Ministerul Educației și Cercetării

MIRCEA GANGA

# MATEMATICĂ

## MANUAL PENTRU CLASA a XI-a

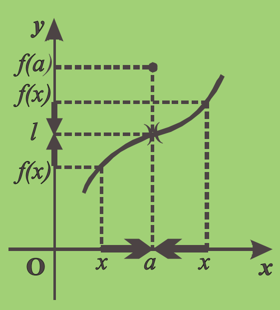
TRUNCHI COMUN + CURRICULUM DIFERENȚIAT
(3 ORE)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$\Delta = det\,(A) \neq 0$

- $x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta}$, $x_3 = \dfrac{\Delta x_3}{\Delta}$
- $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$




$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

EDITURA MATHPRESS

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului

**MIRCEA GANGA**

# MATEMATICĂ

## MANUAL PENTRU CLASA a XI-a

### TRUNCHI COMUN + CURRICULUM DIFERENȚIAT
### (3 ORE)

**Filierra teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii (TC + CD)**
**Filiera tehnologică, toate calificările profesionale (CD)**

**EDITURA MATHPRESS**

**2006**

Manualul este aprobat prin Ordinul ministrului Educației și Cercetării nr. 4446 din 19.06.2006 în urma evaluării calitative organizate de către Consiliul Național pentru Evaluare și Difuzarea Manualelor și este realizat în conformitate cu programa analitică aprobată prin ordin al ministrului Educației și Cercetării nr. 3252/13.02.2006.

Referenți: prof.gr. I ION NEDELCU, Colegiul Național „Mihai Viteazu“, Ploiești
prof.gr. I RADU SIMION, Colegiul Național „Mihai Viteazu“, Ploiești

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României**
**GANGA, MIRCEA**
**Matematică: manual pentru clasa a XI-a : TC + CD (3 ore)** / Mircea Ganga. – Ploiești : Mathpress, 2006
ISBN (10) 973-8222-24-9 ; ISBN (13) 978-973-8222-24-3

51(075.35)


Editura MATHPRESS, Ploiești
Tel./fax: 0244.592.118
e-mail: mirceaganga@yahoo.com

Tiparul executat la S.C. LUMINA TIPO s.r.l. – str. Luigi Galvani nr. 20 bis, sect. 2, București
Tel./fax 021/211.32.60; E-mail: **office@luminatipo.com**; *www.luminatipo.com*

Comenzi țară
Tel: 0244.596.118
021.351.01.11
0722.745.965
0723.955.444

Comenzi București
Tel.: 021.327.26.23
021.351.01.11
0721.679.326

# ELEMENTE
# DE
# CALCUL MATRICEAL
# ŞI
# SISTEME DE
# ECUAȚII LINIARE

# 1. MATRICE

**În acest capitol analizăm conceptul de matrice şi anumite operaţii algebrice cu matrice. De asemenea, sunt introduse matricele ca structuri în care se pot stoca şi prelucra date. Operaţiilor de adunare şi înmulţire de pe $\mathbb{C}$ li se asociază operaţii similare pentru adunarea matricelor şi respectiv înmulţirea cu scalari a matricelor. Conceptul matematic care a generat noţiunea de matrice şi a perfectat operaţiile cu matrice este cel de aplicaţie liniară. Se defineşte conceptul de înmulţire a două matrice, care n-are corespondent între operaţiile pe $\mathbb{C}$. Se dau proprietăţi fundamentale pentru operaţiile cu matrice.**

**Numeroase aplicaţii practice prezentate vin să sublinieze importanţa cunoaşterii operaţiilor cu matrice în rezolvarea multor probleme din viaţa cotidiană.**

**Istoric. Matricele au fost descoperite de doi matematicieni englezi Arthur Cayley (1821-1895 – cu studii la celebrul „Trinity College” în Cambridge) şi James Joseph Sylvester (1814-1897 – în 1878 creează celebra „The American Journal of Mathematics”) colaborator al lui Cayley, el fiind cel care în 1850 foloseşte termenul de matrice (termenul latin fiind „matrix” pentru matcă). Lor li se adaugă W. Hamilton (1805-1865) şi A. Cauchy (1789-1857). În matematică o matrice este un „container” de informaţie evaluabilă.**



## 1.1. MATRICE

### Tabel de tip matriceal

Poate nici un capitol al matematicii studiate în liceu nu beneficiază de atât de multe aplicaţii în cele mai diverse domenii ale vieţii sociale. De aceea am ilustrat fiecare operaţie prin aplicaţii diferite. Multe probleme practice se rezolvă utilizând operaţiile aritmetice asupra unor date  asociate problemelor. Suntem obligaţi să folosim matrice atunci când vorbim de articole care au **două caracteristici**. Printr-o organizare adecvată a datelor în **blocuri de numere**, putem utiliza aceste operaţii aritmetice într-o manieră eficientă. Scrierea lor astfel face prelucrarea uşoară cu ajutorul computerului. De exemplu, o reţea actuală de comunicaţii conţine un număr mare de vârfuri şi muchii (de ordinul milioanelor). Reprezentarea ei plană este practic imposibilă. O alternativă la realizarea ei în plan este utilizarea matricelor.

**Exemplul 1.** Vânzările în leasing (pe 3 ani) a următoarelor mărci de autoturisme (număr de bucăți) BMW, MERCEDES, FORD, TOYOTA, RENAULT, în cele patru trimestre ale unui an sunt sintetizate în tabelul de mai jos.

| Marca \ Trimestrul | I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|
| BMW | 173 | 191 | 203 | 215 |
| MERCEDES | 112 | 123 | 106 | 137 |
| FORD | 98 | 107 | 109 | 126 |
| TOYOTA | 75 | 82 | 76 | 93 |
| RENAULT | 205 | 211 | 200 | 273 |

În acest tabel **pe linii** se citesc mărcile de autoturisme, iar **pe coloane** citim numărul de exemplare vândute în leasing în cursul unui anume trimestru. De exemplu, în linia întâi, corespunzătoare mărcii BMW, şi coloana trei, corespunzătoare trimestrului III, găsim numărul 203, ceea ce înseamnă că în trimestrul III al anului s-au vândut 203 autoturisme BMW. În linia trei, corespunzător mărcii FORD şi coloana a doua, corespunzător trimestrului al II-lea, întâlnim numărul 107, ceea ce se traduce prin aceea că în trimestrul al II-lea s-au vândut 107 autoturisme marca FORD. Datele din acest tabel le putem sintetiza într-o formă restrânsă astfel:

$$\begin{pmatrix} 173 & 191 & 203 & 215 \\ 112 & 123 & 106 & 137 \\ 98 & 107 & 109 & 126 \\ 75 & 82 & 76 & 93 \\ 205 & 211 & 200 & 273 \end{pmatrix}$$

Observăm că acest tabel are cinci linii (corespunzătoare celor cinci mărci de autoturisme) şi patru coloane (corespunzătoare celor patru trimestre).

Un astfel de tabel în care datele sunt aşezate pe linii şi coloane îl numim **tabel de tip matriceal**. Tabelele de tip matriceal stau la baza noțiunii matematice de matrice. Elementele tabelului matriceal, numerele din tabel, le-am închis între paranteze pentru a preciza că aceasta este toată mulțimea de elemente.

Observăm că indicând un număr din tabel trebuie să-i precizăm două elemente: **linia** şi **coloana** pe care se află. Deci pentru identificarea unui element avem nevoie de doi indici: unul pentru linie şi altul pentru coloană. Tabelul de mai sus îl putem reprezenta sub forma alăturată:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{pmatrix}$$

unde, de exemplu, $a_{11} = 173$, $a_{12} = 191$, $a_{22} = 123$, $a_{43} = 76$, $a_{54} = 273$.

Cât sunt: $a_{24}$, $a_{33}$, $a_{42}$, $a_{53}$ ? Care este semnificația lor?

**Exemplul 2.** Clasamentul diviziei A la fotbal în 2005, în urma etapei a XIX-a, pentru primele cinci echipe arată astfel:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. STEAUA | 12 | 5 | 2 | 41 |
| 2. DINAMO | 12 | 0 | 7 | 36 |
| 3. RAPID | 10 | 5 | 4 | 35 |
| 4. FARUL | 10 | 4 | 5 | 34 |
| 5. F.C. NAȚIONAL | 8 | 6 | 5 | 30 |

$$\begin{pmatrix} 12 & 5 & 2 & 41 \\ 12 & 0 & 7 & 36 \\ 10 & 5 & 4 & 35 \\ 10 & 4 & 5 & 34 \\ 8 & 6 & 5 & 30 \end{pmatrix}$$

unde pe prima coloană este trecut numărul de meciuri câştigate, pe a doua numărul de meciuri egale, pe a treia numărul de meciuri pierdute, iar pe ultima coloană numărul de puncte (3 p pentru victorie, 1 p pentru meci egal şi 0 p pentru înfrângere).

Tabelul de tip matriceal este reprezentat mai sus.

Fie $\mathbb{C}$, mulțimea numerelor complexe,
$N_m = \{1, 2, \dots, m\}$, $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$.

**Definiție**. Se numește matrice de tip $(m,n)$ sau încă $(m \times n)$ cu elemente din $\mathbb{C}$ o funcție $A: N_m \times N_n \to \mathbb{C}$.

---

Valorile funcției $A(i,j) = a_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ se numesc **elementele matricei**.

**Notații**. Matricea A se reprezintă printr-un tabel dreptunghiular cu $m$ linii și $n$ coloane, corespunzător celor $mn$ elemente.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ținând seama de aranjarea elementelor în tabel pe linii și coloane în loc de matrice de tip $(m,n)$ vom spune matrice cu $m$ linii și $n$ coloane.

Uneori, pentru simplitatea scrierii, această matrice se notează $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ sau când nici o confuzie nu-i posibilă, doar $A = (a_{ij})$.Pentru elementul $a_{ij}$, indicele $i$ arată linia pe care se află elementul, iar al doilea indice $j$ indică pe ce coloană este situat. Liniile matricei sunt mulțimile ordonate: $L_1 = (a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n})$,
$L_2 = (a_{21} \quad a_{22} \quad \dots \quad a_{2n})$, ..., $L_m = (a_{m1} \quad a_{m2} \quad \dots \quad a_{mn})$.
Elementele din linii le citim de la stânga la dreapta. Coloanele matricei sunt mulțimile ordonate:

$$C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad C_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Elementele din coloane le citim de sus în jos.
Vom nota matricele cu litere mari $A$, $A_1$, $A'$, $B$, $B_1$, $B'$, ..., $X$, $X_1$, $X'$,...
Mulțimea matricelor de tip $(m,n)$ cu elemente complexe o notăm cu $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.
Analog, notăm $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Q})$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{N})$ pentru mulțimile de matrice de tip $(m,n)$ cu elemente numere reale, raționale,
întregi și respectiv naturale. Cum $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, deducem
$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{N}) \subset \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Q}) \subset \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

**Exemple**

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{N})$;

$B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 4 & -2 & 5\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{Z})$;

$D=\begin{pmatrix}1 & \pi & \sqrt{3}\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$;

$E=\begin{pmatrix}3i\\ -5\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$.

$C=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -3 & 0\\ 2 & \frac{5}{4} & \frac{1}{3}\\ 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{5}\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{Q})$

## Matrice particulare

**1)** O matrice de tipul $(1,n)$ (cu o linie şi n coloane) se numeşte **matrice linie** (sau **vector linie**) şi are forma $A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \dots & a_n\end{pmatrix}$

**Exemple. a) Un vector $\vec{u}$ din plan, în reperul $(O,\vec{i},\vec{j})$, $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ poate fi gândit ca o matrice linie cu două coloane de forma $\vec{u}=(x,y)$.**

**b) În exemplul practic prezentat la începutul capitolului, pentru marca MERCEDES avem matricea linie $\begin{pmatrix}112 & 123 & 106 & 137\end{pmatrix}$. Aceste patru numere corespund vânzărilor din cele patru trimestre ale anului considerat.**

**2)** O matrice de tipul $(m,1)$ (cu $m$ linii şi o coloană) se numeşte **matrice coloană** (sau **vector coloană**) şi are forma:

$$A=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix}$$

**Exemple. a) Vectorul $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ din planul $(O,\vec{i},\vec{j})$ îl putem gândi ca o matrice coloană cu două linii de forma $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$**

**b) În exemplul practic analizat, vânzările de autoturisme din trimestrul al treilea le putem reprezenta prin coloana:**

$$\begin{pmatrix}203\\ 106\\ 109\\ 76\\ 200\end{pmatrix}$$

**3)** O matrice de tip $(m,n)$ cu toate elementele egale cu zero se numeşte **matricea zero** (nulă). Se notează cu $O_{m,n}$ sau simplu O.

$$O_{m,n}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$$

**4)** Dacă numărul de coloane este egal cu numărul de linii, adică $m=n$, atunci matricea se numeşte **pătratică de ordin n.**
Are forma:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

Sistemul ordonat de elemente $(a_{11},a_{22},...,a_{nn})$ reprezintă **diagonala principală** a matricei A, iar suma acestor elemente $a_{11}+a_{22}+...+a_{nn}$ se numeşte

**urma matricei** A, notată $Tr(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

(*Tr* provine din prescurtarea cuvântului francez trace = urmă). Sistemul ordonat de elemente $(a_{1n}, a_{2n-1}, ..., a_{n1})$ se numeşte **diagonala secundară** a matricei *A*.
Mulțimea matricelor pătratice de ordin n cu elemente numere complexe o notăm $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ în loc de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$.

**Exemple. 1)** $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$**, are diagonala principală** $(1,2)$ **şi** $Tr(A)=1+2=3$**, iar diagonala secundară** $(-1,0)$**.**

**2)** $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$**, are diagonala principală** $(-1,-5,9)$ **şi** $Tr(A)=-1-5+9=3$**, iar diagonala secundară** $(-3,-5,7)$**.**

**3) Printre matricele pătratice de ordin n, una este foarte importantă. Aceasta este:**

$$I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

**şi se numeşte matricea unitate de ordin n (pe diagonala principală are toate elementele egale cu 1, iar în rest sunt elementele egale cu zero). Uneori pentru scrierea ei se utilizează simbolul lui Kronecker** $\delta_{ij}=\begin{cases} 1, & \text{dacă } i=j \\ 0, & \text{dacă } i\neq j \end{cases}$**. Deci,** $I_n=(\delta_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$**.**

**Matricele unitate de ordin 2 şi respectiv 3 sunt:** $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**5)** Matricea pătratică $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se numeşte **triunghiulară** dacă are una din formele:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ sau } A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

**6)** Matricea pătratică $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se numeşte **diagonală** dacă

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

În particular, dacă $a_{11}=a_{22}=...=a_{nn}=\alpha$, atunci matricea A se numeşte **scalară**.

## Utilizarea matricelor în reprezentarea datelor

**Prezentăm aici câteva aplicații extrem de interesante ale matricelor în modelarea unor probleme practice, asupra cărora vom reveni atunci când vom vorbi despre operațiile cu matrice pentru a traduce semnificația lor la nivelul problemei discutate.**

**1) Reprezentarea relațiilor utilizând matricele. Fie $A=\{a_1,a_2,...,a_m\}$, $B=\{b_1,b_2,...,b_n\}$, iar $\mathfrak{R}$ o relație de la *A* la *B*. Această relație o reprezentăm printr-o matrice $\mathcal{M}_{\mathfrak{R}}=(m_{ij})$, unde**

$$m_{ij}=\begin{cases}1, \text{ dacă } (a_i,b_j)\in\mathfrak{R}, \text{ deci dacă } a_i \text{ se află în relația } \mathfrak{R} \text{ cu } b_j\\ 0, \text{ în caz contrar}\end{cases}$$

**Matricea $\mathcal{M}_{\mathfrak{R}}$ se numește matricea zero-unu.**

**Exemplu. Fie $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2\}$ ,. Atunci $a\mathfrak{R}b \Leftrightarrow (a\in A, b\in B, a>b)$.**

**Avem $\mathfrak{R}=\{(2,1),(3,1),(3,2)\}$, iar matricea asociată acestei relații este $\mathcal{M}_{\mathfrak{R}}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\1&1\end{pmatrix}$.**

**Prezența lui 1 în matrice arată că perechile $(2,1),(3,1),(3,2)$, aparțin relației $\mathfrak{R}$, iar 0 arată că nici o altă pereche nu aparține lui $\mathfrak{R}$.**

**2) Grafurile și matricele. Teoria grafurilor este unul dintre cele mai importante capitole ale matematicilor aplicate (studiul rețelelor de telecomunicații, problema transporturilor etc.). Un graf neorientat G, este format din două mulțimi: 1) o mulțime V ale cărei elemente sunt numite vârfuri (sau puncte sau noduri) ale lui G și 2) o mulțime M, de perechi neordonate ale vârfurilor numite muchii ale lui G. Graful G se notează $G(V,M)$, pentru a pune în evidență cele două mulțimi. Două vârfuri u,v sunt adiacente dacă există o muchie $m=\{u,v\}$. În acest caz u,v se numesc capetele muchiei m, iar m se spune că unește u și v sau încă m este incidentă în fiecare din capetele u,v. Grafurile se reprezintă în plan prin diagrame. Fiecare vârf $v\in V$ este reprezentat printr-un punct sau un cerc mic și fiecare muchie $m=\{u,v\}$ este reprezentată printr-un segment (curbă) care unește capetele u,v. Fiecare muchie reprezintă o legătură de comunicare directă între două noduri ale rețelei. Fie graful cu diagrama din Fig.1.**

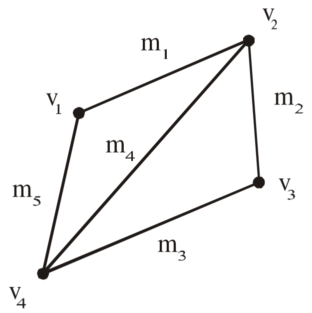


Fig. 1

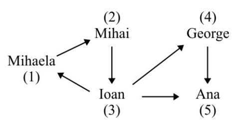
**Atunci $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$, $M=\{m_1,m_2,m_3,m_4,m_5\}$, unde $m_1=\{v_1,v_2\}$, $m_2=\{v_2,v_3\}$, $m_3=\{v_3,v_4\}$, $m_4=\{v_2,v_4\}$, $m_5=\{v_1,v_4\}$.**

**Matricea $A=(a_{ij})$ asociată acestui graf are elementele**

$$a_{ij}=\begin{cases}1, \text{ dacă } \{v_i,v_j\} \text{ este muchie în graf}\\ 0, \text{ în caz contrar}\end{cases}$$

$$A=\begin{array}{c c}& \begin{array}{cccc}v_1&v_2&v_3&v_4\end{array}\\ \begin{array}{c}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{array} & \begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}\end{array}$$

**Matricea A se numește matricea adiacentă grafului. Aici :**
**Suma elementelor dintr-o linie dă gradul vârfului din acea linie (adică numărul de muchii incidente din acel vârf). Pentru $v_2$ avem $\text{grad}(v_2)=3$ (avem muchiile $m_1,m_2,m_4$), pentru $v_3$ avem $\text{grad}(v_3)=2$ (avem muchiile incidente $m_2,m_3$).**




**Un graf $G(V,M)$ se numește orientat dacă mulțimea M este**

**formată din perechi ordonate de elemente din V. Se utilizează o săgeată de la $u$ la $v$ pentru a indica direcția muchiei $(u,v)$.**

**Cu acest tip de grafuri se pot modela comportarea unor grupuri de oameni, rezultatele unui turneu de fotbal (tenis, etc.),**

**Grafuri influență. În studiul comportării unui grup este de observat că anumite persoane pot influența gândirea altora. Un graf orientat numit graf influență poate fi utilizat pentru modelarea acestui comportament. Fiecare persoană este reprezentată printr-un vârf. Avem o muchie de la a la b dacă persoana reprezentată prin a influențează persoana reprezentată prin b. Matricea adiacentă este:**

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ A = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

**Graful turneului**

**Într-un turneu de fotbal fiecare echipă joacă cu fiecare altă echipă exact o dată. La fiecare meci o echipă este câștigătoare. Echipele participante sunt {A.C. Milan (1), Bayern München (2), F.C. Barcelona (3), Ajax (4), Manchester United (5)}. Graful orientat al turneului este (am notat cu $(a,b)$ muchia dacă echipa a bate echipa b (Fig.2)). Scrieți matricea adiacentă asociată grafului.**

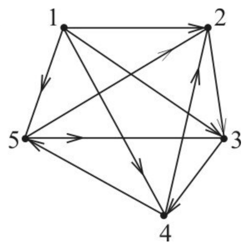


Fig.2

## 1.2. OPERAȚII CU MATRICE

### 1) Egalitatea a două matrice

Cum matricea este o funcție are sens să vorbim de egalitatea a două matrice. Reamintim că dacă $f: A \to B$, $g: C \to D$ sunt două funcții, atunci spunem că ele sunt egale dacă: 1) $A = C$ (domeniile sunt egale), 2) $B = D$ (codomeniile sunt egale) și 3) $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A$ (punctual funcțiile coincid).

Acum putem formula următoarea:

**Definiție**. Fie matricele $A: N_m \times N_n \to K$, $B: N_{m_1} \times N_{n_1} \to K_1$, $K$, $K_1 \subseteq \mathbb{C}$. Spunem că matricele A și B **sunt egale** dacă: 1) $m = m_1$ și $n = n_1$ (matricele au același tip), 2) $K = K_1$ și 3) $A(i,j) = B(i,j)$, $\forall i = \overline{1,m}$, $\forall j = \overline{1,n}$ (sau $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i = \overline{1,m}$, $\forall j = \overline{1,n}$, **elementele corespunzătoare sunt egale**). Scriem $A = B$.

Două elemente, $a_{ij}$ din matricea $A$ și $b_{ij}$ din matricea $B$, sunt corespunzătoare dacă sunt situate pe aceeași linie și aceeași coloană în fiecare din matrice.

**Observație.** Deci două matrice $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, de același tip, sunt egale dacă elementele coespunzătoare sunt egale.

**Exemplu. Să se determine $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ astfel încât să avem egalitatea matricelor:**
$\begin{pmatrix} y+1 & 3^x-2 \\ 2z+1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & t-3 \end{pmatrix}$. **Din definiție avem egalitățile** $y+1=4$, $3^x-2=1$,

$2z+1=-2$, $0=t-3$, **adică** $y=3$, $3^x=3 \Leftrightarrow x=1$, $z=-\frac{3}{2}$, $t=3$.

## 2) Transpusa unei matrice

Este o primă operație simplă care se efectuează asupra matricelor.

**Definiție**. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. **Transpusa matricei** A este matricea notată ${}^tA \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$, care se obține din A prin schimbarea liniilor în coloane (sau a coloanelor în linii): linia întâi din A devine coloana întâi în ${}^tA$, linia a doua din A devine coloana a doua în ${}^tA$, etc.

Operația prin care fiecărei matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ i se asociază matricea ${}^tA \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ se numeşte **operația de transpunere a matricelor**.

**Observații. 1)** Prin operația de transpunere a unei matrice pătratice de ordin n, elementele de pe diagonala principală rămân pe loc – cei doi indici fiind egali – ceea ce înseamnă că $Tr\left({}^tA\right) = Tr(A)$.

**2)** ${}^t\left({}^tA\right) = A$, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

**Exemple. 1)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{Z}) \Rightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{Z})$

**2)** $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{Z}) \Rightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{Z})$

**3)** $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \sqrt{3} \\ \pi & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \Rightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & \pi \\ -1 & 1 \\ \sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$

**4) Matrice simetrică. O matrice pătratică de ordin n, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se numeşte simetrică dacă $A = {}^tA$, ceea ce-i echivalent cu $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall\, i = \overline{1,n}$, $\forall\, j = \overline{1,n}$. Prin urmare, într-o matrice simetrică elementele de pe diagonala principală rămân pe loc, iar celelalte sunt simetrice în raport cu această diagonală. Deci este suficient să ştim elementele de pe diagonala principală şi de deasupra acesteia, pentru a completa celelalte elemente prin simetrie față de diagonala principală.**
**Dacă $A$ este o matrice simetrică, atunci forma ei este:**

**a) pentru $n=2$, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$; b) pentru $n=3$, $A=\begin{pmatrix} x & a & b \\ a & y & c \\ b & c & z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.**

**Matrice antisimetrică. O matrice pătratică de ordin $n$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se numeşte antisimetrică dacă $A=-{}^tA$, adică echivalent cu $a_{ij}=-a_{ji}$, $\forall i=\overline{1,n}$, $\forall j=\overline{1,n}$. Dacă punem $i=j$, atunci din $a_{ii}=-a_{ii}$, rezultă $a_{ii}=0$, $\forall i=\overline{1,n}$, ceea ce arată că într-o matrice antisimetrică elementele de pe diagonala principală sunt egale cu zero. În plus, dacă se cunosc elementele de deasupra acestuia, atunci pentru a le obţine pe cele de sub diagonala principală le simetrizăm pe cele de deasupra diagonalei şi le schimbăm semnul. Analog se procedează dacă se cunosc elementele de pe diagonala principală şi de sub aceasta.**
**Dacă *A* este o matrice antisimetrică, atunci forma ei este:**

**a) pentru $n=2$, $A=\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$; b) pentru $n=3$, $A=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.**

## 3) Adunarea matricelor

Am văzut că dacă $f,g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, atunci suma funcţiilor *f*, *g* este funcţia $f+g : A \to \mathbb{R}$, definită prin $(f+g)(a)=f(a)+g(a)$, $\forall a \in A$.
Cum şi matricele sunt funcţii are sens să vorbim de adunarea lor. Mai precis are loc următoarea:

**Definiţie**. Fie $A=(a_{ij}), B=(b_{ij}), C=(c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Matricea $C$ se numeşte **suma** matricelor *A* şi *B* dacă $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, $\forall i=\overline{1,m}$, $\forall j=\overline{1,n}$.

Operaţia prin care **oricăror două matrice de acelaşi tip** li se asociază suma lor se numeşte **adunarea matricelor**.

**Observaţii.** **1**) Se pot aduna numai matrice care **sunt de acelaşi tip**, adică au acelaşi număr de linii şi respectiv acelaşi număr de coloane. Rezultatul este o matrice de acelaşi tip. Deci $A,B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}) \Rightarrow A+B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

**2**) Explicit adunarea matricelor A, B înseamnă

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Spunem că adunarea matricelor se face pe componente.
**3)** Dacă $A$, $B$ sunt matrice linie (sau matrice coloană) de aceleaşi dimensiuni, atunci adunarea lor coincide cu adunarea vectorilor.
**Exemple . Să se calculeze $A+B$ pentru: 1) $A=(-2 \quad 3 \quad 5)$, $B=(4 \quad -2 \quad 1)$;**

**2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.**

**R. 1) Observăm că $A, B \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{Z})$. Avem adunarea a doi vectori. Obţinem:**

$$A+B=(-2+4 \quad 3+(-2) \quad 5+1)=(2 \quad 1 \quad 6)$$

**2) Cele două matrice sunt de acelaşi tip, $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Deci are sens suma lor.**

**Avem:** $A+B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+0 & 1+1 \\ -1+1 & 1+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**3) Cum $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{Z})$, $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ sunt de tipuri diferite ele nu se pot aduna.**

## Proprietăţi ale adunării matricelor

Ţinând seama de proprietăţile pe care le are adunarea numerelor complexe şi egalitatea a două matrice, se stabilesc uşor următoarele proprietăţi:

**A1)** (**Asociativitatea adunării**) Adunarea matricelor este asociativă, adică $(A+B)+C=A+(B+C)$, $\forall A,B,C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

**A2)** (**Comutativitatea adunării**) Adunarea matricelor este comutativă, adică $A+B=B+A$, $\forall A,B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

**A3)** (**Element neutru**) Adunarea matricelor admite matricea nulă ca **element neutru**, adică $A+O_{m,n}=A$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

**A4)** (**Elemente opuse**) Orice matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ are o opusă, notată cu $-A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ astfel încât $A+(-A)=O_{m,n}$.

Dacă $A=(a_{ij})$, atunci $-A=(-a_{ij})$, adică opusa lui $A, -A$, se obţine din $A$ prin **schimbarea semnelor tuturor elementelor sale**.

**Observaţii. 1**) Mulţimea $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ înzestrată cu operaţia de adunare şi având proprietăţile **A1)** – **A4**) spunem că formează un **grup comutativ** (sau **abelian**).
**2**) În loc să scriem $A+(-B)$, notăm $A-B$ şi spunem că facem **diferenţa** dintre matricea $A$ şi matricea $B$. Deci, **în scăderea a două matrice elementele se scad pe componente**.

**Exemple. 1) Fie $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$. Atunci $-A=\begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.**

2) Fie $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\\ -4 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}$.

Atunci $\left(A, {}^tB \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{Z})\right)$: $A-{}^tB=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\\ -4 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -4\\ -1 & 6\\ -4 & 4\end{pmatrix}$.

**3)** În virtutea proprietăților **A1)** – **A4)**, regulile de calcul relative la adunarea matricelor sunt identice cu acelea de la adunarea numerelor complexe. Dacă avem de adunat trei matrice de același tip *A*, *B*, *C*, atunci efectuăm, de exemplu, suma dintre matricea *A* și matricea *B*, care este matricea $A+B$, iar aceasta o adunăm cu matricea *C*. De altfel, operațiile indicate pentru matrice le păstrăm pentru elementele corespunzătoare ale matricelor.

**Exemplu. Fie matricele** $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0 & 5\\ 3 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$ **pentru care să calculăm** $A-B-C$.

**Avem:** $A-B-C=\begin{pmatrix}1-(-2)-0 & -1-1-1 & 0-0-0 & 3-5-1\\ 0-3-(-1) & 2-(-1)-0 & 4-1-(-1) & 1-1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -3 & 0 & -3\\ -2 & 3 & 4 & 0\end{pmatrix}$

**4)** Se verifică imediat egalitatea ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$, $\forall A,B\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ (**transpusa sumei a două matrice este egală cu suma transpuselor matricelor**).

## Aplicații la adunarea matricelor

**1. Animația și matricele. O figură în plan poate fi stocată în calculator ca o mulțime de vârfuri. Vârfurile pot fi marcate și unite prin segmente pentru a obține figura. Dacă sunt n vârfuri ele pot fi stocate într-o matrice $2\times n$. Abscisele $x$ sunt stocate în prima linie, iar ordonatele $y$ în a doua linie. Fiecare două vârfuri consecutive se unesc printr-un segment. Fie $A(4,6)$, $B(6,4)$, $C(4,1)$, $D(2,4)$ și patrulaterul *ABCD* este un "zmeu". (Fig.3)**

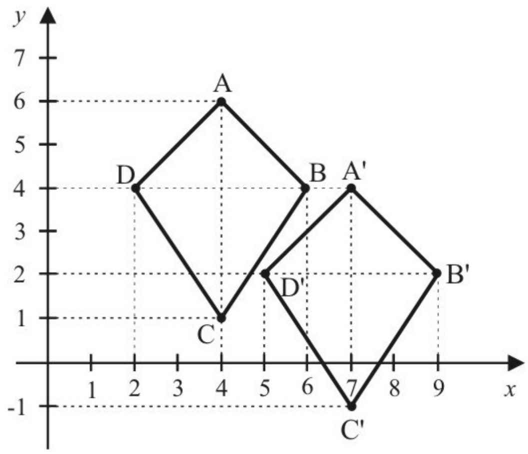


Fig.3

**Matricea asociată acestui "zmeu" este $S=\begin{pmatrix}4 & 6 & 4 & 2\\ 6 & 4 & 1 & 4\end{pmatrix}$. Fie matricea $T=\begin{pmatrix}3 & 3 & 3 & 3\\ -2 & -2 & -2 & -2\end{pmatrix}$.**

**Atunci $S+T=\begin{pmatrix}7 & 9 & 7 & 5\\ 4 & 2 & -1 & 2\end{pmatrix}$ și avem punctele $A'(7,4)$, $B'(9,2)$, $C'(7,-1)$, $D'(5,2)$, adică „zmeul" A'B'C'D' se obține din ABCD printr-o translație de-a lungul axei *Ox* cu 3 unități și o coborâm pe verticală cu 2 unități.**

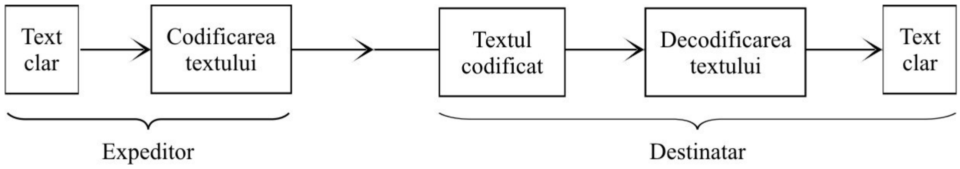



Fig.4

**2. Criptologia şi matricele. Criptologia (cripto = ascuns) este la fel de veche ca şi limbajul. Odată cu transmiterea de mesaje, oamenii au avut nevoia ca acestea ajunse în mâinile unor persoane indezirabile să nu poată fi decodificate şi deci citite. Astăzi dezvoltarea tot mai rapidă a telecomunicațiilor, a comunicațiilor electronice, a tranzacțiilor bancare, a plăților cu cărți de credit, etc. au impus tot mai mult criptologia. Scopul criptologiei este de a transmite şi proteja informațiile, asigurându-le confidențialitatea dintr-un mesaj. Criptografia este studiul tehnicilor utilizate pentru a codifica un text inteligibil (clar). După codificarea textului, printr-un anumit procedeu, se obține textul cifrat (sau codificat), care odată ajuns la destinatar acesta pentru a-l aduce la forma textului inițial (inteligibil) trebuie să-l decodifice având la îndemână procedeul utilizat de expeditor, făcând astfel operația inversă realizată de expeditor. (Fig.4)**
**Un procedeu de codificare a unui mesaj este cel realizat prin substituții literale, când textul clar este cifrat literă cu literă sau prin grupuri de două sau trei litere.**
**Cifrul lui Iuliu Cesar (împărat roman). Este unul din cifrurile cele mai simple. Pentru a-şi cifra o parte a corespondenței realiza o decalare a alfabetului clar cu 3 poziții.**

| Alfabetul clar | a | b | c | d | e | f | g | h | i | j | k | l | m | n | o | p | q | r | s | t | u | v | w | x | y | z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Alfabetul cifrat | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z | A | B | C |

**Cheia cifrului este această decalare. De exemplu, textul "te ador" se codifică şi devine cu acest cifru un text total neinteligibil "WHDGRU". Destinatarului nu-i rămâne decât să ia alfabetul cifrat şi să observe că lui W îi corespunde t în alfabetul clar, adică $W \to t$, $H \to e$, $D \to a$, $G \to d$, $R \to o$, $U \to r$ şi obține mesajul inițial "te ador".**
**Dezavantajul acestui cod este acela că odată descoperită o singură literă permite descifrarea întregului mesaj. Se spune că "am spart" codul.**

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | a | b | c | d | e |
| 2 | f | g | h | i j | k |
| 3 | l | m | n | o | p |
| 4 | q | r | s | t | u |
| 5 | v | w | x | y | z |

**Pătratul lui Polybe (≈ 207-130 î.C.). În acest caz fiecărei litere din textul clar îi corespunde numărul format din două cifre (numărul liniei şi numărul coloanei pe care se află litera).**
**Textul clar al expeditorului: te ador**
**Textul codificat al destinatarului: 44 15 11 14 34 42**
**Destinatarul face operația inversă de decodificare a textului utilizând Pătratul lui Polybe. Putem complica codificarea mesajelor observând că fiecărei litere îi corespund două cifre sub formă de coloană: $a \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b \to \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, …, $z \to \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$, unde primul element este numărul liniei, iar al doilea este numărul coloanei pe care se află litera în Pătratul lui Polybe.**

**Textului "te ador" îi corespunde matricea** $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$**.Considerăm matricea**

$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & \dots \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 5 & 4 & \dots \end{pmatrix}$.

**Pentru matricea A, considerăm M cu atâtea coloane câte are A, adică cu 6.**

**Deci** $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. **Calculăm** $S = A + M = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 5 & 8 & 5 \\ 9 & 9 & 4 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ **şi mesajul cifrat devine: 5939 44 56 85 57. Mesajul obținut nu poate fi decodificat cu Pătratul lui Polybe. Cifrele 6, 7, 8, 9 nu figurează în cod. Ajuns la destinatar acesta îl pune sub forma S, apoi din S scade matricea M şi rezultă A. De aici cu ajutorul Pătratului lui Polybe decriptarea este imediată.**

## 4) Înmulțirea cu scalari a matricelor

Am văzut la vectori că dacă $\lambda \in \mathbb{R}$ şi $\vec{u} = (x, y)$, atunci vectorul $\lambda\vec{u}$ are componentele obținute din cele ale vectorului $\vec{u}$ prin înmulțire cu scalarul $\lambda$, adică $\lambda\vec{u} = (\lambda x, \lambda y)$.

O situație similară are loc dacă înmulțim o matrice cu un scalar. Mai precis are loc următoarea:

**Definiție**. Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $\lambda \in \mathbb{C}$. Se numeşte **produsul dintre scalarul** $\lambda \in \mathbb{C}$ şi **matricea** A, matricea notată $\lambda A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ definită prin $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

A înmulți o matrice cu un scalar revine la a înmulți toate elementele matricei cu acest scalar.

Operația prin care fiecărui număr complex $\lambda$ şi fiecărei matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ li se asociază produsul $\lambda A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, se numeşte **înmulțirea cu scalari a matricelor**.

Deci, $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$.

**Observații. 1)** Dacă $A$ este o matrice linie sau coloană, atunci înmulțirea ei cu scalari coincide cu înmulțirea vectorilor cu scalari.

**2)** Arătați că ${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

**Exemplu. Dacă** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, **atunci** $3A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ -9 & 12 & 15 \end{pmatrix}$.

## Proprietăți ale înmulțirii matricelor cu scalari

Au loc următoarele proprietăți:

| |
|---|
| **S1)** $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$, $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{C}$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. |
| **S2)** $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. |
| **S3)** $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$, $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{C}$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. |
| **S4)** $1 \cdot A = A$, $1 \in \mathbb{C}$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. |

Verificarea proprietăților este imediată (se face apel la asociativitatea înmulțirii numerelor complexe, a distributivității înmulțirii numerelor complexe în raport cu adunarea acestor numere etc.).

Mulțimea $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, împreună cu operațiile de adunare a matricelor şi înmulțirii cu scalari din $\mathbb{C}$ şi proprietățile **A1)** – **A4)**, **S1)** – **S4)**, formează **un spațiu vectorial peste** $\mathbb{C}$.

