

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Gabriela Streinu-Cercel

Gabriela Constantinescu

Gabriela Oprea

Gheorghe Stoianovici

Costel Chiteș

Boris Singer

Ioan Marinescu

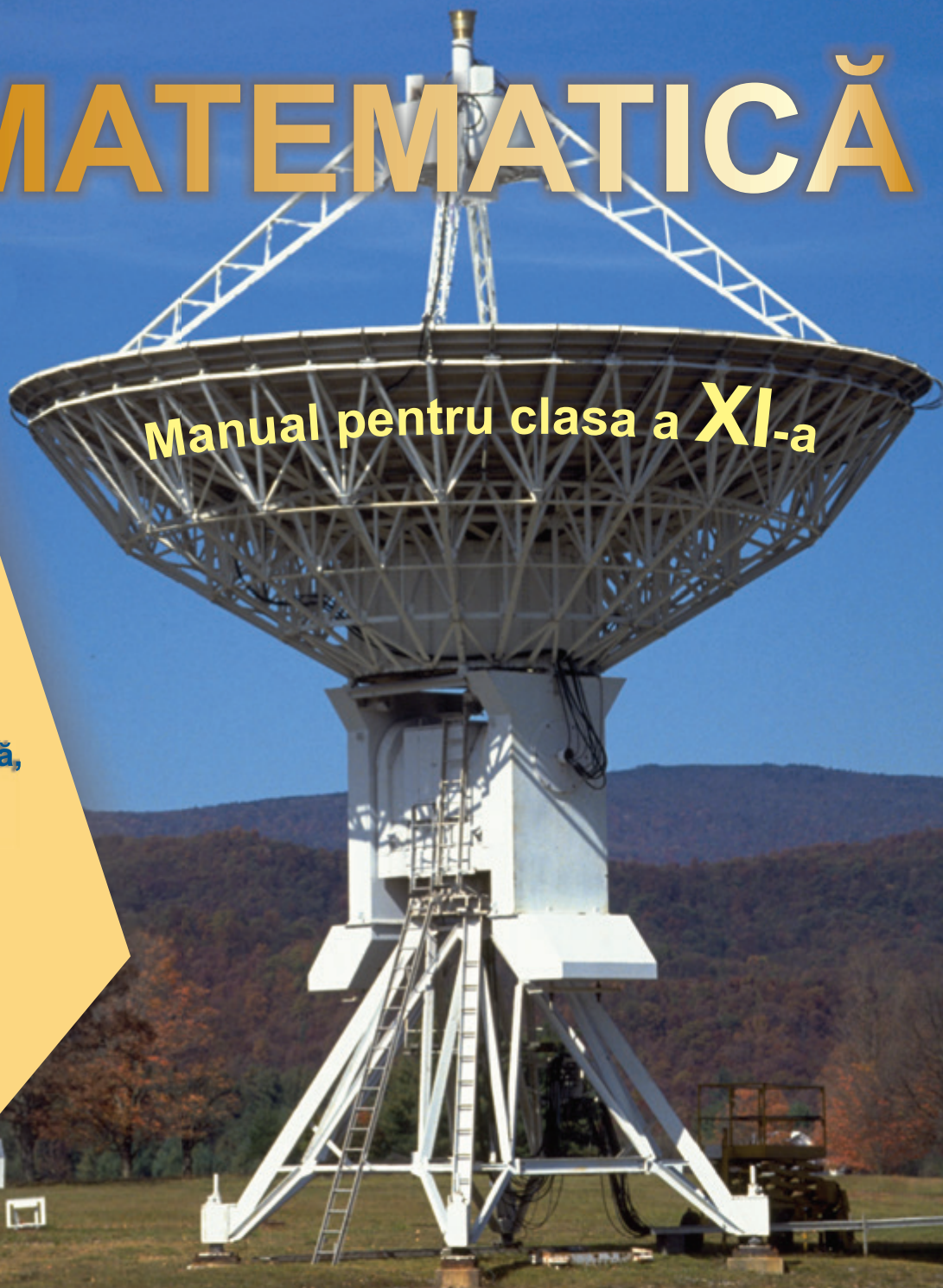
Romeo Ilie

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a XI-a

M2

- Filiera teoretică,
profil real,
specializarea
științe ale naturii
- Filiera tehnologică,
toate calificările
profesionale



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Gabriela Streinu-Cercel Gabriela Constantinescu Gabriela Oprea Boris Singer
Gheorghe Stoianovici Costel Chiteș Ioan Marinescu Romeo Ilie

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a XI-a

M2

- Filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii
- Filiera tehnologică, toate calificările profesionale



Manualul a fost aprobat prin Ordinul ministrului Educației și Culturii nr. 4742 din 21.07.2006, în urma evaluării calitative organizate de către Consiliul Național pentru Evaluarea și Difuzarea Manualelor și este realizat în conformitate cu programa analitică aprobată prin Ordin al ministrului Educației și Cercetării nr. 3252 din 13.02.2006.

Referenți: *lector univ. dr.* Cristian Voica
prof. drd. gr. I Manuela Prajea

Redactor: Corina Cîrtoaje
Tehnoredactor: Camelia Cristea, Andrei Cîrtoaje
Coperta: Mihai Niță

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

Matematică M2 : manual pentru clasa a XI-a / Gabriela Streinu-Cerel, Gabriela Constantinescu, Gabriela Oprea, ... - București : Sigma, 2006
ISBN (10) 973-649-265-6 ; ISBN (13) 978-973-649-266-5

I. Streinu-Cerel, Gabriela
II. Constantinescu, Gabriela
III. Oprea, Gabriela

51(075.35)

© 2006 – Editura SIGMA

Toate drepturile asupra prezentei ediții aparțin Editurii SIGMA.

Nici o parte a acestei lucrări nu poate fi reprodusă fără acordul scris al Editurii SIGMA.

ISBN (10) 973-649-265-6

ISBN (13) 978-973-649-266-5

Editura SIGMA

Sediul central:

Str. G-ral Berthelot, nr. 38, sector 1, București, cod 010169
Tel. / fax: 021-313.96.42; 021-315.39.43; 021-315.39.70
e-mail: office@editurasigma.ro; web: www.editurasigma.ro

Distribuție:

Tel. / fax: 021-243.42.40; 021-243.40.52; 021-243.40.35
Puteți transmite comenzi folosind apelul UniTel la numerele:
080.10000.10; 080.10000.11 (în rețeaua ROMTELECOM)
e-mail: comenzi@editurasigma.ro; sigmadistrib@yahoo.com

Anticariat:

e-mail: comenzi_anticar@editurasigma.ro; web: www.anticar.ro

Elemente de calcul matricial și sisteme de ecuații liniare

Matrice

1. Tabel de tip matricial. Matrice, mulțimi de matrice. Operații cu matrice: adunarea, înmulțirea unei matrice cu scalar

Tabel de tip matricial

O companie de tranzacții financiare oferă la vânzare pachete de câte 1000 de acțiuni, la 4 întreprinderi, A, B, C, D. Directorul companiei alcătuiește tabelul alăturat, cu numărul de pachete de acțiuni vândute din fiecare fel, în fiecare zi a unei anumite săptămâni de lucru.

Dacă se cunosc semnificațiile liniilor și coloanelor pentru acțiunile A, B, C, D, respectiv zilele săptămânii de lucru L, Ma, Mi, J, V, atunci tabelul „centralizator” se poate reduce la forma alăturată.

Acest tablou cu 4 linii și 5 coloane este o matrice formată din $4 \cdot 5 = 20$ de numere reale. Fiecare număr poate fi precizat cu ajutorul a doi indici; primul indice este indicele de linie, iar al doilea este indicele de coloană. De exemplu, numărul 27 se găsește pe linia a patra și coloana a cincea, se notează a_{45} și reprezintă în acest caz numărul de pachete din acțiunea D vândute vineri.

	L	Ma	Mi	J	V
A	29	34	32	26	35
B	20	21	25	30	19
C	25	26	32	31	26
D	24	26	31	30	27

$$\begin{pmatrix} 29 & 34 & 32 & 26 & 35 \\ 20 & 21 & 25 & 30 & 19 \\ 25 & 26 & 32 & 31 & 26 \\ 24 & 26 & 31 & 30 & 27 \end{pmatrix}$$

Noțiunea de matrice a intervenit în studiul sistemelor de ecuații liniare. Ea a fost introdusă de matematicianul englez Arthur Cayley (1821-1895) în 1858. El a folosit pentru matrice notația $\|a_{ij}\|_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$. În 1913, C.E.

Cullis propune notația $[a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, iar în 1919, la sugestia lui M. Bôcher, s-a introdus notația $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$.

Vom utiliza noțiunea de matrice, în studiul sistemelor de ecuații liniare.

De exemplu, să considerăm următorul sistem:
$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ 2x - y + 3z = 4 \\ 3x + 2y - z = 4 \end{cases}$$
. Toți coeficienții care apar în scrierea

sistemului intervin în rezolvare, atât prin valoarea lor cât și prin poziția pe care o ocupă. Nu este același lucru dacă un anumit coeficient apare în fața unei necunoscute sau a alteia. Pentru a pune în evidență mulțimea coeficienților, precum și poziția pe care o ocupă fiecare coeficient, vom atașa sistemului matricele

următoare:
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$



În clasele anterioare s-au rezolvat sisteme cu două sau trei ecuații și necunoscute ($m = n = 2$ sau $m = n = 3$), prin metoda reducerii sau metoda substituției.



Rezolvă sistemul:
$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Metoda reducerii

$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \cdot 3$$

$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 6x - 3y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 7x &= 7, & x &= 1 \\ 1 + 3y &= 4, & 3y &= 3, & y &= 1. \end{aligned}$$

Obținem $x = 1, y = 1$, deci sistemul are soluția $(1, 1)$.

Metoda substituției

$$\begin{cases} x = 4 - 3y \\ 2(4 - 3y) - y = 1 \end{cases}$$

Ultima ecuație devine:

$$\begin{aligned} 8 - 6y - y &= 1 \\ 7 - 7y &= 0 \\ y &= 1, & x &= 4 - 3y = 4 - 3 = 1 \end{aligned}$$

Obținem $x = 1, y = 1$, deci sistemul are soluția $(1, 1)$.

Definiție.

Fie S un sistem de m ecuații liniare cu n necunoscute:

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Numerele $a_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$, se numesc *coeficienții necunoscutelor* $x_j, j = \overline{1, n}$, iar numerele $b_i, i = \overline{1, m}$ se numesc *termeni liberi*.

Există metode generale de rezolvare care conduc la operații aplicate coeficienților necunoscutelor și termenilor liberi. Aceștia pot fi „grupăți” în următoarele *matrice*:

matricea sistemului

matricea completă a sistemului

matricea termenilor liberi

matricea necunoscutelor

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

1) Un magazin oferă la vânzare foarte multe tipuri de mărfuri. Se poate descrie situația stocurilor magazinului printr-un singur număr, care va reprezenta valoarea totală a mărfii. Cum putem să organizăm informația despre stoc, astfel încât să putem ști câte obiecte sunt de fiecare fel și cât costă fiecare obiect?

2) Rezolvă prin metoda substituției și apoi prin metoda reducerii sistemele:

a)
$$\begin{cases} 5x + 2y = 11 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x - 2y + z = 2 \\ 7x - y - z = 2 \end{cases}$$

3) Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} 2x + 3y = \pi \\ \pi x - y + 2z = e \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Scrie matricea sistemului, matricea completă a sistemului, matricea termenilor liberi și matricea necunoscutelor. Din ce mulțimi de matrice fac parte aceste matrice?

Atenție! Atunci când o necunoscută nu apare într-o ecuație, înseamnă că ea are coeficientul 0. De exemplu, în prima ecuație necunoscuta z are coeficientul 0.

4) Fie sistemul
$$\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 3y - \frac{1}{2}z = 1 \\ 2z - t = 2 \\ t + x = 4 \end{cases}$$

Scrie matricea sistemului, matricea completă a sistemului, matricea termenilor liberi și matricea necunoscutelor. Din ce mulțimi de matrice fac parte aceste matrice?

5) La ce s-ar putea folosi un tabel cu linii și coloane în care sunt scrise numai cifrele 0 și 1?

6) Cum poți prezenta distanțele (în km) dintre reședințele de județ, atât pe calea ferată cât și pe șosea?

Matrice, mulțimi de matrice

Definiție.

Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ și fie E o mulțime de numere ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Se numește *matrice de tipul* (m, n) cu elemente din E , o funcție $A: \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow E$; notăm $A(i, j) = a_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

$$\text{Notăm } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ sau } A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Mulțimea tuturor matricelor de tip (m, n) cu elementele din mulțimea E se notează prin $\mathcal{M}_{m,n}(E)$.

Observație.

Matricele sunt o generalizare a vectorilor; vectorii sunt matrice cu o linie (matrice linie) sau cu o coloană (matrice coloană).

Definiție.

$$\text{Matricea pătratică de ordinul } n, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ este}$$

o matrice cu n linii și n coloane.

Matricea linie $(a_{11} \ a_{22} \ \dots \ a_{nn})$ este *diagonala principală*, iar matricea $(a_{1n} \ a_{2(n-1)} \ \dots \ a_{n1})$ este *diagonala secundară* a matricei A .

Mulțimea tuturor matricelor pătratice de ordin n cu elemente din mulțimea E se notează prin $\mathcal{M}_n(E)$.



EXEMPLU

Matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & -2 & 8 \\ 15 & 1 & 4 & -3 \\ -5 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ are diagonala principală

$(-1 \ 7 \ 4 \ 10)$ și diagonala secundară $(2 \ -2 \ 1 \ -5)$

Definiție.

Transpusa unei matrice A de tip (m, n) este matricea tA de tip (n, m) definită prin ${}^tA(i, j) = A(j, i)$, $\forall i = \overline{1, n}$, $\forall j = \overline{1, m}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$



EXEMPLU

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 4 & 7 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

7) Scrie câte o matrice de tipul $(2, 3)$ cu elemente din mulțimea:
a) \mathbb{Z} ; b) \mathbb{Q} ; c) \mathbb{R} ; d) \mathbb{C} .

8) Scrie o matrice coloană cu patru linii folosind elementele $0, 1$ și -1 .

9) Scrie o matrice linie cu cinci coloane, cu elemente numere reale, în care suma elementelor să fie 10 .

10) Ordonează după incluziune mulțimile de matrice cu m linii și n coloane: $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Q}), \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$.

11) a) Scrie o matrice pătratică de ordinul 3 cu elementele 1 și -1 , în care produsul elementelor de pe fiecare linie, respectiv coloană, să fie -1 .

b) Scrie diagonala principală a acestei matrice.

12) Calculează suma elementelor diagonalei principale a matricei de ordin 21 .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

13) Care este transpusa matricei $A = (1 \ -i \ 2i)$?

14) a) Care este transpusa matricei

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}?$$

b) Verifică relația ${}^t({}^tB) = B$.

15) Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Verifică relația: ${}^t({}^tA) = A$ (dacă transpunem de două ori o matrice, obținem matricea inițială).

Deci, prin transpunerea matricei A , linia i din matricea A devine coloana i în matricea tA și coloana j din matricea A devine linia j în matricea tA .

Egalitatea matricelor

Definiție.

Două matrice de tip (m, n) , $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ și $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, se numesc egale dacă $a_{ij} = b_{ij}, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

EXEMPLU



$$\text{Fie } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 5 & y & z \end{pmatrix}.$$

Matricele A și B sunt de același tip, $(2, 3)$, și $A = B$ dacă și numai dacă $x = 3, y = 2, z = 1$.

Adunarea matricelor

Definiție.

Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$.

Suma matricelor A și B este matricea $C = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, cu $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}$.

Matricea sumă C se notează $A + B$.



Două matrice sunt egale dacă sunt de același tip și elementele corespunzătoare sunt respectiv egale.

Matricele se pot aduna numai dacă sunt de același tip.

EXEMPLU



Un magazin are două sucursale, M_1 și M_2 , în care vinde automobile de tipurile P_1, P_2, P_3 .

Fie A, B matricele care reprezintă numărul de autoturisme vândute în prima, respectiv a doua zi de la deschidere.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Cele 2 coloane indică vânzările din magazinele M_1 și M_2 , iar cele 3 linii reprezintă vânzările articolelor P_1, P_2 , respectiv P_3 . Care sunt vânzările din cele două zile, la cele două sucursale M_1 și M_2 , pentru produsele P_1, P_2, P_3 ?

16) Care dintre următoarele perechi de matrice sunt egale?

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & i^4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};$

b) $A = (1 \ 2 \ 3), B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix};$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6-2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix};$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix};$

e) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}?$

Cum adunăm matricele?

17) Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Verifică egalitatea: $A + B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

18) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & x & y \end{pmatrix}$.

Determină numerele x și y dacă

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

19) Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ i^2 & 0 & -i \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 1 \\ i^4 & 0 & i^3 \end{pmatrix}$.

a) Calculează $A + B$.

b) Calculează ${}^tA + {}^tB$.

20) Fie $A = (i \ i^4 \ i^3)$ și $B = \begin{pmatrix} i \\ -i \\ i^3 \end{pmatrix}$,

unde $i^2 = -1$.

a) Calculează $A + {}^tB$.

b) Calculează ${}^tA + B$.

Soluție.

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 5 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \text{ este matricea}$$

reprezentând vânzările din cele două zile, la cele două sucursale M_1 și M_2 , pentru produsele P_1, P_2, P_3 .

Teoremă. Proprietățile adunării matricelor

Pentru orice matrice $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ avem proprietățile:

1. $A + B = B + A$ (comutativitatea);
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (asociativitatea);
3. $A + O_{m,n} = O_{m,n} + A = A$, unde $O_{m,n}$ este matricea nulă de tip (m, n) (are toate elementele 0);
4. există matricea opusă $-A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $A + (-A) = (-A) + A = O_{m,n}$.

Pentru $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, avem $-A = (-a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$.

Definim operația de scădere a două matrice astfel:

$$A - B = A + (-B).$$

Demonstrează teorema pentru matrice de tipul $(2, 3)$!

Adunarea matricelor, particularizată pentru matrice cu o singură linie (sau coloană), conduce la adunarea vectorilor.

Înmulțirea matricelor cu scalari

Extindem definiția înmulțirii vectorilor cu scalari și obținem...

Definiție.

Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ și $\lambda \in \mathbb{C}$. Produsul dintre

numărul λ (numit scalar) și matricea A este matricea

$B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, cu $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$.

Matricea B se notează $\lambda \cdot A$ sau λA .



$$\text{Fie } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}; 2A = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot (-2) & 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 8 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se demonstrează ușor următoarea ...

Teoremă. Proprietățile înmulțirii cu scalari a matricelor

Pentru orice matrice $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $a, b \in \mathbb{C}$ avem proprietățile:

- 1) $1 \cdot A = A$
- 2) $(a + b)A = a \cdot A + b \cdot A$
- 3) $a(A + B) = a \cdot A + a \cdot B$
- 4) $(ab)A = a(bA)$.

$$21) \text{ Fie } A = \begin{pmatrix} 2x & 0 & t \\ 4 & 3y & 3 \\ v & -z & 3z \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -4 & -v & -1 \\ -x & -2y & u \\ -v & -2z & -2 \end{pmatrix} \text{ și } C = \begin{pmatrix} 16 & 6 & -2 \\ -6 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Află $x, y, z, u, v, t \in \mathbb{R}$ știind că $A + B = C$.

22) Determină $x, y \in \mathbb{R}$ dacă:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5y \\ x & -2x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4x & 2y \\ 2y & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3y & -1 \\ 7 & 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4x \\ y & 2y \end{pmatrix}$$

23) Determină matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$

$$\text{dacă: } \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - X + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

24) Scrie matricele următoare:

- a) $O_{2,3}$; b) $O_{2,2}^{\text{not}} = O_2$; c) $O_{3,3}^{\text{not}} = O_3$;
d) $O_{1,2}$; e) $O_{2,1}$; f) $O_{3,1}$; g) $O_{1,3}$.

Cum înmulțim o matrice cu un număr?

25) Determină numerele x, y, z, t dacă

$$2 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ x & -y \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} z & -2t \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

26) Calculează $2A, 3B, 5B, -5B, A-5B$,

$$\text{dacă } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

27) Calculează $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$x \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-2i & -2+3i \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2-i & -1+3i \\ i & 3-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-i & -1+7i \\ 1 & 4+i \end{pmatrix}$$

28) Determină matricele X, Y ce

$$\text{verifică sistemul } \begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 8 & 7 & -2 \\ 1 & -6 & 5 \end{pmatrix} \\ X - 2Y = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Indicație. Înmulțim ecuația a doua cu -2 și o adunăm la prima ecuație. Înlocuim matricea Y într-o ecuație a sistemului și obținem matricea X .



● 1. Fie matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculează:

- a) $A + B$;
b) $A - B - {}^tC$;
c) $C - 2 {}^tA$.

● 2. Se dau matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculează:

- a) $A + B$;
b) $A + B + C$;
c) $A - B + C$;
d) $A + {}^tB - {}^tC$;
e) $2A - {}^tC$;
f) ${}^t(A + B) - O_3$.

● 3. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculează:

- a) $A + {}^tA$;
b) λA , $\lambda \in \mathbb{C}$;
c) $x \in \mathbb{C}$ cu $x \cdot A = {}^tA$.

● 4. Fie $A \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{C})$ și $B \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{C})$. Care dintre următoarele operații sunt posibile:

- a) $A + B$; b) $A + {}^tB$;
c) ${}^tA + B$; d) ${}^tA + {}^tB$?

● 5. Determină matricele $X, Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$ dacă

$$X - 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ și } 2X - 5Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

● 6. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

- a) Arată că ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$.
b) Demonstrează că, pentru orice matrice $X, Y \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, are loc relația ${}^t(X + Y) = {}^tX + {}^tY$.

● 7. Calculează:

a) $\sum_{i=1}^5 (i+5)$; b) $\prod_{i=1}^5 5i$; c) $\sum_{k=1}^6 \frac{1}{k(k+1)}$.

Indicație.

- a) $\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ (simbolul sumă);
b) $\prod_{k=1}^n a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ (simbolul produs);
c) $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

● 8. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n, \alpha \in \mathbb{R}$. Arată că:

- i) $\sum_{k=1}^n (a_k + \alpha) = \sum_{k=1}^n a_k + n\alpha$;
ii) $\prod_{k=1}^n \alpha \cdot a_k \cdot b_k = \alpha^n \prod_{k=1}^n a_k \cdot \prod_{k=1}^n b_k$.

● 9. Calculează sumele următoare:

a) $\sum_{k=1}^n k$; b) $\sum_{k=1}^n k^2$; c) $\sum_{k=1}^n k^3$.

● 10. Calculează sumele următoare:

a) $\sum_{k=1}^n k(k+1)$; b) $\sum_{k=1}^n (2k + k^2 + 1)$.

Indicație. Folosește formulele obținute la exercițiul 8.

● 11. Calculează suma $S = \sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} 1 & k & k^2 & k^3 \\ -1 & 2 & 3 & k(k+1) \end{pmatrix}$

● 12. Dacă ε este o soluție a ecuației $x^2 + x + 1 = 0$,

calculează suma: $\sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} \varepsilon^k & \varepsilon^{2k} & \varepsilon^{3k} \\ \varepsilon^{3k} & \varepsilon^k & \varepsilon^{2k} \end{pmatrix}$.

Indicație. $\varepsilon^3 = 1$, deoarece $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$.

● 13. Dacă ω este o soluție a ecuației $x^2 - x + 1 = 0$,

calculează suma $\sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} \omega^k & \omega^{2k} & \omega^{3k} \\ \omega^{3k} & \omega^k & \omega^{2k} \end{pmatrix}$.

Indicație. $\omega^3 = -1$, deoarece $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$.

2, Operații cu matrice: înmulțirea

Înmulțirea matricelor

Exercițiu rezolvat.

Pentru fabricarea produselor X și Y o întreprindere utilizează piesele P_1, P_2, P_3 . Tabelul alăturat reprezintă necesarul pentru fabricație; astfel, pentru fabricarea unei unități din produsul X sunt necesare 5 bucăți P_1 ,

	P_1	P_2	P_3
X	5	2	1
Y	2	3	2

2 bucăți P_2 , 1 bucată P_3 . Asociem acestui tabel matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Tabelul alăturat reprezintă pentru fiecare piesă de tipul P_1, P_2 , respectiv P_3 , în unități monetare, costul de producție și

	cost producție	cost transport
P_1	10	1
P_2	5	3
P_3	1	2

costul de transport. Asociem acestui tabel matricea $B = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Pentru fabricarea unei unități din X , costul total de producție al pieselor este $5 \cdot 10 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 1 = 61$, iar costul total de transport este $5 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 13$.

Calculează în mod analog costurile pentru fabricarea unei unități din Y .

Putem aranja calculele astfel: $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 10 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 1 & 5 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 10 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 61 & 13 \\ 37 & 15 \end{pmatrix}$

și obținem repartitia costului de producție și a costului de transport pentru fiecare articol.

Acest exemplu ne conduce la următoarea ...

Definiție.

Fie $m, n, p \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ și $B = (b_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq p}}$. Produsul matricelor A și B (în această ordine) este matricea $C = (c_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq p}}$, unde $\forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall k \in \{1, \dots, p\}, c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk}$.

Matricea produs C se notează $A \cdot B$.

Să explicităm modul în care se înmulțesc două matrice.

$$\text{Fie } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} \text{ și } C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}, \text{ unde } C = A \cdot B.$$

Elementele din prima linie a matricei C sunt:

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1} \text{ (produsul dintre linia 1 din } A \text{ și coloana 1 din } B),$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \dots + a_{1n}b_{n2} \text{ (produsul dintre linia 1 a matricei } A \text{ și coloana 2 a matricei } B),$$

...

$$c_{1p} = a_{11}b_{1p} + a_{12}b_{2p} + \dots + a_{1n}b_{np} \text{ (produsul dintre linia 1 a matricei } A \text{ și coloana } p \text{ a matricei } B).$$

Elementele liniei a doua din C se obțin înmulțind linia 2 din A , pe rând, cu coloanele matricei B , adică:

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2n}b_{n1}, c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \dots + a_{2n}b_{n2}, \dots, c_{2p} = a_{21}b_{1p} + a_{22}b_{2p} + \dots + a_{2n}b_{np}.$$

În general, elementele din linia i a matricei C se obțin înmulțind, pe rând, linia i din A cu coloanele lui B .

EXEMPLU



Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$$AB = \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 & -1 \cdot 7 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 & -1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 & -1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) \\ 4 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 4 \cdot 7 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 2 & 4 \cdot (-1) + (-2) \cdot 4 + 1 \cdot 0 & 4 \cdot 0 + (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 9 & -7 \\ 3 & 30 & -12 & 3 \end{pmatrix}$$



Matricea A poate fi înmulțită cu matricea B numai dacă numărul de coloane ale matricei A este egal cu numărul de linii ale matricei B .

Precizăm că produsul vectorilor (sau matricelor) cu un scalar este un vector (respectiv o matrice).

Teoremă. Proprietățile înmulțirii matricelor

1. Oricare ar fi matricele $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$:

$$(AB)C = A(BC) \quad (\text{asociativitatea})$$

2. Oricare ar fi matricele A de tip (m, n) , B și C de tip (n, p) :

$$A(B + C) = AB + AC$$

(distributivitatea înmulțirii la stânga față de adunare).

3. Oricare ar fi matricele A, B de tip (m, n) , C de tip (n, p) :

$$(A + B)C = AC + BC$$

(distributivitatea înmulțirii la dreapta față de adunare).

4. Matricea unitate de ordinul n , $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

este element neutru față de înmulțire, adică $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avem

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$$

Atenție! În general $A \cdot B \neq B \cdot A$. Dacă $A \cdot B = B \cdot A$, spunem că matricele A și B comută între ele.

Observație.

◆ Considerăm sistemul de ecuații liniare:

$$(S) \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Fie A matricea sistemului, X matricea necunoscutelor și B matricea termenilor liberi:

Cum înmulțim matricele?

1) Verifică înmulțirea matricelor următoare:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Verifică egalitatea $A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 13 \\ -7 & -10 \end{pmatrix}$.

3) Înmulțește matricea linie

$(-1 \ 0 \ 2 \ -3)$ cu matricea coloană $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

4) Înmulțește matricea linie

$(2 \ -1 \ 4 \ 3)$ cu matricea coloană $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

5) Știind că $A \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$, află tipul matricei A și dă un exemplu de matrice A .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Obținem scrierea matricială a sistemului (S): $AX = B$.

EXEMPLU



1) Scrie matricial sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

Soluție. Scrierea matricială a sistemului este $AX = B$, unde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2) Verifică rezolvarea ecuației matriciale:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soluție.

$$\text{Fie } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Numărul de linii ale lui X este 3, egal cu numărul de coloane ale lui A , iar numărul de coloane ale lui X este 2, egal cu numărul de coloane ale lui B .

$$\text{Fie } X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}, A \cdot X = \begin{pmatrix} a-e & b-f \\ a-c+2e & b-d+2f \end{pmatrix}.$$

$$\text{Din } A \cdot X = B, \text{ rezultă } \begin{cases} a-e = -1 \\ b-f = 3 \\ a-c+2e = 6 \\ b-d+2f = 0 \end{cases}. \text{ Soluțiile sunt:}$$

$a = \alpha - 1; b = \beta + 3; c = 3\alpha - 7; d = 3\beta + 3; e = \alpha; f = \beta$, cu $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Deci, problema are o infinitate de soluții de forma

$$X = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & \beta + 3 \\ 3\alpha - 7 & 3\beta + 3 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

$$\text{Caz particular: } \alpha = 1, \beta = 0. \text{ Rezultă } X = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Verificare: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

6) Calculează, dacă este posibil, produsul matricelor $A \cdot B$:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7) Verifică dacă $A \cdot B \neq B \cdot A$, pentru

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

8) Verifică dacă $AB = BA$, pentru

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

9) Verifică proprietățile înmulțirii matricelor pentru $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$

10) Determină matricele X care au proprietatea: $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X.$

11) Fie matricele:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rezolvă în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuațiile matriciale:

$$\text{a) } AX = I_2; \quad \text{b) } AX = B.$$

12) Fie matricele:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rezolvă în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuațiile matriciale:

$$\text{a) } AX = XB; \quad \text{b) } AXA = B.$$

13) Determină matricea X dacă:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

14) Determină matricea X dacă:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ridicarea la putere a matricelor pătraticе

Definiție.

Pentru $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, definim $A^k = \underbrace{A \cdot \dots \cdot A}_{\text{de } k \text{ ori}}, \forall k \in \mathbb{N}^*$.

Convenție.

Pentru $A \neq O_n, A^0 = I_n$ (matricea unitate cu n linii și n coloane).

Observăm că $A^2 = A \cdot A, A^3 = A \cdot A \cdot A = A^2 \cdot A, \dots, A^{k+1} = A^k \cdot A$.

Proprietăți.

Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ două matrice care comută între ele: $AB = BA$.

Relațiile următoare se demonstrează în mod asemănător cu relațiile corespunzătoare la numere:

- $A^i B^k = B^k A^i, \forall i, k \in \mathbb{N}^*$;
- $A^k - B^k = (A - B)(A^{k-1} + A^{k-2} \cdot B + \dots + A \cdot B^{k-2} + B^{k-1}), \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2$;
- $A^k + B^k = (A + B)(A^{k-1} - A^{k-2} \cdot B + \dots - A \cdot B^{k-2} + B^{k-1}), \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 3, k$ impar;
- $(A + B)^k = \sum_{i=0}^k C_k^i A^{k-i} B^i, \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 1$. (binomul lui Newton).

EXEMPLU



Calculează A^n , pentru $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$.

Metoda I.

$$\text{Calculăm } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2a+1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3a+3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observăm elementul de pe linia 1, coloana 3. Presupunem și

demonstrăm prin inducție că $A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & a_k \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a_k \in \mathbb{R}$.

$$\text{Avem } A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & a+k+a_k \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & a_{k+1} \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

unde $a_{k+1} = a_k + k + a, \forall k \geq 1$.

Din această relație de recurență deducem:

$$\begin{aligned} a_1 &= a \\ a_2 &= a_1 + 1 + a \\ a_3 &= a_2 + 2 + a \\ &\dots \\ a_k &= a_{k-1} + (k-1) + a. \end{aligned}$$

$$a_k = a + (1 + 2 + \dots + (k-1)) + (k-1)a = ka + \frac{k(k-1)}{2}.$$

Cum ridicăm o matrice la o putere?

15) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculează:

- $A^2 = A \cdot A$;
- A^3 .

16) Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculează:

- AB și BA ;
 - $A^2 - B^2$ și $(A - B)(A + B)$.
- Ce constatăți?
- $A^3 - B^3$ și $(A - B)(A^2 + AB + B^2)$.

Ce observi?

17) Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Arată că $\forall X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care comută cu A la înmulțire este de forma $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.
- Calculează A^2 și X^2 .
- Calculează A^3 și X^3 .

18) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Determină X de forma $X = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

astfel încât $X^2 A = B$.

19) $A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$.

- Arată că:
 - $A^2 = -a^2 I_2$;
 - $A^3 = -a^2 A$;
 - $A^4 = a^4 I_2$.
- Calculează: A^5, A^6, A^7, A^8 .

$$\text{Așadar } A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & na + \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Metoda a II-a. (Metoda binomului lui Newton)

$$\text{Scriem matricea } A \text{ sub forma } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3 + B.$$

Cum $I_3 \cdot B = B \cdot I_3$, aplicăm formula binomului lui Newton:

$$A^n = (I_3 + B)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k B^k. \text{ Calculăm inductiv puterile lui } B:$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B^3 = O_3 \text{ și deci } B^k = O_3, \forall k \geq 3.$$

$$\text{Atunci: } A^n = C_n^0 B^0 + C_n^1 B + C_n^2 B^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n & na \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & na + \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercițiul rezolvat.

Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Să calculăm A^n , $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție. Calculăm:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vom demonstra prin metoda inducției matematice că

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}, \forall n \geq 1.$$

Presupunem că $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ și demonstrăm că $A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ deci } A^{k+1} \text{ este de forma de}$$

mai sus. Atunci $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

20) Calculează A^2, A^3, A^4 , unde A este matricea:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$

b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$

d) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & d & a \end{pmatrix}.$

21) Calculează A^2, A^3 pentru:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -a & 1 & -\frac{a^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}.$$

Ce poți spune despre A^n , $n \in \mathbb{N}^*$?

22) Calculează A^2, A^3, A^4 pentru:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}.$$

Ce poți spune despre A^n , $n \in \mathbb{N}^*$?

23) Calculează $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{2001}$.

24) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

- a) Calculează A^2, A^3, A^4 .
b) Calculează A^n , $n \geq 1$.

25) Determină $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de forma

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \text{ astfel încât}$$

$$X^2 - 7X + 3I_2 = O_2.$$



● 1. Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Arată că ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$.

b) Arată că între o matrice X de tip (m, n) și o matrice Y de tip (n, m) are loc relația: ${}^t(X \cdot Y) = {}^tY \cdot {}^tX$.

● 2. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculează: $AB, BA, AB - BA, A^2 = A \cdot A, B^2, A^2 - B^2$.

● 3. Fie $X(a) = \begin{pmatrix} 1+5a & 10a \\ -2a & 1-4a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Arată că:

a) $\forall a, b \in \mathbb{R}, X(a) \cdot X(b) = X(a + b + ab)$;

b) $(X(2))^2 = X(8)$.

● 4. Determină matricea X care verifică ecuația

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 12 & -6 & -9 \end{pmatrix}.$$

● 5. Găsește toate matricele cu elemente în mulțimea $\{0, 1\}$ care transformă prin înmulțire ma-

tricea $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ în matricea $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

● 6. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ și

mulțimea $\mathcal{M} = \{C(x) = xA + B, x \in \mathbb{R}^*\}$. Arată că:

a) $C(x) \cdot C(y) = C(y) \cdot C(x), \forall C(x), C(y) \in \mathcal{M}$;

b) $I_2 \in \mathcal{M}$.

● 7. Arată că $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^{12} = 2^{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

● 8. Calculează A^2, A^3, A^4 , unde A este matricea:

a) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 2 \\ -2 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

● 9. a) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determină toate matricele

X astfel încât $A^2 \cdot X = X \cdot A^2$ și arată că nu există nici o matrice Y astfel încât $A^2 \cdot Y - Y \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

b) Arată că, oricare ar fi $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $AB - BA \neq I_n$.

● 10. Determină matricea X dacă:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

●● 11. Rezolvă ecuația matricială:

$$X - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

●●● 12. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu $a \neq d, b \neq c,$

$b \neq 0, c \neq 0.$ Fie $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}.$

Demonstrează că $\frac{b_n}{b} = \frac{c_n}{c} = \frac{a_n - d_n}{a - d}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

●●● 13. Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$ Arată că:

a) $A^n = a_n \cdot A + b_n \cdot I_3, a_n, b_n \in \mathbb{N}^*;$

b) $A^n = \frac{2^n}{3} \cdot (A + I_3) + \frac{(-1)^n}{3} \cdot (2I_3 - A), \forall n \in \mathbb{N}^*.$

●●● 14. Calculează:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n;$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^n;$

c) $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 7 \\ 0 & 14 & 0 \\ 7 & 0 & 7 \end{pmatrix}^n;$

d) $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 7 \\ 1 & 14 & 1 \\ 7 & 2 & 7 \end{pmatrix}^n, n \in \mathbb{N}^*.$

●● 15. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$ Determină $\sum_{k=1}^n A^k, n \in \mathbb{N}^*.$

●● 16. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R}.$ Arată că:

a) A verifică ecuația $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = O_2;$

b) $ad = bc$ implică:

$\exists r \in \mathbb{N}^*$ cu $A^k = r^{k-1} \cdot A, \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2.$

●●● 17. Dacă $\begin{pmatrix} a-b & a \\ a+b & a+2b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix},$ arată că

$y - x, z - y, t - z$ sunt în progresie aritmetică.

●● 18. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a+b & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a+b \end{pmatrix},$

$a, b \in \mathbb{R}^*.$ Calculează $A^2, A^3, A^4.$

●● 19. Determină $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică relația:
a) $X^2 = {}^tX;$ b) $X^2 = I_2;$ c) $X \cdot {}^tX = O_2.$

●● 20. Fie $X(a) = \begin{pmatrix} 1+5a & 10a \\ -2a & 1-4a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$

a) Arată că $\forall a, b \in \mathbb{R}, X(a) \cdot X(b) = X(a + b + ab).$

b) Determină $(X(1))^2.$

c) Arată că $(X(1))^n = X(2^n - 1), \forall n \in \mathbb{N}^*.$

●●● 21. Calculează:

a) $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{2001};$

b) $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}^{2008};$

c) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^n, a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*.$

●●● 22. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ și

$\mathcal{N}(A) = \{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \mid XA = AX\}.$ Arată că:

a) dacă $X, Y \in \mathcal{N}(A),$ atunci $XY \in \mathcal{N}(A);$

b) dacă $X \in \mathcal{N}(A),$ atunci există $a, b, c \in \mathbb{C}$ astfel

încât $X = \begin{pmatrix} a & 0 & 3b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix};$

c) dacă $X \in \mathcal{N}(A)$ și $X^2 = O_3,$ atunci $X = O_3;$

d) dacă $X \in \mathcal{N}(A)$ și $X^{2007} = O_3,$ atunci $X = O_3.$

Sisteme de ecuații liniare și determinanți

3. Sisteme de ecuații liniare. Determinanți



◆ O ecuație liniară cu n necunoscute, x_1, x_2, \dots, x_n este o ecuație de forma: $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b_1$, unde $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1 \in \mathbb{R}$.

Exemple de probleme care se pot rezolva printr-o ecuație liniară cu o necunoscută:

1) Într-un cuptor Siemens-Martin se topesc 20t de oțel, având un conținut de 0,5% carbon, cu 5t de fontă având un conținut de 5% carbon. Ce procent de carbon are amestecul?

Soluție.

Fie $x\%$ conținutul de carbon al amestecului, adică 25t de amestec conțin $\frac{25x}{100}$ t carbon. Cele 20t de oțel conțin $\frac{20 \cdot 0,5}{100}$ carbon și cele 5t de fontă conțin $\frac{5 \cdot 5}{100}$ t carbon. Atunci $\frac{20 \cdot 0,5}{100} + \frac{5 \cdot 5}{100} = \frac{25x}{100}$, cu $x = 1,4$.

2) Un tren lung de 250 m trece cu viteza de 50 km/h printr-un tunel lung de 200 m. Cât a durat trecerea prin tunel?

Soluție.

Timpul de la intrarea locomotivei în tunel până la ieșirea ultimului vagon este de x secunde. În acest timp, ultimul vagon parcurge $\frac{50000}{60 \cdot 60}x$ m, adică lungimea trenului plus lungimea tunelului: $200 + 250 = \frac{50000}{60 \cdot 60}x$, de unde $x = 32,4$ s.



Forma generală a unui sistem de ecuații liniare sau sistem liniar este:

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

unde x_1, x_2, \dots, x_n sunt necunoscutele sistemului, numerele reale (sau complexe) a_{ij} $i=1, m, j=1, n$ sunt coeficienții necunoscutelor și b_1, b_2, \dots, b_m sunt termenii liberi ai sistemului.

Să rezolvăm probleme folosind ecuații liniare.

1) Două trenuri, primul lung de 150 m, iar al doilea de 250 m, trec în sens contrar unul pe lângă altul, primul cu viteza de 70 km/h, iar cel de-al doilea cu viteza de 50 km/h.

În cât timp trec unul pe lângă altul?

2) Aceeași problemă, dacă cele două trenuri circulă în același sens.

3) Află ce distanță parcurge pe șosea un automobil cu lungimea de 5 m care circulă cu viteza de 90 km/h, în timp ce depășește un camion care circulă cu viteza de 16 km/h având lungimea de 13 m.

4) Un șlep mergând în sensul curentului apei ajunge la destinație în 2 ore. Mergând contra curentului, cu aceeași încărcare a mașinilor, parcurge aceeași distanță în 3 ore. Viteza șleplului în apă stătătoare este de 250 m/min. Care este viteza curentului?

Să recunoaștem matricea asociată unui sistem liniar.

5) Scrie matricea sistemului și matricea extinsă pentru fiecare din următoarele sisteme liniare:

a)
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases};$$

b)
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - z = 4 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 3y + 5z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Unui sistem linear îi asociem următoarele *matrice*:

matricea sistemului	matricea extinsă a sistemului	matricea termenilor liberi	matricea necunos- cutelor
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$

Matricea extinsă se mai numește și *matrice completă*.

Prin rezolvarea sistemului S înțelegem determinarea mulțimii soluțiilor (x_1, x_2, \dots, x_n) care verifică toate ecuațiile sistemului (S) .

EXEMPLU



... de problemă care conduce la sistem linear de 2 ecuații cu 2 necunoscute:

Un rezervor poate fi umplut cu apă de la un robinet de apă caldă și unul de apă rece. Dacă robinetul de apă caldă este deschis 3 minute și cel de apă rece 1 minut, atunci în rezervor vor fi 50 l. Dacă apa caldă curge un minut și apa rece 2 minute, atunci în rezervor vor fi 40 l. Câți litri de apă curg într-un minut din fiecare robinet?

Soluție.

Fie x l/min debitul robinetului de apă caldă și y l/min debitul

celui de apă rece. Obținem sistemul $\begin{cases} 3x + y = 50 \\ x + 2y = 40 \end{cases}$, cu soluția

$(x, y) = (12, 14)$; deci robinetul de apă caldă furnizează 12 l/min și cel de apă rece 14 l/min.

◆ Sistemul $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ se poate rezolva prin mai multe

metode. Să-l rezolvăm prin metoda reducerii.

Metoda reducerii constă în eliminarea uneia dintre necunoscute, adunând cele două ecuații înmulțite cu coeficienți corespunzători:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & | \cdot a_{22} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & | \cdot (-a_{12}) \end{cases}, \quad \begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = a_{22}b_1 \\ -a_{12}a_{21}x_1 - a_{12}a_{22}x_2 = -a_{12}b_2 \end{cases}$$

$$x_1(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$$

Pentru $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, obținem soluțiile:

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

d) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases};$

e) $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - 5y = 0 \end{cases};$

f) $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 2x - 8y = 0 \end{cases};$

g) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2y - 3z = 4 \\ 3z - 4t = 5 \\ x + 3y + 5z - 6t = 11 \end{cases}$

Să rezolvăm probleme folosind sisteme de ecuații liniare.

6) Pentru a evita înghețarea apei în blocul motor și în sistemul de răcire al unui automobil se amestecă apa cu lichidul antigel cu densitatea 1,135 g/cm³. Dacă lichidul ajunge la densitatea de 1,027 g/cm³, atunci se evită înghețul până la temperatura de -10°C.

Câți litri de antigel și câți litri de apă sunt necesari la această temperatură pentru a obține 100 l de amestec?

Să rezolvăm sisteme liniare:

7) Rezolvă sistemul $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases};$

- a) prin metoda reducerii;
b) prin metoda substituției.

8) Rezolvă sistemul $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 3x - y = 5 \end{cases};$

- a) prin metoda reducerii;
b) prin metoda substituției;
c) grafic (pe hârtie milimetrică).

9) Rezolvă sistemele următoare prin mai multe metode:

a) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 6x + 3y = 12 \end{cases};$

b) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

Observăm că la numitor se află o expresie pe care o notăm cu $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, care conține termenii $a_{11}a_{22}$, $a_{12}a_{21}$.

Definiție.

Determinantul unei matrice de ordinul al doilea,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \text{ este numărul } \Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Fiecare dintre termenii determinantului Δ , $a_{11}a_{22}$ și $a_{12}a_{21}$, sunt obținuți înmulțind câte un singur element de pe fiecare linie și câte unul singur de pe fiecare coloană din matricea A .

Observație.

Valoarea determinantului matricei asociate unui sistem determină compatibilitatea sistemului (existența soluțiilor):

- dacă $\Delta \neq 0$, atunci sistemul este *compatibil determinat* (are soluție unică);

- dacă $\Delta = 0$, atunci sistemul este *incompatibil* (nu are soluții) sau *compatibil nedeterminat* (are o infinitate de soluții).

◆ Metoda lui Cramer

Sistemul de două ecuații liniare cu 2 necunoscute

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}, \text{ are soluția: } x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Observăm că la numitor avem determinantul matricei sistemului,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \text{ iar la numărător avem determinanții } \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \text{ și } \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

obținuți din Δ prin înlocuirea coloanei corespunzătoare coeficienților necunoscutei cu coloana termenilor liberi.

$$\text{Notăm } \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \text{ și } \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

Metoda lui Cramer.

Soluția sistemului liniar $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ este, pentru $\Delta \neq 0$,

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} \text{ și } x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}.$$

Exercițiu rezolvat.

Să rezolvăm sistemul $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$.

- *Metoda reducerii.*

Adunăm cele două ecuații și obținem $x = 1$.

Înlocuind această valoare într-una din ecuații, de exemplu în prima, obținem $y = 2$. Soluția sistemului este (1, 2).

Observăm că:

a) cele două ecuații au coeficienții proporționali: dacă înmulțim prima ecuație cu 3 obținem a doua ecuație; în acest caz, spunem că sistemul este compatibil nedeterminat (are o infinitate de soluții); mulțimea soluțiilor sistemului este:

$$S = \{(x, y) \mid y = 4 - 2x, x, y \in \mathbb{R}\} = \{(x, 4 - 2x) \mid x \in \mathbb{R}\};$$

b) expresia $2x + y$ nu poate lua două valori diferite pentru aceeași pereche de numere (x, y) ; ca urmare, mulțimea soluțiilor sistemului (S) este mulțime vidă deci sistemul este incompatibil (nu are soluții).

10 Calculează valorile următorilor determinanți de ordinul al doilea:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & b \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{vmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

11 Pentru ce valori reale ale parametru-
lui m , sistemul liniar $\begin{cases} (m+1)x + 8y = 4m \\ mx + (m+3)y = 3m - 1 \end{cases}$
are o infinitate de soluții?

Indicație.

Din condiția ca determinantul matricei asociate sistemului să fie 0, rezultă $m = 1$ sau $m = 3$. Pentru $m = 3$, înlocuind în sistem obținem un sistem incompatibil, iar pentru $m = 1$ obținem un sistem compatibil nedeterminat. În concluzie, sistemul are o infinitate de soluții pentru $m = 1$.

12 Pentru ce valori reale ale parametru-
lui m , sistemul liniar $\begin{cases} (m-1)x + 8y = 4m \\ mx + (m+3)y = 3m + 1 \end{cases}$;
a) are soluție unică?
b) nu are soluții?

13 Fie sistemul $\begin{cases} 3x_1 - 17x_2 = 9 \\ 5x_1 + 19x_2 = 23 \end{cases}$.

a) Calculează Δ .
b) Calculează Δ_{x_1} , Δ_{x_2} .
c) Rezolvă sistemul prin metoda lui Cramer.

• *Metoda substituției.*

Din prima ecuație obținem $y = 4 - 2x$ și înlocuim în a doua. Obținem $x = 1$, de unde rezultă $y = 2$. Deci soluția este $(1, 2)$.

• *Metoda lui Cramer.*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5 \neq 0; \Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5, x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10, y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 2. \text{ Obținem soluția } (1, 2).$$

◆ Dacă rezolvăm (prin substituție sau reducere) sistemul liniar:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \text{ unde } a_{ij} \in \mathbb{R}, i = \overline{1, 3}, j = \overline{1, 3} \text{ și} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$b_k \in \mathbb{R}, k = \overline{1, 3}$, obținem soluțiile:

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} a_{33} + b_2 a_{32} a_{13} + b_3 a_{12} a_{23} - b_3 a_{22} a_{13} - b_2 a_{12} a_{33} - b_1 a_{32} a_{23}}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{32} a_{23} a_{11} - a_{33} a_{21} a_{12}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11} b_2 a_{33} + a_{21} b_3 a_{13} + a_{31} b_1 a_{23} - a_{31} b_2 a_{13} - a_{21} b_1 a_{33} - a_{11} b_3 a_{23}}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{32} a_{23} a_{11} - a_{33} a_{21} a_{12}}$$

$$x_3 = \frac{a_{11} a_{22} b_3 + a_{21} a_{32} b_1 + a_{12} b_2 a_{31} - a_{31} a_{22} b_1 - a_{12} a_{21} b_3 - a_{32} b_2 a_{11}}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{32} a_{23} a_{11} - a_{33} a_{21} a_{12}}$$

Observăm că la numitorul fiecărei soluții se află expresia $a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{32} a_{23} a_{11} - a_{33} a_{21} a_{12}$.

Definiție. Determinantul unei matrice de ordinul al treilea,

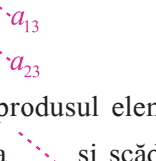
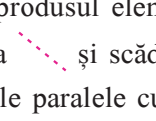
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ este numărul } \Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{32} a_{23} a_{11} - a_{33} a_{21} a_{12}.$$

În scrierea lui Δ sunt $3! = 6$ termeni formați din câte 3 factori. În fiecare dintre acești termeni se întâlnește o singură dată câte un element de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană a matricei A .

Teoremă. Regula lui Sarrus

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}.$$

(adunăm produsul elementelor de pe cele 3 diagonale paralele cu direcția  și scădem produsul elementelor situate pe cele 3 diagonale paralele cu direcția .)

14) Rezolvă următoarele sisteme liniare:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 13 \\ 2x + y = 4 \end{cases};$

b) $\begin{cases} 4x + 3y = -1 \\ 2x + 9y = 2 \end{cases};$

c) $\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases};$

d) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases};$

e) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}.$

Să rezolvăm sisteme liniare de 3 ecuații cu 3 necunoscute!

15) Rezolvă, prin metoda substituției, sistemele liniare:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ 2x_1 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \end{cases};$

b) $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x + 2y + 3z = 12 \\ x - 2y + 2z = -12 \end{cases};$

c) $\begin{cases} 2x - 7y + 8z = 16 \\ 3x + 5y - 3z = 14 \\ 3x - y + 8z = 30 \end{cases}.$

16) Arată că:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -12;$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 10 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 354;$

c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \\ 27 & 22 & 21 \end{vmatrix} = 0.$

Teoremă. Regula triunghiului

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

(evidențiem „triunghiuri“ cu vârfurile în elementele determinantului, ca în schemă. Se adună produsele elementelor care se află pe diagonala principală și în vârfurile triunghiurilor ce au o latură paralelă cu aceasta și se scad produsele elementelor care se află pe diagonala secundară și în vârfurile triunghiurilor ce au o latură paralelă cu aceasta).



Toți termenii corespunzători diagonalei principale au semnul „+” în dezvoltarea determinantului Δ , iar cei corespunzători diagonalei secundare au semnul „-” în dezvoltarea determinantului Δ .

Pentru calculul determinantilor de ordinul 3 este mai comod să aplicăm una din următoarele trei reguli de calcul:

Teoremă. Regula minorilor

(dezvoltarea determinantului după o linie sau coloană)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ &= -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ &= a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \\ &= -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = \\ &= a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

(alegem o linie i sau o coloană și înmulțim fiecare element a_{ij} , $j = \overline{1,3}$ al acestei linii sau coloane cu determinantul de ordin inferior obținut prin eliminarea liniei i și a coloanei j și cu $(-1)^{i+j}$; adunăm produsele astfel obținute și obținem valoarea determinantului).

17) Calculează următorii determinanți de ordinul al treilea folosind definiția:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

18) Calculează folosind regula lui Sarrus determinantii:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$;

g) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; h) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & \alpha & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

i) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$, $x, y, z \in \mathbb{R}$.

19) Calculează următorii determinanți de ordinul al treilea folosind regula triunghiului:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$;

Teoremă. Metoda lui Cramer

Dacă $\Delta \neq 0$, atunci soluția sistemului liniar

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \text{ este } (x_1, x_2, x_3): x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta},$$

$$x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}, \text{ unde } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Aplicație. Modelul economic al lui Leontief

(1906 - 1999, economist american de origine rusă. Creatorul modelului „input-output“ (intrări - ieșiri; consumuri - producție) folosit în analiza echilibrului economic. A obținut premiul Nobel în 1973).

Considerăm o economie formată din două sectoare notate 1 și 2. Schimburile între sectoare și cererile exterioare finale sunt evaluate în aceeași unitate monetară. Producerea unei unități în sectorul 1 necesită 0,1 unități din sectorul 1 și 0,2 unități din sectorul 2; producerea unei unități în sectorul 2 necesită 0,5 unități din sectorul 1 și 0,25 unități din sectorul 2. Să determinăm producțiile x_1 și x_2 ale sectoarelor 1 și, respectiv, 2 pentru realizarea echilibrului pieței dacă cererea finală, din afara celor două sectoare, este pentru sectorul 1 de 5000 de unități și pentru sectorul 2 de 10 000 de unități.

Soluție.

Pentru a stabili un echilibru trebuie ca în fiecare sector să existe egalitate între producție și cerere; echilibrul se traduce prin:

$$\begin{cases} x_1 - 0,1x_1 - 0,2x_2 = 5000 \\ x_2 - 0,5x_1 - 0,25x_2 = 10000 \end{cases}. \text{ Sistemul este echivalent cu}$$

$$\begin{cases} 0,9x_1 - 0,2x_2 = 5000 & | \cdot 30 & \begin{cases} 27x_1 - 6x_2 = 150000 \\ -4x_1 + 6x_2 = 80000 \end{cases} \\ -0,5x_1 + 0,75x_2 = 10000 & | \cdot 8 \end{cases},$$

de unde obținem soluția (x_1, x_2) .

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R};$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix};$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & b \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}, a, b \in \mathbb{R};$

e) $\begin{vmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix}, \alpha \in \mathbb{C}, i^2 = -1.$

20) Calculează următorii determinanți de ordinul al treilea folosind regula minorilor:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix};$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -x & -y & -z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R};$

c) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix};$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & 2 & b \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}, a, b \in \mathbb{R};$

e) $\begin{vmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix}, \alpha \in \mathbb{C}, i^2 = -1.$



● 1. Fie sistemul $\begin{cases} 2x - 5y = -3 \\ 5x + 7y = 12 \end{cases}$.

- a) Calculează determinantul asociat matricii sistemului Δ .
b) Calculează determinanții obținuți din Δ prin înlocuirea coloanei corespunzătoare necunoscutei x , respectiv y prin coloana termenilor liberi, Δ_x și Δ_y .
c) Rezolvă sistemul prin metoda lui Cramer.

● 2. Fie sistemul $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$.

- a) Calculează determinantul asociat matricii sistemului Δ .
b) Calculează determinanții obținuți din Δ prin înlocuirea coloanei corespunzătoare necunoscutei x , respectiv y prin coloana termenilor liberi, Δ_x și Δ_y .
c) Rezolvă sistemul prin metoda lui Cramer.

● 3. Calculează următorii determinanți:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{vmatrix}$, unde $i^2 = -1$;

f) $\begin{vmatrix} x & 0 \\ y & x \end{vmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$;

g) $\begin{vmatrix} e^x & 1 \\ e^{x+y} & e^y \end{vmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$;

h) $\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^{x+y} & e^y \end{vmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$;

i) $\begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 1 & m-1 \end{vmatrix}$, $m \in \mathbb{R}$.

● 4. Rezolvă și discută, în funcție de valorile parametrului real, următoarele sisteme liniare:

a) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x - ay = 2 \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$;

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ ax - y = 2 \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$;

c) $\begin{cases} mx - y = 1 \\ x + y = 6 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$;

d) $\begin{cases} 2x + ny = 4 \\ nx - 2y = 6 \end{cases}$, $n \in \mathbb{R}$.

● 5. Pentru ce valori ale lui a , sistemul

$\begin{cases} -4x + ay = 3 + a \\ (6 + a)x + 2y = 1 + a \end{cases}$ nu are soluții (este incompatibil)?

● 6. Fie sistemul $\begin{cases} x + ny = 2 \\ 2x - y = m \end{cases}$. Pentru ce valori

reale ale lui n și m sistemul este compatibil determinat?

● 7. Fie sistemul $\begin{cases} 5x + my = 10 \\ x + y = p \end{cases}$.

Pentru ce valori reale ale lui m și p sistemul:

- a) are o soluție unică;
b) are o infinitate de soluții;
c) nu are soluții?

● 8. Rezolvă sistemele liniare:

a) $\begin{cases} 2ax - y = 4 \\ 3a^2x - ay = a \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$;

b) $\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y = \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

c) $\begin{cases} m^3x - m^2y = m \\ m^3y - m^2x = -1 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$.

● 9. Calculează următorii determinanți de ordinul al 3-lea prin toate metodele cunoscute: regula lui Sarrus, regula triunghiului și regula minorilor.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 7 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

g) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; h) $\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

$$i) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix};$$

$$j) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 7 \end{vmatrix};$$

$$k) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 7 \end{vmatrix};$$

$$l) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 7 \end{vmatrix};$$

$$m) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix};$$

$$n) \begin{vmatrix} i & 2 & 3 \\ 4 & 2-i & 6 \\ -1 & 2 & 7 \end{vmatrix}, i^2 = -1;$$

$$o) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 0 & 6 \\ -1 & b & 7 \end{vmatrix}, a, b \in \mathbb{R};$$

$$p) \begin{vmatrix} 1 & i & 1-i \\ x & 0 & 2+i \\ 0 & y & 1 \end{vmatrix}, x, y \in \mathbb{C}, i^2 = -1.$$

● **10.** Fie sistemul
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}.$$

a) Calculează determinantul asociat matricii sistemului Δ .

b) Calculează determinanții obținuți din Δ prin înlocuirea coloanei corespunzătoare necunoscutei x , respectiv y prin coloana termenilor liberi, Δ_x și Δ_y .

c) Rezolvă sistemul prin metoda lui Cramer.

● **11.** Fie sistemul
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}.$$

a) Calculează determinantul asociat matricii sistemului Δ .

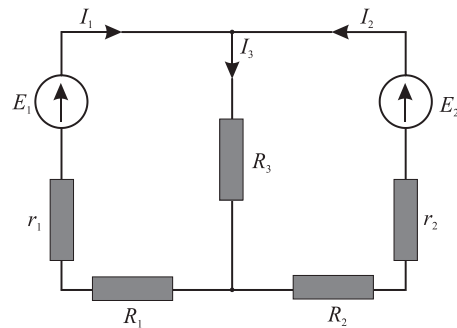
b) Calculează determinanții obținuți din Δ prin înlocuirea coloanei corespunzătoare necunoscutei x , respectiv y prin coloana termenilor liberi, Δ_x și Δ_y .

c) Rezolvă sistemul prin metoda lui Cramer.

● **12.** Rezolvă, folosind metoda Cramer, următoarele sisteme:

$$a) \begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 2x + y + 2z = 5 \\ x - y + 6z = 6 \end{cases}; \quad b) \begin{cases} x + 2y - z = 8 \\ 2x + y + z = 7 \\ 2x + 4y - 2z = 16 \end{cases}.$$

●● **13.** În circuitul electric următor, se cunosc:



$$E_1 = 12\text{V}, E_2 = 15\text{V}, r_1 = 1\Omega, r_2 = 2\Omega, \\ R_1 = 2\Omega, R_2 = 1\Omega, R_3 = 3\Omega.$$

Din legile lui Kirchhoff obținem:

$$\begin{cases} E_1 = I_1(r_1 + R_1) + I_3 R_3 \\ E_2 = I_2(r_2 + R_2) + I_3 R_3 \\ I_3 = I_1 + I_2 \end{cases}.$$

Determină intensitățile curenților prin cele 3 laturi.

4. Proprietățile determinantilor

Pentru calcularea determinantilor, uneori este mai util să aplicăm proprietăți ale acestora. Vom verifica aceste proprietăți pentru o

matrice de forma $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

I. Determinantul unei matrice este egal cu determinantul matricei transpuse.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} -$$

$$-a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \det {}^t A.$$

Această proprietate ne permite să transcriem proprietățile obținute pentru liniile unui determinant la coloanele sale (și reciproc).

II. Dacă determinantul unei matrice are o linie (sau o coloană) cu toate elementele 0, atunci determinantul este egal cu 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{33} \cdot 0 + a_{32} \cdot a_{13} \cdot 0 + a_{12} \cdot a_{31} \cdot 0 -$$

$$-a_{31} \cdot 0 \cdot a_{13} - a_{12} \cdot 0 \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{32} \cdot 0 = 0.$$

III. Dacă înmulțim toate elementele unei linii (sau coloane) ale determinantului unei matrice cu un număr, valoarea determinantului se înmulțește cu acel număr.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \lambda a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \lambda \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot \lambda \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot \lambda \cdot a_{12} \cdot a_{23} -$$

$$-a_{31} \cdot \lambda \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot \lambda \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot \lambda \cdot a_{32} \cdot a_{23} =$$

$$= \lambda (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} -$$

$$-a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23}) = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

IV. Dacă în determinantul unei matrice adunăm toate elementele unei linii (respectiv coloane) cu elementele corespunzătoare unei alte linii (respectiv coloane) înmulțite cu un număr, valoarea determinantului nu se schimbă.

Să calculăm valorile determinantilor folosind proprietățile lor.

1) Verifică egalitățile:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix};$

b) $\begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$

2) Calculează determinantii:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. Ce observi?

3) Verifică dacă:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = 0;$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0.$

4) Calculează determinantii:

a) $\begin{vmatrix} 19 & 0 & -73 \\ 24 & 0 & 15 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix};$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$

5) Verifică dacă:

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 5 & 2 & 6 \\ 1 & 7 & 21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 7 \end{vmatrix} = 0;$

6) Verifică dacă:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -6;$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + \lambda a_{31} & a_{22} + \lambda a_{32} & a_{23} + \lambda a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22} + \lambda a_{32})a_{33} +$$

$$+ (a_{21} + \lambda a_{31})a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{31}(a_{23} + \lambda a_{33}) - a_{31} \cdot a_{13}(a_{22} + \lambda a_{32}) -$$

$$- a_{11} \cdot a_{32}(a_{23} + \lambda a_{33}) - a_{33} \cdot a_{12}(a_{21} + \lambda a_{31}) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} +$$

$$+ a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \det A, \lambda \in \mathbb{C}.$$

V. Dacă determinantul unei matrice are două linii (respectiv două coloane) proporționale, atunci determinantul este nul.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \stackrel{\text{III}}{=} \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \stackrel{\text{IV}}{=} \lambda \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \lambda \in \mathbb{C}.$$

VI. Dacă schimbăm între ele două linii (sau două coloane) ale unei matrice pătratică, atunci determinantul își schimbă semnul.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{21} \cdot a_{33} \cdot a_{12} + a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} -$$

$$- a_{31} \cdot a_{23} \cdot a_{12} - a_{21} \cdot a_{13} \cdot a_{32} - a_{11} \cdot a_{33} \cdot a_{22} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\det A.$$

VII. Dacă determinanții a două matrice diferă printr-o singură linie (sau coloană), atunci suma lor este egală cu valoarea determinantului care are pe linia respectivă (coloana respectivă) suma elementelor liniilor (sau coloanelor) respective ale celor doi determinanți și restul elementelor egale.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}) +$$

$$+ (a'_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a'_{13} + a_{31}a'_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a'_{13} - a_{21}a'_{12}a_{33} - a'_{11}a_{32}a_{23}) =$$

$$= (a_{11} + a'_{11})a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}(a_{13} + a'_{13}) + a_{31}a_{23}(a_{12} + a'_{12}) -$$

$$- a_{31}a_{22}(a_{13} + a'_{13}) - a_{21}a_{33}(a_{12} + a'_{12}) - a_{32}a_{23}(a_{11} + a'_{11}) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} + a'_{11} & a_{12} + a'_{12} & a_{13} + a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

7) Calculează:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 8 & 0 & -1 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

8) Verifică dacă:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 9 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 + 1(-2) & 3 \\ 3 & 5 + 3(-2) & 9 \\ 2 & 4 + 2(-2) & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 9 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

9) Calculează determinanții:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1+2 & 2 & 1 \\ -1+0 & 0 & 2 \\ 2+1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

10) Verifică dacă este corect calculul:

$$\begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 20 & 6 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

11) Verifică dacă:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

12) Calculează determinanții:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix};$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{32} \\ \sqrt{2} & \sqrt{27} \end{vmatrix}; \quad \text{d) } \begin{vmatrix} \sqrt{3}-1 & 1-\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} & \sqrt{3}+1 \end{vmatrix}.$$

13) Verifică dacă:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -2 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

VIII. Determinantul produsului a două matrice pătratice (de același ordin) este egal cu produsul determinanților acestor matrice.

$$\text{Fie } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} &= (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}) = \\ &= a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{21}b_{21}a_{12}b_{12} - a_{11}a_{22}b_{21}b_{12} - a_{21}a_{12}b_{11}b_{22} = \\ &= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

IX. Dacă o linie (respectiv coloană) a determinantului unei matrice este o combinație liniară a celorlalte linii (respectiv coloane) ale aceluiași determinant, atunci determinantul este nul (și reciproc).

Să verificăm această proprietate pentru matricea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha a_{11} + \beta a_{21} & \alpha a_{12} + \beta a_{22} & \alpha a_{13} + \beta a_{23} \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

$$\text{Avem } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha a_{11} + \beta a_{21} & \alpha a_{12} + \beta a_{22} & \alpha a_{13} + \beta a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstrația proprietăților I-IX pentru determinanți de ordin n este un exercițiu care presupune o bună cunoaștere a modului de lucru cu simbolurile Σ , Π . Nu ne-am propus să dăm aceste demonstrații, dar este util să le încerci!

Exercițiul rezolvat.

$$\text{Sistemele } S_1 \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases} \text{ și } S_2 \begin{cases} (2 + 4 \cdot 3)x + (3 - 4 \cdot 2)y = 13 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$$

sunt echivalente (au aceleași soluții).

Soluție.

Din proprietatea IV, rezultă $\Delta_1 = \Delta_2$. Analog $\Delta_{x_1} = \Delta_{x_2}$ și $\Delta_{y_1} = \Delta_{y_2}$, unde $\Delta_{x_i}, i=1, 2$ se obține din Δ_i înlocuind coloana corespunzătoare necunoscutei x prin coloana termenilor liberi, iar $\Delta_{y_i}, i=1, 2$ se obține din Δ_i înlocuind coloana corespunzătoare necunoscutei y prin coloana termenilor liberi; cele două sisteme au aceeași soluție, $\left(\frac{16}{13}, \frac{11}{13}\right)$, adică sunt echivalente.

$$14) \text{ Fie determinanții: } d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix},$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad d_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2+0 & 7 \\ 2 & 3-1 & 1 \\ 5 & 4+1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Verifică prin calcul direct egalitatea $d_1 + d_2 = d_3$.

$$15) \text{ Fie } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Arată că $A \cdot B = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$ și că

$$\det AB = \det A \cdot \det B.$$

16) Fie matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculează: a) $\det A$; b) $\det B$;
c) $\det(A \cdot B)$; d) $(\det A) \cdot (\det B)$.

17) Calculează determinantul:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

18) Arată că :

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-c & b-c \\ a(a-c) & b(b-c) \end{vmatrix};$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b);$$

$$c) \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc(b-a)(c-a)(c-b).$$

Aplicații



Două puncte distincte $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$ determină în mod unic o dreaptă AB .

Dacă $x_A = x_B$, atunci dreapta verticală AB are ecuația $x = x_A$.

Dacă $y_A = y_B$, atunci dreapta orizontală AB are ecuația $y = y_A$.

Dacă $x_A \neq x_B$ și $y_A \neq y_B$, atunci dreapta AB este oblică și are

$$\text{ecuația: } y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A), \text{ adică: } \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}.$$

Uneori se utilizează această reprezentare chiar dacă un numitor este nul; atunci numărătorul respectiv trebuie egalat cu zero. Evident, pentru că $A \neq B$, numitorii nu se pot anula simultan.

Propoziție.

Ecuația dreptei care trece prin punctele

$$A(x_A, y_A) \text{ și } B(x_B, y_B) \text{ se scrie sub forma: } \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Propoziție.

Condiția de coliniaritate a punctelor

$$M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3) \text{ se scrie sub forma } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$



În clasa a X-a am aflat cum se calculează distanța de la un punct la o dreaptă.

Fie $M(x_M, y_M)$ un punct din plan și h o dreaptă cu ecuația $ax + by + c = 0$, unde $a \neq 0$ sau $b \neq 0$.

Distanța de la punctul M la dreapta h este

$$d(M, h) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Este de asemenea cunoscut faptul că, dacă $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$ sunt două puncte din plan, atunci distanța dintre punctele

$$A \text{ și } B \text{ este } d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Aria unui triunghi

Fie punctele distincte $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ și dreapta AB de

$$\text{ecuație } \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0. \text{ Dacă } M(x_M, y_M) \text{ este un alt punct din}$$

19) Scrie sub formă de determinant ecuația dreptei care trece prin punctele:

- $A(1, 2)$ și $B(2, 3)$;
- $O(0, 0)$ și $C(1, 0)$;
- $O(0, 0)$ și $D(0, 2)$;
- $O(0, 0)$ și $E(2, -1)$;
- $F(-1, 2)$ și $G(2, 1)$;
- $H(-1, -2)$ și $I(3, -1)$.

Reprezintă într-un reper cartezian, în fiecare caz, punctele și dreptele obținute.

20) Reprezintă într-un reper cartezian următoarele puncte:

$A(1, 2)$, $B(2, 3)$, $O(0, 0)$, $C(1, 0)$, $D(0, 2)$, $E(2, -1)$, $F(-1, 2)$, $G(2, 1)$, $H(-1, -2)$, $I(3, -1)$, $J(4, -2)$, $K(-1, 0)$, $L(0, -3)$, $M(0, 1)$.

Care dintre aceste puncte sunt coliniare?

21) Determină $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât punctele $A(\alpha, 3)$, $B(2, 4)$ și $C(3, 5)$ să fie coliniare.

22) Pentru ce valori ale parametrului real α , punctele $A(\alpha, 3)$, $B(2, \alpha + 1)$ și $C(3, 5)$ sunt coliniare?

23) Arată că, oricare ar fi valoarea parametrului real α , punctele $A(\alpha, 3)$, $B(2, \alpha)$ și $C(3, 1)$ sunt necoliniare.

24) Fie punctele $A(2, 3)$, $B(-1, -1)$ și $C(5, 7)$.

- Determină ecuația dreptei AB .
- Verifică dacă punctele A , B , C sunt coliniare.
- Calculează distanța de la A la BC .
- Calculează aria triunghiului ABC .
- Reprezintă punctele, dreptele și triunghiurile într-un reper cartezian.

plan și dacă notăm cu $\Delta = \begin{vmatrix} x_M & y_M & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix}$, atunci

$$d(M, AB) = \frac{|\Delta|}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} \text{ și, în consecință, obținem ...}$$

Propoziție.

