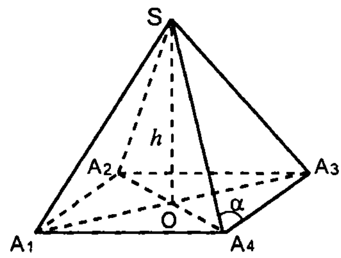
$SA_1A_2...A_nA_1'A_2'...A_n'$ – правильная усеченная пирамида (рис.4-6).

Найти объем пирамиды.

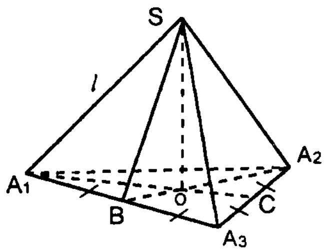
1



2

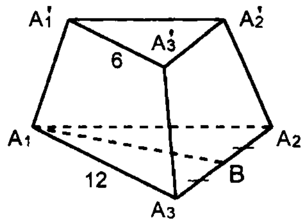


3



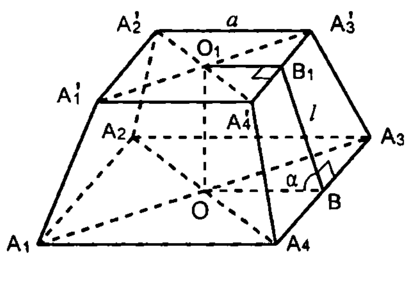
Дано: $\angle SBO = \alpha$.

4



Дано: $\angle A_1'A_1B = 60°$

5



6

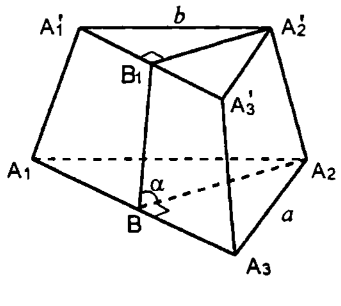


Таблица **11.23. Объем и площадь боковой поверхности цилиндра.**

OO_1 – ось цилиндра. Найти объем и площадь боковой поверхности цилиндра.

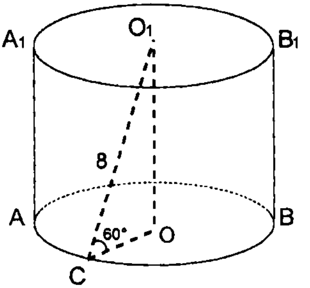
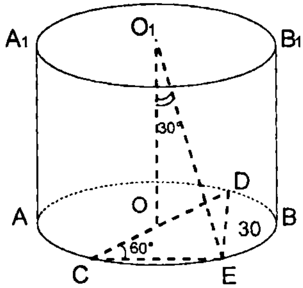
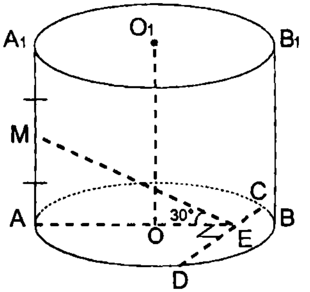
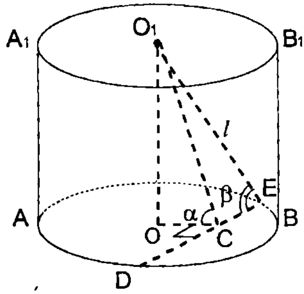
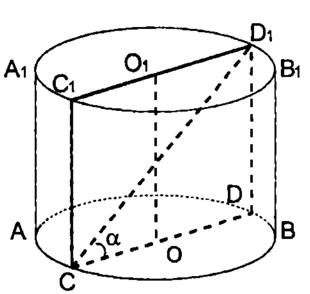
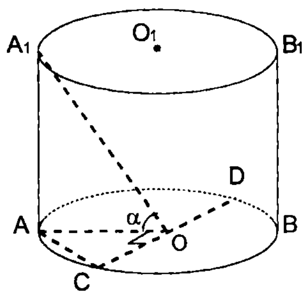
1 	**2** 
3  Дано: $OE = 6$, $CD = 16$.	**4** 
5  Дано: $S_{CC_1D_1D} = Q$.	**6**  Дано: $AC = 2a$.

Таблица 11.24. Объем и площадь боковой поверхности конуса.

SO – высота конуса. Найти объем и площадь боковой поверхности конуса.

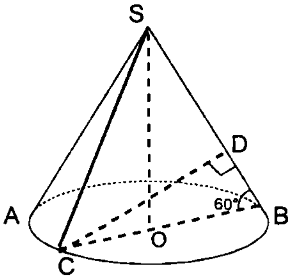
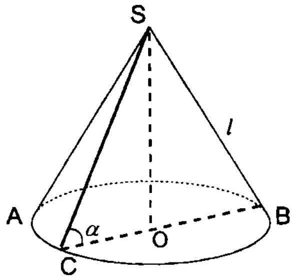
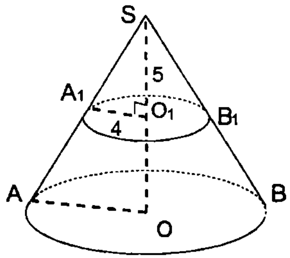
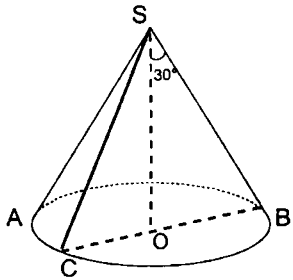
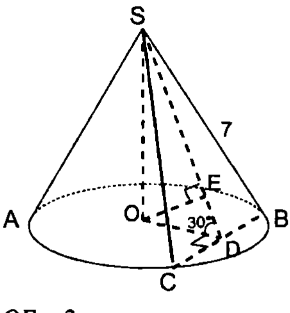
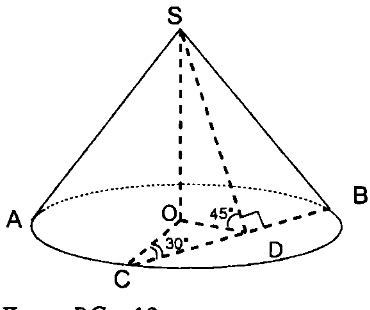
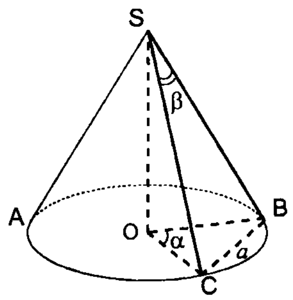
1  Дано: $CD = 6$.	**2** 
3  Дано: O_1 – центр круга – сечения конуса плоскостью, $SO = 15$.	**4**  Дано: $S_{SBC} = Q$.
5  Дано: $OE = 3$.	**6**  1) Дано: $BC = 12$. 2) Дано: $SB = 3\sqrt{5}$.

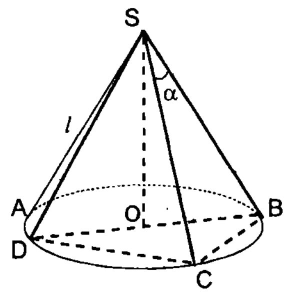
Таблица 11.25. Объем конуса. Объем усеченного конуса. Площадь боковой поверхности конуса. Площадь боковой поверхности усеченного конуса.

SO – высота конуса (рис. 1-3), O и O_1 – центры оснований усеченного конуса (рис. 4-6). Найти объем и площадь боковой поверхности конуса.

1

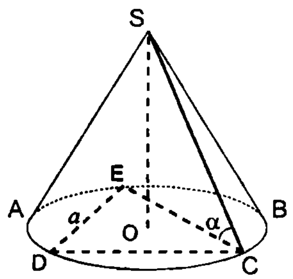


2



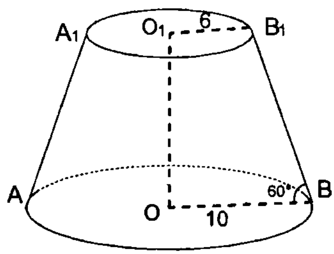
Дано: $\angle DSC = \beta$.

3

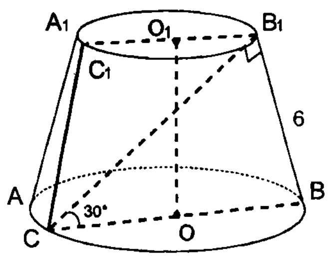


Дано: ΔCDE – правильный.

4



5



6

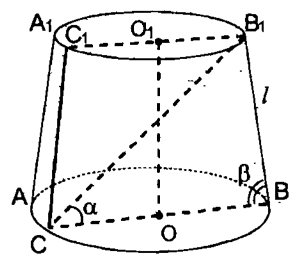
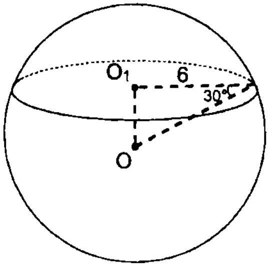


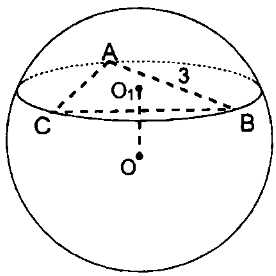
Таблица **11.26. Объем шара. Площадь поверхности шара.**

O – центр шара, O_1 и O_2 – центры кругов – сечений шара плоскостью. Найти объем и площадь поверхности шара (рис. 1-3).

1

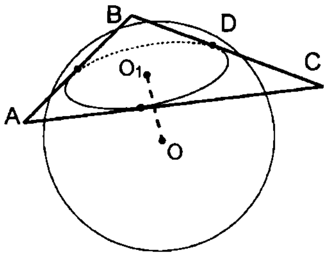


2



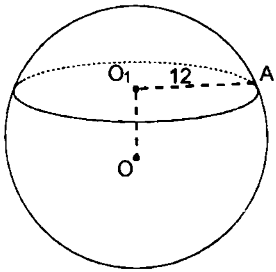
Дано: ΔABC – правильный, $OO_1 = 3$.

3



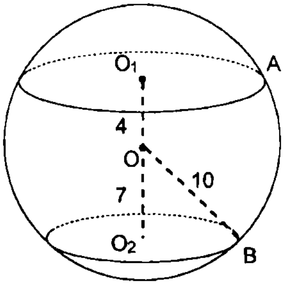
Дано:
$OO_1 = 4$, $AB = AC = 10$, $BC = 12$.