## Aplicații practice la înmulțirea matricelor cu scalari

$$P = \begin{array}{c} \\ \text{albastru} \\ \text{alb} \\ \text{verde} \\ \text{roşu} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{XL} & \text{XXL} & \text{M} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 12 & 13,5 & 14 \\ 11 & 12 & 12,5 \\ 12,5 & 13 & 13,5 \\ 12 & 12,5 & 13 \end{pmatrix} \end{array}$$

**1. Matricea alăturată conține prețurile de vânzare (în euro) pentru diferite sortimente de cămăşi (de mărimi diferite: XL, XXL, M şi culori diferite: albastru, alb, verde, roşu).**

**Ca urmare a creşterii costurilor de producție s-a decis majorarea prețului fiecărui articol cu 2%. Determinați matricea corespunzătoare noilor prețuri.**

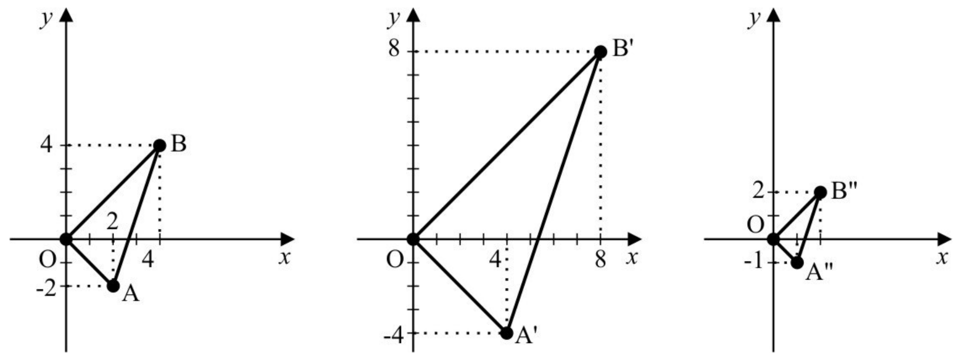
**R. Dacă $x$ este prețul vechi al unui articol, atunci după majorare noul preț va fi $\left(1+\frac{2}{100}\right)x = 1,02x$. Deci, matricea noilor prețuri va fi:**

$$P' = 1,02P = \begin{pmatrix} 1,02\times 12 & 1,02\times 13,5 & 1,02\times 14 \\ 1,02\times 11 & 1,02\times 12 & 1,02\times 12,5 \\ 1,02\times 12,5 & 1,02\times 13 & 1,02\times 13,5 \\ 1,02\times 12 & 1,02\times 12,5 & 1,02\times 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12,24 & 13,77 & 14,28 \\ 11,22 & 12,24 & 12,75 \\ 12,75 & 13,26 & 13,77 \\ 12,24 & 12,75 & 13,26 \end{pmatrix}$$

**Ce semnifică în această matrice: $p'_{23}$, $p'_{32}$, $p'_{41}$ ?**

**2. Animația şi matricele. Fie A, matricea asociată unei figuri din plan, iar c o constantă reală. Atunci cA este matricea asociată noii figuri. Dacă $0 < c < 1$, atunci noua figură este o contracție, iar dacă $c > 1$, atunci noua figură este o dilatare a figurii date.**

**Exemplu.** Fie triunghiul $OAB$, $O(0,0)$, $A(2,-2)$, $B(4,4)$ (Fig.5). Atunci matricea



Triunghiul OAB definit de matricea T — Dilatarea de factor 2 — Contracţia de factor 1/2

Fig.5

asociată este $T=\begin{pmatrix}0 & 2 & 4\\ 0 & -2 & 4\end{pmatrix}$. Pentru $c=2$ (dilatare), avem $2T=\begin{pmatrix}0 & 4 & 8\\ 0 & -4 & 8\end{pmatrix}$ şi figura asociată $OA'B'$. Pentru $c=\frac{1}{2}$ (contracţie), avem $\frac{1}{2}T=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$ pentru care avem triunghiul $OA''B''$.

**3. Criptografia şi matricele.** Transmiteţi unui coleg de clasă un mesaj codificat, utilizând Pătratul lui Polybe, în care matricea asociată o înmulţiţi cu un coeficient număr natural (pe care nu uitaţi să-l comunicaţi colegului în vederea decodificării).

## Probleme rezolvate

**1.** Se consideră matricele: $A=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 4\end{pmatrix}$. Calculaţi: $3A-4\,{}^{t}B+2C$.

**R.** Avem: $3A-4\,{}^{t}B+2C=\begin{pmatrix}3\\ -6\\ 9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-12\\ 4\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\ -2\\ 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19\\ -12\\ 17\end{pmatrix}$.

**2.** Determinaţi numerele $x, y, z, t$ dacă are loc egalitatea:

$$3\begin{pmatrix}1 & -1\\ x & -2y\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}z & -3t\\ 1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

**R.** Egalitatea se scrie succesiv: $\begin{pmatrix}3 & -3\\ 3x & -6y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2z & -6t\\ 2 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ sau

$$\begin{pmatrix}3-2z & -3+6t\\ 3x-2 & -6y-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Din ultima egalitate de matrice rezultă sistemul: $\begin{cases}3-2z=-1\\ -3+6t=1\\ 3x-2=1\\ -6y-10=2\end{cases}$

**cu soluția $x = 1$, $y = -2$, $z = 2$, $t = \frac{2}{3}$.**

**3. Să se determine matricea *X* dacă: $2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - 4X = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.**

**R. Această egalitate este o ecuație matriceală. Operațiile din membrul stâng au sens dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Izolăm termenul care conține necunoscuta și avem:**

$-4X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ **sau** $-4X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. **De aici** $X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

**Observație. Se poate lua $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de forma $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și se aduce membrul stâng la o matrice pătratică de ordinul doi. Se egalează cei doi membri și se ajunge la un sistem de patru ecuații cu patru necunoscute.**

**4. Determinați matricele *X*, *Y* pentru care:** $\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ 2X - Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \end{cases}$

**R. Este un sistem de ecuații matriceale. Pentru rezolvarea lui vom aplica metoda reducerii. Adunăm cele două ecuații, membru cu membru, și se obține (am redus necunoscuta *Y*): $3X = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$, iar de aici: $X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Din prima ecuație:**

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

## 5) Înmulțirea matricelor

Următoarea operație pentru matrice, cea de înmulțire, este mai dificilă. Prezentarea ei prin definiție poate ridica semne de mirare. Utilizarea ei în probleme economice ar justifica o astfel de definiție. Dar resorturile produsului a două matrice, se va vedea, țin de schimbarea de bază pentru mulțimea vectorilor din plan.

**Aplicație practică. O stație de benzină vinde într-o zi 1600 litri de motorină, 1000 litri benzină Premium și 800 litri benzină fără plumb. Știind că prețurile în Euro în acea zi au fost 0,85 €/l motorină, 0,95 €/l benzină Premium și 0,97 €/l benzină fără plumb, să se determine valoarea totală a încasărilor realizate în acea zi la benzinărie.**

**R. Vânzările de carburanți din acea zi de la benzinărie pot fi reprezentate sub formă de matrice linie, matricea $C \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$.**

**Prețurile carburanților per litru le punem sub formă de matrice coloană: $P \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.**

$$\begin{array}{cccc} & \textbf{Motorină} & \textbf{Benzină Premium} & \textbf{Benzină fără Plumb} \\ C = & (1600 & 1000 & 800) \end{array}$$

matrice linie de tip (1, 3)

$$P = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0,85 \\ 0,95 \\ 0,97 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \textbf{Motorină} \\ \textbf{Benzină Premium} \\ \textbf{Benzină fără Plumb} \end{array} \end{array}$$

matrice coloană de tip (3, 1)

**Primul element din C dă numărul de litri de motorină vânduți în acea zi la stația de benzină, iar primul element din P dă prețul unui litru de motorină, iar produsul $1600 \cdot 0,85 = 1360$ € dă valoarea totală încasată din vânzarea motorinei din acea zi.**

**Interpretări similare au elementele al doilea şi al treilea din cele două matrice.**
**Făcând produsul elementelor corespunzătoare din matricele C şi P şi apoi suma acestor produse obținem totalul încasărilor din vânzarea combustibililor din acea zi de la stația de benzină.**

**Deci $1600 \cdot 0,85 + 1000 \cdot 0,95 + 800 \cdot 0,97 = 1360 + 950 + 776 = 3086$ €.**

**Pe scurt avem următoarea scriere:**

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1600 & 1000 & 800 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,85 \\ 0,95 \\ 0,97 \end{pmatrix} = 1600 \cdot 0,85 + 1000 \cdot 0,95 + 800 \cdot 0,97 = 3086 .$$

**Dacă gândim cele două matrice ca fiind doi vectori, regula de calcul dă produsul scalar al acestor vectori.**

Cu aceste elemente formulăm următoarea:

**Definiție**. Definim produsul a două matrice astfel:

**a)** Dacă $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ şi $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$,

atunci **produsul matricelor** $A$, $B$ este matricea

$$A \cdot B = \left( a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \right) \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{C})$$

şi reprezintă produsul scalar al lui $A$ cu $B$.

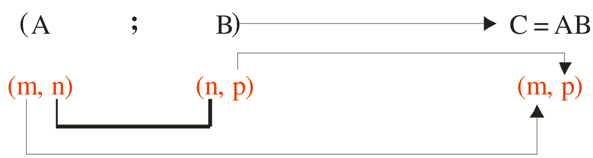
**b)** Dacă $A = \left( a_{ij} \right) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $B = \left( b_{jk} \right) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, atunci **produsul lui $A$ cu B**, în această ordine, este matricea de tip $(m, p)$,

$$C = \left( c_{ij} \right) \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{C}),$$

unde

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \ i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,p} .$$

Observații. 1) Produsul $AB$ a două matrice nu se poate efectua întotdeauna decât dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ adică dacă numărul de coloane ale lui $A$ este egal cu numărul de linii ale lui B, când se obține o matrice




$C = AB \in \mathcal{M}_{m,\,p}(\mathbb{C})$ după schema:

**2)** Pentru a obține elementul $c_{ij}$ din matricea $C$ se ia vectorul de pe linia $i$ (linia $i$) din matricea $A$ (prima matrice) şi vectorul de pe coloana $j$ (coloana $j$, de sus în jos) şi se face produsul lor scalar ca mai jos:

$$\begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & j & \end{array} \\ \begin{pmatrix} \vdots & b_{1j} & \vdots \\ \vdots & b_{2j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{nj} & \vdots \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & j & \end{array} \\ \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \dots & c_{ij} & \dots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \end{array}$$

$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$

Se aşează linia $i$ din matricea $A$ peste coloana $j$ din matricea $B$, se înmulțesc elementele corespunzătoare şi se adună rezultatele.

Dacă se consideră matricea $A$ definită prin cele $m$ linii $L_1$, $L_2$, ..., $L_m$, iar matricea $B$ prin cele $p$ coloane, $C_1$, $C_2$, ..., $C_p$, adică $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix}$ şi respectiv $B = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_p \end{pmatrix}$, atunci elementele matricei $C$ sunt numerele $c_{ij} = L_i C_j$, adică explicit:

$$AB = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \dots \\ L_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1C_1 & L_1C_2 & \dots & L_1C_p \\ L_2C_1 & L_2C_2 & \dots & L_2C_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_mC_1 & L_mC_2 & \dots & L_mC_p \end{pmatrix}$$

Regula prezentată mai sus este cunoscută sub numele de „regula de înmulțire a liniilor cu coloanele”.

Să observăm că elementele liniei $i$ din matricea $C$ se obțin înmulțind pe rând linia $i$ din matricea $A$, cu coloanele matricei $B$.

**Exemplu.** **Să se calculeze produsul $AB$ pentru:**

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{Z}), \qquad B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{Z}).$$

**Cum $A$ este de tipul (2, 3), iar $B$ de tipul (3,2), matricea produs $C = AB$ are sens (numărul de coloane (3) din $A$ este egal cu numărul de linii (3) din B) şi este de tipul (2, 2).**
**Avem:**

$$AB=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$$

**unde elementele liniei întâi din matricea produs $c_{11}$, $c_{12}$ sunt date de:**

$$c_{11}=1\cdot 3+(-2)(-1)+3\cdot 0=5, \qquad c_{12}=1\cdot 1+(-2)(-1)+3\cdot 1=6.$$

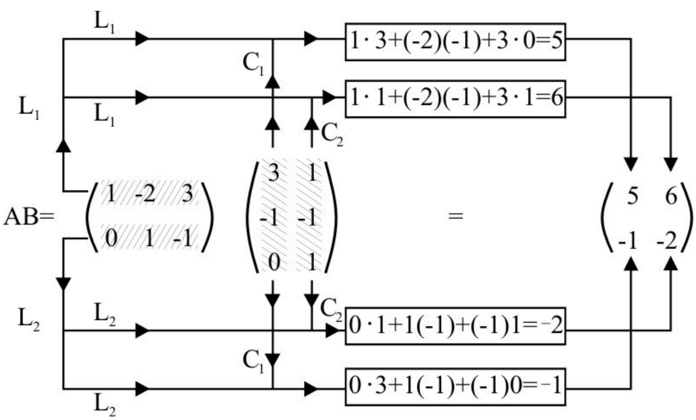
**(în scriere s-au haşurat linia întâi din prima matrice şi cele două coloane din a doua matrice, care contribuie la determinarea elementelor din prima linie a matricei produs; săgeţile indică modul în care se fac produsele pentru a obţine elementul $c_{11}$ ).**

**Pentru a obţine elementele liniei a doua $(c_{21}, c_{22})$ din matricea produs, se consideră linia a doua din prima matrice şi coloanele matricei a doua. Avem $c_{21}=0\cdot 3+1(-1)+(-1)\cdot 0=-1$ (produsele din sumă au factorii daţi de săgeţi):**

$$AB=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$$

$c_{22}=0\cdot 1+1(-1)+(-1)\cdot 1=-2$. **Deci** $AB=\begin{pmatrix}5 & 6\\ -1 & -2\end{pmatrix}$.

**Desfăşurat, procesul de determinare al elementelor matricei AB este redat mai jos:**




**3)** Dacă matricele sunt pătratice $A, B\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci are sens întotdeauna atât $AB$ cât şi $BA$. În general, $AB \neq BA$, adică **înmulţirea matricelor nu este comutativă**. Dacă $AB = BA$, atunci se spune că matricele **comută**.

**Exemplu.** **Dacă** $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, **atunci** $AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, **iar** $BA=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ **şi observăm că** $AB\neq BA$ **.**

### Proprietăți ale înmulțirii matricelor

Următoarele proprietăți vin să faciliteze calculul algebric cu matrice. Are loc următoarea:

**Teoremă**. **I1**) (**Asociativitatea înmulțirii**) Înmulțirea matricelor este asociativă, adică $(AB)C=A(BC)$, $\forall A\in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $\forall B\in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, $\forall C\in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$.

**I2**) (**Distributivitatea înmulțirii în raport cu adunarea**) Înmulțirea matricelor este distributivă (la dreapta şi la stânga) în raport cu adunarea matricelor, adică $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$, $\forall A,B,C$ matrice pentru care au sens operațiile de adunare şi înmulțire.

**I3**) (**Elementul neutru**) Înmulțirea matricelor din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ are element neutru, adică există $I_n$, matricea unitate de ordin n astfel încât $A\cdot I_n=I_n\cdot A=A$, $\forall A\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Se spune că matricea unitate $I_n$, este **element neutru** în raport cu operația de înmulțire a matricelor pe $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}(\mathbb{C})$.

**Demonstrație** **I1**) Fie $A=(a_{ij})\in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B=(b_{jk})\in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, $C=(c_{kl})\in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, $AB=(d_{ik})\in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $BC=(e_{jl})\in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{C})$, $(AB)C=(f_{il})\in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{C})$, $(AB)C=(g_{il})\in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{C})$. Avem:

$$f_{il}=\sum_{k=1}^{p}d_{ik}c_{kl}=\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\right)c_{kl}=\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}c_{kl}=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p}b_{jk}c_{kl}\right)a_{ij}=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}e_{jl}a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}e_{jl}=g_{il},\ \forall\, i=\overline{1,m},\ \forall\, l=\overline{1,q}.$$

**I2**) Temă.

**I3**) Fie $A=(a_{ij})\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $I_n=(\delta_{ij})=\begin{cases}1, \text{ dacă } i=j\\ 0, \text{ în rest}\end{cases}$, $AI_n=(b_{ij})$, $I_nA=(c_{ij})\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Atunci: $b_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\delta_{kj}=a_{ij}\delta_{jj}=a_{ij}$ şi $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\delta_{ik}a_{kj}=\delta_{ii}a_{ij}=a_{ij}$, $\forall i,j=\overline{1,n}$. ■

**Observații.** **1**) Arătați că: a) ${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $\forall B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$;
b) $Tr(AB) = Tr(BA)$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

**2**) Matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se numeşte **inversabilă** dacă există matricea $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A \cdot A' = A' \cdot A = I_n$.

Matricea $A'$, dacă există este unică şi se notează $A' = A^{-1}$ (citim: A la minus unu) şi se numeşte **inversa matricei** A.

**3**) Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Dacă $A = O_n$ sau $B = O_n$, atunci $AB = O_n$. Reciproca nu este adevărată. Avem contraexemplul $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O_2$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O_2$ când $AB = O_2$.

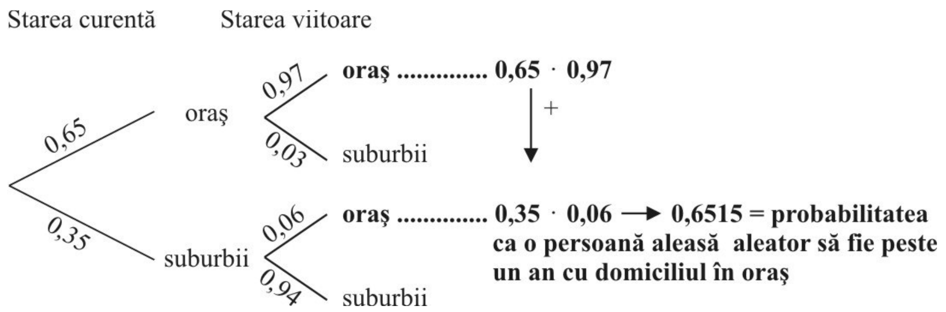
**Exerciții. 1) Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculați transpusele matricelor $A$, $B$, $AB$, $BA$ şi verificați egalitățile ${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$, ${}^t(BA) = {}^tA \cdot {}^tB$.**

**2) Să se determine inversa matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 9 & -2 \end{pmatrix}$ luând $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ m & n & p \\ u & v & z \end{pmatrix}$.**

## Aplicații la înmulțirea matricelor

**1. Migrația populației şi înmulțirea matricelor. Se aşteaptă ca în fiecare an 3% din populația curentă cu reşedința în oraş să se mute în suburbiile acestuia, iar 6% din populația curentă cu reşedința în suburbii să se mute în oraş. În prezent, 65% din totalul populației locuieşte în oraş, iar restul de 35% au domiciliul în suburbii. Presupunem că totalul populației din oraş şi suburbii este constant, care va fi distribuția populației un an mai târziu? Dar după doi ani?**

**R. Arborele diagramă asociat problemei este:**



**Deci peste un an 65,15 % din populație va trăi la oraș, iar 34,85%** $(0,65\cdot 0,03+0,35\cdot 0,94=0,3485)$ **va avea domiciliul în suburbii.**

**Procesul descris mai sus este un lanț Markov cu două stări: starea 1 („locuiește în oraș”), starea 2 („locuiește în suburbii”). Matricea de trecere asociată lanțului Markov este:**

$$T=\begin{array}{c} \\ \text{starea curentă} \end{array}\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array}\overset{\text{starea viitoare}}{\underset{}{\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \end{array}}}\begin{pmatrix}0,97 & 0,03\\ 0,06 & 0,94\end{pmatrix}$$

**Distribuția probabilităților inițiale a populației o reprezentăm ca o matrice linie:** $X_0=\begin{array}{cc}\text{Starea 1} & \text{Starea 2}\\ (0,65 & 0,35)\end{array}$ **(matricea stării inițiale)**

**De fapt** $X_0$ **este o variabilă aleatoare** $X_0:\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0,65 & 0,35\end{pmatrix}$.

**Punând:** $X_1=\begin{array}{cc}\text{Starea 1} & \text{Starea 2}\\ (0,6515 & 0,3485)\end{array}$ **(distribuția după un an)observăm că** $X_1=X_0T$ .

**Analog, dacă** $X_1$ **este distribuția probabilităților după un an, iar** $X_2$ **este distribuția probabilităților după doi ani, atunci:** $X_2=X_1\mathrm{T}=X_0T^2=\begin{array}{cc}\text{Starea 1} & \text{Starea 2}\\ (0,6529 & 0,3471)\end{array}$

**Aceasta înseamnă că după doi ani 65,29 % din populație are domiciliul în oraș, iar 34,71 % din populație este domiciliată în suburbii.**

**2. Animația și înmulțirea matricelor. Se numește transformare liniară a planului** $\mathcal{P}$ **în el însuși o aplicație** $f:\mathcal{P}\to\mathcal{P}$, $f(P)=P'$, $P(x,y)$, $P'(x',y')$ **și** $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$**, unde** $A$ **este o matrice pătratică de ordinul doi. De obicei** $A$ **se notează** $A(f)$ **pentru a indica transformarea căreia se asociază matricea.**

**Fie** $f,g:\mathcal{P}\to\mathcal{P}$ **două transformări liniare ale lui** $\mathcal{P}$, **iar** $A(f)$, $B(g)\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ **matricele asociate transformărilor. Care este legătura între coordonatele punctului** $P''(x'',y'')$ **și cele ale punctului** $P(x,y)$**, dacă** $P''=(g\circ f)(P)$**?**

**Fie** $f(P)=P'$ **cu** $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=A(f)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$. **Avem echivalent**

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=a_{11}x+a_{12}y\\ y'=a_{21}x+a_{22}y\end{cases}$$

**Din** $g(f(P))=g(P')=P''$, **deducem**

$$\begin{pmatrix}x''\\ y''\end{pmatrix}=B(g)\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x''\\ y''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x''=b_{11}x'+b_{12}y'\\ y''=b_{21}x'+b_{12}y'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x''=b_{11}(a_{11}x+a_{12}y)+b_{12}(a_{21}x+a_{22}y)\\ y''=b_{21}(a_{11}x+a_{12}y)+b_{22}(a_{21}x+a_{22}y)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x''=(b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21})x+(b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22})y\\ y''=(b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21})x+(b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22})y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x''\\ y''\end{pmatrix}=B(g)A(f)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

**În concluzie, dacă transformarea liniară *f* este definită prin matricea *A*, iar transformarea liniară *g* prin matricea *B*, atunci transformarea liniară $g \circ f$ este definită prin matricea $BA$.**

**a) Simetria în raport cu axa Ox. Fie punctul $P(x, y)$. Simetricul lui în raport cu axa *Ox* este punctul $P'(x', y')$, unde $x' = 1 \cdot x + 0 \cdot y = x$, $y' = 0 \cdot x - 1 \cdot y = -y$. Din această scriere îi asociem simetriei în raport cu axa *Ox*, matricea $A_{Ox} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dacă punem coordonatele lui *P* sub formă de matrice coloană $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ şi ale lui P', de asemenea $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, atunci legătura între coordonatele acestor puncte este dată de egalitatea matriceală**

$$A_{Ox} X = X' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

**Exemplu. Fie triunghiul *OAB*, $O(0,0)$, $A(2,-2)$, $B(4,-4)$. Determinați simetricul lui în raport cu axa *Ox*. (Fig.6)**

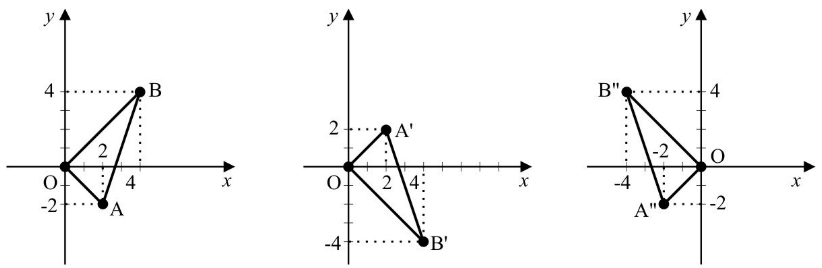
**R. Fie $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ matricea asociată triunghiului (celor trei puncte). Atunci**

**$A_{Ox} T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ dă coordonatele simetricelor vârfurilor *O*, *A*, *B* în raport cu axa *Ox*.**

**Acestea sunt punctele $O(0,0)$, $A'(2,2)$, $B'(4,-4)$ (Fig.6)**

**b) Simetria în raport cu axa *Oy*. Analog simetricul lui $P(x,y)$ în raport cu axa *Oy* este $P''(x'',y'')$, unde $x'' = -1 \cdot x + 0 \cdot y = -x$, $y'' = 0 \cdot x + 1 \cdot y = y$. Acestei simetrii îi asociem matricea $A_{Oy} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, iar legătura între coordonatele punctelor *P* şi $P''$ este dată de egalitatea $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$.**

**Exemplu. Pentru a obține simetricul triunghiului *OAB*, de la a), în raport cu axa *Oy* calculăm $A_{Oy} T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Deci avem punctele $O(0,0)$, $A''(-2,-2)$, $B''(-4,4)$ (Fig.6).**




Triunghiul definit de T | Simetria în raport cu *Ox* | Simetria în raport cu *Oy*

Fig.6

**3. Prognoza vremii şi înmulţirea matricelor. Să presupunem că probabilitatea de a ploua mâine depinde numai de condiţia de a ploua sau nu astăzi. Presupunem că dacă azi plouă, atunci mâine va ploua cu probabilitatea $p \geq 0$. Dacă azi nu plouă, atunci probabilitatea ca mâine să plouă este $q \geq 0$.**
**Constatăm că suntem în cazul unui lanţ Markov cu două stări: 0 „plouă”, 1 „nu plouă”.**

**Matricea probabilităţilor de trecere este:**
$$P = \text{stări curente}\ \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \text{stări viitoare} \\ \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} p & 1-p \\ q & 1-q \end{pmatrix} \end{array}$$

**Dacă $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ şi $X_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ (distribuţia iniţială, pentru azi; $\frac{1}{5}$ = probabilitatea ca azi să plouă şi $\frac{4}{5}$ să nu plouă), atunci $X_1 = X_0 P = \begin{pmatrix} \frac{11}{30} & \frac{19}{30} \end{pmatrix}$ reprezintă distribuţia probabilităţilor pentru mâine. Mâine va ploua cu probabilitatea $\frac{11}{30}$ şi nu va ploua cu probabilitatea $\frac{19}{30}$. Predicţia vremii pentru ziua de poimâine este dată de matricea $X_2 = X_1 P = \begin{pmatrix} \frac{71}{180} & \frac{109}{180} \end{pmatrix}$. De aici probabilitatea ca poimâine să plouă este egală cu $\frac{71}{180}$ şi să nu plouă $\frac{109}{180}$.**

## 6) Ridicarea la putere a unei matrice

Dacă $a \in \mathbb{R}$, atunci $a^2 = a \cdot a$ (înmulţirea lui $a$ cu el însuşi), iar $a^n = a^{n-1} \cdot a$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Observăm că înmulţirea unui număr real cu el însuşi are loc întotdeauna.

Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, atunci pentru a vorbi de $A \cdot A$, trebuie să aibă sens operaţia de înmulţire. Aceasta este definită dacă $m = n$, adică pentru $A$, **matrice pătratică de ordin *n***. Ţinând seama de proprietatea de asociativitate de la înmulţirea matricelor se poate defini ridicarea la putere a unei matrice pătratice astfel:

$$A^k = \begin{cases} A, k = 1 \\ A^{k-1} \cdot A, k \geq 2, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Se verifică imediat următoarele proprietăţi:

**1)** $A^m \cdot A^k = A^{m+k}$, $\left(A^m\right)^k = A^{mk}$, $(\alpha A)^k = \alpha^k \cdot A^k$, $\forall\, m, k \in \mathbb{N}^*$,
$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

**2)** Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi $AB = BA$ (**matricele comută**) atunci $(AB)^k = A^k B^k$,

$\forall k \in \mathbb{N}^*, A^p - B^p = (A-B)\left(A^{p-1} + A^{p-2}B + ... + B^{p-1}\right), \forall p \in \mathbb{N}, p \geq 2$

$(A+B)^p = A^p + C_p^1 A^{p-1}B + ... + C_p^k A^{p-k}B^k + ... + B^p$ (**binomul lui Newton**).

## Aplicații la ridicare la putere a unei matrice

**Matricele se pot utiliza în rezolvarea aplicațiilor în care un şir de evenimente se repetă în timp.**

**1. Proprietarii şi alegerea surselor de căldură. Într-un oraş, comisia de verificare a surselor de căldură în locuințe a realizat un studiu pe o perioadă de 10 ani. Ca surse de căldură sunt folosite: electricitatea (E), gazul natural (G), motorina (M), energia solară (S).** **Matricea de trecere de la o formă la alta de încălzire este:**

$$T = \text{stări curente} \begin{array}{c} \\ E \\ G \\ M \\ S \end{array} \begin{array}{c} \text{stări viitoare} \\ \begin{array}{cccc} E & G & M & S \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,7 & 0,15 & 0,05 & 0,1 \\ 0 & 0,9 & 0,02 & 0,08 \\ 0 & 0,2 & 0,75 & 0,05 \\ 0 & 0,05 & 0 & 0,95 \end{pmatrix} \end{array}$$

**Printre proprietari 20 % utilizează pentru încălzire curentul electric, 35 % gazul natural, 40 % motorină şi 5 % energia solară. Precizați care este distribuția proprietarilor care utilizează fiecare tip de sursă de căldură în a treia decadă.**

**R. Fie $X_0 = (0,2 \quad 0,35 \quad 0,4 \quad 0,05)$ distribuția inițială. Atunci distribuția după prima decadă este $X_1 = X_0T$, după a doua decadă $X_2 = X_1T = X_0T^2$ şi în fine după a treia decadă $X_3 = X_2T = X_0T^3$. Găsim $X_3 = (0,069 \quad 0,502 \quad 0,204 \quad 0,225)$, ceea ce înseamnă că după a treia decadă (după 30 de ani) 6,9 % utilizează pentru încălzire curentul electric, 50,2 % gazul natural, 20,4 % motorina, iar 22,5 % energia solară.**

**2. Bibliotecara şi opțiunile elevilor. Bibliotecara unui colegiu a constatat că în fiecare lună 0,8 % dintre elevi au optat pentru romane în detrimentrul cărților de poezie şi numai 0,1 % dintre pasionații de romane au preferat cărțile de poezie. În prezent, în colegiu 88 % dintre elevi preferă cărțile de poezie şi doar 12 % sunt pasionați de romane. Care va fi ponderea elevilor pasionați de romane sau cărți de poezie după patru luni ?**

**R. Considerăm distribuția inițială $X_0 = (0,88 \quad 0,12)$ şi matricea de trecere este:**

$$T = \text{stări curente} \begin{array}{c} \\ P \\ R \end{array} \begin{array}{c} \text{stări viitoare} \\ \begin{array}{cc} P & R \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,992 & 0,008 \\ 0,001 & 0,999 \end{pmatrix} \end{array}$$

**După o lună distribuția este:**

$$X_1 = X_0T = \begin{pmatrix} \text{număr de elevi} & \text{număr de elevi} \\ \text{pasionați de poezie} & \text{pasionați de romane} \end{pmatrix};$$

**după două luni:** $X_2 = X_1T = X_0T^2, ...,$

**iar după *n* luni:** $X_n = X_{n-1}T = X_0T^n = \begin{pmatrix} \text{număr de elevi} & \text{număr de elevi} \\ \text{pasionați de poezie} & \text{pasionați de romane} \end{pmatrix}.$

## Probleme rezolvate

**1.** **Fie** $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**Să se calculeze** $AB$, $BA$, $AB - BA$, $Tr(AB - BA)$ **şi deduceți că** $AB - BA \neq I_2$.

**R.** **Avem:** $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 1 & 1\cdot 2 + 1\cdot 0 \\ 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1 & 1\cdot 2 + (-1)\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$BA=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot1&1\cdot1+2\cdot(-1)\\1\cdot1+0\cdot1&1\cdot1+0\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1\\1&1\end{pmatrix}$$

**Observăm că $AB\neq BA$.**

**Acum $AB-BA=\begin{pmatrix}2&2\\0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&-1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3\\-1&1\end{pmatrix}$ pentru care $Tr\,(AB-BA)=-1+1=0$.**

**Dacă prin absurd $AB-BA=I_2$, atunci ar trebui ca şi $Tr\left(I_2\right)$ să fie tot zero.**

**Ori vedem că $Tr\left(I_2\right)=1+1=2\neq0$. Deci $AB-BA\neq I_2$.**

**2.** **Să se arate că oricare matrice $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ verifică ecuația**

**$X^2-Tr\left(A\right)X+\det\left(A\right)I_2=O_2$, numită ecuația Cayley – Hamilton.**

**R.** **Într-adevăr fie $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ pentru care $Tr\left(A\right)=a+d$ şi $\det\left(A\right)=ad-bc$. Avem:**

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+bc&ab+bd\\ac+dc&bc+d^2\end{pmatrix}\text{ şi deci}$$

$$A^2-Tr\left(A\right)A+\det\left(A\right)I_2=\begin{pmatrix}a^2+bc&ab+bd\\ac+dc&bc+d^2\end{pmatrix}-(a+d)\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}+(ad-bc)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a^2+bc&ab+bd\\ac+dc&bc+d^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a^2+ad&ab+bd\\ac+dc&ad+d^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}ad-bc&0\\0&ad-bc\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

**3.** **Fie $A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}$. Să se calculeze $A^2$, $A^3$ şi apoi $f\left(A\right)$, unde**

**$f\left(X\right)=X^3-3X^2+2X-5I_2$.**

**R.** **Avem $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3\\0&4\end{pmatrix}$ şi**

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1&-3\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-7\\0&8\end{pmatrix}.$$

**Acum $f\left(A\right)$ are exprimarea**

$$f\left(A\right)=A^3-3A^2+2A-5I_2=\begin{pmatrix}1&-7\\0&8\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&-3\\0&4\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&-7\\0&8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&-9\\0&12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-2\\0&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&0\\0&-5\end{pmatrix}.$$

**Observație.** **Matricea $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică ecuația Cayley – Hamilton şi deci $A^2-3A+2I_2=O_2$, $Tr\left(A\right)=3$, $\det\left(A\right)=2$. Acum $f\left(A\right)=A\left(A^2-3A+2I_2\right)-5I_2=A\cdot O_2-5I_2=-5I_2$.**

**4.** **Fie $\mathcal{M}=\left\{A_\alpha=\begin{pmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\\-\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}\middle|\,\alpha\in\mathbb{R}\right\}$.**

a) Să se arate că dacă $A_\alpha, A_\beta \in \mathcal{M}$, atunci $A_\alpha \cdot A_\beta \in \mathcal{M}$; (se spune că mulțimea de matrice $\mathcal{M}$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor).

b) Calculați $A_\alpha^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Arătați că funcția $f : \mathcal{M} \to \left\{ z_\alpha = \cos\alpha + i\sin\alpha \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$, $f\left(A_\alpha\right) = z_\alpha$ verifică egalitatea: $f\left(A_\alpha \cdot A_\beta\right) = f\left(A_\alpha\right) \cdot f\left(A_\beta\right)$, $\forall A_\alpha, A_\beta \in \mathcal{M}$.

**R.** a) Avem pentru $A_\alpha, A_\beta \in \mathcal{M}$,

$$A_\alpha \cdot A_\beta = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta \\ -\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ -\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = A_{\alpha+\beta} \in \mathcal{M}.$$

b) Avem $\underbrace{A_\alpha \cdot A_\alpha \cdot \ldots \cdot A_\alpha}_{n} = \underbrace{A_{\alpha+\alpha+\ldots+\alpha}}_{n} = A_{n\alpha}$. Așadar $A_\alpha^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$

c) Avem: $f\left(A_\alpha \cdot A_\beta\right) = f\left(A_{\alpha+\beta}\right) = z_{\alpha+\beta} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) =$

$= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = z_\alpha \cdot z_\beta = f\left(A_\alpha\right) \cdot f\left(A_\beta\right)$.

**5.** Fie matricele: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Calculați $AB, BA$;
b) Determinați $x, y$ pentru care $AB = BA$.

**R.** a) Avem:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+y & x+1 \\ 2+2y & 2x+2 \end{pmatrix} \text{ și } BA = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2x & 1+2x \\ y+2 & y+2 \end{pmatrix}.$$

b) Din cerința $AB = BA$ rezultă sistemul $\begin{cases} 1+y = 1+2x \\ x+1 = 1+2x \\ 2+2y = y+2 \\ 2x+2 = y+2 \end{cases}$ cu soluția $x = y = 0$.

**6.** Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care $A^2 = aA + bI_2$ și apoi arătați că $A^n = nA + (1-n)I_2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

**R.** Numerele reale $a, b$ se vor determina din cerința $A^2 = aA + bI_2$.

Avem: $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ -8 & -7 \end{pmatrix}$ și deci

$$\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ -8 & -7 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ sau } \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ -8 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+b & 4a \\ -4a & -3a+b \end{pmatrix}.$$

De aici avem sistemul $\begin{cases} 5a+b=9 \\ 4a=8 \\ -4a=-8 \\ -3a+b=-7 \end{cases}$ cu soluția $a=2$, $b=-1$. Așadar $A^2=2A-I_2$.

Pentru a proba egalitatea $A^n=nA+(1-n)I_2\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ vom proceda prin inducție matematică.
Pentru $n=1$ relația devine $A=A$, adevărat.

Pentru $n=2$ avem de arătat că $A^2=2A-I_2$, ceea ce s-a văzut mai sus.

Presupunem că afirmația este adevărată pentru $n=k$, $A^k=kA+(1-k)I_2$ și vom arăta că pentru $n=k+1$ relația $A^{k+1}=(k+1)A+(-k)I_2$ este adevărată.

Într-adevăr $A^{k+1}=A^k\cdot A=\left[kA+(1-k)I_2\right]A=kA^2+(1-k)A=$

$=k(2A-I_2)+(1-k)A=(1+k)A-kI_2$,
unde în a doua egalitate am utilizat ipoteza de inducție, iar în a patra egalitate am uzat de $A^2=2A-I_2$ probată la început. Așadar relația este adevărată pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

**7.** Determinați mulțimea matricelor $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care comută cu matricea $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

(Matricea $X$ comută cu matricea $A$ dacă $XA=AX$ ).

**R.** Considerăm matricea $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ pentru care trebuie să avem $AX=XA$ sau

efectuând produsul de matrice $\begin{pmatrix} 3x+z & 3y+t \\ 5x+2z & 5y+2t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x+5y & x+2y \\ 3z+5t & z+2t \end{pmatrix}$, iar de aici rezultă

sistemul: $\begin{cases} 3x+z=3x+5y \\ 3y+t=x+2y \\ 5x+2z=3z+5t \\ 5y+2t=z+2t \end{cases}$ sau $\begin{cases} z=5y & (1) \\ y-x+t=0 & (2) \\ 5x-z-5t=0 & (3) \\ z=5y & (4) \end{cases}$.

Punem $z=5y$ în ecuațiile $(2)$ și $(3)$ și avem sistemul

$\begin{cases} z=5y \\ y-x+t=0 \\ x-y-t=0 \end{cases}$ sau $\begin{cases} z=5y \\ x-y-t=0 \end{cases}$.

Notând variabilele $y=\lambda\in\mathbb{R}$, $t=\mu\in\mathbb{R}$, atunci $x=\lambda+\mu$, $z=5\lambda$.

