PARTIAL

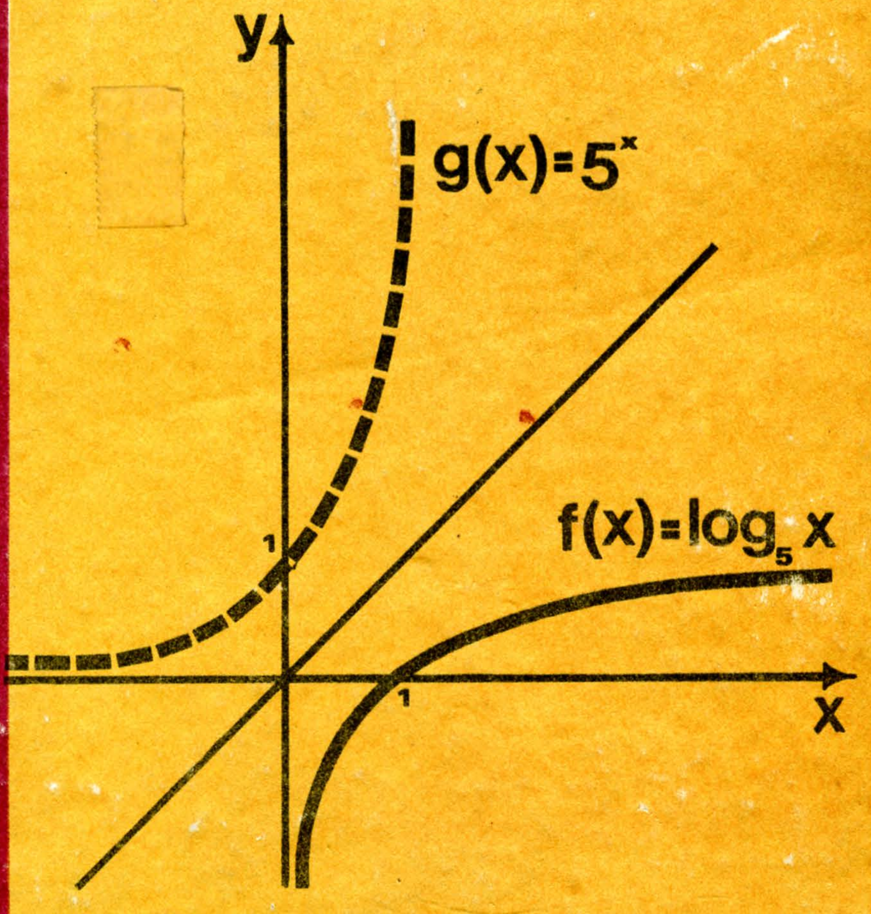
MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

Matematică

Manual pentru clasa a X-a

X

Algebră



I

Funcţia exponenţială şi funcţia logaritmică

§ 1. Funcţia exponenţială

1.1. Puteri cu exponent raţional (recapitulare)

În clasa a IX-a s-a definit puterea cu exponent raţional. Să amintim această definiţie.

1. *Puteri cu exponent raţional pozitiv.* Dacă $a \geqslant 0$ este un număr real nenegativ, iar $\frac{m}{n}$ un număr raţional pozitiv, atunci

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}. \tag{1}$$

2. *Puteri cu exponent raţional negativ.* Dacă $a > 0$ este un număr real pozitiv, iar $\frac{m}{n}$ un număr raţional negativ, atunci

$$a^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{-\frac{m}{n}}}. \tag{2}$$

Deoarece numărul $-\frac{m}{n}$ este pozitiv, $a^{-\frac{m}{n}}$ a fost definit la punctul **1**.

3. În sfîrşit, dacă $a > 0$ iar $\frac{m}{n} = 0$, atunci

$$a^0 = 1. \tag{3}$$

Relaţiile (1), (2) şi (3) definesc puterea unui număr pozitiv $a > 0$, pentru orice exponent raţional $\frac{m}{n}$. În clasa a IX-a s-au studiat o serie de proprietăţi ale puterilor cu exponent raţional oarecare. În cele ce urmează vom folosi în special proprietăţile date de următoarea teoremă.

Teorema 1.1.1. **1°. Dacă $a>1$ este un număr real, atunci dintre două puteri cu exponent raţional pozitiv ale acestui număr, este mai mare aceea al cărei exponent este mai mare.**

2°. Dacă $0<a<1$ este un număr real, atunci dintre două puteri cu exponent raţional pozitiv ale acestui număr, este mai mare aceea al cărei exponent este mai mic.

Demonstrație. 1°. Într-adevăr, fie $\frac{m}{n} > \frac{p}{q} > 0$ două numere raționale pozitive. Avem $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ și $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$. Aducem acești radicali la radicali de același ordin:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nq]{a^{mq}}, \quad \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{np}}.$$

Cum $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$, rezultă că $mq > np$. Dar, cum $a > 1$ rezultă $a^{mq} > a^{np}$, de unde $\sqrt[nq]{a^{mq}} > \sqrt[nq]{a^{np}}$ sau

$$a^{\frac{m}{n}} > a^{\frac{p}{q}}.$$

2° Demonstrația este analoagă cu cea de la punctul 1° și de aceea o omitem.

Exemple. 1) Avem 1,21 < 1,22. De aceea

$$2^{1,21} < 2^{1,22}; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{1,21} > \left(\frac{1}{2}\right)^{1,22}$$

2) Avem 0,3 < 0,4. De aceea

$$(\sqrt{3})^{0,3} < (\sqrt{3})^{0,4}; \quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{0,3} > \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{0,4}$$

1.2. Puteri cu exponent real oarecare

În acest paragraf vom defini puterea cu exponent real oarecare de bază pozitivă, astfel încît aceasta să coincidă pentru exponent rațional cu cea introdusă mai înainte.

Mai precis, dacă $a > 0$ este un număr real pozitiv, iar x un număr real oarecare, ne propunem să dăm sens expresiei a^x.

Amintim, mai întîi, cîteva fapte privind aproximările zecimale ale numerelor reale.

Fie x un număr real oarecare reprezentat sub formă de fracție zecimală infinită, adică $x = x_0, x_1x_2x_3...x_n...$. Pentru numărul x, aproximările zecimale cu o eroare mai mică decît 10^{-n} sînt:

i) prin lipsă: $x_n' = x_0, x_1x_2x_3...x_n$,

ii) prin adaos: $x_n'' = x_0, x_1x_2x_3...x_n + 10^{-n}$.

Așadar numărului x i-am asociat aproximările sale zecimale:

prin lipsă: $x_0', x_1', x_2', x_3', ...,$

prin adaos: $x_0'', x_1'', x_2'', x_3'', ...,$

astfel încît:

$$\begin{aligned} x_0' &\leqslant x < x_0'', \\ x_1' &\leqslant x < x_1'', \\ x_2' &\leqslant x < x_2'', \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Observăm că aproximările zecimale prin lipsă şi prin adaos ale unui număr real x sînt totdeauna numere raţionale.

1. *Puteri cu exponent real pozitiv*

Pentru definirea puterii de bază $a > 0$, cu exponent real, distingem două cazuri, după cum baza este supraunitară sau subunitară:

1° $a > 1$. Fie $x > 0$ un număr real şi să considerăm aproximările zecimale prin lipsă şi prin adaos cu o eroare mai mică decît 10^{-n}. Atunci pentru orice n, avem

$$x'_n \leqslant x < x''_n.$$

După cum am observat numerele x'_n, x''_n sînt raţionale pozitive şi deci conform definiţiei puterilor cu exponent raţional, au sens puterile $a^{x'_n}$ şi $a^{x''_n}$, pentru orice n.

Mai mult, după punctul 1° al teoremei 1.1.1, rezultă că $a^{x'_n} < a^{x''_n}$.

Definiţia 1.2.1. Fie $a>1$ şi x un număr real pozitiv. Se numeşte *puterea x a lui a* un număr real y, care pentru orice număr natural n satisface inegalităţile:

$$a^{x'_n} \leqslant y < a^{x''_n}.$$

Se poate demonstra că un astfel de număr real y există şi, mai mult, este unic. Demonstraţia riguroasă a acestui fapt depăşeşte programa clasei a X-a. Ea necesită noţiunea de limită şi se va studia la Analiză matematică în clasa a XI-a.

Numărul y dat de definiţia precedentă se notează a^x şi se citeşte *a la puterea x.*

Exemplu. Să explicăm ce trebuie înţeles prin $3^{\sqrt{2}}$. Aproximările zecimale ale lui $\sqrt{2}$ sînt următoarele:

prin lipsă: 1; 1,4; 1,41; 1,414;...,

prin adaos; 2; 1,5; 1,42; 1,415;...;

astfel încît:

$$\begin{aligned} 1 &\leqslant \sqrt{2} < 2, \\ 1{,}4 &\leqslant \sqrt{2} < 1{,}5, \\ 1{,}41 &\leqslant \sqrt{2} < 1{,}42, \\ 1{,}414 &\leqslant \sqrt{2} < 1{,}415, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Numărul care ne interesează $y = 3^{\sqrt{2}}$ îndeplineşte inegalităţile:

$$\begin{aligned} 3^1 &\leqslant y < 3^2 \\ 3^{1,4} &\leqslant y < 3^{1,5}, \\ 3^{1,41} &\leqslant y < 3^{1,42}, \\ 3^{1,414} &\leqslant y < 3^{1,415}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

2° $0 < a < 1$. Dacă $x > 0$ este un număr real, avem

$$x'_n < x < x''_n.$$

După punctul 2° al teoremei din paragraful precedent, rezultă că $a^{x''_n} < a^{x'_n}$.

Definiția 1.2.2. **Fie $0 < a < 1$ și x un număr real pozitiv. Se numește** ***puterea x a lui a*** **un număr real y, care pentru orice număr natural n, satisface inegalitățile:**

$$a^{x''_n} < y \leqslant a^{x'_n}.$$

Se poate demonstra că un astfel de număr real y există și, mai mult, este unic.

Exemplu. Să explicăm ce trebuie înțeles prin $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$.

Avînd în vedere cele de mai înainte precum și tabelul aproximărilor zecimale ale lui $\sqrt{2}$ din exemplul precedent, numărul care ne interesează $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$ îndeplinește inegalitățile:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 < y \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^1,$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1,5} < y \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{1,4},$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1,42} < y \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{1,41},$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1,415} < y \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{1,414},$$

. . . .

Vom adăuga că pentru orice număr real x,

$$1^x = 1.$$

În final trebuie menționată o proprietate importantă a puterilor cu exponent pozitiv și anume:

Oricare ar fi $a > 0$ și $x > 0$ avem $a^x > 0$.

Într-adevăr, fie x'_n și x''_n aproximările zecimale ale lui x prin lipsă, respectiv prin adaos. Atunci, pentru orice n, avem:

1° Dacă $a > 1$, atunci

$$a^{x'_n} \leqslant a^x < a^{x''_n}.$$

2° Dacă $0 < a < 1$, atunci

$$a^{x''_n} < a^x \leqslant a^{x'_n}.$$

Numerele x'_n și x''_n sînt raționale și pozitive. De aceea $a^{x'_n} > 0$ și $a^{x''_n} > 0$, pentru orice $a > 0$. Atunci, evident, $a^x > 0$ deoarece este cuprins între două numere pozitive.

2. *Puteri cu exponent real negativ*

Dacă $a > 0$ şi x este un număr real negativ, atunci prin definiţie

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}}. \tag{1}$$

Deoarece numărul $-x$ este pozitiv, a^{-x} a fost definit la punctul 1. Mai mult, am demonstrat că $a^{-x} \neq 0$, pentru $-x > 0$.

De exemplu, $3^{-\sqrt{5}} = \frac{1}{3^{\sqrt{5}}}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{5}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{5}}}$.

Am demonstrat că dacă $x > 0$ atunci $a^{-x} > 0$. Cum $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, rezultă că şi *pentru* $x < 0$, *avem* $a^x > 0$.

Amintim că pentru $a \neq 0$, am convenit să punem $a^0 = 1$.

Astfel, am definit puterea unui număr pozitiv cu orice exponent real. Puterea unui număr negativ cu exponent real, în general, nu este definită.

3. *Proprietăţi ale puterilor cu exponent real*

Fie $a > 0$ şi $b > 0$ (numere reale pozitive). Atunci pentru x şi y numere reale, avem:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, 3. $(ab)^x = a^x b^x$, 5. $(a^x)^y = a^{xy}$.

2. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, 4. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$,

Pe baza definiţiei puterii cu exponent real dată mai înainte şi folosind proprietăţile corespunzătoare ale puterii cu exponent raţional, verificarea acestora se face fără dificultate. Lăsăm ca exerciţiu demonstrarea lor.

Exemple. 1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{3}} = (2^{-1})^{-\sqrt{3}} = 2^{\sqrt{3}}$.

2) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}\right]^{-\sqrt{27}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{81}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-9} = (2^{-1})^{-9} = (2^1)^9 = 2^9 = 512.$

3) $\frac{7^{\sqrt{8}}}{7^{\sqrt{2}}} = 7^{\sqrt{8}-\sqrt{2}} = 7^{2\sqrt{2}-\sqrt{2}} = 7^{\sqrt{2}}.$

1.3. Funcţia exponenţială

Fie $a > 0$ un număr real pozitiv. Am văzut în paragraful 1.2 (pct. 1 şi 2) că oricare ar fi numărul real x, avem $a^x > 0$. Aşadar, putem defini funcţia următoare:

$$f : \mathbf{R} \to (0, \infty),\ f(x) = a^x.$$

Observație. Pentru $a = 1$ se obține o funcție constantă $f : \mathbf{R} \to (0,\infty)$, $f(x) = 1$ și de aceea acest caz nu prezintă un interes special.

O funcție $f : \mathbf{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = a^x$, unde $a > 0$ și $a \neq 1$, se numește *funcție exponențială (de bază a)*.

Enunțăm, în continuare, o serie de proprietăți importante ale funcției exponențiale.

1. *Dacă $a > 1$, atunci pentru $x > 0$ avem $a^x > 1$, iar pentru $x < 0$ avem $a^x < 1$. Dacă $a < 1$, atunci pentru $x > 0$ avem $a^x < 1$, iar pentru $x < 0$ avem $a^x > 1$.*

Demonstrație. Fie $a > 1$ și $x > 0$. Dacă x este rațional, adică $x = \frac{m}{n}$, atunci $a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Cum $a > 1$ rezultă că și $a^m > 1$, dar atunci și $\sqrt[n]{a^m} > 1$. Dacă x este un număr real pozitiv oarecare, fie x_n' și x_n'', pentru orice n, aproximările zecimale prin lipsă și prin adaos ale lui x. Atunci

$$x_n' \leqslant x < x_n''.$$

Cum $a > 1$, rezultă că pentru orice n avem

$$a^{x_n'} \leqslant a^x < a^{x_n''}.$$

Dar x_n' este rațional pozitiv și după cum am observat mai înainte $a^{x_n'} > 1$, de unde $a^x > 1$.

Dacă $x < 0$, atunci avem

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}}.$$

Dar $-x > 0$ și deci $a^{-x} > 1$. Prin urmare

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}} < 1.$$

Cazul în care $0 < a < 1$ se tratează analog; îl lăsăm ca exercițiu.

2. *Dacă $x = 0$, atunci independent de $a > 0$ avem $a^x = 1$.*
Aceasta rezultă din definiția puterii nule.

3. *Pentru $a > 1$, funcția exponențială $f(x) = a^x$ este strict crescătoare, iar pentru $0 < a < 1$ este strict descrescătoare.*

Demonstrație. Fie $a > 1$ și $x_1 < x_2$. Să arătăm că

$$a^{x_1} < a^{x_2}.$$

Într-adevăr, din $x_1 < x_2$ rezultă că există $u > 0$ astfel încît $x_2 = x_1 + u$. Atunci

$$a^{x_1} - a^{x_2} = a^{x_1} - a^{x_1+u} = a^{x_1}(1 - a^u).$$

Deoarece $u > 0$, după proprietatea 1 a funcţiei exponenţiale rezultă $a^u > 1$. Aşadar, $a^{x_1} > 0$ şi $1 - a^u < 0$, de unde $a^{x_1}(1 - a^u) < 0$. Înseamnă că $a^{x_1} - a^{x_2} < 0$, sau $a^{x_1} < a^{x_2}$. Deci din $x_1 < x_2$ rezultă $a^{x_1} < a^{x_2}$, adică funcţia $f(x) = a^x$ este strict crescătoare.

Analog, se demonstrează că pentru $0 < a < 1$ funcţia $f(x) = a^x$ este strict descrescătoare.

4. *Funcţia exponenţială* $f : \mathbf{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ *este bijectivă.*

Demonstraţie. Să arătăm mai întîi că f este injectivă. Fie, pentru aceasta, $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ astfel încît $x_1 \neq x_2$. Atunci avem $x_1 < x_2$ sau $x_1 > x_2$. Să presupunem, de exemplu, că $x_1 < x_2$. Atunci după monotonia funcţiei exponenţiale (proprietatea 3) rezultă:

1. dacă $a > 1$, atunci $f(x_1) < f(x_2)$ şi deci $f(x_1) \neq f(x_2)$;
2. dacă $0 < a < 1$, atunci $f(x_1) > f(x_2)$ şi deci $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Analog, rezultă pentru $x_1 > x_2$. Deci f este injectivă. Demonstratia faptului că funcţia exponenţială f este surjectivă depăşeşte programa clasei a X-a. Ea necesită noţiunea de continuitate şi se va face la Analiză matematică în clasa a XI-a. Cu alte cuvinte, se poate demonstra că oricare ar fi $y_0 > 0$, un număr real pozitiv, există un număr real x_0 astfel încît $a^{x_0} = y_0$. (Conform injectivităţii funcţiei f rezultă că x_0 este unic.)

5. *Funcţia exponenţială* $f(x) = a^x$ *este inversabilă.*

Această proprietate este evidentă, deoarece orice funcţie bijectivă este inversabilă.

În § 2 ne vom ocupa de studiul inversei funcţiei exponenţiale.

1.4. Graficul funcţiei exponenţiale

Pe aceeaşi figură vom reprezenta graficul funcţiilor $f(x) = 2^x$ şi $g(x) = 5^x$, iar pe alta al funcţiilor $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ şi $k(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$. Trasarea fiecărui grafic se face „prin puncte". Asociem tabelele de valori următoare:

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$f(x) = 2^x$		$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	
$h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$		8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	

Observăm că pentru $x = \pm 2$, ± 3 şi, în general, pentru x întreg diferit de ± 1, valorile funcţiilor $g(x) = 5^x$ şi $k(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ sînt ori foarte mari, ori foarte mici, deci punctele corespunzătoare sînt greu de figurat pe grafic. De aceea, în acest caz, vom lua pentru x valori fracţionare cuprinse între -1 şi 1, de exemplu: $x = -1, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$.
Valorile funcţiilor vor fi calculate aproximativ. Astfel:

$$5^0 = 1;$$

$$5^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{5} = \sqrt{\sqrt{5}} \approx \sqrt{2{,}2360} \approx 1{,}5;$$

$$5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \approx 2{,}24;$$

$$5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3} = (\sqrt[4]{5})^3 \approx 3{,}34;$$

$$5^1 = 5;$$

$$5^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{5^{\frac{1}{4}}} \approx \frac{1}{1{,}5} \approx 0{,}66; \text{ ş.a.m.d.}$$

x	$-\infty$	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$+\infty$
$g(x) = 5^x$		0,2	0,3	0,45	0,66	1	1,5	2,24	3,34	5	
$k(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$		5	3,34	2,24	1,5	1	0,66	0,45	0,3	0,2	

Prezentăm într-un sistem de axe xOy punctele ale căror coordonate sînt valorile din tabelele de mai sus. Punctele obţinute le unim printr-o linie continuă.

În figura I. 1 sînt reprezentate graficele funcţiilor $f(x) = 2^x$ şi $g(x) = 5^x$, iar în figura I.2 sînt reprezentate graficele funcţiilor $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ şi $k(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

Analizînd graficul funcţiei exponenţiale pentru diverse baze, constatăm că el are următoarele proprietăţi:

1) Trece prin punctul de coordonate (0, 1) de pe axa Oy.

2) Graficul funcţiei exponenţiale este constituit dintr-o singură ramură care „urcă" pentru baza $a > 1$ şi „coboară" pentru baza $0 < a < 1$.

3) Graficul funcţiei exponenţiale este din ce în ce mai „apropiat" de axele Ox şi Oy cu cît a este mai mare, dacă $a > 1$, sau cu cît a este mai mic, dacă $0 < a < 1$.

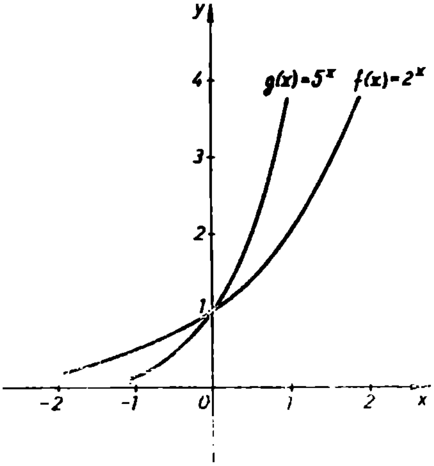


Fig. I. 1

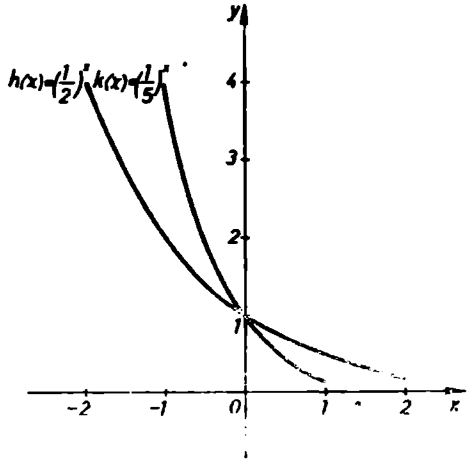


Fig. I. 2

Exerciții

1. Să se afle care număr din perechile de numere următoare este mai mare:

a) $3^{\frac{4}{5}}$ și $3^{\frac{5}{6}}$; d) $(0,5)^{-13}$ și 2^{13}; g) $5^{\sqrt{3}}$ și $5^{\sqrt{2,5}}$;

b) $\sqrt[11]{6^3}$ și $\sqrt[15]{6^7}$; e) $(\sqrt{3})^{-6}$ și $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6$; h) $\sqrt[6]{\left(\frac{7}{8}\right)^{38}}$ și $\sqrt[5]{\left(\frac{7}{8}\right)^{33}}$

c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{7}{2}}$ și $\left(\frac{2}{5}\right)^4$; f) $2^{-\sqrt{5}}$ și $2^{-\sqrt{3}}$.

2. Să se aducă la formă mai simplă expresiile:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{13}\cdot 4^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{\sqrt{27}}\cdot 16^3$; c) $[(\sqrt[3]{5})^{\sqrt{5}}]^{-3\sqrt{5}}$;

b) $\frac{12^{\sqrt{48}}}{4^{\sqrt{108}}}\cdot\frac{2^{27\sqrt{3}}}{6^{\sqrt{27}}}$; d) $\left[(\sqrt{8})^{-4\frac{1}{3}}\right]^{\frac{\sqrt{3}}{26}}$.

3. Să se afle mulțimea valorilor lui x pentru care este adevărată inegalitatea:

a) $3^x \geqslant 729$; d) $3^x < 3$; g) $\left(\frac{1}{81}\right)^x\sqrt{3} > 1$;

b) $2^x \leqslant 0,25$; e) $(\sqrt{2})^x\cdot 2 > \frac{1}{8}$; h) $\left(\frac{1}{\sqrt[5]{0,5}}\right)^x < \frac{1}{4}$;

c) $2^x > \frac{1}{128}$; f) $(0,01)^2(\sqrt{10})^x < 1$; i) $32\,(\sqrt[3]{2})^x > 0,25$.

4. Să se compare m şi n dacă este adevărată inegalitatea:

a) $(3\pi)^m > (3\pi)^n$;

b) $\left(\frac{5\pi}{16}\right)^m < \left(\frac{5\pi}{16}\right)^n$;

c) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^m \geqslant (\sqrt{3}-\sqrt{2})^n$;

d) $(\sqrt{7}-\sqrt{3})^m \leqslant (\sqrt{7}-(\sqrt{3})^n$.

5. Să se deducă care din numerele următoare este mai mare decît 1, şi care mai mic decît 1:

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{5}}$;

b) $(\sqrt{5})^{\frac{1}{2}}$;

c) $\left(\frac{3}{5}\right)^{\pi}$;

d) $(\sqrt{2}-1)^{-\frac{3}{2}}$;

e) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-\frac{3}{2}}$;

f) $\left(\frac{\pi+1}{4}\right)^{-\sqrt{2}}$.

6. Să se afle care număr din perechile de numere următoare este mai mare:

a) $\pi^{-\sqrt{2}}$ şi $\left(\frac{1}{\pi}\right)^{-\sqrt{2}}$;

b) $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{1+\sqrt{3}}$ şi $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2}$;

c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{1+\sqrt{6}}$ şi $\left(\frac{2}{5}\right)^{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$;

d) $(\sqrt{5})^{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ şi $(\sqrt{5})^{\sqrt{3}-2}$.

7. Să se afle x astfel încît $a^x > \left(\frac{1}{a}\right)^x$, unde $a > 0$ este un număr real pozitiv.

8. Să se spună dacă sînt echivalente inegalităţile următoare:

a) $a^x > a^4$ şi $x > 4$;

b) $6^{x^2} < 6^x$ şi $x^2 < x$;

c) $\left(\frac{1}{9}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$ şi $2x < x - 1$;

d) $8^{x^2} < 4$ şi $3x^2 \geqslant 2$.

9. Folosind graficul funcţiei $f : \mathbf{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = 2^x$, să se găsească valorile:

$$\sqrt{2},\ \sqrt[3]{4},\ \frac{1}{\sqrt[3]{2}},\ \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Pentru ce valori ale lui x această funcţie ia valorile:

$$0,5;\ 0,9;\ 1;\ 1,8;\ 2,7?$$

10. Folosind graficul funcţiei $f : \mathbf{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, să se găsească valorile:

$$\sqrt[5]{\frac{1}{5}};\ 5^{-2},\ \sqrt[5]{0,008};\ \left(\frac{1}{5}\right)^{-0,7}.$$

Pentru ce valori ale lui x această funcţie ia valorile:

$$0,3;\ 0,6;\ 1;\ 2,25;\ 4?$$

11. Folosind graficul funcţiei $f : \mathbf{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = 10^x$, să se găsească valorile:

$$31,5 \cdot 0,42;\ (31,5)^2;\ (0,0041)^{\frac{2}{3}};\ (1,8)^{0,2} \cdot \sqrt[3]{400}.$$

12. Să se traseze graficele funcţiilor:

a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$; c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$; e) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x} + 2$;

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$; d) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x} - 2$; f) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-|x|}$.

§ 2. Logaritmi

2.1. Definiţia logaritmului unui număr pozitiv

Fie $a > 0$ un număr real pozitiv, $a \neq 1$. Considerăm ecuaţia exponenţială

(1) $a^x = N$, $N > 0$.

Din proprietatea 4 (§ 1, pct. 1.3) rezultă că ecuaţia (1) are o soluţie care este unic determinată. Această soluţie se notează

(2) $x = \log_a N$

şi se numeşte *logaritmul numărului pozitiv N în baza a*.

Din (1) şi (2) obţinem egalitatea

(3) $a^{\log_a N} = N$

care *ne arată că logaritmul unui număr real pozitiv este exponentul la care trebuie ridicată baza a ($a > 0$, $a \neq 1$) pentru a obţine numărul dat.*

Dacă în (1) facem $x = 1$ obţinem $a^1 = a$ şi deci

(4) $\log_a a = 1$.

Exemple 1) Să calculăm $\log_2 32$. Cum $2^5 = 32$, atunci din definiţia logaritmului avem $\log_2 32 = 5$.

2) Să determinăm $\log_2 \frac{1}{16}$. Din egalitatea $2^{-4} = \frac{1}{16}$ obţinem $\log_2 \frac{1}{16} = -4$.

3) Să determinăm $\log_{\frac{1}{3}} 27$. Să considerăm ecuaţia exponenţială $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27$. Cum $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{3^{-3}} = 27$, obţinem $x = -3$ şi deci $\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$.

4) Cum $4^4 = 256$ atunci din definiţia logaritmului obţinem $\log_4 256 = 4$.

Observaţie. În toate exemplele pe care le-am dat am putut să calculăm logaritmul numerelor date. În general, determinarea logaritmului unui număr oarecare nu se poate face cu exactitate. Cînd vom studia tabelele de logaritmi vom arăta că logaritmul unui număr se poate indica cu o anumită aproximaţie.

2.2. Funcţia logaritmică

Fie $a > 0$, $a \neq 1$ un număr real. În paragraful precedent definind noţiunea de logaritm în baza a, fiecărui număr pozitiv N i s-a asociat un număr real bine determinat. Acest lucru ne permite să definim o funcţie

$$f : (0, +\infty) \to \mathbf{R}, \; f(x) = \log_a x$$

numită *funcţie logaritmică.*

Iată cîteva proprietăţi ale funcţiei logaritmice:

1° $f(1) = 0$.

Într-adevăr, cum $a^0 = 1$, rezultă că $\log_a 1 = 0$ şi deci $f(1) = 0$.

2° *Funcţia logaritmică este monotonă. Mai exact, dacă $a > 1$, atunci funcţia logaritmică este strict crescătoare, iar dacă $0 < a < 1$, funcţia logaritmică este strict descrescătoare.*

Într-adevăr, să considerăm cazul $a > 1$ şi fie $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ astfel încît $x_1 < x_2$.

Cum $x_1 = a^{\log_a x_1}$ şi $x_2 = a^{\log_a x_2}$, rezultă că $a^{\log_a x_1} < a^{\log_a x_2}$.

Dar funcţia exponenţială fiind crescătoare (a se vedea § 1) obţinem că $\log_a x_1 < \log_a x_2$, adică $f(x_1) < f(x_2)$.

În cazul $0 < a < 1$, din inegalitatea $a^{\log_a x_1} < a^{\log_a x_2}$ şi din faptul că funcţia exponenţială cu baza un număr real $0 < a < 1$ este strict descrescătoare, rezultă că $\log_a x_1 > \log_a x_2$, adică $f(x_1) > f(x_2)$.

3° *Funcţia logaritmică este bijectivă.*

Într-adevăr, dacă $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ astfel încît $f(x_1) = f(x_2)$, atunci $\log_a x_1 = \log_a x_2$. Dar din egalitatea (3) (§ 2) obţinem $x_1 = a^{\log_a x_1}$ şi $x_2 = a^{\log_a x_2}$, adică $x_1 = x_2$. Deci f este o funcţie injectivă.

Fie $y \in \mathbf{R}$, un număr real oarecare. Notăm $x = a^y$. Se vede că $x \in (0, +\infty)$ şi $\log_a x = \log_a a^y = y$. Deci $f(x) = y$ ceea ce ne arată că f este şi surjectivă. Aşadar f este bijectivă.

4°. *Inversa funcţiei logaritmice este funcţia exponenţială.*

Funcţia logaritmică

$$f : (0, +\infty) \to \mathbf{R}, \ f(x) = \log_a x$$

fiind bijectivă, rezultă din § 3.7, cap II, Algebră clasa a IX-a că ea este inversabilă. Inversa sa este funcţia exponenţială

$$g : \mathbf{R} \to (0, +\infty), \ g(x) = a^x.$$

Într-adevăr, dacă $x \in (0, +\infty)$ avem $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\log_a x) = a^{\log_a x} = x$ şi dacă $y \in \mathbf{R}$, atunci $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(a^y) = \log_a a^y = y$.

Graficul funcţiei logaritmice $f(x) = \log_a x$ pentru $a = 2, 5, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}$.

Considerăm tabelele de valori

x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
$\log_2 x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\log_{\frac{1}{2}} x$	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4

x	$\frac{1}{625}$	$\frac{1}{125}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{5}$	1	5	25	125	625
$\log_5 x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\log_{\frac{1}{5}} x$	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4

Reprezentăm într-un sistem de axe xOy punctele ale căror coordonate sînt valorile din tabelele de mai sus. Punctele obţinute le unim printr-o linie continuă.

În figura I.3 sînt reprezentate graficele funcţiilor $f(x) = \log_2 x$ şi $g(x) = \log_5 x$, iar în figura I.4 sînt reprezentate graficele funcţiilor $h(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ şi $k(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$.

Deoarece funcţia logaritmică este inversa funcţiei exponenţiale, graficele celor două funcţii sînt simetrice faţă de prima bisectoare. În figura I.5 am reprezentat grafic funcţiile $f(x) = \log_5 x$ şi $g(x) = 5^x$, iar în figura I.6 am reprezentat grafic funcţiile $f(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$ şi $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

Graficul funcţiei logaritmice are următoarele proprietăţi:

1) Trece prin punctul de coordonate (1, 0) de pe axa Ox.

2) Graficul funcţiei logaritmice este constituit dintr-o singură ramură care „urcă" dacă baza $a > 1$ şi „coboară" dacă baza $0 < a < 1$.

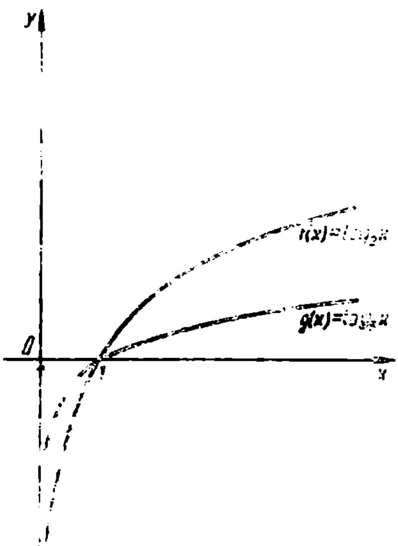


Fig. I. 3

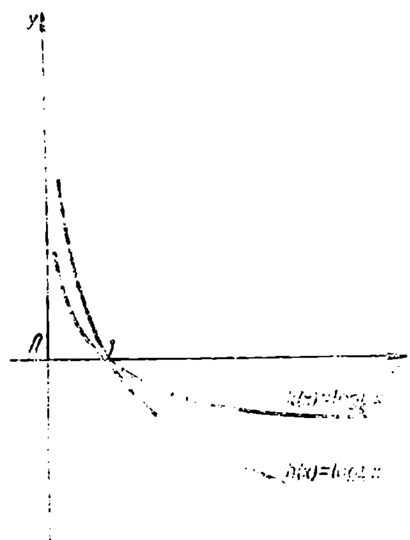


Fig. I. 4

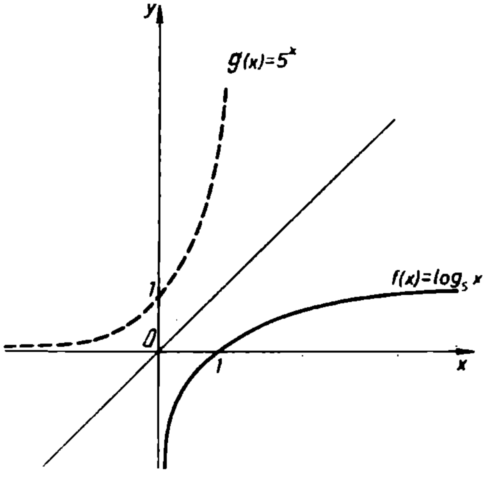


Fig. I. 5

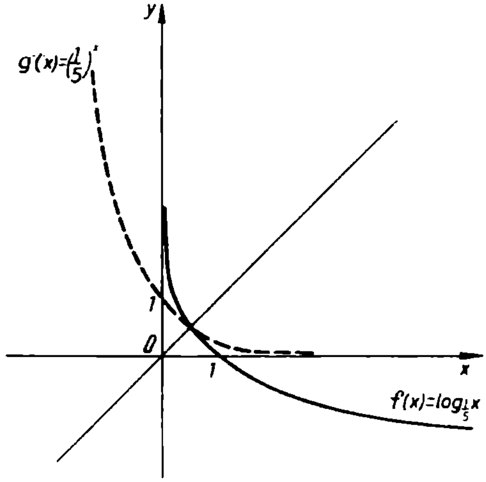


Fig. I.6

3) Graficul funcției logaritmice este din ce în ce mai „apropiat" de axele Ox și Oy cu cît a este mai mare, dacă $a > 1$, sau cu cît a este mai mic, dacă $0 < a < 1$.

4) Graficul funcției logaritmice este simetricul graficului funcției exponențiale față de bisectoarea unghiului xOy.

2.3. Proprietățile logaritmilor

Folosind proprietățile puterilor cu exponenți reali obținem următoarele proprietăți pentru logaritmi:

1° *Dacă A și B sînt două numere pozitive, atunci*

$$\boxed{\log_a(AB) = \log_a A + \log_a B}$$

(logaritmul produsului a două numere este egal cu suma logaritmilor celor două numere).

Într-adevăr, dacă $\log_a A = x$ și $\log_a B = y$, atunci $a^x = A$ și $a^y = B$. Cum $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, obținem $a^{x+y} = A \cdot B$ și deci $\log_a(AB) = x + y = \log_a A + \log_a B$.

Observație. Proprietatea se poate da pentru n numere pozitive $A_1, A_2, \ldots, A_n$, adică

$$\boxed{\log_a(A_1 A_2 \ldots A_n) = \log_a A_1 + \log_a A_2 + \ldots + \log_a A_n}$$

2° *Dacă A și B sînt două numere pozitive, atunci*

$$\boxed{\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B}$$

(logaritmul cîtului a două numere este egal cu diferența dintre logaritmul numărătorului și al numitorului).

Într-adevăr, ţinînd cont de proprietatea 1°, avem $\log_a A = \log_a \left(\frac{A}{B} \cdot B\right) =$ $= \log_a \frac{A}{B} + \log_a B$, de unde rezultă că $\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$.

Observaţie. Dacă punem $A = 1$ şi ţinem cont că $\log_a 1 = 0$, obţinem egalitatea:

$$\boxed{\log_a \frac{1}{B} = -\log_a B}$$

3° *Dacă A este un număr pozitiv şi m un număr real arbitrar, atunci*

$$\boxed{\log_a A^m = m \log_a A}$$

(logaritmul puterii unui număr este egal cu produsul dintre exponentul puterii şi logaritmul numărului).

Într-adevăr, dacă $\log_a A = x$, atunci $a^x = A$. Dar atunci $A^m = (a^x)^m =$ $= a^{mx}$ şi deci $\log_a A^m = mx = m \log_a A$.

4° *Dacă A este un număr pozitiv şi n un număr natural* ($n \geqslant 2$), *atunci*

$$\boxed{\log_a \sqrt[n]{A} = \frac{\log_a A}{n}}$$

(logaritmul unui radical dintr-un număr este egal cu cîtul dintre logaritmul numărului şi ordinul radicalului).

Într-adevăr, proprietatea 4° este un caz particular al proprietăţii 3°, punînd $m = \frac{1}{n}$.

Exemple. 1) Să calculăm $\log_3 75$.

Avem $\log_3 75 = \log_3(3 \cdot 25) = \log_3 3 + \log_3 25 = 1 + \log_3 5^2 = 1 + 2\log_3 5$.

2) Să calculăm $\log_2 1\,000 - \log_2 125$.

Avem $\log_2 1\,000 - \log_2 125 = \log_2 \frac{1\,000}{125} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$.

3) Să calculăm $\log_{10} 0,18 - \log_{10} 180$.

Avem $\log_{10} 0,18 - \log_{10} 180 = \log_{10} \frac{0,18}{180} = \log_{10} \frac{1}{1\,000} = \log_{10} 10^{-3} = -3$.

4) Să calculăm $\log_6 \frac{1}{18} + \log_6 \frac{1}{12}$.

Avem $\log_6 \frac{1}{18} + \log_6 \frac{1}{12} = -\log_6 18 - \log_6 12 = -(\log_6 18 + \log_6 12) =$ $= -\log_6(18 \cdot 12) = -\log_6 6^3 = -3$.

5) Să calculăm $\log_2 \sqrt[4]{8}$.

Avem $\log_2 \sqrt[4]{8} = \frac{1}{4}\log_2 8 = \frac{1}{4}\log_2 2^3 = \frac{3}{4}\log_2 2 = \frac{3}{4}$.

5) Să calculăm $\log_3 \sqrt[5]{81}$.

Avem $\log_3 \sqrt[5]{81} = \frac{1}{5}\log_3 81 = \frac{1}{5}\log_3 3^4 = \frac{4}{5}\log_3 3$.

2.4. Schimbarea bazei logaritmului aceluiaşi număr

Dacă a şi b sînt două numere pozitive diferite de 1, iar A un număr pozitiv oarecare, are loc egalitatea:

$$\boxed{\log_a A = \log_b A \cdot \log_a b}$$

Într-adevăr, dacă $\log_a A = x$ şi $\log_b A = y$, atunci avem $a^x = A$ şi $b^y = A$ de unde obţinem $a^x = b^y$. Dar atunci $\log_a a^x = \log_a b^y$ sau $x \log_a a = y \log_a b$. Cum $\log_a a = 1$, avem $x = y \log_a b$, adică $\log_a A = \log_b A \cdot \log_a b$.

Observaţie. Dacă în egalitatea de mai sus $A = a$, obţinem $\log_a a = \log_b a \cdot \log_a b$. Cum $\log_a a = 1$, rezultă că:

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

Exemple. 1) Să se scrie $\log_2 x$ în funcţie de $\log_4 x$.

Avem $\log_2 x = \log_4 x \cdot \log_2 4 = 2 \log_4 x$.

2) Să se arate că expresia $E = \dfrac{\log_2 x}{\log_5 x}$ nu depinde de x.

Într-adevăr, $E = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 x \cdot \log_5 2} = \dfrac{1}{\log_5 2} = \log_2 5$.

3) Să se arate că $\log_2 6 + \log_6 2 > 2$.

Avem $\log_2 6 + \log_6 2 = \log_2 6 + \dfrac{1}{\log_2 6}$. Deci trebuie să arătăm că $\log_2 6 + \dfrac{1}{\log_2 6} > 2$, sau $(\log_2 6)^2 - 2 \log_2 6 + 1 > 0$, sau încă $(\log_2 6 - 1)^2 > 0$, inegalitate evidentă deoarece $\log_2 6 \neq 1$.

2.5. Operaţia de logaritmare a unei expresii

De multe ori în practică sîntem puşi în situaţia să determinăm valoarea aproximativă a unui număr dat printr-o expresie în care apar radicali de ordin foarte mare. De exemplu, să considerăm numărul:

$$x = \frac{17^3 \sqrt[4]{131} \cdot \sqrt[3]{92}}{\sqrt[5]{37 \cdot 98 \cdot 23}} \qquad (1)$$

şi vrem să determinăm o valoare aproximativă a numărului x. Vom logaritma expresia (1) într-o anumită bază convenabilă a. Folosind proprietăţile logaritmilor obţinem:

$$\log_a x = \log_a (17^3 \sqrt[4]{131} \sqrt[3]{92}) - \log_a \sqrt[5]{37 \cdot 98 \cdot 23} = \log_a 17^3 + \log_a \sqrt[4]{131} +$$

$$+ \log_a \sqrt[3]{92} - \frac{\log_a (37 \cdot 98 \cdot 23)}{5} = 3\log_a 17 + \frac{1}{4} \log_a 131 + \frac{1}{3} \log_a 92 -$$

$$- \frac{1}{5} \log_a 37 - \frac{1}{5} \log_a 98 - \frac{1}{5} \log_a 23.$$

Deci am obținut egalitatea:

$$\log_a x = 3\log_a 17 + \frac{1}{4}\log_a 131 + \frac{1}{3}\log_a 92 - \frac{1}{5}\log_a 37 -$$
$$- \frac{1}{5}\log_a 98 - \frac{1}{5}\log_a 23. \qquad (2)$$

Utilizînd tabelele de logaritmi (a se vedea § 3) din egalitatea (2) putem să determinăm o valoare aproximativă pentru x.

În general, dacă E este o expresie algebrică în care apar produse de puteri și radicali, putem să-i asociem, exact ca în exemplu (1), o expresie, notată $\log E$, în care apar sume (diferențe) de logaritmi înmulțite eventual cu anumite numere raționale. Operația prin care expresiei E i se asociază expresia $\log E$ se numește „operație de logaritmare".

Exemple: 1) Fie $E = a^2\sqrt[7]{ab^6}$.

Prin operația de logaritmare obținem:

$$\log_c E = \log_c (a^2\sqrt[7]{ab^6}) = \log_c a^2 + \log_c \sqrt[7]{ab^6} = 2\log_c a + \frac{1}{7}\log_c a + \frac{6}{7}\log_c b.$$

2) Fie $E = \sqrt[4]{\frac{a^3}{b^5}}$. Prin operația de logaritmare obținem expresia

$$\log_c E = \log_c \sqrt[4]{\frac{a^3}{b^5}} = \frac{1}{4}\log_c \frac{a^3}{b^5} = \frac{1}{4}(\log_c a^3 - \log_c b^5) = \frac{3}{4}\log_c a - \frac{5}{4}\log_c b.$$

Observație. Adesea în calcule este nevoie să se facă și operația inversă, adică unei expresii în care intervin logaritmi să-i asociem o expresie fără logaritmi.

De exemplu, fie expresia

$$\log_c x = 2\log_c a - \frac{1}{2}\log_c b - 3\log_c 3.$$

Folosind proprietățile logaritmilor avem:

$$\log_c x = \log_c a^2 - \log_c \sqrt{b} - \log_c 3^3 = \log_c \frac{a^2}{\sqrt{b}\cdot 3^3} = \log_c \frac{a^2}{27\sqrt{b}},$$

de unde obținem că $x = \frac{a^2}{27\sqrt{b}}$.

Exerciții

1. Să se determine valorile lui x pentru ca următorii logaritmi să aibă sens:

a) $\log_2(1-x)$; b) $\log_3(1-x^2)$; c) $\log_{\frac{1}{2}}(1+x^2)$;

d) $\log_4(x^2+x-2)$; e) $\log_3(-x^2+5x-6)$; f) $\log_5(x^2-x+1)$;

g) $\log_4(\log_2 x)$; h) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 x)$; i) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_{\frac{1}{2}} x)$.

2. Care din următoarele numere este mai mare?

a) $\log_3 4$ sau $\log_2 5$;   b) 2 sau $\log_3 10$;

c) $\log_6 \frac{1}{2}$ sau $\log_5 \frac{1}{7}$;   d) 3 sau $\log_2 7$.

3. Pentru ce valori ale lui x au loc inegalităţile:

a) $\log_3 x > \log_3 4$;   b) $\log_{\frac{1}{2}}(2x) \geqslant \log_{\frac{1}{2}} 5$;

c) $\log_2 x^2 \geqslant \log_2 8$;   d) $\log_6(x^2 - 1) \leqslant \log_6(4x + 4)$.

4. Pornind de la graficul funcţiei logaritmice să se construiască graficele următoarelor funcţii:

a) $f : (-1, +\infty) \to \mathbf{R},\ f(x) = \log_2(1 + x)$;
b) $f : (0, +\infty) \to \mathbf{R},\ f(x) = \log_2 x^3$;
c) $f : (1, +\infty) \to \mathbf{R},\ f(x) = \log_5(x - 1)$;
d) $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R},\ f(x) = \log_5 x^2$;
e) $f : (2, +\infty) \to \mathbf{R},\ f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 2)$;
f) $f : \mathbf{R} \setminus \{3\} \to \mathbf{R},\ f(x) = \log_6 | x - 3 |$.

5. Să se calculeze:

a) $\mathrm{lcg}_2 5 + \log_2 \frac{4}{5}$;   b) $\log_{12} 2 + \log_{12} 72$;

c) $\log_5 1\,000 - \log_5 40$;   d) $\log_6 7 - \log_6 \frac{7}{36}$;

e) $\log_{0,1} 50 - \log_{0,1} 0,5$;   f) $\log_4 6 + \log_4 8 - \log_4 3$;

g) $\log_{\frac{1}{2}} 3 - \log_{\frac{1}{2}} 12 + \log_{\frac{1}{2}} 2$;   h) $\log_{0,1} 5 + \log_{0,1} 4 - \log_{0,1} 2$.

6. Ştiind că $\log_{10} 7 \approx 0,84510$ şi $\log_{10} 5 \approx 0,69897$ să se calculeze:

a) $\log_{10} 0,7$; b) $\log_{10} \sqrt[3]{7}$; c) $\log_{10} 35$; d) $\log_{10} 175$; e) $\log_{10} 7\sqrt{5}$.

7. Să se arate că expresiile:

a) $E = \dfrac{\log_7 x^2}{\log_8 x^2}$;   b) $E = \dfrac{\log_2 x + \log_2 \sqrt{x}}{\log_3 x + \log_3 \sqrt{x}}$;   c) $E = \dfrac{\log_x \sqrt{7}}{\log_x 7}$

nu depind de x.

8. Să se logaritmeze expresiile:

a) $E = 41^2 \sqrt[13]{41 \cdot 37^5}$; b) $E = \dfrac{31^3 \sqrt[7]{41 \cdot 33^4}}{17^2 \sqrt[3]{23^3 \cdot 29}}$; c) $E = a^3 \sqrt[5]{ab^3c}$;

d) $E = 23a^2 \sqrt[3]{b^2a^5}$; e) $E = \sqrt[6]{\left(\dfrac{a}{5b}\right)^7}$; f) $E = \left(\sqrt{\dfrac{a^3}{2b}}\right)^3$; g) $E = \dfrac{21}{4} \sqrt[5]{a\sqrt[3]{a}}$;

h) $E = \dfrac{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a}}}}}{b\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b}}}}}$; i) $E = \dfrac{2(a - b)}{3(a + b)} \sqrt{\dfrac{a + b}{a - b}}$; j) $E = \dfrac{\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}}{\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}}}}$.

9. Să se determine expresia lui x astfel încît să avem:

a) $\log_a x = \log_a 3 + \log_a 4 - \log_a 5$; b) $\log_a x = 2\log_a 7 + 3\log_a 6 - 4\log_a 5$;

c) $\log_2 x = 2\log_2 a + 3\log_2(a+b) - 4\log_2(a-b)$;

d) $\log_4 x = -\frac{1}{2}\log_4(a+b) + \frac{1}{4}\left[\log_4(a-b) - \frac{2}{3}\log_4(a+b) + \frac{2}{3}\log_4(2b) - \frac{1}{2}\log_4(2a)\right]$.

§ 3. Logaritmi zecimali

3.1. Logaritmi zecimali şi proprietăţile lor

Definiţia 3.1.1. **Dacă a este un număr real, se numeşte** *partea întreagă a lui a*, **cel mai mare număr întreg care este cel mult egal cu a.**

Partea întreagă a lui a se notează cu $[a]$. Conform definiţiei avem $[a]\in\mathbf{Z}$ şi $[a] \leqslant a$; dacă $[a] \leqslant n \leqslant a$, $n \in \mathbf{Z}$, atunci $n = [a]$. Altfel spus, partea întreagă a lui a este un număr întreg n, cu proprietatea $n \leqslant a < n+1$. Deoarece oricare ar fi numărul real a, în intervalul $(a-1, a]$ există un număr întreg şi numai unul, rezultă că $a - 1 < [a] \leqslant a$.

De exemplu: $[3,2] = 3$; $[0,245] = 0$; $[6] = 6$; partea întreagă a numărului $-4{,}7$ este -5, deoarece $-5 < -4{,}7 < -4$. Analog se obţine: $[-5{,}791] = -6$; $[-0{,}231] = -1$, $[-\pi] = [-3{,}141\ldots] = -4$.

Se observă că dacă a este un număr real oarecare şi n este întreg, atunci $[a+n] = [a] + n$.

Definiţia 3.1.2. **Diferenţa dintre numărul a şi partea sa întreagă $[a]$ se numeşte** *partea fracţionară* **a lui a şi se notează cu $\{a\}$.**

Deci $\{a\} = a - [a]$. Deoarece $[a] \leqslant a < [a] + 1$, rezultă că $0 \leqslant \{a\} < 1$.

De exemplu: $\{2{,}4\} = 2{,}4 - 2 = 0{,}4$; $\{0{,}261\} = 0{,}261 - 0 = 0{,}261$; $\{-6{,}81\} = -6{,}81 - (-7) = 0{,}19$; $\{-0{,}231\} = -0{,}231 - (-1) = 0{,}769$.

Orice număr real a este suma dintre partea sa întreagă şi partea sa fracţionară: $a = [a] + \{a\}$.

Se observă că dacă numărul real a are scrierea ca fracţie zecimală $a = a_0, a_1a_2a_3\ldots$, cu $a_0 \in \mathbf{Z}$ şi $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sînt numere naturale cuprinse între 0 şi 9 atunci

$$[a] = \begin{cases} a_0 & \text{, dacă } a \geqslant 0 \text{ sau } a \in \mathbf{Z}, \\ a_0 - 1, & \text{dacă } a < 0 \text{ şi } a \notin \mathbf{Z}, \end{cases}$$

$$\text{iar } \{a\} = \begin{cases} 0, a_1a_2a_3\ldots, & \text{dacă } a \geqslant 0 \text{ sau } a \in \mathbf{Z}, \\ 1 - 0, a_1a_2a_3\ldots, & \text{dacă } a < 0 \text{ şi } a \notin \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Dacă $a < 0$, $a \notin \mathbf{Z}$ şi $|[a]| = b_0$, $\{a\} = 0, b_1b_2b_3\ldots$, atunci vom scrie numărul a în următoarea formă:

$$a = \bar{b}_0, b_1b_2b_3\ldots\ .$$

De exemplu, $-4{,}3 = [-4{,}3] + \{-4{,}3\} = -5 + 0{,}7 = \bar{5}{,}7$.

În practică se folosesc logaritmii în bază zece care se mai numesc şi logaritmi zecimali. Aceştia se notează cu lg, în loc de log; de aceea nu mai este nevoie să se specifice baza. Astfel, vom scrie lg 101 în loc de $\log_{10}101$ şi lg 5 în loc de $\log_{10}5$ ş.a.m.d.

Logaritmii zecimali au toate proprietăţile pe care le au logaritmii în bază supraunitară. Astfel, logaritmul zecimal al unui număr mai mare decît 1 este pozitiv, iar logaritmul zecimal al unui număr mai mic decît 1 este negativ. Dacă două numere pozitive sînt într-o anumită ordine, atunci logaritmii lor zecimali sînt în aceeaşi ordine. Dacă α este un număr real oarecare şi a este pozitiv, atunci $\lg a^{\alpha} = \alpha \lg a$. Dacă a şi b sînt pozitive, atunci $\lg ab = \lg a + \lg b$. În particular dacă $a = 10^n$, atunci $\lg 10^n = n$ şi $\lg 10^n \cdot b = n + \lg b$.

De exemplu: $\lg 10\sqrt{10} = \lg 10^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$; $\lg 10\,000 = \lg 10^4 = 4$; $\lg 100 = \lg 10^2 = 2$; $\lg 0{,}001 = \lg 10^{-3} = -3$; $\lg 56{,}81 = \lg 5681 \cdot 10^{-2} = -2 + \lg 5681$.

Din aceste proprietăţi generale, deducem următoarele *proprietăţi ale logaritmului zecimal*:

1° Logaritmul unui număr care scris în baza zece este de forma 1 urmat de n zerouri, este egal cu n; adică, dacă $a = 1\underbrace{00\ldots0}_{n}$, atunci $\lg a = n$.