4



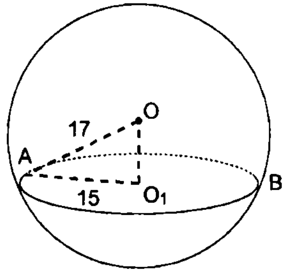
Дано: $OO_1 = 5$. Найти объем и площадь сферической части меньшего из шаровых сегментов.

5



Найти объем и площадь сферической части шарового кольца.

6



Найти объем и площадь сферической части меньшего из шаровых сегментов.

Ответы, указания, решения

Повторение.

<u>Таблица 1.</u> 3. $BC = b\ \mathrm{tg}\beta$, $AB = b\ \mathrm{tg}\beta \sin\alpha$, $AC = b\ \mathrm{tg}\beta \cos\alpha$. **4.** $AB = AC = \dfrac{m}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. **5.** $AB = AC = \dfrac{l}{\cos\alpha}$, $BC = 2l\ \mathrm{tg}\alpha$. **6.** $AC = 2m\cos\alpha$, $AB = \dfrac{2m\cos\alpha}{\sin\beta}$, $BC = 2m\cos\alpha\ \mathrm{ctg}\beta$. **7.** $AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$, $BC = \dfrac{AB\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$, $AC = \dfrac{AB\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **8.** $AC = 2r\ \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $AB = BC = \dfrac{r\ \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$. **9.** $AB = 2R\sin(\alpha+\beta)$, $BC = 2R\sin\alpha$, $AC = 2R\sin\beta$. **10.** $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$. **11.** $R = \dfrac{a}{2\cos\frac{\beta}{2}}$. **12.** $\dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. Указание. Радиус окружности, описанной около трапеции $ABCD$, равен радиусу окружности, описанной около ΔABD, в котором $\angle ADB = \dfrac{\alpha}{2}$.

<u>Таблица 2.</u> 3. $3\sqrt{3}$. **4.** 120. **5.** 156. **6.** $3\sqrt{3}$. **7.** $9\ (1+\sqrt{3})$. **8.** $12\sqrt{3}$. **9.** 32. **10.** 18. Указание. $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOC} = \dfrac{1}{2} OB\cdot OC\cdot\sin30^\circ + \dfrac{1}{2} OA\cdot OC\cdot\sin150^\circ$. **11.** 60. Решение. Пусть r – радиус окружности, вписанной в ΔABC. Тогда $AC = r + 12$, $BC = r + 5$, $(r + 5)^2 + (r + 12)^2 = 17^2$, откуда $r = 3$, $AC = 15$, $BC = 8$. **12.** $r^2\mathrm{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\alpha$. Решение. Из ΔAO_1D: $AD = r\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$, из ΔABD: $BD = r\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\alpha$. $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AC\cdot BD = \dfrac{1}{2}\cdot 2r\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\cdot r\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\alpha = r^2\mathrm{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\alpha$.

<u>Таблица 3.</u> 3. 40. **4.** $18\sqrt{2}$. **8.** 80. Указание. $OE^2 = AE \cdot ED$. **10.** 225. **11.** 64. Указание. Доказать, что высота трапеции равна её средней линии. **12.** 150. Указание. Из ΔAOB ($\angle O = 90^\circ$) $OE^2 = AE \cdot BE$, откуда $OE = 6$, $CD = 12$. $AB + CD = BC + AD = 25$.

Таблица 4. **1.** $\frac{1}{2}d^2\sin 2\alpha$. **2.** $m^2(m+n)\,\mathrm{ctg}\alpha$. **3.** $\frac{b^2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$. Указание. Из ΔABD по теореме синусов $AD = \frac{b\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$. **4.** $\frac{1}{2}a(2b + a\cos\beta)\sin\beta$. Указание. Проведем $BE \perp AD$. Из ΔABE: $BE = a\sin\beta$, $AE = -a\cos\beta$. Тогда $BC = AD - AE = b + a\cos\beta$. **5.** $\frac{1}{2}d^2\sin 2\alpha$. Указание. $AE = \frac{1}{2}(AD + BC)$. **6.** $2R^2\sin^2\alpha\cos\alpha$. Указание. Из ΔACD ($\angle C = 90°$): $CD = 2R\cos\alpha$. Проведем $CE \perp AD$. Из ΔCED: $CE = CD\sin\alpha = 2R\cos\alpha\sin\alpha$. Из ΔACE: $AE = CE\,\mathrm{tg}\alpha = 2R\sin^2\alpha$. $AE = \frac{1}{2}(AD + BC)$. **7.** $\frac{1}{2}(b^2 - a^2)\cdot\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. Указание. Проведем $CE \parallel AB$. Из ΔCDE по теореме синусов: $CD = \frac{ED\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{(b-a)\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. Проведем $CF \perp AD$. Из ΔCDF $CF = CD\sin\beta = \frac{(b-a)\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **8.** $20\sqrt{3}$. Решение. Из ΔABD по теореме косинусов: $BD^2 = 3^2 + 10^2 - 60\cos\angle A$. Из ΔBCD по теореме косинусов: $BD^2 = 5^2 + 8^2 + 80\cos\angle A$. Тогда $\cos\angle A = \frac{1}{7}$, $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{3}}{7}$, $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(3\cdot 10 + 5\cdot 8)\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7} = 20\sqrt{3}$. **9.** $\frac{121\sqrt{3}}{3}$. Указание. Из ΔADC: $AC = 14$. Проведем $BE \perp AC$. Т.к. $\angle ABC = 120°$, то $\angle BCA = 30°$, и $AE = EC = 7$. Из ΔABE: $BE = \frac{7}{\sqrt{3}}$. $S_{ABCD} = = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ADC}$.

Стереометрия. 10 класс.

Таблица 10.1. **4.** Нет. Указание. Воспользоваться методом доказательства от противного.

Таблица 10.2. **1.** Нет. Указание. Если бы прямые a, b и c лежали в одной плоскости, то точки M, K и P лежали бы на одной прямой. **2.** Доказательство. Предположим, что прямые a и b лежат в одной плоскости. Тогда прямая c также принадлежит этой плоскости. Через прямые a и c можно провести единственную плоскость (плоскость α), которой будет принадлежать и прямая b. Противоречие. **3.** Указание. Искомая точка – точка пересечения прямых m и l. **4.** Указание. Прямая пересечения плоскостей ABC и β проходит через точку C и точку пересечения прямых AB и l.

Таблица 10.3. **3.** Указание. Воспользоваться методом доказательства от противного. **4.** Указание. Воспользоваться методом доказательства от противного. **5.** Доказательство. Предположим, что прямые a и b не скрещивающиеся. Тогда они лежат в одной плоскости. Но через прямую b и точку D проходит единственная плоскость, в которой лежит и прямая BC ($BC \parallel b$). Имеем: прямая a лежит в плоскости ABC. Противоречие. **6.** 26. Указание. Доказать, что $EFKP$ – параллелограмм. **7.** 9. Решение. KK_1 – средняя линия трапеции AA_1B_1B, откуда $KK_1 = 7$. DD_1 – средняя линия трапеции KK_1C_1C, откуда $CC_1 = 9$. **8.** Указание. Проведем $KF \parallel BD$. Тогда KK_1 – средняя линия трапеции $BDEC$, $KF = 6$. MF – средняя линия треугольника ABC, $MF = 4$. $MF + FK = KM$, то есть точки M, F и K лежат на одной прямой, то есть прямая MK лежит в плоскости ABC.

Таблица 10.4. **3.** Доказательство. Так как $a \parallel b$, то $a \parallel \beta$, откуда $a \parallel c$. **4.** Указание. Выбрать на прямой a точку A и провести через точку A и прямую b плоскость γ. Доказать, что прямая a лежит в этой плоскости. **5.** Доказательство. Предположим, что $a \parallel \alpha$. Через M и a проведем плоскость. Она пересекает плоскость α по прямой c, параллельной a. Тогда через точку M проходят две прямые, переллельные прямой a. Противоречие. **7.** 14. Указание. Рассмотреть подобные треугольники ABC и AB_1C_1.

Таблица 10.5. **6.** Доказательство. Так как $AA_1 : A_1D = BB_1 : B_1D$, то $AB \parallel A_1B_1$. Аналогично, $BC \parallel B_1C_1$, откуда плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны.

Таблица 10.6. **5.** Доказательство. Предположим, что прямые AB и A_1B_1 лежат в одной плоскости. Тогда и прямые AA_1 и BB_1 лежат в одной плоскости, что противоречит условию. **6.** 6; 8; 4. **7.** 10; 2,4. **8.** Доказательство. $AB \parallel A_1B_1$, $\Delta AMB \sim \Delta A_1MB_1$, откуда $AM : MA_1 = BM : MB_1 = AB : A_1B_1$. Из подобия треугольников BMC и B_1MC_1: $BM : MB_1 = BC : B_1C_1 = AC : A_1C_1$; из подобия треугольников AMC и A_1MC_1: $AM : MA_1 = AC : A_1C_1$, откуда $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C$ (по трем сторонам).

Таблица 10.7. **4.** Указание. Точка D_1 – проекция точки D лежит на пересечении прямых, параллельных прямым A_1B_1 и B_1C_1, проведенных через точки C_1 и A_1 соответствнно. **5.** Решение. Пусть точка K – середина отрезка A_1B_1. Проведем луч KM_1 и отложим на нем отрезок $M_1C_1 = 2M_1K$. Точка C_1 – искомая.

6. Решение. Проведем прямые $A_1M \parallel B_1C_1$ и $C_1N \parallel A_1B_1$. Точка пересечения этих прямых – точка O_1 – проекция центра правильного шестиугольника. Далее строим точки D_1, E_1 и F_1, симметричные точкам A_1, B_1 и C_1 соответственно относительно точки O. Шестиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – искомый (рис.1). **7.** Указание. Искомые перпендикуляры параллельны сторонам четырехугольника $ABCD$.

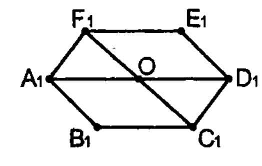


Рис.1.