Deci forma matricelor $X$ este $X=\begin{pmatrix} \lambda+\mu & \lambda \\ 5\lambda & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

## REZUMATUL CAPITOLULUI

| **Noțiuni** | **Definiție** | **Notație. Descriere** |
|---|---|---|
| **Matrice de tip $(m,n)$, cu $m$ linii și $n$ coloane** | $A: N_m \times N_n \to \mathbb{R}$<br>$N_k = \{1, 2, ..., k\}, k \in \mathbb{N}^*$ | $A(i,j) = a_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$<br>**sunt elementele matricei $A$**<br>$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ |
| **Transpusa matricei $A$ de tip $(m,n)$** | $A': N_n \times N_m \to \mathbb{R}$ | $A' = {}^tA,\ {}^tA(i,j) = A(j,i) = a_{ji}$,<br>$i = \overline{1,n}, j = 1, m$<br>${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$<br>**(liniile lui $A$ devin coloane în ${}^tA$ )** |
| **Matricea nulă de tip $(m,n)$** | $A(i,j) = 0, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}$ | $A = O_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$<br>**(are toate elementele egale cu zero)** |
| **Matrice pătratică de ordin $n$** | $n = m$ | **Sistemul ordonat $(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$ reprezintă diagonala principală a matricei, iar $(a_{1n}, a_{2n-1}, ..., a_{n1})$ diagonala secundară.**<br>$T_r(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$ **= urma matricei $A$** |
| **Matrice unitate de ordin $n$** | $I_n(i,j) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$<br>$i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ | $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ |
| | **1) Adunarea a două matrice de același tip $(m,n)$** | $A + B = C$ **, unde** $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = \overline{1,m}$,<br>$j = \overline{1,n}$ **(adunarea se face pe componente)** |
| | **2) Produsul dintre scalarul $\lambda$ și matricea $A$ de tip $(m,n)$** | $\lambda A = C$, **unde** $c_{ij} = \lambda a_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$<br>**(fiecare element din $A$ se înmulțește cu $\lambda$ )** |
| **Operații cu matrice** | **3) Produsul dintre o matrice $A$ de tip $(m,n)$ și o matrice $B$ de tip $(n,p)$** | $AB = C$ **, unde** $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,p}$<br>**(se înmulțește scalar fiecare linie din $A$ cu fiecare coloană din $B$ )** |
| | **4) Ridicarea la putere a unei matrice pătratice de ordin $n$** | $A^k = \begin{cases} A, k = 1 \\ A^{k-1} \cdot A, k \geq 2 \end{cases}$ |

## Probleme propuse

### Tabele de tip matriceal. Matrice

**1.** **În activitatea voastră zilnică aveți următoarele activități: sport, studiu, vizionare programe TV (în ore). Descrieți-le pentru o săptămână (de luni până duminecă), printr-un tablou, unde pe linii sunt activitățile, iar pe coloane zilele din săptămână.**

**2.** **Un teatru al unui oraș are trei caserii $C_1$, $C_2$, $C_3$ situate în diferite zone ale orașului.**

**Tabelele de mai jos indică numărul de bilete vândute în cele patru săptămâni (1, 2, 3, 4) din două luni consecutive.**

**Scrieți rezultatele din tabele sub formă de tabel matriceal.**

Luna I

| Caseria \ Săptămâna | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $C_1$ | 375 | 411 | 389 | 400 |
| $C_2$ | 380 | 400 | 365 | 383 |
| $C_3$ | 361 | 395 | 318 | 379 |

Luna II

| Caseria \ Săptămâna | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $C_1$ | 330 | 321 | 355 | 363 |
| $C_2$ | 280 | 364 | 210 | 334 |
| $C_3$ | 217 | 305 | 311 | 328 |

**3.** **Fie** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Determinați: a) tipul matricei; b) a treia coloană; c) a doua linie; d) $a_{34}$; e) ${}^{t}A$.**

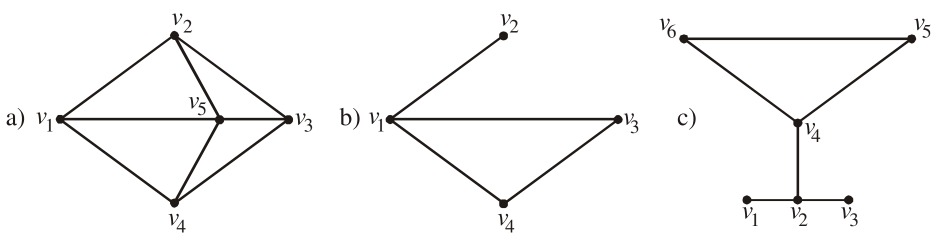
**4.** **Fie $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2\}$. Care perechi ordonate aparțin relației $\Re$**

**reprezentată prin matricea** $M_{\Re} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**5.** **Fie $A = \{a_1, a_2, a_3\}$.**

**a) Scrieți matricea asociată unei relații reflexive pe A.**
**b) Scrieți matricea asociată unei relații simetrice pe A.**
**c) Scrieți matricea asociată unei relații antisimetrice pe A.**

**6.** **Determinați matricea asociată fiecăruia din grafurile de mai jos.**



7. Determinați graful neorientat care are matricea adiacentă $A=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}$ relativ la vârfurile $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$ în această ordine.

8. Scrieți o matrice din $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{N})$, $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{Z})$, $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{Q})$, $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{C})$.

9. a) Câte matrice sunt de tip (1, 3) care au elemente egale cu 0 sau 1 ?
b) Câte matrice sunt de tip (2, 2) care au elementele egale cu 0, 1 sau 2 ?
c) Câte matrice sunt de tip (3, 4) care au elementele egale cu 0 sau 1 ?

10. a) Sistemului $\begin{cases}3x-2y=5\\-5x+3y=-3\end{cases}$ asociați-i matricea coeficienților necunoscutelor (fiecare linie conține coeficienții necunoscutelor din acea ecuație). Completați matricea obținută prin coloana termenilor liberi (se obține matricea extinsă a sistemului).

b) Aceleași cerințe pentru sistemul $\begin{cases}x-2y+3z=0\\3y-z=5\\4x-5y=-3\end{cases}$.

## Operații cu matrice

### Egalitatea a două matrice

1. Să se determine numerele $x, y, z, t$ astfel încât să aibă loc egalitatea de matrice:

a) $\begin{pmatrix}x-2&y+3\\3-2z&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&3\\1&1+t\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}x+1&0&0\\0&2y&t-5\\z+3&0&1\end{pmatrix}=I_3$;

### Transpusa unei matrice

1. Scrieți transpusa fiecăreia dintre matricele de mai jos:

a) $A=\begin{pmatrix}-3&0&5\end{pmatrix}$; b) $A=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$; c) $A=\begin{pmatrix}-1&2\\3&5\end{pmatrix}$; d) $A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}$;

e) $A=\begin{pmatrix}1&5\\5&1\\1&5\end{pmatrix}$; f) $A=\begin{pmatrix}-1&0&2\\3&-4&5\\-6&7&-4\end{pmatrix}$; g) $A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\-2&0&5\\3&5&2\end{pmatrix}$; h) $A=\begin{pmatrix}0&1&-3\\-1&0&2\\3&-2&0\end{pmatrix}$.

2. Scrieți forma matricei simetrice pentru $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, în cazurile $n\in\{4,5\}$.

3. Câte matrice simetrice $A\in\mathcal{M}_n(\{0,1\})$ există în cazul $n=2$ ? Dar pentru $n=3$ ?

4. Dați exemple de matrice antisimetrice de ordin 2, 3 și 4.

### Adunarea matricelor

1. Să se calculeze $A+B$ în cazurile (în care are sens):

a) $A=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix}$; b) $A=\begin{pmatrix}1&-3\\0&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&4\\-5&-3\end{pmatrix}$; c) $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&1\\2&0\end{pmatrix}$;

d) $A=\begin{pmatrix}1+i & -i & 3i\\ 0 & 2i & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1-3i & 2+i & 1\\ i & 1+i & -i\end{pmatrix}$; e) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & -5 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$;

f) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}9 & 8 & 7\\ 6 & 5 & 4\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

**2.** **Se consideră matricele:** $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$.

**Să se calculeze:** $A+B$, $A-B$, $A+C$, $A-C$, $B+C$, $B-C$, $A+B+C$, $A+B-C$, $A-B-C$, $A+C-B$, $B+C-A$, $B-C-A$.

**3.** **Să se determine** $x,y,z\in\mathbb{R}$ **astfel încât:**

$$\begin{pmatrix}x-1 & 2 & 3z\\ 4 & 3 & y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & y+1 & 0\\ x & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}.$$

**4.** **Fie matricele** $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4 & 5\\ 1 & -3\end{pmatrix}$.

**Să se rezolve ecuațiile: a)** $A+X=B$; **b)** $X+B=A$.

**5.** **Să se determine matricele** $A, B$ **astfel încât:** $A+B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 5\end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 6 & 1\end{pmatrix}$.

**6.** **a) Fie** $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 5 & 4\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$. **Calculați** $A+{}^tB$ **și** $B+{}^tA$.

**b) Fie** $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 5\\ -2 & 4 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 5 & 0\\ 3 & -2 & 4\end{pmatrix}$. **Calculați** ${}^t(B+A)$, ${}^tA$, ${}^tB$ **.Ce constatați ?**

**7.** **Arătați că suma a două matrice simetrice (antisimetrice) de același ordin este tot o matrice simetrică (antisimetrică).**

**8.** **Fie** $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

**a) Arătați că matricea** $M+{}^tM$ **este simetrică.**

**b) Arătați că matricea** $M-{}^tM$ **este antisimetrică.**

**c) Arătați că** $M=S_M+A_M$ **, unde** $S_M=\frac{1}{2}\left(M+{}^tM\right)$, $A_M=\frac{1}{2}\left(M-{}^tM\right)$.

**(Orice matrice pătratică este suma dintre o matrice simetrică și alta antisimetrică).**

**Aplicații. 1)** $M=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$; **2)** $M=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3 & -4 & -3\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

**9.** **Se consideră matricele**

$$A_k=\begin{pmatrix}k & 2k-1\\ 2^k-1 & 3k^2\end{pmatrix},\ B_k=\begin{pmatrix}k & k(k+1) & k^2(k+1)\\ k(2k-1) & 0 & k(k-1)\end{pmatrix},\ k\in\mathbb{N}^*.$$

**Să se calculeze sumele** $S_n=\sum_{k=1}^{n}A_k$, $T_n=\sum_{k=1}^{n}B_k$.

**10. Să se determine $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dacă $A + {}^tA = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$.**

**11. Un magazin care vinde tricouri de diferite culori: albastru, roşu, alb, verde şi mărimi diferite: XL, XXL, M are două puncte de vânzare.**
**Situația vânzărilor (număr de bucăți) într-o lună pentru cele două puncte este redată prin matricele:**

$$A = \begin{array}{l} \\ \text{albastru} \\ \text{roşu} \\ \text{alb} \\ \text{verde} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{XL} & \text{XXL} & \text{M} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 50 & 105 & 98 \\ 39 & 86 & 43 \\ 73 & 68 & 75 \\ 29 & 53 & 34 \end{pmatrix} \end{array}, \quad B = \begin{array}{l} \\ \text{albastru} \\ \text{roşu} \\ \text{alb} \\ \text{verde} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{XL} & \text{XXL} & \text{M} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 46 & 100 & 79 \\ 41 & 58 & 39 \\ 67 & 73 & 71 \\ 30 & 42 & 37 \end{pmatrix} \end{array}.$$

**Determinați matricea C care dă vânzarea de tricouri realizată de magazin în acea lună. Ce semnificație au elementele: $c_{23}$, $c_{32}$, $c_{43}$?**

**12. În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele *A(3, 1)*, *B(2, 5)*, *C(4, 3)*, *D(5, 6)*. Construiți matricea asociată patrulaterului *ABCD*. Fie aceasta *S*. Considerăm matricea $T = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Cum se obține patrulaterul $A'B'C'D'$ corespunzător matricei *S+T* din patrulaterul *ABCD*?**

**13. Folosind Pătratul lui Polybe:**
**a) cifrați maxima: „Cine gândeşte puțin se înşeală mult” (Leonardo da Vinci).**
**b) descifrați textul: „32 34 14 15 43 44 24 11 43 15 33 44 24 32 15 33 44 45 31 32 34 14 15 42 11 44 11 31 51 11 31 34 42 24 24 35 42 34 35 42 24 24”.**
**c) Codificați mesajul de la a) utilizând matricea $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & \dots \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & \dots \end{pmatrix}$ şi operația de adunare a matricelor.**

## Înmulțirea cu scalari a matricelor

**1. Compania „Petrom” distribuie la pompele de la benzinăriile proprii următorii carburanți: benzină premium (0,93 €/l), benzină fără plumb (0,95 €/l) şi motorină (0,85 €/l) (în paranteză este indicat prețul în €/l).**
**a) Scrieți matricea prețurilor combustibililor.**
**b) Un raport al companiei arată că se impune o descreştere cu 3% a prețurilor tuturor combustibililor ca urmare a scăderii prețului țițeiului pe piața mondială. Descrieți matricea noilor prețuri ale combustibililor, utilizând matricea de la a).**
**c) Din cauza ridicării prețului de achiziție al petrolului, compania decide creşterea prețului tuturor tipurilor de combustibili cu 2% față de situația inițială. Descrieți matricea care conține noile prețuri ale combustibililor, utilizând matricea de la a).**

**2. Salariile profesorilor sunt date, în Euro, în matricea de mai jos în funcție de vechime şi gradele didactice obținute.**

$$\begin{array}{l} \\ \text{Ani vechime de la} \end{array} \begin{array}{l} \\ 1 \text{ la } 10 \\ 11 \text{ la } 20 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Definitivat} & \text{Gradul II} & \text{Gradul I} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 225 & 240 & 260 \\ 235 & 255 & 300 \end{pmatrix} \end{array}$$

**Scrieți matricea care dă salariile profesorilor dacă ele s-au mărit cu 12% pentru toți profesorii.**

**3.** Se consideră pătratul $OABC$ în reperul $xOy$, unde $O(0,0)$, $A(3,0)$, $B(3,3)$, $C(0,3)$.

Scrieți matricea T asociată figurii $OABC$. Determinați matricele $3T$ și $\frac{1}{3}T$ și desenați figurile asociate.

**4.** Fie $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & 2 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 5 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

Să se calculeze $-3A+2B-5\,{}^{t}C$.

**5.** Determinați $x, y, z, t$ dacă pe rând:

a) $x\begin{pmatrix}2 & 5\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}4 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 33\end{pmatrix}$; b) $x\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\ 5\\ -1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}4\\ -2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\ -3\\ 16\end{pmatrix}$;

c) $x\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}t & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; d) $3\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & 6\\ -1 & 2t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & x+y\\ z+t & 3\end{pmatrix}$.

**6.** Fie $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $3(A+2B)-2(3A-B)+5I_2$;

b) Să se afle $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dacă $2(X-I_2)=3A+4B$.

**7.** a) Să se arate că dacă $\alpha\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, atunci $\alpha=\beta=\gamma=0$.

b) Să se arate că există $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât $\begin{pmatrix}5 & 6 & 9\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

**8.** Să se determine matricea $X$ dacă verifică pe rând egalitățile:

a) $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}-5X+2\begin{pmatrix}1 & -3\\ 5 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;

b) $3X+\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & 3\\ 7 & 4\\ -2 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & 6\\ -9 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix}$, $X\in\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$;

c) $i\begin{pmatrix}1 & -i & i\\ i & 0 & 1\end{pmatrix}+5X=2i\begin{pmatrix}i & 0 & 1\\ -1 & -2 & i\end{pmatrix}$, $X\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C})$.

**9.** Să se determine matricele $X,Y$ în fiecare din cazurile:

a) $\begin{cases}X-3Y=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 3 & -2\end{pmatrix}\\ X+2Y=\begin{pmatrix}6 & 0\\ -2 & 3\end{pmatrix}\end{cases}$, $X,Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; b) $\begin{cases}2X+3Y=\begin{pmatrix}8 & 7 & -2\\ 1 & -6 & 5\end{pmatrix}\\ X-2Y=\begin{pmatrix}-3 & 0 & -1\\ -3 & 4 & -1\end{pmatrix}\end{cases}$, $X,Y\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

**10.** Se consideră mulțimea matricelor de forma $M=\left\{\begin{pmatrix}a & b & c\\ 0 & a & b\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}\middle|\, a,b,c\in\mathbb{C}\right\}$.

a) Arătați că $I_3$, $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ aparțin lui $M$.

b) Arătați că $\forall X,Y\in\mathcal{M}$, $\forall\alpha\in\mathbb{C}$, atunci $X+Y$, $\alpha X\in\mathcal{M}$.

c) Arătați că $\forall A\in\mathcal{M}$, există $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$, astfel încât $A=\alpha I_3+\beta B+\gamma C$.

## Înmulțirea matricelor

**1.** Calculați produsele de matrice $A\cdot B$ (dacă au sens), unde:

1) $A=\begin{pmatrix}-1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix}1&\sqrt{2}&-\sqrt{3}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1\\0\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix}2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&3\\2&0\end{pmatrix}$;

4) $A=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}&-1\end{pmatrix}$;

5) $A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1\end{pmatrix}$;

6) $A=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-5\end{pmatrix}$;

7) $A=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}$;

8) $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\cos\beta&-\sin\beta\\\sin\beta&\cos\beta\end{pmatrix}$;

9) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\5&4&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&3&1&4\\2&4&1&0\\1&2&0&2\end{pmatrix}$;

10) $A=\begin{pmatrix}3&1\\2&5\\1&-4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&-2\\4&3\end{pmatrix}$;

11) $A=\begin{pmatrix}1&i\\-2i&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}i&-3i\\0&1\end{pmatrix}$;

12) $A=\begin{pmatrix}1+i&1-i&i\\2i&1&-3i\\0&1+i&1-i\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2i&1-i&0\\3&i&1\\-i&0&1+i\end{pmatrix}$.

**2.** Să se determine $x,y\in\mathbb{R}$ astfel încât: $\begin{pmatrix}2x&1\\3&-y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&x\\2y&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&11\\-35&-6\end{pmatrix}$.

**3.** Fie $A=\begin{pmatrix}2&-3&0\\1&-1&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\\0&1\end{pmatrix}$. Verificați egalitatea ${}^t(A\cdot B)={}^tB\cdot{}^tA$.

**4.** Fie $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$. Calculați $AB$, $BA$, $AB-BA$, $Tr(AB-BA)$ și deduceți că $AB-BA\neq I_3$.

**5.** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1&3\\2&-4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&-2\\1&3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}$.

Verificați prin calcul egalitățile: $A(B+C)=AB+AC$, $(AB)C=A(BC)$.

**6.** **Determinați mulțimea matricelor $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ care comută cu matricea**

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**7.** **Determinați matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care comută cu matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,**

$$B=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**8.** **Determinați mulțimea matricelor $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ care comută cu orice matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.**

**9.** **Să se rezolve ecuațiile matriceale:**

1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $X \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -7 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

**10.** **1) Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1-2x & 2x \\ x & 1+x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$. Arătați că:**

a) $A(x)A(y)=A(1-(1-x)(1-y))$, $x, y \in \mathbb{R}$;

b) $A(x_1)A(x_2)\dots A(x_n)=A(1-(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_n))$, $x_k \in \mathbb{R}$, $k=\overline{1,n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

**2) Se consideră $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & x & 2x^2+x \\ 0 & 1 & 4x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$. Arătați că:**

a) $A(x)A(y)=A(x+y)$, $x, y \in \mathbb{R}$;

b) $A(x_1)A(x_2)\dots A(x_n)=A(x_1+x_2+\dots+x_n)$, $x_k \in \mathbb{R}$, $k=\overline{1,n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

**Verificați cerințele a) – e) din problema precedentă.**

**11(Înmulțirea matricelor și codul de bare).** **Numerele de identificare ale produselor etc. pot fi reprezentate prin simboluri de coduri de bare pentru a permite citirea electronică la punctele de vânzare, la recepția în depozite, în comerțul electronic etc. Codurile de bare sunt aplicate de producător. Sistemul de codificare este gestionat de Uniform Code Council (UCC) (în Canada și SUA) și respectiv Article Numbering Association (EAN) în restul țărilor. Iată structura de numerotare $EAN/UCC-13: N_1N_2N_3\dots N_{12}C$, unde primele trei cifre $N_1N_2N_3$ reprezintă țara, iar $N_4\dots N_{12}$ reprezintă prefix companie + referințe despre articol. În fine $C$ este cifra de control, rezultată dintr-un calcul în care intră toate celelalte cifre ale numărului și este folosită pentru a ne asigura că numărul este corect, pentru a detecta eventualele erori în scrierea numărului.**

**Pentru a afla cifra de control $C$ în cazul codului *594843000001* se face produsul matricelor $\begin{pmatrix} 5 & 9 & 4 & 8 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,12}(\mathbb{N})$,**

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ \vdots \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{12,1}(\mathbb{N})$$

**când obținem:**
$5 \cdot 1 + 9 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 1 +$
$+ 1 \cdot 3 = 76$

**Se scade acest număr din cel mai apropiat multiplu de 10, în acest caz din 80. Deci $C = 80 - 76 = 4$, iar numărul complet de identificare este 5948430000014. Determinați cifra de control în cazurile codurilor 594843000010, 594843000031.**

**12(Codul ISBN și înmulțirea matricelor). Cărțile sunt identificate prin International Standard Book Number (ISBN), un cod de 10 cifre $x_1x_2\ldots x_{10}$, pentru a identifica țara $x_1x_2x_3$, editorul $x_4\ldots x_7$, numărul asociat cărții $x_8x_9$ și în final cifra de control $x_{10}$, care poate fi o cifră sau $x$ (utilizat pentru a reprezenta numărul 10).**

**Cifra de control $x_{10}$ se alege astfel încât $\sum_{i=1}^{10} ix_i \equiv 0$ (mod 11) și este utilizată pentru a detecta erorile în cifrele individuale ($a \equiv b$ (mod n) $\Leftrightarrow a - b \vdots n, a, b \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$).**

**Să determinăm cifra de control pentru ISBN: 973-8222-20-C. Se face produsul matricelor:**

$$\begin{pmatrix} 9\,7\,3\,8\,2\,2\,2\,2\,0\,C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} = 116 + 10\,C.$$

**Din $116 + 10\,C \equiv 0$ (mod 11) $\Leftrightarrow 11 \cdot 10 + 6 + 10\,C \equiv 0$ (mod 11) $\Leftrightarrow 6 + 10\,C \equiv 0$ (mod 11). De aici $C = 6$.**
**Deci codul ISBN este 973-8222-20-6.**
**Verificați dacă cifra de control este corectă pentru codurile ISBN ale următoarelor cărți:**
**1) 973-8222-18-4;**
**2) 973-8222-21-4;**
**3) 973-8222-22-2.**

**13(Podiumul diviziei A la fotbal). Numărul de meciuri câștigate (C), nule (E) și pierdute $(P)$ acasă și în deplasare de echipele Dinamo, Steaua, Rapid sunt date de matricele:**

$$A = \begin{array}{r} \\ \text{Dinamo} \\ \text{Steaua} \\ \text{Rapid} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C & E & P \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 3 & 2 \\ 9 & 5 & 1 \\ 8 & 4 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \quad D = \begin{array}{r} \\ \text{Dinamo} \\ \text{Steaua} \\ \text{Rapid} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C & E & P \end{array} \\ \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 8 & 3 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

**În întreg campionatul se desfășoară de fiecare echipă 30 meciuri, dintre care 15 acasă și 15 în deplasare. Dacă pentru un meci câștigat se acordă 3 p, pentru meci egal 1 punct, iar pentru meci pierdut 0 puncte, fie $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, matricea punctelor de meci. Ce semnifică $AP$, $DP$, $AP + DP$ ? Stabiliți ordinea celor trei echipe.**

## Ridicarea la putere a unei matrice

**1.** Să se calculeze $f(A)$ dacă : a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $f(X) = X^2 - 5X + 7I_2$;

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $f(X) = 3X^2 - 7X - 4I_3$.

**2.** **Fie** $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}$**. Să se determine cea mai mică valoare a lui** $n\in\mathbb{N}^*$ **pentru care** $A^n=I_2$.

**3.** **Pentru matricea A arătați că există numerele reale** $a$, $b$ **astfel încât să aibă loc egalitatea indicată:**

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $A^3=aA+bI_2$; 2) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, $A^3=aA+bI_2$;

**4.** **Să se rezolve ecuațiile matriceale: 1)** $X^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; **2)** $X^2=3X$.

**5.** **Fie** $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}$**. a) Să se calculeze** $A^2$**; b) Să se arate că** $A^n=A$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$;

**c) Să se arate că** $A+2A^2+3A^3+\ldots+nA^n=\dfrac{n(n+1)}{2}A$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

**6.** **Să se calculeze** $A^n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ **și** $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}A^k$ **pentru:**

**I.** 1) $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; 3) $A=\begin{pmatrix}5 & -4\\ 6 & -5\end{pmatrix}$.

**II.** 1) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$; 3) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

**7.** **Într-un colegiu se desfăşoară cercuri de matematică şi fizică la clasele a IX-a în vederea participării la olimpiadă. Se ştie că anual 20 % dintre elevii de la cercul de matematică trec la cercul de fizică şi 25 % dintre elevii de la cercul de fizică la cel de matematică. În colegiu sunt la clasa a IX-a 60 de elevi la cercul de matematică şi 40 de elevi la cercul de fizică, iar numărul elevilor de la cele două cercuri rămâne constant. Determinați numărul de elevi de la cele două cercuri după doi ani.**

**8(Supermarketurile şi preferințele clienților). Într-un cartier al unui oraş se află două supermarketuri A, B. În fiecare lună magazinul A menține 98 % dintre cumpărători şi pierde 2 % dintre clienții care merg la magazinul B. Magazinul B îşi păstrează 95 % dintre clienți şi pierde 5 % , aceştia făcându-şi cumpărăturile din A. La început magazinul A are 25 % dintre cumpărătorii cartierului, iar B restul de 75 %. Determinați procentul de cumpărători de la cele două magazine după 5 luni; după n luni.**

**9(Leasingul de automobile). Un dealer (comerciant) de automobile marca Audi (A3, A4, A6, A8) vinde maşini în leasing pe doi ani de zile. La sfârşitul termenului, clienții pot negocia un nou contract pentru o maşină nouă. Rezultatele precendentelor contracte de leasing arată că 80 % dintre clienții care au optat pentru marca A3 îşi mențin solicitarea şi pentru noul contract. În plus 10 % dintre clienții doritori de A4 vor opta pentru A3, iar 5 % dintre cei care au achiziționat A6, A8 vor contracta A3.**

**Scrieți matricea de trecere asociată leasingului. Presupunem că acum sunt 200 de clienți pentru A3 şi câte 100 pentru fiecare dintre modelele A4, A6, A8. Determinați opțiunile clienților după trei contracte (presupunem că numărul lor total a rămas acelaşi).**

## Teste de evaluare

**Testul 1 (1 punct din oficiu)**

**1.** Să se rezolve ecuația matriceală: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 2X = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$. (1 punct)

**2.** Să se rezolve sistemul : $\begin{cases} 2X - 5Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ -X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$. (1 punct)

**3.** Să se rezolve ecuația matricială $X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. (1 punct)

**4.** Se consideră $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}$.

1) Calculați $A^2 - 2A + I_2$. (1 punct)

2) Dacă $AX = I_2$, atunci determinați suma elementelor lui $X$ .(1 punct)

3) Calculați $A^{10}$ .(1 punct)

**5.** Fie $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$. Să se determine cel mai mic număr natural $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $A^n = I_2$.

(2 puncte)

**6.** Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Arătați că există numerele reale $a_n, b_n$ astfel încât $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că $a_{n+1} = 2a_n$ și $b_{n+1} = 2b_n, n \in \mathbb{N}^*$ .(2 puncte)

**Testul 2(grilă) (1 punct din oficiu)**

**1.** Fie $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, B $= \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Sumă elementelor matricei $2A - 3B$ este:

a) -7; b) –6; c) –5; d) –8; e) 0. (0,5 puncte)

**2.** Se consideră matricele: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine x,y astfel încât AB=BA.

a) $x = -1, y = 1$; b) $x = 1, y = -1$ ;c) $x = y = 0$; d) $x = 0, y = -1$; e) $x = 2, y = 0$. (1 punct)

**3.** Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Suma elementelor de pe diagonala lui $A^3$ este: a) 9; b) 10; c) 8; d) 0; e) 11. (1 punct)

2) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $A^3 = aA^2 - 2A$ : a) 3; b) –3; c) 0; d) 1; e) 5. (0,5 puncte)

**4.** Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, atunci $A^2 - 3A$ este matricea : a) $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$ ;b) $\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. (0,5 puncte)

**5. Fie** $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

**1) Produsul $A\cdot B$ este matricea: a) $O_3$; b) $I_3$; c) $-I_3$; d) $A+B$; e) $A-B$. (0,5 puncte)**

**2) Produsul $B\cdot A$ este matricea: a) $-I_3$ b) $I_3$; c) $O_3$; d) $2A$; e) $\frac{1}{3}AB$. (0,5 puncte)**

**3) $(A+B)^3$ este matricea: a) $A+B$; b) $A^3+B^3$; c) $A^2+B^2$; d) $A^2-B^2$; e) $A^3-B^3$. (0,5 puncte)**

**6. Fie matricele** $A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, $C=aA+bB, a,b\in\mathbb{R}$.

**Atunci :**

**1) $A^2$ este egală cu : a) $-3A$; b) $A+I_3$; c) $2A$; d) $-2A$; e) $4A$. (1 punct)**

**2) $B^2$ este egală cu :a) -3B; b) 3B; c) 2B; d) B+$I_3$; e) 2B. (1 punct)**

**3) $C^n$ este egală cu : a) $3^{n-1}\left[(-1)^{n-1}a^nA+b^nB\right]$; b) $3^{n-1}\left[(-1)^n a^nA-b^nB\right]$;**

**c) $3^{n-1}\left[(-1)^{n-1}a^nA-b^nB\right]$. (1 punct)**

# 2. DETERMINANȚI

**Se defineşte pentru matricea pătratică, determinantul ei, care este un număr. Sunt prezentate principalele proprietăți ale determinanților, care vin să faciliteze calculul acestora. Determinanții sunt utilizați la rezolvarea sistemelor de ecuații liniare în care numărul de ecuații este egal cu numărul de necunoscute, precum şi la determinarea inversei unei matrice pătratice inversabile.**

**Ca aplicații ale inversei unei matrice inversabile sunt prezentate rezolvări de sisteme de ecuații liniare, probleme de codificare a informației, etc., iar ca aplicații ale determinanților în geometria analitică, coliniaritatea a trei puncte, aria unui triunghi, etc.**

**Istoric. Determinanții au fost descoperiți de matematicianul japonez Seki Kowa (1642 - 1708). Totuşi matematicianul german G. W. Leibniz (1646 - 1716) este considerat creatorul determinanților, deşi contribuția sa a venit 10 ani mai târziu (1693) după aceea a lui Kowa. Leibniz a dezvoltat determinanții în timp ce se ocupa de studierea rezolvării sistemelor de ecuații liniare.**
**Şcoala franceză de matematică, ilustrată de G. Cramer (1704 - 1752), P. F. Sarrus (1798 - 1861) şi A. T. Vandermonde (1735 - 1796), pune cu adevărat bazele teoriei determinanților contribuind la dezvoltarea susținută a acesteia.**



Fie $A=(a_{ij})\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), n\in\{2,3\}$ o matrice pătratică. Vom asocia acestei matrice un număr complex, notat $\det(A)$, numit **determinantul matricei** A. În acest fel am pus în evidență o funcție $\det:\mathcal{M}_{\mathrm{n}}(\mathbb{C})\to\mathbb{C}$, numită **funcția determinant de ordin** n.

**Notație.** În loc de $\det(A)$ vom scrie adesea $|A|$ sau $|a_{ij}|_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}}$, punând între două bare verticale elementele din matricea $A$. Elementele matricei $A$ vor fi elemente ale determinantului $|A|$. Liniile (coloanele) matricei $A$ se numesc liniile (coloanele) determinantului matricei $A$.

# 2.1. DETERMINANȚI DE ORDIN DOI

Are loc următoarea:

**Definiție**. 1) Dacă $A=(a_{11})\in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ este o matrice pătratică de ordinul întâi, atunci $\det(A)=a_{11}$.

2) Fie $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. **Determinantul matricei** $A$ sau **determinantul de ordinul doi** este numărul definit astfel:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

Termenii $a_{11}a_{22}, a_{12}a_{21}$ se numesc **termenii dezvoltării determinantului de ordin doi**.

**Observații**: **1**) În acest caz $\det:\mathcal{M}_2(\mathbb{C})\to\mathbb{C},\ \mathrm{A}\to\det(\mathrm{A})$.

**2**) Deci, pentru o matrice pătratică de ordinul doi deteminantul ei este suma a doi termeni, unul cu plus (produsul elementelor de pe diagonala principală) şi altul cu minus (produsul elementelor de pe diagonala secundară).
Ca în schema de mai jos:

$$\begin{array}{cc} + & - \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Fiecare termen din dezvoltarea determinantului **conține elemente de pe linii şi coloane diferite**.

**3**) Dacă $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})\left(\text{sau}\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})\text{sau}\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\right)$, atunci $\det(\mathrm{A})\in\mathbb{Z}(\text{sau}\mathbb{Q}\text{ sau }\mathbb{R})$.

**Exemplu. Să se calculeze determinanții:**

**1)** $D_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4\end{vmatrix}$; **2)** $D_2=\begin{vmatrix} C_4^1 & C_4^2 \\ C_4^3 & C_4^4\end{vmatrix}$; **3)** $D_3=\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{vmatrix}, \alpha\in R$.

**R. 1)** $D_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4\end{vmatrix}=1\cdot4-2\cdot3=-2$; **2) Din** $C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ **deducem** $C_4^1=4,\ C_4^2=6$, $C_4^3=4$, $C_4^4=1$. **Aşadar** $D_2=\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 1\end{vmatrix}=4\cdot1-6\cdot4=-20$;

**3)** $D_3=\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{vmatrix}=\cos\alpha\cdot\cos\alpha-(-\sin\alpha)\sin\alpha=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$.

**4) Determinanții de ordin doi şi rezolvarea sistemelor liniare**

Am rezolvat în clasa a IX-a sistemul liniar de două ecuații cu două necunoscute $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$, prin metoda reducerii sau prin metoda substituției. Vom ilustra aici rezolvarea acestui sistem utilizând determinanții de ordin doi.

Asociem sistemului matricea care are ca elemente coeficienții necunoscutelor din cele două ecuații. Aceasta este $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. (Linia întâi din *A* este formată de coeficienții necunoscutelor din prima ecuație. *A* doua linie din *A* este formată din coeficienții necunoscutelor din a doua ecuație a sistemului).

Completăm matricea *A* cu o coloană formată din termenii liberi ai sistemului (numerele $b_1$,$b_2$) şi se obține matricea $\overline{A}$, numită **matricea extinsă a sistemului** $\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix}$.

Să observăm aici că linia întâi din $\overline{A}$ este formată cu numerele $a_{11}$, $a_{12}$, $b_1$ care figurează în prima ecuație a sistemului. Analog, pentru a doua linie din $\overline{A}$. Transformările elementare care se fac asupra ecuațiilor sistemului prin care acesta rămâne echivalent (1) schimbarea ordinii ecuațiilor în sistem; 2) înmulțirea ecuațiilor prin factori nenuli; 3) adunarea unei ecuații a sistemului la o altă ecuație a sistemului) se transferă asupra liniilor matricelor *A*, $\overline{A}$. Cele trei transformări se numesc **transformări elementare** asupra liniilor matricelor şi acestea sunt:

**01.** Interschimbarea a două linii;

**02.** Înmulțirea unei linii printr-un număr real nenul;

**03.** Înlocuirea unei linii cu suma dintre ea şi o altă linie.

Rezolvând sistemul prin metoda reducerii obținem:

$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = b_1a_{22} - b_2a_{12}$, $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = b_2a_{11} - b_1a_{21}$.

Observăm că dacă $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, atunci sistemul este compatibil determinat cu soluția: $x = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$, $y = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$.

Remarcăm că numitorul fiecărei fracții este chiar determinantul sistemului, $\det(A) = \Delta$. De asemenea, numărătorii din scrierea lui *x,y* se pot exprima cu ajutorul determinanților de ordin doi. Fie $\Delta x, \Delta y$ aceste două numere. Atunci:

$\Delta x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2$ şi $\Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$, care se obțin din $\Delta$ înlocuind coloana coeficienților lui *x* şi respectiv *y* prin coloana termenilor liberi ca în schema de mai jos.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \to \Delta x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix};\ \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \to \Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Cu acestea am găsit soluția sistemului:

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta},\ \ y=\frac{\Delta y}{\Delta}$$, dacă $\Delta\neq 0$, numite **formulele lui Cramer.**

**Exemplu. Să se rezolve sistemul** $\begin{cases}3x-5y=\ \ 4\\ 2x+3y=-7\end{cases}$.

**R. Matricea asociată sistemului este:**

$A=\begin{pmatrix}3 & -5\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, **iar** $\Delta=\begin{vmatrix}3 & -5\\ 2 & 3\end{vmatrix}=9+10=19\neq 0$ .

**Deci se pot aplica formulele lui Cramer în rezolvarea sistemului. Avem:**

$\Delta x=\begin{vmatrix}4 & -5\\ -7 & 3\end{vmatrix}=-23$, $\Delta y=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & -7\end{vmatrix}=-29$ **şi deci** $x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{-23}{19}$, $y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{-29}{19}$ .

## 2.2. DETERMINANȚI DE ORDIN TREI

Are loc următoarea:

**Definiție**. Fie $A=\left(a_{ij}\right)\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Numărul

$$\det(A)=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

se numeşte **determinantul matricei** A sau **determinant de ordin trei**.

Termenii care apar în scrierea lui $\det(A)$, $a_{11}a_{22}a_{33},\ldots,a_{11}a_{23}a_{32}$ se numesc **termenii dezvoltării determinantului de ordin trei**.

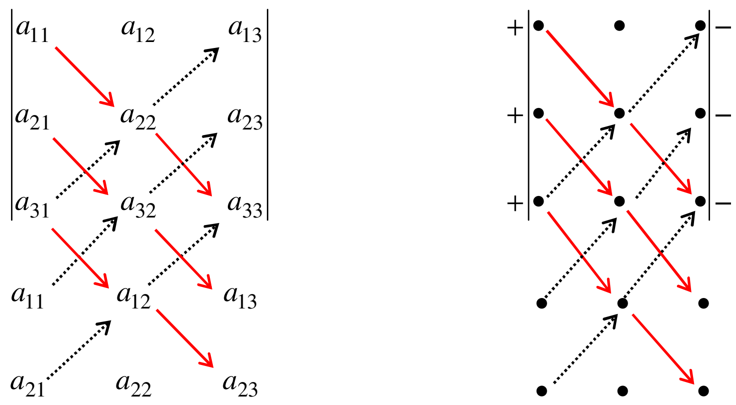
**Observații. 1**) Aici $\det:\mathcal{M}_3(\mathbb{C})\to\mathbb{C}$, $A\to\det(A)$.

**2**) Numărul definit mai sus, $\det(A)$ are 6 termeni dintre care trei sunt cu semnul plus, iar ceilalți trei cu semnul minus.
Fiecare termen din dezvolatrea determinantului **conține elemente situate pe linii şi coloane diferite**.

**3**) Expresia lui $\det(A)$ din definiție este greoaie. De aceea indicăm mai jos două tehnici mai simple pentru a obține $\det(A)$. Să reținem că aceste tehnici **se aplică numai pentru determinanți de ordin trei**.

### 1) Regula lui Sarrus

Fie determinantul de ordin trei, $d=\left|a_{ij}\right|_{i,j=\overline{1,3}}$ .Pentru a găsi expresia lui $d$ se scriu sub ultima linie din $d$ primele două linii ale determinantului.



Se face produsul elementelor de pe diagonale. Produsul elementelor de pe o diagonală descendentă (indicată prin două săgeți roşii care unesc elementele care intră în produs) este cu semnul plus. Avem trei astfel de produse: $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{21}a_{32}a_{13}$, $a_{31}a_{12}a_{23}$.

Produsul elementelor pe o diagonală ascendentă (indicate prin două săgeți negre întrerupte care unesc elementele componente ale produsului) este cu semnul minus. Avem trei astfel de produse: $-a_{31}a_{22}a_{13}$, $-a_{11}a_{32}a_{23}$, $-a_{21}a_{12}a_{33}$. Suma celor şase produse dă valoarea determinantului *d*, de ordin trei.