Aria triunghiului AMB cu vârfurile de coordonate $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $M(x_M, y_M)$ este dată de formula: $\mathcal{A}_{AMB} = \frac{1}{2}|\Delta|$.

25) Fie punctele $A(2, 3)$, $B(-1, -1)$, $C(5, 7)$, $D(0, 2)$ și $E(1, 0)$.

a) Determină ecuațiile tuturor dreptelor care trec prin câte două din punctele A , B , C , D , E .

b) Care dintre punctele A , B , C , D , E sunt coliniare?

c) Formează toate triunghiurile cu vârfurile în trei dintre punctele A , B , C , D , E . Calculează cea mai mică și cea mai mare arie a triunghiurilor formate.



● **1.** Arată, cu ajutorul proprietăților determinantilor, că:

a) $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$

b) $\begin{vmatrix} 2\sqrt{2} & 4 & 2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$

c) $\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 \end{vmatrix} = 1+x_1+x_2+x_3, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$

●● **2.** Aplicând proprietățile determinantilor, calculează și scrie punând rezultatul sub formă de produs:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R};$

b) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R};$

c) $\begin{vmatrix} x-1 & x+1 & x^2-1 \\ y-1 & y+1 & y^2-1 \\ z-1 & z+1 & z^2-1 \end{vmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R};$

d) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}.$

●●● **3.** Calculează determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix},$

unde ω este o rădăcină cubică a unității ($\omega^3 = 1$).

●●● **4.** Rezolvă ecuațiile:

a) $\begin{vmatrix} 4-x & 6 & 2 \\ 6 & 9-x & 3 \\ 2 & 3 & 1-x \end{vmatrix} = 0;$

b) $\begin{vmatrix} a^2-x & ab & ac \\ ab & b^2-x & bc \\ ac & bc & c^2-x \end{vmatrix} = 0, a, b, c \in \mathbb{R}.$

5. Interpretarea geometrică a sistemelor liniare cu 2 necunoscute

Fiecare ecuație a unui sistem liniar cu două necunoscute se reprezintă în plan printr-o dreaptă.

Pentru a *interpreta geometric* un sistem liniar de două ecuații cu două necunoscute vom reprezenta grafic dreptele corespunzătoare ecuațiilor sistemului. Coordonatele punctului de intersecție, dacă există, verifică simultan ecuațiile sistemului și reprezintă soluția acestui sistem.

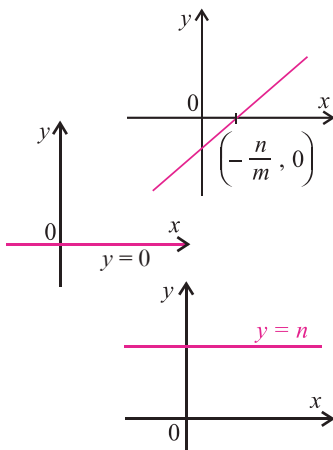


Considerăm ecuația $ax + by + c = 0$, cu $b \neq 0$ și funcția $y = mx + n$, unde $m = -\frac{a}{b}$, $n = -\frac{c}{b}$, a cărei reprezentare este o dreaptă.

- Dacă $m \neq 0$, atunci dreapta $y = mx + n$ intersectează axa Ox în punctul $\left(-\frac{n}{m}, 0\right)$.

- Dacă $m = 0$ și $n = 0$, atunci dreapta $y = 0$ reprezintă axa Ox .

- Dacă $m = 0$ și $n \neq 0$, atunci dreapta $y = n$ reprezintă o paralelă la axa Ox , deci nu are puncte de intersecție cu Ox .

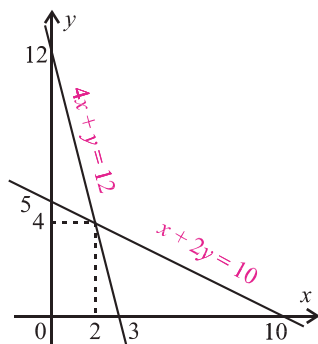


Să interpretăm geometric sistemul:

$$1) \begin{cases} 4x + y = 12 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$$

Sistemul are soluția unică $x = 2$, $y = 4$, deci $S = \{(2, 4)\}$ (sistem compatibil determinat).

Cele două ecuații ale sistemului reprezintă ecuațiile a două drepte care se intersectează în punctul $(2, 4)$.

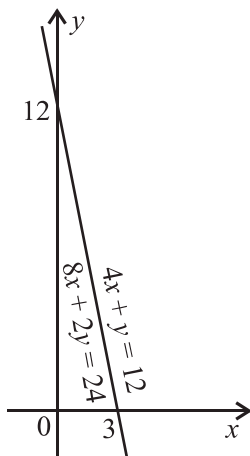


2) Să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} 4x + y = 12 \\ 8x + 2y = 24 \end{cases}$$

Obținem o infinitate de soluții: $S = \{(x, y) \mid y = 12 - 4x, x \in \mathbb{R}\}$ (sistem compatibil nedeterminat).

Cele două ecuații ale sistemului sunt ecuațiile a două drepte care coincid (coordonelele oricărui punct de pe dreapta $4x + y = 12$ reprezintă o soluție a sistemului).



Să rezolvăm sisteme liniare

1) Fie sistemul liniar $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

- Rezolvă sistemul.
- Reprezintă grafic, în același reper cartezian, dreptele de ecuații $y = 2x - 1$ și $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$.
- Găsește coordonatele punctului de intersecție al celor două drepte.
- Ce legătură există între soluția sistemului liniar dat și coordonatele punctului de intersecție al dreptelor date?
- Pornind de la interpretarea geometrică a mulțimii soluțiilor unui sistem compatibil determinat, dă exemplu de un astfel de sistem liniar. Rezolvă-l.

2) Fie sistemul liniar $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 4y = 2 \end{cases}$

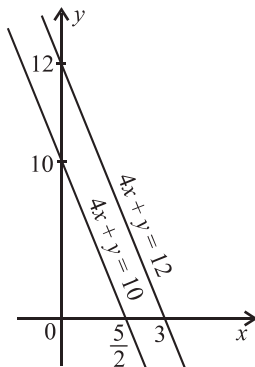
- Rezolvă sistemul.
- Reprezintă grafic, în același reper cartezian, dreptele de ecuații $d_1: x - 2y = 1$ și $d_2: 2x - 4y = 2$. Ce poți spune despre d_1 și d_2 ?
- Ce interpretare geometrică are mulțimea soluțiilor sistemului liniar dat?
- Pornind de la interpretarea geometrică a mulțimii soluțiilor unui sistem liniar compatibil nedeterminat, dă exemplu de un astfel de sistem liniar. Rezolvă-l!

3) Fie sistemul liniar $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$

- Rezolvă sistemul.
- Reprezintă grafic, în același reper cartezian, dreptele de ecuații $d_1: x + y = 2$ și $d_2: 2x + 2y = 1$. Ce poziție are dreapta d_1 față de dreapta d_2 ?
- Interpretează geometric soluția sistemului.
- Pornind de la interpretarea geometrică a mulțimii soluțiilor unui sistem liniar incompatibil, dă un exemplu de un astfel de sistem. Rezolvă-l.

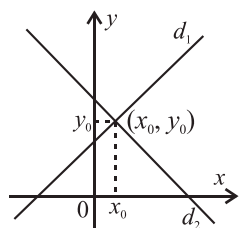
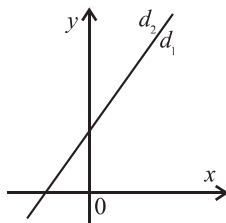
3) Rezolvăm sistemul $\begin{cases} 4x + y = 12 \\ 4x + y = 10 \end{cases}$

prin metoda reducerii sau metoda substituției și obținem $S = \emptyset$ (sistem incompatibil). Cele două ecuații ale sistemului reprezintă două drepte paralele, deci nu au nici un punct comun.

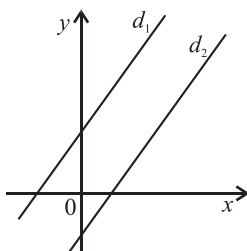


În interpretarea geometrică a unui sistem linear cu 2 necunoscute putem avea următoarele situații:

- sistemul are o infinitate de soluții și o infinitate de puncte de intersecție ale celor două drepte; în acest caz cele două drepte coincid; uneia dintre necunoscute i se poate da o valoare arbitrară, iar cealaltă este determinată în funcție de prima;



- sistemul admite o soluție unică; în acest caz dreptele se intersectează într-un singur punct;



- sistemul nu are soluții; dreptele sunt distincte și paralele.

Ce se întâmplă dacă sistemul este format din mai mult de două ecuații cu două necunoscute? Imaginează astfel de situații!

EXEMPLU



Să interpretăm geometric sistemul: $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 11 \\ -x - 2y = -1 \end{cases}$

Fiecare ecuație a sistemului reprezintă ecuația unei drepte în plan:

$$d_1 : 2x - y - 1 = 0;$$

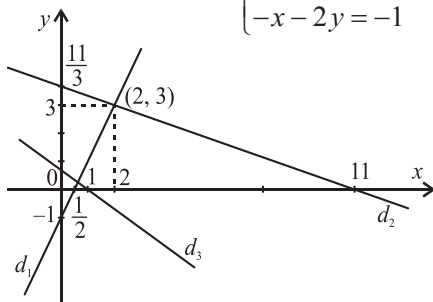
$$d_2 : x + 3y - 11 = 0;$$

$$d_3 : x + 2y - 1 = 0.$$

Observăm că

$$d_1 \cap d_2 = \{(2, 3)\}$$

și acest punct nu aparține dreptei d_3 , deci sistemul este incompatibil.



4) Rezolvă sistemele liniare și interpretează geometric mulțimea soluțiilor fiecărui sistem:

a) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 3y = -2 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 7 \end{cases}$.

5) Rezolvă sistemele și interpretează geometric soluția obținută:

a) $\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ 2x + y = 3 \\ 7x - y = 6 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ y - 5 = 0 \end{cases}$.

6) Rezolvă sistemele liniare și interpretează mulțimea soluțiilor fiecărui sistem:

a) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 8 \\ 3x + 6y = 12 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 3y = -2 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 7 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 11 \\ -x - 2y = -8 \end{cases}$.

7) Fie sistemul $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + my = 1 \\ x + (2m - 1)y = 1 \end{cases}$.

a) Pentru ce valori ale lui m soluția sistemului reprezintă un singur punct în plan?
 b) Pentru ce valori ale lui m soluția sistemului reprezintă o dreaptă în plan?



● 1. Rezolvă sistemele și interpretează geometric soluția obținută:

a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0; \\ y - 5 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 3x + 2y = 0; \\ y - 3 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 3; \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x - 2y = -1; \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x + 2y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$.

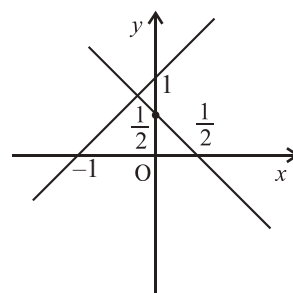
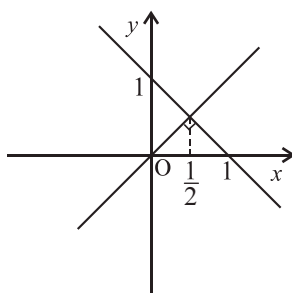
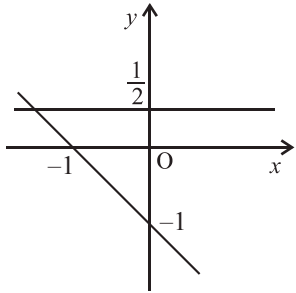
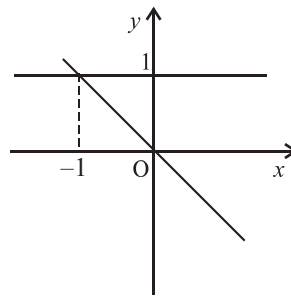
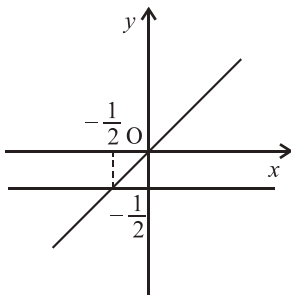
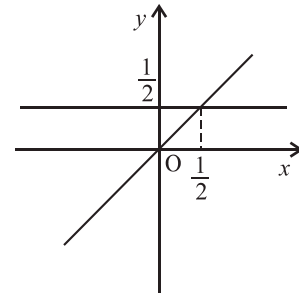
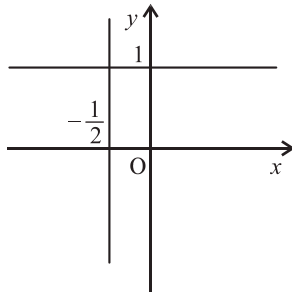
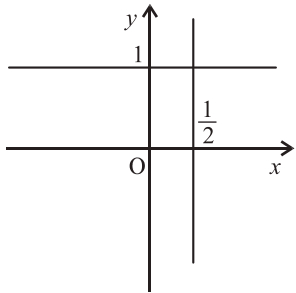
● 2. Interpretează geometric sistemele liniare :

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x - 2y = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 3x - y = 5; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2x + y = 3; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + 8y = 4 \\ x + 4y = 2 \end{cases}$.

● 3. Interpretează geometric sistemele liniare:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x - 2y = -1; \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + y = 13 \\ 2x + 3y = 13; \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x - 4y = 1 \\ x + 2y = -1; \\ 3x - 12y = 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ x + y = -1 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$.

● 4. Scrie ecuațiile sistemelor corespunzătoare dreptelor reprezentate mai jos și calculează coordonatele punctelor de intersecție ale acestor drepte.



6. Matrice inversabilă

Exprimarea matricială a sistemelor liniare $AX = B$ sugerează soluția $X = A^{-1}B$. Se pune problema determinării unei matrice notate A^{-1} cu proprietatea $A^{-1} \cdot A = I_n$, $n = 2, 3$. Astfel, ecuația matricială s-ar rezolva prin analogie cu ecuația de gradul I, după cum urmează:

$$A^{-1} \cdot | \cdot AX = B;$$

$$(A^{-1} \cdot A)X = A^{-1}B;$$

$$I_3 X = A^{-1}B, \text{ cu soluția } X = A^{-1}B.$$



$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ este matricea unitate de ordinul al 3-lea.}$$

$$\text{Pentru orice matrice } A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}), I_3 \cdot A = A \cdot I_3 = A.$$

Definiție.

Fie A o matrice pătratică de ordin al treilea. Matricea A este inversabilă dacă există o matrice B pătratică de ordinul al treilea astfel încât $A \cdot B = B \cdot A = I_3$; matricea B se numește *inversa matricei* A și se notează A^{-1} .

Observație.

Dacă B este inversa matricei A , atunci și matricea A este inversa matricei B .

Teoremă.

Inversa unei matrice pătratice, dacă există, este unică.

Demonstrație.

Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ o matrice pătratică de ordinul al treilea. Presupunem că există două matrice de ordinul al treilea, B și B' , astfel încât: $AB = BA = I_3$ și $AB' = B'A = I_3$.

Folosind asociativitatea înmulțirii matricelor, obținem: $B = B \cdot I_3 = B \cdot (AB') = (B \cdot A)B' = I_3 \cdot B' = B'$, deci $B = B'$.

Inversa matricei A se notează A^{-1} .

Observație.

Dacă A^{-1} este inversa matricei A , atunci:

$$\bullet AA^{-1} = A^{-1}A = I_3 \quad \bullet (A^{-1})^{-1} = A$$

• Fie C o matrice inversabilă. Dacă $CA = CB$ sau $AC = BC$, atunci $A = B$.

În ce condiții o matrice este inversabilă?

Teoremă.

O matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ este inversabilă dacă și numai dacă $\det A \neq 0$.

Să verificăm dacă o matrice este inversa altei matrice.

1) Scrie matricele I_2, I_3 .

2) Verifică dacă B este inversa matricei

$$A, \text{ unde } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

3) Verifică dacă $A^{-1} = B$, unde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{11}{32} & \frac{9}{32} \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{32} & \frac{3}{32} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{32} & -\frac{5}{32} \end{pmatrix}.$$

În ce condiții o matrice este inversabilă?

4) Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$

a) Calculează $\det A$ și $\det B$.

b) Este A inversabilă? Dar B ? De ce?

5) Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$

Determină inversa matricei A și apoi verifică prin calcul direct relația

$$A \cdot A^{-1} = I_3.$$

Indicație.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -68 \neq 0, \text{ deci } A \text{ este}$$

inversabilă și $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$.

$${}^t A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \text{ și } A^* = \begin{pmatrix} -23 & -3 & 19 \\ -1 & -9 & -11 \\ 7 & -5 & 9 \end{pmatrix},$$

$$\text{deci } A^{-1} = -\frac{1}{68} \begin{pmatrix} -23 & -3 & 19 \\ -1 & -9 & -11 \\ 7 & -5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Cum găsim inversa unei matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

- Calculăm $\det A$. Dacă $\det A \neq 0$, atunci A este inversabilă.
- Scriem *matricea transpusă* a matricei A , notată tA , schimbând în matricea A liniile cu coloanele.



Fie $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Avem ${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$.

• Scriem *matricea reciprocă* a lui A , notată A^* , înlocuind fiecare element al matricei transpuse tA prin *complementul* său algebric, notat δ_{ij} , $i, j = \overline{1, 3}$, obținut astfel: $\delta_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$, $1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3$, unde A_{ij} este *minorul elementului* a_{ij} din matricea tA (determinantul obținut din tA prin eliminarea liniei i și a coloanei j).



În exemplul anterior, complementul algebric al lui a_{11} din tA este $\delta_{11} = (-1)^{1+1} A_{11}$, unde $A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$, deci $\delta_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Analog se calculează fiecare $\delta_{ij}, 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3$.

Se obține $A^* = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{21} & \delta_{31} \\ \delta_{12} & \delta_{22} & \delta_{32} \\ \delta_{13} & \delta_{23} & \delta_{33} \end{pmatrix}$, matricea reciprocă a matricei A .

• Găsim *matricea inversă* a matricei A din relația $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$, adică împărțim fiecare element al matricei A^* la $\det A$ ($\det A \neq 0$).

Propoziție.

Fie $m, n \in \mathbb{N}, m \in \{2, 3\}, n \in \{2, 3\}$. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \det A \neq 0, \det B \neq 0$.

Ecuția $AX = C$ are soluția unică $X = A^{-1}C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Ecuția $XB = C$ are soluția unică $X = CB^{-1} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Ecuția $AXB = C$ are soluția unică $X = A^{-1}CB^{-1} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Demonstrație.

În ecuația $AX = C$ înmulțim ambii termeni cu A^{-1} în stânga.

Obținem:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}C;$$

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}C;$$

$$I_m X = A^{-1}C;$$

$$X = A^{-1}C.$$

Cum găsim inversa unei matrice?

6) Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

- Scrie matricele transpuse: ${}^tA; {}^tB$.
- Scrie complementele algebrice ale fiecărui element din matricele tA și tB ;
- Ai obținut

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ și } B^* = \begin{pmatrix} 8 & 11 & -9 \\ -8 & -7 & -3 \\ -8 & 1 & 5 \end{pmatrix} ?$$

- Găsește A^{-1} și B^{-1} .
- Verifică dacă $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$ și $B^{-1}B = BB^{-1} = I_3$.

7) Notăm $d = \det A$.

- Arată că:

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

- Verifică relația:

$$A \cdot \left(\frac{1}{d} \cdot A^* \right) = \left(\frac{1}{d} \cdot A^* \right) \cdot A = I_3, d \neq 0.$$

- Există inversele matricelor următoare?

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix};$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix};$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix};$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

Exercițiu rezolvat.

Pentru realizarea a trei preparate farmaceutice F_1, F_2, F_3 se folosesc substanțele S_1, S_2, S_3 ce conțin elementele active A_1, A_2, A_3 . Cantitățile de substanțe, respectiv de elemente active, ce intră în preparate sunt date în tabelele alăturate. Să determinăm cantitățile de elemente active conținute în substanțe astfel încât compoziția preparatelor farmaceutice să fie respectată.

Soluție.

Fie matricele A și B asociate celor două tabele. Cantitățile de elemente active $A_i, i = \overline{1, 3}$ conținute în substanțele $S_j, j = \overline{1, 3}$ vor fi date de elementele matricei X obținută din ecuația $AX = B$. Avem $\det A \neq 0$,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/10 & -1/5 & 0 \\ 0 & 2/15 & -1/15 \\ -1/10 & 2/15 & 2/15 \end{pmatrix}, \text{ deci } X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/10 & 1/10 & 1/15 \\ 0 & 0 & 1/15 \\ 1/10 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Substanța S_1 va trebui să conțină $1/10$ unități de element activ A_1 , $1/10$ unități de element activ A_2 și $1/15$ unități de element activ A_3 etc.

	S_1	S_2	S_3
F_1	20	20	10
F_2	5	10	5
F_3	10	5	10

	A_1	A_2	A_3
F_1	3	2	8/3
F_2	1	1/2	1
F_3	2	1	1



1. Determină, dacă există, inversele următoarelor matrice:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; e) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$;

f) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; g) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; h) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; j) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; k) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

l) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; m) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; n) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Determină $a \in \mathbb{R}$ astfel încât fiecare din următoarele matrice să fie inversabile, apoi determină inversa fiecăreia:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ a & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $C = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ a & -1 & 1 \end{pmatrix}$; d) $D = \begin{pmatrix} 1 & a & 1-a \\ 1-a & 1 & a \\ a & 1-a & a \end{pmatrix}$.

3. Rezolvă următoarele ecuații matriciale:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

b) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

c) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

d) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -4 \\ 6 & 6 & -6 \end{pmatrix}$.

- Calculează determinantul matricei A .
- Calculează A^2 și verifică identitatea $I_3 = (I_3 - A)(I_3 + A)$.
- Arată că matricea $I_3 - A$ este inversabilă și calculează-i inversa.

$$\text{sistemul echivalent } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}, \text{ deci } x_3 = -\frac{1}{2},$$

$x_2 = \frac{1}{2}, x_1 = 1$; obținem $S\left\{\left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$ (sistem compatibil determinat).

2) Să rezolvăm sistemul liniar:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

Soluție.

Sistemul este echivalent cu:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -x_2 - 3x_3 = -11 \\ 13x_3 = 39 \\ 0 = 0 \end{cases} \text{ cu soluția}$$

unică $x_3 = 3, x_2 = 2$ și $x_1 = 1$, adică $S = \{(1, 2, 3)\}$ (sistem compatibil determinat).

♦ **Metoda matricială.** Sistemul liniar poate fi exprimat matricial astfel: $AX = B$, unde A este matricea coeficienților necunoscutelor, X este matricea necunoscutelor (matrice coloană) și B este matricea termenilor liberi (matrice coloană). În cazul $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, dacă matricea A este inversabilă (adică $\det A \neq 0$), înmulțim la stânga ecuația $AX = B$ cu A^{-1} și avem $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$, adică $(A^{-1}A)X = A^{-1}B$, deci $X = A^{-1}B$.

EXEMPLU



Să rezolvăm sistemul liniar

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 11 \\ x + 5y + 4z = -1 \\ -x + 2y - 3z = 6 \end{cases} \text{ prin}$$

metoda matricială.

Scrierea matricială a sistemului este $AX = B$, unde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \text{ cum } \det A = -68, \text{ rezultă}$$

că A este inversabilă și $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{23}{68} & \frac{3}{68} & -\frac{19}{68} \\ \frac{1}{68} & \frac{9}{68} & \frac{11}{68} \\ -\frac{7}{68} & \frac{5}{68} & -\frac{9}{68} \end{pmatrix}$; soluția ecuației

este $X = A^{-1}B$, adică $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Soluția sistemului este $S = \{(2, 1, -2)\}$

(sistem compatibil determinat).

4) Rezolvă sistemele liniare:

a)
$$\begin{cases} -x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4 \\ 3x_1 - 6x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 28x + 56y - 56z = 0 \\ 39x - 78y - 78z = 0 \\ 40x - 80y - 80z = 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 28x + 56y - 56z = -28 \\ 39x - 78y - 78z = -39 \\ 40x - 80y - 80z = -40 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 17x - 17y + 34z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 4x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} 17x - 17y + 34z = 34 \\ 2x - y + z = -1 \\ 3x + z = -1 \end{cases}$$

5) Rezolvă următoarele sisteme prin metoda matricială:

a)
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -4 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 11 \\ 3x - 2y + 3z = 1 \\ 5x + 2y - z = -11 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_3 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 7 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

◆ **Metoda lui Cramer**

Soluțiile unui sistem linear au la numitor dezvoltarea determinantului asociat matricei sistemului.

La numărătorul soluțiilor vom avea dezvoltarea determinantilor obținuți din Δ prin înlocuirea coloanei corespunzătoare coeficienților necunoscutei cu coloana termenilor liberi:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Teoremă. Metoda lui Cramer

Dacă sistemul
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$
 are determinantul

Δ nenul, atunci soluția sa este (x_1, x_2, \dots, x_n) , unde $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$, $x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}$, iar $\Delta_{x_i}, i = \overline{1, 3}$ este determinantul obținut din Δ prin înlocuirea coloanei corespunzătoare coeficienților necunoscutei x_i , $i = \overline{1, 3}$ cu coloana termenilor liberi.

Pentru $n = 4$, adică pentru sisteme liniare de patru ecuații cu patru necunoscute, soluția sistemului este (x_1, x_2, x_3, x_4) , unde

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}, \quad x_4 = \frac{\Delta_{x_4}}{\Delta}.$$

Un sistem linear poate fi rezolvat prin metoda lui Cramer, dacă numărul de ecuații este egal cu numărul de necunoscute și determinantul asociat matricei sistemului este nenul. Un astfel de sistem, se numește *sistem Cramer*.

Exerciții rezolvate.

1) Să rezolvăm sistemul linear
$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = \lambda^2 \end{cases}, \text{ în}$$

funcție de valorile reale ale lui λ .

Soluție.

Determinantul sistemului este $\Delta = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$.

• Dacă $\Delta \neq 0$, adică $\lambda \neq 1$ sau $\lambda \neq -2$, atunci sistemul este

Cramer și
$$S = \left\{ \left(-\frac{\lambda + 1}{\lambda + 2}, \frac{1}{\lambda + 2}, \frac{(\lambda + 1)^2}{\lambda + 2} \right) \right\}, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 1, \lambda \neq -2.$$

• Dacă $\Delta = 0$, atunci există următoarele situații:

6) Verifică dacă sistemul linear

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 11 \\ 3x - 2y + 3z = 1 \\ 5x + 2y - z = -11 \end{cases} \text{ este rezolvat corect.}$$

Soluție.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 110 \neq 0, \text{ deci sistemul}$$

este compatibil determinat (are soluție unică)

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 11 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ -11 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -220, \text{ deci } x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -2;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 11 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & -11 & -1 \end{vmatrix} = 110, \text{ deci } y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 1;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & -11 \end{vmatrix} = 330, \text{ deci } z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 3.$$

Mulțimea soluțiilor este $S = \{(-2, 1, 3)\}$.

7) Rezolvă sistemele:

a)
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1 \\ 5x_1 + 7x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = -1 \\ -2x_1 + 4x_2 = -6 \end{cases};$$

b)
$$\begin{cases} x + y = \frac{5}{6} \\ y + z = -\frac{2}{3} \\ z + x = -\frac{1}{2} \end{cases};$$

c)
$$\begin{cases} 6x = -4y = 3z \\ x + 2y + 2z = 4 \end{cases};$$

i) dacă $\lambda = 1$, atunci toate ecuațiile se reduc la $x + y + z = 1$; sistemul este compatibil nedeterminat,

$$S = \{(\alpha, \beta, 1 - \alpha - \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\};$$

ii) dacă $\lambda = -2$, atunci înlocuind în sistem obținem

$$\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ x + y - 2z = 4 \end{cases} . \text{ Adunând membru cu membru cele trei ecuații}$$

obținem $0 = 3$, relație falsă, deci sistemul este incompatibil.

Unele sisteme liniare se pot rezolva și prin diverse artificii de calcul.

2) Considerăm sistemul
$$\begin{cases} x + y = c \\ y + z = a, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \\ x + z = b \end{cases}$$

Adunăm ecuațiile și obținem $x + y + z = \frac{a+b+c}{2}$. Scădem, pe rând, ecuațiile inițiale din această relație și obținem:

$$x = \frac{-a+b+c}{2}, y = \frac{a-b+c}{2}, z = \frac{a+b-c}{2} \text{ (sistem compatibil determinat)}$$

3) Fie sistemul
$$\begin{cases} ax = by = cz \\ mx + ny + pz = r \end{cases}, \quad a, b, c, m, n, p, r \in \mathbb{R}^*.$$

Se scriu primele două ecuații sub formă de rapoarte egale:

$$\frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{y}{\frac{1}{b}} = \frac{z}{\frac{1}{c}} = \frac{mx + ny + pz}{\frac{m}{a} + \frac{n}{b} + \frac{p}{c}} = \frac{r}{\frac{m}{a} + \frac{n}{b} + \frac{p}{c}} = k;$$

$$x = \frac{k}{a}, y = \frac{k}{b}, z = \frac{k}{c}.$$

Definiție.

Un sistem linear în care toți termenii liberi sunt nuli se numește *omogen*. Forma generală a unui sistem linear omogen de m

ecuații cu n necunoscute, $n \leq 3$, este:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases},$$

$$a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Observație.

Orice sistem linear omogen este compatibil, având întotdeauna cel puțin soluția nulă $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$.



1) Să rezolvăm sistemul
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 3x + 4y - 8z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ 9x - 10y + 14z = 11 \end{cases};$$

e)
$$\begin{cases} x + y - z = 5 \\ 4x - y + 2z = 4 \\ -x + 4y - 5z = 6 \end{cases};$$

f)
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 2 \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 2; \\ 3x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$

g)
$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

8) Rezolvă sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} ay + bx = c \\ cx + az = b, \quad abc \neq 0. \\ bz + cy = a \end{cases}$$

9) Rezolvă următoarele sisteme liniare omogene:

a)
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0; \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 = 0 \end{cases};$$

c)
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases};$$

d)
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases};$$

Soluție.

Sistemul este Cramer, deoarece numărul de ecuații este egal cu numărul de necunoscute și $\Delta \neq 0$. Soluțiile sistemului se obțin din $x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}$, $x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}$, unde $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 0$ (fiecare determinant are câte o coloană cu toate elementele egale cu 0). Obținem $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$, deci sistemul este compatibil determinat (având soluție unică).

$$2) \text{ Să rezolvăm sistemul } \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} .$$

Soluție.

Din matricea sistemului obținem $\Delta = 0$, deci sistemul nu este compatibil determinat. Conform observației anterioare, rezultă că sistemul este compatibil nedeterminat (deoarece admite cel puțin soluția nulă).

Sistemul admite și soluții nenule: notăm $x_3 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ și prin

$$\text{rezolvarea sistemului } \begin{cases} x_1 + 3x_2 = -2\alpha \\ 2x_1 - x_2 = -3\alpha \end{cases} \text{ obținem:}$$

$$S = \left\{ \left(-\frac{11}{7}\alpha, -\frac{1}{7}\alpha, \alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} \text{ (sistem compatibil nedeterminat).}$$

$$3) \text{ Să rezolvăm sistemul } \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 1, m \in \mathbb{R} \\ x + y + mz = 1 \end{cases} .$$

Soluție.

Din matricea sistemului obținem:

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m+2)(m-1)^2 .$$

i) pentru $m \neq 1$ și $m \neq -2$ sistemul este sistem Cramer și

$$\text{avem: } \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m-1)^2 ;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m-1)^2 ;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (m-1)^2 . \text{ Obținem } S = \left\{ \left(\frac{1}{m+2}, \frac{1}{m+2}, \frac{1}{m+2} \right) \mid m \in \mathbb{R} \right\},$$

soluție unică.

$$e) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x - 4y + 2z = 0 \\ -x + 7y + 3z = 0 \\ 11x - y + 4z = 0 \end{cases} ;$$

$$f) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ 4x - 12y + 8z = 0 \\ 3x - 9y + 6z = 0 \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} 5x + y - z = 0 \\ 2x - 4y + z = 0 \\ 7x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} ;$$

$$j) \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} .$$

10) Rezolvă următoarele sisteme:

$$a) \begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ mx + y + z = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = m \end{cases} ;$$

$$c) \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases} .$$

ii) pentru $m = 1$ sistemul este compatibil dublu nedeterminat $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = 1 - \alpha - \beta \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

iii) pentru $m = -2$ se obține sistemul $\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$; adunând cele trei ecuații obținem $0 = 3$, deci sistemul este incompatibil.



● **1.** Rezolvă următoarele sisteme liniare prin metoda lui Gauss:

a) $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 14y - 3z = 3 \\ z = -1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + 12y + z = 5 \\ 3x - 12y + 8z = 1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x - y + z = -5 \\ x - 2y - z = -3 \\ x - 3y - 3z = -1 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 6x - 2y + 5z = -22 \\ -4x + 3y + 2z = 9 \\ -3x + 7y + 8z = 8 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ 3x + 2y - 5z = 8 \end{cases}$.

● **2** Rezolvă următoarele sisteme liniare prin metoda lui Cramer:

a) $\begin{cases} 12x - 7y + 6z = 83 \\ 8x - 4y - 3z = 24 \\ -2x + 5y + 13z = 23 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 3x + 8y - 4z = 23 \\ 6x + 2y + 7z = 6 \\ -x + 9y - 5z = 38 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} -8x + 13y - 6z = -158 \\ 7x - 9y + 5z = 122 \\ 6x + 3y - 4z = -26 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ x - y + 2z = 1 \\ x - 3y + 5z = -3 \end{cases}$.

● **3.** Rezolvă următoarele sisteme liniare prin metoda lui Gauss:

a) $\begin{cases} 2x + y + 3z = 13 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 8 \\ 3x + y + z = 6 \\ 2x + y + 2z = 6 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 7x + 2y - 4z = 19 \\ 5x + 3y - 3z = 15 \\ 5x - 3y + 3z = 15 \end{cases}$;

● **4.** Rezolvă sistemele liniare:

a) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$.

● **5.** Rezolvă sistemele următoare pentru $m \in \mathbb{R}$:

a)
$$\begin{cases} mx - 2y = -1 \\ x + 2y = m + 2 \end{cases};$$

b)
$$\begin{cases} mx + 4y = 9 \\ 9x + my = 1 \end{cases};$$

c)
$$\begin{cases} x + m^2y = m^2 \\ mx + y = m^3 \end{cases};$$

d)
$$\begin{cases} x + y = m + 1 \\ mx - y = 0 \end{cases}.$$

● **6.** Pentru ce valori reale ale lui m sistemele liniare următoare sunt compatibile?

a)
$$\begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ 3x - 2y = 2 \\ x + my = 6 \end{cases};$$

b)
$$\begin{cases} x + y = -1 \\ 2x + y = m \\ 2x - 3y = 8 \end{cases};$$

c)
$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x - my = 10 \\ 3x + my = 5m \end{cases}.$$

● **7.** Rezolvă următoarele sisteme liniare:

a)
$$\begin{cases} x - 6y + z = 7 \\ 2x - 5y + 3z = 2 \end{cases};$$

b)
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 2y + 2z = -1 \end{cases};$$

c)
$$\begin{cases} x + y - 3z = 3 \\ 3x - 2y + z = 4 \end{cases};$$

d)
$$\begin{cases} 4x + 3y - 2z = 5 \\ 8x + 6y - 4z = 9 \end{cases};$$

e)
$$\begin{cases} x + 3y - z = 2 \\ 3x - y + z = 1 \\ -2x + y + 2z = -1 \\ 4x - 2y - 3z = 4 \end{cases};$$

f)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}.$$

●● **8.** Rezolvă următoarele sistemele liniare:

a)
$$\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x - y + mz = 0 \end{cases}, \text{ unde } m \in \mathbb{R};$$

b)
$$\begin{cases} mx + 2y - z = 0 \\ 2x + py - 3z = 0 \end{cases}, \text{ unde } m, p \in \mathbb{R};$$

c)
$$\begin{cases} 2x + y - 4z = 0 \\ 3x + 5y - 7z = 0 \\ 4x - 5y - 6z = 0 \end{cases}.$$

●● **9.** Pentru ce valori reale ale lui m următoarele sisteme liniare admit și soluții diferite de soluția nulă?

a)
$$\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ x + y + mz = 0 \end{cases};$$

b)
$$\begin{cases} mx + my + z = 0 \\ mx + y + mz = 0 \\ x + my + mz = 0 \end{cases}.$$

Teste de evaluare

Testul 1

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Calculează A^2 , A^3 , A^4 .
- Arată că matricea A este inversabilă.
- Rezolvă ecuația $AX = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Calculează $A^3 - 3A + 2I_2$.

2. Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0, \text{ unde } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \\ x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$$

Se notează cu A matricea sistemului.

- Calculează determinantul matricei A .
- Rezolvă sistemul.
- Găsește o soluție (x_0, y_0, z_0) a sistemului pentru care $x_0 + 2y_0 + 3z_0 = 8$.

Testul 2

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ se consideră submulțimea

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \mid a^2 - 2b^2 = 1, a, b \in \mathbb{Q} \right\}.$$

- Arată că $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.
- Arată că, dacă $A, B \in G$, atunci $AB \in G$.
- Arată că, dacă $X \in G$, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$, atunci X este

matrice inversabilă și $X^{-1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -2b & a \end{pmatrix} \in G$.

- Găsește o matrice $A \in G$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ cu $b \neq 0$.

e) Arată că dacă $B \in G$, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ cu $a > 0, b > 0$,

atunci $B^2 \neq I_2$.

- Arată că mulțimea G este infinită.

(Bacalaureat 2002, Varianta 3 – economic, enunț modificat)

Testul 3

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ precum și mulțimea}$$

$$G = \{X(a) \mid a \in \mathbb{R} \text{ și } X(a) = I_2 + aA\}.$$

- Verifică dacă $A^2 = 3A$.
- Verifică dacă $I_2 \in G$.
- Arată că $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + 3ab)$.
- Arată că $X(a) \cdot X\left(-\frac{1}{3}\right) = X\left(-\frac{1}{3}\right), \forall a \in \mathbb{R}$.

e) Arată că, dacă $a \neq -\frac{1}{3}$, atunci $X(a) \cdot X\left(\frac{-a}{1+3a}\right) = I_2$.

f) Demonstrează că $(X(a))^3 = X\left(3^2\left(a + \frac{1}{3}\right)^3 - \frac{1}{3}\right)$.

g) Determină $t \in \mathbb{R}$, pentru care

$$X\left(\frac{-2007}{3}\right) \cdot X\left(\frac{-2006}{3}\right) \dots X(0) \cdot X\left(\frac{1}{3}\right) \dots X\left(\frac{2007}{3}\right) = X(t)$$

Testul 4

1. Se consideră matricele

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ și } C = A + B.$$

- Arată că $A^2 = -6A$ și $B^2 = 6B$.
- Arată că $AB = BA$.
- Determină matricea C^3 .

(Bacalaureat 2000 – varianta 4 economic, enunț modificat)

2. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} -x - 2y + 3z = 1 \\ 2x - y - z = 2 \\ mx - 3y + 2z = 3 \end{cases},$$

m parametru real și A matricea sistemului.

- Calculează determinantul matricei A .
- Determină valorile lui m pentru care sistemul este compatibil determinat.
- Pentru $m = 1$ rezolvă sistemul.

(Bacalaureat 2000 – varianta 8 – economic)

Testul 5

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}.$$

- Calculează AB și BA .
- Arată că suma elementelor de pe diagonala principală a matricelor AB și BA este aceeași.
- Arată că $\det(A+B) + \det(A-B) = 2(\det(A) + \det(B))$.
- Demonstrează că $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

(Bacalaureat 2002 – varianta 4 economic)

2. Considerăm sistemul
$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ x + y + 2z = -2, \\ mx - y + z = -1 \end{cases}$$

- m parametru real și A matricea sistemului.
- Calculează determinantul matricei A .
 - Determină valorile lui m pentru care sistemul este compatibil determinat.
 - Determină valorile lui m pentru care sistemul este incompatibil.
 - Pentru $m = 4$ rezolvă sistemul.

Probleme date la examenul de bacalaureat

1. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0, \text{ unde } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

Notăm cu A matricea sistemului.

- Să se calculeze determinantul matricei A .
 - Să se rezolve sistemul.
 - Să se găsească o soluție (x_0, y_0, z_0) a sistemului, cu proprietatea ca $x_0 + y_0 + z_0 = 4$.
- (Examen de bacalaureat 2003 – sesiunea iunie-iulie, varianta 1 – economic)

2. În mulțimea matricelor $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ precum și submulțimea
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \mid a \in (0, \infty), b \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Să se verifice că $I_2 \in G$.
 - Să se arate că, dacă $A, B \in G$, atunci $AB \in G$.
 - Să se arate că, dacă $C \in G$ atunci există $D \in G$ astfel încât $CD = DC = I_2$.
 - Să se găsească două matrice $S, T \in G$ pentru care $ST \neq TS$.
 - Să se demonstreze că, pentru orice matrice $A \in G$ și $\forall n \in \mathbb{N}$, există o matrice $X \in G$ astfel încât $X^n = A$. ||
- (Examen de bacalaureat 2003 – sesiunea iunie-iulie, varianta 1 – economic)

3. În mulțimea matricelor $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}.$$

- Să se calculeze AB și BA .
- Să se arate că suma elementelor de pe diagonala principală a matricelor AB și BA este aceeași.
- Să se arate că $\det(A+B) + \det(A-B) = 2(\det(A) + \det(B))$.
- Să se arate că $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

(Examen de bacalaureat 2003 – sesiunea iunie-iulie, varianta 4 – economic)

Mulțimea numerelor reale. Funcții reale

1. Mulțimi de puncte pe dreapta reală

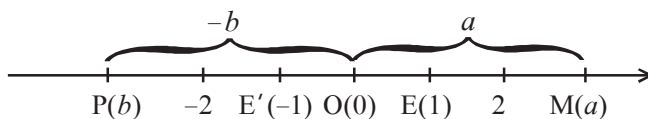
Dreapta reală



Folosirea numerelor la măsurarea lungimilor a condus la reprezentarea lor pe o dreaptă.

Definiție.

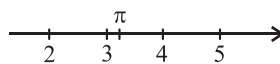
Se numește *axa numerelor* (sau *axă de coordonate* sau *dreapta reală*) o dreaptă d pe care sunt fixate: un punct O (origine), un segment OE (de lungime unitate) și un sens pozitiv (de la O spre E).



Numărului 0 îi corespunde originea axei O . Numărului pozitiv a îi corespunde punctul de pe semidreapta (OE aflat la distanța a de O). Unui număr negativ b îi corespunde punctul de pe (OE' situat la distanța $-b$ de O). Punctul $P(x)$, asociat numărului x , se numește imaginea lui x , iar numărul x se numește abscisa punctului $P(x)$.

Dintre două puncte de pe axa numerelor, abscisa celui din dreapta este mai mare decât abscisa celui alt punct.

Putem reprezenta numai porțiunea de axă care ne interesează.



Distanța dintre $P(x)$ și O este : $d(P(x), O) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.

Distanța dintre punctele $P(x)$ și $P'(y)$ este $d(P(x), P'(y)) = |x - y|$.

Cum se reprezintă numerele?

1) Reprezintă pe axa numerelor reale punctele de abscisă:

- a) -3 ; b) -1 ; c) 2 ; d) 3 ; e) 5 ; f) $2,5$;
 g) $-1,5$; h) π ; i) $0,5 \cdot \pi$; j) $0,8$; k) $1,7$; l) $-1,3$
 m) $1,5$; n) $\frac{3}{4}$; o) $\sqrt{2}$; p) $-\sqrt{3}$; r) $\sqrt{5}$.

Indicație.

Pentru $\sqrt{2}$ folosește diagonala unui pătrat de latură 1.

2) Arată că: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt[3]{5} \notin \mathbb{Q}$.

3) Calculează:

- a) $|-3|$; b) $|2|$; c) $|1 - \sqrt{2}|$; d) $|\sqrt{3} - 2|$.

4) Explicitează, în funcție de numărul real m :

- a) $|m+3|$; b) $|m+\sqrt{2}|$; c) $|m-3| + |m+3|$.

5) Reprezintă pe axă mulțimile:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid d(P(x), 0) = 2\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid d(P(x), 0) \leq 2\},$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid d(P(x), 0) > 2\}.$$

Teoremă. Proprietățile modului

Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, avem următoarele proprietăți:

1. $|a|=0 \Leftrightarrow a=0$;
2. $|a|>0 \Leftrightarrow a \neq 0$;
3. $|-a|=|a|$;
4. $|ab|=|a| \cdot |b|$;
5. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$;
6. $|a|=b, b>0 \Leftrightarrow a \in \{-b, b\}$;
7. $|a| \leq b, b \geq 0 \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$;
8. $|a| \geq b, b \geq 0 \Leftrightarrow a \leq -b \text{ sau } a \geq b$;
9. $|a+b| \leq |a|+|b|$;
10. $||a|-|b|| \leq |a-b|$.

6) Determină distanța dintre punctele A și B situate pe axa numerelor reale:

- a) $A(2)$ și $B(3)$;
- b) $A(-2)$ și $B(3)$;
- c) $A(-\sqrt{3})$ și $B(2)$;
- d) $A(\sqrt{3})$ și $B(2)$.

7) Arată că:

$$\left| x - \frac{a+b}{2} \right| \leq \frac{1}{2} (|x-a| + |x-b|), \forall a, b, x \in \mathbb{R}.$$

Ordinea numerelor reale și intervale de numere reale

Mulțimea numerelor reale este înzestrată în mod natural cu trei tipuri de structuri, fundamentale pentru gândirea umană: structura algebrică, structura de ordine, structura topologică.



Structura algebrică a numerelor reale este dată de operațiile de adunare și înmulțire.

Structura de ordine pe \mathbb{R} este dată de relația \leq (sau poate fi definită de relațiile înrudite: $<$, $>$, \geq).

Relația de ordine a numerelor reale este definită de următoarele proprietăți:

- 1) $\forall a \in \mathbb{R}, a \leq a$ (reflexivitate)
- 2) $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \leq b \text{ și } b \leq a \Rightarrow a = b$ (antisimetrie)
- 3) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a \leq b \text{ și } b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (tranzitivitate)

Teoremă. Proprietăți de compatibilitate ale relației de ordine „ \leq ” cu operațiile din \mathbb{R}

Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$, atunci:

- 1) $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
- 2) $a \leq b \text{ și } c \geq 0 \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$

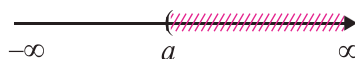
Utilizând teorema de mai sus, demonstrează următoarele proprietăți ale relației de ordine:

- 1) $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \leq b \text{ sau } b \leq a$
- 2) $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \geq 0 \text{ și } b \geq 0 \Rightarrow a \cdot b \geq 0$
- 3) $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \geq 0 \text{ și } b \leq 0 \Rightarrow a \cdot b \leq 0$
- 4) $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \leq 0 \text{ și } b \leq 0 \Rightarrow a \cdot b \geq 0$
- 5) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \leq b, c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$
- 6) $\forall a, b \in \mathbb{R}, 0 < a \leq b \Rightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

Cu ajutorul relației de ordine putem să definim intervalele.

Fie $a, b \in \mathbb{R}, a < b, \varepsilon > 0$

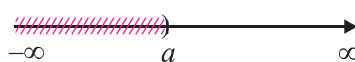
$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x > a\} = (a, \infty)$$



$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq a\} = [a, \infty)$$



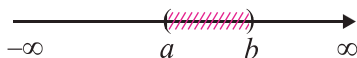
$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x < a\} = (-\infty, a)$$



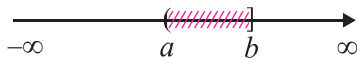
$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq a\} = (-\infty, a]$$



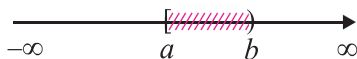
$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\} = (a, b)$$



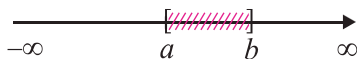
$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\} = (a, b]$$



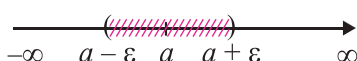
$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\} = [a, b)$$



$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\} = [a, b]$$



$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$



Observație. $[a, a] = \{a\}$, $(a, a) = \emptyset$.

Dreapta reală încheiată

Până acum am lucrat cu simbolurile ∞ și $-\infty$. Extindem în $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ ordinea și operațiile din \mathbb{R} .

Definiție.

Notăm $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$; $\overline{\mathbb{R}}$ se numește *dreapta reală încheiată*. Pentru orice număr real x considerăm:

◆ $-\infty < x < \infty$

◆ $x + \infty = \infty + x = \infty$ ◆ $x - \infty = -\infty + x = -\infty$ ◆ $x \cdot \infty = \infty \cdot x = \begin{cases} \infty, & x > 0 \\ -\infty, & x < 0 \end{cases}$ ◆ $\frac{x}{\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$

◆ $\infty + \infty = \infty$; $-\infty - \infty = -\infty$; $\infty \cdot \infty = \infty$; $-\infty \cdot \infty = -\infty$; $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$

Nu definim și nu dăm sens scrierilor:

◆ $\infty - \infty$ ◆ $-\infty + \infty$ ◆ $0 \cdot (\pm\infty)$ ◆ $(\pm\infty) \cdot 0$ ◆ $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ◆ $\frac{0}{0}$

Mulțimi mărginite

În continuare, vom remarca acele numere care sunt mai mici sau mai mari decât toate elementele unei mulțimi.

Definiții.

Fie A o mulțime nevidă de numere reale.

Un număr real m se numește *minorant* pentru A dacă m este mai mic sau egal decât orice număr din A ($m \leq x, \forall x \in A$).

Un număr real M se numește *majorant* pentru A dacă M este mai mare sau egal decât orice număr din A ($M \geq x, \forall x \in A$).

A se numește *mărginită superior* (*majorată*) dacă admite majorant.

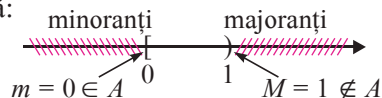
A se numește *mărginită inferior* (*minorată*) dacă admite minorant.

A se numește *mărginită* dacă este mărginită superior și inferior.

O mulțime nevidă care nu este mărginită se numește *nemărginită*.

Să cercetăm dacă o mulțime este mărginită!

8) Fie $A = [0, 1)$, reprezentată pe axa reală:



Dă exemple de doi majoranți și, respectiv, de doi minoranți ai mulțimii A .

9) Reprezintă pe axă fiecare dintre intervalele următoare:

- a) $(1, \infty)$; b) $(-7, \infty)$;

Observație.

O mulțime este nemărginită dacă nu este mărginită superior sau nu este mărginită inferior.

Teoremă. Fie $A \subset \mathbb{R}$, nevidă.

I. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- 1) mulțimea A este mărginită;
- 2) există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $a \leq x \leq b, \forall x \in A$;
- 3) există $M \in \mathbb{R}$ cu $|x| \leq M, \forall x \in A$.

II. A este nemărginită $\Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}, \exists x_M \in A$ cu $|x_M| > M$.

Demonstrație.

I. 1) \Leftrightarrow 2) A este mărginită dacă și numai dacă admite un minorant a și un majorant b ; adică $\forall x \in A, a \leq x \leq b$.

3) \Rightarrow 1) Dacă $\exists M \in \mathbb{R}$ cu $|x| \leq M, \forall x \in A$, atunci mulțimea A admite $-M$ ca minorant și M ca majorant, adică $\forall x \in A, -M \leq x \leq M$.

1) \Rightarrow 3) Reciproc, dacă A este mărginită, atunci există numerele a și b astfel încât $a \leq x \leq b, \forall x \in A$.

Fie $M = \max\{|a|, |b|\}$. Avem $-M \leq -|a| \leq x \leq |b| \leq M, \forall x \in A$.

II. Demonstrația se reduce la un calcul logic. Ne vom baza pe următoarele teoreme de logică:

a) $\forall q$ și r propoziții: $(r \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg r \Leftrightarrow \neg q)$.

b) $\forall P(x, y)$ predicat: $\neg(\exists x \forall y P(x, y)) \Leftrightarrow (\forall x \exists y \neg P(x, y))$.

Ca urmare, sunt adevărate următoarele propoziții:

A este mărginită $\Leftrightarrow \exists M > 0, \forall x \in A, |x| \leq M$

A este nemărginită $\Leftrightarrow \forall M > 0, \exists x_M \in A, |x_M| > M$

(am notat x_M deoarece acest număr depinde eventual de M).

Definiție.

Fie A o mulțime nevidă de numere reale.

Numărul $m \in \mathbb{R}$ se numește *minimumul* mulțimii A , și se notează $\min A$, dacă m este minorant pentru A și $m \in A$.

Numărul $M \in \mathbb{R}$ se numește *maximumul* mulțimii A , și se notează $\max A$, dacă M este majorant pentru A și $M \in A$.

Vom demonstra că minimumul (ca și maximumul) unei mulțimi, dacă există, este unic: fie A o mulțime reală; presupunem că a și m sunt minime în A , deci $a, m \in A$; rezultă $m \leq a$ și $a \leq m$, deci $a = m$. În concluzie $\min A$ este unic.

Definiție.

Fie A o mulțime de numere reale, nevidă.

Cel mai mare minorant (dacă există) al mulțimii A se numește *infimum* (*margine inferioară*) pentru mulțimea A și se notează $\inf A$.

Cel mai mic majorant al lui A (dacă există) se numește *supremum* (*margine superioară*) pentru A și se notează $\sup A$.

- c) $[2, \infty)$; d) $\left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$;
e) $(-\infty, -9)$; f) $(-\infty, 3)$;
g) $(-\infty, -4]$; h) $(-\infty, 5)$;
i) $(2, 7)$; j) $[-5, 3]$;
k) $(2, 7]$; l) $[-3, 5)$.

10) a) Care dintre intervalele de mai sus sunt minorate în \mathbb{R} ?

b) Care dintre intervalele de mai sus sunt majorate în \mathbb{R} ?

c) Care dintre intervalele de mai sus sunt mărginite în \mathbb{R} ?

11) Reprezintă pe dreapta reală intervalele:

a) $[1, \sqrt{2} + 1]$;

b) $(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$;

c) $(-\infty, \sqrt{2}]$.

12) Fie $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$. Dă exemplu de un minorant și de un majorant al mulțimii A .

13) Fie $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 \leq 8\}$. Dă exemplu de un majorant al mulțimii B . Mulțimea B admite un minorant?

14) Fie $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^4 > 1\}$. Mulțimea C admite un minorant? Dar un majorant?

15) Găsește minoranți și (sau) majoranți, dacă există, pentru:

$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 3\}$;

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ și } x^2 \geq 3\}$.

16) Reprezintă pe axa reală fiecare dintre mulțimile:

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 3\}$;

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 4\}$;

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 2\}$;

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 2\}$.

17) a) Precizează minimumul și maximumul, dacă există, pentru fiecare din mulțimile A, B, C și D de la exercițiul 16.

b) Precizează marginea inferioară și marginea superioară, dacă există, pentru mulțimile A, B, C, D (exercițiul 16).

Observații.

- ◆ Dacă $\exists \inf A$ și $\inf A \in A$, atunci $\inf A = \min A$.
- ◆ Dacă $\exists \sup A$ și $\sup A \in A$, atunci $\sup A = \max A$.

Axioma lui Cantor.

Orice mulțime de numere reale, nevidă, mărginită superior admite supremum.

Teoremă.

Orice mulțime nevidă de numere reale mărginită inferior admite infimum.

Vecinătăți în \mathbb{R}

În continuare vom vedea cum *se leagă* între ele numerele reale. Mai exact, că orice număr real are o vecinătate și în orice vecinătate, oricât de mică, a unui număr real se află o infinitate de numere reale. Ca să studiem unele numere vom apela la vecinii lor. În acest caz putem parafraza un proverb astfel: „Spune cu cine te învecinezi ca să-ți spun cine ești“.

Definiție.

O mulțime de numere reale V este *vecinătatea numărului real* a dacă există $r > 0$ astfel încât $(a - r, a + r) \subset V$.

Notăm cu $\mathcal{V}(x)$ mulțimea vecinătăților numărului x .

Un tip de vecinătăți ale unui punct a sunt intervalele simetrice de centru a și rază r , notate $(a - r, a + r)$.

Consecință.

O mulțime V nu este o vecinătate a punctului a dacă, $\forall r > 0$, intervalul $(a - r, a + r) \not\subset V$.

Propoziție.

Intervalele (a, b) sunt vecinătăți pentru orice punct al lor.

Demonstrație.

Fie $x \in (a, b)$ și $r = \min\{x - a, b - x\} > 0$. Avem $V = (x - r, x + r) \subset (a, b)$, deoarece $a = x - (x - a) \leq x - r < x < x + r \leq x + (b - x) = b$.

Orice vecinătate a unui punct este vecinătate pentru o infinitate de puncte. De exemplu, intervalul $[0, 1]$ este vecinătate pentru orice punct din $(0, 1)$. Deci, o vecinătate nu caracterizează un punct, însă mulțimea tuturor vecinătăților caracterizează perfect punctul.

Observații.

◆ $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y, \exists V_1 \in \mathcal{V}(x), V_2 \in \mathcal{V}(y)$ cu $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ (oricare ar fi două numere reale diferite, ele au două vecinătăți disjuncte).

◆ $\bigcap_{V \in \mathcal{V}(x)} V = \{x\}$
(intersecția tuturor vecinătăților unui punct este chiar punctul).

Să lucrăm cu vecinătăți!

- 18) Arată că: a) $(0, 2) \in \mathcal{V}(1)$;
b) $(0, 2) \notin \mathcal{V}(0)$; c) $[0, 1] \notin \mathcal{V}(0)$.

19) Este $(-\infty, 0)$ o vecinătate a lui -3 ?

20) Arată că intervalul $[0, 2]$ este vecinătate a oricărui număr $a \in (0, 2)$, dar nu și pentru $a \in \{0, 2\}$.

21) Dacă $0 \leq x < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$, atunci $x = 0$.

22) Fie $a \in \overline{\mathbb{R}}$; definim următoarele intervale:

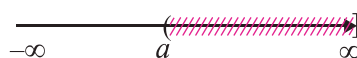
$$\{x \mid x \in \overline{\mathbb{R}}, x < a\} = [-\infty, a)$$



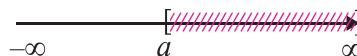
$$\{x \mid x \in \overline{\mathbb{R}}, x \leq a\} = [-\infty, a]$$



$$\{x \mid x \in \overline{\mathbb{R}}, x > a\} = (a, \infty]$$



$$\{x \mid x \in \overline{\mathbb{R}}, x \geq a\} = [a, \infty]$$



Reprezintă pe axa reală intervalele:

- a) $(2, \infty]$; b) $[-\infty, -6)$;
c) $[-3, \infty]$; d) $[-\infty, 5]$.

Vecinătăți în $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

Cum legăm $-\infty$ și ∞ de mulțimea \mathbb{R} ? Prin vecinătăți, desigur!

Definiție.

O mulțime V din $\bar{\mathbb{R}}$ este o *vecinătate a lui $-\infty$* , dacă există $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $[-\infty, m) \subset V$. O mulțime V din $\bar{\mathbb{R}}$ este o *vecinătate a lui ∞* , dacă există $M \in \mathbb{R}$ astfel încât $(M, +\infty] \subset V$.

O mulțime V din $\bar{\mathbb{R}}$ este vecinătate a lui x dacă $V \cap \mathbb{R} \in \mathcal{V}(x)$.

EXEMPLE



1) $[0, \infty]$ este vecinătate a lui ∞ deoarece există $M = 0$ și intervalul $(M, \infty] \subset [0, \infty]$.

2) $\bar{\mathbb{R}}$ este vecinătate a oricărui punct al său (rezultă din definiția vecinătății unui număr real, aplicată la $-\infty$ și ∞).

3) \mathbb{R} nu este vecinătate a lui ∞ deoarece $\infty \notin \mathbb{R}$.

Definiție.

Fie A o submulțime a lui $\bar{\mathbb{R}}$.

Un element $x \in \bar{\mathbb{R}}$ (număr real, $-\infty$ sau ∞) este *punct de acumulare* pentru mulțimea A dacă, $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap A - \{x\} \neq \emptyset$.

Notăm cu A' mulțimea punctelor de acumulare ale lui A .

Un element x din A , care nu este punct de acumulare pentru A , se numește *punct izolat* al lui A .

EXEMPLU



Fie $A = \{0, 1\} \cup (2, 3)$

0 și 1 sunt puncte izolate în A ;

$A' = [2, 3]$, adică punctele 2, 3 precum și orice punct din $(2, 3)$ sunt puncte de acumulare pentru A .

PROBLEME



● 1. Fie $x \in \mathbb{R}$. Folosind proprietățile modulului, explicitează următoarele expresii:

a) $E(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right|$;

b) $E(x) = |x^2 - 5x + 6|$;

c) $E(x) = |x - 2| + |3 - x|$.

● 2. Reprezintă pe dreapta reală următoarele mulțimi:

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 2\}$;

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| \leq 1\}$;

$C = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \left| 1 - 2x \right| \leq \frac{1}{2} \right\}$;

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 2\}$;

$E = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| \geq 1\}$;

$F = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \left| 1 - 2x \right| \geq \frac{1}{2} \right\}$.

●● 3. Exprimă cu ajutorul modulului următoarele inegalități, pentru $a, b \in \mathbb{R}$:

a) $a - \frac{1}{2} < b < a + \frac{1}{2}$;

b) $b < a - \frac{1}{2}$ sau $b > a + \frac{1}{2}$;

c) $b - 1 < a < b + 1$;

d) $a < b - 6$ sau $a > b + 6$.

23) Fie $x \in \bar{\mathbb{R}}$. Demonstrează că:

a) dacă $\forall y \in \mathbb{R}, y < x$, atunci $x = \infty$;

b) dacă $\forall y \in \mathbb{R}, y > x$, atunci $x = -\infty$.

24) Fie $a \in \bar{\mathbb{R}}$. Atunci:

a) $V \in \mathcal{V}(a)$ și $V \subset U \Rightarrow U \in \mathcal{V}(a)$;

b) $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(a) \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(a)$;

c) $V \in \mathcal{V}(a) \Rightarrow a \in V$;

d) $\forall V \in \mathcal{V}(a), \exists W \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $\forall b \in W, W \in \mathcal{V}(b)$.

25) Arată că:

a) $\pi \in (0, \pi)'$, unde $(0, \pi)'$ este mulțimea punctelor de acumulare din intervalul $(0, \pi)$;

b) $(\pi, 5)' = [\pi, 5]$;

c) π este punct de acumulare pentru mulțimea trunchierilor sale $\left\{ \frac{[\pi \cdot 10^n]}{10^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

26) Arată că originea este punct de acumulare pentru mulțimile următoare:

a) $\left\{ \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$; b) $(0, 5)$; c) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$;

d) \mathbb{Q} ; e) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; f) $\mathbb{R} \setminus \{0, 5\}$;

g) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$

•• 4. Reprezintă pe axa reală mulțimile:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, 3) \leq 1\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, 1) > 2\};$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq d(x, 3) \leq 3\}.$$

• 5. Determină $n \in \mathbb{N}^*$ dacă:

$$\text{a) } \frac{1}{n} > \frac{1}{5}; \quad \text{b) } \frac{1}{n} < \frac{1}{5};$$

$$\text{c) } \left| \frac{n^2}{n^2+1} - 1 \right| < \frac{1}{100}; \quad \text{d) } \left| \frac{2^n+1}{2^n+3} - 1 \right| < \frac{1}{10}.$$

••• 6. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Arată că:

$$\text{a) } \min\{a, b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2};$$

$$\text{b) } \max\{a, b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2};$$

$$\text{c) } |a-b| + |b-c| + |c-a| = 2(\max\{a, b, c\} - \min\{a, b, c\})$$

•• 7. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Pentru orice număr real x există

$$m \in \mathbb{Z} \text{ astfel încât } \left| x - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{n}.$$

• 8. Determină infimum, supremum, minimum și maximum (dacă există) pentru următoarele mulțimi reale:

$$\text{a) } (-2, 1];$$

$$\text{b) } [-1, 1) \cup (2, 3];$$

$$\text{c) } \{-3\} \cup (0, 100);$$

$$\text{d) } \left\{ 1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\};$$

$$\text{e) } \left\{ \frac{3^n - 1}{3^n + 1} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\};$$

$$\text{f) } \left\{ \frac{2^n + 1}{2^n - 1} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

•• 9. Care dintre mulțimile următoare sunt vecinătăți ale lui 0,5:

$$\text{a) } (0, +\infty);$$

$$\text{b) } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z};$$

$$\text{c) } (-\infty, -1);$$

$$\text{d) } \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + r \right], r > 0;$$

$$\text{e) } \mathbb{Z};$$

$$\text{f) } \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}?$$

• 10. Arată că submulțimile următoare sunt nemărginite și calculează inf, sup, min și max, dacă acestea există.

$$\text{a) } \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 2\};$$

$$\text{b) } \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0, x^2 \geq 2\};$$

$$\text{c) } \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 + x \leq 0\};$$

$$\text{d) } \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 + x < 0\};$$

$$\text{e) } \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 + x^2 \leq 0\};$$

$$\text{f) } \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 + x^2 < 0\};$$

$$\text{g) } \left\{ \frac{x^2}{x+1} \mid x > 0 \right\}.$$

•• 11. Determină punctele de acumulare și punctele izolate ale mulțimilor următoare:

$$\text{a) } \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}^* \right\};$$

$$\text{b) } \left\{ \frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\};$$

$$\text{c) } (-\infty, -3) \cup [5, +\infty);$$

$$\text{d) } \mathbb{Z};$$

$$\text{e) } \mathbb{N};$$

$$\text{f) } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z};$$

$$\text{g) } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q};$$

$$\text{h) } (-\infty, -3) \cup \{1\}.$$

2. Funcții reale de variabilă reală



Se numește *funcție reală de variabilă reală* o funcție $f: E \rightarrow F$, unde E și F sunt submulțimi nevide ale mulțimii numerelor reale.

În continuare, vom folosi termenul de funcție înțelegând că este vorba de o funcție reală de variabilă reală.

Fie E o mulțime simetrică față de origine, adică o mulțime de numere reale cu proprietatea $-x \in E, \forall x \in E$; fie funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$.

f se numește *funcție pară* dacă $f(-x) = f(x), \forall x \in E$.

f se numește *funcție impară* dacă $f(-x) = -f(x), \forall x \in E$.

Funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}$) este *mărginită* dacă $\exists a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $a \leq f(x) \leq b, \forall x \in E$.

Se consideră funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}$).

a) f este *crescătoare* pe E dacă, $\forall x_1, x_2 \in E, x_1 < x_2$, atunci $f(x_1) \leq f(x_2)$.

b) f este *descrescătoare* pe E dacă, $\forall x_1, x_2 \in E, x_1 < x_2$, atunci $f(x_1) \geq f(x_2)$.

c) f este *monotonă* pe E dacă este crescătoare sau descrescătoare pe E .

Observații.

◆ Dacă în definiția funcției crescătoare, descrescătoare respectiv monotonă, inegalitățile între valorile funcției sunt stricte, funcția se numește *strict crescătoare*, *strict descrescătoare* și respectiv *strict monotonă*.

◆ Pentru studiul monotoniei unei funcții, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, uneori este convenabil să considerăm $x_1, x_2 \in E, x_1 \neq x_2$ și să studiem

semnul raportului $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$.

Dacă $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$, atunci diferențele $f(x_1) - f(x_2)$ și $x_1 - x_2$ au același semn, adică funcția este strict crescătoare.

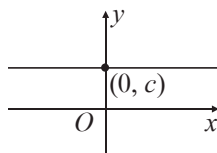
Dacă $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, atunci diferențele $f(x_1) - f(x_2)$ și $x_1 - x_2$ au semne opuse, adică funcția este strict descrescătoare.

Funcția constantă



Se numește *funcție constantă* o funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c$, unde $c \in \mathbb{R}$ (c este un număr real).

Reprezentarea grafică a funcției constante este dreapta orizontală dusă prin punctul $(0, c)$:



Observații.

◆ Funcția constantă este mărginită; $\text{Im}f = \{c\}$.

◆ Funcția constantă este o funcție pară, deoarece $f(-x) = c = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, deci reprezentarea grafică este simetrică față de axa Oy .

1) Care dintre următoarele funcții sunt funcții reale de variabilă reală:

a) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = x^2$;

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = [x]$;

c) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = z + i\bar{z}$;

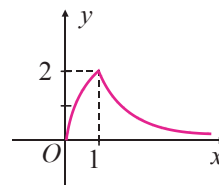
d) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x - 2y, 3x - y)$;

e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^8 + 5x^6 - 2$?

2) Ce proprietate de simetrie are reprezentarea grafică a unei funcții pare?

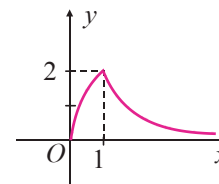
3) Ce proprietate de simetrie are reprezentarea grafică a unei funcții impare?

4) În figura următoare este reprezentarea grafică pe $[0, \infty)$ a unei funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.



Completează graficul pe $(-\infty; 0)$ dacă funcția f este pară.

5) În figura următoare este reprezentarea grafică pe $[0, \infty)$ a unei funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.



Completează graficul pe $(-\infty; 0)$ dacă funcția f este impară.

6) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Demonstrează că f este mărginită dacă $\exists M > 0, M \in \mathbb{R}$, astfel încât $|f(x)| \leq M, \forall x \in \mathbb{R}$.

7) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Demonstrează că f este mărginită dacă $\text{Im}f$ este o mulțime mărginită.

8) Fie funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}$), $a, b \in E, a \neq b$ și raportul $R(a, b) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$.

Completează următoarele enunțuri, astfel încât să obții propoziții adevărate:

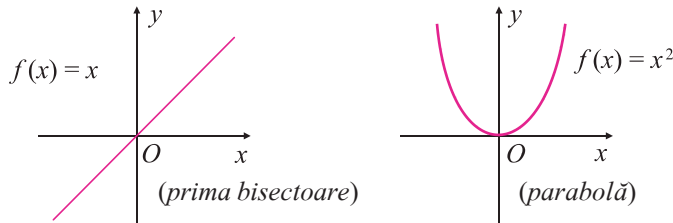
a) Dacă $R(a, b) > 0, \forall a, b \in E, a \neq b$, atunci funcția f este ...



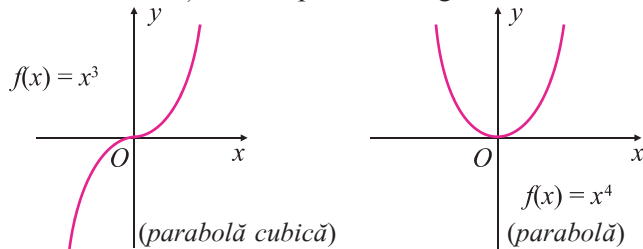
Funcția putere și funcția radical

➤ Se numește *funcția putere cu exponentul natural* n ($n \in \mathbb{N}^*$), funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$.

În cazurile $n = 1$ și $n = 2$ reprezentările grafice sunt următoarele:

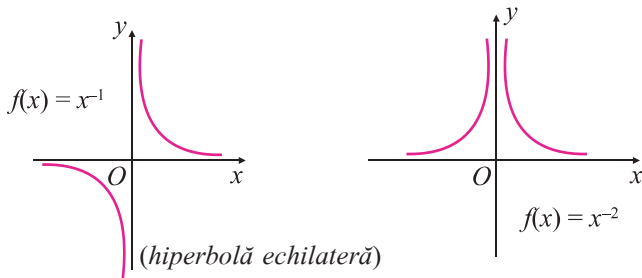


În cazurile $n = 3$ și $n = 4$ reprezentările grafice sunt următoarele:



➤ Se numește *funcția putere cu exponentul întreg negativ* ($-n$), $n \in \mathbb{N}^*$, funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-n}$.

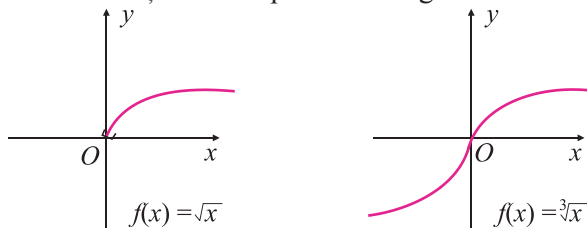
În cazurile $n = 1$ și $n = 2$ reprezentările grafice sunt următoarele:



Stabilește pentru fiecare reprezentare grafică de mai sus dacă funcția este mărginită, monotonă, pară/impară, bijectivă; determină $\text{Im}f$.