Таблица 10.8. **1.** Указание. Искомый перпендикуляр параллелен диагонали AC. **2.** Указание. Искомые перпендикуляры параллельны медианам ΔABC. **3.** Указание. Искомая высота параллельна прямой, которая проходит через середины отрезков BC и AD. **4.** Указание. Проекция биссектриссы угла A делит сторону B_1C_1 в отношении 2:1, считая от точки C. **5.** Решение. Проведем хорду, параллельную AB. Через ее середину и точку O проведем диаметр. Он и будет искомым. **6.** Решение. Проведем две параллельные хорды. Через их середины проведем хорду, которая будет проекцией диаметра, а ее середина – проекцией центра окружности.

Таблица 10.9. **3.** Решение. Прямая CB перпендикулярна плоскости AMB, $AD \parallel BC$, откуда прямая AD перпендикулярна плоскости AMB и $AD \perp AM$. **4.** Указание. Доказать, что прямая BC перпендикулярна плоскости AMD. **5.** Указание. MO – высота равнобедренных треугольников AMC и BMD. **6.** Решение. $MO \perp BD$, $AC \perp BD$, откуда прямая BD перпендикулярна плоскости AMC.

Таблица 10.10. **1.** 1. **2.** 5. **3.** 5. **4.** 4. Решение. Радиус R окружности, описанной около ΔABC, равен: $R = \dfrac{AB}{2\sin ABC} = \dfrac{6}{2\sin 120^\circ} = 2\sqrt{3}$. Из ΔMOC ($\angle O = 90^\circ$): $MC = \sqrt{MO^2 + OC^2} = 4$. **5.** 12. Решение. Из ΔABC: $AB = \dfrac{6}{\cos 30^\circ} = 4\sqrt{3}$. Из ΔAMB ($\angle B = 90^\circ$): $MB = AB\text{tg}60^\circ = 12$. **6.** $2\sqrt{6}$; 4. Решение. Из ΔAMD ($\angle A = 90^\circ$): $AD = MD\cos 60^\circ = 4$, $AM = MD\sin 60^\circ = 4\sqrt{3}$. Из ΔAMB ($\angle B = 90^\circ$): $AB = AM\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{6}$.

Таблица 10.11. **4.** 6. **5.** 18. **6.** $\sqrt{a^2 - b^2 tg^2\alpha}$. **7.** $4\sqrt{21}$. Решение. Из ΔAA_1C ($\angle A_1 = 90^\circ$): $AC = 16$. Из ΔABC: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 20$. Из ΔAA_1B ($\angle A_1 = 90^\circ$): $BA_1 = \sqrt{AB^2 - AA_1^2} = 4\sqrt{21}$. **8.** 12. **9.** 16. Решение. Из ΔAA_1C ($\angle A_1 = 90^\circ$): $AA_1 = A_1C\ \text{tg}60^\circ = 4\sqrt{3}$, $AC = 8$. Из ΔAA_1B ($\angle A_1 = 90^\circ$): $AB = 8\sqrt{3}$. Из ΔABC: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 16$.

Таблица 10.12. **1.** $\dfrac{13\sqrt{3}}{2}$; $\dfrac{\sqrt{69}}{2}$. **2.** $5\sqrt{10}$. Решение. Из ΔAA_1D ($\angle A_1 = 90^\circ$): $A_1D = 12$; из ΔA_1BD ($\angle D = 90^\circ$): $BA_1 = 13$, из ΔAA_1B ($\angle A_1 = 90^\circ$): $AB = 5\sqrt{10}$. **3.** 45°. Решение. $AB = AC = 2\sqrt{2}$. Проведем $AD \perp BC$. Из ΔADC ($\angle D = 90^\circ$): $\cos x = \dfrac{CD}{AC} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, откуда $x = 45^\circ$. **4.** 60°. Решение. Из ΔAA_1C

($\angle A_1 = 90°$): $AA_1 = AC\sin 60° = 5\sqrt{3}$, $A_1C = 5$. Из ΔABA_1 ($\angle A_1 = 90°$): $A_1B =$
$= \sqrt{AB^2 - AA_1^2} = 8$. Из ΔA_1BC по теореме косинусов: $\cos x =$
$= \dfrac{BA_1^2 + CA_1^2 - BC^2}{2A_1B \cdot A_1C} = \dfrac{64+25-49}{2\cdot 8\cdot 5} = \dfrac{1}{2}$, $x=60°$. **5.** $\arcsin\dfrac{a\operatorname{ctg}\alpha}{b}$, $\sqrt{b^2 - a^2ctg^2\alpha}$. **6.** $\arcsin\dfrac{b\sin\beta\sin\alpha}{a}$ или $\pi - \arcsin\dfrac{b\sin\beta\sin\alpha}{a}$.

7. $\dfrac{m\sin\beta\sin\alpha}{\sin\gamma}$. Решение. Из ΔABC по теореме синусов: $AB = \dfrac{m\sin\beta}{\sin\gamma}$.

Из ΔAA_1B ($\angle A_1=90°$): $AA_1 = AB\sin\alpha = \dfrac{m\sin\beta\sin\alpha}{\sin\gamma}$.

8. $\sqrt{(a^2+b^2-2ab\cos\beta)tg^2\alpha + b^2}$. Решение. Из ΔA_1BC по теореме косинусов: $A_1C = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\beta}$. Из ΔAA_1C ($\angle A_1=90°$): $AA_1 = A_1C\operatorname{tg}\alpha =$ $= \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\beta}\cdot\operatorname{tg}\alpha$. Из ΔAA_1B ($\angle A_1 = 90°$): $AB = \sqrt{A_1B^2 + AA_1^2} =$ $= \sqrt{(a^2+b^2-2ab\cos\beta)tg^2\alpha + b^2}$.

<u>Таблица 10.13.</u> **4.** 30. **5.** $\sqrt{m^2 + a^2\sin^2\alpha}$. Решение. Проведем $MD \perp AC$. $BD \perp AC$ (по теореме о трех перпендикулярах). Из ΔBDC ($\angle D = 90°$): $BD =$ $= a\sin\alpha$. Из ΔBMD ($\angle B = 90°$): $MD = \sqrt{m^2 + a^2\sin^2\alpha}$. **6.** Доказательство. Проведем $MD \perp AB$ и $ME \perp BC$. $OD \perp AB$, $OE \perp BC$ (по теореме о трех перпендикулярах). $\Delta MBD = \Delta MBE$ (по гипотенузе и острому углу), откуда $MD = ME$. $OD = OE$ (как проекции равных наклонных). $\Delta BOD = \Delta BOE$ (по катету и гипотенузе), откуда $\angle OBD = \angle OBE$.

<u>Таблица 10.14.</u> **2.** Провести медианы BM_1 и AM_2. Провести $DD_1 \parallel BM_1$ и $DD_2 \parallel AM_2$, где точки D_1 и D_2 лежат на сторонах AC и BC соответственно. MD_1 и MD_2 – искомые перпендикуляры. **3.** Указание. Основание искомого перпендикуляра – точка M_1 такая, что $BC : CM_1 = 2:1$. **4.** 13 и 15. **5.** 8; $4\sqrt{2}$. Решение. Проведем $CE \perp AB$, $CE = 8\sqrt{3}$. Проведем $OF \parallel AB$. $OF = 4\sqrt{3}$. Из Из ΔMOF ($\angle O = 90°$): $MF = \sqrt{MO^2 + OF^2} = 8$. Проведем $OK \perp BD$, $OK = 4$. Из ΔMOK ($\angle O = 90°$): $MK = 4\sqrt{2}$. MF и MK – искомые расстояния. **6.** 10, 17. Решение. Проведем $BE \perp AD$, $BE = 6$. Из ΔMBE ($\angle B = 90°$): $ME = 10$. ME – расстояние от точки M до прямой AD. Аналогично находим расстояние от точки M до прямой AC.

Таблица 10.15. **1.** $\sqrt{14}$. Решение. Из ΔMOC ($\angle O = 90°$): $OC = 2$. Из ΔOCK ($\angle K=90°$, $OK=CK$): $OK = CK = \sqrt{2}$. Из ΔMKC ($\angle K=90°$): $MK = \sqrt{MC^2 - CK^2} = \sqrt{14}$. **2.** 5. Решение. Из ΔABC ($\angle C = 90°$): $AB = 25$. $CD \perp AB$ (по теореме о трех перпендикулярах). $CD = \dfrac{AC \cdot BC}{AB} = 12$. Из ΔMDC ($\angle C = 90°$): $MC = 5$. **3.** 13. Указание. Найти высоту CD треугольника ABC, воспользовавшись тем, что $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} CD \cdot AB$. **4.** 8. Указание. $OD = \dfrac{AB\sqrt{3}}{3}$. **5.** 8. Указание. Радиус окружности, вписанной в равнобокую трапецию, можно найти по формуле $r = \frac{1}{2}\sqrt{ab}$, где a и b – основания трапеции. **6.** $\arccos(\cos\alpha\cos\beta)$. Решение. Пусть $AC = a$. Тогда из ΔACB: $BC = a\cos\beta$. Из ΔMCA ($\angle A = 90°$): $MC = \dfrac{a}{\cos\alpha}$, из ΔMCB ($\angle B = 90°$): $\cos MCB = \dfrac{BC}{MC} = \cos\alpha\cos\beta$.

Таблица 10.16. **1.** Доказательство. 1 способ. MB – линия пересечения плоскостей AMB и CMB. $AB \perp MB$, $CB \perp MB$. Так как $\angle ABC = 90°$, то плоскости ABM и CBM перпендикулярны. 2 способ. $AB \perp BC$, $AB \perp MB$, значит, прямая AB перпендикулярна плоскости MBC. Так как плоскость AMB проходит через прямую AB, перпендикулярную плоскости MBC, то плоскости AMB и MBC перпендикулярны. **2.** Указание. $AC \perp BD$, $AC \perp MD$. Значит, прямая AC перпендикулярна плоскости DMB. **3.** 1) Указание. Доказать, что прямая MO перпендикулярна плоскости ABC. 2) Указание. Доказать, что прямая AC перпендикулярна плоскости BMD. **4.** Указание. Доказать, что прямая MO перпендикулярна плоскости ABC. **5.** Доказательство. Через точку A в плоскости α проведем прямую c, $c \perp a$. Плоскость, проходящая через прямые b и c, перпендикулярна прямой a. Так как $\alpha \perp \beta$, то угол между прямыми b и c равен 90°. Поскольку $b \perp a$ и $b \perp c$, то $b \perp \alpha$. **6.** Указание. Проведем через точку M прямую MB_1, перпендикулярную AB. Тогда MB_1 перпендикулярна плоскости ABC (задача 5). Аналогично, если прямая MB_2 перпендикулярна BC, то MB_2 перпендикулярна плоскости ABC. Получаем, что через точку M проходят два различных перпендикуляра к плоскости ABC. Противоречие.