Este o regulă asemănătoare celei de la definiția determinantului de ordin doi şi anume se adună produsele de pe cele trei „diagonale principale” şi se scad produsele de pe cele trei „diagonale secundare”.

Acest procedeu de calcul se numeşte **regula lui Sarrus**.

**Exemplu. Să se calculeze următorii determinanți:**

**1)** $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ **; 2)** $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ **(determinant Vandermonde).**

**R. 1) Scriem sub determinant primele două linii şi aplicăm regula lui Sarrus**

$$D_1 = \begin{array}{|ccc|} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{array} = 1\cdot 0\cdot 2+2\cdot 1\cdot 0+(-3)\cdot(-1)\cdot 1-(-3)\cdot 0\cdot 0-1\cdot 1\cdot 1-2\cdot(-1)\cdot 2=$$
$$\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \qquad =3-1+4=6.$$

**2) Procedăm prin scrierea sub $D_2$ a primelor două linii ale lui $D_2$ şi aplicăm regula lui Sarrus.**

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}\begin{array}{ccc} \\ \\ \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{array} = 1\cdot b\cdot c^2+a\cdot b^2\cdot 1+a^2\cdot 1\cdot c-a^2\cdot b\cdot 1-1\cdot b^2\cdot c-a\cdot 1\cdot c^2=$$

$$=bc^2+ab^2+a^2c-a^2b-b^2c-ac^2=$$

$$=b\left(c^2-a^2\right)-b^2(c-a)-ac(c-a)=$$

$$=(c-a)\left(bc+ab-b^2-ac\right)=(c-a)\left[b(c-b)-a(c-b)\right]=$$

$$=(c-a)(c-b)(b-a)$$

**Observație.** Acest tip de determinant care conține pe fiecare linie puterile de același ordin se numește **determinant de tip Vandermonde.**

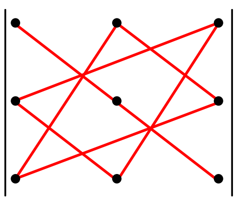
## 2) Regula triunghiului

Am văzut că determinantul de ordin trei are în dezvoltarea sa șase termeni, trei cu semnul plus și alți trei cu semnul minus. Primul termen cu plus se găsește înmulțind elementele de pe diagonala principală, iar ceilalți doi, înmulțind elementele situate în vârfurile celor două triunghiuri care au o latură paralelă cu diagonala principală.
După aceeași regulă, referitor la diagonala secundară, se obțin termenii cu minus. Această descriere este arătată schematic mai jos:

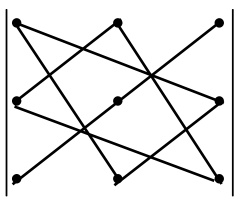
$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$+$



$-$



$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

Acest procedeu de calcul al determinantului de ordin 3 se numește **regula triunghiului**.

**Exemplu.** Să se calculeze utilizând regula triunghiului, următorii determinanți de ordin 3:

1) $D_1=\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$; 2) $D_2=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$; 3) $D_3=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{vmatrix}$.

**R. 1) Matricea din care provine $D_1$ este o matrice antisimetrică. Numim și determinantul antisimetric. Avem, aplicând regula triunghiului:**

$D_1=0\cdot 0\cdot 0+b\cdot(-a)\cdot(-c)+(-b)\cdot a\cdot c-b\cdot 0\cdot(-b)-0\cdot c\cdot(-c)-a\cdot(-a)\cdot 0=0$

**2) Analog, avem:** $D_2=a\cdot c\cdot b+c\cdot a\cdot b+c\cdot a\cdot b-c\cdot c\cdot c-a\cdot a\cdot a-\mathrm{b}\cdot b\cdot b=3abc-a^3-b^3-c^3$

**Determinatul $D_2$ se numește determinant circular de ordin 3.**

**3) $D_3$ este determinantul matricei triunghiulare. Găsim $D_3=a\cdot c\cdot f$ (adică produsul elementelor de pe diagonala principală). În particular $\det(I_3)=1$.**

### 3) Metoda recurentă

Determinantul de ordin 3 îl putem calcula, prin recurență, cu ajutorul determinanților de ordin 2, prin aşa numita **regulă de dezvoltare după o linie (sau coloană).**

Pentru aceasta este necesară următoarea:

**Definiție**. Fie matricea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Se numeşte **minor asociat elementului** $a_{ij}, 1 \le i, j \le n$ , determinantul matricei obținute din $A$ prin eliminarea liniei *i* şi coloanei *j*. Se notează acest minor cu $\mathrm{M}_{ij}$ .

Se numeşte **complement algebric** (sau **cofactor** ) al elementului $a_{ij}$ , numărul $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \mathrm{M}_{ij}$ .

---

Exponentul *i+j* al lui $(-1)$ este suma dintre numărul liniei $(i)$ şi numărul coloanei $(j)$ pe care se află elementul $a_{ij}$ .

**Exemplu. Fie matricea** $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -3 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Să determinăm complemenții algebrici ai elementelor** $a_{12} = -1$ **şi** $a_{33} = 1$ **.**

**Conform definiției** $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \mathrm{M}_{12}$, **unde** $\mathrm{M}_{12}$ **este determinantul matricei care se obține din A suprimând linia întâi şi coloana a doua.**

**Deci** $\mathrm{M}_{12} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 6(-3) = 21$ **şi** $A_{12} = -21$ **.**

**Analog, minorul elementului** $a_{33}$ **este egal cu** $\mathrm{M}_{33} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 3$ **(pentru obținerea lui am suprimat linia a treia şi coloana a treia).**

**Acum** $A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \mathrm{M}_{33} = 3$ **.**

**Pentru matricea de ordin trei, semnele corespunzătoare complemenților algebrici sunt:** $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$.

Are loc următoarea:

**Teoremă.(Dezvoltarea determinantului după o linie sau o coloană)**

Dacă $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, atunci

**1)** $\det(A)=a_{i1}\cdot A_{i1}+a_{i2}\cdot A_{i2}+a_{i3}\cdot A_{i3}$, $\forall i=\overline{i,3}$

**Formula dă dezvoltarea determinantului după linia *i***

**2)** $\det(A)=a_{1j}\cdot A_{1j}+a_{2j}\cdot A_{2j}+a_{3j}\cdot A_{3j}, \forall j=\overline{1,3}$

**Formula dă dezvoltarea determinantului după coloana *j***

**Demonstrație.** De regulă vom alege să dezvoltăm determinantul după acea linie sau coloană pe care se află cele mai multe zerouri!

Să facem verificarea formulei 1) din teoremă pentru $i=1$, adică să arătăm că are loc egalitatea: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

adică găsim acelaşi rezultat de la regula lui Sarrus sau regula triunghiului.■

**Observații. 1**) Relațiile **1)** şi **2)** din teoremă reduc calculul determinatului de ordin trei la trei determinanți de ordin inferior, 2. Din aceste motive ele se numesc **formule de recurență**.

**2**) Relația **1)** din teoremă, afirmă că determinantul matricei pătratice *A* este egal cu suma produselor dintre elementele unei linii şi complemenții lor algebrici. O interpretare analoagă are relația **2)** din teoremă.

**Exemple. Să se calculeze determinanții:**

**1)** $D_1=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; **2)** $D_2=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{vmatrix}$; **3)** $D_3=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$; **4)** $D_4=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

**R. Vom dezvolta determinanții după acea linie sau coloană care conține cât mai multe zerouri (dacă, bineînțeles, există), deoarece $0\cdot A_{ij}=0$, nemaifiind necesar calculul lui $A_{ij}$ .**

**1) Pe coloana a doua avem cele mai multe zerouri. Deci vom dezvolta determinantul după coloana a doua . Avem: $D_1=0\cdot A_{12}+3\cdot A_{22}+0\cdot A_{32}=3\cdot A_{22}$, unde $A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot \mathrm{M}_{22}$, iar**

**$\mathrm{M}_{22}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=4$ . Deci $A_{22}=4$ , iar $D_1=3\cdot A_{22}=12$ .**

**2) Dezvoltăm după linia întâi, unde sunt două zerouri (la fel ca pe a treia coloană). Atunci:**

**$D_2 = a \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13} = a \cdot A_{11}$, unde $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \mathrm{M}_{11} = \mathrm{M}_{11}$, cu $\mathrm{M}_{11} = \begin{vmatrix} c & 0 \\ e & f \end{vmatrix} = cf$. Deci $D_2 = a \cdot c \cdot f$.**

**Observăm că matricea din care provine determinantul este una triunghiulară. Prin urmare, determinantul ei este egal cu produsul elementelor de pe diagonala principală.**

**3) - 4). Sunt doi determinanți în care o linie (întâi pentru $D_3$) şi respectiv o coloană (a doua pentru $D_4$) este formată din zerouri. Dezvoltând determinantul după acea linie respectiv coloană găsim că acesta are valoarea zero. Deci, $D_3 = D_4 = 0$.**

**Observație. Determinanții de ordin trei şi rezolvarea sistemelor liniare.**

Să considerăm sistemul liniar de trei ecuații cu trei necunoscute:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}.$$

Asociem acestui sistem două matrice:

1) **Matricea sistemului** (formată din coeficienții necunoscutelor din cele trei ecuații)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

2) **Matricea extinsă a sistemului** (se obține din $A$ prin adăugarea coloanei formate din termenii liberi ai sistemului)

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}.$$

Liniile matricei $\overline{A}$ sunt formate cu elemente care provin din câte o ecuație a sistemului. Deci transformările elementare care se fac asupra ecuațiilor sistemului prin care acesta rămâne echivalent, se transferă asupra liniilor matricelor $A, \overline{A}$.

Aplicând aceeaşi metodă a reducerii şi pentru acest sistem se găseşte că dacă $\Delta = \det(A) \neq 0$ (adică, determinantul sistemului este nenul), atunci sistemul este compatibil determinat cu soluția dată de **formulele lui Cramer:**

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta},\ y = \frac{\Delta y}{\Delta},\ z = \frac{\Delta z}{\Delta},$$

unde, $\Delta x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$ se obțin din $\Delta$ înlocuind coloana coeficienților lui *x, y* şi respectiv *z* prin coloana termenilor liberi.

**Exemplu.** **Să se rezolve sistemul :** $\begin{cases} 2x+\ \ y-z=1 \\ x-\ \ y+z=2 \\ 4x+3y+z=3 \end{cases}$.

**R.** **Matricea sistemului este** $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$**, iar coloana termenilor liberi este** $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

**Avem determinantul sistemului** $\Delta=\det(A)=-12\neq 0$ **şi se pot aplica formulele lui Cramer pentru determinarea soluției sistemului.**

**Avem:**

$\Delta x=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-12$, $\Delta y=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}=6$, $\Delta z=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix}=-6$ **şi deci**

$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{-12}{-12}=1$, $x=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{6}{-12}=-\frac{1}{2}$, $z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{-6}{-12}=\frac{1}{2}$.

## 2.3. PROPRIETĂȚI ALE DETERMINANȚILOR

Definiția determinantului prezentată mai sus este încă puțin eficientă. De aceea se impune stabilirea unor proprietăți ale determinanților care să fie comode atât din punctul de vedere al teoriei cât şi din punct de vedere calculatoriu.

Proprietățile care urmează sunt demonstrate pentru determinanți de ordinul $n\in\{2,3\}$, dar ele rămân valabile şi pentru $n\geq 3, n\in\mathbb{N}$.

**P1.** Determinantul unei matrice coincide cu determinantul matricei transpuse, adică dacă $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci $\det(A)=\det({}^tA)$.

**Demonstrație.** **1**) Dacă $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, atunci ${}^tA=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ şi deci

$\det(A)=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\det({}^tA)$.

**2**) Dacă $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, atunci ${}^tA=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Aplicați regula triunghiului sau regula lui Sarrus şi constatați că $\det(A)=\det({}^tA)$.

Altfel dezvoltând $\det(\mathrm{A})$ după prima linie, iar $\det({}^tA)$ după prima coloană avem

$\det(A)=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}M_{11}-a_{12}\mathrm{M}_{12}+a_{13}M_{13}$

$\det({}^tA)=a_{11}{}^tA_{11}+a_{12}{}^tA_{21}+a_{13}{}^tA_{31}=a_{11}{}^t\mathrm{M}_{11}-a_{12}{}^t\mathrm{M}_{21}+a_{13}{}^tM_{31}$, unde $M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, iar ${}^tM_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$, etc. şi se ţine seamă că pentru minorii de ordin doi au loc egalităţile

$M_{11}={}^tM_{11}$, $M_{12}={}^tM_{21}$, $M_{13}={}^tM_{31}$, conform cu **1)**.■

**Observaţie.** Această proprietate arată că ori de câte ori avem o proprietate adevărată referitoare **la liniile unui determinant**, aceeaşi proprietate rămâne adevărată şi **pentru coloanele determinantului**.

> **P2**. Dacă toate elementele unei linii (sau coloane) dintr-o matrice sunt nule, atunci determinantul matricei este nul.

**Demonstraţie. 1**) Dacă $A\in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, atunci $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix}=0\cdot d-c\cdot 0=0$ şi

$\begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}=0\cdot d-b\cdot 0=0$.

**2**) Dacă $A\in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, are o linie (sau coloană) formată numai din zerouri, atunci se dezvoltă $\det(A)$ după acea linie (sau coloană) şi este clar că se obţine valoarea zero. Altfel, utilizând regula lui Sarrus sau regula triunghiului, fiecare termen din dezvoltare are în produs câte un element de pe fiecare linie (şi fiecare coloană).■

**Exerciţiu rezolvat. Dacă un determinant de ordin trei are cel puţin şapte elemente egale cu zero, atunci determinantul este nul.**

**R. Numărul de elemente al determinantului de ordin 3 este 9. Cum cele** $9-7=2$ **elemente sunt nenule, acestea se pot distribui pe cel mult două linii diferite. Deci o linie este cu toate elementele zero şi prin urmare determinantul este nul.**

> **P3**. Dacă într-o matrice schimbăm două linii (sau coloane) între ele, obţinem o matrice care are determinantul egal cu opusul determinantului matricei iniţiale.

**Demonstraţie. 1**) Prin schimbarea liniilor (sau coloanelor) să arătăm că avem egalităţile $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ şi respectiv $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, adică

$a_{21}a_{12}-a_{11}a_{22}=-(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})$ şi

respectiv $a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}=-(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})$ ceea ce-i imediat.

**2**) Pentru determinantul de ordin trei aplicaţi regula lui Sarrus sau regula triunghiului şi arătaţi că $\det(A)=\det(L_1,L_2,L_3)=-\det(L_3,L_2,L_1)$ şi $\det(C_1,C_2,C_3)=-\det(C_2,C_1,C_3)$, unde prin scrierile $\det(A)=\det(L_1,L_2,L_3)$, $\det(A)=\det(C_1,C_2,C_3)$ am evidenţiat cele trei linii şi respectiv cele trei coloane ale determinantului în această ordine.

Avem $\det(L_1,L_2,L_3)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \det(L_3,L_2,L_1)=\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$

$\det(A)=\det(C_1,C_2,C_3)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \det(C_2,C_1,C_3)=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$. ■

**Observație.** Un alt mod de abordare al acestei proprietăți se găseşte la probleme propuse, prin utilizarea matricelor elementare.

**Exemplu. Exprimați determinanții $D_2, D_3$ cu ajutorul lui $D_1$ :**

$D_1=\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a'' & a' & a \\ b'' & b' & b \\ c'' & c' & c \end{vmatrix}, D_3=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a'' & b'' & c'' \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$.

**R. Determinatul $D_2$ se obține din $D_1$ schimbând coloanele 1 şi 3 între ele. Deci $D_2=-D_1$. Pentru a-l obține pe $D_3$ din $D_1$ facem transpusa matricei din $D_1$. Determinantul acestei matrice coincide cu $D_1$. În această matrice schimbăm liniile 2 şi 3 între ele şi luând determinantul dăm peste $D_3$. Deci, $D_3=-D_1$.**

**P4**. Dacă o matrice are două linii (sau coloane) identice, atunci determinantul său este nul.

**Demonstrație. 1**) Se verifică imediat egalitățile $\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix}=ab-ba=0$.

**2**) Pentru determinantul de ordinul trei, care are două linii (sau coloane) egale prin schimbarea acestor linii (coloane) între ele, conform cu *P3*, avem egalitatea $\det(A)=-\det(A)$, adică $\det(A)=0$. ■

**Observație.** Avem identitățile $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+a_{i3}A_{j3}=\begin{cases} \det(A), & \text{daca } i=j \\ 0, & \text{daca } i\neq j \end{cases}$

(dezvoltarea după linia i). Pentru $i\neq j$, aceste linii fiind egale, conform cu ***P4***, valoarea determinantului este egală cu zero.

**Exemplu. Să se calculeze determinantul $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.**

**R.Cum determinantul are două linii identice (prima şi a treia) rezultă că valoarea lui este egală cu zero.**

**P5**. Dacă toate elementele unei linii (sau coloane) ale unei matrice sunt înmulțite cu un număr $\alpha$, obținem o matrice al cărei determinant este egal cu $\alpha$ înmulțit cu determinantul matricei inițiale.

**Demonstrație. 1**) Proprietatea se verifică uşor pentru $n=2$, şi se scrie sub forma
$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & \alpha a_{22} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$
Se spune că am scos factor comun pe $\alpha$ între elementele liniei întâi, a doua, coloanei întâi şi respectiv coloanei a doua a determinantului.
**2**) Pentru $n=3$, se dezvoltă determinantul după acea linie (sau coloană) şi se obține uşor că :
$\det(\alpha L_1, L_2, L_3) = \det(L_1, \alpha L_2, L_3) = \ldots = \det(C_1, C_2, \alpha C_3) = \alpha \det(A)$.

De exemplu , $\det(\alpha L_1, L_2, L_3) = \sum_{i=1}^{3} (\alpha a_{1i}) A_{1i} = \alpha \sum_{i=1}^{3} a_{1i} A_{1i} = \alpha \det(A)$. ■

**Observații. 1**) Este o proprietate importantă care **permite să scoatem factor comun de pe linii şi (sau) coloane.** Determinantul care rămâne de calculat **are elemente mai simple!**

**2**) $\det(\alpha A) = \alpha^2 \det(A), \forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ şi $\det(\alpha A) = \alpha^3 \det(A), \forall A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

**Exemplu. Să se calculeze determinanții:**

**1)** $D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 3 & 0 & 27 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ ; **2)** $D_2 = \begin{vmatrix} 2a & -3 & 2b \\ 3a & 7 & 3b \\ 5a & 11 & 5b \end{vmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$.

**R. 1) Dacă de pe prima linie se scoate factor comun 2, de pe a doua linie 3, iar de pe a treia linie 5, atunci determinantul $D_1$ este egal cu**

$$D_1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 30 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 60 .$$

**2) Se scoate factor comun de pe coloana întâi pe a, iar de pe coloana a treia pe b şi se ține seama de $P4$ . Avem :**

$$D_2 = ab \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & 7 & 3 \\ 5 & 11 & 5 \end{vmatrix} = 0 .$$

**P6**. Dacă elementele a două linii (sau coloane) ale unei matrice sunt proporționale, atunci determinantul matricei este nul.

**Demonstrație. 1**) Prin calcul direct se arată că :
$$\begin{vmatrix} \alpha a & \alpha b \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha a & \alpha b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \alpha b \\ b & \alpha b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a & a \\ \alpha b & b \end{vmatrix} = 0 .$$

**2**) Pentru $n=3$, dacă $L_i = \alpha L_j, i \neq j$, adică $a_{ik} = \alpha a_{jk}, k = \overline{1,3}$, atunci se scoate factor comun $\alpha$ de pe linia i, iar determinantul care rămâne are două linii egale şi deci este nul. ■

**Exemplu.** **Determinantul** $D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ -5 & 0 & -10 \end{vmatrix}$ **, având două coloane proporționale,prima și a treia** $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{-5}{-10}$ **, are valoarea zero.**

Putem gândi elementele unei linii (sau coloane) ale unei matrice ca fiind componentele unui vector.

**P7**. Dacă linia $i$ a unei matrice $A$ este suma a doi vectori, atunci determinantul ei este egal cu suma a doi determinanți corespunzători matricelor care au aceleași linii ca A, cu excepția liniei $i$ unde au câte unul din cei doi vectori.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ .... & ..... & ..... \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2}... & a_{in}+b_{in} \\ .... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ .... & ..... & ..... \\ a_{i1} & a_{i2}... & a_{in} \\ .... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ .... & ..... & ..... \\ b_{i1} & b_{i2}... & b_{in} \\ .... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**Demonstrație. 1**) Avem de arătat că (pentru linia întâi):

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Într-adevăr membrul stâng este egal cu :

$(a+a')d - c(b+b') = ad + a'd - cb - cb'$, iar membrul drept este egal cu $ad - bc + a'd - b'c$ și egalitatea se verifică.

**2**) Pentru $\text{n} = 3$ și linia întâi trebuie să arătăm că:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{3} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Se dezvoltă determinantul din membrul stâng al egalității după linia întâi și avem

$S = (a_{11}+b_{11})A_{11} + (a_{12}+b_{12})A_{12} + (a_{13}+b_{13})A_{13} =$

$= (a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}) + (b_{11}A_{11} + b_{12}A_{12} + b_{13}A_{13}) = \det(A) + \det(B)$, unde $\det(A), \det(B)$ este primul și respectiv al doilea determinant din membrul drept al egalității.■

**Observații. 1**) Din proprietățile ***P5*** și ***P7*** rezultă că determinantul este o funcție liniară de elementele fiecărei linii.

**2**) O proprietate analoagă are loc și pentru coloane (via ***P1***).

**3**) Proprietățile ***P3*, *P5*, *P7***, prezintă comportamentul determinanților când asupra matricelor din care provin s-au efectuat transformări elementare.

**Exemplu.** **Să se calculeze determinantul** $D=\begin{vmatrix} a+d & a & 1 \\ b+d & b & 1 \\ c+d & c & 1 \end{vmatrix}$.

**R.** **Se scrie determinantul ca sumă a doi determinanți**

$$D=\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ b & b & 1 \\ c & c & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} d & a & 1 \\ d & b & 1 \\ d & c & 1 \end{vmatrix}.$$

**Primul determinant având primele două coloane identice este nul. Al doilea determinant are, de asemenea, valoarea zero deoarece are coloanele 1 şi 3, proporționale.**
**Deci,** $D=0$.

**P8**. Dacă o linie (sau coloană) a unei matrice pătratice este o combinație liniară de celelalte linii (sau coloane), atunci determinantul matricei este zero.

**Demonstrație. 2**) Facem verificarea pentru determinantul de ordin 3,

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, unde $L_1=\alpha L_2+\beta L_3$ ( am notat cu $L_i$ linia *i*).

Să arătăm că acest determinant este nul. Avem:

$$\begin{vmatrix} \alpha a_1+\beta a_2 & \alpha b_1+\beta b_2 & \alpha c_1+\beta c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \underline{\underline{P7}} \begin{vmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 & \alpha c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \beta a_2 & \beta b_2 & \beta c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \underline{\underline{P6}}$$

$\underline{\underline{P6}}\ 0+0=0$, ultimii doi determinanți fiind nuli deoarece au câte două linii proporționale. ■

**Exemplu.** **Să se calculeze determinanții: 1)** $D_1=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$**; 2)** $D_2=\begin{vmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

**R.** **1) Se vede uşor că** $L_3=L_1+L_2$ **şi deci determinantul este nul,** $D_1=0$ .

**2) Cum** $L_1=(-2)L_2+3L_3$ **, determinantul** $D_2$ **este egal cu zero.**

**P9**. Dacă la o linie (sau coloană) a matricei *A* adunăm elementele altei linii (sau coloane) înmulțite cu acelaşi număr, atunci această matrice are acelaşi determinant ca şi matricea *A*.

**Demonstrație. 1**)Vom aduna la linia întâi $L_1$ linia a doua înmulțită cu $\alpha$. Vom nota acest fapt prin $L_1+\alpha L_2$. Avem:

$$\begin{vmatrix} a+\alpha a_1 & b+\alpha b_1 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \underline{\underline{P7}} \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \underline{\underline{P6}} \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}+0=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}.$$

**2**) Vom aduna la coloana $C_1$, coloana a treia înmulțită cu $\alpha$. Notăm acest fapt prin $C_1+\alpha C_3$. Avem succesiv:

$$\begin{vmatrix} a+\alpha c & b & c \\ a_1+\alpha c_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\alpha c_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \overset{P7}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha c & b & c \\ \alpha c_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha c_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \overset{P6}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + 0 =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} . \blacksquare$$

**Observație.** Această proprietate este deosebit de importantă deoarece prin această acțiune **se pot obține cât mai multe zerouri pe o linie** (sau **coloană).**

**Exemple. 1) Să se calculeze determinantul de ordin 4:** $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

**R. Vom face zerouri pe linia întâi. Se fixează, de obicei, elementul cel mai mic în valoare absolută de pe această linie şi odată cu el coloana care-l conține. Vom înmulți convenabil această coloană şi o vom aduna la celelalte coloane, astfel încât după această operație să facem zerouri pe linia întâi.**

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_2+2C_1 \\ = \\ C_3-3C_1 \\ C_4-4C_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 5 & -9 & -8 \\ -3 & -5 & 9 & 17 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 5 & -9 & -8 \\ -5 & 9 & 17 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{matrix} C_2+C_1 \\ = \\ C_3-5C_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & -33 \\ -5 & 4 & 42 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -4 & -33 \\ 4 & 42 \end{vmatrix} = 4\cdot 3 \begin{vmatrix} -1 & -11 \\ 1 & 14 \end{vmatrix} = -36,$$

**unde prin $C_2+2C_1$ înțelegem că la coloana a doua se adună coloana întâi înmulțită cu 2, iar prin $C_3-3C_1$ se înțelege că la coloana a treia se adună coloana întâi înmulțită cu $(-3)$ (sau din coloana a treia scădem coloana întâi înmulțită cu trei). La coloana (sau linia) scrisă prima se adună o altă coloană (sau linie) înmulțită cu un număr.**

**2) Numerele 204, 527, 255 sunt divizibile prin 17. Arătați că determinantul**

$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ **este divizibil prin 17. Generalizare.**

**R. Notăm $C_1, C_2, C_3$ coloanele determinantului. La coloana $C_3$ adunăm o combinație liniară de coloanele $C_1$ şi $C_2$ de forma $100C_1+10C_2$. Marcăm această transformare prin $C_3+10C_2+100C_1$. Se obține determinantul**

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 204 \\ 5 & 2 & 527 \\ 2 & 5 & 255 \end{vmatrix} = 17\cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 12 \\ 5 & 2 & 31 \\ 2 & 5 & 15 \end{vmatrix}, \text{ adică } D \vdots 17 .$$

**3) Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$, ale cărei elemente sunt egale cu $-1$ sau cu 1.**

**Să se arate că $\det(A)$ se divide prin 4.**

**R. În $\det(A)$ se fac transformările $L_2+L_1$, $L_3+L_1$. În acest fel elementele liniilor doi şi trei sunt egale cu $-2=-1-1$ sau cu $0=-1+1$ sau cu $2=1+1$.**

**Pe fiecare din aceste linii se dă factor comun 2 şi $\det(A)=4\det(A')$, unde $A'\in\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ cu $\det(A')\in\mathbb{Z}$. Deci $\det(A)$ se divide prin 4.**

**P10**. Dacă $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci $\det(AB)=\det(A)\det(B)$.

Determinantul produsului a două matrice pătratice este egal cu produsul determinanților acelor matrice.

**Demonstrație.** Demonstrăm proprietatea numai pentru $n=2$.
Fie matricele pătratice de ordin doi

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \text{ şi } AB=\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix}.$$

De aici $\det(AB)=(ax+bz)(cy+dt)-(cx+dz)(ay+bt)=$

$=acxy+adxt+bczy+bdzt-acxy-bcxt-adzy-bdzt=$

$=adxt+bczy-bcxt-adzy=(ad-bc)(xt-yz)=\det(A)\det(B)$. ■

**Consecințe. 1**) Dacă $A_1,A_2,...,A_k\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,atunci
$\det(A_1A_2...A_k)=\det(A_1)\det(A_2)...\det(A_k)$.

**2**) Dacă $A_1=A_2=...=A_k=A$, atunci $\det(A^k)=(\det(A))^k, k\in\mathbb{N}^*$.

**Exerciții**

**1) Să se arate că nu există matricele $A,B,C\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $AB=BC=CA=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.**

**2) Dacă $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, atunci $A^n\neq I_3, \forall n\in\mathbb{N}^*$.**

**R. 1) Dacă, prin absurd, ar exista matricele *A, B, C* atunci $AB^2C^2A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^3$**

**şi luând aici determinantul rezultă $\det(AB^2C^2A)=(-9)^3$ sau**

**$(\det(A)\det(B)\det(C))^2=-729$, fals, pentru că membrul stâng este pozitiv.**

**2) Vom proceda tot, prin absurd. Presupunem că există $k\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $A^k=I_3$.**
**Atunci de aici $\det(A^k)=1\Leftrightarrow(\det(A))^k=1\Leftrightarrow$ ( $\det(A)=1$, pentru *k* impar sau $\det(A)=\pm1$, pentru *k* par). Contradicție deoarece $\det(A)=0$. Deci nu există $k\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $A^k=I_3$.**

## 2.4. CALCULUL INVERSEI UNEI MATRICE

Reamintim că pentru un număr real $a \neq 0$, inversul lui (în raport cu operația de înmulțire) este $\frac{1}{a}$ cu proprietatea $a \cdot \frac{1}{a} = 1$. De exemplu, inversul lui $\frac{3}{5}$ este $\frac{5}{3}$ pentru care $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = 1$. Pentru anumite matrice pătratice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se poate defini inversa matricei în raport cu operația de înmulțire a matricelor pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Are loc următoarea:

**Definiție.** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), n \in \{2, 3\}$. Matricea $A$ se numeşte **inversabilă** dacă există matricea $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n, \ I_n \text{ fiind matricea unitate.}$$

---

Matricea $B$ se numeşte **inversa matricei** $A$ şi se notează cu $B = A^{-1}$ (citim „$A$ la minus unu “).

**Observații. 1**) Inversa unei matrice, dacă există, este unică.
Într-adevăr dacă $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este, de asemenea, inversa lui $A$, atunci $AC = CA = I_n$ .Utilizând relațiile care definesc inversa şi asociativitatea înmulțirii matricelor avem: $B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$ .

**2**) Din definiție $A^{-1}$ este inversa lui $A$ şi deci $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$ .

**3**) Nu orice matrice pătratică are inversă.

Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Aceasta nu are inversă. Dacă, prin absurd, ar exista $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ astfel încât $AB = I_2$ , atunci s-ar obține egalitatea de matrice

$\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ceea ce-i imposibil.

**4**) Matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ are inversă matricea $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

deoarece:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \text{ şi } A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 .$$

Prezentăm, în continuare, tehnici pentru a construi (în cazul când este posibil) inversa unei matrice.

**Metoda 1. (Utilizând definiția)** Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$. Să se determine inversa lui $A$.

**R**. Dacă există $A^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, atunci trebuie să avem

$$AA^{-1}=I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a+2c & b+2d\\ -a+3c & -b+3d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases}a+2c=1\\ -a+3c=0\end{cases} \text{şi} \begin{cases}b+2d=0\\ -b+3d=1\end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(a=\frac{3}{5}, c=\frac{1}{5}, b=-\frac{2}{5}, d=\frac{1}{5}\right).$$

Deci, $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{2}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$ pentru care se verifică uşor că $AA^{-1}=I_2$.

**Metoda 2. (Utilizând transformările elementare de linii asupra matricelor)**

Considerăm aceeaşi matrice de la **metoda 1** , $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$.

Am văzut acolo că determinarea inversei se reduce la rezolvarea a două sisteme de ecuații:

$$\begin{cases}a+2c=1\\ -a+3c=0\end{cases} \ (1) \text{ şi } \begin{cases}b+2d=0\\ -b+3d=1\end{cases} \ (2).$$

Primului sistem îi asociem matricea sistemului şi respectiv matricea extinsă a sistemului (obținută din matricea sistemului la care se adaugă coloana termenilor liberi).

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix} \text{ şi } \overline{A_1}=\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 0\end{array}\right).$$

Celui de-al doilea sistem îi asociem, asemănător matricele

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix} \text{ şi } \overline{A_2}=\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 1\end{array}\right).$$

Vom considera matricea $M$, extinsa lui A, prin adăugarea coloanelor termenilor liberi din cele două sisteme $M=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)$(bara verticală separă matricele $A$ şi $I_2$ .Cele două coloane definesc matricea unitate $I_2$ . Deci $\mathrm{M}=\left(A|I_2\right)$.

Algoritmul după care se determină inversa unei matrice este următorul:

**Algoritm pentru determinarea inversei matricei** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

**Pasul 1.** Se formează matricea $M = (A|I_n)$.

**Pasul 2.** Utilizând transformările elementare se aduce matricea M la forma $(I_n|B)$, dacă este posibil.

**Pasul 3.** $A^{-1} = B$.

Reamintim transformările elementare care se fac asupra liniilor unei matrice:

**O1**. Schimbarea a două linii între ele.
**O2**. Înmulțirea unei linii printr-un număr real nenul.
**O3**. Înlocuirea unei linii prin suma dintre această linie şi o altă linie înmulțită cu un număr.

Prezentăm în paralel transformările matricei M şi transformările sistemelor (1) şi (2).

| Transformările asupra matricei ***A*** | Transformările echivalente ale sistemelor (1) şi (2) |
|---|---|
| $\left(\begin{array}{cc\|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xleftrightarrow{L_2+L_1} \left(\begin{array}{cc\|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right)$ | $\begin{cases} a+2c=1 \\ 5c=1 \end{cases}; \begin{cases} b+2d=0 \\ 5d=1 \end{cases}$ |
| $\left(\begin{array}{cc\|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right) \xleftrightarrow{\frac{1}{5}L_2} \left(\begin{array}{cc\|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$ | $\begin{cases} a+2c=1 \\ c=\frac{1}{5} \end{cases}; \begin{cases} b+2d=0 \\ d=\frac{1}{5} \end{cases}$ |
| $\left(\begin{array}{cc\|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \xleftrightarrow{L_1-2L_2} \left(\begin{array}{cc\|cc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$ | $\begin{cases} a=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5} \\ c=\frac{1}{5} \end{cases}; \begin{cases} b=-\frac{2}{5} \\ d=\frac{1}{5} \end{cases}$ |

Deci inversa lui A există şi este matricea $B = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

**Metoda 3. (Utilizând matricea adjunctă).** Pentru început dăm următoarea

**Definiție.** O matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), n \in \{2, 3\}$, se numeşte **nesingulară,** dacă $\det(A) \neq 0$. În caz contrar matricea $A$ se numeşte **singulară**.

În celelalte două metode nu am putut stabili de la început dacă o matrice pătratică este inversabilă. Rezultatul următor ne precizează de la început dacă matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este sau nu inversabilă. Mai precis are loc următoarea:

**Teoremă.** Matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ **este inversabilă** dacă şi numai dacă matricea $A$ **este nesingulară.**

---

Deci, $A$ **este inversabilă** $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

**Demonstrație.** Presupunem că $A$ este inversabilă şi să demonstrăm că $\det(A) \neq 0$. Avem $AA^{-1} = I_n$. Luând determinantul în această egalitate şi ținând seamă de egalitatea $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (**P10**)

rezultă $\det(A)\det\left(A^{-1}\right) = \det(I_n) = 1$, adică $\det(A) \neq 0$. Deci $A$ este nesingulară.

Reciproc, dacă $A$ are proprietatea $d = \det(A) \neq 0$ (adică $A$ este nesingulară) atunci să arătăm că $A$ este inversabilă. Vom face acest lucru găsind inversa $A^{-1}$. Construcția lui $A^{-1}$ presupune următorii paşi:

**Pasul 1.** (**Construcția adjunctei matricei** A, $A^*$)

Definim matricea $A^*$, ale cărei elemente $A_{ij}^* = A_{ji}$ reprezintă **complementții algebrici** ai elementelor $a_{ij}$ din matricea $A$, $\forall i = \overline{1,3}, \forall j = \overline{1,3}$, aşezați transpus.

Deci, $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$.

Pentru calculul $AA^*$ şi $A^*A$, utilizăm relațiile din observația de la **P4**,

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + a_{i3}A_{j3} = \begin{cases} \det(A), daca\ i = j \\ 0, daca\ i \neq j \end{cases}.$$

Avem $A \cdot A^* = A^* \cdot A = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} = dI_3$.

De aici $A\left(\frac{1}{d}A^*\right) = \left(\frac{1}{d}A^*\right)A = I_3$, egalități care arată că $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}A^*$.

**Pasul 2.** Inversa matricei $A$ este $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}A^*$. ■

**Observații. 1**) Pentru a obține $A^*$ se calculează matricea $A'$ care se obține din $A$, înlocuind fiecare element cu complementul său algebric și apoi se ia ${}^tA'$. Aceasta este $A^*$.

**2**) Dacă $A,B\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AB=I_n$ atunci $BA=I_n$ și $B=A^{-1}$. Într adevăr din $AB=I_n$ rezultă $\det(A)\neq 0$, adică A este inversabilă.

Din $AB=I_n$, prin înmulțire la stânga cu $A^{-1}$ rezultă $B=A^{-1}$ și evident $BA=A^{-1}A=I_n$.

**3**) Dacă $A\in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și $\det(A)\neq 0$, verificați că

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

**Exemplu. Să se determine inversa matricei** $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**R. Observăm că $\det(A)=5\neq 0$, și deci $A$ este nesingulară, adică inversabilă. Construim matricea $A'$, obținută din $A$, înlocuindu-i elementele cu complemenții lor algebrici. Avem:** $A_{11}=1$, $A_{12}=-2$, $A_{13}=1$, $A_{21}=1$, $A_{22}=3$, $A_{23}=1$, $A_{31}=-3$, $A_{32}=6$, $A_{33}=2$.

**Deci** $A'=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$, **iar** $A^*={}^tA'$, **adică** $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

**Inversa lui $A$ este matricea**

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}A^*=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Verificați prin calcul direct egalitățile: $AA^{-1}=A^{-1}A=I_3$.

**Observații. 1**) Dacă A este nesingulară, atunci și $A^{-1}$ este nesigulară.

**2**) Dacă $A\in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ sau $A\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A$ inversabilă, atunci $A^{-1}\in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ sau $A^{-1}\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dacă $A\in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ și $A$ inversabilă, atunci $A^{-1}\in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \det(A)\in\{\pm 1\}$.

**3**) Dacă $A$ și $B$ sunt inversabile, atunci $A\cdot B$ este inversabilă și $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

**4**) Dacă $A\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A$ inversabilă atunci $(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n \overset{not.}{=} A^{-n}$, $\forall n\in \mathbb{N}^*$.

De asemenea au loc următoarele proprietăți :

a) $\left({}^{t}A\right)^{-1} = {}^{t}\left(A\right)^{-1}$, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A$ inversabilă.

b) $\left(\alpha A\right)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha}\left(A\right)^{-1}$, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A$ inversabilă, $\alpha \neq 0$.