➤ Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Se numește *funcție radical de ordinul* n funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, unde $E = [0; \infty)$, dacă n este par și $E = \mathbb{R}$, dacă n este impar.

Pentru $n = 2$ și $n = 3$ reprezentările grafice sunt următoarele:



Observații.

◆ Orice funcție radical este strict crescătoare pe domeniul ei maxim de definiție.

◆ Orice funcție radical de ordin impar este o funcție impară.

b) Dacă $R(a, b) \leq 0$, $\forall a, b \in E$, atunci funcția f este ...

c) Dacă $R(a, b)$ nu are semn constant pentru $\forall a, b \in E$, atunci ...

9) Stabilește pentru ce valori ale lui $n \in \mathbb{N}^*$ funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ este pară sau impară.

10) Stabilește intervalele de monotonie ale funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Indicație.

Analizează separat cazurile n par și n impar. Folosește reprezentările grafice alăturate!

11) Stabilește pentru ce valori $n \in \mathbb{N}^*$, funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-n}$ este pară sau impară. Folosește reprezentările grafice alăturate!

12) Care sunt intervalele de monotonie pentru funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}^*$? Folosește reprezentările grafice alăturate!

13) Stabilește valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) Funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ este strict monotonă deoarece este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0, \infty)$.

b) Funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-2}$ este mărginită.

Indicație.

Folosește reprezentările grafice alăturate!

14) Stabilește domeniul maxim de definiție al fiecărei funcții $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$;

b) $f(x) = \sqrt[3]{2x+7}$;

c) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x-2}$;

d) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{2x+3}}$.

15) Fie funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + mx + 1}$. Care sunt valorile parametrului real m ?

16) Dacă funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2x-m}$ are domeniul maxim de definiție $[-1; \infty)$, cât este parametrul real m ?

Funcții polinomiale

Definiție.

Se numește *funcție polinomială cu coeficienți reali* o funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, unde $a_0, a_1, \dots, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$.

Numerele a_0, a_1, \dots, a_n se numesc *coeficienții funcției polinomiale* f . Coeficientul a_0 se numește *termen liber*.

Numărul natural maxim n , cu $a_n \neq 0$, se numește *gradul funcției polinomiale*; se notează $\text{grad } f = n$.

Pentru funcția polinomială f cu $\text{grad } f = n$, numărul a_n se numește *coeficient dominant*.

EXAMPLE



• Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^5 - 3x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{3}x + 4$

este o funcție polinomială de gradul al cincilea.

• $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 3$ este o funcție polinomială de gradul al doilea;

• $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $k(x) = 2x - \sqrt{3}$ este o funcție polinomială de gradul întâi;

• $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 7$ este o funcție polinomială de gradul zero.

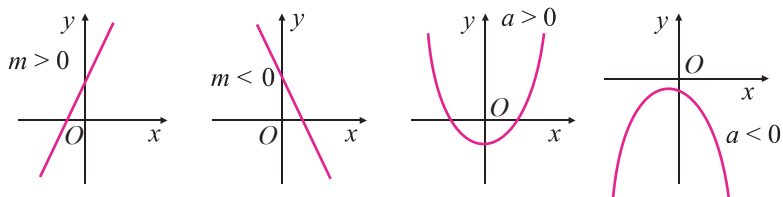
Convenție.

Funcția polinomială nulă (care are toți coeficienții zero) se consideră că are gradul $-\infty$.



În clasa a IX-a s-au studiat funcțiile polinomiale de gradul zero, de gradul întâi și de gradul al doilea.

Funcțiile de gradul întâi, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx + n$, $m \neq 0$ și funcțiile de gradul al doilea, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, au următoarele reprezentări grafice:



Fiecărei funcții polinomiale $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ îi putem asocia o ecuație polinomială (numită și ecuație algebrică): $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Putem rezolva astfel de ecuații utilizând descompunerea în factori.



$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2), \forall a, x \in \mathbb{R}$$

$$x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2), \forall a, x \in \mathbb{R}$$

17) Pentru fiecare din următoarele funcții polinomiale, precizează coeficienții și termenul liber.

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2x - 7$;

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2}x \left(x + \frac{1}{2} \right)$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 2)(x^2 + 1)$.

18) Dă câte un exemplu de funcție polinomială care:

a) este funcție pară;

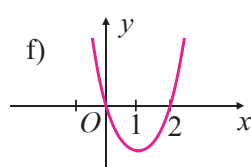
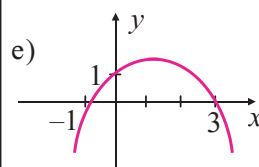
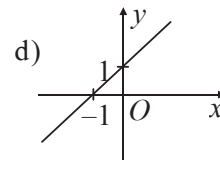
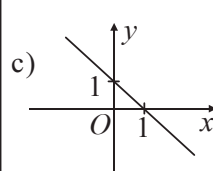
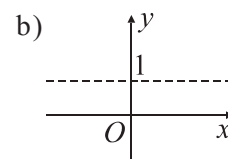
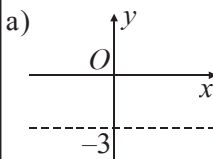
b) este funcție impară;

c) are termenul liber $2 + \sqrt{3}$;

d) este strict crescătoare;

e) nu este monotonă.

19) Determină funcții polinomiale $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, care au următoarele reprezentări grafice:



20) Precizează gradul și coeficientul dominant pentru fiecare din funcțiile:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -5x^2 + 7x + 1$;

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (2 - x)(x^2 + 5)$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{3}x^8 - 7x^2 + 5x - 3$.

21) Dacă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (m^2 - 1)x^4 + mx^3 + 3$, $m \in \mathbb{R}$ este o funcție polinomială de gradul al treilea, cât este m ?

Funcții raționale

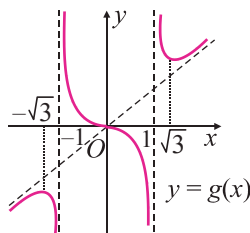
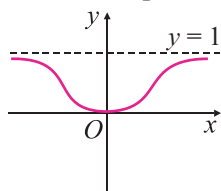
Definiție.

Se numește *funcție rațională cu coeficienți reali* o funcție $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$, unde p_1 și p_2 sunt funcții polinomiale cu coeficienți reali, p_2 este diferită de funcția nulă și $D = \{x \in \mathbb{R} \mid p_2(x) \neq 0\}$.



Funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ și $g: \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ sunt funcții raționale cu coeficienți reali.

La sfârșitul clasei a XI-a vei stabili că aceste funcții au următoarele reprezentări grafice:



- Stabilește dacă funcțiile raționale care sunt reprezentate grafic în exemplul de mai sus sunt pare, impare, mărginite, monotone.

- Determină intervalele de monotonie pentru funcțiile de mai sus.

Funcția exponențială și funcția logaritmică

Considerăm un număr real a astfel încât $a > 0$, $a \neq 1$.



Se numește *funcția exponențială în baza a*, funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow (0; \infty)$, $f(x) = a^x$, pentru $a > 0$, $a \neq 1$.

Se numește *funcția logaritmică în baza a*, funcția $f: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, pentru $a > 0$, $a \neq 1$.

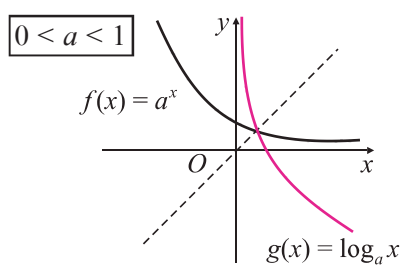
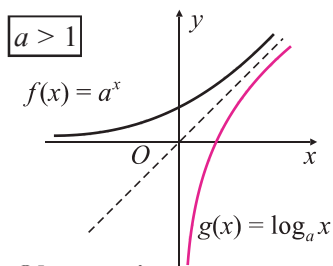


Fie $a > 0$, $a \neq 1$. Atunci:

$$a^{\log_a x} = x, \forall x > 0$$

$$\log_a a^x = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

Funcțiile exponențială și logaritmică, ambele în baza a , sunt inverse una alteia. Reprezentările lor grafice sunt simetrice față de prima bisectoare.



Observație.

Funcțiile exponențiale și funcțiile logaritmice sunt nemărginite.

Notății.

$\log_{10} x = \lg x$ (logaritm zecimal); $\log_e x = \ln x$ (logaritm natural).

22) Stabilește domeniul maxim de definiție pentru următoarele funcții raționale $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \frac{2x+5}{x^3-x}$;

b) $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$;

c) $f(x) = \frac{2}{x^4-5x^2+4}$;

d) $f(x) = \frac{x^5+x+2}{x^2+x+1}$.

23) Dacă funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{3}{x^2+x+3m}$$

este definită pe \mathbb{R} , care sunt valorile parametrului real m ?

24) Dă câte un exemplu de funcție rațională pentru care domeniul maxim de definiție este:

a) $E = \mathbb{R}$;

b) $E = \mathbb{R} \setminus \{1; 7\}$;

c) $E = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}; \pm\sqrt{3}\}$.

25) Precizează în funcție de baza a monotonia funcției exponențiale și logaritmice.

26) Determină mulțimea $\text{Im}f$ dacă:

a) f este o funcție exponențială;

b) f este o funcție logaritmică.

27) Care este domeniul maxim de definiție al fiecărei funcții $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$)?

a) $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x + 10^x$;

b) $f(x) = \log_5(x^2 - 2x - 2)$;

c) $f(x) = \lg(x-1) + \sqrt{x-3}$.

28) Determină parametrul real m astfel încât fiecare din următoarele funcții să fie bine definită:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{m-1}{m+2}\right)^x$;

b) $f: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_{|m|-1} x$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_7(mx^2 + x + 1)$?

Observații.

◆ Numărul e este o constantă fundamentală în analiza matematică (e este irațional și $e \approx 2,718281\dots$).

◆ Logaritmând în baza e dubla inegalitate

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ obținem}$$

$$n \ln \frac{n+1}{n} < 1 < (n+1) \ln \frac{n+1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ sau}$$

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Notă istorică.

Logaritmul natural, $\ln x$, a fost descoperit de John Neper (1550 - 1617) și de Jobst Bürgi (1552 - 1632) în dorința de a pune la dispoziția astronomilor un mijloc de simplificare a calculelor.

Isaac Newton (1615-1677) cât și G. Leibniz (1646 - 1716) au stabilit dezvoltarea în serie a numărului e .

Leonard Euler (1707 - 1783, matematician, mecanician și astronom elvețian) a introdus în 1748 notația e ca bază a logaritmilor naturali (sau neperieni).

În 1728, Daniel Bernoulli (1700 - 1782) a stabilit formula $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Iraționalitatea lui e a fost demonstrată în 1815 de către J. Fourier (1768 - 1830).

Observație.

Funcțiile reale de variabilă reală prezentate în această secțiune se mai numesc și *funcții elementare*.

Probleme rezolvate.

1) Se consideră funcția $f: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{(m^2-1)a+m}{ma^2+a+m-1}\right)^x$, $a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$.

- a) Determină $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $ma^2 + a + m - 1 \neq 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$.
 b) Determină $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția f să fie definită pe \mathbb{R} , $\forall a \in \mathbb{R}$.
 c) Pentru $m = -1$, studiază monotonia funcției f .

Soluție.

a) Sunt echivalente următoarele afirmații:

$$ma^2 + a + m - 1 \neq 0, \forall a \in \mathbb{R} ; \Delta_a < 0 ; 1 - 4m^2 + 4m < 0 ; m \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}; \infty\right).$$

b) Funcția f este definită pe \mathbb{R} , $\forall a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} ma^2 + a + m - 1 \neq 0, \forall a \in \mathbb{R} & (1) \\ \frac{(m^2-1)a+m}{ma^2+a+m-1} > 0, \forall a \in \mathbb{R} & (2) \end{cases}$

Dacă este îndeplinită condiția (1), atunci numitorul din (2) are semn constant, adică este pozitiv $\forall a \in \mathbb{R}$ sau este negativ $\forall a \in \mathbb{R}$. Trebuie ca și numărătorul să aibă semn constant pentru orice $a \in \mathbb{R}$, adică $m^2 - 1 = 0$. Convine doar $m = -1$.

c) Dacă $m = -1$, atunci $f(x) = \left(\frac{1}{a^2 - a + 2}\right)^x$.

Deoarece $\frac{1}{a^2 - a + 2} = \frac{1}{\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} \in (0; 1)$, $\forall a \in \mathbb{R}$, rezultă că f este strict descrescătoare pe \mathbb{R} .

29) Determină $m \in \mathbb{R}$ astfel încât fiecare dintre următoarele funcții să fie monotonă:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x - m^x$.

b) $f: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_m x + \left(\frac{1}{10}\right)^x$.

30) Arată că, pentru $m \in (0, 1)$, funcțiile următoare sunt descrescătoare:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x - m^x$.

b) $f: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_m x + \left(\frac{1}{10}\right)^x$.

2) Se consideră funcția $f: (0; \infty) \rightarrow [\ln 2; \infty)$, $f(x) = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

- a) Demonstrează că f este surjectivă.
 b) Determină intervalele de monotonie ale funcției f .
 c) Determină restricțiile inversabile ale funcției f și inversele acestora.

Soluție.

a) f este surjectivă $\Leftrightarrow \forall y \in [\ln 2; \infty)$, $\exists x \in (0, \infty)$ astfel încât $f(x) = y$.

Ecuția $f(x) = y$ este echivalentă cu $x^2 - e^y x + 1 = 0$ și $y \geq \ln 2$. Soluțiile sunt $x_{1,2} = \frac{e^y \pm \sqrt{e^{2y} - 4}}{2}$, $\forall y \geq \ln 2$.

b) Deoarece $f = h \circ g$ unde $g: (0, \infty) \rightarrow [2; \infty)$, $g(x) = x + \frac{1}{x}$ și $h: [2, \infty) \rightarrow [\ln 2; \infty)$, $h(x) = \ln x$ și h este strict crescătoare, este suficient să determinăm intervalele de monotonie ale funcției g .

Fie $a, b \in (0, \infty)$, $a \neq b$. Calculăm $R(a, b) = \frac{g(a) - g(b)}{a - b} = \frac{ab - 1}{ab}$.

• dacă $a, b \in (0, 1]$, $a \neq b$, atunci $R(a, b) < 0$, de unde g strict descrescătoare pe $(0; 1]$;

• dacă $a, b \in (1, \infty)$, $a \neq b$, atunci $R(a, b) > 0$, de unde g strict crescătoare pe $[1; \infty)$.

c) f are două restricții bijective; ele au ca domeniu de definiție fiecare interval maximal de monotonie al funcției f :

$$f_1: (0, 1] \rightarrow [\ln 2; \infty), \quad f_1^{-1}: [\ln 2; \infty) \rightarrow (0; 1], \quad f_1^{-1}(x) = \frac{e^x - \sqrt{e^{2x} - 4}}{2},$$

$$f_2: [1; \infty) \rightarrow [\ln 2; \infty), \quad f_2^{-1}: [\ln 2; \infty) \rightarrow (1; \infty), \quad f_2^{-1}(x) = \frac{e^x + \sqrt{e^{2x} - 4}}{2}.$$



● 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{3x+2}{x-1}. \text{ Este surjectivă? Este injectivă?}$$

● 2. Se consideră funcția $f: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt{3-x} - \sqrt{x+1}.$$

- a) Determină domeniul maxim de definiție E .
 b) Demonstrează că f este injectivă.
 c) Determină cea mai mare și cea mai mică dintre valorile funcției.

● 3. Se consideră funcția $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 3x + 4}. \text{ Determină:}$$

- a) domeniul maxim de definiție D ;
 b) intervalele de monotonie ale funcției;
 c) punctele de intersecție ale reprezentării grafice cu axele de coordonate.

● 4. Explicitează funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

- a) $f(x) = \max\{2^x; 10^x\}$;
 b) $f(x) = \min\{|x-1|; 2\}$;
 c) $f(x) = |x^3 - 3x + 2|$.

● 5. Stabilește domeniul maxim de definiție al funcțiilor $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$; b) $f(x) = \sqrt{\lg(x^2 - 1)}$;

c) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)$; d) $f(x) = \sqrt{e^{\frac{x+1}{x-2}} - 1}$.

● 6. Explicitează funcțiile:

a) $f: \left[\frac{1}{2}; 2006\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)$, $f(x) = [\lg 2x]$, unde $[\cdot]$ reprezintă funcția parte întreagă;

b) $f: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \min_{-1 \leq t \leq x} \{t^2\}$.

● 7. Stabilește domeniul maxim de definiție al funcțiilor $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = (x-1)^6$; b) $f(x) = (x-1)^{-6}$;

c) $f(x) = \sqrt{x-1}$; d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}$;

$$e) f(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}};$$

$$f) f(x) = \sqrt[3]{x-1}; \quad g) f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}};$$

$$h) f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x + 1}; \quad i) f(x) = \frac{x^3 + 8}{x^2 - x - 6};$$

$$j) f(x) = \frac{2x - 10}{x^3 - 125}; \quad k) f(x) = 4^x + 2^x;$$

$$l) f(x) = \ln(x-1); \quad m) f(x) = \log_{x-1}(x+1).$$

$$n) f(x) = \sqrt{\lg(x^2 - 1)}; \quad o) f(x) = \sqrt{e^{\frac{x+1}{x-2}} - 1}.$$

8. Simplifică fracțiile:

$$a) \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x + 1}, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\};$$

$$b) \frac{x^3 + 8}{x^2 - x - 6}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\};$$

$$c) \frac{2x - 10}{x^3 - 125}, x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}.$$

Teste de evaluare

Testul 1

1. Se consideră mulțimile:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\},$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 4\} \text{ și } D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}.$$

a) Scrie sub formă de intervale (din $\overline{\mathbb{R}}$) mulțimile A, B, C și D .

b) Determină $A \cup C, B \cap C, A \setminus D$ și $C \setminus B$.

c) Care dintre mulțimile A, B, C și D este vecinătate pentru origine? Dar pentru $+\infty$?

2. Completează următoarele enunțuri astfel încât să obții propoziții adevărate:

a) Dacă $|2x + 3| \leq 0$ și $x \in \mathbb{R}$, atunci $x = \dots$

b) Mulțimea punctelor de acumulare pentru $(0; 1] \cup \{2; 3\}$ este \dots

c) Mulțimea punctelor izolate pentru \mathbb{Z} este \dots

d) Dacă $A = [-\sqrt{10}; \sqrt{10}] \cap \mathbb{N}$, atunci $\min A = \dots$ și $\max A = \dots$

3. Se consideră mulțimea $A = (0; 2)$. Dă câte un exemplu de:

a) majorant irațional al mulțimii A ;

b) minorant din $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ al mulțimii A ;

c) vecinătate a lui $-\infty$ care conține mulțimea A ;

d) vecinătate a punctului $\frac{1}{10^6}$ care este indusă în mulțimea A .

4. Determină $n \in \mathbb{N}^*$ în fiecare din cazurile:

$$a) \left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{7}; \quad b) \left| \frac{\lg n - 1}{\lg n + 1} - 1 \right| < \frac{1}{10}.$$

Testul 2

1. Calculează următoarele limite de șiruri:

$$a) \lim(\sqrt{2n+3} - \sqrt{3n+2});$$

$$b) \lim\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{5n+1};$$

$$c) \lim\left(\frac{n+1}{2n+3} - \frac{n^2}{n^2+1}\right).$$

2. Determină $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\lim(\sqrt{4n^2 + 3n + 5} - an - b) = 1$$

3. Se consideră șirul (a_n) definit astfel: $a_0 = 1,$

$$a_{n+1} = a_n^2 - 5a_n + 7, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Stabilește dacă șirul (a_n) are limită și în, caz afirmativ, calculează $\lim a_n$.

4. Calculează:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \sin \frac{\pi}{n}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}} \right)^{n^3};$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{C_{n+1}^2} + \sqrt{C_{n+2}^2} + \dots + \sqrt{C_{2n}^2}}{n^2}.$$

Testul 3

1. a) Care este inversa funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$?

b) Care este domeniul maxim de definiție al funcției $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x(x^2 - 1)}$?

2. Dă un exemplu de număr $a > 0$, $a \neq 1$ astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^{-x+3}$ să fie strict crescătoare.

3. Se consideră funcția $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_5(x^2 - 9)$.

a) Determină domeniul maxim de definiție D .

b) Stabilește valoarea de adevăr a propozițiilor:

(p1) funcția f este pară;

(p2) $f(x) = \log_5(x - 3) + \log_5(x + 3)$, $\forall x \in D$.

c) Determină intervalele de monotonie ale funcției f .

d) Demonstrează că funcția f este nemărginită.

Testul 4

1. Stabilește domeniul maxim de definiție pentru funcțiile $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$):

a) $f(x) = \lg(2x - 3)$; b) $f(x) = (x^2 - 5)^{-2}$;

c) $f(x) = \sqrt{x(x^2 - 1)} + \sqrt[3]{2x + 1}$.

2. a) Care este inversa funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = 7^x$?

b) Determină valorile reale ale parametrului a pentru care funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_{(2a+1)} x$ este strict crescătoare.

c) Determină valorile reale ale parametrului a pentru care $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{a-1}{2a+1}\right)^x$ este strict descrescătoare.

3. Se consideră funcția $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_5(x^2 - 16)$.

a) Determină domeniul maxim de definiție D .

b) Stabilește valoarea de adevăr a propozițiilor:

(p1) funcția f este pară.

(p2) $f(x) = \log_5(x - 4) + \log_5(x + 4)$, $\forall x \in D$.

c) Rezolvă ecuația $f(x) = -2$, $x \in D$.

d) Rezolvă inecuația $f(x) \leq 0$, $x \in D$.

Probleme date la examenul de bacalaureat

1. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^8$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^9 + 1$.

a) Să se calculeze $f(-1)$ și $g(-1)$.

b) Să se verifice că $(x + 1)f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) Să se arate că dacă $x < -1$, atunci $g(x) < 0$ și dacă $x > -1$, atunci $g(x) > 0$.

(Examen de bacalaureat 2003 - sesiunea iunie-iulie, varianta 1 - economic)

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 1$.

a) Să se verifice că $f(x) \geq \frac{3}{4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $f(2^x)$.

c) Să se rezolve în intervalul $(0, \infty)$ ecuația $f(\log_2 x) = 3$.

(Examen de bacalaureat 2003 - sesiunea iunie-iulie, varianta 3 - economic)

3. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pentru orice $x \in \mathbb{C}$, definim matricea $B(x) = A + xI_3$

și funcția polinomială $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x) = \det B(x)$.

a) Să se calculeze determinantul matricei A .

b) Să se arate că $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x$, $\forall x \in \mathbb{C}$.

c) Să se rezolve în \mathbb{C} ecuația $f(x) = 0$.

(Examen de bacalaureat 2003 - sesiunea specială - economic)

Limite de funcții

1. Limita unei funcții într-un punct. Limite laterale

În secolul al XVII-lea trei mari probleme se aflau în atenția oamenilor de știință: studiul traiectoriei unui mobil și viteza sa, studiul tangențelor la o curbă și studiul problemelor de maxim și de minim. Aceste probleme au condus la conturarea unui concept fundamental în analiza matematică, *limita unei funcții într-un punct*.

Cristalizarea completă a conceptelor, așa cum le întâlnim astăzi, datează din secolul al XIX-lea și se datorează unor matematicieni celebri: Cauchy, Bolzano, Darboux, Weierstrass, Heine etc.

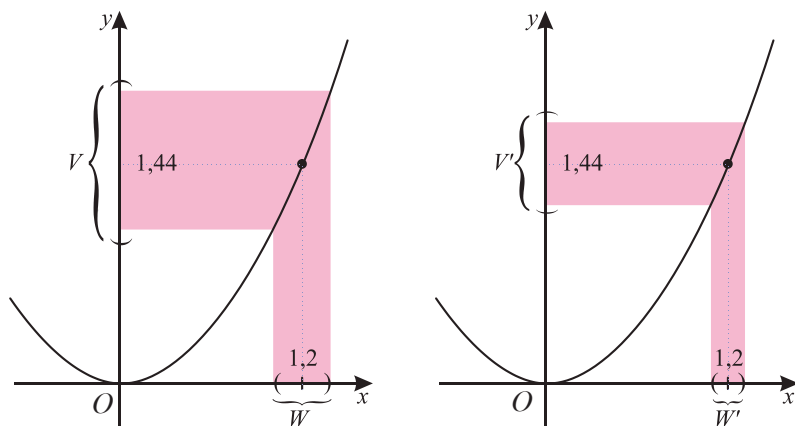
Modelarea conceptului

Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ și tabelul de valori:

x	1,1	1,19	1,2	1,21	1,3
$f(x)$	1,21	1,4161	1,44	1,4641	1,69

Analiza tabelului de valori ne conduce la ipoteza că, pentru numere x din ce în ce mai apropiate de 1,2, numerele $f(x)$ sunt din ce în ce mai apropiate de 1,44.

Această observație poate fi formulată astfel: oricât de mică ar fi vecinătatea V a numărului 1,44 de pe axa Oy , există o vecinătate W a numărului 1,2 de pe axa Ox astfel încât $f(W \setminus \{1,2\}) \subset V$.

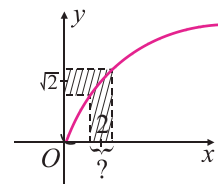


Ce înțelegem prin limită?

1) La un concurs de mașini de curse distanța parcursă de o mașină este funcție de timp. Momentul cel mai important este cel în care mașina va trece linia de sosire. Un alt moment important este momentul 0, în care mașina demarează în cursă. Ce alte momente importante pot fi studiate în timpul cursei? De ce crezi că în studiul acestor momente ne interesează comportamentul automobilului în vecinătățile acestora?

Să interpretăm grafic ...

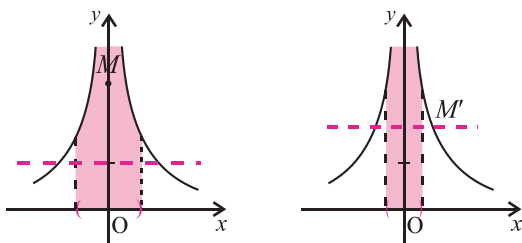
2) Fie funcția $f: [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$.



a) Fie $V = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{10}; \sqrt{2} + \frac{1}{10}\right)$, $V \in \mathcal{V}(\sqrt{2})$.

Reprezintă grafic pe axa Ox mulțimea V . Găsește o mulțime $U \in \mathcal{V}(2)$ astfel încât $f(x) \in V$, $\forall x \in U \cap [0, \infty) \setminus \{2\}$.

Fie $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2}$. Graficul funcției ne sugerează că, oricât de „sus” este plasat un punct M pe Oy , există o vecinătate W a originii din Ox astfel încât $f(W) \subset (M, \infty)$.



Fie $D \subset \mathbb{R}$ și $a \in \bar{\mathbb{R}}$; a este punct de acumulare pentru D dacă, $\forall V \in \mathcal{V}(a)$, avem $V \cap D \setminus \{a\} \neq \emptyset$.

Am notat cu D' mulțimea punctelor de acumulare pentru mulțimea D .

Atenție! Problema existenței limitei unei funcții $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ se pune doar în punctele a care sunt puncte de acumulare pentru D .

Definiție. (Cauchy)

Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}, a \in D'$ și $l \in \bar{\mathbb{R}}$. Funcția f are limita l în punctul a dacă $\forall V \in \mathcal{V}(l), \exists U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $f(U \cap D \setminus \{a\}) \subset V$, adică $\forall x \in U \cap D \setminus \{a\}, f(x) \in V$.

În acest caz, notăm $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ și citim „limită când x tinde la a din $f(x)$ este egală cu l ”.

EXEMPLU



$$\lim_{x \rightarrow 1,2} x^2 = 1,44; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall V \in \mathcal{V}(l), \exists U \in \mathcal{V}(a) \text{ astfel încât } \forall x \in U \cap D \setminus \{a\} \text{ rezultă } f(x) \in V).$$

Observație.

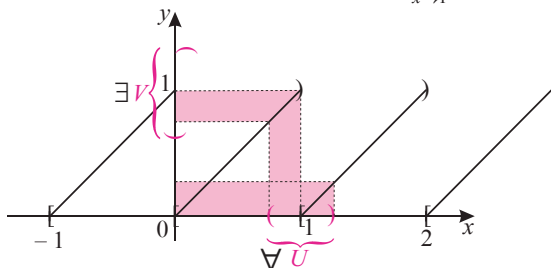
Dacă aplicăm regulile de negație obținem

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq l \Leftrightarrow (\exists V \in \mathcal{V}(l), \text{ astfel încât } \forall U \in \mathcal{V}(a), \exists x \in U \cap D \setminus \{a\} \text{ și } f(x) \notin V).$$

EXEMPLU



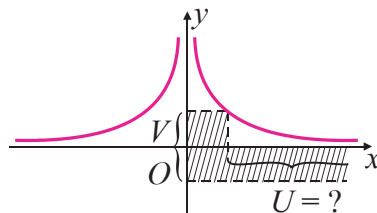
Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \{x\} = x - [x]$. Reprezintă graficul funcției f și arată că $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq 1$.



b) Fie $V' = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{100}; \sqrt{2} + \frac{1}{100} \right)$,

$V' \in \mathcal{V}(\sqrt{2})$. Găsește o mulțime $U' \in \mathcal{V}(2)$ astfel încât $f(x) \in V', \forall x \in U' \cap [0; \infty) \setminus \{2\}$.

3) Fie funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2}$.



Alege pe axa Oy o vecinătate V a punctului O . Găsește o vecinătate $U \in \mathcal{V}(\infty)$ astfel încât, dacă $x \in U \setminus \{0\}$, să rezulte $f(x) \in V$.

4) Fie $M = (-\infty, 0) \setminus \{-1\} \cup \{2\}$.

Încearcă să litera A dacă afirmația este adevărată și litera F în caz contrar:

- a) $0 \in M'$; A; F;
- b) $2 \in M'$; A; F;
- c) $-1 \in M'$; A; F;
- d) $-\infty \in M'$; A; F;
- e) $1 \in M'$; A; F;
- f) $-2 \in M'$; A; F;
- g) $\infty \in M'$; A; F;
- h) $\frac{1}{2} \in M'$; A; F.

5) Care este mulțimea D' a punctelor de acumulare în fiecare caz în parte:

- a) $D = \mathbb{R}$;
- b) $D = \mathbb{R}'$;
- c) $D = \{0; 2; 4; 6\}$;
- d) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\}$?

6) Folosind definiția, demonstrează:

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 3) = -1$;
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} 10^x = \infty$.

Figura ilustrează faptul că există o vecinătate V a lui 1 de pe axa Oy și, oricare ar fi U vecinătate a lui 1 de pe axa Ox , mulțimea U nu este „dusă“ de funcția f în vecinătatea V a lui 1. În acest caz $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ nu există.

Putem observa că această funcție are „tendințe“ laterale în punctul 1 de pe axa Ox , adică, dacă ne apropiem de 1 prin valori mai mici decât 1, valorile funcției se apropie de 1, iar dacă ne apropiem de 1 prin valori mai mari decât 1, valorile funcției se apropie de 0.

Limite laterale

Exemplu. $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$.

x	-10^{-4}	-10^{-6}	-10^{-8}	-10^{-10}	0	10^{-10}	10^{-8}	10^{-6}	10^{-4}
$f(x)$	-10^4	-10^6	-10^8	-10^{10}		10^{10}	10^8	10^6	10^4

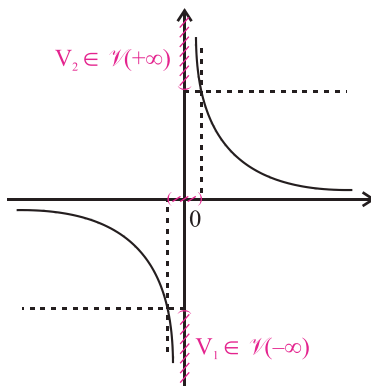
Analiza tabelului și a reprezentării grafice arată că nu există $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Însă, funcțiile

$$f_1: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = \frac{1}{x} \text{ și}$$

$$f_2: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = \frac{1}{x},$$

au limită în 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = +\infty.$$



Definiție.

Punctul $a \in \mathbb{R}$ este *punct de acumulare la dreapta (la stânga)* pentru D dacă, $\forall V \in \mathcal{V}(a), V \cap D \cap (a, +\infty) \neq \emptyset$ (respectiv, $V \cap D \cap (-\infty, a) \neq \emptyset$).

Observație.

Dacă a este punct de acumulare la stânga și la dreapta pentru D , atunci a este punct de acumulare pentru D (notăm $a \in D'$).

Definiție.

Fie funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}, l \in \bar{\mathbb{R}}$ și $a \in D' \cap \mathbb{R}$ punct de acumulare la dreapta. Dacă $\forall V \in \mathcal{V}(l), \exists U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $\forall x \in U \cap D \cap (a, +\infty)$ avem $f(x) \in V$, spunem că f are *limita l la dreapta în a* și notăm

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{x \searrow a} f(x) = f(a+0) = l_d(a) = l.$$

7) Fie funcția $h: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(x) = \begin{cases} x+2, & \text{dacă } x \in [-2, 1) \\ 2, & \text{dacă } x = 1 \\ -2x+3, & \text{dacă } x \in (1, 2] \end{cases}$$

- Trasează graficul funcției h .
- Există $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$? Dacă da, calculează-o.
- Există $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$? Dacă da, calculează-o.
- Există $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$?

8) Arată că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = [x]$ nu are limită în 1.

Cum calculăm limitele laterale ale unei funcții într-un punct?

9) Fie $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$. Calculează

limitele laterale ale funcției în punctul 0.

10) Determină parametrul real a , pentru care funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{4\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x < 4 \\ ax^2+5, & x > 4 \end{cases} \text{ are limită în } x=4.$$

11) Calculează limitele laterale ale funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x+3, & x < 2 \\ 2x+1, & x \geq 2 \end{cases}$ în $x=2$.

12) Calculează limitele laterale ale funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ 2x+5, & x > 0 \end{cases}$ în punctele $x=-1$ și $x=0$.

Definiție.

Fie funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$ și $a \in D'$ punct de acumulare la stânga. Dacă $\forall V \in \mathcal{V}(l)$, $\exists U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $\forall x \in U \cap D \cap (-\infty, a)$ avem $f(x) \in V$, spunem că f are limita l la stânga în a și notăm $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \nearrow a} f(x) = f(a-0) = l_s(a) = l$.

Teoremă.

Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ și $a \in D' \cap \mathbb{R}$ un punct de acumulare bilateral. Funcția f are limită în a dacă și numai dacă f are limită la dreapta și la stânga în a și aceste limite sunt egale.

Demonstrație.

„ \Rightarrow ” Dacă există $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, atunci evident există $f(a-0) = l$ și $f(a+0) = l$.

„ \Leftarrow ” Presupunem că există $f(a+0)$ și $f(a-0)$, iar $f(a+0) = f(a-0) = l$. Rezultă că, pentru oricare $V \in \mathcal{V}(l)$, există $U_1, U_2 \in \mathcal{V}(a)$, astfel încât $\forall x \in U_1 \cap D \cap (-\infty, a)$ implică $f(x) \in V$ și $\forall x \in U_2 \cap D \cap (a, +\infty)$ implică $f(x) \in V$. Cum $U = U_1 \cap U_2 \in \mathcal{V}(a)$ și $\forall x \in U \cap D \setminus \{a\}$ implică $f(x) \in V$, rezultă că există $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

13) Stabilește dacă funcția

$f: \mathbb{R} \setminus \{5\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{(x-5)^2}$ are limită în punctul 5.

14) Determină parametrul real a astfel încât funcția

a) $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x-1}, & x < 1 \\ \ln(x-1), & x > 1 \end{cases}$

să aibă limita în punctul 1;

b) $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x-2}, & x < 2 \\ \frac{1}{e^{2-x}}, & x > 2 \end{cases}$ să

aibă limită în punctul 2;

c) Determină valorile parametrului real nenul m astfel încât funcția

$f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2 + e^{\frac{m}{x-1}}}$ să aibă

limită în punctul $x = 1$.



● 1. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Arată, cu ajutorul definiției (cu vecinătăți), că $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$.

● 2. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$. Folosind definiția (cu vecinătăți), arată că $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

● 3. Fie $f: \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{2}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x - \sqrt{2}}$.

i) Calculează $f(\sqrt{2}-0)$ și $f(\sqrt{2}+0)$.

ii) Există $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x)$?

● 4. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1, & \text{dacă } x \in (-\infty, 2) \\ 10, & \text{dacă } x = 2 \\ -x^2 + 7, & \text{dacă } x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

Cercetează dacă există $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

● 5. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{dacă } x \leq 1 \\ 3-ax^2, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$,

$a \in \mathbb{R}$. Determină parametrul real a astfel încât f să aibă limită în 1.

● 6. Fie $h: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} x+2, & x \in [-2, 1) \\ 2, & x = 1 \\ -2x+3, & x \in (1, 2] \end{cases}$.

i) Calculează $h(1-0)$ și $h(1+0)$.

ii) Are h limită în $x_0 = 1$?

● 7. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & x \in (-\infty, -1) \\ x, & x \in [-1, \infty) \end{cases}$.

Cercetează dacă există $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

● 8. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+a}, & x \in (-\infty, -2) \\ x, & x \in [-2, \infty) \end{cases}$.

Pentru ce valori ale parametrului a , f are limită în -2 ?

2. Operații cu limite de funcții. Limitele funcțiilor elementare

Operații cu funcții

Definiție. Dacă $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, atunci:

◆ funcția $f + g : D \rightarrow \mathbb{R}$, cu $(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in D$ se numește *funcția sumă* a funcțiilor f și g ;

◆ funcția $f \cdot g : D \rightarrow \mathbb{R}$, cu $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \forall x \in D$ se numește *funcția produs* a funcțiilor f și g ;

◆ funcția $\frac{f}{g} : D_1 \rightarrow \mathbb{R}, D_1 = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$, cu

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \forall x \in D_1$, se numește *funcția cât* a funcțiilor f și g .



Fie $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$ și $g(x) = x^2 + 4$. Atunci:
 $(f + g)(x) = x + x^2 + 4, \forall x \in \mathbb{R}; (f \cdot g)(x) = x(x^2 + 4),$

$\forall x \in \mathbb{R}; \left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{x^2 + 4}{x}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

Fie funcția $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x^2(x^2 + 4)$. Se observă că $h = f^2 \cdot g$.

Compunerea funcțiilor este o altă modalitate de a defini funcții noi cu ajutorul unor funcții cunoscute.



Fie funcțiile $f : A \rightarrow B$ și $g : C \rightarrow D, \text{Im } f \subseteq C$.

Funcția $g \circ f : A \rightarrow D, (g \circ f)(x) = g(f(x))$, se numește *compusa funcției g cu funcția f* .

Operații cu limite de funcții

Proprietățile care urmează se pot demonstra cu ajutorul rezultatelor obținute pentru operațiile cu limite de șiruri.

Teoremă.

Fie $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}, a \in D', \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ și $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$

◆ Cu excepția cazului $\{l_1, l_2\} = \{-\infty, \infty\}$ (*cazul $\infty - \infty$*), funcția $f + g$ are limită în punctul a și

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \begin{cases} l_1 + l_2, & \text{dacă } l_1, l_2 \in \mathbb{R} \\ \infty, & \text{dacă } l_1 = l_2 = \infty \text{ sau } l_1 = \infty \text{ și } l_2 \in \mathbb{R} \\ -\infty, & \text{dacă } l_1 = l_2 = -\infty \text{ sau } l_1 = -\infty \text{ și } l_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

◆ Cu excepția cazului $\{l_1, l_2\} = \{0, \infty\}$ sau $\{l_1, l_2\} = \{0, -\infty\}$ (*cazul $0 \cdot \infty$*), funcția $f \cdot g$ are limită în punctul a și

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \begin{cases} l_1 \cdot l_2, & \text{dacă } l_1, l_2 \in \mathbb{R} \\ \infty, & \text{dacă } l_1 = l_2 = \infty \text{ sau } l_1 = \infty \text{ și } l_2 > 0 \text{ sau } \\ & l_1 = -\infty \text{ și } l_2 < 0 \text{ sau } l_1 = l_2 = -\infty \\ -\infty, & \text{dacă } l_1 = \infty \text{ și } l_2 = -\infty \text{ sau } l_1 = -\infty \text{ și } l_2 > 0 \\ & \text{sau } l_1 = \infty \text{ și } l_2 < 0 \end{cases}$$

Să ne amintim operațiile cu funcții!

1) Fie funcțiile $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = 2^x, g(x) = x^2, h(x) = \sqrt[3]{x}$.

i) Calculează:

a) $(f + 2g - h)(x)$;

b) $(f \cdot g \cdot h)(x)$;

c) $(g \cdot h^2)(x)$;

d) $\left(h + \frac{g}{f}\right)(x)$;

e) $\left(\frac{f - 2g}{3f + 1}\right)(x)$.

ii) Fie $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Care dintre enunțurile următoare sunt adevărate?

a) dacă $F(x) = \frac{x + x^2}{2^x + 5}$, atunci $F = \frac{h^3 + g}{f + 5}$;

b) dacă $F(x) = 4^x + 2^x$, atunci $F = f^2 + f$;

c) dacă $F(x) = \frac{xx^2}{2^x}$, atunci $F = \frac{h^3 \cdot g}{f}$;

d) dacă $F(x) = x^4$, atunci $F = 1 - g^2$;

e) dacă $F(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$, atunci $F = \frac{1 - g}{1 + h^4}$.

2) Fie funcțiile

$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = x^2 - 3x + 2$,

$f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = 3^x$,

$f_3 : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), f_3(x) = \sqrt{x}$.

Marchează corespondențele:

- | | |
|------------------------------|---|
| a) $f_3 \circ f_2 \circ f_1$ | 1) $3^{\sqrt{x}}$ |
| b) $f_2 \circ f_3$ | 2) $3^{2\sqrt{x}} - 3 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 2$ |
| c) $f_3 \circ f_2$ | 3) $\sqrt{3^{x^2 - 3x + 2}}$ |
| d) $f_2 \circ f_2$ | 4) 3^{3^x} |
| e) $f_1 \circ f_2 \circ f_3$ | 5) $9^x - 3^{x+1} + 2$ |
| f) $f_1 \circ f_2$ | 6) $\sqrt{3^x}$ |

3) Fie $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3, f(x) \neq 3, \forall x \in (1; 3)$ și

$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \infty$. Determină $\lim_{x \rightarrow 2} g(f(x))$.

Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in D'$. Dacă $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ și există $V \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $\forall x \in V \cap D \setminus \{a\}$ implică $f(x) > 0$ (respectiv $f(x) < 0$), spunem că f are în punctul a limita zero pozitiv (respectiv zero negativ) și notăm 0_+ (respectiv 0_-).

Teoremă. Fie $g: D \rightarrow \mathbb{R}^*$, $a \in D'$ și $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Despre limita funcției $\frac{1}{g}$ în punctul a putem spune că:

1)
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \begin{cases} \frac{1}{l}, & \text{dacă } l \in \mathbb{R}^* \\ 0, & \text{dacă } l \in \{\pm\infty\}. \\ \infty, & \text{dacă } l = 0_+ \\ -\infty, & \text{dacă } l = 0_- \end{cases}$$

2) Dacă $l = 0$ și $\forall V \in \mathcal{V}(a)$, $\exists x_1, x_2 \in V \cap D \setminus \{a\}$ astfel încât $g(x_1) > 0$ și $g(x_2) < 0$, atunci $\frac{1}{g}$ nu are limită în a .

Observație.

Fie $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in D'$. Cum $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$, studiul limitei

funcției cât în punctul a se reduce la studiul unei funcții produs.

Cazul de excepție $0 \cdot \infty$ apare în ipostaza $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$.

Observații.

◆ Operațiile algebrice cu funcții care au limită sunt valabile și pentru limitele laterale.

◆ Dacă nu ne situăm în anumite cazuri de excepție, avem:

$\lim(f + g) = \lim f + \lim g$ (limita sumei este suma limitelor).

$\lim(f \cdot g) = \lim f \cdot \lim g$ (limita produsului este produsul limitelor).

$\lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g}$ (limita câtului este egală cu câtul limitei).

În cazurile exceptate, la operații cu limite de funcții limita poate să existe (și să fie egală cu un număr real, $+\infty$ sau $-\infty$) sau să nu existe. Exemplele următoare motivează această afirmație.

◆ Cazul de excepție „ $\infty - \infty$ “.



1) Fie $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x$ și $g(x) = -x$;

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$ și

$\exists \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty.$

2) Fie $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$ și $g(x) = -x$;

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$ și $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0.$

4) Completează tabelul:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$
$l_1 \in \mathbb{R}$	$l_2 \in \mathbb{R}$	$l_1 + l_2$
$l_1 \in \mathbb{R}$	$+\infty$	
$l_1 \in \mathbb{R}$	$-\infty$	
$+\infty$	$+\infty$	
$-\infty$	$-\infty$	
∞	$-\infty$	nedeterminare

5) Completează tabelul:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)]$
$l_1 \in \mathbb{R}$	$l_2 \in \mathbb{R}$	$l_1 l_2$
$l_1 > 0$	$+\infty$	
$l_1 < 0$	$+\infty$	
$+\infty$	$+\infty$	
$-\infty$	$-\infty$	
$+\infty$	$-\infty$	
0	$\pm\infty$	

6) Completează tabelul:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$
$l_1 \in \mathbb{R}$	$l_2 \in \mathbb{R}^*$	$\frac{l_1}{l_2}$
$l_1 > 0$	0_+	$+\infty$
$l_1 > 0$	0_-	
$+\infty$	$l_2 > 0$	
$-\infty$	$l_2 > 0$	
0	$+\infty$	
0	$-\infty$	
$+\infty$	0_+	
$-\infty$	0_-	

7) a) Dacă $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$ și

$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \infty$, cât este $\lim_{x \rightarrow 2} [2f(x) - 5g(x)]$?

b) Dacă $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -3$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$,

cât este $\lim_{x \rightarrow \infty} [2f(x)g(x)]$?

c) Dacă $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ și $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -\infty$,

cât este $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5f(x) - 2007}{g(x)}$?

3) Fie $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ și $g(x) = 2x$;

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \text{ și } \exists \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + g(x)) = -\infty.$$

◆ Cazul de excepție „ $0 \cdot \infty$ “.



1) Fie $f, g : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ și $g(x) = 4^x$;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty \text{ și}$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 2^x = \infty.$$

2) Fie $f, g : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ și $g(x) = 2^x$;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty \text{ și } \exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot 2^x = 1.$$

3) Fie $f, g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = -x^2$;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty \text{ și } \exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (-x) = -\infty.$$

Limitele funcțiilor compuse

Teoremă.

Fie $f : A \rightarrow B$ și $g : B \rightarrow \mathbb{R}$, $A, B \subset \mathbb{R}$, $a \in A'$, $b \in B'$.

$$\text{Dacă } \begin{cases} \text{i) } \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \\ \text{ii) } \exists V \in \mathcal{V}(a), \forall x \in V \cap A \setminus \{a\}, f(x) \neq b, \\ \text{iii) } \exists \lim_{y \rightarrow b} g(y) = l, l \in \bar{\mathbb{R}} \end{cases}$$

$$\text{atunci } \exists \lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = \lim_{y \rightarrow b} g(y) = l.$$

Observație.

Substituția $y = f(x)$ se mai numește „schimbare de variabilă”.



Să calculăm limitele următoare, folosind schimbarea de variabilă:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^6 - 1} = \lim_{y \rightarrow \infty} \sqrt{y} = \infty$, unde $y = x^6 - 1$;

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^6 - 1}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{y}} = 0$, unde $y = \frac{1}{\sqrt{x^6 - 1}}$;

3) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\sqrt{x}} = \lim_{y \rightarrow 0} e^y = 1$, unde $y = \sqrt{x}$;

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\sqrt{x}} = \lim_{y \rightarrow \infty} e^y = \infty$, unde $y = \sqrt{x}$;

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\sqrt{x^2}} = \lim_{y \rightarrow 0} e^y = 1$, unde $y = \sqrt{x^2}$.

8) Fie $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ și $a \in D'$. Dacă $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ și funcția g nu are limită în a , demonstrează că funcția $f + g$ nu are limită în a .

Indicație.

Folosește raționamentul de demonstrație prin reducere la absurd.

9) Fie $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ și $a \in D'$. Dacă $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}^*$ și g nu are limită în a , demonstrează că funcția fg nu are limită în a .

10) Rămâne adevărată concluzia din problema precedentă dacă $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ și g nu are limită în a ?

Cum folosim schimbarea de variabilă pentru a calcula limita unei funcții compuse?

11) Verifică următoarele calcule:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x^3 - x^2 + x - 1} = \lim_{y \rightarrow \infty} e^y = 0, \text{ unde}$$

$$y = x^3 - x^2 + x - 1.$$

12) Completează spațiile punctate:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3x - 4} = \lim_{y \rightarrow \infty} \sqrt{y} = \infty$, unde

$$y = x^2 + 3x - 4;$$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\sqrt{x^2 + 3x - 4}} = \lim_{y \rightarrow \infty} e^y = \dots$, unde $y = \dots$;

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x^3 - x^2 + x - 1} = \lim_{y \rightarrow \infty} \sqrt[3]{y} = \dots$,

unde $y = \dots$;

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}} = \lim_{y \rightarrow \dots} \dots = \dots$,

unde $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}}$.

Limitele funcțiilor elementare

1) Funcția constantă

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = c, c \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} c = c, \forall \alpha \in \bar{\mathbb{R}}$$

2) Funcția identitate pe \mathbb{R}

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} x = \alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

3) Funcția putere cu exponent natural

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} x^n = \alpha^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} \infty, & n \text{ par} \\ -\infty, & n \text{ impar} \end{cases}$$

4) Funcția putere cu exponent real

$$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^a, a \in \mathbb{R}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} x^a = \alpha^a, \forall \alpha \in (0, \infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^a = \begin{cases} \infty, & a > 0 \\ 0, & a < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^a = \begin{cases} 0, & a > 0 \\ \infty, & a < 0 \end{cases}$$

5) Funcția radical

$$a) f: [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[p]{x}, p \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \sqrt[p]{x} = \sqrt[p]{\alpha}, \forall \alpha \in [0, \infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[p]{x} = \infty$$

Pentru $p = 1$ obținem

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \sqrt{x} = \sqrt{\alpha}, \forall \alpha \in [0, \infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} = \infty$$

Calculul limitelor de funcții elementare și utilizarea operațiilor cu funcții care au limită.

13) Calculează limitele:

- $\lim_{x \rightarrow 2} x^5;$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{10};$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^8;$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} x^7;$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + x^2 + x + 1);$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2 - 1)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + 1).$

14) Calculează limitele:

- $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} x^{\sqrt{2}};$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{\pi}{2}};$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{\sqrt{3}}};$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^{1+\sqrt{2}};$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^{1-\sqrt{2}}.$

15) Calculează limitele:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} |x - 1|;$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x - 1|;$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} |x^2 - 4|;$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x^2 - 4|;$
- $\lim_{x \rightarrow 2} |x - 1|.$

16) Calculează limitele:

- $\lim_{x \rightarrow 16} \sqrt{x};$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x};$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt[n]{x},$ unde $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ fixat;

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[p+1]{x}, p \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \sqrt[p+1]{x} = \sqrt[p+1]{\alpha}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[p+1]{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[p+1]{x} = -\infty$$

Pentru $p = 1$ obținem

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{\alpha}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x} = -\infty$$

6) Funcția exponențială

$f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} a^x = a^\alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ 0, & 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ \infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$$

7) Funcția logaritmică

$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \log_a x = \log_a \alpha, \forall \alpha \in (0, \infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ -\infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & a > 1 \\ \infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$$



Dacă $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție elementară sau o funcție care se obține din funcții elementare prin aplicarea succesivă de un număr finit de ori a operațiilor algebrice, de compunere, de inversare și $\alpha \in D \cap D'$, atunci există $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha)$.

Problemă rezolvată.

Calculează limitele laterale ale funcției $f: \mathbb{R} \setminus \{2; 3\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{e - e^{\frac{1}{x-2}}} \text{ în punctele } x = 2 \text{ și } x = 3.$$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[4]{x}$;

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[5]{x}$;

f) $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[7]{x}$;

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 4\sqrt[4]{x})$.

17) Calculează limitele:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} 2^x$;

b) $\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt[3]{\pi})^x$;

c) $\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{3})^x$;

d) $\lim_{x \rightarrow 0} a^x, a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$;

e) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{3}\right)^x$;

f) $\lim_{x \rightarrow \sin \alpha} e^x, \alpha \in \mathbb{R}$;

g) $\lim_{x \rightarrow \ln a} e^x, a \in (0, \infty)$.

18) Calculează limitele:

a) $\lim_{x \rightarrow e} \ln x$;

b) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x$;

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x$;

d) $\lim_{x \rightarrow 100} \lg x$;

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \lg x$;

f) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \lg x$;

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} (e \lg x + 10 \ln x)$;

h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \ln x$;

i) $\lim_{x \rightarrow 10} \log_{\frac{1}{10}} x$;

j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_{\frac{1}{2}} x$;

k) $\lim_{x \searrow 0} \log_{\frac{1}{e}} x$.

Soluție.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{1}{e - e^y} = \frac{1}{e}, \text{ unde } y = \frac{1}{x-2};$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{e - e^y} = 0, \text{ unde } y = \frac{1}{x-2}.$$

Dacă $x \in (2; 3)$, atunci $x - 2 \in (0; 1)$ și $\frac{1}{x-2} > 1$, deci $e < e^{\frac{1}{x-2}}$.

$$\text{Avem } \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow e \\ y > e}} \frac{1}{e - y} = -\infty, \text{ unde } y = e^{\frac{1}{x-2}} \text{ și}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow e \\ y < e}} \frac{1}{e - y} = \infty, \text{ unde } y = e^{\frac{1}{x-2}}.$$

19) Calculează limitele:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x}{\sqrt{x}};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{x} + x^3\right)\left(\sqrt[3]{x} - |x|\right);$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + e^x}{\sqrt[3]{x}};$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} + 1}{\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 1}.$$



● 1. Calculează limitele laterale ale

funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \geq 1 \\ x^2, & x < 1 \end{cases}$, în
punctul $\alpha = 1$.

● 2. Calculează:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} (x^4 + x); \quad \lim_{x \rightarrow -2} (x^4 + x);$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} (x^4 + x); \quad \lim_{x \rightarrow 2} (x^4 + x);$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} (-x^3 + 8x^2); \quad \lim_{x \rightarrow 1} (-x^3 + 8x^2);$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow -2} (-x^3 + 8x^2); \quad \lim_{x \rightarrow -1} (-x^3 + 8x^2);$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + x}{x^4 - x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x}{x^4 - x};$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + x}{x^4 - x}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + x}{x^4 - x};$$

$$\text{g) } \lim_{x \neq 0} \frac{x^4 + x^3}{x^4}; \quad \lim_{x \searrow 0} \frac{x^4 + x}{x^4};$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + x^3}{x^4}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + x^3}{x^4};$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^3}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^3};$$

$$\text{j) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^3}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^3}.$$

● 3. Calculează limitele laterale în punctul $x = 2$

pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{|x-2|}{x^2 + x + 1}$.

● 4. Calculează limitele laterale ale funcțiilor în punctele indicate:

$$\text{a) } f: \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}, a = 3 \text{ și } a = -3;$$

$$\text{b) } f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}}, a = 1;$$

$$\text{c) } f: (1; 2) \cup (2; \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{-x}{\ln(x-1)}, a = 2.$$

● 5. Calculează limitele:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} 2^x; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} 2^x;$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x; \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} 2^x;$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^x; \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{4}\right)^x;$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^x; \quad \text{h) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\pi}{4}\right)^x;$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow \infty} e^x; \quad \text{j) } \lim_{x \rightarrow 0} e^x;$$

$$\text{k) } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x; \quad \text{l) } \lim_{x \rightarrow 1} e^x;$$

$$\text{m) } \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x; \quad \text{n) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x.$$

● 6. Calculează valoarea limitei:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 3x + 1)$;

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x + 1)$;

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 - 5x^2 + 2)$;

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (-x^3 - 5x^2 + 2)$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} (-\sqrt{2}x^2 + x - 1)$;

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-\sqrt{2}x^2 + x - 1)$;

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x^2 + 1)$;

h) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + x^2 + 1)$;

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^4 - x^3 + x^2 - x)$;

j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - x^3 + x^2 - x)$.

● 7. Folosește la calculul limitelor următoare calculul limitelor unor funcții polinomiale și completează spațiul punctat.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (4^x - 2^x + 1) = \dots\dots\dots; (y = 2^x)$;

b) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (\ln^2 x + \ln x + 1) = \dots\dots\dots; (y = \ln x)$;

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt[3]{x}) = \dots\dots\dots; (y = \sqrt[3]{x})$.

● 8. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2n+1} + x + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$. Calculează $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ și $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

● 9. Se consideră

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x - q; & x < 1 \\ 2x + p; & x > 1, \\ q; & x = 1 \end{cases}$$

unde p și q sunt parametri reali.

Pentru ce valori ale lui p și q funcția f are limită în punctul $x = 1$?

În ce caz această limită este egală cu $f(1)$?

● 10. Determină $a \in \mathbb{R}$ dacă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in (-\infty, 0) \\ 1 - x, & x \in [0, 1] \\ a, & x \in (1, \infty) \end{cases}, a \in \mathbb{R} \text{ are limită în orice } \alpha \in \mathbb{R}.$$

● 11. Calculează:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 1 \right) \left(-\sqrt{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{\pi}{3} \right)$;

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x^3 - x^2 + x - 1)$;

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}; \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$.

3. Metode de eliminare a nedeterminării

În studiul limitei unei funcții într-un punct putem întâlni cazurile de nedeterminare: $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^∞ , ∞^0 , 0^0 . În aceste situații, căutăm să exprimăm funcția a cărei limită o studiem în forme echivalente care nu mai prezintă cazuri de nedeterminare. Indicăm câteva tehnici posibile prin exemplele următoare:

I. Exercițiul rezolvat.

Studiază dacă există $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - 3x + 1)$.

Soluție.

Deoarece $\lim_{x \rightarrow \infty} 2x^2 = +\infty$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} (-3x + 1) = -\infty$, ne plasăm în cazul de excepție $\infty - \infty$. Pentru eliminarea nedeterminării procedăm astfel:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(2 - 3 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = \infty.$$

Aceași strategie se folosește și în cazul general:

Limitele funcțiilor polinomiale.

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{0, n}$, $a_n \neq 0$ (funcția polinomială).

$$\diamond \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^n \left(a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + \dots + a_0 \frac{1}{x^n} \right) = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } a_n > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } a_n < 0 \end{cases}$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } n \text{ par și } a_n > 0 \text{ sau } n \text{ impar și } a_n < 0 \\ -\infty, & \text{dacă } n \text{ impar și } a_n > 0 \text{ sau } n \text{ par și } a_n < 0 \end{cases}$$

II. Exercițiul rezolvat.

Studiază dacă există limitele următoare:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + x - 2}; \quad b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + x - 2}.$$

Soluție. a) Observăm că suntem în cazul de excepție $\frac{\infty}{\infty}$, deci

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(2 - 3 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - 2 \cdot \frac{1}{x^2} \right)} = 2.$$

b) Întâlnim cazul de excepție $\frac{0}{0}$, deci

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3}.$$

Această prelucrare este posibilă deoarece, conform definiției, x reprezintă un număr oricât de apropiat de 1, dar diferit de 1.

1) Calculează următoarele limite:

- $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 1)$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 2x + 1)$;
- $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 2x + 1)$;
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 2x + 1)$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2x + 1)$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} (x^5 - 4x - 3)$;
- $\lim_{x \rightarrow -1} (x^5 - 4x - 3)$;
- $\lim_{x \rightarrow 1} (x^5 - 4x - 3)$;
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^5 - 4x - 3)$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - 4x - 3)$.

2) Calculează următoarele limite:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 4}{2x^2 - x - 1}$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5x + 4}{2x^2 - x - 1}$;
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{2x^2 - x - 1}$;
- $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{2x^2 - x - 1}$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 5x + 4}{2x^2 - x - 1}$;
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$;
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$;

În cazul general...

Limitele funcțiilor raționale

Fie $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, $a_n \neq 0$ și $f_2(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0$, $b_m \neq 0$. Funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f = \frac{f_1}{f_2}$,

unde $D = \{x \in \mathbb{R} \mid f_2(x) \neq 0\}$, se numește *funcție rațională*.

$$\diamond \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{\substack{y = \frac{1}{x} \\ y \searrow 0}} y^{m-n} \frac{a_n + a_{n-1}y + \dots + a_0 y^n}{b_m + b_{m-1}y + \dots + b_0 y^m} =$$

$$= \begin{cases} \infty, & \text{dacă } n > m \text{ și } a_n \cdot b_m > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } n > m \text{ și } a_n \cdot b_m < 0 \\ \frac{a_n}{b_m}, & \text{dacă } n = m \\ 0, & \text{dacă } n < m \end{cases}.$$

Asemănător se procedează pentru $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

\diamond Fie $a \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $f_1(a) = f_2(a) = 0$. Atunci există $g_1, g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_1(a) \neq 0$, $g_2(a) \neq 0$ și $i, j \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $f_1(x) = (x-a)^i g_1(x)$ și $f_2(x) = (x-a)^j g_2(x)$. Astfel,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{g_1(a)}{g_2(a)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x-a)^{i-j}.$$

III. Exerciții rezolvate.

1) Fie $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$,

$g(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$. Studiază dacă există $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, respectiv $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$.

Soluție. Se aplică principiul „dominării de grad” sau principiul „dominării de coeficient”. În cazul în care acestea nu funcționează, amplificăm cu „conjugata”.

Astfel, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, conform principiului „dominării de

$$\text{coeficient}”; \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1})^2 - (\sqrt{x^2 - x + 1})^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right)} = 1.$$



- Conjugata expresiei $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ este $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.
- Conjugata expresiei $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$ este $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$.

j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x^3-1}$;

k) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x^3-1}$;

l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x^3-1}$;

m) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^3-1}$.

3) Calculează:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^2 + 4x - 1}{2x^2 - 3x + 1}$;

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 + 4x - 1}{2x^2 - 3x + 1}$;

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x^3}{1+x^2}$;

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x^3}{1+x^2}$;

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x^5}{1+x^3}$;

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1}$;

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 5}{2x^2 + 3x + 4}$;

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{3x+2}$;

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2+1}$;

j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{4-x^2}$;

k) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1}$;

l) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+x-12}{3x-9}$;

m) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$;

n) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+8}{x^2-4}$;

Nedeterminările care apar în studiul limitelor funcțiilor iraționale se înlătură, de regulă, folosind „factorul comun forțat” sau raționalizarea folosind formulele:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}), \quad n \text{ impar.}$$

2) Calculează $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - \sqrt{x-2}}{x^2 - 9}$.

Soluție.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - \sqrt{x-2}}{x^2 - 9} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - (\sqrt{x-2})^2}{(x^2 - 9)(1 + \sqrt{x-2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - x}{(x-3)(x+3)(1 + \sqrt{x-2})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{(x+3)(1 + \sqrt{x-2})} = -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

IV. O altă posibilitate de eliminare a nedeterminării o constituie folosirea următoarelor „limite remarcabile”.

Numărul e , introdus de Euler, pe care l-am întâlnit deja ca bază a logaritmilor naturali este definit printr-o limită remarcabilă:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Din definiția numărului e rezultă următoarele limite:

1° $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

2° $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

3° $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad a > 0$

4° $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r$

Demonstrație.

1° i) Facem schimbarea de variabilă $y = \frac{1}{x}, x \neq 0$;

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x} = \infty \text{ deci } \lim_{x \searrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$$

ii) Facem schimbarea de variabilă $y = -\frac{1}{x} - 1, \lim_{x \nearrow 0} \left(-\frac{1}{x} - 1\right) = \infty$.

$$\text{Atunci } \lim_{x \nearrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{y+1}\right)^{-(y+1)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \left(1 + \frac{1}{y}\right) = e.$$

Din i), ii) rezultă că există $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

2° Considerăm schimbarea de variabilă $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$. Atunci

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow e} \ln y = \ln e = 1.$$

o) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$;

p) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + x^2 - 2}{x^2 - 1}$;

r) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 + x^4 + x^2 - 3}{x^2 - 1}$;

s) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2n} + x^{2n-2} + \dots + x^2 - n}{x^2 - 1}, \quad n \in \mathbb{N}^* ;$

ș) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}}$;

t) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^3 + x^2 - 2x - 2}{x^3 - x^2 - 2x + 2}$.

4) Calculează următoarele limite:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x-1})$;

b) $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x} - \sqrt{x-1})$;

c) $\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x} - \sqrt{x-1})$;

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x-1} - \sqrt{x})$;

e) $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x-1} - \sqrt{x})$;

f) $\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x-1} - \sqrt{x})$.

5) Calculează limitele următoare:

a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 16}$;

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 16}$;

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 16}$.

6) Calculează limitele următoare:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}$;

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$;

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)^x$;

3° Considerăm schimbarea de variabilă $y = a^x - 1$, echivalentă cu $x = \frac{\ln(1+y)}{\ln a}$. Atunci $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(y+1)} \cdot \ln a = \ln a$.

4° Facem schimbarea de variabilă $y = \ln(1+x)$, echivalentă cu $x+1 = e^y$, deci $x = e^y - 1$. Atunci $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{yr} - 1}{e^y - 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{yr} - 1}{ry} \cdot \frac{1}{\frac{e^y - 1}{y}} \cdot r = r$; $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{yr} - 1}{ry} \stackrel{r'y=t}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = \ln e = 1$

$$\begin{aligned} \text{d) } & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^{x-1}; \\ \text{e) } & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^2; \\ \text{f) } & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Din rezultatele precedente se obțin:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$, dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} (1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e$, dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} = 1$, dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$
4. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{f(x)} - 1}{f(x)} = \ln a$ ($a > 0$), dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$
5. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(1+f(x))^r - 1}{f(x)} = r$, dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

Utilizarea acestor rezultate oferă mai multe posibilități de eliminare a nedeterminărilor de tip $\frac{0}{0}$ sau 1^∞ .

Exerciții rezolvate.

Calculează limitele: a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^x$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$, $a, b > 0$.

Soluție.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \left(\frac{2x+3}{2x+1} - 1\right)\right]^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2x+1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\right]^{\frac{2}{2x+1} \cdot x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2x+1}} = e^1 = e.$$

b) **Metoda I.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{a^x + b^x - 2}{2}\right)^{\frac{2}{a^x + b^x - 2}} \right]^{\frac{a^x + b^x - 2}{2x}} = e^{\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + b^x - 2}{x}} = e^{\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - 1}{x} + \frac{b^x - 1}{x}\right)} = e^{\frac{1}{2}(\ln a + \ln b)} = e^{\frac{1}{2} \ln(ab)} = \sqrt{ab}$$

Metoda II.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(a^x + b^x)}{2x}}; l_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{a^x + b^x}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\ln \left[\left(\frac{a^x + b^x}{2} - 1\right) + 1 \right]}{\frac{a^x + b^x}{2} - 1} \cdot \left(\frac{a^x - 1}{x} + \frac{b^x - 1}{x}\right).$$

Considerăm schimbarea de variabilă $y = \frac{a^x + b^x}{2} - 1$;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[\left(\frac{a^x + b^x}{2} - 1\right) + 1 \right]}{\frac{a^x + b^x}{2} - 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(y+1)}{y} = 1, \text{ deci } l_1 = \frac{1}{2} \ln ab. \text{ Atunci } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln \sqrt{ab}} = \sqrt{a \cdot b}.$$

Limita funcțiilor de forma $f(x)^{g(x)}$

Fie $f: D \rightarrow (0, +\infty)$, $g: D \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in D'$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l_1$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l_2$.

Dacă $\exists \lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x) = b$ și $\exists V \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât

$\forall x \in V \cap D \setminus \{a\}$, $g(x) \ln f(x) \neq b$, atunci

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} e^b, & \text{dacă } b \in \mathbb{R} \\ \infty, & \text{dacă } b = \infty \\ 0, & \text{dacă } b = -\infty \end{cases}.$$

Limita funcției produs $g \ln f$ se stabilește cu ajutorul operațiilor cu funcții care au limită, mai puțin în următoarele situații: $l_1 = 1$ și $l_2 \in \{\pm\infty\}$, sau $l_1 = 0$ și $l_2 = 0$, sau $l_1 = \infty$ și $l_2 = 0$ (rezultate din cazul de excepție $0 \cdot \infty$, aplicat limitei funcției $g \ln f$).

Propoziție.

Fie funcțiile $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in D'$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \in \{\pm\infty\}$,

$\lim_{x \rightarrow a} g(x)(f(x) - 1) = b$. Dacă $\exists V \in \mathcal{V}(a)$, $\forall x \in V \cap D \setminus \{a\}$, $f(x) \neq 1$, atunci $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x) = b$.

Demonstrație.

Utilizând schimbarea de variabilă $y = f(x) - 1$, obținem

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln[(f(x) - 1) + 1]}{f(x) - 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(y + 1)}{y} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot \ln f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln[(f(x) - 1) + 1]}{f(x) - 1} \cdot (f(x) - 1) \cdot g(x) = b.$$

Observație.

Propoziția precedentă reduce studiul limitei funcției f^g , în cazul de excepție 1^∞ , la studiul limitei funcției $g(f - 1)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} (1 + f(x) - 1)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left[(1 + f(x) - 1)^{\frac{1}{f(x) - 1}} \right]^{g(x)(f(x) - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left[(1 + f(x) - 1)^{\frac{1}{f(x) - 1}} \right]^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)(f(x) - 1)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)(f(x) - 1)} \end{aligned}$$

În cazurile de excepție 0^0 și ∞^0 se utilizează aceeași schimbare de variabilă, $y = g(x) \ln f(x)$, care ne plasează în cazurile de excepție $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$. Pentru eliminarea acestor nedeterminări, vor fi prezentate unele metode și în capitolul „Funcții derivabile“.



Valoarea limitei în punctul a a lui f^g se decide imediat, dacă nu întâlnim cazurile de excepție: 1^∞ , 0^0 , ∞^0 .

7) Calculează limitele următoare:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$;
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a}$, $a \in \mathbb{R}$;
- $\lim_{x \rightarrow 2} (9 - 4x)^{\frac{1}{x-2}}$;
- $\lim_{x \rightarrow 2} (11 - 2x)^{\frac{3}{x-5}}$;
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+n}{x-1} \right)^x$, $n \in \mathbb{N}$;
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{3x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\frac{2x}{x+1}}$;
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x} \right)^x$;
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{\frac{x-1}{\sqrt{x+1}}}$;
- $\lim_{x \rightarrow 3} (7 - 2x)^{\frac{1}{x-3}}$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$.

8) Calculează limitele:

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x(x^2 + x - 6)}{\sqrt{x-2}}$;
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{1 + e^x}$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{x}$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + b^x - 2}{x}$, $a > 0$, $b > 0$.



● Calculează:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10^{10} \cdot x}{x^2 - 1}$;
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+x+x^3}{1-x-x^2}$;
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 7}{x^2 + 1}$;
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+1)^2(x+2)}{x^5 + 5}$;
5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x-3)(3x+5)(4x-6)}{3x^5 + x - 1}$;
6. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 3x - 1}{2x + 3}$;
7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x^2 - 1}$;
8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 1}{2x^3 - 7x^2 + 8x - 3}$;
9. $\lim_{x \nearrow 2} \frac{x}{x-2}$;
10. $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x-2}{|x-2|}$;
11. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{3}{x^3 - 1} \right)$;
12. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a}$, $a \in \mathbb{R}$;
13. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$, $a > 0$;
14. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2}$;
15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$;
16. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$;
17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sqrt{x^2 - 2x + 3}}{x+1}$;
18. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} - 1 \right)$;
19. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\sqrt{x} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} \right)$;

20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 1} - x \right)$;

21. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h}$, $x \in \mathbb{R}^*$;

22. $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} [x] \sqrt{x - \frac{1}{2}}$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x .

●● 23. Pentru ce valori ale parametrului real α ,

$$f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha x + x^2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \alpha + \frac{x}{2}, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

are limită în 1?

● 24. Fie $a, b \in (0, \infty)$ și funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{ax^2 + b}{x-1}. \text{ Calculează:}$$

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$;

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax)$;

iii) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$ și $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$.

●● 25. Calculează $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

●● 26. Află $a, b \in \mathbb{R}$ dacă:

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x+1} - ax - b \right) = 0$;

ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b \right) = 2$;

iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{ax^3 + bx^2} - 2x \right) = \frac{-1}{3}$.