2° Logaritmul unui număr subunitar care scris în baza zece are după virgulă n cifre de zero urmate de cifra 1, este egal cu $-n-1$; adică pentru $a = 0{,}\underbrace{00\ldots0}_{n}1$, avem $\lg a = \lg 10^{-n-1} = -n-1$.

3° Dacă $10^n < a < 10^{n+1}$, atunci $\lg 10^n < \lg a < \lg 10^{n+1}$ şi deci $n < \lg a < n+1$.

De exemplu, dacă $a = 87{,}23$, atunci $10 < 87{,}23 < 100$ şi deci $1 < \lg a < 2$.

Deducem că logaritmul oricărui număr care nu este egal cu o putere întreagă a lui 10, este un număr zecimal (nu este număr întreg).

Definiţia 3.1.3. Dacă a este un număr pozitiv vom numi *caracteristica logaritmului* său zecimal, numărul întreg $[\lg a]$; vom numi *mantisa logaritmului* lui a numărul $\{\lg a\}$.

Prin urmare avem $\lg a = [\lg a] + \{\lg a\}$. Caracteristica logaritmului lui a este cel mai mare număr întreg n cu proprietatea că $10^n \leqslant a$. Mai precis, caracteristica lui $\lg a$ este un număr întreg n, cu proprietatea că $10^n \leqslant a < 10^{n+1}$.

De exemplu, caracteristica lui lg 87,23 este 1; dacă $a = 4573$, atunci $1\,000 \leqslant a < 10\,000$, $3 < \lg 4573 < 4$, prin urmare caracteristica lui lg 4573 este 3; dacă $a = 0{,}0123$ atunci $10^{-2} < a < 10^{-1}$ şi deci caracteristica logaritmului său este -2.

Din cele de mai sus rezultă următoarele două reguli de calculare a caracteristicii logaritmului zecimal al unui număr a:

i) *Dacă un număr supraunitar scris în formă zecimală are n cifre la stînga virgulei (adică la partea sa întreagă), atunci caracteristica logaritmului său este* $n - 1$.

ii) *Caracteristica unui număr subunitar scris în formă zecimală se obține în felul următor: se ia numărul de zerouri situate la stînga primei cifre diferite de zero (inclusiv zeroul din stînga virgulei), numărul natural astfel obținut fiind luat cu semnul minus.*

De exemplu, dacă $a = 0{,}57$, atunci $[\lg 0{,}57] = -1$; dacă $a = 0{,}0012$, $[\lg a] = -3$.

4° Dacă înmulțim un număr întreg a cu o putere întreagă a lui 10, atunci caracteristica logaritmului numărului astfel obținut se obține din caracteristica logaritmului lui a, la care se adaugă exponentul lui 10. Într-adevăr, avem $[\lg 10^n \cdot a] = [n + \lg a] = n + [\lg a]$. De exemplu, dacă înmulțim pe a cu 10, 100, 1000 etc., atunci caracteristica numărului obținut crește cu o unitate, cu două, cu trei etc.; dacă împărțim pe a cu 10, 100, 1000 etc., caracteristica scade cu 1, cu 2, cu 3 etc.

5° Mantisa logaritmului unui număr a nu se modifică, dacă înmulțim pe a cu o putere întreagă a lui 10. Într-adevăr, avem

$$\{\lg 10^n a\} = \lg 10^n \cdot a - [\lg 10^n \cdot a] = n + \lg a - [n + \lg a] =$$
$$= n + \lg a - n - [\lg a] = \lg a - [\lg a] = \{\lg a\}.$$

Cu ajutorul regulilor enumerate pînă acum, deducem că dificultatea aflării logaritmului unui număr constă în calcularea mantisei. Aceasta se află cu ajutorul tabelelor de logaritmi.

3.2. Tabele de logaritmi cu 5 zecimale

Cu ajutorul acestor tabele se pot afla mantisele logaritmilor numerelor de la 1 la 9999, cu o aproximație de 0,00001. Această aproximație este în general suficient de bună pentru calculele din practică. Pe prima pagină a tabelelor sînt scrise mantisele logaritmilor de la 1 pînă la 100; în coloana cu indicatorul N sînt scrise numerele, iar în dreapta lor, în coloana lg, se află mantisele respective.

Celelalte pagini sînt aranjate în felul următor: în coloana întîi cu indicativul N, sînt scrise numerele de la 100 la 9999 și urmează apoi zece coloane cu indicativul 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 în care sînt scrise mantisele logaritmilor numerelor cu patru cifre.

Pentru a afla mantisa logaritmului numărului cu patru cifre $n = a_1a_2a_3a_4$, se procedează astfel: se caută în coloana N numărul $a_1a_2a_3$, obținut prin tăierea cifrei unităților în numărul n (dacă n are trei cifre, se caută în coloana N chiar numărul n), apoi fixăm coloana cu indicativul a_4; luăm primele două cifre ale mantisei logaritmului lui $a_1a_2a_3$ din coloana 0, apoi la intersecția liniei orizontale a lui $a_1a_2a_3$ cu coloana a_4 se găsesc restul de trei cifre ale mantisei (dacă n are doar trei cifre vom căuta logaritmul său în coloana 0).

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
300	47 712	727	741	756	700	784	799	813	828	842
301	857	871	885	900	914	929	943	958	972	986
302	48 001	015	029	044	058	073	087	101	116	130
303	144	159	173	187	202	216	230	244	259	273
304	287	302	316	330	344	359	373	387	401	416
305	430	444	458	473	487	501	515	530	544	558
306	572	586	601	615	629	643	657	671	686	700
307	714	728	742	756	770	785	799	813	827	841
308	855	869	883	897	911	926	940	954	968	982
309	996	*010	*024	*038	*052	*066	*080	*094	*108	*122
310	49 136	150	164	178	192	206	220	234	248	262
311	276	290	304	318	332	346	360	374	388	402
312	415	429	443	457	471	485	499	513	527	541
313	554	*568	583	596	610	624	638	651	665	679
314	693	707	721	734	748	762	766	790	803	817
315	831	845	859	872	886	900	914	927	941	955
316	969	982	996	*010	*024	*037	*051	*065	*079	*092
317	50 106	120	133	147	161	174	188	202	215	229
318	243	256	270	284	297	311	325	338	352	365
319	379	393	406	420	433	447	461	474	488	501

Exemple. 1) Dacă vom căuta în tabele lg 3153 procedăm în felul următor: deoarece 3153 are 4 cifre, caracteristica sa este 3 iar pentru a afla mantisa, căutăm în coloana N numărul 315. La intersecția liniei corespunzătoare acestui număr cu coloana 3, vom găsi numărul 49872, deci

$$\lg 3153 \approx 3{,}49872.$$

2) Să aflăm logaritmul lui 1,25. Deoarece 1,25 are o singură cifră nenulă la stînga virgulei, caracteristica logaritmului său este 0 (conform unor proprietăți stabilite). Mantisa este aceeași cu a numărului 125 din coloana N a tabelelor; deci obținem

$$\lg 1{,}25 \approx 0{,}09691.$$

3) Logaritmul numărului 81,13 are caracteristica 1, iar mantisa aceeași cu a numărului 8113 pe care o găsim în tabele. Obținem astfel

$$\lg 81{,}13 \approx 1{,}90918.$$

4) Logaritmul numărului 0,0003145 are caracteristica —4, iar în tabele vom găsi mantisa lui în dreptul numărului 314, în coloana 5. Obținem astfel

$$\lg 0{,}0003145 \approx \bar{4}{,}49762.$$

Logaritmul unui număr cu cinci zecimale. Să aflăm de exemplu lg 32437 cu aproximație cît mai bună. Procedăm astfel: caracteristica este 4, iar mantisa este aceeași ca pentru lg 3243,7. Observăm că 3243,7 este cuprins între

3243 și 3244, deci lg 3243,7 este cuprins între lg 3243 și lg 3244. Să admitem că pe porțiunea dintre 3243 și 3244 logaritmul este proporțional cu creșterea numerelor. Din tabele obținem:

$$\lg 3243 \approx 3{,}51095,$$

$$\lg 3244 \approx 3{,}51108$$

și rezultă că pentru o creștere a numărului cu 1, logaritmul se mărește cu $0{,}00013 = 13 \cdot 10^{-5}$. Deci, dacă numărul crește de la 3243 la 3243,7, adică cu 0,7, logaritmul său va crește cu $13 \cdot 10^{-5} \times 0{,}7 = 9{,}1 \cdot 10^{-5} = 0{,}000091$. Deoarece lucrăm numai cu 5 zecimale, rotunjim pe 0,000091 la 0,00009 și vom avea

$$\lg 3243{,}7 \approx 4{,}51095 + 0{,}00009 = 4{,}51104.$$

În practică este comod să fie așezate calculele de mai sus în felul următor:

$$\begin{array}{l} \lg 3243 = 3{,}51095 \\ \underline{\lg 3244 = 3{,}51108} \\ \qquad\qquad\quad \underline{13} \\ \quad 1 \ldots\ldots\ldots\ldots 13 \\ \quad 0{,}7 \ldots\ldots\ldots 13 \times 0{,}7 = 9{,}1 \approx 9 \\ \lg 32437 \approx 4{,}51095 + 0{,}00009 = 4{,}51104. \end{array}$$

Operația prin care am aflat logaritmul de mai sus se numește interpolare. Ea oferă posibilitatea unui calcul *aproximativ*, cu eroare destul de mică, pentru aflarea mantisei logaritmului unui număr cu cinci sau mai multe cifre. În realitate *creșterile logaritmilor nu sînt proporționale cu creșterile numerelor*, deoarece, de exemplu, $\lg 10 = 1$; $\lg 100 = 2$ și prin urmare logaritmul s-a mărit de 2 ori în timp ce numărul s-a mărit de 10 ori. Cînd însă creșterile sînt mici, putem să considerăm creșterea logaritmilor aproximativ proporțională cu creșterea numerelor.

Aflarea unui număr căruia i se cunoaște logaritmul.

Considerăm de exemplu problema următoare: să se afle numărul x știind că $\lg x = 3{,}49982$. Să căutăm mai întîi un număr a cărui mantisă a logaritmului să fie 0,49982. Pentru aceasta căutăm în coloana 0 a tabelelor de logaritmi, primul număr care începe cu cifrele 49, apoi urmărim în jos pe această coloană pînă ajungem la cel mai mare număr, mai mic decît 49982. Acesta este 49969. Urmărim apoi pe linia corespunzătoare acestuia pînă găsim numărul 49982 sau un număr cît mai apropiat de acesta. În cazul nostru găsim numărul 49982 în coloana 1, deci numărul căutat este un număr de forma $a_1a_2a_3a_4$, în care numărul $a_1a_2a_3$ este în coloana N, în aceeași linie cu mantisa 49982, iar a_4 este indicativul coloanei în care se găsește 49982, în cazul nostru $a_4 = 1$. Obținem numărul 3161. Deoarece numărul $\lg x$ are caracteristica 3, rezultă că x are 4 zecimale în stînga virgulei, deci $x \approx 3161$.

Procedeul descris ne ajută la calcularea puterilor lui 10, deoarece egalitatea $\lg x = 1$ este echivalentă cu $x = 10$. Prin urmare calculul lui x revine la aflarea lui 10^α, unde α este numărul dat. Ca şi aflarea logaritmului cu ajutorul tabelelor, acesta este un calcul *aproximativ*. Dacă numărul dat lg x nu se află în tabele, se procedează la interpolare, ca în cazul operaţiei inverse, de aflare a mantisei lui lg x cînd se cunoaşte x.

3.3. Operaţii cu logaritmi

Tabelele de logaritmi zecimali se pot întrebuinţa la efectuarea mai rapidă a unor calcule numerice complicate. Astfel proprietăţile următoare:

1° $\lg xy = \lg x + \lg y$;

2° $\lg \frac{x}{y} = \lg x - \lg y$;

3° $\lg x^n = n \lg x$;

4° $\lg \sqrt[n]{x} = \frac{\lg x}{n}$;

5° $\log_a x = \frac{\lg x}{\lg a}$,

ne permit ca în loc de o înmulţire să efectuăm o adunare, în loc de o împărţire să efectuăm o diferenţă, în loc de ridicare la putere să efectuăm o înmulţire, în loc de extragere de radical să efectuăm o împărţire. Proprietatea 5° reduce calcularea logaritmilor într-o bază oarecare la calcularea unor logaritmi zecimali.

Practic, trebuie să ştim deci să adunăm, să scădem, să înmulţim, sau să împărţim numere scrise sub forma

$n + \varepsilon$, cu $n \in \mathbf{Z}$ şi $0 < \varepsilon < 1$, unde n reprezintă caracteristica iar ε mantisa unui anumit logaritm.

Adunarea. Pentru a efectua adunarea mai multor logaritmi procedăm la fel ca la adunarea numerelor zecimale, ţinînd cont însă de unităţile care pot apărea la adunarea mantiselor; acestea se adaugă la caracteristică.

Exemple. 1) Să efectuăm adunarea:

$$\lg 3452 + \lg 253 + \lg 1{,}439.$$

În tabele găsim:

$$\lg 3452 \approx 3{,}53807;$$
$$\lg 253 \approx 2{,}40312;$$
$$\lg 1{,}439 \approx 0{,}15806.$$

Vom obţine:

$$\begin{array}{r} 3{,}53807 + \\ 2{,}40312 \\ \underline{0{,}15806} \\ 6{,}09925 \end{array}$$

2) Să efectuăm adunarea

$$\lg 345 + \lg 0{,}98 + \lg 75{,}43 + \lg 0{,}029.$$

Căutînd în tabele, rezultă următoarea adunare:

$$\begin{array}{r} 2,53782 + \\ \bar{1},99123 \\ 1,87754 \\ \bar{2},46240 \\ \hline 2,86899 \end{array}$$

Scăderea. Scăderea se poate reduce la o adunare, ținînd cont că pentru un număr scris sub forma $n + \varepsilon$ cu $n \in \mathbf{Z}$ și $0 < \varepsilon < 1$, avem $-(n + \varepsilon) = (-n - 1) + (1 - \varepsilon)$.

Exemplu. Să aflăm $\lg \frac{345}{5933}$.

Avem $\lg \frac{345}{5933} = \lg 345 - \lg 5933 \approx 2,53782 - 3,77327 = 2,53782 + \bar{4},22673 = \bar{2},76455$.

Înmulțirea cu un număr întreg. Pentru a înmulți un logaritm cu un număr întreg, înmulțim separat mantisa și separat caracteristica cu acel număr, adăugînd la caracteristică unitățile pozitive ce rezultă de la înmulțirea mantisei.

Exemple. 1) Să se calculeze $\lg (312,6)^8$.

Avem: $\lg(312,6)^8 = 8 \lg 312,6 \approx 8 \cdot 2,49499 = 19,95992$.

2) $\lg (0,0074)^6 = 6 \lg 0,0074 \approx 6 \cdot \bar{3},86923 = -18 + 6 \cdot 0,86923 = \overline{13},21538$.

Împărțirea cu un număr natural nenul. Această operație apare în calcularea unor logaritmi de tipul: $\lg \sqrt[n]{a} = \frac{\lg a}{n}$. Vom da trei exemple din care vor rezulta cazurile ce se pot ivi în astfel de situații.

Exemple: 1) Să se calculeze $\lg \sqrt[3]{520}$.

Obținem $\lg \sqrt[3]{520} = \frac{\lg 520}{3} \approx \frac{2,71600}{3} \approx 0,90533$.

În acest caz, caracteristica logaritmului lui 520 fiind pozitivă, nu am avut nici o dificultate, împărțirea efectuîndu-se în mod obișnuit.

2) Să se calculeze $\lg \sqrt[3]{0,00786}$.

Avem $\lg \sqrt[3]{0,00786} = \frac{\lg 0,00786}{3} \approx \frac{\bar{3},89542}{3} = \frac{-3 + 0,89542}{3} = -1 + 0,29847 = \bar{1},29847$.

În acest caz caracteristica este negativă, dar ea împărțindu-se exact la împărțitorul dat 3, am putut afla caracteristica cîtului și apoi mantisa lui, efectuînd împărțirile separat.

3) Să se calculeze $\lg \sqrt[5]{0,0458}$.

Obținem $\lg \sqrt[5]{0,0458} = \frac{\lg 0,0458}{5} \approx \frac{\bar{2},66087}{5} = \frac{-2 - 3 + 3 + 0,66087}{5} = \frac{-5 + 3,66087}{5} = \frac{-5}{5} + \frac{3,66087}{5} = -1 + 0,73217 = \bar{1},73217$.

Observăm că am redus în acest caz problema la o situație similară cu cea din exemplul 2). Pentru aceasta am scăzut și am adunat 3, astfel încît caracteristica să se împartă exact la numitorul 5, mantisa obținîndu-se prin împărțirea lui 3,66087 la 5. Deci în cazul în care caracteristica este negativă și nu este divizibilă la împărțitor, se scade un număr de unități pînă ce ea devine multiplu al împărțitorului și se efectuează împărțirea $\left(\text{în cazul de mai sus } \frac{-5}{5} = -1\right)$. În același timp se adaugă același număr de unități mantisei, numărul astfel obținut împărțindu-se separat la numitorul comun (în cazul nostru 5). Din prima împărțire rezultă caracteristica, iar din a doua, mantisa numărului cerut.

Împărțirea logaritmilor. În cazul ecuațiilor de forma $a^x = b$, a, $b > 0$, $a \neq 1$, apare problema împărțirii a doi logaritmi, deoarece egalitatea $a^x = b$ este echivalentă pe rînd cu egalitățile:

$$\lg a^x = \lg b,$$

$$x \lg a = \lg b,$$

$$x = \frac{\lg b}{\lg a}.$$

În astfel de situații este preferabil să se scrie atît $\lg a$ cît și $\lg b$ sub forma zecimală obișnuită (deci cu semn în față) și să se efectueze împărțirea în mod obișnuit.

Exemplu:

$$\frac{\lg 0{,}458}{\lg 65} \approx \frac{\bar{1}{,}66087}{1{,}81291} = \frac{-1 + 0{,}66087}{1{,}81291} = -\frac{0{,}33913}{1{,}81291} \approx -0{,}18707.$$

Efectuarea unor calcule numerice complicate cu ajutorul logaritmilor. Folosind proprietățile logaritmilor și utilizînd tabelele de logaritmi, se pot înlocui calculele lungi și dificile, cu calcule simple de tipul sumei și diferenței, sau de multiplicare și împărțire cu numere naturale.

Exemple. 1) Să se calculeze $\sqrt[3]{125 \cdot 4593}$. Vom proceda în acest caz, ca și în cele ce urmează în felul următor: notăm cu x numărul care trebuie aflat, calculăm întîi $\lg x$, cu ajutorul tabelelor și calculelor învățate, apoi aflăm din tabele numărul x al cărui logaritm îl cunoaștem.

Astfel avem în exemplul de mai sus:

$$\lg x = \frac{\lg 125 + \lg 4593}{3} \approx \frac{2{,}09691 + 3{,}66210}{3} = \frac{5{,}75901}{3} = 1{,}91967.$$

Căutăm apoi în tabele numărul al cărui logaritm are mantisa 0,91967. Obținem numărul din patru cifre 8311 și ținînd cont că $\lg x$ are caracteristica 1, deducem că x are două cifre la stînga virgulei, deci:

$$x \approx 83{,}11.$$

2) Să se calculeze $x = \sqrt[5]{\sqrt[4]{35} - \sqrt[6]{30}}$.

Vom calcula mai întîi $y_1 = \sqrt[4]{35}$ și $y_2 = \sqrt[6]{30}$. Astfel obținem $\lg y_1 = \frac{\lg 35}{4} \approx$ $\approx \frac{1{,}54407}{4} \approx 0{,}38602$. Căutînd în tabele numărul cu mantisa 0,38602, obținem $y_1 \approx 2{,}432$. Analog obținem $\lg y_2 = \frac{\lg 30}{6} \approx \frac{1{,}47712}{6} \approx 0{,}24619$ și deci $y_2 = 1{,}763$. Prin urmare $\sqrt[4]{35} - \sqrt[6]{30} \approx 0{,}669$.

În final avem că

$$\lg x \approx \lg \sqrt[5]{0,669} = \frac{\lg 0,669}{5} \approx \frac{\overline{1},82543}{5} = \frac{-1+0,82543}{5} = \frac{-5+4,82543}{5} = \overline{1},96509.$$

Căutînd în tabele şi ţinînd cont că x are o singură cifră de zero în stînga virgulei (caracteristica lui $\lg x$ fiind -1) rezultă că $x \approx 0,9228$.

Logaritmi naturali

În matematica superioară, apar foarte des logaritmi care au ca bază numărul iraţional, notat cu e, $e = 2,718281828\ldots$. Folosirea acestor logaritmi permite simplificarea multor formule matematice. Logaritmi în baza e apar în rezolvarea unor probleme fizice şi intră în mod natural în descrierea matematică a unor procese chimice, biologice ş.a. Logaritmul natural al numărului a se notează $\ln a$.

Exerciţii

1. Să se calculeze caracteristica logaritmilor zecimali ai numerelor: 2; 57,38; 632,7; 5237,81; 0,024; 0,99; 0,0003; 54; 231,002.

2. Ştiind că $\lg 2 \approx 0,301$ şi $\lg 3 = 0,477$, să se calculeze:

   $\lg 6$; $\lg 15$; $\lg 32$; $\lg 30$; $\lg \frac{1}{12}$.

3. Să se calculeze cu ajutorul tabelelor de logaritmi, logaritmii zecimali ai următoarelor numere: $37 \cdot 990$; 235; 99; 301; 1457; 1,231; 54,36; 10325; 26739; 263,56; 35,074; 0,0028631; $28 \cdot 534,215$.

4. Să se efectueze operaţiile:

   a) $\overline{1},4792 + \overline{2},4506 + 3,0025$; b) $\overline{7},0032 + 3,8265 + \overline{3},8502$; c) $0,9329 - \overline{1},2543 - \overline{5},06$;

   d) $\overline{2},4645 - \overline{4},3732 + \overline{5},2104 - \overline{8},3714$.

5. Să se efectueze următoarele operaţii, rotunjindu-se cu o eroare mai mică decît 0,00001.

   a) $\overline{2},21455 \cdot 0,36$; b) $\overline{4} \cdot 51203 \cdot 9,8$; c) $\overline{1},02561 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$; d) $\overline{6},45437 \cdot (-0,2)$.

6. Folosind tabelele de logaritmi, să se calculeze:

   a) $\lg \sqrt[5]{2431}$; b) $\lg(53,24)^6$; c) $\lg(21,4)^3 \cdot \sqrt[4]{6531}$; d) $\log_2 5$; e) $\log_9 17$; f) $\log_{0,024} 0,312$.

7. Să se calculeze x cunoscînd logaritmul său zecimal:

   a) $\lg x = 0,36253$; b) $\lg x = 4,00021$; c) $\lg x = -0,39285$; d) $\lg x = 2,54401$;

   e) $\lg x = -1,02574$.

8. Să se efectueze, cu ajutorul tabelelor de logaritmi, următoarele calcule:

   a) $\dfrac{12,48^3 \sqrt[4]{5,76}}{\sqrt[3]{673,8} \cdot 1,842}$; b) $\sqrt[6]{\dfrac{2,591 \cdot \sqrt[3]{0,0836}}{1,147^2}}$; c) $\sqrt[3]{\dfrac{(3,89)^{-4}(-0,1536)}{0,924^6}}$;

   d) $\sqrt[3]{5\sqrt[6]{2} + \sqrt[5]{3} - 2\sqrt[6]{5}}$.

§ 4. Ecuații exponențiale și ecuații logaritmice

4.1. Ecuații exponențiale

Ecuația exponențială este o ecuație în care necunoscuta este exponent, sau o ecuație în care este exponent o expresie care conține necunoscuta.

Astfel ecuațiile: $3^x = 2^{x-1}$; $5^{x^2-6} - 1 = 0$ și $2^{x+3} + 4^{x+1} = 320$ sînt ecuații exponențiale.

În practică, cînd avem de rezolvat o ecuație exponențială, vom proceda astfel: folosind diverse substituții precum și proprietățile funcției exponențiale, vom căuta s-o reducem la rezolvarea unor ecuații simple, de regulă de gradul întîi sau gradul al doilea.

Cele mai multe ecuații exponențiale sînt reductibile la forma $a^{f(x)} = b$, cu $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$.

Datorită injectivității funcției logaritmice, această ecuație este echivalentă cu

$$f(x) = \log_a b = \frac{\lg b}{\lg a}.$$

În aplicațiile practice, în aceste ecuații b se poate de obicei exprima ca putere a lui a,

$$b = a^\alpha,$$

de unde rezultă ecuația

$$f(x) = \alpha.$$

Exemplu. Să se rezolve ecuațiile $2^{2x} = 64$; $3^{2^x} = 81$; $5^{x^2-x-2} = 625$.
Vom avea $2^{2x} = 2^6$, de unde rezultă $2x = 6$, adică $x = 3$.

Din ecuația $3^{2^x} = 81$, $3^{2^x} = 3^4$, deducem $2^x = 4$, $2^x = 2^2$ și deci $x = 2$.

Pentru ultima ecuație obținem $5^{x^2-x-2} = 5^4$, deci $x^2 - x - 2 = 4$, de unde rezultă

$$x^2 - x - 6 = 0.$$

Avem în final $x_1 = 3$ și $x_2 = -2$.

Dacă într-o ecuație de forma $a^x = b$, b nu se poate exprima ca putere a lui a, atunci ecuația se rezolvă folosind tabelele de logaritmi, ținînd cont că

$$x = \lg_a b = \frac{\lg b}{\lg a}.$$

Să rezolvăm, de exemplu, ecuația $18^x = 3{,}1$.
Ea este echivalentă cu:

$$x = \frac{\lg 3{,}1}{\lg 18} \approx \frac{0{,}49136}{1{,}25527} \approx 0{,}39.$$

Unele ecuații exponențiale se aduc la forma mai generală $a^{f(x)} = a^{g(x)}$. Din această ecuație ținînd cont de injectivitatea funcției exponențiale, deducem: $f(x) = g(x)$, care apoi se rezolvă.

Exemple. 1) Să se rezolve ecuaţia $3^{x-6} = 3^{15-2x}$.

Obţinem $x - 6 = 15 - 2x$, deci $3x = 21$, $x = 7$.

2) Să se rezolve ecuaţia $49^x = \left(\frac{1}{7}\right)^{x^2}$.

Obţinem $7^{2x} = 7^{-x^2}$, deci

$$2x = -x^2, \text{ de unde deducem } x_1 = 0,\ x_2 = -2.$$

Există ecuaţii exponenţiale care nu se pot reduce la nici una din formele discutate.

Exemple. 1) $2^x = 3^{2x+1}$.

Ţinînd cont de injectivitatea funcţiei logaritmice, obţinem prin logaritmare ecuaţia echivalentă

$$x \lg 2 = (2x + 1)\lg 3 \text{ şi deci}$$

$$x(2 \lg 3 - \lg 2) = -\lg 3,$$

$$x = \frac{-\lg 3}{2 \lg 3 - \lg 2},$$

această ultimă expresie a lui x se calculează apoi cu aproximaţie, din tabele.

2) $5^{7^x} = 7^{5^x}$.

Logaritmînd deducem $7^x \lg 5 = 5^x \lg 7$; logaritmînd din nou obţinem $x \lg 7 + \lg \lg 5 = x \lg 5 + \lg \lg 7$ şi deci

$$x = \frac{\lg \lg 7 - \lg \lg 5}{\lg 7 - \lg 5},$$ expresie care se calculează cu aproximaţie din tabele.

3) $3^{2x} \cdot 5^{2x-3} = 7^{x-1} \cdot 4^{x+3}$.

Deducem că $2x \lg 3 + (2x - 3)\lg 5 = (x - 1)\lg 7 + (x + 3)\lg 4$, prin urmare $x(2 \lg 3 + 2 \lg 5 - \lg 7 - \lg 4) = 3 \lg 5 - \lg 7 + 3 \lg 4$; în final avem

$$x = \frac{3 \lg 5 - \lg 7 + 3 \lg 4}{2 \lg 3 + 2 \lg 5 - \lg 7 - \lg 4} = \frac{\lg \dfrac{125 \cdot 64}{7}}{\lg \dfrac{225}{28}} \approx \frac{3{,}05799}{0{,}90502};\ x \approx 3{,}367.$$

4) Să considerăm în cele ce urmează ecuaţia $4^x + 2^x = 272$.

Pentru a rezolva ecuaţii de acest tip vom observa mai întîi că putem scrie $2^{2x} + 2^x - 272 = 0$ şi deci făcînd substituţia $2^x = y$, obţinem:

$$y^2 + y - 272 = 0,$$

$$y_1 = 16,\ y_2 = -17.$$

Deoarece $2^x > 0$, rezultă că -17 nu poate fi egal cu 2^x şi deci singura soluţie se obţine din $2^x = 16$, $2^x = 2^4$, deci $x = 4$.

În unele situaţii, substituţia efectuată la exerciţiul precedent nu se poate face imediat în forma iniţială a exerciţiului. Să luăm, de exemplu, ecuaţia: $6^x + 4^x = 9^x$.

Vom împărţi ambii termeni cu 9^x şi obţinem

$$\left(\frac{6}{9}\right)^x + \left(\frac{4}{9}\right)^x = 1.$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = 1.$$

Făcînd substituţia $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$, obţinem $y^2 + y - 1 = 0$ şi deci

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}; \quad \text{deoarece} \quad \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0,$$

rezultă că singura soluţie a ecuaţiei o obţinem rezolvînd

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{şi deci} \quad x = \frac{\lg \frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\lg \frac{2}{3}}.$$

4.2. Ecuaţii logaritmice

Ecuaţiile logaritmice sînt ecuaţii în care expresiile ce conţin necunoscuta apar ca bază sau ca argument al unor logaritmi.

De exemplu: $\log_{x+1}(x+2) = 1$; $\lg(x^2 + x - 2) = 3$;
$\log_x(5x^2 + 3) = \lg(2x + 3) - 1$.

Rezolvarea unei ecuaţii de tipul $\log_{g(x)} f(x) = b$, folosind injectivitatea funcţiei exponenţiale, este echivalentă cu rezolvarea ecuaţiei $f(x) = g(x)^b$. Vom avea însă grijă ca soluţiile obţinute să satisfacă $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ $g(x) \neq 1$ pentru care expresia $\log_{g(x)} f(x)$ are sens.

La fel ca la ecuaţiile exponenţiale în practică cînd avem de rezolvat o ecuaţie logaritmică, vom proceda astfel: folosind diverse substituţii precum şi proprietăţile logaritmilor, vom căuta s-o reducem la rezolvarea unor ecuaţii simple, de regulă, de gradul întîi sau gradul al doilea.

Exemplu. Să se rezolve ecuaţia:

$$\log_x(x^2 - 3x + 6) = 2.$$

Obţinem $x^2 - 3x + 6 = x^2$ şi deci $3x = 6$, $x = 2$.
Deoarece pentru $x = 2 > 0$, expresia $x^2 - 3x + 6$ este pozitivă, rezultă că 2 este soluţie a ecuaţiei.

Rezolvarea altor ecuaţii se bazează pe injectivitatea funcţiei logaritmice, şi anume din $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, deducem $f(x) = g(x)$, însă avînd grijă să punem condiţia $f(x) > 0$, $g(x) > 0$.

Exemple. 1) Să se rezolve ecuaţia:

$$\lg(x^2 - 17) = \lg(x + 3).$$

Deducem $x^2 - 17 = x + 3$, deci $x^2 - x - 20 = 0$, adică $x_1 = 5$, $x_2 = -4$. Deoarece pentru $x_2 = -4$ obţinem $x + 3 = -4 + 3 = -1 < 0$, rezultă că $x_2 = -4$ nu este soluţia ecuaţiei. Deci $x = 5$.

2) Să se rezolve ecuaţia $2\lg(x-1) = \frac{1}{2}\lg x^5 - \lg\sqrt{x}$.

În această ecuaţie vom pune de la început condiţiile

$x - 1 > 0$, $x > 0$, pentru a avea sens expresiile

$\lg(x-1)$, $\lg x^5$, $\sqrt{x}$, $\lg\sqrt{x}$.

Vom avea

$$2\lg(x-1)=\frac{5}{2}\lg x-\frac{1}{2}\lg x \quad \text{şi deci}$$

$$2\lg(x-1)=2\lg x, \text{ prin urmare } \lg(x-1)=\lg x,$$

de unde obţinem $x-1=x$, $-1=0$ egalitate ce nu are sens; rezultă că ecuaţia dată nu are soluţii.

3) $\lg(x+7)+\lg(3x+1)=2$.

Punem condiţiile de existenţă ale logaritmilor:

$$x+7>0 \text{ şi } 3x+1>0, \quad \text{deci } x>-\frac{1}{3}.$$

Obţinem $\lg(x+7)(3x+1)=2$ şi deci

$$(x+7)(3x+1)=10^2=100.$$

Rezultă ecuaţia de gradul al doilea

$$3x^2+22x-93=0, \text{ de unde vom avea}$$

$$x_1=3,\ x_2=-\frac{31}{3}.$$

Deoarece $-\frac{31}{3}<-\frac{1}{3}$, obţinem singura soluţie a ecuaţiei date, $x=3$.

Observaţie. Ecuaţia precedentă nu este echivalentă cu ecuaţia

$$\lg(x+7)(3x+1)=2,$$

care are două soluţii $x_1=3$, $x_2=-\frac{31}{3}$, deoarece pentru amîndouă aceste valori ale lui x expresia $\lg(x+7)(3x+1)$ are sens.

4) Să se rezolve ecuaţia $\log_3^2 x-3\log_3 x-10=0$.

Avem condiţia $x>0$ şi făcînd substituţia $\log_3 x=y$, obţinem

$y^2-3y-10=0$, deci $y_1=5$, $y_2=-2$; prin urmare

$\log_3 x=5$ din care obţinem $x=3^5$, $x=243$ şi $\lg_3 x=-2$ din care obţinem

$$x=3^{-2},\ x=\frac{1}{9}.$$

În continuare vom rezolva cîteva ecuaţii care nu se pot încadra într-un tip anume. Astfel, pot apărea ecuaţii cu logaritmi scrişi în diferite baze, ecuaţii în care apar expresii conţinînd necunoscute şi la exponenţi şi la logaritmi etc.

5) Să se rezolve ecuaţia

$$\log_2 x+\log_3 x=1.$$

Deducem, aplicînd formula de schimbare a bazei:

$$\frac{\lg x}{\lg 2}+\frac{\lg x}{\lg 3}=1, \text{ deci}$$

$$\lg x=\frac{\lg 2\ \lg 3}{\lg 2+\lg 3}=\frac{\lg 2\ \lg 3}{\lg 6}.$$

$$x=10^{\frac{\lg 2\ \lg 3}{\lg 6}}$$

6) Să se rezolve ecuația
$$\log_2 x + \log_x 2 = 2.$$
Folosind că $\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$, deducem
$$\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} = 2.$$
Notînd $\log_2 x = y$, obținem
$$y + \frac{1}{y} = 2, \text{ adică } y^2 - 2y + 1 = 0,\ y = 1 \text{ și deci}$$
$$\log_2 x = 1,\ x = 2^1 = 2.$$
7) Să se rezolve ecuația
$$x^{\lg x - 1} = 100.$$
Punem condiția de existență a expresiilor, $x > 0$. Logaritmînd obținem o relație echivalentă
$$\lg(x^{\lg x-1}) = \lg 100, \text{ care devine}$$
$$(\lg x - 1)\lg x = 2.$$
Notînd $\lg x = y$, avem $y^2 - y - 2 = 0$, $y_1 = 2, y_2 = -1$.
Din $\lg x = 2$ obținem $x = 10^2 = 100$, iar din $\lg x = -1$ obținem
$$x = 10^{-1} = 0{,}1.$$

4.3. Sisteme de ecuații exponențiale și logaritmice

În astfel de sisteme se aplică metodele arătate anterior, la ecuațiile de tipul respectiv.

Exemple. 1) Să se rezolve sistemul:
$$\begin{cases} 27^{2y-1} = 243 \cdot 3^{4x+2}, \\ 3 \cdot 3^{x+y} = \sqrt{81^{2x-1}}. \end{cases}$$
Deoarece $27 = 3^3$, $81 = 3^4$, $243 = 3^5$ și obținem:
$$\begin{cases} 3^{6y-3} = 3^{4x+7}, \\ 3^{x+y} = 3^{4x-3}. \end{cases}$$
Rezultă sistemul echivalent:
$$\begin{cases} 6y - 3 = 4x + 7, \\ x + y = 4x - 3 \end{cases}$$
deci $x = 2$, $y = 3$ și soluția sistemului este perechea $(2,3)$.

2) Să se rezolve sistemul:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 425, \\ \lg x + \lg y = 2. \end{cases}$$
Obținem pe rînd sistemele echivalente
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 425, \\ \lg xy = 2, \\ x, y > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 425, \\ xy = 100, \\ x, y > 0. \end{cases}$$

Acest sistem simetric îl putem rezolva pe căile cunoscute din clasa a IX-a: punem $s = x + y$, $p = xy$ şi vom avea

$$\begin{cases} s^2 - 2p = 425 \\ p = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s^2 = 625 \\ p = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \pm 25 \\ p = 100. \end{cases}$$

Sistemul $\begin{cases} s = 25 \\ p = 100 \end{cases}$ dă soluţiile (5, 20) şi (20, 5) care satisfac şi condiţiile de existenţă ale sistemului iniţial $x > 0$, $y > 0$; sistemul $\begin{cases} s = -25 \\ p = 100 \end{cases}$ dă soluţiile $(-20, -5)$, $(-5, -20)$ care nu convin.

4.4. Inecuaţii logaritmice şi exponenţiale

Rezolvarea unor astfel de inecuaţii se bazează pe proprietăţile de monotonie ale funcţiilor exponenţiale şi logaritmice. După cum ştim, funcţia exponenţială este crescătoare cînd baza este supraunitară şi descrescătoare cînd baza este subunitară. La fel funcţia logaritmică.

Exemple: 1) Să se rezolve inecuaţia:

$$2^x > 4.$$

Deoarece $4 = 2^2$ vom avea $2^x > 2^2$ şi deci $x > 2$, deoarece funcţia $f(x) = 2^x$ este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

2) $3^{x^2-3x} > \dfrac{1}{9}$.

Ţinem seama că $\dfrac{1}{9} = 3^{-2}$ şi obţinem

$3^{x^2-3x} > 3^{-2}$, de unde rezultă inegalitatea echivalentă $x^2 - 3x > -2$, adică $x^2 - 3x + 2 > 0$. Rezolvarea acestei inecuaţii dă pentru x valorile posibile $x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$.

3) $\log_{\frac{1}{5}} (x - 1) > -2$.

Vom scrie pe -2 sub forma $-2 = \log_{\frac{1}{5}} 25$ şi obţinem

$\log_{\frac{1}{5}} (x - 1) > \log_{\frac{1}{5}} 25$; deoarece baza $\dfrac{1}{5}$ a logaritmului este subunitară, rezultă că între argumentele $x - 1$ şi 25 inegalitatea îşi schimbă semnul (funcţia $g(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$ este descrescătoare), deci $x - 1 < 25$, adică $x < 26$. În acelaşi timp punem însă şi condiţia de existenţă a logaritmului iniţial, $x - 1 > 0$. Obţinem deci pentru x valorile posibile $x \in (1, 26)$.

Exerciţii

Să se rezolve ecuaţiile (exerciţiile 1—11):

1. a) $5^x = 125$; d) $25^x = 0{,}2$; g) $6^{-x} = 1296$;
b) $4^x = 1024$; e) $2^{x+3} = 32$; h) $3^x = \sqrt[5]{9}$.
c) $9^x = \dfrac{1}{729}$; f) $8^x = 16$;

2. a) $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{-5}$; b) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$; c) $3^{2x-1} = 81$; d) $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$;

e) $a^{(x-2)(x-3)} = 1$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

3. a) $5^x + 5^{x+1} = 3750$; b) $7^x - 7^{x-1} = 6$; c) $3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} = 13$;

d) $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x-1} = 347$; e) $3^{x+1} + 5 \cdot 3^{x-1} - 7 \cdot 3^x + 21 = 0$.

4. a) $4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$; b) $\sqrt{8^{x-1}} = \sqrt[3]{4^{2-x}}$; c) $16\sqrt{(0,25)^{5-\frac{x}{4}}} = 2^{\sqrt{x+1}}$.

5. a) $5^{2x} - 5^x - 600 = 0$;

b) $9^x - 3^x - 6 = 0$

c) $4^x + 2^{x+1} = 80$;

d) $3^x + 9^{x-1} - 810 = 0$;

e) $4 + \frac{2}{5^x - 1} = \frac{3}{5^{x-1}}$;

f) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{1-x} = 1,2$;

g) $3^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 3 = 0$;

h) $2 \cdot 25^x = 10^x + 4^x$;

i) $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$;

j) $\left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\right)^x - \left(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}\right)^x = \frac{3}{2}$.

6. a) $3 \cdot 2^x = 2 \cdot 3^x$; b) $7 \cdot 2^x = 5 \cdot 3^x$; c) $11^x = 17^x$; d) $a^x = b^x (a > 0,\ b > 0,\ a \neq b)$; e) $6^{2x+4} = 2^{8+x} \cdot 3^{3x}$.

7. a) $\lg x = \lg 2$; b) $\lg x = -\lg 2$; c) $\log_2(x - 1) = \log_2(x^2 - x - 16)$;

d) $\frac{2 \lg x}{\lg (5x - 4)} = 1$.

8. a) $\log_{x-1}(x^2 - 5x + 7) = 1$; b) $\log_x 2 - \log_x 3 = 2$; c) $\log_x(x + 3) = \log_x(x^2 + 1)$.

9. a) $\frac{1}{12}\lg^2 x = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\lg x$; b) $3\lg^2(x^2) - \lg x - 1 = 0$; c) $2\lg^2(x^3) - 3\lg x - 1 = 0$;

d) $4\log_3^2 5x - 7\log_3 15x + 7 = 0$.

10. $5^{\lg x} - 3^{\lg x-1} = 3^{\lg x+1} - 5^{\lg x-1}$.

11. $\sqrt{\log_2 \sqrt[4]{2x} + \log_x \sqrt[4]{2x}} + \sqrt{\log_2 \sqrt[4]{\frac{x}{2}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{2}{x}}} = 2$.

12. Să se rezolve sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 641, \\ 2\lg x + 2\lg y = 2; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 9^{x+y} = 729, \\ 3^{x-y-1} = 1; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 90, \\ \lg x + \lg y = 3; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^y - y^x = 0, \\ 2^x - 4^y = 0; \end{cases}$

e) $\begin{cases} xy = 40, \\ x^{\lg y} = 4; \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^{\sqrt{y}} = y^x, \\ y^{\sqrt{x}} = x^y. \end{cases}$

13. Să se rezolve inecuațiile:

a) $\lg(x^2 - 3) > \lg(x + 3)$; b) $\lg^2 x - 2\lg x - 8 \leqslant 0$; c) $(0{,}25)^{x-4} \leqslant \left(\frac{1}{16}\right)^x$.

14. Să se rezolve inecuațiile:

a) $\log_2(9 - 2^x) > 3 - x$; b) $\lg 2 + \lg(4^{x-2} + 9) \leqslant 1 + \lg(2^{x-2} + 1)$.

15. Să se rezolve inecuația

$$3^x + 4^x > 5^x.$$

16. Să se rezolve și să se discute după valorile parametrului a, inecuațiile:

a) $\log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x \geqslant \frac{3}{4}$;

b) $\log_a x + \log_a(x + 5) + \log_a 0{,}02 < 0$.

II Inducţie matematică. Combinatorică

§ 1. Inducţia matematică

1.1. Noţiunile de deducţie şi de inducţie

Să considerăm următoarele propoziţii:

1) În orice triunghi lungimea unei laturi este mai mare decît diferenţa lungimilor celorlalte laturi.

2) În triunghiul ABC (fig. II.1), lungimea laturii AB este mai mare decît diferenţa lungimilor laturilor BC şi AC.

3) Orice număr a cărui ultimă cifră este 0 sau 5, este divizibil cu 5.

5) Numerele 1980 şi 1985 sînt divizibile cu 5.

Propoziţiile 1) şi 3) au un caracter general, iar propoziţiile 2) şi 4) sînt cazuri particulare ale propoziţiilor 1) respectiv 3).

În general, propoziţiile* pot fi clasificate în *propoziţii generale* şi *propoziţii particulare*. Propoziţiile 1) şi 3) sînt exemple de propoziţii generale, iar 2) şi 4) sînt exemple de propoziţii particulare.

Procedeul prin care din propoziţii generale se obţin propoziţii particulare se numeşte *deducţie*.

Una dintre trăsăturile caracteristice matematicii şi altor ştiinţe (de exemplu, mecanicii teoretice, fizicii teoretice, lingvisticii matematice) este construcţia deductivă a teoriei, prin care toate afirmaţiile decurg, apelînd la deducţie, din cîteva principii de bază numite axiome.

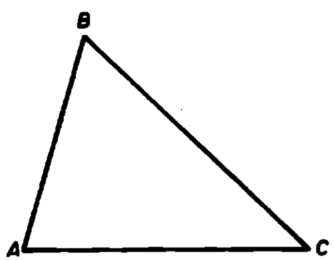


Fig. II. 1

Dar deducţia nu este singura metodă de raţionament ştiinţific. În acelaşi timp cu aceasta, în matematică se trece adesea de la propoziţii particulare la propoziţii generale, adică se fac raţionamente inductive.

Prin *inducţie* se înţelege o metodă de raţionament care conduce de la propoziţii particulare la o oarecare propoziţie generală.

* Propoziţiile la care ne referim sînt propoziţii în sensul logicii matematice.

Să dăm cîteva exemple:

1. Să calculăm sumele succesive de numere naturale impare: 1, $1+3$, $1+3+5$, $1+3+5+7$, $1+3+5+7+9$. Obținem, respectiv, numerele $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$, $25 = 5^2$. Observăm că în toate cazurile considerate suma este egală cu pătratul numărului termenilor sumei. În mod natural, se poate presupune că această proprietate ar putea să aibă loc pentru orice astfel de sumă (avînd oricît de mulți termeni). Presupunerea (ipoteza) noastră se poate formula astfel: Pentru orice număr natural $n \geqslant 1$, are loc egalitatea:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2. \tag{1}$$

Astfel cele cinci cazuri particulare ne-au sugerat o ipoteză care, după cum vom arăta în continuare la punctul 1.2 este adevărată.

2. Fie trinomul

$$f(x) = x^2 + x + 41.$$

Înlocuind pe x cu numerele naturale $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, obținem:

$$f(0) = 41,\ f(1) = 43,\ f(2) = 47,\ f(3) = 53,\ f(4) = 61,\ f(5) = 71.$$

Observăm că toate valorile trinomului obținute mai înainte sînt numere prime. Se poate emite ipoteza că valoarea trinomului $f(x)$ este număr prim pentru orice număr natural x. Totuși, această ipoteză este falsă, deoarece, de exemplu

$$f(40) = 40^2 + 40 + 41 = 40(40 + 1) + 41 = 41(40 + 1) = 41^2,$$

care nu este număr prim. De fapt, $x = 40$ este primul număr natural pentru care $f(x)$ nu este prim.

3. Matematicianul francez Pierre Fermat (1601—1665) considerînd numerele:

$$2^{2^0} + 1 = 3,\ \ 2^{2^1} + 1 = 5,\ \ 2^{2^2} + 1 = 17,\ \ 2^{2^3} + 1 = 257,\ \ 2^{2^4} + 1 = 65537,$$

care sînt numere prime, a tras concluzia că pentru orice număr natural n numărul $2^{2^n} + 1$ este prim. El nu a reușit să verifice dacă pentru $n = 5$, numărul $2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297$ este sau nu este prim.

Însă, matematicianul și fizicianul elvețian Leonard Euler (1707—1783) a arătat că acest număr, nu este prim, mai precis:

$$2^{2^5} + 1 = 641 \times 6\,700\,417.$$

Ulterior s-au găsit și alte valori ale lui n, $n = 6, 7, 8, 9, 11, 12, 18, 23, 36, 38, 73$, pentru care numărul $2^{2^n} + 1$ nu este prim.

4. Matematicianul polonez Waclaw Sierpinski (1882—1969) a emis ipoteza că numărul $991n^2 + 1$ nu dă pătrate perfecte pentru n natural. Aceasta s-a dovedit a fi falsă, cel mai mic număr natural n pentru care se obține pătrat perfect fiind un număr format din 29 de cifre.

5. Din mica teoremă a lui Fermat (aplicație, pct. 3.2, § 3 din acest capitol) rezultă că dacă $p \geqslant 3$ este un număr prim, atunci $2^{p-1} - 1$ se divide cu p. Totuşi oricare ar fi numărul prim $p < 1000$, $2^{p-1} - 1$ nu se divide cu p^2. De aici ar putea urma că, în general, pentru nici un număr, prim p, numărul $2^{p-1} - 1$ nu se divide cu p^2. Totuşi s-a arătat că $2^{1093-1} - 1$ se divide cu 1093^2.

Exemplele de mai sus arată că aceeaşi metodă de raționament conduce în unele cazuri la propoziții adevărate, iar în altele la propoziții false. Deoarece prin această metodă concluzia se trage după considerarea cîtorva exemple, şi nu a tuturor cazurilor posibile, această metodă de raționament se numeşte *inducție incompletă*.

Inducția incompletă, după cum am văzut, nu conduce mereu la propoziții adevărate, dar este folositoare, deoarece permite să se formuleze o presupunere, care după aceea poate fi confirmată sau infirmată.

Cîteodată însă, o astfel de metodă de raționament poate să conducă, studiind un număr finit de cazuri, la epuizarea tuturor posibilităților. Iată două *exemple* în acest sens:

1. Să se demonstreze că fiecare număr natural par n, unde $4 \leqslant n \leqslant 20$, se poate scrie ca suma a două numere prime (care pot fi şi egale).

Pentru demonstrație să considerăm fiecare din numerele pare cuprinse între 4 şi 20. Avem: $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, $10 = 3 + 7$, $12 = 5 + 7$, $14 = 7 + 7$, $16 = 5 + 11$, $18 = 7 + 11$, $20 = 7 + 13$.

2. Să se demonstreze că pentru orice poliedru regulat este îndeplinită relația $V - M + F = 2$, unde V este numărul vîrfurilor, M este numărul muchiilor, iar F este numărul fețelor.

Pentru demonstrație, este suficient să considerăm numai cinci cazuri, şi anume: tetraedru, octoedru, cub, dodecaedru, icosaedru, deoarece nu există alte poliedre regulate. Pentru aceste cinci cazuri afirmația se verifică direct, deoarece pentru tetraedru: $V = 4$, $M = 6$, $F = 4$; pentru octoedru: $V = 6$, $M = 12$, $F = 8$; pentru cub: $V = 8$, $M = 12$, $F = 6$; pentru dodecaedru: $V = 20$; $M = 30$; $F = 12$; pentru icosaedru: $V = 12$, $M = 30$, $F = 20$. Într-adevăr, pentru toate cele cinci poliedre avem: $V - M + F = 2$.

O astfel de metodă de raționament, în care concluzia rezultă pe baza cercetării tuturor cazurilor, se numeşte *inducție completă*.

1.2. Metoda inducției matematice

Inducția completă are un domeniu restrîns de aplicabilitate în matematică. De regulă, propozițiile matematice se referă la o mulțime infinită de elemente (de exemplu, mulțimea numerelor naturale, mulțimea numerelor prime, mulțimea poliedrelor ş.a.m.d.) şi nu este posibil de considerat, pe rînd, toate aceste elemente. Există însă o metodă de a raționa, care înlocuieşte analiza, de altfel imposibil de realizat în practică, a unei mulțimi infinite de cazuri cu demonstrarea faptului că, dacă o propoziţie este adevărată într-un caz, atunci ea se dovedeşte a fi adevărată şi în cazul care succede acestuia. O astfel de metodă de raţionament se numeşte *inducţie matematică.*

Să reluăm presupunerea (ipoteza) făcută în paragraful precedent: *Pentru orice număr natural $n \geqslant 1$ are loc egalitatea:*

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2. \tag{1}$$

Să notăm cu $P(n)$ egalitatea (1), pentru numărul natural n. Atunci, faptul că $P(1), P(2), P(3), P(4), P(5)$ sînt adevărate, înseamnă că egalitatea (1) are loc respectiv pentru $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, după cum s-a arătat în paragraful precedent.

Întrucît $P(5)$ este adevărată: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$, avem

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 5^2 + 2 \cdot 5 + 1 = (5 + 1)^2 = 6^2,$$

adică este adevărată $P(6)$.

Astfel, am demonstrat că dacă $P(5)$ este adevărată, rezultă că este adevărată $P(6)$.

Să demonstrăm, în acelaşi mod, că pentru un număr natural oarecare $k \geqslant 1$, avem $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$.

Aceasta înseamnă că din egalitatea

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$$

să rezulte egalitatea

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

Într-adevăr,

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = [1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)] + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

Astfel, egalitatea $P(n)$ este adevărată pentru $n = 1$, iar din faptul că ea este adevărată pentru $n = k$, rezultă că ea este adevărată şi pentru $n = k + 1$.

Atunci $P(1) \Rightarrow P(2)$, deoarece $2 = 1 + 1$; $P(2) \Rightarrow P(3)$, deoarece $3 = 2 + 1$; $P(3) \Rightarrow P(4)$, deoarece $4 = 3 + 1$; $P(4) \Rightarrow P(5)$, deoarece $5 = 4 + 1$ ş.a.m.d.

Pare natural că în modul acesta se poate ajunge pînă la orice număr n, adică $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geqslant 1$; deci raţionamentul făcut pare convingător. Acest raţionament este riguros din punct de vedere matematic, deoarece este un caz particular al unui principiu de bază al matematicii, numit *principiul inducţiei matematice (primul principiu de inducţie).*

Acesta se formulează astfel:

Dacă o propoziţie $P(n)$, n fiind un număr natural, este adevărată pentru $n = 0$, şi, din aceea că ea este adevărată pentru $n = k$ (unde k este un număr *natural oarecare) rezultă că ea este adevărată și pentru numărul natural $n = k + 1$, atunci propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural n.*

În aritmetică se pune în evidență că principiul inducției matematice constituie una din axiomele de bază ale *aritmeticii numerelor naturale*, avînd numeroase aplicații. Acest principiu ne dă metoda de demonstrație numită *metoda inducției matematice*.

Fie $P(n)$ o propoziție care depinde de un număr natural $n \geqslant m$, m fiind un număr natural fixat.

Demonstrația prin metoda inducției matematice a propoziției $P(n)$, constă din două etape:

1° *Se verifică mai întîi că $P(m)$ este adevărată.*

2° *Se presupune că $P(k)$ este adevărată și se demonstrează că $P(k + 1)$ este adevărată, k fiind un număr natural $\geqslant m$ (adică $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$, $k \geqslant m$).*

Dacă ambele etape ale demonstrației sînt verificate, atunci propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural $n \geqslant m$.

Intuitiv, această metodă de demonstrație se justifică astfel:

Din $P(m)$ adevărată și $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$, pentru orice $k \geqslant m$, rezultă $P(m + 1)$ adevărată ($k = m$); apoi luînd $k = m + 1$ se obține că $P(m + 2)$ este adevărată ş.a.m.d. Raționînd „din aproape în aproape" deducem că propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural $n \geqslant m$.