## Aplicații ale inversei unei matrice

**1) Ecuații matriceale. Vom prezenta în continuare o tehnică de rezolvare a unor ecuații de forma $AX = C$, $XA = C, AXB = C$, unde $A, B, C$ sunt matrice cunoscute, iar $X$ este matricea de aflat. Astfel de ecuații se numesc ecuații matriceale.**

**În acest paragraf rezolvăm astfel de ecuații când $A, B$ sunt matrice pătratice inversabile.**

**Pentru rezolvarea ecuației $AX = C$ înmulțim la stânga egalitatea cu $A^{-1}$ și avem:**

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}C \Leftrightarrow \left(A^{-1}A\right)X = A^{-1}C \Leftrightarrow IX = A^{-1}C \Leftrightarrow X = A^{-1}C.$$

**Deci soluția ecuației date este $X = A^{-1}C$.**

**Pentru determinarea soluției ecuației $XA = C$ vom înmulți la dreapta cu $A^{-1}$ și analog vom găsi $X = CA^{-1}$, soluția ecuației matriceale.**

**În fine, pentru găsirea soluției ecuației $AXB = C$ înmulțim egalitatea la stânga cu $A^{-1}$, iar la dreapta cu $B^{-1}$ și obținem $X = A^{-1}CB^{-1}$.**

**Exemple. 1) Să se rezolve ecuația matriceală $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.**

**R. În acest caz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ cu $\det(A) = -1 \neq 0$, ceea ce arată că $A$ este inversabilă. Găsim**

**$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ și deci $X = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sau $X = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.**

**2) Să se rezolve ecuația matriceală $X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.**

**R. Matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ are $\det(A) = 2 \neq 0$ și deci este inversabilă.**

**Inversa matricei A este matricea $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.**

**Soluția ecuației matriceale este matricea $X = CA^{-1}$, unde $C$ este matricea din membrul drept al ecuației. Găsim $X = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.**

**3) Să se rezolve ecuația matriceală $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.**

**R. În acest caz maticele $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ având $\det(A) = -1 \neq 0$, $\det(B) = -1 \neq 0$ sunt inversabile. Soluția ecuației matriceale este matricea**

$X = A^{-1}CB^{-1}$, unde $C$ este matricea din membrul drept al ecuației date. Găsim $X = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$.

**2) Rezolvarea unor sisteme de ecuații liniare.** Să se rezolve sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 3x + 2y + z = 2 \\ 2x + y + 2z = -1 \end{cases}.$$

**R.** Considerăm următoarele matrice asociate acestui sistem

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, **matricea sistemului** ; $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, **coloana termenilor liberi** ;

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, **matricea necunoscutelor sistemului**.

Sistemul se scrie sub formă matriceală $AX = B$.

Dacă matricea $A$ este inversabilă, atunci se înmulțește la stânga cu $A^{-1}$ egalitatea $AX = B$ și rezultă $X = A^{-1}B$.

Avem $\det(A) = 1 \neq 0$, adică $A$ este inversabilă. Găsim $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Cu acestea $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, adică $x = 2, y = -1, z = -2$.

**3(Criptografia și înmulțirea matricelor).** Am văzut că un mesaj cifrat este mai greu de decodificat, în cazul în care tehnica de codificare este mai complexă.

Fie mesajul „ Apa lină este adâncă ”, pe care îl codificăm cu ajutorul pătratului lui Polybe. Se obține mesajul cifrat ( 11 35 11)(31 24 33)(11 15 43)(44 15 11) (14 24 33) (13 11 0).

Am pus ultimul număr egal cu zero pentru a obține un grup de câte trei numere. Dacă lipsesc două litere se pun două zerouri. Punem aceste numere într-o matrice, considerând fiecare grup de trei numere o coloană a matricei. Avem:

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 31 & 11 & 44 & 14 & 13 \\ 35 & 24 & 15 & 15 & 24 & 11 \\ 11 & 33 & 43 & 11 & 33 & 0 \end{pmatrix}$$

Considerăm o matrice pătratică de ordin 3, cu elemente numere întregi, al cărei determinant este egal cu $\pm 1$. Atunci există $A^{-1} = \pm A^*$ și are elemente numere întregi. Fie aceasta $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ cu $\det(B) = 1 \neq 0$. Se face produsul:

$$P = BA = \begin{pmatrix} 57 & 88 & 69 & 70 & 71 & 24 \\ 46 & 57 & 58 & 26 & 57 & 11 \\ 11 & 33 & 43 & 11 & 33 & 0 \end{pmatrix}.$$

Numerele din matricea $P$ reprezintă textul codificat. El va fi transmis destinatarului sub forma 57 46 11 88 57 33 69 58 43 70 26 11 71 57 33 24 11 0.

Destinatarul va pune câte trei termeni pe coloană și obține matricea $P$. Pentru a obține mesajul inițial din $P = BA$ se calculează $B^{-1}P = B^{-1}BA = A$, care este matricea mesajului

**inţial. Descifrarea acestuia se face utilizând pătratul lui Polybe. Pentru uşurinţa decodificării pătratul lui Polybe se poate completa cu alte linii şi coloane corespunzătoare literelor mari ale alfabetului (*A, Ă, B, C*,...), cifrelor (0,1,...,9), semnelor speciale (. ; ?, ... ).**

## Probleme rezolvate

**1. Calculaţi determinanţii de mai jos utilizând proprietăţile determinanţilor:**

**1)** $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a-b & b+c & c+a \\ b-c & c+a & a+b \\ c-a & a+b & b+c \end{vmatrix}$; **2)** $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & x-y & x-y \\ x-y & -2xy & x^2+y^2 \\ x-y & x^2+y^2 & -2xy \end{vmatrix}$;

**3)** $\Delta_3 = \begin{vmatrix} b-c & c-a & a-b \\ b+c & c+a & a+b \\ b^2-c^2 & c^2-a^2 & a^2-b^2 \end{vmatrix}$.

**R. 1) Dacă la coloana întâi se adună coloana a doua, adică $C_1+C_2$, atunci**

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a+c & b+c & c+a \\ b+a & c+a & a+b \\ c+b & a+b & b+c \end{vmatrix} = 0$**, deoarece coloanele 1 şi 3 sunt egale.**

**2)** $C_2+C_3$ **şi obţinem:** $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2(x-y) & x-y \\ x-y & (x-y)^2 & x^2+y^2 \\ x-y & (x-y)^2 & -2xy \end{vmatrix} = (x-y)\begin{vmatrix} 2 & 2 & x-y \\ x-y & x-y & x^2+y^2 \\ x-y & x-y & -2xy \end{vmatrix} = 0$,

**având primele două coloane egale.**

**3) Să observăm că dacă adunăm elementele situate pe linia întâia se obţine zero; la fel pentru linia a treia. Se adună coloanele 2 si 3 la 1, adică $C_1+C_2+C_3$ şi rezultă**

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & c-a & a-b \\ 2(a+b+c) & c+a & a+b \\ 0 & c^2-a^2 & a^2-b^2 \end{vmatrix} = -2(a+b+c)\begin{vmatrix} c-a & a-b \\ c^2-a^2 & a^2-b^2 \end{vmatrix}.$$

**Se scoate factor comun de pe coloana 1, *c-a*, iar de pe coloana 2, $a-b$ şi avem:**

$$\Delta_3 = -2(a+b+c)(c-a)(a-b)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c+a & a+b \end{vmatrix} = -2(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a).$$

**2. Să se calculeze determinanţii de tip Vandermonde:**

**1)** $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$; **2)** $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$; **3)** $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^4 & b^4 & c^4 \end{vmatrix}$; **4)** $\Delta_4 = \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & bc & c^2 \\ c^2 & ac & a^2 \end{vmatrix}$.

**R. 1) Se efectuează transformările $C_2-C_1, C_3-C_1$ când avem:** $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix}$.

**Se scoate factor comun pe coloana 2, $b-a$, iar pe coloana 3, $c-a$ şi rezultă:**

$$\Delta_1 = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2 & b+a & c+a \\ a^3 & b^2+ab+a^2 & c^2+ac+a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)(ac+ab+bc).$$

**2) Se efectuează operaţiile următoare asupra coloanelor: $C_2-C_1, C_3-C_1$ şi avem:**

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ a & b-a & c-a\\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ a & 1 & 1\\ a^3 & b^2+ab+a^2 & c^2+ac+a^2\end{vmatrix}=$$

$$=(b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c).$$

**Observăm că găsirea determinantului conduce la un polinom omogen (fiecare monom al său are gradul patru) şi simetric (permutând circular *a, b, c* polinomul rămâne acelaşi). Pe de altă parte dacă în determinant se face $b=a, c=a, c=b$, acesta este nul (având două coloane egale). Prin urmare polinomul ce se obţine prin dezvoltarea determinantului se divide cu $(b-a)(c-a)(c-b)$. Cum acest produs este un polinom omgen şi simetric de gradul trei, rezultă pentru cât un polinom omogen şi simetric de gradul unu, deci de forma $k(a+b+c)$. Aşadar $\Delta_2=k(b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)$.**

**Pentru determinarea lui k se particularizează variabilele, punând de exemplu $a=0, b=1, c=-1$ când rezultă $k=1$.**

**3) Din nou facem zerouri pe linia 1 cu ajutorul transformărilor $C_2-C_1, C_3-C_1$:**

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ a & b-a & c-a\\ a^4 & b^4-a^4 & c^4-a^4\end{vmatrix}==(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ a & 1 & 1\\ a^4 & (b+a)(b^2+a^2) & (c+a)(c^2+a^2)\end{vmatrix}=$$

$$=(b-a)(c-a)(c-b)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac).$$

**4) Dacă $a=0$, atunci găsim uşor $\Delta_4=-b^3c^3$. Analog dacă $b=0$ sau $c=0$ rezultă $\Delta_4=-(ac)^3$ şi respectiv $\Delta_4=-(ab)^3$.**

**Presupunem că $abc\neq 0$. Atunci se scoate factor comun din fiecare linie $a^2, b^2$ şi respectiv $c^2$. Se obţine un determinant Vandermonde**

$$\Delta_4=a^2b^2c^2\begin{vmatrix}1 & \left(\frac{b}{a}\right) & \left(\frac{b}{a}\right)^2\\ 1 & \left(\frac{c}{b}\right) & \left(\frac{c}{b}\right)^2\\ 1 & \left(\frac{a}{c}\right) & \left(\frac{a}{c}\right)^2\end{vmatrix}=a^2b^2c^2\left(\frac{c}{b}-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{c}-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{c}-\frac{c}{b}\right)=(a^2-bc)(b^2-ac)(c^2-ab).$$

**3. Să se rezolve ecuaţiile matriceale : a) $AX=C$ ; b) $XB=C$ ; c) $AXB=C$ ,**

**în cazul** $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

**R. Observăm că matricele *A, B* sunt inversabile $(\det(A)=1\neq 0, \det(B)=1\neq 0)$.**

**Pentru a rezolva a) se înmulţeşte ecuaţia la stânga cu $A^{-1}$ şi rezultă $A^{-1}AX=A^{-1}C$ sau $X=A^{-1}C$ (am ţinut seamă că $A^{-1}A=AA^{-1}=I_3$).**

**Pentru rezolvarea ecuaţiei b) înmulţim ecuaţia la dreapta cu $B^{-1}$ şi se obţine $X=CB^{-1}$.**
**În fine, pentru rezolvarea lui c) înmulţim ecuaţia la stânga cu $A^{-1}$, iar la dreapta cu $B^{-1}$ când avem $X=A^{-1}CB^{-1}$. În cazul nostru**

$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$ **când găsim pentru**

**a)** $X=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$; **b)** $X=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$; **c)** $X=\begin{pmatrix}-8 & 6 & -2\\ 6 & -4 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

## 2.5. APLICAȚII ALE DETERMINANȚILOR ÎN GEOMETRIA ANALITICĂ

**1) Ecuația dreptei sub formă de determinant**

Fie $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ două puncte distincte ( nesituate pe o paralelă cu axa Oy, $x_1 \neq x_2$ ) în reperul cartezian $xOy$. Aceste puncte determină o dreaptă. Am găsit anul precedent că ecuația acestei drepte este:

$(AB): y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ sau încă

$(AB): (y-y_1)(x_2-x_1)-(y_2-y_1)(x-x_1)=0$.

Această ultimă scriere sugerează utilizarea determinantului de ordin 2

$(AB): \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1\end{vmatrix}=0$, scriere care provine din determinantul de ordin 3

$(AB): \begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}=0$ în care se scade linia 2 din celelalte şi se dezvoltă determinantul după coloana 3.

Deci am demonstrat următoarea:

**Teoremă.** Fie $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), x_1 \neq x_2$. Atunci ecuația dreptei $AB$ dată sub formă de determinant este

$$(AB): \begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}=0.$$

**Observații. 1)** Să remarcăm că pe coloana corespunzătoare abscisei $x$ se scriu abscisele celor două puncte, iar pe coloana corespunzătoare ordonatei $y$ se scriu ordonatele celor două puncte în aceeaşi ordine.

**2)** Să observăm că expresia

$E(x,y)=\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$ conține pe *x*, *y* la puterea întâi şi deci $E(x,y)=0$ este ecuația unei drepte. Cum $E(x_1,y_1)=E(x_2,y_2)=0$ (deoarece avem două linii egale), deducem că punctele *A*, *B* aparțin dreptei $E(x,y)=0$. Deci $E(x,y)=0$ este chiar ecuația dreptei *AB*.

**Exemplu. Să se scrie ecuația dreptei determinată de punctele $A(2,3), B(-1,5)$ sub formă de determinant.**

**R. Avem $(AB):\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}=0$.**

### 2) Coliniaritatea a trei puncte

O problemă pe care am întâlnit-o şi în clasele precedente şi căreia i-am dat mai multe rezolvări.

În clasa a IX-a, pentru a proba coliniaritatea a trei puncte $M, N, P$ am utilizat una din tehnicile următoare: 1) relația metrică $MN+NP=MP$; 2) axioma lui Euclid; 3) vectorul de poziție $\vec{r}_N=\alpha\vec{r}_M+\beta\vec{r}_P$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}, \alpha+\beta=1$; 4) reciproca teoremei lui Menelaos $(AM/MB)(BN/NC)(CP/PA)=1$, cu $ABC$ triunghi, iar $M\in AB, N\in BC, P\in AC$; 5) coliniaritatea vectorilor din una din perechile de vectori $(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}),(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{NP}),(\overrightarrow{MP},\overrightarrow{NP})$. În clasa a X-a, pentru aceeaşi problemă am folosit una din metodele: 1) vectorială, constând în a proba coliniaritatea, de exemplu, a vectorilor $\overrightarrow{MN}$ şi $\overrightarrow{NP}$ ($\exists\alpha\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $\overrightarrow{MN}=\alpha\overrightarrow{NP}$); 2) analitică (utilizând panta dreptei) când arătăm că $m_{MN}=m_{MP}$; 3) cu numere complexe când trebuie dovedit că $(z_N-z_M)/(z_P-z_M)\in\mathbb{R}^*$.

Fie dreapta $(d): ax+by+c=0$ $(a\neq 0 \text{ sau } b\neq 0)$. Punctul $C(x_0,y_0)$, este situat (aparține) pe dreapta (*d*) dacă punând $x=x_0, y=y_0$ în ecuația dreptei aceasta se verifică, adică $ax_0+by_0+c=0$.

Trei puncte *A*, *B*, *C* sunt coliniare dacă sunt situate pe aceeaşi dreaptă. Referitor la acest aspect are loc următoarea

**Teoremă.** Punctele $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3,y_3)$ **sunt coliniare** dacă şi numai dacă $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$.

**Demonstrație.** Se scrie ecuația dreptei *BC* sub formă de determinant şi se impune condiția ca punctul *A* să fie situat pe dreapta *BC*. ■

**Exemplu. Să se arate că punctele $A(1,2), B(-5,-2), C(-2,0)$ sunt coliniare.**

**R. Trebuie verificată condiția $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, ceea ce-i imediat.**

**3) Distanța de la un punct la o dreaptă**

Considerăm dreapta $(d): y = mx + n$, neparalelă cu axele de coordonate $(\text{Fig. }1)$ și $P(x_0, y_0)$ un punct dat pentru care vrem să determinăm distanța $d$ de la $P$ la dreapta $(d)$.

Vom găsi o exprimare a distanței $d$ în funcție de elementele dreptei *m, n* precum și coordonatele $x_0, y_0$ ale punctului *P*.

Analizăm două cazuri după cum punctul P se află în unul sau altul din cele

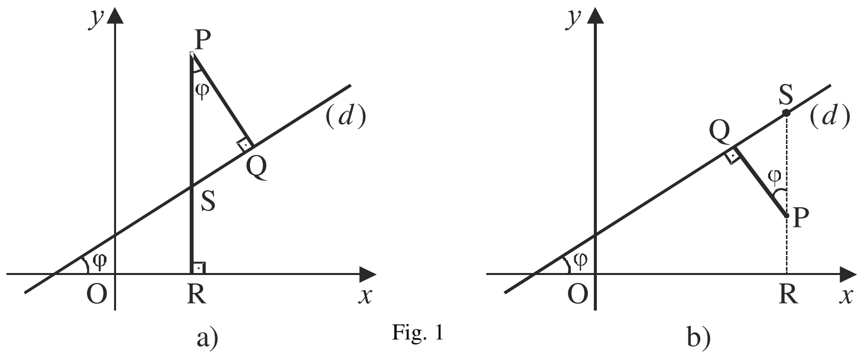



Fig. 1

două semiplane, determinate de dreapta (*d*).

Dacă *P* se află în situația din Fig. 1.a), atunci fie *Q* proiecția lui *P* pe dreapta $(d)$, iar *R* proiecția lui *P* pe axa *Ox* și *S* intersecția dreptei $(d)$ cu *PR*. Din triunghiul dreptunghic *PQS* avem $d = PQ = PS\cos\varphi = (PR - SR)\cos\varphi$.

Cum S aparține dreptei $(d)$ și având abscisa $x_0$, atunci $SR=mx_0+n$.

Deci $d = (y_0 - mx_0 - n)\cos\varphi = \dfrac{y_0 - mx_0 - n}{\sqrt{1+tg^2\varphi}} = \dfrac{y_0 - mx_0 - n}{\sqrt{1+m^2}}$.

Dacă *P* se află în celălalt semiplan determinat de dreapta $(d)$ $(\text{Fig. }1.\text{b})$, atunci

$d = (SR - PR)\cos\varphi = (mx_0 + n - y_0)\cos\varphi = -\dfrac{y_0 - mx_0 - n}{\sqrt{1+m^2}}$.

În concluzie, oricare ar fi poziția punctului *P* față de dreapta $(d)$, distanța lui la dreaptă se exprimă prin :

$$\boxed{d = \frac{|y_0 - mx_0 - n|}{\sqrt{1+m^2}} \qquad (*)}\ .$$

Dacă ecuația dreptei $(d)$ are forma generală $(d): ax + by + c = 0$

atunci $m=-\frac{a}{b}, n=-\frac{c}{b}$ şi deci $(*)$ devine $d=\frac{\left|y_0+\frac{a}{b}x_0+\frac{c}{b}\right|}{\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Deci în cazul ecuaţiei generale a dreptei $(d)$ avem exprimarea

$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, tradusă prin:

Distanţa unui punct $P(x_0,y_0)$, la o dreaptă $(d): ax+by+c=0$
se obţine înlocuind în ecuaţia ei coordonatele curente prin acelea ale punctului dat, împărţind această cantitate prin rădăcina pătrată a sumei pătratelor coeficienţilor variabilelor şi luând valoarea absolută a rezultatului astfel obţinut:

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (**)$$

## Probleme rezolvate

**1. Să se calculeze distanţa de la punctul $P(-1,2)$ la dreapta $(d): 3x+4y-3=0$.**

**R. Aplicăm formula (**) şi obţinem: $d=\frac{|3(-1)+4\cdot 2-3|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{2}{5}$.**

**2. Să se afle lungimile înălţimilor triunghiului ale căror laturi au ecuaţiile $(AB): 2x+3y-11=0, (BC): 2x-5y-3=0, (AC): 2x-y+1=0$.**

**R. Mai întâi determinăm coordonatele vârfurilor.**

**Coordonatele punctului *A*, se obţin rezolvând sistemul format cu ecuaţiile dreptelor $(AB),(AC), \begin{cases}2x+3y-11=0\\2x-\ \ y+1=0\end{cases}$, când obţinem $A(1,3)$.**

**Coordonatele punctului *B*, le determinăm rezolvând sistemul format din ecuaţiile dreptelor $(AB),(BC), \begin{cases}2x+3y-11=0\\2x-5y-3=0\end{cases}$. Găsim $B(4,1)$.**

**Coordonatele punctului *C*, le determinăm rezolvând sistemul format din ecuaţiile dreptelor $(AC),(BC), \begin{cases}2x-\ \ y+1=0\\2x-5y-3=0\end{cases}$. Se obţine $C(-1,-1)$.**

**Lungimea înălţimii din *A* este egală cu distanţa de la *A* la dreapta $(BC): h_a=\frac{|2\cdot 1-5\cdot 3-3|}{\sqrt{2^2+5^2}}=\frac{16}{\sqrt{29}}$.**

**Lungimea înălțimii din** ***B*** **este egală cu distanța de la** ***B*** **la dreapta** $(AC): h_b = \frac{|2\cdot 4 - 1 + 1|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$.

**În fine, lungimea înălțimii din** ***C*** **este egală cu distanța de la** ***C*** **la dreapta**

$(AB): h_c = \frac{|2(-1)+3(-1)-11|}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{16}{\sqrt{13}}$.

**3. Să se determine distanța între dreptele paralele** $(d_1): 3x+4y-5=0, (d_2): 6x+8y+7=0$.

**R. Să observăm mai întâi că dreptele sunt paralele, având aceeași pantă** $m_1 = m_2 = -\frac{3}{4}$.

**Distanța între două drepte paralele este distanța de la un punct al unei drepte la cealaltă dreaptă. Fie deci** $P(3,-1)$ **un punct de pe** $(d_1)$**. Distanța de la** ***P*** **la** $(d_2)$**,**

$d = \frac{|6\cdot 3 + 8(-1)+7|}{\sqrt{6^2+8^2}} = \frac{17}{10}$**, reprezintă distanța între cele două drepte.**

**4. Să se scrie ecuațiile dreptelor care trec prin punctul** $A(1,2)$ **și sunt egal depărtate de punctele** $M(3,3), N(5,2)$.

**R. Ecuația unei drepte care trece prin punctul A are forma**

$y-2=m(x-1)$ **sau** $mx-y+2-m=0, (1)$**. Parametrul m din (1) se va determina din cerința ca punctele** ***M, N*** **să aibă aceeaşi distanță față de dreapta (1), adică**

$\frac{|3m-3+2-m|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{|5m-2+2-m|}{\sqrt{m^2+1}}$ **sau** $|2m-1|=|4m|$ **sau** $4m = \pm(2m-1)$.

**De aici** $m_1 = -\frac{1}{2}$**, când (1) devine** $x+2y-5=0$ **și** $m_2 = \frac{1}{6}$ **când (1) ne dă dreapta** $x-6y+11=0$.

## 4) Aria unui triunghi

Fie $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3 . y_3)$ (Fig. 2) vârfurile triunghiului *ABC*.

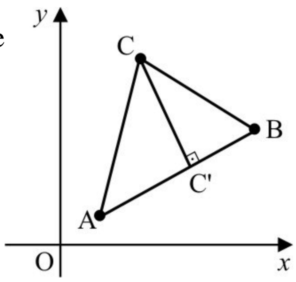


Fig.2

Ne propunem să exprimăm aria acestui triunghi în funcție de coordonatele vârfurilor. Considerăm $CC'$ înălțimea triunghiului dusă din *C* pe *AB*. Atunci aria triunghiului *ABC* este egală cu $S_{ABC} = \frac{AB\cdot CC'}{2}$, unde $AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ și $CC'$ reprezintă distanța de la $C$ la dreapta ($AB$). Avem ecuația dreptei ($AB$) sub forma

$$(AB):(y_2-y_1)(x-x_1)-(y-y_1)(x_2-x_1)=0$$

şi deci $CC'=\dfrac{\left|(y_2-y_1)(x_3-x_1)-(y_3-y_1)(x_2-x_1)\right|}{\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}}$.

Acum $S_{ABC}$ devine: $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|(y_2-y_1)(x_3-x_1)-(y_3-y_1)(x_2-x_1)\right|=$

$=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$, unde $|\ |$ reprezintă modulul. Aşadar pentru aria triunghiului

$ABC$ avem formula $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$.

**Observație.** Dacă $C\in AB$, atunci $S_{ABC}=0$ şi se obține condiția ca trei puncte să fie coliniare.

### Probleme rezolvate

**1. Să se calculeze aria triunghiului având vârfurile în punctele $A(2,3), B(1,-6), C(0,3)$.**

**R. Conform formulei de mai sus vom calcula mai întâi determinantul:**

$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-18$. **Acum** $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}|\Delta|=9$.

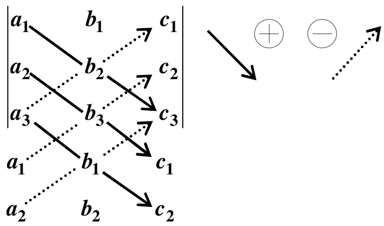
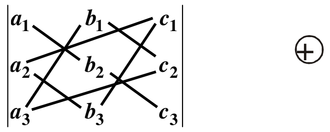
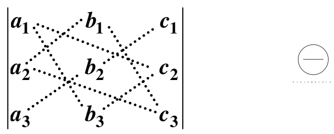
**2. Să se calculeze aria patrulaterului ale cărui vârfuri sunt punctele $A(1,2)$, $B(-3,4)$, $C(-1,-2)$, $D(3,-2)$.**

**R. Descompunem patrulaterul în două triunghiuri şi deci** $S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ACD}$. **Avem**

$S_{ABC}=\dfrac{1}{2}|\Delta_1|$, **unde** $\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=20$ **şi deci** $S_{ABC}=10$, **iar**

$S_{ACD}=\dfrac{1}{2}|\Delta_2|$, **unde** $\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=16$ **şi deci** $S_{ACD}=8$. **Acum** $S_{ABCD}=10+8=18$.

## REZUMATUL CAPITOLULUI

| Noţiuni | Definiţie | Notaţie. Denumiri |
|---|---|---|
| **Determinant de ordin 2** | $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ <br> $\det(A)=a_1b_2-a_2b_1$ | $\det(A)=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\|A\|$; <br> $a_1b_2, a_2b_1$ **se numesc termenii dezvoltării determinantului** |
| **Determinant de ordin 3** | $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ <br> $\det(A)=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ <br> $\det(A)=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ | **- dezvoltarea după prima linie** <br> **- dezvoltarea după prima coloană** |
| | **Regula lui Sarrus** <br>  | $=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-$ $-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3$ <br> ( $a_1b_2c_3, a_2b_3c_1, a_3b_1c_2, a_3b_2c_1,$ $a_1b_3c_2, a_2b_1c_3$ **se numesc termenii dezvoltării determinantului)** |
| | **Regula triunghiului** <br>  | $a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2$ |
| |  | $-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1$ |
| **Proprietăţile determinanţilor** | **1)** $\det(A)=\det({}^tA), A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **- (determinantul unei matrice este egal cu determinantul matricei transpuse)** | |
| | **2)** $\det(A)=0$ **, dacă elementele unei linii (coloane) sunt zero** | |
| | **3) Schimbând două linii (coloane) între ele ale unei matrice se obţine o matrice cu determinantul egal cu opusul determinantului matricei date** | |
| | **4) Determinantul unei matrice cu două linii (coloane) proporţionale este zero** | |
| | **5) Forţare de factor comun** $\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 \\ ka_2 & b_2 \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ | |
| | **6) Dacă la o linie (coloană) a matricei** $A$ **se adună elementele altei linii (coloane) înmulţite cu acelaşi număr, atunci matricea obţinută are acelaşi determinant ca şi matricea** $A$ | |

## Probleme propuse

### Determinanți de ordin 2

**1.** **Să se calculeze determinanții:**

1) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1-\sqrt{2} & 1+\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{2} \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} A_3^1 & A_3^2 \\ C_4^2 & C_4^3 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} i & 1-i \\ 1+i & -i \end{vmatrix}$.

**2.** **Fie** $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. **Calculați** $\det(A), \det(B)$, $\det(AB)$ **și arătați că** $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

**3.** **Să se rezolve, utilizând regula lui Cramer, sistemele:**

1) $\begin{cases} -x+3y = 5 \\ 2x+5y = -2 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 4x-2y = 3 \\ 3x+5y = -2 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 6x-5y = -4 \\ 4x+3y = 7 \end{cases}$.

**4.** **Fie** $A, B \in M_2(\mathbb{C})$. **Care dintre egalități este adevărată:**

1) $\det(A+B) = \det(A)+\det(B)$? 2) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$? 3) $\det(AB) = \det(BA)$?

**Justificați răspunsurile.**

**5.** **a) Dacă** $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, **atunci arătați că** $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

**b) Dacă** $A_k \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $k = \overline{1,n}$, **atunci** $\det(A_1A_2...A_n) = \det(A_1)\det(A_2)...\det(A_n)$.

**6.** **Dacă** $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ **și** $\det(A) = 3, \det(B) = 4$, **atunci calculați** $\det(AB), \det(A^3), \det(B^4), \det(2A), \det(3B), \det(4AB)$.

### Determinanți de ordin 3

**1.** **Să se calculeze determinanții (prin regula lui Sarrus, regula triunghiului sau utilizând formula de recurență):**

**I.** 1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$;

6) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$; 7) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} i & -1 & -i \\ 0 & i & 1 \\ 1 & -i & -1 \end{vmatrix}$; 9) $\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \end{vmatrix}$, **unde** $\varepsilon^2+\varepsilon+1 = 0$.

**II.** 1) $\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1+z \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix}$.

**2.** **Pentru matricea** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ **determinați:**

**1) semnele produselor care apar în** $\det(A)$: a) $(-2)\cdot 4\cdot 5$; **b)** $5\cdot(-1)\cdot 3$; **c)** $1\cdot(-1)\cdot 2$; **d)** $1\cdot(-3)\cdot 4$.

**2) dacă produsele: a)** $1\cdot(-2)\cdot(-3)$; **b)** $(-1)\cdot 3\cdot 2$ 1; **c)** $1\cdot(-3)\cdot 4$ **sunt termeni ai lui** $\det(A)$;

**3) complemenții algebrici ai elementelor: a) 3; b) 0; c)** $-3$.

**3.** Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

**Calculați** $\det(A), \det(B), \det(AB)$ **și verificați egalitatea** $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

**4.** **Arătați că** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f & c & a \\ e & b & 0 \\ d & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ c & b & 0 \\ f & e & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c & f \\ 0 & b & e \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} = abd$.

**5.** **Să se rezolve, utilizând regula lui Cramer, sistemele:**

1) $\begin{cases} x + y - z = 8 \\ 2x - y - 2z = 6 \\ 5x + 2y + z = 4 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ 3x - 2y + z = 1 \\ 3x + y - 2z = 1 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 4y + z = 0 \\ x - y - 2z = 3 \end{cases}$.

## Proprietăți ale determinanților

**1.** **Arătați că:** 1) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} = acf$; 2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & d \\ 0 & b & e \\ a & c & f \end{vmatrix} = abd$.

**2.** **Dacă un determinant de ordin 4 are cel puțin 13 elemente egale cu zero, atunci determinantul este nul. Generalizați.**

**3.** **Să se arate că (fără a calcula efectiv determinanții):**

1) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$; 4) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$;

5) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 2a+3d & 2b+3d & 2c+3d \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$;

7) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$; 8) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0$; 9) $\begin{vmatrix} 100 & 27 & 13 \\ 10 & 18 & 3 \\ 20 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 0$.

**4.** **Exprimați determinanții** $D_2, D_3, D_4$ **în funcție de** $D_1$**:**

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix},\ D_2 = \begin{vmatrix} c & c' & c'' \\ b & b' & b'' \\ a & a' & a'' \end{vmatrix},\ D_3 = \begin{vmatrix} b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \\ a & a' & a'' \end{vmatrix},\ D_4 = \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a & b & c \end{vmatrix}.$$

**5.** **Exprimați determinanții** $D_2, D_3, D_4, D_5, D_6$ **în funcție de** $D_1$**:**

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix};\ D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \lambda a_3 \\ b_1 & b_2 & \lambda b_3 \\ c_1 & c_2 & \lambda c_3 \end{vmatrix};\ D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \lambda b_1 & \lambda b_2 & \lambda b_3 \\ \lambda c_1 & \lambda c_2 & \lambda c_3 \end{vmatrix};\ D_4 = \begin{vmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ -2b_1 & -2b_2 & -2b_3 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 \end{vmatrix};$$

$$D_5 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ -a_3 & -b_3 & -c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix};\ D_6 = \begin{vmatrix} c_1 & -a_1 & b_1 \\ -c_2 & a_2 & -b_2 \\ c_3 & -a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

**6.** **Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ astfel încât $\det(A)=2, \det(B)=5$. Să se calculeze: $\det(AB)$, $\det(A^3), \det(3A), \det(4B), \det(2AB)$.**

**7.** **O matrice obținută din matricea identică prin una din transformările elementare se numeşte matrice elementară. Celor trei tipuri de operații elementare le corespund trei tipuri de matrice elementare.**

**Tipul I. O matrice de tipul I este o matrice obținută din $I_3$ prin interschimbarea a două linii. De exemplu, $E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se obține din $I_3$ prin schimbarea primelor două linii.**

**Ce semnifică $AE_1$, $E_1A$, $\forall A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$? (Efectuați produsul de matrice şi precizați cum se obțin matricele $AE_1$, $E_1A$ din $A$). Calculați det($AE_1$), det($E_1A$) în funcție de det($A$) (Utilizați formula det($AB$)=det($A$)det($B$)).**

**Tipul II. O matrice elementară este de tipul II dacă este obținută din $I_3$ prin înmulțirea unei linii cu o constantă nenulă.**

**De exemplu, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ se obține din $I_3$ prin înmulțirea liniei 3 din $I_3$ cu factorul 5.**

**Ce semnifică $AE_2$, $E_2A$, $\forall A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$? Calculați det($AE_2$), det($E_2A$) în funcție de det($A$).**

**Tipul III. O matrice elementară este de tipul III, dacă se obține din $I_3$, prin adunarea la o linie a altei linii înmulțită cu o constantă nenulă.**

**De exemplu, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se obține din $I_3$ prin adunarea la linia întâi a liniei 3, înmulțită cu factorul 4.**

**Ce semnifică $AE_3$, $E_3A$, $\forall A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$? Calculați det($AE_3$), det($E_3A$) în funcție de det($A$).**

**8.** **Dacă $E_1, E_2, E_3 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ sunt matrice elementare de tipurile I, II, şi respectiv III iar $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, det($A$)=5, iar $E_2$ se formează din $I_3$ înmulțind linia a doua cu 3, atunci calculați: a) det($E_1A$); b)det($E_2A$); c) det($E_3A$); d) det($AE_1$); e) det($E_1^2$); f)det($E_1E_2E_3$).**

**9.** **Să se arate egalitățile de mai jos (utilizând proprietățile determinanților):**

1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & -5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & 6 \\ 8 & -5 & -2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 15 & 14 & 16 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 16 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

**10.** **Arătați că următorii determinanți au valoarea zero, fără a-i dezvolta:**

1) $\begin{vmatrix} a+b & 1 & c \\ b+c & 1 & a \\ c+a & 1 & b \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} a-b & x-y & \alpha-\beta \\ b-c & y-z & \beta-\gamma \\ c-a & z-x & \gamma-\alpha \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} a & a+u & a+\lambda u \\ b & b+v & b+\lambda v \\ c & c+w & c+\lambda w \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \\ 2a+b+c & a+2b+c & a+b+2c \end{vmatrix}$.

**11.** **Calculați determinanții următori (de tip Vandermonde sau reductibili la tipul Vandermonde):**

1) $\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} a^3 & a & a^2 \\ b^3 & b & b^2 \\ c^3 & c & c^2 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & y & 3z \\ 4x^2 & y^2 & 9z^2 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} x+y^2 & y+z^2 & z+x^2 \\ x^2+y^3 & y^2+z^3 & z^2+x^3 \\ x^3+y^4 & y^3+z^4 & z^3+x^4 \end{vmatrix}$.

**12.** **Să se calculeze determinanții:**

1) $\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} \sin a & \sin 2a & \sin 3a \\ \sin b & \sin 2b & \sin 3b \\ \sin c & \sin 2c & \sin 3c \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} \sin^2 a & \cos^2 a & \sin a \cos a \\ \sin^2 b & \cos^2 b & \sin b \cos b \\ \sin^2 c & \cos^2 c & \sin c \cos c \end{vmatrix}$.

**13.** **Să se scrie sub formă de produs determinanții (utilizând proprietățile determinanților):**

1) $\begin{vmatrix} 1-x-y & z & z \\ x & 1-y-z & x \\ y & y & 1-x-z \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} (y+z)^2 & x^2 & x^2 \\ y^2 & (x+z)^2 & y^2 \\ z^2 & z^2 & (x+y)^2 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$. **Calculând în două moduri deduceți identitatea:**

$\sum a^3 - 3abc = \left(\sum a\right)\left(\sum a^2 - \sum ab\right)$.

**14.** **Să se rezolve ecuațiile și inecuațiile:**

1) $\begin{vmatrix} x & 2 & 2 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$; 2) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 0$; 4) $\begin{vmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 1-2x & 0 \\ x & 0 & 1-3x \end{vmatrix} = 0$;

5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & x+1 & 2x+1 \\ 3 & 2x+1 & 3x+1 \end{vmatrix} = -1$; 6) $\begin{vmatrix} x & -14 & 5 \\ 1 & x & x+1 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} \geq 0$; 7) $\begin{vmatrix} e^{2x^2} & e^2 & e^{-x} \\ e^2 & e^{2x} & e^{-x^2} \\ e^{-x} & e^{-x^2} & e^{2x} \end{vmatrix} < 0$.

## Inversa unei matrice

**1.** **Verificați că matricele $A$ și $A^{-1}$ sunt una inversa celeilalte:**

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**2.** **Determinați inversele matricelor (dacă există):**

I. 1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}$.

II. 1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$, $\varepsilon^3 = 1$.

**3.** **Să se determine parametrul real m astfel încât următoarele matrice să fie nesingulare:**

**I.** 1) $\begin{pmatrix} m+\sqrt{3} & 1 \\ 1 & m-\sqrt{3} \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & m \\ m & 3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1-m & 1+m \\ m & 1 \end{pmatrix}$.

**II.** 1) $\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & m \\ -1 & m & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & m & m^2 \\ m^2 & 1 & m \\ m^2 & m & 1 \end{pmatrix}$.

**III.** 1) $\begin{pmatrix} 5 & x & 3 \\ 2x & -1 & x \\ m+1 & 2 & m \end{pmatrix}$, $\forall x \in \mathbb{R}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & x & -3 \\ x & -1 & x \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

**4.** **Fie** $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$. **Dacă** $A$ **este inversabilă fie** $S$ **suma elementelor matricei** $A^{-1}$.

**Determinați** $a$ **pentru care** $S>1$.

**5.** **Să se rezolve ecuațiile matriceale: a)** $AX=C$; **b)**$XB=C$; **c)**$AXB=C$, **unde:**

1) $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; 3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; 4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

**6.** **Să se rezolve sistemele de ecuații, utilizând inversa unei matrice:**

1) $\begin{cases} 2x+5y=3 \\ x-3y=2 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 3x+4y=5 \\ 2x-5y=8 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} 2x-3y-4z = 4 \\ -z = 3 \\ x-2y+z=-8 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} x+4y-z=3 \\ 2x+3y-2z=1 \\ -x+2y+3z=7 \end{cases}$.