● 27. a) Determină $A \subset \mathbb{R}$ astfel încât $ax^2 + x + 3 \geq 0$, $\forall a \in A$ și $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Pentru $a \in A$, calculează $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x+1 - \sqrt{ax^2 + x + 3} \right)$.

● 28. Determină $a \in \mathbb{R}$ astfel încât:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 3ax}{2x^2 - 1} \right)^x = e^2.$$

4. Asimptotele unei funcții

Considerăm mulțimea $D \subset \mathbb{R}$ și $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție. Dacă D este o mulțime nemărginită sau graficul lui f este o mulțime nemărginită în plan spunem că reprezentarea grafică a funcției f are ramuri nemărginite (adică nu există un cerc în plan care să conțină în interiorul său graficul funcției f). Dacă o ramură nemărginită a graficului se apropie de o anumită dreaptă, spunem că această dreaptă este asimptotă la graficul funcției. **Termenul de asimptotă provine din limba greacă: a = „fără“, simptos = „a coincide“.** Noțiunea de asimptotă se întâlnește inițial la Menechnurs (sec 4 î.Hr.), iar termenul a fost propus de Autolykos (sec 4 î.Hr.). Asimptotele unei funcții, fiind drepte în plan, pot fi: *asimptote verticale* (au direcția axei Oy), *asimptote orizontale* (au direcția axei Ox), *asimptote oblice* (nu au direcția axelor Ox și Oy).

În cele ce urmează, $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$.

Asimptote verticale

Asimptotele verticale se definesc pentru funcții nemărginite, chiar dacă funcțiile respective sunt definite pe mulțimi mărginite.

Definiție.

Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in \mathbb{R}$ un punct de acumulare al lui D .

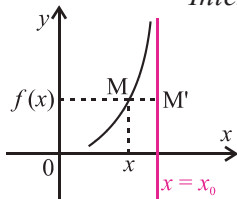
Dreapta de ecuație $x = x_0$ este *asimptotă verticală* la stânga (respectiv la dreapta) la graficul funcției f , dacă $\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ (respectiv $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$) există și este infinită.

Dreapta de ecuație $x = x_0$ se numește asimptotă verticală la graficul funcției f dacă ea este asimptotă și la stânga și la dreapta la graficul funcției f .

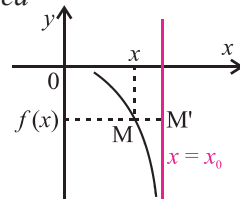
Observație.

În reperul cartezian xOy , dreapta $x = x_0$ este o dreaptă verticală.

Interpretare geometrică

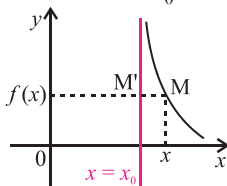


$$l_s(x_0) = +\infty; \lim_{x \nearrow x_0} d(M, M') = 0$$

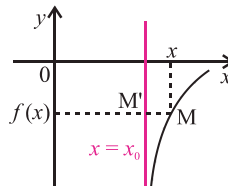


$$l_s(x_0) = -\infty; \lim_{x \searrow x_0} d(M, M') = 0$$

deci dreapta $x = x_0$ este asimptotă verticală la stânga.



$$l_d(x_0) = +\infty; \lim_{x \nearrow x_0} d(M, M') = 0$$



$$l_d(x_0) = -\infty; \lim_{x \searrow x_0} d(M, M') = 0$$

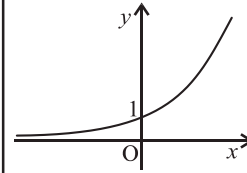
deci dreapta de ecuație $x = x_0$ este asimptotă verticală la dreapta.

(Am notat cu $d(M, M')$ distanța dintre punctele M și M').

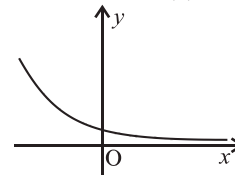
Să recunoaștem asimptotele unor grafice de funcții cunoscute.

1) Care dintre următoarele funcții admit asimptote?

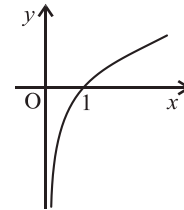
a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, $a > 1$



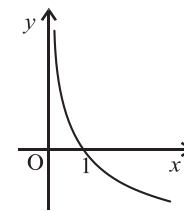
b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, $0 < a < 1$



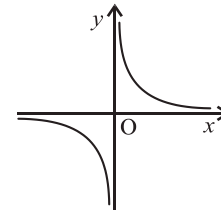
c) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, $a > 1$



d) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, $0 < a < 1$

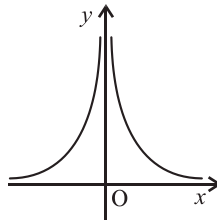


e) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$



EXEMPLE

1) $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2};$
 $l_s(0) = +\infty, l_d(0) = \infty,$ deci dreapta de ecuație $x = 0$ (axa Oy) este asimptotă verticală la graficul lui f .



2) $f: (1, 2) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{(x-1)^2};$

$l_d(1) = +\infty,$ deci dreapta de ecuație $x = 1$ (paralelă cu Oy) este asimptotă verticală pentru graficul lui f .

Asimptote oblice. Asimptote orizontale

Asimptotele oblice se definesc pentru funcții definite pe mulțimi nemărginite.

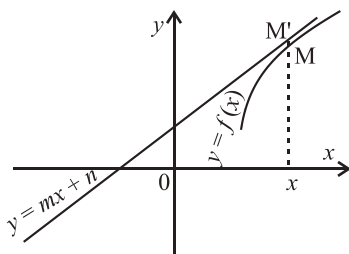
Definiție.

Fie o funcție $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Dacă D este o mulțime nemărginită la dreapta ($+\infty$ este punct de acumulare al mulțimii D), atunci dreapta de ecuație $y = mx + n, m, n \in \mathbb{R}, m \neq 0$ este *asimptotă oblică* la $+\infty$ a graficului dacă $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx - n) = 0$.

Dacă D este o mulțime nemărginită la stânga ($-\infty$ este punct de acumulare al mulțimii D), atunci dreapta de ecuație $y = m'x + n', m', n' \in \mathbb{R}, m' \neq 0$ este *asimptotă oblică* la $-\infty$ a graficului dacă $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - m'x - n') = 0$.

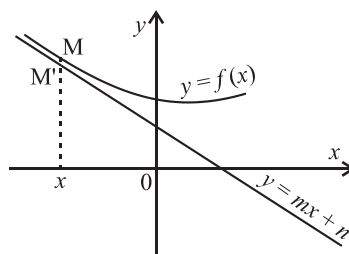
Interpretare geometrică.



$$\lim_{x \rightarrow \infty} d(M, M') = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx - n) = 0$$

$y = mx + n$ asimptotă oblică la $+\infty$.



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} d(M, M') = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - m'x - n') = 0$$

$y = m'x + n'$ asimptotă oblică la $-\infty$.

Să stabilim asimptotele verticale ale unei funcții.

2) Fie $x_0 \in [-1, 0]$. Calculează $\lim_{x \nearrow x_0} \frac{1}{x^2}$.

Este dreapta de ecuație $x = x_0$ asimptotă verticală la stânga pentru graficul lui f ?

3) Determină punctele de acumulare finite ale mulțimilor: $A = (0, 1); B = (0, +\infty); C = (0, 1) \cup \{2\}; D = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

4) Fie $x_0 \in (0, 2)$. Calculează $\lim_{x \searrow x_0} \frac{1}{(x-1)^2}$.

Este dreapta de ecuație $x = x_0$ asimptotă verticală pentru graficul lui f ?

Să studiem existența asimptotelor verticale!

5) a) Fie $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x-1}$.

Calculează $\lim_{x \nearrow 1} f(x)$ și $\lim_{x \searrow 1} f(x)$. Dreapta $x = 1$ este asimptotă verticală a funcției f ?

b) Fie $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{(2-x)^2}$.

Calculează $\lim_{x \nearrow 2} f(x)$ și $\lim_{x \searrow 2} f(x)$. Dreapta $x = 2$ este asimptotă verticală a funcției f ?

Să studiem existența asimptotelor oblice.

6) Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R},$

$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$. Calculează $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$. Dacă m este finit, calculează $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$.

Este dreapta $y = x + 1$ asimptotă oblică a funcției la ∞ sau la $-\infty$?

7) Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$.

Calculează $m' = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ și

$n' = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - m'x)$. Calculează

$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ și $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$.

Este dreapta $y = 2x$ asimptotă oblică la $\pm \infty$?

Observație.

În loc de „asimptotă oblică la ramura spre ∞ (sau $-\infty$) a graficului“ vom spune „asimptotă oblică la ∞ (sau $-\infty$)“ sau „asimptotă la ∞ “.

Teoremă.

Fie o funcție $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

1) Dacă ∞ e un punct de acumulare pentru D , atunci dreapta de ecuație $y = mx + n$ este asimptotă oblică la $+\infty$ a lui f dacă și numai dacă există $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}^*$, $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) \in \mathbb{R}$.

2) Dacă $-\infty$ e un punct de acumulare pentru D , atunci dreapta de ecuație $y = m'x + n'$ este asimptotă oblică la $-\infty$ a lui f dacă și numai dacă există $m' = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}^*$, $n' = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - m'x) \in \mathbb{R}$.

Demonstrație.

1) Dacă $y = mx + n$ este asimptotă la $+\infty$, atunci

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx - n) = 0, \text{ deci } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = n.$$

$$\text{Avem } \frac{f(x)}{x} - m = \frac{f(x) - mx}{x}, \text{ deci}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - m \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - mx}{x} = 0, \text{ de unde } m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

$$\text{Reciproc, dacă } \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R} \text{ și } \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = n \in \mathbb{R},$$

$$\text{atunci } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx - n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) - n = 0, \text{ deci}$$

$y = mx + n$ este asimptotă la $+\infty$.

Analog se demonstrează afirmația 2).

Observații.

◆ Dacă $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ nu există sau este infinită, atunci graficul funcției nu are asimptotă oblică la $+\infty$.

◆ Dacă există $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ și este finită și $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)$ nu există sau este infinită, atunci graficul funcției nu are asimptotă oblică la $+\infty$.

Analog pentru cazul $-\infty$.

Caz particular.

Dacă există $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ și este finită, atunci dreapta de ecuație $y = a$ este asimptotă orizontală la $+\infty$.

(Dacă $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ și $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, atunci dreapta de ecuație $y = a$ este orizontală).

8) Verifică dacă funcțiile următoare admit asimptote oblice:

a) $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$;

b) $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x + 1}$;

c) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2}$.

Să studiem existența asimptotelor orizontale!

9) Fie funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x - 1}{x}$.

Calculează $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Este dreapta $y = 1$ asimptotă orizontală a funcției f ?

10) Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$.

Calculează $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Este dreapta $y = 2$ asimptotă orizontală a funcției f ?

11) Verifică dacă funcțiile următoare admit asimptote la $\pm\infty$ și completează spațiile punctate:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$. Avem

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 = \pm\infty$, deci funcția, dar este posibil să aibă asimptotă oblică.

Calculăm $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 = \infty$; deoarece limita este infinită, funcția

b) $f: (-\infty, -1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x + 1}{x}$.

Deoarece $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$, dreapta $y = 2$ este

c) $f: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{(x + 1)^2}{x - 1}$.

Deoarece $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$, funcția

Calculăm: $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + 1)^2}{x^2 - x} = 1$

deci m este finit și

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 1}{x - 1} = 3.$$

Deci dreapta de ecuație $y = x + 3$ este

Dacă nu există $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, atunci graficul lui f nu are asimptotă orizontală la $+\infty$; dacă nu există $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, atunci graficul lui f nu are asimptotă orizontală la $-\infty$.



Presupunem că mulțimea D este nemărginită la dreapta. Pentru a vedea dacă există asimptotă la ∞ (orizontală sau oblică) și, în cazul în care există, pentru a o determina, procedăm astfel:

a) calculăm $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$:

• dacă există $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ și este finită, atunci dreapta $y = a$ este asimptotă orizontală la ∞ ;

• dacă există $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ și este infinită, atunci:

b) calculăm $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$;

• dacă există $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m$ și este finită nenulă, atunci:

c) calculăm $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$;

• dacă există $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = n$ și este finită, atunci dreapta $y = mx + n$ este asimptotă oblică la ∞ .

Presupunând că mulțimea D este nemărginită la stânga, în mod similar se studiază existența asimptotei la $-\infty$ și, în cazul în care există, se trece la determinarea ei.



O funcție f definită pe o mulțime nemărginită nu admite și asimptotă orizontală și asimptotă oblică la ∞ (sau la $-\infty$).



● 1. Determină valoarea parametrului real $a > 0$ pentru care funcția

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + ax + a} \text{ să$$

aibă o singură asimptotă verticală ($D \subset \mathbb{R}$ fiind domeniul maxim de definiție).

● 2. Determină asimptotele funcțiilor $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, unde D este domeniul maxim de definiție:

a) $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+1}$; b) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$;

c) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$; d) $f(x) = \frac{5x-1}{x+1}$;

e) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$; f) $f(x) = \frac{2x^2+x+1}{x-1}$;

12) Verifică dacă funcțiile următoare admit asimptote la $\pm\infty$:

a) $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x-1}$;

b) $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{x+1}$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{-x}$;

d) $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$;

e) $f: (-\infty, 0] \cup (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x\sqrt{\frac{x}{x-1}}$;

f) $f: \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(x^2 - 1)$.

13) Determină asimptotele verticale (dacă există) ale următoarelor funcții:

a) $f: \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$;

b) $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2+1}$;

d) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{\frac{1}{x}}$;

e) $f: \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x - [x]}$.

g) $f(x) = x\sqrt{\frac{x}{1-x}}$;

h) $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$;

i) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x-3}$;

j) $f(x) = \ln(4-x)^2$;

k) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$;

l) $f(x) = \frac{x^2 - 9x + 8}{x - 2}$;

m) $f(x) = x - \sqrt{x^2 - x}$; n) $f(x) = (x^2 - x)e^x$.

● 3. Determină numerele reale a și b astfel încât dreapta de ecuație $y = 2x - 1$ să fie asimptotă oblică

a funcției $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 1}{x - 1}$, $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$.

● 4. Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + px - 1}{x + 1}$, $p \in \mathbb{R}$. Determină p astfel încât graficul funcției f să admită asimptota oblică $y = x + 1$.

(Bacalaureat - 1996, enunț parțial)

● 5. Fie funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = -\frac{1}{2}x + 3 + \frac{2 \ln x - 1}{x}$. Determină asimptota

oblică la ramura graficului funcției f spre ∞ ; cercetează dacă această asimptotă intersectează graficul funcției și, în caz afirmativ, determină coordonatele punctului de intersecție.

(Bacalaureat - 1995, enunț parțial)

● 6. Fie funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 2 - 4 \frac{\ln x}{x}$.

Determină asimptota oblică la ramura graficului funcției f spre ∞ . Această asimptotă intersectează

graficul funcției într-un punct A . Află coordonatele punctului A .

(Bacalaureat - 1994, enunț parțial)

● 7. Fie funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{(x+a)^2}{bx-1}$, $a, b \in \mathbb{R}$, unde D este domeniul maxim de definiție.

Determină a și b astfel încât graficul funcției f să admită dreapta de ecuație $y = x + 3$ ca asimptotă oblică.

(Bacalaureat - 1993, enunț parțial)

● 8. Fie funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{(x+a)^2}{bx-1}$, $a, b \in \mathbb{R}$, unde D este domeniul maxim de definiție.

Determină a și b astfel încât graficul funcției f să admită dreapta de ecuație $y = x + 3$ ca asimptotă oblică.

(Bacalaureat - 1993, enunț parțial)

● 9. Determină valorile parametrilor reali p și q astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = px - q\sqrt{x^2 - 1}$ să admită ca asimptote dreptele $y = 2x$ și $y = 0$.

Teste de evaluare

Testul 1

1. Calculează:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 5x + 1)$; b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 1}$;
c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{2x+3} - \frac{2}{x^3+1} \right)$; d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^3+1} - \sqrt{2x+1})$.

2. Calculează: a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 + x - 6}$;

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+2} \right)^{3x+1}$; c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right)$.

3. Calculează limitele laterale ale funcției

$$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ \frac{\ln(1+2x)}{x}, & x > 0 \end{cases} \quad \text{în punctul } 0.$$

4. Determină $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât dreapta $y = 2x - 1$ să fie asimptotă oblică pentru graficul funcției

$$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{ax^2 + bx + 1}{x}.$$

Testul 2

1. Calculează:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 - 5x + 1)$; b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9}$;
c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 + x - 6}$; d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3^x + 4^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$.

2. Determină $a \in \mathbb{R}$ astfel încât:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{(a-1)^2 x^2 + 2x}}{3x+1} = -2$;

b) funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+a^2x)}{3x}, & x > 0 \\ 5x^2 - 7x + 3, & x \leq 0 \end{cases}$ să

aibă limită în 0.

3. Calculează:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right)$; b) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(2 - \frac{x}{3} \right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{x}}}$.

Testul 3

Testul 4

1. Dă câte un exemplu de:
- funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care în punctul 2 are o limită laterală finită și cealaltă limită laterală infinită;
 - funcție care nu are limită în $-\infty$;
 - funcții $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 5$;
 - funcții $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ și $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -1$.

2. Stabilește valoarea de adevăr a propozițiilor:
(p1) Dacă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $f(3-0) \neq f(3)$, atunci f nu are limită în punctul 3.

(p2) Dacă f este o funcție polinomială, atunci

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \in \mathbb{R}.$$

(p3) Dacă f și g sunt funcții polinomiale, atunci

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}$$

3. Calculează limitele laterale ale funcției

$$f: (0; 2) \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}}, & x < 1 \\ \frac{1}{e - e^x}, & x > 1 \end{cases} \text{ în punctul } \alpha = 1.$$

4. Determină $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția

$$f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{ax^2 + bx + 3}{x - 2} \text{ să aibă ca asimptotă dreapta } y = 2x - 3.$$

1. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x + e^{-x}$.
Determină $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

2. Considerăm funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = (1-x)e^x$.
a) Determină $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$.

b) Determină $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$. Ce asimptotă admite funcția g ?

3. Considerăm funcția $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = e^x - x$.
a) Determină $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$.

b) Arată că $h(x) = x \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right)$, pentru $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

Determină apoi $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x)$.

4. Fie $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1 + \ln x$. Determină $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

5. Fie $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$.

a) Determină $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

b) Ce asimptote admite funcția f ?

6. Fie $f: \left(-\frac{1}{2}, \infty\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(2x + 1)$.

Determină $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x)$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

Probleme date la examenul de bacalaureat

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 + 1}$.

a) Să se verifice că $f(x) = 1 + \frac{3}{x^2 + 1}, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine asimptotele la graficul funcției f .

(Examen de bacalaureat 2003 – sesiunea iunie-iulie, varianta 5 – economic)

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1+x}$.

a) Să se determine asimptota verticală a graficului funcției f .

b) Să se determine asimptota la $+\infty$ a graficului funcției f .

c) Să se arate că $f(x) - 1 + x - x^2 \leq 0, \forall x \geq 0$.

d) Să se arate că $f(x) - 1 + x - x^2 + x^3 \geq 0, \forall x \geq 0$.

e) Să se deducă inegalitățile $1 - x + x^2 - x^3 \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 - x + x^2, \forall x \geq 0$.

(Examen de bacalaureat 2003 – sesiunea august, varianta 2 – economic)

Continuitatea funcțiilor



1. Continuitate punctuală; continuitate pe un interval. Operații cu funcții continue

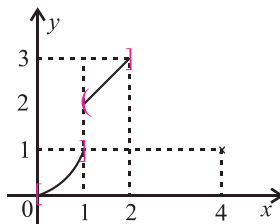
În mod obișnuit, a afirma că o curbă este *continuă* este echivalent cu a spune că aceasta *nu are întreruperi*, că o putem trasa fără să ridicăm creionul de pe hârtie etc.

Graficele funcțiilor reale de o variabilă reală pot fi reprezentate printr-o curbă într-un plan raportat la un sistem de coordonate.



Fie funcția $f: [0, 2] \cup \{4\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{definită prin } f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } 0 \leq x \leq 1 \\ x+1, & \text{dacă } 1 < x \leq 2. \\ 1, & \text{dacă } x = 4 \end{cases}$$



Observăm că reprezentarea grafică se întrerupe în punctele de abscise 1, 2 și 4. Ce se întâmplă cu valorile funcției în jurul acestor puncte?

Soluție.

Să analizăm comportarea valorilor lui f în jurul punctului de abscisă 1. Observăm că, atunci când x tinde spre 1 și $x < 1$, valorile $f(x)$ tind către valoarea lui f în 1, adică

$\lim_{x \nearrow 1} f(x) = 1 = f(1)$. Dacă x tinde spre 1 și $x > 1$, valorile $f(x)$ tind spre 2; $\lim_{x \searrow 1} f(x) = 2$; deci „saltul“ din jurul punctului de abscisă 1 se datorează faptului că limitele laterale în 1 sunt diferite.

Să studiem comportarea lui f în jurul punctului de abscisă 2: $\lim_{x \nearrow 2} f(x) = 3 = f(2)$; deci nu avem „salt“ în 2.

Dacă alegem un punct de abscisă x_0 diferit de 1, 2 sau 4, adică $x_0 \in (0, 1) \cup (1, 2)$, constatăm că $f(x)$ tinde la $f(x_0)$, când x tinde la x_0 .

Ce înțelegem prin continuitate?

1) În imaginea de mai sus apar reprezentate obiecte sau fenomene care au caracteristici continue. De exemplu: trenul este un obiect unitar (continuu), locomotiva și vagoanele sunt „legate“ între ele; calea ferată este continuă.

Dă cel puțin trei exemple de obiecte sau fenomene sugerate de imagine, care au aspecte continue.

2) Dă exemple de discontinuități prezente în imaginea de mai sus. Ce discontinuități poți remarca la obiecte sau fenomene din clasa voastră?

Să interpretăm grafic...

3) Trasează graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$. Este funcția f continuă în $x_0 = 0$?

4) Trasează graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} a, & \text{dacă } x \leq 0 \\ b, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$, $a, b \in \mathbb{R}$. În ce condiții funcția f este continuă în $x_0 = 0$?

5) Trasează graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 1|$. Este funcția continuă în punctele -1 și 1 ?

Punctul de abscisă 4 este punct izolat în domeniul de definiție al funcției f . Graficul „nu se întrerupe” în $x = 4$.

Vom defini continuitatea funcției într-un punct:

Definiție.

Fie $E \subset \mathbb{R}$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in E$.

Funcția f se numește *continuuă* în x_0 dacă, $\forall V \in \mathcal{V}(f(x_0))$, $\exists U_V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât $\forall x \in E, x \in U_V$ rezultă $f(x) \in V$.

Dacă f nu este continuuă în x_0 , atunci x_0 se numește *punct de discontinuitate*.

Observații.

◆ Problema continuității se pune doar în punctele domeniului de definiție al funcției.

◆ Dacă $x_0 \in E$ este punct izolat al lui E , adică $x_0 \in E - E'$, atunci f este continuuă în x_0 .

◆ Dacă $x_0 \in E \cap E'$ (x_0 este punct de acumulare din domeniul de definiție al funcției), studiul continuității funcției în x_0 revine la cercetarea existenței limitei în x_0 și compararea ei cu valoarea funcției în x_0 .

◆ Dacă x_0 este punct de acumulare al lui E doar la dreapta (respectiv stânga), atunci:

f continuuă în $x_0 \Leftrightarrow f$ continuuă la dreapta (respectiv la stânga) în x_0 .

◆ Funcția f nu este continuuă în a , dacă și numai dacă există $a \in E \cap E'$ astfel încât nu există $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, sau $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ există și este diferită de $f(a)$.

Noțiunea de continuitate a avut ca suport intuitiv noțiunea de neîntrerupere a curbilor. Există, însă, funcții cărora le putem studia continuitatea fără a le trasa graficul.

Continuitate pe un interval

Definiție.

Spunem că o funcție f este *continuuă pe o submulțime a domeniului de definiție* dacă este continuuă în fiecare punct al acesteia. Mulțimea punctelor din domeniul de definiție pe care o funcție este continuuă se numește *domeniul de continuitate al funcției*.

Teoremă.

Funcțiile elementare studiate (polinomiale, putere, exponențiale și logaritmice) sunt funcții continue pe întreg domeniul lor de definiție.

Demonstrație.

Dacă f este funcție elementară, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ pentru orice punct x_0 din domeniul maxim de definiție al funcției f și x_0 punct de acumulare. Dacă x_0 este punct izolat, atunci f este continuuă.

6) Trasează graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{dacă } x \leq -1 \\ \ln(-x), & \text{dacă } x \in (-1, 0) \text{ și} \\ x-1, & \text{dacă } x \in [0, \infty) \end{cases}$$

studiază apoi continuitatea ei pe \mathbb{R} .

7) Determină $a \in \mathbb{R}$ astfel încât următoarele funcții să fie continue în punctul x_0 specificat:

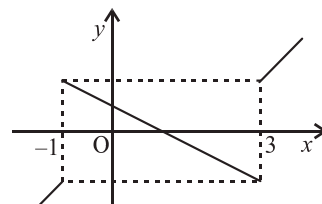
a) $f(x) = \begin{cases} ax+1, & x \leq 1 \\ 3x-1, & x > 1 \end{cases}; x_0 = 1;$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \leq a \\ x, & x > a \end{cases}; x_0 = a;$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & x \leq a \\ x-1, & x > a \end{cases}; x_0 = a;$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq a \\ 4, & x > a \end{cases}; x_0 = a.$

8) Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are următoarea reprezentare grafică:



a) Este funcția continuuă pe \mathbb{R} ?

b) Dar pe intervalul $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$?

9) Studiază continuitatea în punctele indicate pentru fiecare din următoarele funcții, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases};$ în $x_0 = 0$

b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{a^2 - 2ax + x^2}, & 1 \leq x \leq 2 \\ ax+3, & x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty) \end{cases};$

în punctele $x_0 = 1$ și $x_0 = 2$;

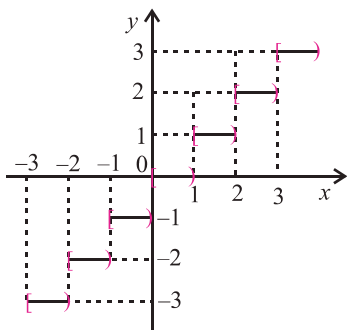
Problemă rezolvată.

1) Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = [x], \forall x \in \mathbb{R}$. Demonstrează că f este continuă în x_0 dacă și numai dacă $x_0 \in \mathbb{Z}$.

Soluție.

Dacă $x_0 \in \mathbb{Z}$, atunci $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = x_0 - 1$ și $\lim_{x \searrow x_0} f(x) = x_0$, deci x_0 este punct de discontinuitate.

Dacă $x_0 \notin \mathbb{Z}$, atunci $[x] = [x_0]$ pentru x dintr-o vecinătate suficient de mică a lui x_0 , deci $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [x] = [x_0] = f(x_0)$, deci f este continuă în x_0 .



Operații cu funcții continue

Având în vedere faptul că definiția continuității este bazată pe limite de funcții, multe din proprietățile limitelor de funcții se regăsesc și în cazul funcțiilor continue.

Teoremă.

Dacă funcțiile $f, g: E \rightarrow \mathbb{R} (E \subset \mathbb{R})$ sunt continue în punctul $x_0 \in E$, atunci funcțiile $f + g, a \cdot f (a \in \mathbb{R}), f \cdot g, \frac{f}{g}$ (dacă $g(x_0) \neq 0$), f^g (dacă $f(x_0) > 0$) sunt continue în x_0 .

EXEMPLU



$f(x) = \frac{\ln x}{x}$ este continuă pe $(0, \infty)$.

Teoremă.

Dacă funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R} (E \subset \mathbb{R})$ este continuă în punctul $x_0 \in E$, atunci funcția $|f|$ este continuă în x_0 .

c) $f(x) = [x^2]$, unde $[\cdot]$ este partea întreagă a numărului real x^2 , în punctele $x_0 = 2$ și $x_0 = 9$.

10) Studiază continuitatea următoarelor funcții pe domeniul lor maxim de definiție:

a) $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$;

b) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 2 \\ x^2 - 1, & x \geq 2 \end{cases}$;

c) $f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2, & x \leq 1 \\ x^2 - 1, & x > 1 \end{cases}$.

11) Fie $f: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă în punctul 0, ce îndeplinește condiția $f(x) = f(x^2), \forall x \in [0, 1)$. Arată că f este funcție constantă.

12) Fie funcțiile $f, g: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin $f(x) = x^2, g(x) = x \ln x$.

a) Studiază continuitatea următoarelor funcții: $f + g, f \cdot g, 2f - 3g, \frac{f}{g}, \frac{g}{f}$.

b) Calculează limitele funcțiilor de mai sus la capetele intervalului de definiție.

13) Dă exemplu de două funcții $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ discontinue în $x = 2$ astfel încât $f + g$ și $f \cdot g$ să fie continue în $x = 2$.

14) Fie $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty, 1] \\ x^2 + x, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty, 1] \\ -2, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

Studiază continuitatea funcțiilor $f + g, f \cdot g$. Ce observi?

Teoremă.

Fie $f: E_1 \rightarrow E_2$ și $g: E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ ($E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$) și $h = g \circ f: E_1 \rightarrow \mathbb{R}$ funcția compusă. Dacă f este continuă în punctul $x_0 \in E_1$ și g este continuă în punctul $f(x_0) \in E_2$, atunci h este continuă în x_0 :

$$E_1 \xrightarrow{f} E_2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$x_0 \mapsto f(x_0) \mapsto g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0)$$

Consecință.

Dacă $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ sunt continue în $x_0 \in E$, atunci funcțiile $\max\{f, g\}$ și $\min\{f, g\}$ sunt continue în x_0 .

Demonstrație.

$\max\{f, g\} = \frac{f+g+|f-g|}{2}$. Cum f, g sunt continue în x_0 , atunci $f+g$ și $f-g$ sunt continue în x_0 . Deoarece funcția $f-g$ este continuă în x_0 , rezultă că și $|f-g|$ este continuă în punctul x_0 , deci $\max\{f, g\}$ este continuă în x_0 .

Analog, se arată că $\min\{f, g\} = \frac{f+g-|f-g|}{2}$ este continuă.



1) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ este continuă pe \mathbb{R} , fiind compunere de funcții continue (funcția radical se va demonstra că este continuă).

2) $f(x) = \sqrt{|x^2-3x+2|} + \max\{x-1, 2x+1\}$ este continuă pe \mathbb{R} .

Probleme rezolvate.

1) Studiază continuitatea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{a^2x^2+1}, & \text{dacă } x \leq 1 \\ 2ax+1, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}, \text{ unde } a \in \mathbb{R}.$$

Soluție.

Funcțiile $f_1(x) = \sqrt{a^2x^2+1}$ și $f_2(x) = 2ax+1$ sunt continue pe \mathbb{R} , deci f este continuă pe fiecare din intervalele $(-\infty, 1)$ și $(1, \infty)$.

Studiem continuitatea în punctul $x_0 = 1$.

Avem: $\lim_{x \nearrow 1} f(x) = \sqrt{a^2+1}$, $\lim_{x \searrow 1} f(x) = 2a+1$ și $f(1) = \sqrt{a^2+1}$, deci f este continuă în $x_0 = 1$ dacă și numai dacă

$$\sqrt{a^2+1} = 2a+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+1 \geq 0 \\ a^2+1 = (2a+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow a = 0.$$

În concluzie, pentru $a = 0$ funcția f este continuă pe \mathbb{R} , iar pentru $a \neq 0$ domeniul de continuitate al funcției f este $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

15) Determină două funcții

$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât fg să fie continuă în x_0 , dar f și g să nu fie continue în x_0 .

16) Trasează graficul funcției

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \max\{x^2, 3x-2\}$ și verifică dacă funcția f este continuă pe \mathbb{R} .

17) Trasează graficul funcției

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \min\{x^2, -2x^2+3, |x|\}$, utilizând graficele funcțiilor $x \mapsto x^2$, $x \mapsto -2x^2+3$, $x \mapsto |x|$ și verifică dacă funcția f este continuă pe \mathbb{R} .

18) Studiază continuitatea fiecăreia din funcțiile următoare pe domeniul lor maxim de definiție:

$$a) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ 0, & x = 0; \\ \frac{\ln(1+x)}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

$$b) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^x + x - 1, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x^{x-1}}, & x > 1 \end{cases};$$

$$c) f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} (x+e^x)^{\frac{1}{x}}, & x > 0; \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$d) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ a, & x = 1, a \in \mathbb{R}; \\ 2-x, & x \geq 1 \end{cases}$$

e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$$

$a, b, c \in (0, \infty) \setminus \{1\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

2) Studiază continuitatea funcției

$$f(x) = \begin{cases} a(x^3 + 1)^2, & \text{dacă } x < 0 \\ 2a - 1, & \text{dacă } x = 0, a \in \mathbb{R}. \\ |2x - 1|, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

Soluție.

Funcțiile $f_1(x) = a(x^3 + 1)^2$ și $f_2(x) = |2x - 1|$ sunt continue, deci f este continuă pe fiecare din intervalele $(-\infty, 0)$ și $(0, \infty)$. Cum $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$ și $f(0) = 2a - 1$, rezultă că f este continuă în $x_0 = 0$ dacă și numai dacă $a = 1 = 2a - 1$. Deducem că, pentru $a = 1$ funcția f este continuă pe \mathbb{R} , iar pentru $a \neq 1$, f este continuă pe \mathbb{R}^* și discontinuă în $x = 0$.

f) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{4x^2 + 1}, & \text{dacă } x \leq 1; \\ 4x + 1, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$$

g) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} (x^3 + 1)^2, & \text{dacă } x \leq 0 \\ |2x - 1|, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

h) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x^2 + 1}, & x \leq 2 \\ |5 - x|, & x > 2 \end{cases}$



● 1. Studiază continuitatea următoarelor funcții în punctele indicate:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x \leq 1 \\ x - 1, & x > 1 \end{cases}$, în

punctul $x_0 = 1$;

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq -1 \\ x^2 - 1, & x > -1 \end{cases}$, în punctul $x_0 = -1$.

c) $f: (0, e^3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = [\ln x]$, unde $[\cdot]$ este partea întreagă a numărului real $\ln x$, în punctele $x_0 = 1$, $x_1 = e$, $x_2 = e^2$, $x_3 = e^3$.

● 2. Studiază continuitatea funcției

$$f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \ln \frac{|1-x^2|}{1+x^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

pentru $a \in \mathbb{R}$.

● 3. Determină $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2\alpha x + \alpha^2}, & x \geq 1 \\ \alpha x + 3, & x < 1 \end{cases}$$

să fie continuă în $x = 1$.

● 4. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ae^x, & \text{dacă } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{b}}{x}, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$.

Află $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ știind că f este continuă pe \mathbb{R} .

● 5. Studiază continuitatea funcțiilor compuse $f \circ g$ și $g \circ f$, în fiecare din cazurile:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^x$;

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \text{ și} \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 2x + 1$;

c) $f: (0, 1) \rightarrow (0, 1)$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } 0 < x < \frac{1}{2} \\ x, & \text{dacă } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$,

$g: (0, 1) \rightarrow (0, 1)$, $g(x) = \begin{cases} 2x, & \text{dacă } 0 < x \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}, & \text{dacă } \frac{1}{4} < x < 1 \end{cases}$.

● 6. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left[x + \frac{1}{2} \right]$, numită „funcția de rotunjire“.

a) Trasează graficul funcției și determină punctele ei de discontinuitate.

b) Definim funcția $g(x) = |f(x) - x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstrează că $g(x) = |x|$, $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$, este continuă pe \mathbb{R} .

● 7. Fie $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{Z}$ cu proprietatea că $2^{f(x)} \leq x < 2^{1+f(x)}$, $\forall x > 0$. Studiază continuitatea lui f pe $(0, \infty)$.

● 8. Studiază continuitatea următoarelor funcții pe domeniul lor maxim de definiție:

a) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = [\ln x]$, unde $[\cdot]$ este partea întreagă a numărului real $\ln x$;

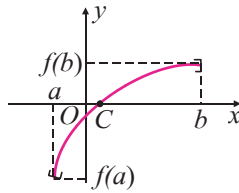
b) $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - [x]$, unde $[\cdot]$ este partea întreagă a numărului real x .

2. Studiul existenței soluțiilor reale ale unor ecuații și semnul unei funcții continue pe un interval

Teoremă.

Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este funcție continuă și $f(a)$ și $f(b)$ au semne contrare, atunci există $c \in [a, b]$ astfel încât $f(c) = 0$.

Justificarea geometrică a acestei teoreme este următoarea: dacă, spre exemplu, $f(a) < 0$ și $f(b) > 0$, atunci o extremitate a graficului lui f se află sub axa Ox , iar cealaltă deasupra axei Ox . Deoarece f este continuă graficul ei nu se întrerupe, deci el trebuie să intersecteze axa Ox în cel puțin un punct.



1) Această teoremă este foarte utilă în studiul unor ecuații de forma $f(x) = 0$, unde f este o funcție continuă pe un anumit interval I . Astfel, dacă există două puncte în I unde f ia valori de semne contrare, atunci ecuația are cel puțin o soluție pe intervalul I .

2) Dacă o funcție continuă nu se anulează pe un interval, atunci ea păstrează semn constant pe acest interval.

Acest rezultat va fi util în rezolvarea unor inecuații sau în studiul semnului unor funcții continue pe intervale.

Probleme rezolvate.

1) Ecuația $2^{-x} = x$ are cel puțin o soluție în $(0, 1)$.

Soluție.

Funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{-x} - x$ este continuă și

$$f(0) = 1 > 0, f(1) = \frac{1}{2} - 1 < 0, \text{ deci } \exists c \in (0, 1) \text{ cu } f(c) = 0.$$

2) Orice funcție polinomială de grad impar cu coeficienți reali admite cel puțin o soluție reală.

Soluție.

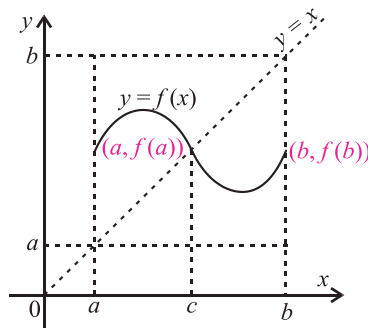
Într-adevăr, dacă $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$, n impar și $a_n \neq 0$, atunci f este continuă pe \mathbb{R} , iar $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -a_n \cdot \infty$ și

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a_n \cdot \infty$. Deci există $x_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_0) = 0$.

3) Fie $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ o funcție continuă. Demonstrează că $\exists c \in [a, b]$ astfel încât $f(c) = c$ (punctul c se numește *punct fix al funcției* f).

Soluție.

Justificarea geometrică a acestui rezultat este ilustrată în figură.



1) Demonstrează că următoarele ecuații au cel puțin o soluție în intervalul I :

a) $x^4 + 5x + 1 = 0$, $I = [-1, 0]$;

b) $e^x + x = 0$; $I = [-1, 0]$

c) $\ln(1+x) + \sqrt{x} = 1$; $I = [0, 1]$;

d) $x^4 - 3x = 1$; $I = [-1, 0]$;

e) $x^5 = 11$; $I = [-2, 2]$;

f) $x^2 + x^3 = 2$; $I = (-\infty, \infty)$;

g) $x^6 + x^4 - 2x^2 = 0$; $I = (-2, 0)$;

h) $\ln x^x - x = 0$; $I = (0, 2e)$.

2) Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Arată că există $x_0 \in [a, b]$ astfel încât $f(x_0) = f(a+b-x_0)$.

Indicație.

Fie $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$g(x) = f(x) - f(a+b-x)$. Observăm că g este continuă pe $[a, b]$. Se studiază semnul expresiei $g(a) \cdot g(b)$.

3) Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă mărginită. Atunci ecuația $f(x) = ax + b$ are cel puțin o soluție, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Indicație.

Funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - ax - b$ este continuă. În plus, f fiind mărginită, avem $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -a \cdot \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = a \cdot \infty$.

4) Un rezervor este umplut la o sursă cu debit variabil între orele 8 și 12. Același rezervor este golit prin scurgere a doua zi, tot între orele 8 și 12. Arată că există o aceeași oră t în ambele zile în care apa este la același nivel.

Indicație.

Fie V volumul rezervorului și

$f, g : [8, 12] \rightarrow [0, V]$ definite astfel: $f(t)$ este volumul de apă la momentul t în timpul umplerii, iar $g(t)$ este volumul de apă la momentul t în timpul scurgerii.

Funcțiile f și g sunt continue, deci și funcția $h = f - g$ este continuă.

Demonstrăm că ecuația $f(x) - x = 0$ are soluție în $[a, b]$.

Considerăm funcția ajutoare $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$. Funcția g este continuă și, în plus, $g(a) = f(a) - a \geq 0$, iar $g(b) = f(b) - b \leq 0$. Rezultă că $\exists c \in [a, b]$ astfel încât $g(c) = 0$, adică $f(c) = c$.

4) Rezolvă inecuația: $\frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{x-2} \leq 0$

Soluție. Considerăm funcția continuă $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{x-2}$. Rezolvăm ecuația $f(x) = 0$ și obținem soluțiile $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ și $x_3 = 5$. Pentru aflarea semnului pe intervalele $(-\infty, 1)$; $(1, 2)$; $(2, 3)$; $(3, 5)$ și $(5, \infty)$ va fi suficient să calculăm valoarea funcției într-un punct al intervalului sau limita la una dintre extremitățile acestuia.

x	$-\infty$	1	2	3	5	∞
$f(x)$	$+\infty$	+	0	$-\infty$	$+\infty$	+
				+	0	-
					0	+
						$+\infty$

Soluția este $x \in [1, 2) \cup [3, 5]$.

De reținut următoarea observație: funcția f nu se anulează pe intervalul $(1, 3)$, totuși își schimbă semnul pe acest interval. Explicația constă în faptul că f nu este definită pe intervalul $(1, 3)$, ci pe reuniunea intervalelor $(1, 2)$ și $(2, 3)$.

Proprietatea lui Darboux

O proprietate globală foarte importantă a funcțiilor continue definite pe intervale este proprietatea lui Darboux (*Gaston Darboux, 1842 - 1917, matematician francez*).

Definiție.

Fie I un interval. Spunem că o funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux pe intervalul I dacă pentru orice puncte $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ și orice număr λ cuprins între $f(x_1)$ și $f(x_2)$, $f(x_1) \neq f(x_2)$, există un punct $c \in (x_1, x_2)$ astfel încât $f(c) = \lambda$.

Observație. Funcțiile constante definite pe un interval au proprietatea lui Darboux pe acel interval.

Altfel formulat, funcția f are proprietatea lui Darboux pe intervalul I dacă, o dată cu valorile distincte luate în două puncte ale intervalului I , $f(x)$ ia toate valorile intermediare atunci când x parcurge intervalul dintre cele două puncte.

Următoarea teoremă oferă o imagine mai clară a acestei proprietăți:

Teoremă.

O funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux pe intervalul I dacă și numai dacă imaginea oricărui interval prin funcția f este de asemenea interval, adică pentru orice interval $J \subseteq I$, $f(J)$ este interval.

5) Rezolvă următoarele inecuații:

a) $\frac{\sqrt{x+1}-x}{x^2-3x+2} > 0$; b) $\frac{\sqrt{x-1}+x}{x^2-3x+4} < 0$;
 c) $\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}+x} < 0$; d) $\frac{\sqrt{x-1}}{x+2} < 1$.

6) Studiază semnul funcției

$f : (-1, \infty) \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{x-2}.$$

Indicație.

Rezolvăm ecuația $f(x) = 0$. Obținem:

$$\sqrt{1+x} = 2-x \quad \text{și} \quad \begin{cases} 2-x > 0 \\ x > -1 \\ 1+x = (2-x)^2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} -1 < x < 2 \\ x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases}, \text{ de unde } \begin{cases} -1 < x < 2 \\ x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases};$$

deci $x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$.

Funcția f este continuă și

$$\lim_{x \searrow -1} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \nearrow 2} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \searrow 2} f(x) = \infty \quad \text{și} \quad f(3) = \frac{3}{2} > 0.$$

Se studiază semnul funcției pe fiecare din intervalele $\left(-1, \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)$, $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{2}, 2\right)$, $(2, \infty)$.

7) Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 0 \\ x+a, & x > 0 \end{cases}$$

$a \in \mathbb{R}$ și $I = (-\lambda, \lambda)$, $\lambda > 0$.

a) Determină $f(I)$ în cazul $a = 0$

b) Determină $f(I)$ în cazul $a = -2$

c) Determină a astfel încât $f(I)$ să fie interval pentru orice $\lambda > 0$.

8) Demonstează că următoarele funcții nu au proprietatea lui Darboux pe \mathbb{R} :

$$a) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x \leq 0 \\ x+1, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

Teorema următoare stabilește legătura dintre funcțiile continue și funcțiile care au proprietatea lui Darboux.

Teoremă.

Orice funcție continuă pe un interval are proprietatea lui Darboux pe acel interval.

Demonstrație.

Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă, $x_1 < x_2$, $x_{1,2} \in I$ și λ cuprins între $f(x_1)$ și $f(x_2)$, $f(x_1) \neq f(x_2)$. Trebuie să demonstrăm că există $c \in (x_1, x_2)$ astfel încât $f(c) = \lambda$.

Considerăm funcția $g: [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \lambda$; g este continuă iar $g(x_1)$ și $g(x_2)$ au semne contrare, deci există un $c \in (x_1, x_2)$ astfel încât $g(c) = 0$.



Reciproca acestei teoreme nu este adevărată: există funcții care au proprietatea lui Darboux pe un interval, dar care nu sunt continue pe acel interval.

Teoremă.

Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ (I un interval) o funcție continuă și injectivă. Atunci f este strict monotonă.

Demonstrație.

Presupunem că f nu este strict monotonă. Atunci există $x_1, x_2, x_3 \in I$ astfel încât $x_1 < x_2 < x_3$, iar $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$ sau $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$.

Să ne situăm în primul caz. Dacă $f(x_1) < f(x_3)$, atunci $f(x_3)$ este cuprins între $f(x_1)$ și $f(x_2)$, deci există $c \in (x_1, x_2)$ astfel încât $f(c) = f(x_3)$. Cum f este injectivă, rezultă că $c = x_3$, imposibil deoarece $x_1 < c < x_2 < x_3$. Cazul $f(x_1) > f(x_3)$ conduce, de asemenea, la o imposibilitate.

Problemă rezolvată.

Demonstrează că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x$ este bijectivă.

Soluție.

Demonstrăm mai întâi că f este injectivă.

Avem: $f(x_1) = f(x_2)$, $(x_1^3 - x_2^3) + (x_1 - x_2) = 0$,

$$(x_1 - x_2) \underbrace{(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 1)}_{>0} = 0, \quad x_1 = x_2 \quad (\text{sau: } f \text{ este strict}$$

crescătoare, ca sumă de funcții strict crescătoare). Cum f este continuă, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, rezultă că $\text{Im}f = \mathbb{R}$, ceea ce înseamnă că f este și surjectivă. Fiind injectivă și surjectivă, funcția f este bijectivă.

$$\text{b) } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{dacă } x \leq 1 \\ 3, & \text{dacă } x > 1 \end{cases};$$

$$\text{c) } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x-3, & x \leq 2 \\ x, & x > 2 \end{cases}.$$

9) Arată că următoarele funcții au proprietatea lui Darboux:

$$\text{a) } f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^5, & x \in [-2, 0) \\ x^2, & x \in [0, 2] \end{cases};$$

$$\text{b) } f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 4x-1, & x \in [0, 1] \\ \frac{x-1}{\sqrt[3]{x-1}}, & x \in (1, 3] \end{cases};$$

$$\text{c) } f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in [-a, 0) \\ 1-x, & x \in [0, a] \end{cases}, \quad a > 0.$$

10) Demonstrează că următoarele funcții sunt bijective:

$$\text{a) } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + \frac{x}{a}, \text{ unde } a > 0;$$

$$\text{b) } f: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1), f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}};$$

$$\text{c) } f: (0, 1) \rightarrow (0, \infty), f(x) = \ln \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}};$$

$$\text{d) } f: [0, 3] \rightarrow [0, 2],$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{1-x}, & x \in [0, 1] \\ \frac{x+1}{2}, & x \in (1, 3] \end{cases}.$$

$$\text{11) Fie } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$$

Determină imaginea funcției f .

Indicație.

f este injectivă, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$,

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ și f este continuă, rezultă $\text{Im}f = (-1, 1)$.



● 1. Rezolvă inecuațiile:

a) $\frac{4 - \sqrt{x+1}}{1 - \sqrt{x+3}} \leq 3$;

b) $\sqrt[3]{5-x} - \sqrt[3]{2-x} \geq \sqrt[3]{3}$.

● 2. Fie $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1] \cup [2, 3]$ o funcție continuă

astfel încât $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Arată că:

a) f nu este surjectivă;

b) f nu este strict crescătoare;

c) f nu este injectivă.

●● 3. Fie $f, g: [a, b] \rightarrow [a, b]$ continue, f surjectivă. Demonstrează că există cel puțin un punct $x_0 \in [a, b]$ astfel încât $f(x_0) = g(x_0)$.

●●● 4. Demonstrează că pentru orice funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continuă și mărginită, există un punct $x_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_0) = x_0$ (în acest caz x_0 se numește punct fix pentru f).

●●● 5. Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuă cu $f(a) = f(b)$ și fie $c = \frac{a+b}{2}$ mijlocul intervalului $[a, b]$.

Demonstrează că există $x_0 \in \left[0, \frac{b-a}{2}\right]$ astfel încât $f(a+x_0) = f(c+x_0)$.

●●● 6. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu $(f \circ f)(x) = -x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Demonstrează că f nu are proprietatea lui Darboux pe \mathbb{R} , dar este injectivă.

●● 7. Studiază dacă următoarea funcție are proprietatea lui Darboux pe domeniul său de definiție.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x^a - 1 + \ln x)^2}{x^3 - 5x + 6}, & 0 < x < 1, \\ a + 1, & x = 1 \end{cases}, a > 0.$$

●● 8. Studiază semnul funcțiilor $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$ este domeniul maxim de definiție):

a) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 + 5x + 3}$;

b) $f(x) = \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$;

c) $f(x) = e^{\frac{x+1}{x-2}} - 1$;

d) $f(x) = \frac{\lg(x^2 - 1)}{x^2 - 4}$;

e) $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-3}} - 2$.

●●● 9. Determină relațiile dintre $a \in \mathbb{R}$ și $b \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția

$$f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{dacă } -1 \leq x < 0 \\ x^2 + ax + b, & \text{dacă } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

să aibă proprietatea lui Darboux pe $[-1, 1]$.

●●● 10. Fie $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Demonstrează că, dacă $\lim_{x \nearrow b} f(x) = \lim_{x \searrow a} f(x)$, atunci f nu este injectivă.

Test grilă

1. Fie funcția $f_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_m(x) = \begin{cases} 2x - \sqrt{m^2 x^2 + mx + 10}, & x \leq 2 \\ \sqrt{x-2} + 2|m|\sqrt{x-1}, & x > 2 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$. Dacă $M = \{m \in \mathbb{R} \mid f_m \text{ continuă pe } \mathbb{R}\}$,

$\alpha = \sum_{m \in M} m$, atunci:

A) $\alpha = -\frac{1}{7}$; B) $\alpha = -\frac{2}{21}$; C) $\alpha = \frac{4}{21}$; D) $\alpha = \frac{2}{3}$; E) $\alpha = \frac{13}{21}$.

(Facultatea de Management 2000 – preluare)

2. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f continuă și $f(f(x)) + x = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Fie $\lambda = f(0)$. Decide:

A) nu există o funcție f cu proprietățile de mai sus; B) $\lambda = 0$; C) $\lambda = -1$; D) $\lambda = 1$; E) $\lambda = 2$.

3. Se dă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 2|, & x \in \mathbb{Q} \\ 2, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Dacă α este numărul de elemente ale mulțimii

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ continuă în } x\}$, atunci:

A) $\alpha = 0$; B) $\alpha = 1$; C) $\alpha = 2$; D) $\alpha = 3$; E) $\alpha = 4$.

(Facultatea de Cibernetică, Statistică și Informatică Economică 1998)

4. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f continuă, f nu se anulează pe \mathbb{R} și f satisface relația $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Dacă $f(\lg 2) = 2$, atunci $\alpha = f(2)$ este:

A) $\alpha = 100$; B) $\alpha = 4$; C) $\alpha = -\frac{1}{2}$; D) $\alpha = 10$; E) $\alpha = 16$.

5. Fie $a, b \in (1, +\infty)$ cu $a \neq b$. Fie $P = \left\{ f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continuă, neconstantă cu } f(a^x) = f(b^x), \forall x \in \mathbb{R} \right\}$ și fie p numărul elementelor lui P .

A) $P = \emptyset$; B) $p = 1$; C) $p = 2$; D) $p = 3$; E) P este infinită.

Teste de evaluare

Testul 1

1. Studiază continuitatea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2(x^3 + 1)^2, & \text{dacă } x < 0 \\ 3, & \text{dacă } x = 0 \\ |2x - 1|, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

2. Determină valorile lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcția

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 - ax, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \text{ are un}$$

singur punct de continuitate.

3. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că

$$f(x^3 + x^2 + x + 1) = \frac{2x}{1 + x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demonstrează că:

- funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ este bijectivă;
- funcția f este continuă;
- funcția f nu este monotună;
- $\text{Im} f = [-1, 1]$.

Testul 2

1. Studiază continuitatea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax^2} - bx - 1}{x^2}, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0, \\ (bx + e^x)^{\frac{1}{x}}, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

unde $a, b \in \mathbb{R}$, $b \geq -1$.

2. Studiază semnul funcției:

$$\text{a) } f: \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - x}{x^2 - 3x + 2};$$

$$\text{b) } f: (-1, \infty) \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{x-2}.$$

3. Demonstrează că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^x$ este bijectivă.

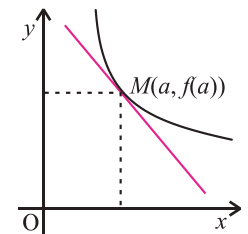
Derivabilitatea funcțiilor

1. Funcții care admit derivată. Funcții derivabile

Noțiunea de derivată, parte esențială a calculului diferențial, își are originea în studiul unor probleme de geometrie și de mecanică. În antichitate, Eudoxiu (408-355 î.Hr.), Arhimede (287-212 î.Hr.) și Papus (sec. III), au abordat problematica care a condus ulterior la calculul diferențial. Regulile generale ale calculului diferențial au fost elaborate, aproape în același timp, de către Isaac Newton (1642-1727) și Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

Posibilitatea de a duce o tangentă într-un punct al unui grafic este studiată cu ajutorul noțiunii de derivată. Atunci când o funcție admite derivată într-un punct a , vom înțelege că reprezentarea grafică a funcției f admite o tangentă în punctul de coordonate $(a, f(a))$.

Deoarece multe relații sunt frecvent exprimate prin funcții continue și derivabile, calculul diferențial exprimă matematic stări și procese din științele naturii și din disciplinele tehnologice. De exemplu, dacă $s=f(t)$ descrie dependența distanței, parcurse de un punct material în mișcare, de timpul t , atunci derivata acestei funcții în punctul t_0 reprezintă viteza instantanee a punctului material la momentul t_0 . Ca o generalizare a acestei idei, conceptul de viteză este aplicat și pentru alte situații în care timpul are rol de variabilă independentă. Noțiunile de încălzire sau răcire a unui corp, viteza de reacție a proceselor chimice, rata de dezintegrare a proceselor radioactive și rata de creștere a organismelor biologice pot fi definite și calculate cu ajutorul derivatelor.



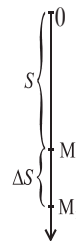
Vom prezenta probleme ce conduc la noțiunea de derivată.

I) Problema calculării vitezei unui punct în mișcare

Să considerăm căderea liberă în vid a unui punct material greu. Distanța S (măsurată în metri) parcursă de punctul material în intervalul de timp t (măsurat în secunde) se exprimă astfel: $S = \frac{g}{2} \cdot t^2$, unde $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$.

Ne propunem să aflăm viteza v a punctului material aflat în poziția M , la momentul t dat.

Să dăm variabilei t o creștere Δt și să considerăm timpul $t + \Delta t$ când punctul va fi în poziția M_1 . Creșterea MM_1 a distanței parcurse de punct în intervalul de timp Δt o notăm prin ΔS .



1) O rachetă se înscrie pe traiectorie după o curbă. Masa și viteza deosebit de mari determină asupra rachetei o forță de inerție tangentă la traiectorie. De ce această traiectorie nu se schimbă brusc, adică de ce traiectoria nu desenează unghiuri și linii frânte?

2) În mișcarea rectilinie și uniformă $S(t) = v \cdot t$. Arată că $v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = v$.

Din $OM_1 = S + \Delta S = \frac{g}{2}(t + \Delta t)^2$ deducem $\Delta S = \frac{g}{2}(2t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2)$.

Viteza medie v_m de cădere a punctului material în porțiunea MM_1 este dată prin formula $v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = g \cdot t + \frac{g}{2} \cdot \Delta t$; v_m depinde de variația Δt și caracterizează cu atât mai bine mișcarea punctului material la momentul t cu cât Δt va fi mai mic. Definim viteza v a punctului în momentul t ca fiind limita către care tinde viteza medie v_m în intervalul Δt , când Δt tinde la zero, adică $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(g \cdot t + \frac{g}{2} \cdot \Delta t \right) = gt$.

II) Intensitatea unui curent variabil la un moment dat

Să notăm cu Q cantitatea de electricitate (măsurată în coulombi) scursă în intervalul de timp t (măsurat în secunde) printr-o secțiune transversală a unui circuit $Q = Q(t)$. Să dăm variabilei t o creștere Δt și să considerăm creșterea $\Delta Q = Q(t + \Delta t) - Q(t)$. Intensitatea medie a curentului în intervalul de timp Δt va fi $I_m = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$. Definim intensitatea curentului la un moment t : $I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} I_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t}$.

Problemele prezentate, cât și alte probleme asemănătoare, conduc la studierea dintr-un punct de vedere unitar a limitei raportului $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ când Δx tinde la zero; $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ se numește creșterea funcției corespunzătoare creșterii argumentului cu Δx .

În cele ce urmează considerăm $D \subset \mathbb{R}, D \neq \emptyset$.

Definiție.

Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in D \cap D'$. Dacă

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ există (finită sau infinită), se notează cu $f'(x_0)$

și se numește *derivata funcției f în x_0* . Dacă, în plus, $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ (este finit) atunci spunem că *funcția f este derivabilă în x_0* .

EXEMPLU



Să studiem derivabilitatea funcției:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2$ în punctul $x = x_0$;

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{ax^2 - ax_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = 2a \cdot x_0,$$

deci f este derivabilă în $x_0 \in \mathbb{R}$ și $f'(x_0) = 2 \cdot a \cdot x_0$.

Derivabilitatea funcțiilor într-un punct.

3) Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$.

- Calculează $f'(1)$.
- Este f derivabilă în $x_0 = 1$?

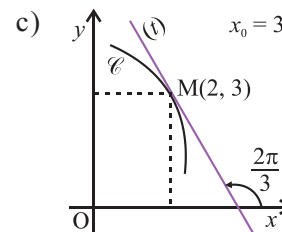
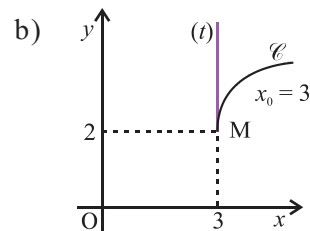
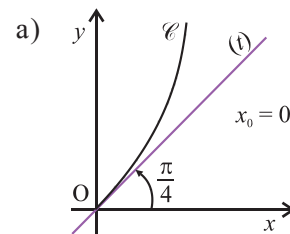
4) Considerăm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$.

Calculează $f'(1)$. Este f derivabilă în 1?

5) Fie $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$.

- Calculează $f'(0)$.
- Este f derivabilă în 0?
- Fie $x_0 > 0$. Calculează $f'(x_0)$. Putem afirma că f este derivabilă în x_0 dacă $x_0 > 0$?

6) \mathcal{C} este reprezentarea grafică a funcției f ; t este tangenta la curba \mathcal{C} în $M_0(x_0, y_0)$. Determină $f'(x_0)$, ecuația tangentei și panta tangentei în x_0 .



Ce interpretare geometrică dăm numărului $f'(x_0)$?

Alături de simbolul $f'(x_0)$ dat de J. Lagrange se mai folosesc și simbolurile $\frac{df(x_0)}{dx}$ dat de G. Leibniz sau $\Delta f(x_0)$ dat de A. Cauchy. Noi vom folosi în special notația simplă a lui Lagrange.

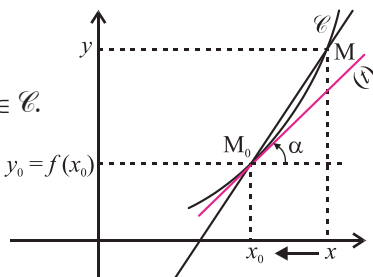
În cazul în care există $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ (sau $-\infty$), f nu este derivabilă în x_0 , dar vom spune că are derivata $+\infty$ (respectiv $-\infty$).

Interpretarea geometrică a derivatei unei funcții într-un punct

Considerăm funcția f și curba sa reprezentativă \mathcal{C} , $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$.

Raportul $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ reprezintă panta secantei M_0M . Dacă x ia valori oricât de apropiate de x_0 , atunci punctul M „tinde” să se confunde cu M_0 ;

în aceste condiții $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ devine panta tangentei t la curbă în M_0 , notată $f'(x_0) = m_t$.



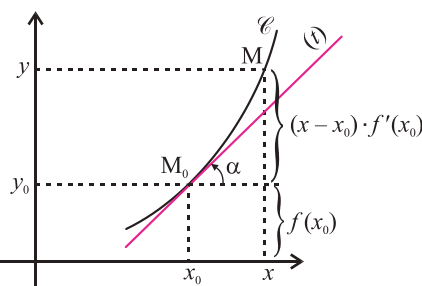
Observații.

◆ Dacă derivata este finită, coeficientul unghiular $\text{tg}\alpha$ al acestei tangente este egal cu derivata $f'(x_0)$.

◆ Dacă derivata este infinită, tangenta este verticală.

Cunoaștem panta dreptei tangente m_t și coordonatele unui punct al ei, $M_0(x_0, y_0)$; prin urmare, ecuația tangentei la grafic este: $y - y_0 = m_t(x - x_0)$, adică

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$



Observații.

◆ Derivabilitatea unei funcții într-un punct reprezintă o proprietate a funcției, iar derivata $f'(x_0)$ reprezintă un număr sau $\pm\infty$.

◆ Derivabilitatea este o noțiune cu caracter punctual; ea are sens numai în punctele de acumulare care aparțin domeniului de definiție. De exemplu, nu are sens problema derivabilității funcției $f(x) = \ln x$ în punctul 0 sau în punctul -1 , sau a funcției $f(x) = \text{tg}x$ în punctul $\frac{\pi}{2}$.

7) Studiază derivabilitatea funcțiilor următoare în $x_0 = 0$:

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = 2^x$;

b) $g : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \ln(x + 1)$.

Indicație.

Utilizează $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ și

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$$

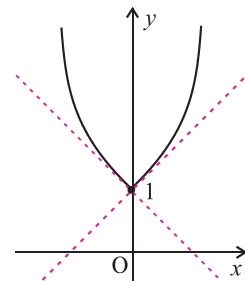
8) Studiază continuitatea și derivabilitatea funcției modul, $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ în punctul $x_0 = 0$.

Indicație.

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă pe \mathbb{R} , deci este continuă în $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1; \quad \lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1.$$

9) Arată că $f(x) = e^{|x|}$ este continuă în $x = 0$, dar nu este derivabilă în acest punct. Regăsește rezultatul obținut pe grafic.



Observă că în punctul $(0, 1)$ funcția nu are tangentă, dar are două semitangente.

10) Studiază continuitatea și derivabilitatea funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ 2x + 1, & x > 0 \end{cases}, \text{ în punctul } x_0 = 0.$$

Indicație.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (-2x + 1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (2x + 1) = 1 = f(0);$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{-2x}{x} = -2 \text{ iar}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{2x}{x} = 2.$$

Propoziție.

Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in D \cap D'$; atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

- 1) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$
- 2) $\forall (x_n) \subset D \setminus \{x_0\}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = f'(x_0)$

Ideea demonstrației. Se utilizează definiții echivalente ale limitei funcției $r: D \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}, r(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Definiție.

Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ și $A \subset D \cap D'$. Funcția f este *derivabilă pe mulțimea A* dacă f este derivabilă în orice punct $x \in A$.

Dacă $A = D$, spunem simplu că funcția f este derivabilă.

Definiție.

Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție.

Mulțimea $D_{f'} = \{x_0 \in D \cap D' \mid f \text{ e derivabilă în } x_0\}$ se numește *domeniul maxim de derivabilitate* al funcției f .

Funcția $f': D_{f'} \rightarrow \mathbb{R}$, care asociază fiecărui $x \in D_{f'}$ numărul real $f'(x)$, se numește *derivata funcției f*.



Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2; f'(x_0) = 2x_0, \forall x_0 \in \mathbb{R}$.
Domeniul de derivabilitate al funcției $f, D_{f'}$, este tot \mathbb{R} .
Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f'(x) = 2x, x \in \mathbb{R}$ este derivata lui f .

În cele ce urmează, vom nota cu I un interval al dreptei reale.

Teoremă. Legătura dintre continuitate și derivabilitate

Dacă funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă în $x_0 \in I$, atunci f este continuă în x_0 .

Demonstrație.

Fie $x \in I, x \neq x_0$; atunci $f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$.

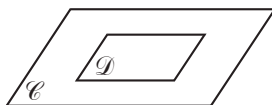
Din $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = 0$ rezultă

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, adică f este continuă în x_0 .

Consecință.

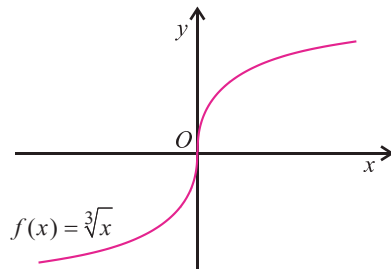
Dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă pe I , atunci f este continuă pe I .

În figura alăturată, \mathcal{D} reprezintă mulțimea funcțiilor derivabile pe un interval I , iar \mathcal{C} reprezintă mulțimea funcțiilor continue pe I ($\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$).



11) Arată că funcția $f(x) = \sqrt{x+2}$, $x \geq -2$ este derivabilă în 0 și nu este derivabilă în $x = -2$.

12) Arată că funcția $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, nu este derivabilă în $x_0 = 0$. Regăsește pe grafic rezultatul. Observăm că tangenta la grafic în $x_0 = 0$ este axa Oy .



13) Arată că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$ este derivabilă pe \mathbb{R} .

- 14) Studiază derivabilitatea funcției
- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x - 2|$, în $x_0 = 2$;
 - b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x\sqrt[3]{x}$, în $x_0 = 0$;
 - c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x-1}$, în $x_0 = 1$;
 - d) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln|x|$, în $x_0 = -1$.

Indicație.

c) $\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x-1} = \frac{(x-1)}{(x-1)\sqrt[3]{(x-1)^2}}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$;

d) $\frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = -\frac{\ln[1 + (-x - 1)]}{-x - 1}$ și

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$.

Observație.

Reciproca nu este, în general, adevărată. Este posibil ca o funcție să fie continuă într-un punct $x_0 \in I$, fără să fie derivabilă în x_0 .

EXEMPLU



... de funcție continuă într-un punct, care nu este derivabilă în acest punct.

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Evident, f este continuă în $x_0 = 0$. Din $\lim_{x \neq 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \neq 0} \frac{-x}{x} = -1$ și $\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x}{x} = 1$, rezultă că f nu este derivabilă în $x_0 = 0$.

Remarcă.

Există funcții continue pe un interval care nu sunt derivabile în nici un punct din acest interval. Un astfel de exemplu a fost dat prima dată în 1874 de matematicianul german Karl Weierstrass.

PROBLEME



PROPUSE

- 1. Determină creșterea funcției $f(x) = x^2$ corespunzătoare schimbării argumentului:
a) de la $x = 1$ la $x_1 = 2$;
b) de la $x = 1$ la $x_1 = 1,1$.

- 2. Calculează Δy pentru funcția $y = \sqrt[3]{x}$ dacă:
a) $x = 0$, $\Delta x = 0,001$;
b) $x = 8$, $\Delta x = -9$.

- 3. Determină Δy și $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ corespunzătoare schimbării argumentului din x în $x + \Delta x$:

a) $y = ax + b$; b) $y = x^2$.

- 4. Determină rata de creștere Δy a funcției $y = x^2$ în intervalul $[1, 4]$.

- 5. Determină $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pentru funcția $y = \frac{1}{x}$ în $x = 2$, dacă: a) $\Delta x = 1$; b) $\Delta x = 0,1$. Calculează $y'(2)$.

- 6. Fie funcția $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$.

- a) Calculează $f'(1)$.
- b) Calculează $f'(4)$.
- c) Calculează $f'(0)$.
- d) Este funcția f derivabilă în $x_0 = 0$?

- 7. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$

- a) Calculează $f'(8)$.
- b) Calculează $f'(0)$.
- c) Este funcția f derivabilă în $x_0 = 0$?

- 8. Pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot (x - 1)^2$, calculează: $f'(0)$, $f'(1)$.

- 9. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x(x - 1)(x - 2) \dots (x - 50)$. Calculează $f'(0)$.

- 10. Se consideră funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

- a) Calculează $f'(1)$.
- b) Calculează $f'(-1)$.
- c) Pentru $x_0 \in \mathbb{R}^*$, calculează $f'(x_0)$.

- 11. Arată că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[5]{x}$ nu are derivată finită în punctul $x_0 = 0$.

- 12. Studiază derivabilitatea funcțiilor:

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$, în $x_0 = -1$ și $x_1 = 1$;
- b) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - 1$, în $x_0 = e$;
- c) $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \ln(x + 1)$, în $x_0 = 0$;
- d) $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = 3^x$, în $x_0 = 0$;
- e) $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = 2^{x-3}$, în $x_0 = 3$;
- f) $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = 1 + 3^x$, în $x_0 = 0$;
- g) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 1|$, în $x_0 = 1$;
- h) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x + 1|$, în $x_0 = -1$;
- i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}}; & x < 0 \\ 0 & ; x \geq 0 \end{cases}$, în $x_0 = 0$.

- 13. Studiază continuitatea și derivabilitatea următoarelor funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ în punctul $x = 0$.

- a) $f(x) = x^2 - x$; b) $f(x) = \begin{cases} -3x + 1, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ 3x + 1, & x > 0 \end{cases}$

- c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \leq 0 \\ 2x^2 + x, & x > 0 \end{cases}$

2. Derivate laterale. Derivatele unor funcții elementare

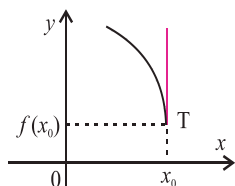
Derivate laterale. Interpretare geometrică

Fie o funcție $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D \cap D'$. Funcția raport $r: D - \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $r(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ este posibil să nu aibă limită în punctul x_0 , dar să aibă limite laterale în x_0 .

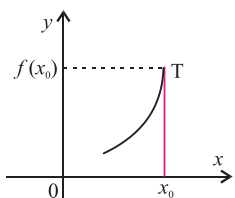
Definiție.

Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in D$ un punct de acumulare al mulțimii $D \cap (-\infty, x_0)$. Spunem că f este derivabilă (respectiv are derivată) la stânga în x_0 , dacă există $\lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_s(x_0) \in \mathbb{R}$ (respectiv $\lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_s(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$).

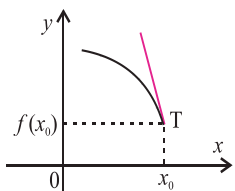
Fie $T(x_0, f(x_0)) \in \mathcal{G}_f$. Apar următoarele situații:



$f'_s(x_0) = -\infty$; \mathcal{G}_f are semitan-gentă la stânga în T , de ecuație:
 $x = x_0, y \geq f(x_0)$.



$f'_s(x_0) = +\infty$; \mathcal{G}_f are semitan-gentă la stânga în T , de ecuație:
 $x = x_0, y \leq f(x_0)$.



$f'_s(x_0) \in \mathbb{R}$; \mathcal{G}_f are semitan-gentă la stânga în T , de ecuație:
 $y - f(x_0) = f'_s(x_0)(x - x_0) \quad x \leq x_0$.