Metoda inducției matematice arată că egalitatea (1) este adevărată pentru orice număr natural $n \geqslant 1$, deoarece ea este adevărată pentru $m = 1$, și din $P(k)$ rezultă $P(k + 1)$, pentru $k \geqslant 1$.

Observații

1) Dacă se cere să demonstrăm că propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geqslant m$, m fiind un număr natural fixat, prima etapă a demonstrației prin inducție matematică constă în verificarea faptului că $P(n)$ este adevărată pentru $n = m$ și nu pentru alt număr natural. Este posibil ca pentru numerele naturale mai mici decît m propoziția să fie falsă, sau să nu aibă sens.

2) Cele două etape ale demonstrației prin metoda inducției matematice sînt la fel de importante. În paragraful precedent, considerînd exemplul $f(x) = x^2 + x + 41$, ne-am convins că o propoziție poate fi adevărată pentru un număr de cazuri particulare, nefiind adevărată în general. Acest exemplu arată cît de importantă este etapa a doua a demonstrației prin inducție matematică.

Nu înseamnă că prima etapă este mai puțin importantă decît a doua. Iată un exemplu care arată la ce concluzie absurdă se poate ajunge, dacă se omite prima etapă a demonstrației prin inducție matematică.

Să considerăm propoziția $P(n)$:

„Orice număr natural n este egal cu succesorul său".

Să presupunem că $P(k)$ este adevărată, k fiind un număr natural oarecare, adică $k = k + 1$. Adunînd 1 la fiecare membru al egalității $k = k + 1$, rezultă $k + 1 = k + 2$, adică $P(k + 1)$ este adevărată. Etapa a doua a demonstrației a fost efectuată, totuși propoziția nu este adevărată. Într-adevăr, pentru $n = 0$, $P(n)$ nu este adevărată, deoarece $0 \neq 1$, și deci prima etapă a demonstrației prin inducție matematică ne spune că $P(n)$ este falsă.

Metoda inducției matematice are o largă utilizare în matematică. Ea poate fi folosită la calcularea de sume și produse, la demonstrarea unor egalități și inegalități, în probleme de divizibilitate a numerelor. Vom da cîteva exemple în care utilizăm metoda inducției matematice.

Exemple

1) Să se calculeze suma

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)},$$

pentru orice număr natural $n \geqslant 1$.

Soluție. Notăm această sumă cu S_n. Ca să stabilim expresia sumei S_n, calculăm suma în cîteva cazuri particulare: S_1, S_2, S_3, S_4.

Considerînd aceste numere formulăm ipoteza și după aceea pentru demonstrarea ei folosim metoda inducției matematice.

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2};$$

$$S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = S_1 + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3};$$

$$S_3 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = S_2 + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4};$$

$$S_4 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} = S_3 + \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{4}{5}.$$

Cercetînd aceste sume observăm că numărătorul este indicele sumei căutate, iar numitorul este succesorul său. În acest mod, formulăm următoarea ipoteză:

Pentru orice număr natural $n \geqslant 1$, are loc egalitatea:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}. \tag{2}$$

Să notăm cu $P(n)$ egalitatea (2), pentru numărul natural n. Demonstrăm că $P(n)$ este adevărată prin metoda inducției matematice.

1° $P(1)$ este adevărată, deoarece $S_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$.

2° Demonstrăm că $P(k) \Rightarrow P(k+1)$:

$$S_{k+1} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{k+1}{k+2} = \frac{k+1}{(k+1)+1}.$$

Ambele etape ale demonstrației prin metoda inducției matematice sînt verificate. Prin urmare egalitatea (2) este demonstrată și deci

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

pentru orice număr natural $n \geqslant 1$.

2) Să se demonstreze că pentru orice $n \geqslant 1$, avem

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}. \qquad (3)$$

Demonstrație. Notăm cu $P(n)$ egalitatea (3), pentru numărul natural n.

1° Pentru $n = 1$, egalitatea (3) devine $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ și deci $P(1)$ este adevărată.

2° Demonstrăm că $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.
Avem

$$P(k): 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=\frac{1}{k+1}+\ldots+\frac{1}{2k} \qquad (3')$$

$$P(k+1): 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2(k+1)}=$$

$$=\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}. \qquad (3'')$$

Scăzînd membru cu membru, prima egalitate din a doua, obținem egalitatea

$$\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2(k+1)}=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1},$$

care este evident adevărată.

Înseamnă că dacă este adevărată egalitatea (3′) atunci este adevărată și egalitatea (3″). Conform metodei inducției matematice rezultă că egalitatea (3) este îndeplinită pentru orice număr natural $n \geqslant 1$.

3) Să se demonstreze că dacă $x > -1$ inegalitatea

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx \qquad (4)$$

este adevărată, oricare ar fi numărul natural n.*

Demonstrație. Să notăm cu $P(n)$ inegalitatea (4), pentru numărul natural n.

1° Pentru $n = 0$, avem $(1+x)^0 = 1 + 0\cdot x = 1$, deci $P(0)$ este adevărată.

2° Să demonstrăm $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Înmulțim ambii membri ai inegalității $(1+x)^k \geqslant 1+kx$ cu $1+x$. Cum $1+x>0$, semnul inegalității nu se schimbă, deci:

$$(1+x)^{k+1} \geqslant (1+kx)(1+x) = 1+kx+x+kx^2.$$

Deoarece $kx^2 \geqslant 0$, cu atît mai mult avem:

$$(1+x)^{k+1} > 1+kx+x = 1+(k+1)x.$$

Deci

$$(1+x)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)x.$$

* Inegalitatea (4) se numește inegalitatea lui Bernoulli; Iacob Bernoulli (1654—1705) matematician elvețian.

Conform metodei inducţiei matematice rezultă inegalitatea (4), pentru orice număr natural.

4) Să se demonstreze că $n^3 - n$ se divide cu 3, pentru orice număr natural n.

Demonstrație. Notăm cu $P(n)$ propoziţia: $d_n = n^3 - n$ se divide cu 3.

Deoarece $d_0 = 0 - 0 = 0$, atunci pentru $n = 0$, d_n se divide cu 3, adică $P(0)$ este adevărată.

Să demonstrăm $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, adică din: d_k se divide cu 3, să rezulte că d_{k+1} se divide cu 3.

Într-adevăr,

$$d_{k+1} = (k+1)^3 - (k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 = k^3 - k + 3(k^2 + k) =$$
$$= d_k + 3(k^2 + k).$$

Observăm că d_{k+1} este o sumă de doi termeni. Primul termen al acestei sume se divide cu 3, iar al doilea termen este evident divizibil cu 3. Prin urmare, fiecare termen al sumei d_{k+1} se divide cu 3, de unde şi d_{k+1} se divide cu 3. Propoziţia este demonstrată.

5) Să se demonstreze că numărul funcţiilor definite pe o mulţime cu n elemente într-o mulţime cu m elemente este m^n.

Demonstrație. Fie $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ şi $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$ două mulţimi, avînd n, respectiv m elemente. Să arătăm că numărul funcţiilor definite pe A, cu valori în B este m^n. Demonstrăm prin metoda inducţiei matematice, după n. Fie $P(n)$ afirmaţia: Numărul funcţiilor definite pe o mulţime cu n elemente într-o mulţime cu m elemente este m^n.

1° $P(1)$ este adevărată, deoarece evident de la o mulţime cu un element într-o mulţime cu m elemente sînt $m = m^1$ funcţii. Fiecare astfel de funcţie duce unicul element al mulţimii A într-unul din cele m elemente ale mulţimii B.

2° Să arătăm că $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Fie mulţimea $A = \{a_1, a_2, ..., a_{k+1}\}$ cu $k+1$ elemente. Să considerăm $A' = A - \{a_{k+1}\} = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$. Cum $P(k)$ este adevărată rezultă că numărul funcţiilor definite pe A' cu valori în B este m^k. Dacă $f: A' \to B$ este o funcţie oarecare, atunci definim $f_i : A \to B$, $1 \leqslant i \leqslant m$, prin $f_i(a_j) = f(a_j)$ pentru $1 \leqslant j \leqslant k$ şi $f_i(a_{k+1}) = b_i$ unde $1 \leqslant i \leqslant m$. Aşadar pentru orice funcţie de la A' la B se obţin m funcţii de la A la B. Mai mult, toate funcţiile de la A la B sînt de acest tip. Deci numărul funcţiilor de la A la B este $m^k \cdot m = m^{k+1}$. Conform metodei inducţiei matematice afirmaţia este demonstrată.

1.3. O variantă a metodei inducţiei matematice

Fie $A \subset \mathbf{N}$ o submulţime nevidă a mulţimii numerelor naturale. Spunem că a din A este un *prim element* (sau un *cel mai mic element)* al mulţimii A, dacă $a \leqslant x$ pentru orice x din A.

Dăm în continuare o proprietate importantă a mulţimii numerelor naturale, care se demonstrează cu ajutorul inducţiei matematice.

Teorema 1.3.1. (proprietatea de bună ordonare a mulţimii numerelor naturale). Orice submulţime nevidă a mulţimii numerelor naturale are un prim element.

---

* Textele însemnate cu o bară la marginea paginii sînt facultative.

Demonstrație. Fie $A \subset \mathbf{N}$ o submulțime nevidă. Dacă $0 \in A$, atunci 0 este primul element al său. Dacă $0 \notin A$, fie M mulțimea numerelor naturale n, astfel încît $n \leqslant x$, oricare ar fi $x \in A$. Evident, $0 \in M$ și dacă $x \in A$, atunci $x + 1 \notin M$. Deci $M \neq \mathbf{N}$. Vom arăta că există un număr natural $a \in M$ astfel încît $a + 1 \notin M$. Într-adevăr, presupunem prin absurd că pentru oricare $k \in M$ avem $k + 1 \in M$.

Fie propoziția $P(n)$: Dacă $n \in \mathbf{N}$, atunci $n \in M$.

Deoarece $0 \in M$, rezultă $P(0)$ adevărată.

Mai mult, $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$, deoarece după presupunerea prin absurd, dacă $k \in M$ atunci $k + 1 \in M$.

Conform metodei inducției matematice, rezultă $M = \mathbf{N}$, contradicție. Deci există $a \in M$ astfel încît $a + 1 \notin M$. Arătăm că a este numărul căutat. Într-adevăr $a \leqslant x$, pentru orice $x \in A$. Mai mult, $a \in A$; în caz contrar, $a < x$ pentru orice $x \in A$ și deci $a + 1 \leqslant x$, pentru orice $x \in A$. Așadar $a + 1 \in M$, contradicție.

Proprietatea mulțimii numerelor naturale de a fi bine ordonată stă la baza celui de *al doilea principiu de inducție matematică*. Acest principiu este echivalent cu primul principiu de inducție, însă, uneori este mai oportun pentru unele demonstrații.

El se formulează astfel:

Dacă o propoziție $P(n)$, n fiind un număr natural, este adevărată pentru $n = 0$ și, din faptul că ea este adevărată pentru toate numerele $n < k$, rezultă că ea este adevărată și pentru $n = k$, atunci $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural n.

Demonstrație. Fie M submulțimea mulțimii $\mathbf{N}$ a numerelor naturale pentru care $P(n)$ este falsă. Dacă această submulțime este nevidă, atunci ea are un prim element k. Acest număr nu poate să fie 0, deoarece $P(0)$ este adevărată. Deci $k > 0$. Cum k este cel mai mic număr pentru care $P(k)$ este falsă, atunci pentru orice $n < k$, $P(n)$ este adevărată, și din ipoteză, rezultă că $P(n)$ este adevărată și pentru $n = k$. Deci $P(k)$ este în același timp și falsă și adevărată, contradicție. Deci neapărat mulțimea A este vidă. Așadar nu există numere naturale pentru care $P(n)$ este falsă, adică $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural n.

Acest principiu stă la baza unei *variante a metodei de demonstrație prin inducție matematică.*

Fie $P(n)$ o propoziție care depinde de un număr natural $n \geqslant m$, m fiind un număr natural fixat.

Demonstrația prin această variantă a metodei inducției matematice a propoziției $P(n)$ constă din:

1° *Se verifică mai întîi că $P(m)$ este adevărată.*

2° *Se presupune că $P(l)$ este adevărată pentru orice l, unde $m \leqslant l < k$, și se demonstrează că $P(k)$ este adevărată.*

Dacă ambele etape ale demonstrației sînt verificate, atunci propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural $n \geqslant m$.

Exemplu. Să se demonstreze că orice număr natural $n \geqslant 2$, ori este număr prim, ori se descompune în produsul unui număr finit de numere prime.

(Amintim că numărul natural $p \geqslant 2$ se numește prim dacă nu are alți divizori în afară de 1 și p.)

Demonstrație. Folosim metoda inducției matematice (varianta a doua). Notăm cu $P(n)$ propoziția: Numărul $n \geqslant 2$, ori este prim, ori este produs de numere prime.

1° $P(2)$ este adevărată, deoarece $n = 2$ este număr prim.

2° Să presupunem că $P(l)$ este adevărată pentru orice l, $2 \leqslant l < k$, și să demonstrăm că $P(k)$ este adevărată. Într-adevăr, fie numărul natural k. Dacă k este număr prim rezultă că $P(k)$ este adevărată. Dacă k nu este număr prim, atunci $k = ab$, unde

$2 \leqslant a,\ b < k$. După presupunerea noastră $P(a)$ şi $P(b)$ sînt adevărate, adică a şi b ori sînt prime, ori se descompun în produse de numere prime. Atunci este clar că şi $k = ab$ se descompune în produs de numere prime, adică $P(k)$ este adevărată. Conform metodei inducţiei matematice rezultă că $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural $n \geqslant 2$.

Observaţie. Am remarcat mai înainte că la baza celui de-al doilea principiu de inducţie matematică, care de altfel este echivalent cu primul, stă proprietatea mulţimii numerelor naturale de a fi bine ordonată. Astfel, acest principiu poate fi extins şi la alte mulţimi de numere bine ordonate.

De exemplu:

1) O mulţime finită este bine ordonată.

2) Dacă m este un număr întreg oarecare, mulţimea numerelor întregi x, $x \geqslant m$, este bine ordonată.

Dacă A este o mulţime bine ordonată, putem aplica metoda inducţiei matematice pentru demonstrarea unei proprietăţi $P(x)$, $x \in A$.

Exerciţii

1. Folosind metoda inducţiei matematice, să se demonstreze că pentru orice număr natural n, sînt adevărate egalităţile:

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

c) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = n\,\dfrac{4n^2-1}{3}$;

d) $2^2 + 6^2 + \ldots + (4n-2)^2 = \dfrac{4n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

e) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$;

f) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$;

g) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

h) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;

i) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \ldots + n(3n+1) = n(n+1)^2$;

j) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\,\dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. Să se demonstreze că:

a) $\dfrac{1}{1 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 7} + \dfrac{1}{7 \cdot 10} + \ldots + \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \dfrac{n}{3n+1}$;

b) $\dfrac{1}{1 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 9} + \dfrac{1}{9 \cdot 13} + \ldots + \dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \dfrac{n}{4n+1}$;

c) $\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$;

d) $\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{2}{3\cdot 5\cdot 7}+\ldots+\frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$.

3. Să se demonstreze că:

a) $\frac{7}{1\cdot 8}+\frac{7}{8\cdot 15}+\frac{7}{15\cdot 22}+\ldots+\frac{7}{(7n-6)(7n+1)}+\frac{1}{7n+1}=1$;

b) $\frac{1}{4\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 16}+\ldots+\frac{1}{4n(4n+4)}+\frac{1}{16(n+1)}=\frac{1}{16}$.

4. Să se demonstreze că:

a) dacă $n\geqslant 5$, atunci $2^n>n^2$;

b) dacă $n\geqslant 10$, atunci $2^n>n^3$.

5. Să se demonstreze inegalitățile următoare:

a) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$, pentru $n\geqslant 2$;

b) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1$, pentru orice număr natural $n\geqslant 1$;

c) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, pentru orice $n\geqslant 1$;

d) $\sqrt{n}<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$, pentru $n\geqslant 2$.

6. Să se calculeze suma următoare și apoi să se demonstreze prin inducție matematică formula găsită:

$$S_n=1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!,$$

unde $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$.

7. Să se demonstreze că pentru $n\geqslant 2$ este adevărată inegalitatea:

$$|a_1+a_2+\ldots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|.$$

8. Să se calculeze produsul următor și apoi să se demonstreze prin inducție matematică formula găsită:

$$P_n=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right),\quad n\geqslant 2.$$

9. Să se demonstreze prin metoda inducției matematice inegalitatea (**inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski-Schwarz**):

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2,$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ sînt numere reale oarecare.

10. Să se demonstreze că pentru orice număr natural n, avem:

a) n^3+11n este divizibil cu 6;

b) 7^n-1 este divizibil cu 6;

c) $6^{2n-1}+1$ este divizibil cu 7;

d) $10^n+18n-28$ este divizibil cu 27;

e) $9^{n+1}-8n-9$ este divizibil cu 16;

f) $7^{2n}-1$ este divizibil cu 48.

§ 3. Binomul lui Newton și aplicații

3.1. Binomul lui Newton

Dacă a și b sînt numere, sînt bine cunoscute formulele:

$$(a+b)^1 = a+b,$$
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

De asemenea, se calculează fără dificultate

$$(a+b)^4 = (a+b)^2(a+b)^2 \text{ și } (a+b)^5 = (a+b)^2(a+b)^3$$

și se obține

$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,$$
$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$$

Observăm că, coeficienții din membrii din dreapta ai acestor formule, sînt egali cu numerele din linia corespunzătoare a triunghiului lui Pascal (vezi § 2, pct. 2.4).

Vom arăta că pentru orice număr natural n este adevărată formula

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + \ldots + C_n^ma^{n-m}b^m + \ldots + C_n^nb^n, \quad (1)$$

care se numește *formula lui Newton**. Membrul drept al egalității (1) se numește *dezvoltarea binomului la putere.*

Vom demonstra formula (1) prin metoda inducției matematice.

Notăm cu $P(n)$ egalitatea (1), pentru un n dat.

1) $P(1)$ este adevărată, deoarece

$$(a+b)^1 = a+b = C_1^0a + C_1^1b.$$

2) Rămîne să arătăm că pentru orice număr natural $k \geqslant 1$, avem $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Fie deci adevărată $P(k)$, adică

$$(a+b)^k = C_k^0a^k + C_k^1a^{k-1}b + \ldots + C_k^ma^{k-m}b^m + \ldots + C_k^kb^k.$$

Să arătăm că este adevărată $P(k+1)$. Într-adevăr, avem

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k(a+b) = (C_k^0a^k + C_k^1a^{k-1}b + \ldots + C_k^ma^{k-m}b^m + \ldots + C_k^kb^k)(a+b) = C_k^0a^{k+1} + C_k^1a^kb + \ldots + C_k^{m+1}a^{k-m}b^{m+1} + \ldots + C_k^kab^k + C_k^0a^kb + \ldots + C_k^ma^{k-m}b^{m+1} + \ldots + C_k^{k-1}ab^k + C_k^kb^{k+1} =$$
$$= C_k^0a^{k+1} + (C_k^0 + C_k^1)a^kb + \ldots + (C_k^m + C_k^{m+1})a^{k-m}b^{m+1} + \ldots + (C_k^{k-1} + C_k^k)ab^k + C_k^kb^{k+1}.$$

---

* Isac Newton, matematician și fizician englez a trăit între anii 1643—1727.

Deoarece

$$C_k^0 = 1 = C_{k+1}^0,\ C_k^0 + C_k^1 = C_{k+1}^1,\ \ldots,\ C_k^m + C_k^{m+1} = C_{k+1}^{m+1},\ \ldots$$
$$\ldots,\ C_k^{k-1} + C_k^k = C_{k+1}^k,\ C_k^k = 1 = C_{k+1}^{k+1},$$

obţinem:

$$(a + b)^{k+1} = C_{k+1}^0 a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + \ldots + C_{k+1}^{m+1} a^{k-m} b^{m+1} + \ldots$$
$$\ldots + C_{k+1}^k ab^k + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1}.$$

Folosind metoda inducţiei matematice, urmează că $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural $n \geqslant 1$. Formula lui Newton este astfel demonstrată.

Exemplu. $(a + b)^6 = C_6^0 a^6 + C_6^1 a^5 b + C_6^2 a^4 b^2 + C_6^3 a^3 b^3 + C_6^4 a^2 b^4 + C_6^5 ab^5 + C_6^6 b^6$.

Avem:

$$C_6^0 = 1 = C_6^6;\quad C_6^1 = \frac{6}{1} = 6;\quad C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15;\quad C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20.$$

$C_6^4 = C_6^2 = 15$ (fiind combinări complementare).

$C_6^5 = C_6^1 = 6$ (fiind combinări complementare).

Deci:

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5 b + 15a^4 b^2 + 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

Coeficienţii C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^n din formula lui Newton se numesc *coeficienţi binomiali*. Aceştia sînt, evident, în număr de $n + 1$.

Asupra formulei lui Newton facem cîteva observaţii de bază.

1. În dezvoltarea $(a + b)^n$, după formula lui Newton, sînt $n + 1$ termeni (numărul termenilor fiind egal cu numărul coeficienţilor binomiali C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^n).

2. În formula lui Newton exponenţii puterilor lui a descresc de la n la 0, iar exponenţii puterilor lui b cresc de la 0 la n. Suma exponenţilor puterilor lui a şi b în orice termen al dezvoltării este egală cu n, adică este egală cu exponentul puterii binomului.

3. Coeficienţii binomiali din dezvoltare egal depărtaţi de termenii extremi ai dezvoltării, sînt egali între ei, deoarece $C_n^m = C_n^{n-m}$ (fiind combinări complementare).

4. Dacă n este un număr par (adică $n = 2k$), atunci coeficientul binomial al termenului din mijloc al dezvoltării (adică C_n^k) este cel mai mare. Dacă n este impar (adică $n = 2k + 1$), atunci coeficienţii binomiali ai celor doi termeni de la mijloc sînt egali între ei (adică $C_n^k = C_n^{k+1}$) şi sînt cei mai mari.

5. Termenul $C_n^k a^{n-k} b^k$, adică al $(k + 1)$-lea termen din egalitatea (1), se numeşte termenul de rang $k + 1$ şi se notează cu T_{k+1}. Aşadar

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Termenul T_{k+1} se mai numește termenul general al dezvoltării, deoarece dînd lui k valori de la 0 la n, găsim toți termenii dezvoltării.

De exemplu, $T_1 = C_n^0 a^n b^0 = C_n^0 a^n$ este primul termen, $T_2 = C_n^1 a^{n-1} b$ este al doilea termen, $T_3 = C_n^2 a^{n-2} b^2$ este al treilea termen etc.

Se poate stabili și o relație de recurență între termenii succesivi ai dezvoltării (1).

Avînd în vedere că

$$C_n^{k+1} = \frac{n-k}{k+1} C_n^k$$

rezultă că

$$T_{k+2} = C_n^{k+1} a^{n-k-1} b^{k+1} = \frac{n-k}{k+1} C_n^k a^{n-k} b^k \frac{b}{a} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{b}{a} \cdot T_{k+1}.$$

Deci

$$T_{k+2} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{b}{a} \cdot T_{k+1}. \tag{3}$$

Observație. Să se facă distincție între *coeficientul unui termen al dezvoltării* după formula lui Newton și *coeficientul binomial al aceluiași termen.* De exemplu, în dezvoltarea

$$(a + 2b)^4 = a^4 + 8a^3b + 24a^2b^2 + 32ab^3 + 16b^4$$

coeficientul celui de-al patrulea termen al dezvoltării este 32, iar coeficientul său binomial este $C_4^3 = 4$.

Să dăm în continuare cîteva *exemple* și *aplicații.*

1) Să se găsească termenul al cincilea al dezvoltării

$$(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})^{10}.$$

Soluție. Termenul căutat îl găsim folosind formula (2)

$$T_5 = C_{10}^4 (\sqrt{x})^{10-4} (\sqrt[3]{x^2})^4 = 210 x^6 \sqrt[3]{x^2}.$$

2) Să se găsească rangul termenului care conține pe x^7 din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^{12}$.

Soluție. Scriem termenul general al dezvoltării

$$T_{k+1} = C_{12}^k (\sqrt[3]{x^2})^{12-k} \left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^k.$$

Punem condiția ca în T_{k+1} să apară x^7, adică $(\sqrt[3]{x^2})^{12-k} (\sqrt{x})^k = x^7$.

Deci $x^{\frac{2(12-k)}{3}} x^{\frac{k}{2}} = x^7$, de unde $\frac{2(12-k)}{3} + \frac{k}{2} = 7$, care dă $k = 6$.

3) Să se determine al 12-lea termen al dezvoltării $\left(x - \frac{1}{\sqrt{5x}}\right)^n$, dacă coeficientul binomial al celui de-al treilea termen este egal cu 105.

Soluție. Coeficientul binomial al termenului al treilea este C_n^2. Avem $C_n^2 = 105$, adică $\frac{n(n-1)}{2} = 105$, de unde $n_1 = 15$ și $n_2 = -14$. Cum n este pozitiv, rezultă că $n = 15$. Deci

$$T_{12} = (-1)^{11} C_{15}^{11} x^{11} \left(\frac{1}{\sqrt{5x}}\right)^4 = -C_{15}^4 x^{11} \frac{1}{5^2 x^2} = -\frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5^2} x^9 = -\frac{273}{5} x^9.$$

4) Să se găsească rangul celui mai mare termen în dezvoltarea $(1 + 0{,}1)^{100}$.

Soluție. După formula (3) rezultă $\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} = \frac{100-k}{k+1} \cdot \frac{0{,}1}{1} = \frac{100-k}{10(k+1)}$.

Avem că $\frac{100-k}{10(k+1)} \geqslant 1$ dacă și numai dacă $k \leqslant 8\frac{2}{11}$.

Deci pentru $k \leqslant 8$ rezultă $\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} > 1$, iar pentru $k \geqslant 9$ rezultă $\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} < 1$. Așadar termenii dezvoltării cresc pînă la T_{10} și după aceea descresc, adică T_{10} este cel mai mare termen al dezvoltării.

3.2. Aplicații. Identități în calculul cu combinări

Numerele C_n^k au o serie de proprietăți interesante. Indicăm mai jos cîteva dintre acestea și stabilim o serie de identități pe care le verifică coeficienții binomiali.

Amintim mai întîi următoarele formule:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \tag{1}$$

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}, \tag{2}$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n, \tag{3}$$

care au fost stabilite în paragraful 2.4 din acest capitol.

Observăm că egalitatea (3) se obține evident și din formula binomului lui Newton,

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n b^n,$$

pentru $a = b = 1$.

Dacă în formula binomului lui Newton se pune $a = 1$, $b = -1$, se obține egalitatea:

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0. \tag{4}$$

Pe baza egalităților (3) și (4) rezultă

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}. \tag{5}$$

Deci, ***suma coeficienților binomiali ai termenilor de rang impar este egală cu suma coeficienților binomiali ai termenilor de rang par.***

Vom stabili în continuare alte cîteva formule combinatorii importante. Uneori, pentru demonstrația anumitor egalități este util să se aibă în vedere interpretarea geometrică a numărului C_n^k, care a fost dată în paragraful 2.4 din acest capitol.

1. Să se demonstreze că

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_{k-1}^{k-1}. \qquad (6)$$

Demonstrație. Folosind egalitatea (2), scriem șirul următor de egalități

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1},$$

$$C_{n-1}^k = C_{n-2}^k + C_{n-2}^{k-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_{k+1}^k = C_k^k + C_k^{k-1},$$

$$C_k^k = C_{k-1}^{k-1} (= 1).$$

Adunînd membru cu membru aceste egalități, după reducerea termenilor asemenea, obținem egalitatea (6).

2. Să se demonstreze că

$$C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \ldots + C_n^k C_m^0 = C_{n+m}^k. \qquad (7)$$

Demonstrația 1. Toate submulțimile cu k elemente ale mulțimii

$$A = \{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_m\},$$

al căror număr este C_{n+m}^k, le împărțim în $k + 1$ clase $T_1, T_2, \ldots, T_{k+1}$ astfel: T_i este formată din toate submulțimile lui A cu k elemente, în componența cărora intră exact i elemente cu indici $\leqslant n$. Fiecare submulțime din clasa T_i se poate obține, reunind o submulțime oarecare cu i elemente a mulțimii $\{a_1, \ldots, a_n\}$ cu o submulțime oarecare cu $(k - i)$ elemente a mulțimii $\{a_{n+1}, \ldots, a_{n+m}\}$. Deci, T_i este formată din $C_n^i C_m^{k-i}$ submulțimi. Cum $T_1, T_2, \ldots, T_{k+1}$ sînt disjuncte două cîte două, iar reuniunea tuturor este totalitatea submulțimilor, cu k elemente, ale mulțimii A, rezultă

$$C_{n+m}^k = \sum_{i=0}^{k} C_n^i C_m^{k-i}$$

Demonstrația 2. Să considerăm egalitatea

$$(1 + x)^n (1 + x)^m = (1 + x)^{n+m}.$$

Folosind formula binomului lui Newton, deducem coeficientul lui x^k din membrul drept al acestei egalități ca fiind C_{m+n}^k, iar coeficientul lui x^k din membrul stîng al egalității este

$$C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \ldots + C_n^k C_m^0.$$

După cum se va argumenta în cap. IV al manualului, coeficienții lui x^k din cei doi membri sînt egali, de unde rezultă egalitatea (7).

Dacă în (7), $k = n = m$ și ținem seama de formula (1), rezultă

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n. \qquad (8)$$

3. Să se demonstreze că

$$C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right). \qquad (9)$$

Demonstrație. Fie

$$\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

o rădăcină cubică complexă a unității. Avem deci $\varepsilon^3 = 1$ și $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.

Punînd în formula binomului lui Newton $a = 1, b = 1$, apoi $a = 1, b = \varepsilon$ și, în sfîrșit, $a = 1$, $b = \varepsilon^2$, obținem:

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + C_n^4 + \ldots,$$

$$(1 + \varepsilon)^n = C_n^0 + \varepsilon C_n^1 + \varepsilon^2 C_n^2 + C_n^3 + \varepsilon C_n^4 + \ldots$$

$$(1 + \varepsilon^2)^n = C_n^0 + \varepsilon^2 C_n^1 + \varepsilon C_n^2 + C_n^3 + \varepsilon^2 C_n^4 + \ldots$$

Adunînd, termen cu termen, aceste trei egalități și împărțind la 3, obținem în membrul drept $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots$, iar în membrul stîng

$$\frac{1}{3}[2^n + (1 + \varepsilon)^n + (1 + \varepsilon^2)^n].$$

Ținînd seama de faptul că

$$1 + \varepsilon = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \text{ și}$$

$$1 + \varepsilon^2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right).$$

obținem

$$\frac{1}{3}[2^n + (1 + \varepsilon)^n + (1 + \varepsilon^2)^n] = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right),$$

de unde rezultă egalitatea (9).

Lăsăm ca exercițiu demonstrarea următoarelor două egalități:

$$C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \ldots = \frac{1}{3}\left[2^n + 2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right], \tag{9'}$$

$$C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \ldots = \frac{1}{3}\left[2^n + 2\cos\frac{(n-4)\pi}{3}\right]. \tag{9''}$$

4. *Aplicație. (Mica teoremă a lui Fermat).* Dacă p este un număr natural prim, iar n un număr natural oarecare, atunci $n^p - n$ se divide cu p.

Demonstrație. Într-adevăr, pentru $n = 0$, afirmația este adevărată. Să presupunem $k^p - k$ divizibil cu p și să demonstrăm că numărul $(k + 1)^p - (k + 1)$ este divizibil cu p. Pentru acesta, considerăm diferența

$$(k + 1)^p - (k + 1) - (k^p - k).$$

Dezvoltînd după formula lui Newton $(k + 1)^p$, avem:

$$\begin{aligned}(k + 1)^p - (k + 1) - (k^p - k) &= (k + 1)^p - k^p - 1 = \\ &= C_p^1 k^{p-1} + C_p^2 k^{p-2} + \ldots + C_p^{p-1} k.\end{aligned} \tag{1}$$

Însă pentru $1 \leqslant j < p$ avem:

$$C_p^j = \frac{p(p-1)\ldots(p-j+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot j}.$$

Întrucît numărul p este prim, el nu se divide cu nici unul din numerele $1, 2, \ldots, j$ de la numitor. De aceea C_p^j se divide cu p pentru $1 \leq j < p$. Dar atunci toţi termenii din membrul drept al egalităţii (1) se divid cu p şi deci membrul stîng se divide cu p. Dar cum am presupus că $k^p - k$ se divide cu p, atunci şi $(k+1)^p - (k+1)$ se divide cu p.

Conform metodei inducţiei matematice rezultă că $n^p - n$ se divide cu p, pentru orice număr natural n.

Observaţie. Dacă p este un număr natural prim, iar n un număr natural care nu este multiplu de p, atunci $n^{p-1} - 1$ se divide cu p. Acest enunţ este o variantă sub care se întîlneşte adesea teorema de mai înainte.

Exemple

1) Deoarece 17 este număr prim, atunci $1979^{17} - 1979$ se divide cu 17.

2) Deoarece 97 este număr prim, iar 721 nu este multiplu de 97, atunci $721^{96} - 1$ se divide cu 97.

3.3. Suma puterilor asemenea ale primelor n numere naturale

Fie $k \geqslant 1$ un număr natural şi să notăm cu

$$s_k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k.$$

În cele ce urmează ne propunem să evaluăm această sumă. Mai întîi vom calcula cîteva sume particulare, cum sînt S_1, S_2, S_3, care ne oferă o idee de calcul pentru cazul general.

1. Se verifică uşor prin inducţie matematică următoarea formulă care dă suma primelor n numere naturale

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1}$$

2. Să calculăm acum

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2,$$

adică suma pătratelor primelor n numere naturale.

Să considerăm formula

$$(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1.$$

Făcînd, succesiv, pe a egal cu $1, 2, 3, \ldots, n-1, n$, obţinem

$$\begin{aligned}
2^3 &= 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1,\\
3^3 &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1,\\
4^3 &= 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
n^3 &= (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1,\\
(n+1)^3 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1.
\end{aligned}$$

Adunînd aceste relaţii membru cu membru, după reducerea termenilor asemenea, se obţine

$$(n+1)^3 = 1 + 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n \cdot 1,$$

sau

$$(n+1)^3 = 1 + 3S_2 + 3S_1 + n,$$

de unde

$$3S_2 = (n+1)^3 - 3S_1 - (n+1).$$

Această formulă ne dă pe S_2 în funcție de S_1. Dar dacă înlocuim S_1 dat de formula (1), după efectuarea calculelor, se obține

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{2}$$

3. Pentru a afla pe S_3,

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

(suma cuburilor primelor n numere naturale) considerăm formula

$$(a+1)^4 = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1.$$

Făcînd, succesiv, pe a egal cu 1, 2, 3, ..., $n-1$, n, obținem

$$\begin{aligned}
2^4 &= 1^4 + 4\cdot 1^3 + 6\cdot 1^2 + 4\cdot 1 + 1,\\
3^4 &= 2^4 + 4\cdot 2^3 + 6\cdot 2^2 + 4\cdot 2 + 1,\\
4^4 &= 3^4 + 4\cdot 3^3 + 6\cdot 3^2 + 4\cdot 3 + 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
n^4 &= (n-1)^4 + 4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1) + 1;\\
(n+1)^4 &= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1.
\end{aligned}$$

Adunînd aceste relații membru cu membru, după reducerea termenilor asemenea, se obține

$$(n+1)^4 = 1 + 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n,$$

de unde

$$4S_3 = (n+1)^4 - 6S_2 - 4S_1 - (n+1).$$

Această formulă ne dă pe S_3 în funcție de S_1 și S_2. Înlocuind S_1 și S_2 date de formulele (1) și (2), se obține după efectuarea calculelor

$$S_3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2. \tag{3}$$

Observăm că $S_3 = S_1^2$.

4. Calea prin care am găsit pe S_2 și S_3 a fost aceeași. Ea poate fi urmată pentru găsirea lui S_k, în general.

Folosim formula

$$(a+1)^{k+1} = a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k + C_{k+1}^2 a^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k a + C_{k+1}^{k+1}.$$

Făcînd, succesiv, pe a egal cu 1, 2, 3, ..., $n-1$, n obținem

$$\begin{aligned}
2^{k+1} &= 1^{k+1} + C_{k+1}^1 1^k + C_{k+1}^2 1^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k 1 + C_{k+1}^{k+1},\\
3^{k+1} &= 2^{k+1} + C_{k+1}^1 2^k + C_{k+1}^2 2^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k 2 + C_{k+1}^{k+1},\\
4^{k+1} &= 3^{k+1} + C_{k+1}^1 3^k + C_{k+1}^2 3^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k 3 + C_{k+1}^{k+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
n^{k+1} &= (n-1)^{k+1} + C_{k+1}^1 (n-1)^k + C_{k+1}^2 (n-1)^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k (n-1) + C_{k+1}^{k+1},\\
(n+1)^{k+1} &= n^{k+1} + C_{k+1}^1 n^k + C_{k+1}^2 n^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k n + C_{k+1}^{k+1}.
\end{aligned}$$

Adunînd aceste relaţii membru cu membru, după reducerea termenilor asemenea, se obţine

$$(n+1)^{k+1} = 1 + C_{k+1}^{1}S_k + C_{k+1}^{2}S_{k-1} + \ldots + C_{k+1}^{k}S_1 + n. \tag{4}$$

Aceasta este o formulă de recurenţă, care dă pe S_k în funcţie de toate sumele precedente $S_1, S_2, \ldots, S_{k-1}$.

Să determinăm, de exemplu, pe S_4. Pentru $k = 4$, găsim:

$$(n+1)^5 = 1 + C_5^1S_4 + C_5^2S_3 + C_5^3S_2 + C_5^4S_1 + n.$$

Dacă înlocuim pe S_1, S_2, S_3, date de formulele (1), (2), (3), obţinem după efectuarea calculelor:

$$S_4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}. \tag{5}$$

Exerciţii

1. Să se dezvolte după formula lui Newton binoamele la putere:

a) $(x^2 - a)^6$; c) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^4$; e) $(\sqrt{3x} + \sqrt{y})^7$;

b) $(a - b)^5$; d) $(x + 2)^7$; f) $(3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x})^5$.

2. Să se determine:

a) termenul al optulea al dezvoltării $\left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^{11}$;

b) termenul al cincilea al dezvoltării $(\sqrt{2a} - \sqrt{ab})^7$;

c) termenul din mijloc al dezvoltării $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^6$;

d) cei doi termeni din mijloc ai dezvoltării $(\sqrt{a} - \sqrt[3]{b})^9$.

3. Să se determine:

a) termenul din dezvoltarea $(\sqrt{x} + y)^9$ care îl conţine pe x^3;

b) termenul din dezvoltarea $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{3} + \dfrac{3}{\sqrt[3]{a}}\right)^{13}$ care îl conţine pe a^4;

c) termenul în care nu apare x din dezvoltarea $\left(\sqrt[5]{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{21}$.

4. Să se determine rangul termenului din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{\dfrac{x}{\sqrt{y}}} + \sqrt{\dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}}\right)^{21}$, în care x şi y au puteri egale.

5. Să se determine n, dacă în dezvoltarea $(1+x)^n$ coeficienţii lui x^5 şi x^{12} sînt egali.

6. Cîţi termeni raţionali conţine dezvoltarea $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})^{100}$?

7. În dezvoltarea $\left(a\sqrt[4]{a} + \dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^n$, suma coeficienţilor binomiali de rang par este egală cu 128. Să se găsească termenul care conţine pe a^3.

8. Să se determine m, n, p astfel încît în dezvoltarea $\left(x^m + \frac{1}{x^p}\right)^n$, termenii de rang 12 şi 24 să conţină pe x, respectiv x^5 şi, mai mult, această dezvoltare să aibă termen liber.

9. Să se găsească suma coeficienţilor dezvoltării $(7x^2 - 6y^3)^9$.

10. Să se găsească rangul celui mai mare termen din dezvoltarea:

a) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^{100}$; b) $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{100}$.

11. Să se demonstreze egalităţile:

a) $C_n^0 + \frac{1}{2} C_n^1 + \ldots + \frac{1}{n+1} C_n^n = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$;

b) $k + \frac{k^2 C_n^1}{2} + \frac{k^3 C_n^2}{3} + \ldots + \frac{k^{n+1} C_n^n}{n+1} = \frac{(k+1)^{n+1} - 1}{n+1}$;

c) $C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n = n2^{n-1}$;

d) $C_n^1 - 2C_n^2 + \ldots + (-1)^{n-1} nC_n^n = 0$;

e) $1 + C_n^1 \cos \alpha + C_n^2 \cos 2\alpha + \ldots + C_n^n \cos n\alpha = 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \cos \frac{n\alpha}{2}$,

$C_n^1 \sin \alpha + C_n^2 \sin 2\alpha + \ldots + C_n^n \sin n\alpha = 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \sin \frac{n\alpha}{2}$.

§ 4. Progresii aritmetice şi progresii geometrice

4.1. Şiruri

1. *Noţiunea de şir*. Amintim că am notat prin **N** mulţimea numerelor naturale:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots, \tag{1}$$

iar prin **N*** mulţimea numerelor naturale nenule:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots\ . \tag{2}$$

În mod obişnuit se spune că (1) şi (2) reprezintă *şirul numerelor naturale*, respectiv *şirul numerelor naturale nenule*.

Să scriem în ordine descrescătoare fracţiile al căror numărător este egal cu 1:

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \ldots\ .$$

Am scris numai primele cinci fracţii. Este evident că pe locul al şaselea se găseşte fracţia $\frac{1}{6}$, pe al zecelea se găseşte fracţia $\frac{1}{10}$, pe al cincizecilea stă $\frac{1}{50}$, pe al o sutănouălea stă $\frac{1}{109}$. În general, pentru orice număr de ordine n, se poate indica fracția cu numărătorul egal cu 1, corespunzătoare acestuia.

Astfel între mulțimea numerelor naturale nenule și mulțimea fracțiilor cu numărătorul egal cu 1, se stabilește o corespondență. Să notăm această corespondență cu litera f. Obținem astfel o funcție f definită pe mulțimea N^* a numerelor naturale nenule cu valori în mulțimea fracțiilor care au numărătorul egal cu 1. Mai mult, avem:

$$f(1) = \frac{1}{1}; \quad f(2) = \frac{1}{2}, \ f(3) = \frac{1}{3}, \ \ldots, \ f(109) = \frac{1}{109}, \ \ldots .$$

Definiția 4.1.1. **O funcție definită pe mulțimea N^* a numerelor naturale nenule cu valori într-o mulțime E se numește șir de elemente ale mulțimii E.**

Fie $f: N^* \to E$ un șir de elemente ale mulțimii E. *Valorile funcției f, care corespund valorilor argumentului, egale cu 1, 2, 3 ș.a.m.d. se numesc, de obicei, termenii șirului de rang, respectiv, egal cu 1, 2, 3 ș.a.m.d.* Scriem termenii șirului în ordinea crescătoare a rangurilor:

$$f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots .$$

Notăm primul termen al șirului cu a_1, al doilea cu a_2, al treilea cu a_3, ..., al n-lea cu a_n ș.a.m.d. și atunci șirul se scrie:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots .$$

În această notație $f(n) = a_n$. Șirul se va nota cu (a_n). Putem nota șirul folosind orice altă literă în locul literei a. De exemplu (b_n), (c_n) ș.a.m.d.

Remarcăm că într-un șir același număr poate apărea cu ranguri diferite. De exemplu

$$1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots$$

este un șir.

Între mulțimea N^* a numerelor naturale nenule și mulțimea N a numerelor naturale există o *funcție bijectivă*, dată prin

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 & \ldots \end{array}$$

De aceea numerotarea termenilor unui șir se mai poate face începînd cu zero:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots .$$

Remarcăm că pentru fiecare număr real

$$a = a_0,a_1a_2 \dots a_n \dots$$

se pun în evidență următoarele șiruri:

1) șirul: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$;

2) șirul aproximărilor zecimale prin lipsă:

$$a_0;\ a_0,a_1;\ a_0,a_1a_2 \dots;\ a_0,a_1a_2 \dots a_n, \dots;$$

3) șirul aproximărilor zecimale prin adaos:

$$a_0 + 1;\ a_0,a_1 + \frac{1}{10};\ a_0,a_1a_2 + \frac{1}{10^2};\ \dots;\ a_0,a_1a_2 \dots a_n + \frac{1}{10^n};\ \dots .$$

În continuare vom considera numai șiruri de numere reale; acestea vor fi numite, mai simplu, *șiruri*.

2. *Moduri de definire a unui șir*

Șirul este un caz particular de funcție, de aceea modurile de definire a unei funcții se aplică și pentru definirea unui șir.

1° *Șiruri definite descriptiv (prin descriere)*

De exemplu, șirul (d_n) definit prin:

$$d_1 = 1,\ d_2 = 11,\ d_3 = 111, \dots, d_n = \underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ ori}}, \dots .$$

Acest șir se poate descrie astfel: fiecare termen al său se scrie cu ajutorul cifrei 1 și numărul cifrelor este egal cu rangul termenului șirului.

2° *Șiruri definite cu ajutorul unei formule care permite să se găsească orice termen al său*

Fie, de exemplu, șirul (b_n) astfel că pentru fiecare n, b_n este dat de formula:

$$b_n = n^2 - n + 1.$$

Punînd în formulă în loc de n, succesiv, valorile: 1, 2, 3, 4, ..., obținem: $b_1 = 1$, $b_2 = 3$, $b_3 = 7$, $b_4 = 13$ ș.a.m.d.

Formula care exprimă fiecare termen al șirului cu ajutorul rangului său n, se numește formula termenului al n-lea (sau termenul general) al șirului.

3° *Modul recurent de definire a unui șir*

Să considerăm șirul (b_n) astfel că $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_{n+2} = b_n + b_{n+1}$, pentru $n \geqslant 1$.

Cunoscînd primii doi termeni b_1 și b_2 ai șirului și formula $b_{n+2} = b_n + b_{n+1}$, putem să găsim orice termen al acestui șir:

$$b_3 = 1 + 2 = 3,\ b_4 = 2 + 3 = 5,\ b_5 = 3 + 5 = 8 \text{ ș.a.m.d.}$$

O formulă care exprimă orice termen al șirului, de la un rang oarecare, prin precedenții (unul sau mai mulți) se numește *recurentă*.

Printr-un mod recurent de definire al unui şir indicăm de obicei:

1. primul termen al şirului (sau cîţiva din primii termeni);

2. formula care permite să se definească orice termen al şirului cu ajutorul termenilor precedenţi cunoscuţi.

Exemplu. Fie şirul (a_n) astfel încît $a_1 = 10$ şi $a_{n+1} = a_n - 5$, $n \geqslant 1$. Atunci

$$a_2 = a_1 - 5 = 5,$$
$$a_3 = a_2 - 5 = 0,$$
$$a_4 = a_3 - 5 = -5 \text{ ş.a.m.d.}$$

4.2. Progresii aritmetice

1. *Definiţia progresiei aritmetice*

Fie şirul (a_n), adică

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots,$$

astfel încît $a_1 = 3$ şi $a_{n+1} = a_n + 2$, pentru $n \geqslant 1$. Deci $a_1 = 3$, $a_2 = 3 + 2 = 5$, $a_3 = 5 + 2 = 7$, $a_4 = 7 + 2 = 9$ etc.

Se observă că fiecare termen al acestui şir, începînd cu al doilea, se obţine prin adăugarea la termenul precedent a unui aceluiaşi număr şi anume 2.

Definiţia 4.2.1. **Un şir de numere în care fiecare termen, începînd cu al doilea, se obţine din cel precedent prin adăugarea aceluiaşi număr, se numeşte *progresie aritmetică*.**

Cu alte cuvinte, *un şir de numere*

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

este o progresie aritmetică, dacă pentru orice $k \geqslant 1$, *avem*

$$a_{k+1} = a_k + r,$$

unde r este un număr constant pentru şirul dat.

Din definiţie rezultă că într-o progresie aritmetică diferenţa dintre orice termen şi predecesorul său este egală cu acelaşi număr r.

Numărul r se numeşte *raţia* progresiei aritmetice.

Progresia aritmetică (a_n) este complet determinată, dacă se cunosc primul termen a_1 şi raţia r.

Se spune că numerele $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ *sînt în progresie aritmetică, dacă ele sînt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.*

Observaţie. Pentru a pune în evidenţă faptul că şirul $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ formează o progresie aritmetică se utilizează, adesea, scrierea

$$\div\, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots .$$

Exemple. 1) Dacă $a_1 = 0$, $r = 1$, atunci avem progresia

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots,$$

adică şirul numerelor naturale.

2) Dacă $a_1 = -2$ şi $r = -4$, atunci obţinem progresia

$$-2, -6, -10, -14, \ldots .$$

3) Dacă $a_1 = 1$, $r = 2$, atunci obţinem progresia

$$1, 3, 5, 7, \ldots,$$

adică şirul numerelor naturale impare.

O progresie aritmetică are următoarea proprietate importantă:

Teorema 4.2.2. Orice termen al unei progresii aritmetice

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots,$$

începînd cu al doilea, este media aritmetică a termenilor vecini lui.

Cu alte cuvinte, *pentru orice* $n \geqslant 2$.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}. \tag{1}$$

Demonstraţie. Într-adevăr, pentru $n \geqslant 2$

$$a_n = a_{n-1} + r,$$

$$a_n = a_{n+1} - r.$$

Adunînd aceste două egalităţi, deducem

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1},$$

de unde rezultă egalitatea (1).

Este adevărată şi afirmaţia reciprocă a acesteia, adică:

Dacă un şir de numere are proprietatea că fiecare termen al său, începînd cu al doilea, este media aritmetică a termenilor vecini lui, atunci acest şir este o progresie aritmetică.

Într-adevăr, să presupunem că pentru orice trei termeni consecutivi ai unui şir oarecare (a_n) are loc relaţia:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Atunci

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1},$$

de unde

$$a_n + a_n = a_{n-1} + a_{n+1},$$

sau

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n.$$

Aceasta înseamnă că diferenţa dintre orice termen al şirului (a_n) şi predecesorul său este egală cu acelaşi număr, şi deci (a_n) este o progresie aritmetică.

Observaţie. Proprietatea semnalată mai înainte justifică denumirea de progresie aritmetică.

2. *Formula termenului general al unei progresii aritmetice*

Cunoscînd primul termen şi raţia unei progresii aritmetice (a_n) se poate da o formulă care permite să se găsească orice termen al progresiei.

Fie a_1 primul termen al progresiei aritmetice şi r raţia sa.

Atunci din definiţia progresiei aritmetice

$$a_2 = a_1 + r,$$

$$a_3 = a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r,$$

$$a_4 = a_3 + r = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r \text{ ş.a.m.d.}$$

În general, avem

Teorema 4.2.3. **Termenul general al unei progresii aritmetice este dat de formula:**

$$a_n = a_1 + (n - 1)r. \quad (1)$$

Demonstraţie. Vom demonstra formula prin metoda inducţiei matematice. Notăm cu $P(n)$ egalitatea (1), pentru un n dat.

1° Pentru $n = 1$, egalitatea (1) este evident adevărată.

2° Rămîne să arătăm că pentru orice număr natural k, avem $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$.

Fie deci adevărată $P(k)$, adică

$$a_k = a_1 + (k - 1)r.$$

Să arătăm că este adevărată $P(k + 1)$. Într-adevăr, avem

$$a_{k+1} = a_k + r = a_1 + (k - 1)r + r = a_1 + kr.$$

Deci ambele etape ale metodei inducţiei matematice sînt verificate. Înseamnă că $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural n. Formula (1) este astfel demonstrată.

De exemplu, pentru progresia aritmetică

$$-10, -5, 0, 5, 10, \ldots,$$

avem $a_1 = -10;\ r = 5.$

De aceea

$$a_{13} = a_1 + 12r = -10 + 60 = 50,$$

$$a_{55} = a_1 + 54r = -10 + 270 = 260$$

ş.a.m.d.

3. *Formula sumei primilor n termeni ai unei progresii aritmetice*

Ne propunem să găsim suma numerelor naturale de la 1 la 100, adică

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100.$$

Evident se poate efectua această sumă adunînd termen cu termen numerele de la 1 la 100. Această soluţie este destul de anevoioasă. Să procedăm de aceea în modul următor:

Scriem suma numerelor naturale de la 1 la 100, de două ori. În primul rînd scriem termenii sumei în ordine crescătoare, iar în al doilea rînd în ordine descrescătoare. Astfel:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100, \\ 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1. \end{aligned}$$

Se observă că suma numerelor aşezate unul sub altul este aceeaşi:

$$1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \dots = 98 + 3 = 99 + 2 = 100 + 1.$$

Cum fiecare astfel de pereche de numere are suma egală cu 101 şi cum numărul perechilor este 100, se obţine

$$1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 = \frac{101 \cdot 100}{2} = 101 \cdot 50 = 5050.$$

Se poate proceda analog, pentru deducerea formulei care dă suma primilor n termeni ai oricărei progresii aritmetice.*

Fie (a_n) o progresie aritmetică de raţie r şi fie S_n suma primilor n termeni ai săi, adică

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

Numerele $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ sînt în progresie aritmetică.

Dăm mai întîi următoarea proprietate importantă a lor.

Teorema 4.2.4. Fie numerele $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ în progresie aritmetică. Atunci

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n.$$

Cu alte cuvinte, *suma oricăror două numere egal depărtate de numerele extreme este egală cu suma numerelor extreme.*

---

* Se spune că Karl Friedrich Gauss (1777—1855), matematician german, unul dintre cei mai mari matematicieni ai tuturor timpurilor, pe vremea cînd era elev la şcoala primară l-a uimit pe profesorul său, deoarece a calculat mintal suma unui număr par de numere, pe care profesorul o considera o problemă anevoioasă. De fapt, elevul observase că numerele din sumă au proprietatea că suma termenilor egal depărtaţi de extremi este aceeaşi şi a înmulţit aceasta cu jumătate din numărul termenilor.

Demonstraţie. Dacă r este raţia, atunci

$$a_k = a_1 + (k-1)r \text{ şi } a_{n-k+1} = a_1 + (n-k)r,$$

de unde: $a_k + a_{n-k+1} = [a_1 + (k-1)r] + [a_1 + (n-k)r] = 2a_1 + (n-1)r$.

Dar $a_1 + a_n = a_1 + [a_1 + (n-1)r] = 2a_1 + (n-1)r$.

Deci $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n = 2a_1 + (n-1)r$.

Folosind această teoremă este uşor de calculat formula generală pentru suma S_n. Avem

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n,$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1.$$

Adunînd aceste două egalităţi se obţine:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-2} + a_3) + \\ + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Dar, conform teoremei precedente, avem

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots .$$

De aceea

$$2S_n = n(a_1 + a_n),$$

de unde

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}. \tag{1}$$

Deci: *suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice este egală cu produsul dintre semisuma termenilor extremi (ai sumei) şi numărul termenilor sumei.*

În particular,

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \frac{(1 + 100)100}{2} = 5\,050.$$

Observaţie. Înlocuim în formula $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$ termenul a_n al progresiei prin $a_1 + (n-1)r$. Atunci

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n.$$

Aşadar

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n. \tag{2}$$

Am obţinut astfel o formulă în care suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice se exprimă în funcţie de primul termen, raţie şi numărul termenilor.