**7.** **Asociați fiecărei litere poziția ei în alfabet:** $\begin{matrix} a(\breve{a}), & b, & c, & d, & e, & f, & g, & h, & i(\hat{a}), & j, \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix}$

**și codificați mesajul : „Aștept răspuns”. Aranjați câte trei numere din mesajul cifrat în câte o coloană a matricei** $A$. **Codificați în continuare acest mesaj folosind matricea** $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **Transmiteți mesajul colegului de bancă sub formă de șir de numere, împreună cu matricea** $B$ **și prima codificare, cerându-i să justifice decodificarea mesajului.**

## Ecuația unei drepte. Coliniaritatea a trei puncte

**1.** **Scrieți ecuația dreptei $AB$ sub formă de determinant şi sub formă generală în cazurile:**
**1) $A(2,0)$, $B(0,3)$; 2) $A(-3,5)$, $B(2,-1)$.**

**2.** **Stabiliți care din punctele $C, D, E$ se află pe dreapta $AB$ în cazurile:**

**1) $A(1,3)$, $B(-1,9)$, $C\left(\frac{1}{3},5\right)$, $D(0,5)$, $E(0,6)$;**

**2) $A\left(0,\frac{3}{4}\right)$, $B\left(-\frac{3}{2},0\right)$, $C(1,1)$, $D\left(1,\frac{5}{4}\right)$, $E\left(-1,\frac{1}{4}\right)$;**

**3) $A(1,4)$, $B(-1,6)$, $C(0,5)$, $D(-1,6)$, $E(6,-1)$.**

**3.** **Să se determine parametrul real m astfel încât punctele $A, B, C$ să fie coliniare:**
**1) $A(-m,1)$, $B(1,m)$, $C(0,1)$; 2) $A(1-m,2)$, $B(m,0)$, $C(1,2m)$.**

**4.** **Se consideră punctele $A(5,0)$, $B(0,4)$ şi $M$ un punct arbitrar pe $AB$. Arătați că simetricele lui $M$ în raport cu $OA$, $OB$ şi $O$ sunt trei puncte coliniare.**

**5.** **Se consideră triunghiul $ABC$, $A(2,3)$, $B(4,-1)$, $C(5,2)$ şi $D(1,2)$. Arătați că proiecțiile lui $D$ pe laturile triunghiului $ABC$ sunt trei puncte coliniare.**

**6.** **Fie patrulaterul $ABCD$, $A(1,1)$, $B(5,-3)$, $C(4,6)$, $D(2,5)$. Punctele $M, N, P$ sunt mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$ şi respectiv $[CD]$, $Q$ este mijlocul lui $[MP]$, $R$ este mijlocul lui $[AQ]$, iar $S$ mijlocul lui $[RN]$. Arătați că punctele $S, Q, D$ sunt coliniare.**

## Aria unui triunghi

**1.** **Se consideră un dreptunghi având două laturi de ecuații $3x-2y-5=0$, $2x+3y+7=0$ şi un vârf $A(-2,1)$. Să se determine aria dreptunghiului.**

**2.** **Se consideră vârfurile unui triunghi $A(-10,-13), B(-2,3), C(2,1)$. Să se calculeze lungimea perpendicularei din $B$ pe mediana triunghiului dusă din $C$.**

**3.** **Laturile $[AB],[BC]$ şi $[AC]$ ale triunghiului ABC sunt date prin ecuațiile: $x+21y-22=0$, $5x-12y+7=0, 4x-33y+146=0$. Să se calculeze distanța de la centrul de greutate al triunghiului la latura BC.**

**4.** **Două laturi ale unui pătrat au ecuațiile: $5x-12y-65=0$, $5x-12y+26=0$. Să se calculeze aria pătratului.**

**5.** **Să se arate că există două drepte care trec punctul $P(2,5)$, cu proprietatea că distanța de la $Q(5,1)$ la cele două drepte este egală cu 3. Să se scrie ecuațiile celor două drepte.**

**6.** **Să se arate că există o singură dreaptă care trece prin punctul $B(7,-2)$ şi pentru care distanța de la punctul $A(4,-6)$ la această dreaptă să fie egală cu 5. Se cere ecuația dreptei.**

**7.** **Să se scrie ecuațiile dreptelor paralele cu dreapta $3x-4y-10=0$ şi situate la distanța de 3 unități de ea.**

**8.** **Se consideră $A(2,0)$, $B(-1,4)$ două vârfuri consecutive ale unui pătrat. Să se scrie ecuațiile laturilor pătratului.**

**9.** **Se consideră ecuațiile a două laturi ale unui pătrat: $4x-3y+3=0$, $4x-3y-17=0$, şi unul din vârfurile sale $A(2,-3)$. Să se scrie ecuațiile celorlalte două laturi.**

**10.** **Să se scrie ecuația unei drepte care trece prin punctul $A(-2,3)$ şi este la distanțe egale de punctele $M(5,-1), N(3,7)$.**

**11.** **Să se scrie ecuația dreptei paralelă şi echidistantă dreptelor $3x-y+7=0$, $3x-y-3=0$.**

**12.** Fie triunghiul $ABC, A(-1,-2), B(2,3), C(-1,4)$. Determinați punctele $M$ din interiorul triunghiului pentru care $S_{AMB} = S_{BMC} = S_{AMC}$.

## Teste de evaluare

**Testul 1 (1 punct din oficiu)**

**1.** Să se arate că:

a) $\begin{vmatrix} a-2b & a-b & 2a-b \\ a+2b & a+b & a+b \\ 2b-a & b-a & b-2a \end{vmatrix} = 0$; b) $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$. (2 puncte)

**2.** Se consideră determinantul $D(x) = \begin{vmatrix} 3 & x & x \\ x & 3 & x \\ x & x & 3 \end{vmatrix}$. a) Calculați $D\left(-\frac{3}{2}\right)$; b) Rezolvați ecuația $D(x)=0$. (1 punct)

**3.** a) Să se rezolve ecuația matriceală: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

b) Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} 3x - y + z = 4 \\ x + y - 2z = -2 \\ -x + y + z = 2 \end{cases}$. (2 puncte)

**4.** a) Se consideră punctele $A(0,x)$, $B(1+x,x)$, $C(1,-1)$. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $S_{ABC}=2$.

b) Se consideră patrulaterul $ABCD$, cu $A(1,1)$, $B(3,-2)$, $C(5,3)$, $D(2,2)$. Notăm $AB \cap CD = \{E\}$, $BC \cap AD = \{F\}$. Patrulaterul $ABCDEF$ se numeşte patrulater complet cu diagonalele $[AC]$, $[BD]$, $[EF]$. Arătați că mijloacele acestor trei diagonale sunt trei puncte coliniare (dreapta Newton-Gauss a patrulaterului). (3 puncte)

**5.** Am un prieten ciudat care, din când în când, îmi trimite mesaje cifrate utilizând pătratul lui Polybe şi operația de înmulțire cu matricea $A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Ultimul mesaj, transmis prin e-mail, a fost:301 135 378 173 367 168 238 107 345 156.
Ştiți ce mi-a transmis ? Decodificați mesajul. (2 puncte)

**Testul 2 (grilă) (1 punct din oficiu)**

**1.** 1) Fie determinantul $D(x) = \begin{vmatrix} 6-x & 2 & 2 \\ 2 & 3-x & -4 \\ 2 & -4 & 3-x \end{vmatrix}$.

Atunci: i) $D(7)$ este egal cu: a)1; b)-1; c)0; d)3; e)-5. (0,5 puncte)
ii) Soluțiile ecuației $D(x)=0$ sunt: a)$x_1=x_2=7$, $x_3=-2$; b)$x_1=7$, $x_2=x_3=-2$; c)$x_1=7$, $x_2=-2$, $x_3=2$. (1 punct)

2) Fie determinantul $D(a) = \begin{vmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a \\ a^2 & a^2+2a & 2a+1 \\ a & 2a+1 & a+2 \end{vmatrix}$.

**Atunci:**

**i) cea mai mare putere k a lui a pentru care $a^k$ divide D($a$) este: a)$k$=2; b)$k$=3; c)$k$=4; d)$k$=1; e)$k$=0. (1 punct)**

**ii) cea mai mare putere $l$ a lui (1-$a$) pentru care (1-$a$)$^l$ divide $D$($a$) este:**

**a) $l$=1; b)$l$=3; c)$l$=2; d)$l$=4; e)$l$=0. (1 punct)**

**2. Valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ m & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$ este inversabilă pentru orice $x \in \mathbb{R}$, sunt: a) $(-\infty,1)$; b) $\left(\frac{2}{3},1\right)$; c) $\left(\frac{2}{3},\infty\right)$; d) $\left(\frac{2}{3},3\right)$; e) $\mathbb{R}$. (1 punct)**

**3. Fie polinomul $P(x)=\begin{vmatrix} x+a & x & x \\ x & x+b & x \\ x & x & x+c \end{vmatrix}$, iar $S$ suma coeficienților lui $x^3, x^2$.**

**Atunci: a)$S$=-1; b)$S$=1; c)$S$=6; d)$S$=0; e)$S$=4. (1 punct)**

**4. Soluția ecuației matriceale: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ este:**

**a) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -5 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. (1 punct)**

**5. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, cu $\det(A)=-3, \det(B)=5$, atunci:**

**i) $\det(A^3)$ este egal cu: a)-9; b)-27; c)6. (0,5 puncte)**

**ii) $\det(2A)$ este egal cu: a)-12; b)-6; c)6. (0,5 puncte)**

**iii) $\det(3AB)$ este egal cu: a)135; b)-135; c) nu se poate calcula. (1 punct)**

**6. Codificarea mesajului „salut” utilizând pătratul lui Polybe şi matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ este:**

**a) 43 54 31 76 44 44; b) 43 31 54 44 76 44; c) 43 51 34 74 64 64. (0,5 puncte)**

# 3. SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

**În acest capitol este descrisă forma generală a unui sistem liniar de m ecuații cu n necunoscute. Sunt abordate probleme privind compatibilitatea acestor sisteme, iar în caz de compatibilitate se indică metode pentru determinarea soluțiilor lor. Metodele de abordare ale sistemelor se referă la două situații. Prima când $m = n$ şi determinantul sistemului este diferit de zero, caz în care sunt prezentate metoda matriceală şi metoda lui Cramer pentru rezolvarea sistemelor. A doua situație corespunde cu m, n oarecare, iar sistemele liniare se investighează cu metoda lui Gauss. Problemele practice vin să ilustreze diversitatea domeniilor în care se întâlnesc sisteme liniare.**



## 3.1. INTRODUCERE

Una din cele mai importante probleme în matematică este aceea a rezolvării unui sistem de ecuații liniare. Mai mult de 75 la sută dintre problemele de matematică întâlnite în aplicațiile ştiințifice sau industriale conțin rezolvarea unui sistem de ecuații liniare. Probleme din diferite domenii de activitate: economie, afaceri, genetică, fizică, conduc la rezolvarea unui sistem de ecuații liniare.

## 3.2. PROBLEME PRACTICE CARE CONDUC LA SISTEME DE ECUAȚII

**1.** **Un canoist a parcurs distanța de 12 km în sensul curentului râului în 2 ore. Vâslind împotriva curentului, a parcurs aceeaşi distanță în 4 ore. Determinați viteza canoistului pe apă stătătoare şi viteza de curgere a apei.**

**R.** **Notăm cu v, viteza canoistului în apă stătătoare, iar cu $v_0$ viteza de curgere a apei râului. Atunci viteza canoistului în sensul curentului apei este egală cu $v+v_0$, iar viteza lui împotriva curentului apei este egală cu $v-v_0$. Din enunț avem ecuațiile: $(v+v_0)2=12$, $(v-v_0)4=12$ sau $v+v_0=6$, $v-v_0=3$. Pentru a determina necunoscutele $v$ şi $v_0$ trebuie rezolvat sistemul: $\begin{cases} v+v_0=6 \\ v-v_0=3 \end{cases}$.**

**Găsim uşor soluția $v=4{,}5$ km/h, $v_0=1{,}5$ km/h.**

**Observație. Rezolvarea problemei a condus la un sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute cu soluție unică.**

**2. O pizzerie produce trei feluri de pizza la prețurile de 3 €, 4 € şi respectiv 6 €. Într-o zi dublul numărului de pizza de 4 Euro vândute a fost egal cu suma numerelor celorlalte feluri de pizza vândute, iar tipul numărului de pizza de 6 € vândute a fost egal cu suma numerelor celorlalte feluri de pizza vândute în acea zi. Ştiind că în acea zi la pizzerie s-au încasat 490 €, determinați câte pizza din fiecare fel au fost vândute.**

**R. Notăm cu *x, y, z* numărul de pizza de 3 €, 4 € şi respectiv 6 € vândute în acea zi la pizzerie. Din enunț avem ecuațiile $2y = x + z$, $3z = x + y$, $3x + 4y + 6z = 490$, care formează sistemul de ecuații:**

$$\begin{cases} x+z=2y \\ x+y=3z \\ 3x+4y+6z=490 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x-2y+z=0 \\ x+y-3z=0 \\ 3x+4y+6z=490 \end{cases}.$$

**Se obține soluția: $x = 50$, $y = 40$, $z = 30$.**

**Observație. Rezolvarea problemei ne-a condus la rezolvarea unui sistem de trei ecuații liniare cu trei necunoscute.**

**3. Să se determine funcția de gradul al doilea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$, dacă graficul acesteia conține punctele $A(1,4)$, $B(-1,6)$, $C(2,9)$.**

**R. Condițiile ca punctele să fie situate pe graficul funcției conduc la sistemul de trei ecuații liniare cu trei necunoscute a, b, c.**

$$\begin{cases} f(1)=4 \\ f(-1)=6 \\ f(2)=9 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} a+b+c=4 \\ a-b+c=6 \\ 4a+2b+c=9 \end{cases}.$$

**Sistemul are soluția $a = 2$, $b = -1$, $c = 3$ şi deci $f(x) = 2x^2 - x + 3$.**

## 3.3. FORMA GENERALĂ A UNUI SISTEM DE ECUAȚII LINIARE

**Definiție. O ecuație liniară** cu $n$ **necunoscute** $x_1, x_2, ..., x_n$ are forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,\ \mathrm{a}_1,...,\mathrm{a}_n,\mathrm{b}\in\mathbb{C}.\ (1)$$

Numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se numesc **coeficienții necunoscutelor** $x_1, x_2, \ldots x_n$, iar b se numeşte **termenul liber** al ecuației $(1)$.

**Exemple. 1) $2x - 3y = 5$ este o ecuație liniară în *x* şi *y*, având coeficienții necunoscutelor $a_1 = 2$, $a_2 = -3$, iar termenul liber $\mathrm{b} = 5$.**

**2) $\sqrt{2}x - y + 3z = -1$ este o ecuație liniară cu trei necunoscute *x, y, z*, având coeficienții necunoscutelor $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = -1$, $a_3 = 3$, iar termenul liber $b = -1$.**

**Definiție**. Se numeşte **soluție** pentru ecuația liniară $(1)$ orice n-uplu $(\mathrm{s}_1, \mathrm{s}_2, \ldots, \mathrm{s}_\mathrm{n}) \in \mathbb{C}^\mathrm{n}$, care verifică egalitatea: $a_1s_1 + a_2s_2 + \ldots + a_ns_n = b$.

Vom folosi pentru soluție a ecuației scrierea $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, …, $x_\mathrm{n} = s_\mathrm{n}$.

A rezolva ecuația (1) înseamnă a-i determina toate soluțiile. Mulțimea tuturor soluțiilor unei ecuații liniare se numeşte **soluția generală** a ecuației.

**Exemple. 1) Ecuația $3x-y=5$ are o soluție particulară $x=2$, $y=1$, deoarece $3\cdot 2-1=5$ este adevărată. Dar $x=1$, $y=1$ nu este soluție a ecuației pentru că relația $3\cdot 1-1=5$ este falsă. Pentru $x=\alpha$, $y=3\alpha-5$, $\alpha\in\mathbb{R}$ se obține o soluție oarecare a ecuației, deoarece $3\cdot\alpha-(3\alpha-5)=5$, este o relație adevărată.**

**Observație. Se ştie că ecuația $ax+by+c=0$, $a^2+b^2\neq 0$ reprezintă în planul $xOy$ o dreaptă. Dacă se asociază fiecărei soluții $(x,y)$ a ecuației punctul $M(x,y)$ din plan, atunci imaginea soluțiilor este o dreaptă. În Fig.1, am reprezentat dreapta de ecuație $3x-y=5$.**

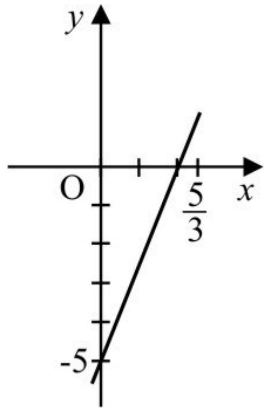


Fig.1

**2) Ecuația $2x+y-z=-10$ are o soluție particulară $x=-3$, $y=1$, $z=5$ pentru că $2(-3)+1-5=-10$ este adevărată.**

**Dacă $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=2\alpha+\beta+10$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, atunci $2\alpha+\beta-(2\alpha+\beta+10)=-10$ este adevărată. Deci, tripletul $(\alpha,\beta,2\alpha+\beta+10)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ este soluția generală a ecuației.**

**Definiție**. Se numeşte **sistem** de m **ecuații liniare** cu n **necunoscute**, un sistem de forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad (2)$$

$a_{ij}\in\mathbb{C}$, $\forall i=\overline{1,m}$, $\forall j=\overline{1,n}$, $b_i\in\mathbb{C}$, $\forall i=\overline{1,m}$.

- $x_1,x_2,\ldots,x_n$, se numesc **necunoscutele sistemului**.
- $a_{ij}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, se numesc **coeficienții necunoscutelor** sau **coeficienții sistemului** $(2)$.
- $b_i$, $i=\overline{1,m}$, se numesc **termenii liberi ai ecuațiilor** sau **termenii liberi ai sistemului**.

Aşadar un sistem de ecuații liniare (sau simplu **sistem liniar**) este o mulțime finită de ecuații liniare.
Numărul $\boldsymbol{a_{ij}}$ (se citeşte $\boldsymbol{a-i-j}$; de exemplu $\boldsymbol{a_{23}}$ se citeşte $a$ – doi – trei şi nu a douăzeci şi trei) se află în ecuația cu numărul $\boldsymbol{i}$ în fața necunoscutei $\boldsymbol{x_j}$ şi reprezintă în această ecuație **coeficientul** acestei necunoscute.

Sistemul **(2)** se scrie condensat sub forma: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, $\mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{m}}$ $(2')$.

**Definiție**. Sistemul $(2)$ se numeşte **omogen** dacă toţi termenii liberi $b_i$, $i = \overline{1,m}$ sunt egali cu zero.

Sistemul astfel obținut:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$ sau condensat: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0$, $i = \overline{1,m}$

se numeşte **sistemul omogen asociat sistemului** $(2)$.

**Definiție**. Se numeşte **soluție a sistemului** $(2)$ orice n-uplu $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{C}^n$ care este o soluție pentru fiecare din ecuațiile sistemului.

A rezolva sistemul $(2)$ înseamnă a-i determina toate soluțiile.

**Observație.** Să remarcăm că sistemul liniar omogen are întotdeauna cel puțin soluția $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ numită **soluția banală**.

**Exemple. Să se precizeze tipul sistemului de ecuații liniare:**

**1)** $\begin{cases} 3x + 5y = -2 \\ x - 4y = 3 \end{cases}$; **2)** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ -2x_1 + x_2 = -4 \\ 3x_1 - 5x_3 = 0 \end{cases}$; **3)** $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$.

**R. 1) Este sistem liniar de două ecuații cu două necunoscute;**
**2) Este sistem liniar de trei ecuații cu trei necunoscute;**
**3) Este sistem liniar omogen de trei ecuații cu trei necunoscute.**

## Scrierea matriceală a unui sistem liniar

Sistemului liniar $(2)$ îi asociem următoarele matrice:

**1)** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, numită **matricea sistemului**, notată şi

$A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$. Linia $i$ a matricei A conține coeficienții necunoscutelor din ecuația $i$ a sistemului, iar coloana $j$ a matricei conține coeficienții necunoscutei $x_j$ din cele $m$ ecuații ale sistemului.

**2)** $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, numită **matricea termenilor liberi** (matrice coloană);

**3)** $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, numită **matricea necunoscutelor** (matrice coloană);

**4)** $\overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$, numită **matricea extinsă a sistemului**.

Observăm că $\overline{A}$ se obține din $A$ prin adăugarea coloanei termenilor liberi ai sistemului. Este eficient să notăm această matrice $\overline{A}=\left(A|B\right)$ unde în stânga barei verticale se scrie matricea sistemului, iar în dreapta ei coloana termenilor liberi.

Cu aceste notații sistemul $(2)$ se scrie $AX=B$ $(3)$ şi reprezintă **forma matriceală a sistemului liniar** $(2)$.

**Exemplu. Să se scrie sub formă matriceală sistemele:**

**1)** $\begin{cases} -x+3y=0 \\ 2x+5=-3 \end{cases}$; **2)** $\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 5 \\ -2x_1+x_2 = -2 \\ 3x_1 - 4x_3 = 0 \end{cases}$; **3)** $\begin{cases} 2x_1-3x_3+x_3=0 \\ x_1+2x_2-5x_3=0 \\ -3x_1+x_3=0 \end{cases}$.

**R. 1) Matricea sistemului este** $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, **matricea necunoscutelor este** $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, **iar matricea termenilor liberi** $B=\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$. **Forma matriceală a sistemului este:** $AX=B$.

**2) Cele trei matrice sunt:**

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, **(matricea sistemului)**

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, **(matricea necunoscutelor)**

$B=\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, **(matricea termenilor liberi)**

**iar forma matriceală a sistemului este:** $AX=B$.

**3) Matricele care definesc sistemul sunt:** $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

**iar forma matriceală a sistemului este:** $AX=B$.

Studiul soluțiilor unui sistem de ecuații liniare conduce la trei probleme:

**1) Existența soluțiilor** (condițiile în care un sistem admite soluții – problema compatibilității sistemului $(2)$).

**2) Găsirea unei metode** de obținere a soluțiilor.
**3) Determinarea tuturor soluțiilor** în caz de compatibilitate.
Vom aborda pe rând aceste probleme.
**1) Existența soluțiilor**
Un sistem care nu are nici o soluție se numeşte **sistem incompatibil**. Dacă sistemul posedă soluții se spune că este **compatibil**. Spunem că sistemul este **compatibil determinat** dacă are exact o soluție şi este **compatibil nedeterminat** dacă are mai mult de o soluție.
**Exemplu. Să se rezolve sistemele:**

1) $\begin{cases} x-2y=3 \\ x-2y=0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 3x+2y=12 \\ 2x-\ \ y=\ 1 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} \ x+\ 5y=3 \\ 2x+10y=6 \end{cases}$.

**R. 1) Dacă $(s_1, s_2)$ este o soluție a sistemului, atunci am obține $3=0$, fals.**

**În acest caz sistemul este incompatibil.**
**Interpretarea geometrică. Cele două ecuații ale sistemului definesc două drepte în planul $xOy$, $(d_1): x-2y=3, (d_2): x-2y=0$, care au aceeaşi pantă $m=\frac{1}{2}$. Deci, dreptele sunt paralele (Fig.2).**
**2) Sistemul are soluția unică $x=2,\ y=3$. Deci, sistemul este compatibil determinat.**
**Interpretarea geometrică. Asociem în planul $xOy$ celor două ecuații dreptele $(d_1)$: $3x+2y=12$, $(d_2)$: $2x-y=1$. Soluția $x=2,\ y=3$ arată că punctul $A(2,3)$ (Fig.3) este punctul de intersecție al celor două drepte (coordonatele lui verifică ecuația fiecărei drepte).**

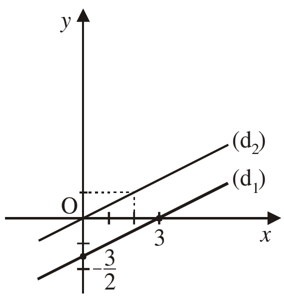



Fig.2

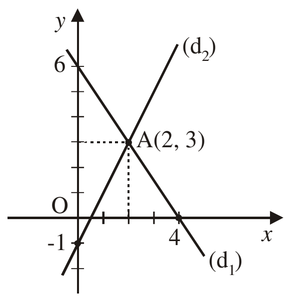



Fig.3

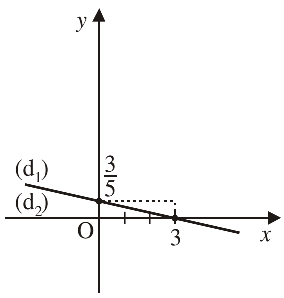



Fig.4

**3) Observăm că ecuația a doua a sistemului prin împărțirea cu 2 se reduce la prima ecuație, iar pentru aceasta cuplul $(3-5\alpha,\ \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ este soluție. În acest caz sistemul este compatibil nedeterminat.**
**Interpretarea geometrică.În acest caz cele două drepte asociate celor două ecuații coincid (Fig. 4).**

**Definiție**. Două sisteme liniare **sunt echivalente** dacă sunt amândouă incompatibile sau amândouă compatibile şi au aceleaşi soluții.

Metodele de rezolvare a sistemelor liniare pe care le vom prezenta operează cu sisteme liniare echivalente şi constau în a înlocui sistemul dat $(S)$ printr-un nou sistem $(S')$ care este echivalent cu primul, dar care poate fi rezolvat mai uşor. Faptul că sistemul $(S)$ este echivalent cu sistemul $(S')$ se notează prin $(S)\Leftrightarrow(S')$. Este clar că: $(S)\Leftrightarrow(S)$; dacă $(S)\Leftrightarrow(S')$, atunci $(S')\Leftrightarrow(S)$; dacă $(S)\Leftrightarrow(S')$ şi $(S')\Leftrightarrow(S'')$, atunci $(S)\Leftrightarrow(S'')$.

**Transformări elementare asupra ecuaţiilor unui sistem**

În ideea de a aduce un sistem la altul echivalent, mai simplu de rezolvat, se efectuează asupra ecuaţiilor o serie de transformări, numite **transformări elementare.**
Acestea sunt:

**E1**. Schimbarea ordinii ecuaţiilor în sistem.

Dacă schimbăm ecuaţia *i* cu ecuaţia *j* şi reciproc, această transformare o notăm prin $L_i \leftrightarrow L_j$. Se spune că s-au interschimbat cele două ecuaţii. Evident sistemul obţinut este echivalent cu sistemul dat.

**E2**. Înmulţirea oricărei ecuaţii a sistemului prin factori nenuli.

Fie sistemul $(S)$: $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 & (L_1) \\ a_2x+b_2y=c_2 & (L_2) \end{cases}$,

în care am notat prin $(L_1)$, $(L_2)$, respectiv prima şi a doua ecuaţie a sistemului. Înmulţind ecuaţia $(L_1)$ prin $\alpha\neq 0$ se obţine ecuaţia notată $(\alpha L_1)$: $\alpha a_1x+\alpha b_1y=\alpha c_1$. **Orice soluţie** $(s_1,s_2)$ **a sistemului** $(S)$ **este soluţie şi pentru ecuaţia** $(\alpha L_1)$. Avem: $\alpha a_1s_1+\alpha b_1s_2=\alpha(a_1s_1+b_1s_2)=\alpha c_1$. Sistemul $(S')$ format din ecuaţiile $(\alpha L_1)$ şi $(L_2)$ este verificat de orice soluţie a lui $(S)$. Reciproc, orice soluţie a lui $(S')$ este soluţie a lui $(S)$, deoarece din $\alpha a_1s_1+\alpha b_1s_2=\alpha c_1$ rezultă $a_1s_1+b_1s_2=c_1$. Deci, sistemele $(S)$ şi $(S')$ sunt echivalente.

**E3**. Înlocuirea oricărei ecuaţii a sistemului prin suma dintre această ecuaţie şi produsul dintre o constantă şi o altă ecuaţie a sistemului.

Faptul că ecuaţia $(L_1)$ se înlocuieşte cu ecuaţia $(\alpha L_1)$ îl notăm prin $\alpha L_1\to L_1$.
Dacă la ecuaţia $(L_1)$ se adună ecuaţia $(L_2)$ înmulţită cu o constantă $\alpha$, atunci acest fapt îl marcăm prin $L_1+\alpha L_2\to L_1$. Cum sistemul de ecuaţii liniare este bine caracterizat de matricea extinsă a sistemului, în sensul că un sistem liniar are o

unică matrice extinsă şi reciproc o matrice extinsă defineşte bine un sistem liniar, transformările elementare se transferă şi asupra liniilor acestei matrice. Are loc următorul rezultat important:

**Teoremă**. Presupunem că $\overline{A}$ este matricea extinsă asociată sistemului $(2)$, iar $\overline{A_1}$ este obținută din $\overline{A}$ printr-un şir de transformări elementare. Atunci sistemul liniar asociat lui $\overline{A_1}$ este echivalent cu sistemul liniar corespunzător lui $\overline{A}$, adică cu $(2)$.

---

Spunem că matricea $\overline{A_1}$ este echivalentă cu matricea $\overline{A}$ şi notăm $\overline{A} \leftrightarrow \overline{A_1}$.

**Exemple.**

**1) Schimbarea ordinii în sistem**

**Sistemul inițial** **Matricea extinsă** **Transformarea**

$$\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 4x+5y=13 \end{cases} \qquad \overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 13 \end{array}\right) \qquad L_1 \leftrightarrow L_2$$

**Soluția este:** $x=2,\ y=1$

**Noul sistem** **Matricea extinsă**

$$\begin{cases} 4x+5y=13 \\ 2x-3y=1 \end{cases} \qquad \overline{A_1}=\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 13 \\ 2 & -3 & 1 \end{array}\right).$$

**Soluția este:** $x=2,\ y=1$

**2) Înmulțirea oricărei ecuații cu o constantă nenulă**

**Sistemul inițial** **Matricea extinsă** **Transformarea**

$$\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 4x+5y=13 \end{cases} \qquad \overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 13 \end{array}\right) \qquad 2L_2 \to L_2$$

**Soluția este:** $x=2,\ y=1$

**Noul sistem** **Matricea extinsă**

$$\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 8x+10y=26 \end{cases} \qquad \overline{A_1}=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ 8 & 10 & 26 \end{array}\right).$$

**Soluția este:** $x=2,\ y=1$.

**3) Înlocuirea unei ecuații a sistemului prin suma dintre această ecuație şi produsul dintre o constantă şi o altă ecuație a sistemului**

**Sistemul inițial** **Matricea extinsă** **Transformarea**

$$\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 4x+5y=13 \end{cases} \qquad \overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 13 \end{array}\right) \qquad -2L_1+L_2 \to L_2$$

**Soluția este:** $x=2,\ y=1$

**Noul sistem** **Matricea extinsă**

$$\begin{cases} 2x-3y=1 \\ \quad\ \ 11y=11 \end{cases} \qquad \overline{A_1}=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 11 & 11 \end{array}\right).$$

**Soluția este:** $x=2,\ y=1$.

## 3.4. METODE DE REZOLVARE A SISTEMELOR LINIARE

În continuare vom prezenta două metode de rezolvare a sistemelor liniare (Metoda matriceală şi Metoda lui Cramer) în cazul în care numărul de ecuații este egal cu numărul de necunoscute, iar determinantul matricei sistemului este diferit de zero (matricea sistemului este nesingulară). Altă metodă ne permite, în cazul sistemelor compatibile, să rezolvăm sisteme liniare de ***m*** ecuații cu ***n*** necunoscute cu $m \neq n$ (Metoda lui Gaus) .

**Metoda matriceală**

Fie sistemul liniar format din $n$ ecuații cu $n$ necunoscute scris sub forma matriceală: $AX = B$, cu $\det(A) \neq 0$ (matricea sistemului este nesingulară). Numărul $\det(A)$ îl vom numi **determinantul sistemului**. În acest caz matricea A este inversabilă. Înmulțim egalitatea de mai sus, la stânga, cu $A^{-1}$ şi obținem $X = A^{-1}B$, soluția sistemului. Spunem că sistemul este compatibil determinat. Dacă sistemul este liniar omogen, adică $B = O$, atunci sistemul admite numai soluția banală, $X = O$, adică $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, $n \leq 3$.

**Procedeu practic**. **1)** Dacă sistemul liniar are $n$ ecuații cu $n$ necunoscute, atunci se scrie sistemul sub forma $AX = B$ şi se calculează $\det(A)$.

**2)** Dacă $\det(A) \neq 0$, se calculează $A^{-1}$.

**3)** Soluția sistemului este $X = A^{-1}B$.

**Observație.** Această metodă precizează în ce condiții sistemul este compatibil determinat şi cum i se determină soluția.

**Exemplu. Să se rezolve sistemele de ecuații liniare:**

**1)** $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$; **2)** $\begin{cases} 2x - 5y + 4z = 0 \\ -3x + y + z = -1 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$; **3)** $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ -x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$.

**R. 1) Matricele care definesc sistemul sunt:**

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ **şi sistemul se scrie matriceal** $AX = B$.

**Deoarece** $\det(A) = -5 \neq 0$, **matricea** $A$ **este inversabilă şi deci** $X = A^{-1}B$.

**Calculând inversa matricei** $A$, **găsim** $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$ **şi deci** $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}$, **adică** $x = \frac{4}{5}, y = \frac{7}{5}$.

**2) În acest caz** $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $AX = B$.

**Cum $\det(A) = -5 \neq 0$, deducem $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, adică $x = -1, y = -2, z = -2$.**

**3) Sistemul fiind omogen are cel puțin soluția banală $x = y = z = 0$.**

**Avem $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ cu $\det(A) = 60 \neq 0$.**

**Deci sistemul are numai soluția banală.**

## Problemă rezolvată

**Să se rezolve și discute sistemul: $\begin{cases} x + y - (m-1)z = 0 \\ x + (m-1)y - z = 0 \\ x + my + z = 0 \end{cases}$, după valorile parametrului real $m$.**

**R. Sistemul liniar este omogen. Prin urmare el este compatibil, având cel puțin o soluție, cea banală $x = y = z = 0$.**

**Determinantul sistemului este: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1 & m-1 & -1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = m - 2$.**

**Se disting următoarele cazuri de discuție:**

**a) Dacă $\Delta \neq 0$, adică $m \neq 2$, atunci $X = A^{-1}B = O$. Deci, în acest caz sistemul are numai soluția banală $x = y = z = 0$.**

**b) Dacă $\Delta = 0$, adică $m = 2$, atunci sistemul devine: $\begin{cases} x + \ \ y - z = 0 \\ x + \ \ y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$.**

**Observăm că primele două ecuații coincid. Sistemul este echivalent cu sistemul format de ultimele două ecuații. Punem aici $z = \lambda \in \mathbb{R}$, variabil și obținem $x = 3\lambda$, $y = -2\lambda$. Deci, soluția sistemului este: $x = 3\lambda$, $y = -2\lambda$, $z = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Deoarece componentele soluției se exprimă în funcție de un parametru, $\lambda$, se mai spune că sistemul liniar este compatibil simplu nedeterminat.**

### Metoda lui Cramer

Este aplicabilă unui sistem de $n$ ecuații liniare cu $n$ necunoscute de forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (3) \quad \text{sau în scriere matriceală } AX = B,$$

când determinantul sistemului este nenul, adică $\det(A) \neq 0$.

În aceste condiții sistemul este compatibil determinat (din cerința $\det(\mathrm{A}) \neq 0$, rezultă A este matrice inversabilă și funcționează metoda precedentă de determinare a soluției sistemului) și soluția unică este dată de următoarea:

**Teoremă**. Orice sistem liniar $(3)$ pentru care determinantul sistemului, $\det(A)$ este nenul, este compatibil determinat cu soluția dată de formulele $x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}$, ..., $x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta}$ $(4)$ unde $\Delta = \det(A)$, $\Delta x_k$ se obține din $\Delta$ înlocuind coloana coeficienților lui $x_k$ prin coloana termenilor liberi, $k = \overline{1,n}$.

Formulele $(4)$, care dau soluția sistemului se numesc **formulele lui Cramer**. Un sistem liniar de formă $(3)$ cu $\det(A) \neq 0$ se numeşte **sistem Cramer**.

**Demonstrație.** Pentru stabilirea formulelor din $(4)$, utilizăm scrierea matriceală a soluției, construcția inversei $A^{-1}$ şi dezvoltarea unui determinant de ordin $n$ după elementele unei coloane.

Într-adevăr din $AX = B$, deducem $X = A^{-1}B$ sau $X = \frac{1}{\Delta} A^* B$ sau desfăşurat

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{sau}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n \end{pmatrix},$$

unde $A_{ij} = (-1)^{1+j} M_{ij}$ este complementul algebric al elementului $a_{ij}$, iar $M_{ij}$ este minorul corespunzător elementului $a_{ij}$, $i, j = \overline{1,n}$. De aici

$$x_1 = \frac{1}{\Delta}(b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1}) = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \text{ unde } \Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$x_2 = \frac{1}{\Delta}\left(b_1A_{12} + b_2A_{22} + \ldots + b_nA_{n2}\right) = \frac{\Delta x_2}{\Delta} \text{ ,unde } \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

.......................................................................................................................

$$x_n = \frac{1}{\Delta}\left(b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \ldots + b_nA_{nn}\right), \quad \text{unde} \quad \Delta x_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n-1} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n-1} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn-1} & b_n \end{vmatrix}.$$

În ultimele exprimări ale necunoscutelor am ținut seama de dezvoltarea determinantului după elementele unei coloane funcție de complemenții lor algebrici. ■

Pentru rezolvarea unui sistem Cramer se recomandă următorul:

**Procedeu practic**. **1)** Se calculează $\Delta$ şi se observă că $\Delta \neq 0$.

**2)** Se calculează determinanții $\Delta x_k$, $k = \overline{1,n}$, obținuți din $\Delta$ prin înlocuirea coloanei $k$ prin coloana termenilor liberi.

**3)** Soluția sistemului este dată de formulele lui Cramer:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \ldots, \quad x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta}.$$

**Exemplu. Să se rezolve sistemele liniare:**

**1)** $\begin{cases} x - 3y = -7 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$; **2)** $\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 4z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$; **3)** $\begin{cases} 2x - 3y + 3z = 0 \\ 3x - 4y + 5z = 0 \\ 5x + y + 2z = 0 \end{cases}$.

**R. 1) Determinantul sistemului este:** $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$. **Sistemul este compatibil determinat cu soluția** $x = \frac{\Delta x}{\Delta}, y = \frac{\Delta y}{\Delta}$ **unde** $\Delta x = \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 14, \Delta x = \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 21$. **Deci**

$$x = \frac{14}{7} = 2, \; y = \frac{21}{7} = 3.$$

**2) Determinantul sistemului este:** $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$, **şi deci sistemul este compatibil determinat (sistem Cramer), cu soluția:** $x = \frac{\Delta x}{\Delta}, \; y = \frac{\Delta y}{\Delta}, \; z = \frac{\Delta z}{\Delta}$, **unde:**

$$\Delta x = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4, \quad \Delta y = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 8, \quad \Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -12.$$

**De aici:** $x=\frac{4}{12}=\frac{1}{3},\ y=\frac{8}{12}=\frac{2}{3},\ z=-\frac{12}{12}=-1$.

**3) Calculăm determinantul sistemului liniar omogen. Avem** $\Delta=\begin{vmatrix}2 & -3 & 3\\ 3 & -4 & 5\\ 5 & 1 & 2\end{vmatrix}=-14\neq 0$**, ceea ce arată că sistemul este compatibil determinat (sistem Cramer). Cum sistemul liniar omogen are cel puțin soluția banală,** $x=y=z=0$**, deducem că aceasta este unica soluție.**

### Problemă rezolvată

**Să se rezolve și discute sistemul liniar**
$\begin{cases} mx+\ \ y+\ \ z=1\\ x+my+\ \ z=m\\ x+\ \ y+mz=m^2\end{cases}$**, unde** $m$ **este parametru real.**

**R. Determinantul sistemului este** $\Delta=\begin{vmatrix}m & 1 & 1\\ 1 & m & 1\\ 1 & 1 & m\end{vmatrix}=(m+2)(m-1)^2$.