Таблица 10.17. **1.** 12. Указание. Искомое расстояние равно высоте треугольника DFC, проведенной к стороне DF. **2.** 17. Указание. $AB^2 = AA_1^2 + A_1B_1^2 + BB_1^2$. **3.** $12\sqrt{2}$. **4.** 10. Указание. $D_1B \perp AB$, $C_1A \perp AB$ (теорема о трех перпендикулярах). Тогда AC_1D_1B – прямоугольник, $AC_1 = BD_1$.

5. $3\sqrt{26}$. Указание. $NC = 5$, $AM = 8$. Проведем $NK \perp AM$. $NK = AC = 15$, $KM = 3$.

<u>**Таблица 10.18.**</u> **1.** 5. **2.** 12. **3.** $2\sqrt{14}$. **4.** $2\sqrt{2}$. Указание. Искомое расстояние равно высоте BE параллелограмма $ABCD$, проведенной к стороне AD. **5.** $3\sqrt{2}$. Указание. Искомое расстояние равно высоте EF ΔEMB, где E – середина AC. **6.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Указание. Провести $MO \perp BD$. Искомое расстояние равно высоте OE ΔAMO.

<u>**Таблица 10.19.**</u> **2**. $A(2;0;0)$, $B(2;0;-2)$, $C(0;0;$[illegible]$)$. **3.** Указание. Сторона куба равна 4. **4.** 2[illegible]; $M($[illegible]$;8;5)$. Указание. $A(4;7;8)$, $B(-6;9;2)$. **5.** $P(\sqrt{6};2;0)$, $K(\sqrt{6};4;\sqrt{6})$. $\sqrt{10}$. Решение. Из ΔOAB ($\angle B = 90°$): $OB = 4$, $AB = 4\sqrt{3}$. Тогда $B(0;4;0)$. Из ΔABC ($\angle C = 90°$): $AC = BC = 2\sqrt{6}$. Тогда $C(2\sqrt{6};4;0)$, $A(2\sqrt{6};4;2\sqrt{6})$, откуда $K(\sqrt{6};4;\sqrt{6})$, $P(\sqrt{6};2;0)$, $PK = \sqrt{10}$. **6.** $2\sqrt{5}+\sqrt{73}+\sqrt{29}$. Решение. $B_1(6;0;4)$, P – середина отрезка B_1O. Тогда $P(3;0;2)$. $C(6;-8;0)$, K – середина отрезка OC. Тогда $K(3;-4;0)$. $M(6;-8;2)$. Тогда $PK = 2\sqrt{5}$, $PM = \sqrt{73}$, $KM = \sqrt{29}$.

<u>**Таблица 10.20.**</u> **1.** 1) 90°; 2) 45°; 3) 90°. **2.** 90°. Решение. Проведем через точку C прямую l, параллельную AB. Тогда угол между CD и AB равен углу между CD и l. По теореме о трех перпендикулярах $CD \perp l$. **3.** 90°. Указание. Провести через точку D прямую l, параллельную AC. Угол между MD и AC равен углу между MD и l. **4.** 90°. Указание. Через точку B провести прямую, параллельную AC. **5.** $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. Решение. Угол между MD и BC равен углу между AD и MD. Пусть $AB = a$, тогда $AM = a\sqrt{2}$. Из ΔMAD $\operatorname{tg} MDA = \sqrt{2}$.

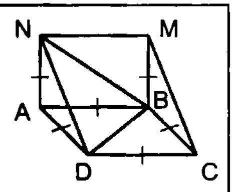


Рис.2.

6. 60°. Решение. Через точку A проведем перпендикуляр AN к плоскости ABC и отложим на нем отрезок $AN = BM$ (рис.2). Тогда $\Delta AND = \Delta ANB = \Delta BCD$ (по двум катетам), откуда $ND = NB = BD$. Так как $MC \parallel ND$, то угол между прямыми MC и BD равен углу между прямыми ND и BD, т.е. искомый угол равен 60°.

<u>**Таблица 10.21.**</u> **3.** 45°. **4.** 30°. Решение. Из ΔABC $AC = 2\sqrt{3}$. Из ΔMAB $\cos MBA = \frac{BA}{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $\angle MBA = 30°$. **5.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$. Решение. Пусть

$AC = a$, тогда $AB = a\sqrt{2}$. Из ΔMAB $\text{tg}MBA = \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **6.** $\text{arctg}\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Решение. Пусть $MA = a$, тогда $BE = 2a$. Из ΔAEB $AB = a\sqrt{5}$. Из ΔMBA $\text{tg}MBA = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **7.** 30°.

<u>**Таблица 10.22.**</u> **2.** 30°. Решение. Из ΔBAC ($\angle A = 30°$): $BC = 25$, $AD = \dfrac{15\cdot 20}{25} =$ $= 12$. Из ΔAOD $\sin ADO = 0{,}5$, $\angle ADO = 30°$. **3.** 60°. **4.** 60°. Указание. Через точку B в плоскости β провести прямую, параллельную прямой a, и из точки A провести перпендикуляр AC на эту прямую. $BC = B_1A_1 = 10$. Из ΔABC $AC = \sqrt{21}$. Далее из ΔAA_1C найти угол AA_1C. **5.** $\text{arctg}\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Указание. Пусть $CD = a$, тогда $BD = a$, $AD = a\sqrt{3}$, $AB = 2a$, $DE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Из ΔCDE $\text{tg}CED =$ $= \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **6.** $\text{arctg}(\sqrt{2}\,\text{tg}\alpha)$. Указание. Пусть $MO = a$, тогда $OC = a\text{ctg}\alpha$, $OE = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\text{ctg}\,\alpha$. Из ΔOME $\text{tg}MEO = \sqrt{2}\,\text{tg}\alpha$.

<u>**Таблица 10.23.**</u> **2.** 45°. **3.** 168. **4.** 1,5Q. Решение. $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} +$ $+ S_{AOC} = 3S_{BMC}\cos 60° = 1{,}5Q$. **5.** 45°. **6.** 30°.

<u>**Таблица 10.24.**</u> **3.** $C(3;8;2)$. Решение. $\overline{AD}(1;4;-5)$, $\overline{BC}(x-2;y-4;z-7)$. $\overline{AD} = \overline{BC}$, откуда $x = 3$, $y = 8$, $z = 2$. **6.** Доказательство. $\overline{AB}(-3;2;8)$, $\overline{AC}(2;-5;2)$, $\overline{AD}(-2;1;-1)$. Так как $\overline{AB}\cdot\overline{AC} = \overline{AB}\cdot\overline{AD} = 0$, то $AB \perp AC$ и $AB \perp AD$, откуда прямая AB перпендикулярна плоскости ADC. **7.** $\dfrac{19}{3\sqrt{59}}$.

8. 1) $\sqrt{7}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) 4. Указание. 1) $|\bar{a}+\bar{b}| = \sqrt{(\bar{a}+\bar{b})^2} = \sqrt{\bar{a}^2+\bar{b}^2+2\bar{a}\bar{b}} =$ $= \sqrt{|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2+2\cdot|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos 60°}$. **8.** $-4-\sqrt{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. Указание. $(\bar{a}+\bar{c})(\bar{b}-\bar{c}) =$ $= \bar{a}\cdot\bar{b} - \bar{a}\cdot\bar{c} + \bar{b}\cdot\bar{c} - \bar{c}\cdot\bar{c} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos 120° - |\bar{a}|\cdot|\bar{c}|\cdot\cos 45° + |\bar{b}|\cdot|\bar{c}|\cdot\cos 150° - |\bar{c}|^2$.

Стереометрия. 11 класс.

<u>**Таблица 11.1.**</u> **2.** 120°. **3.** 9. Решение. Через точку A_1 в плоскости A_1B_1B проведем прямую, перпендикулярную прямой MN, и отложим на ней отрезок $A_1C = 5$. Из ΔAA_1C $AC = 7$. Из ΔABC ($\angle C = 90°$) $AB = 9$.

4. $\arcsin(\sin\alpha\sin\beta)$. Решение. Пусть $AB = a$. Из ΔABC $AC = \dfrac{a}{\sin\alpha}$. Из ΔACD ($\angle C = 90°$) $AD = \dfrac{AC}{\sin\alpha} = \dfrac{a}{\sin\alpha\sin\beta}$. Из ΔADB $\sin ADB = \dfrac{AB}{AD} = \sin\alpha\sin\beta$.

5. $\arccos\dfrac{1}{3}$. Решение. Проведем прямую AE перпендикулярно ребру b. $\Delta AES = \Delta ADS$ (по гипотенузе и острому углу), откуда $AD = AE$. $\Delta AOD = \Delta AOE$ (по катету и гипотенузе), откуда $OE = OD$, т.е. точка O равноудалена от сторон $\angle(bc)$, откуда SO – биссектриса этого угла. Пусть $OD = a$. Из ΔSOD $SD = a\sqrt{3}$. Из ΔASD $AD = SD\sqrt{3} = 3a$. Из ΔAOD $\cos ADO = \dfrac{OD}{OA} = \dfrac{1}{3}$. **6.** $\arccos\dfrac{3}{4}$. Решение. $\Delta SAB = \Delta SAC$ (по катету и острому углу), откуда $SB = SC$, $AB = AC$. Пусть $AB=AC=a$. Из ΔABC $BC = a$. Из ΔABS ($\angle A = 90°$) $SB = a\sqrt{2}$. Из ΔSBC $\cos BSC = \dfrac{2a^2+2a^2-a^2}{4a^2} = \dfrac{3}{4}$.

Таблица 11.2. **1.** 1) 108; 2) 148. **2.** $8(3+10\sqrt{3})$. **3.** 5. **4.** 916. **5.** $\sqrt{57}$; 5. **6.** $4(54+55\sqrt{3})$. Указание. Провести $A_3B \perp A_1A_2$. Тогда $A_1B = \dfrac{14+4}{2} = 9$, $A_2B = 5$. Из $\Delta A_1'A_1A_3$ ($\angle A_1 = 90°$) $A_1A_3 = 15$.