Exercițiu rezolvat.

Calculează derivata la stânga în punctul $x_0 = 0$ pentru funcția:
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x|}$.

Soluție. $f'_s(0) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{\sqrt{-x}}{x} = -\lim_{x \nearrow 0} \frac{\sqrt{-x}}{(\sqrt{-x})^2} = -\lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{\sqrt{-x}} = -\infty$.

Definiție.

Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in D$ un punct de acumulare al mulțimii $D \cap (x_0, +\infty)$. Spunem că f este derivabilă (respectiv are derivată) la dreapta în x_0 , dacă există $\lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0) \in \mathbb{R}$ (respectiv $\lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$).

1) Calculează derivata la stânga în punctele specificate, pentru următoarele funcții:

- a) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$, în $x_0 = -1$;
b) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^2 + 1$, în $x_0 = 1$.

Indicație.

a) $g'_s(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x+1} = \lim_{x \nearrow -1} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$;

b) $h'_s(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} = \lim_{x \nearrow 1} (x + 1)$.

2) Pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \in (-\infty, -1] \\ 1 - x^2, & x \in (-1, +\infty) \end{cases}, \text{ calculează}$$

$f'_s(-1)$, $f'_s(-2)$, $f'_s(0)$.

3) Calculează derivatele la stânga ale funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ în punctele x_0 indicate:

- a) $f(x) = x^2 + \sqrt{|x|}$ în $x_0 = 0$;
b) $f(x) = x + |x - 2|$ în $x_0 = 2$;
c) $f(x) = x\sqrt{|x + 2|}$ în $x_0 = -2$;

d) $f(x) = \begin{cases} x \ln |x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, în $x_0 = 0$.

4) Calculează derivatele la dreapta ale funcțiilor, în punctele specificate:

- a) $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[4]{x}$, în $x_0 = 0$;
b) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^3 + 5$, în $x_0 = 2$.

Indicație.

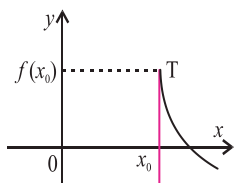
a) $g'_d(0) = \lim_{x \searrow 0} \frac{\sqrt[4]{x}}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$;

b) $h'_d(2) = \lim_{x \searrow 2} \frac{x^3 + 5 - 13}{x - 2} =$

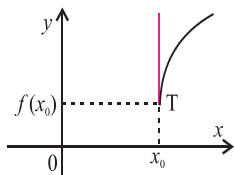
$= \lim_{x \searrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} =$

$= \lim_{x \searrow 2} (x^2 + 2x + 4)$.

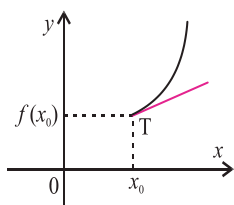
Fie $T(x_0, f(x_0)) \in \mathcal{G}_f$. Apar următoarele situații:



$f'_d(x_0) = -\infty$; \mathcal{G}_f are semitan-
gentă la dreapta în T , de ecuație:
 $x = x_0, y \leq f(x_0)$.



$f'_d(x_0) = +\infty$; \mathcal{G}_f are semitan-
gentă la dreapta în T , de ecuație:
 $x = x_0, y \geq f(x_0)$.



$f'_d(x_0) \in \mathbb{R}$; \mathcal{G}_f are semitan-
gentă la dreapta în T , de ecuație:
 $y - f(x_0) = f'_d(x_0)(x - x_0), x \geq x_0$.

Observații.

◆ Dacă $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ și $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție, atunci nu are sens problema derivatei la stânga în punctul a și nici a derivatei la dreapta în punctul b .

◆ Funcția f are derivată în punctul a dacă și numai dacă are derivată la dreapta în a și, în acest caz, $f'(a) = f'_d(a)$.

◆ Funcția f are derivată în punctul b dacă și numai dacă are derivată la stânga în b și, în acest caz, $f'(b) = f'_s(b)$.

Propoziție.

Fie funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D \cap D'$. Atunci f are derivată în x_0 dacă și numai dacă are derivate laterale egale în x_0 . În acest caz, $f'(x_0) = f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$.

Demonstrație.

Fie funcția raport $r: D \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}, r(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$,

$\forall x \in D - \{x_0\}$. Obținem: f are derivată în x_0 , adică

$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} r(x)$, deci $\exists \lim_{x \nearrow x_0} r(x) = l_s, \exists \lim_{x \searrow x_0} r(x) = l_d$ și $l_s = l_d$; rezultă

că $\exists f'_s(x_0), \exists f'_d(x_0)$ și $f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$.

Reciproca se justifică asemănător.

5) Pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \in \mathbb{R} - (-\infty, -1] \\ 1 - x^2, & x \in (-1, +\infty) \end{cases}, \text{ calculează}$$

$$f'_d(-1), f'_d(-2), f'_d(0).$$

6) Calculează derivatele laterale la dreapta în punctele specificate:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \in (-\infty, -1] \\ 1 - x^2, & x \in (-1, +\infty) \end{cases}$,
în $x_0 = -1$;

b) $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x-1}$, în $x_0 = 1$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x}$, în $x_0 = 0$;

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 3x$, în $x_0 = 2$.

7) Studiază derivabilitatea funcției în punctul specificat:

a) $f: [-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x+2}$, în $x_0 = -2$;

b) $g: (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{1-x}$, în $x_0 = 1$.

8) Determină $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^4 + ax + 2, & x < 0 \\ \ln(x+1) + b, & x \geq 0 \end{cases}$$

să fie derivabilă pe \mathbb{R} .

9) Calculează derivatele laterale ale funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ în punctele indicate:

a) $f(x) = x + |x|$, în $x_0 = 0$;

b) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, în $x_0 = 0$;

c) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$, în $x_0 = 1$;

d) $f(x) = \frac{|x-1|}{|x|+1}$, în $x_0 = 0$ și $x_1 = 1$;

e) $f(x) = \frac{1}{|x|+1}$, în $x_0 = 0$;

f) $f(x) = \frac{1}{|x+1|+1}$, în $x_0 = -1$.

Exerciții rezolvate.

1) Determină ecuațiile tangentelor la graficul funcției $f(x) = x - x^2$ în punctele de abscisă:

a) $x = 0$ b) $x = 1$

și măsurile unghiurilor formate de semidreapta (Ox cu aceste tangente.

Soluție.

a) $f'(0) = 1$; $\varphi = \frac{\pi}{4}$; $y = x$;

b) $f'(1) = -1$; $\varphi = \frac{3\pi}{4}$; $y = -x + 1$.

2) Determină $b, c \in \mathbb{R}$ știind că parabola $y = x^2 + bx + c$ are ca tangentă dreapta de ecuație $y = x$ în punctul $(1, 1)$.

Soluție.

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c - x^2 - bx - c}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 + b \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + b + \Delta x) = 2x + b;$$

$y'(1) = 1$ și $y(1) = 1$. Rezultă $2 + b = 1$ și $1 + b + c = 1$, de unde deducem $b = -1$, $c = 1$.

Derivatele unor funcții elementare

Vom calcula derivatele câtorva funcții elementare. Dacă $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, vom nota $D_{f'}$ domeniul ei de derivabilitate.

1) Funcția constantă

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = c, c \in \mathbb{R},$$

este derivabilă pe \mathbb{R} și $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f'(x) = 0$.

Demonstrație.

$$\text{Fie } x_0 \in \mathbb{R}; \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0 = f'(x_0). \text{ Cum}$$

x_0 a fost ales arbitrar, rezultă $f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Observație.

Prin notația $c' = 0$ vom înțelege că derivata funcției constante este zero (nu derivata numărului c).

2) Funcția identitate

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$$

este derivabilă și $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f'(x) = 1$.

Demonstrație.

$$\text{Fie } x_0 \in \mathbb{R} \text{ arbitrar; } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 = f'(x_0).$$

Rezultă $f'(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

10) Determină $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x & , x \leq 2 \\ ax + b, & x > 2 \end{cases}$$

să fie derivabilă pe \mathbb{R} .

11) Scrie ecuația tangentei la graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$, în punctul $M(1, 1)$.

12) Scrie ecuația tangentei la graficul lui $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$, în $M(1, 1)$.

13) Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$. Scrie ecuația tangentei la grafic în punctul $M_0(x_0, f(x_0)) \in \mathcal{G}_f$:

a) $f(x) = x^3$, în $x_0 = 0$;

b) $f(x) = x^2 - 5x + 1$, în $x_0 = 2$.

14) Scrie ecuația tangentei la curba $y = \frac{1}{2}x^2$ tangentă ce este perpendiculară pe dreapta $y = x + 1$.

Indicații.

Panta tangentei la curba dată în punctul $(x_0, y(x_0))$ este $y'(x_0)$.

Două drepte oblice sunt perpendiculare dacă și numai dacă produsul pantelor este -1 .

Să calculăm derivatele unor funcții elementare.

15) Derivează funcțiile următoare și determină, în fiecare caz în parte, domeniul de derivabilitate:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 7$;

b) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 7$;

c) $f: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 7$;

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \pi$;

e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{2}$;

f) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$;

g) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$;

h) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$;

Observație.

Prin notația $x' = 1$ vom înțelege derivata funcției identice și nu trebuie să se înțeleagă derivata argumentului.

3) Funcția putere

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

este derivabilă pe \mathbb{R} și $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstrație.

$$\text{Fie } x_0 \in \mathbb{R} \text{ arbitrar, } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x_0 + \dots + x \cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1}) = n \cdot x_0^{n-1} = f'(x_0)$$

4) Funcția putere

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^r, r \in \mathbb{R}$$

este derivabilă pe $(0, +\infty)$ și $f': (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f'(x) = r \cdot x^{r-1}$,

$\forall x \in (0, +\infty)$.

Demonstrație.

Fie $x_0 \in (0, +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^r - x_0^r}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x_0^r \left(\left(\frac{x}{x_0} \right)^r - 1 \right)}{x_0 \left(\frac{x}{x_0} - 1 \right)} = x_0^{r-1} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\left(\frac{x}{x_0} \right)^r - 1}{\frac{x}{x_0} - 1}$$

Notăm $\frac{x}{x_0} = 1 + t$ și observăm că $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x}{x_0} = 1 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0} (1 + t) = 1$.

$$\text{Deci } f'(x_0) = x_0^{r-1} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^r - 1}{t} = x_0^{r-1} \cdot r.$$

Observație.

Dacă $r \in \mathbb{Z}$, $r < 0$, funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^r$ este derivabilă pe \mathbb{R}^* și $f'(x) = r x^{r-1}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

5) Funcția radical

$$f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N}^*,$$

este derivabilă și $f': (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{2n \sqrt[n]{x^{2n-1}}}$, $\forall x \in (0, +\infty)$.

Pentru $n = 1$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\forall x > 0$.

Demonstrație. Se consideră în formula 4), $r = \frac{1}{2n}$.

Observație.

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\sqrt[n]{x}}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{\sqrt[n]{x^{2n-1}}} = +\infty, \text{ deci } \exists f'(0) = +\infty.$$

i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{1001}$;

j) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^3}$;

Indicație. $\left(\frac{1}{x^3} \right)' = (x^{-3})'$.

k) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$;

l) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{-2}$;

m) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^5}$;

n) $f: \mathbb{R}^* \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \max\{x, x^2\}$;

o) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \min\{x^3, 0\}$.

16) Calculează derivatele f' pentru fiecare din următoarele funcții, definite pe domeniile lor maxime de definiție și specifică $D_{f'}$ (domeniul de derivabilitate) în fiecare caz în parte.

a) $f(x) = 10$;

b) $f(x) = x^2$;

c) $f(x) = x^3$;

d) $f(x) = \sqrt[6]{x}$;

e) $f(x) = \sqrt[5]{x}$.

Verifică dacă afirmațiile următoare sunt adevărate:

a) $D_f = \mathbb{R}; D_{f'} = \mathbb{R}, f'(x) = 0$;

b) $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}, f'(x) = 2x$;

c) $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2$;

d) $D_f = [0, +\infty)$,

$$D_{f'} = (0, +\infty), f'(x) = \frac{1}{6\sqrt{x^5}}$$

e) $D_f = \mathbb{R}; D_{f'} = \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{1}{5\sqrt{x^4}}$.

17) Calculează f' pentru funcțiile:

a) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$;

b) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[4]{x}$;

c) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[8]{x}$.

6) Funcția radical

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = {}^{2n+1}\sqrt{x}, n \in \mathbb{N}^*$$

este derivabilă pe \mathbb{R}^* , $f': \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{(2n+1) \cdot {}^{2n+1}\sqrt{x^{2n}}}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

Reținem: $(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

Demonstrație.

Pentru $x > 0$ se consideră $r = \frac{1}{2n+1}$ în formula 4). Pentru $x < 0$ se va demonstra în paragraful următor.

Observație.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{{}^{2n+1}\sqrt{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \cdot {}^{2n+1}\sqrt{x^{2n}}} = +\infty, \text{ deci } \exists f'(0) = +\infty.$$

7) Funcția exponențială

$$f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), f(x) = a^x \text{ cu } a > 0 \text{ și } a \neq 1,$$

este derivabilă pe \mathbb{R} și $(a^x)' = a^x \ln a$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstrație.

$$\begin{aligned} \text{Fie } x_0 \in \mathbb{R}; \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{x_0} \cdot (a^{x-x_0} - 1)}{x - x_0} = \\ &= a^{x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = a^{x_0} \cdot \ln a = f'(x_0). \end{aligned}$$

Consecință. $(e^x)' = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

8) Funcția logaritmică

$$\log_a: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ cu } a > 0, a \neq 1$$

este derivabilă pe $(0, +\infty)$ și $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$, $\forall x \in (0, \infty)$.

Demonstrație.

$$\begin{aligned} \text{Fie } x_0 \in (0, +\infty); \text{ atunci } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\log_a x - \log_a x_0}{x - x_0} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x - x_0} \cdot \log_a \frac{x}{x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x_0 \cdot \ln a} \cdot \frac{\ln \left(1 + \frac{x}{x_0} - 1 \right)}{\frac{x}{x_0} - 1} = \frac{1}{x_0 \ln a} = f'(x_0) \end{aligned}$$

Consecință.

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \forall x > 0.$$

18) Calculează f' pentru fiecare dintre următoarele funcții:

a) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x}$;

b) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[9]{x}$;

c) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[7]{x}$.

19) Calculează derivata f' și specifică $D_{f'}$ (domeniul de derivabilitate) pentru:

a) $f(x) = \pi$;

b) $f(x) = x^5$;

c) $f(x) = x^{-7}$;

d) $f(x) = x^{\sqrt{2}}$;

e) $f(x) = \sqrt{|x|}$;

f) $f(x) = |x|^3$.

20) Calculează f' pentru fiecare dintre următoarele funcții:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^x$;

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3^x$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$;

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$;

e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \pi^x$;

f) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x$.

21) Calculează f' pentru fiecare dintre următoarele funcții:

a) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_2 x$;

b) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \lg x$;

c) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$;

d) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_5 x$;

e) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$;

f) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_6 x$;

g) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_{\frac{1}{6}} x$;

h) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x$.



● 1. Determină derivatele laterale ale funcțiilor următoare în punctele specificate:

a) $f(x) = \sqrt{x+2}$, în $x_0 = -2$;

b) $f(x) = |x|$, în $x_0 = 0$;

c) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ 3x, & x \geq 0 \end{cases}$ în 0;

d) $f(x) = \begin{cases} 2x-1; & x < 0 \\ x^2; & x \geq 0 \end{cases}$, în $x_0 = 0$.

● 2. Calculează în două moduri (cu definiția și cu formule) derivatele funcțiilor în punctele date:

a) $f(x) = x^2$, $x_0 = 3$;

b) $f(x) = x^4$, $x_0 = 2$;

c) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 3$;

d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$;

e) $f(x) = 2^x$, $x_0 = 1$;

f) $f(x) = \ln x$, $x_0 = e$;

g) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$.

● 3. Calculează derivata fiecăreia dintre funcțiile următoare:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$;

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$;

c) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$;

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$;

e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$;

f) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$;

g) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$;

h) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_3 x$;

i) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

● 4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \begin{cases} x+a, & x \leq 0 \\ x^2+bx+1, & x > 0 \end{cases}$;

b) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x^2+ax+b, & x > 0 \end{cases}$;

c) $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ ax+b, & x > 0 \end{cases}$.

Găsește $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care funcția f este derivabilă în punctul $x = 0$.

● 5. Calculează derivatele laterale în 0 pentru $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = |x|$; b) $f(x) = \sqrt{|x|}$; c) $f(x) = x + |x|$.

● 6. Scrie ecuațiile semitangentelor la graficul lui $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[4]{x^2}$, în $M(0, 0)$.

● 7. Scrie ecuațiile semitangentelor la graficul lui

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$, în $M(0, 0)$.

● 8. Scrie ecuațiile semitangentelor la graficul

funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x \in (-\infty, 0] \\ \frac{1}{x+1}, & x > 0 \end{cases}$, în

$M(0, 1)$.

● 9. Scrie ecuațiile tangentelor sau semitangentelor la graficele funcțiilor în punctele de abscisă specificate:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - 2$, $x_0 = 1$;

b) $f: [3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x-3}$, $x_0 = 3$.

● 10. Calculează derivatele următoarelor funcții:

a) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$;

b) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln 2$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$;

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^2$.

● 11. Pentru funcțiile următoare schițează graficul și calculează derivatele laterale în punctele indicate:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 1|$, $x_0 \in \{-1, 1\}$;

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{x}; & x \leq 0 \\ \sqrt{x}; & x > 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \max \left\{ e^x, \left(\frac{1}{e} \right)^x \right\}$, $x_0 = 0$;

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \min \left\{ -x, \sqrt[3]{x} \right\}$, $x_0 = 0$.

3. Operații cu funcții derivabile. Derivate de ordinul al doilea

Operații cu funcții derivabile

Operațiile algebrice cu funcții derivabile și compunerea funcțiilor derivabile conduc tot la funcții derivabile. Vom completa derivatele funcțiilor elementare din paragraful anterior.

Teoremă.

Fie funcțiile $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile în punctul $x_0 \in D \cap D'$. Funcția $f + g$ este derivabilă în x_0 și $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Demonstrație. Să notăm $h = f + g$; $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} =$
 $= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = f'(x_0) + g'(x_0) \in \mathbb{R}.$

Consecințe.

◆ Dacă f și g sunt derivabile pe D , atunci $f + g$ este derivabilă pe D și vom scrie $(f + g)' = f' + g'$.

◆ Suma $f_1 + f_2 + \dots + f_n$ a n funcții derivabile pe D este derivabilă pe D și $(f_1 + f_2 + \dots + f_n)' = f_1' + f_2' + \dots + f_n'$.

EXEMPLE



1) Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + e^x + \ln x$ este derivabilă pe \mathbb{R} și $f'(x) = 2x + e^x + \frac{1}{x}$.

2) Funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x + \sqrt{x}$ este derivabilă pe $(0, +\infty)$ și $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Teoremă.

Fie o funcție $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă în $x_0 \in D \cap D'$ și $c \in \mathbb{R}$. Funcția $c \cdot f$ este derivabilă în x_0 și $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$.

Demonstrație. Să notăm $h = c \cdot f$; $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} =$
 $= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c \cdot f(x) - c \cdot f(x_0)}{x - x_0} = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c \cdot f'(x_0).$

Consecințe.

◆ Dacă funcția f este derivabilă pe D și $c \in \mathbb{R}$, atunci funcția $c \cdot f$ este derivabilă pe D și $(c \cdot f)' = c \cdot f'$.

◆ Pentru $c = -1$ obținem $(-f)' = -f'$.

◆ Dacă f și g sunt funcții derivabile, atunci $f - g$ este funcție derivabilă și $(f - g)' = f' - g'$.

(Într-adevăr, $f - g = f + (-g)$ și $(f - g)' = f' + (-g)' = f' - g'$)

EXEMPLE



Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$ este derivabilă și $f'(x) = 2ax + b$.

Să calculăm derivatele unor funcții obținute prin operații algebrice cu funcții derivabile.

1) Calculează f' și $D_{f'}$ pentru fiecare dintre funcțiile următoare:

- a) $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt{x}$;
 b) $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x + e^x$.

2) Calculează f' și $D_{f'}$ pentru fiecare dintre funcțiile următoare:

- a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 + 5x + 1$;
 b) $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2\ln x + x + \sqrt[3]{x}$.

3) Fie funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Precizează domeniul maxim de definiție D_f , domeniul maxim de derivabilitate $D_{f'}$ și calculează f' pentru fiecare dintre funcțiile următoare:

- a) $f(x) = 3\ln x$;
 b) $f(x) = x^3 + 1$;
 c) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$;
 d) $f(x) = x^2 + 5x + 3$;
 e) $f(x) = 2$;
 f) $f(x) = 3x - 1$;
 g) $f(x) = \frac{2}{x}$;
 h) $f(x) = 3x - \frac{1}{x}$;
 i) $f(x) = \frac{1}{2x} - x$;
 j) $f(x) = 3x^2 - 1$;
 k) $f(x) = \frac{1}{x} + 2$.

4) Calculează f' și $D_{f'}$ pentru fiecare dintre funcțiile următoare:

- a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 \cdot x^3$;
 b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 \cdot e^x$;
 c) $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \cdot \ln x$;
 d) $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \cdot \sqrt{x}$.

Teoremă.

Fie funcțiile $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile în $x_0 \in D \cap D'$.

Funcția $f \cdot g: D \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă în x_0 și

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

Demonstrație.

$$\begin{aligned} \text{Notăm } h &= f \cdot g; \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = \\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \in \mathbb{R} \quad (\text{am folosit continuitatea} \\ &\text{funcției } g \text{ în } x_0, g \text{ fiind prin ipoteză derivabilă}). \end{aligned}$$

Consecință.

Dacă f și g sunt funcții derivabile pe D , atunci funcția $f \cdot g$ este derivabilă pe D și $(f \cdot g)' = f'g + fg'$.

Teoremă.

Fie funcțiile f și $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile în $x_0 \in D \cap D'$ și $g \neq 0$.

Funcția $\frac{f}{g}$ este derivabilă în x_0 și

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Demonstrație. Fie $x \in D$.

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) \cdot g(x_0) - g(x) \cdot f(x_0)}{g(x) \cdot g(x_0) \cdot (x - x_0)} = \\ &= \frac{f(x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g(x_0) - g(x) \cdot f(x_0)}{g(x) \cdot g(x_0) \cdot (x - x_0)} = \\ &= \frac{1}{g(x) \cdot g(x_0)} \cdot \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x_0) - f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] \rightarrow \\ &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \end{aligned}$$

Consecințe.

1) Dacă f și g sunt derivabile pe D și $g(x) \neq 0, \forall x \in D$,

atunci funcția $\frac{f}{g}$ este derivabilă pe D și $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

5) Calculează f' și $D_{f'}$ pentru funcțiile:

- $f(x) = xe^{2x} + 2;$
- $f(x) = \sqrt{x} + e^x;$
- $f(x) = \ln x + xe^x;$
- $f(x) = x^2e^x + \sqrt{x};$
- $f(x) = (\ln 3)x^3 \cdot e^x.$

6) Dacă $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ sunt derivabile și g este funcție constantă ($g = c$), ce devine formula $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$?

Dar $\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - gf'}{f^2} \quad (c \neq 0)?$

7) Calculează f' , specificând domeniul maxim de derivabilitate, pentru fiecare dintre funcțiile:

- $f(x) = \frac{1}{x};$
- $f(x) = \frac{x}{2};$
- $f(x) = (x + 1) \cdot \ln x^x;$
- $f(x) = (\sqrt{x} + 3) \cdot e^x;$
- $f(x) = (2x + 1) \cdot \sqrt{4x}.$

8) Calculează f' , specificând domeniul maxim de derivabilitate, pentru fiecare dintre funcțiile:

- $f(x) = \frac{x}{x+1};$
- $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x+1};$
- $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1};$
- $f(x) = \frac{2x + 3}{x - 1};$
- $f(x) = \frac{x^2}{2x - 3};$
- $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1};$
- $f(x) = \frac{x^3}{(1+x)^2};$

2) Dacă g este derivabilă pe D și $g(x) \neq 0, \forall x \in D$, atunci

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

Teoremă. Derivabilitatea funcției compuse

Fie funcțiile $f: D \rightarrow E, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ și punctele $x_0 \in D \cap D', y_0 = f(x_0) \in E \cap E'$. Dacă f este derivabilă în x_0 și g este derivabilă în y_0 , atunci funcția $g \circ f: D \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă în x_0 și $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

Demonstrație.

Din g derivabilă în y_0 rezultă că există

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = g'(y_0) \in \mathbb{R}. \text{ Definim funcția } \alpha: E \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\alpha(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} - g'(y_0), & y \neq y_0 \\ 0, & y = y_0 \end{cases}. \text{ Atunci}$$

$$g(y) - g(y_0) = g'(y_0) \cdot (y - y_0) + \alpha(y) \cdot (y - y_0), \forall y \in E - \{y_0\}$$

și cum $\lim_{y \rightarrow y_0} \alpha(y) = 0 = \alpha(y_0)$, rezultă că α este continuă și nulă în y_0 , deci relația se verifică și pentru $y = y_0$:

$$g(y) - g(y_0) = g'(y_0) \cdot (y - y_0) + \alpha(y) \cdot (y - y_0), \forall y \in E.$$

Fie $x \in D, x \neq x_0$; atunci pentru $y = f(x)$ avem:

$$\begin{aligned} g(f(x)) - g(f(x_0)) &= g'(f(x_0)) \cdot (f(x) - f(x_0)) + \\ &+ \alpha(f(x))(f(x) - f(x_0)) \text{ sau } \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \\ &= g'(f(x_0)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \alpha(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1). \end{aligned}$$

Cum f este derivabilă în x_0 rezultă că f este continuă în x_0 , iar din α continuă în $y_0 = f(x_0)$ rezultă că $\alpha \circ f$ este continuă în x_0 și $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(f(x)) = 0$. Trecând la limită în relația (1) obținem:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} &= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) + 0 \cdot f'(x_0) = \\ &= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0), \text{ de unde rezultă concluzia teoremei.} \end{aligned}$$

Consecință.

Dacă $f: D \rightarrow E$ și $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ sunt derivabile, atunci funcția compusă $g \circ f: D \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă și

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x), \forall x \in D.$$

l) $f(x) = \frac{x}{e^x};$

i) $f(x) = \frac{e^x}{x};$

j) $f(x) = \frac{\ln x}{x}.$

9) Calculează f' pentru fiecare din funcțiile:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x^2 + x + 1)^{71};$

b) $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}};$

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{1+x^2}.$

10) Pune în evidență greșeala din rezolvarea exercițiului următor.

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^6$. Demonstrează că f este derivabilă pe \mathbb{R} și determină derivata funcției.

Soluție.

Metoda 1.

Scriem $f(x) = (x^3)^2$ și notăm $u(x) = x^3$, iar $g(u) = u^2$; atunci

$$f'(x) = g'(u) = 2u = 2x^3.$$

Metoda 2.

Observăm că $f = g \circ u$ și

$$\begin{aligned} g'(u(x)) \cdot u'(x) &= 2u(x) \cdot u'(x) = \\ &= 2x^3 \cdot 3x^2 = 6x^5 = f'(x). \end{aligned}$$

11) Fie funcțiile $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ (E fiind domeniul maxim pe care f este derivabilă). Precizează E și calculează f' pentru fiecare din funcțiile următoare:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \ln \sqrt{x};$

b) $f(x) = \ln \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}};$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 + \ln x};$

d) $f(x) = \sqrt{\ln x};$

e) $f(x) = 3^x + x^3 + \ln \pi;$

f) $f(x) = \sqrt{2^x + 1}.$

Exerciții rezolvate.

1) Determină derivatele următoarelor funcții definite și derivabile pe intervalele date:

a) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2\ln x$; b) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - \ln x$; c) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2 + \frac{\ln x}{x}$;
 d) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 \ln x$; e) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x + 3 \ln x}{x}$.

Soluții.

a) $\forall x \in (0, \infty), f'(x) = -2 \cdot \frac{1}{x} = -\frac{2}{x}$, pentru că $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

b) $\forall x \in (0, \infty), f'(x) = 2 - \frac{1}{x}$;

c) $\forall x \in (0, \infty), f'(x) = 0 + \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, deoarece $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$;

d) $\forall x \in (0, \infty), f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x$, deoarece $(f \cdot g)' = f'g + fg'$;

e) $\forall x \in (0, \infty), f'(x) = \frac{\left(1 + 3 \cdot \frac{1}{x}\right)x - (x + 3 \ln x) \cdot 1}{x^2} = \frac{x + 3 - x - 3 \ln x}{x^2} = \frac{3 - 3 \ln x}{x^2}$.

2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$ este derivabilă și $f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}}$.

Soluție.

Fie $u, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, u(x) = x^2 + 1$ și $g(x) = \sqrt[3]{x}$. Obținem $f = g \circ u$, g, u derivabile și $g'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, u'(x) = 2x$.

Atunci $f'(x) = g'(u(x)) \cdot u'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}} \cdot 2x = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}}$.

3) Fie I, J, K intervale ale dreptei reale și $f: I \rightarrow J, g: J \rightarrow K, h: K \rightarrow \mathbb{R}$ funcții derivabile; atunci funcția $F = h \circ g \circ f$ este derivabilă (pe I) și $F'(x) = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

Soluție. $F'(x) = ((h \circ g) \circ f)'(x) = (h \circ g)'(f(x)) \cdot f'(x) = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

Ca o sinteză a formulelor obținute, vom prezenta următorul **tabel al derivatelor funcțiilor elementare**.

f	D_f	f'	$D_{f'}$	Observații
c (constantă)	\mathbb{R}	0	\mathbb{R}	
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	\mathbb{R}	$n \cdot x^{n-1}$	\mathbb{R}	
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^*$	$(0, +\infty)$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$(0, +\infty)$	
$\sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N}^*$	$[0, +\infty)$	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$	$(0, +\infty)$	$f'_d(0) = +\infty$
$a^x, a > 0, a \neq 1$	\mathbb{R}	$a^x \cdot \ln a$	\mathbb{R}	
$\ln x$	$(0, \infty)$	$\frac{1}{x}$	$(0, \infty)$	$a = e \Rightarrow (e^x)' = e^x$
$\log_a x, a > 0, a \neq 1$	$(0, \infty)$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	$(0, \infty)$	

Derivate de ordinul al doilea

În cele ce urmează, considerăm $D \subset \mathbb{R}$.

Definiție.

Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in D \cap D'$. Funcția f este *derivabilă de două ori* în x_0 (respectiv *are derivată de ordinul al doilea* în x_0) dacă:

- 1) f este derivabilă pe o vecinătate V a lui x_0 .
- 2) funcția derivată $f': D_{f'} \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă în x_0 (respectiv are derivată în x_0), dacă există $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$ (respectiv $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbb{R}}$).

În acest caz, limita se notează cu $f''(x_0)$ (sau $\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$ sau $D^2 f(x_0)$) și se numește *derivata a doua* (sau *derivata de ordinul al doilea*) a funcției f în punctul x_0 .

Observație.

$f'' = (f')'$, $f'': D_{f''} \rightarrow \mathbb{R}$, unde $D_{f''}$ este domeniul de derivabilitate al funcției $f': D_{f'} \rightarrow \mathbb{R}$.

EXEMPLU



$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 5x^3 + 2x$,
derivata de ordinul 1 este $f'(x) = 15x^2 + 2$,
derivata de ordinul al 2-lea este $f''(x) = 30x$.

În mod asemănător se definește prin recurență derivata de ordin $n \in \mathbb{N}^*$ a funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ și se va nota $f^{(n)}$.

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})', \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Convenție.

Derivata de ordinul 0 a funcției f coincide cu f , adică $f^{(0)} = f$.

12) Calculează derivata de ordinul al 2-lea pentru fiecare dintre următoarele funcții și stabilește, în fiecare caz, domeniul de derivabilitate $D_{f''}$.

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = c, c \in \mathbb{R}$;
- b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3$;
- c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$;
- d) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n, n \in \mathbb{Z}^*$;
- e) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^r, r \in \mathbb{R}$;
- f) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 2x^2$;
- g) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$;
- h) $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N}^*$;
- i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[n+1]{x}, n \in \mathbb{N}^*$;
- j) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^x$;
- k) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \lg x$;
- l) $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty), f(x) = a^x, a > 0$ și $a \neq 1$;
- m) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1$.



1. Calculează derivatele următoarelor funcții specificând, în fiecare caz multiple maxime de definiție ale funcțiilor f și f' :

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x + 1$;

b) $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$;

c) $f(x) = xe^x$;

d) $f(x) = \frac{1}{e^x}$;

e) $f(x) = \frac{x}{e^x}$;

f) $f(x) = x^2 \ln x$;

g) $f(x) = x^2 \ln a$, unde $a > 0$;

h) $f(x) = \frac{\ln a}{x}$, unde $a > 0$;

i) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$;

j) $f(x) = x \cdot 2^x$;

k) $f(x) = 3^x + x \cdot 6^x + 2^x$;

l) $f(x) = x^2 + y^2$;

m) $f(y) = x^2 + y^2$;

n) $f(z) = x^2 + y^2$.

● **2.** Calculează derivatele funcției f (specificând domeniile maxime de definiție ale funcțiilor f și f'):

a) $f(x) = (2x + 3)^{70}$;

b) $f(x) = (ax^2 + bx + c)^{31}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$;

c) $f(x) = (x^3 - x)^7$;

d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x}$;

e) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$;

f) $f(x) = \sqrt{x \cdot e^x + x}$;

g) $f(x) = e^{x^2}$;

h) $f(x) = 7 \cdot e^{-x^2}$.

● **3.** Calculează derivatele următoarelor funcții pe domeniile maxime de derivabilitate:

a) $f(x) = e^x - e^{-x}$;

b) $f(x) = e^x + e^{-x}$;

c) $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$;

d) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$;

e) $f(x) = 1 - x^4$;

f) $f(x) = \sqrt{1 - x^4}$;

g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^4}}$;

h) $f(x) = \ln \frac{1}{\sqrt{1 - x^4}}$.

● **4.** Calculează derivatele de ordinul al 2-lea pentru următoarele funcții $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, unde $D \subset \mathbb{R}$ este domeniul maxim de definiție:

a) $f(x) = x^3 + 3x + 1$;

b) $f(x) = \frac{1}{x^3 + 3x + 1}$;

c) $f(x) = 3^x + x^2$.

d) $f(x) = 3^x + x^3$;

e) $f(x) = 2^x + \log_2 x$;

f) $f(x) = e^{ax}$, $a \in \mathbb{R}^*$;

g) $f(x) = \frac{1}{x+a}$, $a \in \mathbb{R}$;

h) $f(x) = \ln(x+a)$, $a \in \mathbb{R}$.

● **5.** Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Calculează f'' pentru următoarele funcții:

a) $f(x) = x^2 + 1$;

b) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$;

c) $f(x) = x^3 + 3$;

d) $f(x) = \ln(x^2 + 3)$;

e) $f(x) = x^2 - 2x$;

f) $f(x) = e^{x^2 - 2x}$.

● **6.** Pentru $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x - 1)$, calculează f'' .

● **7.** Pentru $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x$, calculează f'' .

● **8.** Calculează:

a) $f(0) + x \cdot f'(0)$ pentru funcția $f(x) = e^{-x}$;

b) $f(3) + (x - 3) \cdot f'(3)$ pentru funcția $f(x) = \sqrt{x + 1}$.

● **9.** Dacă $I \subset \mathbb{R}$ și $u, v: I \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții derivabile și $u(x) > 0$, $\forall x \in I$, atunci funcția u^v este derivabilă și $(u^v)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'$.

● **10.** Folosind formula de derivare din exercițiul anterior, calculează:

a) $x^{\ln x}$;

b) $(\ln x)^x$;

c) $x^{\sqrt{x}}$;

d) $(\sqrt{x})^x$.

●● 11. Dedu formula sumei:
 $S = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$ din egalitatea:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

●● 12. Demonstrează că funcția

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \leq 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases} \text{ este derivabilă.}$$

Calculează f' .

●● 13. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x \cdot f(x)$ este derivabilă într-un punct $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Arată că f este derivabilă în x_0 .

●● 14. a) Dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este strict crescătoare (crescătoare) și derivabilă, atunci $f'(x) > 0$ (respectiv $f'(x) \geq 0$), $\forall x \in I$;

b) Dacă $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ este strict descrescătoare (descrescătoare) și derivabilă, atunci $g'(x) < 0$ (respectiv $g'(x) \leq 0$), $\forall x \in I$.

● 15. Derivează funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{1 + e^x}$.

●● 16. Studiază continuitatea și derivabilitatea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \max\{x, x^2\}$.

●● 17. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă. Arată că:

a) dacă f este pară, atunci f' este impară;

b) dacă f este impară, atunci f' este pară.

●●● 18. Arată că :

a) $y = \frac{1}{1 + x + \ln x}$ verifică $x \cdot y' = y \cdot (y \cdot \ln x - 1)$;

b) $y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ verifică $x \cdot y' = (1 - x^2) \cdot y$;

c) $y = x \cdot e^{-x}$ verifică $x \cdot y' = (1 - x) \cdot y$.

●● 19. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n), x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R},$$

distincte două câte două. Arată că:

a) $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \dots + \frac{1}{x - x_n}$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\};$$

b) $f''(x) \cdot f(x) < (f'(x))^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Pentru mișcarea rectilinie pe axa Ox , cunoașterea ecuației de mișcare $x(t)$ oferă posibilitatea determinării ecuațiilor vitezei $v(t) = x'(t)$ și accelerației $a(t) = v'(t) = x''(t)$, cu toate consecințele din interpretarea geometrică a derivatei.

●● 20. Un mobil pleacă dintr-un punct cu o viteză inițială $v_{01} = 5\text{m/s}$ și accelerația $a_1 = 2\text{m/s}^2$. După un interval de timp δ , din același punct pleacă un alt mobil într-o mișcare uniformă, cu viteza $v_{02} = 20\text{m/s}$.

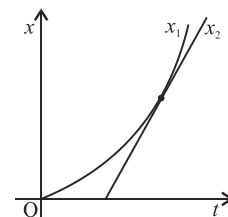
a) Pentru ce valoare a lui δ mobilele se întâlnesc doar o dată?

b) Interpretează geometric faptul că, la momentul întâlnirii, mobilele au aceeași viteză.

(Ecuația mișcării uniform

$$\text{accelerate: } x = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Ecuația mișcării uniforme: $x = vt$).



●● 21. Dintr-un punct pleacă două mobile cu ecuațiile de mișcare $x_1(t) = 5t^2 + 2t$, $x_2(t) = t^3 + 2t^2 + 4t$, unde x este măsurat în metri și t în secunde. Determină:

a) momentele de întâlnire;

b) ecuațiile vitezelor și accelerațiilor celor două mobile;

c) vitezele și accelerațiile mobilelor în momentele de întâlnire;

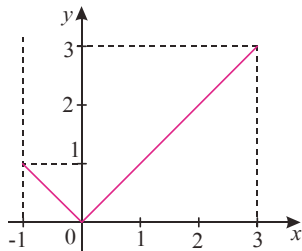
d) momentele în care vitezele și respectiv accelerațiile mobilelor sunt egale.

4. Proprietăți generale ale funcțiilor derivabile pe un interval

◆ Teorema lui Fermat

(Pierre de Fermat, 1601 – 1665, matematician francez, precursor al calculului diferențial al geometriei analitice, al teoriei numerelor și al calculului probabilităților).

Fie funcția $f : [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$; $\text{Im}f = [0, 3]$; $y_0 = 0$ este minimul funcției obținut pentru $x_0 = 0$, iar $y_1 = 3$ este maximul funcției obținut pentru $x_1 = 3$.



Definiție.

Fie $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție. Punctul $x_0 \in D$ se numește *punct de minim absolut (global)* al funcției f dacă: $f(x_0) \leq f(x)$, $\forall x \in D$.

Punctul $x_0 \in D$ se numește *punct de maxim absolut (sau global)* al funcției f dacă: $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in D$.

EXEMPLU



Funcția $f : (-2, 4) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ este mărginită, $x = 0$ este punct de minim global, $f(0) \leq f(x)$, $\forall x \in (-2, 4)$, dar nu are puncte de maxim global.

Definiție.

Fie $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in D$.

Punctul x_0 se numește *punct de maxim relativ (sau local)* al funcției f , dacă există o vecinătate V a lui x_0 astfel încât $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in V \cap D$; $f(x_0)$ se numește *maxim relativ al funcției*.

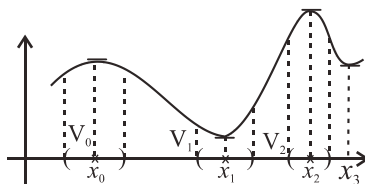
Punctul x_0 se numește *punct de minim relativ (sau local)* al funcției f , dacă există V o vecinătate a lui x_0 astfel încât $f(x_0) \leq f(x)$, $\forall x \in V \cap D$; $f(x_0)$ se numește *minim relativ al funcției*.

Punctul $x_0 \in D$ este *punct de extrem relativ (sau local)* al lui f dacă este punct de minim sau de maxim relativ (sau local).

EXEMPLU



Fie funcția ce are graficul trasat în figura alăturată. x_0 și x_2 sunt puncte de maxim local, iar x_1 și x_3 sunt puncte de minim local.



1) Arată că funcția:

a) $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$

are punct de minim global, dar nu are punct de maxim.

b) $f : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$

are punct de maxim global, dar nu are punct de minim absolut.

2) Ce puncte de minim sau maxim global au următoarele funcții definite pe domeniul maxim?

a) $f(x) = x^4 - 1$;

b) $f(x) = 3x^2 - x^4 - 2$.

3) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ x + a, & x > 0 \end{cases}$$

Determină $a \in \mathbb{R}$ pentru care $x = 0$ este punct de maxim local al lui f .

4) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$$

Arată că $x = 0$ este punct de minim local (și global). Observă că $x = 0$ este punct de discontinuitate, deci f nu e derivabilă în $x = 0$.

5) Determină extremele funcțiilor

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^2 + 2x$;

b) $f(x) = \min\{x, 1 - x\}$;

c) $f(x) = \max\{-x, -x^2\}$;

d) $f(x) = |x^2 - 1|$.

Observații.

◆ Un punct de maxim relativ nu este în mod necesar un punct de maxim absolut (în care funcția are cea mai mare valoare pe domeniul D); un punct de maxim absolut este și punct de maxim relativ.

◆ Un punct de minim relativ nu este în mod necesar un punct de minim absolut (în care funcția are cea mai mică valoare pe domeniul D); un punct de minim absolut este, în același timp, și un punct de minim relativ.

◆ Este posibil ca un minim (relativ) al funcției să fie mai mare decât un maxim (relativ) al funcției.

Următoarea teoremă arată legătura între punctele de extrem ale unei funcții derivabile și zerourile derivatei întâi.

Teorema lui Fermat.

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă într-un punct de extrem local x_0 din interiorul intervalului I ($x_0 \in I$ și x_0 nu este capăt al intervalului); atunci $f'(x_0) = 0$.

Interpretare geometrică

Teorema lui Fermat arată că, dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă și x_0 este un punct de extrem local din interiorul intervalului I , atunci tangenta la graficul funcției f dusă în punctul de abscisă x_0 este paralelă cu axa Ox .

Observații.

◆ Reciproca teoremei nu este în general adevărată.

Exemplu. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ are $f'(0) = 0$, dar 0 nu e punct de extrem pentru f (f este crescătoare).

◆ Dacă x_0 nu e punct interior lui I , propoziția din teorema lui Fermat nu este adevărată.

Exemplu. $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ admite $x_0 = 0$ și $x_1 = 1$ puncte de extrem, dar $f'(0) = f'(1) = 1$.

Definiție.

Dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă pe un interval I , atunci punctele $\alpha \in I$ pentru care $f'(\alpha) = 0$ se numesc *puncte critice ale lui f pe I* .

Observație.

Teorema lui Fermat afirmă că punctele de extrem local se găsesc printre punctele critice.

6) a) Arată că, dacă $a, b, c \in (0, +\infty)$ și $a^x + b^x + c^x \geq 3, \forall x \in \mathbb{R}$, atunci $a \cdot b \cdot c = 1$.

b) Determină $a \in \mathbb{R}$ dacă

$$15^x + 2^x \geq 3^x + a^x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Indicație.

a) Definim funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = a^x + b^x + c^x - 3;$$

$x_0 = 0$ este punct de minim absolut, deci este evident și un punct de extrem local din interiorul intervalului \mathbb{R} , iar f este derivabilă. Aplicăm teorema lui Fermat și rezultă $f'(0) = 0$;

$$\ln a + \ln b + \ln c = 0; abc = 1.$$

7) Determină punctele critice pentru funcțiile $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ următoare (D_f este domeniu de derivabilitate al funcției f).

a) $f(x) = x^3 - 27x$;

b) $f(x) = x^2 - x$;

c) $f(x) = 2x^2 - \ln x$;

d) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$;

e) $f(x) = 2x^2$;

f) $f(x) = x^2 + 3x$;

g) $f(x) = \ln x - 2$;

h) $f(x) = \frac{x^2}{3x + 1}$;

i) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$;

j) $f(x) = \frac{3x}{x + 2}$.

8) Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă care se anulează în punctele $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Arată că f' se anulează cel puțin în $n - 1$ puncte.

Indicație.

Aplică teorema lui Rolle restricției funcției f la intervalele $[a_1, a_2]$, $[a_2, a_3]$, ..., $[a_{n-1}, a_n]$.

◆ Teorema lui Rolle

(Michel Rolle, 1652 – 1719, matematician francez).

Teorema lui Rolle.

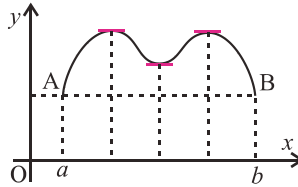
Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu următoarele proprietăți:

- 1) f este continuă pe $[a, b]$;
- 2) f este derivabilă pe (a, b) ;
- 3) $f(a) = f(b)$.

Atunci $\exists c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

Interpretare geometrică

Fie $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$; cum $f(a) = f(b)$, rezultă $AB \parallel Ox$. Dacă graficul funcției f admite tangentă în orice punct din (a, b) și coarda $[AB]$ este orizontală, atunci există cel puțin un punct al graficului în care tangenta are direcția axei Ox .



Exerciții rezolvate.

1) Fie $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x + 1$; f fiind elementară, rezultă:

- a) f continuă pe $[0, 1]$; b) f derivabilă pe $(0, 1)$; c) $f(0) = f(1) = 1$.

Din teorema lui Rolle, există $c \in (0, 1)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

Într-adevăr, $f'(c) = 0$, $3c^2 - 1 = 0$, $c_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \in (0, 1)$, $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \notin (0, 1)$

2) Fie $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$, $a_4 \neq 0$ cu proprietatea:

$$\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{4} + \frac{a_4}{5} = 0. \text{ Arată că ecuația:}$$

$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \text{ are cel puțin o soluție reală.}$$

Soluție.

$$\text{Fie } f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{a_4}{5}x^5 + \frac{a_3}{4}x^4 + \frac{a_2}{3}x^3 + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_0}{1}x.$$

f este derivabilă, deci și continuă, pe $[0, 1]$; $f(0) = 0 = f(1)$. Conform teoremei lui Rolle rezultă existența unui punct intermediar $c \in (0, 1)$ pentru care $f'(c) = 0$, condiție echivalentă cu $a_4c^4 + a_3c^3 + a_2c^2 + a_1c + a_0 = 0$.

Consecințe ale teoremei lui Rolle

Consecința 1.

Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuă, f derivabilă pe (a, b) și $f(a) = f(b) = 0$; atunci există $c \in (a, b)$, astfel încât $f'(c) = 0$ (între 2 zerouri ale funcției se află cel puțin un zero al derivatei).

Consecința 2.

Între 2 zerouri consecutive ale derivatei se află cel mult un zero al funcției.

Fie $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$, $x_1 < x_2$ zerouri consecutive ale lui f' . Presupunem că $\exists x_3, x_4$ zerouri ale funcției f ($x_1 < x_3 < x_4 < x_2$).

9) Aplică teorema lui Rolle funcției $f: [3, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (3 - x)(5 - x)$.

10) Studiază aplicabilitatea teoremei lui Rolle pentru funcțiile:

a) $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 1|$;

b) $f: [-1, 1] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [-1, 0) \\ 1-x, & x \in (0, 1] \end{cases}$.

Indicație.

a) Studiază derivabilitatea funcției f în $x = 1$.

b) Studiază derivabilitatea funcției f în $x = 0$.

11) Fie $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 4, & x \in [-1, 0] \\ 3x^2 + bx + 4, & x \in (0, 1] \end{cases}, a, b \in \mathbb{R}.$$

Determină valorile parametrilor a și b pentru care f verifică ipotezele teoremei lui Rolle pe intervalul $[-1, 1]$.

Indicație.

i) $f(-1) = f(1)$ și f este derivabilă pe $[-1, 1] \setminus \{0\}$.

$$\text{ii) } f'_s(0) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{x^2 + ax}{x} = a$$

$$f'_d(0) = \lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{3x^2 + bx}{x} = b.$$

Funcția f este derivabilă în $x = 0$ dacă și numai dacă $a = b$. Din i) și ii), f verifică ipotezele teoremei lui Rolle dacă $a = b$.

12) Arată că ecuația

$a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + a_2x^{2n-2} + \dots + a_{2n-1}x + a_{2n} = 0$ are cel puțin o soluție în intervalul $(-1, 1)$, dacă are loc relația:

$$\frac{a_0}{2n+1} + \frac{a_2}{2n-1} + \frac{a_4}{2n-3} + \dots + \frac{a_{2n}}{1} = 0.$$

Indicație.

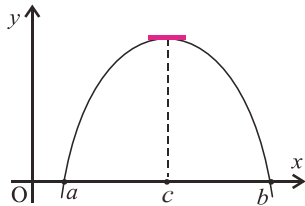
Aplică teorema lui Rolle funcției

$$F: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \frac{a_0}{2n+1}x^{2n+1} +$$

$$+ \frac{a_1}{2n}x^{2n} + \dots + \frac{a_{2n-1}}{2}x^2 + a_{2n}x.$$

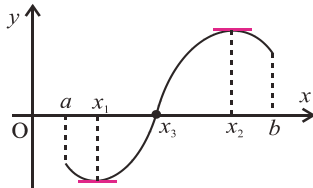
Conform consecinței 1, din $f(x_3) = f(x_4) = 0$ rezultă că există $x_5 \in (x_3, x_4)$ astfel încât $f'(x_5) = 0$, contradicție deoarece $x_1 < x_3 < x_2$ și x_1, x_2 sunt zerouri consecutive ale lui f' .

Sunt posibile situațiile prezentate în figurile următoare:



$$f(a) = f(b) = 0$$

$$\exists c \in (a, b) \text{ a.î. } f'(c) = 0$$



$$f'(x_1) = f'(x_2) = 0$$

$$f(x_3) = 0, x_3 \in (x_1, x_2)$$

◆ Teorema lui Lagrange

(Joseph Louis Lagrange, 1736 – 1813, matematician francez).

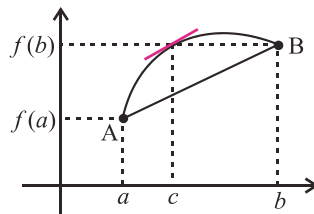
Teorema lui Lagrange.

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ce verifică proprietățile:
 1) f continuă pe $[a, b]$; 2) f derivabilă pe (a, b) .

Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Interpretare geometrică

Dacă graficul lui f admite tangentă în fiecare punct (cu excepția eventual a extremităților) există cel puțin un punct pe grafic în care tangenta este paralelă sau coincide cu coarda $[AB]$ ce unește extremitățile acestuia.



Observație.

Teorema lui Lagrange generalizează teorema lui Rolle (într-adevăr, dacă în plus $f(a) = f(b)$, atunci $f'(c) = 0$). Această teoremă se numește și prima teoremă a creșterilor finite sau prima teoremă de medie.

Exerciții rezolvate.

1) Determină punctul intermediar c obținut prin aplicarea teoremei lui Lagrange funcției

$$f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = mx^2 + nx + p \quad (m \in \mathbb{R}^*, n, p \in \mathbb{R}).$$

Soluție.

f este continuă pe $[\alpha, \beta]$, f este derivabilă pe (α, β) , deci există $c \in (\alpha, \beta)$ astfel încât $f'(c) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$. Obținem

$$2mc + n = m(\alpha + \beta) + n, \text{ deci } c = \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ (adică } c \text{ este mijlocul segmentului de pe axa } Ox \text{ ce are abscisele } \alpha \text{ respectiv } \beta).$$

Acest rezultat ne arată modul în care se poate construi cu rigla și compasul tangenta într-un punct al parabolei.

13) Arată că, dacă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă, atunci pentru orice interval $[a, b]$ există un punct $c \in (a, b)$ astfel încât: $f'(c) = \frac{(a+b-2c)}{(c-a)(c-b)} f(c)$.

Indicație.

Se aplică teorema lui Rolle pentru funcția $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (x-a)(x-b) \cdot f(x)$.

14) Arată că următoarele funcții verifică numai una din condițiile teoremei lui Rolle, iar concluzia teoremei nu se verifică.

a) $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 2) \\ 0, & x = 2 \end{cases}$

este discontinuă în $x = 2$,

$$f'(x) = 1, \forall x \in (0, 2);$$

b) $g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = |x|$ nu este

derivabilă în 0, $g'(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-1, 0) \\ 1, & x \in (0, 1) \end{cases}$;

c) $h: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x$,

$$h(0) \neq h(2), h'(x) = 1, \forall x \in (0, 2).$$

15) Concluzia teoremei lui Lagrange se poate scrie:

„ $\exists c \in (a, b)$ astfel încât

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = f'(c)$$
”

sau

„ $\exists c \in (a, b)$ astfel încât

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$
”?

16) Studiază aplicabilitatea teoremei lui Lagrange și aplic-o, unde este posibil, în cazul funcțiilor următoare:

a) $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{1-x}, 0 < b < 1$;

b) $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1] \\ 2x-1, & x \in (1, 2] \end{cases}$.

17) Determină punctul intermediar $c \in (0, 1)$ prin aplicarea teoremei lui Lagrange funcției $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$.

2) a) Dacă $0 < a < b$, demonstrează că: $\frac{b-a}{b} < \ln b - \ln a < \frac{b-a}{a}$.

b) Fie $x > 0$; arată că: $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$.

c) Arată că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) = +\infty$.

Soluție.

a) Definim funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$; f este continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) . Conform teoremei lui Lagrange,

$\exists c \in (a, b)$ pentru care $\frac{1}{c} = \frac{\ln b - \ln a}{b - a}$. Din $a < c < b$ rezultă

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}, \text{ deci } \frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{a}.$$

b) Pentru $a = x$ și $b = x + 1$ se obține afirmația.

c) În inegalitatea $\ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k}$, dăm lui k valori de la 1 la n și, însumând, obținem: $\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1$.

Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = +\infty$, rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) = +\infty$.

Consecințe ale teoremei lui Lagrange

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval.

Consecința 1.

Dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă și $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$, atunci f este constantă pe I .

Observație.

Dacă I nu este interval, concluzia poate fi falsă. Fie funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$, f derivabilă,

$f'(x) = 0$, dar f nu este constantă pe \mathbb{R}^* (\mathbb{R}^* nu este interval).

Consecința 2.

Dacă $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ sunt derivabile pe intervalul I și $f' = g'$, atunci $g - f$ este constantă pe I .

Observație.

Condiția ca I să fie interval este esențială.

Fie $f, g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, $g(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x < 0 \\ e^x + 1, & x > 0 \end{cases}$, $f' = g'$,

dar $g(x) - f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ nu este funcție constantă.

Consecința 3. Monotonia funcțiilor

Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe intervalul I .

a) Dacă $f' > 0$ pe I , atunci f este strict crescătoare pe I .

b) Dacă $f' < 0$ pe I , atunci f este strict descrescătoare pe I .

18) Fie funcția $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = x + \ln x$. Arată că există $c \in (1, 2)$ astfel încât $1 + \ln 2 = f'(c)$. Determină efectiv valoarea lui c .

Consecințe ale teoremei lui Lagrange

19) Fie funcția $f: [1, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = x^{1-a}$, $a > 1$. Arată:

a) $\frac{1}{(k+1)^a} < \frac{1}{(a-1)} [f(k) - f(k+1)] < \frac{1}{k^a}$

$k \in \mathbb{N}^*$;

b) $\frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \dots + \frac{1}{n^a} <$

$< \frac{1}{(a-1)} [f(1) - f(n+1)]$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Soluție.

a) Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, restricția lui f la intervalul $[k, k+1]$ este derivabilă. Conform teoremei lui Lagrange, există $c_k \in (k, k+1)$ cu $f(k+1) - f(k) = f'(c_k)$. Avem, $\forall x \geq 1$, $f'(x) = (1-a)x^{-a}$ și $f''(x) = a(a-1)x^{-a-1} > 0$. Rezultă că funcția f' este strict crescătoare.

Din $k < c_k < k+1$ rezultă $f'(k) < f'(c_k) < f'(k+1)$; din aceasta, prin înmulțire cu $\frac{1}{a-1} > 0$, obținem inegalitatea

$$\frac{1}{(k+1)^a} < \frac{1}{(a-1)} [f(k) - f(k+1)] < \frac{1}{k^a}.$$

b) Din prima parte a inegalității de la punctul a) rezultă:

$$\frac{1}{2^a} < \frac{1}{(a-1)} [f(1) - f(2)]$$

$$\frac{1}{3^a} < \frac{1}{(a-1)} [f(2) - f(3)]$$

.....
 $\frac{1}{n^a} < \frac{1}{(a-1)} [f(n) - f(n+1)]$

Însumând aceste inegalități, obținem:

$$\frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \dots + \frac{1}{n^a} < \frac{1}{(a-1)} [f(1) - f(n+1)].$$

c) Dacă f este strict crescătoare (crescătoare), atunci $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$.

Observație.

Condiția ca I să fie interval este esențială.

Deși funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ este derivabilă și are derivata negativă ($f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0, \forall x \in \mathbb{R}^*$), f nu este strict descrescătoare pe \mathbb{R}^* ($f(-1) = -1 < 1 = f(1)$), însă f este strict descrescătoare pe fiecare din intervalele $(-\infty, 0)$ și $(0, +\infty)$.

Consecința 4. Derivata unei funcții într-un punct

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in I$. Dacă f este continuă pe I , derivabilă pe $I - \{x_0\}$ și există $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci există derivata lui f în x_0 și $f'(x_0) = l$.

Observații.

◆ Condiția ca f să fie continuă în $x_0 \in I$ este esențială.

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

nu este continuă în $x = 0$, este derivabilă pe \mathbb{R}^* și $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$.

Evident că f nu e derivabilă în $x = 0$ (0 fiind punct de discontinuitate).

◆ Consecința 4 exprimă condiții suficiente, nu și necesare, pentru ca o funcție $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ să fie derivabilă în $x_0 \in I$.

◆ Adesea, în aplicații, consecința 4 se utilizează când x_0 este capăt de interval. În acest caz, $l = f'_s(x_0)$ respectiv $l = f'_d(x_0)$.

20) Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă.

Arată că f este constantă dacă și numai dacă $f' = 0$.

21) Determină intervalele de monotonie pentru funcțiile următoare.

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$;

b) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$.

22) Studiază derivabilitatea funcțiilor următoare în punctele indicate, folosind consecința 4 a teoremei lui Lagrange:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x < 0 \\ x^3, & x \geq 0 \end{cases}$, în

punctul $x_0 = 0$;

b) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |\ln x - 2|$, în punctul $x_0 = e^2$;

c) $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x+1} e^{|x|}$, în

punctul $x_0 = 0$;

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2 + 1}{2}, & x \in (-\infty, -1) \\ x, & x \in [-1, 1] \\ \frac{x^2 + 1}{2}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$

în punctele $x_0 = -1$ și $x_1 = 1$.



● **1.** Stabilește căror funcții li se poate aplica teorema lui Rolle și determină punctele intermediare c din concluzia teoremei.

a) $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1 + x - x^4;$

b) $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{|x|}.$

●● **2.** Dacă numerele reale a_0, a_1, \dots, a_n verifică

$$\frac{a_0}{1} + \frac{2 \cdot a_1}{2} + \frac{2^2 \cdot a_2}{3} + \dots + \frac{2^n \cdot a_n}{n+1} = 0,$$

arată că funcția $f: [1, e^2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = a_0 + a_1 \cdot \ln x + \dots + a_n \cdot \ln^n x$ se anulează în intervalul $(1, e^2)$.

●● **3.** Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b) . Arată că pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$ între două zerouri ale lui f se află cel puțin un zero al funcției $\lambda \cdot f + f'$.

● **4.** Determină c_n din teorema lui Lagrange aplicată funcției $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n$ și apoi $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$.

● **5.** Aplicând teorema lui Lagrange funcției

$$f: [0, x] \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{t+1},$$

vom determina $\theta = \theta_x$ și $0 < \theta_x < 1$ astfel încât $f(x) - f(0) = x \cdot f'(\theta_x \cdot x)$.

Calculează $\lim_{x \searrow 0} \theta_x$.

●● **6.** Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Aplicând teorema lui Lagrange funcției $f: [n, n+1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x$, verifică inegalitățile: $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$.

●● **7.** Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

a) Calculează $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) Verifică aplicabilitatea teoremei lui Lagrange pe un interval $[c, d] \subset \mathbb{R}$.

c) Arată că $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n f'(x_k) = -f(1) = -\frac{1}{2}$, unde x_k este punctul intermediar obținut prin aplicarea teoremei lui Lagrange funcției f pe intervalul $[k+1, k+2]$.

●● **8.** Fie funcția $f: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = \ln(1 + \ln x)$. Arată că:

$$a) \frac{1}{(k+1)(1 + \ln(k+1))} \leq f(k+1) - f(k) \leq$$

$$\leq \frac{1}{k(1 + \ln k)}, \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2;$$

$$b) \frac{1}{2(1 + \ln 2)} + \frac{1}{3(1 + \ln 3)} + \dots + \frac{1}{n(1 + \ln n)} >$$

$$> f(n+1) - f(2), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

●● **9.** Stabilește inegalitatea:

$$e^x > 1 + \ln(1 + x), \forall x > -1, x \neq 0.$$

(Institutul de Arhitectură, București, 1995)

●●● **10.** a) Demonstrează inegalitatea: $e^x \geq x + 1, \forall x \in \mathbb{R};$

b) Arată inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică a n numere pozitive.

(G. Polya)

●● **11.** Demonstrează inegalitatea:

$$\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x, \forall x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty).$$

●● **12.** a) Studiază monotonia funcției

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

b) Demonstrează inegalitatea

$$n^{n+1} > (n+1)^n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3.$$

●● **13.** Determină $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât funcțiile următoare să fie derivabile pe întreg domeniul de definiție:

$$a) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + n, & x \leq 2 \\ mx + n, & x > 2 \end{cases};$$

$$b) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2mx^3 + n, & x \leq 1 \\ 2x^2 + 3m, & x > 1 \end{cases};$$

$$c) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + 1} + n, & x \leq 2 \\ mx + n, & x > 2 \end{cases};$$

$$d) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{m}{2 + x^4} + n, & x \leq 1 \\ 2x^2 + 3m, & x > 1 \end{cases}.$$

●● **14.** Determină $m, n \in \mathbb{R}$ pentru care funcția

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \ln^3 x, & x \in (0, e] \\ mx + n, & x \in (e, +\infty) \end{cases}$$

este derivabilă.

Indicație. Se poate utiliza o consecință a teoremei lui Lagrange.

●●● 15. Fie intervalul $I \subset \mathbb{R}$ și $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ funcție derivabilă. Dacă f este crescătoare, atunci $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$.

● 16. Demonstrează că $x + \frac{1}{x} \geq 2, \forall x > 0$.

● 17. Determină intervalele de monotonie ale următoarelor funcții:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 - 4x - 1$;

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x - 2)^2$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x + 4)^3$;

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 4x + 1$;

e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 3x + 2$;

f) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 5x - 6$;

g) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x(x - 2)$;

h) $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x-2}$;

i) $f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x-2}$;

j) $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x-1}$;

k) $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$.

●●● 18. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2|x-1| - |x+a|$, $a \in \mathbb{R}$. Determină parametrul real a pentru care f este derivabilă pe \mathbb{R} .

●●● 19. Arată că, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, dacă $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă pe $[a, b]$ astfel încât $af(b) = bf(a)$, atunci există $c \in (a, b)$ așa încât $f(a) - f(c) + f(b) = (a - c + b) \cdot f'(c)$.

●●● 20. Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă și mărginită pe (a, b) . Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$\frac{a-2c+b}{(c-a)(c-b)} = f'(c).$$

●●● 21. Arată că există $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu una din proprietățile:

- a) f este continuă, dar nu este derivabilă în $a = 1$;
- b) f este continuă, are derivată dar nu este derivabilă în $a = 0$;
- c) f are derivată dar este discontinuă în $a = 0$.

●●● 22. Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$ și $a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x \geq n, \forall x \in \mathbb{R}$, atunci $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$.

●●● 23. Determină $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ pentru care $a^x \geq x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

(W. Sierpinski)

●●● 24. Găsește $a > 0$ pentru care are loc inegalitatea $2^x + a^x \geq 3^x + 4^x, \forall x \in \mathbb{R}$.

●●● 25. Determină $a \in \mathbb{R}$ pentru care are loc inegalitatea $(1+x)^n \geq 1+ax, \forall x > -1$ și $n \in \mathbb{N}^*$ fixat.

●●● 26. Determină $a \in \mathbb{R}$ pentru care are loc inegalitatea: $x^a + a \geq 1 + \frac{a}{x}, \forall x > 0$.

●●● 27. Arată că dacă $\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} = 0$ ($a_k \in \mathbb{R}, 0 \leq k \leq n$), atunci ecuația: $a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 = 0$ admite cel puțin o soluție reală.

●●● 28. Dă un exemplu de funcție $f: [1, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ ce verifică condițiile din teorema lui Lagrange pentru care punctul intermediar $c \in (1, 10)$ nu este unic.

●●● 29. Fie $0 < a < b$ și $f(x) = \ln x$; conform teoremei lui Lagrange, există cel puțin un punct $c \in (a, b)$

astfel încât $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$. Arată că

$$c \in \left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2} \right).$$

●● 30. Rezolvă în \mathbb{R} ecuația $3^x + 4^x = 2^x + 5^x$.

●●● 31. a) Se consideră funcțiile $a_{ij}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile, $1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 2$ și se definește funcția:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{vmatrix}. \text{ Arată că } f \text{ este}$$

derivabilă și demonstrează că:

$$f'(x) = \begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) \\ a'_{21}(x) & a'_{22}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a'_{21}(x) & a'_{22}(x) \end{vmatrix};$$

b) Extinde regula precedentă pentru determinanții de ordinul al 3-lea.

5. Calculul unor limite de funcții cu ajutorul derivatelor

În cazurile exceptate de teoremele referitoare la operații cu limite de funcții se studiază direct existența limitei cu ajutorul derivatelor, utilizând „regulile lui l'Hospital“

(Guillaume de l'Hospital, 1661 – 1704, matematician francez).

Aceste reguli se aplică în cazurile de nedeterminare $\frac{0}{0}$ și $\frac{\infty}{\infty}$. Celelalte cazuri se reduc la acestea.

Regula l'Hospital

Fie $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ un interval, $x_0 \in I$ și $f, g : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ funcții cu proprietățile:

1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ (respectiv $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| + \infty$);

2) f și g sunt derivabile pe $I \setminus \{x_0\}$ și $g'(x) \neq 0, \forall x \in I \setminus \{x_0\}$;

3) există $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$;

atunci $g(x) \neq 0, \forall x \in I \setminus \{x_0\}$ și există $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

◆ **Cazul exceptat** $\frac{0}{0}$ și $\frac{\infty}{\infty}$

Exercițiu rezolvat.

Să calculăm: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1}$ ($n, m \in \mathbb{N}^*$);

Soluție.

Fie $f(x) = x^n - 1, g(x) = x^m - 1, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$;

f și g sunt derivabile, $g'(x) = m \cdot x^{m-1} \neq 0$;

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{n \cdot x^{n-1}}{m \cdot x^{m-1}} = \frac{n}{m}, \text{ deci } l = \frac{n}{m}.$$

Observație.

Dacă limita raportului $\frac{f'}{g'}$ nu se calculează mai ușor decât limita raportului $\frac{f}{g}$, nu este indicată folosirea teoremei lui l'Hospital.

De exemplu, fie $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x - e^{-x}$ și $g(x) = e^x + e^{-x}$.
Avem $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$; $g'(x) = e^x + e^{-x}$ și

$$g(x) = e^x - e^{-x} \neq 0 \text{ pentru } x \neq 0, \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \text{ și } \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

◆ **Reducerea cazului exceptat „ $0 \cdot \infty$ “**

la una din formulele „ $\frac{0}{0}$ “ sau „ $\frac{\infty}{\infty}$ “ :

$$f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}} = \frac{g}{\frac{1}{f}}$$

1) Calculează $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x}$.

Soluție.

Considerăm $f(x) = x$ și $g(x) = e^x$.
 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty$; f și g sunt derivabile;

$$g'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}; \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0,$$

deci $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

2) După modelul exercițiului precedent, calculează:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$;

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x}$;

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^x}$, unde $k \in \mathbb{N}^*$;

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - 1}{x^{29} - 1}$.

3) Calculează $\lim_{x \searrow 0} \sqrt{x} \cdot \ln x$.

4) Calculează:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 + x^2 - 5x + 3}$;

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}$;

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x \ln \left(1 - \frac{1}{x} \right)$;

d) $\lim_{x \searrow 0} x^3 \ln x$;

e) $\lim_{x \searrow 0} e^{-\frac{1}{x}} \ln x$;

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)} \right)$;

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{x(e^x + 1)} \right)$;

h) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right)$;

Exercițiul rezolvat.

Să calculăm $\lim_{x \searrow 0} x \ln x$.

Soluție.

Suntem în cazul $0 \cdot (-\infty)$; $x \ln x = \frac{\ln x}{x^{-1}}$.

Definim $f(x) = \ln x$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

$\lim_{x \searrow 0} \ln x = -\infty$, $\lim_{x \searrow 0} g(x) = +\infty$; f, g sunt derivabile, $g'(x) = -\frac{1}{x^2} \neq 0$.

$\lim_{x \searrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim_{x \searrow 0} (-x) = 0$, deci $\lim_{x \searrow 0} x \cdot \ln x = 0$.

◆ **Reducerea cazului exceptat**

„ $\infty - \infty$ “ la cazul „ $\frac{0}{0}$ “

$$f - g = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{f \cdot g}}$$

Exercițiul rezolvat.

Să calculăm: a) $\lim_{x \rightarrow 0} (x - x \ln x)$; b) $\lim_{x \searrow 0} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right)$.

Soluție.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (x - x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \infty$;

b) $\lim_{x \searrow 0} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) = \lim_{x \searrow 0} \frac{1 + x \ln x}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\ln x + 1}{1} = -\infty$.

◆ **Reducerea cazurilor exceptate**

„ 1^∞ , ∞^0 , 0^0 “

$$f^g = e^{\ln f^g} = e^{g \cdot \ln f}$$

Observație.

Este bine să evităm scrierea: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

această egalitate având loc doar când ultima limită există. Dacă

nu există $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, teorema lui l'Hospital nu este aplicabilă.

i) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$; j) $\lim_{x \searrow 0} x^x$.

5) Calculează:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$;

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}$.

6) Calculează:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\alpha - 1}{x^\beta - 1}$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$);

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$;

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^x$;

d) $\lim_{x \searrow 1} (x-1) \cdot \ln \frac{1}{x-1}$;

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - x)$;

f) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^x$;

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$;

h) $\lim_{x \searrow 0} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$;

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3}$;

j) $\lim_{x \nearrow e} [\ln(x-e)(\ln x - 1)]$;

k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2^x + 3^x + 4^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}}$.



● **1. Calculează:**

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{3x - 3}$; b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{2x - 2}$;
 c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{3x}$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+27} - 3}{\sqrt{x+4} - 2}$.

● **2. Calculează:**

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{\ln x}$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{e^{2x}}$;
 c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1)}{x^2 + 3}$; d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^x + e^{-x})}{x}$.

●● **3. Calculează:**

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)} \right)$; b) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(x e^{\frac{1}{x}} \right)$;
 c) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (1-x^2) e^{\frac{1}{x-1}}$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\ln(x+1)} \right)$.