**Discuția sistemului se face în funcție de valorile care anulează pe** $\Delta$.
**Avem:** $\Delta=0\Leftrightarrow m\in\{-2,1\}$. **Distingem cazurile:**

**a) Dacă** $\Delta\neq 0$**, adică** $m\in\mathbb{R}-\{-2,1\}$**, atunci sistemul este un sistem Cramer cu soluția dată de formulele lui Cramer:**

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=-\frac{m+1}{m+2},\ y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{1}{m+2},\ z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{(m+1)^2}{m+2}.$$

**b) Dacă** $m=-2$**, atunci sistemul devine:** $\begin{cases}-2x+\ \ y+\ \ z=\ \ 1\\ x-2y+\ \ z=-2\\ x+\ \ y-2z=\ \ 4\end{cases}$.

**Adunând, membru cu membru, ecuațiile rezultă** $0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=3$**, imposibil.**
**Deci, sistemul este incompatibil.**

**c) Dacă** $m=1$**, sistemul se scrie:** $\begin{cases}x+y+z=1\\ x+y+z=1\\ x+y+z=1\end{cases}$.

**Se observă că avem, de fapt, o ecuație liniară cu trei necunoscute.**
**În acest caz punând** $y=\lambda\in\mathbb{R},\ z=\mu\in\mathbb{R}$**, atunci** $x=1-\lambda-\mu$.
**Prin urmare, sistemul are solutii (depinzând de doi parametrii) de forma:** $(1-\lambda-\mu,\ \lambda,\mu),\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$.
**Cum componentele soluției depind de doi parametri, se mai spune că sistemul liniar este compatibil dublu nedeterminat.**

### Metoda lui Gauss

Această metodă se utilizează la rezolvarea sistemelor liniare de $m$ ecuații cu $n$ necunoscute, fără a face apel la calcul de determinanți.

Considerăm sistemul liniar $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

care este perfect determinat de matricea extinsă a sa

$$\overline{A} = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

**Metoda lui Gauss** sau **metoda eliminării parțiale** constă în transformarea echivalentă a sistemului prin transformări elementare, în sisteme în care necunoscuta $x_1$ apare numai în prima ecuație, iar în celelalte ecuații se elimină. Pentru sistemul astfel format se păstrează prima ecuație neschimbată, iar în celelalte $m-1$ ecuații se aplică procedeul pentru necunoscuta $x_2$, păstrând-o în a doua ecuație şi eliminând-o din celelalte $m-2$ ecuații. Se repetă procedeul până când într-o ecuație a sistemului rămâne o singură necunoscută. Cu valoarea ei se trece în celelalte ecuații (de jos în sus) şi se determină şi celelalte necunoscute. Prin metoda lui Gauss eliminăm succesiv necunoscutele.

**Forma trapezoidală şi forma triunghiulară a unui sistem liniar**

**Definiţii**. **1)** Un sistem liniar de $m$ ecuaţii cu $n$ necunoscute se spune că **are formă trapezoidală** (sau **formă de scară** sau **cvasitriunghiulară**) dacă are forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{rs}x_s + \ldots + a_{rn}x_n = b_r \\ \qquad\qquad 0 = b_{r+1} \\ \qquad\qquad \ldots\ldots \\ \qquad\qquad 0 = b_m \end{cases} \quad (5)$$

sau echivalent matricea extinsă are formă trapezoidală

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots \\ & & a_{rs} & \ldots\, a_{rn} & b_r \\ & & & 0 & b_{r+1} \\ & & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & b_m \end{array}\right)$$

unde $a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{rs} \neq 0$.

**2)** Un sistem liniar de $n$ ecuaţii cu $n$ necunoscute **are formă triunghiulară** dacă în a $k$-a ecuaţie coeficienţii primelor $k-1$ necunoscute sunt toţi zero, iar coeficientul lui $x_k$ este diferit de zero, $k = \overline{1,n}$, adică

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{kk}x_k + \ldots + a_{kn}x_n = b_k \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (6)$$

sau echivalent matricea extinsă are forma triunghiulară

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{kk} & \ldots a_{kn} & b_k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

Orice sistem liniar se poate aduce, prin transformări elementare, la forma trapezoidală (sau în particular, dacă $m = n$, la forma triunghiulară).
Transformările elementare care se fac asupra ecuaţiilor sistemului, generând sisteme echivalente, sunt următoarele trei:

**E1**. Schimbarea ordinii ecuaţiilor în sistem.
**E2**. Înmulţirea oricărei ecuaţii a sistemului prin factori nenuli.
**E3**. Adunarea unei ecuaţii înmulţite cu un număr la o altă ecuaţie.

**Notaţii**. **1)** Schimbarea ecuaţiei $L_i$ cu ecuaţia $L_j$ şi a ecuaţiei $L_j$ cu ecuaţia $L_i$ (interschimbarea celor două ecuaţii) se notează prin $L_i \leftrightarrow L_j$.

**2)** Înmulţirea ecuaţiei $L_i$ cu $\alpha \neq 0$ o notăm prin $\alpha L_i$.

**3)** Adunarea la ecuaţia $L_i$ a ecuaţiei $L_j$ înmulţită cu $\alpha$ se notează $L_i + \alpha L_j$.

În urma trasnformărilor elementare rezultă sisteme echivalente cărora le corespund matrice extinse echivalente.
Practic transformările elementare care se fac asupra ecuațiilor unui sistem se transferă asupra liniilor matricei extinse. Repetarea acestor operații asupra matricei extinse ne dă soluția sistemului.
Are loc următoarea:

**Teoremă**. **1)** Orice sistem liniar este echivalent cu un sistem de formă trapezoidală.
**2)** Orice matrice se poate reduce cu ajutorul transformărilor elementare la forma trapezoidală.

Vom descrie, în continuare, aplicarea metodei lui Gauss în mod schematic asupra unui sistem liniar particular.

**Exemplu. Să se rezolve sistemul liniar, utilizând metoda (eliminării) lui Gauss:**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases}.$$

**R.Matricea extinsă a sistemului este** $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right)$.

**Pasul 1. Se alege un element nenul dintre elementele nenule ale primei coloane. Acest element se numeşte element pivot sau pivotul. Linia care conține acest element se numeşte linie pivot.Vom schimba liniile între ele astfel încât linia pivot să fie prima. Linia pivot se înmulțeşte cu diferite numere şi se adună la fiecare celelalte $m-1$ linii rămase astfel încât să se obțină zero pe coloană în pozițiile $a_{21},...,a_{m1}$. În cazul de față, pe coloana unu alegem ca pivot pe $a_{11} = 1$. Pivotul îl vom înscrie într-un cerc, iar elementele care trebuie eliminate le încadrăm într-un dreptunghi.**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ \boxed{2} & -1 & 1 & 3 \\ \boxed{3} & 1 & -3 & -2 \end{array}\right) \xleftrightarrow[L_3 - 3L_1]{L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -1 & -7 \\ 0 & -5 & -6 & -17 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \text{am făcut } 0 \text{ în} \\ \text{pozițiile } a_{21} \text{ şi } a_{31} \end{array}\right).$$

**Pasul 2. La acest pas se alege un pivot dintre elementele coloanei a doua şi oricare dintre liniile 2 până la $m$. Linia care-l conține se interschimbă cu linia a doua a matricei şi devine astfel noua linie pivot. Ca la pasul 1, linia pivot se înmulțeşte cu diferite constante şi se adună la fiecare din celelalte $m-2$ linii rămase astfel încât să se obțină zero pe coloană în pozițiile $a_{32}$, …, $a_{m2}$.**

**Linia şi coloana întâi a matricei obținută la pasul precedent rămân neschimbate !**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -1 & -7 \\ 0 & \boxed{-5} & -6 & -17 \end{array}\right) \xleftrightarrow{L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \text{am făcut } 0 \\ \text{în poziția } a_{32} \end{array}\right).$$

**Am obținut forma triunghiulară a sistemului. Aceasta este** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ -5x_2 - x_3 = -7 \\ -5x_3 = -10 \end{cases}$.

**Din ultima ecuație** $x_3 = 2$. **Această valoare dusă în a doua ecuație dă** $-5x_2 - 2 = -7$, **adică** $x_2 = 1$.

**În fine cu valorile pentru** $x_2$ **şi** $x_3$ **se merge în prima ecuație, de unde** $x_1 = -2x_2 - x_3 + 5 = -2 \cdot 1 - 2 + 5 = 1$.

**Deci sistemul este compatibil determinat cu soluția** $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

**Observație. Cum sistemul dat se reduce la sistemul** $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$, **acestuia i se asociază matricea extinsă** $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$.

**O coloană (din matricea coeficienților) din matricea extinsă formată dintr-un singur element egal cu unu, iar celelalte egale cu zero se numeşte coloană unitate. O matrice are formă trapezoidală redusă dacă este trapezoidală cu** $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{kk} = 1$, **iar toate celelalte elemente sunt egale cu zero pe coloanele care conțin aceste elemente.**

**Ultima matrice extinsă se poate aduce la forma triunghiulară redusă cu ajutorul transformărilor elementare ca mai jos.**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right) \xleftrightarrow{-\frac{1}{5}L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad (\text{am obținut } a_{33} = 1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xleftrightarrow[L_1 - L_3]{L_2 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad (\text{am obținut } a_{13} = a_{23} = 0)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xleftrightarrow{-\frac{1}{5}L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad (\text{am obținut } a_{22} = 1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xleftrightarrow{L_1 - 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

**De aici** $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$.

**Pentru a face zerouri deasupra diagonalei principale am plecat de la ultima linie unde am pus-o sub forma** $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$ **şi apoi am înmulțit-o cu diferiți coeficienți pentru a face zero pe coloana a treia. Procesul este invers celui descris în metoda lui Gauss, unde se fixa pivotul pe linia întâi, coloana întâi şi se făceau zerouri pe coloană, sub acest element etc. Acest procedeu poartă numele de metoda eliminării totale (Gauss-Jordan).**

## Aplicații ale sistemelor de ecuații

**Utilizarea sistemelor de ecuații liniare cuprinde o gamă variată de domenii practice.**

**Aplicația 1. Legea întâi a lui Kirchhoff se poate aplica la probleme de trafic rutier. În cazul unor intersecții cu sens giratoriu ca aceea din Fig. 6, în care presupunem că străzile A, B, C nu sunt cu sens unic, dacă notăm cu $x_A$, $y_A$ numărul de maşini care intră şi respectiv care ies pe strada A şi analoagele pentru B şi C, atunci ecuația care guvernează o astfel de intersecție este**

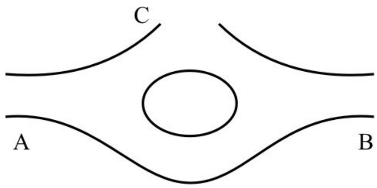


Fig.6

$x_A + x_B + x_C = y_A + y_B + y_C$, **(*)**

**(suma maşinilor care intră în intersecție este egală cu suma maşinilor care ies din intersecție). Să observăm că $(*)$ este o ecuație liniară în $x_A, y_A, ..., x_C, y_C$. Dacă strada C are sens unic, de exemplu de ieşire din intersecție, atunci $x_C = 0$. Urmărind intensitatea traficului într-o astfel de intersecție, pe o anumită perioadă, se pot impune condiții asupra variabilelor $x_A$, $y_A$, ..., $x_C$, $y_C$, oferind condiții asupra unei semaforizări corespunzătoare a acelei intersecții. La nivelul unui oraş rețeaua străzilor studiată cu ajutorul sistemelor de ecuații oferă o imagine asupra intensității traficului în anumite zone.**

**Aplicația 2. Un comitet format din 20 de membri trebuie să-şi aleagă un preşedinte. În cursă au rămas trei candidați *A, B, C* în urma numărării voturilor (nu există abțineri, fiecare membru îşi dă votul pentru unul sau altul din candidați). Pentru aceşti candidați s-a votat astfel: 11 membri, majoritate, l-au preferat pe *A* în locul lui *B* (ceilalți 9 l-au preferat pe *B* lui *A*). Analog, 12 membri l-au preferat pe *C* lui *A*. La protestele lui *B*, care a sesizat că ar trebui să se retragă, 14 membri l-au preferat pe *B* lui *C*. Câți membri l-au votat pe *B* ca primă opțiune ?**

**R. Cele şase posibilități de ordonare a candidaților sunt: *ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA*. Presupunem că ei au obținut $a, b, c, d, e, f$ voturi. Ştim că $a + b + e = 11$, $d + e + f = 12$, $a + c + d = 14$ (ecuații rezultate din numărul celor care l-au preferat pe *A* lui *B*, pe *C* lui *A* şi respectiv pe *B* lui *C*), $c + d + f = 9$, $a + b + c = 8$, $b + e + f = 6$ (ecuații rezultate din numărul celor care l-au preferat pe *B* lui *A*, pe *A* lui *C* şi pe *C* lui *B*). Se obține soluția: $a = 6$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 7$, $e = 4$, $f = 1$. Numărul cerut este $c + d = 1 + 7 = 8$.**

**Aplicația 3 (Ecuații chimice). În procesul de fotosinteză plantele utilizează energia radiată de soare pentru a transforma dioxidul de carbon ($CO_2$) şi apa ($H_2O$) în glucoză ($C_6H_{12}O_6$) şi oxigen ($O_2$).Ecuația chimică a reacției este de forma $x_1CO_2 + x_2H_2O \to x_3O_2 + x_4C_6H_{12}O_6$. Pentru a obține echilibrul (balanța) ecuației trebuie să alegem $x_1, x_2, x_3, x_4$ astfel încât numărul de atomi de carbon, hidrogen şi oxigen din cei doi membri să fie acelaşi. Deoarece dioxidul de carbon conține un atom de carbon, iar glucoza conține şase, atunci pentru egalizarea numărului de atomi de carbon trebuie să avem $x_1 = 6x_4$.**

**Analog, pentru atomii de oxigen şi respectiv hidrogen avem ecuațiile: $2x_1 + x_2 = 2x_3 + 6x_4$, $2x_2 = 12x_4$. Cele trei ecuații conduc la sistemul:**

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\quad - 6x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 6x_4 = 0 \\ \qquad 2x_2 \qquad\quad - 12x_4 = 0 \end{cases}.$$

**Soluția sistemului este: $x_1 = 6\lambda$, $x_2 = 6\lambda$, $x_3 = 6\lambda$, $x_4 = \lambda$, $\lambda \geq 0$.**

**Pentru $\lambda = 1$ se obține soluția particulară $x_1 = x_2 = x_3 = 6$, $x_4 = 1$ şi ecuația are forma $6CO_2 + 6H_2O \to 6O_2 + C_6H_{12}O_6$.**

## REZUMATUL CAPITOLULUI

| Noțiunea | Formă generală.<br>Scriere matriceală | Existența soluțiilor.<br>Determinarea soluțiilor |
|---|---|---|
| **Sistem de 2 ecuații liniare cu 2 necunoscute** | $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$, $AX=C$, unde<br>$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ (*matricea sistemului*)<br>$X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (*matricea necun.*)<br>$C=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ (*matricea termenilor liberi*) | **1) Metoda lui Cramer**<br>$\Delta=\det(A)\neq 0 \Rightarrow x=\frac{\Delta x}{\Delta}, y=\frac{\Delta y}{\Delta}$ **s.c.d.,**<br>**unde** $\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$<br>**Formulele lui Cramer**<br>**2) Metoda matriceală**<br>$\Delta\neq 0 \Rightarrow X=A^{-1}C$ |
| | $c_1=c_2=0 \Rightarrow$ **sistem liniar omogen** | $\Delta\neq 0 \Rightarrow x=y=0$ **(s.c. determinat)**<br>$\Delta=0 \Rightarrow$ **(s.c. nedeterminat)** |
| **Sistem de 3 ecuații liniare cu 3 necunoscute** | $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$<br>$AX=C$, unde<br>$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ (*matricea sistemului*)<br>$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (*matricea necun.*)<br>$C=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ (*matricea termenilor liberi*) | **1) Dacă** $\Delta=\det(A)\neq 0 \Rightarrow$ **s.c.d.**<br>**a) Metoda lui Cramer**<br>$\Delta=\det(A)\neq 0 \Rightarrow x=\frac{\Delta x}{\Delta}, y=\frac{\Delta y}{\Delta}, z=\frac{\Delta z}{\Delta}$<br>**Formulele lui Cramer**<br>**b) Metoda matriceală**<br>$\Delta\neq 0 \Rightarrow X=A^{-1}C$<br>**2) Dacă** $\Delta=0$ **și (** $\Delta_1=0$ **sau** $\Delta_2=0$ **sau** $\Delta_3=0$ **)** $\Rightarrow$ **sistem incompatibil**<br>**3) Dacă** $\Delta=0$ **și** $\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0 \Rightarrow$ **s.c. nedeterminat** |
| | $d_1=d_2=d_3=0 \Rightarrow$ **sistem liniar omogen** | $\Delta\neq 0 \Rightarrow x=y=z=0$ **(s.c. determinat)**<br>$\Delta=0 \Rightarrow$ **(s.c. nedeterminat)** |
| **Sistem de $m$ ecuații liniare cu $n$ necunoscute** | $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{1n}x_n=b_1 \\ \text{.......................................} \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$<br>$AX=C$, unde<br>$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ (*matricea sistemului*)<br>$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ (*matricea necun.*)<br>$C=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ (*matricea termenilor liberi*) | **1. Dacă** $m=n$ **și** $\Delta=\det(A)\neq 0 \Rightarrow$ **s.c.d.**<br>**1) Metoda lui Cramer**<br>$x_1=\frac{\Delta x_1}{\Delta}, x_2=\frac{\Delta x_2}{\Delta}, \ldots, x_n=\frac{\Delta x_n}{\Delta}$<br>**Formulele lui Cramer**<br>**2) Metoda matriceală** $X=A^{-1}C$<br>**Dacă** $b_1=b_2=\ldots=b_n=0$ **(sistem omogen)**<br>$\Rightarrow x_1=x_2=\ldots=x_n=0$ **(soluție banală)**<br>**2. Dacă** $m\neq n$ **, avem:**<br>**1) Metoda lui Gauss, care constă în eliminarea, prin transformări elementare, a necunoscutelor** $x_1$ **(din a doua, a treia, ..., a** $m-$**a ecuație),** $x_2$ **(din a treia, a patra ...), etc.** |

## Probleme propuse

**1. Scrieți sub formă matriceală sistemele:**

1) $\begin{cases} 2x-4y=3 \\ -3x+y=-1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x+2y=0 \\ 3x-5y=4 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0 \\ 2x_1+x_2-3x_3=1 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=1 \\ -x_1+2x_2=-2 \\ 4x_1+x_2+2x_3=0 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=4 \\ x_2-3x_3=-1 \\ 4x_1+x_2=0 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} x_2-3x_3=0 \\ 4x_1+x_3=0 \\ -x_1+3x_2=0 \end{cases}$.

**2. Scrieți sistemul de ecuații liniare asociat fiecărei matrice extinsă:**

1) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{array}\right)$; 2) $\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \end{array}\right)$; 3) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$; 4) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ -2 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right)$; 5) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

**3. În exercițiile de mai jos completați elementele lipsă din matricea extinsă în urma transformărilor indicate:**

1) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 9 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \xleftrightarrow{\frac{1}{3}L_1} \left(\begin{array}{cc|c} \bullet & \bullet & \bullet \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \xleftrightarrow{L_2-2L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array}\right) \longleftrightarrow$

$\xleftrightarrow{-\frac{1}{5}L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array}\right) \xleftrightarrow{L_1-3L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$.

2) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & -10 \end{array}\right) \xleftrightarrow[L_3-2L_1]{L_2-3L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}\right) \xleftrightarrow{-L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & -9 & -1 & -16 \end{array}\right) \longleftrightarrow$

$\xleftrightarrow[L_3+9L_2]{L_1-3L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}\right) \xleftrightarrow[-L_3]{L_1+L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$.

3) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right) \xleftrightarrow{L_1\leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right) \xleftrightarrow{L_3-L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}\right) \longleftrightarrow$

$\xleftrightarrow[L_3+4L_2]{L_1+\frac{1}{2}L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}\right) \xleftrightarrow[-L_3]{\frac{1}{11}L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}\right) \xleftrightarrow[L_2-3L_3]{L_1-\frac{1}{2}L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 45/11 \\ 0 & 1 & 0 & 28/11 \\ 0 & 0 & 1 & -24/11 \end{array}\right)$.

**4. Să se scrie sistemul de ecuații liniare pentru fiecare din matricele extinse de la exercițiul 3 și utilizând rezultatele obținute determinați soluția fiecărui sistem.**

**5. Utilizând metoda matriceală să se rezolve sistemele:**

1) a) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ -x+4y=3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 18x-30y=-1 \\ -2x+6y=1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 3x-2y=0 \\ 5x+4y=2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x-y-z=0 \\ x+4y-2z=16 \\ x-2y+2z=-6 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x+y+2z=-1 \\ 2x-y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-2 \end{cases}$; f) $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x-y+z=2 \\ 4x+3y+z=3 \end{cases}$; g) $\begin{cases} x-2y+z=1 \\ x-y+z=-1 \\ 2x+4y-z=4 \end{cases}$.

1) după valorile parametrului real m:

a) $\begin{cases} mx+2y=-1 \\ 2x+my=-1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} (1+m)x+(1+m)y=2m \\ x+\quad my=2+m \end{cases}$;c) $\begin{cases} mx+\ \ y+\ \ z=1 \\ x+my+\ \ z=2 \\ x+\ \ y+mz=3 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} mx+\ \ y+\ \ z=1 \\ x-my-\ \ z=1 \\ x+\ \ y+mz=1 \end{cases}$; e) $\begin{cases} x-my+z=1 \\ x-y+z=-1 \\ mx+m^2y-z=m^2 \end{cases}$; f) $\begin{cases} mx+y+2z=0 \\ x+my+z=0 \\ 2x+2y+mz=0 \end{cases}$.

6. Să se rezolve sistemele de mai jos utilizând regula lui Cramer:

1) I. a) $\begin{cases} 3x-\ \ y=-2 \\ 2x+3y=\ \ 5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+4y=1 \\ 2x-\ \ y=3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x+3y=0 \\ 2x-\ \ y=0 \end{cases}$;d) $\begin{cases} 3x-\ \ y+\ \ z=\ \ 0 \\ -2x+\ \ y+3z=-7 \\ x+2y\ -2z=\ \ 7 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} 2x-\ \ y-\ \ z=4 \\ 3x+4y-2z=11 \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases}$; f) $\begin{cases} x_1+2x_2-6x_3=6 \\ x_2-4x_3=2 \\ 2x_3=1 \end{cases}$; g) $\begin{cases} x_1-\ \ x_2+3x_3=2 \\ 3x_1+2x_2-\ \ x_3=1 \\ 3x_2-3x_3=5 \end{cases}$.

II. a) $\begin{cases} \dfrac{7}{\sqrt{x-7}}-\dfrac{4}{\sqrt{y+6}}=\dfrac{5}{3} \\ \dfrac{5}{\sqrt{x-7}}+\dfrac{3}{\sqrt{y+6}}=\dfrac{13}{6} \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3xy/(x+y)=5 \\ 2xz/(x+z)=3 \\ yz/(y+z)=4 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 15x-8xy+2y=0 \\ 3xz-2z+5x=0 \\ 2yz-16y+2z=0 \end{cases}$.

2) în funcție de parametrul real m:

a) $\begin{cases} x-\ \ y=\ \ 3 \\ mx+2y=-1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} mx+\ \ y=0 \\ x+my=1 \end{cases}$;c) $\begin{cases} mx+\ \ y+\ \ z=1 \\ x-my-\ \ z=1 \\ x+\ \ y+mz=1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x+my-\ \ z=\ \ 1 \\ -x-\ \ y-mz=-1 \\ x+\ \ y-\ \ z=\ \ 1 \end{cases}$.

7. Să se determine ecuația dreptei (d): $y=ax+b$ dacă trece prin punctele *A, B* în cazurile:
a) $A(-3,0)$, $B(0,2)$; b) $A(0,0)$, $B(4,-3)$, c) $A(-2,3)$, $B(1,4)$.

8. Determinați punctele de intersecție ale dreptelor $(d_1)$, $(d_2)$ în cazurile:
a) $(d_1)$: $3x-4y-29=0$, $(d_2)$: $2x+5y+19=0$; b) $(d_1)$: $8x+3y+1=0$, $(d_2)$: $3x+2y+3=0$.

9. Laturile [*AB*], [*BC*] și [*AC*] ale unui triunghi *ABC* sunt date respectiv prin ecuațiile: $4x+3y-5=0$, $x-3y+10=0$, $x-2=0$. Determinați coordonatele vârfurilor.

10. Să se determine parametrul real m astfel încât dreptele de ecuații $x-2y=1$, $2x+my=2$ să fie concurente.

11. Să se determine funcția de gradul al doilea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$, dacă graficul acesteia conține punctele $A(-2,11)$, $B(1,-4)$, $C(3,6)$.

12. 1) Arătați că următorii vectori $\{e_1,e_2\}$ din $\mathbb{R}^2$ sunt liniare independenți (adică dacă $\alpha_1e_1+\alpha_2e_2=0\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=0$ ) și apoi exprimați vectorul u din $\mathbb{R}^2$ în funcție de $e_1$ și $e_2$ (găsiți $x,y\in\mathbb{R}$ astfel încât $u=xe_1+ye_2$) pentru fiecare caz în parte:

a) $e_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$; $e_2=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$; $u=\begin{pmatrix}5\\-9\end{pmatrix}$; b) $e_1=\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$; $e_2=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$; $u=\begin{pmatrix}10\\12\end{pmatrix}$.

2) Aceleași cerințe ca și la 1), dar pentru vectorii $\{e_1,e_2,e_3\}$ din $\mathbb{R}^3$ în cazurile:

a) $e_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$; $e_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$; $e_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$; $u=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$; b) $e_1=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$; $e_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$; $e_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$; $u=\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\end{pmatrix}$.

**13.** **Să se determine numerele reale *A, B, C, ...* pentru care au loc (pe rând) egalitățile:**

a) $\dfrac{x-4}{x^2-3x+2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}$, $x\neq 1,2$; b) $\dfrac{3x+1}{x\left(x^2-1\right)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x}+\dfrac{C}{x+1}$, $x\neq\pm1,0$.

**14.** **Să se determine parametrul real m astfel încât fiecare din sistemele de mai jos să aibă soluție unică.**

a) $\begin{cases}(m+1)x+y=0\\3x+(m-1)y=1\end{cases}$; b) $\begin{cases}2x-m\,y=3\\-x+18y=5\end{cases}$; c) $\begin{cases}mx+y+z=3\\x+y+z=2\\x+y+mz=1\end{cases}$; d) $\begin{cases}mx-2y+z=2\\2x+y-mz=5\\3x+2y-z=3\end{cases}$.

**15.** **Să se determine parametrul real m astfel încât fiecare sistem să nu aibă soluție unică.**

a) $\begin{cases}mx+y-z=1\\x+my-z=1\\-x+y+mz=1\end{cases}$; b) $\begin{cases}mx+2y+2z=0\\mx+my+z=0\\x+my+z=0\end{cases}$; c) $\begin{cases}mx+y+z=0\\x+my+z=0\\x+y+mz=0\end{cases}$.

**16.** **Utilizând metoda lui Gauss să se rezolve sistemele liniare:**

a) $\begin{cases}x+3y=14\\2x-5y=-16\end{cases}$; b) $\begin{cases}3x-2y=24\\5x-3y=39\end{cases}$; c) $\begin{cases}x+2y-2z=-2\\5x+9y-4z=-3\\3x+4y-5z=-3\end{cases}$; d) $\begin{cases}3x+7y-7z=-4\\x+2y-3z=0\\5x+6y+z=-8\end{cases}$.

**17.** **Să se rezolve sistemele compatibile simplu nedeterminate:**

a) $\begin{cases}x+2y-3z=0\\5x-3y+z=0\end{cases}$; b) $\begin{cases}x-2y+z=0\\x+3y-2z=0\end{cases}$; c) $\begin{cases}2x-y+3z=4\\3x+4y-z=-5\\x+5y-4z=-9\end{cases}$; d) $\begin{cases}2x-3y+z=0\\x+5y-3z=3\\5x+12y-8z=9\end{cases}$.

**18.** **Să se rezolve sistemele liniare omogene:**

a) $\begin{cases}2x-3y+3z=0\\3x-4y+5z=0\\5x+y+2z=0\end{cases}$; b) $\begin{cases}4x+y-2z=0\\x-2y+z=0\\11x-4y-z=0\end{cases}$; c) $\begin{cases}x+2y+z=0\\4x+8y+4z=0\\5x+10y+5z=0\end{cases}$.

**19.** **Să se rezolve și să se discute sistemele (după valorile parametrului real *m*):**

a) $\begin{cases}x+my+4z=1\\3x-y+5z=-4\\mx-5y-z=-5\end{cases}$; b) $\begin{cases}mx+y+z=1\\x-my-z=0\\x+y+mz=1\end{cases}$.

**20.** **Să se rezolve și discute sistemele (după valorile parametrilor reali m, n):**

a) $\begin{cases}x+y+z=n\\x+my+z=1\\nx+y+z=1\end{cases}$; b) $\begin{cases}nx+y+z=4\\x+my+z=3\\x+2my+z=4\end{cases}$; c) $\begin{cases}x+y+z=1\\x+my+nz=1\\x+m^2y+n^2z=1\end{cases}$.

**21.** **Să se determine ecuația:**

a) **dreptei** $(d): y=ax+b$, **dacă trece prin punctele** $A(-1,2)$, $B(3,5)$;

b) **parabolei** $(p): y=ax^2+bx+c$, **dacă trece prin punctele** $A(0,0)$, $B(-2,4)$, $C(2,4)$.

**22.** **În figura alăturată este indicat traficul dintr-o anumită, zonă a unui oraş. Săgețile indică direcția de deplasare a maşinilor. Numerele indicate pe figură reprezintă numărul de maşini care intră sau ies din intersecție. La fiecare din cele patru intersecții se află semafoare care dirijează circulația. Pentru a evita blocajele, toate maşinile care intră într-o intersecție trebuie să o părăsească.**

**a) Să se determine $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$.**

**b) Pentru $x_4 = 300$, determinați $x_1$, $x_2$, $x_3$.**

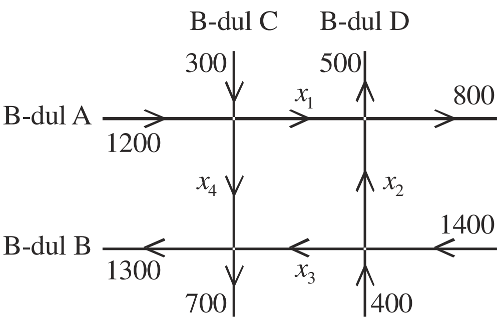


Fig. 7

**23.** **Numărul $\overline{abc}$ are suma cifrelor 19. Cifra zecilor este cu patru mai mică decât dublul cifrei sutelor. Numărul se micşorează cu 99 când cifrele sunt scrise invers. Determinați numărul.**

**24.** **Un teatru cu o capacitate de 300 de locuri a vândut la un spectacol toate biletele. Un bilet pentru copii costă 2 €, pentru studenți 3 €, iar pentru adulți 4 €. Se ştie că numărul adulților a fost jumătate din numărul copiilor şi studenților, iar la acea reprezentație s-au încasat 900 €. Determinați numărul spectatorilor din fiecare categorie.**

**25.** **O fabrică de mobilă produce două tipuri de mese *A* şi *B*. Fiecare masă trece prin două etape: asamblare şi finisare. Capacitatea maximă a fabricii pentru asamblare este de 195 ore şi pentru finisare de 165 ore. Pentru fiecare masă A sunt necesare 4 ore la asamblare şi 3 ore la finisare, iar pentru masa B o oră la asamblare şi 2 ore la finisare. Determinați numărul de mese de fiecare tip care pot fi produse utilizând la maxim capacitatea fabricii.**

**26.** **Benzenul lichid arde în atmosferă. Dacă un obiect rece este pus peste benzen, atunci apa va condensa pe obiect şi se va depozita pe el negru de fum (carbon). Ecuația chimică pentru reacție este de forma: $x_1C_6H_6 + x_2O_2 \rightarrow x_3C + x_4H_2O$. Determinați $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ pentru a obține balanța ecuației.**

**27.** **Determinați intensitățile curenților din rețelele de mai jos:**

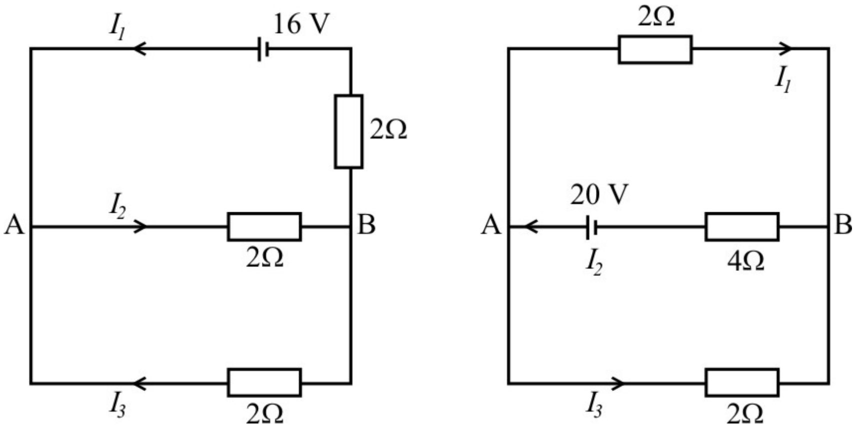


Fig.8

## Teste de evaluare

**Testul 1(1 punct din oficiu)**

**1. Să se determine matricea $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea**

**$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \frac{11}{2} \\ \frac{11}{2} & 6 \end{pmatrix}$.(2 puncte)**

**2. Se dă sistemul $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 2 - a \\ x + y + az = 3a + 1, a \in \mathbb{R} \end{cases}$**

**a) Să se determine parametrul $a$ pentru care sistemul se poate rezolva cu regula lui Cramer şi în acest caz să se rezolve.**
**b) Să se precizeze dacă pentru $a = -2$ sau $a = 1$ sistemul are soluție. (2 puncte)**

**3. Pentru ce $m \in \mathbb{R}$ sistemul: $\begin{cases} 4x + my = 0 \\ y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$ are soluția diferită de cea banală?( 2 puncte)**

**4. Fie sistemul : $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \\ mx - y + 2z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 243 \end{cases}$ . Se cere $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluții reale şi să se rezolve în acest caz. (3 puncte)**

**Testul 2 (1 punct din oficiu)**

**1. Să se rezolve în $M_3(\mathbb{R})$ ecuația matriceală $X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$. (2 puncte)**

**2. Fie sistemul $\begin{cases} \alpha x + y + 2z = 0 \\ x + \alpha y + z = 0 \\ 2x + 2y + \alpha z = 0, \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$**

**a) Pentru ce valoare a lui $\alpha$ sistemul are soluție unică ?**
**b) Pentru $\alpha = 1$ să se rezolve sistemul.(2 puncte)**

**3. Să se rezolve şi discute sistemul: $\begin{cases} (1+\alpha)x + y + z = 1 \\ x + (1+\alpha)y + z = \alpha \quad , \alpha \in \mathbb{R} \\ x + y + z = \alpha^2 \end{cases}$**

**4. Să se studieze compatibilitatea sistemului: $\begin{cases} 3x + y - z = ax \\ -x + y + z = ay \\ 2x + 4y + z = az, \quad a \in \mathbb{R} \end{cases}$ şi apoi să se rezolve .(3 puncte)**

**Testul 3 (grilă) (1 punct din oficiu)**

**1. Soluția ecuației $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = O_2$ este a) $x = y = 1$; b) $x = y = 0$; c) $x = y = -1$; d) $x = 1, y = -1$; e) $x = 0, y = 1$. (2 puncte)**

**2. Dacă $(x,y,z)$ este soluția sistemului $\begin{cases} 3x-y+z=0 \\ -2x+y+3z=-7 \\ x+2y-2z=7 \end{cases}$ atunci $x+y+z$ este: a) 0; b) 1; c) –1; d) 2; e) –2. (2 puncte)**

**3. Valorile lui $m\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul $\begin{cases} x+2y=m+1 \\ 2x+3y=m-1 \\ mx+y=3 \end{cases}$ sunt a) $m\in\{-1,1\}$; b) $m\in\{0,1\}$; c) $m\in\{0,4\}$; d) $m\in\{-1,4\}$; e) $m\in\varnothing$. (2 puncte)**

**4. Valorile lui $m\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul $\begin{cases} mx+y+z=0 \\ x+my+z=0 \\ x+y+mz=0 \end{cases}$ este compatibil simplu nedeterminat sunt: a) $m\in\{-1\}$; b) $m\in\{1\}$; c) $m\in\{-1,1\}$; d) $m\in\{-2\}$; e) $m\in\varnothing$ . (3 puncte)**

# ELEMENTE DE
# ANALIZĂ MATEMATICĂ

# 1. MULȚIMEA NUMERELOR REALE

**Este prezentată definiția axiomatică a mulțimii numerelor reale prin cele trei grupe de axiome: pentru structura algebrică, pentru structura de ordine şi pentru completitudinea lui $\mathbb{R}$.**

**Istoric. Construcția riguroasă a acestei mulțimi a fost realizată, prin diferite metode, de matematicienii germani: 1) Cantor (1845-1918) 1869, 2) Dedekind (1831-1916) 1872 şi 3) Weierstrass (1815-1897). Peano (1889) (matematician italian 1858-1932) a definit mulțimea numerelor naturale ca fiind o mulțime ce satisface anumite axiome.**

**Plecând de la aceste axiome, matematicianul german E. Landau defineşte riguros şi fără lacune toate proprietățile algebrice şi de ordine pe $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ şi $\mathbb{R}$.**



## 1.1. DEFINIȚIA AXIOMATICĂ A MULȚIMII NUMERELOR REALE

Am studiat în anii precedenți principalele mulțimi de numere ($\mathbb{N} =$ mulțimea numerelor naturale, $\mathbb{Z} =$ mulțimea numerelor întregi, $\mathbb{Q} =$ mulțimea numerelor raționale, $\mathbb{R} =$ mulțimea numerelor reale), indicând pentru fiecare mulțime cele două structuri:
1) **structura algebrică**, dată de cele două operații, adunarea şi înmulțirea şi
2) **structura de ordine**, dată de relația de ordine "$\leq$" (mai mic sau egal). Totodată am evidențiat corespondența între aceste mulțimi şi punctele unei axe (o dreaptă pe care am fixat o origine, o unitate de măsură şi un sens pozitiv de parcurgere). Am explicat necesitatea extinderii, din rațiuni practice şi teoretice, mulțimilor $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.

S-a ajuns în final la $\mathbb{R}$, mulțimea numerelor reale, ca fiind reuniunea dintre mulțimea numerelor raționale şi mulțimea numerelor iraționale. Un număr real este o fracție zecimală periodică (număr rațional) sau fracție zecimală neperiodică (număr irațional). Aşadar, un număr real este o fracție zecimală finită sau infinită de forma $\pm x_0, x_1 x_2 x_3 ...$ unde $x_0 \in \mathbb{N}, x_1, x_2, x_3, ...$ fiind cifre de la 0 la 9.

### 1. Structura algebrică a mulțimii $\mathbb{R}$

Este dată de operațiile de **adunare** $+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \to x + y$ (suma dintre *x* şi *y*) şi **înmulțire** $\bullet : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \to x \cdot y$ (produsul dintre *x* şi *y*; în loc de $x \cdot y$ vom scrie simplu *xy*).