Exemplu. Să determinăm suma primilor 10 termeni ai progresiei aritmetice (a_n):

$$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ \ldots .$$

Primul termen al progresiei este 1, iar rația este 3. Atunci al 10-lea termen al progresiei este:

$$a_{10} = 1 + (10 - 1) \cdot 3 = 1 + 9 \cdot 3 = 28.$$

Deci

$$S_{10} = \frac{(1 + 28)10}{2} = 29 \cdot 5 = 145.$$

Putem aplica și formula (2) pentru calculul sumei S_{10}.

4.3. Progresii geometrice

1. *Definiția progresiei geometrice*

Fie șirul (b_n), adică

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots,$$

astfel încît $b_1 = 2$ și $b_{n+1} = 3 \cdot b_n$ pentru $n \geqslant 1$. Atunci $b_1 = 2$; $b_2 = 3 \cdot b_1 = 6$; $b_3 = 3 \cdot b_2 = 18$; $b_4 = 3 \cdot b_3 = 54$ ş.a.m.d.

Fiecare termen al acestui șir, începînd cu al doilea, se obține prin înmulțirea termenului precedent cu un același număr și anume cu 3.

Definiția 4.3.1. Un șir de numere al cărui prim termen este nenul, iar fiecare termen al său, începînd cu al doilea, se obține din cel precedent prin înmulțirea cu un același număr nenul, se numește progresie geometrică.

Cu alte cuvinte, *un șir de numere*

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots\ (b_1 \neq 0),$$

este o progresie geometrică dacă pentru orice $k \geqslant 1$, avem

$$b_{k+1} = b_k \cdot q,$$

unde $q \neq 0$ este un număr constant, pentru șirul dat.

Din definiție rezultă că într-o progresie geometrică cîtul dintre orice termen și predecesorul său este egal cu același număr q.

Numărul q se numește *rația* progresiei geometrice.

Progresia geometrică (b_n) este complet determinată, dacă se cunosc primul termen b_1 și rația q.

Se spune că numerele $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ sînt în progresie geometrică dacă ele sînt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

Observație. Pentru a pune în evidență faptul că șirul $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ formează o progresie geometrică se utilizează, adesea, scrierea

$$\because\!\!\because\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots .$$

Exemple

1) Dacă $b_1 = 5$, $q = \frac{1}{3}$, atunci avem progresia

$$5, \frac{5}{3}, \frac{5}{9}, \frac{5}{27}, \ldots.$$

2) Dacă $b_1 = 3$, $q = -2$, atunci avem progresia

$$3, -6, 12, -24, \ldots.$$

Dacă raţia q a unei progresii geometrice este pozitivă, adică $q > 0$, atunci toţi termenii progresiei au acelaşi semn şi anume:

1° Dacă $b_1 > 0$, atunci toţi termenii sînt pozitivi.

2° Dacă $b_1 < 0$, atunci toţi termenii sînt negativi.

În cazul în care $q < 0$, termenii de rang impar ai progresiei au acelaşi semn ca şi primul termen, iar termenii de rang par ai progresiei au semn contrar semnului primului termen al progresiei. Deci, în acest caz, semnele termenilor progresiei alternează.

O progresie geometrică cu termeni pozitivi are următoarea proprietate importantă care, în particular, justifică denumirea de „progresie geometrică".

Teorema 4.3.2. Orice termen al unei progresii geometrice cu termeni pozitivi

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}, b_n, b_{n+1}, \ldots,$$

începînd cu al doilea, este media geometrică a termenilor vecini lui.

Cu alte cuvinte, *pentru orice* $n \geqslant 2$,

$$b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}. \tag{1}$$

Demonstraţie. Într-adevăr, pentru $n \geqslant 2$

$$b_n = b_{n-1}q,$$

$$b_n = \frac{b_{n+1}}{q}.$$

Înmulţind aceste două egalităţi, deducem

$$b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1},$$

de unde rezultă egalitatea (1).

Este adevărată şi afirmaţia reciprocă a acesteia:

Dacă un şir de numere cu termeni pozitivi are proprietatea că fiecare termen al său, începînd cu al doilea, este media geometrică a termenilor vecini lui, atunci acest şir este o progresie geometrică.

Într-adevăr, să presupunem că pentru orice trei termeni consecutivi ai unui şir oarecare (b_n) cu termeni pozitivi, are loc relaţia:

$$b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}.$$

Atunci

$$b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1},$$

de unde

$$b_n b_n = b_{n-1} b_{n+1},$$

sau

$$b_n : b_{n-1} = b_{n+1} : b_n.$$

Aşadar, cîtul dintre orice termen al şirului (b_n) şi predecesorul său este egal cu acelaşi număr. Deci (b_n) este o progresie geometrică.

2. *Formula termenului general al unei progresii geometrice*

Cunoscînd primul termen şi raţia unei progresii geometrice (b_n) se poate da o formulă care permite să se găsească orice termen al progresiei.

Fie b_1 primul termen al progresiei geometrice şi q raţia sa. Atunci, din definiţia progresiei geometrice, deducem:

$$b_2 = b_1 \cdot q,$$
$$b_3 = b_2 \cdot q = (b_1 \cdot q) \cdot q = b_1 \cdot q^2,$$
$$b_4 = b_3 \cdot q = (b_1 \cdot q^2) \cdot q = b_1 \cdot q^3 \text{ ş.a.m.d.}$$

În general, avem

Teorema 4.3.3. Termenul general al unei progresii geometrice este dat de formula:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}. \qquad (1)$$

Demonstraţie. Vom demonstra formula prin metoda inducţiei matematice. Notăm cu $P(n)$ egalitatea (1), pentru un n dat.

1. Pentru $n = 1$, egalitatea este evident adevărată.

2. Fie acum $P(k)$ adevărată, adică

$$b_k = b_1 \cdot q^{k-1}.$$

Atunci $b_{k+1} = b_k q = (b_1 q^{k-1}) q = b_1 q^k$, deci $P(k+1)$ este adevărată.

Aşadar $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Metoda inducţiei matematice ne asigură că formula (1) este adevărată pentru orice număr natural n.

Exemplu. Pentru progresia geometrică

$$12, \ -6, \ 3, \ -\frac{3}{2}, \ \ldots,$$

avem $b_1 = 12$, $q = -\dfrac{1}{2}$. De aceea

$$b_{10} = b_1 q^9 = 12\left(-\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{3}{(-2)^7} = -\frac{3}{128};$$

$$b_{101} = b_1 q^{100} = 12\left(-\frac{1}{2}\right)^{100} = \frac{3}{2^{98}}$$

ş.a.m.d.

3. *Formula sumei primilor n termeni ai unei progresii geometrice.*

Fie (b_n) o progresie geometrică, de rație q și fie

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-1} + b_n, \tag{1}$$

suma primilor n termeni ai săi.

Numerele $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-1}, b_n$ sînt în progresie geometrică. Ca și pentru numere în progresie aritmetică, pentru numerele $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-1}, b_n$, care sînt în progresie geometrică, are loc o relație analoagă,

$$b_k b_{n-k+1} = b_1 b_n$$

adică *produsul oricăror două numere egal depărtate de numerele extreme este egal cu produsul numerelor extreme.*

Pentru calculul sumei S_n distingem două cazuri:

1. Dacă rația q a progresiei este egală cu 1, atunci $S_n = nb_1$.

2. Dacă rația q a progresiei este diferită de 1, atunci procedăm în modul următor:

Înmulțim ambii membri ai egalității (1) cu q:

$$qS_n = b_1q + b_2q + b_3q + \dots + b_{n-1}q + b_nq.$$

Însă $b_1q = b_2$, $b_2q = b_3$, $b_3q = b_4$, $\dots$, $b_{n-1}q = b_n$, de aceea,

$$qS_n = b_2 + b_3 + b_4 + \dots + b_n + b_nq. \tag{2}$$

Scăzînd, membru cu membru, egalitatea (1) din egalitatea (2) obținem:

$$qS_n - S_n = b_nq - b_1,$$

$$S_n(q - 1) = b_nq - b_1.$$

Deoarece $q \neq 1$,

$$S_n = \frac{b_nq - b_1}{q - 1}. \tag{3}$$

Observație. Dacă în formula $S_n = \frac{b_nq - b_1}{q - 1}$, unde $q \neq 1$, înlocuim pe b_n cu b_1q^{n-1}, atunci obținem o altă formulă a sumei primilor n termeni ai progresiei geometrice:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} \; (q \neq 1). \tag{4}$$

Exemplu. Să găsim suma primilor 10 termeni ai progresiei geometrice (b_n)

$$1, 2, 4, 8, \dots .$$

Avem $b_1 = 1$ și $q = 2$. Atunci, după formula (4), obținem

$$S_{10} = \frac{1(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 2^{10} - 1 = 1\,024 - 1 = 1\,023.$$

Putem aplica și formula (3) pentru calculul sumei S_{10}, calculîndu-l mai întîi pe b_{10}.

Exerciţii

Şiruri

1. Să se scrie primii cinci termeni ai şirului, cu termenul al n-lea dat de formula:

a) $a_n = 2^{-n}$; d) $c_n = \dfrac{3n-2}{2+n}$; g) $d_n = (-1)^n$;

b) $x_n = 5 + 4n$; e) $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$; h) $a_n = \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{n+2}$; $(n \geqslant 1)$.

c) $b_n = 10 - n^2$; f) $z_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{9}\cdot n\right)$; i) $b_n = (-1)^n \cdot 7 + \dfrac{1}{n}$.

2. Să se găsească formula termenului al n-lea $(n \geqslant 1)$ pentru fiecare din şirurile:

a) $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$; e) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{6}, \ldots$;

b) $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$; f) $\operatorname{tg} 45°, \operatorname{tg} 22°30', \operatorname{tg} 11°55', \ldots$;

c) $3, -3, 3, -3, 3, \ldots$; g) $1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \ldots$;

d) $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{27}, \dfrac{1}{81}, \ldots$; h) $1, 9, 25, 49, 81, \ldots$.

3. Şirul (x_n), $n \geqslant 1$, are termenul general dat de formula $x_n = 6 - 4n$. Este termen al acestui şir numărul:

a) -102; b) -132; c) 100; d) 150?

În cazul în care răspunsul este afirmativ să se indice numărul de ordine al acestui termen.

4. Este termen al şirului (a_n), $n \geqslant 1$, unde $a_n = n^2 - 17n$, numărul:

a) -30; b) -72; c) -100; d) -200?

În caz afirmativ să se indice numărul de ordine al acestui termen.

5. Să se scrie primii 6 termeni ai şirului (a_n), $n \geqslant 1$, dacă:

a) $a_1 = 1$; $a_{n+1} = a_n - 1$; d) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{a_n}$;

b) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2$; e) $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$;

c) $a_1 = -2$, $a_{n+1} = 2a_n$; f) $a_1 = 3$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n - a_{n+1}$.

6. Un şir este definit prin formula de recurenţă

$$(n+2)(n+1)\,a_{n+2} - n^2 a_n = 0$$

şi prin $a_1 = 0$, $a_2 = 1$. Să se deducă termenul general.

Progresii aritmetice

7. Să se scrie primii patru termeni ai progresiei aritmetice (a_n), dacă:

a) $a_1 = 7$, $r = 2$; c) $a_1 = 1{,}3$, $a_2 = 0{,}3$;

b) $a_1 = -3$, $r = 5$; d) $a_1 = \dfrac{2}{7}$, $a_2 = \dfrac{1}{5}$.

8. Să se găsească primii doi termeni ai progresiei aritmetice (b_n) dată astfel:

a) $b_1, b_2, 15, 21, 27, \ldots$; b) $b_1, b_2, -9, -2, 5, \ldots$.

9. Dacă se cunosc doi termeni ai unei progresii aritmetice (c_n):

a) $c_2 = 7$ și $c_5 = 13$, să se găsească c_9, c_3, c_{15};

b) $c_8 = 40$ și $c_{20} = -20$, să se găsească c_{10}, c_7, c_{19}.

10. Într-o progresie aritmetică (a_n) se cunoaște a_1 și r. Să se găsească a_n, dacă:

a) $a_1 = -2$, $r = 0{,}5$, $n = 12$;

b) $a_1 = 3$, $r = -1{,}5$, $n = 19$;

c) $a_1 = -2{,}5$, $r = -2$, $n = 50$;

d) $a_1 = \frac{3}{7}$, $r = \frac{1}{3}$, $n = 25$.

11. Să se găsească primul termen a_1 al unei progresii aritmetice, dacă:

a) $a_{10} = 131$, $r = 12$;

b) $a_{52} = -125$, $r = -5$;

c) $a_{200} = 0$, $r = -3$;

d) $a_{44} = 13{,}5$, $r = 0{,}5$.

12. Să se găsească primul termen și rația unei progresii aritmetice, dacă:

a) $c_5 = 27$, $c_{27} = 60$;

b) $c_{47} = 74$, $c_{74} = 47$;

c) $c_{20} = 0$, $c_{66} = -92$;

d) $a_1 + a_7 = 42$, $a_{10} - a_3 = 21$;

e) $a_2 + a_4 = 16$, $a_1 a_5 = 28$;

f) $S_{10} = 8S_5$, $S_3 = -3$.

13. Șirul (y_n) este dat prin formula termenului al n-lea:

a) $y_n = 2n - 5$;

b) $y_n = 10 - 7n$.

Să se demonstreze că șirul (y_n) este o progresie aritmetică. Să se găsească primul termen al său și rația.

14. Să se găsească suma primilor 100 termeni ai unei progresii aritmetice (a_n), dacă:

a) $a_1 = 10$, $a_{100} = 150$;

b) $a_1 = 5{,}5$, $a_{100} = 7{,}5$;

c) $a_1 = 2$, $r = -5$;

d) $a_1 = -1$, $r = 1$.

15. Cunoscînd suma S_n a primilor n termeni ai unei progresii aritmetice (a_n), să se găsească:

a) primii cinci termeni ai progresiei, dacă $S_n = \frac{n^2}{4} - n$;

b) primul termen și rația progresiei, dacă $S_n = 2n^2 + 3n$.

16. Să se rezolve ecuațiile:

a) $1 + 7 + 13 + \ldots + x = 280$;

b) $(x + 1) + (x + 4) + (x + 7) + \ldots + (x + 28) = 155$.

17. Să se găsească suma primilor douăzeci de termeni ai unei progresii aritmetice, dacă:

$$a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20.$$

18. Este progresie aritmetică un șir, pentru care suma primilor n termeni ai săi este dată de formula:

a) $S_n = n^2 - 2n$;

b) $S_n = -4n^2 + 11$;

c) $S_n = 7n - 1$;

d) $S_n = n^2 - n + 3$?

19. Într-o progresie aritmetică avem $S_{10} = 100$, $S_{30} = 900$. Să se găsească S_{50}.

20. Suma primilor n termeni ai unui șir oarecare (b_n) este dată de formula $S_n = n^2 - 2n + 5$. Să se găsească primii patru termeni ai acestui șir. Este acest șir o progresie aritmetică?

21. Să se demonstreze că numerele următoare sînt în progresie aritmetică:

a) $\frac{a}{x+1}$, $\frac{x+a-1}{2x}$, $\frac{x^2+a-1}{x(x+1)}$ $(x \neq -1, x \neq 0)$;

b) $(a^2-2ab-b^2)^2$, $(a^2+b^2)^2$, $(a^2+2ab-b^2)^2$.

22. Să se demonstreze că dacă numerele a, b, c sînt în progresie aritmetică, atunci şi numerele următoare sînt în progresie aritmetică:

i) a^2-bc, b^2-ca, c^2-ab;

ii) b^2+bc+c^2, c^2+ca+a^2, a^2+ab+b^2.

Să se arate că dacă $a+b+c \neq 0$, atunci este adevărată şi reciproca.

23. Să se demonstreze că dacă a^2, b^2, c^2 sînt în progresie aritmetică, atunci şi numerele următoare sînt în progresie aritmetică

i) $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$;

ii) $\frac{a}{b+c}$, $\frac{b}{c+a}$, $\frac{c}{a+b}$.

Să se studieze reciproca.

24. Să se determine x astfel încît următoarele numere să fie, separat, în progresie aritmetică:

i) $1+x^2$, $(a+x)^2$, $(a^2+x)^2$;

ii) a^2+x, $ab+x$, b^2+x;

iii) $a^2(b+x)$, $b^2(a+x)$, $x^2(a+b)$.

25. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, un şir de numere reale. Să se arate că acest şir este o progresie aritmetică dacă şi numai dacă pentru orice n avem relaţia:

$$\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\ldots+\frac{1}{x_{n-1}x_n}=\frac{n-1}{x_1x_n}.$$

Progresii geometrice

26. Să se scrie primii cinci termeni ai progresiei geometrice (b_n) dacă:

a) $b_1=6$, $q=2$;

b) $b_1=-10$, $q=\frac{1}{2}$;

c) $b_1=-24$, $q=-0,5$;

d) $b_1=0,5$, $q=\sqrt{3}$.

27. Să se găsească primii doi termeni ai progresiei geometrice (y_n), dată astfel:

a) y_1, y_2, 24, 36, 54, ...;

b) y_1, y_2, 225, -135, 81, ...

28. Dacă se cunosc doi termeni ai unei progresii geometrice (b_n):

a) $b_3=6$, $b_5=24$, să se găsească b_7, b_9, b_{10};

b) $b_5=10$, $b_8=-10$, să se găsească b_6, b_{12}, b_3.

29. Este progresie aritmetică sau progresie geometrică şirul (a_n), dacă:

a) $a_1 = 5$ şi $a_{n+1} = 2a_n$;

b) $a_1 = 5$ şi $a_{n+1} = 2 + a_n$;

c) $a_1 = -8$ şi $a_{n+1} = \frac{1}{3} + a_n$;

d) $a_1 = -8$ şi $a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$?

În caz afirmativ să se indice raţia.

30. Să se scrie formula termenului al n-lea al progresiei geometrice date prin:

a) $b_1 = 2,\ b_{n+1} = 3b_n$;

b) $b_1 = 4,\ b_{n+1} = (-3)b_n$;

c) $b_1 = 9,\ b_{n+1} = 2b_n$;

d) $b_1 = 10,\ b_{n+1} = \frac{1}{5} b_n$.

31. Să se găsească primul termen şi raţia unei progresii geometrice, dacă:

a) $\begin{cases} a_2 - a_1 = -4, \\ a_3 - a_1 = 8; \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_4 + a_1 = \frac{7}{16}, \\ a_3 - a_2 + a_1 = \frac{7}{8}; \end{cases}$

c) $a_6 = 25,\ a_8 = 9$;

d) $a_4 = -12,\ a_7 = 23\frac{7}{16}$.

32. Să se calculeze sumele:

a) $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{15}$;

b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \ldots - \frac{1}{2^{16}}$;

c) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{3^{12}}$;

d) $1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \ldots + 2^{12}$;

e) $1 + x + x^2 + \ldots + x^{100}$;

f) $x - x^3 + x^5 - \ldots + x^{17}$.

33. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{99} = 0$;

b) $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{100} = 0$.

34. Fie (y_n) o progresie geometrică, astfel încît suma primilor n termeni ai săi este $S_n = 2(5^n - 1)$. Să se determine S_4, y_1, y_2.

35. Este progresie geometrică un şir, pentru care suma primilor n termeni ai săi este dată de formula:

a) $S_n = n^2 - 1$; b) $S_n = 2^n - 1$; c) $S_n = 3^n + 1$?

36. Într-o progresie geometrică avem $S_3 = 40$, $S_6 = 60$. Să se găsească S_9.

37. Să se determine x astfel încît numerele $a + x$, $b + x$, $c + x$, să fie în progresie geometrică.

38. Se dau două numere a şi b. Să se determine numerele x, y, z astfel încît să fie satisfăcute simultan condiţiile:

i) x, y, z să fie în progresie geometrică.

ii) x, $y + a$, z să fie în progresie aritmetică.

iii) x, $y + a$, $z + b$ să fie în progresie geometrică.

Caz particular: $a = 4$, $b = 32$.

39. Să se cerceteze dacă există numere în progresie geometrică $b_1, b_2, \ldots, b_n$, unde b_1 este un număr dat astfel încît trei termeni consecutivi verifică, oricare ar fi k, relaţia $b_k - 5b_{k-1} + 6b_{k-2} = 0$. Să se generalizeze considerînd relaţia $\alpha b_k + \beta b_{k-1} + \gamma b_{k-2} = 0$.

Nu se cere.

III Noţiuni de aritmetica numerelor întregi

§ 1. Teorema împărţirii cu rest a numerelor întregi

Ne reamintim din materia parcursă în clasele anterioare că oricare ar fi două numere naturale a şi b, cu b diferit de zero, există alte două numere naturale q şi r unice, cu proprietatea că $a = bq + r$ şi $0 \leqslant r < b$. Teorema care asigură existenţa şi unicitatea numerelor q şi r se numeşte teorema împărţirii cu rest în mulţimea numerelor naturale.

În cele ce urmează vom da o teoremă mai generală şi anume teorema împărţirii cu rest pentru numere întregi.

Teorema 1.1. **Fie a şi b două numere întregi, cu b diferit de zero. Atunci există două numere întregi, q şi r, astfel încît**

$$(1) \quad a = bq + r \text{ şi } 0 \leqslant r < |b|.$$

În plus, numerele q şi r sînt unice satisfăcînd proprietăţile anterioare.

În egalitatea (1) q şi r se numesc *cîtul* şi respectiv *restul împărţirii lui a la b.*

Nu vom da demonstraţia acestei teoreme, în schimb vom arăta cum se procedează practic, atunci cînd avem de împărţit două numere întregi a şi b, cu $b \neq 0$.

Cazul 1° $a, b > 0$; împărţirea se efectuează cu algoritmul de calcul cunoscut din clasele anterioare.

Cazul 2° $a \leqslant 0$, $b > 0$; vom efectua împărţirea lui $|a|$ la b;

$$|a| = bq' + r' \text{ cu } q', r' \in \mathbf{N},\ 0 \leqslant r' < b.$$

Dacă $r' = 0$, atunci

$$a = b(-q') \text{ şi luăm } q = -q'.$$

Dacă $r' > 0$, va rezulta:

$$a = -|a| = -bq' - r' \text{ şi deci}$$

$$a = b(-q') - r' = b(-q') - b + (b - r') = b(-q' - 1) + (b - r').$$

Luînd $q = -q' - 1$ şi $r = b - r'$, vom avea

$$a = bq + r \text{ şi } 0 \leqslant r < b.$$

Cazul 3° $a \geqslant 0$, $b < 0$: efectuăm împărţirea lui a la $|b|$:

$$a = |b|\, q' + r, \text{ cu } 0 \leqslant r < |b|$$

şi luînd $q = -q'$ obţinem $a = bq + r$.

Cazul 4° $a \leqslant 0, b < 0$; prin împărţirea lui $|a|$ la $|b|$ vom avea:

$$|a| = |b|q' + r', \ 0 \leqslant r' < |b|$$

şi deci $-a = -bq' + r'$. Dacă $r' = 0$, atunci avem $a = bq'$. Dacă $r' > 0$, obţinem

$a = bq - r' = bq' + b - b - r' = bq' + b + (-b - r') = b(q' + 1) + ((-b) - r')$ şi luînd $q = q' + 1$, $r = -b - r'$, rezultă

$$a = bq + r, \ 0 \leqslant r < |b|.$$

Exemple. 1) Să se efectueze împărţirea cu rest a lui -19 la 3.

Soluţie. Vom avea $|-19| = 19$ şi $19 = 3 \cdot 6 + 1$. Prin urmare

$$-19 = 3(-6) - 1 = 3(-6) - 3 + (3 - 1) = 3(-6 - 1) + 2 = 3(-7) + 2,$$

deci cîtul împărţirii lui -19 la 3 este -7 iar restul este 2.

2) Să se efectueze împărţirea cu rest a lui -523 la -20.

Soluţie. Avem $|-523| = 523$, $|-20| = 20$ şi $523 = 20 \cdot 26 + 3$. Rezultă că

$$-523 = (-20) \cdot 26 - 3 = (-20) \cdot 26 - 20 + (20 - 3) = (-20) \cdot 27 + 17.$$

Cîtul este 27, iar restul 17.

Observaţie. În cazul împărţirii cu rest la numărul întreg $b \neq 0$, se poate obţine ca rest unul din numerele $0, 1, 2, \ldots, |b| - 1$, deci în total $|b|$ resturi distincte.

De exemplu, în cazul împărţirii lui a la 2, pot exista două resturi, 0 şi 1, după cum numărul a este par sau impar:

$$a = 2q \text{ sau } a = 2q + 1, \ q \in \mathbf{Z}.$$

În cazul $b = 3$, putem obţine ca rest unul din numerele 0, 1 sau 2, iar a poate avea una din formele:

$$a = 3q, \ a = 3q + 1, \ a = 3q + 2, \ q \in \mathbf{Z}.$$

În multe probleme este convenabil să scriem în loc de

$$a = 3q + 2, \ a = 3q' - 1, \text{ unde } q' = q + 1.$$

Deci, în general, a va avea una din formele

$$a = 3k, \ a = 3k \pm 1, \ k \in \mathbf{Z}.$$

Analog, în cazul $b = 5$, putem avea resturile 0, 1, 2, 3, 4, forma corespunzătoare pentru un număr oarecare a fiind:

$5q$, $5q + 1$, $5q + 2$, $5q + 3$, $5q + 4$; altfel spus, putem avea pentru a una din scrierile:

$$5k, \ 5k \pm 1, \ 5k \pm 2, \ k \in \mathbf{Z}.$$

Aplicaţii. 1) Să se arate că dacă $n \in \mathbf{Z}$, atunci n^2 are una din formele $4k$ sau $8k + 1$.

Soluţie. Dacă $n = 2q$, atunci $n^2 = 4q^2$ şi deci $n^2 = 4k$, unde $k = q^2$. Dacă $n = 2q + 1$, atunci $n^2 = 4q^2 + 4q + 1 = 4(q^2 + q) + 1 = 4q(q + 1) + 1$.

Dar dintre numerele întregi consecutive q şi $q + 1$ unul este par şi deci $q(q + 1) = 2k$, deci $n^2 = 8k + 1$.

În final tragem următoarele concluzii: dacă n este par atunci n^2 este de forma $4k$; dacă n este impar atunci n^2 este de forma $8k + 1$ (în particular fiind şi de forma $4k' + 1$, cu $k' = 2k$); nu există numere pătrate perfecte care să dea restul 2 sau 3 prin împărţirea la 4.

2) Să se găsească ultima cifră a numărului 1489^{23}.

Soluție. Putem scrie pe 1489 sub forma

$$1489 = 1480 + 9 = 148 \cdot 10 + 9 = 149 \cdot 10 - 1.$$

Din formula binomului lui Newton rezultă că

$$1489^{23} = 10k + (-1)^{23} = 10k - 1 \text{ și deci}$$

ultima cifră a lui 1489^{23} este 9.

Exerciții

1. Să se efectueze împărțirile cu rest ale următoarelor perechi de numere întregi:
   a) -5437 la 225;
   b) $8\,745$ la -319;
   c) $-2\,438$ la -18;
   d) $-84\,312$ la -36.
2. Să se găsească două numere naturale a căror sumă să fie 6 612 și cîtul împărțirii celui mai mare prin cel mai mic să fie 75. Este soluția unică?
3. Care este ultima cifră a numerelor $2\,156^{43}$, 425^{21}, 251^{143}, $5\,234^{129}$, $164^{31} + 453^{18}$, $17^{60} + 12^{60}$?
4. Fie n, a, b și c numere naturale nenule. Să se arate că pentru a găsi cîtul împărțirii lui n la $a \cdot b \cdot c$ se poate proceda în felul următor: se împarte n la a, apoi cîtul obținut se împarte la b și noul cît se împarte la c; cîtul obținut la această ultimă împărțire este cel căutat.
5. Fie a, b, c numere întregi, $c \neq 0$ și r_1, r_2 resturile împărțirii lui a și b la c. Atunci restul împărțirii lui $a + b$ la c este același cu restul împărțirii lui $r_1 + r_2$ la c, iar restul împărțirii lui $a \cdot b$ la c este egal cu restul împărțirii lui $r_1 \cdot r_2$ la c.
6. Să se găsească cel mai mic număr natural care împărțit la -7 să dea restul 3 și împărțit la 11 să dea restul 2.
7. Dacă n este un număr întreg, atunci restul împărțirii lui n^2 la 7 este 0, 1, 2 sau 4.

§ 2. Divizibilitatea numerelor întregi. Proprietăți

Definiția 2.1. **Fie a și b două numere întregi. Spunem că b *divide* pe a (sau a este *divizibil* prin b, sau b este un *divizor* al lui a, sau a este un *multiplu* al lui b), dacă există un număr întreg c, astfel încît $a = bc$.**

Pentru a scrie că b îl divide pe a, vom folosi notația $b \mid a$.*

Prin urmare întregii care divid numărul întreg a se numesc divizorii lui a, iar pentru $b \in \mathbb{Z}$, numerele de forma kb, $k \in \mathbb{Z}$, se numesc multiplii lui b. Deci multiplii lui b sînt numerele $0, \pm b, \pm 2b, \ldots$.

---

* În unele manuale și culegeri de probleme se folosește și notația $a \,\vdots\, b$, pentru a scrie că a este divizibil prin b.

Se observă că în afară de cazul $b = 0$, multiplii lui b sînt în număr infinit.

Dacă $b = 0$, atunci $a = bc = 0 \cdot c = 0$ şi prin urmare $0 | a$ dacă şi numai dacă $a = 0$. Deci singurul multiplu al lui 0 este 0.

Dacă $a = 0$, atunci oricare ar fi $b \in \mathbf{Z}$, luînd $c = 0$ obţinem $0 = b \cdot 0$ şi deci orice număr întreg este divizor al lui 0.

Dacă a, b sînt numere întregi şi b este diferit de zero, atunci egalitatea

$$a = bc, \quad c \in \mathbf{Z},$$

are loc dacă şi numai dacă împărţirea cu rest a lui a la b dă restul 0 (adică împărţirea este exactă).

Dacă a este un număr întreg nenul, atunci $b \mid a$ implică existenţa unui număr întreg c, astfel încît $a = bc$. Rezultă că $|a| = |b| \cdot |c|$ şi deoarece b, $c \neq 0$ (altfel, $a = b \cdot c = 0$), obţinem că $|a| \geqslant |b| > 0$.
Prin urmare divizorii lui a sînt printre numerele ± 1, ± 2, ..., $\pm a$ şi sînt în număr finit (cel mult $2 \cdot |a|$).

Divizibilitatea numerelor întregi are următoarele proprietăţi:

1° este reflexivă, adică $a \mid a$, oricare ar fi întregul a. În plus, avem $\pm 1 \mid a$.

Într-adevăr, avem $a = a \cdot 1 = 1 \cdot a = (-1)(-a)$.

2° este tranzitivă, adică $a \mid b$ şi $b \mid c$ implică $a \mid c$.

Într-adevăr din $a \mid b$ şi $b \mid c$ rezultă existenţa unor numere întregi k_1, k_2 cu proprietatea

$$b = ak_1, \; c = bk_2,$$

de unde obţinem $c = (ak_1)k_2 = a(k_1k_2)$ şi notînd

$$k = k_1k_2 \in \mathbf{Z}, \text{ avem } c = ak, \text{ adică } a \mid c.$$

3° Dacă a şi b sînt numere întregi cu proprietatea $a \mid b$ şi $b \mid a$, atunci $a = \pm b$ (adică $|a| = |b|$).

Într-adevăr, fie c_1, c_2 numere întregi astfel încît $b = ac_1$ şi $a = bc_2$. Atunci $b = bc_1c_2$. Rezultă că, fie $b = 0$, fie $c_1c_2 = 1$. În primul caz, din $b \mid a$ deducem $a = 0 = b$, iar în al doilea caz, deoarece c_1, $c_2 \in \mathbf{Z}$, vom avea $c_1 = c_2 = \pm 1$, prin urmare $a = \pm b$.

4° Dacă a_1, a_2, ..., a_n sînt numere întregi şi d este un număr întreg care divide pe fiecare a_i, $i = 1, 2, ..., n$, atunci d divide orice combinaţie liniară de $a_1, a_2, ..., a_n$, adică $d \,\Big|\, \sum_{i=1}^{n} l_i a_i$, oricare ar fi $l_1, l_2, ..., l_n$ numere întregi.

Într-adevăr, există $k_1, k_2, ..., k_n$ numere întregi cu proprietatea $a_i = dk_i$, $i = 1, 2, ..., n$, de unde rezultă:

$$\sum_{i=1}^{n} l_i a_i = \sum_{i=1}^{n} d l_i k_i. \text{ Notînd } k = \sum_{i=1}^{n} l_i k_i \in \mathbf{Z},$$

obţinem $\sum_{i=1}^{n} l_i a_i = dk$, adică $d \,\Big|\, \sum_{i=1}^{n} l_i a_i$.

În particular, dacă un număr întreg divide fiecare din termenii unei sume date, atunci acel număr divide suma respectivă, iar dacă două numere sînt divizibile prin același număr, atunci și diferența lor va fi divizibilă cu acel număr.

5° Dacă a, b și d sînt numere întregi și $d \neq 0$, atunci $a - b$ este divizibil prin d dacă și numai dacă a și b dau același rest prin împărțirea la d.

Într-adevăr, dacă $a = dq_1 + r_1$, $0 \leqslant r_1 < |d|$ și $b = dq_2 + r_2$, $0 \leqslant r_2 < |d|$ sînt împărțirile cu rest ale lui a și b la d, atunci putem presupune

$$r_1 \geqslant r_2 \text{ și avem } a - b = d(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2),$$

egalitate în care $|d| > r_1 \geqslant r_1 - r_2 \geqslant 0$ și din unicitatea împărțirii cu rest rezultă că $r_1 - r_2$ este chiar restul împărțirii lui $a - b$ la d. Prin urmare, $d \mid a - b$ dacă și numai dacă $r_1 = r_2$.

6°. Dacă a, b sînt numere întregi și $b \mid a$, atunci

$$b \mid (-a),\ (-b) \mid a \text{ și } (-b) \mid (-a).$$

În particular, rezultă că $b \mid a$ dacă și numai dacă $|b| \mid |a|$.

Într-adevăr, relația $a = bc$, cu $c \in \mathbf{Z}$, este echivalentă cu relațiile:

$$-a = b(-c),$$

$$a = (-b)(-c) \text{ și}$$

$$-a = (-b)c.$$

Din această ultimă proprietate rezultă că ori de cîte ori vorbim despre divizorii numărului întreg a, putem să ne restrîngem numai la divizorii săi naturali, ceilalți obținîndu-se din aceștia punînd semnul minus în față. În particular, dacă $a \in \mathbf{Z}$, atunci ± 1, $\pm a$ sînt printre divizorii lui a.

Exemplu. Divizorii lui 128 sînt: ± 1, ± 2, ± 4, ± 8, ± 16, ± 32, ± 64, ± 128.

Observație. Deși numărul de divizori ai unui număr întreg dat n este finit, nu este chiar atît de simplu să îi obținem, mai ales dacă numărul respectiv este mare. O metodă care poate fi folosită este prin încercarea tuturor numerelor de la 1 la $|n|$. Dintre acestea, 1 și $|n|$ știm de la început că sînt divizori, iar dacă $1 < d < |n|$ are proprietatea că $d \mid n$ atunci și $\dfrac{|n|}{d}$ este divizor al lui n. Prin urmare nu trebuie să verificăm decît numerele mai mici decît $\sqrt{|n|}$, avînd grijă că, dacă obținem un divizor d printre numerele întregi de la 1 la $\sqrt{|n|}$, să-l punem printre divizori și pe $\dfrac{|n|}{d}$. Lista numerelor printre care căutăm divizorii lui n poate fi și mai mult micșorată ținînd cont că dacă d nu divide pe n, atunci nici kd nu divide pe n. De exemplu, dacă n nu este divizibil cu 2, atunci el nu este divizibil nici cu 4, nici cu 6 etc.

Aplicație. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_{11} \in \mathbf{Z}$. Să se arate că există printre aceste numere întregi cîteva cu suma divizibilă cu 10.

Soluție. Fie $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$, ..., $s_{11} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{11}$. Să notăm cu $r_1, r_2, \ldots, r_{11}$ resturile împărțirii lui $s_1, s_2, \ldots, s_{11}$ la 10. Deoarece ceste resturi nu pot lua decît zece valori, de la 0 la 9, rezultă că există două egale ıtre ele: $r_i = r_j$, cu $1 \leq i < j \leq 11$. Atunci conform unei observații anterioare avem $0 \mid s_j - s_i$, adică

$$10 \mid a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_j.$$

2. *Criterii de divizibilitate a numerelor întregi*

Pentru a găsi criterii de divizibilitate pentru un număr întreg n, vom scrie pe n în sistemul de numerație zecimal, sub forma:

$$n = a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

unde $a_0, a_1, \ldots, a_m$ sînt numere naturale cuprinse între 0 și 9, $a_m \neq 0$. Prin urmare a_0 reprezintă cifra unităților lui n, a_1 cifra zecilor, a_2 cifra sutelor ş.a.m.d.

1. *Pentru ca n să fie divizibil cu 2 (sau cu 5) este necesar și suficient ca cifra unităților sale să fie divizibilă prin 2 (sau respectiv prin 5).*

Într-adevăr

$n = 10(a_m \cdot 10^{m-1} + a_{m-1} \cdot 10^{m-2} + \ldots + a_1) + a_0$ și deci $n = 10k + a_0$. Prin urmare, $2 \mid n$ implică $2 \mid (n - 10k)$, adică $2 \mid a_0$. Reciproc, $2 \mid a_0$ implică $2 \mid (10k + a_0)$, adică $2 \mid n$.

Demonstrația divizibilității cu 5 se face analcg.

2. *Pentru ca n să fie divizibil cu 4 sau cu 25, este necesar și suficient ca numărul format din ultimele sale două cifre să fie divizibil cu 4, respectiv 25. Mai general, numărul natural n este divizibil cu 2^l (sau cu 5^l) dacă și numai dacă numărul format de ultimele l cifre din scrierea sa în bază zecimală, este divizibil cu 2^l (respectiv cu 5^l).*

3. *Numărul natural n este divizibil cu 3 (respectiv cu 9) dacă și numai dacă suma cifrelor sale este divizibilă cu 3 (respectiv cu 9).*

Într-adevăr, avem

$$n = a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 = a_m(10^m - 1) + a_{m-1}(10^{m-1} - 1) + \\ + \ldots + a_1(10 - 1) + (a_m + a_{m-1} + \ldots + a_1 + a_0).$$

Din formula $10^l - 1 = (10 - 1)(10^{l-1} + 10^{l-2} + \ldots + 1) = 9k'$, rezultă că $10^l - 1$ este multiplu de 9, oricare ar fi $l \in \mathbf{N}^*$. Prin urmare,

$$n = 9k + (a_m + a_{m-1} + \ldots + a_1 + a_0),$$

adică n este divizibil cu 3 (respectiv cu 9), dacă și numai dacă suma cifrelor sale, $a_m + a_{m-1} + \ldots + a_1 + a_0$ este divizibilă cu 3 (respectiv cu 9).

4. *Numărul natural n este divizibil cu 11 dacă și numai dacă suma alternată a cifrelor sale este divizibilă cu 11, adică*

$$11 \,\Big|\, \sum_{l=0}^{m} (-1)^l a_l.$$

Pentru a demonstra această afirmație, vom scrie cu ajutorul formulei binomului lui Newton:

$$10^l = (11 - 1)^l = 11^l - C_l^1\, 11^{l-1} + \ldots + (-1)^l = 11k' + (-1)^l,\ k' \in \mathbf{Z}.$$

Prin urmare:

$$n = 11k + \sum_{i=0}^{m} (-1)^i a_i$$

şi deci n este divizibil cu 11 dacă şi numai dacă $\sum_{i=0}^{m} (-1)^i a_i$ este divizibilă cu 11.

Exerciţii

1. Fie $a, b, c \in \mathbf{Z}$ astfel încît $a + b = c$. Să se arate că dacă $d \in \mathbf{Z}$ divide două dintre numerele date, atunci el îl divide şi pe al treilea.
2. Fie $a, b, d \in \mathbf{Z}$ cu proprietatea că $d \mid (a + b)$ şi $d \mid a \cdot b$. Rezultă de aici că $d \mid a$ şi $d \mid b$?
3. Să se găsească toate numerele întregi $a \in \mathbf{Z}$, care au exact $2 \cdot |a|$ divizori.
4. Dacă $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 1$, există numere întregi cu exact $2n + 1$ divizori?
5. Dacă $a, b \in \mathbf{Z}$ şi 3 nu divide nici pe a nici pe b, atunci 3 divide pe $a - b$ sau 3 divide pe $a + b$.
6. Dacă $a, b, d \in \mathbf{Z}$ şi $d \mid a \cdot b$ rezultă că $d \mid a$ sau $d \mid b$?
7. Să se arate că $1000^k - 1$ este divizibil cu 37, oricare ar fi $k \in \mathbf{N}$.
8. Să se arate că dacă $p \in \mathbf{N}$, $p > 3$ are proprietatea că p şi $2p + 1$ nu sînt divizibile cu 3, atunci $4p + 1$ este divizibil cu 3.
9. Să se arate că numărul $9^{20} - 7^{20}$ este divizibil cu 10.
10. a) Să se arate că oricum ar fi date trei numere întregi există două cu suma divizibilă cu 2.

    b) Să se arate că oricum ar fi date 5 numere întregi există 3 cu suma divizibilă cu 3.

    c) Să se arate că oricum ar fi date 9 numere întregi există 5 cu suma divizibilă cu 5.
11. Să se arate că dacă $n \in \mathbf{N}$ atunci $n^2 \mid (n + 1)^n - 1$.
12. Să se găsească toate numerele întregi n cu proprietatea $n + 1 \mid n^2 + 1$.
13. Să se găsească toate numerele întregi n cu proprietatea $n - 3 \mid n^3 - 3$.

§ 3. Cel mai mare divizor comun

Definiţia 3.1. Se numeşte divizor comun al numerelor întregi a şi b, un număr întreg c cu proprietatea:

$$c \mid a \text{ şi } c \mid b.$$

Vom numi *un cel mai mare divizor comun* (pe scurt c.m.m.d.c.) al numerelor întregi a şi b, un număr întreg d care verifică următoarele condiţii:

i) d este un divizor comun al lui a şi b (adică $d \mid a$ şi $d \mid b$)

ii) orice alt divizor comun d' al lui a şi b divide neapărat şi pe d (adică $d' \mid a$ şi $d' \mid b$, implică $d' \mid d$).

Teorema 3.2. Fie a şi b două numere întregi. Atunci există un c.m.m.d.c. al lui a şi b.

Demonstrație. În cazul în care $a = b = 0$, c.m.m.d.c. este 0. Deci putem presupune, de exemplu, $b \neq 0$. Aplicînd teorema împărțirii cu rest a numerelor întregi a și b, rezultă existența a două numere întregi q_1 și r_1 cu proprietatea că

$$(1) \qquad a = bq_1 + r_1, \quad 0 \leqslant r_1 < |b|.$$

Dacă $r_1 = 0$ atunci $b|a$ și c.m.m.d.c. al numerelor a și b este b. Într-adevăr, $b \mid b$ și $b \mid a$, iar dacă d' este divizor eomun al lui a și b, în particular, satisface și $d' \mid b$. Deci b este un c.m.m.d.c. al lui a și b.

Dacă $r_1 \neq 0$, aplicăm teorema împărțirii cu rest numerelor b și r_1 și obținem numerele întregi q_2, r_2 satisfăcînd

$$(2) \qquad b = r_1q_2 + r_2 \text{ cu } 0 \leqslant r_2 < r_1.$$

Repetînd acest procedeu obținem numerele întregi $q_3, \ldots, q_m, \ldots$ și $r_3, \ldots$ $\ldots, r_m, \ldots$ astfel încît

$$(3) \qquad \begin{cases} r_1 = r_2q_3 + r_3, \text{ cu } 0 \leqslant r_3 < r_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_{m-2} = r_{m-1}q_m + r_m, \text{ cu } 0 \leqslant r_m < r_{m-1}, \\ r_{m-1} = r_mq_{m+1} + r_{m+1}, \text{ cu } 0 \leqslant r_{m+1} < r_m. \end{cases}$$

Deoarece $r_1 > r_2 > \ldots > r_m \ldots$, există un număr natural n astfel încît $r_n \neq 0$ și $r_{n+1} = 0$.

Vom arăta că r_n este un c.m.m.d.c. al lui a și b.

Întrucît $r_{n-1} = r_nq_{n+1}$, rezultă că $r_n | r_{n-1}$.

Din egalitatea $r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$, rezultă că $r_n \mid r_{n-2}$. În continuare, din egalitatea $r_{n-3} = r_{n-2}q_{n-1} + r_{n-1}$ și ținînd cont că r_n divide pe r_{n-1} și pe r_{n-2}, rezultă că r_n divide pe r_{n-3}. În felul acesta, din aproape în aproape, ținînd cont de egalitățile (3), obținem că r_n divide pe $r_{n-1}, r_{n-2}, \ldots, r_2, r_1$. Apoi din egalitatea (2) rezultă că r_n divide pe b și deoarece r_n divide și pe r_1, obținem datorită relației (1) că r_n divide pe a. Prin urmare r_n este divizor comun al lui a și b.

Fie acum d' un număr întreg cu proprietatea că $d' \mid a$ și $d' \mid b$. Din egalitatea (1) vom avea

$r_1 = a - bq_1$ și deci $d' \mid r_1$.

Apoi din egalitatea (2) obținem

$r_2 = b - r_1q_2$ și deoarece $d' \mid b$, $d' \mid r_1$, obținem că $d' \mid r_2$.

Folosind egalitățile (3) obținem, din aproape în aproape, că d' divide fiecare din numerele întregi $r_3, r_4, \ldots, r_{n-1}, r_n$. Așadar, în cazul în care b nu-l divide pe a avem că r_n, ultimul rest nenul din șirul de egalități (1), (2), (3), este un cel mai mare divizor comun al numerelor a și b.

Demonstrația acestei teoreme pune în evidență următoarea regulă de obținere a c.m.m.d.c. a două numere, care se numește ***algoritmul lui Euclid***:

Pentru a obține c.m.m.d.c. a două numere întregi a și b, cu $b \neq 0$, împărțim pe a cu b; dacă restul împărțirii r_1 este zero, atunci b este c.m.m.d.c.; dacă nu, împărțim pe b cu restul împărțirii anterioare, r_1, și obținem restul r_2; apoi împărțim pe r_1 la r_2 și obținem un nou rest r_3 ș.a.m.d. Ultimul rest nenul este c.m.m.d.c. al celor două numere.

Observații. 1) Dacă d este un c.m.m.d.c. al numerelor întregi a și b, atunci și $-d$ este un c.m.m.d.c. al lui a și b. Dacă d' ar fi tot un c.m.m.d.c. al lui a și b, atunci vom avea $d \mid d'$ și $d' \mid d$, prin urmare $d' = \pm d$. Rezultă deci că există întotdeauna două și numai două numere întregi cu proprietatea celui mai mare divizor comun al numerelor a și b. Aceste două numere sînt egale în modul și de semn contrar. Acela dintre ele care este pozitiv îl vom nota cu (a, b). Se observă că prin algoritmul lui Euclid se obține tocmai (a, b).

2) Dacă d este un divizor comun al numerelor întregi a și b, atunci $|d| \leqslant (a, b)$. Deci (a, b) este cel mai mare dintre numerele întregi care divid și pe a și pe b.

3) Se observă că pentru aflarea c.m.m.d.c. al numerelor a și b ordinea acestora nu contează, cu alte cuvinte

$$(a, b) = (b, a).$$

4) Din definiția c.m.m.d.c. rezultă că

$$(a, b) = (-a, b) = (a, -b) = (-a, -b).$$

În particular $(a, b) = (|a|, |b|)$.

Observațiile 3) și 4) ne permit ca pentru calcularea celui mai mare divizor comun a două numere întregi să ne mărginim la cazul numerelor naturale, în care $a \geqslant b$.

Exemplu. Să se găsească cel mai mare divizor comun al numerelor

$$-9\,810 \text{ și } 31\,500.$$

Soluție. Avem $(-9\,810, 31\,500) = (31\,500, 9\,810)$.

Vom aplica acum algoritmul lui Euclid:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad 31\,500 = 9\,810 \times 3 + 2\,070\\
&(2) \quad 9\,810 = 2\,070 \times 4 + 1\,530\\
&(3) \quad 2\,070 = 1\,530 \times 1 + 540\\
&(4) \quad 1\,530 = 540 \times 2 + 450\\
&(5) \quad 540 = 450 \times 1 + 90\\
&(6) \quad 450 = 90 \times 5 + 0
\end{aligned}$$

În acest șir de împărțiri succesive ultimul rest nenul este 90, deci

$$(-9\,810, 31\,500) = 90.$$

Teorema 3.3. **Dacă a și b sînt două numere întregi și d este un cel mai mare divizor comun al lor, atunci există două numere întregi k și l, astfel încît $d = ka + lb$.**

Definiţia 3.4. **Două numere întregi nenule a şi b se numesc *prime între ele* dacă 1 este c.m.m.d.c. al lor.**

Observăm că a şi b sînt prime între ele dacă şi numai dacă ± 1 sînt singurii lor divizori comuni.

Exemplu. Numerele 257 şi 18 sînt prime între ele. Într-adevăr, folosind algoritmul lui Euclid, obţinem:

$$\begin{aligned} 257 &= 18 \times 14 + 5 \\ 18 &= 5 \times 3 + 3 \\ 5 &= 3 \times 1 + 2 \\ 3 &= 2 \times 1 + 1 \\ 2 &= 1 \times 2 + 0 \end{aligned}$$

şi deci $(257, 18) = 1$.

Observaţii. 1) Din teorema 3.3 obţinem că a este prim cu b dacă şi numai dacă există $k, l \in \mathbf{Z}$ astfel încît $1 = ka + lb$. Într-adevăr, dacă a este prim cu b, atunci $(a, b) = 1$ şi conform teoremei 3.3 obţinem, $k, l \in \mathbf{Z}$ astfel încît $1 = ka + lb$. Reciproc, dacă $1 = ka + lb$ şi $d \mid a$, $d \mid b$, atunci $d \mid 1$ şi deci $d = \pm 1$, adică singurii divizori comuni ai lui a şi b sînt ± 1.

2) Vom da acum alte cîteva *proprietăţi* ale celui mai mare divizor comun.

1°. Dacă $a, b, c \in \mathbf{N}$, $b, c \neq 0$, atunci

$$(ac, bc) = c(a, b).$$

Într-adevăr, dacă $b \mid a$, atunci avem $bc \mid ac$ şi prin urmare

$$(ac, bc) = bc = c(a, b).$$

Dacă b nu divide pe a, scriem şirul de împărţiri succesive din algoritmul lui Euclid şi fie

$$r_1, r_2, \ldots, r_n > 0 \text{ resturile împărţirilor,}$$

$$r_n = (a, b) \text{ şi } r_n \mid r_{n-1}.$$

Atunci şirul de resturi obţinute în algoritmul lui Euclid pentru ac şi bc va fi

$$r_1c > r_2c > \ldots > r_nc \text{ şi deoarece}$$

$$r_nc \mid r_{n-1}c, \text{ rezultă că } r_nc = (ac, bc).$$

2°. Dacă $a, b, c \in \mathbf{N}$, $b, c \neq 0$ şi c este divizor comun pentru a şi b, atunci

$$\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) = \frac{(a, b)}{c}.$$

Relaţia aceasta este echivalentă cu

$$c\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) = (a, b),$$

care rezultă din proprietatea anterioară.

3°. Dacă $a, b, d \in \mathbf{N}$, $d \neq 0$ şi d este divizor comun al lui a şi b, atunci $(a, b) = d$ dacă şi numai dacă $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.

Această proprietate rezultă din 2°.

4°. Dacă $a, b, k \in \mathbf{Z}$, atunci

$$(a, b) = (a, ka + b).$$

Într-adevăr, dacă $d \mid a$ şi $d \mid b$, atunci $d \mid (ka + b)$, deci $(a, b) \mid (a, ka + b)$. Reciproc, dacă $d \mid a$ şi $d \mid (ka + b)$, atunci $d \mid (-ka)$ şi deci $d \mid (ka + b - ka)$ adică $d \mid b$. Prin urmare avem şi

$$(a, ka + b) \mid (a, b).$$

Aplicaţii. 1) Să se arate că $(21n + 4, 14n + 3) = 1$ oricare ar fi numărul întreg n.

Soluţie. Dacă $d \mid (21n + 4)$, $d \mid (14n + 3)$, atunci $d \mid (2(21n + 4) - 3(14n + 3))$ adică $d \mid (-1)$ şi deci $d = \pm 1$.

2) Să se arate că dacă a, b şi d sînt numere întregi astfel încît a este prim cu b şi d divide suma $a + b$, atunci d este prim şi cu a şi cu b.

Soluţie. Fie $\delta = (d, a)$. Atunci $\delta \mid d$ şi deoarece $d \mid a + b$, rezultă că $\delta \mid a + b$. Dar δ divide şi pe a, deci divide pe $a + b - a = b$. Prin urmare $\delta \mid (a, b)$, de unde rezultă că $\delta = \pm 1$.

3) Să se arate că numerele de forma $F_k = 2^{2^k} + 1 (k = 0, 1, 2, \ldots)$ sînt prime între ele.

Soluţie. Pentru orice număr întreg x, avem
$x^k - 1 = (x - 1)(x^{k-1} + x^{k-2} + \ldots + 1)$ şi deci $x - 1$ divide $x^k - 1$. Să considerăm numerele $F_m = 2^{2^m} + 1$ şi $F_n = 2^{2^n} + 1$, cu $m > n$ şi să aplicăm observaţia anterioară, pentru $k = 2^{m-n-1}$ şi $x = 2^{2^{n+1}}$ Obţinem
$2^{2^{n+1}} - 1 \mid 2^{2^m} - 1$. Dar $F_n = 2^{2^n} + 1 \mid 2^{2^{n+1}} - 1$ şi $2^{2^m} - 1 = F_m - 2$, deci $F_n \mid F_m - 2$. Prin urmare, dacă $d \mid F_n$, $d \mid F_m$, rezultă că $d \mid 2$ şi F_n fiind impar, obţinem $d = \pm 1$.

4) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ avem

$$(n! + 1, (n + 1)! + 1) = 1.$$

Soluţie. Dacă $d \mid n! + 1$, atunci $d \mid (n + 1)(n! + 1)$ şi deci $d \mid (n + 1)! + n + 1$, prin urmare ţinînd cont că $d \mid (n + 1)! + 1$, rezultă că $d \mid (n + 1)! + n + 1 - (n + 1)! - 1$; deci $d \mid n$ şi cu atît mai mult $d \mid n!$.
Rezultă în final că $d \mid (n! + 1) - n!$, adică $d = \pm 1$.

Observaţie. Definiţia celui mai mare divizor comun se poate extinde în mod natural pentru un număr finit de numere întregi $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Vom spune că numărul d este un cel mai mare divizor comun al numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$, dacă

i) d divide pe fiecare din numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (adică d este divizor comun al acestor numere).

ii) dacă d' este un număr întreg cu proprietatea că d' divide pe fiecare a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, atunci d' îl divide pe d.