●●● **4. Calculează:**

a) $\lim_{x \rightarrow 3} (4-x)^{\frac{1}{x^2-9}}$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$;
 c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x^2} \right)^{\frac{1}{x}}$; d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

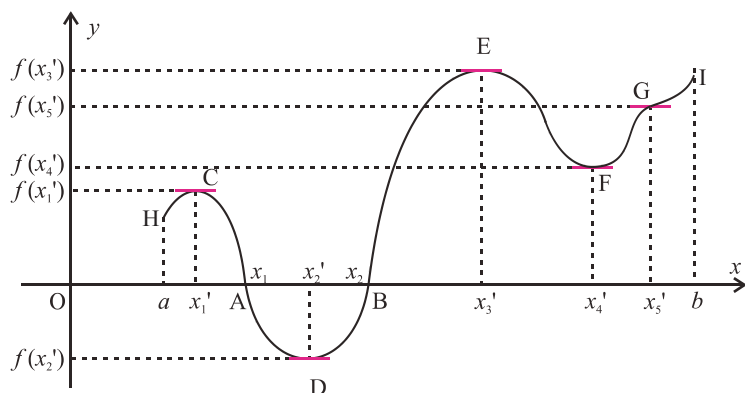
6. Rolul derivatei de ordinul întâi în studiul funcțiilor

Derivata întâi a unei funcții ne dă informații despre monotonia funcției și despre eventualele puncte de extrem ale acesteia.

EXEMPLU



Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă care are următoarea reprezentare grafică.



Grafic, observăm că:

- x_1, x_2 , soluțiile ecuației $f(x) = 0$, sunt zerourile funcției f și punctele $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$ reprezintă intersecțiile graficului funcției cu axa Ox ;

- $x_1', x_2', x_3', x_4', x_5'$, soluțiile ecuației $f'(x) = 0$, sunt zerourile derivatei f' (numite și *puncte critice ale lui f*) și pot fi puncte de extrem local pentru funcția f :

- punctele $C(x_1', f(x_1'))$, $E(x_3', f(x_3'))$, $I(b, f(b))$ sunt puncte de maxim local;

- punctele $D(x_2', f(x_2'))$, $F(x_4', f(x_4'))$, $H(a, f(a))$ sunt puncte de minim local;

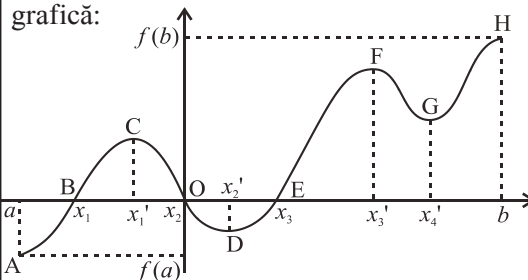
- punctul $G(x_5', f(x_5'))$ nu este punct de extrem pentru funcția f (vom vedea mai departe că G este punct de inflexiune).

- pe intervalele $[a, x_1']$, $[x_2', x_3']$, $[x_4', b]$ funcția f este strict crescătoare;

- pe intervalele $[x_1', x_2']$, $[x_3', x_4']$ funcția f este strict descrescătoare.

Să interpretăm grafice

1) Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă care are următoarea reprezentare grafică:



i) Ce soluții are ecuația $f(x) = 0$?

ii) Care sunt punctele de intersecție ale graficului funcției f cu axa Ox ?

iii) Ce soluții are ecuația $f'(x) = 0$?

iv) Care sunt punctele critice ale lui f ?

v) Ce puncte din plan sunt puncte de extrem local pentru funcția f ?

vi) Sunt punctele $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ puncte de extrem local pentru funcția f ?

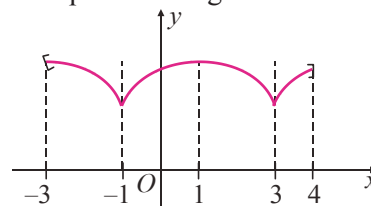
vii) Care sunt intervalele de monotonie?

2) Imaginează o reprezentare grafică a unei funcții $f : [-2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât graficul să intersecteze axa Ox în punctele $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(4, 0)$ și următoarele puncte să fie de extrem local: $(-2, 2)$, $(1, 4)$, $(3, -1)$.

Există mai multe funcții ale căror reprezentări grafice verifică condițiile de mai sus?

Imaginează și trasează încă o astfel de reprezentare grafică.

3) Funcția $f : [-3, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ are următoarea reprezentare grafică.



Care sunt punctele de extrem local ale funcției f ? În care dintre aceste puncte, graficul admite tangentă orizontală?

Intervale de monotonie ale unei funcții

O consecință a teoremei lui Lagrange ne asigură că o funcție derivabilă este strict monotonă pe intervalele pe care derivata sa păstrează semn constant.



Consecință a teoremei lui Lagrange

Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe intervalul I .

a) Dacă $f'(x) > 0, \forall x \in I$, atunci f este strict crescătoare pe I .

b) Dacă $f'(x) < 0, \forall x \in I$, atunci f este strict descrescătoare pe I .

c) Dacă f este strict crescătoare (crescătoare pe I), atunci $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$.

d) Dacă f este strict descrescătoare (descrescătoare pe I), atunci $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$.

Un rezultat important relativ la determinarea intervalelor de monotonie ale unei funcții derivabile pe un interval este:

Propoziție.

Dacă funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R}$ interval, are proprietățile:

a) f este continuă pe I ;

b) f este derivabilă pe $I \setminus A$, unde A este o mulțime finită și $f'(x) > 0, \forall x \in I \setminus A$.

Atunci funcția f este strict crescătoare pe I .

Demonstrație.

Este suficient să analizăm cazul $A = \{a\}, a \in I$.

Dacă $a = \min\{x \mid x \in I\}$ sau $a = \max\{x \mid x \in I\}$, rămâne valabilă demonstrația consecinței teoremei lui Lagrange.

Dacă a este un punct din interiorul intervalului I , atunci funcția f este strict crescătoare pe intervalele $(-\infty, a] \cap I$ și $[a, +\infty) \cap I$ i)

Oricare ar fi $x_1 \in (-\infty, a) \cap I$ și $x_2 \in (a, +\infty) \cap I$, rezultă $f(x_1) < f(a)$ și $f(a) < f(x_2)$, ceea ce implică $f(x_1) < f(x_2)$ ii)

Din i), ii) funcția f este strict crescătoare pe I .

Observație.

Dacă ipoteza „ $f'(x) > 0, \forall x \in I \setminus A$ ” este înlocuită cu „ $f'(x) < 0, \forall x \in I \setminus A$ ”, atunci funcția f este strict descrescătoare pe I .

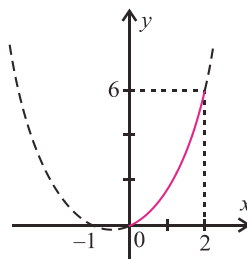


1) Fie $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x$.

Folosind derivata funcției, arată că f este strict crescătoare pe $[0, 2]$.

Soluție.

Funcția f este derivabilă pe $[0, 2]$ și $f'(x) = 2x + 1$. Pentru $x \in [0, 2], f'(x) > 0$, deci f este strict crescătoare pe $[0, 2]$.



Să demonstrăm monotonia funcțiilor derivabile folosind derivata întâi!

4) i) Studiază, cu ajutorul derivatei, monotonia funcțiilor:

a) $f: [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 5x + 6$;

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 5x + 6$;

c) $f: [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$;

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$
(parabola cubică);

e) $f: [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$;

f) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$
(hiperbola echilaterală);

ii) Studiază monotonia funcțiilor de mai sus fără să folosești derivatele.

5) Fie $f: [-4, -1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x$. Folosind derivata funcției, arată că f este strict descrescătoare pe $[-4, -1]$. Reprezintă grafic funcția f și regăsește grafic proprietatea demonstrată.

6) Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), f(x) = e^{-x}$. Arată că funcția f este strict descrescătoare pe \mathbb{R} .

7) Fie $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{\frac{1}{x}}$. Studiază, folosind derivate, monotonia funcției (găsind intervalele de monotonie ale funcției).

8) Fie $f: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2$. Folosind derivata funcției, arată că f este strict crescătoare pe $(-\infty, 0]$. Reprezintă grafic funcția f și regăsește grafic proprietatea demonstrată.

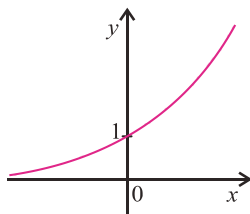
9) Fie $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln \frac{1}{x}$. Arată că f este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$.

10) Formulează enunțul propoziției pentru varianta „ f funcție strict descrescătoare” și demonstrează acest rezultat.

2) Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), f(x) = e^x$. Arată că funcția f este strict crescătoare pe \mathbb{R} .

Soluție.

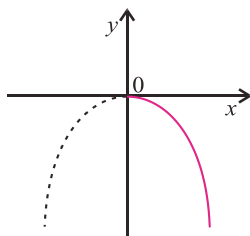
Funcția exponențială este derivabilă pe \mathbb{R} și $f'(x) = e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, deci f este strict crescătoare pe \mathbb{R} .



3) Fie $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2$. Folosind derivata funcției, arată că f este strict descrescătoare pe $[0, \infty)$.

Soluție.

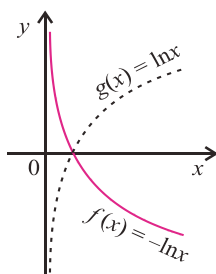
Funcția f este derivabilă pe $[0, \infty)$ și $f'(x) = -2x$. Pentru $x \in (0, \infty), f'(x) < 0$, deci f este strict descrescătoare pe $[0, \infty)$.



4) Fie $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -\ln x$. Arată că funcția f este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$.

Soluție.

Funcția f este derivabilă pe $(0, \infty)$ și $f'(x) = -\frac{1}{x}$. Cum $x > 0$, avem $f'(x) < 0$, deci f este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$.



5) Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x}$. Arată că funcția f este strict crescătoare pe \mathbb{R} .

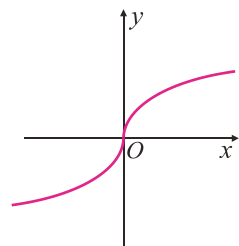
Soluție.

a) Funcția f este continuă pe \mathbb{R} .

b) Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ și

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Din a) și b) rezultă că funcția f este strict crescătoare pe \mathbb{R} .

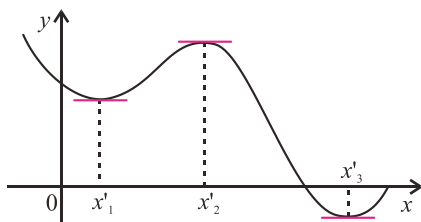


Puncte de extrem ale unei funcții



... interpretarea geometrică a teoremei lui Fermat

Dacă reprezentarea grafică a unei funcții derivabile pe un interval admite tangentă într-un punct de extrem, ce nu coincide cu extremitățile graficului, atunci tangenta în acest punct este orizontală.



11) Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), f(x) = 2e^x$. Arată că funcția f este strict crescătoare pe \mathbb{R} .

12) Fie $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3x^2$. Folosind derivata funcției, arată că f este strict descrescătoare pe $[0, \infty)$.

13) Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x} - 3$. Arată că funcția f este strict crescătoare.

14) Arată că $f(x) = \frac{1}{x^3}$ este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$, strict descrescătoare pe $(0, \infty)$, dar nu este strict descrescătoare pe \mathbb{R}^* .

15) Fie $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2\ln x$. Arată că funcția f este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$.

16) Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3 - \sqrt[3]{x}$. Arată că funcția f este strict descrescătoare pe \mathbb{R} .

Să interpretăm grafic!

17) Folosind semnul derivatei, stabilește intervalele de monotonie ale funcțiilor și specifică eventualele puncte de extrem:

a) $f: [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 5x + 6$;

b) $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 1$.

Pentru fiecare funcție în parte ilustrează grafic rezultatul obținut.

18) Construiește o funcție $f: [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă, strict descrescătoare pe $[0, 6]$ și găsește punctele de extrem ale funcției.

19) Stabilește intervalele de monotonie ale funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x - x$.

Indicație.

Funcția f este derivabilă pe \mathbb{R} , $f'(x) = e^x - 1$. Ecuația $f' = 0$ are soluția $x_1' = 0$. Derivata păstrează un semn constant pe fiecare din intervalele $(-\infty, 0)$ și $(0, \infty)$.

Teorema lui Fermat pune în evidență faptul că derivata unei funcții se anulează în orice punct de extrem local din interiorul intervalului I . Deci, punctele de extrem local ale unei funcții derivabile definite pe un interval deschis se găsesc printre zerourile derivatei, adică printre punctele critice.

Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și x_0 un punct din interiorul intervalului I .

a) dacă, pe I , funcția este strict crescătoare la stânga lui x_0 și strict descrescătoare la dreapta lui x_0 , atunci x_0 este *punct de maxim local al funcției* (\nearrow M \searrow);

b) dacă, pe I , funcția este strict descrescătoare la stânga lui x_0 și strict crescătoare la dreapta lui x_0 , atunci x_0 este *punct de minim local al funcției* (\searrow m \nearrow).

Dacă funcția f este derivabilă pe I și x_0 un punct din interiorul intervalului I , reformulăm aceste proprietăți folosind semnul derivatei:

a) dacă $f'(x) > 0, \forall x \in I, x < x_0$ și $f'(x) < 0, \forall x \in I, x > x_0$, atunci x_0 este *punct de maxim local* al funcției f ;

x	x_0
f'	+ 0 -
f	\nearrow M \searrow

b) dacă $f'(x) < 0, \forall x \in I, x < x_0$ și $f'(x) > 0, \forall x \in I, x > x_0$, atunci x_0 este *punct de minim local* al funcției f .

x	x_0
f'	- 0 +
f	\searrow m \nearrow

Observații.

◆ Dacă derivata are același semn la stânga și la dreapta lui x_0 , atunci x_0 nu este punct de extrem al funcției.

◆ Proprietățile a) și b) rămân adevărate și în cazul în care f este derivabilă pe $I - x_0$ și este continuă în x_0 . Pot fi puncte de extrem local și punctele în care funcția nu este derivabilă.

◆ Dacă $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă și f' are semn constant, atunci a și b sunt puncte de extrem ale funcției astfel:

x	a	b
f'	+	
f	m \nearrow	M

sau

x	a	b
f'	-	
f	M \searrow	m

Concluzie.

Pentru a determina intervalele de monotonicitate și punctele de extrem ale unei funcții derivabile, procedăm astfel:

- calculăm f' pe domeniul maxim de derivabilitate $D_{f'} \subset I$;
- rezolvăm ecuația $f'(x) = 0$; soluțiile acestei ecuații sunt eventualele puncte de maxim sau de minim ale funcției f ;
- stabilim intervalele pe care f' are semn constant, acestea fiind intervalele de monotonicitate ale lui f (dacă $f' > 0$ pe I , atunci f este strict crescătoare pe I și, dacă $f' < 0$ pe I , atunci f este strict descrescătoare pe I).

20) Stabilește intervalele de monotonicitate și punctele de extrem pentru fiecare din funcțiile următoare:

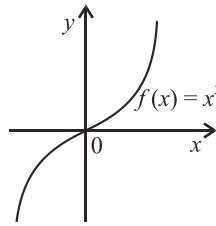
- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$;
- b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2$;
- c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^3$;
- d) $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), f(x) = |x + 1|$;
- e) $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), f(x) = e^x$;
- f) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x$;
- g) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -\ln x$;
- h) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x - x$;
- i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$;
- j) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^4 + 8x^3$;
- k) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$;
- l) $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x - 8}{x^3 + 1}$;
- m) $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{(x - 1)^3}{(x + 1)^2}$;
- n) $f: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{5}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \left| x + \frac{2}{2x - 5} \right|$;
- o) $f: \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x(x - 1)}$;
- p) $f: \mathbb{R} \setminus \{4\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{|x - 2|}{x - 4}$;
- q) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x(x + 1)(x + 2)$;
- r) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(x^2 + 1)$;
- s) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \ln x$;
- t) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 e^x$;
- u) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 e^x + x \ln x$.

Să exemplificăm cele trei observații precedente prin...



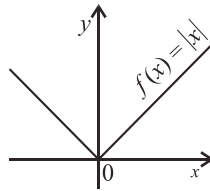
1) Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$ are derivata $f'(x) = 3x^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}^*$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'		$+$	$+$
f		\nearrow	\nearrow



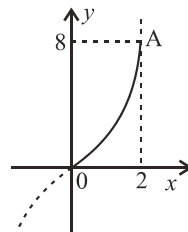
Observăm că la stânga și la dreapta lui $x_0 = 0$ derivata este pozitivă, deci $x_0 = 0$ nu este punct de extrem al lui f , ceea ce se vede și în reprezentarea grafică a lui f (parabola cubică).

2) $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), f(x) = |x|$ este continuă în $x_0 = 0$, dar nu este derivabilă în 0 ; totuși $x_0 = 0$ este punct de minim al funcției f .



3) $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$ are derivata pozitivă pe tot intervalul $[0, 2]$.

x	0	2
f'		$+$
f	$f(0)$	$f(2)$
	m	M



Observăm că punctul $O(0, f(0))$ este punct de minim și $A(2, 8)$ este punct de maxim.

Probleme rezolvate.

Stabilește intervalele de monotonie și punctele de extrem pentru următoarele funcții:

1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$.

Soluție.

Funcția f este derivabilă și $f'(x) = 2ax + b$.

Rezolvăm ecuația $f'(x) = 0$, adică $2ax + b = 0$ cu soluția

$$x = -\frac{b}{2a}. \text{ Calculăm } f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}.$$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$	$a > 0$
f'	$-$	0	$+$	
f	\searrow	$-\frac{\Delta}{4a}$	\nearrow	(m)

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$	$a < 0$
f'	$+$	0	$-$	
f	\nearrow	$-\frac{\Delta}{4a}$	\searrow	(M)

21) Stabilește intervalele de monotonie și punctele de extrem pentru fiecare din următoarele funcții:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - Sx + P$, unde S și P sunt numere reale;

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + Sx - P$, unde S și P sunt numere reale;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 3x$;

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^3 + 3x$;

e) $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+1}{x-1}$;

f) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x + x$;

g) $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$;

h) $f: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 3$;

i) $f: [3, 5] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 4x + 3$;

j) $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 4x + 3$;

k) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 3$;

l) $f: [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 3$;

m) $f: (2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 3$;

n) $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x - x$;

o) $f: [-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x + x$;

p) $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$;

q) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4 e^{-x}$.

22) Determină cea mai mică și cea mai mare valoare a funcției $f(x) = 6x - x^3$ pe intervalul $[-2, 3]$.

Observăm că punctul $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ este un punct de extrem al graficului funcției f și anume: punct de minim pentru $a > 0$ sau punct de maxim pentru $a < 0$. Am regăsit astfel rezultatele obținute în clasa a IX-a, când s-a studiat funcția de gradul al doilea.

2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x$

Soluție.

$f'(x) = 3x^2 - 3; f'(x) = 0$ are soluțiile $x_1 = -1$ și $x_2 = 1$.
Calculăm $f(-1) = 2$ și $f(1) = -2$.

Derivata păstrează un semn constant pe fiecare din intervalele $(-\infty, -1), (-1, 1), (1, +\infty)$. Pentru determinarea semnului derivatei, putem folosi semnul funcției de gradul 2 (derivata fiind funcție de gradul 2), sau putem utiliza proprietatea lui Darboux a funcției f' . Pentru aceasta, calculăm valoarea sa în câte un punct al fiecărui interval (de exemplu, $f'(-2) = 9 > 0$, $f'(0) = -3 < 0$, $f'(2) = 9 > 0$). Funcția f este strict crescătoare pe $(-\infty, -1]$ și pe $[1, \infty)$ și strict descrescătoare pe $[-1, 1]$.

x	-1	1
f'	+ 0 -	0 +
f	↗ 2 ↘ M	-2 ↗ m

23) Prețul unei ore de mers cu auto-turismul se poate exprima cu ajutorul formulei empirice $p = a + bv^3$, unde $a = 500$ lei și $b = 0,35 \cdot 10^{-3} \frac{\text{lei} \cdot \text{h}^3}{\text{km}^3}$. Care este viteza cea mai economică a mașinii?

Indicație.

Dacia parcurge 1km în timpul

$$t = \frac{1 \text{ km}}{v \text{ km/h}} = \frac{1}{v} \text{ (h)}$$

Prețul pentru 1 km este

$$p = \frac{a + bv^3}{v} = \frac{a}{v} + bv^2 \text{ (lei)}$$

Prețul minim se obține din $p' = 0$, deci

$$v^3 = \frac{a}{2b}$$



1. Studiază monotonia fiecăreia dintre următoarele funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

- a) $f(x) = 3x + 5$;
- b) $f(x) = -5x + 9$;
- c) $f(x) = x^4$;
- d) $f(x) = x^{2n}, n \in \mathbb{N}^*$ fixat;
- e) $f(x) = x^{2n+1}, n \in \mathbb{N}^*$ fixat;
- f) $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$;
- g) $f(x) = -x^2 + 2x$;
- h) $f(x) = x^3 + 3x$;
- i) $f(x) = x^3 - 3x$.

2. Stabilește intervalele de monotonicitate și eventualele puncte de extrem ale funcțiilor următoare, definite pe domeniile lor maxime de definiție:

- a) $f(x) = x^2 - 6x$;
- b) $f(x) = x^3 - x$;
- c) $f(x) = x^3(8 - x)$;
- d) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$;
- e) $f(x) = \frac{2-5x}{3x+4}$.

3. Determină intervalele de monotonicitate ale următoarelor funcții:

- a) $f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x-2}$;
- b) $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$.

4. Studiază monotonia funcției:

$$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - \ln x.$$

5. Studiază monotonia fiecăreia dintre următoarele funcții $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, determinând D , domeniul maxim de definiție, pentru fiecare funcție în parte:

- a) $f(x) = e^x - 2x$;
- b) $f(x) = 4 - x^2$;
- c) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$;
- d) $f(x) = (2x + 3)(1 + x^2)$;
- e) $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$;
- f) $f(x) = \frac{2x + 3}{1 + x^2}$;

g) $f(x) = (1-x+x^2)(1+x-x^2)$;

h) $f(x) = \frac{1}{1+x-x^2}$;

i) $f(x) = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$;

j) $f(x) = \ln \sqrt{x}$;

k) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$;

l) $f(x) = \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$;

m) $f(x) = x^2(x^4 + 4)$;

n) $f(x) = \frac{1}{x^4 + 4}$;

o) $f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 4}$;

p) $f(x) = \frac{2+x}{2-x}$;

q) $f(x) = \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}$;

r) $f(x) = x \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}$;

s) $f(x) = x \ln(-x)$;

t) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$;

u) $f(x) = x^3 e^x$;

v) $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$.

● 6. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{7-x}$.

a) Determină intervalele de monotonie ale funcției f .

b) Utilizând monotonia lui f , stabilește care dintre numerele $A = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5}$ sau $B = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4}$ este mai mare.

● 7. Fie funcția $f(x) = ax(x-b)(x-c)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Determină b și c astfel încât funcția f să admită pentru

$x = \frac{4}{3}$ un minim și pentru $x = 6$ un maxim. Determină apoi $a \in \mathbb{R}$ astfel încât maximul lui f să fie egal cu 6.

● 8. Fie funcția $f(x) = \frac{x^2 + 2ax + b}{x^2 + 2cx + d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Determină a, b, c, d astfel încât funcția să aibă pentru $x = -1$ un maxim egal cu 2 și pentru $x = 1$ un minim egal cu 4.

● 9. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

a) Calculează $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

b) Determină f' și f'' pe $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

c) Studiază monotonia lui f .

d) Compară numerele:

$$x_1 = \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{16} \text{ și } x_2 = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{25}.$$

● 10. Determină numerele reale a și b astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \ln(1 + |x^2 + ax + b|)$ să aibă puncte de extrem în $x = 1$, $x = 3$ și $x = 5$.

● 11. Fie funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x+m}$,

$m \in \mathbb{R}$, D fiind domeniul maxim de definiție al funcției f . Pentru ce valoare a lui m , abscisa punctului de minim este jumătate din abscisa punctului de maxim?

(Admitere 2000, Universitatea Transilvania Brașov)

● 12. Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \left(\frac{3}{7}\right)^x + \left(\frac{4}{7}\right)^x - 1 \text{ și } g(x) = f(x) - 1 + x.$$

a) Determină $g'(x)$ și $g''(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Stabilește semnul funcției g'' și precizează monotonia funcției g' .

c) Utilizând teorema lui Rolle pentru funcția g , demonstrează că există $c \in (0, 1)$ astfel încât $g'(c) = 0$. Arată că punctul c este unic.

d) Arată că funcția g este strict descrescătoare pe $(0, c)$ și strict crescătoare pe $(c, 1)$, unde c este definit la c).

e) Arată că, pentru orice $x \in [0, 1]$, $g(x) \leq 0$.

● 13. Determină triunghiul isoscel de arie maximă înscris într-un cerc de rază r .

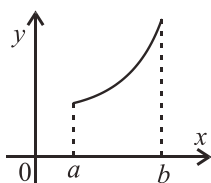
● 14. Determină conul de volum minim circumscris unei sfere de rază r .

7. Rolul derivatei de ordinul al doilea în studiul funcțiilor

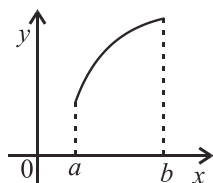
Funcțiile convexe au proprietatea remarcabilă de a admite în fiecare punct derivate laterale. Derivata de ordinul al doilea al unei funcții oferă informații despre convexitatea și concavitatea funcției și despre eventualele puncte de inflexiune ale acesteia.

Am văzut că semnul derivatei de ordinul întâi ne indică dacă o funcție este crescătoare sau descrescătoare pe un interval. Privește următoarele reprezentări grafice ale unor funcții pe intervalul $[a, b]$:

◆ funcții strict crescătoare

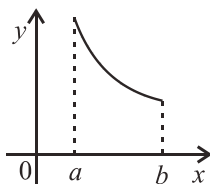


(1)

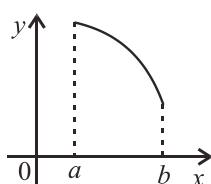


(2)

◆ funcții strict descrescătoare



(3)



(4)

Funcțiile reprezentate în (1) și (3) sunt convexe pe $[a, b]$, iar cele reprezentate în (2) și (4) sunt concave pe $[a, b]$. Vom defini, în continuare, aceste noțiuni.

Intervale de convexitate și concavitate ale unei funcții

Definiție.

Fie funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval. Funcția f se numește *convexă* pe I , dacă $\forall x_1, x_2 \in I$ și $\forall \lambda \in [0, 1]$

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda \cdot f(x_2).$$

Funcția f se numește *concavă* pe I dacă, $\forall x_1, x_2 \in I$ și $\forall \lambda \in [0, 1]$

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \geq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda \cdot f(x_2)$$

Observație.

Funcția f este concavă dacă și numai dacă funcția $-f$ este convexă.

1) Reprezintă grafic următoarele funcții:

a) $f: [2, 5] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 1;$

b) $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x;$

c) $f: [-5, -2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 1;$

d) $f: [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x.$

Care dintre aceste funcții sunt crescătoare, descrescătoare, concave sau convexe (conform imaginilor alăturate)?

2) Fie $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Arată că $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x = (1-\lambda) \cdot a + \lambda \cdot b, \lambda \in [0, 1]\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \lambda_1 a + \lambda_2 b, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}.$

3) Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval, $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$, de unde $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Atunci pentru $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$ cu $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$, avem $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \in I$.

Să interpretăm definițiile funcțiilor convexe/concave.

4) Rescrie definiția funcției convexe și interpretarea ei geometrică pentru $\lambda = \frac{1}{2}$.

5) Rescrie definiția funcției concave și interpretarea ei geometrică pentru $\lambda = \frac{1}{2}$.

6) Verifică (folosind definițiile) și interpretează grafic reprezentările funcțiilor a), b), c), d), de la exercițiul 1).

7) Arată că $\begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) & 1 \\ x_2 & f(x_2) & 1 \\ x_0 & f(x_0) & 1 \end{vmatrix} = 0,$

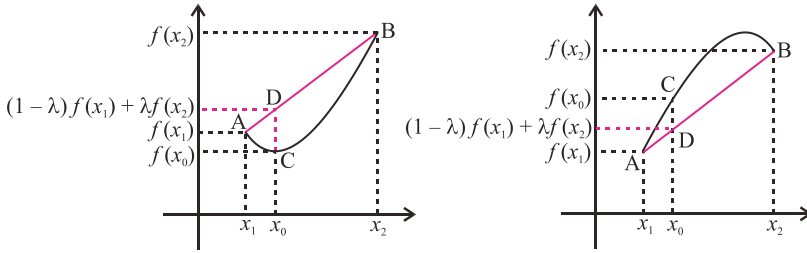
unde $x_0 = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2, \lambda \in [0, 1]$.

8) Dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este convexă, atunci $\forall x_1, x_2 \in I, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ cu $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, are loc inegalitatea:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Interpretarea geometrică a definiției

Fie funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Fixăm $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$. Orice punct $x_0 \in (x_1, x_2)$ se scrie sub forma $x_0 = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2$ cu $\lambda \in (0, 1)$.



Punctul $C(x_0, f(x_0))$ se află pe graficul lui f , iar punctul $D(x_0, (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2))$ se află pe coarda care unește punctele $A(x_1, f(x_1))$ și $B(x_2, f(x_2))$.

Dacă funcția f este convexă pe I , atunci punctul C este situat sub punctul D , adică $y_C \leq y_D$, sau $f(x_0) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$, adică $f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$; porțiunea din graficul funcției cuprinsă între punctele A și B este situată sub segmentul (AB) ;

Dacă funcția f este concavă pe I , punctul C este situat deasupra punctului D , adică $y_C \geq y_D$, sau $f(x_0) \geq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$, adică $f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \geq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$, deci porțiunea din graficul funcției cuprinsă între punctele A și B este situată deasupra segmentului (AB) .

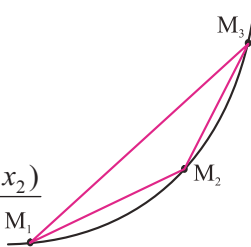
Intervalele pe care o funcție este convexă (concavă) se numesc intervale de convexitate (concavitate) ale funcției.

Observații.

◆ Funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este convexă, dacă și numai dacă $\forall x_1, x_2, x_3 \in I$ cu $x_1 < x_2 < x_3$, punctul $M_2(x_2, f(x_2))$ se află sub sau pe segmentul determinat de $M_1(x_1, f(x_1))$ și $M_3(x_3, f(x_3))$.

◆ Dacă f este convexă pe I , atunci despre pantele dreptelor M_1M_2 , M_1M_3 și M_2M_3 putem afirma:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \quad (1) \quad (2)$$



Reciproc, dacă pentru orice puncte $x_1 < x_2 < x_3$ din intervalul I , una dintre inegalitățile (1) sau (2) este adevărată, atunci funcția este convexă pe I .

Lemă.

Dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este convexă, atunci pentru orice $x_0 \in I$, funcția (raport) $r: I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}, r(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ este crescătoare.

9) Arată că:

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}$ este convexă și concavă; ce concluzie putem trage?
 b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = ax^2 + bx + c$ este convexă pentru $a > 0$ și concavă pentru $a < 0$.

10) Fie $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții convexe. Arată că:

- a) $f + g$ este convexă (Bacalaureat 1999);
 b) $\alpha \cdot f$ este convexă pentru $\alpha > 0$.

11) Considerăm funcția derivabilă

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, a > 0$.
 Ce poți spune despre monotonia funcției f' ?
 Studiază și cazul $a < 0$. Ce concluzie obții?

12) Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, a > 0$ este de două ori derivabilă.

Calculează $f''(x)$. Studiază semnul lui f'' . Ce observi? (Vezi și exercițiul 11).
 Consideră și cazul $a < 0$.

13) Fie $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ de două ori derivabilă și $a > 0$. Arată că:

- a) dacă f și g convexe, atunci $f + g$ convexă;
 b) dacă f și g concave, atunci $f + g$ concavă;
 c) dacă f convexă, atunci af convexă;
 d) dacă f concavă, atunci af concavă.

14) Studiază convexitatea (concavitatea) următoarelor funcții:

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$;
 b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x$;
 c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x$;
 d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2$;
 e) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x$.

Consecință.

Dacă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este convexă, atunci f este continuă pe I (exceptând eventual capetele intervalului I).

Demonstrație.

Fie a, b puncte interioare din I . Aplicând teorema precedentă obținem $f'_s(a) \leq f'_d(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'_s(b) \leq f'_d(b)$.

Înmulțind cu $(b - a)$ inegalitățile precedente și trecând la limită după $b \rightarrow a$, obținem concluzia.

Teoremă.

Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă. Atunci f este convexă dacă și numai dacă f' este crescătoare.

Demonstrație.

Dacă f este convexă, fie $a, b \in I, a < b$. Din teorema precedentă avem $f'_s(a) \leq f'_d(a) \leq f'_s(b) \leq f'_d(b)$ și, cum f este derivabilă, derivatele laterale sunt egale, deci $f'(a) \leq f'(b)$, adică f' este crescătoare.

Reciproc, fie $x_1, x_2, x_3 \in I$ cu $x_1 < x_2 < x_3$. Aplicând teorema lui Lagrange funcției f pe intervalele $[x_1, x_2]$, respectiv $[x_2, x_3]$, rezultă

că există $c_1 \in (x_1, x_2), c_2 \in (x_2, x_3)$ astfel încât $f'(c_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

și $f'(c_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$. Din f' crescătoare și $c_1 < c_2$ rezultă

$f'(c_1) \leq f'(c_2)$, adică inegalitatea (1). Deci f este convexă.

Consecință. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de două ori derivabilă pe I .

a) f este convexă dacă și numai dacă $f'' \geq 0$;

b) f este concavă dacă și numai dacă $f'' \leq 0$.

Puncte de inflexiune ale unei funcții

Fie o funcție $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in (a, b)$.

Definiție.

Spunem că x_0 este *punct de inflexiune* al funcției f dacă:

- 1) f continuă în x_0 ;
- 2) are derivată în x_0 (finită sau infinită);
- 3) f este convexă pe (a, x_0) și concavă pe (x_0, b) , sau f este concavă pe (a, x_0) și convexă pe (x_0, b) .

Observație.

Dacă x_0 este un punct de inflexiune al funcției, atunci $M_0(x_0, f(x_0))$ se numește *punct de inflexiune al graficului funcției*.

15) Reprezintă grafic următoarele funcții și spune despre fiecare dacă este convexă sau concavă:

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x + 1$;

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x + 1$;

c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x - 3$;

d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 1$;

e) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x + 1$;

f) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 0 \\ 4, & x = 0 \end{cases}$.

16) Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție pară și $a > 0$. Demonstrează că:

a) dacă f este crescătoare pe $[0, -a]$, atunci f este descrescătoare pe $[-a, 0]$;

b) dacă f este convexă pe $[0, -a]$, atunci f este concavă pe $[-a, 0]$;

Formulează și demonstrează proprietățile corespunzătoare dacă f este impară.

Să stabilim intervalele de convexitate, concavitate și eventualele puncte de extrem pentru funcțiile de două ori derivabile.

17) Determină, dacă există, punctele de inflexiune ale fiecărei funcții:

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$;

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x$;

c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x$;

d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2$;

e) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - x^3$;

f) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{x^2}$;


g) $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 + \ln x$;

h) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = xe^x$.

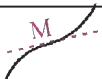
Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ de două ori derivabilă pe I , $f'(x) \neq 0, \forall x \in I$, astfel încât există un unic x_0 din interiorul lui I pentru care $f''(x_0) = 0$, iar pentru $x \in I, x < x_0, f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) și pentru $x \in I, x > x_0, f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$).

Obținem cazurile:


I)

x	x_0		
f'	+	+	+
f''	+	0	-
G_f			


II)

x	x_0		
f'	+	+	+
f''	-	0	+
G_f			

III)


x	x_0		
f'	-	-	-
f''	+	0	-
G_f			

IV)

x	x_0		
f'	-	-	-
f''	-	0	+
G_f			

Punctul $M(x_0, f(x_0)) \in G_f$ este punct de inflexiune al graficului. Cum $f'(x_0) \in \mathbb{R}^*$, ecuația tangentei în M este $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ și tangenta traversează graficul G_f .

Dacă f nu este derivabilă în x_0 , dar are derivată în x_0 infinită și $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$), $\forall x \in I, x < x_0$, iar $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$), $\forall x \in I, x > x_0$, obținem încă două cazuri:

x	x_0			
f'	+	$+\infty$	$+\infty$	+
f''	+			-
G_f				

18) Funcția f satisface următoarele condiții într-o vecinătate V a punctului $x_0 = 1$.

a) $f(1) = 2, f'(1) = -1,$

f este concavă pe V ;

b) $f(1) = 2, f'(1) = \frac{1}{2},$

f este strict crescătoare pe V ,

$f''(x) < 0, \forall x \in V \cap (-\infty, 1);$

c) $f(1) = 2,$

$f'_s(1) = f'_d(1) = -\infty.$

Imaginează și trasează curba reprezentativă a funcției f pe V .

19) Pentru funcțiile următoare, $x = 0$ este punct de inflexiune. Determină ecuația tangentei la graficul fiecărei funcții în punctul de abscisă $x = 0$.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x}, & x < 0; \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases};$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x < 0; \\ -\sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}.$$

20) Stabilește intervalele de convexitate/concavitate și eventualele puncte de inflexiune pentru fiecare din următoarele funcții:

a) $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x-1};$

b) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x};$

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 3x;$


d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 6x;$

e) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2};$

f) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x-1}{x^2+1};$

g) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{x};$

h) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 \cdot e^x.$

x	x_0	
f'	-	-
f''	-	+
G_f		

În aceste două cazuri, $M(x_0, f(x_0))$ este punct de inflexiune al graficului lui f și tangenta în M la grafic este verticală având ecuația $x = x_0$.

Concluzie.

Pentru a determina intervalele de convexitate/concavitate și punctele de inflexiune ale unei funcții derivabilă de două ori, procedăm astfel:

- calculăm f'' ;
- rezolvăm ecuația $f''(x) = 0$; soluțiile acestei ecuații sunt eventualele puncte de inflexiune ale funcției f ;
- stabilim intervalele pe care f'' are semn constant, acestea fiind intervalele de convexitate/concavitate ale lui f (dacă $f'' > 0$ pe I , atunci f este convexă pe I ; dacă $f'' < 0$ pe I , atunci f este concavă pe I).

EXEMPLU



Stabilește intervalele de convexitate/concavitate ale funcțiilor următoare și punctele de inflexiune ale acestora:

- a) $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$;
b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x$.

Soluție.

a) f este derivabilă pe $(0, \infty)$

$$\text{și } f'_d(0) = +\infty, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

f' este derivabilă pe $(0, \infty)$,


$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}.$$

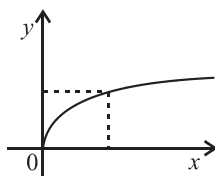
Ecuația $f''(x) = 0$ nu are soluții, dar $f''(x) < 0, \forall x \in (0, \infty)$. Deci f este concavă pe $(0, \infty)$ și nu are puncte de inflexiune.



Observăm că reprezentarea grafică a funcției radical $f(x) = \sqrt{x}$ corespunde rezultatului obținut mai sus.

b) $f'(x) = 3x^2 - 3, f''(x) = 6x$;
soluția ecuației $f''(x) = 0$ este $x'' = 0$.

Pentru $x < 0, f''(x) < 0$ și pentru $x > 0, f''(x) > 0$. Deci f este concavă pe $(-\infty, 0)$ și convexă pe $(0, \infty)$, având $O(0, 0)$ ca punct de inflexiune. Observăm că graficul lui f este simetric față de O (f este impară).

x		0		∞
f''			-	
f		0		



x		$-\infty$	0	∞
f''		-	0	+
f			0	

21) Stabilește intervalele de convexitate/concavitate și, dacă există, punctele de inflexiune pentru fiecare din următoarele funcții definite pe domeniul maxim de definiție:

- a) $f(x) = x^2 + 4x + 1$;
b) $f(x) = -3x^2 - x + 2$;
c) $f(x) = x^3 + 9x^2 - x + 1$;
d) $f(x) = x^4 - 16$;
e) $f(x) = 2x^5 - 3x + 1$;
f) $f(x) = \frac{1}{1-x}$;
g) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$;
h) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$;
i) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$;

j) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$;

k) $f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{2}{3}}$;

l) $f(x) = e^{-x^2}$;

m) $f(x) = e^{x^2}$;

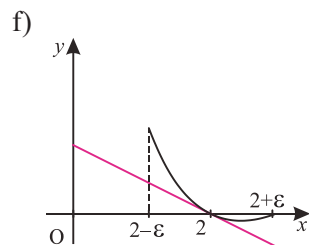
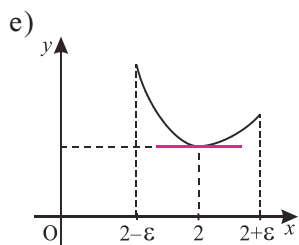
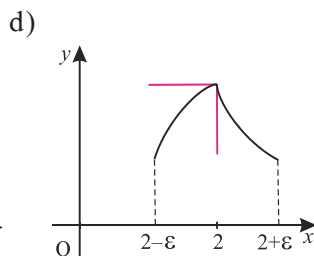
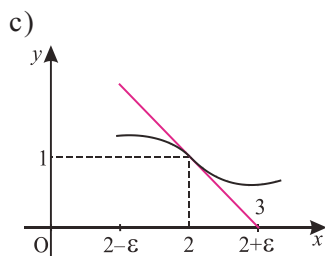
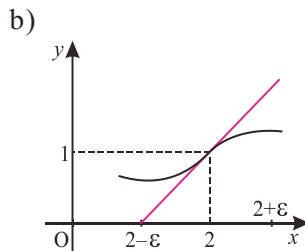
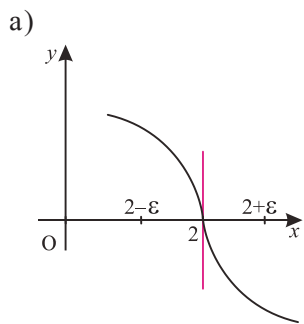
n) $f(x) = x^2 \ln x$;

o) $f(x) = \ln(4x^2 + 1)$.



● 1. Completează tabelul de variație în fiecare dintre situațiile următoare, pentru $\varepsilon > 0$ fixat:

x	$2 - \varepsilon$	2	$2 + \varepsilon, \varepsilon > 0$ fixat
$f'(x)$	//////	?	//////
$f(x)$	//////	?	//////
$f''(x)$	//////	?	//////



● 2. Determină, dacă există, punctele de inflexiune ale fiecăreia dintre funcțiile următoare:

- a) $f(x) = x^2, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R};$
- b) $f(x) = x^2 - x, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R};$
- c) $f(x) = x^2 + x, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R};$
- d) $f(x) = x^3, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R};$
- e) $f(x) = x^3 - 1, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R};$
- f) $f(x) = x^3 + 1, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R};$
- g) $f(x) = x^2 + \ln x, f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R};$
- h) $f(x) = x^2 - \ln x, f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R};$
- i) $f(x) = x^2 e^x, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R};$
- j) $f(x) = \frac{x^2}{e^x}, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$

● 3. Stabilește intervalele de convexitate/concavitate și eventualele puncte de inflexiune pentru fiecare dintre următoarele funcții.

- a) $f(x) = x^3 + 4x, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R};$
- b) $f(x) = x^3 - 4x, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R};$
- c) $f(x) = \sqrt{x}, f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R};$
- d) $f(x) = \sqrt{x+1}, f: [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R};$
- e) $f(x) = \frac{-1}{x}, f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R};$
- f) $f(x) = \frac{-1}{x^2}, f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R};$
- g) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}, f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R};$
- h) $f(x) = x^4 e^x, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R};$
- i) $f(x) = x^4 e^{-x}, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R};$
- j) $f(x) = \frac{x^4}{e^x}, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R};$
- k) $f(x) = \frac{x^4}{e^{-x}}, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R};$
- l) $f(x) = \frac{e^x}{x^4}, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R};$
- m) $f(x) = x \ln x, f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R};$
- n) $f(x) = x^2 \ln x, f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R};$
- o) $f(x) = \frac{x}{\ln x}, f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R};$
- p) $f(x) = \frac{\ln x}{x}, f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R};$
- q) $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}, f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}.$

● 4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$

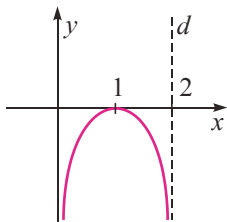
$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, & x < 1 \\ e^{-x^2}, & x \geq 1 \end{cases}$$

- a) Determină numerele reale α și β astfel încât funcția f să fie derivabilă pe $\mathbb{R}.$
- b) Pentru α și β determinate la punctul a), arată că $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$

Teste de evaluare

Testul 1

Considerăm funcția $f: (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(ax^2 + bx)$, unde $a \in \mathbb{R}$ și $b \in \mathbb{R}$, având reprezentarea grafică următoare:



Dreapta d are ecuația $x = 2$.

1. Arată că: $f'(x) = \frac{2ax+b}{ax^2+bx}, \forall x \in (0, 2)$.

2. Presupunând că reprezentarea grafică a funcției f trece prin punctul $A(1, 0)$ și admite în acest punct tangentă orizontală, determină a și b .

3. Fie funcțiile $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -x^2 + 2x$ și $f: (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln g(x)$.

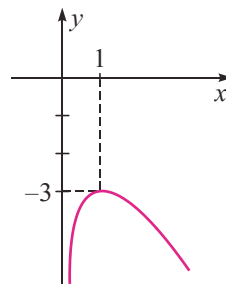
a) Determină $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, apoi $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ și $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$, apoi $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

b) Calculează $g'(x)$ și arată că $f'(x) = \frac{-2x+2}{g(x)}$.

c) Studiază semnul funcției $f'(x)$ și completează tabelul semnelui funcției f .

Testul 2

1. Considerăm funcția $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -x^2 - 2 + 2\ln x$, având reprezentarea grafică următoare:



Prin lectură grafică:

- determină intervalele de monotonie ale funcției g ;
- determină semnul funcției g pe $(0, \infty)$.

2. Considerăm funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = -x + 5 - 2\frac{\ln x}{x}.$$

a) Determină $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ și $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

b) Calculează derivata funcției f . Verifică dacă

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}, \forall x \in (0, \infty).$$

c) Dedu semnul lui f' , apoi determină intervalele de monotonie ale funcției f .

Probleme date la examenul de bacalaureat

1. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + \frac{1}{x}$.

- Să se calculeze $f'(x), x > 0$.
- Să se arate că $x = 1$ este punct de minim global.
- Să se determine asimptotele la graficul funcției f .

d) Să se arate că $2\sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} < 2\sqrt{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

(Examen de bacalaureat 2003 – sesiunea iunie-iulie, varianta 3 – economic)

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{-x^3}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

c) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe \mathbb{R} .

(Examen de bacalaureat 2003 – sesiunea iunie-iulie, varianta 4 – economic)

Reprezentarea grafică a funcțiilor

1. Reprezentarea grafică a funcțiilor

A reprezenta grafic o funcție $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ înseamnă a trasa (a desena) într-un reper cartezian graficul lui f , $\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$.

Reprezentarea grafică a unei funcții este utilă în ilustrarea unor proprietăți locale și globale ale acesteia și, implicit, în aplicațiile din care provine sau în care este utilizată funcția respectivă.

Vom prezenta un mod de lucru sistematic în reprezentarea grafică a unei funcții. Recomandăm parcurgerea următoarelor etape de determinare succesivă a unor elemente caracteristice, importante ale funcției.

1. Domeniul de definiție al funcției (notat cu D).

◆ *Stabilirea domeniului de definiție* (acesta fie este indicat în mod explicit prin definirea funcției respective, fie este subînțeles ca fiind domeniul maxim pe care funcția are sens și, în acest caz, se determină).

◆ *Găsirea (dacă există) a intersecțiilor graficului cu axele de coordonate*

– intersecțiile cu axa Ox ($y = 0$) sunt puncte de forma $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$, ..., unde x_1, x_2, \dots sunt soluțiile ecuației $f(x) = 0$ (dacă există!);
– intersecția cu axa Oy ($x = 0$) este punctul de forma $(0, f(0))$ (dacă punctul 0 aparține domeniului de definiție!)

◆ *Calcularea valorilor funcției (dacă este cazul, a limitelor funcției) la capetele domeniului de definiție și determinarea asimptotelor funcției (dacă există)*: ne interesează comportarea funcției la capetele domeniului de definiție, obținând astfel informații despre eventualele asimptote verticale sau orizontale ale funcției; dacă funcția nu admite asimptote orizontale la $+\infty$ sau la $-\infty$, verificăm dacă funcția admite asimptotă oblică la $+\infty$, respectiv la $-\infty$.



• Dacă x_0 este un punct de acumulare pentru D , $x_0 \notin D$ și
dacă $\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \pm\infty$ sau $\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \pm\infty$, atunci

dreapta $x = x_0$ este *asimptotă verticală* a funcției f la stânga sau la dreapta lui x_0 . Ne punem problema existenței asimptotelor verticale dacă D , domeniul de definiție, are puncte de acumulare

Să reprezentăm grafic!

1) Determinină:

- domeniul de definiție;
- punctele de intersecție (dacă există) ale graficului funcției f cu axele de coordonate;
- valorile funcției la capetele domeniului de definiție;
- determină asimptotele funcției (dacă există), pentru fiecare din funcțiile:

- | | |
|-------------------------------------|---|
| 1) $f(x) = x^2 - 2x + 1$; | 2) $f(x) = x^3 - 1$; |
| 3) $f(x) = x^4 + 1$; | 4) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$; |
| 5) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$; | 6) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$; |
| 7) $f(x) = x^3$; | 8) $f(x) = x^4$; |
| 9) $f(x) = \sqrt{x}$; | 10) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; |
| 11) $f(x) = 2^x$; | 12) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; |
| 13) $f(x) = e^x$; | 14) $f(x) = \ln x$; |
| 15) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$; | 16) $f(x) = \log_2 x$. |

2) Pentru fiecare dintre aceste funcții:

- determină f' și găsește eventualele puncte de extrem;
- determină f'' și găsește eventualele puncte de inflexiune;
- completează tabelul de variație;
- trasează graficul fiecărei funcții în parte.

3) Figura următoare reprezintă graficul unei funcții, \mathcal{G}_f și graficul derivatei funcției, $\mathcal{G}_{f'}$, în același reper xOy . Identifică \mathcal{G}_f și $\mathcal{G}_{f'}$.

care nu aparțin lui D (pentru funcții care au numitor se cercetează punctele în care se anulează numitorul).

• Dacă D conține intervale nemărginite și $\exists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$ (l finit), atunci dreapta $y = l$ este *asimptotă orizontală* a funcției f .

• Dacă D conține intervale nemărginite și $\exists m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ (m finit), $\exists n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx)$ (n finit), atunci dreapta $y = mx + n$ este *asimptotă oblică* a funcției f la $+\infty$, respectiv $-\infty$.

◆ *Studierea continuității funcției pe D și determinarea mulțimii pe care funcția f este derivabilă.*

II. Derivata de ordinul întâi (dă informații despre *monotonia* funcției și despre *punctele de extrem* ale acesteia)

◆ Calculăm f' .

◆ Rezolvăm ecuația $f'(x) = 0$ (soluțiile acestei ecuații, notate x_1', x_2', \dots , sunt eventualele *puncte de extrem* ale funcției).

◆ Stabilim semnul derivatei întâi, adică intervalele pe care f' are semn constant; acestea sunt *intervalele de monotonie* ale lui f (dacă $f' > 0$ pe I , atunci f este strict crescătoare pe I ; dacă $f' < 0$ pe I , atunci f este strict descrescătoare pe I).

III. Derivata de ordinul al doilea (dă informații despre *convexitatea/concavitatea* funcției și despre *punctele de inflexiune* ale acesteia)

◆ Calculăm f'' .

◆ Rezolvăm ecuația $f''(x) = 0$ (soluțiile acestei ecuații, notate x_1'', x_2'', \dots , sunt eventualele *puncte de inflexiune* ale funcției).

◆ Stabilim semnul derivatei a doua, adică intervalele pe care f'' are semn constant; acestea fiind *intervalele de convexitate / concavitate* ale lui f (dacă $f'' > 0$ pe I , atunci f este convexă pe I ; dacă $f'' < 0$ pe I , atunci f este concavă pe I).

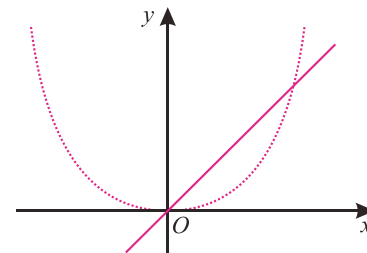
IV. Tabelul de variație (sistematizează rezultatele obținute în etapele anterioare).

◆ Pe prima linie se trec, în ordine crescătoare, valorile remarcabile ale lui x (domeniul de definiție, abscisele intersecțiilor graficului cu axele, zerourile derivatei întâi, zerourile derivatei a doua).

◆ Pe a doua linie se trec informațiile referitoare la derivata întâi, obținute în etapa a II-a.

◆ Pe a treia linie se trec valorile lui f corespunzătoare valorilor lui x din prima linie și săgețile corespunzătoare monotoniei lui f .

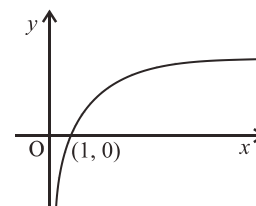
◆ Pe ultima linie se trec informațiile referitoare la derivata a doua obținute în etapa a III-a și simbolurile pentru convexitatea sau concavitatea funcției (dacă s-a determinat și derivata a doua).



4) Verifică dacă obții tabelul de variație și reprezentarea grafică a următoarelor funcții:

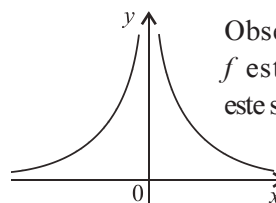
a) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$

x	0	1	∞
f'		+	+
f	$-\infty$	\nearrow	0 \nearrow $+\infty$
f''		-	



b) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'		+	-
f	0	\nearrow	$\infty \infty$ \searrow 0
f''		+	+



Observăm că funcția f este pară (graficul este simetric față de Oy).

c) $f(x) = \frac{x^2 + 3}{|x - 1|}$

x	$-\infty$	-1	0	1	3	$+\infty$					
f'		-	0	+	+		-	0	+		
f	$+\infty$	\searrow	2	\nearrow	3	\nearrow	$+\infty +\infty$	\searrow	6	\nearrow	$+\infty$
f''		+	+	+	+		+	+			

V. Trasarea graficului

Într-un reper cartezian xOy reprezentăm asimptotele funcției (dacă există) și punctele remarcabile $(x, f(x))$ din tabelul de variație. Unim printr-o linie curbă punctele obținute, ținând seama de asimptotele, monotonia, convexitatea sau concavitățile funcției f .

Observații.

◆ Tabelul nu trebuie să conțină elemente contradictorii. Eventualele neconcordanțe din tabel provin din greșeli de calcul.

◆ Dacă determinarea derivatei a doua este laborioasă, se poate renunța la studiarea acesteia, convexitatea/concavitățile funcției rezultând prin corelarea celorlalte informații.

◆ Este util să observăm anumite proprietăți ale funcției studiate:

• Dacă $f \geq 0$ (respectiv $f \leq 0$), atunci graficul lui f este situat deasupra axei Ox (respectiv sub axa Ox).

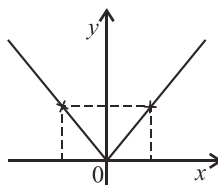
• Dacă D este o mulțime simetrică și f este o funcție pară ($f(-x) = f(x), \forall x \in D$), atunci graficul lui f este simetric față de axa Oy . Dacă D este o mulțime simetrică și f este o funcție impară ($f(-x) = -f(x), \forall x \in D$), atunci graficul lui f este simetric față de origine. Pentru o funcție pară sau impară se poate studia funcția pe $D \cap [0, \infty)$ și trasarea reprezentării grafice se face prin simetrie (față de Oy sau față de O) pe D .

• Dacă f este o funcție periodică, atunci studiul se face pe un interval de lungime egală cu perioada principală a funcției, graficul funcției fiind trasat pe D prin translație.

EXEMPLE

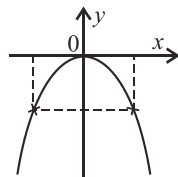
1) Funcția $f(x) = |x|, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este pozitivă, adică $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$; graficul ei este situat deasupra axei Ox .

Deoarece $f(-x) = |-x| = |x| = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, funcția f este pară și reprezentarea grafică este simetrică față de axa Oy .

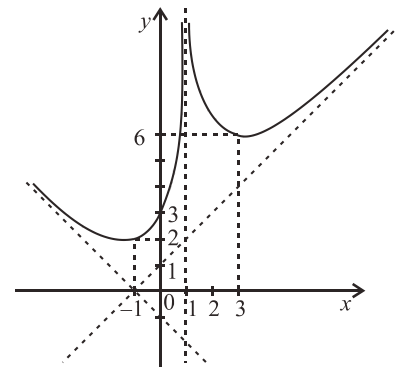
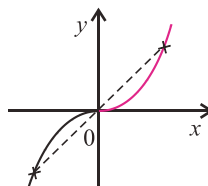


2) Funcția $f(x) = -x^2, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este negativă, adică $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$; graficul ei este situat sub axa Ox .

Deoarece $f(-x) = -(-x)^2 = -x^2 = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, funcția f este pară și reprezentarea grafică este simetrică față de axa Oy .

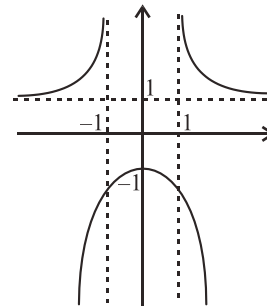


3) Funcția $f(x) = x^3, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este impară: $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$; graficul ei este simetric față de origine.

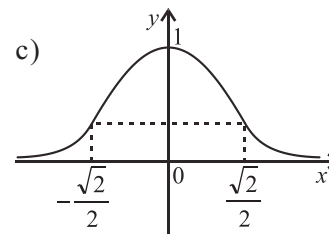
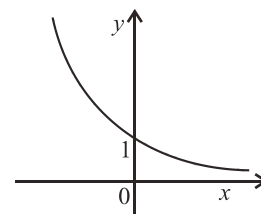


5) Stabilește domeniile de definiție, reprezintă grafic funcțiile și verifică dacă obții graficul alăturat fiecăreia:

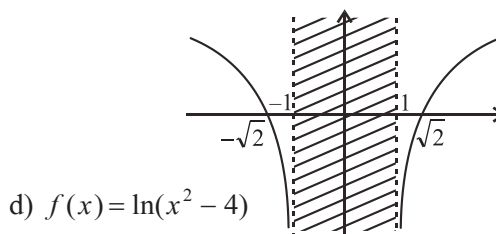
a) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$



b) $f(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x$



$f(x) = e^{-x^2}$



Exerciții rezolvate. Reprezintă grafic funcțiile următoare:

1) $f(x) = x^{2n}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$.

I. Domeniul de definiție este $D = \mathbb{R}$.

Intersecțiile cu axele:

$\cap Ox$ ($y = 0$): avem $x^{2n} = 0$ cu soluția $x = 0$, deci graficul funcției f intersectează axa Ox în $O(0, 0)$, care este și punctul de intersecție cu axa Oy .

Asimptote:

- funcția nu admite asimptote verticale;
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{2n} = \infty$, deci funcția nu admite

asimptote orizontale;

- $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{2n-1} = \pm\infty$, deci funcția nu

admite asimptote oblice.

Funcția este *continuă* și *derivabilă* pe \mathbb{R} .

II. Studiul derivatei întâi

$f'(x) = 2nx^{2n-1}$; ecuația $f'(x) = 0$ are soluția $x'_1 = 0$ și semnul derivatei întâi este dat în următorul tabel:

x	0		
$f'(x)$	-	0	+

III. Studiul derivatei a doua

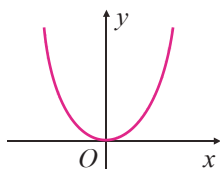
$f''(x) = 2n(2n-1)x^{2n-2}$; ecuația $f''(x) = 0$ are soluția $x''_1 = 0$ și semnul derivatei a doua este dat în următorul tabel:

x	0		
$f''(x)$	+	0	+

IV. Tabelul de variație

x	$-\infty$	0	$+\infty$		
$f'(x)$	-	-	0	+	+
$f(x)$	$+\infty$	\searrow	0	\nearrow	$+\infty$
$f''(x)$	+	+	0	+	+

V. Reprezentarea grafică a funcției



Observație. Reprezentarea grafică de mai sus se numește *parabolă*.

2) $f(x) = x^{2n+1}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$.

I. Domeniul de definiție este $D = \mathbb{R}$.

Intersecțiile cu axele

$\cap Ox$ ($y = 0$): avem $x^{2n+1} = 0$ cu soluția $x = 0$, deci graficul funcției f intersectează axa Ox în $O(0, 0)$, care este și punctul de intersecție cu axa Oy .

Asimptote:

- funcția nu admite asimptote verticale;
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{2n+1} = \pm\infty$, deci funcția nu

admite asimptote orizontale;

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{2n} = +\infty$, deci funcția nu admite

asimptote oblice.

Funcția este *continuă* și *derivabilă* pe \mathbb{R} .

II. Studiul derivatei întâi

$f'(x) = (2n+1)x^{2n}$; ecuația $f'(x) = 0$ are soluția $x'_1 = 0$ și semnul derivatei întâi este dat în următorul tabel:

x	0		
$f'(x)$	+	0	+

III. Studiul derivatei a doua

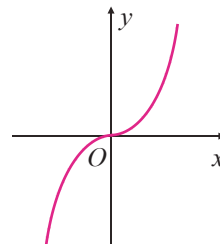
$f''(x) = (2n+1)2nx^{2n-1}$; ecuația $f''(x) = 0$ are soluția $x''_1 = 0$ și semnul derivatei a doua este dat în următorul tabel:

x	0		
$f''(x)$	-	0	+

IV. Tabelul de variație

x	$-\infty$	0	$+\infty$		
$f'(x)$	+	+	0	+	+
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	0	\nearrow	$+\infty$
$f''(x)$	-	-	0	+	+

V. Reprezentarea grafică a funcției



Observație. Reprezentarea grafică de mai sus se numește *parabolă cubică*.

3) $f(x) = -x^3 + 3x^2$.

I. Domeniul de definiție este $D = \mathbb{R}$.

Intersecțiile cu axele:

• $\cap Ox$ ($y = 0$): avem $-x^3 + 3x^2 = 0$, adică $x_1 = 0$ și $x_2 = 3$, deci graficul intersectează axa Ox în punctele $(0, 0)$ și $(3, 0)$;

• $\cap Oy$ ($x = 0$) este punctul $(0, 0)$ deja obținut

Asimptote:

• funcția nu admite asimptote verticale;

• $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (-x^3 + 3x^2) = -\infty$ și $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 3x^2) = \infty$, deci funcția nu admite asimptote horizontale;

• $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-x^2 + 3x) = -\infty$, deci funcția nu admite asimptote oblice;

Funcția este *continuă* și *derivabilă* pe \mathbb{R} .

II. Studiul derivatei întâi

$f'(x) = -3x^2 + 6x$; ecuația $f'(x) = 0$ are soluțiile $x'_1 = 0$ și $x'_2 = 2$ și semnul derivatei este dat în tabelul următor:

x	0	2
$f'(x)$	- 0	+ 0 -

III. Studiul derivatei a doua

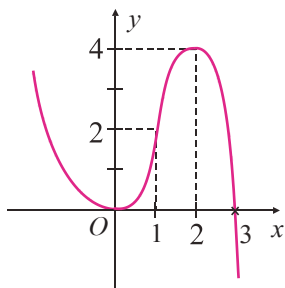
$f''(x) = -6x + 6$; ecuația $f''(x) = 0$ are soluția $x''_1 = 1$ și semnul derivatei a doua este dat în tabelul următor:

x	1
$f''(x)$	+ 0 -

IV. Tabelul de variație:

x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	+	0	-	
$f(x)$	$\infty \searrow$	0	\nearrow	2	\nearrow	4	\searrow
$f''(x)$	+	+	0	-	-	-	

V. Reprezentarea grafică a funcției



4) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$.

I. Domeniul de definiție este $D = \mathbb{R}$.

Intersecțiile cu axele:

• $\cap Ox$ ($y = 0$): $\frac{1}{3}x^3 - x = 0$, adică $x(x^2 - 3) = 0$, cu soluțiile $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3}$ și $x_3 = -\sqrt{3}$, deci graficul intersectează axa Ox în trei puncte $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$, $(-\sqrt{3}, 0)$;

• $\cap Oy$ ($x = 0$) este punctul $(0, 0)$ obținut deja.

Asimptote:

• funcția nu admite asimptote verticale;

• $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}x^3 - x\right) = \infty$ și $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, deci funcția nu admite asimptote horizontale;

• $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, deci funcția nu admite asimptote oblice;

Funcția este *continuă* și *derivabilă* pe \mathbb{R} .

II. Studiul derivatei întâi

$f'(x) = x^2 - 1$; ecuația $f'(x) = 0$ are soluțiile $x'_1 = 1$ și $x'_2 = -1$; semnul derivatei întâi este dat în tabelul următor:

x	-1	1
$f'(x)$	+ + 0	- 0 +

III. Studiul derivatei a doua

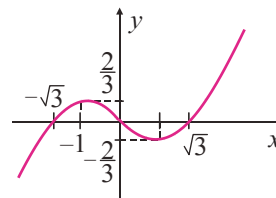
$f''(x) = 2x$; ecuația $f''(x) = 0$ are soluția $x''_1 = 0$; semnul derivatei a doua este dat în tabelul următor:

x	0
$f''(x)$	- 0 +

IV. Tabelul de variație

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	0	\nearrow	$\frac{2}{3}$	\searrow	\searrow	$\frac{2}{3}$
$f''(x)$	-	-	-	0	+	+	+

V. Reprezentarea grafică a funcției



Observație. Reprezentările grafice ale funcțiilor polinomiale nu au asimptote.

5) $f(x) = \frac{1}{x^{2n}}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$.

I. Domeniul de definiție este $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Intersecțiile cu axele:

Graficul lui f nu intersectează axa Ox (deoarece $f(x) \neq 0, \forall x \in D$) și f nu intersectează axa Oy (deoarece $x \neq 0$).

Asimptote:

• $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = +\infty, \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$, deci f admite

dreapta $x = 0$ ca asimptotă verticală;

• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, deci f admite dreapta $y = 0$ ca asimptotă orizontală la $+\infty$ și la $-\infty$;

• funcția nu admite asimptotă oblică (deoarece admite asimptotă orizontală și la $+\infty$ și la $-\infty$).

Funcția f nu este definită în 0 , deci funcția f este *continuă* și *derivabilă* pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0, \infty)$.

II. Studiul derivatei întâi

$f'(x) = -\frac{2n}{x^{2n+1}}$, având semnul dat de tabelul:

x	0
$f'(x)$	+ -

III. Studiul derivatei a doua

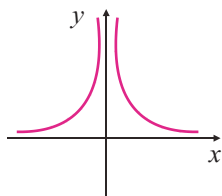
$f''(x) = \frac{2n(2n+1)}{x^{2n+2}}$, având semnul dat de tabelul:

x	0
$f''(x)$	+ +

IV. Tabelul de variație

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$	$+\infty$ ↘ 0
$f''(x)$		+	+

V. Reprezentarea grafică a funcției



6) $f(x) = \frac{1}{x^{2n+1}}$, cu $n \in \mathbb{N}$.

I. Domeniul de definiție al funcției este $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Intersecțiile cu axele:

Graficul lui f nu intersectează axa Ox (deoarece $f(x) \neq 0, \forall x \in D$) și f nu intersectează axa Oy (deoarece $x \neq 0$).

Asimptote:

• $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty, \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$, deci f admite

dreapta $x = 0$ ca asimptotă verticală;

• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, deci f admite dreapta $y = 0$ ca asimptotă orizontală.

• funcția nu admite asimptotă oblică (deoarece admite asimptotă orizontală și la $+\infty$ și la $-\infty$).

Funcția f nu este definită în 0 , deci funcția f este *continuă* și *derivabilă* pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0, \infty)$.

II. Studiul derivatei întâi

$f'(x) = -\frac{2n+1}{x^{2n+2}}$, având semnul dat de tabelul:

x	0
$f'(x)$	- -

III. Studiul derivatei a doua

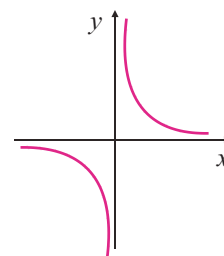
$f''(x) = \frac{(2n+1)(2n+2)}{x^{2n+3}}$, cu semnul dat de tabelul:

x	0
$f''(x)$	- +

IV. Tabelul de variație

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	-
$f(x)$	0 ↘	$-\infty$	$+\infty$ ↘ 0
$f''(x)$		-	+

V. Reprezentarea grafică a funcției



$$7) f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x - 3}$$

I. Domeniul de definiție

Punem condiția ca numitorul să fie diferit de 0, deci $x^2 + 2x - 3 \neq 0$, adică $x_1 \neq -3$ sau $x_2 \neq 1$; deci $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$.

• $\cap Ox (y=0): \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x - 3} = 0$, de unde $x^2 - 2x + 3 = 0$

cu $\Delta = -8$, adică nu există x real astfel încât $y = 0$;

deci graficul funcției f nu intersectează axa Ox ;

• $\cap Oy (x=0): f(0) = -1$, deci $(0, -1)$ este punctul de intersecție cu axa Oy .

Asimptote:

• $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\infty$, deci dreapta $x = -3$ este asimptotă verticală a funcției f ;

$x = -3$ este asimptotă verticală a funcției f ;

• $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$, deci dreapta $x = 1$ este asimptotă verticală a funcției f ;

este asimptotă verticală a funcției f ;

• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x - 3} = 1$, deci dreapta $y = 1$ este asimptotă orizontală a funcției f către $+\infty$ și $-\infty$.

• funcția nu admite asimptotă oblică (deoarece admite asimptotă orizontală la $\pm\infty$).

Funcția f este continuă și derivabilă pe fiecare din intervalele $(-\infty, -3)$, $(-3, 1)$ și $(1, \infty)$.

II. Studiul derivatei întâi

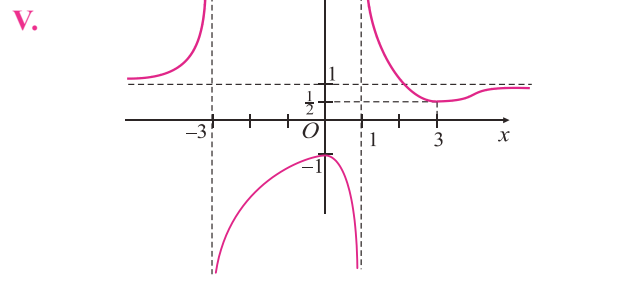
$f'(x) = \frac{4x(x-3)}{(x^2 + 2x - 3)^2}$, cu semnul dat de tabelul:

x	-3	0	1	3	
$4x$	-	-	0	+	+
$x-3$		-		0	+
$(x^2 + 2x - 3)^2$	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	+	0	-	- 0 +

III. Studiul derivatei a doua este mai complicat, fiind calcule mai multe; vom deduce convexitatea și concavitatea funcției prin corelarea celorlalte date obținute.

IV.

x	$-\infty$	-3	0	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-	- 0 +	+
$f(x)$	1 ↗ $+\infty$	$-\infty$ ↗ -1 ↘ $-\infty$	$-\infty$ ↗ -1 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ ↗ 1	



$$8) f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$$

I. Domeniul de definiție este $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Intersecțiile cu axele:

• $\cap Ox (y=0):$ avem $\frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0$ cu soluția $x = \frac{1}{2}$,

deci graficul funcției f intersectează axa Ox în $O\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

• $\cap Oy (x=0):$ este punctul $(0, -1)$.

Asimptote:

• $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$, deci f admite dreapta $x = 1$ ca asimptotă verticală;

deci graficul funcției f intersectează axa Ox în $O\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, deci f admite dreapta $y = 0$ ca asimptotă orizontală la $+\infty$ și $-\infty$;

• funcția nu admite asimptotă oblică.

Funcția nu este definită în 1, deci funcția f este continuă și derivabilă pe fiecare din intervalele $(-\infty, 1)$ și $(1, \infty)$.