Таблица 11.3. **1.** 1) 60; 2) 78. **2.** 1) 36; 2) $4(9+2\sqrt{3})$. **3.** 1) 48; 2) $12(4+\sqrt{3})$. **4.** 1) $216\sqrt{2}$; 2) $72(2+3\sqrt{2})$. **5.** 1) $72\sqrt{6}$; 2) $36(3+2\sqrt{6})$. **6.** 1) $\dfrac{3}{2}a^2\sin 2\alpha$; 2) $\dfrac{a^2}{2}(3\sin 2\alpha + \sqrt{3}\cos^2\alpha)$.

Таблица 11.4. **1.** 1) 1024; 2) 1536. Указание. Пусть $A_1A_4 = a$, тогда $A_1A_3 = a\sqrt{2}$. Из $\Delta A_1'A_1A_3$ $a^2+2a^2 = 768$, $a = 16$. **2.** 1) $4a^2\sin\alpha\sqrt{\cos 2\alpha}$; 2) $2a^2\sin\alpha(\sin\alpha + 2\sqrt{\cos 2\alpha})$. Указание. Из $\Delta A_1'A_2'A_4$ $A_1'A_2' = a\sin\alpha$, $A_1'A_4 = a\cos\alpha$. Из $\Delta A_1A_1'A_4$ ($\angle A_1 = 90°$) $A_1A_1' = \sqrt{a^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha} = a\sqrt{\cos 2\alpha}$. **3.** $384\sqrt{3}$; 2) $576\sqrt{3}$. **4.** 1) $6l^2\sin\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{1-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$; 2) $2l^2\sin\dfrac{\alpha}{2}(3\sqrt{1-4\sin^2\frac{\alpha}{2}} + \sqrt{3}\sin\dfrac{\alpha}{2})$. Указание. Из $\Delta A_1'A_2A_3$: $A_2A_3 = 2l\sin\dfrac{\alpha}{2}$. Из $\Delta A_1'A_1A_3$: $A_1'A_1 = \sqrt{l^2 - 4l^2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = l\sqrt{1-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

5. 1) $\frac{4l^2\sin2\alpha}{1+\cos^2\alpha}$; 2) $\frac{4l^2}{1+\cos^2\alpha}(\sin2\alpha+\cos^2\alpha)$. Решение. Пусть $A_1A_2 = a$. Тогда $A_1O = A_2O = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Из $\Delta A_2'A_2O$: $A_2'O = \frac{a\sqrt{2}}{2\cos\alpha}$. Из $\Delta A_2'OA_1$ ($\angle O = 90°$) $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2\cos\alpha}\right)^2 = l^2$, $a = \frac{\sqrt{2}l\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$. Из $\Delta A_2A_2'O$: $A_2A_2' = \frac{\sqrt{2}l\sin\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$,

$S_{бок} = \frac{4\sqrt{2}l\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}\cdot\frac{\sqrt{2}l\sin\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}} = \frac{4l^2\sin2\alpha}{1+\cos^2\alpha}$, $S_{полн} = \frac{4l^2\sin2\alpha}{1+\cos^2\alpha} + \frac{4l^2\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}$.

6. 1) $\frac{6h^2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1+4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$; 2) $\frac{2h^2\sin\frac{\alpha}{2}}{1+4\sin^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\left(3\sqrt{1+4\sin^2\frac{\alpha}{2}}+\sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{2}\right)$. Решение.

Пусть $A_1A_2 = a$. Из $\Delta A_1A_2'A_3$: $A_2'A_3 = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ Из $\Delta A_3A_2'A_2$: $a^2 + \frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} = h^2$,

$a = \frac{2h\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1+4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$. $S_{бок} = 3ah$, $S_{полн} = 3ah + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2}\left(6h+a\sqrt{3}\right)$.

<u>**Таблица 11.5.**</u> **1.** 76. **2.** 300. **3.** $20(1+\sqrt{3})$. **4.** 252. Указание. $\angle A_3'A_3A_4 = 90°$ (по теореме о трех перпендикулярах), откуда $A_3'A_3A_4A_4'$ – прямоугольник. **5.** $108(2+\sqrt{7})$. Решение. Через точку A_1 проведем прямую l, параллельную A_2A_3. $A_1C \perp l$. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $A_1'A_1 \perp l$. Так как $A_1A_1' \parallel A_3A_3'$ и $A_2A_3 \parallel l$, то $\angle A_3'A_3A_2 = 90°$, т.е. $A_3'A_3A_2A_2'$ – прямоугольник. Из $\Delta A_1'A_1O$ $A_1O = 6\sqrt{3}$, откуда $A_1A_3 = 18$. Из $\Delta A_1'A_1B$ $A_1'B = \sqrt{63}$. $S_{бок} = 2\cdot18\cdot\sqrt{63} + 12\cdot18 = 108(2+3\sqrt{7})$. **6.** $36(2+\sqrt{3})$. Решение. $\angle A_1'A_1A_2 = 90°$ (по теореме о трех перпендикулярах), откуда $A_1'A_1A_2A_3$ – прямоугольник. Из $\Delta A_1'A_1O$ $A_1'O = A_1O = 3\sqrt{2}$. Тогда $A_1A_4 = 6$. Из $\Delta A_1'OB$ $A_1'B = 3\sqrt{3}$. $A_1'B \perp A_1A_4$ (по теореме о трех перпендикулярах), тогда $S_{бок} = 2\cdot6\cdot3\sqrt{3} + 2\cdot6\cdot6 = 36(2+\sqrt{3})$.

<u>**Таблица 11.6.**</u> **1.** $2\sqrt{57}$; 10. **2.** $4\sqrt{3}(15+16\sqrt{10})$. **3.** 426. Указание. Пусть $AA_1 = x$, $AD = y$, $AB = z$. Тогда $x^2 + y^2 = 106$, $x^2 + z^2 = 169$, $y^2 + z^2 = 225$. Сложив три уравнения, получим $2(x^2 + y^2 + z^2) = 500$, $x^2 + y^2 + z^2 = 250$, откуда $x^2 = 25$, $y^2 = 81$, $z^2 = 144$, $AA_1 = 5$, $AD = 9$, $AB = 12$. **4.** $2d^2\cos\alpha(\cos\alpha\sin\beta + 2\sin\alpha)$. Решение. Из ΔDC_1C ($\angle C = 90°$) $C_1C = d\sin\alpha$, $CD = d\cos\alpha$. $S_{ABCD} =$

$= d^2\cos^2\alpha\sin\beta$. $S_{бок} = 4d^2\cos\alpha\sin\alpha$. **5.** $\dfrac{d^2}{\sin\frac{\alpha}{2}}(\sin 2\beta + \cos^2\beta\cos\dfrac{\alpha}{2})$. Решение. Из ΔBB_1D ($\angle B = 90°$) $BD = d\cos\beta$, $B_1B = d\sin\beta$. Из ΔABD $AB = \dfrac{d\cos\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. $S_{ABCD} =$

$= \dfrac{d^2\cos^2\beta}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}\sin\alpha = \frac{1}{2}d^2\cos^2\beta ctg^2\dfrac{\alpha}{2}$. $S_{бок} = \dfrac{4d\cos\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot d\sin\beta = \dfrac{d^2\sin 2\beta}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

6. $2d^2(\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta} + \sin\alpha\sin\beta + \sin\alpha\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta})$. Решение. Из ΔBB_1D $BB_1 = d\sin\alpha$, $BD = d\cos\alpha$. Из ΔB_1C_1D $B_1C_1 = d\sin\beta$. Из ΔABD ($\angle A = 90°$) $AB = \sqrt{d^2\cos^2\alpha - d^2\sin^2\beta}$. $S_{ABCD} = d^2\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$. $S_{бок} = 2d^2\sin\alpha(\sin\beta + \sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta})$.

Таблица 11.7. **1.** Указание. Через точку P провести прямую, параллельную KF. Она пересекает отрезок A_2A_2' в точке M. $KMPF$ – искомое сечение. **2.** Указание. Прямая KF пересекает прямую A_2A_3 в точке B. Прямая BP пересекает A_1A_3 в точке M. $KPMF$ – искомое сечение. **3.** Указание. Прямые KF и KP пересекают прямые A_1A_2 и A_2A_3 в точках B и C соответственно. Прямая BC пересекает отрезки A_1A_4 и A_3A_4 в точках D и E соответственно. $KPEDF$ – искомое сечение. **4.** Указание. Через точки K и P проведем прямую, пересекающую прямые A_1A_1' и $A_1'A_4'$ в точках B и A соответственно. Через точки A и F проведем прямую, пересекающую прямые $A_4'A_3'$ и $A_1'A_2'$ в точках M и C соответственно. Прямая BC пересекает A_1A_2 и A_2A_2' в точках N и E соответственно. $NEFMPK$ – искомое сечение.

Таблица 11.8. **1.** 54. **2.** 48. Указание. $S_{бок} = \dfrac{S_{ABCD}}{\cos 60°}$. **3.** 336. Указание. Из ΔSOC $OC = \sqrt{72}$. Тогда $CD = 12$. Проведем $SE \perp CD$. Из ΔSEC $SE = 8$. **4.** $\dfrac{3a}{2}\left(2\sqrt{4b^2 - a^2} + a\sqrt{3}\right)$. Указание. Провести $SK \perp CD$. Из ΔSCK $SK = \dfrac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$. **5.** $\dfrac{3\sqrt{3}h^2\cos\alpha(1 + \cos\alpha)}{\sin^2\alpha}$. Указание. Из ΔSOE $OE = h\text{ctg}\alpha$. Из ΔABC $AC = 2\sqrt{3}\,OE$. $S_{бок} = \dfrac{S_{ABC}}{\cos\alpha}$. **6.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1 + \sqrt{4ctg^2\alpha + 1}\right)$. Указание.

Из ΔABC $AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $OE = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Из ΔSOA $SO = AO$ ctgα. Из ΔSOE $SE = \sqrt{SO^2 + OE^2}$.