Vom nota numărul întreg şi *pozitiv* cu proprietatea celui mai mare divizor comun cu $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
Existenţa şi calculul celui mai mare divizor comun al numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt asigurate de proprietatea evidentă:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = ((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n).$$

Mai precis, cînd sînt date numerele întregi $a_1, a_2, \ldots, a_n$, calculăm un c.m.m.d.c. al acestor numere astfel: se determină d_1 c.m.m.d.c. al lui a_1 şi a_2; se determină apoi d_2 un c.m.m.d.c. al lui d_1 şi a_3; la pasul $k + 1$ se determină un c.m.m.d.c. al lui d_k şi a_{k+2}, pe care îl notăm cu d_{k+1}; la ultimul pas se calculează d_{n-1}, c.m.m.d.c. al lui d_{n-2} şi a_n. Numărul întreg d_{n-1} este c.m.m.d.c. al numerelor date.

Definiție 3.5. Fie a și b două numere întregi. Un număr întreg m se numește *un cel mai mic multiplu comun* (pe scurt c.m.m.m.c.) al numerelor a și b, dacă verifică următoarele condiții; i) m este un multiplu comun al lui a și b, (adică $a|m$ și $b|m$); ii) orice alt multiplu comun al lui a și b. este multiplu și al lui m (adică, dacă $a|m'$ și $b|m'$, atunci $m|m'$).

Teorema care urmează ne asigură existența celui mai mic multiplu comun și ne dă în același timp și un procedeu de calcul.

Teorema 3.6. Fie a și b două numere întregi nenule. Dacă d este un c.m.m.d.c. al lui a și b, atunci $m = \frac{a \cdot b}{d}$ este un c.m.m.m.c. al lui a și b.

Demonstrație. Fie $a = dk$ și $b = dl$, cu $k, l \in \mathbf{Z}$. Atunci vom avea $m = bk = al$ și deci m este multiplu comun al lui a și b.

Fie acum $m' \in \mathbf{Z}$, astfel încît $a \mid m'$ și $b' \mid m'$. Rezultă că există $k_1, l_1 \in \mathbf{Z}$, astfel încît

$$m' = k_1a = l_1b, \text{ prin urmare } m' = k_1kd = l_1ld,$$

ceea ce implică $k_1k = l_1l$. Dar numerele $k = \frac{a}{d}$ și $l = \frac{b}{d}$ sînt prime între ele conform unei observații anterioare și deci există $r, s \in \mathbf{Z}$, astfel încît $rk + sl = 1$. Prin înmulțirea acestei egalități cu k_1 obținem:

$$k_1 = rkk_1 + slk_1 = rll_1 + slk_1 = (rl_1 + sk_1)l$$

și deci $l \mid k_1$. Prin urmare există $l_2 \in \mathbf{Z}$, astfel încît $k_1 = ll_2$ și obținem că $m' = k_1a = l_1la = l_2m$ și deci $m \mid m'$.

Deoarece $m = \frac{a \cdot b}{d}$ satisface proprietățile i) și ii) de la definiția 3.5 rezultă că m este un c.m.m.m.c. al numerelor a și b.

Observații. 1) Dacă m este un cel mai mic multiplu comun al numerelor întregi a și b atunci evident și $-m$ este un cel mai mic multiplu comun al lor. Dacă m' este un alt c.m.m.m.c., atunci $m' \mid m$ și $m \mid m'$ deci $m' = \pm m$. Prin urmare numerele $\pm \frac{a \cdot b}{(a, b)}$ sînt singurii c.m.m.m.c. ai lui a și b. Vom nota întregul *pozitiv* care este c.m.m.m.c. al lui a și b cu $[a, b]$.
Cu alte cuvinte,

$$[a, b] = \frac{|ab|}{(a, b)}.$$

2) Putem defini cel mai mic multiplu comun și pentru un număr oarecare de numere întregi $a_1, a_2, \ldots, a_n$, nenule. Vom spune că numărul întreg m este un c.m.m.m.c. al numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dacă:

i) m este multiplu comun pentru toate numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (adică $a_1 \mid m$, $a_2 \mid m, \ldots, a_n \mid m$).

ii) dacă m' este un număr întreg, multiplu comun al numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$, atunci $m \mid m'$.

Vom nota numărul întreg și *pozitiv* care să fie c.m.m.m.c. al numerelor $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n$ cu $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$.

Existența și calculul său rezultă din proprietatea

$$[[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}], a_n] = [a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

Exemplu. **Să se calculeze c.m.m.m.c. al numerelor 4 020, −210, 90.**

Soluție. **Avem $[4\,020, -210, 90] = [[4\,020, -210], 90]$. Pentru a calcula c.m.m.m.c. al numerelor 4 020 și −210 este suficient conform teoremei 3.6 să calculăm c.m.m.d.c. al numerelor 4 020 și $|-210|$ cu algoritmul lui Euclid:**

$$4\,020 = 210 \times 19 + 30,$$

$$210 = 30 \times 7 + 0.$$

Deci un c.m.m.m.c. al lui 4 020 și −210 este

$$\frac{4\,020 \times 210}{30} = 7 \times 4\,020 = 28\,140.$$

Apoi aflăm c.m.m.d.c. al numerelor 28 140 și 90:

$$28\,140 = 90 \times 312 + 60,$$

$$90 = 60 \times 1 + 30,$$

$$60 = 30 \times 2 + 0.$$

Deci c.m.m.m.c. al numerelor 28 140 și 90 este

$$\frac{28\,140 \times 90}{30} = 84\,420,$$

care în același timp este și un c.m.m.m.c. al numerelor 4 020, −210 și 90.

Exerciții

1. Să se găsească prin algoritmul lui Euclid cel mai mare divizor comun al numerelor:

a) −180; 756; b) −375, 360; −900;

c) 0; 779; −399; 5 700; d) −3724; 18 468;

e) −540; 588; −576; f) 375; 645; −600; −1515.

2. Să se găsească cel mai mic multiplu comun, al numerelor următoare:

a) −960; 1 200; b) 30 295; 36 354;

c) 12 345; 4 565; −960.

3. Să se afle toate numerele prime cu 100 și mai mici în modul decît 50.

4. Fie $n \in \mathbf{Z} - \{0\}$. Să se arate că există o infinitate de numere întregi prime cu n.

5. Se dau două numere întregi a și b nenule care au c.m.m.d.c. pe 5, iar cîturile împărțirilor succesive din algoritmul lui Euclid sînt −1, 3, 2. Să se afle a și b.

6. Să se găsească două numere întregi a și b, astfel încît $(a, b) = 3$ și $[a, b] = 72$. Este soluția unică?

7*. Fie a și b numere întregi nenule și m un c.m.m.m.c. al numerelor a și b. Să se arate că $\frac{m}{a}$ este prim cu $\frac{m}{b}$.

8. Să se arate că numerele $2k + 1$ și $9k + 4$ sînt prime între ele, oricare ar fi $k \in \mathbf{Z}$.

9. Să se găsească c.m.m.d.c. al numerelor $2k - 1$ și $9k + 4$ în funcție de numărul întreg k.

10. Să se arate că dacă a şi b sînt numere întregi, d un c.m.m.d.c. al lor, iar $k, l \in \mathbf{Z}$, cu proprietatea că, dacă

$$ka + lb = d, \text{ atunci } (k, l) = 1.$$

11. Să se arate că dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt numere întregi şi d este un c.m.m.d.c. al lor, atunci există $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbf{Z}$, astfel încît

$$\sum_{i=1}^{n} k_i a_i = d.$$

12. Să se arate că dacă a şi b sînt numere naturale prime între ele, atunci oricare ar fi $n > ab$, există x şi y numere naturale, astfel încît $n = ax + by$.

§ 4. Numere prime. Teorema de descompunere în factori primi

Definiţia 4.1. **Un număr natural $p \geq 2$ se numeşte *prim* dacă singurii săi divizori sînt ± 1 şi $\pm p$.**

Exemple. Numerele 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 sînt numere prime. Verificarea acestui fapt se poate face efectuînd împărţirea fiecăruia dintre numerele date la numerele naturale mai mici decît el.
Numărul 2 este singurul număr prim par.
În cele ce urmează vom da (fără demonstraţie) două teoreme foarte importante în aritmetică.

Teorema 4.2. **Un număr natural $p \geq 2$ este prim dacă şi numai dacă oricare ar fi a şi b numere întregi astfel încît p divide pe ab, să rezulte că p divide pe a sau p divide pe b.**

Teorema 4.3. **(Teorema fundamentală a aritmeticii). Oricare ar fi numărul întreg n, cu $|n| \geq 2$, există o descompunere a sa în produs de numere prime, adică există un număr finit de numere prime $p_1, p_2, \ldots, p_m$, nu neapărat distincte, astfel încît**

$$n = \pm p_1 p_2 \cdots p_m.$$

În plus, această descompunere este unică în sensul că oricare altă descompunere în produs de factori primi diferă de ea doar prin ordinea factorilor.

Observaţie. În teorema 4.3, în reprezentarea numărului n ca produs de factori primi $p_1, p_2, \ldots, p_m$, este posibil ca unii dintre factori să fie egali între ei: p_1 poate să apară de α_1 ori, cu $\alpha_1 \geq 1$, p_2 de α_2 ori, cu $\alpha_2 \geq 1$ şi în general p_k de α_k ori, cu $\alpha_k \geq 1$. Dacă numărul factorilor primi distincţi este l, atunci vom avea:

$$n = \pm p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_l^{\alpha_l}, \text{ unde putem presupune că } p_1 < p_2 < \ldots < p_l. \quad (1)$$

Scrierea lui n în forma (1) se numește *descompunerea lui n în factori primi*. Teorema fundamentală a aritmeticii se mai numește *teorema de descompunere în factori primi.*

Exemplu. Numărul întreg $-5\,600$ se poate scrie ca produs de factori primi în felul următor:

$$-5\,600 = -2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5\cdot 5\cdot 7 = -2^5\cdot 5^2\cdot 7.$$

Aplicație. Să se arate că șirul numerelor prime este infinit.

Soluție. Să presupunem prin reducere la absurd că ar exista numai un număr finit de numere prime $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Fie $p = p_1p_2\ldots p_n + 1$.
Dar p admite conform teoremei 4.3 un divizor prim, fie acesta p_k. Pe de altă parte împărțirea lui p la p_k dă restul 1, deoarece

$$p = p_kq + 1,\ q \in \mathbf{N}.$$

Am ajuns deci la o contradicție. Presupunerea că mulțimea numerelor prime este finită este falsă, deci există o infinitate de numere prime.

Cu ajutorul teoremei fundamentale a aritmeticii putem da un alt procedeu de calcul al c.m.m.d.c. a două sau mai multor numere întregi.

Se scriu descompunerile acestor numere în produse de factori primi și c.m.m.d.c. al lor va fi produsul factorilor primi comuni acestor numere, fiecare ridicat la puterea cea mai mică la care apare în descompunerile respective.

Pentru a demonstra acest lucru este suficient să considerăm cazul în care avem două numere întregi a și b. Fie d numărul obținut prin procedeul descris. Atunci, din construcția lui d, rezultă evident că $d \mid a$ și $d \mid b$. Fie $a_1 = \frac{a}{d}$ și $b_1 = \frac{b}{d}$. Tot din construcția lui d rezultă că a_1 și b_1 nu au factori primi comuni și deci, conform unei observații anterioare, rezultă că a_1 și b_1 nu au divizori comuni diferiți de ± 1. Deci $(a_1, b_1) = 1$ și prin urmare

$$(a,\ b) = d(a_1,\ b_1) = d.$$

Exemple

1) Fie $a = 360$ și $b = 240$. Avem $360 = 2^3\cdot 3^2\cdot 5$ și $240 = 2^4\cdot 3\cdot 5$ și deci $(360,\ 240) = 2^3\cdot 3\cdot 5 = 120$.

2) Fie $a = 72$, $b = 120$ și $c = 300$. Avem $72 = 2^3\cdot 3^2$, $120 = 2^3\cdot 3\cdot 5$ și $300 = 2^2\cdot 3\cdot 5^2$ și deci $(72,\ 120,\ 300) = 2^2\cdot 3 = 12$.

Tot din teorema fundamentală a aritmeticii rezultă și un mod de calcul al celui mai mic multiplu comun a două sau a mai multor numere.

Se scriu descompunerile acestor numere în produse de factori primi și c.m.m.m.c. al lor va fi produsul factorilor primi care apar cel puțin într-una din descompuneri, luat fiecare la puterea cea mai mare la care apare în descompunerile respective.

De exemplu, fie numerele $a = 72$, $b = 120$ și $c = 300$. Deoarece $72 = 2^3\cdot 3^2$, $120 = 2^3\cdot 3\cdot 5$ și $300 = 2^2\cdot 3\cdot 5^2$, atunci $[72,\ 120,\ 300] = 2^3\cdot 3^2\cdot 5^2 = 1\,800$.

În continuare vom face cîteva observații asupra șirului numerelor prime.

Dacă $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$ și nu este prim, atunci el admite un divizor prim $p \leqslant \sqrt{n}$.

Într-adevăr, cum n nu este prim, avem $n = a \cdot b$ cu $a, b > 1$. Evident, putem presupune că $a \leqslant b$. Atunci $a^2 \leqslant ab = n$, de unde $a \leqslant \sqrt{n}$. Dar din teorema fundamentală a aritmeticii a are un divizor prim p, care este la rîndul său divizor al lui n și, mai mult, $p \leqslant a \leqslant \sqrt{n}$.

În concluzie, pentru a dovedi că un număr natural $n \geqslant 2$ este prim este suficient să verificăm că el nu are divizori primi mai mici decît $\sqrt{n}$.

De exemplu, fie $n = 97$. Cum $\sqrt{97} < 10$, avem de considerat numerele prime < 10, adică 2, 3, 5, 7. Se vede imediat că nici unul dintre aceste numere nu divide pe 97.

Ciurul lui Eratostene. Vom da în cele ce urmează o metodă de obținere a numerelor prime mai mici decît un număr dat $n \geqslant 2$. Această metodă este cunoscută încă din antichitate sub numele de *ciurul lui Eratostene*, după numele matematicianului grec care a dat-o. Considerăm mai întîi șirul tuturor numerelor naturale de la 2 la n. Apoi, deoarece 2 este primul număr prim p_1, vom înlătura din șir toate numerele mai mari decît p_1, și divizibile cu $p_1 = 2$. Primul dintre numerele rămase este $3 = p_2$. Acum vom înlătura din șir toate numerele mai mari decît p_2 și divizibile cu p_2. Primul număr rămas este $5 = p_3$. Să presupunem că după pasul k am aflat numărul prim p (al k-lea ca mărime între numerele prime). Vom înlătura din șir toate numerele prime mai mari decît p_k și prime cu p_k. Primul număr care nu a fost înlăturat va fi p_{k+1}, al $(k + 1)$-lea număr prim.

Acest procedeu se termină la pasul m, unde p_m este cel mai mare număr prim $\leqslant \sqrt{n}$.

Exerciții

1. Care dintre următoarele numere întregi sînt prime 3477, 2003, 1213, 2099, 3649, 847, 1493, 2027, 2261, 6959, 9689, 10 627.

2. Folosind teorema fundamentală a aritmeticii, să se găsească cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun al următoarelor numere:
   a) 319 și 407; b) 333 și 504; c) 27, 24 și 15; d) 24, 48, 64, 192; e) 325, 526, 169 și 1014.

3. Să se determine cel mai mic număr natural care are exact 20 de divizori întregi și cel mai mic număr natural care are exact 72 divizori întregi.

4. Să se găsească un număr natural care să aibă exact 15 divizori naturali și singurii săi divizori primi să fie 7 și 11.

5. Fie a și b numere întregi prime între ele. Să se arate că $a + b$ și $a - b$ sînt prime cu ab. Să se arate că, în plus, dacă a și b au parități diferite, atunci $a + b$ este prim cu $a - b$ cu $a^3 - b^3$.

6. Dacă a şi b sînt numere naturale nenule şi suma lor este un număr prim, atunci a este prim cu b.

7. Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbf{Z}$ şi $a \mid c$, $b \mid c$, $(a, b) = 1$, atunci $ab \mid c$.

8. Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbf{Z}$ au proprietatea că a este prim cu b şi cu c, atunci a este prim cu bc.

9. Să se arate că dacă $b \mid ac$ atunci $b \mid (a, b)\ (c, b)$.

10. Să se arate că dacă d este un c.m.m.d.c. al numerelor a şi b, atunci d^3 este un c.m.m.d.c. al lui a^3 şi b^3. Reciproca este adevărată?

11. Fie $r \in \mathbf{Q}$ cu proprietatea că r^m este un număr întreg, $m \in \mathbf{N}^*$. Să se arate că r este întreg.

12. Fie $a, b, m \in \mathbf{N}$ cu proprietatea că $(a, b) = 1$ şi $\sqrt[m]{ab} \in \mathbf{N}$. Să se arate că $\sqrt[m]{a}, \sqrt[m]{b} \in \mathbf{N}$.

13. Să se arate că numerele de forma $8^n + 1$ nu sînt prime $(n \in \mathbf{N}^*)$.

14. Să se găsească puterea la care apare numărul prim p în descompunerea în factori primi a lui $n!$.
În particular, să se afle cu cîte zerouri se termină numărul $100!$.

15. Să se arate că există o infinitate de numere naturale n, cu proprietatea că $(n, 2^n - 1) > 1$. Să se găsească cel mai mic dintre ele.

16. Să se arate că nu există numere naturale prime n astfel încît $n \mid 2^n - 1$.

17. Să se arate că există numere întregi de forma 3^n, care scrise în bază zecimală au ultimele cifre 00001.

18. Să se arate că există numere întregi care au ultimele cifre 1978 şi care să fie divizibile cu 1979.

IV Polinoame cu coeficienți complecși

§ 1. Mulțimea polinoamelor cu coeficienți complecși

1.1. Definirea polinoamelor

Fie $\mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$ mulțimea șirurilor (infinite) de numere complexe

$$f = (a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...),$$

care *au numai un număr finit de termeni* a_i, *nenuli*, adică există un număr natural m, astfel încît $a_i = 0$ pentru orice $i > m$.

De exemplu, șirurile $f = (0, -1, 2, 0, 0, ...)$; $g = (-1, i, 2, 0, 0, ...)$; $h = (1 + 2i, 7, -100, 2, 0, 0, ...)$ sînt șiruri infinite care au un număr finit de termeni nenuli. Într-adevăr, șirul $f = (0, -1, 2, 0, 0, ...)$ are numai 2 termeni nenuli; șirul $g = (-1, i, 2, 0, 0, ...)$ are 3 termeni nenuli, iar șirul $h = (1 + 2i, 7, -100, 2, 0, 0, ...)$ are 4 termeni nenuli. Deci aceste șiruri sînt elemente din mulțimea $\mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$.

Definim pe mulțimea $\mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$ două operații algebrice: *adunarea* și *înmulțirea*.

Fie $f = (a_0, a_1, a_2, ...)$, $g = (b_0, b_1, b_2, ...)$ două elemente din mulțimea $\mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$; atunci definim

$$f + g = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, ...) \text{ și} \tag{1}$$

$$fg = (c_0, c_1, c_2, ...), \tag{2}$$

unde

$$c_0 = a_0b_0,$$

$$c_1 = a_0b_1 + a_1b_0,$$

$$c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$c_r = a_0b_r + a_1b_{r-1} + a_2b_{r-2} + \dots + a_rb_0 = \sum_{i=0}^{r} a_rb_{r-i} = \sum_{i+j=r} a_ib_j.$$

Să observăm că $f + g$ și fg aparțin mulțimii $\mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$.

Într-adevăr, cum $f \in \mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$, există un număr natural m, astfel încît $a_i = 0$ pentru orice $i > m$. Cum $g \in \mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$, există un număr natural n, astfel încît $b_j = 0$ pentru orice $j > n$. În acest caz avem $a_k = 0$ și $b_k = 0$ pentru orice

$k > \max(m, n)$ şi deci $a_k + b_k = 0$ pentru orice $k > \max(m, n)$. Deci $f + g$ este un element din $\mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$.

Fie $r > m + n$; atunci $r - m > n$. În acest caz $c_r = a_0b_r + a_1b_{r-1} + \ldots + a_mb_{r-m} + a_{m+1}b_{r-m-1} + \ldots + a_rb_0$. Cum $r - m > n$, atunci $b_r, b_{r-1}, \ldots, b_{r-m}$ sînt toţi nuli. Pe de altă parte şi numerele $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_r$ sînt nule şi deci $c_r = 0$. În concluzie, pentru orice $r > m + n$ avem $c_r = 0$ şi deci fg este de asemenea un element din $\mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$.

Elementul $f + g = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots)$ se numeşte *suma* dintre f şi g, iar operaţia prin care oricăror elemente f şi g din mulţimea $\mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$ se asociază suma lor, se numeşte *adunare*.

Elementul $fg = (c_0, c_1, c_2, \ldots)$ se numeşte *produsul* dintre f şi g, iar operaţia prin care elementelor f şi g din mulţimea $\mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$ se asociază produsul lor, se numeşte *înmulţire*.

Exemplu. Dacă $f = (-1, 2, 3, -5, 0, 0, \ldots)$ şi $g = (1, 0, -1, 0, \ldots)$, atunci suma lor este $f + g = (0, 2, 2, -5, 0, 0, \ldots)$, iar produsul lor este $fg = (-1 \cdot 1, -1 \cdot 0 + 2 \cdot 1, (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1, -1 \cdot 0 + 2(-1) + 3 \cdot 0 + (-5) \cdot 1, -1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) + (-5) \cdot 0 + 0 \cdot 1, (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + (-5) \cdot (-1), 0, 0, \ldots) = (-1, 2, 4, -7, -3, 5, 0, \ldots)$.

Definiţie. **Fiecare element al mulţimii $\mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$, pe care sînt definite cele două operaţii precedente (1) şi (2), se numeşte polinom. Dacă $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ este un polinom, numerele $a_0, a_1, a_2, \ldots$ se numesc coeficienţii lui f.**

Vom nota cu $\mathbf{C}'$ submulţimea lui $\mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$ formată din toate şirurile de forma

$$(a, 0, 0, 0, \ldots) \text{ unde } a \in \mathbf{C}.$$

Funcţia $\varphi : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ definită prin egalitatea

$$\varphi(a) = (a, 0, 0, 0, \ldots)$$

este o funcţie bijectivă. Mai mult, operaţiile de adunare (1) şi înmulţire (2) a polinoamelor ce aparţin mulţimii $\mathbf{C}'$ se transcriu astfel:

$$(3) \quad (a, 0, 0, \ldots) + (b, 0, 0, 0, \ldots) = (a + b, 0, 0, 0, \ldots) \text{ şi}$$
$$(a, 0, 0, \ldots) \cdot (b, 0, 0, 0, \ldots) = (ab, 0, 0, 0, \ldots)$$

Relaţiile (3) ne arată că adunarea şi înmulţirea pe $\mathbf{C}'$ se fac după aceleaşi reguli ca adunarea şi înmulţirea numerelor complexe. Din acest motiv rezultă că $\mathbf{C}'$ are aceleaşi proprietăţi aritmetice ca mulţimea $\mathbf{C}$ a numerelor complexe. Acest *fapt ne permite să identificăm polinomul* $(a, 0, 0, \ldots)$ *cu numărul complex a.* Aşadar punem $(a, 0, 0, \ldots) = a$. Datorită acestei identificări avem $\mathbf{C} \subset \mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$. Polinoamele de forma $(a, 0, 0, \ldots) = a$ se numesc *polinoame constante.*

Observaţie. Definirea polinoamelor precum şi operaţia de identificare a polinoamelor de forma $(a, 0, 0, \ldots)$ cu numărul a, ne reamintesc de modul cum am definit mulţimea numerelor complexe precum şi de operaţia de identificare a numerelor complexe de forma $(a, 0)$ cu numărul real a (a se vedea manualul de Algebră clasa a IX-a).

1.2. Proprietățile adunării polinoamelor

1° *Adunarea este comutativă*, adică oricare ar fi f și g, din $\mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$, avem

$$f + g = g + f.$$

Într-adevăr, dacă $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$, $g = (b_0, b_1, b_2, \ldots)$, avem $f + g = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots)$ și $g + f = (b_0 + a_0, b_1 + a_1, \ldots)$. Cum adunarea numerelor complexe este comutativă avem $a_i + b_i = b_i + a_i$ pentru orice $i \geqslant 0$. Deci $f + g = g + f$.

2° *Adunarea este asociativă*, adică oricare ar fi f, g și h din $\mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$, avem

$$(f + g) + h = f + (g + h).$$

Într-adevăr, dacă $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$, $g = (b_0, b_1, b_2, \ldots)$, $h = (c_0, c_1, c_2, \ldots)$ atunci $f + g = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots)$ și deci $(f + g) + h = ((a_0 + b_0) + c_0, (a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2, \ldots)$. Analog, obținem că $f + (g + h) = (a_0 + (b_0 + c_0), a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2), \ldots)$. Cum operația de adunare a numerelor complexe este asociativă, avem $(a_i + b_i) + c_i = a_i + (b_i + c_i)$, pentru orice $i \geqslant 0$. Deci $(f + g) + h = f + (g + h)$.

3° *Element neutru*. Polinomul constant $0 = (0, 0, 0, \ldots)$ este element neutru pentru adunarea polinoamelor, în sensul că oricare ar fi $f \in \mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$, avem

$$f + 0 = 0 + f = f.$$

Într-adevăr, dacă $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$, atunci $f + 0 = (a_0, a_1, a_2, \ldots) + (0, 0, 0, \ldots) = (a_0 + 0, a_1 + 0, a_2 + 0, \ldots) = (a_0, a_1, a_2, \ldots) = f$. După proprietatea 1° avem și $0 + f = f$.

4° *Orice polinom are un opus*, adică oricare ar fi $f \in \mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$ există un polinom, notat cu $-f$, astfel încît

$$f + (-f) = (-f) + f = 0.$$

Într-adevăr, dacă $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$, atunci $-f = (-a_0, -a_1, \ldots)$, deoarece $f + (-f) = (a_0, a_1, a_2, \ldots) + (-a_0, -a_1, -a_2, \ldots) = (a_0 + (-a_0), a_1 + (-a_1), a_2 + (-a_2), \ldots) = (0, 0, 0, \ldots) = 0$. Conform proprietății 1° avem și $(-f) + f = 0$.

De exemplu, dacă $f = (-1, 0, 2, 2, 0, 0, \ldots)$ este un polinom, atunci opusul său este $-f = (1, 0, -2, -2, 0, 0, \ldots)$.

Observație. Dacă f și g sînt două polinoame, suma $f + (-g)$ se notează, simplu, prin $f - g$ și se numește *diferența dintre f și g*. Operația prin care oricăror două polinoame f și g se asociază diferența lor se numește *scădere*.

Dacă $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ și $g = (b_0, b_1, b_2, \ldots)$, atunci

$$f - g = (a_0 - b_0, a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots).$$

De exemplu, dacă $f = (2, -3, -1, 0, 0, \ldots)$ și $g = (-1, -1, -1, 2, 0, \ldots)$, atunci $f - g = (3, -2, 0, -2, 0, 0, \ldots)$.

1.3. Proprietățile înmulțirii polinoamelor

1° *Înmulțirea este comutativă*, adică oricare ar fi f și g din $\mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$, avem

$$fg = gf.$$

Într-adevăr, dacă $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ și $g = (b_0, b_1, b_2, \ldots)$, atunci notînd $fg = (c_0, c_1, c_2, \ldots)$ și $gf = (d_0, d_1, d_2, \ldots)$ avem $c_r = a_0b_r + a_1b_{r-1} + a_2b_{r-2} + \ldots + a_rb_0$ și $d_r = b_0a_r + b_1a_{r-1} + \ldots + b_ra_0$. Cum adunarea și înmulțirea numerelor complexe sînt comutative și asociative, avem $c_r = d_r$ pentru orice $r \geqslant 0$ și deci $fg = gf$.

2° *Înmulțirea este asociativă*, adică oricare ar fi f, g și h din $C^{(N)}$, avem

$$(fg)h = f(gh).$$

Într-adevăr, fie $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$, $g = (b_0, b_1, b_2, \ldots)$ și $h = (c_0, c_1, c_2, \ldots)$. Să notăm $fg = (d_0, d_1, d_2, \ldots)$ și $(fg)h = (e_0, e_1, e_2, \ldots)$. Atunci $d_r = \sum_{i+j=r} a_i b_j$ pentru orice $r \geqslant 0$ și $e_n = \sum_{r+k=n} d_r c_k$. Deci $e_n = \sum_{r+k=n} \left(\sum_{i+j=r} a_i b_j\right) c_k = \sum_{i+j+k=n} a_i b_j c_k$.

Dacă notăm $gh = (d'_0, d'_1, d'_2 \ldots)$ și $f(gh) = (e'_0, e'_1, e'_2, \ldots)$, în mod analog se obține $d'_s = \sum_{j+k=s} b_j c_k$ pentru orice $s \geqslant 0$ și $e'_n = \sum_{i+s=n} a_i d'_s$. Deci, $e'_n = \sum_{i+s=n} a_i \left(\sum_{j+k=s} b_j c_k\right) = \sum_{i+j+k=n} a_i b_j c_k$. Comparînd obținem că $e_n = e'_n$ și deci $f(gh) = (fg)h$.

3° *Element neutru.* Polinomul $1 = (1, 0, 0, \ldots)$ este element neutru pentru înmulțire, adică oricare ar fi $f \in C^{(N)}$, avem

$$f \cdot 1 = 1 \cdot f = f.$$

Într-adevăr, dacă $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$, atunci $f \cdot 1 = (a_0, a_1, a_2, \ldots)(1, 0, 0, \ldots) = (a_0 \cdot 1, a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 1, a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1, \ldots) = (a_0, a_1, a_2, \ldots) = f$.
După proprietatea 1° avem de asemenea $1 \cdot f = f$.

4° *Înmulțirea este distributivă față de adunare*, adică oricare ar fi polinoamele $f, g, h \in C^{(N)}$, au loc relațiile:

$$f(g + h) = fg + fh \text{ și}$$
$$(f + g)h = fh + gh.$$

Într-adevăr, fie $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$, $g = (b_0, b_1, b_2, \ldots)$ și $h = (c_0, c_1, c_2, \ldots)$. Atunci $f(g + h) = (a_0, a_1, a_2, \ldots)(b_0 + c_0, b_1 + c_1, b_2 + c_2, \ldots) = (a_0(b_0 + c_0), a_0(b_1 + c_1) + a_1(b_0 + c_0), \ldots, \sum_{i=0}^{r} a_i(b_{r-i} + c_{r-i}), \ldots) = ((a_0b_0 + a_0c_0), (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0c_1 + a_1c_0), \ldots, \sum_{i=0}^{r} a_ib_{r-i} + \sum_{i=0}^{r} a_ic_{r-i}, \ldots) = (a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, \ldots, \sum_{i=0}^{r} a_ib_{r-i}, \ldots) + (a_0c_0, a_0c_1 + a_1c_0, \ldots, \sum_{i=0}^{r} a_ic_{r-i}, \ldots) = fg + fh$.

5° *Dacă f și g sînt polinoame nenule, atunci produsul lor este un polinom nenul* ($f \neq 0$ și $g \neq 0 \Rightarrow fg \neq 0$).

Într-adevăr, fie $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ și $g = (b_0, b_1, b_2, \ldots)$. Cum $f \neq 0$ există un termen $a_i \neq 0$. Fie m cel mai mare număr natural astfel încît $a_m \neq 0$. Rezultă că $a_i = 0$ pentru orice $i > m$. Analog pentru $g \neq 0$, fie n cel mai mare număr natural astfel încît $b_n \neq 0$. Rezultă că $b_j = 0$ oricare ar fi $j > n$. Să presupunem că $fg = (c_0, c_1, c_2, \ldots)$. Atunci $c_{m+n} = a_0b_{m+n} + a_1b_{m+n-1} + \ldots + a_mb_n + a_{m+1}b_{n-1} + \ldots + a_{m+n}b_0$. Cum $b_{m+n} = b_{m+n-1} = \ldots = b_{n+1} = 0$ și $a_{m+1} = a_{m+2} = \ldots = a_{m+n} = 0$, atunci $c_{m+n} = a_mb_n$. Cum $a_m \neq 0$ și $b_n \neq 0$, atunci $c_{m+n} = a_mb_n \neq 0$ și deci $fg \neq 0$.

5'° *Simplificarea cu un factor nenul.* Dacă f, g, h, sînt polinoame astfel încît $fg = fh$ și $f \neq 0$, atunci $g = h$.

Într-adevăr, cum $fg = fh$, obținem $fg - fh = 0$ și deci $f(g - h) = 0$. Cum $f \neq 0$, din proprietatea 5° trebuie ca $g - h = 0$, adică $g = h$.

§ 2. Forma algebrică a polinoamelor

Notația $f = (a_0, a_1, a_2, ...)$ introdusă pentru polinoame nu este prea comodă în operațiile cu polinoame. De aceea vom folosi altă scriere pentru polinoame. Convenim să notăm polinomul $(0, 1, 0, 0, ...)$ prin „X" și citim „*nedeterminata* X".

Înmulțirea polinoamelor ne dă:

$$X^2 = X \cdot X = (0, 1, 0, ...)\ (0, 1, 0, 0, ...) = (0, 0, 1, 0, ...),$$

$$X^3 = X \cdot X^2 = (0, 1, 0, ...)\ (0, 0, 1, 0, ...) = (0, 0, 0, 1, 0, ...),$$

. . . .

$$X^n = X \cdot X^{n-1} = (0, 1, 0, ...)\ (\underbrace{0, 0, ...\ 0}_{n-1 \text{ ori}}, 1, 0, ...) = (\underbrace{0, 0, ...\ 0}_{n \text{ ori}}, 1, 0, ...)$$

. . . .

Folosind acum adunarea și înmulțirea definite pe $C^{(N)}$, pentru $f = (a_0, a_1, a_2, ...)$ putem scrie

$$f = (a_0, a_1, a_2, ...) = (a_0, 0, ...) + (0, a_1, 0, ...) + (0, 0, a_2, 0, ...) + ... + (0, 0, ..., 0, a_i, 0, ...) + ... = (a_0, 0, ...) + (a_1, 0, ...) \cdot (0, 1, 0, ...) + (a_2, 0, ...) \cdot (0, 0, 1, 0, ...) + ... + (a_i, 0, ...) \cdot (\underbrace{0, 0, ...\ 0}_{n \text{ ori}}, 1, 0, ...) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_iX^i + ...$$

(unde există doar un număr finit de termeni nenuli).

Deci

$$(1)\quad f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_iX^i + ... = \sum_{i \geq 0} a_iX^i.$$

Cum $f = (a_0, a_1, a_2, ...)$ este un element din $C^{(N)}$, există un număr natural m astfel încît $a_i = 0$ pentru orice $i > m$. În acest caz (1) se scrie sub forma

$$(1')\quad f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_mX^m = \sum_{i=0}^{m} a_iX^i,$$

unde $a_0, a_1, a_2, ..., a_m$ sînt coeficienții polinomului f.

Polinoamele de forma aX^n unde $a \in C$ și n este un număr natural se numesc *monoame*. Din (1') rezultă că orice polinom nenul este o *sumă finită de monoame nenule.*

Datorită scrierii (1) sau (1') pentru polinoame, se adoptă pentru *mulțimea* $C^{(N)}$ *notația* $C[X]$. În particular, avem incluziunea $C \subseteq C[X]$. Datorită scrierii (1) sau (1') elementele din $C[X]$ se mai numesc polinoame într-o singură nedeterminată cu coeficienți complecși. De asemenea, dacă $f \in C[X]$ este un polinom, de multe ori este *util să scriem* $f = f(X)$.

În mulţimea $\mathbf{C}[X]$ distingem următoarele submulţimi importante:

$\mathbf{R}[X]$ = mulţimea polinoamelor cu coeficienţi reali,

$\mathbf{Q}[X]$ = mulţimea polinoamelor cu coeficienţi raţionali,

$\mathbf{Z}[X]$ = mulţimea polinoamelor cu coeficienţi întregi.

Este clar că avem incluziunile

$$\mathbf{Z}[X] \subset \mathbf{Q}[X] \subset \mathbf{R}[X] \subset \mathbf{C}[X].$$

Exemple. 1) Polinomul $f = \sqrt{2} - 7X^2 + X^3$ este un polinom cu coeficienţi reali.

2) Polinomul $g = \frac{1}{3} - X + \frac{1}{7} X^4$ este un polinom cu coeficienţi raţionali.

3) Polinomul $h = 7 + X^2 - 8X^3$ este un polinom cu coeficienţi întregi.

Observaţii 1) Folosind scrierea (1) a polinoamelor, operaţiile de adunare şi înmulţire se transcriu astfel:

dacă $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_rX^r + \ldots$ şi $g = b_0 + b_1X + \ldots + b_rX^r + \ldots$, atunci

$$(2)\quad f + g = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)X + (a_2 + b_2)X^2 + \ldots + (a_r + b_r)X^r + \ldots,$$

$$(3)\quad fg = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)X + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)X^2 + \ldots$$
$$\ldots + (a_0b_r + a_1b_{r-1} + a_2b_{r-2} + \ldots + a_rb_0)X^r + \ldots .$$

De exemplu, dacă $f = -1 + 2X + X^2$ şi $g = 1 - X$, atunci

$$f + g = (-1 + 2X + X^2) + (1 - X) = X + X^2 \text{ şi}$$
$$fg = (-1 + 2X + X^2) \cdot (1 - X) = -1 + 3X - X^2 - X^3.$$

2) Se observă din relaţiile (2) şi (3) că dacă f, g sînt polinoame cu coeficienţi reali (respectiv raţionali, întregi), atunci suma şi produsul lor este un polinom cu coeficienţi reali (respectiv raţionali, întregi).

3) În practică, ori de cîte ori avem de înmulţit două polinoame este foarte comod să folosim proprietatea înmulţirii de a fi distributivă faţă de adunare. De exemplu, fie polinoamele $f = 1 + X + X^2$ şi $g = 1 - X$. Produsul lor se calculează astfel:

$$fg = (1 + X + X^2)(1 - X) = 1 - X + X - X^2 + X^2 - X^3 = 1 - X^3.$$

§ 3. Gradul unui polinom

Am văzut în paragraful precedent că orice polinom $f \in \mathbf{C}[X]$ este o sumă finită de monoame, adică

$$f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n.$$

Se numeşte *gradul lui f, notat* prin *grad f, cel mai mare număr natural n astfel încît $a_n \neq 0$.* În acest caz a_n se numeşte coeficientul *dominant al polinomului f.* Numărul a_0 se numeşte *termenul liber al polinomului f.* De multe ori este foarte utilă şi scrierea lui f sub forma $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$, lucru întotdeauna posibil ţinînd seama că adunarea polinoamelor este comutativă.

Exemple

1) Polinomul $f = 1 - X$ are gradul 1, adică grad $f = 1$.

2) Polinomul $f = X + X^3 - X^5$ are gradul 5, adică grad $f = 5$.

3) Polinomul constant $f = a$ unde $a \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$ are gradul 0, deci grad $f = 0$.

Pentru polinomul nul, 0, ***gradul său se consideră ca fiind egal cu*** $-\infty$ (se citeşte minus infinit).

Referitor la gradul sumei şi produsului a două polinoame f şi g au loc următoarele relaţii:

i)* grad $(f + g) \leqslant \max$ (grad f, grad g);

ii) dacă f şi g sînt polinoame nenule, atunci

grad $(fg) =$ grad $f +$ grad g.

Într-adevăr, să presupunem că grad $f = m$ şi grad $g = n$. Atunci f şi g sînt de forma $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_mX^m$ şi $g = b_0 + b_1X + \ldots + b_nX^n$. Dacă $m > n$, atunci gradul sumei $f + g$ este m, deoarece termenul de grad maxim din $f + g$ este a_mX^m.

Dacă $m = n$, termenul de grad maxim din $f + g$ este $(a_m + b_m)X^m$ în cazul cînd $a_m + b_m \neq 0$ sau mai mic în cazul cînd $a_m + b_m = 0$.

Aşadar, grad $(f + g) \leqslant \max$ (grad f, grad g).

În produsul fg, termenul de grad maxim este monomul $(a_mX^m)(b_nX^n) = a_mb_nX^{m+n}$ (a se vedea proprietatea 5° din § 1). Cum f şi g sînt polinoame nenule, atunci $a_m \neq 0$ şi $b_n \neq 0$. Deci $a_mb_n \neq 0$ şi în concluzie grad $(fg) = m + n =$ grad $f +$ grad g.

§ 4. Valoarea unui polinom. Funcţia polinomială

Fie $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ un polinom arbitrar şi α un număr complex arbitrar. Atunci numărul

$$f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_n\alpha^n$$

se numeşte *valoarea polinomului f în α*.

Exemple

1) Fie polinomul $f = 2X^3 - 5X^2 + X - 7$. Valoarea lui f în 1 este $f(1) = 2 \cdot 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 1 - 7 = -9$.

Valoarea lui f în -1 este $f(-1) = 2(-1)^3 - 5(-1)^2 + (-1) - 7 = -15$.

2) Fie polinomul $g = X^4 - iX + 1$. Valoarea lui g în i este $g(i) = i^4 - i \cdot i + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$.

De asemenea valoarea lui g în $1 + i$ este

$$g(1 + i) = (1 + i)^4 - i(1 + i) + 1 = -4 - i + 1 + 1 = -2 - i.$$

Observaţie. Dacă f este un polinom cu coeficienţii reali (respectiv raţionali, întregi) şi a este un număr real (respectiv raţional, întreg), atunci valoarea polinomului f în a, $f(a)$ este un număr real (respectiv raţional, întreg).

---

* Pentru ca i) să rămînă adevărată şi în cazul cînd lucrăm cu polinomul nul, convenim să punem $-\infty < a$, $-\infty + a = -\infty$ şi $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$ pentru orice număr natural a.

Vom enunţa acum proprietăţile cele mai importante ale valorii unui polinom:

Dacă f şi g sînt două polinoame şi a un număr arbitrar atunci

i) $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$;

ii) $(fg)(a) = f(a)g(a)$;

iii) *Dacă f este un polinom cu coeficienţi reali şi z un număr complex, atunci*

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)},$$

unde $\bar{z}$ desemnează conjugatul lui z, iar $\overline{f(z)}$ conjugatul lui $f(z)$;

iv) *Dacă f este un polinom cu coeficienţi raţionali şi a, $b \in \mathbf{Q}$ astfel încît $\sqrt{b}$ nu este raţional, atunci $f(a \pm \sqrt{b})$ este* de forma *$A \pm B\sqrt{b}$, unde A, $B \in \mathbf{Q}$. Mai mult, dacă $f(a + \sqrt{b})$ este numărul $A + B\sqrt{b}$, atunci $f(a - \sqrt{b})$ este numărul $A - B\sqrt{b}$ şi reciproc.*

Primele două proprietăţi rezultă direct din definiţia sumei şi produsului a două polinoame.

Să demonstrăm proprietatea iii). Vom folosi proprietăţile conjugatului unui număr complex, adică:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2,$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2.$$

Fie acum polinomul $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$, unde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt numere reale. Atunci $f(z) = a_0 + a_1z + \ldots + a_nz^n$, de unde $\overline{f(z)} = \bar{a}_0 + \overline{a_1z} + \ldots + \overline{a_nz^n} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1\bar{z} + \bar{a}_2\bar{z}^2 + \ldots + \bar{a}_n\bar{z}^n$. Cum $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sînt numere reale, adică $\bar{a}_0 = a_0, \bar{a}_1 = a_1, \ldots, \bar{a}_n = a_n$, atunci $\overline{f(z)} = a_0 + a_1\bar{z} + a_2\overline{z^2} + \ldots + a_n\overline{z^n} = a_0 + a_1\bar{z} + a_2(\bar{z})^2 + \ldots + a_n(\bar{z})^n$, ceea ce ne arată că $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$.

Demonstrăm proprietatea iv). Fie $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ un polinom cu $a_0, a_1, \ldots, a_n$ numere raţionale. Avem:

$$f(a \pm \sqrt{b}) = a_0 + a_1(a \pm \sqrt{b}) + a_2(a \pm \sqrt{b})^2 + \ldots + a_n(a \pm \sqrt{b})^n.$$

Utilizînd binomul lui Newton şi ţinînd cont că pentru orice număr natural m, avem

$$(\sqrt{b})^{2m} = b^m \in \mathbf{Q} \quad \text{şi} \quad (\pm\sqrt{b})^{2m+1} = \pm b^m\sqrt{b},$$

atunci rezultă că $f(a + \sqrt{b})$ este de forma $A + B\sqrt{b}$. În plus, dacă $f(a + \sqrt{b}) = A + B\sqrt{b}$, rezultă că $f(a - \sqrt{b}) = A - B\sqrt{b}$.

Exemple

1) Fie polinomul $f = X^4 + X^2 + 1$.

Avem $f(1 + \mathrm{i}) = (1 + \mathrm{i})^4 + (1 + \mathrm{i})^2 + 1 = -4 + 2\mathrm{i} + 1 = -3 + 2\mathrm{i}$. Cum f este un polinom cu coeficienţi reali rezultă conform proprietăţii iii) că $f(1 - \mathrm{i}) = -3 - 2\mathrm{i}$.

2) Fie polinomul $g = X^4 + 2X^2 - 6$.

Avem $g(1+\sqrt{2}) = (1+\sqrt{2})^4 + 2(1+\sqrt{2})^2 - 6 = 17 + 12\sqrt{2} + 2(3+2\sqrt{2}) - 6 = 17 + 16\sqrt{2}$. Deoarece g este un polinom cu coeficienți raționali, atunci conform proprietății iv) rezultă că $g(1-\sqrt{2}) = 17 - 16\sqrt{2})$.

Definiție. Fie A, B două submulțimi ale lui $\mathbf{C}$. O funcție $f : A \to B$ se numește *polinomială* dacă există un polinom $P \in \mathbf{C}[X]$ astfel încît

$$f(a) = P(a), \text{ oricare ar fi } a \in A.$$

Exemple 1) Funcția de gradul întîi

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = ax + b\ (a \neq 0)$$

este o funcție polinomială, deoarece există polinomul $P = aX + b$ astfel încît avem $f(\alpha) = P(\alpha)$, oricare ar fi $\alpha \in \mathbf{R}$.

2) Funcția de gradul al doilea

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c;\ a, b, c \in \mathbf{R} \text{ și } a \neq 0$$

este o funcție polinomială, deoarece există polinomul de gradul doi $P = aX^2 + bX + c$ pentru care avem $f(\alpha) = P(\alpha)$, oricare ar fi $\alpha \in \mathbf{R}$.

3) Funcția putere

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\quad f(x) = x^n$$

este o funcție polinomială, deoarece există polinomul de gradul n, $P = X^n$ pentru care avem $f(\alpha) = P(\alpha)$, oricare ar fi $\alpha \in \mathbf{R}$.

Fiind dat un polinom arbitrar $f \in \mathbf{C}[X]$ putem să definim funcția $\tilde{f} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ prin egalitatea $\tilde{f}(\alpha) = f(\alpha)$, oricare ar fi $\alpha \in \mathbf{C}$.

Funcția $\tilde{f}$ este polinomială și se numește *funcția polinomială asociată polinomului* f.

Exerciții

1. Să se calculeze $f + g$, dacă:
   a) $f = 1 + X^2 + X^4$ și $g = 1 + X^2 - X^3 - X^4$;
   b) $f = \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2})X + X^3 - X^4$ și $g = \sqrt{2} + \sqrt{2}X + X^2 + 2X^3 - X^4$;
   c) $f = 1 - X + X^2 - X^3 + X^4 - X^5$ și $g = -1 + X - X^2 + X^3 - X^4 + X^5$;
   d) $f = (1 + i) + (1 - i)X + iX^2 - iX^3$ și $g = -i + iX + (1 - i)X^2 + (1 + i)X^3$.
2. Să se calculeze produsul fg dacă:
   a) $f = (1 + i) + X$ și $g = (1 - i) - X$;
   b) $f = 1 - X + X^2 - X^3$ și $g = 1 + X$;
   c) $f = 1 - X + X^2 - X^3 + X^4$ și $g = 1 + X$;
   d) $f = 1 + X + X^2 + \ldots + X^n$ și $g = 1 - X$;
   e) $f = 2 - i + (3 - i)X + X^2$ și $g = 2 + i + (3 + i)X - iX^2$;
   f) $f = 1 - \sqrt{2} + (2 - \sqrt{2})X + X^2$ și $g = 1 + \sqrt{2} + (2 + \sqrt{2})X$.
3. Fie $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$ un polinom cu coeficienți complecși. Notăm cu $\bar{f}$ polinomul $\bar{f} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1X + \bar{a}_2X^2 + \ldots + \bar{a}_nX^n$. Să se arate că polinoamele $f + \bar{f}$; și $f\bar{f}$ sînt cu coeficienți reali.
4. Un polinom $f \in \mathbf{C}[X]$ se zice inversabil dacă și numai dacă există $g \in \mathbf{C}[X]$ astfel încît $fg = 1$.
   Să se arate că f este inversabil $\Leftrightarrow f \in \mathbf{C}$ și $f \neq 0$.

5. Să se calculeze grad $(f+g)$ dacă:

a) $f = 1 + X + X^2$ şi $g = 1 - X - X^2$;

b) $f = 1 - 3X^2 + 7X^5$ şi $g = 1 + X + X^4 - 7X^5$;

c) $f = (1+i) + (1-i)X^2 + iX^4$ şi $g = i + iX^2 - iX^4$.

6. În raport cu parametrul complex $m \in \mathbf{C}$ să se determine gradul următoarelor polinoame:

a) $f = (m^2 - 3m + 2)X^3 + (m^2 - 4m + 3)X^2 + (m^2 - 1)X + 7$;

b) $f = (m^2 + 1)X^4 + (m^4 - 1)X^2 + 2iX + 1$.

7. Să se arate că pentru orice polinom f de gradul $n \geqslant 0$ şi un număr natural $0 \leqslant k \leqslant n$ există un polinom g astfel încît grad $(f+g) = k$.

8. Fie polinomul $f = 1 - 2X + 3X^2 - 4X^3$. Să se calculeze $f(1)$; $f(-1)$; $f(2)$; $f(-2)$; $f(i)$; $f(-i)$; $f(1+i)$; $f(1-i)$; $f(1+\sqrt{2})$; $f(1-\sqrt{2})$.

9. Să se determine polinoamele de gradul al doilea $f = a_0 + a_1X + a_2X^2$, astfel încît $f(1) = -2$; $f(2) = -1$ şi $f(3) = 4$.

10. Fie funcţia polinomială

$$f:[0, 1] \to [0, 1],\ f(x) = x^2 + ax + b,$$

unde $a, b \in \mathbf{R}$. Să se arate că în mod necesar $a \leqslant 0$ şi $b \geqslant 0$.

11. Să se găsească polinoamele $f \in \mathbf{R}[X]$ de gradul al doilea care satisfac condiţia:

$$f(a^2) = (f(a))^2, \text{ oricare ar fi } a \in \mathbf{R}.$$

12. Să se arate prin inducţie după n că are loc egalitatea:

$$(X + 2X^2 + 3X^3 + \ldots + nX^n)(1-X)^2 = nX^{n+2} - (n+1)X^{n+1} + X.$$

§ 5. Împărţirea polinoamelor

5.1. Teorema împărţirii cu rest

Teorema 5.1.1. Fiind date două polinoame oarecare cu coeficienţi complecşi f şi g cu $g \neq 0$, atunci există două polinoame cu coeficienţi complecşi q şi r astfel încît

$$f = gq + r \text{ unde grad } r < \text{grad } g. \tag{1}$$

În plus, polinoamele q şi r sînt unice satisfăcînd proprietatea (1).

În egalitatea (1) polinomul f se numeşte *deîmpărţit*, g *împărţitor*, q *cît* iar r *rest*.

Demonstraţie. Vom demonstra întîi partea de existenţă a formulei (1). Fie n = grad f şi m = grad g. Dacă $n < m$ atunci luăm $q = 0$ şi $r = f$. Presupunem că $n \geqslant m$ şi că f şi g sînt de forma

$$f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n;\ g = b_0 + b_1X + \ldots + b_mX^m,$$

unde $a_n \neq 0$ şi $b_m \neq 0$. Putem considera polinomul

$$f_1 = f - \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} g. \tag{2}$$

În egalitatea (2) termenul de grad maxim a_nX^n al lui f se va reduce şi deci grad $f_1 <$ grad f.

Să notăm $n_1 = \text{grad } f_1$. Atunci polinomul f_1 are forma

$$f_1 = a'_{n_1} X^{n_1} + a'_{n_1-1} X^{n_1-1} + \dots + a'_0.$$

Dacă $n_1 < m$, atunci punînd $q = \frac{a_n}{b_m} X^{n-m}$ și $r = f_1$, din (2) obținem

$$f = gq + r \text{ unde grad } r = n_1 < m = \text{grad } g.$$

Dacă $n_1 \geqslant m$, repetăm din nou procedeul de coborîre a gradului, printr-o nouă scădere:

$$f_2 = f_1 - \frac{a'_{n_1}}{b_m} X^{n_1-m} g. \tag{3}$$

Dacă grad $f_2 = n_2$, atunci evident $n_2 < n_1 < m$. Repetînd procedeul de coborîre a gradelor se obține un șir de polinoame $f_1, f_2, \dots, f_p, f_{p+1}, \dots$ astfel încît

$$\begin{aligned} f_1 &= f - \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} g, \\ f_2 &= f_1 \frac{a'_{n_1}}{b_m} X^{n_1-m} g, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_{p+1} &= f_p - \frac{a^{(p)}_{n_p}}{b_m} X^{n_p-m} g, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{4}$$

unde grad $f >$ grad $f_1 >$ grad $f_2 > \dots >$ grad $f_p >$ grad $f_{p+1} > \dots$, adică

$$n > n_1 > n_2 > \dots > n_p > n_{p+1} > \dots .$$

Cum m este număr natural, există p număr natural astfel încît $n_{p+1} < m$. Vom nota $r = f_{p+1}$. Adunînd toate egalitățile (4) obținem

$$f_{p+1} = f - \left[\frac{a_n}{b_m} X^{n-m} + \frac{a'_{n_1}}{b_m} X^{n_1-m} + \dots + \frac{a^{(p)}_{n_p}}{b_m} X^{n_p-m}\right] g. \tag{5}$$

Dacă notăm polinomul din paranteză cu q:

$$q = \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} + \frac{a'_{n_1}}{b_m} X^{n_1-m} + \dots + \frac{a^{(p)}_{n_p}}{b_m} X^{n_p-m},$$

egalitatea (5) se scrie

$$f = gq + r \text{ unde grad } r = n_{p+1} < m = \text{grad } g. \tag{6}$$

Să trecem acum la *demonstrarea părții de unicitate din teoremă*. Presupunem că mai există două polinoame q_1 și r_1 astfel încît

$$f = gq_1 + r_1 \text{ cu grad } r_1 < \text{grad } g.$$

Atunci

$$f = gq + r = gq_1 + r_1, \tag{7}$$

de unde

$$g(q - q_1) = r_1 - r. \tag{7'}$$

Dacă $q - q_1 \neq 0$, atunci grad $g(q - q_1) \geqslant$ grad g. Pe de altă parte, cum grad $(r_1 - r) \leqslant \max$ (grad r_1, grad r) $<$ grad g, obţinem o contradicţie. Deci trebuie ca $q - q_1 = 0$, adică $q = q_1$. Din egalitatea (7′) obţinem în acest caz că $r_1 - r = 0$ şi deci $r_1 = r$.