II. Studiul derivatei întâi

$f'(x) = -\frac{2x}{(x-1)^3}$, având semnul dat de tabelul:

x	0	1
$f'(x)$	- 0 +	-

III. Studiul derivatei a doua

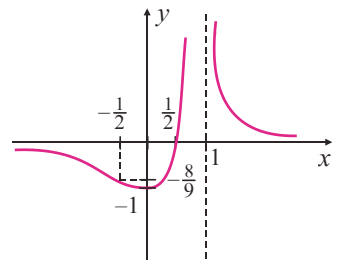
$f''(x) = \frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}$, având semnul dat de tabelul:

x	$-\frac{1}{2}$	1
$f''(x)$	- 0 +	+

IV. Tabelul de variație

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
f'	-	-	0	+	+	-
f	0 ↘ $-\frac{8}{9}$	$-\frac{8}{9}$ ↘ -1 ↗ 0 ↗ $+\infty$	$-\frac{8}{9}$ ↘ -1 ↗ 0 ↗ $+\infty$	0 ↗ $+\infty$	$+\infty$ ↘ 0	
f''	⌒	0	⌒	⌒	⌒	⌒

V. Reprezentarea grafică a funcției



$$9) f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+1}$$

I. Domeniul de definiție este $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$\cap Ox (y = 0)$: avem $\frac{(x-1)^2}{x+1} = 0$ cu soluția $x = 1$,

deci graficul funcției f intersectează axa Ox în $O(1, 0)$.

$\cap Oy (x = 0)$: este punctul $(0, 1)$.

Asimptote:

• $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$, deci dreapta $x = -1$

este asimptotă verticală;

• $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, funcția nu admite

asimptotă orizontală.

• $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$; $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) =$

$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x+1}{x} = -3$, deci $y = x - 3$ este asimptotă oblică.

Funcția nu este definită în -1 , deci funcția este continuă și derivabilă pe fiecare din intervalele $(-\infty, -1)$ și $(-1, \infty)$.

II. Studiul derivatei întâi

$f'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$ are semnul dat de tabelul:

x	-3	-1	1
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

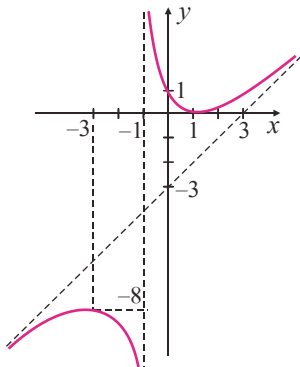
III. Studiul derivatei a doua

$f''(x) = \frac{8}{(x+1)^3}$ are semnul dat de tabelul:

x	$-\infty$	-1
$f''(x)$	$-$	$+$

IV. x	$-\infty$	-3	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow -8$	$\searrow -\infty$	$+\infty$	$\searrow 1$	$\searrow 0 \nearrow +\infty$
$f''(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$

V.



$$10) f(x) = \sqrt[2n]{x}, n \in \mathbb{N}^*$$

I. Domeniul de definiție este $D = [0, \infty)$

Intersecțiile cu axele:

• $\cap Ox (y = 0)$ și $\cap Oy (x = 0)$ în punctul $(0, 0)$.

Asimptote:

f nu admite asimptote verticale, orizontale sau oblice.

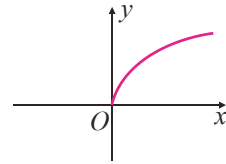
Funcția f este continuă pe $[0, \infty)$ și derivabilă pe $(0, \infty)$.

II. Studiul derivatei întâi $f'(x) = \frac{1}{2n} \frac{1}{\sqrt[2n]{x^{2n-1}}}$

III. Studiul derivatei a doua $f''(x) = -\frac{1}{2n} \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{\sqrt[2n]{x^{4n-1}}}$

IV. Tabelul de variație	x	0	$+\infty$
f'		$+$	
f	0	\nearrow	∞
f''		$-$	

V. Reprezentarea grafică a funcției



$$11) f(x) = \sqrt[2n+1]{x}$$

I. Domeniul de definiție este $D = \mathbb{R}$

Intersecțiile cu axele:

• $\cap Ox (y = 0)$ și $\cap Oy (x = 0)$ în punctul $(0, 0)$.

Asimptote:

f nu admite asimptote verticale, orizontale sau oblice.

Funcția f este continuă pe \mathbb{R} și derivabilă pe \mathbb{R}^* .

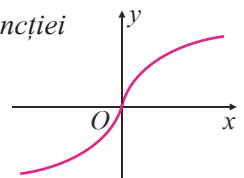
II. Studiul derivatei întâi $f'(x) = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[2n+1]{x^{2n}}}$

III. Studiul derivatei a doua $f''(x) = -\frac{2n}{(2n+1)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt[2n+1]{x^{4n+1}}}$

IV. Tabelul de variație

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$+$	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow 0$	$\nearrow +\infty$
f''	$+$	$-$	

V. Reprezentarea grafică a funcției



$$12) f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 1}$$

I. Domeniul de definiție

din $x^2 - 1 \geq 0$, obținem $D = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

• $\cap Ox$ ($y = 0$): $\sqrt{x^2 - 1} = 0$, adică $x_1 = -1$ și $x_2 = 1$, deci graficul intersectează axa Ox în punctele $(-1, 0)$ și $(1, 0)$;

• $\cap Oy$: graficul nu intersectează axa Oy deoarece $x \neq 0$.

Asimptote:

• funcția nu admite asimptote verticale;

• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 1} = +\infty$, funcția nu are asimptote

orizontale;

• $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$ și $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = 0$,

deci dreapta $y = \frac{1}{2}x$ este asimptotă oblică la $+\infty$;

• $m' = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{2}$ și $n' = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = 0$ de

unde dreapta $y = -\frac{1}{2}x$ este asimptotă oblică la $-\infty$.

Funcția este *continuă* pe fiecare interval $(-\infty, -1]$ și $[1, \infty)$ și *derivabilă* pe fiecare interval $(-\infty, -1)$ și $(1, \infty)$.

II. Studiul derivatei întâi

$f'(x) = \frac{x}{2\sqrt{x^2 - 1}}$, $\forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; ecuația

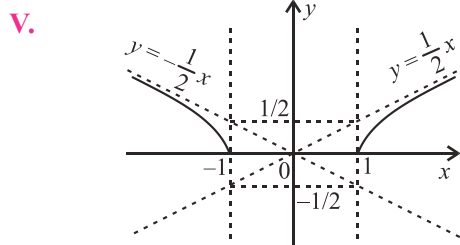
$f'(x) = 0$ nu are soluții reale ($x'_1 = 0 \notin D$).

III. Studiul derivatei a doua

$f''(x) = -\frac{1}{2\sqrt{(x^2 - 1)^3}}$; ecuația $f''(x) = 0$ nu are soluții.

IV.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f'	$-$	$-\infty$	$+\infty$	$+$
f	$+\infty$	0	0	$+\infty$
f''	$-$	$-\infty$	$-\infty$	$-$



$$13) f(x) = \ln(x^2 - 1)$$

I. Domeniul de definiție

Din condiția $x^2 - 1 > 0$, obținem $D = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

$\cap Ox$: ($y = 0$): $\ln(x^2 - 1) = 0$ cu soluțiile $x_1 = -\sqrt{2}$ și $x_2 = \sqrt{2}$;

$\cap Oy$: graficul nu intersectează axa Oy deoarece $x = 0 \notin D$.

• $\lim_{x \rightarrow -1^-} \ln(x^2 - 1) = -\infty$, deci dreapta $x = -1$ este asimptotă verticală la stânga; $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x^2 - 1) = -\infty$, deci dreapta $x = 1$ este asimptotă verticală la dreapta.

• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln(x^2 - 1) = \infty$, funcția nu admite asimptote orizontale

• nu admite asimptotă oblică (deoarece

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0 = m$ și $n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$).

Funcția este *continuă* și *derivabilă* pe fiecare din intervalele $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

II. Studiul derivatei întâi

$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$; ecuația $f'(x) = 0$ nu are soluții în D .

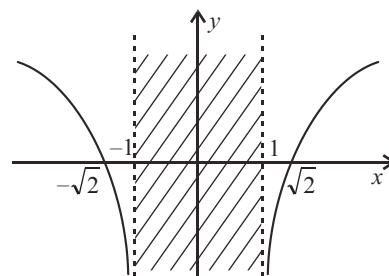
III. Studiul derivatei a doua

$f''(x) = \frac{-2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}$; ecuația $f''(x) = 0$ nu are soluții.

IV.

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$			
f'	$-$	$-$	$ $	$+$	$+$	$+$			
f	$+\infty$	\searrow	0	\searrow	$-\infty$	\nearrow	0	\nearrow	$+\infty$
f''	$-$	$-$	$ $	$-$	$-$	$-$			

V.



Observație. Funcțiile din exercițiile 12 și 13 fiind funcții pare, în fiecare caz se poate studia și trasa graficul numai pe intervalul $(1, +\infty)$, iar apoi pe $(-\infty, -1)$ se trasează prin simetrie față de Oy .

14) $f(x) = x \cdot e^{-x}$.

I. Domeniul de definiție este $D = \mathbb{R}$.

Intersecțiile cu axele:

• $\cap Ox$ ($y = 0$), obținem $xe^{-x} = 0$, deci $x = 0$; punctul $O(0, 0)$ este punctul de intersecție cu axele de coordonate.

Asimptote:

• funcția nu admite asimptote verticale;

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$, deci funcția admite dreapta $y = 0$ ca asimptotă orizontală la $+\infty$;

• $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \infty$, deci funcția nu admite asimptotă oblică la $-\infty$.

Funcția este *continuă* și *derivabilă* pe \mathbb{R} .

II. Studiul derivatei întâi

$f'(x) = e^{-x}(1 - x)$; ecuația $f'(x) = 0$ are soluția $x_1' = 1$; semnul derivatei întâi este dat în tabelul:

x	1	
$f'(x)$	+	-

III. Studiul derivatei a doua

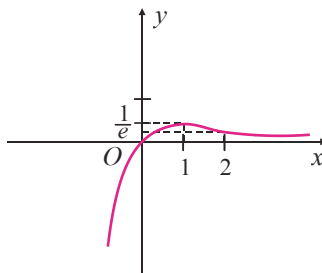
$f''(x) = e^{-x}(x - 2)$; ecuația $f''(x) = 0$ are soluția $x_1'' = 2$; semnul derivatei a doua este dat în tabelul:

x	2	
$f''(x)$	-	+

IV. Tabelul de variație

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$		+	+	0	-	-
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow 0 \nearrow	$\frac{1}{e}$	\searrow $\frac{2}{e^2}$	0	
$f''(x)$		-	-	0	+	+

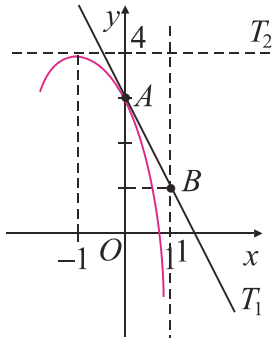
V. Reprezentarea grafică a funcției



Observație. „Citind” graficul unei funcții putem stabili: intervalele pe care funcția respectivă este monotonă (crescătoare sau descrescătoare); punctele de extrem, adică punctele de minim sau de maxim (dacă există); intervalele pe care funcția este convexă sau concavă; punctele de inflexiune (dacă există); soluțiile ecuației $f(x) = 0$ asociate funcției f (dacă există) etc.

Exercițiu rezolvat.

Într-un reper cartezian xOy , \mathcal{G}_f este graficul unei funcții $f : (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ având reprezentarea grafică următoare:



Dreapta T_1 este tangenta la grafic în punctul de abscisă 0 și dreapta T_2 este singura tangentă paralelă cu axa absciselor.

- Rezolvă grafic ecuația $f'(x) = 0$, unde f' este funcția derivată a funcției $f : (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.
- Rezolvă grafic inecuația $f'(x) < 0$, unde f' este funcția derivată a funcției $f : (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.
- Știind că tangenta T_1 la grafic în punctul A de abscisă 0 trece prin punctul $B(1, 1)$, găsește coeficientul unghiular al dreptei T_1 .
- Dedu $f'(0)$.
- Presupunem că funcția $f : (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ este definită astfel: $f(x) = 3 - 2xe^x$.
 - Calculează $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, știind că $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$; interpretează grafic acest rezultat.
 - Rezolvă grafic inecuația $f(x) > 3$.
 - Calculează derivata funcției f și studiază semnul funcției f' pe $(-\infty, 1]$.
 - Dedu variația funcției f .

Soluție.

- Soluțiile ecuației $f'(x) = 0$ sunt abscisele punctelor în care reprezentarea grafică are tangentă orizontală. Avem o singură soluție $x = -1$.
- $f'(x) < 0$ pe intervalul pe care funcția f este descrescătoare, adică $x \in (-1, 1]$.
- $m_{T_1} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 3}{1 - 0} = -2$.
- Din a) deducem $f'(0) = -2$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$, deci dreapta de ecuație $y = 3$ este asimptotă orizontală a funcției la $-\infty$.
 - Mulțimea soluțiilor inecuației $f(x) > 3$ este $(-\infty, 0)$, conform reprezentării grafice a funcției f .
 - Pentru $\forall x \in (-\infty, 1], f'(x) = -2(x+1)e^x$; cum $e^x > 0, \forall x \in (-\infty, 1]$, atunci $f'(x) \geq 0$ este echivalentă cu $-2(x+1) \geq 0$, adică $x \leq -1$. Deci $x < -1, f'(x) > 0$ și $x > -1, f'(x) < 0$ și $f'(-1) = 0$.
 - $f(-1) = 3 + 2e^{-1} \approx 3,74$.

x	$-\infty$	-1	1		
f'		$+$	0	$-$	
f	3	\nearrow	$3+2e^{-1}$	\searrow	$3-2e$



● Reprezintă grafic funcțiile următoare:

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - x + 1.$

2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^3 + 3x.$

3. $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}.$

4. $f: \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}.$

5. $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}.$

6. $f: \mathbb{R} \setminus \{-2, +2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}.$

7. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x^2}.$

8. $f: [0, \infty) \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x-1)^2}.$

9. $f: (-\infty, -2] \cup [0, \infty); f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x}.$

10. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = xe^{-x}.$

11. $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(1 - x^2).$

12. $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{x}.$

13. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \min\{x, x^2, 1\}.$

● Fie D domeniul maxim de definiție pentru fiecare dintre funcțiile următoare ($f: D \rightarrow \mathbb{R}$). Determină D și trasează graficul funcției în fiecare caz.

14. $f(x) = \frac{|x|}{|x^2 - 1|}.$

15. $f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{1 - x^2}}.$

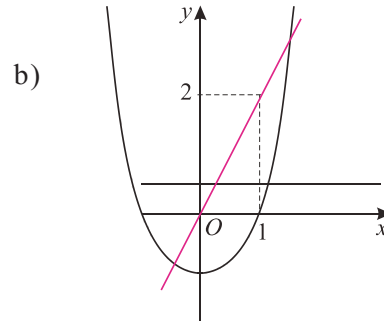
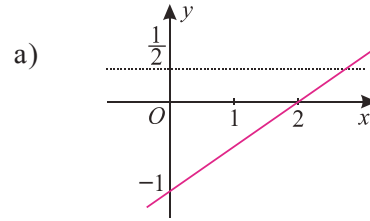
16. $f(x) = \frac{\sqrt{|1 - x^4|}}{x}.$

17. $f(x) = \frac{\ln x}{1 + \ln x}.$

18. $f(x) = \frac{\ln x + x^2}{\ln x - x^2}.$

19. $f(x) = |x - 1| \frac{1}{e^x}.$

● 20. Fiecare dintre figurile alăturate prezintă curba reprezentativă a unei funcții, \mathcal{G}_f și curba reprezentativă a derivatei funcției, $\mathcal{G}_{f'}$, în același reper. Identifică \mathcal{G}_f și $\mathcal{G}_{f'}$.



● 21. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x - \frac{x}{2} - 1.$

a) Determină $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$

b) Arată că funcția f admite o asimptotă oblică.

c) Arată că $f(x) = x \left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{x} \right)$ pentru $\forall x \in \mathbb{R}^*.$

Dedu de aici $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x).$

d) Determină f' derivata funcției f pe $\mathbb{R}.$

e) Rezolvă în \mathbb{R} inecuația $e^x - \frac{1}{2} \geq 0.$

Dedu semnul derivatei f' pentru $x \in \mathbb{R}.$

f) Calculează valoarea exactă a lui $f \left(\ln \frac{1}{2} \right).$

g) Stabilește tabelul de variație al funcției $f.$

h) Reprezintă într-un reper cartezian luând unitatea de măsură egală cu 5 cm, graficul funcției f și asimptota sa oblică.

2. Aplicații ale unor proprietăți locale sau globale ale funcțiilor

Probleme de maxim sau de minim

Există probleme practice de geometrie, fizică, mecanică etc. în care se cere cea mai mare sau cea mai mică valoare pe care o ia o anumită mărime variabilă (lungime, arie, volum, timp, forță, preț, consum de material etc.).

Cum rezolvăm o problemă de maxim sau de minim?

Procedăm astfel:

- se alege o *variabilă independentă*;
- se exprimă mărimea al cărei maxim sau minim se cere, în *funcție* de variabila independentă aleasă;
- se calculează *derivata* funcției, se egalează cu zero și se determină valorile variabilei,

pentru care *funcția* este *maximă* sau *minimă*.

1) Determină triunghiul isoscel, de arie maximă, înscris într-un cerc de rază egală cu 2.

Rezolvare.

Alegem ca *variabilă independentă* înălțimea $AD = x$, $x \in [0, 4]$.

Exprimăm aria triunghiului $A_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2}$ (1), unde $BC = 2 \cdot DC = 2\sqrt{OC^2 - OD^2}$;

ținând cont că $OC = 2$ și $OD = x - 2$, obținem: $BC = 2\sqrt{4 - (x - 2)^2} = 2\sqrt{4x - x^2}$.

Înlocuind în (1) obținem *funcția* $A(x) = x\sqrt{4x - x^2}$.

Calculăm *derivata* acestei funcții și obținem: $A'(x) = \sqrt{4x - x^2} + x \cdot \frac{4 - 2x}{2\sqrt{4x - x^2}} = \frac{4x - x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{4x - x^2}} = \frac{6x - 2x^2}{\sqrt{4x - x^2}}$.

$A'(x) = 0$ implică $6x - 2x^2 = 0$, adică $2x(3 - x) = 0$, cu soluțiile $x'_1 = 0$ (soluție care nu convine problemei deoarece nu există un triunghi cu o înălțime egală cu zero) sau $x'_2 = 3$.

Semnul derivatei întâi este dat în tabelul alăturat, deci pentru $x = 3$ funcția $A(x)$ admite un maxim egal cu $3\sqrt{3}$.

Deci, dacă $x = 3$, atunci înălțimea triunghiului de arie maximă are lungimea egală cu $\frac{3}{4}$ din diametru.

În acest caz ($x = 3$), triunghiul ABC este echilateral.

Observație.

Dintre toate triunghiurile isoscele înscrise într-un cerc dat, triunghiul echilateral are aria cea mai mare.

2) Dintr-un pătrat se taie din colțuri 4 pătrate egale, apoi se îndoie marginile astfel încât să obținem o cutie (fără capac). Latura pătratului inițial având lungimea egală cu 12, care trebuie să fie lungimea laturii pătratului mic astfel încât volumul cutiei să fie maxim?

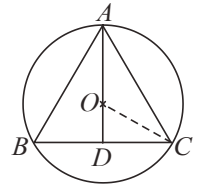
Rezolvare.

Alegem ca *variabilă independentă* lungimea laturii pătratului mic și o notăm cu x . Înălțimea cutiei care se formează este x , iar lungimea laturii bazei este $12 - 2x$. Volumul cutiei este descris de *funcția* $V(x) = x(12 - 2x)^2$. Calculăm *derivata* funcției V și obținem $V'(x) = 12(6 - x)(2 - x)$.

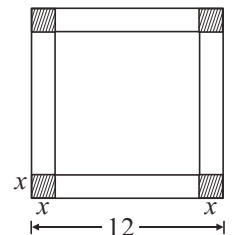
Ecuția $V'(x) = 0$ are soluțiile $x'_1 = 6$ sau $x'_2 = 2$. Soluția $x'_1 = 6$ nu convine problemei (nu mai există cutia!). Tabelul de variație pentru funcția V este următorul:

x	0	2	6	$+\infty$
$V'(x)$	+	0	-	+
$V(x)$	\nearrow	128	\searrow	m

Volumul este maxim pentru $x = 2$ și este egal cu 128 unități de volum.



x	0	3	4	$+\infty$		
$A'(x)$		+	0	-		-
$A(x)$	0	\nearrow	$3\sqrt{3}$	\searrow	0	\searrow

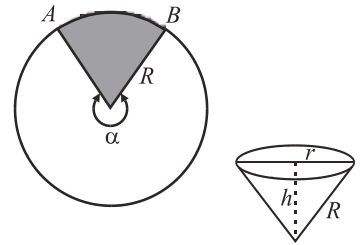


3) Dintr-o bucată de tablă de formă circulară cu raza R se decupează un sector de cerc din care se confecționează o pâlnie. Pentru ce unghi la centru, α , pâlnia are capacitatea maximă?

Soluție.

Alegem ca *variabilă independentă* înălțimea h a conului care reprezintă pâlnia. Volumul pâlniei este $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$; cum $r^2 = R^2 - h^2$,

obținem funcția $V = f(h) = \frac{\pi}{3}(R^2 h - h^3)$. Valoarea extremă (maximă) se calculează din $f'(h) = 0$ și obținem $h = \frac{R}{3}\sqrt{3} > 0$. Cum $f''(h) = -\frac{2\pi}{3}R\sqrt{3} < 0$, rezultă că valoarea găsită este un maxim. Când se îndoaie tabla, arcul de cerc $\widehat{AB} = R\alpha$ devine circumferința bazei, deci $\widehat{AB} = 2\pi r$; obținem $\alpha = \frac{2\pi r}{R}$ și, cum $r = \frac{R}{3}\sqrt{6}$, rezultă $\alpha = \frac{2\pi\sqrt{6}}{3} \approx 294^\circ$.



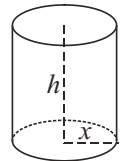
4) O fabrică de conserve își confecționează din tablă cutii cilindrice având capacitatea de 1 l (1 dm³). Ce dimensiuni trebuie să aibă cutiile pentru a se folosi cât mai puțin material?

Rezolvare.

Alegem ca *variabilă independentă* raza bazei cilindrului pe care o notăm cu x .

Notăm cu A aria totală a cilindrului. Volumul cutiei fiind egal cu 1 dm³, deducem

înălțimea h în funcție de x , astfel: $1 = \pi x^2 \cdot h$, de unde $h = \frac{1}{\pi x^2}$.



Exprimăm aria totală a cilindrului: $A(x) = 2\pi x h + 2\pi x^2 = \frac{2}{x} + 2\pi x^2$.

Studiem punctele de extrem ale funcției $A(x)$: $A'(x) = -\frac{2}{x^2} + 4\pi x$;

din $A'(x) = 0$ obținem $x' = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$, pentru care $A\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right)$ are o valoare minimă.

x	0	$\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$	
$A'(x)$		-	0
			+
$A(x)$		\searrow	$A\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right)$
			\nearrow

Calculăm, în acest caz, dimensiunile cutiei și, pentru $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$ (raza bazei), obținem $h = \frac{2}{\sqrt[3]{2\pi}}$, adică

înălțimea cutiei trebuie să fie egală cu dublul razei bazei cilindrului.



1. Într-o întreprindere, un studiu al costurilor unei producții arată că, dacă q reprezintă numărul de unități produse, costul total $C(q)$ este dat prin:

$$C(q) = \frac{1}{3}q^3 - 2q^2 + 50q + 1.$$

a) Studiază monotonia funcției C definită pe $[0, +\infty)$. Construiește, într-un reper cartezian, porțiunea din graficul lui C pentru $0 \leq q \leq 5$.

b) Fie funcția $C_m(q) = \frac{C(q)}{q}$, definită pentru $q > 0$

(C_m reprezintă costul mediu unitar).

i) Calculează derivata $C'_m(q)$ (C'_m reprezintă costul marginal, adică costul suplimentar necesar pentru a produce o unitate în plus).

ii) Determină limitele lui C'_m în 0 și $+\infty$. Studiază monotonia funcției C'_m și deduce că există un număr real unic, r , astfel încât $C'_m(r) = 0$. Determină, cu o aproximație de 10^{-3} , valoarea lui r .

iii) Studiază funcția C_m și completează tabelul de variație. Trasează, într-un reper cartezian, porțiunea din reprezentarea geometrică a graficului, corespunzătoare lui $0 < q \leq 5$.

2. Determină conul, de volum maxim, înscris într-o sferă de rază dată R .

3. Dintre toate dreptunghiurile cu perimetrul de 24 m, care are aria maximă?

4. Dintre toate dreptunghiurile cu aria de 36 cm², care este dreptunghiul cu perimetrul cel mai mic?

3. Rezolvarea grafică a unor ecuații. Șirul lui Rolle

Rezolvarea grafică a ecuațiilor; utilizarea reprezentării grafice a funcțiilor în determinarea numărului de soluții ale unei ecuații

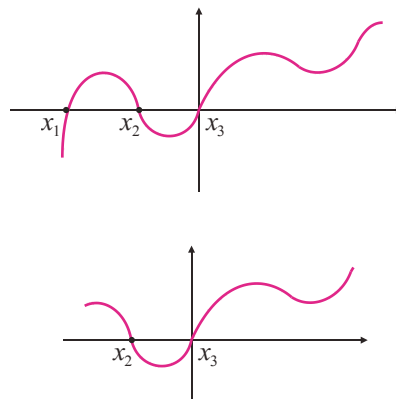
Oricărei ecuații îi putem asocia o funcție și oricărei funcții îi putem asocia o ecuație (punând $f(x) = 0$).

Dacă se cunoaște reprezentarea grafică a unei funcții f , atunci putem observa numărul de soluții reale ale ecuației $f(x) = 0$ și, eventual, valorile lor sau intervalele în care se află acestea.

De exemplu, pentru o funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, având reprezentarea grafică din figura alăturată, ecuația $f(x) = 0$ are, conform imaginii grafice, trei soluții reale x_1, x_2, x_3 pe care, fie le putem determina din calcul, fie putem spune în ce interval se află fiecare din ele. Pentru reprezentarea grafică de mai sus observăm că $x_3 = 0$ și $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$.

Dacă în exemplul precedent avem doar o porțiune din reprezentarea grafică a funcției f , atunci și discuția referitoare la numărul soluțiilor ecuației asociate, $f(x) = 0$, poate fi incompletă (de exemplu, în reprezentarea grafică lipsește soluția x_1 !).

De aceea, avem nevoie de reprezentarea grafică a funcției f (pe domeniul ei de definiție) și de o metodă prin care să stabilim cu certitudine numărul soluțiilor reale ale ecuației $f(x) = 0$ (pe domeniul ei de definiție) și intervalele în care se află acestea.

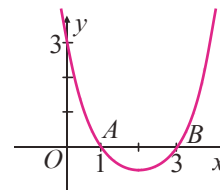


EXEMPLU



1) Să rezolvăm grafic ecuația $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Asociem funcția $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, având reprezentarea grafică alăturată.

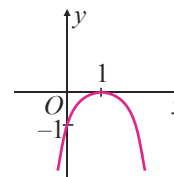


Intersecția reprezentării grafice cu axa Ox se face în două puncte, $A(1, 0)$ și $B(3, 0)$. Abscisele acestor puncte reprezintă soluțiile ecuației date $f(x) = 0$, adică $x_1 = 1$ și $x_2 = 3$.

2) Să rezolvăm grafic ecuația $-x^2 + 2x - 1 = 0$.

Asociem funcția $f(x) = -x^2 + 2x - 1$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

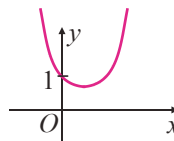
Reprezentarea grafică a funcției f intersectează axa Ox într-un singur punct $V(1, 0)$. Abscisa acestui punct este soluția reală (dublă) a ecuației $f(x) = 0$, adică $x_1 = x_2 = 1$.



3) Să rezolvăm grafic ecuația $x^2 + x + 1 = 0$.

Asociem funcția $f(x) = x^2 + x + 1$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Observăm că reprezentarea grafică a funcției f nu intersectează axa Ox , deci ecuația asociată nu are soluții reale.



Observație.

În fiecare dintre aceste exemple am putut calcula numărul soluțiilor fiecărei ecuații și valorile lor!

Șirul lui Rolle

Pentru determinarea numărului de soluții reale ale unor ecuații și a intervalelor în care ele sunt situate, se utilizează *șirul lui Rolle*. Șirul lui Rolle ne permite să separăm soluțiile ecuației $f(x) = 0$, atunci când cunoaștem soluțiile ecuației $f'(x) = 0$. Această metodă se bazează, atât pe teorema lui Rolle, cât și pe proprietatea lui Darboux.

Fie $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă și x'_1, x'_2, \dots, x'_n soluțiile reale consecutive ale ecuației $f'(x) = 0$.

Șirul lui Rolle reprezintă șirul semnelor dat de valorile: $f(a+0)$, $f(x'_1)$, $f(x'_2)$, .. $f(x'_n)$, $f(b-0)$.

Distingem următoarele cazuri:

I. Dacă în șirul lui Rolle apar două semne alăturate diferite, adică pentru $x'_k < x'_{k+1}$ avem $f(x'_k) \cdot f(x'_{k+1}) < 0$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ (am notat $x'_0 = a$ și $x'_{n+1} = b$), atunci în intervalul (x'_k, x'_{k+1}) există o *unică soluție* a ecuației $f(x) = 0$ (existența este dată de proprietatea lui Darboux a lui f , iar unicitatea este asigurată de teorema lui Rolle).

II. Dacă în șirul lui Rolle apar două semne alăturate identice, adică pentru $x'_k < x'_{k+1}$ avem $f(x'_k) \cdot f(x'_{k+1}) > 0$, atunci $f(x) = 0$ nu are *nici o soluție* în intervalul (x'_k, x'_{k+1}) .

Demonstrație. Aplicăm metoda reducerii la absurd.

Dacă $\exists c_1, c_2 \in (x'_k, x'_{k+1})$, $c_1 \neq c_2$ cu $f(c_1) = f(c_2) = 0$, atunci, conform teoremei lui Rolle, există c între c_1 și c_2 , adică $c \in (x'_k, x'_{k+1})$ astfel încât $f'(c) = 0$, contradicție cu faptul că x'_k și x'_{k+1} sunt soluții consecutive ale lui f' .

Dacă $c \in (x'_k, x'_{k+1})$ este unica soluție a ecuației $f(x) = 0$, atunci c este un punct extrem al lui f , deci $f'(c) = 0$ (conform teoremei lui Fermat). Am ajuns din nou la o contradicție.

III. Dacă în șirul lui Rolle apare valoarea 0, adică $f(x'_k) = 0$, atunci x'_k este *soluție multiplă* a lui f și în intervalele (x'_{k-1}, x'_k) și (x'_k, x'_{k+1}) ecuația nu mai are alte soluții.

Etapele formării șirului lui Rolle sunt următoarele:

1) se fixează intervalul de studiu, $I = (a, b)$ cu $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, pentru ecuația $f(x) = 0$, unde $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă;

2) se rezolvă ecuația $f'(x) = 0$ și considerăm soluțiile reale ale acestei ecuații (sitate în I) în ordine crescătoare:

$$x'_1 < x'_2 < \dots < x'_n;$$

1) Găsește soluțiile multiple pentru funcțiile $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, unde D este domeniul maxim de definiție:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$;

b) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{e^{-x}}, & x > 0 \end{cases}$;

c) $f(x) = x^2(e^x - 1)$;

d) $f(x) = (x^2 - 1)\ln x^2$.

2) Determină numărul de soluții ale unei ecuații $f(x) = 0$, urmărind condițiile prezentate în tabel.

a)

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	
$f(x)$	$+\infty$	$+$	$+$	$+\infty$

b)

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	
$f(x)$	$-\infty$	$-$	$-$	$+\infty$

c)

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	
$f(x)$	$-\infty$	$+$	$+$	$+\infty$

d)

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	
$f(x)$	$+\infty$	$+$	$+$	$+\infty$

e)

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	
$f(x)$	$-\infty$	$+$	$-$	$+\infty$

f)

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	
$f(x)$	$+\infty$	$-$	$+$	$-\infty$

g)

x	$-\infty$	-2	0	3	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	0	
$f(x)$	$+\infty$	$+$	$-$	$+$	$-\infty$

3) se calculează valorile funcției f în aceste puncte la care se adaugă valorile (sau limitele) lui f la capetele intervalului I , notate cu $f(a+0)$, respectiv $f(b-0)$;

4) se organizează datele obținute anterior într-un tabel de forma:

x	a	x'_1	x'_2, \dots	x'_n	b	
$f'(x)$		0	0	0	
$f(x)$	$f(a+0)$	$f(x'_1)$	$f(x'_2)$...	$f(x'_n)$	$f(b-0)$

Șirul lui Rolle este șirul semnelor valorilor ultimei linii a tabelului.

Observație.

Putem folosi șirul lui Rolle numai dacă se poate rezolva ecuația $f'(x) = 0$.

Probleme rezolvate

1) Determină numărul de soluții reale ale ecuațiilor următoare și intervalele în care se află acestea:

a) $4x^3 - 18x^2 + 24x - 9 = 0$.

Soluție.

Considerăm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 9$, f este derivabilă și $f'(x) = 12x^2 - 36x + 24 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x'_1 = 1, x'_2 = 2$. Calculăm $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	
sgn f	-	+	-	+

Prin urmare, având trei schimbări de semne, ecuația $f(x) = 0$ are trei soluții reale: $x_1 \in (-\infty, 1), x_2 \in (1, 2), x_3 \in (2, +\infty)$.

b) $x^5 - 4x^3 + 3 = 0$

Soluție.

Considerăm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^5 - 4x^3 + 3$ derivabilă pe \mathbb{R} și $f'(x) = 5x^4 - 12x^2$. Ecuația $f'(x) = 0$, adică $x(5x^3 - 12) = 0$, are soluțiile reale $x'_1 = 0$ și $x'_2 = \sqrt[3]{\frac{12}{5}}$.

Limitele funcției f în $-\infty$ și $+\infty$ sunt egale cu $-\infty$, respectiv $+\infty$. Șirul lui Rolle este dat în tabelul următor:

x	$-\infty$	0	$\sqrt[3]{\frac{12}{5}}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-
sgn f	-	+	-	+

Deci ecuația dată are trei soluții reale (având trei schimbări de semne în șirul lui Rolle): $x_1 \in (-\infty, 0), x_2 \in \left(0, \sqrt[3]{\frac{12}{5}}\right), x_3 \in \left(\sqrt[3]{\frac{12}{5}}, +\infty\right)$.

h)

x	$-\infty$	-1	1	10	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	0	
$f(x)$	$+\infty$	+	0	+	$-\infty$

i)

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	0	0	
$f(x)$	$-\infty$	+	-	0	+	$-\infty$

3) Găsește câte un exemplu de funcție care verifică fiecare tabel în parte și scrie ecuația asociată.

Indicație.

a) $f'(x) = (x+1)(x-4) = x^2 - 3x - 4$, de unde obținem $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 4x$, deci ecuația asociată este $2x^3 - 9x^2 - 24x = 0$.

Să stabilim numărul de soluții reale ale unei ecuații și le separăm pe intervale

4) Determină numărul soluțiilor reale ale ecuației:

- a) $2x^5 - 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 - 40x + 1 = 0$;
- b) $\ln x - x + 1 = 0$;
- c) $e^x - x + 1 = 0$;
- d) $x^3 + 3x + m = 0$

unde m este un parametru real.

5) a) Determină numărul soluțiilor reale ale ecuației $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1 = 0$ și separă pe intervale soluțiile obținute.

b) Propune o ecuație care să aibă același număr de soluții.

6) Se dă ecuația $2^x - x \ln 2 - m = 0$.

- a) Pentru ce valori ale lui $m \in \mathbb{R}$, ecuația are două soluții reale distincte?
- b) Poate avea ecuația exact trei soluții reale distincte?

7) Determină numărul soluțiilor reale ale ecuației $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + \lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ și separă pe intervale soluțiile obținute în funcție de parametrul λ .

2) Separă soluțiile ecuației $x^2 + 2\ln x - 4x = m$, în funcție de valorile reale ale parametrului m .

Soluție.

Fie $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2\ln x - 4x - m$. f este derivabilă

și $f'(x) = 2x + \frac{2}{x} - 4$; din $f'(x) = 0$ obținem $x_1' = 1$; $f(1) = -m - 3$;

$f(0+0) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

x	0	1	$+\infty$
$\text{sgn } f$	-	$\text{sgn}(-m-3)$	+

Dacă $m \in (-\infty, -3)$, atunci ecuația $f(x) = 0$ are o unică soluție ce se află în intervalul $(0, 1)$.

Dacă $m = -3$, atunci $x_1 = 1$ este soluție multiplă.

Dacă $m \in (-3, +\infty)$, atunci ecuația $f(x) = 0$ are o unică soluție ce se află în intervalul $(1, +\infty)$.

3) Considerăm funcția $f: [-1; 3,5] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$, având reprezentarea grafică alăturată:

a) Completează tabelul de variație al funcției f .

b) Demonstrează că ecuația $f(x) = 0$ are o singură soluție, $x_1 \in [3; 3,5]$.

c) Pune pe figură punctul A de abscisă x_1 . Determină grafic o încadrare a lui x_1 într-un interval de lungime 0,5 unități.

d) Completează tabelul următor (aproximând la 10^{-2}):

x	3	3,5	3,25	3,10	3,20	3,11
$f(x)$						

e) Dedu o încadrare a lui x_1 (aproximare prin lipsă și prin adaos) la o sutime.

Soluție.

a)

x	-1	0	2	3,5			
f'	+	0	-	0	+		
f	-5	\nearrow	-1	\searrow	-5	\nearrow	5,125

b) Funcția f este derivabilă pe $[3; 3,5]$ și pentru $\forall x \in [3; 3,5], f'(x) > 0$, adică f este strict crescătoare pe $[3; 3,5]$; $f(3) = -1$ și $f(3,5) = 5,125$, deci $0 \in [f(3); f(3,5)] = [-1; 5,125]$. Deci ecuația $f(x) = 0$ admite o singură soluție în intervalul $[3; 3,5]$.

c) Punctul A este punctul în care reprezentarea grafică a lui f intersectează axa absciselor. Citim pe grafic că abscisa punctului A verifică $3 < x_1 < 3,5$.

d)

x	3	3,5	3,25	3,10	3,11
$f(x)$	-1	5,13	1,64	1,05	0,06

e) $f(3,10) \simeq -0,04 < 0$ și $f(3,11) \simeq 0,06 > 0$, deci $f(3,10) < 0 < f(3,11)$, de unde $3,10 < x_1 < 3,11$

8) Determină numărul soluțiilor reale ale ecuațiilor și separă pe intervale soluțiile obținute:

a) $x^3 - 6x + 2 = 0$;

b) $x^4 - 4x - 1 = 0$;

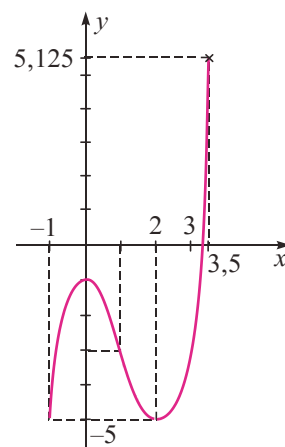
c) $x + e^x = 0$;

d) $3x^4 - 4ax^3 - 6x^2 + 12ax + 7a^2 - 36 = 0$,

unde $a \in \mathbb{R}$;

e) $3x^4 - 20x^3 + 30x^2 + 60x - 72 \cdot \ln|x| + 1 = 0$;

f) $2x + \ln x - m(x - \ln x) = 0, m \in \mathbb{R}$.





1. Determină valoarea lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care ecuația $3x^4 + 4x^3 - 24x^2 - 48x + m = 0$:
 a) are două soluții egale;
 b) are toate soluțiile reale.

2. Arată că, pentru $m \in \left[-3, \frac{44}{7}\right]$, ecuația $2x^3 + x^2 - 4x + m = 0$ are toate soluțiile reale.

3. Arată că, $\forall p \in \mathbb{R}$, ecuația $x^3 - 3x + p = 0$ nu poate avea în intervalul $[0, 1]$ două soluții distincte.

4. Determină valorile parametrului real m pentru care ecuația $e^x = mx^2$ are trei soluții reale.

5. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a \neq b$. Rezolvă în \mathbb{R} ecuația $(x - a)^n + (x - b)^n = (a - b)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ dat.

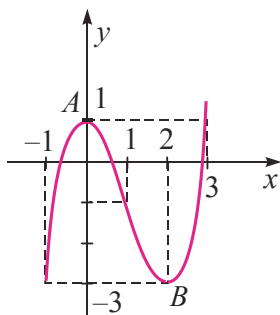
6. Știind că ecuația $x^4 - 4x^3 + 6x^2 + ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ are toate soluțiile reale, precizează aceste soluții.

7. Determină numărul de soluții reale ale ecuației următoare și intervalele în care se află acestea:
 a) $x^3 - 3x^2 - 9x + 3 = 0$; b) $x^3 + 3x^2 + 6 = 0$;
 c) $x^3 - 2x + 1 = \ln x$.

Teste de evaluare

Testul 1

Într-un reper cartezian xOy , \mathcal{G}_f este graficul unei funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, având reprezentarea grafică următoare.



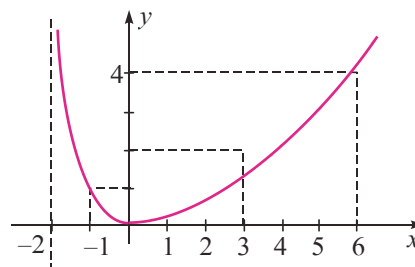
Tangentele la curbă în punctele A și B , de abscise 0 și 2, sunt paralele cu Ox .

- Determină grafic $f(0)$, $f(1)$, $f'(2)$.
- Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$. Determină constantele a , b , c , dacă f are reprezentarea grafică de mai sus.
- Presupunând că $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, determină $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- Completează următorul tabel de variație, folosind datele obținute mai sus.

x	$-\infty$	$+\infty$			
f'	...	0	...	0	...		
f	...	↗	...	↘	...	↗	...

Testul 2

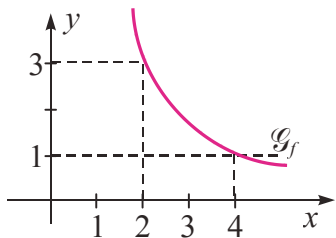
Se consideră funcția $f: (-2, +\infty)$, $f(x) = x - 2 + \frac{4}{x+2}$ și reprezentarea ei grafică într-un reper cartezian.



- Arată că funcția f admite o asimptotă oblică și determină ecuația acesteia.
- Graficul funcției f este situat deasupra sau sub asimptota sa oblică?
- Presupunând că $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$, ce putem spune despre funcția f ?
- Reprezintă, în același reper cartezian, funcția f și asimptotele ei.

Testul 3

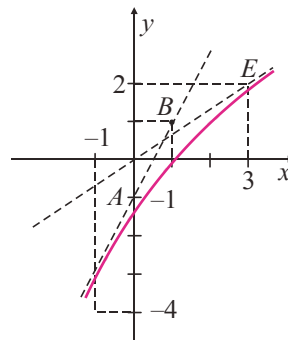
Fie funcția $f: \left(\frac{3}{2}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{2x-3}$ și \mathcal{G}_f reprezentarea ei grafică într-un reper cartezian.



1. Determină $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x)$.
2. Verifică, din limita de mai sus, existența unei asimptote d_1 pentru funcția f și determină ecuația dreptei d_1 .
3. Determină $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
4. Verifică, din limita de mai sus, existența unei asimptote d_2 pentru funcția f și determină ecuația dreptei d_2 .
5. Trasează dreptele d_1 , d_2 și funcția f în același reper cartezian.

Testul 4

1. Considerăm funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4}{x}$.
 - a) Determină coeficientul unghiular al tangentei la grafic în punctul A de abscisă 2.
 - b) Reprezintă grafic într-un reper cartezian funcția f și tangenta la grafic în punctul A .
2. În figura următoare este reprezentată o funcție $f: [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$.



- a) Determină grafic coeficientul unghiular al fiecăreia din dreptele AB și OE .
- b) Dreapta AB este tangenta în A reprezentării grafice a lui f și dreapta OE este tangenta în E reprezentării grafice a lui f . Dedu $f'(0)$ și $f'(3)$.

Testul 5

Considerăm funcția $f: \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 2 - 3\ln(2x + 1)$.

1. Presupunem că $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$. Determină $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x)$. Ce deducem de aici, pentru reprezentarea grafică a lui f ?
2. a) Determină intervalele de monotonie ale funcției f .
b) Determină tabelul de variație al funcției.
3. Reprezintă grafic funcția f .
4. Demonstrează că ecuația $f(x) = 0$ admite soluție unică pe intervalul $[1, 2]$.

Probleme recapitulative

1. Fie $x \in \mathbb{R}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Arată că $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) Calculează $A^n(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Calculează determinantul, punând rezultatul sub formă de produs: $\Delta = \begin{vmatrix} x-1 & 2x & 2-x \\ 1 & x & x \\ 4-x & x & 2x-3 \end{vmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.

3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ astfel încât $B^4 = 2I_3$ și $A = B^2 + I_3$.

a) Arată că matricea A este inversabilă.

b) Calculează $\det(A - A^{-1})$.

c) Arată că: $|\det A + \det(A - 2I_3)| \geq 2$.

4. Studiază compatibilitatea sistemului $\begin{cases} -ax + y + z = -1 \\ x - ay + z = a \\ x + y - z = 2 \end{cases}$, unde a este un parametru real.

5. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m & 0 \\ m & 0 & m \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{R}^*$. Rezolvă ecuația matricială $B \cdot X \cdot A = O_3$.

6. Fie $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $a > 0$.

a) Calculează $B = \sum_{k=1}^n A^k$.

b) Precizează dacă B este inversabilă și, în caz afirmativ, determină inversa sa.

Inegalități celebre

7. a) Dacă $x > -1$ și $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $(1+x)^n \geq 1+nx$ (Inegalitatea lui Bernoulli)

b) Dacă $y > -1$ și $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $(1+y)^{\frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{y}{n}$.

c) Arată că $(1,001)^{1000} > 2$.

d) Dacă $x > 1$ și $y \in \mathbb{R}$, atunci există $n \in \mathbb{N}^*$ cu $x^n > y$. (Forma multiplicativă a inegalității Bernoulli)

8. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ cu proprietatea că $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$. Avem $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$. (Ehlers)

9. Inegalitățile mediilor (A. Cauchy, 1821)

Fie $a_i > 0$, $1 \leq i \leq n$; atunci:

$$\min\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \leq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

10. $\left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$, pentru $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$. (Cauchy - Buniacovsky - Schwartz)

11. Pentru $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$. (inegalitatea lui Minkowski).

12. Inegalitățile lui Cebâșev

a) Pentru $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \end{cases}$, $\frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{n} \geq \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n b_i}{n}$;

b) Pentru $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases}$, $\frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{n} \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n b_i}{n}$.

13. Rezolvă în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$.

14. Determină matricele $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ știind că $X^2 - 2aX + (a^2 + b^2) \cdot I_2 = O_2$.

15. Fie a, b, c cifre nenule, nu toate egale. Demonstrează că $\Delta > 0$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} \overline{abc} & \overline{bca} & \overline{cab} \\ \overline{cab} & \overline{abc} & \overline{bca} \\ \overline{bca} & \overline{cab} & \overline{abc} \end{vmatrix}$.

16. Determină $a \in \mathbb{R}$ dacă graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{ax^2 - x^3}$ admite o asimptotă ce trece prin punctul $A(1, 1)$.

17. Demonstrează următoarele inegalități:

a) $\ln(1+x) \leq x, \forall x > -1$;

b) $\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x-1, \forall x \geq 1$;

c) $1+x+\frac{x^2}{2} < e^x < 1+x+\frac{x^2 \cdot e^x}{2}, \forall x > 0$;

d) $\ln(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}, \forall x > 0$;

e) $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x}, \forall x \geq 0$.

18. Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + ax}{bx - 2}$, $a, b \in \mathbb{N}^*$.

a) Determină domeniul maxim de definiție D .

b) Determină a și b astfel încât funcția să aibă puncte de extrem de abscise -2 și 6 .

c) Trasează graficul lui f pentru a, b determinate anterior.

19. Fie $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2 - x - 4 \cdot \frac{\ln x}{x}$.

a) Trasează graficul lui f .

b) Determină coordonatele punctului A în care tangenta la grafic este paralelă cu dreapta de ecuație $x + y = 2$.

20. Trasează graficele funcțiilor:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x-2| \cdot e^{|x|};$

b) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}};$

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + x},$

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x^3}{(x^2 + 1)^2};$

e) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 4}{x^2};$

f) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x-1) \cdot e^{-x}.$

21. Determină $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{dacă } x \in [0, 1] \\ x^2 + a, & \text{dacă } x \in (1, 2] \end{cases}$ are limită în $x = 1$.

22. Calculează:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^3 + 1}{3x^3 + 1} \right)^{\frac{x^3 - 2x + 3}{2x^2 + 7}};$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3 - x + 1}{x^3 + x^2 + 1} \right)^{\frac{3}{2x}};$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3 - x + 2}{x^3 + x^2 + 2} \right)^{\frac{-2}{\sin x}};$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^3 + 1}{x^3 - 3} \right)^{\frac{x+1}{x^2-4}}.$

23. Calculează:

a) $\lim_{x \rightarrow 5} \left(\sqrt{2x-1} - 2 \right)^{\frac{1}{x^2-25}};$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^x + 9^x - 12}{2^x + 4^x - 6}.$

24. Calculează:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^{x^2-4} + 4^{x-2} - 2}{x^3 - 8};$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{x^n - 1}, m, n \in \mathbb{N}^*, m, n \geq 2.$

(Concurs internațional M.C.M. – 18 iulie 2001 – Poiana Pinului, Buzău)

25. Calculează:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log_2(\log_3 x)}{5^{x-2} - 5};$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (3^{x-1} + 3^{2x-1} + 3^{3x-1})^{3^x}.$

26. Fie $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $\lim_{x \rightarrow \infty} xf(e^x) = 0$. Calculează $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{f(x)}$.

(Concurs internațional M.C.M. – 18 iulie 2001 – Poiana Pinului, Buzău)

27. Fie $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $f((a - \varepsilon, a + \varepsilon)) \cap g\left(\left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right)\right) \neq \emptyset, \forall \varepsilon > 0$. Se presupune că $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \pm\infty$. Studiază continuitatea lui f în punctul $x = a$.

(Olimpiada de matematică, etapa județeană, 2000 – Dâmbovița)

28. Fie $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, continuă, cu $f(0) = f(2\pi)$. Demonstrează că $\exists c \in (0, \pi)$ astfel încât $f(c) = f(c + \pi)$.

29. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a+c & a+b & b+c \\ c+b & a+c & a+b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Demonstrează că, dacă $a^2 + b^2 + c^2 = 4$, atunci $\det A \leq 16$.

30. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det(A - I_2) = -3$, $\det(A + 2I_2) = 15$.

a) Determină $\det A$, $\det(A + I_2)$, $\det(A - 2I_2)$.

b) Determină matricea $A^4 - 3A^3 + 2A^2$.

31. Rezolvă în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

32. Fie numerele reale distincte a, b, c și funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$, $g(x) = x^2 - 3x + 2$.

a) Calculează determinantul $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ g(a) & g(b) & g(c) \end{vmatrix}$.

b) Demonstrează că $\frac{g(a)}{f'(a)} + \frac{g(b)}{f'(b)} + \frac{g(c)}{f'(c)} = 1$.

33. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \in \{2, 3\}$ astfel încât $A + B = I_n$, $A^3 = A^2$.

a) Demonstrează că matricea $C = AB + I_n$ este inversabilă.

b) Determină C^{-1} .

34. Fie $x, y \in \mathbb{R}$, $A = xI_3 + yB$, unde $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) În ce condiții matricea A este inversabilă?

b) Determină A^{-1} (când există).

35. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Demonstrează că:

a) $A^2 + A + I_2 = O_2 \Leftrightarrow a + d + 1 = 0$, $ad - bc = 1$;

b) ecuația $X^2 + X + I_2 = O_2$ are o infinitate de soluții în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

36. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 2x| \cdot e^{|x-1|}$.

a) Studiază derivabilitatea funcției f .

b) Calculează $\sum_{x \in A} (f'_d(x) - f'_s(x))$, unde $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ nu este derivabilă în punctul } x\}$.

37. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ astfel încât $x + t = xt - yt = 1$. Câte elemente are mulțimea $\{A^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

38. Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, astfel încât $A^2 = A$. Demonstrează că $(A + I_3)^n = (2^n - 1)A + I_3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

39. Fie $A(x) = \begin{pmatrix} 1-4x & -6x \\ 2x & 1+3x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{C}$.

- a) Demonstrează că $A(x) \cdot A(y) = A(x+y+xy)$, $\forall x, y \in \mathbb{C}$.
 b) Determină $(A(1))^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
 c) Determină $(A(x))^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{C}$.

40. Fie ε rădăcina a ecuației $x^2 + x + 1 = 0$ și matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix}$.
 Determină A^n și B^n , $n \in \mathbb{N}^*$.

41. Determină A^n pentru matricele:

a) $A = \begin{pmatrix} x & -x & -x \\ -x & x & -x \\ -x & -x & x \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 1 & x & 2x^2 + 2x \\ 0 & 1 & 4x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 0 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{C}$.

42. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Demonstrează că $A_3 = I_3$.
 b) Demonstrează că $(A - I_3)(A_2 + A + I_3) = O_3$.
 c) Demonstrează că există $B, C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) - \{O_3\}$ astfel încât $AB = O_3$.

43. Fie $x, y \geq 0$ astfel încât $x + y = 4$. Arată că $\frac{x}{1+y+xy} + \frac{y}{1+x+xy} > \frac{4}{9}$.

(Olimpiada de matematică, etapa municipală, cls. a IX-a, Constanța, 2001)

44. Fie matricele $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} m & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $m \neq \frac{1}{3}$. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Demonstrează că $a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C = O_2 \Leftrightarrow a = b = c$.

45. Considerăm funcțiile $F, f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \ln(1 + \ln x)$ și $f(x) = \frac{1}{x(1 + \ln x)}$.

- a) Arată că $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in (1, +\infty)$.
 b) Utilizând teorema lui Lagrange, arată că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, există $c_k \in (k, k+1)$ astfel încât $F(k+1) - F(k) = f(c_k)$.

c) Arată că $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ au loc inegalitățile $\frac{1}{(k+1)(1 + \ln(k+1))} < F(k+1) - F(k) < \frac{1}{k(1 + \ln k)}$.

46. Reprezintă grafic funcțiile următoare:

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = e^x$; b) $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^2$;
 c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$; d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 1$;
 e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 2$; f) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 1$;
 g) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^4}$; h) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$;

$$i) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1};$$

$$j) f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 - 1}{x};$$

$$k) f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 - 4}{x};$$

$$l) f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 + 3}{|x + 1|};$$

$$m) f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{\frac{1}{x}};$$

$$n) f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{\frac{2}{x}}.$$

47. Care sunt dimensiunile pe care trebuie să le aibă o cutie de conserve cilindrică, astfel încât pentru o capacitate dată de $1l = 1000\text{cm}^3$ să se consume minimum de tablă?

Indicație.

$A_{\text{cilindru}} = 2\pi r^2 + 2\pi r h$; $V_{\text{cilindru}} = \pi r^2 h = 1000\text{cm}^3$. Obținem $A_{\text{cilindru}} = f(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$, iar valoarea extremă se obține din $f'(r) = 0$.

48. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$.

a) Arată că $f(x) < \frac{3}{2}$ pentru oricare $x \in \mathbb{R}$.

b) Determină ecuația tangentei la graficul lui f în punctul de abscisă $x_0 = 1$.

49. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f_n(x) = x e^{nx}$.

a) Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ fixat, studiază variația funcției f_n .

b) Dacă $A_n = \min_{x \in \mathbb{R}} f_n(x)$ ($n \in \mathbb{N}^*$), calculează $L = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^p A_{k^2+k}$.

50. Studiază variația și trasează graficul funcțiilor:

$$a) f: D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \sqrt{\frac{x+2}{x-2}};$$

$$b) f: D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{|x|-1}{|x|};$$

$$c) f: D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x-1|e^{|x|}.$$

51. Pentru $\alpha \in (0, +\infty)$, fie $f_\alpha: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f_\alpha(x) = x \ln(\alpha x)$.

a) Pentru $\alpha > 0$ fixat, studiază variația funcției f_α .

b) Dacă $A_\alpha = \min_{x \in (0, \infty)} f_\alpha(x)$, $\alpha \in (0, \infty)$, calculează $L = \lim_{\alpha \rightarrow \frac{1}{e}} |A_\alpha|^{\frac{1}{1+\ln \alpha}}$.

52. Determină $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2 + 4x + 1} - ax - b) = 2\sqrt{2}$.

53. Se consideră $f: (-\infty, 0] \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln|x+1| + \frac{x}{x+1}$. Calculează limitele în capetele domeniului de definiție (se poate utiliza $\lim_{x \searrow 0} x \ln x = 0$).

54. Se consideră $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3^{-2x} - 2 \cdot 3^{-x}$. Calculează limitele funcției la $+\infty$ și $-\infty$.

55. Se consideră $f: (-\infty, -1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x(x-1)} + \sqrt{x(x+1)}$.

Calculează: i) $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$; ii) $n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx)$.

56. Se consideră $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ (D domeniul maxim de definiție), $f(x) = \frac{1+a^2}{(1-ax)^2 + (a+x)^2} - \frac{x}{a(x^2+1)}$.

Determină a astfel încât $\lim_{x \rightarrow \infty} (-ax \cdot f(x))^x = e^2$.

57. Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ (D domeniul maxim de definiție), $f(x) = ax + \sqrt{bx^2 + cx + 1}$, $a, b \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$.

Determină a, b, c astfel încât $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 4x) = -2$ și $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$.

58. Fie x, y, z, t numere reale în progresie aritmetică. Știind că $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, demonstrează că numerele $b - a, c - b, d - c$ sunt în progresie aritmetică.

59. Determină $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, știind că $A^2 - 2xA + (x^2 + y^2)I_2 = O_2$.

60. Rezolvă în $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ ecuațiile:

a) $A^{99} + A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 200 & 2 \end{pmatrix}$; b) $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$; c) $A_6 = I_2$.

61. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}^*)$. Determină A și B , știind că $A^{99} + B^{99} = AB = O_2$.

62. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și matricele $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $C = aA + bB$.

a) Determină matricele $A^2 + 6A, B^2 - 6B, AB - BA$.

b) Fie $x \in \mathbb{R}$, $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $X^2 = xX$. Determină matricea $X^n - x^{n-1}X$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Determină matricea C^n , $n \in \mathbb{N}^*$.

63. Calculează A^3 și A^4 , unde $a, b \in \mathbb{R}$, în cazurile:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ b & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -a & 1 & -\frac{1}{2} \cdot a^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

64. Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, unde $A = \begin{pmatrix} 0 & m & 1 \\ m & -2 & 0 \\ 1 & -1 & m \end{pmatrix}$.

a) Determină m , știind că A este inversabilă.

b) Determină A^{-1} pentru $m = 2$.

65. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Demonstrează că $A^2 = 3A$, $A \cdot B = B \cdot A$.

b) Determină A^6 și B^6 .

66. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = m^2 x^3 + mx^2 - x - 3$, $m \in \mathbb{R}^*$.

a) Demonstrează că, pentru orice m , funcția are două puncte de extrem.

b) Reprezintă grafic funcția pentru $m = -\frac{1}{3}$.

67. Fie $a > 0, b > 0, c \in \mathbb{R}$ și funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + \sqrt{bx^2 + cx + 1}$, unde D este domeniul maxim de definiție.

a) Determină a, b, c astfel încât spre $-\infty$ graficul să admită asimptota $y = -1$, iar spre $+\infty$ să admită o asimptotă paralelă cu dreapta $y = 4x - 2$.

b) Reprezintă graficul lui f pentru $a = 2, b = 4, c = 4$.

68. Fie $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^2 = BC, B^2 = CA, C^2 = AB$. Demonstrează că $A^3 = B^3 = C^3$.

69. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Demonstrează că:

a) dacă $\det A \in \{-1; 1\}$, atunci $A^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$;

b) dacă există A^{-1} și $A^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, atunci $\det A \in \{\pm 1\}$.

70. Fie matricea inversabilă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \in \{2, 3\}$. Determină:

a) $(A^*)' - (A')^*$;

b) $(A^*)^*$.

71. Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ astfel încât $A^3 B = I_3 + B$. Demonstrează că matricele B și $A^2 + A + I_3$ sunt inversabile.

72. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ se consideră funcția $f_n: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} ax + e^{nx}, & x \in [-1, 0] \\ x^2 + b, & x \in (0, 1] \end{cases}$.

a) Determină $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcției f_n să i se poată aplica teorema lui Lagrange pe $[-1, 1]$.

b) Determină punctul intermediar $c(n)$ și determină $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $c(n) \in (0, 1)$.

73. Fie funcția $f: (2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{\ln x}$.

a) Studiază monotonia funcției f .

b) Demonstrează că $\ln(e-1)\ln(e+1) < 1$.

c) Demonstrează că $\ln(e^\pi - 1)\ln(e^\pi + 1) < \pi^2$.

74. Determină $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, dacă $A^2 - 2xA + (x^2 + y^2)I_2 = O_2$.

Teste grilă

1. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$, $B = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid (A - I_2)^2 = O_2\}$, $C = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid A^2 = I_2\}$.

Dacă $S = \sum_{(a,b) \in B} (a^2 + b^2)$ și $T = \sum_{(a,b) \in C} (a + b)$, atunci:

- 1) A) $S = 1$; B) $S = 3$; C) $S = 9$; D) $S = 5$; E) $S = 18$.
 2) A) $T = -1$; B) $T = 1$; C) $T = -2$; D) $T = 0$; E) $T = 3$.

Facultatea de Economie Generală 1999

2. Fie A o matrice ale cărei elemente sunt numere naturale și care verifică: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Fie $k \in \mathbb{N}$ numărul tuturor matricelor A cu aceste proprietăți. Atunci:

- A) $k = 4$; B) $k = 2$; C) $k = 8$; D) $k = 6$; E) $k = 0$.

3. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \setminus \{O_2\}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ cu $a + d = 0$. Dacă $M = \{A^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este o mulțime finită, aflați p , numărul maxim de elemente pe care le poate avea M .

- A) $p = 2$; B) $p = 3$; C) $p = 4$; D) $p = 6$; E) $p = 8$.

4. Fie $M = \left\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid X^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ și m numărul elementelor lui M . Atunci:

- A) $M = \emptyset$; B) M este infinită; C) $m = 1$; D) $m = 2$; E) $m = 4$.

5. Fie $M = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \mid \exists n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \text{ cu } A^n = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \right\}$ și fie m numărul elementelor lui M .

- A) $M = \emptyset$; B) $m = 1$; C) $m = 2$; D) $m = 4$; E) $m \geq 5$.

6. Fie $K = \{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \mid X^4 = -4I_2 \}$ și p numărul elementelor lui K . Atunci:

- A) $K = \emptyset$; B) $p = 2$; C) $p = 4$; D) $p = 6$; E) K este infinită.

7. Calculează $\det(A^{-1})$ dacă $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- A) $-\frac{1}{2}$; B) $\frac{1}{2}$; C) 2; D) 1; E) -2; F) A), B), C), D), E) false.

Universitatea Tehnică de Construcții 1999, sesiunea B

8. Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dacă $d = \det(A \cdot B^{-1})$ atunci:

- A) $d = -\frac{1}{4}$; B) $d = -\frac{2}{3}$; C) $d = \frac{3}{2}$; D) $d = -\frac{1}{2}$; E) $d = -\frac{4}{3}$.

Facultatea de Management 2000 (prelucrare)

9. Se consideră ecuația: $\begin{vmatrix} x-p & q & r \\ r & x-p & q \\ q & r & x-p \end{vmatrix} = 0$, $p, q, r \in \mathbb{R}$ cu soluțiile x_1, x_2, x_3 . Dacă soluțiile sunt

reale, fie $S_1 = \sum_{k=1}^3 x_k^2$. Pentru $p = 0$, $q = 4$ și $r = 1$ notăm cu S_2 suma soluțiilor ecuației. Atunci:

- 1) **A)** $S_1 = 3(p^2 + 2q^2)$; **B)** $S_1 = 2p^2 - 2pq + 5q^2$; **C)** $S_1 = 2p^2 + r^2$;
D) $S_1 = p^2 + q^2 + r^2$; **E)** $S_1 = p^2 + q^2 - r^2$.
2) **A)** $S_2 = 0$; **B)** $S_2 = 10$; **C)** $S_2 = 5 + 3\sqrt{3}$; **D)** $S_2 = 5 - \sqrt{3}$; **E)** $S_2 = 4$.

Facultatea de Management 1999

10. Fie $d = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 + b_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 + b_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix}$ și $d_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ cu $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, 2, 3\}$. Atunci:

- A)** $d = d_1$; **B)** $d = 3d_1$; **C)** $d = 2d_1$; **D)** $d = -2d_1$; **E)** $d = 4d_1$.

Universitatea Politehnică București 1985, lot olimpic

11. Fie $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ cu $\varepsilon^3 = 1$. Fie $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ astfel încât $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și λ suma tuturor elementelor lui X . Atunci:

- A)** $\lambda = 0$; **B)** $\lambda = 1$; **C)** $\lambda = 3$; **D)** $\lambda = \varepsilon$; **E)** $\lambda = \varepsilon^2$.

Facultatea de Matematică București 1986 și Facultatea de Management 1998

12. Fie sistemul:
$$\begin{cases} ax + (a+1)y + (a+2)z = a+3 \\ bx + (b+1)y + (b+2)z = b+3, & a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq b. \\ x + cy + c^2z = c^3 \end{cases}$$
 Dacă (x_0, y_0, z_0) este o soluție a sistemului,

și C este mulțimea acelor $c \in \mathbb{R}$ pentru care $x_0 + y_0 + z_0 = 1$, atunci:

- A)** $C = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; **B)** $C = \mathbb{R}$; **C)** $C = \{2\}$; **D)** $C = \{-1\}$; **E)** $C = \emptyset$.

Facultatea de Matematică București 1985 (prelucrare)

13. Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$ și fie sistemul
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x = ax + by + cz \\ \frac{1}{2}y = cx + ay + bz. \\ \frac{1}{2}z = bx + cy + az \end{cases}$$

Notăm $M = \{(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 \mid \text{sistemul admite și alte soluții în afară de soluția nulă}\}$ și fie m numărul elementelor lui M . Avem:

- A)** $M = \emptyset$; **B)** $m = 1$; **C)** $m = 2$; **D)** $m = 6$; **E)** M este infinită.

Universitatea Politehnică București 1987 (prelucrare)

14. Se consideră ecuația matriceală: $X^2 = \begin{pmatrix} 34 & 5 & 18 \\ 6 & 27 & 20 \\ 4 & 12 & 13 \end{pmatrix}$, unde $X = (x_{ij})_{i,j=1,3}$, cu $x_{ij} \in \mathbb{R}$ și $x_{ii} = 0$, pentru

$\forall i = \overline{1,3}$. Dacă $S = \left| \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 x_{ij} \right|$, atunci:

- A)** $S = 18$; **B)** $S = 24$; **C)** $S = 21$; **D)** $S = 16$; **E)** $S = 12$.

Facultatea de Comerț, 2000 (prelucrare)

15. Notăm $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ soluția sistemului $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = n^{i-1}, i = \overline{1, n}, n \in \mathbb{N}^*$, unde $a_{ij} = j^{i-1}, i, j = \overline{1, n}$. Fie $\alpha = \sum_{j=1}^n |\tilde{x}_j|$, $A = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n\}$ și β numărul elementelor distincte din A . Atunci:

- 1) A) $\alpha = 1$; B) $\alpha = 8$; C) $\alpha = 2$; D) $\alpha = n$; E) $\alpha = 11$.
 2) A) $\beta = n$; B) $\beta = 2$; C) $\beta = 4$; D) $\beta = 5$; E) $\beta = 3$.

Facultatea de Relații Economice Internaționale 1999

16. Fie sistemul
$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + (\lambda^2 - \lambda - 1)y + (\lambda + 1)z = 2 \\ 2x + (\lambda^2 - \lambda - 2)y + 2(\lambda + 1)z = 3 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}, \text{ cu } \bar{x}, \bar{y} \text{ și } \bar{z} \text{ soluția sistemului pentru } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

și $S = \bar{x} - \bar{y} + 2\bar{z}$. Se consideră $t_1 = \left(\frac{\bar{x}}{\bar{y}}, \bar{x} - \bar{y}, 1 - \frac{1}{\bar{y}}\right)$; $t_2 = \left(\bar{x}, \frac{\bar{y}}{1 + \bar{z}}, \bar{z} + 1\right)$; $t_3 = (\bar{y} - \bar{x}, \bar{z} - \bar{y}, \bar{x} - \bar{z})$;

$t_4 = \left(\frac{\bar{x}}{\bar{y}}, \frac{\bar{y}}{\bar{z} + 1}, \frac{\bar{z}}{\bar{x}}\right)$, $t_5 = \left(\bar{y}, \frac{\bar{y}}{\bar{z} + 1}, \bar{z} + \bar{x}\right)$. Fie T tripletul ai cărui termeni sunt în progresie aritmetică. Atunci:

- 1) A) $S = -5$; B) $S = 0$; C) $S = 1$; D) $S = 5$; E) $S = 25$.
 2) A) $T = t_1$; B) $T = t_2$; C) $T = t_3$; D) $T = t_4$; E) $T = t_5$.

Facultatea de Economie Generală 1999

17. Se consideră sistemul:
$$\begin{cases} \left(1 + \frac{m}{m^2 - m + 1}\right)x + \left(-1 + \frac{m}{m^2 - m + 1}\right)y + \left(2 + \frac{m}{m^2 - m + 1}\right)z = 0 \\ 3mx + (1 + m)y + 4mz = 1 \\ 2x + (1 - m)y + 3z = 1 \end{cases}, \text{ cu } x, y, z \in \mathbb{R} \text{ și}$$

parametrul $m \in \mathbb{R}$. Fie $\Delta(m)$ determinantul sistemului și $M = \{m \in \mathbb{R} \mid \text{sistemul este incompatibil}\}$,

$S = \sum_{m \in M} m^3$. Atunci:

- 1) A) $\Delta(4) = -21$; B) $\Delta(4) = 18$; C) $\Delta(4) = -19$; D) $\Delta(4) = 20$; E) $\Delta(4) = \frac{23}{2}$.
 2) A) $S = \frac{7}{4}$; B) $S = -\frac{1}{8}$; C) $S = 0$; D) $S = \frac{9}{8}$; E) $S = \frac{13}{8}$.

Facultatea de Economia și Gestiunea Producției Agricole 2000

18. Calculează $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$.

- A) ∞ ; B) 2; C) -4; D) 1; E) 3.

19. Fie funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$. Alege răspunsul corect:

- A) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2}$; B) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{1}{2}$; C) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$; D) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$; E) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$.

20. Dacă $l = \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{3}{1 + x^3} - \frac{1}{1 + x}\right)$ atunci:

- A) $l = 0$; B) $l = 1$; C) $l = \sqrt{2}$; D) $l = \sqrt{3}$; E) $l = \infty$.