Таблица 11.9. **1.** $8(\sqrt{3}+\sqrt{6})$. Указание. $S_{бок} = \frac{S_{ABCD}}{\cos 45°}$. **2.** $8(11+3\sqrt{2})$. **3.** 5. Указание. Т.к. $SA = SB = SC$, то $OA = OB = OC$, т.е. точка O – центр окружности, описанной около ΔABC. Тогда $AO = \frac{AB}{2\sin 150°}$. **4.** $3\sqrt{7}$. Решение. Из ΔSAO $AO = 4$. Из ΔABC по теореме синусов $AO = R = \frac{BC}{2\sin BAC}$, откуда $\sin BAC = \frac{3}{4}$. Тогда $\cos BAC = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Из ΔABD $AD = AB\cos BAD = \frac{3\sqrt{7}}{2}$, $AC = 2AD = 3\sqrt{7}$. **5.** $39(1+\sqrt{2})$. Указание. $OE = r = 0{,}5\sqrt{AB\cdot CD} = 3$. $SO = OE = 3$. $S_{ABCD} = (9+4)\cdot 3 = 39$. $S_{бок} = \frac{S_{ABCD}}{\cos 45°}$. **6.** $\frac{a^2 \sin 2\alpha \cos^2 \frac{\beta}{2}}{2\cos\beta}$. Указание. Из ΔABC $AC = a\cos\alpha$. $S_{ABC} = \frac{1}{2}a^2 \cos\alpha \sin\alpha = \frac{1}{4}a^2 \sin 2\alpha$. Так как O – точка пересечения биссектрис ΔABC, то точка O – центр окружности, вписанной в ΔABC. Тогда $S_{бок} = \frac{S_{ABC}}{\cos\beta}$.

Таблица 11.10. **1.** 252. Указание. Провести $SD \perp CB$. Из ΔADB $AD = 12$, из ΔSAD $SA = 15$. **2.** $18(3+3\sqrt{3}+\sqrt{6})$. Указание. Из ΔABC $AC = 6\sqrt{3}$, $AB = 12$. Из ΔSAC $SA = 6\sqrt{3}$, $CS = 6\sqrt{6}$. $\angle SCB = 90°$ (по теореме о трех перпендикулярах). **3.** $48(1+\sqrt{3})$. **4.** $36(3+2\sqrt{3})$. Указание. Из ΔABC $AB = 12\sqrt{3}$. Из ΔACD $AD = AC\sin 60° = 6\sqrt{3}$. Из ΔSAD $SA = 6$, $CD = 12$. **5.** $18(3+3\sqrt{3}+\sqrt{6})$. Решение. Пусть $SA = a$, тогда $AB = CD = a$, $SD = 2a$. Из ΔSDC ($\angle D = 90°$) $4a^2 + a^2 = 36\cdot 5$, $a = 6$. $SA = AB = 6$, $AD = 6\sqrt{3}$, $SB = 6\sqrt{2}$, $SD = 12$. $S_{полн} = 36\sqrt{3} + 18\sqrt{3} + 36 + 18\sqrt{6} + 18 = 54\sqrt{3} + 18\sqrt{6} + 54$. **6.** $l^2(\cos^2\alpha + 0{,}5\sin 2\alpha + \cos\alpha\sqrt{-\cos 2\alpha})$. Решение. Из ΔSCB ($\angle B = 90°$) $SB = l\sin\alpha$, $BC = l\cos\alpha$. Из ΔSAB $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = l\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = l\sqrt{-\cos 2\alpha}$. $S_{полн} = l^2\cos^2\alpha + 0{,}5l^2\sin\alpha\cos\alpha + 0{,}5l^2\sin\alpha\cos\alpha + 0{,}5l^2\sqrt{-\cos 2\alpha}\cos\alpha + 0{,}5l^2\sqrt{-\cos 2\alpha}\cos\alpha$. Замечание. Так как $SB > AB$, $AB = BC$, то $SB > BC$. Из ΔSBC ($\angle B = 90°$) $\text{tg}\alpha > 1$, откуда $\alpha > 45°$, $2\alpha > 90°$, и $-\cos 2\alpha > 0$.

Таблица 11.11. **1.** $10(29+\sqrt{61})$. Указание. Из ΔSOC $SO = 12$. Проведем $OE \perp AB$. Из ΔSOE $SE = 2\sqrt{61}$. $\angle SDA = \angle SCB = 90°$ (по теореме о трех перпендикулярах). **2.** $24(1+2\sqrt{3})$. Указание. Из ΔSOD $OD = 2\sqrt{3}$. Из ΔOCD ($\angle D = 90°$, $\angle C = 60°$) $OC = 4$, откуда $AC = 8$. $S_{ABC} = 16\sqrt{3}$. $S_{SBC} = S_{SAB}$. ΔOBC – ортогональная проекция ΔSBC на плоскость ABC. Тогда $S_{SAB} +$

$+ S_{SBC} = \dfrac{S_{ABC}}{\cos 60°} = 16\sqrt{3}\cdot 2 = 32\sqrt{3}$. $S_{ASC} = 24$. **3.** $36(4+2\sqrt{3}+\sqrt{7}+\sqrt{15})$.

Указание. Из ΔABC $AB = 24$, $BC = 12\sqrt{3}$. $AO = OB = 12$. Из ΔSOB $SO = 12$, $SB = 12\sqrt{2}$. Проведем $SD \perp BC$ и $SE \perp AC$. Тогда D и E – середины сторон BC и AC соответственно. Из ΔSDB $SD = \sqrt{SB^2 - DB^2} = 6\sqrt{5}$. Из ΔSEC $SE = 6\sqrt{7}$. **4.** $14\sqrt{23}$. **5.** $5\sqrt{3}+18\sqrt{2}$. **6.** $99\sqrt{3}$. Указание. Проведем $CE \perp A_1B$. CE – высота усеченной пирамиды. $BE = r_1 - r_2 = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$, где r_1 и r_2 – радиусы окружностей, вписанных в $\Delta A_1A_2A_3$ и $\Delta A_1'A_2'A_3'$ соответственно. Из ΔCBE $CB = 2$. CB – высота боковой грани усеченной пирамиды.

Таблица 11.12. **1.** Указание. Т.к. $PM \parallel AB$, то плоскость сечения пересекает плоскость ABC по прямой KE, параллельной AB. **2.** Указание. Провести прямую MK до пересечения с прямой AC (точка D). Прямая DP пересекает AB в точке E. $PKME$ – искомое сечение. **3.** Указание. Провести прямую MP до пересечения с прямой DC (точка F). Прямая FK пересекает прямые AD и BC в точках E и T соответственно. Прямая TM пересекает прямую SB в точке N. $KNMPE$ – искомое сечение. **4.** Указание. Проведем прямые KP и MK до пересечения с прямыми CD и AD в точках E и F соответственно. Прямая EF пересекает прямую BC в точке T. Прямая TP пересекает прямую SB в точке L. $MKPL$ – искомое сечение.

Таблица 11.13. **2.** $18\sqrt{6}$. Указание. Из ΔOEO_1 $OE = 3\sqrt{2}$. Из ΔCOE $CE = 3\sqrt{6}$. $DC = 2CE = 6\sqrt{6}$. **3.** 3. Указание. Искомое расстояние равно длине перпендикуляра OE к отрезку CD. **4.** $\dfrac{l\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2}}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$; $\dfrac{l\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

Решение. Проведем $O_1E \perp CD$. Из ΔO_1DE $DE = l\sin\dfrac{\beta}{2}$. Из ΔODE ($\angle D = 90°$)

$OD = R = \dfrac{l\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. Из ΔO_1OD $OO_1 = h = \dfrac{l}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2}}$.

5. $4R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\beta$. Решение. Из $\Delta C_1O_1D_1$ $C_1D_1 = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$. Из ΔCD_1D ($\angle D = 90°$) $DD_1 = CD\mathrm{tg}\beta = 2R\sin\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\beta$. $S_{CC_1D_1D} = 4R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\beta$. **6.** $\frac{2d^2\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta}{1+4\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha\,\mathrm{ctg}^2\,\beta}$. Решение. Пусть $OO_1 = a$. Из ΔOO_1E $OE = a\mathrm{ctg}\alpha$. Из ΔOCE $CE = OE\mathrm{ctg}\beta$. $CD = 2CE = 2a\mathrm{ctg}\alpha\mathrm{ctg}\beta$. Из ΔCC_1D $a^2 + 4a^2\mathrm{ctg}^2\alpha\mathrm{ctg}^2\beta = d^2$. $a^2 = \frac{d^2}{1+4\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha\,\mathrm{ctg}^2\,\beta}$.

$S_{CC_1D_1D} = 2a^2\mathrm{ctg}\alpha\mathrm{ctg}\beta = \frac{2d^2\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta}{1+4\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha\,\mathrm{ctg}^2\,\beta}$.

Таблица 11.14. **2.** 25π. **3.** $45°$. Решение. Из ΔCOE $OE = 8\sqrt{3}$. Из ΔSOE $\mathrm{tg}SEO = 1$, $\angle SEO = 45°$. **4.** $9\sqrt{15}$. Решение. Из ΔABC ($\angle A = 90°$) $CB = 12$, тогда $OC = 6$. Из ΔSOC $SC = 12$. Проведем $SE \perp AC$. Из ΔSEC $ES = \sqrt{SC^2 - EC^2} = 3\sqrt{15}$. $S_{ASC} = 9\sqrt{15}$. **5.** $\frac{h^2\sin\alpha}{2\sin^2\beta}$. **6.** $\frac{m^2}{2\sin 2\alpha}$.

Таблица 11.15. **1.** $l\sin\alpha\sin\beta$; $l\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\beta}$. Решение. Из ΔSBD ($\angle D=90°$) $SB = l\sin\alpha$. Из ΔSOD $SO = l\sin\alpha\sin\beta$. Из ΔSOC $OC = \sqrt{SC^2 - SO^2}$.

2. $\frac{2a^2 tg\alpha}{\sin\beta\sin 2\beta}$. Решение. Из ΔODE $OE = \frac{a}{\sin\beta}$. Из ΔSOE $SE = \frac{a}{\sin\beta\cos\beta} = \frac{2a}{\sin 2\beta}$. Из ΔCOE $CE = OE\mathrm{tg}\alpha = \frac{a\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sin\beta}$. $S_{BSC} = \frac{2a^2 tg\alpha}{\sin\beta\sin 2\beta}$.

3. $\frac{h\sin\frac{\beta}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{\beta}{2}-\sin^2\alpha}}$. Решение. Пусть $SB = x$. Из ΔSBD $SD = x\cos\alpha$, $BD = x\sin\alpha$.

Из ΔOBD ($\angle D=90°$) $OD = BD\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2} = x\sin\alpha\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}$. Из ΔSOD $x^2\sin^2\alpha\mathrm{ctg}^2\frac{\beta}{2} + h^2 = x^2\cos^2\alpha$, откуда $x = \frac{h}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\, ctg^2\frac{\beta}{2}}} = \frac{h}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\left(1+ctg^2\frac{\beta}{2}\right)}} = \frac{h\sin\frac{\beta}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{\beta}{2}-\sin^2\alpha}}$. **4.** 30; $6\sqrt{3}$. Указание. Провести $B_1C \perp OB$. **5.** $108\sqrt{3}$.