Observaţii 1) Împărţirea cu rest necesită efectuarea celor patru operaţii aritmetice: adunarea, scăderea, înmulţirea şi împărţirea asupra coeficienţilor polinoamelor f şi g. Din aceste motive, dacă polinoamele f şi g au *coeficienţii numere reale (respectiv raţionale), atunci cîtul q şi restul r sînt polinoame cu coeficienţi reali (respectiv raţionali)*. Din egalitatea (6) se vede că dacă polinoamele f şi g au coeficienţi numere întregi coeficientul termenului de grad maxim al lui g este ± 1, atunci cîtul şi restul sînt polinoame cu coeficienţi întregi.

2) Egalităţile (2), (3), (4), (5) şi (6) se pot expune în tabelul alăturat

$$
\begin{array}{rl|l}
 & \overbrace{a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0}^{f} & \overbrace{b_mX^m + b_{m-1}X^{m-1} + \ldots + b_0}^{g} \\
\hline
 & -a_nX^n - \dfrac{a_nb_{m-1}}{b_m}X^{n-1} - \ldots - \dfrac{a_nb_0}{b_m}X^{n-m} & \\
\cline{2-2}
f_1 = & a'_{n_1}X^{n_1} + a'_{n_1-1}X^{n_1-1} + \ldots + a'_0 & \dfrac{a_n}{b_m}X^{n-m} + \dfrac{a'_{n_1}}{b_m}X^{n_1-m} + \ldots + \\
 & -a'_{n_1}X^{n_1} - \dfrac{a'_{n_1}b_{m-1}}{b}X^{n_1-1} - \ldots - \dfrac{a'_{n_1}b_0}{b_m}X^{n_1-m} & \underbrace{+\dfrac{a^{(p)}_{n_p}}{b_m}X^{n_p-m}}_{q} \\
\cline{2-2}
f_2 = & a^{(2)}_{n_2}X^{n_2} + a^{(2)}_{n_2-1}X^{n_2-1} + \ldots + a^{(2)}_0 & \\
\cline{2-2}
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
f_p = & a^{(p)}_{n_p}X^{n_p} + \ldots + a^{(p)}_0 & \\
\cline{2-2}
 & -a^{(p)}_{n_p}X^{n_p} - \ldots\ldots\ldots\ldots - \dfrac{a^{(p)}_{n_p}b_0}{b_m}X^{n_p-m} & \\
\cline{2-2}
f_{p+1} = & \underbrace{a^{(p+1)}_{n_{p+1}}X^{n_{p+1}} + \ldots + a^{(p+1)}_0}_{r} &
\end{array}
$$

Acest tabel ne redă tocmai regula de împărţire a polinoamelor cunoscută încă din algebra elementară şi pe care o vom aplica în practică pentru obţinerea cîtului şi restului împărţirii.

Exemplu. Fie polinoamele $f = 2X^5 + X^4 - 5X^3 - 8X + 1$ şi $g = X^2 - 3$. Să determinăm cîtul şi restul împărţirii lui f la g.

$$
\begin{array}{r|l}
\overbrace{2X^5 + X^4 - 5X^3 - 8X + 1}^{f} & \overbrace{X^2 - 3}^{g} \\
\hline
-2X^5 \qquad + 6X^3 \qquad & \underbrace{2X^3 + X^2 + X + 3}_{q} \\
\cline{1-1}
X^4 + X^3 - 8X + 1 & \\
-X^4 + 3X^2 \qquad\qquad & \\
\cline{1-1}
X^3 + 3X^2 - 8X + 1 & \\
-X^3 \qquad + 3X \qquad & \\
\cline{1-1}
3X^2 - 5X + 1 & \\
-3X^2 \qquad + 9 & \\
\cline{1-1}
\underbrace{-5X + 10}_{r} &
\end{array}
$$

Deci cîtul este $q = 2X^3 + X^2 + X + 3$ iar restul $r = -5X + 10$. Formula împărțirii cu rest se scrie în acest caz astfel:

$$2X^5 + X^4 - 5X^3 - 8X + 1 = (X^2 - 3)(2X^3 + X^2 + X + 3) + (-5X + 10).$$

5.2. Împărțirea prin $X - a$. Schema lui Horner

Un caz foarte important în aplicații este împărțirea unui polinom $f \neq 0$ prin binomul $X - a$. Vom demonstra următoarea teoremă:

Teorema 5.2.1. Restul împărțirii unui polinom $f \neq 0$ prin binomul $X - a$ este egal cu valoarea $f(a)$ a polinomului f în a.

Demonstrație. Aplicînd formula împărțirii cu rest pentru polinoamele f și $g = X - a$ obținem egalitatea:

(1) $\quad f = (X - a)q + r$ unde grad $r <$ grad $(X - a) = 1$.

Deci grad $r \leqslant 0$, adică restul împărțirii este un număr complex.

Dacă în egalitatea (1) facem $X = a$, obținem egalitatea

$$f(a) = (a - a)q(a) + r(a),$$

de unde $f(a) = r(a)$. Cum r este un polinom constant atunci $r(a) = r$ și deci

$$r = f(a).$$

Această *teoremă ne ajută să găsim restul împărțirii unui polinom oarecare prin polinomul $X - a$ fără a mai face împărțirea.*

Exemple

1) Să se găsească restul împărțirii polinomului $f = X^3 - 2X^2 + X + 1$ prin binomul $X - 2$.

Conform teoremei de mai sus, restul împărțirii este $r = f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 + 1 = 3$.

2) Să se găsească restul împărțirii polinomului $f = X^4 - 2iX^3 + 4X + 1 + 2i$ prin binomul $X + i$.

Conform teoremei de mai sus, restul este

$$r = f(-i) = (-i)^4 - 2i(-i)^3 + 4(-i) + 1 + 2i = 1 + 2 - 4i + 1 + 2i = 4 - 2i.$$

Teorema de mai sus are dezavantajul că nu ne spune nimic asupra cîtului împărțirii polinomului f prin binomul $X - a$.

Vom indica acum un procedeu de aflare a cîtului împărțirii polinomului f prin binomul $X - a$.

Să presupunem că f este un polinom de forma

$$f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Dacă scriem formula împărțirii cu rest pentru polinoamele f și $X - a$ obținem egalitatea

(2) $$f = (X - a)q + r.$$

Cum grad $f = n$, atunci trebuie ca grad $q = n - 1$. Deci q este un polinom de forma

$$q = b_{n-1}X^{n-1} + b_{n-2}X^{n-2} + \ldots + b_0.$$

Egalitatea (2) devine în acest caz

$$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 = (X - a)(b_{n-1}X^{n-1} + b_{n-2}X^{n-2} + \dots + b_0) + r.$$

Efectuînd înmulțirea în partea dreaptă obținem

$$(X - a)(b_{n-1}X^{n-1} + b_{n-2}X^{n-2} + \dots + b_0) = b_{n-1}X^n + b_{n-2}X^{n-1} + \dots + b_0X -$$
$$- ab_{n-1}X^{n-1} - ab_{n-2}X^{n-2} - \dots - ab_0 = b_{n-1}X^n + (b_{n-2} - ab_{n-1})X^{n-1} +$$
$$+ (b_{n-3} - ab_{n-2})X^{n-2} + \dots + (b_0 - ab_1)X - ab_0.$$

Înlocuind în (2) obținem egalitatea

$$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 = b_{n-1}X^n + (b_{n-2} - ab_{n-1})X^{n-1} +$$
$$+ (b_{n-3} - ab_{n-2})X^{n-2} + \dots + (b_0 - ab_1)X + (r - ab_0).$$

Din egalitatea celor două polinoame obținem că

$$(3)\quad \begin{cases} a_n = b_{n-1} \\ a_{n-1} = b_{n-2} - ab_{n-1} \\ a_{n-2} = b_{n-3} - ab_{n-2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1 = b_0 - ab_1, \\ a_0 = r - ab_0. \end{cases}$$

Din egalitățile (3) obținem succesiv

$$(4)\quad \begin{cases} b_{n-1} = a_n, \\ b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ b_0 = a_1 + ab_1, \\ r = a_0 + ab_0. \end{cases}$$

Egalitățile (4) se trec în tabelul următor

(5)

	X^n a_n	X^{n-1} a_{n-1}	X^{n-2} a_{n-2}	....	X^1 a_1	X^0 a_0
a	a_n	$a_{n-1} + ab_{n-1}$	$a_{n-2} + ab_{n-2}$	....	$a_1 + ab_1$	$a_0 + ab_0$
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	....	b_0	r

În rîndul de sus al tabelului se scriu coeficienții polinomului f, iar în rîndul de jos coeficienții b_{n-1}, b_{n-2}, ..., b_0 ai cîtului și restul r.

Tabelul (5) poartă denumirea de *schema lui Horner*. Din schema lui Horner coeficienții cîtului se determină astfel: mai întîi coeficientul termenului de grad maxim $n - 1$, b_{n-1} care este egal cu a_n, apoi coeficientul termenului de grad $n - 2$, b_{n-2} care este egal cu $a_{n-1} + ab_{n-1}$, apoi coeficientul termenului de grad $n - 3$, b_{n-3} care este egal cu $a_{n-2} + ab_{n-2}$ ş.a.m.d.

Exemple: 1) Utilizînd schema lui Horner să se determine cîtul și restul împărțirii polinomului

$$f = 2X^4 - 5X^3 - 8X + 1 \text{ prin binomul } X - 2.$$

Facem schema lui Horner

	X^4	X^3	X^2	X	X^0
	2	-5	0	-8	1
2	2	$-5+2\cdot 2=-1$	$0+2(-1)=-2$	$-8+2(-2)=-12$	$1+2(-12)=-23$
	b_3	b_2	b_1	b_0	r

Deci cîtul şi restul împărţirii sînt:

$$q = 2X^3 - X^2 - 2X - 12 \text{ şi } r = -23.$$

2) Utilizînd schema lui Horner, să se determine cîtul şi restul împărţirii polinomului $f = X^6 - X^5 + X^4 + 2X^3 - X^2 - 3$ prin binomul $X + 1$.

Facem schema lui Horner

	X^6	X^5	X^4	X^3	X^2	X	X^0
	1	-1	1	2	-1	0	-3
-1	1	$-1+(-1)1=-2$	$1+(-1)(-2)=3$	$2+(-1)\cdot 3=-1$	$-1+(-1)\cdot(-1)=0$	$0+0=0$	-3
	b_5	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0	r

Deci cîtul şi restul împărţirii sînt:

$$q = X^5 - 2X^4 + 3X^3 - X^2 \text{ şi } r = -3.$$

Observaţie. Schema lui Horner ne oferă nu numai un procedeu de obţinere a cîtului împărţirii polinomului f prin binomul $X - a$, dar şi un procedeu de determinare a restului.

Exerciţii

1. Să se determine cîtul şi restul împărţirii polinomului f prin binomul g dacă:
   a) $f = X^6 - X^5 - X^4 + X^3 - 2X^2 + 5X - 4$, $g = X^2 - 2X + 3$;
   b) $f = X^4 - 6X^3 - 8X^2 + 1$, $g = X^2 - X + 1$;
   c) $f = X^4 - 2X^2 + 2$; $g = X^2 - 2X + 2$;
   d) $f = X^5 - 2X^4 + 3X^3 - 4X^2 + 5X - 6$, $g = X^3 - X^2 + 2X - 3$;
   e) $f = X^7 - 3X^6 + 2X^5 + 2X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 3X - 1$, $g = X^2 - 2X + 1$;
   f) $f = X^{22} - X^{17} + X^{10} + X^5 + 2X^2 + 2$, $g = X^2 + X + 1$.

2. Să se afle un polinom de gradul trei astfel încît împărţit la $X^2 - 3X$ dă restul $6X - 15$ şi împărţit la $X^2 - 5X + 8$ dă restul $2X - 7$.

3. Să se arate că dacă f şi g dau prin împărţirea lor la h resturile r_1, respectiv r_2, atunci pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, polinomul $\alpha f + \beta g$ dă prin împărţire la h restul $\alpha r_1 + \beta r_2$.

4. Ce condiţii trebuie să îndeplinească numerele m, p, q ca restul împărţirii polinomului $X^4 + pX^2 + q$ la polinomul $X^2 + mX + 1$ să fie zero?

5. Aplicînd schema lui Horner să se determine cîtul şi restul împărţirii polinomului f prin g dacă:

a) $f = X^4 - 3X^3 - 2X^2 - 6X + 1, g = X - 1$;

b) $f = X^6 - X^5 + 3X^3 - 6X + 2, \ g = X + 1$;

c) $f = X^5 - X^4 - 2X^3 + X^2 - X - 2, \ g = X - 2$;

d) $f = X^5 - 2X^4 - X^3 + 2X^2 - 2, \ g = X + 2$;

e) $f = X^6 - X^5 - X^4 + 6X - 1, \ g = X + \frac{1}{2}$;

f) $f = 2X^3 + 8X^2 - 4X + 2, g = 2X + 1$;

g) $f = 3X^4 + 2X^3 - 4X^2 + 6X + 6, g = 3X - 1$.

6. Să se afle un polinom de grad cît mai mic astfel încît împărţit la $X + 1$ să dea restul -1 şi împărţit la $X - 1$ să dea restul 1.

7. Să se determine parametrul m astfel încît polinomul $f = 2X^4 - mX^3 + X^2 - 7$ împărţit la $X + 2$ să dea restul 4.

8. Să se determine parametrul m astfel încît polinomul $f = X^5 - mX^4 + (m^2 - 2)X^3 + mX^2 - 1$ împărţit la $X - 1$ să dea restul 7.

9. Să se determine parametrii a şi b astfel încît polinomul $f = X^3 - aX^2 + bX + 1$ împărţit la $X - 1$ să dea restul 1 şi împărţit la $X + 1$ să dea restul -5.

10. Să se determine un polinom $f = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$ astfel încît împărţit la $X^2 - 3X + 1$ să dea restul $2X + 1$ şi împărţit la $X^2 - 1$ să dea restul $-2X + 2$.

§ 6. Divizibilitatea polinoamelor

6.1. Definiţia relaţiei de divizibilitate. Proprietăţi

Definiţia 6.1.1. Fie f şi g două polinoame. Spunem că polinomul g *divide* polinomul f (sau f este *divizibil* prin g, sau g este un *divizor al lui f*, sau încă f este *un multiplu al lui g*) dacă există un polinom h astfel încît

$$f = gh.$$

Cînd polinomul g divide polinomul f notăm simbolic $g \mid f$.

Exemplu. Să considerăm polinoamele $f = X^3 - 27$ şi $g = X - 3$. Cum $X^3 - 27 = (X - 3)(X^2 + 3X + 9)$, rezultă că $g \mid f$.

Cîteva proprietăţi ale relaţiei de divizibilitate a polinoamelor:

1° *Din teorema împărţirii cu rest rezultă că g divide pe f dacă şi numai dacă restul împărţirii lui f la g este zero.*

2° *Dacă $g \mid f$ şi $f \neq 0$ atunci grad $g \leqslant$ grad f.*

Într-adevăr, cum $g \mid f$ există un polinom h astfel încît $f = gh$. Deoarece $f \neq 0$, atunci grad f = grad g + grad h. Dar grad $h \geqslant 0$ şi deci grad $g \leqslant$ grad f.

3° *Polinoamele de grad 0, adică constantele nenule, divid orice polinom.*

Într-adevăr, dacă $a \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$ şi f este un polinom oarecare putem scrie

$$f = \left(a \frac{1}{a}\right) f = a\left(\frac{1}{a} f\right) \text{ şi deci } a \mid f.$$

4° *Dacă f este un polinom și $a \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$ atunci $af \mid f$.*

Într-adevăr, $f = \left(\frac{1}{a}\, a\right) f = \frac{1}{a}(af)$ și deci $af \mid f$.

Dacă f este un polinom, divizorii de forma a și af unde $a \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$ se numesc *divizori improprii* ai polinomului f. *Divizorii* care nu sînt improprii se numesc *divizori proprii.*

5° *Relația de divizibilitate:*

i) este **reflexivă**, *adică $f \mid f$ oricare ar fi polinomul f.*

Într-adevăr, $f = f \cdot 1$.

ii) este **tranzitivă**, *adică dacă $h \mid g$ și $g \mid f$, atunci $h \mid f$.*

Într-adevăr, cum $h \mid g$, atunci există un polinom h_1 astfel încît $g = hh_1$. Cum $g \mid f$, există un polinom g_1 astfel încît $f = gg_1$. Înlocuind în această egalitate pe $g = hh_1$, obținem că $f = (hh_1)g_1 = h(h_1g_1)$ și deci $h \mid f$.

iii) *Dacă $g \mid f_1$ și $g \mid f_2$, iar h_1, h_2 sînt două polinoame arbitrare, atunci*

$$g \mid h_1f_1 + h_2f_2.$$

Într-adevăr, cum $g \mid f_1$, există polinomul g_1 astfel încît $f_1 = gg_1$; cum $g \mid f_2$, există polinomul g_2 astfel încît $f_2 = gg_2$. Dar atunci avem

$$h_1f_1 + h_2f_2 = h_1(gg_1) + h_2(gg_2) = g(h_1g_1 + h_2g_2) \text{ și deci } g \mid h_1f_1 + h_2f_2.$$

iv) *Dacă $g \mid f$ și $f \mid g$, atunci există $a \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$ astfel încît*

$$f = ag.$$

Într-adevăr, cum $g \mid f$, există polinomul h_1 astfel încît

$$f = gh_1. \tag{1}$$

Cum $f \mid g$, există polinomul h_2 astfel încît

$$g = fh_2. \tag{2}$$

Dacă $g = 0$, atunci din egalitatea (1) obținem că $f = 0$. În acest caz putem alege $a = 1$.

Analog, dacă $f = 0$ din (2) rezultă că $g = 0$.

Putem presupune acum $f \neq 0$ și $g \neq 0$. Din (1) și (2) obținem

$$g = fh_2 = (gh_1)h_2 = g(h_1h_2).$$

Cum $g \neq 0$ atunci $h_1h_2 = 1$ și deci grad $(h_1h_2) = 0$, adică grad $h_1 +$ $+$ grad $h_2 = 0$. Cum grad $h_1 \geqslant 0$ și grad $h_2 \geqslant 0$, rezultă că grad $h_1 =$ grad $h_2 =$ $= 0$. Deci $h_1 = a \in \mathbf{C}$ cu $a \neq 0$. În acest caz egalitatea (1) devine

$$f = ag \text{ cu } a \in \mathbf{C},\ a \neq 0.$$

Două polinoame f și g pentru care $f \mid g$ și $g \mid f$ se numesc *asociate în divizibilitate* (sau, pe scurt, *asociate*).

Cînd polinoamele f și g sînt asociate notăm simbolic $f \overset{d}{\sim} g$.

Rezultă din proprietățile 5° *iv*) și 4° că, $f \overset{d}{\sim} g$ dacă și numai dacă există $a \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$, astfel încît $f = ag$.

Exemple. 1) Polinoamele $f = X^2 + 1$ şi $g = \frac{1}{3}X^2 + \frac{1}{3}$ sînt asociate în divizibilitate deoarece $f = 3 \cdot g$.

2) Polinoamele $f = X^2 - X + 2$ şi $g = 2X^2 - 2X + 4$ sînt asociate în divizibilitate deoarece $f = \frac{1}{2} g$.

6.2. Cel mai mare divizor comun al polinoamelor

Definiţia 6.2.1. Fie f şi g două polinoame. Un polinom d se numeşte *un cel mai mare divizor comun* (pe scurt, *un c.m.m.d.c.*) al polinoamelor f şi g, dacă verifică următoarele condiţii:

i) d este un divizor comun al lui f şi g adică $d \mid f$ şi $d \mid g$;

ii) orice alt divizor comun d' al lui f şi g divide neapărat şi polinomul d (adică dacă $d' \mid f$ şi $d' \mid g$ atunci $d' \mid d$).

Teorema 6.2.2. Dacă f şi g sînt două polinoame, atunci există un c.m.m.d.c. al lui f şi g.

Demonstraţie. În cazul $f = g = 0$, conform definiţiei 6.2.1, polinomul nul este un c.m.m.d.c. al lor. Aşadar putem presupune că $f \neq 0$. Dacă $g = 0$, atunci f este un divizor comun al lui f şi g deoarece $f = f \cdot 1$ şi $g = f \cdot 0$. Dacă d' este un divizor comun al lui f şi g, atunci d' este în particular un divizor al lui f. Deci f este un c.m.m.d.c. al lui f şi g.

Să considerăm cazul cînd $g \neq 0$. Aplicînd teorema împărţirii cu rest polinoamelor f şi g, găsim două polinoame q_1, r_1, astfel încît

$$f = gq_1 + r_1, \text{ cu grad } r_1 < \text{grad } g. \tag{1}$$

Dacă $r_1 \neq 0$, aplicăm teorema împărţirii cu rest polinoamelor g şi r_1 şi obţinem polinoamele q_2, r_2 astfel încît

$$g = r_1q_2 + r_2, \text{ cu grad } r_2 < \text{grad } r_1. \tag{2}$$

Repetînd acest procedeu, obţinem polinoamele $q_3, q_4, \ldots, q_n, \ldots$ şi $r_3, r_4, \ldots, r_n, \ldots$, astfel încît

$$\begin{cases} r_1 = r_2q_3 + r_3, \text{ cu grad } r_3 < \text{grad } r_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n, \text{ cu grad } r_n < \text{grad } r_{n-1}, \\ r_{n-1} = r_nq_{n+1} + r_{n+1}, \text{ cu grad } r_{n+1} < \text{grad } r_n. \end{cases} \tag{3}$$

Cum grad $r_1 >$ grad $r_2 > \ldots >$ grad $r_n >$ grad $r_{n+1} > \ldots$, există un număr natural n astfel încît $r_n \neq 0$ şi $r_{n+1} = 0$.

Vom arăta că r_n este un c.m.m.d.c. al lui f şi g.

Cum $r_{n-1} = r_nq_{n+1}$, rezultă că $r_n \mid r_{n-1}$. Acum, deoarece $r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$, rezultă că $r_n \mid r_{n-2}$. În continuare folosind egalitatea $r_{n-3} = r_{n-2}q_{n-1} + r_{n-1}$ şi ţinînd cont că $r_n \mid r_{n-1}$ şi $r_n \mid r_{n-2}$, rezultă că $r_n \mid r_{n-3}$. Din aproape în aproape, ţinînd cont de egalităţile (3), rezultă că r_n divide polinoamele $r_{n-1}, r_{n-2}, \ldots, r_2, r_1$. Din egalitatea (2) rezultă că $r_n \mid g$, iar din egalitatea (1) obţinem $r_n \mid f$.

Deci r_n este un divizor comun al polinoamelor f şi g. Fie acum d un divizor comun al polinoamelor f şi g. Din (1) obţinem $r_1 = f - gq_1$. Folosind proprietatea 5° iii) obţinem $d \mid r_1$. Din egalitatea (2) obţinem $r_2 = g - r_1q_1$. Cum $d \mid r_1$ şi $d \mid g$, atunci $d \mid r_2$. Acum folosind egalităţile (3), din aproape în aproape, obţinem că d divide polinoamele $r_3, r_4, \ldots, r_{n-1}, r_n$.

Aşadar r_n (ultimul rest nenul) este un c.m.m.d.c. al polinoamelor f şi g.

Rezumînd cele demonstrate în această teoremă putem enunţa următoarea regulă de obţinere a c.m.m.d.c. a două polinoame care poartă numele de *algoritmul lui Euclid*: *Pentru a obţine c.m.m.d.c. a două polinoame nenule f şi g împărţim pe f cu g (mai exact împărţim polinomul de grad mai mare la cel de grad mai mic). Dacă restul împărţirii este zero atunci g este c.m.m.d.c.*; *dacă nu, împărţim pe g cu restul împărţirii, pe urmă împărţitorul celei de-a doua împărţiri cu noul rest ş.a.m.d. Ultimul rest nenul este c.m.m.d.c. al celor două polinoame.*

Trebuie să facem observaţia că dacă polinoamele f şi g sînt cu *coeficienţi numere reale (respectiv, raţionale), prin algoritmul lui Euclid obţinem un c.m.m.d.c. al lui f şi g care este un polinom cu coeficienţi numere reale (respectiv raţionale).*

Teorema 6.2.2. ne arată că fiind date două polinoame f şi g există un c.m.m.d.c. al lor. Mai mult, ne indică şi un procedeu de obţinere a acestui c.m.m.d.c.

Se pune întrebarea dacă c.m.m.d.c. este unic determinat.

Acest lucru este lămurit de următoarea teoremă:

Teorema 6.2.3. Fie f, g două polinoame şi d un c.m.m.d.c. al lui f şi g. Atunci:

1° Dacă $a \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$, atunci ad este un c.m.m.d.c. al polinoamelor f şi g.

2° Invers, dacă d' este un c.m.m.d.c. al lui f şi g există un $a \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$, astfel încît $d' = ad$.

Demonstraţie 1° Cum $d \mid f$ şi $ad \mid d$ (vezi proprietatea 4°), atunci din proprietatea de tranzitivitate a divizibilităţii obţinem $ad \mid f$. Analog, obţinem $ad \mid g$.

Fie d' un divizor comun al lui f şi g. Atunci $d' \mid d$ (vezi definiţia 6.2.1). Cum $d \mid ad$, atunci din tranzitivitatea divizibilităţii obţinem $d' \mid ad$. Deci ad este un c.m.m.d.c. al lui f şi g.

2° Presupunem că şi d' este un c.m.m.d.c. al lui f şi g. Cum d este un c.m.m.d.c. al lui f şi g, din definiţia 6.2.1 obţinem $d' \mid d$. Schimbînd rolurile lui d şi d', tot din definiţia 6.2.1 avem şi $d \mid d'$.

Din proprietatea 5° şi iv) deducem că există $a \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$, astfel încît $d' = ad$.

Observaţii 1) Teorema 6.2.3 ne spune că c.m.m.d.c. a două polinoame f şi g este *unic, abstracţie făcînd de un factor constant nenul.*

2) Teorema 6.2.3 ne ajută ca în calculele ce le facem pentru obţinerea c.m.m.d.c. a două polinoame cu coeficienţi întregi prin algoritmul lui Euclid, să evităm coeficienţii

fracţionari. Mai precis, dacă la una din împărţiri primul termen al vreunui deîmpărţit parţial nu este divizibil prin primul termen al împărţitorului, se pot înmulţi toţi coeficienţii deîmpărţitului cu un număr ales convenabil. De asemenea, dacă toţi coeficienţii vreunui deîmpărţit sau împărţitor sînt divizibili cu acelaşi număr, îi putem împărţi cu acel număr.

Exemple. 1) Să se găsească cel mai mare divizor comun al polinoamelor

$$f = X^4 + X^3 - 2X^2 - 4X + 4 \text{ şi } g = X^3 + X^2 + X - 3.$$

Vom aplica algoritmul lui Euclid. Împărţim pe f la g

$$\begin{array}{r|l}
X^4 + X^3 - 2X^2 - 4X + 4 & X^3 + X^2 + X - 3 \\ \cline{2-2}
-X^4 - X^3 - X^2 + 3X & X \\ \cline{1-1}
-3X^2 - X + 4 &
\end{array}$$

Pentru a evita coeficienţii fracţionari, vom înmulţi în prealabil pe g cu 3 şi restul împărţirii cu -1. Împărţim acum împărţitorul la rest

$$\begin{array}{r|l}
3X^3 + 3X^2 + 3X - 9 & 3X^2 + X - 4 \\ \cline{2-2}
-3X^3 - X^2 + 4X & X \\ \cline{1-1}
2X^2 + 7X - 9 &
\end{array}$$

Acum, pentru a evita din nou coeficienţii fracţionari vom înmulţi $3X^2 + X - 4$ cu 2 şi continuăm operaţia.

$$\begin{array}{r|l}
6X^2 + 2X - 8 & 2X^2 + 7X - 9 \\ \cline{2-2}
-6X^2 - 21X + 27 & 3 \\ \cline{1-1}
-19X + 19 &
\end{array}$$

Am obţinut restul $-19X + 19$. Pentru a evita din nou coeficienţii fracţionari împărţim pe $-19X + 19$ cu -19 şi împărţim împărţitorul la rest

$$\begin{array}{r|l}
2X^2 + 7X - 9 & X - 1 \\ \cline{2-2}
-2X^2 + 2X & 2X + 9 \\ \cline{1-1}
9X - 9 & \\
-9X + 9 & \\ \cline{1-1}
- \quad - &
\end{array}$$

Ultimul rest nenul este polinomul $X - 1$ şi deci $X - 1$ este c.m.m.d.c. al polinoamelor f şi g.

2) Să se afle c.m.m.d.c. al polinoamelor

$$f = X^3 - 2X^2 + 6X - 5, \; g = X^2 - 1.$$

Prima împărţire din algoritmul lui Euclid:

$$\begin{array}{r|l}
X^3 - 2X^2 + 6X - 5 & X^2 - 1 \\ \cline{2-2}
-X^3 \qquad + X & X - 2 \\ \cline{1-1}
-2X^2 + 7X - 5 & \\
2X^2 \qquad - 2 & \\ \cline{1-1}
7X - 7 &
\end{array}$$

A doua împărţire (împărţim $7X - 7$ cu 7):

$$\begin{array}{r|l} X^2 - 1 & X - 1 \\ \cline{2-2} -X^2 + X & X + 1 \\ \cline{1-1} X - 1 & \\ -X + 1 & \\ \cline{1-1} - \quad - & \end{array}$$

Ultimul rest nenul este $X - 1$. Deci $X - 1$ este c.m.m.d.c. al polinoamelor date.

3) Să se afle c.m.m.d.c. al polinoamelor:

$$f = X^6 + 2X^4 - 4X^3 - 3X^2 + 8X - 5 \text{ şi } g = X^5 + X^2 - X + 1$$

Prima împărţire din algoritmul lui Euclid:

$$\begin{array}{r|l} X^6 + 2X^4 - 4X^3 - 3X^2 + 8X - 5 & X^5 + X^2 - X + 1 \\ \cline{2-2} -X^6 \qquad\qquad - X^3 + X^2 - X & X \\ \cline{1-1} 2X^4 - 5X^3 - 2X^2 + 7X - 5 & \end{array}$$

A doua împărţire (înmulţim $X^5 + X^2 - X + 1$ cu 2):

$$\begin{array}{r|l} 2X^5 + 2X^2 - 2X + 2 & 2X^4 - 5X^3 - 2X^2 + 7X - 5 \\ \cline{2-2} -2X^5 + 5X^4 + 2X^3 - 7X^2 + 5X & X + \frac{5}{2} \\ \cline{1-1} 5X^4 + 2X^3 - 5X^2 + 3X + 2 & \\ -5X^4 + \frac{25}{2}X^3 + 5X^2 - \frac{35}{2}X + \frac{25}{2} & \\ \cline{1-1} \frac{29}{2}X^3 - \frac{29}{2}X + \frac{29}{2} & \end{array}$$

A treia împărţire $\left(\text{împărţim ultimul rest cu } \frac{29}{2}\right)$:

$$\begin{array}{r|l} 2X^4 - 5X^3 - 2X^2 + 7X - 5 & X^3 - X + 1 \\ \cline{2-2} -2X^4 \qquad + 2X^2 - 2X & 2X - 5 \\ \cline{1-1} -5X^3 + 5X - 5 & \\ 5X^3 - 5X + 5 & \\ \cline{1-1} - \quad - \quad - & \end{array}$$

Ultimul rest nenul este $X^3 - X + 1$. Deci $X^3 - X + 1$ este c.m.m.d.c. al polinoamelor date.

Teorema 6.2.4. **Fie f şi g două polinoame. Dacă d este un c.m.m.d.c. al lui f şi g, atunci există polinoamele u şi v astfel încît**

$$d = uf + vg.$$

Demonstraţie. Am văzut în demonstraţia teoremei 6.2.2 că ultimul rest nenul din algoritmul lui Euclid este c.m.m.d.c. al polinoamelor f şi g. Deci dacă

(1)	$f = gq_1 + r_1,$
(2)	$g = r_1q_2 + r_2,$
(3)	$r_1 = r_2q_3 + r_3,$
....	
(n)	$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n,$
$(n + 1)$	$r_{n-1} = r_nq_{n+1},$

este şirul de egalităţi din algoritmul lui Euclid unde ultimul rest nenul este r_n, atunci r_n este c.m.m.d.c. al lui f şi g.

Din (1) obţinem că $r_1 = u_1f + v_1g$, unde $u_1 = 1$ şi $v_1 = -q_1$.

Din (2) obţinem că $r_2 = g - r_1q_2 = g - (u_1f + v_1g)q_2 = -(u_1q_2)f + (1 - v_1q_2)g = u_2f + v_2g$, unde $u_2 = -u_1q_2$ şi $v_2 = 1 - v_1q_2$.

Continuînd procedeul putem să presupunem că pentru orice i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ am determinat polinoamele u_i, v_i, astfel încît

$$r_i = u_if + v_ig.$$

Din egalitatea (n) avem că $r_n = r_{n-2} - r_{n-1}q_n$. Cum $r_{n-2} = u_{n-2}f + v_{n-2}g$ şi $r_{n-1} = u_{n-1}f + v_{n-1}g$, atunci $r_n = u_{n-2}f + v_{n-2}g - (u_{n-1}f + v_{n-1}g)q_n = (u_{n-2} - u_{n-1}q_n)f + (v_{n-2} - v_{n-1}q_n)g = u_nf + v_ng$, unde am notat $u_n = u_{n-2} - u_{n-1}q_n$ şi $v_n = v_{n-2} - v_{n-1}q_n$.

Acum, dacă d este un c.m.m.d.c. al polinoamelor f şi g, din teorema 6.2.3 rezultă că există un $a \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$ astfel încît $d = ar_n$. Deci $d = au_nf + av_ng = uf + vg$, unde $u = au_n$ şi $v = av_n$.

Definiţia 6.2.5. Fie f şi g două polinoame. Spunem că f şi g sînt *prime între ele* dacă 1 este c.m.m.d.c. al lui f şi g.

Din teorema 6.2.3 rezultă că polinoamele f şi g sînt prime între ele dacă singurii divizori comuni ai lui f şi g sînt polinoamele constante nenule.

Exemple. 1) Polinoamele $f = X^4 + 1$ şi $g = X^3 - 1$ sînt prime între ele. Într-adevăr, să calculăm c.m.m.d.c. al lui f şi g folosind algoritmul lui Euclid:

Prima împărţire:

$$\begin{array}{r|l} X^4 + 1 & X^3 - 1 \\ \cline{2-2} -X^4 + X & X \\ \cline{1-1} X + 1 & \end{array}$$

A doua împărţire:

$$\begin{array}{r|l} X^3 - 1 & X + 1 \\ \cline{2-2} -X^3 - X^2 & X^2 - X + 1 \\ \cline{1-1} -X^2 - 1 & \\ X^2 + X & \\ \cline{1-1} X - 1 & \\ -X - 1 & \\ \cline{1-1} -2 & \end{array}$$

Ultimul rest nenul este -2 şi deci 1 este un c.m.m.d.c. al lui f şi g.

2) Polinoamele $f = X^2 + X + 1$ şi $g = X^2 - X + 1$ sînt prime între ele. Într-adevăr, să calculăm c.m.m.d.c. al lui f şi g

$$\begin{array}{r|l} X^2 + X + 1 & X^2 - X + 1 \\ \cline{2-2} -X^2 + X - 1 & 1 \\ \cline{1-1} 2X & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2X^2 - 2X + 2 & 2X \\ \cline{2-2} -2X^2 & X - 1 \\ \cline{1-1} -2X + 2 & \\ 2X & \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

Ultimul rest nenul fiind 2, atunci c.m.m.d.c. al lui f şi g este polinomul 1.

Observații. 1) Fie f și g două polinoame și d un c.m.m.d.c. al lor. Atunci utem scrie $f = df'$ și $g = dg'$. Polinoamele f' și g' *sînt prime între ele*.

Într-adevăr, dacă d' este un c.m.m.d.c. al lui f' și g', atunci dd' este un divizor comun l polinoamelor f și g. Cum d este c.m.m.d.c. al lui f și g, atunci obținem că $dd'|d$. Deci există polinomul d'' astfel încît $d = dd'd''$. Prin urmare, $d'd'' = 1$ și deci d' este un polinom constant ceea ce ne arată că f' și g' sînt prime între ele.

2) Așa cum am definit cel mai mare divizor comun a două polinoame (a se vedea definiția 6.2.1) putem defini c.m.m.d.c. a unui număr finit de polinoame. Mai precis, dacă $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sînt n polinoame, atunci un polinom d se numește un c.m.m.d.c. al polinoamelor $f_1, f_2, \ldots, f_n$ dacă verifică următoarele condiții:

i) $d \mid f_1, d \mid f_2, \ldots, d \mid f_n$;

ii) dacă d' este un polinom astfel încît $d' \mid f_1, d' \mid f_2, \ldots, d' \mid f_n$ atunci $d' \mid d$.

Fiind date polinoamele $f_1, f_2, \ldots, f_n$ un c.m.m.d.c. al lor se calculează astfel: se determină d_1 un c.m.m.d.c. al polinoamelor f_1 și f_2, apoi se determină d_2 un c.m.m.d.c. al polinoamelor d_1 și f_3, apoi se determină d_3 un c.m.m.d.c. al polinoamelor d_2 și $f_4, \ldots$, apoi se determină d_{n-1} un c.m.m.d.c. al polinoamelor d_{n-2} și f_n. Polinomul $d = d_{n-1}$ este un c.m.m.d.c. al polinoamelor $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

6.3. Cel mai mic multiplu comun al polinoamelor

Definiția 6.3.1. **Fie f și g două polinoame. Un polinom m se numește un** *cel mai mic multiplu comun* **(pe scurt,** *un c.m.m.m.c.*) **al polinoamelor f și g dacă verifică următoarele condiții:**
i) m este un multiplu al lui f și g, adică $f \mid m$ și $g \mid m$,
ii) orice alt multiplu comun m' al lui f și g este și multiplu al lui m (adică dacă $f \mid m'$, atunci $m \mid m'$).

Următoarea teoremă ne dă un procedeu de obținere a unui c.m.m.m.c. a două polinoame.

Teorema 6.3.2. **Fie f și g două polinoame dintre care cel puțin unul este nenul. Dacă d este un c.m.m.d.c. al lui f și g, atunci polinomul $m = \frac{fg}{d}$ este un c.m.m.m.c. al lui f și g $\left(\text{aici } \frac{fg}{d}\right.$ înseamnă cîtul împărțirii polinomului fg prin $\left.d\right)$.**

Demonstrație. Cum $d \mid f$ și $d \mid g$, există polinoamele f' și g' astfel încît $f = df'$ și $g = dg'$. În plus, polinoamele f' și g' sînt prime între ele. Deci $m = f'g = fg'$, ceea ce arată că m este un multiplu comun al lui f și q.

Fie m' un polinom astfel încît $f \mid m'$ și $g \mid m'$. Deci există polinoamele f_1 și g_1 astfel încît $m' = ff_1$ și $m' = gg_1$. Avem $m' = df'f_1$ și $m' = dg'g_1$, de unde obținem că $df'f_1 = dg'g_1$. Cum $d \neq 0$, atunci $f'f_1 = g'g_1$. Polinoamele f' și g' fiind prime între ele, există polinoamele u și v astfel încît $1 = uf' + vg'$. Înmulțind această egalitate cu g_1 (de exemplu), obținem că $g_1 = ug_1f' + vg'g_1 = ug_1f' + vf'f_1 = f'(ug_1 + vf_1)$, ceea ce arată că $f' \mid g_1$. Deci există un polinom g_2, astfel încît $g_1 = f'g_2$. Cum $m' = gg_1$, atunci $m' = gf'g_2 = mg_2$ și deci $m \mid m'$. Deci polinomul $m = \frac{fg}{d}$ este un c.m.m.m.c. al lui f și g.

Exemplu. Să se determine c.m.m.m.c. al polinoamelor

$$f = 2X^5 - 3X^4 - 5X^3 + X^2 + 6X + 3 \text{ şi } g = X^4 - X^3 - X^2 + 1.$$

Aflăm mai întîi c.m.m.d.c. al celor două polinoame folosind algoritmul lui Euclid.
Prima împărţire:

$$\begin{array}{r|l}
2X^5 - 3X^4 - 5X^3 + X^2 + 6X + 3 & X^4 - X^3 - X^2 + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{-2X^5 + 2X^4 + 2X^3 - 2X \phantom{{}+3}} & 2X - 1 \\
-X^4 - 3X^3 + X^2 + 4X + 3 & \\
\underline{X^4 - X^3 - X^2 + \phantom{4X+{}} 1} & \\
-4X^3 \phantom{{}+X^2} + 4X + 4 &
\end{array}$$

Restul $-4X^3 + 4X + 4$ îl împărţim cu -4 şi obţinem $X^3 - X - 1$.

A doua împărţire:

$$\begin{array}{r|l}
X^4 - X^3 - X^2 + 1 & X^3 - X - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{-X^4 + X^2 + X \phantom{{}+1}} & X - 1 \\
-X^3 + X + 1 & \\
\underline{X^3 - X - 1} & \\
- \quad - &
\end{array}$$

Ultimul rest nenul este $X^3 - X - 1$. Deci polinomul $d = X^3 - X - 1$ este un c.m.m.d.c. al polinoamelor f şi g. Cum $g = (X^3 - X - 1)(X - 1)$, atunci polinomul

$$m = \frac{fg}{d} = f\frac{g}{d} = f \cdot (X - 1) = (X - 1)\,(2X^5 - 3X^4 - 5X^3 + X^2 + 6X + 3) =$$

$$= 2X^6 - 5X^5 - 2X^4 + 6X^3 + 5X^2 - 3X - 3$$

este un c.m.m.m.c. al polinoamelor f şi g.

Observaţie. Aşa cum am definit c.m.m.m.c. a două polinoame (a se vedea definiţia 6.3.1) putem defini c.m.m.m.c. al unui număr finit de polinoame. Mai precis, dacă $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sînt n polinoame, atunci un polinom m se numeşte un c.m.m.m.c. al polinoamelor $f_1, f_2, \ldots, f_n$, dacă verifică următoarele condiţii:

i) $f_1 \mid m,\ f_2 \mid m, \ldots, f_n \mid m$,

ii) dacă m' este un polinom astfel încît $f_1 \mid m',\ f_2 \mid m', \ldots, f_n \mid m'$ atunci $m \mid m'$.

Teorema 6.3.2 nu se poate extinde la cazul cînd avem n polinoame $f_1, f_2, \ldots, f_n$ cu $n \geqslant 3$. În acest caz c.m.m.m.c. al polinoamelor $f_1, f_2, \ldots, f_n$ se calculează astfel: se determină un c.m.m.m.c. m_1 al polinoamelor f_1, f_2; apoi se determină un c.m.m.m.c. m_2 al polinoamelor m_1 şi $f_3, \ldots$, în final, se determină un c.m.m.m.c. m_{n-1} al polinoamelor m_{n-2} şi f_n. Polinomul $m = m_{n-1}$ este un c.m.m.m.c. al polinoamelor $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Exerciţii

1. Să se arate că polinomul
$X^4 - 3X^3 + 2X^2 - 6X + 6$ se divide la $X - 1$; se cere cîtul împărţirii.

2. Să se arate că polinomul
$X^7 - 3X^6 + 2X^5 + 2X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 3X - 1$ se divide la $X^2 - 2X + 1$; se cere cîtul împărţirii.

3. Să se determine parametrul m, astfel încît polinomul $X^3 - 3X^2 + 6X - m$ să se dividă la $X - 2$.

4. Să se determine a, b, c, astfel încît polinomul $X^5 - 2X^4 + 18X^3 + aX^2 + bX + c$ să se dividă la $X^3 - 3X^2 + 10X - 9$.

5. Să se determine relațiile între numerele m, p, q, astfel încît polinomul $X^3 + pX + q$ să fie divizibil cu polinomul $X^2 + mX + 1$.

6. Să se determine a și b astfel încît polinomul $aX^4 + bX^3 - 3$ să fie divizibil cu $(X - 1)^2$.

7. Dacă un polinom f nu divide nici pe g_1 și nici pe g_2, rezultă de aici că f nu divide produsul g_1g_2?

8. Fie f, g_1, g_2 trei polinoame astfel încît $f \mid g_1g_2$. Dacă f și g_1 sînt prime între ele să se arate că $f \mid g_2$.

9. Dacă f este prim cu g și cu h, să se arate că f este prim cu produsul gh.

10. Folosind algoritmul lui Euclid, să se determine c.m.m.d.c. al polinoamelor f și g dacă

a) $f = X^6 - 7X^4 + 8X^3 - 7X + 7$, $g = 3X^6 - 7X^4 + 3X^3 - 7X$;
b) $f = X^6 - X^5 - X^4 + 8X^3 - 5X^2 - 2X + 10$, $g = 3X^4 - 6X^3 + 5X^2 + 2X - 2$;
c) $f = X^6 + 2X^4 - 4X^3 - 3X^2 + 8X - 5$, $g = X^6 + X^3 - X^2 + X$;
d) $f = X^6 + 3X^5 - 12X^4 - 52X^3 - 52X^2 - 12X$, $g = X^4 + 3X^3 - 6X^2 - 22X - 12$;
e) $f = X^5 + X^4 - X^3 - 3X^2 - 3X - 1$, $g = X^5 - 3X^4 + X^3 - X^2 + 3X - 1$;
f) $f = X^5 - 10X^3 + X$, $g = X^4 - 4\sqrt{2}\,X^3 + 6X^2 + 4\sqrt{2}\,X + 1$;
g) $f = X^4 - 4X^3 + 1$, $g = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + X + 1$;
h) $f = X^5 - 4X^4 + 3X^3 - 2X^2 + X - 1$, $g = X^4 - 2X^2 + 3X - 2$;
i) $f = X^6 - 2X^5 + 3X^4 - 6X^3 - 5X^2 + X - 6$, $g = X^4 + 2X^3 + 3X^2 - 6X - 8$.

11. Dacă d este un c.m.m.d.c. al polinoamelor f și g și h este un polinom nenul, să se arate că dh este un c.m.m.d.c. al polinoamelor fh și gh.

12. Să se determine A și B astfel încît polinomul $AX^{n+2} + BX^n + 2$ să fie divizibil cu $(X - 1)^2$.

13. Să se arate că polinoamele f și g sînt prime între ele, unde:

a) $f = 3X^3 - 2X^2 + X + 2$, $g = X^3 - 2X^2 + 2X - 1$;
b) $f = X^4 - X^3 - 4X^2 + 4X + 1$, $g = X^3 - 2X^2 + 1$;
c) $f = X^5 - 5X^4 - 2X^3 + 12X^2 - 2X + 12$, $g = X^3 - 5X^2 - 3X + 17$.

§ 7. Rădăcinile polinoamelor. Ecuații algebrice

7.1. Rădăcinile polinoamelor. Teorema lui Bézout

Fie f un polinom nenul cu coeficienții complecși. Un număr complex, $a \in \mathbf{C}$ se numește *rădăcină a polinomului* f dacă $f(a) = 0$.

Exemple. 1) Să considerăm polinomul de gradul întîi

$$f = aX + b \ (a \neq 0). \text{ Se vede că } f\left(-\frac{b}{a}\right) = a\left(-\frac{b}{a}\right) + b = 0$$

și deci $-\dfrac{b}{a}$ este rădăcină a polinomului $aX + b$.

2) Să considerăm polinomul $g = X^2 + 1$. Cum $g(\mathrm{i}) = \mathrm{i}^2 + 1 = -1 + 1 = 0$ și $g(-\mathrm{i}) = (-\mathrm{i})^2 + 1 = 0$, rezultă că i și $-$i sînt rădăcini ale polinomului $X^2 + 1$.

Teorema lui Bézout. Fie $f \neq 0$ un polinom nenul. Numărul $a \in \mathbf{C}$ este rădăcină a polinomului f dacă şi numai dacă $X - a$ divide f.

Demonstrație. Dacă a este rădăcină a lui f adică $f(a) = 0$, atunci din teorema 5.2.1 rezultă că restul împărţirii lui f prin $X - a$ este zero şi deci $X - a$ divide pe f.

Invers, dacă $X - a$ divide pe f, atunci există un polinom g astfel încît $f = (X - a)g$. Dar atunci $f(a) = (a - a)\, g(a) = 0 \cdot g\,(a) = 0$ şi deci a este rădăcină a lui f.

Aplicație

Să se găsească condiția ca polinoamele

$$f = aX^2 + bX + c \text{ şi } g = a'X^2 + b'X + c'$$

să aibă o rădăcină comună.

Fie α o rădăcină comună a celor două polinoame. Atunci α este rădăcină şi a polinomului

$$a'f - ag = a'(aX^2 + bX + c) - a(a'X^2 + b'X + c') = (a'b - ab')X + (a'c - ac').$$

Deci $(a'b - ab')\alpha + (a'c - ac') = 0$. Dacă $a'b - ab' \neq 0$ obținem că

$$\alpha = \frac{ac' - a'c}{a'b - ab'} \cdot \text{ Cum } f(\alpha) = 0, \text{ atunci}$$

$$a\left(\frac{ac' - a'c}{a'b - ab'}\right)^2 + b\,\frac{ac' - a'c}{a'b - ab'} + c = 0$$

şi făcînd calculele obținem:

$$\boxed{(ac' - a'c)^2 - (ab' - a'b)(bc' - b'c) = 0}$$

Dacă $a'b - ab' = 0$ atunci $a'c - ac' = 0$ şi relația obținută este verificată şi în acest caz.

7.2. Ecuații algebrice. Teorema lui D'Alembert-Gauss şi teorema lui Abel-Ruffini

Se numeşte *ecuație algebrică* cu o singură necunoscută o ecuație de forma

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

unde f este un polinom nenul.

Dacă f este polinomul $f = a_0 + a_1 X \ldots + a_n X^n (a_n \neq 0)$ atunci ecuația algebrică (1) se scrie:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0. \tag{1'}$$

Gradul polinomului f se numeşte *gradul ecuației algebrice* (1) sau (1') iar numerele complexe $a_0, a_1, \ldots, a_n$ se numesc *coeficienții ecuației algebrice* (1) sau (1').

Dacă coeficienţii ecuaţiei algebrice sînt numere reale (respectiv, raţionale), atunci se zice că ecuaţia algebrică (1) sau (1') este cu coeficienţii reali (respectiv, raţionali). O ecuaţie care nu poate fi redusă la o ecuaţie algebrică folosind operaţiile: adunare, înmulţire, ridicare la putere etc. se numeşte *transcendentă*.

Exemple. 1) Ecuaţia $x^3 - 3x + 7 = 0$ este o ecuaţie algebrică de gradul 3 cu coeficienţi raţionali.

2) Ecuaţia $\sqrt{3}x^4 + \sqrt[3]{2}x^3 + 7x - 1 = 0$ este o ecuaţie algebrică de gradul 4 cu coeficienţi reali.

3) Ecuaţiile $\sin x - 7x + 1 = 0$; $\log x = 3 - 2x$; $\sin x - \log x + 1 = 0$ sînt transcendente.

Să considerăm din nou ecuaţia algebrică

$$(1) \qquad f(x) = 0.$$

Numărul complex a se numeşte *soluţia* sau *rădăcina ecuaţiei* (1) dacă are loc egalitatea $f(a) = 0$. *Se vede că a este rădăcină a ecuaţiei* (1) *dacă şi numai dacă a este rădăcină a polinomului f.*

Determinarea rădăcinilor ecuaţiei algebrice (1) este una dintre cele mai importante probleme ale matematicii şi multă vreme a constituit obiectul principal al algebrei.

Încă din antichitate, matematicienii ştiau să determine rădăcinile ecuaţiilor algebrice de gradul I şi gradul II. În secolul al XVI-lea, în perioada Renaşterii italiene, matematicienii italieni: Scipione del Ferro şi Niccola Tartaglia au determinat formula de rezolvare pentru ecuaţia de gradul III, iar Ludovico Ferrari a determinat formula de rezolvare pentru ecuaţia de gradul IV. Acestea au fost publicate de Gerolamo Cardano în Ars Magna (1545).

Încercările ulterioare ale matematicienilor de a găsi formule de rezolvare pentru ecuaţiile algebrice de grad mai mare decît patru, au fost zadarnice. Problema a fost rezolvată (în sens negativ) de matematicianul norvegian H. Abel şi matematicianul italian A. Ruffini la începutul secolului al XIX-lea. Mai exact, ei au demonstrat:

Teorema Abel-Ruffini. **Ecuaţia algebrică generală* de grad mai mare decît patru nu poate fi rezolvată prin radicali (cu alte cuvinte, nu există nici o formulă (expresie) cu radicali, formată cu coeficienţii ecuaţiei, care să fie o rădăcină a ecuaţiei).**

Vom vedea că există totuşi ecuaţii particulare de grad > 4 pentru care putem să dăm formule de determinare a rădăcinilor lor (a se vedea § 8).

Teorema următoare are o mare importanţă pentru algebră:

Teorema fundamentală a algebrei. Orice ecuaţie algebrică

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

de grad mai mare sau egal cu 1 şi cu coeficienţii complecşi are cel puţin o rădăcină complexă.

---

* Prin ecuaţie algebrică generală de gradul n înţelegem o ecuaţie de forma (1') în care coeficienţii $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sînt „variabile".

Această teoremă mai poartă numele de teorema lui D'Alembert-Gauss. Nu vom da demonstrațiile teoremei fundamentale a algebrei și a teoremei Abel-Ruffini deoarece depășesc cadrul manualului.

Trebuie să observăm că teorema fundamentală a algebrei are caracter existențial; nici o demonstrație a acestei teoreme nu ne indică vreun procedeu de obținere a rădăcinilor ecuațiilor algebrice. Acest lucru ne arată că nu există nici o contradicție între cele două teoreme enunțate mai înainte. În schimb teorema lui Abel-Ruffini ne spune că pentru ecuațiile de grad >4 nu se poate da un procedeu (formulă) de determinare a rădăcinilor sale (pentru ecuațiile algebrice de grad $\leqslant 4$, există formule de determinare a rădăcinilor lor).

Observație. Din clasele precedente am văzut că lărgirea noțiunii de număr a fost impusă printre altele de rezolvarea anumitor ecuații. De exemplu, introducerea numerelor întregi a fost impusă de faptul că nu orice ecuație cu coeficienți numere naturale are o rădăcină număr natural. De exemplu, ecuația $x + 1 = 0$ nu are nici o rădăcină număr natural.

În continuare introducerea numerelor raționale a fost impusă, de asemenea, de faptul că nu orice ecuație cu coeficienți întregi are o rădăcină număr întreg. De exemplu, ecuația $2x + 1 = 0$ nu are nici o rădăcină număr întreg.

Introducerea numerelor reale a fost impusă printre altele de faptul că nu orice ecuație cu coeficienții raționali are o rădăcină rațională. Nu avem de considerat decît ecuația $x^2 - 2 = 0$ care nu are nici o rădăcină rațională.

Am văzut în manualul de clasa a IX-a că introducerea numerelor complexe, în algebră, a fost impusă de faptul că nu orice ecuație cu coeficienții reali are o rădăcină reală. De exemplu, ecuația $x^2 + 1 = 0$ nu are nici o rădăcină reală.

Teorema lui d'Alembert-Gauss ne arată că procesul de lărgire pe această cale a noțiunii de număr se oprește la numerele complexe.

7.3. Rădăcini multiple

Am văzut că teorema lui Bézout spune că dacă a este o rădăcină a polinomului $f \neq 0$ atunci $X-a$ divide pe f. Acest lucru ne permite să definim noțiunea de rădăcină multiplă a unui polinom.