21. Dacă $l_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{2x^2 - x + 1})$ și $l_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1})$, atunci:
 A) $l_1 = \infty, l_2 = 1$; B) $l_1 = -\infty, l_2 = -1$; C) $l_1 = -\infty, l_2 = 1$; D) $l_1 = -\infty, l_2 = \infty$; E) $l_1 = \infty, l_2 = -1$.
22. Valorile parametrilor reali α și β astfel încât $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{\alpha x^2 + x} - \sqrt{x^2 + \beta x})$ să fie infinită sunt:
 A) $\alpha \neq 1, \beta \in \mathbb{R}$; B) $\alpha \geq 1, \beta = 0$; C) $\alpha \in (0, 1), \beta = 0$; D) $\alpha \in [0, 1) \cup (1, \infty), \beta \in \mathbb{R}$; E) $\nexists \alpha, \beta$.
23. Dacă $l = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{x-4}$ atunci:
 A) $l = 0$; B) $l = \sqrt{5}-3$; C) $l = \infty$; D) $l = \frac{2}{\sqrt{5}-3}$; E) $l = \frac{4}{\sqrt{5}+3}$.
24. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \dots$
 A) 0; B) 1; C) ∞ ; D) $-\infty$; E) e .
25. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} \right)^{\sqrt{x^2 + 4}}$ este:
 A) e^{-2} ; B) e ; C) 1; D) e^2 ; E) e^{-1} .
26. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 3x)^{\frac{1}{2x}} = \dots$
 A) e ; B) 1; C) e^{-2} ; D) $\frac{3}{2}$; E) $\frac{1}{e}$.
27. Valoarea parametrului a pentru care funcția $f(x) = \begin{cases} \frac{3x - [x]}{x}, & x \geq 2 \\ \{x\} + a, & x < 2 \end{cases}$ are limită în punctul $x = 2$, este:
 A) $a = 2\sqrt{3}$; B) $a = \sqrt{3} - 1$; C) $a = 1$; D) $a = \frac{1}{2}$; E) $a = \frac{1}{3}$.
28. Valorile parametrilor reali a și b astfel încât $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{8x^3 - ax^2} - bx + 2) = 1$ sunt:
 A) $a = 12, b = 2$; B) $a = 10, b = 2$; C) $a = 2, b = 4$; D) $a = 1, b = 2$; E) $a = 8, b = 6$.
29. Fie $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right)$. Care dintre următoarele afirmații este adevărată?
 A) limita nu există; B) limita este -1 ; C) limita este $-\infty$; D) limita este 0; E) limita este $+\infty$.
30. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}, c > 0$ astfel încât $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(ax + b + \sqrt{cx^2 + 4x + 3}) = -\frac{1}{2}$ și $S = a + b + c$.
 A) $S = 5$; B) $S = 4$; C) $S = 3$; D) $S = -2$; E) $S = 7$.
31. Fie $l = \lim_{x \rightarrow a} \left[\ln(\log_a x^e) \right]^{\frac{1}{x-a}}$. Avem:
 A) $l = e^{\frac{1}{\ln a}}$; B) $l = 1$; C) $l = e^{\frac{a}{\ln a}}$; D) $l = 0$; E) $l = +\infty$; F) $l = \frac{1}{e^a}$.

32. Fie $l = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right]$. Avem:

- A) $l = 0$; B) $l = \ln(2 + 2\sqrt{2})$; C) $l = -\frac{1}{2}$; D) $l = 2$; E) $l = -1$; F) $l = \infty$.

33. Dacă $b = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + x + 1} + \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 - x + 2} - 2x \right)$, atunci:

- A) $b = 1$; B) $b = 3$; C) $b = 0$; D) $b = -2$; E) $b = -1$.

Facultatea de Relații Economice Internaționale 2000 (prelucrare)

34. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (a^3 - 3a + 2)x^5 + (a^2 - 1)x^4 + (a^2 + 3a + 2)x^3 - 3x^2 - 2x + 5$, $a \in \mathbb{R}$. Dacă $A = \{a \in \mathbb{R} \mid f \text{ este funcție surjectivă}\}$ atunci:

- A) $A = \emptyset$; B) $A = (-2, +\infty)$; C) $A = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$; D) $A = \mathbb{R}$; E) A), B), C), D) false.

35. Fie $f_r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_r(x) = \begin{cases} 2^{rx} + 1, & x \leq 1 \\ rx + 2, & x > 1 \end{cases}$, $r \in \mathbb{R}$, $A = \{r \in \mathbb{R} \mid f_r \text{ continuă pe } \mathbb{R}\}$ și $S = \sum_{r \in A} r^2$. Atunci:

- A) $S \in (1, 2)$; B) $S = 0$; C) $S = 1$; D) $S = 16$; E) $S \geq 25$.

Facultatea de Contabilitate și Informatică de Gestiune 1999

36. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x - m, & \text{pentru } x \leq 0 \\ nx + m, & \text{pentru } x > 0 \end{cases}$. Care dintre următoarele afirmații este adevărată?

- A) f injectivă $\Leftrightarrow n \cdot m > 0$; B) f injectivă $\Rightarrow n \cdot m < 0$;
 C) f surjectivă $\Leftrightarrow n \cdot m \leq 0$; D) f injectivă și $m \neq 0 \Rightarrow f$ nu este surjectivă;
 E) f bijectivă $\Leftrightarrow f$ continuă.

37. Fie $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1] \\ ax - 1, & x \in (1, 2] \end{cases}$. Decide:

- A) f injectivă $\Leftrightarrow f$ strict monotonă; B) f continuă pe $[0, 2] \Leftrightarrow f$ injectivă;
 C) f injectivă $\Leftrightarrow a \geq 2$; D) $f([0, 2]) = [0, 2] \Rightarrow f$ nu este injectivă;
 E) f injectivă $\Rightarrow f([0, 2])$ este un interval compact.

38. Fie ecuația: $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} + \frac{4}{x-4} + \frac{5}{x-5} = 0$. Atunci:

- A) ecuația nu are nici o soluție reală; B) ecuația are exact 2 soluții reale distincte;
 C) ecuația are exact 3 soluții reale distincte; D) ecuația are 4 soluții reale distincte;
 E) ecuația are o soluție reală.

39. Dacă există f continuă astfel încât $f(f(x)) = f(x) - x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, atunci:

- A) există funcții polinomiale care verifică ipoteza;
 B) f nu este monotonă;
 C) f este surjectivă, dar nu este injectivă;
 D) f nu este surjectivă, dar este injectivă;
 E) A), B), C), D) false.

40. Fie $a, b \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ și $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = a^{b^x} + b^{a^x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Știind că $2 \in f(\mathbb{R})$, care dintre următoarele afirmații este adevărată?

A) f este surjectivă; B) f nu este injectivă; C) $a \cdot b \in (1, +\infty)$; D) $a \cdot b \in (0, 1)$; E) $(a-1)(1-b) > 0$.

41. Fie $I \subset \mathbb{R}$, I interval și $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, f continuă pe I și f neconstantă. Fie $J = f(I)$. Care dintre următoarele afirmații este adevărată?

A) I este interval deschis $\Rightarrow J$ este interval deschis;
 B) I este interval mărginit $\Rightarrow J$ este interval mărginit;
 C) I este interval nemărginit $\Rightarrow J$ este interval nemărginit;
 D) J este interval compact $\Rightarrow I$ este interval compact;
 E) A), B), C), D) false.

42. Determină m real dacă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + mx - 2, & x < 0 \\ n \frac{e^x}{x+1}, & x \geq 0 \end{cases}$, este continuă și derivabilă pe \mathbb{R} .

A) $m = n = e$; B) $m = -2, n = 0$; C) $m = 0, n = -2$; D) $m = -2, n = 3e$;
 E) $m = 1, n = -2$; F) A), B), C), D), E) false.

Universitatea Tehnică de Construcții 2000

43. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \max\{2|x|, |x^2 - 1|\}$. Fie p numărul punctelor în care funcția f nu este derivabilă și $x_i, i = 1, 2, \dots, p$, punctele în care f nu este derivabilă, $S = \sum_{i=1}^p x_i^2$. Atunci:

1) A) $p = 1$; B) $p = 2$; C) $p = 3$; D) $p = 4$; E) $p = 5$.
 2) A) $S = 2\sqrt{2}$; B) $S = 10\sqrt{2}$; C) $S = 12$; D) $S = 16$; E) $S = 20\sqrt{2}$.

Facultatea de Economie Generală 1999

44. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x|x-a| + |x-b|$, care depinde de parametrii reali a și b . f este derivabilă pe \mathbb{R} pentru:

A) $a = 0, b > 0$; B) $a, b \in \mathbb{R}$; C) $a = b = -1$; D) $a = b = 1$; E) nici o pereche $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Facultatea de Matematică București 1972

45. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sqrt{|1-x^2|}$ și $n \in \mathbb{N}$ numărul punctelor de intersecție dintre graficul lui f și dreapta tangentă la graficul lui f dusă prin punctul de abscisă $x = 0$. Atunci:

A) $n = 1$; B) $n = 2$; C) $n = 3$; D) $n = 4$; E) $n \geq 5$.

46. Fie $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x$, $g(x) = -x^2 + 5x + c$, $c \in \mathbb{R}$. Notăm

$C = \{c \in \mathbb{R} \mid \text{graficele funcțiilor } f \text{ și } g \text{ admit o dreaptă tangentă comună}\}$. Atunci:

A) $C = \emptyset$; B) $C = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$; C) $C = [-1, +\infty)$; D) $C = [-1, 1]$; E) $C = \mathbb{R}$.

47. Fie $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$. Dacă $M = \{x_0 \in (0, +\infty) \mid \text{dreapta tangentă la graficul lui } f \text{ în punctul de abscisă } x_0 \text{ trece prin } A(2, 1)\}$, fie $S = \sum_{x_0 \in M} x_0$.

A) $M = \emptyset$; B) $S \in [1, 2)$; C) $S \in (2, 3)$; D) $S \in (3, 4)$; E) $S \in (4, 5)$.

48. Calculează $f''(0)$ pentru $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$.

- A) $\frac{1}{3}$; B) 2; C) $\frac{1}{4}$; D) 0; E) 1; F) $\frac{1}{2}$.

Universitatea Politehnică București 1999

49. Fie $A = \{a \in \mathbb{R} | e^x \geq ax^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}\}$. Decide:

- A) $A = \emptyset$; B) $A = \{-1\}$; C) $A = (-1, 1) \setminus \{0\}$; D) $A = (-\infty, 0)$; E) $A = (-\infty, -1)$; F) $A = \mathbb{R}^*$.

50. Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -e^{x+2} + e^2 + a^2, & x < 0 \\ \ln(x^2 - x + p^2), & x \geq 0 \end{cases}$, unde D (domeniul maxim de definiție) conține pe $[-1, 1]$.

Notăm $M = \{(a, p) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{lui } f \text{ i se poate aplica teorema lui Lagrange pe } [-1, 1]\}$ și $k \in \mathbb{N}$ numărul elementelor mulțimii M .

- A) $k = 1$; B) $k = 2$; C) $k = 4$; D) $k \geq 6$; E) $M = \emptyset$.

51. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f derivabilă pe \mathbb{R} , astfel încât $f'(x) = 2 \cdot f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ și $f(0) = 1$. Atunci $\lambda = f\left(\frac{1}{2}\right)$ este:

- A) $\lambda = 1$; B) $\lambda = \sqrt{e}$; C) $\lambda = e$; D) $\lambda = \frac{1}{e}$; E) f nu este unică cu aceste proprietăți.

52. Fie $n \in \mathbb{N}$ astfel încât există $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - x^n \cdot \ln \frac{1+x}{x}\right) = l \in \mathbb{R}$. Atunci $\lambda = n + l$ este:

- A) 1; B) $\frac{3}{2}$; C) $\frac{5}{2}$; D) 2; E) $\frac{7}{2}$.

53. Fie $f: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} a, & x = 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{\ln(1-x)}, & x \in (0, 1) \end{cases}$. Care dintre următoarele afirmații este adevărată?

- A) Pentru $\forall a \in \mathbb{R}$, f nu este continuă în 0.
 B) Dacă f este continuă în 0, atunci f nu are derivată în 0.
 C) Dacă f este continuă în 0, atunci $\exists f'(0) = \frac{1}{12}$.
 D) Dacă f este continuă în 0, atunci $\exists f'(0) = +\infty$.
 E) A), B), C), D) false.

54. Fie $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. Precizează pe care dintre următoarele intervale funcția este strict descrescătoare.

- A) (e^2, ∞) ; B) $(0, 10)$; C) $(0, e^2)$; D) $(1, e)$; E) $(0, 1)$; F) A), B), C), D), E) false.

Universitatea Tehnică de Construcții București 1999, sesiunea A

55. Fie $f: (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$, $f(x) = ax + b\sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 1}}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Știind că dreapta de ecuație $y = -x + 1$ este

asimptotă oblică spre $-\infty$, determină valoarea lui $\lambda = m + n$, unde $y = mx + n$ este ecuația dreptei asimptotă oblică spre ∞ .

- A) $\lambda = 0$; B) $\lambda = -1$; C) $\lambda = 1$; D) $\lambda = 2$; E) $\lambda = 3$; F) $\lambda = 4$.

56. Determină asimptotele funcției $f: (-\infty, -1) \cup [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{\frac{x}{x+1}}$.

- A) $x = 1, y = x - \frac{1}{2}$; B) $x = -1, y = x$; C) $x = 0, y = x - 2$;
 D) $x = -1, y = x - \frac{1}{2}$; E) $x = -1, y = x + 2$; F) A), B), C), D), E) false.

Universitatea Tehnică de Construcții București, 2000

57. Fie $f: \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{2x+1} \cdot e^{\frac{1}{2x}}$, $k \in \mathbb{N}$ numărul punctelor de extrem local ale lui f și

$y = mx + n$ asimptota la graficul funcției spre $+\infty$. Atunci:

- 1) A) $k = 1$; B) $k = 2$; C) $k = 3$; D) $k = 4$; E) $k = 0$.
 2) A) $m = -\frac{1}{2}, n = 1$; B) $m = 1, n = 0$; C) $m = -1, n = \frac{1}{2}$; D) $m = \frac{1}{2}, n = 0$; E) $m = \frac{1}{2}, n = 1$.

Colegiul Economic 2000 (prelucrare)

58. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $|f(x) - x^3| \leq 2x^2$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$. Atunci:

- 1) A) f nu este continuă în $x = 0$;
 B) f este continuă în $x = 0$, dar f nu este derivabilă în $x = 0$;
 C) Există $f'(0) = 1$;
 D) Există $f'(0) = 0$.
 E) Nu putem decide asupra derivabilității lui f în $x = 0$.
 2) A) f admite asimptotă verticală;
 B) f admite asimptotă orizontală spre $+\infty$ sau spre $-\infty$;
 C) f admite asimptotă oblică spre $+\infty$;
 D) f admite asimptotă oblică spre $-\infty$;
 E) A), B), C), D) false.

59. Fie $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1}, & x \in (0, +\infty) \setminus \{1\} \\ 1, & x = 1 \end{cases}$. Decide:

- A) f nu este continuă;
 B) f este continuă dar nu este derivabilă pe $(0, +\infty)$;
 C) f este derivabilă pe $(0, +\infty)$ dar nu este de două ori derivabilă pe $(0, +\infty)$;
 D) f este concavă pe $(0, +\infty)$;
 E) $x = 1$ este punct de inflexiune;
 F) f este convexă pe $(0, +\infty)$.

60. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$. Fie $A = \text{Im}f$ și n numărul punctelor critice ale funcției f . Atunci:

- 1) A) $A = (0, \infty)$; B) $A = \mathbb{R}$; C) $A = (-\infty, 1)$; D) $A = (-1, 1)$; E) $A = (1, 2)$.
 2) A) $n = 3$; B) $n = 0$; C) $n = 4$; D) $n = 1$; E) $n = 2$.

Colegiul Economic 1999

61. Fie $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + 2\ln|x| + m, & x \in \mathbb{Q} \\ x^2 + x, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$. Fie $k \in \mathbb{N}$ numărul maxim de puncte în care f poate fi continuă.

- A) $k = 1$; B) $k = 2$; C) $k = 3$; D) $k = 4$; E) $k = 5$; F) $k = 6$.

62. Determină $m \in \mathbb{R}$ dacă ecuația $m(x+1) = e^{|x|}$ are exact două soluții reale și distincte.

- A) Nici una dintre celelalte afirmații nu este adevărată;
 B) Nu există un astfel de m ;
 C) $m \in (-\infty, -e^2) \cup (0, 1)$; D) $m \in (-\infty, -e^2] \cup [1, \infty)$;
 E) $m \in (1, \infty)$; F) $m \in (-\infty, -e^2) \cup (1, \infty)$.

Universitatea Politehnică București 2000

63. Fie ecuația $mx^2 - \ln|x| - m = 0$, $m \in \mathbb{R}$ și k numărul maxim de soluții.

Notăm $M = \{m \in \mathbb{R} \mid \text{ecuația are exact } k \text{ soluții}\}$. Atunci:

- 1) A) $k = 2$; B) $k = 3$; C) $k = 4$; D) $k = 6$; E) $k = 8$.
 2) A) $M = \left(0, \frac{1}{2}\right)$; B) $M = (-\infty, 0)$; C) $M = (-1, 1) \setminus \{0\}$; D) $M = (0, +\infty) \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$; E) $M = (0, 1)$.

64. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 12x + m}$, $m \in \mathbb{R}$. Fie $M = \{m \in \mathbb{R} \mid f \text{ nu este derivabilă în } 3 \text{ puncte}\}$. Pentru $m = 16$, fie p numărul punctelor de extrem ale lui f , q numărul punctelor de inflexiune, l numărul asimptotelor la graficul lui f și $n = p + q + l$. Atunci:

- 1) A) $M = \emptyset$; B) $M = (16, +\infty)$; C) $M = (-\infty, -16)$; D) $M = (-16, 16)$; E) $M = \{-16\}$.
 2) A) $n = 4$; B) $n = 3$; C) $n = 2$; D) $n = 5$; E) $n \geq 6$.

65. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$. Atunci:

- A) f nu este derivabilă în 0; B) $\exists f'(0) = 0$; C) $\exists f'(0) = \frac{1}{3}$;
 D) $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ în care f nu are derivată; E) f este derivabilă pe \mathbb{R} .

Universitatea Politehnică București 1989 (prelucrare)

66. Se consideră $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \max_{y \in [0, 2]} (2x - 3y)^2$. Dacă S este suma derivatelor laterale ale lui f în punctul $x_0 = \frac{3}{2}$, atunci:

- A) $S = \frac{1}{3}$; B) $S = -\frac{1}{2}$; C) $S = 0$; D) $S = -1$; E) $S = \frac{3}{2}$.

Facultatea de Economia și Gestiunea Producției Agricole 2000 (prelucrare)

67. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \min\{3x, x^2 - x, x^3 - x\}, & x \leq 0 \\ \max\{-x^2 + e^2 + 1, 2x + 1, e^{2x}\}, & x > 0 \end{cases}$. Fie k numărul punctelor

în care funcția f nu este derivabilă. Atunci:

- A) $k = 1$; B) $k = 2$; C) $k = 3$; D) $k = 4$; E) $k = 5$.

Facultatea de Studii Economice în Limbi Străine 2000 (prelucrare)

68. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \min\{2|x|, \ln^2|x| + 2\ln|x| + 2\}, & x \neq 0 \end{cases}$, $A = \{x_0 \in \mathbb{R} \mid f \text{ nederivabilă în } x_0\}$,

$S = \sum_{x_0 \in A} [|f'_s(x_0)| + |f'_d(x_0)|]$. Atunci:

A) $A = \emptyset$; B) $S = 2$; C) $S = 4$; D) $S = 8$; E) $S = 12$.

69. Fie $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \max\left\{\frac{\sqrt{x}}{x+1}, x^2\right\}$. Decide:

A) f nu este continuă; B) f este derivabilă; C) f admite 2 puncte de inflexiune;
D) f are cel puțin un punct de extrem; E) f este injectivă.

70. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} (2^x + 1)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Fie Ω mulțimea tuturor valorilor lui α pentru care f este

injectivă. Avem:

A) $\Omega = \emptyset$; B) $\Omega = [1, 2]$; C) $\Omega = [2, +\infty)$; D) $\Omega = \mathbb{R}$; E) $\Omega = (-\infty, 0]$; F) $\Omega = (-\infty, 0] \cup [1, 2]$.

71. Fie $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sqrt{\frac{x-1}{|x+1|}}$. Fie n numărul punctelor de extrem ale lui f , p numărul punctelor

de inflexiune ale lui f și q numărul asimptotelor la graficul lui f . Dacă $\lambda = n + p + q$, atunci:

A) $\lambda = 2$; B) $\lambda = 5$; C) $\lambda = 4$; D) $\lambda = 3$; E) $\lambda \geq 6$.

72. Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \cdot e^{\frac{2\ln|x|-1}{2\ln|x|+1}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, unde D este domeniul maxim de definiție. Fie n numărul

asimptotelor la graficul lui f , m numărul punctelor de extrem și l numărul punctelor de inflexiune și fie $k = n + m + l$. Atunci:

A) $k = 4$; B) $k = 3$; C) $k = 5$; D) $k = 2$; E) $k \geq 6$.

73. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x - (a-1)x$, $a \in (0, 1) \cup (1, \infty) = A$. Care dintre următoarele afirmații este adevărată?

A) $\exists a \in A$ pentru care f are un punct minim în $(-\infty, 0)$;

B) $\exists a > 1$ pentru care f admite un punct de maxim;

C) $\exists a \in A$ pentru care f nu are puncte de extrem;

D) $\exists a \in A$ pentru care f admite un punct de minim în $(1, +\infty)$;

E) A), B), C), D) false.

Recapitulare pentru bacalaureat

1. Se consideră funcția

$$f: \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}.$$

- a) Determină asimptotele funcției f .
- b) Determină a și b pentru care $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$.
- c) Calculează $f'(x)$.
- d) Studiază monotonia funcției f .
- e) Calculează $f''(0)$.

2. Se consideră funcția

$$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{\ln x} + \ln(e^x).$$

- a) Calculează $f'(x)$.
- b) Calculează $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.
- c) Calculează $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2}$.
- d) Verifică dacă funcția f este surjectivă.

3. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ -4 & -4 & -4 \end{pmatrix}$ și

$B = I_3 - A$, unde I_3 este matricea unitate de ordinul al 3-lea.

- a) Calculează A^2 și A^3 .
- b) Arată că $B^2 = I_3 - 2A$.
- c) Arată că $B + B^2 - B^3 = I_3$.
- d) Determină inversa matricei B , dacă există.

4. Se consideră sistemul (S):
$$\begin{cases} x + my + z = 1 \\ y - 2z = 3 \\ x - y + mz = 0 \end{cases}, m \in \mathbb{R}.$$

- a) Determină m astfel încât sistemul (S) să fie compatibil determinat.
- b) Rezolvă sistemul (S) pentru $m = 3$.

5. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x - x + 1$.

- a) Calculează $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- b) Află câte puncte de extrem local are funcția f .
- c) Determină asimptota la graficul f către $-\infty$.

d) Calculează $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{f'(x)}$.

6. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ se consideră matricele

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ și } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ precum și submulțimea } G = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid AX = XA\}.$$

a) Verifică dacă $A \in G$ și $I_2 \in G$.
b) Găsește o matrice $T \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea $T \notin G$.

c) Arată că $A^2 = I_2$.

d) Arată că, dacă $a, b \in \mathbb{C}$, atunci matricea

$$B = aI_2 + bA \in G.$$

7. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{3x+2}$.

a) Determină asimptota verticală a graficului funcției f .

b) Determină asimptota la $+\infty$ a graficului funcției f .

c) Verifică dacă există alte drepte ce sunt asimptote pentru f .

d) Arată că $\frac{1}{x+1} - 1 + x - x^2 \leq 0, \forall x \geq 0$.

e) Calculează $\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x)$.

8. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ și

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculează determinantul matricei A .

b) Calculează matricea A^3 .

c) Calculează suma $I_2 + A + \dots + A^{10}$.

d) Găsește $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ pentru care $A \cdot B = I_2$.

e) Calculează determinantul matricei A^3 .

9. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

a) Calculează $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Calculează $(f')'(x)$.

c) Determină intervalele de monotonie ale lui f .

d) Rezolvă ecuația $f(x) = 0$.

e) Determină mulțimea soluțiilor ecuației $f(2x) - f(x) = 0$.

10. Se consideră funcția $g(x) = e^x - \frac{x}{2} - 1, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- Determină $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
- Determină asimptota oblică a funcției g .
- Arată că $g(x) = x \left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{x} \right)$, pentru orice x real nenul. Calculează $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$.
- Determină derivata funcției g pentru orice x real.
- Rezolvă în \mathbb{R} inecuația $e^x - \frac{1}{2} \geq 0$.
- Stabilește semnul derivatei funcției g pentru orice x real.

11. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x - x$.

- Calculează $f'(x), x \in \mathbb{R}$.
- Calculează $f'(0)$.
- Află câte puncte de extrem local are funcția f .
- Verifică dacă f este mărginită.
- Verifică dacă, pe intervalul $(0, \infty)$, funcția f este strict crescătoare sau strict descrescătoare.

12. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x-1}{x^2+1}$.

- Calculează $f'(x)$.
- Determină intervalele de monotonie ale lui f .
- Calculează $f(f(x))$.
- Calculează $f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right)$ pentru $x \neq 0$.
- Calculează $f'\left(\frac{1}{x}\right)$.

13. Fie funcția $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^x + x^3$.

- Calculează $f'(x)$.
- Demonstrează că f este crescătoare.
- Demonstrează $2^x \geq 1 - x^3, \forall x \in \mathbb{R}_+$.
- Calculează $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{3^x}$.

14. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+1}$.

- Calculează $f'(x)$.

b) Calculează $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

- Câte puncte de extrem local are funcția f ?
- Determină asimptotele graficului funcției f .

15. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - x + 1$.

- Calculează $f'(x)$.
- Arată că f este crescătoare pe intervalul $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.
- Arată că $f(x) \geq \frac{3}{4}, \forall x \in \mathbb{R}$.

16. Se consideră funcția $f(x) = \frac{\ln x}{e^x}, f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

- Calculează $f'(x)$.
- Calculează $f''(x)$.
- Determină asimptotele graficului funcției f .
- Calculează $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$.

17. Se consideră funcția $f: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{4x}{(x-1)^2(x+1)^2}.$$

a) Calculează $f(x) - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}$.

b) Calculează $f'(x)$.

c) Calculează $f(2) + f(3) + \dots + f(100)$.

d) Determină ecuația asimptotei către ∞ la graficul funcției f .

18. Se consideră funcția

$$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}.$$

a) Verifică dacă $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}, \forall x \in (0, \infty)$.

b) Calculează $f'(x), x \in (0, \infty)$.

c) Determină ecuația asimptotei către ∞ și ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f .

19. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x - x$.

a) Calculează $f'(x)$.

b) Calculează $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$.

c) Câte puncte de extrem local are funcția f ?

20. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$.

a) Calculează $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Calculează $f(1) \cdot f(-1) \cdot f'(1) \cdot f'(-1)$.

c) Arată că $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

d) Arată că, dacă $x, y \in \mathbb{R}$ și $f(x) + f(y) = 1$, atunci $x = y = 1$.

21. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{3x} - 2$.

a) Calculează $f'(x)$.

b) Calculează $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

c) Rezolvă ecuația $f(y) = f(2y)$, $y \in \mathbb{R}$.

d) Rezolvă ecuația $f'(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

22. Se consideră funcția

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}.$$

a) Verifică dacă $f(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x+1)^2+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Calculează $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Determină ecuația asimptotei către ∞ la graficul funcției f .

d) Determină mulțimea A pentru care

$$f: \mathbb{R} \rightarrow A, f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} \text{ este surjectivă.}$$

23. Se consideră funcția

$$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3x + 2\ln x.$$

a) Calculează $f'(x)$.

b) Calculează $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.

c) Câte asimptote verticale are graficul funcției f ?

24. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2x^2+3}$.

a) Calculează $f'(x)$.

b) Calculează $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

c) Arată că dreapta $y = \sqrt{2} \cdot x$ este asimptotă oblică către $+\infty$ la graficul lui f .

d) Rezolvă pe \mathbb{R} ecuația $f(x) + f(2x) = f(3x) + f(4x)$.

25. Se consideră funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

a) Calculează $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}^*$.

b) Calculează $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

c) Câte asimptote verticale are graficul funcției f ?

d) Calculează $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.

26. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln x$.

a) Calculează $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

b) Calculează $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

c) Câte asimptote verticale are graficul funcției f ?

d) Calculează $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.

27. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^4}{x^2+1}$.

a) Verifică dacă $f(x) = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Calculează $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x^2)$.

c) Calculează $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

d) Arată că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$ și strict crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

e) Arată că funcția f nu admite asimptotă către ∞ .

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

Pag. 8. 9. a) $\frac{n(n+1)}{2}$; b) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; c) $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$. **10.** a) $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

11.
$$\begin{pmatrix} n & \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ -n & 2n & 3n & \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \end{pmatrix}$$
 12.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3p \\ 3p & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 pentru $n = 3p$;
$$\begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon^2 & 3p+1 \\ 3p+1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

pentru $n = 3p+1$;
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3p+2 \\ 3p+2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
 pentru $n = 3p + 2$.

Pag. 14-15. 4. $X = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. **5.**
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
. **6.** $C(x) = \begin{pmatrix} 2-x & 2-2x \\ x-1 & 2x-1 \end{pmatrix}, \forall x \in \mathbb{R}^*$.

9. $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; rezultă $c = 0, d = a$. Considerăm $Y = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ și se ajunge la un sistem incompatibil.

12. $A^{n+1} = A \cdot A^n = A^n \cdot A$, obținem $bc_n = cb_n, ab_n + bd_n = ba_n + db_n$ și $ca_n + dc_n = ac_n + cd_n$.

13. a) $A^2 = 1 \cdot A + 2 \cdot I_3; A^3 = 3 \cdot A + 2 \cdot I_3; A^4 = 5 \cdot A + 6 \cdot I_3; A^5 = 11 \cdot A + 10 \cdot I_3; \dots$ b) $a_n = \frac{(-1)^n}{3} + \frac{2^{n+1}}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

$b_n = \frac{2}{3}(-1)^{n-1} + \frac{2^{n+1}}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. **15.** $A = I_3 + B$, cu $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B^k = O_3, \forall k \geq 3$, deci $A^k = I_3 + K \cdot B + \frac{k(k-1)}{2} B^2$;

$$\sum_{k=1}^n A^k = \begin{pmatrix} n & n(n+1) & \frac{n(n+1)(1+8n)}{6} \\ 0 & n & 2n(n+1) \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}$$
. **17.** $2(z - y) = t + y - x - z$.

Pag. 22-23. 1. c) (1, 1). **2.** c) (1, 3). **4.** a) Dacă $a = \frac{1}{2}$, sistem compatibil nedeterminat; dacă $a \neq \frac{1}{2}$, sistem compatibil determinat, $(x, y) = (2, 0)$; c) Dacă $m = -1$, sistem incompatibil; dacă $m \neq -1$, sistem compatibil

determinat, $(x, y) = \left(\frac{7}{m+1}, \frac{6m-1}{m+1}\right)$; d) $(x, y) = \left(\frac{8+6n}{n^2+4}, \frac{4n-12}{n^2+4}\right)$. **5.** Punem condiția ca determinantul matricei

sistemului să fie 0; $a = -4$. **6.** Dacă $n = -\frac{1}{2}, m \neq 4$, sistem incompatibil; dacă $n = -\frac{1}{2}, m = 4$, sistem compatibil

nedeterminat; dacă $n \neq -\frac{1}{2}$, sistem compatibil determinat, $(x, y) = \left(\frac{2+mn}{2n+1}, \frac{4-m}{2n+1}\right)$. **7.** a) $m \neq 5 (\Delta \neq 0)$,

$S = \left\{ \left(\frac{10-mp}{5-m}, \frac{5p-10}{5-m}\right) \mid m, p \in \mathbb{R}, m \neq 5 \right\}$; b) $m = 5$ și $p = 2 (\Delta = 0, \Delta_x = 0, \Delta_y = 0)$, $S = \{(x, 2-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$; c) $m = 5$ și

$p \neq 2 (\Delta = 0, \Delta_x \neq 0, \Delta_y \neq 0)$, $S = \emptyset$. **8.** a) Dacă $a = 0$, sistem compatibil nedeterminat; dacă $a \neq 0$, sistem compatibil determinat; b) Dacă $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, sistem compatibil determinat, $(x, y) = (0, 1)$; dacă $\lambda = -1$, sistem compatibil nedeterminat; dacă $\lambda = 1$, sistem compatibil nedeterminat. **10.** c) (1, 1, 1). **11.** c) (1, 2, 3).

Pag. 28. 2. a) $(a - c)(b - c)(b - a)$; b) $4(a - b)(b - c)(a - c)$; c) $2(x - y)(y - z)(x - z)$;
d) $(c - a)(c - b)(b - a)(a + b + c)$. **3.** $3\omega(\omega - 1)$.

4. b) Obținem ecuația $x^2(a^2 + b^2 + c^2 - x) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = a^2 + b^2 + c^2$.

pag 34. 2. $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $A^{-1} = \frac{1}{a+2} \begin{pmatrix} 2 & -a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, $B^{-1} = \frac{1}{1+2a} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 3-2a & 4 & -6 \\ 1 & -1 & 2+a \end{pmatrix}$;

c) $a \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$. **3. a)** $X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$; c) $X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 8 & 2 & -9 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$; e) $X = \begin{pmatrix} -23 & 34 \\ 39 & -57 \end{pmatrix}$. **4. a)** $\det A = 0$; b) $A^2 = O_3$.

Pag. 40-41. 1. a) $(3, 0, -1)$; b) $(3, 0, -1)$; c) $\{(-3\alpha - 7, -2\alpha - 2, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$; d) $(-1, 3, -2)$.

2. a) $(2, -5, 4)$; b) $(-3, 5, 2)$; c) $(4, -6, 8)$; d) $(3, 2, 0, 0)$. **3. a)** $(1, 2, 3)$; b) $(1, 2, 1)$; c) $(3, 1, 1)$; d) $(3, 2, 1)$;

e) $\left(\frac{9+4a}{11}, \frac{19a-4}{11}, a\right)$, $a \in \mathbb{R}$; f) sistem incompatibil; g) $(0, 1, 1)$; h) $(1, 2, 3)$. **5. a)** $\Delta = 2(m + 1)$; dacă $m \neq -1$,

atunci $x = 1$, $y = \frac{1}{2}(m + 1)$ (sistem compatibil determinat); dacă $m = -1$, atunci $x = 1 - 2y$, $y \in \mathbb{R}$ (sistem

compatibil nedeterminat); b) $\Delta = m^2 - 36$; dacă $m \neq \pm 6$, atunci $x = \frac{9m-4}{m^2-36}$; $y = \frac{m-81}{m^2-36}$; dacă $m = 6$ sau $m = -6$, atunci sistemul este incompatibil; c) $\Delta = 1 - m^3$; dacă $m \neq 1$, atunci $x = m^2$, $y = 0$; dacă $m = 1$, atunci sistemul este compatibil nedeterminat, $x = \lambda$, $y = 1 - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$; d) dacă $m \neq -1$, $x = 1$, $y = m$; dacă $m = -1$,

$x = \lambda$, $y = -\lambda$. **6. a)** $m = \frac{23}{11}$; b) $m = 0$ și $S = \{(1, -2)\}$; c) $m = 2$ și $S = \{(4, -1)\}$ sau $m = -9$ și $S = \left\{\left(-7, \frac{8}{3}\right)\right\}$.

7. a) $S = \left\{\left(-\frac{23+13\alpha}{7}, -\frac{12+\alpha}{7}, \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$, sistem compatibil nedeterminat; b) $S = \emptyset$, sistem incompatibil;

c) $S = \{(\alpha + 2, 2\alpha + 1, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$; d) $S = \emptyset$; e) sistem incompatibil; f) sistem incompatibil. **8. a)** Dacă $m \neq -1$, atunci $x = (m + 1)k$, $y = (1 - m^2)k$, $z = -(m + 1)k$, k arbitrar; dacă $m = -1$, atunci $x = y + z$, cu y, z arbitrare;

b) Dacă $m \neq \frac{2}{3}$, $p \neq 6$, atunci $x = (p - 6)k$, $y = (3m - 2)k$, $z = (mp - 4)k$; dacă $m = \frac{2}{3}$, $p \neq 6$, atunci $x = (p - 6)k$,

$y = 0$, $z = \left(\frac{2p}{3} - 4\right)k$; dacă $m \neq \frac{2}{3}$, $p = 6$, atunci $x = 0$, $y = (3m - 2)k$, $z = 2(3m - 2)k$; dacă $m = \frac{2}{3}$, $p = 6$, atunci

$2x + 6y - 3z = 0$; $z = 2$; $\left(y = \frac{x}{3}\right)$, y și z arbitrare; c) $x = 13k$, $y = 2k$, $z = 7k$, $k \in \mathbb{R}$. **9. a)** $m = 1$, $m = -2$;

b) $m = -\frac{1}{2}$, $m = 1$.

Pag. 49-50. 3. a) $0 < |a - b| < \frac{1}{2}$; b) $|a - b| > \frac{1}{2}$. **5. a)** $n \in \{1, 2, 3, 4\}$; b) $n \geq 6$; c) $n \geq 10$; d) $n \geq 5$.

6. Deoarece membrii egalităților sunt expresii simetrice în a, b , respectiv a, b, c pentru a treia egalitate, este suficientă considerarea cazului $a \leq b$, respectiv $a \leq b \leq c$ pentru a treia egalitate. **7.** Inegalitatea este

echivalentă cu $|nx - m| < 1$. Pentru $x = 0$ putem alege $m = 0 \in \mathbb{Z}$. În general se poate alege $m = [nx] \in \mathbb{Z}$. **8.** Infimumul

este: a) -2 ; b) -1 ; c) -3 ; d) 0 ; e) $\frac{1}{2}$. Supremumul este: a) 1 ; b) 3 ; c) 100 ; d) 1 ; e) 1 . Pentru minimum: a) nu

există; b) -1 ; c) -3 ; d) 0 ; e) $\frac{1}{2}$. Pentru maximum: a) 1 ; b) 3 ; c) nu există; d) nu există; e) nu există. **9. a)**, b), d).

10. Infimumul calculat în \mathbb{R} ; a) nu există; b) $\sqrt{2}$; c) nu există; e) nu există; f) nu există; g) 0; h) nu există.
 Supremumul calculat în \mathbb{R} : a) nu există; b) nu există; c) 0; d) 0; e) -1; f) -1; g) nu există; h) nu există.
 Minimum: a) nu există; b) $\sqrt{2}$; c) nu există; d) nu există; e) nu există; f) nu există; g) nu există; h) nu există.
 Maximum: a) nu există; b) nu există; c) 0; d) nu există; e) -1; f) -1; g) nu există; h) nu există.

11. a) $A' = \{0\}$, $A \setminus A' = A$; b) $A' = \mathbb{R}$, $A \setminus A' = \emptyset$; c) $A' = (-\infty, -3] \cup [5, +\infty)$, $A \setminus A' = \emptyset$; d) $A' = \emptyset$, $A \setminus A' = \mathbb{Z}$;
 e) $A' = \emptyset$, $A \setminus A' = \mathbb{N}$; f) $A' = \mathbb{R}$, $A \setminus A' = \emptyset$; g) $A' = \mathbb{R}$, $A \setminus A' = \emptyset$; h) $A' = (-\infty, -3]$, $A \setminus A' = \{1\}$.

pag. 62. 3. i) $f(\sqrt{2}-0) = -\infty$, $f(\sqrt{2}+0) = +\infty$; ii) Nu există. **4.** $\exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$. **5.** $a = 1$. **6.** i) $h(1-0) = 3$, $h(1+0) = 1$; ii) Nu există. **7.** Nu există. **8.** $a = \frac{3}{2}$.

pag. 68-69. 1. $f(1-0) = 1$, $f(1+0) = 2$. **2.** a) 0; c) 24; e) -1; g) $-\infty$; i) $+\infty$. **3.** $f(2-0) = f(2+0) = 0$.
9. $p + q = -1$, $p = -\frac{3}{2}$, $q = \frac{1}{2}$. **10.** $a = 0$. **11.** a) $-\infty$; b) $-\infty$; c) $-\frac{3}{2}$.

pag. 75. 1. 0. **2.** $+\infty$. **3.** 2. **4.** 0. **5.** 0. **6.** $\frac{13}{7}$. **7.** 0. **8.** $+\infty$. **9.** $-\infty$. **10.** -1. **11.** -1; **12.** $3a^2$. **13.** $\frac{1}{2\sqrt{a}}$. **14.** $\frac{1}{9}$.
15. 2. **16.** -2. **17.** 0. **18.** $-\frac{1}{2}$. **19.** $-\frac{1}{4}$. **20.** 1. **21.** $\frac{1}{3\sqrt{x^2}}$. **22.** 1. **23.** $\alpha = \frac{1}{4}$. **24.** i) a ; ii) a ; iii) $f(1-0) = -\infty$; $f(1+0) = +\infty$.

25. 0, dacă $\alpha < \frac{1}{2}$; 1, dacă $\alpha = \frac{1}{2}$ și $+\infty$, dacă $\alpha > \frac{1}{2}$. **26.** i) $a = 1$, $b = -1$; ii) $a = 1$, $b = -\frac{5}{2}$; iii) $a = 8$, $b = -4$.

27. $a \in \left(\frac{1}{12}, +\infty\right)$, $+\infty$ dacă $a \in \left[\frac{1}{12}, 1\right)$, $\frac{1}{2}$ dacă $a = 1$ și $-\infty$ dacă $a \in (1, +\infty)$. **28.** $\frac{4}{3}$.

Pag. 86. 1. a) $x_0 = 1$ punct de discontinuitate; c) e ; e^2 ; e^3 puncte de discontinuitate. **2.** f este continuă în $x = 0$ dacă și numai dacă $a = -2$. **3.** $\alpha = -1$. **4.** $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$. **5.** b) $f \circ g$ continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, $x_0 = 1$ punct de discontinuitate;

$g \circ f$ continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x_0 = 0$ punct de discontinuitate; c) $f \circ g$ continuă pe $(0, 1) \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, $x_0 = \frac{1}{2}$ punct de discontinuitate; $g \circ f$ continuă pe $(0, 1)$. **6.** a) $x_0 = n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, sunt puncte de discontinuitate;

b) $g(x) = |n - x|$, $\forall x \in \left[n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. **7.** Avem: $f(x) \leq \log_2 x < f(x) + 1$, $\forall x > 0$, de unde $f(x) = [\log_2 x]$, $\forall x > 0$. Rezultă că f este continuă în $x_0 \Leftrightarrow \log_2 x_0 \notin \mathbb{Z} \Leftrightarrow x_0 \neq 2^p$, $p \in \mathbb{Z}$.

Pag. 90. 1. a) $x \geq -1$. **2.** a) Contrazice proprietatea Darboux; b) Contrazice definiția de funcție strict crescătoare.

4. f mărginită $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} g(f(x) - x) = -\infty$ și $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \infty$. **5.** $g: \left[0, \frac{b-a}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(a+x) - f(c+x)$ ia valori de semne contrare în capete. **6.** $f(x) = f(y) \Rightarrow f(f(x)) = f(f(y)) \Rightarrow x = y \Rightarrow f$ injectivă $\Rightarrow f$ strict monotonă $\Rightarrow f \circ f$ strict crescătoare, contradicție. **10.** f injectivă $\Rightarrow f$ strict monotonă $\Rightarrow \lim_{x \searrow a} f(x) \neq \lim_{x \nearrow b} f(x)$.

Pag. 96. 1. a) $\Delta x = 1$; $\Delta f = 3$; b) $\Delta x = 0,1$; $\Delta f = 0,21$. **2.** a) $\Delta y = 0,1$; b) -3. **3.** a) $\Delta y = a \cdot \Delta x$; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$;

b) $\Delta y = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$. **4.** 15. **5.** a) $-\frac{1}{6}$; b) $-\frac{5}{21}$. **7.** a) $f'(8) = \frac{1}{12}$. **8.** $f'(0) = 1$, $f'(1) = 0$.

9. $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 50!$. 10. c) $-\frac{1}{x_0^2}$. 11. $f'(0) = +\infty$. 12. a) nu e derivabilă nici în x_0 , nici în x_1 ; b) nu este derivabilă în $x_0 = e$; e) nu este derivabilă în $x_0 = 3$; i) este derivabilă în $x_0 = 0$ și $f'(0) = 0$. 13. a) continuă și nedeterminată în $x = 0$; c) continuă și nederivabilă și nederivabilă.

Pag. 102. 1. a) $f'_d(-2) = +\infty$; $f'_s(-2)$ nu are sens; b) $f'_s(0) = -1$; $f'_d(0) = 1$; c) $f'_s(0) = 2$; $f'_d(0) = 3$; d) $f'_s(0) = 2$; $f'_d(0) = 0$. 4. a) $b = 1$; b) $a = 1$; c) $a = 1$. 5. b) $f'_s(0) = -\infty$; $f'_d(0) = +\infty$; c) $f'_s(0) = 0$; $f'_d(0) = 2$. 6. $f'_d(0) = \infty$, \mathcal{G}_f are semitangenta la dreapta în M de ecuație $x = 0$, $y \geq 0$. 7. \mathcal{G}_f are semitangenta la stânga în M de ecuație $y = x$; $x \leq 0$, iar la dreapta semitangenta de ecuație $x = 0$; $y \geq 0$. 8. la stânga $y = 1$, $x \leq 0$, iar la dreapta $y = x + 1$; $x \geq 0$. 9. a) tangenta de ecuație $y = 6x - 5$; b) semitangenta de ecuație $x = 3$; $y \geq 0$. 11. a) $f'_s(-1) = -2$; $f'_d(-1) = 2$; $f'_s(1) = -2$; $f'_d(1) = 2$. b) $f'_s(0) = \infty$; $f'_d(0) = -\infty$. c) $f'_s(0) = +\infty$; $f'_d(0) = +\infty$; d) $f'_s(0) = -\infty$; $f'_d(0) = 1$.

Pag. 107-109. 1. a) $4x^3 - 6x + 2$; b) $3x^2 + 2x + 1$; e) $\frac{1-x}{e^x}$; f) $\ln x + 1$; h) $\frac{-\ln a}{x^2}$; j) $2^x + x \cdot 2^x \cdot \ln 2$; k) $3^x \cdot \ln 3 + 6^x + x \cdot 6^x \cdot \ln 6 + 2^x \ln 2$; l) $2x$; m) $2y$; n) 0 . 2. a) $f'(x) = 140 \cdot (2x + 3)^{69}$; b) $f'(x) = 31 \cdot (ax^2 + bx + c) \cdot (2ax + b)$; c) $f'(x) = 7 \cdot (x^3 - x)^6 \cdot (3x^2 - 1)$; d) $f'(x) = \frac{2x-1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2-x)^2}}$; e) $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; f) $f'(x) = \frac{e^x + x \cdot e^x + 1}{2\sqrt{x \cdot e^x + x}}$; g) $f'(x) = 2x \cdot e^{x^2}$; h) $f'(x) = -14x \cdot e^{-x^2}$. 3. d) $y' = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$; h) $y' = \frac{2x^3}{1-x^4}$. 4. a) $f''(x) = 6x$; c) $f''(x) = 3^x \ln^2 3 + 2$. 5. b) $f''(x) = \frac{6x^4 + 4x^2 - 2}{(x^2 + 1)^2}$; d) $f''(x) = \frac{-2x^2 + 6}{(x^2 + 3)^2}$. 6. $f''(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$. 7. $f''(x) = 3^x \ln^2 3$. 9. $u^v = e^{\ln u^v} = e^{v \ln u}$. 11. $S = (1 + x + x^2 + \dots + x^n)' = \frac{n \cdot x^{n+1} - (n+1) \cdot x^n + 1}{(x-1)^2}$.

12. $f'_s(0) = -1 = f'_d(0) = f'(0)$; $f'(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ -e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$.

13. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x} \left[\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right] = \frac{1}{x_0} [f'(x_0) - f(x_0)]$.

14. a) Fie $x_0 \in I$ și $h \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $x_0 + h \in I$; $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$. Deci $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \geq 0$;

b) Se demonstrează analog. 15. $f'(x) = \frac{1}{e^x + 1} \left(1 + \frac{\frac{1}{e^x}}{x \left(1 + e^x \right)} \right)$. 16. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x, & x \in [0, 1] \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$; f este derivabilă,

deci și continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ca restricție de funcții elementare. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 = f(0)$, deci f este continuă

în $x = 0$; $\lim_{x \rightarrow 1} x = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1 = f(1)$, deci f este continuă în $x = 1$, f este continuă pe \mathbb{R} . $f'_s(0) = 0$, $f'_d(0) = 1$;

$f'_s(1) = 1$, $f'_d(1) = 2$, deci f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. 17. a) $f(-x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ și derivând obținem $-f'(-x) = f'(x) \Leftrightarrow f'(-x) = -f'(x)$ deci f' impară; b) $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in I$ și derivând obținem:

$$-f'(-x) = -f'(x) \Leftrightarrow f'(-x) = f'(x), \text{ deci } f' \text{ pară. } \mathbf{18. a) } y' = -\frac{x+1}{x(x+\ln x)^2}; x = \frac{1}{y} - \ln x. \text{ b) } y' = e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2).$$

$$\text{c) } y' = e^{-x}(1-x). \mathbf{19.} f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n); f'(x) = [(x-x_2)\dots(x-x_n) + (x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n) + \dots + (x-x_1)\dots(x-x_{n-1})];$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \dots + \frac{1}{x-x_n}, \forall x \in \mathbb{R} - \{x_1, x_2, \dots, x_n\}. \text{ Derivând această ultimă egalitate obținem:}$$

$$\frac{f''(x) \cdot f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} = -\frac{1}{(x-x_1)^2} - \frac{1}{(x-x_2)^2} - \dots - \frac{1}{(x-x_n)^2} < 0; \text{ deci } f''(x)f(x) < (f'(x))^2,$$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ rădăcinile lui f fiind simple, rezultă imediat că inegalitatea se verifică și că x_1, \dots, x_n .

20. a) Ecuația mișcării primului mobil este $x_1(t) = 5t + t^2$. **b)** Ecuația mișcării celui de-al doilea mobil este

$$x_2(t) = 20t; \text{ din } 5t + t^2 = 20(t - \delta) \text{ rezultă } \delta = \frac{45}{16}s. \mathbf{21. a) } x_1(t) = x_2(t), \text{ rezultă } t_1 = 1, t_2 = 2; \text{ b) } v_1(t) = x_1'(t) = 10t + 2;$$

$$v_2(t) = x_2'(t) = 3t^2 + 4t + 4; a_1(t) = v_1'(t) = 10; a_2(t) = v_2'(t) = 6t + 4.$$

Pag. 116-117. 1. a) $c = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$; **b)** Nu, deoarece f nu e derivabilă în 0. **2.** Considerăm funcția $g : [1, e^2] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{a_0}{1} \cdot \ln x + \frac{a_1}{2} \cdot \ln^2 x + \dots + \frac{a_n}{n+1} \cdot \ln^{n+1} x \text{ ce este derivabilă, deci continuă și } g(1) = g(e^2) = 0. \text{ Aplicând teorema}$$

lui Rolle rezultă concluzia. **3.** Considerăm funcția $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) \cdot e^{\lambda x}$ care este derivabilă, deci continuă și $f(x_1) = f(x_2) = 0 \Leftrightarrow g(x_1) = g(x_2) = 0$. Aplicăm teorema lui Rolle și obținem c între x_1 și x_2 astfel

$$\text{încât } g'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) + \lambda f(c) = 0. \mathbf{6. a) } \exists c_n \in (n, n+1) \text{ astfel încât } \ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{c_n}, n < c_n < n+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{c_n} < \frac{1}{n}, \text{ de unde rezultă inegalitățile date; b) } 0 < x_n < 1; (x_n)_n \text{ strict descrescător; c) } c = \ln 2.$$

7. a) Aplicând teorema lui Lagrange funcției $f : [n, n+1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\ln x)$ rezultă că există $c_n \in (n, n+1)$

$$\text{astfel încât } \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)) = \frac{1}{c_n \cdot \ln c_n}; n < c_n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{c_n \cdot \ln(c_n)} < \frac{1}{n \cdot \ln(n)} \text{ de unde rezultă inegalitatea;}$$

$$\text{b) } \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \cdot \ln k} > \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 3), \text{ deci } I = +\infty. \mathbf{7. a) } 0; \text{ b) } f \text{ continuă pe } [c, d] \text{ și derivabilă pe } (c, d) \text{ ca}$$

restricție de funcție elementară; c) $f'(x_k) = f(k+2) - f(k+1)$, deoarece $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. **8.** f continuă pe \mathbb{R}^* ca

restricție de funcții elementare $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = 1$. Pentru $b = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, deci f este continuă în $x = 0$.

$$f'_s(0) = -1, f'_d(0) = a. \text{ Pentru } a = -1, f \text{ este derivabilă. Deci } a = -1, b = 1. \mathbf{9.} f(x) = e^x - 1 - \ln(1+x),$$

$$f : (-1, 0) \cup (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}. f'(x) = \frac{e^x(x+1) - 1}{x+1}. \text{ Definim funcțiile } g(x) = e^x(x+1) - 1, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$g'(x) = e^x(x+2) > 0, x \in (-1, +\infty)$, deci g este strict crescătoare pe $(-1, \infty)$ și $g(x) < 0, \forall x \in (-1, 0)$ și $g(x) > 0, \forall x \in (0, +\infty)$. Deci f este strict descrescătoare pe $(-1, 0)$ și strict crescătoare pe $(0, +\infty)$. Cum $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

rezultă că $f(x) > 0, \forall x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$. **10. a)** Definim funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x - 1$ ce este derivabilă și $f'(x) = e^x - 1; f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Deci $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$; **b)** Fie $a_1, a_2, \dots, a_n \in (0, +\infty)$ și

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \text{ și } G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}. \text{ Luăm } x = \frac{a_i}{A} - 1, 1 \leq i \leq n \text{ și obținem: } e^{\frac{a_i}{A} - 1} \geq \frac{a_i}{A} > 0, 1 \leq i \leq n.$$

Înmulțind cele n inegalități obținem: $e^0 \geq \frac{G^n}{A^n} \Leftrightarrow G \leq A$. **11.** a) Definim $f, g : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(1+x)$

și $g(x) = \ln(1+x) - x$. Avem f și g derivabile, $f'(x) = \frac{-x}{(x+1)^2}$, $g'(x) = \frac{-x}{x+1}$; $f(x) < 0, \forall x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$,

$g(x) < 0, \forall x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$. **12.** a) $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$; b) $n < n+1 \Rightarrow f(n) > f(n+1) \Rightarrow \frac{\ln n}{n} > \frac{\ln(n+1)}{n+1}$,

echivalentă cu inegalitatea dată. **16.** Definim funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x} - 2$; f este derivabilă.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}; \left. \begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ x > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 1, \text{ rezultă } f(x) \geq 0, \forall x > 0.$$

17. a) strict crescătoare pe $(-\infty, -2)$ și strict descrescătoare pe $(-2, +\infty)$; b) strict descrescătoare pe $(-\infty, 2)$ și strict crescătoare pe $(2, +\infty)$; c) strict crescătoare pe \mathbb{R} ; d) strict descrescătoare pe $(-\infty, 2)$ și pe $(2, +\infty)$; e) strict crescătoare pe $(-\infty, 1)$ și strict descrescătoare pe $(1, +\infty)$. **18.** $a = -1$.

Pag. 125-126. 1. a) f este strict crescătoare pe \mathbb{R} ; b) f este strict descrescătoare pe \mathbb{R} ; c) f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și strict crescătoare pe $[0, +\infty)$; d) f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și strict

crescătoare pe $[0, +\infty)$; e) f este strict crescătoare pe \mathbb{R} ; f) f este strict descrescătoare pe $(-\infty, \frac{3}{4}]$ și strict

crescătoare pe $[\frac{3}{4}, +\infty)$; g) f este strict crescătoare pe $(-\infty, 1]$ și strict descrescătoare pe $[1, +\infty)$; h) f este

strict crescătoare pe \mathbb{R} ; i) f este strict crescătoare pe intervalele $(-\infty, -1]$ și $[1, +\infty)$, iar pe $(-1, 1]$ este strict descrescătoare. **2.** a) f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 3]$ și strict crescătoare pe $(3, +\infty)$, $x = 3$ este punct de

minim; b) f este strict crescătoare pe $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}]$ și $[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$, iar pe $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$ este strict descrescătoare,

$x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ este punct de minim, $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ este punct de maxim. c) f este strict crescătoare pe $(-\infty, 6]$ și strict

descrescătoare pe $[6, +\infty)$, $x = 6$ este punct de maxim; d) f este strict crescătoare pe intervalele $(-\infty, -1]$ și

$(-1, +\infty)$; e) f este strict descrescătoare pe intervalele $(-\infty, -\frac{4}{3}]$ și $(-\frac{4}{3}, +\infty)$. **3.** a) f este strict descrescătoare

pe intervalele $(-\infty, 2)$ și $(2, +\infty)$; b) f este strict descrescătoare pe intervalele $(-\infty, -1]$ și $(1, +\infty)$, iar pe $(-1, 1)$ este strict crescătoare. **4.** f este strict descrescătoare pe $(0, 1]$ și strict crescătoare pe $[1, +\infty)$.

5. a) f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și strict crescătoare pe $[0, +\infty)$; c) f este strict crescătoare pe $[-2, 0]$ și strict descrescătoare pe $[0, 2]$; f) f este strict descrescătoare pe intervalele $(-\infty, -1]$ și $[1, \infty)$, iar pe

$[-1, 1]$ este strict crescătoare; i) f este strict descrescătoare pe intervalele $(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$ și $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}]$, iar pe

intervalele $[\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ și $(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$ este strict crescătoare; l) f este strict crescătoare pe $(0, e^2)$ și strict

descrescătoare pe $(e^2, +\infty)$; o) f este strict crescătoare pe intervalele $(-\infty, -\sqrt{2}]$ și $(0, \sqrt{2}]$, iar pe intervalele

$(-\sqrt{2}, 0]$ și $(-\sqrt{2}, \infty]$ este strict descrescătoare; r) f este strict descrescătoare pe $[-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}]$ și strict

crescătoare pe $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1)$; s) f este strict descrescătoare pe $[-\frac{1}{e}, 0]$ și strict crescătoare pe $(-\infty, -\frac{1}{e}]$; t) f este

strict descrescătoare pe intervalele $(0, 1)$ și $(1, e]$ iar pe $(e, +\infty)$ este strict crescătoare; u) f este strict

descrescătoare pe $(-\infty, -3]$ și strict crescătoare pe $(-3, +\infty)$. **6.** a) f este strict crescătoare pe $(-\infty, \frac{7}{2}]$ și strict descrescătoare pe $[\frac{7}{2}, +\infty)$; b) $f(2) < f(3)$ implică $A < B$; **7.** $a = -\frac{1}{6}$, $b = 3$, $c = 8$ sau $a = -\frac{1}{6}$, $b = 8$, $c = 3$.

8. $a = -5$, $b = 1$, $c = -2$, $d = 1$. **9.** a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$; b) $f'(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} \right)$, $f''(x) = \frac{2}{9} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} \right)$; c) pe intervalele $(-\infty, 0]$ și $[1, +\infty)$ f este strict descrescătoare, iar pe $[0, 1]$ este strict crescătoare; d) $f(3) > f(5)$ implică $x_1 > x_2$. **10.** $a = -6$, $b = 5$. **11.** $m = 3$. **13.** triunghiul echilateral. **14.** Notăm înălțimea conului cu x și raza bazei conului cu R . Folosind asemănarea și teorema lui Pitagora rezultă $R = \frac{rx}{\sqrt{x^2 - 2rx}}$. Funcția

$V : (2r, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $V(x) = \frac{\pi r^2 x^2}{3(x-2r)}$, reprezintă volumul conului și are punct de minim absolut $x = 4r$.

Pag. 172-174. **1.** a) $x = 1$ și $x = 2$ sunt asimptote verticale, iar $y = 0$ este asimptotă orizontală. b) Prin identificare găsim $a = -1$, $b = 1$. c) $f'(x) = \frac{-2x+3}{(x-1)^2(x-2)^2}$. d) Pe intervalele $(-\infty, 1)$ și $(1, \frac{3}{2})$ avem $f'(x) > 0$, deci f este strict crescătoare, iar pe intervalele $(\frac{3}{2}, 2)$ și $(2, \infty)$ avem $f'(x) < 0$, deci f este strict descrescătoare.

. e) Calculând $f''(x)$ și înlocuind pe x cu 0 obținem $f''(0) = \frac{5}{2}$. **2.** a) $f'(x) = 2$. b) 2. c) 0. d) Nu, deoarece

$$\text{Im}(f) = (0, \infty). \quad \mathbf{3. a)} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3; \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3.$$

$$\mathbf{b)} \quad B^2 = (I_3 - A)^2 = I_3^2 - 2I_3A + A^2 = I_3 - 2A + O_3 = I_3 - 2A.$$

$$\mathbf{c)} \quad B^3 = (I_3 - 2A)(I_3 - A) = I_3 - 3A; \quad B + B^2 - B^3 = I_3 - A + I_3 - 2A - I_3 + 3A = I_3. \quad \mathbf{d)} \quad \det B = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & -3 \\ 4 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -9 \neq 0;$$

$$B^* = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}. \quad \mathbf{e)} \quad \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & m \end{vmatrix} = -(m+3). \quad \text{Pentru ca } (S) \text{ să fie compatibil$$

determinat trebuie ca $m+3 \neq 0$, adică $m \neq -3$. Deci $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$. **f)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$\det A = -6$; $x = \frac{29}{6}$; $y = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$; $z = -\frac{11}{6}$. **5.** a) $f'(x) = e^x - 1$. b) $f'(x) = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$, deci există un

punct de extrem local. c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x + 1) = -\infty$; dreapta $y = -x + 1$ e asimptotă către $-\infty$. d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - x + 1}{e^x - 1} = 1$

(L'Hospital). **6.** a) $A \cdot A = A \cdot A \Rightarrow A \in G$; $I_2 \cdot A = A \cdot I_2 = A \Rightarrow I_2 \Rightarrow G$.

b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -c & -d \\ -a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & -a \\ -d & -c \end{pmatrix} \Leftrightarrow b=c \text{ și } a=d$ Rezultă $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{C} \right\}$ și

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \notin G$. **c)** $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow A^2 = I_2$ **d)** $B = aI_2 + bA = \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \in G$. **7. a)** $x = -\frac{2}{3}$ este

asimptotă verticală pentru f . **b)** $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, deci $y = 0$ este asimptotă la $+\infty$ a graficului lui f . **c)** Nu. Funcția

$\frac{1}{x}$ verifică aceleași proprietăți. **d)** $f(x) = x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x^3}{x+1} \geq 0$. **e)** $\frac{1}{3}$. **8. a)** $\det A = ad - bc = -5$.

b) $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 18 & 37 \end{pmatrix}$. **c)** $I_2 + A + \dots + A^{10} = (A^{11} - I_2)(A - I_2)^{-1}$. **d)** $B = A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. **e)** -125 . **9. a)** $f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

b) $(f'(x))' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = f(x)$. **c)** $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, rezultă f strict crescătoare. **d)** $e^x = e^{-x} \Rightarrow x = 0$.

e) $f(2x) - f(x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 \Rightarrow e^{2x} - e^x = e^{-2x} - e^{-x} = 0$. Notăm $e^x = t > 0$ și obținem $t(t-1) = -\frac{t(t-1)}{t^3}$,

adică $t(t-1)\left(1 + \frac{1}{t^3}\right) = 0$. Rezultă $t = 0, t = 1$ sau $t = -1$, adică $x = 0$. **10. a)** Deoarece $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = 0$ și

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{x}{2} - 1\right) = \infty$, obținem $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty$. **b)** $y = -\frac{x}{2} - 1$. **c)** Pentru orice x nenul, $x\left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right) = e^x - \frac{x}{2} - 1$;

deoarece $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \infty$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2}$, avem $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right) = \infty$. **d)** $g'(x) = e^x - \frac{1}{2}$, oricare ar fi x real.

e) Inecuația este echivalentă cu $g'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, adică $e^x \geq \frac{1}{2}$, de unde obținem $x \geq \ln \frac{1}{2}$. Dacă $x > \ln \frac{1}{2}$,

atunci $g'(x) > 0$; dacă $x < \ln \frac{1}{2}$, atunci $g'(x) < 0$ și $g'\left(\ln \frac{1}{2}\right) = 0$. **f)** $g\left(\ln \frac{1}{2}\right) = e^{\ln \frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2}$.

11. a) $f'(x) = e^x - 1$. **b)** $f'(0) = e^0 - 1 = 0$. **c)** $f'(x) = e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$ un punct de extrem local.

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x - x = \infty$, f nu e mărginită. **e)** Funcția f este strict crescătoare pe $(0, \infty)$.

12. a) $f'(x) = \frac{2x^2 + 2 - 2x(2x-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2 + 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2+2x-2x^2}{(x^2+1)^2}$

b) $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Intervalele sunt $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right], \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ și

$\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$. **c)** $f(f(x)) = \frac{\frac{4x-2}{x^2+1} - 1}{\left(\frac{2x-1}{x^2+1}\right)^2 + 1} = \frac{(4x-2)(x^2+1) - (x^2+1)^2}{(2x-1)^2 + (x^2+1)^2}$.

d) $f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x-1}{x^2+1} - \frac{\frac{2}{x} - 1}{\frac{1}{x^2} + 1} = \frac{2x-1}{x^2+1} - \frac{2x-x^2}{x^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1 - \frac{2}{x^2+1}$. **e)** $f'\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{2x-x^2}{x^2+1}\right)' = \frac{-2x^2-2x+2}{(x^2+1)^2}$.

13. a) $f'(x) = 2^x \ln 2 + 3x^2$. **b)** $f'(x) > 0, \forall x > 0$, deci f este crescătoare. **c)** $f(x) \geq f(0), \forall x \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow 2^x + x^3 \geq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^x \geq 1 - x^3, \forall x \in \mathbb{R}_+$. **d)** $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{3^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \ln 2 + 3 \cdot \frac{x^2}{3^x} = 0$. **14. a)** $f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - 2x(x^3+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2 - 2x}{(x^2+1)^2}$.

b) $f'(0) = 0$. **c)** $f'(x) > 0 \Rightarrow x^4 + 3x^2 - 2x = 0$, rezultă $x = 0$ sau $x^3 + 3x - 2 = 0$; două puncte de extrem local: 0 și

$x_0 \in (0, 1)$. **d)** Funcția $f(x) = x - \frac{x-1}{x^2+1}$ are o asimptotă oblică $x = y$. **15. a)** $f'(x) = 2x - 1$. **b)** $f'(x) \geq 0$,

$\forall x \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$. **c)** $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. **16. a)** $f'(x) = \ln x \cdot (e^{-x})' = \frac{1}{x}e^{-x} - \ln x \cdot e^{-x}$.

b) $f''(x) = -\frac{1}{x^2}e^{-x} - \frac{1}{x}e^{-x} - \frac{1}{x}e^{-x} + \ln x \cdot e^{-x}$. **c)** $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, deci $y = 0$ este asimptotă la ∞ .

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = f'(1) = \frac{1}{e}$. **17. a)** 0. **b)** $f'(x) = -2(x-1)^{-3} + 2(x+1)^{-3}$.

c) $f(2) + f(3) + \dots + f(100) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{99^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} - \dots - \frac{1}{101^2} = 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100^2} - \frac{1}{101^2}$. **d)** $y = 0$.

18. a) Se verifică prin calcul direct. **b)** $f'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{2}{(x+1)^3}$, $\forall x \in (0, \infty)$. **c)** $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, deci $y = 0$ este asimptotă către $+\infty$ și $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \infty$, deci $x = 0$ este asimptotă verticală. **d)** 0.

19. a) $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$, $\forall x > 0$. **b)** $f'(1) = 0$. **c)** $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$. Funcția are un singur punct de extrem local.

20. a) $f'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$. **b)** $f(1)f(-1)f'(1)f'(-1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{4} = -\frac{1}{16}$. **c)** $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -(1+x^2) \leq 2x \leq 1+x^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$ și $(1+x)^2 \geq 0$. **d)** Din $f(x) + f(y) = 1$ rezultă $f(x) \geq \frac{1}{2}$ sau $f(y) \geq \frac{1}{2}$,

adică x sau y este egal cu 1. Obținem $x = y = 1$. **21. a)** $3e^{3x}$. **b)** $f'(0) = 3$. **c)** $f(y) = f(2y) \Rightarrow e^{3y} = e^{6y} \Rightarrow y = 0$.

d) $f'(x) = 0 \Rightarrow e^{3x} = 0$; ecuația nu are soluții reale. **22. a)** Se verifică prin calcul direct.

b) $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} + \frac{2(x+1)}{((x+1)^2+1)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. **c)** Cum $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, rezultă că $y = 0$ este ecuația asimptotei

spre $+\infty$. **d)** $\frac{2x+1}{x^2+x+1} = m \Rightarrow mx^2 + mx + m - 2x - 1 = 0 \Rightarrow mx^2 + x(m-2) + m-1 = 0$.

$\Delta(m) = (m-2)^2 - 4m(m-1) = m^2 - 4m + 4 - 4m^2 + 4m = -3m^2 + 4 \geq 0$, deci $m \in \left[-\sqrt{\frac{4}{3}}, \sqrt{\frac{4}{3}}\right] = A$.

23. a) $f'(x) = -3 + \frac{2}{x}$. **b)** $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-3 + \frac{2 \ln x}{x}\right) = -3$. **c)** O asimptotă verticală $x = 0$.

24. a) $f'(x) = \frac{1}{2}(2x^2+3)^{\frac{1}{2}} \cdot 4x$. **b)** $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2x^2+3} = \infty$. **c)** $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2x^2+3} - \sqrt{2x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{2x^2+3} + \sqrt{2} \cdot x} = 0$.

d) Funcția e monotonă pe $[0, \infty)$ și pe $(-\infty, 0]$, deci unica soluție este $x = 0$.

25. a) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$. **b)** $f'(1) = 0$. **c)** Există o asimptotă verticală, $x = 0$. **d)** $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

26. a) $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$. **b)** $f'(1) = 2$. **c)** Există o asimptotă verticală, $x = 0$. **d)** $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

27. a) Se verifică prin calcul direct. **b)** $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x^2) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-1 + \frac{1}{x^2+1}\right) = -1$. **c)** $f'(x) = 2x - \frac{2x}{(x^2+1)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

d) $f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2} (x^4 + 2x^2 + 1 - 1) = \frac{2x^3(x^2+2)}{(x^2+1)^2}$, rezultă că $f'(x) < 0$, $\forall x < 0$, deci f este strict descrescătoare pe

$(-\infty, 0]$ și $f'(x) > 0$, $\forall x > 0$, deci f este strict crescătoare pe $[0, \infty)$. **e)** $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$, rezultă că f nu admite asimptotă către ∞ .

CUPRINS

I. Elemente de calcul matricial și sisteme de ecuații liniare

Matrice	1. Tabel de tip matricial. Matrice, mulțimi de matrice.		
	Operații cu matrice: adunarea, înmulțirea unei matrice cu scalar	3	
	2. Operații cu matrice: înmulțirea	9	
	Sisteme de ecuații liniare și determinanți	3. Sisteme de ecuații liniare. Determinanți	16
		4. Proprietățile determinanților	24
	5. Interpretarea geometrică a sistemelor liniare cu două necunoscute	29	
	6. Matrice inversabilă	32	
7. Sisteme liniare cu cel mult 3 necunoscute	35		

II. Elemente de analiză matematică

Mulțimea numerelor reale. Funcții reale	1. Mulțimi de puncte pe dreapta reală	44
	2. Funcții reale de variabilă reală	51
Limite de funcții	1. Limita unei funcții într-un punct. Limite laterale	59
	2. Operații cu limite de funcții. Limitele funcțiilor elementare	63
	3. Metode de eliminare a nedeterminărilor	70
	4. Asimptotele unei funcții	76
Continuitatea funcțiilor	1. Continuitate punctuală; continuitate pe un interval.	
	Operații cu funcții continue.	82
	2. Studiul existenței soluțiilor reale ale unor ecuații și semnul unei funcții continue pe un interval	87
Derivabilitatea funcțiilor	1. Funcții care admit derivată. Funcții derivabile	92
	2. Derivate laterale. Derivatele unor funcții elementare	97
	3. Operații cu funcții derivabile. Derivate de ordinul al doilea	103
	4. Proprietăți generale ale funcțiilor derivabile pe un interval	110
	5. Calculul unor limite de funcții cu ajutorul derivatelor	118
	6. Rolul derivatei de ordinul întâi în studiul funcțiilor	120
	7. Rolul derivatei de ordinul al doilea în studiul funcțiilor	127
Reprezentarea grafică a funcțiilor	1. Reprezentarea grafică a funcțiilor	134
	2. Aplicații ale unor proprietăți locale sau globale ale funcțiilor	146
	3. Rezolvarea grafică a unor ecuații. Șirul lui Rolle	148
Probleme recapitulative		154
Teste grilă		162
Recapitulare pentru bacalaureat		172
Indicații și răspunsuri		175

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$c' = 0, c = \text{constant}$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

M1

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

Manualul se adresează tuturor elevilor, celor mai buni, dar și acelor a căroră nu le place matematica. Lucrarea este împărțită pe capitole și lecții. În fiecare lecție există exerciții simple în coloana din dreapta teoriei, pentru a se putea urmări mai bine relația teorie-probleme. La sfârșitul fiecărei lecții există un set de probleme de diferite grade de dificultate. Fiecare capitol se încheie cu teste de sinteză.

973-649-265-6



978-973-649-265-5