Решение. Проведем $B_1D \perp BC$. Из ΔB_1DB $B_1D = 6\sqrt{3}$, $DB = 6$. Тогда $CD = 18$.

$S_{CC_1B_1B} = CD \cdot B_1D = 108\sqrt{3}$. **6.** $0{,}5m^2\sin2\alpha$. Проведем $B_1D \perp BC$. Из ΔCB_1D $B_1D = m\cos\alpha$, $CD = m\sin\alpha$. $S_{CC_1B_1B} = CD \cdot B_1D = m^2\sin\alpha\cos\alpha = 0{,}5m^2\sin2\alpha$.

Таблица 11.16. **1.** 144π. **3.** $\dfrac{m\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. Решение. Из ΔAOB $AO = \dfrac{m}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. Из ΔAO_1O $AO_1 = \dfrac{m\cos\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. **4.** 4. Указание. Радиус r окружности, вписанной в ΔABC ($\angle B = 90°$) находится по формуле: $r = \dfrac{AB + BC - AC}{2}$. **5.** $5\sqrt{26}$. Указание. Из ΔABC $O_1C = \dfrac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{ABC}}$. 6. $\sqrt{R^2 - \dfrac{m^2}{4\sin^2\alpha}}$. Указание. Из ΔABC $O_1A = \dfrac{m}{2\sin\alpha}$.

Таблица 11.17. **1.** $\dfrac{m}{1+\cos\alpha}$. Решение. Проведем биссектрису DO_1 угла SDO (точка O_1 лежит на SO). Тогда OO_1 – радиус шара, вписанного в пирамиду. Из ΔOMD $OD = \dfrac{m}{\sin\alpha}$. Из ΔOO_1D $O_1D = OD\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{m\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{m}{1+\cos\alpha}$. **2.** 3. Решение. SO – медиана равнобедренного ΔASC, откуда $SO \perp AC$. Аналогично, $SO \perp BD$. Значит, SO – высота пирамиды. Из ΔOCD ($OC = OD = 6$) $OE = 3\sqrt{3}$. Проведем EO_1 – биссектрису угла SEO (точка O_1 лежит на SO). Тогда O_1 – центр вписанного шара. Из ΔO_1OE $OO_1 = OE\operatorname{tg}30° = 3$. **3.** $2\sqrt{7}$. Решение. Из ΔABC $MB = \dfrac{AB}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$. Центр описанного шара – точка O_1 – середина отрезка MM_1. $O_1M = 4$. Из ΔO_1MB

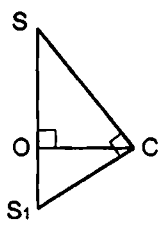


Рис.3.

$O_1B = \sqrt{O_1M^2 + MB^2} = 2\sqrt{7}$. **4.** 4. Решение. Продлим высоту SO пирамиды до пересечения с поверхностью шара (точка S_1). Тогда SS_1 – диаметр шара, откуда $\angle SCS_1 = 90°$ (рис.3). Из ΔSOC $SC = 4\sqrt{3}$. Из ΔSCS_1 $SS_1 = 8$. **5.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3\sin2\alpha}$. Указание. Из ΔABC $OB = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Продлим высоту SO пирамиды до пересечения с поверхностью шара (точка S_1). Тогда SS_1 – диаметр шара. **6.** $10\sqrt{3}$. Решение. $OC = 12\sqrt{2}$. Из ΔSOE $SO = OE\operatorname{tg}60° = 12\sqrt{3}$. Рассмотрим ΔSCS_1

(рис.3), SS_1 – диаметр шара. $OC^2 = SO \cdot OS_1$, тогда $S_1O = 8\sqrt{3}$, а $SS_1 = 8\sqrt{3} +$ $+ 12\sqrt{3} = 20\sqrt{3}$.

Таблица 11.18. **1.** $250\sqrt{3}$. Решение. Из ΔBB_1D $BB_1 = BD = 10$. Из ΔBCD $CD = 5$, $BD = 5\sqrt{3}$. $V = 5{\cdot}5\sqrt{3}\cdot 10 = 250\sqrt{3}$. **2.** $144\sqrt{3}$. Решение. Из ΔAA_1C $AC = 6\sqrt{3}$, $AA_1 = 6$. Из ΔBB_1D $BD = \sqrt{B_1D^2 - BB_1^{\,2}} = 8$. $ABCD$ – ромб. Тогда $S_{ABCD} = 0{,}5{\cdot}AC{\cdot}BD = 24\sqrt{3}$. $V = 24\sqrt{3}\cdot 6 = 144\sqrt{3}$. **3.** $48\sqrt{3}$.
4. $\dfrac{a^3\sin^2\gamma\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma}{\sin(\alpha+\beta)}$. Решение. Из ΔAA_1C $AA_1 = a\cos\gamma$, $AC = a\sin\gamma$. Из ΔABC $\dfrac{AC}{\sin(\alpha+\beta)} = \dfrac{BC}{\sin\alpha}$, откуда $BC = \dfrac{a\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta)}$. $S_{ABCD} = 2S_{ABC} =$ $= BC{\cdot}AC{\cdot}\sin\beta = \dfrac{a^2\sin^2\gamma\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $V = \dfrac{a^3\sin^2\gamma\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma}{\sin(\alpha+\beta)}$.
5. $d^3\cos\alpha\cos\beta\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\beta}$. Указание. Из ΔAB_1D $AD = d\cos\alpha$, $AB_1 = d\sin\alpha$. Из ΔDB_1C $CD = d\cos\beta$. Из ΔABB_1 $BB_1 = \sqrt{AB_1^{\,2} - AB^2} = d\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\beta}$.
6. $a^3\sin2\alpha\cos\alpha$.

Таблица 11.19. **1.** 840. **2.** $96\sqrt{3}$ **3.** 80. Указание. Т.к. $A_1A_2 = A_2A_3$, то $\angle A_2A_1A_3 = \angle A_2A_3A_1 = \angle A_3A_1A_4 = 30°$. Тогда $\angle A_2A_1A_4 = 60°$. Из $\Delta A_1A_3A_4 = A_1A_4 =$ $= 2\sqrt{3}$, $A_3A_4 = 2$. Проведем $A_2B \perp A_1A_4$. Из ΔA_1A_2B $A_1B = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, тогда $A_2A_3 =$ $= 2\sqrt{3} - \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$. **4.** $abc\sin\alpha$. **5.** $180\sqrt{2}$. **6.** $3\sqrt{3}\,a^3\cos^2\alpha\sin\alpha$. Решение. Из $\Delta A_1'BO$ $OB = a\cos\alpha$, $A_1'O = a\sin\alpha$. Тогда $A_1A_2 = 2\sqrt{3}\,a\cos\alpha$, $V = \dfrac{12a^2\cos^2\alpha\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot a\sin\alpha = 3\sqrt{3}\,a^3\cos^2\alpha\sin\alpha$.

Таблица 11.20. **1.** $180\sqrt{3}$. Указание. $A_1O = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 12$. **2.** $48\sqrt{3}$. Указание. Из ΔA_1A_2B $A_1B = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$. Тогда $S_{A_1A_2A_3} = 48$, $OB = \frac{2\cdot 48}{10+10+12} = 3$. Из ΔSOB $SO = 3\sqrt{3}$. **3.** 54. Указание. O – центр окружности, описанной около $\Delta A_1A_2A_3$. Тогда $A_1O = \dfrac{6}{2\sin 30°} = 6$, $SO = 6\sqrt{3}$. **4.** $\dfrac{1}{6}a^3\sin2\alpha\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta$. Указание. Из ΔOA_3A_4 $OA_3 = a\cos\alpha$, из ΔOA_3B $OB = a\cos\alpha\sin\alpha = \frac{1}{2}a\sin2\alpha$.

Тогда $SO = \frac{1}{2}a\sin2\alpha\,\mathrm{tg}\beta$. **5.** $\frac{4}{3}l^3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}}$. Указание. Из ΔSA_3A_4 $A_3A_4 = 2l\sin\frac{\alpha}{2}$, из ΔA_1SA_4 $A_1A_4 = 2l\sin\frac{\beta}{2}$. Тогда $OA_3 =$ $= l\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}}$. Из ΔSOA_3 $SO = l\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}}$. **6.** $\frac{1}{6}a^3\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta$. Указание. Проведем $A_4C \perp A_1A_2$. $A_4C = a\sin\alpha$, тогда $OB = 0{,}5a\sin\alpha$, $SO = 0{,}5a\sin\alpha\,\mathrm{tg}\beta$. $S_{A_1A_2A_3A_4} = a^2\sin\alpha$.

<u>**Таблица 11.21.**</u> **1.** $3\sqrt{6}$. **2.** $36\sqrt{2}$. Указание. Из ΔA_1SA_5 $A_1S = 6$. Из $\Delta A_1A_5A_6$ $A_1A_6 = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$. Из ΔA_1SO $SO = 2\sqrt{6}$. **3.** $\frac{1}{3}h^3\mathrm{ctg}\alpha\,\mathrm{ctg}\beta\sin\gamma$.

4. $\frac{2}{3}l^3\frac{\sin^2\beta\,\mathrm{ctg}\,\alpha\sqrt{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}}{\sin\alpha}$. Решение. Из ΔSA_1O $A_1O = l\cos\beta$, $SO = l\sin\beta$. Из ΔSOA_3 $OA_3 = l\sin\beta\,\mathrm{ctg}\alpha$, $SA_3 = \frac{l\sin\beta}{\sin\alpha}$. Из ΔA_1SA_4 ($\angle A_4 = 90°$) $A_1A_4 = l\sqrt{1-\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}} = \frac{l}{\sin\alpha}\sqrt{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}$. $V = \frac{1}{3}\cdot\frac{l}{\sin\alpha}\sqrt{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}\times$ $\times 2l\sin\beta\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha\cdot l\sin\beta = \frac{2}{3}l^3\frac{\sin^2\beta\,\mathrm{ctg}\,\alpha\sqrt{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}}{\sin\alpha}$. **5.** $\frac{1}{3}l\times$ $\left(l^2\cos^2\beta-a^2\right)\mathrm{tg}\alpha\sin\beta$. Решение. Из ΔSA_2O $SO = l\sin\beta$, $OA_2 = l\cos\beta$, тогда $A_1A_2 = 2l\cos\beta$. Проведем $A_4B \perp A_1A_2$. Из ΔA_1BA_4 $A_4B = (l\cos\beta - a)\,\mathrm{tg}\,\alpha$. $V = \frac{1}{3}(l\cos\beta+a)(l\cos\beta-a)\cdot\mathrm{tg}\alpha\cdot l\sin\beta = \frac{1}{3}l\left(l^2\cos^2\beta-a^2\right)\mathrm{tg}\,\alpha\sin\beta$.