Definiția 7.3.1. **Fie $f \neq 0$ un polinom nenul și $a \in \mathbf{C}$ o rădăcină a lui f. Numărul natural $m \geqslant 1$ cu proprietățile că $(X-a)^m$ divide pe f și $(X-a)^{m+1}$ nu divide pe f se numește** ***ordinul de multiplicitate al rădăcinii*** **a. Dacă $m = 1$, atunci a se numește** ***rădăcină simplă***, **dacă $m \geqslant 2$, atunci a se numește** ***rădăcină multiplă*** **de ordinul m, dacă $m=2,3, \ldots$, atunci a se numește rădăcină** ***dublă, triplă, ...*** .

Exemple. 1) Polinomul $f = X^2 - 2X + 1$ are rădăcina $a = 1$ deoarece $f(1) = 0$. Cum $f = (X - 1)^2$ atunci se vede că $a = 1$ este rădăcină dublă pentru polinomul f.

2) Polinomul $f = X^4 - 5X^3$ are rădăcina $a = 0$. Cum $X^3 \mid f$ și X^4 nu divide pe f, atunci $a = 0$ este o rădăcină triplă. De asemenea f are și rădăcina simplă $a = 5$.

Demonstrație. Din teorema fundamentală a algebrei, polinomul f are cel puțin o rădăcină. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_r$ toate rădăcinile lui f (luăm în considerare o rădăcină de atîtea ori cît este ordinul său). Din teorema 7.3.2, există un polinom $g \neq 0$ astfel încît $f = (X - a_1)(X - a_2) \ldots (X - a_r)g$. Dacă grad $g \geqslant 1$ atunci aplicînd din nou teorema fundamentală a algebrei obținem că g are o rădăcină a_{r+1} care este evident rădăcină și a lui f. Deci f ar avea $r + 1$ rădăcini, contradicție. Deci trebuie ca grad $g = 0$ și deci $g = a \in \mathbf{C}$. Atunci $f = a(X - a_1)(X - a_2) \ldots (X - a_r)$. Cum gradul polinomului $a(X - a_1)(X - a_2) \ldots (X - a_r)$ este r, atunci trebuie ca $r = n$ și deci f are n rădăcini.

Consecința 7.3.4. **Fie $f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n$ un polinom cu $a_n \neq 0$, $n \geqslant 1$. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt rădăcinile lui f, atunci (1) $f = a_n(X - x_1)(X - x_2) \ldots (X - x_n)$.**

plus, descompunerea (1) a lui f în factori liniari este unică.

Demonstrație. Din demonstrația consecinței 7.3.3 f se scrie:

$$f = a(X - x_1)(X - x_2) \ldots (X - x_n) \text{ unde } a \in \mathbf{C},\ a \neq 0.$$

Cum coeficientul termenului de grad maxim al polinomului

$$a(X - x_1)(X - x_2) \ldots (X - x_n) \text{ este } aX^n \text{ atunci trebuie ca}$$

$$a = a_n \text{ și deci } f = a_n(X - x_1)(X - x_2) \ldots (X - x_n).$$

Să demonstrăm unicitatea descompunerii (1). Presupunem că f mai admite și descompunerea $f = b(X - y_1)(X - y_2) \ldots (X - y_m)$, unde $b, y_1, y_2, \ldots, y_m$ sînt numere complexe și $b \neq 0$.

Cum gradul polinomului $b(X - y_1)(X - y_2) \ldots (X - y_m)$ este m trebuie ca $m = n$. Termenul de grad maxim al polinomului $b(X - y_1)(X - y_2) \ldots (X - y_n)$ este bX^n și deci $b = a_n$. Deci $a_n(X - x_1)(X - x_2) \ldots (X - x_n) = a_n(X - y_1)(X - y_2) \ldots (X - y_n)$ sau (2) $(X - x_1)(X - x_2) \ldots (X - x_n) = (X - y_1)(X - y_2) \ldots (X - y_n)$.

Din egalitatea (2) prin înlocuirea lui X cu x_1, obținem:

$$(x_1 - y_1)(x_1 - y_2) \ldots (x_1 - y_n) = 0.$$

Deci trebuie ca unul din factori $x_1 - y_1$, $x_1 - y_2, \ldots, x_1 - y_n$ să fie zero. Putem presupune că $x_1 - y_1 = 0$ și deci $x_1 = y_1$. Înlocuind în egalitatea (2) obținem:

$$(X - x_1)(X - x_2) \ldots (X - x_n) = (X - x_1)(X - y_2) \ldots (X - y_n).$$

Simplificînd cu $X - x_1$ obținem egalitatea

$$(X - x_2) \ldots (X - x_n) = (X - y_2) \ldots (X - y_n).$$

Facem acum $X = x_2$. Exact ca mai sus găsim că $x_2 = y_2$. Continuînd procedeul găsim că $x_3 = y_3, \ldots, x_n = y_n$.

Observație. Consecința 7.3.4 este foarte utilă în multe aplicații în care cere aflarea c.m.m.d.c. a două polinoame f și g care pot fi descompuse în factori liniari.

În acest caz c.m.m.d.c. al celor două polinoame este produsul factorilor comuni la puterea mai mică.

De exemplu, fie polinoamele:

$$f = (X - 1)^4(X + 2)^2(X - 3)(X - 4) \text{ și } g = (X - 1)^3(X + 2)(X + 6).$$

c.m.m.d.c. al polinoamelor f și g este polinomul $d = (X - 1)^3(X + 2)$.

Consecința 7.3.5. Dacă un polinom f de gradul n se anulează pentru $n+1$ valori distincte, atunci $f=0$.

Demonstrație. Presupunem că $f \neq 0$. Dacă $n = \text{grad} f = 0$ atunci $f = a \in \mathbf{C}$ și $a \neq 0$. În acest caz f nu se anulează pentru nici o valoare. Dacă $n = \text{grad}\ f \geqslant 1$, atunci f are n rădăcini. Dar din ipoteză f are cel puțin $n+1$ rădăcini, contradicție. Deci trebuie ca $f = 0$.

7.4. Relații între rădăcini și coeficienți (formulele lui Viète)

Teorema 7.4.1. Fie $f = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$ un polinom de grad n $(a_n \neq 0)$. Dacă $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sînt rădăcinile lui f, atunci:

$$(1)\left\{\begin{array}{l}
\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n},\\[2mm]
\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_1\alpha_n + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n},\\[2mm]
\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n},\\[2mm]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\[2mm]
\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k + \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}\alpha_{k+1} + \ldots + \alpha_{n-k+1}\alpha_{n-k+2}\ldots\\
\ldots\alpha_n = (-1)^k \dfrac{a_k}{a_n},\\[2mm]
\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}.
\end{array}\right.$$

Invers, dacă numerele complexe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ satisfac relațiile (1), atunci $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sînt rădăcinile polinomului f.

(Numărul de termeni din sumele (1) este egal cu C_n^1, $C_n^2 \ldots$, $C_n^k, \ldots, C_n^n$).

Demonstrație. Am văzut în consecința 7.3.4 că f poate fi scris sub forma

$$(2)\ f = a_n(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\ldots(X-\alpha_n).$$

Dar

$$(3)\ f = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n.$$

Efectuînd calculele în (2) și egalînd coeficienții lui $X^k (0 \leqslant k \leqslant n)$ din (2) cu coeficienții lui X^k din (3) obținem formulele (1). De exemplu, coeficientul lui X^{n-1} din (2) este $-a_n(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)$. Deci trebuie ca $a_{n-1} = -a_n(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)$, de unde obținem $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$.

În continuare coeficientul lui X^{n-2} din (2) este $a_n(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_1\alpha_n + + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n)$ care trebuie să fie egal cu coeficientul lui X^{n-2} din (3) care este a_{n-2}.

Deci $a_{n-2} = a_n(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n)$, de unde obţinem

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}.$$

În acelaşi mod se obţin şi celelalte egalităţi din (1).

Invers, presupunem că $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ satisfac relaţiile (1). Considerăm polinomul $g = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)\ldots(X - \alpha_n)$. Făcînd înmulţirile obţinem

$$g = X^n - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) X^{n-1} + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n)X^{n-2} + + \ldots + (-1)^n\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n.$$

Ţinînd cont de relaţiile (1) deducem că:

$$g = X^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} X^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{a_n} X^{n-2} + \ldots + \frac{a_0}{a_n} =$$

$$= \frac{1}{a_n}(a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0) = \frac{1}{a_n} f.$$

Din egalitatea $g = \frac{1}{a_n} f$ rezultă că $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sînt rădăcini şi pentru f.

Relaţiile (1) se numesc *relaţiile între rădăcini şi coeficienţii polinomului* f sau *relaţiile lui Viète.*

Dacă considerăm ecuaţia asociată

(4) $$a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0 = 0$$

atunci relaţiile (1) se numesc şi *relaţiile între rădăcini şi coeficienţii ecuaţiei* (4).

Să scriem relaţiile lui Viète pentru cazul cînd polinomul f are gradul 2 sau 3. Să presupunem că f este de gradul 2 adică f este de forma $f = a_0 + + a_1X + a_2X^2$.

În acest caz relaţiile (1) se scriu astfel:

(5) $$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = \dfrac{-a_1}{a_2}, \\ \alpha_1\alpha_2 = \dfrac{a_0}{a_2}. \end{cases}$$

Dacă f este de gradul 3, adică $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$, atunci relaţiile 1) se scriu astfel:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \dfrac{-a_2}{a_3}, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = \dfrac{+a_1}{a_3}, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \dfrac{-a_0}{a_3}. \end{cases}$$

În continuare coeficientul lui X^{n-2} din (2) este $a_n(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_1\alpha_n + + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n)$ care trebuie să fie egal cu coeficientul lui X^{n-2} din (3) care este a_{n-2}.

Deci $a_{n-2} = a_n(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n)$, de unde obținem

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}.$$

În același mod se obțin și celelalte egalități din (1).

Invers, presupunem că $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ satisfac relațiile (1). Considerăm polinomul $g = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)\dots(X - \alpha_n)$. Făcînd înmulțirile obținem

$$g = X^n - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)X^{n-1} + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n)X^{n-2} + + \dots + (-1)^n\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n.$$

Ținînd cont de relațiile (1) deducem că:

$$g = X^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}X^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{a_n}X^{n-2} + \dots + \frac{a_0}{a_n} =$$

$$= \frac{1}{a_n}(a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0) = \frac{1}{a_n}f.$$

Din egalitatea $g = \frac{1}{a_n}f$ rezultă că $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sînt rădăcini și pentru f.

Relațiile (1) se numesc *relațiile între rădăcini și coeficienții polinomului* f sau *relațiile lui Viète.*

Dacă considerăm ecuația asociată

$$a_nx^n + \dots + a_1x + a_0 = 0 \tag{4}$$

atunci relațiile (1) se numesc și *relațiile între rădăcini și coeficienții ecuației* (4).

Să scriem relațiile lui Viète pentru cazul cînd polinomul f are gradul 2 sau 3. Să presupunem că f este de gradul 2 adică f este de forma $f = a_0 + + a_1X + a_2X^2$.

În acest caz relațiile (1) se scriu astfel:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = \dfrac{-a_1}{a_2}, \\ \alpha_1\alpha_2 = \dfrac{a_0}{a_2}. \end{cases} \tag{5}$$

Dacă f este de gradul 3, adică $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$, atunci relațiile 1) se scriu astfel:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \dfrac{-a_2}{a_3}, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = \dfrac{+a_1}{a_3}, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \dfrac{-a_0}{a_3}. \end{cases}$$

Relațiile lui Viète sînt foarte utile în numeroase aplicații cînd se cere să se determine rădăcinile unui polinom (sau ecuații) și cînd se cunoaște o relație suplimentară între rădăcini.

Exemple

1) Fie polinomul $f = X^3 - 10X^2 + 29X - 20$.
Să se determine rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale lui f știind că $x_1 + x_2 = x_3$.
Scriem relațiile lui Viète

$$(6)\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 29, \\ x_1x_2x_3 = 20. \end{cases}$$

Cum $x_1 + x_2 = x_3$ atunci din prima relație din (6) avem că

$$2x_3 = 10 \text{ și deci } \boxed{x_3 = 5}$$

Din $x_1x_2x_3 = 20$, obținem $x_1x_2 = 4$. Formăm sistemul

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5, \\ x_1x_2 = 4, \end{cases}$$

care dă rădăcinile: $\boxed{x_1 = 1}$ și $\boxed{x_2 = 4}$

2) Să se găsească relația între a, b, c știind că rădăcinile polinomului $f = X^3 + aX^2 + bX + c$ sînt în progresie geometrică.
Dacă x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile lui f atunci avem relațiile:

$$(7)\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b, \\ x_1x_2x_3 = -c. \end{cases}$$

Cum x_1, x_2, x_3 sînt în progresie geometrică atunci $x_2^2 = x_1x_3$.
Din relația a 3-a din (7) obținem:

$$x_2^3 = -c.$$

Cum $f(x_2) = 0$, atunci $x_2^3 + ax_2^2 + bx_2 + c = 0$ de unde rezultă că $ax_2^2 + bx_2 = 0$. Deci $x_2 = 0$ sau $x_2 = -\frac{b}{a}$. Dacă $x_2 = -\frac{b}{a}$ din $x_2^3 = -c$ obținem

$$(8)\quad \boxed{a^3c - b^3 = 0}$$

Dacă $x_2 = 0$, atunci $x_1x_3 = 0$ și din relația a doua din (7) obținem $b = 0$. Cum $x_2^3 = -c$, atunci $c = 0$. Dar se observă că relația (8) este îndeplinită pentru $b = c = 0$.

3) Fie polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c$ avînd rădăcinile x_1, x_2, x_3. Notăm $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$ $(n \geqslant 1)$. Să se determine în funcție de a, b, c, expresia S_n pentru $n = 1, 2, 3, 4$.
Pentru $n = 1$ avem $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -a$.
Pentru $n = 2$, avem $S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = a^2 - 2b$.

Presupunem că $n \geqslant 3$. Cum x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile lui f avem egalitățile:

$$x_1^3 + ax_1^2 + bx_1 + c = 0,$$
$$x_2^3 + ax_2^2 + bx_2 + c = 0,$$
$$x_3^3 + ax_3^2 + bx_3 + c = 0.$$

Înmulțim prima egalitate cu x_1^{n-3}, a doua cu x_2^{n-3} și a treia cu x_3^{n-3}:

$$x_1^n + ax_1^{n-1} + bx_1^{n-2} + cx_1^{n-3} = 0,$$
$$x_2^n + ax_2^{n-1} + bx_2^{n-2} + cx_2^{n-3} = 0,$$
$$x_3^n + ax_3^{n-1} + bx_3^{n-2} + cx_3^{n-3} = 0,$$

care adunate dau:

$$(9) \quad \boxed{S_n + aS_{n-1} + bS_{n-2} + cS_{n-3} = 0}$$

Dacă în această egalitate $n = 3$, obținem:

$$S_3 + aS_2 + bS_1 + cS_0 = 0.$$

Cum $S_0 = x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 = 3$ obținem

$$S_3 = -aS_2 - bS_1 - 3c = -a(a^2 - 2b) + ab - 3c = -a^3 + 3ab - 3c.$$

În egalitatea (9) facem $n = 4$. Obținem $S_4 + aS_3 + bS_2 + cS_1 = 0$, de unde rezultă că $S_4 = -aS_3 - bS_2 - cS_1 = -a(-a^3 + 3ab - 3c) - b(a^2 - 2b) + ac = a^4 - 4a^2b + 2b^2 + 4ac$.

Relațiile lui Viète sînt folosite în numeroase probleme în care se cere să se determine ecuația, cunoscîndu-se relațiile între rădăcinile $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ adică cunoscîndu-se numerele $s_1, s_2, \ldots, s_n$ date de relațiile:

$$(10) \quad \begin{cases} s_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n, \\ s_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_n = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n. \end{cases}$$

În acest caz ecuația care are ca rădăcini pe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ este următoarea:

$$(11) \quad \boxed{x^n - s_1x^{n-1} + s_2x^{n-2} + \ldots + (-1)^n s_n = 0}$$

Într-adevăr, este clar că polinomul $g = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \ldots (X - \alpha_n)$ are ca rădăcini pe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Efectuînd calculele și ținînd cont de relațiile (10) obținem

$$g = X^n - s_1 X^{n-1} + s_2X^{n-2} + \ldots + (-1)^n s_n,$$

ceea ce arată că ecuația (11) are rădăcinile $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Exemple. 1) Fie ecuația $x^3 - 5x + 1 = 0$. Să se determine ecuația care are ca rădăcini dublul rădăcinilor ecuației date.

Să notăm cu x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației $x^3 - 5x + 1 = 0$ și cu y_1, y_2, y_3 rădăcinile ecuației pe care vrem să o determinăm.

Avem $y_1 = 2x_1$, $y_2 = 2x_2$, $y_3 = 2x_3$. Atunci $y_1 + y_2 + y_3 = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2(x_1 + x_2 + x_3) = 0$, $y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = (2x_1)(2x_2) + (2x_1)(2x_3) + (2x_2)(2x_3) = 4(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 4(-5) = -20$, $y_1y_2y_3 = 8\ x_1x_2x_3 = -8$.

Aplicînd formula (11) ecuaţia care are ca rădăcini pe y_1, y_2, y_3 este

$$x^3 - 20x + 8 = 0.$$

2) Fie ecuaţia $x^3 - x^2 + 7x + 1 = 0$. Să se determine ecuaţia care are ca rădăcini inversele rădăcinilor ecuaţiei date.

Să notăm cu x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuaţiei $x^3 - x^2 + 7x + 1$ şi cu y_1, y_2, y_3 rădăcinile ecuaţiei pe care vrem să o determinăm.

Avem

$$y_1 = \frac{1}{x_1},\ y_2 = \frac{1}{x_2},\ y_3 = \frac{1}{x_3}.$$

Atunci

$$y_1 + y_2 + y_3 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{x_1x_2x_3} = -7,$$

$$y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = \frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_1x_3} + \frac{1}{x_2x_3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1x_2x_3} = -1,$$

$$y_1y_2y_3 = \frac{1}{x_1x_2x_3} = -1.$$

Ecuaţia de gradul 3 care are ca rădăcini pe y_1, y_2, y_3 este următoarea:

$$x^3 + 7x^2 - x + 1 = 0.$$

Observaţii. 1) Presupunem că avem $f(x) = 0$, o ecuaţie algebrică de gradul n şi vrem să deducem o altă ecuaţie algebrică de gradul n, $g(y) = 0$, ale cărei rădăcini y sînt legate de rădăcinile x ale ecuaţiei $f(x) = 0$ printr-o relaţie dată $y = \varphi(x)$. În cazul acesta se poate proceda astfel.

Din relaţiile
$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ y = \varphi(x) \end{cases}$$

se elimină x şi ecuaţia care se obţine în y este ecuaţia căutată. Ca exemplificare să considerăm din nou exemplul 2). Ecuaţia este $x^3 - x^2 + 7x + 1 = 0$, iar relaţia dată este

$$y = \frac{1}{x}.$$

Din relaţiile:
$$\begin{cases} x^3 - x^2 + 7x + 1 = 0, \\ y = \dfrac{1}{x}, \end{cases}$$

eliminăm pe x. Avem $x = \dfrac{1}{y}$, care înlocuit în prima relaţie dă:

$$\frac{1}{y^3} - \frac{1}{y^2} + \frac{7}{y} + 1 = 0,$$

de unde obţinem ecuaţia $y^3 + 7y^2 - y + 1 = 0$.

2) Procedeul expus mai sus este recomandabil ori de cîte ori este posibilă eliminarea lui x din relațiile:

$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ y = \varphi(x). \end{cases}$$

În caz că această eliminare este dificilă se vor utiliza relațiile lui Viète.

Exerciții

1. Aplicînd teorema lui Bézout să se determine parametrii a și b astfel încît polinomul $X^4 - 4X^3 + 4X^2 + aX + b$ să se dividă cu $X^2 - 4X + 3$. Să se determine apoi cîtul împărțirii.
2. Să se determine rădăcinile polinomului $X^3 - 3X^2 + 2X + 6$ știind că are rădăcina $\alpha = -1$.
3. Să se determine parametrul m și apoi să se afle rădăcinile polinomului $X^3 - 6X^2 + 8X + m$ știind că are rădăcina $\alpha = 2$.
4. Să se determine parametrii a și b știind că polinomul $X^4 - 5X^3 + 8X^2 + aX + b$ are rădăcina dublă $\alpha = 1$.
5. Să se determine ecuația de gradul cel mai mic care are ca rădăcini numerele 1, 2, −2.
6. Să se determine ecuația de gradul cel mai mic care are rădăcina triplă 1 și rădăcinile simple 2 și −3.
7. Să se găsească c.m.m.d.c. al polinoamelor f și g:

   a) $f = (X-1)^5(X+1)^3(X-3)^2(X-4)$, $\quad g = (X-1)^3(X+1)^2(X-4)^5$;
   b) $f = (X^2-1)^2(X^3-1)(X-2)$, $\quad g = (X-1)^4(X-2)^5$;
   c) $f = (X^4-1)(X^3-1)(X+3)^2$, $\quad g = (X^2+1)^2(X+3)^4(X-1)$.
8. Să se arate că două polinoame nenule f și g din $\mathbf{C}[X]$ sînt prime între ele dacă și numai dacă nu au nici o rădăcină comună.
9. Dacă $f, g \in \mathbf{C}[X]$ au același grad, atunci f și g au aceleași rădăcini dacă și numai dacă polinoamele f și g au coeficienții proporționali.
10. Aplicînd teorema lui d'Alembert-Gauss să se arate că dacă $f \in \mathbf{C}[X]$ este un polinom de grad $\geqslant 2$, atunci funcția polinomului asociată

    $$\tilde{f} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}, \quad \tilde{f}(\alpha) = f(\alpha)$$

    nu este injectivă, dar este surjectivă.
11. Fie f și g două polinoame din $\mathbf{C}[X]$. Să se arate că funcțiile polinomiale $\tilde{f} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ și $\tilde{g} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ sînt egale dacă și numai dacă polinoamele f și g sînt egale.
12. Dacă $f(X)$ este un polinom arbitrar să se arate că $f(f(X)) - f(X)$ este divizibil prin $f(X) - X$.
13. Folosind teorema lui Bézout și teorema 7.3.2 să se arate că:

    a) Polinomul $(X+1)^{6n+1} + X^{6n+2}$ se divide la $X^2 + X + 1$;

    b) Polinomul $(X-1)^{n+2} - X^{2(n-1)}$ se divide la $X^2 - X + 1$;

    c) Polinomul $(X+1)^{3n+2} + X + 2$ se divide la $X^2 + 3X + 3$;

    d) Polinomul $(X^2+1)^{6n+2} + X^4 + 1$ se divide la $X^2 + X + 1$;

    e) Polinomul $X^{6n+5} + X^{3n+4} + 1$ se divide la $X^2 + X + 1$;

    f) Polinomul $(X+1)^{12n+1} + X^{3n+2}$ se divide la $X^2 + X + 1$.

14. Fie ecuaţia $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ avînd rădăcinile x_1, x_2, x_3. Să se determine ecuaţia care are rădăcinile y_1, y_2, y_3 dacă

a) $y_1 = 3x_1 + x_2 + x_3$, $y_2 = 3x_2 + x_1 + x_3$, $y_3 = 3x_3 + x_1 + x_2$;

b) $y_1 = \frac{1}{2} x_1$, $y_2 = \frac{1}{2} x_2$, $y_3 = \frac{1}{2} x_3$;

c) $y_1 = -x_1 + x_2 + x_3$, $y_2 = -x_2 + x_1 + x_3$, $y_3 = -x_3 + x_1 + x_2$;

d) $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2^2$, $y_3 = x_3^2$;

e) $y_1 = x_1 + x_2x_3$, $y_2 = x_2 + x_1x_3$, $y_3 = x_3 + x_1x_2$.

15. Să se determine parametrul m astfel ca o rădăcină a ecuaţiei $x^3 - 28x + m = 0$ să fie dublul altei rădăcini.

16. Să se determine λ astfel încît suma a două rădăcini ale ecuaţiei $2x^3 - 4x^2 - 7x + \lambda = 0$ să fie egală cu 1.

17. Să se determine relaţia între p şi q astfel încît rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale ecuaţiei $x^3 + px + q = 0$ să se găsească în relaţia $x_3 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$. Dacă $q = p$ şi $p \in \mathbf{R} - \{0\}$, să se arate că condiţia din enunţ nu poate fi îndeplinită.

18. Să se rezolve ecuaţiile algebrice

a) $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 6 = 0$.

b) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 10x + 25 = 0$,

c) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 3 = 0$,

ştiind că suma a două rădăcini este egală cu suma celorlalte două rădăcini.

19. Să se rezolve ecuaţiile algebrice
$4x^3 - 12x^2 + 11x - 3 = 0$, $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$,
ştiind că rădăcinile sale sînt în progresie aritmetică.

20. Dacă x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile polinomului

$$X^3 + a_1X^2 + a_2X + a_3,$$

să se calculeze $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ şi $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.

21. Fie ecuaţia $x^3 + 3x + 1 = 0$. Să se determine ecuaţia de gradul al treilea care are rădăcinile y_1, y_2, y_3 dacă:

a) $y_1 = \frac{x_2 + x_3}{x_1}$, $y_2 = \frac{x_3 + x_1}{x_2}$, $y_3 = \frac{x_1 + x_2}{x_3}$;

b) $y_1 = \frac{x_2x_3}{x_1} + 1$, $y_2 = \frac{x_1x_3}{x_2} + 1$, $y_3 = \frac{x_1x_2}{x_3} + 1$;

c) $y_1 = 1 + \frac{1}{x_1^2}$, $y_2 = 1 + \frac{1}{x_2^2}$, $y_3 = 1 + \frac{1}{x_3^2}$.

22. Să se arate că 1 este o rădăcină dublă pentru polinomul

$$X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1.$$

23. Să se determine ordinul de multiplicitate al rădăcinii 2 pentru polinomul

$$X^6 - 6X^5 + 12X^4 - 9X^3 + 6X^2 + 12X + 8.$$

24. Să se determine ordinul de multiplicitate al rădăcinii -1 pentru polinomul $X^5 + 6X^4 + 14X^3 + 16X^2 + 9X + 2$ şi apoi să se afle rădăcinile polinomului dat.

25. Să se determine ordinul de multiplicitate al rădăcinilor 1 şi -1 pentru polinomul

$$X^5 + X^4 - 2X^3 - 2X^2 + X + 1.$$

Sînt bine cunoscute formulele de determinare a rădăcinilor pentru ecuaţiile de gradul I şi gradul II. De asemenea se cunosc formule de rezolvare pentru ecuaţia de gradul III (numite *formulele lui Cardano*) precum şi pentru ecuaţia de gradul IV. Inconvenientul acestor formule (pentru ecuaţiile de gradele III şi IV) constă în aceea că sînt foarte complicate şi nu au nici o utilizare practică. Am văzut prin teorema lui Abel-Ruffini că pentru ecuaţia generală de grad $\geqslant 5$ nu se pot da formule de determinare a rădăcinilor prin radicali.

Ceea ce ne propunem în acest paragraf este de a arăta că există ecuaţii de grad $\geqslant 3$ pentru care se pot da formule de determinare a rădăcinilor lor.

Ecuaţii binome. Forma ecuaţiilor binome este

$$x^n - a = 0 \ (a \in \mathbf{C},\ n \geqslant 1). \tag{1}$$

Rezolvarea acestor ecuaţii este făcută în manualul de Geometrie. Se procedează astfel: se scrie numărul a sub formă trigonometrică, $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Atunci soluţiile ecuaţiei (1) sînt date de formula

$$x = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

unde $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Trebuie să observăm că rezolvarea ecuaţiilor de gradele I şi II se reduce la rezolvarea unor ecuaţii binome.

Ideea de rezolvare a ecuaţiilor de grad $\geqslant 3$ este de a o reduce la rezolvarea succesivă a unui număr de ecuaţii simple (de regulă ecuaţii binome).

Ecuaţii bipătrate. Forma generală a ecuaţiilor bipătrate este:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \tag{2}$$

unde $a, b, c \in \mathbf{C}$ şi $a \neq 0$.

Rezolvarea ecuaţiei (2) se face astfel.

Se face substituţia $x^2 = y$ şi obţinem ecuaţia de gradul doi

$$ay^2 + by + c = 0. \tag{3}$$

Ecuaţia (3) se numeşte *rezolvanta* ecuaţiei (2) şi rădăcinile ei sînt:

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ şi } y_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Din egalitatea $x^2 = y$ obţinem ecuaţiile

$$x^2 = y_1 \text{ şi } x^2 = y_2.$$

Ecuaţia $x^2 = y_1$ are rădăcinile:

$$x_1 = \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}, \quad x_2 = -\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Ecuația $x^2 = y_2$ are rădăcinile

$$x_3 = \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}, \quad x_4 = -\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Numerele x_1, x_2, x_3, x_4 sînt rădăcinile ecuației (2).

Rădăcinile ecuației (2) pot fi cuprinse în formula

$$\boxed{x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}} \tag{4}$$

numită *formula de rezolvare* a ecuației bipătrate.

Observație. În formula de rezolvare a ecuației bipătrate apar radicali de forma $\sqrt{A + \sqrt{B}}$. Acești radicali pot fi aduși la o sumă sau diferență de radicali mai simpli utilizînd formula

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}} \tag{5}$$

($A^2 \geqslant B$, $B \geqslant 0$) (această formulă se verifică direct prin ridicare la pătrat).

Exemple. 1) Să rezolvăm ecuația bipătrată

$$x^4 + 5x^2 - 6 = 0.$$

Facem substituția $x^2 = y$ și obținem ecuația rezolventă

$$y^2 + 5y - 6 = 0$$

care are rădăcinile $y_1 = -6$ și $y_2 = 1$.

Rădăcinile ecuației bipătrate sînt:

$$x_1 = i\sqrt{6}, \quad x_2 = -i\sqrt{6}, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = -1.$$

2) Să rezolvăm ecuația bipătrată

$$x^4 - 8x^2 + 9 = 0.$$

Făcînd substituția $x^2 = y$ obținem ecuația rezolventă

$$y^2 - 8y + 9 = 0,$$

care are rădăcinile $y_1 = 4 + \sqrt{7}$ și $y_2 = 4 - \sqrt{7}$.

Rădăcinile ecuației bipătrate sînt:

$$x_1 = \sqrt{4 + \sqrt{7}}; \quad x_2 = -\sqrt{4 + \sqrt{7}}; \quad x_3 = \sqrt{4 - \sqrt{7}}; \quad x_4 = -\sqrt{4 - \sqrt{7}}.$$

Dar, folosind formulele (5) de transformare a radicalilor dubli obținem:

$$\sqrt{4 + \sqrt{7}} = \sqrt{\frac{4 + \sqrt{16 - 7}}{2}} + \sqrt{\frac{4 - \sqrt{16 - 7}}{2}} = \sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{7} + 1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{și} \quad \sqrt{4 - \sqrt{7}} = \sqrt{\frac{4 + \sqrt{16 - 7}}{2}} - \sqrt{\frac{4 - \sqrt{16 - 7}}{2}} = \frac{\sqrt{7} - 1}{\sqrt{2}}.$$

Deci $x_1 = \dfrac{\sqrt{7} + 1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = -\dfrac{\sqrt{7} + 1}{\sqrt{2}}$, $x_3 = \dfrac{\sqrt{7} - 1}{\sqrt{2}}$, $x_4 = -\dfrac{\sqrt{7} - 1}{\sqrt{2}}$.

Ecuații reciproce. O ecuație de forma

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \quad (a_n \neq 0),$$

avînd proprietatea $a_{n-i} = a_i$ oricare ar fi i $(0 \leqslant i \leqslant n)$, se numește *ecuație reciprocă de gradul n* (altfel spus, o ecuație este reciprocă dacă coeficienții termenilor egal depărtați de extremi sînt egali).

Observație. Pe noi ne interesează numai rezolvarea ecuațiilor reciproce de grad $\geqslant 3$.

Dacă $n = 3$ obținem forma generală a ecuației reciproce de gradul 3:

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 \quad (a \neq 0).$$

Dacă $n = 4$, obținem forma generală a ecuației reciproce de gradul 4:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \quad (a \neq 0).$$

Dacă $n = 5$, obținem forma generală a ecuației de gradul 5:

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \quad (a \neq 0).$$

Să dăm cîteva proprietăți generale pentru ecuațiile reciproce de gradul n:

1° *Dacă ecuația reciprocă are rădăcina α, atunci ea are și rădăcina $\frac{1}{\alpha}$.*

Într-adevăr, dacă $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$ este o ecuație reciprocă avînd rădăcina α, atunci $a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0$. Cum $\alpha \neq 0$ (în caz contrar, ar rezulta $a_0 = 0$ și deci $a_n = 0$) putem să împărțim cu α^n și obținem relația

$$a_n + a_{n-1}\frac{1}{\alpha} + ... + a_2\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-2} + a_1\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1} + a_0\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n = 0.$$

Ținînd cont de faptul că $a_i = a_{n-i}$ oricare ar fi i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ obținem

$$a_n\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1} + ... + a_1\frac{1}{\alpha} + a_0 = 0$$

și deci și $\frac{1}{\alpha}$ este de asemenea rădăcină.

2° *Orice ecuație reciprocă de grad impar are rădăcina $x = -1$.*

Într-adevăr fie

$$f(x) = a_{2p+1}x^{2p+1} + a_{2p}x^{2p} + ... + a_{p+1}x^{p+1} + a_px^p + ... + a_1x + a_0 = 0,$$

o ecuație reciprocă de grad impar $n = 2p + 1$.

Înlocuind $x = -1$, obținem în membrul stîng numărul

$$f(-1) = a_{2p+1}(-1)^{2p+1} + a_{2p}(-1)^{2p} + ... + a_{p+1}(-1)^{p+1} + a_p(-1)^p + ...$$
$$... + a_1(-1) + a_0 = -a_{2p+1} + a_{2p} + ... + a_{p+1}(-1)^{p+1} + a_p(-1)^p + ...$$
$$... + (-a_1) + a_0.$$

Cum $a_0 = a_{2p+1}$, $a_1 = a_{2p}$, $a_2 = a_{2p-1}$, ..., $a_p = a_{p+1}$, atunci grupînd termenii egal depărtați de extremi obținem

$$f(-1) = (a_0 - a_{2p+1}) + (a_{2p} - a_1) + (a_2 - a_{2p-1}) + ... + (-1)^p(a_p - a_{p+1}) = 0.$$

Rezultă că $x = -1$ este rădăcină pentru ecuația reciprocă de grad impar.

3° *Orice ecuație reciprocă de grad impar*

$$f(x) = a_{2p+1}x^{2p+1} + a_{2p}x^{2p} + \dots + a_1x + a_0 = 0,$$

se reduce la rezolvarea ecuației $x + 1 = 0$ și a *unei ecuații reciproce de grad par*,

$$g(x) = b_{2p}x^{2p} + b_{2p-1}x^{2p-1} + \dots + b_1x + b_0 = 0.$$

Într-adevăr, din 2° ecuația $f(x) = 0$ are rădăcina $x = -1$. Conform teoremei lui Bézout putem scrie

$$f(x) = (x + 1)g(x).$$

Presupunem că $g(x) = b_{2p}x^{2p} + b_{2p-1}x^{2p-1} + \dots + b_1x + b_0$. Deci

$$a_{2p+1}x^{2p+1} + a_{2p}x^{2p} + \dots + a_1x + a_0 =$$
$$= (x + 1) \cdot (b_{2p}x^{2p} + b_{2p-1}x^{2p-1} + \dots + b_1x + b_0),$$

de unde obținem

$$a_{2p+1} = b_{2p},\ a_0 = b_0,$$
$$a_{2p} = b_{2p} + b_{2p-1},\ a_1 = b_1 + b_0,$$
$$a_{2p-1} = b_{2p-1} + b_{2p-2},\ a_2 = b_2 + b_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Cum $a_i = a_{2p+1-i}$, oricare ar fi $i(0 \leqslant i \leqslant 2p + 1)$ obținem din primele egalități $b_0 = b_{2p}$. Cum $b_{2p} + b_{2p-1} = b_1 + b_0$ obținem $b_1 = b_{2p-1}$. Din următoarele egalități obținem că $b_2 = b_{2p-2}$.
Procedînd la fel, din egalitățile următoare deducem în final că $b_i = b_{2p-i}$ oricare ar fi $0 \leqslant i \leqslant 2p$.
Deci ecuația $b_{2p}x^{2p} + b_{2p-1}x^{2p-1} + \dots + b_1x + b_0 = 0$ este reciprocă.

Rezolvarea ecuației reciproce de gradul III

Am văzut că forma generală a ecuației reciproce de gradul III este:

$$(1) \qquad ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 \ (a \neq 0).$$

Această ecuație are rădăcina $x = -1$. Atunci putem să scriem

$$(x + 1)[ax^2 + (b - a)x + a] = 0.$$

Ecuația (1) admite rădăcinile

$x_1 = -1$ și x_2, x_3 date de ecuația $ax^2 + (b - a)x + a = 0$.

Exemplu. Să rezolvăm ecuația $2x^3 + x^2 + x + 2 = 0$. Această ecuație este o ecuație reciprocă de gradul III. Ea se scrie

$$(x + 1)(2x^2 - x + 2) = 0$$

care are rădăcinile $x_1 = -1$ și x_2, x_3 care sînt rădăcinile ecuației $2x^2 - x + 2 = 0$, adică

$$x_2 = \frac{1 + i\sqrt{15}}{4},\ x_3 = \frac{1 - i\sqrt{15}}{4}.$$

Rezolvarea ecuației reciproce de gradul IV

Am văzut că forma generală a ecuației reciproce de gradul IV este:

$$(1) \qquad ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0, \quad (a \neq 0).$$

Cum $a \neq 0$, ecuația (1) nu admite ca rădăcină pe $x = 0$. În (1) împărțim cu x^2 și obținem ecuația

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$$

sau grupînd termenii în mod convenabil avem:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Facem substituția $y = x + \frac{1}{x}$. Cum $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ obținem ecuația în y

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0 \text{ sau } (2) \ ay^2 + by + c - 2a = 0.$$

Ecuația (2) se numește *rezolvanta* ecuației (1).

Dacă y_1, y_2 sînt rădăcinile ecuației (2) atunci obținem două ecuații:

$$x + \frac{1}{x} = y_1 \quad \text{și} \quad x + \frac{1}{x} = y_2$$

sau $\qquad (3) \ x^2 - y_1x + 1 = 0$

și $\qquad (4) \ x^2 - y_2x + 1 = 0.$

Dacă x_1, x_2 sînt rădăcinile ecuației (3) și x_3, x_4 sînt rădăcinile ecuației (4) atunci x_1, x_2, x_3, x_4 sînt rădăcinile ecuației (1).

Exemplu. Să se rezolve ecuația

$$6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0.$$

Această ecuație este o ecuație reciprocă de gradul IV. Împărțim cu x^2 și obținem:

$$6x^2 + 5x - 38 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} = 0$$

sau

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0.$$

Notăm $y = x + \frac{1}{x}$. Cum $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ obținem ecuația

$$6(y^2 - 2) + 5y - 38 = 0$$

sau

$$6y^2 + 5y - 50 = 0,$$

care are rădăcinile $y_1 = -\frac{10}{3}$ și $y_2 = \frac{5}{2}$.

Avem ecuațiile:

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{10}{3} \text{ și } x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}.$$

Prima ecuație are rădăcinile

$$x_1 = -3, \quad x_2 = -\frac{1}{3}.$$

Ecuația a doua are rădăcinile $x_3 = 2$, $x_4 = \frac{1}{2}$.

Deci $x_1 = -3$, $x_2 = -\frac{1}{3}$, $x_3 = 2$, $x_4 = \frac{1}{2}$ sînt rădăcinile ecuației date.

Rezolvarea ecuației reciproce de gradul V

Forma generală a ecuației de gradul V este

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0.$$

Deoarece această ecuație este de grad impar, din proprietatea 3° rezolvarea acestei ecuații se reduce la rezolvarea ecuației $x + 1 = 0$ și a unei ecuații reciproce de gradul IV.

Exemplu. Să se rezolve ecuația

$$6x^5 + x^4 - 43x^3 - 43x^2 + x + 6 = 0.$$

Această ecuație este o ecuație reciprocă de gradul V.

Deoarece este de grad impar această ecuație admite soluția $x = -1$.

Putem scrie:

$$6x^5 + x^4 - 43x^3 - 43x^2 + x + 6 = (x + 1)(6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6).$$

Deci obținem ecuația reciprocă de gradul IV:

$$6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Împărțind cu x^2 obținem:

$$6x^2 - 5x - 38 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} = 0.$$

Facem substituția $y = x + \frac{1}{x}$. Obținem ecuația de gradul II

$6y^2 - 5y - 50 = 0$ care are soluțiile $y_1 = -\frac{5}{2}$, $y_2 = \frac{10}{3}$.

Din ecuația $x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}$ obținem $x_2 = -2$, $x_3 = -\frac{1}{2}$.

Din ecuația $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$ obținem $x_4 = 3$, $x_5 = \frac{1}{3}$.

Deci ecuația dată are rădăcinile

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = -\frac{1}{2}, \quad x_4 = 3, \quad x_5 = \frac{1}{3}.$$

Observații. 1) Am văzut că ecuația reciprocă de gradul IV se reduce la rezolvarea unor ecuații de gradul II, făcînd substituția $x + \frac{1}{x} = y$. Se poate arăta (exercițiul 10), folosind binomul lui Newton, că orice ecuație reciprocă de gradul $n = 2p$

se reduce, folosind aceeaşi substituţie $x + \frac{1}{x} = y$, la rezolvarea unei ecuaţii de gradul p şi a p ecuaţii de gradul II.

2) *În unele manuale mai vechi sînt numite ecuaţii reciproce şi ecuaţiile de forma*

$$(1) \qquad a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

avînd proprietatea următoare:

$$a_i = -a_{n-i} \text{ oricare ar fi } i,\ 0 \leqslant i \leqslant n.$$

Se observă imediat că dacă $n = 2p$ (număr par) atunci din $a_p = -a_{2p-p}$ obţinem $a_p = -a_p$ şi deci $a_p = 0$.

Orice ecuaţie reciprocă de tipul (1) are ca rădăcină pe $x = 1$. Atunci, conform teoremei lui Bézout putem scrie:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = (x-1)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0) \text{ sau}$$

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - b_{n-1})x^{n-1} + (b_{n-3} - b_{n-2})x^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + (b_0 - b_1)x - b_0$$

de unde obţinem egalităţile:

$$a_n = b_{n-1},\ a_0 = -b_0,$$
$$a_{n-1} = b_{n-2} - b_{n-1},\ a_1 = b_0 - b_1,$$
$$a_{n-2} = b_{n-3} - b_{n-2},\ a_2 = b_1 - b_2.$$

Din prima egalitate, cum $a_0 = -a_n$, obţinem $b_0 = b_{n-1}$.
Din a doua egalitate, cum $a_1 = -a_{n-1}$, obţinem $b_1 = b_{n-2}$.
Din a treia egalitate, cum $a_2 = -a_{n-2}$, obţinem $b_2 = b_{n-3}$.
Continuînd astfel obţinem că $b_i = b_{(n-1)-i}$ oricare ar fi i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, ceea ce ne arată că ecuaţia

$$b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0 = 0$$

este o ecuaţie reciprocă.

În concluzie orice ecuaţie

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

avînd proprietatea că $a_i = -a_{n-i} (0 \leqslant i \leqslant n)$, *se reduce la rezolvarea unei ecuaţii reciproce de gradul* $n-1$.

Exerciţii

1. Să se rezolve ecuaţiile bipătrate

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$; b) $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$;

c) $x^4 - (1 + \sqrt{2})x^2 + \sqrt{2} = 0$; d) $x^4 - 4x^2 + 1 = 0$;

e) $x^4 - 6x^2 + 6 = 0$; f) $6x^4 - 5x^2 + 1 = 0$;

g) $32x^4 - 12x^2 + 1 = 0$; h) $x^4 - 1 = 0$.

2. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^2 + \left(\frac{12}{x}\right)^2 = 40$; b) $\sqrt{2x^3 + 7x^2 - 5} = x^2 + x$;

c) $\sqrt{x^2 + 3} = 4 - 2x^2$; d) $x^2 - \left(\frac{6}{x}\right)^2 = 5$.

3. Să se determine ecuația de gradul IV, avînd ca rădăcini:

a) $x_1 = -4,\ x_2 = 4,\ x_3 = -3,\ x_4 = 3$;

b) $x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = -\frac{1}{6},\ x_4 = \frac{1}{6}$;

c) $x_1 = -3i,\ x_2 = 3i,\ x_3 = -2i,\ x_4 = 2i$;

d) $x_1 = -2,\ x_2 = 2,\ x_3 = -5,\ x_4 = 5$.

4. Să se determine natura rădăcinilor ecuațiilor:

a) $x^4 - 2(m-2)x^2 - m^2 = 0$; b) $4x^4 + mx^2 + 9 = 0$;

c) $mx^4 + 4x^2 + 1 = 0$; d) $m^4x^4 - 2(2m^2 + 3)x^2 + 1 = 0$;

e) $3x^4 - 5mx^2 - 2m^2 = 0$; f) $x^2(2x^2 + 5) - m(x^2 + 3) = 3$.

5. Să se rezolve ecuația

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

și apoi să se aplice formula pentru cazurile particulare

a) $x^6 + 15x^3 - 16 = 0$; b) $x^8 + 2x^4 - 3 = 0$;

c) $x^6 - 7x^3 + 6 = 0$; d) $x^8 + 12x^2 - 13 = 0$.

6. Să se rezolve ecuațiile de gradul III:

a) $5x^3 + 31x^2 + 31x + 5 = 0$; b) $2x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$;

c) $5x^3 - 31x^2 + 31x - 5 = 0$; d) $2x^3 - x^2 + x - 2 = 0$;

e) $x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 0$; f) $3x^3 + 2x^2 + 2x + 3 = 0$;

g) $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$; h) $2x^3 + 5x^2 + 5x + 2 = 0$.

7. Să se determine relația între a și b astfel încît ecuația reciprocă de gradul III $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$ ($a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$) să aibă:

i) două rădăcini egale,

ii) toate rădăcinile reale,

iii) două rădăcini complexe.

8. Să se rezolve ecuațiile reciproce de gradul IV:

a) $2x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 7x + 2 = 0$;

b) $x^4 + x^3 - 18x^2 + x + 1 = 0$;

c) $4x^4 - x^3 + 5x^2 - x + 4 = 0$;

d) $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$;

e) $x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 1 = 0$;

f) $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$;

g) $x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 1 = 0$.

9. Să se determine numărul real a astfel încît ecuația:

$$x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + 1 = 0,$$

să aibă toate rădăcinile reale.

10. Să se arate că orice ecuație reciprocă de gradul $n = 2p$ se reduce la rezolvarea unei ecuații de gradul p și a p ecuații de gradul doi.

11. Să se rezolve ecuațiile reciproce de gradul V:

a) $20x^5 - 81x^4 + 62x^3 + 62x^2 - 81x + 20 = 0$;

b) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$;

c) $5x^5 - 4x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 4x + 5 = 0$.

§ 9. Polinoame cu coeficienți reali

Teorema 9.1. Fie f un polinom nenul cu coeficienți reali. Dacă $\alpha = a + ib$, $(b \neq 0)$ este o rădăcină complexă a lui f, atunci:
1° $\bar{\alpha} = a - ib$ este de asemenea o rădăcină a lui f,
2° α și $\bar{\alpha}$ au același ordin de multiplicitate.

Demonstrație. 1° Am văzut în § 4 (proprietatea iii)) că $f(\bar{\alpha}) = \overline{f(\alpha)}$. Cum $f(\alpha) = 0$, atunci $f(\bar{\alpha}) = 0$ și deci $\bar{\alpha}$ este o rădăcină a lui f.

2° Presupunem că m este ordinul de multiplicitate a lui α. Rezultă că există un polinom g astfel încît $f = (X - \alpha)^m g$ și $g(\alpha) \neq 0$. Cum $b \neq 0$, atunci $\alpha \neq \bar{\alpha}$. Cum $f(\bar{\alpha}) = 0$, atunci $(\bar{\alpha} - \alpha)^m g(\bar{\alpha}) = 0$ de unde obținem că $g(\bar{\alpha}) = 0$. Din teorema lui Bézout obținem că există un polinom g_1 astfel încît

$g = (X - \bar{\alpha})g_1$. Deci $f = (X - \alpha)^m g = (X - \alpha)^m (X - \bar{\alpha})g_1 = (X - \alpha)(X - \bar{\alpha})(X - \alpha)^{m-1}g_1 = [X^2 - (\alpha + \bar{\alpha})X + \alpha\bar{\alpha}](X - \alpha)^{m-1}g_1$. Cum $\alpha + \bar{\alpha} = 2a$ și $\alpha\bar{\alpha} = a^2 + b^2$ atunci

$f = (X^2 - 2aX + a^2 + b^2)(X - \alpha)^{m-1}g_1$. Cum polinomul $X^2 - 2aX + a^2 + b^2$ are coeficienți reali deducem că polinomul $f_1 = (X - \alpha)^{m-1}g_1$ are coeficienți reali. Putem să scriem

$$f = (X^2 - 2aX + a^2 + b^2)f_1.$$

Dacă $m > 1$ continuăm procedeul cu polinomul f_1. Cum f_1 are rădăcina α atunci exact ca mai sus există un polinom g_2 astfel încît $f_1 = (X^2 - 2aX + a^2 + b^2)(X - \alpha)^{m-2}g_2$. Deci $f = (X^2 - 2aX + a^2 + b^2)(X - \alpha)^{m-2}g_2$ și polinomul $f_2 = (X - \alpha)^{m-2}g_2$ are coeficienți reali.
Dacă $m > 2$ atunci α este rădăcină pentru f_2 și continuăm procedeul cu f_2.

În felul acesta după m pași obținem un polinom h cu coeficienți reali astfel încît

$$f = (X^2 - 2aX + a^2 + b^2)^m h = (X - \alpha)^m (X - \bar{\alpha})^m h.$$

Din această egalitate rezultă că $(X - \bar{\alpha})^m \mid f$. De asemenea $(X - \bar{\alpha})^{m+1}$ nu divide pe f, deoarece în caz contrar am avea că $h(\bar{\alpha}) = 0$. Cum h are coeficienți reali atunci $\alpha = \bar{\bar{\alpha}}$ este de asemenea o rădăcină a lui h și deci $X - \alpha \mid h$. Dar atunci $(X - \alpha)^{m+1} \mid f$ ceea ce contrazice faptul că α are ordinul de multiplicitate m.

În concluzie $\bar{\alpha}$ este o rădăcină cu ordinul de multiplicitate m. Această teoremă este foarte utilă în multe aplicații cînd se cere determinarea rădăcinilor unui polinom (ecuații algebrice) și cînd se cunoaște o rădăcină complexă a sa.

Exemple

1) Să se determine rădăcinile polinomului
$f = X^4 - 3X^3 - X^2 + 9X - 18$, ştiind că admite rădăcina $\alpha_1 = 1 + i\sqrt{2}$.

Conform teoremei 9.1 polinomul va avea ca rădăcină şi pe $\alpha_2 = 1 - i\sqrt{2}$, deci se va divide cu

$$(X - 1 - i\sqrt{2})(X - 1 + i\sqrt{2}) = X^2 - 2X + 3.$$

Efectuînd împărţirea lui f prin $X^2 - 2X + 3$ se obţine descompunerea

$$f = (X^2 - 2X + 3)(X^2 - X - 6).$$

Polinomul $g = X^2 - X - 6$ are rădăcinile $\alpha_3 = -2$, $\alpha_4 = 3$.

2) Să se arate că polinomul $f = (1 + X)^{6k+1} - (1 + X)^{6k+2} - 1$ este divizibil cu $X^2 + X + 1$.

Rădăcinile lui $X^2 + X + 1$ sînt $\alpha = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ şi $\beta = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$. Pentru a arăta că f se divide cu $X^2 + X + 1 = (X - \alpha)(X - \beta)$ trebuie să arătăm că $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Dar cum $\beta = \bar{\alpha}$ este suficient să dovedim că $f(\alpha) = 0$. Într-adevăr

$$f(\alpha) = (1 + \alpha)^{6k+1} - (1 + \alpha)^{6k+2} - 1.$$

Dar $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ şi deci $1 + \alpha = -\alpha^2$. Obţinem atunci $f(\alpha) = (-\alpha^2)^{6k+1} - (-\alpha^2)^{6k+2} - 1 = -\alpha^{12k+2} - \alpha^{12k+4} - 1 = -(\alpha^3)^{4k} \cdot \alpha^2 - (\alpha^3)^{4k} \cdot \alpha^4 - 1$.
Cum $\alpha^3 = 1$ avem că $f(\alpha) = -\alpha^2 - \alpha^4 - 1 = -\alpha^2 - \alpha \cdot \alpha^3 - 1 = -\alpha^2 - \alpha - 1 = -(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0$.

Deci $f(\alpha) = 0$, ceea ce trebuia dovedit.

3) Fie polinomul $f = X^6 + X^5 + 3X^4 + 2X^3 + 3X^2 + mX + 1$. Să se determine m ştiind că admite ca rădăcină pe i şi apoi să se găsească celelalte rădăcini.

Cum i este rădăcină trebuie să avem că $f(i) = 0$. Deci $i^6 + i^5 + 3i^4 + 2i^3 + 3i^2 + mi + 1 = 0$ de unde obţinem că $-1 + i + 3 - 2i - 3 + mi + 1 = 0$ sau $(m - 1)i = 0$ şi deci $m = 1$. Cum f are ca rădăcină pe i rezultă că are ca rădăcină şi pe $-$ i. Deci f se divide cu produsul $(X - i)(X + i) = X^2 + 1$. Deci $f = (X^2 + 1)(X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1)$.

Ecuaţia $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ este o ecuaţie reciprocă de gradul IV. Împărţim cu x^2 şi obţinem

$$x^2 + x + 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

Notăm $y = x + \dfrac{1}{x}$; obţinem ecuaţia de gradul II în y:

$$y^2 + y = 0$$

care are rădăcinile $y_1 = 0$ şi $y_2 = -1$.

Ecuaţia $x + \dfrac{1}{x} = 0$ are rădăcinile $x_3 = i$, $x_4 = -i$.

Ecuaţia $x + \frac{1}{x} = -1$ are rădăcinile $x_5 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $x_6 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Deci polinomul f are ca rădăcini:

$x_1 = i$, $x_2 = -i$, $x_3 = i$, $x_4 = -i$, $x_5 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $x_6 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Rădăcinile i şi $-i$ sînt duble.

În continuare vom da cîteva consecinţe ale teoremei 9.1.

Consecinţa 9.2. **Orice polinom cu coeficienţi reali are un număr par de rădăcini complexe (care nu sînt numere reale).**

Din această consecinţă rezultă imediat:

Consecinţa 9.3. **Orice polinom cu coeficienţi reali de grad impar are cel puţin o rădăcină reală.**

Teorema 9.4. **Orice polinom $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ de grad ≥ 1 cu coeficienţi reali este un produs de polinoame de gradul I sau gradul II cu coeficienţi reali, adică poate fi scris sub forma**

(1) $f = a_n(X-\alpha_1)^{k_1} \ldots (X-\alpha_p)^{k_p} (X^2 + b_1 X + c_1)^{k_1} \ldots (X^2 + b_s X + c_s)^{k_s}$ unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in \mathbf{R}$ şi $b_1^2 - 4c_1 < 0, \ldots, b_s^2 - 4c_s < 0$.