6. $\frac{2}{3}m^3\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta$. Решение. Т.к. $SA_1 = SA_2 = SA_3$, то $OA_1 = OA_2 = OA_3$, откуда O – центр окружности, описанной около $\Delta A_1A_2A_3$ и $\angle A_1A_2A_3 = 90°$. OB – средняя линия треугольника, тогда $A_1A_2 = 2m$, $A_2A_3 = 2m\,\mathrm{tg}\alpha$. Из ΔSOB $SO = m\,\mathrm{tg}\beta$. $V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}4m^2\mathrm{tg}\alpha\cdot m\,\mathrm{tg}\beta = \frac{2}{3}m^3\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta$.

<u>**Таблица 11.22.**</u> **1.** $\frac{1}{12}a^3\mathrm{ctg}\alpha$. Решение. $A_1O = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Из ΔA_1SO $SO = \frac{a}{\sqrt{3}}\mathrm{ctg}\alpha$. $V = \frac{1}{3}a^2\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a}{\sqrt{3}}\mathrm{ctg}\alpha = \frac{a^3\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{12}$. **2.** $-\frac{4}{3}\cdot\frac{h^3\cos^2\alpha}{\cos2\alpha}$. Решение. Пусть $A_3A_4 = a$. Проведем $SB \perp A_3A_4$. Из ΔSA_4B $SB = 0{,}5a\,\mathrm{tg}\alpha$. Из ΔSOB

$h^2+\frac{a^2}{4}=\frac{1}{4}a^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha$, откуда $a=\frac{2h\cos\alpha}{\sqrt{-\cos 2\alpha}}$. $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{4h^3\cos^2\alpha}{-\cos 2\alpha}$. Замечание. Поскольку $\angle A_4SA_3 < \angle A_4OA_3$, то $\angle A_4SA_3 < 90°$, тогда $\alpha > 45°$ и $\cos 2\alpha < 0$.

3. $\frac{l^3\sqrt{12+3\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}\;\mathrm{tg}\,\alpha}{\left(4+\mathrm{tg}^2\,\alpha\right)^2}$. Решение. Пусть $A_1A_3=a$, тогда $OB=\frac{a}{2\sqrt{3}}$, $AO=\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Из ΔSOB $SO=\frac{a}{2\sqrt{3}}\mathrm{tg}\alpha$. Из ΔSOA_1 $\frac{1}{12}a^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha+\frac{1}{3}a^2=l^2$, откуда $a=\frac{2\sqrt{3}l}{\sqrt{\mathrm{tg}^2\,\alpha+4}}$. $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2\sqrt{3}}=\frac{a^3\,\mathrm{tg}\,\alpha}{24}$. **4.** $126\sqrt{3}$. Решение. Пусть O и O_1 – центры нижнего и верхнего оснований усеченной пирамиды соответственно. Проведем $A_1'C\perp A_1B$. $A_1C=R-R_1=4\sqrt{3}-2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$, где R и R_1 – радиусы окружностей, описанных около нижнего и верхнего оснований соответственно. Из $\Delta A_1A_1'C$ $A_1'C=6$. $V=\frac{1}{3}\cdot 6(36\sqrt{3}+9\sqrt{3}+18\sqrt{3})=$ $=126\sqrt{3}$. **5.** $\frac{1}{3}l\sin\alpha(3a^2+6al\cos\alpha+4l^2\cos^2\alpha)$. Решение. Проведем $B_1C\perp OB$. Из ΔB_1BC $B_1C=l\sin\alpha$, $BC=l\cos\alpha$, $A_1A_4=a+2l\cos\alpha$. $V=\frac{1}{3}\cdot l\sin\alpha\times$ $\times\left(a^2+\left(a+2l\cos\alpha\right)^2+a\left(a+2l\cos\alpha\right)\right)=\frac{1}{3}\cdot l\sin\alpha(3a^2+6al\cos\alpha+4l^2\cos^2\alpha)$.

6. $\frac{1}{24}(a^3-b^3)\mathrm{tg}\alpha$. Решение. Проведем $B_1C\perp A_2B$. $BC=r-r_1$, где r и r_1 – радиусы окружностей, вписанных в нижнее и верхнее основания усеченной пирамиды соответственно. $BC=\frac{(a-b)\sqrt{3}}{6}$. Из ΔBB_1C $B_1C=\frac{(a-b)\sqrt{3}}{6}\mathrm{tg}\alpha$. V $=\frac{1}{18}(a-b)\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\alpha\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{b^2\sqrt{3}}{4}+\frac{ab\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{1}{24}\left(a^3-b^3\right)\mathrm{tg}\alpha$.

<u>**Таблица 11.23.**</u> **1.** $64\sqrt{3}\,\pi$; $32\sqrt{3}\,\pi$. **2.** 9000π; $600\sqrt{3}\,\pi$. **3.** $\frac{3200\sqrt{3}}{3}\pi$; $\frac{640\sqrt{3}}{3}\pi$. **4.** $\pi l^3\left(\sin^2\beta\cos^2\alpha+\cos^2\beta\right)\sin\alpha\sin\beta$; $2\pi l^2\sin\alpha\sin\beta\times$ $\times\sqrt{\sin^2\beta\cos^2\alpha+\cos^2\beta}$. **5.** $0{,}5\pi Q\sqrt{2Q\mathrm{ctg}\alpha}$; $2\pi Q$. Указание. $CD=2R$, тогда из ΔCD_1D $D_1D=2R\mathrm{tg}\alpha$. $4R^2\mathrm{tg}\alpha=Q$, откуда $R=\sqrt{0{,}5Q\mathrm{ctg}\alpha}$, $DD_1=H=$

$= \sqrt{2Qtg\alpha}$ **6.** $2\sqrt{2}\,\pi a^3\text{tg}\alpha$; $4\pi a^2\text{tg}\alpha$. Указание. Т.к. CD – диаметр, то $\angle CAD = 90°$.

<u>**Таблица 11.24.**</u> **1.** 24π; $8\sqrt{3}\,\pi$. **2.** $\frac{1}{3}\pi l^3\cos^2\alpha\sin\alpha$; $\pi l^2\cos\alpha$. **3.** 720π; $36\sqrt{41}\,\pi$. Указание. $\Delta A_1SO_1 \sim \Delta ASO$. **4.** $\frac{\pi Q\sqrt{Q}}{3\cdot\sqrt[4]{3}}$; $\frac{2\pi Q\sqrt{3}}{3}$. **5.** $\frac{74\sqrt{3}}{3}\pi$; $7\sqrt{37}\,\pi$. **6.** 1) $32\sqrt{3}\,\pi$; $24\sqrt{5}\,\pi$; 2) 36π; $18\sqrt{5}\,\pi$. Указание. 2) Пусть $SO = h$, тогда из ΔSOD $OD = h$, $SD = h\sqrt{2}$. Из ΔCOD ($\angle D = 90°$) $OC = 2OD = 2h$, $CD = h\sqrt{3}$. Из ΔSDB $3h^2 + 2h^2 = 45$, $h = 3$.

<u>**Таблица 11.25.**</u> **1.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}}}{24\sin^3\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$; $\dfrac{\pi a^2}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$. Указание. Из ΔCOB $OB = \dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. Из ΔSCB $SB = \dfrac{a}{2\sin\frac{\beta}{2}}$. Из ΔSOB $SO = \dfrac{a\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$.

2. $\frac{1}{3}\pi l^3\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}\right)^2\sqrt{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$; $\pi l^2\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}}$. Указание. $\angle DCB = 90°$. **3.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3-4\cos^2\alpha}}{18\sqrt{3}\cos\alpha}$; $\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{b\cos\alpha}$. Указание. $OC = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Из ΔESC $SC = \dfrac{a}{2\cos\alpha}$. Из ΔSOC $SO = \sqrt{\dfrac{a^2}{4\cos^2\alpha}-\dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{a}{2\cos\alpha}\sqrt{\dfrac{3-4\cos^2\alpha}{3}}$.

4. $\dfrac{784\sqrt{3}\pi}{3}$; 128π. Указание. Проведем $B_1C \perp OB$. $CB = 4$. Из ΔB_1CB $B_1C = 4\sqrt{3}$, $B_1B = 8$. **5.** $63\sqrt{3}\,\pi$; 54π. Указание. Из ΔCB_1B $CB = 12$, $CB_1 = 6\sqrt{3}$. Проведем $B_1D \perp BC$. Из ΔBB_1D $BD = 3$, $B_1D = 3\sqrt{3}$. $B_1O_1 = 6 - 3 = 3$.

6. $\dfrac{\pi l^3\sin\beta}{12\sin^2\alpha}\left(3\sin^2\beta\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\beta\right)$; $\pi l^3\sin\beta\text{ctg}\alpha$. Указание. Из ΔCB_1B $BC = \dfrac{l\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$, тогда $OB = \dfrac{l\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha}$. Проведем $B_1D \perp BC$. Из ΔBB_1D $B_1D = l\sin\beta$, $BD = l\cos\beta$, тогда $O_1B_1 = \dfrac{l\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha} - l\cos\beta = \dfrac{l\sin(\beta-\alpha)}{2\sin\alpha}$.

Таблица 11.26. **1.** $256\sqrt{3}\,\pi$; 192π. **2.** $32\sqrt{3}\,\pi$; 48π. Указание. Из ΔABC $O_1B = \dfrac{AB}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. **3.** $\dfrac{500}{3}\pi$; 100π. Указание. $OD = \dfrac{2S_{ABC}}{AB + BC + AC}$. **4.** $\dfrac{1984}{3}\pi$; 208π. **5.** $964\dfrac{1}{3}\pi$; 220π. Указание. Объем шарового кольца найдем как разность объема шара и суммы объемов двух шаровых сегментов, высоты которых равны 6 и 3. Аналогично находится площадь сферической части шарового кольца. **6.** 1734π; 306π.

Оглавление