Demonstraţie. Conform consecinţei 7.3.4 f are descompunerea

(2) $f = a_n(X-\alpha_1)^{k_1}(X-\alpha_2)^{k_2} \ldots (X-\alpha_n)^{k_n}$ unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sînt rădăcinile lui f. Presupunem că $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sînt toate rădăcinile reale ale lui f. Rădăcinile $\alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_n$ sînt complexe. Luăm rădăcina α_{p+1} care are ordinul de multiplicitate k_{p+1}. Cum $\bar{\alpha}_{p+1}$ este o rădăcină a lui f, există o rădăcină $\alpha_{p+i} (i \geq 2)$ astfel încît $\alpha_{p+i} = \bar{\alpha}_{p+1}$. După teorema 9.1 avem $k_{p+1} = k_{p+i}$. În descompunerea (2) grupăm factorul $(X-\alpha_{p+1})^{k_{p+1}}$ cu factorul

$$(X - \alpha_{p+i})^{k_{p+i}} = (X - \bar{\alpha}_{p+1})^{k_{p+1}}.$$

Notăm $r_1 = k_{p+1}$, $b_1 = -(\alpha_{p+1} + \bar{\alpha}_{p+1})$ şi $c_1 = \alpha_{p+1} \cdot \bar{\alpha}_{p+1}$.

Atunci în descompunerea (2) apare factorul

$(X-\alpha_{p+1})^{k_{p+1}}(X-\bar{\alpha}_{p+1})^{k_{p+1}} = (X^2 + b_1X + c_1)^{r_1}$, unde $b_1, c_1 \in \mathbf{R}$. Dacă în continuare procedăm la fel cu toate rădăcinile complexe ale lui f descompunerea (2) a lui f se scrie sub forma (1).

Exerciţii

1. Să se arate că dacă $a \neq b$, polinomul $f = aX^3 + X^2 + bX + 1$ nu are rădăcinile $\pm i$.

2. Să se determine a şi b şi apoi să se rezolve ecuaţia

$$x^4 - 7x^3 + 21x^2 + ax + b = 0, \; a, b \in \mathbf{R},$$

ştiind că $1 + 2i$ este rădăcină a ecuaţiei.

3. Fie ecuația

$x^4 + (2a + 1)\,x^3 + 2(a + 1)^2x^2 + bx + c = 0$, a, b, $c \in \mathbf{R}$ cu $a \geqslant 0$. Să se arate că această ecuație admite cel mult două rădăcini reale.

4. Să se determine rădăcinile polinomului

$$f = X^6 + X^5 + 3X^4 + 2X^3 + 3X^2 + X + 1$$

știind că admite rădăcina i.

5. Să se rezolve ecuația

$$x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 4x + 2 = 0$$

știind că admite rădăcina $1 + \mathrm{i}$.

6. Să se rezolve ecuația

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5 = 0$$

știind că admite rădăcina $2 - \mathrm{i}$.

7. Fie ecuația

$$x^4 - \alpha x^3 - \alpha x + 1 = 0 \text{ cu } \alpha \in \mathbf{R} \text{ și } |\alpha| < 1.$$

Să se arate că toate rădăcinile sînt de modul 1.

8. Să se determine m și n și apoi să se rezolve ecuația

$$x^4 - x^3 + mx^2 + 2x + n = 0$$

știind că admite rădăcina $1 + \mathrm{i}$.

9. Știind că polinomul $f = 3X^4 - 5X^3 + 3X^2 + 4X - 2$ are rădăcina $1 + \mathrm{i}$, să se găsească celelalte rădăcini și să se descompună polinomul f în produs de polinoame de gradul I și II cu coeficienți reali.

10. Să se descompună polinomul $f = X^4 + X^2 + 1$ în factori cu coeficienți reali.

11. Să se descompună în factori cu coeficienți reali polinomul $X^4 + 1$.

12. Fie f și g două polinoame nenule cu coeficienți reali. Dacă polinomul $f(X^3) + Xg(X^3)$ este divizibil cu $X^2 + X + 1$, atunci f și g au rădăcina 1.

13. Fie f și g două polinoame nenule cu coeficienți reali. Dacă polinomul $f(X^3) + X^ng(X^3)$, este divizibil cu $X^2 + X + 1$, unde n este un număr natural care nu este divizibil cu 3, atunci f și g au rădăcina 1.

14. Să se determine polinoamele cu coeficienți reali de gradul cel mai mic care au ca rădăcini:

a) rădăcina dublă 2 și rădăcina simplă $1 + \mathrm{i}$,

b) rădăcina dublă i și rădăcina dublă $2 - \mathrm{i}$,

c) rădăcina triplă $-1 - \mathrm{i}$ și rădăcinile simple 1 și -1.

15. Să se rezolve ecuația

$$(x + \mathrm{i})^n + (x - \mathrm{i})^n = 0$$

și să se arate că are toate rădăcinile reale.

16. Să se arate că polinomul

$$X^{4a} + X^{4b+1} + X^{4c+2} + X^{4d+3}$$

a, b, c, d fiind numere naturale, este divizibil prin $X^3 + X^2 + X + 1$.

§ 10. Polinoame cu coeficienţi raţionali şi polinoame cu coeficienţi întregi

Teorema 10.1. Fie f un polinom nenul cu coeficienţi raţionali şi $a+\sqrt{b}$ (cu $a, b \in \mathbf{Q}$, $b>0$ şi $\sqrt{b} \notin \mathbf{Q}$) o rădăcină a lui f.
Atunci:
1° $a-\sqrt{b}$ este de asemenea o rădăcină a lui f;
2° $a+\sqrt{b}$ şi $a-\sqrt{b}$ au acelaşi ordin de multiplicitate.

Demonstraţie. 1° Conform proprietăţii iv) din § 4, avem $f(a \pm \sqrt{b}) = A \pm B\sqrt{b}$. Însă $f(a+\sqrt{b})=0$, deci $A+B\sqrt{b}=0$. Dacă $B \neq 0$ atunci $\sqrt{b} = -\frac{A}{B} \in \mathbf{Q}$. Dar $\sqrt{b} \notin \mathbf{Q}$; deci trebuie ca $B=0$. Cum $A+B\sqrt{b}=0$ obţinem că $A=0$. În acest caz $f(a-\sqrt{b}) = A - B\sqrt{b} = 0$, şi deci $a-\sqrt{b}$ este de asemenea o rădăcină a lui f.

2° Presupunem că $a+\sqrt{b}$ este o rădăcină a lui f avînd ordinul de multiplicitate m. Deci

$$f=[X-(a+\sqrt{b})]^m g \text{ şi } g(a+\sqrt{b}) \neq 0.$$

Cum $a-\sqrt{b}$ este o rădăcină a lui f avem $f(a-\sqrt{b})=0$ şi deci

$$[a-\sqrt{b}-(a+\sqrt{b})]^m g(a-\sqrt{b})=0$$

sau

$$(-2\sqrt{b})^m g(a-\sqrt{b})=0.$$

Cum $b \neq 0$, atunci trebuie ca $g(a-\sqrt{b})=0$.
Din teorema lui Bézout putem scrie $g=[X-(a-\sqrt{b})]g_1$, şi deci $f=[X-(a+\sqrt{b})]^m[X-(a-\sqrt{b})]g_1 = [X^2-2aX+a^2-b]\cdot[X-(a+\sqrt{b})]^{m-1}g_1$.
Cum $X^2-2aX+a^2-b$ este un polinom cu coeficienţi raţionali, rezultă că polinomul $f_1=[X-(a+\sqrt{b})]^{m-1}g_1$ are coeficienţi raţionali. În continuare se procedează exact ca în teorema 9.1.
Se obţine că $a-\sqrt{b}$ este o rădăcină avînd ordinul de multiplicitate m.

Observaţii. 1) Teorema 10.1 se aplică numai atunci cînd polinomul cu coeficienţi raţionali are o *rădăcină pătratică*, adică un număr real de forma $a \pm \sqrt{b}$ unde $b>0$ şi $\sqrt{b}$ nu este un număr raţional.

2) Teorema 10.1 nu mai este adevărată cînd polinomul f nu are coeficienţi raţionali. De exemplu, polinomul $f = X^2 - (\sqrt{2}+\sqrt{3})X + (\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-1)$ are coeficienţi nu toţi numere raţionale. Rădăcinile lui f sînt $1+\sqrt{2}$ şi $\sqrt{3}-1$. Se observă că f nu are şi rădăcina $1-\sqrt{2}$.

Exemple. 1) Să se găsească rădăcinile polinomului $f = X^4-4X^3+X^2+6X+2$ ştiind că admite rădăcina $1-\sqrt{2}$. Din teorema 10.1 rezultă că f are şi rădăcina $1+\sqrt{2}$. Deci f se divide cu produsul $[X-(1-\sqrt{2})][X-(1+\sqrt{2})] = X^2-2X-1$. Efectuînd împărţirea lui f cu X^2-2X-1, f se scrie

$$f=(X^2-2X-1)(X^2-2X-2).$$

Rădăcinile lui $g = X^2 - 2X - 2$ sînt $1 - \sqrt{3}$ şi $1 + \sqrt{3}$. Deci f are rădăcinile $1 - \sqrt{2}$; $1 + \sqrt{2}$; $1 - \sqrt{3}$; $1 + \sqrt{3}$.

2) Să se determine un polinom f cu coeficienţi raţionali de gradul cel mai mic care admite ca rădăcini pe $3 + i$ şi $1 - \sqrt{2}$. Într-adevăr, acest polinom trebuie să aibă şi rădăcinile $3 - i$ şi $1 + \sqrt{2}$. Atunci f se divide cu produsul

$$[X - (3 + i)][X - (3 - i)][X - (1 - \sqrt{2})][X - (1 + \sqrt{2})] =$$
$$= (X^2 - 6X + 10)(X^2 - 2X - 1) = X^4 - 8X^3 + 21X^2 - 14X - 10.$$

Deoarece ultimul polinom are coeficienţi raţionali, rezultă că $f = X^4 - 8X^3 + 21X^2 - 14X - 10$.

Teorema 10.2. **Fie $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ un polinom de gradul n ($n \geqslant 1$) cu coeficienţi întregi. Dacă $\alpha = \frac{p}{q}$ (p, q numere prime între ele) este o rădăcină raţională a lui f atunci:**

1° p divide termenul liber a_0;

2° q divide coeficientul termenului de grad maxim a_n.

Demonstraţie. Cum $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, avem

$$a_0 + a_1\frac{p}{q} + a_2\left(\frac{p}{q}\right)^2 + \ldots + a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n = 0. \tag{1}$$

Înmulţind (1) cu q^n, obţinem

$$a_0q^n + a_1pq^{n-1} + a_2p^2q^{n-2} + \ldots + a_{n-1}p^{n-1}q + a_np^n = 0,$$

de unde obţinem

$$a_0q^n = p(-a_1q^{n-1} - a_2pq^{n-2} - \ldots - a_np^{n-1}) \tag{2}$$

şi

$$a_np^n = q(-a_0q^{n-1} - a_1pq^{n-2} - \ldots - a_{n-1}p^{n-1}). \tag{3}$$

Din (2) rezultă că $p \mid a_0q^n$. Cum p şi q sînt prime între ele, atunci p şi q^n sînt prime între ele şi deci trebuie ca p să dividă pe a_0.

Analog din (3) rezultă că $q \mid a_np^n$. Cum p şi q sînt prime între ele obţinem că q divide pe a_n.

Consecinţa 10.3. **Fie $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$, un polinom cu coeficienţi întregi. Dacă $\alpha = p$ este o rădăcină întreagă a lui f atunci p este un divizor al termenului liber a_0.**

Demonstraţie. Cum $\alpha = p = \frac{p}{1}$ atunci aplicînd teorema 10.2 se obţine că $p \mid a_0$.

Exemple. 1) Să se determine rădăcinile polinomului

$$f = X^4 - 2X^3 - 5X^2 + 8X + 4.$$

Mai întîi încercăm să vedem dacă f are rădăcini întregi. Acestea, dacă există, se găsesc printre divizorii lui 4 care sînt ± 1, ± 2, ± 4.

Se vede că $f(1) = 6$ şi $f(-1) = -6$;

$f(2) = 0$ şi $f(-2) = 0$;

$f(4) = 84$ şi $f(-4) = 276$.

Deci 2 şi -2 sînt rădăcini pentru f. Înseamnă că f se divide cu $(X-2)(X+2) = X^2 - 4$. Polinomul f se scrie

$$f = (X^2-4)(X^2-2X-1).$$

Rădăcinile lui X^2-2X-1 sînt $1-\sqrt{2}$ şi $1+\sqrt{2}$. Deci polinomul f are rădăcinile: $-2, 2, 1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}$.

2) Să se determine rădăcinile polinomului

$$f = 6X^4 - 17X^3 - X^2 + 8X - 2.$$

Divizorii lui 2 sînt $\pm 1, \pm 2$, iar divizorii lui 6 sînt $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ şi ± 6.

Conform teoremei 10.2 f poate avea rădăcinile fracţionare:

$$\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{6}, \pm \frac{2}{3}.$$

Avem

$$f(1) = -6;\ f(-1) = 12;\ f(2) = -30;\ f(-2) = 210;$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0;\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{15}{4};\ f\left(\frac{1}{3}\right) = 0;\ f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{110}{27};\ f\left(\frac{1}{6}\right) = -\frac{83}{108};$$

$$f\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{59}{18};\ f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{26}{27};\ f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{14}{9}.$$

Rezultă că f are rădăcinile $\frac{1}{2}$ şi $\frac{1}{3}$. Deci f se divide cu produsul $(2X-1)(3X-1)$.
Efectuînd împărţirea obţinem că $f = (2X-1)(3X-1)(X^2-2X-2)$.
Rădăcinile polinomului X^2-2X-2 sînt $1-\sqrt{3}$ şi $1+\sqrt{3}$. Deci f are rădăcinile: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}$.

Exerciţii

1. Să se rezolve ecuaţia $2x^5-5x^4-2x^3+6x^2-1=0$, ştiind că admite rădăcina $1+\sqrt{2}$.
2. Să se rezolve ecuaţia $x^4-2x^3-x^2-2x-2=0$ ştiind că admite rădăcina $1-\sqrt{3}$.
3. Să se determine rădăcinile polinomului $f = X^5 - 3X^4 - 19X^3 + 91X^2 - 80X - 50$ ştiind că una din rădăcinile lui este $3+i$ iar alta este $1-\sqrt{2}$.
4. Să se determine rădăcinile polinomului $f = X^4 - 5X^3 + X^2 + 6$ ştiind că admite rădăcina $3+\sqrt{3}$.
5. Să se determine rădăcinile polinomului $f = X^5 + 3X^4 + X^3 - 5X^2 - 6X - 2$ ştiind că admite rădăcina $\sqrt{2}$.
6. Să se afle rădăcinile raţionale ale următoarelor polinoame:
   a) $X^3 + 3X - 14$;
   b) $X^4 - X^3 - 12X^2 + 6X + 36$;
   c) $X^5 + 7X^4 + 18X^3 + 22X^2 + 13X + 3$;
   d) $X^5 + 6X^4 + 13X^3 + 14X^2 + 12X + 8$;
   e) $X^5 + 8X^4 + 5X^3 - 50X^2 - 36X + 72$;
   f) $6X^4 - 43X^3 + 107X^2 - 108X + 36$.
7. Fie f un polinom nenul cu coeficienţi întregi. Dacă $\alpha = \frac{p}{q}$ este o fracţie raţională ireductibilă, rădăcină a lui f, atunci $p-q$ divide pe $f(1)$.

Răspunsuri şi indicaţii

Capitolul I

§ 1.

1. a) $3^{\frac{5}{6}}$; b) $\sqrt[15]{6^7}$; c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{7}{2}}$; d) egale; e) egale; f) $2^{-\sqrt{3}}$; g) $5^{\sqrt{3}}$; h) $\sqrt[6]{\left(\frac{7}{8}\right)^{38}}$.
2. a) $2^{-1-8\sqrt{3}}$; b) $(3\cdot 2^{20})^{\sqrt{3}}$; c) 5^{-5}; d) $2^{-\frac{\sqrt{3}}{4}}$. 3. a) $x \geqslant 6$; b) $x \leqslant -2$; c) $x > -7$; d) $x < 1$; e) $x > -8$; f) $x < 8$; g) $x < \frac{1}{8}$; h) $x < -10$; i) $x > -21$. 4. a) $m > n$; b) $m > n$; c) $m \leqslant n$; d) $m \geqslant n$. 5. mai mari decît 1; b); d); e); mai mici decît 1: a); c); f). 6. a) $\left(\frac{1}{\pi}\right)^{-\sqrt{2}}$; b) $\left(\frac{\pi}{6}\right)^2$; c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{1+\sqrt{6}}$; d) $(\sqrt{5})^{\sqrt{3}-2}$. 7. dacă $0 < a < 1$, atunci $x < 0$; dacă $a > 1$, atunci $x > 0$. 8. a) pentru $a > 1$, da; pentru $0 < a < 1$, nu; b) da; c) da; d) nu.

§ 2.

1. a) $x < 1$; b) $-1 < x < 1$; c) $x \in \mathbf{R}$; d) $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$; e) $x \in (2, 3)$; f) $x \in \mathbf{R}$; g) $x > 1$; h) $x > 1$; i) $0 < x < 1$. 2. a) $\log_2 5$; b) $\log_3 10$; c) $\log_5 1/2$; d) 3. 3. a) $x > 4$; b) $0 < x \leqslant \frac{5}{2}$; c) $x \in (-\infty, -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}, +\infty)$; d) $x \in (1{,}5]$.
5. a) 2; b) 2; c) 2; d) 2; e) -2; f) 2; g) 1; h) -1. 6. a) $-0{,}15490$; b) $0{,}28170$; c) $1{,}54407$; d) $2{,}24304$; e) $1{,}19458$. 7. a) $E = \log_7 8$; b) $E = \log_2 3$; c) $\frac{1}{2}$. 8. a) $\log_a E = 2\log_a 41 + \frac{1}{13}(\log_a 41 + 5\log_a 37)$; b) $\log_a E = 3\log_a 31 + \frac{1}{7}(\log_a 41 + 4\log_a 33) - 2\log_a 17 - \frac{1}{3}(2\log_a 23 + \log_a 29)$; c) $\log_a E = 2\log_a a + \frac{1}{5}(\log_a a + 3\log_a b + \log_a c)$.
9. $x = \frac{12}{5}$; b) $x = \frac{7^2 6^3}{5^4}$; c) $x = \frac{a^2(a+b)^3}{(a-b)^4}$; d) $x = \sqrt[4]{\frac{(a-b)\sqrt[3]{4b^2}}{\sqrt[3]{(a+b)^2}\sqrt{2a}(a+b)^2}}$.

§ 3.

1. 0; 1; 2; 3; -2; -1; -4; 1; 2. 2.. 0,778; 1,176; 1,505; 1,477; 2,921.

§ 4.

1. a) 3; b) 5; c) -3; d) $-\frac{1}{2}$; e) 2; f) $\frac{4}{3}$; g) -4; h) $\frac{2}{3}$. **2.** a) $\frac{5}{2}$; b) 3; c) $\frac{5}{2}$; d) $x_1 = 7$, $x_2 = -1$; e) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. **3.** a) 4; b) 1; c; d) 1; e) 2. **4.** a) 35; b) $\frac{17}{13}$; c) 24. **5.** a) 2; b) 1; c) 3; d) 4; e) $x_1 = \log_5 3$, $x_2 = \log_5 \frac{5}{4}$; f) 0; g) $x_1 = 0$; $x_2 = 1$ h) 0; i) $x_1 = 0$; $x_2 = 1$. **6.** a) 1; b) $\log_{\frac{3}{2}} \frac{7}{5}$; c) 0; d) 0; e) 4. **7.** a) 2; b) $\frac{1}{2}$; c) 5; d) 4. **8.** a) 4; b) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; c) 2. **9.** a) $x_1 = 10$; $x_2 = 10^{-4}$; b) $x_1 = \sqrt[3]{10}$; $x_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{10}}$; c) $x_1 = 10^{\frac{1}{3}}$, $x_2 = 10^{-\frac{1}{6}}$; d) $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = \frac{1}{5} \cdot 3^{\frac{7}{4}}$. **10.** 100. **11.** $x_1 = 2^{\frac{1}{4}}$; $x_2 = 2^4$.

12. a) $x_1 = 5$, $y_1 = 2$ sau $x_2 = 2$, $y_2 = 5$; b) (2, 1); c) (100, 10); d) (4, 2); e) $x_1 = 4$, $y_1 = 10$ sau $x_2 = 10$, $y_2 = 4$; f) (1, 1). **13.** a) $x \in (-3, -2) \cup (3, +\infty)$; b) $0{,}01 \leqslant x \leqslant 10000$; c) $x \leqslant -4$. **14.** a) $0 < x < 3$; b) $2 \leqslant x \leqslant 4$. **15.** Împărțind cu 5^x obținem inecuația: $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > 1$; funcția $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$ este strict descrescătoare și $f(2) = 1$ deci $f(x) > 1$ pentru $x < 2$. **16.** a) pentru $0 < a < 1$, $0 < x \leqslant a$; pentru $a > 1$, $x \geqslant a$; b) pentru $0 < a < 1$, $x > 5$; pentru $a > 1$, $0 < x < 5$.

Capitolul II

§ 1.

6. $S_1 = 1 \cdot 1! = 1$, $S_2 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! = 5$, $S_3 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! = 23$, $S_4 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! = 119$. Examinînd aceste rezultate, se observă că avem: $S_1 = 2! - 1$, $S_2 = 3! - 1$, $S_3 = 4! - 1$, $S_4 = 5! - 1$. Formulăm următoarea ipoteză: Pentru orice $n \geqslant 1$, are loc $S_n = (n + 1)! - 1$. Aceasta se demonstrează prin inducție matematică. **8.** Avem $P_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, $P_3 = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{2}{3}$, $P_4 = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{5}{8}$. Observăm că $P_2 = \frac{2 + 1}{2 \cdot 2}$, $P_3 = \frac{3 + 1}{2 \cdot 2}$, $P_4 = \frac{4 + 1}{2 \cdot 4}$. Atunci, în general, formulăm următoarea ipoteză: Pentru orice $n \geqslant 2$, avem $P_n = \frac{n + 1}{2n}$. Aceasta se demonstrează prin inducție matematică.

§ 2.

1. a) (2). b) (4, 5), (5, 4); c) (α, β, γ), (α, γ, β), (β, α, γ), (β, γ, α), (γ, α, β), (γ, β, α). **2.** a) 5760; b) 322560; d) $n(n - 1)$; e) $(n - 3)(n - 4)$; f) $\frac{n^2 + 3n + 1}{(n + 2)!}$. **3.** a) $n = 7$; b) $n = 6$; c) $n = 2$.

4. a) $n \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; b) $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. **5.** $4! = 24$.

6. $10! = 3628800$. **8.** Dacă fixăm un element din A (pe primul loc) şi un element din B (pe ultimul loc) obţinem $(m + n - 2)!$ posibilităţi de a ordona celelalte elemente. Dar cum A are m elemente, iar B are n elemente rezultă că sînt mn posibilităţi de aşezare a unui element din A pe primul loc şi a unui element din B pe ultimul loc. Deci numărul permutărilor este $mn(m + n - 2)!$. **9.** Dacă n este numărul de elemente al mulţimii, atunci $500 \leqslant n! \leqslant 1\,000$, de unde $n = 6$. **10.** $6! - 5! = 600$. **11.** $(n - 1)!$ **13.** 48. **14.** $A_8^4 = 1\,680$ moduri; dacă unul din examene trebuie dat în ziua a 8-a, atunci avem $4 \cdot A_7^3 = 840$ moduri. **15.** $A_{30}^2 = 30 \cdot 29 = 870$. **16.** a) $(n - 4)^2$; b) $n(n - 1)$; c) $2nA_{2n+1}^{k+1}$.

17. a) $n \in \{9, 10\}$; b) 19; c) $n = 10$. **18.** Trebuie să avem $A_n^k = pA_n^{k-2}$. Rezultă că problema este posibilă dacă numărul p este produsul a două numere naturale consecutive, adică $p = m(m + 1)$. Apoi, se deduce că $n = k + m - 1$. **19.** a) $\varnothing$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{3, 4\}$. **20.** $C_{30}^3 = 4060$. **21.** $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$. **22.** $C_9^4 = 126$; $C_{10}^4 = 210$. **23.** a) $C_n^2 - C_k^2 + 1$; b) $C_n^3 - C_k^3$. **24.** $C_{20}^4 \cdot C_3^1 = 14535$.

25. $C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = 1680$. **26.** a) 45; b) 560; c) $C_{n+1}^{k+1} = \dfrac{(n+1)n\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \ldots (k+1)}$; d) 101; e) $C_{n-k}^{k+1} = \dfrac{(n-k)(n-k-1)\ldots(n-2k)}{1 \cdot 2 \ldots (k+1)}$; f) 90. **27.** a) 6; b) 5; c) 4; d) 17. **28.** O clasă oarecare conţine C_n^k submulţimi. Aşadar se cere să determinăm care din numerele $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$ este cel mai mare. Deoarece $C_n^k = \dfrac{n-k+1}{k} C_n^{k-1}$, avem $C_k^{k-1} < C_n^k$, dacă $\dfrac{n-k+1}{k} > 1$, de unde $k < \dfrac{n+1}{2}$; iar $C_n^{k-1} > C_n^k$, dacă $\dfrac{n-k+1}{2} < 1$, de unde $k > \dfrac{n+1}{2}$. Dacă $n = 2m$ este număr par, atunci C_{2m}^m este cel mai mare dintre numerele C_{2m}^k. Dacă $n = 2m + 1$ este un număr impar, $C_{2m+1}^m = C_{2m+1}^{m+1}$ este cel mai mare. **29.** a) $n > 11$; b) $7 \leqslant n < 12$; c) $1 \leqslant k \leqslant 10$; d) $k > 9$. **32.** $C_7^3C_4^2 + C_7^2C_4^3 + C_7^1C_4^4$

§ 3.

1. a) $x^{12} - 6ax^{10} + 15a^2x^8 - 20a^3x^6 + 15a^4x^4 - 6a^5x^2 + a^6$; b) $a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$; c) $a^2 - 4a\sqrt{ab} + 6ab - 4b\sqrt{ab} + b^2$; d) $x^7 + 14x^6 + 84x^5 + 280x^4 + 560x^3 + 672x^2 + 448x + 128$. **2.** a) $-330x$; b) $70\sqrt{2}\,a^3b^2\sqrt{a}$; c) $-20xy\sqrt{xy}$; d) $126a^2b\sqrt{a}\sqrt[3]{b}$, $-126a^2b\sqrt[3]{b^2}$.

3. a) $k = 3$; b) $\dfrac{286}{3^7}a^4$; c) $k = 6$.

4. $k = 9$. **5.** $n = 17$. **6.** 26. **7.** $70a^3$. **8.** Din dezvoltare, avem $nm - (m + p)k = 0$, $nm - 11(m + p) = 1$, $nm - 23(m + p) = 5$. Scăzînd prima ecuaţie din celelalte două şi făcînd cîtul se obţine $\dfrac{k - 11}{k - 23} = \dfrac{1}{5}$, de unde $k = 8$. Apoi, $m + p = -\dfrac{1}{3}$, $n = -\dfrac{8}{3m}$ şi deoarece n este întreg pozitiv, avem $n = 8l$, cu l întreg pozitiv ş.a.m.d.

9. Punem $x^3 = y^3 = 1$. Atunci dezvoltînd după formula binomului lui Newton și înlocuind x^3 și y^3 prin 1, obținem suma căutată a coeficienților. Astfel suma coeficienților este egală cu $(7-6)^9 = 1$. 10. a) 51; b) 26.

11. a) Deoarece $\frac{n+1}{k+1} C_n^k = C_{n+1}^{k+1}$, atunci $C_n^0 + \frac{1}{2} C_n^1 + \ldots + \frac{1}{n+1} C_n^n = \frac{1}{n+1}$ $(C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \ldots + C_{n+1}^{n+1}) = \frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1)$; b) În dezvoltarea $(1+x)^{n+1} = 1 + C_{n+1}^1 x + C_{n+1}^2 x^2 + \ldots + C_{n+1}^{n+1} x^{n+1}$ care se poate scrie: $\frac{(1+x)^{n+1} - 1}{n+1} = C_n^0 x + \frac{C_n^1}{2} x^2 + \frac{C_n^2}{3} x^3 + \ldots + \frac{C_n^n}{1+n} x^{n+1}$, pentru $x = 1$ se obține a) și pentru $x = k$ se obține b); c) Se folosește egalitatea: $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$; d) Se folosește aceeași egalitate ca la punctul c); e) Dacă S_1 este prima sumă, iar S_2 cea de-a doua se calculează $S_1 + iS_2$.

§ 4.

3. a) Numărul -102 este al 27-lea termen al șirului; b) nu este; c) nu este; d) nu este. 4. b) în șir termenul al 8-lea și termenul al 9-lea sînt egali cu -72; c) nu este. 5. d) $3, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{3}$; e) $-1, 1, 0, 1, 1, 2$; f) $3, 1, 2, -1, 3, -4$. 6. $a_{2k-1} = 0$, $a_{2k} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2k-2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2k-1)} \cdot \frac{1}{k}$ $(k \geqslant 1)$.

8. a) $b_1 = 3$, $b_2 = 9$; b) $b_1 = -23$, $b_2 = -16$. 9. a) $c_9 = 25$, $c_2 = 4$, $c_{15} = 43$; b) $c_{16} = 0$, $c_7 = 45$, $c_{19} = -15$. 10. a) $a_{12} = 3{,}5$; b) $a_{10} = -24$; c) $a_{50} = -100{,}5$; d) $a_{25} = 8\frac{3}{7}$. 11. a) 23; b) 130. 12. a) $c_1 = 21$, $r = 1{,}5$; b) $c_1 = 120$, $r = -1$; c) $c_1 = 38$, $r = -2$; e) sau $a_1 = 2$, $r = 3$, sau $a_1 = 14$, $r = -3$. 13. a) $y_1 = -3$, $r = 2$. 14. a) 8 000; b) 650; c) -24550; d) 4850. 15. a) $-\frac{3}{4}$, $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{4}$. 16. a) 55; b) 1. 17. 100; 19. 2500. 21. a) Dacă α, β, γ sînt trei numere, atunci ele sînt în progresie aritmetică dacă $\alpha + \gamma = 2\beta$. Avem $\frac{a}{x+1} + \frac{x^2 + a - 1}{x(x+1)} = 2\frac{x + a - 1}{2x}$; b) vezi indicația de la a). 22. vezi indicația de la problema precedentă. 23. vezi indicația de la problema 21; i) este adevărată și reciproca; ii) dacă $a + b + c \neq 0$ este adevărată și reciproca.

25. Se face inducție matematică după n. 28. $b_7 = 96$, $b_9 = 384$, $b_{10} = 768$ sau $b_7 = 96$, $b_9 = 384$, $b_{10} = -768$; b) $b_8 = -10$, $b_{12} = -10$, $b_2 = 10$. 31. a) $a_1 = 1$, $q = -3$; b) $a_1 = \frac{1}{2}$, $q = -\frac{1}{2}$; c) $a_1 = \frac{5^7}{3^5}$, $q_1 = 0{,}6$ sau $a_1 = -\frac{5^7}{3^5}$, $q_2 = -0{,}6$. 32. d) 2731; e) $\frac{x^{101} - 1}{x - 1}$, dacă $x \neq 1$; 101, dacă $x = 1$. 33. a) Ecuația devine $\frac{x^{100} - 1}{x - 1} = 0$ cu $x \neq 1$; b) Ecuația devine $\frac{x^{101} - 1}{x - 1} = 0$ cu $x \neq 1$. 34. $y_1 = 8$, $y_2 = 40$, $S_4 = 1248$.

85. a) nu este; b) este; c) nu este. **87.** $x = \dfrac{b^2 - ac}{a + c - 2b}$, dacă $a + c - 2b \neq 0$.

88. Numerele x, y, z rezultă din sistemul: $xz = y^2$, $x + z = 2(y + a)$, $x(z + b) = (y + a)^2$

Capitolul III

§ 1.

1. a) cîtul -25, restul 188; b) -27, 132; c) 136,10; d) -2342, 0.

2. 87 și 6525; soluția este unică. **3.** 6, 5, 1, 4, 13, 7. **5.** Se ține cont de unicitatea împărțirii cu rest. **6.** 24. **7.** Se scrie n sub forma $7k + \varepsilon$ cu $\varepsilon = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

§ 2.

2. Nu rezultă; de exemplu $a = b = 2$ și $d = 4$. **3.** ± 1, ± 2. **4.** Nu există astfel de numere, deoarece 0 are orice număr întreg a divizor, iar pentru $a \neq 0$, dacă $d \mid a$ atunci $-d \mid a$. **5.** Rezultă $a = 3k \pm 1$, $b = 3k' \pm 1$ și se analizează toate cazurile. **6.** Nu; de exemplu $a = b = 5$ și $d = 25$. **7.** $1\,000 = 999 + 1 = 27 \cdot 37 + 1 = 37p + 1$. Din formula binomului lui Newton rezultă $1\,000^k - 1 = (37p + 1)^k - 1 = 37l$, $l \in \mathbf{N}$. **8.** $p = 3k - 1$. **9.** $9^{20} - 7^{20}$ are ultima cifră 0. **11.** Avem $(n + 1)^n = n^n + C_n^1 n^{n-1} + \ldots + C_n^{n-2} \cdot n^2 + C_n^{n-1} \cdot n + 1 = n^2 \cdot k + 1$, $k \in \mathbf{N}$.

12. Din $(n + 1) \mid (n + 1)^2$ rezultă că $(n + 1) \mid n^2 + 2n + 1 - n^2 - 1$ deci $(n + 1) \mid 2n$. Dar $(n + 1) \mid 2(n + 1)$, deci $(n + 1) \mid 2n + 2 - 2n$. Prin urmare $(n + 1) \mid 2$, adică $n \in \{-3, -2, 0, 1\}$. **13.** $n^3 - n = (n - 3)(n^2 + 3n + 9) + 24$; deci $n - 3$ este divizor al lui 24, adică $n - 3 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12; \pm 24\}$.

§ 3.

1. a) 4; b) 15; c) 19; d) 76; e) 12; f) 15. **4.** Numerele de forma $kn + 1$ sînt prime cu n, $k \in \mathbf{Z}$. **5.** $a = -25$, $b = 35$. **6.** $a = 24$, $b = 9$ sau $a = 72$, $b = 3$. **7.** Avem $ab \cdot \left(\dfrac{m}{a}, \dfrac{m}{b}\right) = (ma, mb) = m(a, b) = ab$, deci $\left(\dfrac{m}{a}, \dfrac{m}{b}\right) = 1$. **8.** Dacă $d \mid 2k + 1$ și $d \mid 9k + 4$ atunci $d \mid 9(2k + 1) - 2(9k + 4)$ deci $d \mid 1$.

9. Pentru $k = 17l + 9$, c.m.m.d.c. este 17, în rest numerele sînt prime între ele. **10.** Dacă $(k, l) = d'$, atunci $d'd \mid ka$ și $d'd \mid lb$, deci $d'd \mid d$, adică $d' = \pm 1$. **11.** Prin inducție după n.

§ 4.

3. 48 și respectiv 1260. **4.** $7^4 \cdot 11^2$. **5.** Fie p un număr prim, cu $p \mid ab$. Atunci $p \mid a$ sau $p \mid b$; dacă $p \mid a$ și $p \mid a + b$ atunci $p \mid b$, absurd. Celelalte situații se tratează analog. Dacă a și b au parități diferite atunci $a + b$ și $a - b$ sînt impare și dacă $p \mid a \pm b$, atunci $p \mid a + b + a - b$, deci $p \mid 2a$, adică $p \mid a$. Prin urmare $p \mid a + b - a$, absurd.

6. Dacă $d \mid a$ şi $d \mid b$, atunci $d \mid a + b$, deci $d = \pm 1$.

7. Avem $[a, b] = \dfrac{a \cdot b}{(a, b)} = a \cdot b$. Deci $ab \mid c$, deoarece c este multiplu comun pentru a şi b. 8. Dacă $p \mid a$ şi $p \mid bc$, cu p prim, atunci $p \mid b$ sau $p \mid c$, absurd.

9. Avem $\dfrac{b}{(a, b)} \,\Big|\, \dfrac{ac}{(a, b)}$, deci $\dfrac{b}{(a, b)} \,\Big|\, \dfrac{a}{(a, b)} \cdot c$, dar $\dfrac{b}{(a, b)}$ este prim cu $\dfrac{a}{(a, b)}$, deci $\dfrac{b}{(a, b)} \,\Big|\, c$. Prin urmare, $b \mid (a, b)c$. Rezultă că $\dfrac{b}{(b, c)} \,\Big|\, (a, b) \cdot \dfrac{c}{(b, c)}$. Dar $\dfrac{b}{(b, c)}$ este prim cu $\dfrac{c}{(b, c)}$, deci $\dfrac{b}{(b, c)} \,\Big|\, (a, b)$, adică $b \mid (a, b) \cdot (b, c)$. 10. Rezultă din descompunerea în factori primi a lui a şi b.

11. Din teorema de descompunere în factori primi. 12. Din teorema de descompunere în factori primi aplicată lui a şi b.

13. $8^n + 1 = (2^n)^3 + 1 = (2^n + 1)(2^{2n} - 2^n + 1)$.

14. $\sum\limits_{k \in N} \left[\dfrac{n}{p^k}\right]$; 100! are 24 de zerouri. 15. Dacă $n = p(p - 1)$ cu p prim, $p \neq 2$, atunci $2^{p(p-1)} - 1 = (2^{p-1} - 1)k$, şi din teorema lui Fermat avem $p \mid 2^{p-1} - 1$. De exemplu $(6, 2^6 - 1) = (6,63) = 3$. 17. Trebuie să avem $3^n = 10^5 k + 1$. Pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$ considerăm restul împărţirii lui 3^n la 10^5. Putem obţine doar 10^5 resturi distincte, deci există $n_1 > n_2$, astfel încît $10^5 \mid (3^{n_1} - 3^{n_2})$, deci $10^5 \mid 3^{n_2}(3^{n_1 - n_2} - 1)$ şi deoarece $(10^n, 3^{n_2}) = 1$, rezultă $10^5 \mid 3^{n_1 - n_2} - 1$, adică $3^{n_1 - n_2} - 1 = 10^5 k$. 18. Deoarece 10^5 şi 1979 sînt prime între ele rezultă că există $k, l \in \mathbf{N}^*$ astfel încît:

$$10^5 \cdot k - 1979l = 1, \text{ deci}$$
$$10^5 \cdot k + 1978 = 1978 + 1979l + 1, \text{ deci}$$
$$10^5 \cdot k + 1978 = 1979(l + 1).$$

Capitolul IV

§ 4.

3. $f + \bar{f} = (a_0 + \bar{a}_0) + (a_1 + \bar{a}_1)X + \ldots + (a_n + \bar{a}_n)X^n$; numerele $a_0 + \bar{a}_0, a_1 + \bar{a}_1, \ldots, a_n + \bar{a}_n$ sînt reale; $f\bar{f} = a_0\bar{a}_0 + (a_0\bar{a}_1 + a_1\bar{a}_0)X + (a_0\bar{a}_2 + a_1\bar{a}_1 + a_2\bar{a}_0)X^2 + \ldots + a_n\bar{a}_nX^{2n}$, numerele $a_0\bar{a}_0, a_0\bar{a}_1 + a_1\bar{a}_0, a_0\bar{a}_2 + a_1\bar{a}_1 + a_2\bar{a}_0, \ldots, a_n\bar{a}_n$ sînt reale.

4. grad $(fg) = 0 \Rightarrow$ grad $f +$ grad $g = 0 \Rightarrow$ grad $f = 0 \Rightarrow f \in \mathbf{C}$.

6. a) $m = 1 \Rightarrow$ grad $f = 0$; $m = 2 \Rightarrow$ grad $f = 2$; $m \neq 1,2 \Rightarrow$ grad $f = 3$; b) $m = \pm i \Rightarrow$ grad $f = 1$; $m \neq \pm i \Rightarrow$ grad $f = 4$; 7. Dacă $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_kX^k + \ldots + a_nX^n$; dacă $a_k \neq 0$ luăm $g = -a_{k+1}X^{k+1} - \ldots - a_nX^n$; dacă $a_k = 0$ luăm $g = X^k - a_{k+1}X^{k+1} - \ldots - a_nX^n$. 9. $f = 1 - 5X + 2X^2$. 10. $f(0) \geqslant 0 \Rightarrow b \geqslant 0$; $f(1) \leqslant 1 \Rightarrow a \leqslant 1$; 11. $f(X) = X^2$.

§ 5.

1. a) $q = X^4 + X^3 - 2X^2 - 6X - 8$; $r = 7X + 20$; b) $q = X - 6$; $r = -7X^2 - 7X + 7$; c) $q = X^2 + 2X$; $r = -4X + 2$; d) $q = X^2 - X$; $r = X^2 + 2X - 6$; e) $q = X^5 - X^4 - X^3 + X^2 + X - 1$; $r = 0$; f) $q = X^{20} - X^{19} + X^{17} - X^{16} - X^{15} + 2X^{14} - X^{13} - X^{12} + 2X^{11} - X^{10} - X^9 + 3X^8 - 2X^7 - X^6 + 3X^5 - 2X^4 + 2X^3 - 2X + 2$; $r = 0$.

2. Se scrie $f = (X^2 - 5X + 8)q + 2X - 7$. Cum $f(0) = -15$ şi $f(3) = 3$ se obţine $f = X^3 - 6X^2 + 15X - 15$. 3. Se aplică unicitatea formulei împărţirii cu rest. 4. $m = 0$, $q = p - 1$. 5. a) $q = X^3 - 2X^2 - 4X - 10$; $r = -9$; b) $q = X^5 - 2X^4 + 2X^3 + X^2 - X - 5$; $r = 7$; c) $q = X^4 + X^3 + X + 1$; $r = 0$; d) $q = X^4 - 4X^3 + 7X^2 - 12X + 24$; $r = -50$; e) $q = X^5 - \frac{3}{2} X^4 - \frac{1}{2} X^3 + \frac{1}{8} X^2 - \frac{1}{16} X + \frac{193}{32}$; $r = -\frac{257}{64}$; f) $q = X^2 + \frac{7}{2} X - \frac{15}{4}$; $r = \frac{23}{4}$; g) $q = X^3 + \frac{5}{3} X^2 - \frac{7}{9} X + \frac{47}{27}$; $r = \frac{209}{27}$.

6. $f = X$. 7. $m = -\frac{25}{8}$. 8. $m = \pm 3$. 9. $a = 3$, $b = 2$. 10. $X^4 - 2X^3 - X^2 + 2$.

§ 6.

3. $m = 8$. 4. $a = -32$, $b = 101$, $c = -99$. 5. $p = 1 - q^2$, $m = -q$. 6. $a = -9$, $b = 12$. 7. În general, nu. 8 şi 9. se aplică teorema 6.2.4. 10. a) $X^2 + 1$; b) $X^2 - 2X + 2$; c) $X^3 - X + 1$; d) $X + 3$; e) $X^2 + X + 1$; f) $X^2 - 2\sqrt{2}X - 1$; g) 1; h) 1; i) 1. 11. Se aplică teorema 6.2.4. 12. $A = n$, $B = -2 - n$. 13. Se arată că c.m.m.d.c. este 1.

§ 7.

1. Se scrie $X^2 - 4X + 3 = (X - 1)(X - 3)$; $a = -4$, $b = 3$. 2. -1, $2 \pm i\sqrt{2}$. 3. $m = 0$; 0, 2, 4. 4. $a = -5$, $b = 1$. 5. $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$. 6. $x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 20x^2 - 19x + 6 = 0$. 7. a) $(X - 1)^3 (X + 1)^2 (X - 4)$; b) $(X - 1)^3 (X - 2)$; c) $(X^2 + 1)(X - 1)(X + 3)^2$.

8. Se foloseşte teorema 6.2.4 şi teorema D'Alembert-Gauss. 9. Se aplică consecinţa 7.3.4. 11. A se vedea exerciţiul 9. 12. Dacă $f = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$ atunci $f(f(X)) - f(X) = (a_n f^n - a_n X^n) + (a_{n-1} f^{n-1} - a_{n-1} X^{n-1}) + \ldots + a_1 (f - X)$. Se ţine cont că $f^k - X^k$ se divide cu $f - X$ oricare ar fi $1 \leqslant k \leqslant n$. 13. a) Dacă α este o rădăcină a lui $X^2 + X + 1$ avem $\alpha^3 = 1$ şi $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$. Dar $(\alpha + 1)^{6n+1} + \alpha^{6n+2} = (-\alpha^2)^{6n+1} + (\alpha^6)^n \alpha^2 = -\alpha^2 + \alpha^2 = 0$. În continuare se aplică teorema 7.2.3. b), d), e) şi f) se fac ca exerciţiul a). c) $(X + 1)^{3n+2} + X + 2 = (X + 1)^2 [(X + 1)^3]^n + X + 2 = (X^2 + 2X + 1)[X(X^2 + 3X + 3) + 1]^n + X + 2 = [(X^2 + 3X + 3) - X - 2][X(X^2 + 3X + 3) + 1]^n + X + 2$. Se dezvoltă apoi paranteza $[X(X^2 + 3X + 3) + 1]^n$ după binomul lui Newton.

14. a) Facem schimbarea de variabilă $x = \frac{y - a}{2}$ în ecuaţia dată. Obţinem $\left(\frac{y - a}{2}\right)^3 + a\left(\frac{y - a}{2}\right)^2 + b\left(\frac{y - a}{2}\right) + c = 0$.

b) În ecuaţia dată se face schimbarea de variabilă $x = 2y$. Ecuaţia căutată este $8y^3 + 4ay^2 + 2by + c = 0$; c). Din egalităţile $y = x^2$ şi $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ eliminăm pe x. Obţinem $y(y + b)^2 - (ay + c)^2 = 0$.

15. $m = \pm 48$. 16. $\lambda = 6$. 17. $q^3 + pq + q = 0$. 18. a) $1 \pm \sqrt{3}$, $1 \pm i\sqrt{2}$; b) $1 \pm 2i$, $-2 \pm i$; c) $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1 \pm \sqrt{11}}{2}$. 19. $+\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$ şi -1, 1, 3.

20. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a_1^2 - 2a_2$; $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = a_1^4 - 4a_1^2a_2 + 2a_2^2 - 4a_1a_3$.

23. 3. **24.** $-1, -1, -1, -1, -2$. **25.** 1 are ordinul de multiplicitate 2; -1 are ordinul de multiplicitate 3.

§ 8.

1. a) ± 3, ± 1; b) ± 4, ± 1; c) ± 1; $\pm \sqrt[4]{2}$; d) $\pm \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$; $\pm \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$; e) $\pm \sqrt{3+\sqrt{3}}$; $\pm \sqrt{3-\sqrt{3}}$; f) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$; g) $\pm \frac{1}{2}$; $\pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$; h) $\pm i$, ± 1.

2. a) ± 6; ± 2; b) $\pm \sqrt{5}$, ± 1; c) ± 1; $\pm \frac{\sqrt{13}}{2}$; d) ± 2; $\pm i\sqrt{12}$.

3. a) $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$; b) $x^4 - \frac{5}{18}x^2 + \frac{1}{144} = 0$; c) $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$; d) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$.

4. a) se discută rădăcinile ecuației rezolvente $y^2 - 2(m-4)y - m^2 = 0$. Ecuația dată are 2 rădăcini reale și 2 complexe; b) Dacă $-12 < m < \infty$ ecuația are 4 rădăcini complexe; dacă $m \leqslant -12$ ecuația are 4 rădăcini reale; c) dacă $m > 0$ ecuația are 4 rădăcini complexe; dacă $m < 0$ ecuația are 2 rădăcini reale și 2 complexe; d) ecuația are 4 rădăcini reale oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$; e) are 2 rădăcini reale și 2 complexe; f) Rădăcinile ecuației rezolvente sînt -3 și $\frac{m+1}{2}$. Dacă $m < -1$ ecuația are 4 rădăcini complexe; dacă $m > -1$ ecuația are 2 rădăcini reale și 2 complexe.

5. Se face substituția $x^n = y$. **6.** a) $-1, -5, -\frac{1}{5}$; b) -1; $\frac{-1 \pm i\sqrt{15}}{4}$; c) $1, 5, \frac{1}{5}$; d) $1, \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{4}$; e) $-1, \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$; f) $-1, \frac{1 \pm i\sqrt{35}}{6}$; g) $-1, \pm i$; h) $-1, \frac{-3 \pm i\sqrt{7}}{4}$. **7.** i) $b = 3a$ sau $b = -a$; ii) $(b - 3a)(a + b) \geqslant 0$; iii) $(b - 3a)(a + b) < 0$.

8. a) $-2, -\frac{1}{2}, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; b) $2 \pm i\sqrt{3}, \frac{-5 \pm 2\sqrt{3}}{2}$; c) $1 \pm i\sqrt{3}, \frac{-3 \pm i\sqrt{55}}{16}$; d) $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \frac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{2}$; e) $-1, -1, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; f) $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, $-2 \pm \sqrt{3}$; g) $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, $-3 \pm 2\sqrt{2}$.

9. Ecuația rezolventă este $y^2 + 2y + a - 2 = 0$. Se pune condiția ca această ecuație să aibă ambele rădăcini aparținînd intervalului $(-\infty, -2) \cup [2, +\infty)$. **10.** Fie ecuația reciprocă $a_{2p}x^{2p} + a_{2p-1}x^{2p-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$. O împărțim cu x^p și obținem (1) $a_{2p}x^p + \frac{a_0}{x^p} + a_{2p-1}x^{p-1} + \frac{a_1}{x^{p-1}} + \frac{a_1}{x^{p-1}} + a_{2p-2}x^{p-2} + \frac{a_2}{x^{p-2}} + \ldots = 0$. Facem substituția $x + \frac{1}{x} = y$. După binomul lui Newton avem $y^k = x^k + \frac{1}{x^k} + C_k^1\left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) + C_k^1\left(x^{k-2} + \frac{1}{x^{k-2}}\right) + \ldots$

Dînd valori lui $k = 1, 2, \dots, p$ se determină $x^k + \frac{1}{x^k}$ în raport cu $y^k, y^{k-1}; y^{k-2}, \dots$ Ecuaţia (1) se transformă într-o ecuaţie de gradul p în nedeterminata y. **11.** a) $-1, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}$; b) $-1, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; c) $-1, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{5}, \frac{2 \pm i\sqrt{21}}{6}$.

§ 9.

1. $f(\pm i) = \pm(b-a)i$. **2.** $a = 57$, $b = -80$, $x_{1,2} = \frac{5 \pm i\sqrt{39}}{2}$, $x_{3,4} = 1 \pm 2i$.

3. Reducere la absurd. Rezultă că toate rădăcinile sînt reale. Dar $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2 \sum\limits_{1 \leq i < j \leq 4} x_i x_j \Leftrightarrow (2a+1)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + (2a+2)^2$, absurd.

4. $f = (X^2+1)(X^4+X^3+2X^2+X+1) = (X^2+1)^2(X^2+X+1)$, i şi $-$i rădăcini duble şi $x_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. **5.** $f = (X^2-2X+2)(X^2+X+1)$ deci $1 \pm i$ şi $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. **6.** $f = (X^2-4X+5)(X^2+1)$, deci $2 \pm i$ şi $\pm i$. **7.** Se demonstrează că există $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încît $f = (X^2 - 2\cos aX + 1)(X^2 - 2\cos b\, X + 1)$, $\cos a$ şi $\cos b$ sînt rădăcinile ecuaţiei $2x^2 - \alpha x - 1 = 0$ adică $\frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2+8}}{4}$ şi ţinînd cont că $|\alpha| < 1$ avem $\sqrt{\alpha^2+8} < 3$. Rădăcinile lui f sînt $\cos a \pm i \sin a$ şi $\cos b \pm i \sin b$.
8. $f = X^2(X^2-2X+2) + X(X^2-2X+2) + mX^2 + n$, $m = n = 0$; $1 \pm i$, 0 şi -1.
9. $f = (X^2-2X+2)(3X^2+X-1) = 3(X^2-2X+2)\left(X + \frac{1-\sqrt{13}}{6}\right)\left(X - \frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)$. $1 \pm i$, $\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$.

10. $f = X^4 + 2X^2 + 1 - X^2 = (X^2 - X + 1)\cdot(X^2+X+1)$. **11.** $f = X^4 + 2X^2 + 1 - (\sqrt{2}X)^2 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$.

12. Dacă α este o rădăcină a polinomului $X^2 + X + 1$, atunci cum $X^2 + X + 1 \mid f(X^3) + Xg(X^3)$ avem $f(1) + \alpha g(1) = 0 \Rightarrow f(1) = g(1) = 0$.

13. Se face la fel ca 12. **14.** a) $f = (X-2)^2(X^2-2X+2)$; b) $f = (X^2+1)^2(X^2-4X+5)^2$; c) $f = (X^2+2X+2)^3(X^2-1)$. **15.** $\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^n = -1 = \cos\pi + i\sin\pi \Rightarrow \frac{x+i}{x-i} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$ $(0 \leq k \leq n-1) \Rightarrow \frac{x}{-1} =$

$$= \frac{1 + \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + \sin\frac{(2k+1)\pi}{n}}{1 - \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} - i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}} \Rightarrow x = \operatorname{ctg}\frac{(2k+1)}{2n}\pi.$$

16. $X^3 + X^2 + X + 1 = (X+1)(X+i)(X-i)$ şi se aplică teorema lui Bézout.

1. $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$, -1, 1, $\frac{1}{2}$. **2.** $1 \pm \sqrt{3}$, $\pm i$. **3.** $1-\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$, $3-i$, $3+i$, -5. **4.** $3-\sqrt{3}$, $3+\sqrt{3}$, $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. **5.** $\pm\sqrt{2}$, -1 de 3 ori. **6.** a) 2; b) -2, 3; c) -3, -1 de 4 ori; d) -2 de 3 ori; e) 1, -2, 2, -3, -6; f) 2, 3, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$.
7. Se scrie $f(1) - f\left(\frac{p}{q}\right) = a_1\left(1 - \frac{p}{q}\right) + a_2\left(1 - \frac{p^2}{q^2}\right) + \ldots + a_n\left(1 - \frac{p^n}{q^n}\right) \Rightarrow p - q \mid q^n f(1) \Rightarrow p - q \mid f(1)$.

Bibliografie

1. Colojoară I., Dragomir A., Elemente de algebră superioară, manual pentru clasa a XII-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1968.
2. Fadeev D., Sominski I., Culegere de probleme de algebră superioară (trad. din limba rusă), Editura Tehnică, Bucureşti, 1954.
3. Kocetkov E.C., Kocetkova E.C., Algebră şi funcţii elementare (în limba rusă), vol. 2, Moscova, 1974.
4. Kolmogorov A.N. ş.a., Algebră şi elemente de analiză (în limba rusă), manual pentru clasa a 9-a, Moscova, 1977.
5. Novoselov S.I., Curs special de algebră elementară (trad. din limba rusă), Editura Tehnică, Bucureşti, 1955.
6. Stamate I., Stoian I., Culegere de probleme de algebră, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.

Cuprins

Bun de tipar : 09.01.988
Coli de tipar 10,5

C-da nr. 70 372/34 035
Combinatul Poligrafic
„CASA SCÎNTEII"
Bucureşti — R.S.R.