Pentru adunare avem axiomele:

**A1**.**Adunarea este asociativă**: $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

**A2**.**Adunarea este comutativă**: $x + y = y + x, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

**A3**.**Numărul real** 0(zero) **este element neutru față de adunare**: $x + 0 = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

**A4**.**Orice** $x \in \mathbb{R}$ **are un opus**, $x' = -x$ astfel încât: $x + (-x) = 0$.

Pentru înmulțire avem axiomele:

**I1**. **Înmulțirea este asociativă**: $(xy)z = x(yz), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

**I2**. **Înmulțirea este comutativă**: $xy = yx, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

**I3**. **Numărul real** 1(unu) **este element neutru față de înmulțire**: $x \cdot 1 = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

**I4**. **Orice** $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ **are un invers**, $x' = \frac{1}{x}$ astfel încât: $x\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

Legătura între cele două operații este dată de axioma:

**D**. **Distributivitatea înmulțirii în raport cu adunarea**:

$x(y + z) = xy + xz, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

Mulțimea $\mathbb{R}$ împreună cu operațiile de adunare şi înmulțire şi axiomele $\boldsymbol{A1 - A4, I1 - I4, D}$, spunem că formează un **corp comutativ**.

### 2. Structura de ordine a mulțimii $\mathbb{R}$

Date fiind două numere reale *x*, *y*, atunci între ele există una din relațiile: $x < y$, $x = y, x > y$. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ definim relația $"\leq"$ (mai mic sau egal) astfel

$x \leq y \Leftrightarrow (x < y \text{ sau } x = y)$.

Au loc următoarele axiome de ordine:

**O1**.Relația $"\leq"$ **este reflexivă**: $x \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$.

**O2**.Relația $"\leq"$ **este antisimetrică**: $x \leq y$ şi $y \leq x \Rightarrow x = y$.

**O3**.Relația $"\leq"$ **este tranzitivă**: $x \leq y$ şi $y \leq z \Rightarrow x \leq z$.

**O4**.Relația $"\le"$ **este relație de ordine totală**: $x \le y$ sau $y \le x, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

**O5**.Relația $"\le"$ **este compatibilă cu operația de adunare**: dacă $x \le y$, atunci $x + z \le y + z, \forall z \in \mathbb{R}$.

**O6**.Relația $"\le"$ **este compatibilă cu operația de înmulțire**: dacă $x \le y$ şi $0 \le z$, atunci $xz \le yz$.

**Observații.** **1**) O relație care are proprietățile $\boldsymbol{O_1 - O_3}$ se numeşte **relație de ordine**. Spunem că $\mathbb{R}$ **este ordonată** de această relație.

**2**) O relație care satisface axiomele $\boldsymbol{O_1 - O_4}$ se numeşte **relație de ordine totală**, iar despre mulțimea $\mathbb{R}$ spunem că este o **mulțime total ordonată** de relația $"\le"$.

**3**) Axiomele $\boldsymbol{O_5, O_6}$ arată legătura între cele două structuri de pe $\mathbb{R}$, cea algebrică şi cea de ordine.

**4**) Dacă pentru $(\mathbb{R},+,\cdot,\le)$ au loc axiomele $\boldsymbol{A_1 - A_4, I_1 - I_4, D, O_1 - O_6}$, atunci spunem că $\mathbb{R}$ **este un corp comutativ total ordonat**.

**5**) În fapt este uşor de văzut că dacă în locul lui $\mathbb{R}$ se pune $\mathbb{Q}$, axiomele de mai sus au loc. Am văzut că $\sqrt{2}$ nu poate fi reprezentat ca număr rațional (sub formă de fracție $\frac{m}{n}$, $m,n \in \mathbb{N}^*$). Deci $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Această observație arată necesitatea unei proprietăți suplimentare care să caracterizeze mulțimea numerelor reale, care să diferențieze mulțimea $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$. Proprietatea esențială a mulțimii $\mathbb{R}$, care nu se verifică în mulțimea $\mathbb{Q}$, o constituie următoarea axiomă.

### 3. Axioma de completitudine (Cantor-Dedekind)(facultativ)

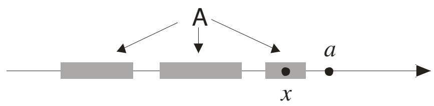
Pentru a enunța această axiomă avem nevoie de definirea unor concepte noi, deosebit de importante.

## Marginile unei mulțimi

**Definiții**. Fie $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \varnothing$.

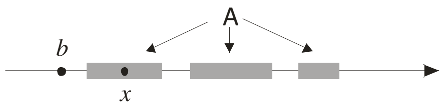
1) Mulțimea A se spune că este **majorată** (sau **mărginită superior**) dacă există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \leq a, \forall x \in A$. Numărul $a$ se numeşte **majorant** pentru mulțimea A.

Reprezentarea pe axă



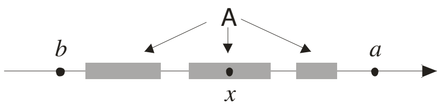

2) Mulțimea A se spune că este **minorată** (sau **mărginită inferior**) dacă există $b \in \mathbb{R}$ astfel încât $b \leq x, \forall x \in A$. Numărul $b$ se numeşte **minorant** pentru mulțimea A.

Reprezentarea pe axă




3) Mulțimea A se numeşte **mărginită** dacă este atât **minorată** cât şi **majorată**, adică dacă există numerele reale $a,b$ astfel încât $b \leq x \leq a, \forall x \in A$

Reprezentarea pe axă




**Observații**. **1**) Dacă $a$ este un majorant pentru mulțimea A, iar $a' \geq a$, atunci $a'$ este, de asemenea, un majorant pentru A (Fig. 1).

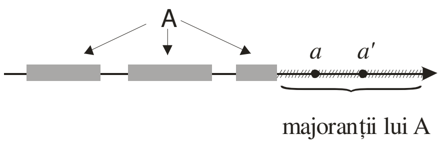



Fig. 1

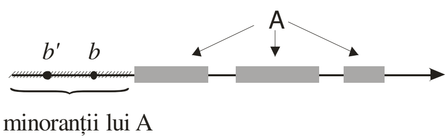



Fig. 2

Dacă $b$ este un minorant pentru mulțimea A, iar $b' \leq b$, atunci $b'$ este minorant pentru A (Fig. 2).

**Exemple**. **1)** $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, a_1 < a_2 < ... < a_n$. **Atunci orice $a \geq a_n$ este majorant pentru $A$, iar orice $b \leq a_1$ este un minorant pentru $A$. Deci $A$ este mărginită.**

**2)** $A = [0,1)$. **Orice $a \geq 1$ este un majorant pentru $A$ şi orice $b \leq 0$ este un minorant pentru $A$. Deci $A$ este mărginită.**

**3)** $A = \mathbb{N}$ **. Orice** $b \le 0$ **este un minorant pentru** $A$**. Nici un element** $a \in \mathbb{R}$ **nu este majorant pentru** $A$**. Deci** $A$ **este minorată, dar nu este majorată. Prin urmare,** $A$ **nu este mărginită.**
**4)** $A = \mathbb{Z}$ **. Nu are nici minoranți, nici majoranți. Evident,** $A$ **nu este mărginită.**

**2**) Un majorant poate să aparțină sau nu mulțimii A. Dacă el aparține lui A, atunci **el este cel mai mare element al mulțimii** A şi îl notăm cu **max A**.
Un minorant al lui A poate să fie sau nu element al mulțimii A. În cazul în care este element al lui A, **el este cel mai mic element al mulțimii** A, în sensul relației de ordine, şi se notează cu **min A**.

Exemple. **1)** $A = \{-5, -3, 0, 1, 6, 9\}$ **. Orice număr cel mult egal cu -5 este minorant pentru** $A$ **şi orice număr cel puțin egal cu 9 este un majorant pentru** $A$**. Cum** $-5, 9 \in A$ **, rezultă** $\min A = -5, \max A = 9$ **.**

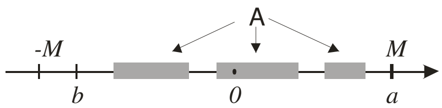
**2)** $A = (0,1)$**. Orice număr** $\le 0$ **este un minorant pentru** $A$ **şi orice număr** $\ge 1$ **este un majorant pentru** $A$**. Deoarece** $0 \notin A$ **, nu există min** $A$**. Analog din** $1 \notin A$**, deducem că nu există max** $A$**.**
**3)** $A = [0,1)$ **. Aici** $0 \in A$ **şi deci** $\min A = 0$ **. Nu există** $\max A$ **, deoarece** $1 \notin A$ **.**
**4)** $A = [0,1]$**. Cel mai mic element al lui** $A$ **este 0 şi deci** $\min A = 0$ **, iar cel mai mare element din** $A$ **este 1, adică** $\max A = 1$ **.**

Pentru mulțimile mărginite din $\mathbb{R}$ are loc următoarea:

**Teoremă**. Fie $A \subset \mathbb{R}$. Mulțimea A este mărginită dacă şi numai dacă există $M > 0$ astfel încât: $|x| \le M, \forall x \in A$.

A este mărginită $\Leftrightarrow \exists M > 0$, astfel încât $|x| \le M, \forall x \in A$.

Reprezentarea grafică




**Demonstrație**. "$\Rightarrow$" Dacă A este mărginită, atunci există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $b \le x \le a, \forall x \in A$. Notăm $M = \max(|a|, |b|)$ pentru care $|x| \le M, \forall x \in A$.
"$\Leftarrow$" Evident. ■

**Observație**. Arătați că dacă $A, B \subset \mathbb{R}$ sunt mulțimi mărginite, atunci $A \cup B, A \cap B, A - B$ sunt de asemenea, mulțimi mărginite.

**Definiție**. Fie $A \subseteq \mathbb{R}, A \ne \varnothing$.
1) Mulțimea A se numeşte **nemărginită superior**, dacă nu are nici un majorant.
2) Mulțimea A se numeşte **nemărginită inferior**, dacă nu are nici un minorant.

**Exemple. 1) $A=\mathbb{N}$ este nemărginită superior. 2) $A=\mathbb{Z}, A=\mathbb{Q}$ sau $A=\mathbb{R}$ este nemărginită inferior şi superior.**

### Supremum şi infimum

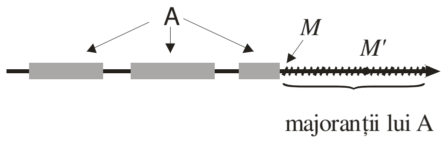
Fie $A\subset\mathbb{R}, A\neq\varnothing$.

**Definiţie**. Dacă A este o mulţime majorată, atunci numărul $M\in\mathbb{R}$ se numeşte **margine superioară** (sau **supremum**) a mulţimii A dacă satisface condiţiile:

1) M este un majorant pentru A (adică $x\le M, \forall x\in A$);

2) Dacă $M'$ este un majorant pentru A, atunci $M\le M'$ (M este cel mai mic majorant al lui A).

Reprezentarea pe axă




Se notează marginea superioară a mulţimii A prin $M=\mathbf{sup}\,A$ (citim: supremum de A). Este posibil ca sup A să aparţină sau nu lui A. Dacă $\sup A=M\in A$, atunci M este cel mai mare element al lui A şi deci $\sup A=\max A$.

**Unicitatea marginii superioare**. Presupunem, prin absurd, că există două supremumuri pentru $A, M_1, M_2$, cu $M_1<M_2$. Atunci există $x\in A$ astfel încât $x\ge M_2-\dfrac{M_2-M_1}{2}=\dfrac{M_1+M_2}{2}>M_1$, ceea ce contrazice definiţia lui $M_1$ !

**Exemple. 1) $A=\{-2,3,0,1,2\}$. În acest caz $M=\sup A=2\in A$ şi deci $\max A=2$.**

**2) $A=[0,1)$. Aici $\sup A=1\notin A$.**

**3) $A=[0,1]$. Acum $\sup A=1\in A$ şi deci $\max A=1$.**

**4) $A=\mathbb{N}$. În acest caz sup $A$ nu există în $\mathbb{R}$.**

**5) Se consideră mulţimea $A=\left\{\dfrac{n+2}{n}\middle| n\in\mathbb{N}^*\right\}$. Să se arate că $\sup A=3$.**

**Verificăm cele două condiţii din definiţia precedentă. Arătăm mai întâi că 3 este un majorant al mulţimii $A$. Deci trebuie probat că $\dfrac{n+2}{n}\le 3, \forall n\in\mathbb{N}^*$ sau echivalent $n+2\le 3n \Leftrightarrow n\ge 1$, evident.**

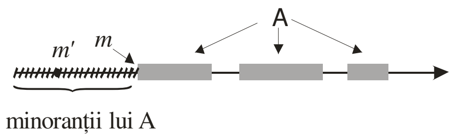
**Să verificăm acum că 3 este cel mai mic majorant pentru $A$. Fie, prin absurd, $\alpha<3$, majorant pentru A. Deci $\dfrac{n+2}{n}\le\alpha, \forall n\in\mathbb{N}^*$. De aici $n\ge\dfrac{2}{\alpha-1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$, ceea ce este fals, deoarece pentru $n=1$ se obţine $\alpha\ge 3$!**

**Definiție**. Dacă A este o mulțime minorată, atunci numărul $m \in \mathbb{R}$ se numește **margine inferioară** (sau **infimum**) a mulțimii A dacă satisface condițiile:

$1')$ $m$ este un minorant pentru A (adică $m \le x, \forall\, x \in A$);

$2')$ Dacă $m'$ este un minorant pentru A, atunci $m' \le m$ ($m$ este cel mai mare minorant al lui A).

Reprezentarea pe axă




Notăm marginea inferioară a lui A prin $m = \mathbf{inf}\ A$ (citim: infimum de A).
Marginea inferioară a lui A este posibil să aparțină sau nu lui A. Dacă $\inf A = m \in A$, atunci $m$ este cel mai mic element al lui A și deci $m = \min A$.

**Unicitatea marginii inferioare**. Dacă $m_1, m_2$ sunt margini inferioare pentru A, atunci arătăm că $m_1 < m_2$ sau $m_2 < m_1$ sunt situații imposibile. Rămâne atunci $m_1 = m_2$. Presupunem că $m_1 < m_2$. Atunci din ipoteză $m_1$ este cel mai mare minorant și deci $m_2$ nu mai poate fi inf A. Analog se arată că nu putem avea $m_2 < m_1$.

**Exemple**. **1)** $A = \{-5, -1, 0, 3, 8\}$. **Avem:** $\inf A = -5 \in A$ **și deci** $\min A = -5$.

**2)** $A = (0,1)$. **În acest caz** $\inf A = 0 \notin A$. **Nu există** $\min A$.

**3)** $A = [0,1)$. **Aici** $\inf A = 0 \in A$ **și deci** $\min A = 0$.

**4)** $A = \mathbb{Z}$. **În acest caz** $\inf A$ **nu există în** $\mathbb{R}$.

**5) Fie** $A = \left\{ \frac{n+2}{n} \middle| n \in \mathbb{N}^* \right\}$. **Arătați că** $\inf A = 1$. **Verificăm cele două condiții din definiția marginii inferioare a unei mulțimi. Arătăm că 1 este minorant pentru mulțimea A. Avem** $1 \le \frac{n+2}{n} \Leftrightarrow n \le n+2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, **ceea ce-i adevărat.**

**Probăm că 1 este cel mai mare minorant pentru** $A$. **Fie, prin absurd,** $\beta > 1$ **un minorant pentru** $A$. **Deci** $\beta \le \frac{n+2}{n} \Leftrightarrow n(\beta - 1) \le 2 \Leftrightarrow n \le \frac{2}{\beta - 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, **fals, deoarece** $\frac{2}{\beta - 1}$ **este un număr pozitiv real fixat, iar** $n \in \mathbb{N}^*$, **mulțime nemărginită superior.**

Cu aceste pregătiri putem enunța:

**Axioma de completitudine (Cantor-Dedekind)**
Orice mulțime nevidă, minorată, are o margine inferioară în $\mathbb{R}$.

**Observații**. **1**) Proprietatea analoagă pentru marginea superioară poate fi dedusă din axioma de completitudine astfel:

Fie $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$, care este majorată. Atunci mulțimea $-A = \{-a | a \in A\}$ este minorată (!) şi conform axiomei de completitudine rezultă că $m = \inf(-A)$ există în $\mathbb{R}$. Arătați că $-m = \sup A$.

**2**) Dacă la corpul ordonat $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ se adaugă şi axioma de completitudine, atunci se spune că $\mathbb{R}$ este un **corp complet ordonat**.

**3**) Mulțimea $\mathbb{Q}$ este o mulțime cu „goluri" sau „găuri" (există numere iraționale între numere raționale) în timp ce în $\mathbb{R}$ ele nu există (se spune că $\mathbb{R}$ este continuă). Golurile pot fi supremumuri (sau infimumuri) de mulțimi nevide majorate (sau minorate) de numere raționale.

Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{Q} | x \geq 0, x^2 \leq 3\} = [0, \sqrt{3}] \cap \mathbb{Q}$,

$B = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0, x^2 \leq 3\} = [0, \sqrt{3}]$. Se arată că $\sup A = \sup B = \sqrt{3}$, dar A ca submulțime a lui $\mathbb{Q}$ nu are margine superioară în $\mathbb{Q}$, în timp ce B ca submulțime a lui $\mathbb{R}$ are ca margine superioară pe $\sqrt{3}$.

## 4. Valoarea absolută a unui număr real

Reamintim următoarea:

**Definiție.** Se numeşte **valoarea absolută a numărului real** $x$, notată $|x|$ (citim: **modul de** $x$), numărul

$$|x| = \begin{cases} x, \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, \text{dacă } x < 0 \end{cases}.$$

**Proprietăți ale valorii absolute:**

**1)** $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $|x| \geq 0; |x| = \sqrt{x^2}, x \in \mathbb{R}$.

**2)** Fie $\varepsilon > 0$. Atunci:

$|x| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon$; $|x| > \varepsilon \Leftrightarrow (x < -\varepsilon \text{ sau } x > \varepsilon)$;

$|x| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$; $|x| \geq \varepsilon \Leftrightarrow (x \leq -\varepsilon \text{ sau } x \geq \varepsilon)$.

**3)** $|xy| = |x||y|, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$ (**Modulul produsului este egal cu produsul modulelor**);

$|x^n| = |x|^n, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (**Modulul puterii este egal cu puterea modulului**);

**4)** $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \forall x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$ (**Modulul câtului este egal cu câtul modulelor**);

**5)** $|x+y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$ (**Inegalitatea triunghiului**).

În inegalitate avem egalitate dacă $xy \geq 0$.

**Demonstrație**. Temă.

## 1.2. MARGINILE UNEI MULȚIMI NEMĂRGINITE. DREAPTA REALĂ ÎNCHEIATĂ $(\overline{\mathbb{R}})$

Am văzut în paragrafele precedente că există submulțimi nevide ale lui $\mathbb{R}$ care nu sunt minorate (sau majorate). Acest fapt sugerează extinderea mulțimii $\mathbb{R}$ la o mulțime în care orice fel de submulțime să aibă o margine inferioară şi o margine superioară.

Fie $A \subset \mathbb{R}$, o mulțime **nemărginită superior**, adică pentru orice $a \in \mathbb{R}$, există cel puțin un element $x \in A$ astfel încât $a < x$. Vom pune prin definiție $\sup A = +\infty$ (citim: plus infinit).

Dacă $A \subset \mathbb{R}$ este o mulțime **nemărginită inferior**, adică pentru orice $b \in \mathbb{R}$, există cel puțin un element $x \in A$ astfel încât $x < b$. Prin definiție punem $\inf A = -\infty$ (citim: minus infinit).

Mulțimea formată din $\mathbb{R}$ la care se adaugă simbolurile $+\infty$ (sau simplu $\infty$), $-\infty$ se notează cu $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ şi se numeşte **dreapta reală încheiată**.

Numerele reale se numesc **numere finite**, iar simbolurile $-\infty$ şi $+\infty$ se numesc **numere infinite**.

### 1. Aritmetica în $\overline{\mathbb{R}}$

Operațiile aritmetice de pe $\mathbb{R}$ se extind pe $\overline{\mathbb{R}}$ astfel:

1) $x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty, x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty, \forall x \in \mathbb{R}$;

2) $x - (+\infty) = -\infty, x - (-\infty) = +\infty, \forall x \in \mathbb{R}$;

3) $x(+\infty) = \begin{cases} +\infty, \text{ dacă } x > 0 \\ -\infty, \text{ dacă } x < 0 \end{cases}$; $x(-\infty) = \begin{cases} -\infty, \text{ dacă } x > 0 \\ +\infty, \text{ dacă } x < 0 \end{cases}$;

4) $(+\infty)(+\infty) = +\infty$; $(-\infty)(-\infty) = +\infty$, $(-\infty)(+\infty) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$;

5) $\frac{x}{\pm\infty} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$;

6) $|\pm\infty| = +\infty$.

**Nu se acordă nici un sens următoarelor operații**

1) $\infty - \infty$; 2) $0(\pm\infty)$; 3) $\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$; 4) $0^0, (\pm\infty)^0, 1^{\pm\infty}$.

**2. Relația de ordine pe $\overline{\mathbb{R}}$**

Relația de ordine de pe $\mathbb{R}$ se extinde la $\overline{\mathbb{R}}$ astfel:
1) $x < \infty, \forall x \in \mathbb{R}$; 2) $-\infty < x, \forall x \in \mathbb{R}$; 3) $-\infty < \infty$.
Deci $\overline{\mathbb{R}}$ are cel mai mic element $(-\infty)$ şi cel mai mare element $(+\infty)$.

## 1.3. FUNCȚII MĂRGINITE. FUNCȚII NEMĂRGINITE

Fie $f : E \to \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$. Dacă $A \subseteq E$, atunci am notat $f(A) = \{f(a) | a \in A\}$, mulțimea imaginilor elementelor din *A* prin *f* sau simplu, imaginea mulțimii *A* prin *f*. În particular, dacă $A = E$, atunci mulțimea $f(A) = f(E)$ am notat-o cu Im*f* (citim: imaginea lui *f* ) şi se numeşte **mulțimea de valori a funcției** *f*.

Exemple. **1) Fie funcția $f : \{-2, -1, 0, 1\} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$. Atunci**
$f(\{-1\}) = f(\{1\}) = \{1\}$, $f(\{-1, 0, 1\}) = \{f(-1), f(0), f(1)\} = \{0, 1\}$,
$f(\{-2, -1, 0, 1\}) = \{f(-2), f(-1), f(0), f(1)\} = \{0, 1, 4\}$.
**2) Pentru funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x$, avem $f([0,1]) = [f(0), f(1)] = [0,3]$, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.**

Formulăm următoarele:

**Definiții.1)** Funcția $f : E \to \mathbb{R}$ se numeşte **funcție mărginită**, dacă mulțimea $f(E)$ este mărginită.
**2)** Funcția $f : E \to \mathbb{R}$ se numeşte **funcție nemărginită**, dacă mulțimea $f(E)$ este nemărginită.

Observații. **1**) Deci *f* este **mărginită** $\Leftrightarrow \exists M > 0$ astfel încât $|f(x)| \le M, \forall x \in E$.
**2**) Dacă $f : E \to \mathbb{R}$, atunci pentru marginea inferioară (respectiv superioară) a mulțimii $f(E)$ se foloseşte şi notația $\inf\limits_{x \in E} f(x)$ (respectiv $\sup\limits_{x \in E} f(x)$).
**3**) Dacă $f, g : E \to \mathbb{R}$ sunt funcții mărginite, atunci $f \pm g, f \cdot g, \alpha f, \alpha \in \mathbb{R}$, sunt, de asemenea, funcții mărginite.
**4**) Graficul unei funcții mărginite superior se află sub dreapta $y = a$ (Fig.3).
Graficul unei funcții mărginite inferior se află deasupra dreptei $y = b$ (Fig.4).

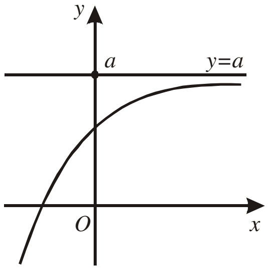



Fig. 3

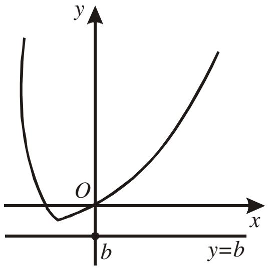



Fig. 4

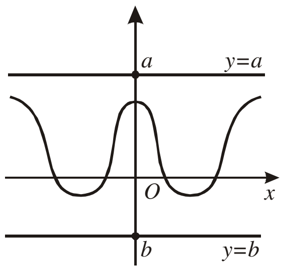



Fig. 5

Graficul unei funcții mărginite este cuprins între dreptele $y = b$, $y = a$ (Fig.5).

**Exemple. 1)** $f : E \to \mathbb{R}$. **Dacă** $E$ **este finită, atunci** $f(E)$ **este mărginită.**

**2)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$, **este mărginită deoarece** $\operatorname{Im} f = [-1,1]$, **care este mulțime mărginită.**

**3)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$ **este nemărginită, deoarece** $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$ **este mulțime nemărginită inferior și superior. Dar** $f$ **este mărginită pe orice interval** $[a,b], a < b$, **când avem** $f([a,b]) = [a,b]$.

## 1.4. AXA REALĂ

O dreaptă *d* pe care fixăm un punct *O*, numit origine, un sens pozitv şi o unitate de măsură se numeşte **axă de coordonate** (Fig.6)


Fig. 6

Am văzut în anii precedenți că fiecărui număr real pozitiv $a$ îi corespunde pe axa de coordonate un punct A situat la dreapta lui $O$ astfel încât $OA = a$, iar fiecărui număr real negativ $a'$ îi corespunde un punct $A'$ situat la stânga lui $O$ pentru care $OA' = |a'|$.Numărului 0 (zero) îi corespunde punctul *O*.

Reciproc, oricărui punct *X* de pe axă îi corespunde un număr real *x*, numit **abscisa punctului** *X* astfel încât $OX = |x|$. Se scrie $X(x)$ (citim *X* de abscisă *x*).

Se stabileşte astfel o corespondență bijectivă între mulțimea numerelor reale şi mulțimea punctelor de pe axa de coordonate. Din acest motiv axa de coordonate se numeşte şi **axa reală**. Dacă $X(x)$ şi $Y(y)$, atunci $XY = |y - x|$ reprezintă lungimea segmentului $[XY]$.

# 1.5. INTERVALE

**1. Intervale din $\mathbb{R}$**
Corespondența pusă în evidență la punctul precedent, între mulțimea $\mathbb{R}$ şi dreapta *d*, face ca submulțimilor lui $\mathbb{R}$ să le corespundă pe *d* submulțimi de puncte şi invers.
Relația $x \le y$ *şi* $x \ne y$ se scrie $x < y$ sau încă $y > x$.
Pentru orice cuplu de numere reale $a < b$, definim mulțimile:
**1)** $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$, numit interval **deschis şi mărginit**, de origine *a* şi extremitate *b*, având reprezentarea pe axa reală în Fig.7
**2)** $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a \le x \le b\}$, numit interval **închis şi mărginit** (**sau compact**), de origine *a* şi extremitate *b*, cu reprezentarea pe axa reală ca în Fig. 8
**3)** $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \le b\}$, numit interval **deschis** în *a* şi **închis** în *b*, cu reprezentarea pe axa reală din Fig.9.

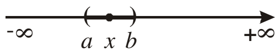


Fig. 7

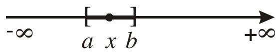


Fig. 8

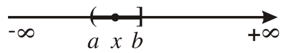


Fig. 9

**4)** $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} | a \le x < b\}$, numit **interval închis** în *a* şi **deschis** în *b*, cu reprezentarea pe axa reală din Fig.10.
**5)** $(a,a) = [a,a) = \phi, [a,a] = \{a\}$.
**6)** $(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$, numită **semidreapta deschisă, nemărginită la dreapta**, cu reprezentarea pe axa reală din Fig.11.

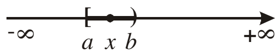


Fig.10

Fig.11

7) $[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \ge a\}$, numită **semidreapta închisă la stânga şi nemărginită la dreapta**, cu reprezentarea pe axa reală din Fig.12.
**8)** $(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$, numită **semidreapta deschisă**, **nemărginită la stânga**, cu reprezentarea pe axa reală din Fig.13.
**9)** $(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} | x \le a\}$, numită **semidreapta închisă la dreapta şi nemărginită la stânga**, cu reprezentarea pe axa reală din Fig. 14.

Fig.12

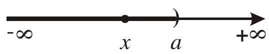


Fig.13

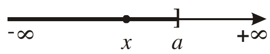


Fig.14

**Observații**. **1**) Intervalele 3), 4) se mai numesc **semideschise** (sau **semiînchise**).
**2**) Intervalele $(a,b),[a,b],[a,b),(a,b]$ sunt mărginite şi au **lungimea** egală cu $b-a$.

**2. Intervale din $\overline{\mathbb{R}}$**

Sunt mulțimile de forma:

**1**) $[-\infty,a)=\{x\in\overline{\mathbb{R}}\,|\,x<a\}$, cu reprezentarea pe axa reală încheiată din Fig.15.

**2**) $[-\infty,a]=\{x\in\overline{\mathbb{R}}\,|\,x\leq a\}$, cu reprezentarea pe axa reală încheiată din Fig.16.

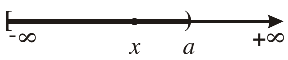



Fig.15

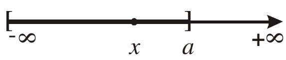



Fig.16

**3**) $(a,\infty]=\{x\in\overline{\mathbb{R}}\,|\,x>a\}$, cu reprezentarea pe axa reală încheiată din Fig.17.

**4**) $[a,\infty]=\{x\in\overline{\mathbb{R}}\,|\,x\geq a\}$, cu reprezentarea pe axa reală încheiată din Fig.18.

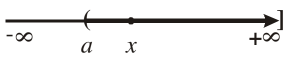



Fig.17

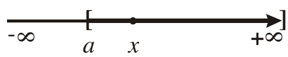



Fig.18

## 1.6. NOȚIUNEA DE VECINĂTATE

### 1. Vecinătate a unui punct din $\mathbb{R}$

Are loc următoarea:

**Definiție**. Fie $a\in\mathbb{R}$ şi $V\subseteq\mathbb{R}$. Mulțimea $V$ se numeşte **vecinătate** a lui $a$ dacă există $\varepsilon>0$ astfel încât intervalul $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ să fie inclus în $V$ (Fig.19).

Deci, $V$ este vecinătate a lui $a\Leftrightarrow\exists\varepsilon>0$ astfel încât $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\subset V$.
Intervalul $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ se numeşte **centrat** în $a$ sau încă **simetric** în $a$.

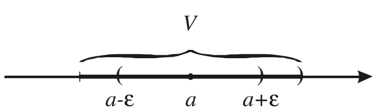



Fig.19

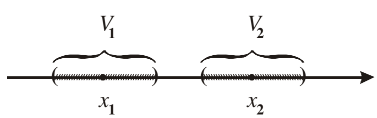



Fig.20

**Observații. 1**) Orice interval deschis $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$ este vecinătate a punctului $a$.
**2**) Cum pentru un număr real $a$ există o infinitate de vecinătăți, notăm cu $\vartheta(a)$, mulțimea acestora.
**3**) Orice interval deschis $(a,b), a<b$, este vecinătate a oricărui punct al său.

**Exemple. 1) $(-1,1)$ este vecinătate a lui 0; 2) $(-1,2]$ nu este vecinătate a lui 2, deoarece pentru nici un $\varepsilon>0$, intervalul $(2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$ nu este inclus în $(-1,2)$.**
**Dacă, prin absurd, $(2-\varepsilon, 2+\varepsilon)\subset(-1,2)$, atunci trebuie să avem $-1<2-\varepsilon, 2+\varepsilon\le 2$, ceea ce atrage $\varepsilon\le 0$, fals!.**
**3) $(0,2], [-1,3], \left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right), \left[-\frac{1}{2},3\right)$ sunt vecinătăți ale lui 1.**

### Proprietăți ale vecinătăților unui punct

Se verifică, fără dificultate, următoarele proprietăți ale mulțimii $\vartheta(a)$:
**1)** $a\in V, \forall V\in\vartheta(a)$ (**Orice vecinătate își conține punctul**).
**2)** Dacă $V\in\vartheta(a)$, iar $U\supset V$, atunci $U\in\vartheta(a)$ (**Orice mulțime care conține o vecinătate a unui punct, este vecinătate pentru acel punct**).
**3)** Dacă $V_1, V_2\in\vartheta(a)$, atunci $V_1\cap V_2\in\vartheta(a)$ (**Intersecția a două vecinătăți ale lui *a*, este o vecinătate a lui *a***).
Mulțimea $\mathbb{R}$ are următoarea proprietate remarcabilă.
**Proprietatea de separare a lui $\mathbb{R}$.** Dacă $x_1, x_2\in\mathbb{R}, x_1\ne x_2$, atunci există $V_1\in\vartheta(x_1), V_2\in\vartheta(x_2)$ astfel încât $V_1\cap V_2=\varnothing$ (Fig. 20)

### 2. Vecinătăți pentru $\pm\infty$ în $\overline{\mathbb{R}}$

Are loc următoarea:

**Definiție.** O mulțime $V$ din $\overline{\mathbb{R}}$ se numeşte vecinătate a lui $-\infty$, dacă există $b\in\mathbb{R}$ astfel încât $[-\infty, b)\subset V$ (Fig. 21).

O mulțime $V$ din $\overline{\mathbb{R}}$ se numeşte vecinătate a lui $+\infty$, dacă există $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $(a,\infty]\subset V$ (Fig. 22).

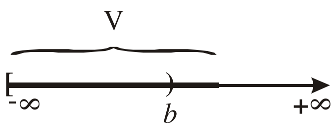


Fig.21

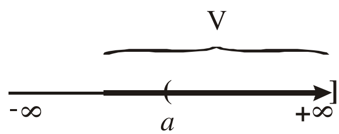


Fig.22

**Exemple. 1) $[-\infty, 0]$ este o vecinătate a lui $-\infty$.**

**2) $(1, \infty]$ este o vecinătate a lui $+\infty$.**

**3) $\mathbb{R}$ nu este vecinătate nici pentru $-\infty$, nici pentru $+\infty$ (deoarece $\pm\infty \notin \mathbb{R}$). Dar, este vecinătate a oricărui $a \in \mathbb{R}$.**

**4) $\overline{\mathbb{R}}$ este vecinătate pentru fiecare element $a \in \overline{\mathbb{R}}$.**

## 1.7. PUNCT DE ACUMULARE. PUNCT IZOLAT

Pentru o mulțime $A \neq \varnothing, A \subseteq \mathbb{R}$, două tipuri de puncte joacă un rol important. Le vom discuta pe rând. Avem următoarea:

**Definiție**. Un punct $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte **punct de acumulare** (sau **punct limită**) pentru mulțimea $A$ dacă $\forall V \in \vartheta(a)$ să rezulte $(V - \{a\}) \cap A \neq \varnothing$ (Fig. 23).

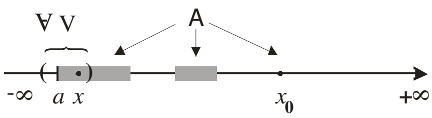



Fig.23

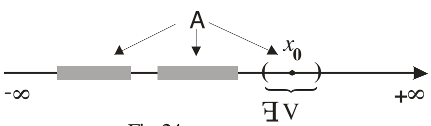



Fig.24

Această definiție spune că un punct $a \in \overline{\mathbb{R}}$ este **punct de acumulare** pentru mulțimea $A$, dacă orice vecinătate $V$ a lui $a$ **mai conține şi alte puncte** din $A$, diferite de $a$ $\left((V - \{a\}) \cap A \neq \varnothing\right)$. Deci există $x \in V \cap A, x \neq a$.

Mulțimea punctelor de acumulare pentru mulțimea $A$ se notează cu $A'$ şi se mai numeşte **mulțimea derivată** a lui $A$.

Dacă $a \in A'$ nu rezultă obligatoriu că $a \in A$!

Arătați că $a \in \mathbb{R}$ este punct de acumulare pentru A dacă $\forall \delta > 0, \exists x \in A, x \neq a$ astfel încât $|x - a| < \delta$.

Dacă mulțimea $A$ conține un interval de forma $(a - p, a)$ sau $(a, a + p)$ sau o reuniune de intervale de forma $(a - p, a) \cup (a, a + p), p > 0$, atunci $a$ este punct de acumulare pentru $A$ (intervalele pot fi şi închise în $a$).

**Exemple. 1) Dacă $A = (a,b)$ sau $A = [a,b)$ sau $A = (a,b]$ sau $A = [a,b]$, atunci $A' = [a,b]$.**

**2) Dacă $A = \varnothing$, atunci $A' = \varnothing$.**

**3) Dacă $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, atunci $A' = \varnothing$.**

**4) Dacă $A = \left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}^*\right\}$, atunci $A' = \{0\}$.**

**5) Dacă $A = \mathbb{N}$, atunci $A' = \{+\infty\}$.**

**6) Dacă $A = \mathbb{Z}$, atunci $A' = \{-\infty, +\infty\}$.**

**7) Dacă $A = \mathbb{R}$, atunci $A' = \overline{\mathbb{R}}$.**

**Definiție**. Fie $A \neq \emptyset, A \subseteq \mathbb{R}$. Un punct $x_0 \in A$ se numeşte **punct izolat al mulțimii** $A$ dacă există cel puțin o vecinătate $V$ a punctului $x_0$ astfel încât $V \cap A = \{x_0\}$ (Fig. 24).

**Observații**. **1**) Orice punct al unei mulțimi $A$ este **fie punct de acumulare**, **fie punct izolat**.
**2**) Dacă $A$ este interval, atunci $a \in A'$ dacă $a \in A$ sau $a$ este unul din capetele intervalului.

Exemple. **1) $A = [0,1] \cup \{2\}$. Punctul $x_0 = 2$ este punct izolat pentru $A$, deoarece există vecinătatea $V = \left(2 - \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2}\right)$ a lui $x_0$ astfel încât $V \cap A = \{2\}$.**

**2) $A = \mathbb{N}$. Orice număr din $\mathbb{N}$ este punct izolat al lui $\mathbb{N}$.**

## 1.8. FUNCȚII ELEMENTARE

În acest paragraf realizăm un „inventar” al funcțiilor importante pe care le-ați studiat în clasele a IX-a şi a X-a. Titulatura sub care sunt cunoscute aceste funcții este aceea de „funcții elementare”. De ce este necesară această prezentare ? Pentru că problemele fundamentale pe care le studiați în acest an la analiză matematică, limita unei funcții într-un punct, continuitatea unei funcții într-un punct (sau pe o mulțime), derivabilitatea unei funcții într-un punct (sau pe o mulțime) apelează la această categorie de funcții. Lecturați graficele acestor funcții, aşa cum am procedat în manualele din clasele a IX-a şi a X-a, punctând următoarele probleme:
1) Definirea funcției, 2) Intersecția graficului cu axele de coordonate, 3) Paritatea funcției şi simetria graficului funcției, 4) Convexitatea sau concavitatea funcției (graficului), 5) Monotonia funcției, 6) Mărginirea funcției (valori extreme, comportament asimptotic), 7) Semnul funcției (poziționarea graficului în raport cu axa $Ox$), 8) Continuitatea graficului, 9) Bijectivitatea şi inversa funcției.

- Reamintim că o funcție $f : A \to B, A, B \subseteq \mathbb{R}$ se numeşte funcție numerică. În reperul $xOy$, mulțimea $A$ este o submulțime de puncte de pe axa $Ox$, iar $B$ este o submulțime de puncte de pe axa $Oy$. Mulțimea $\{f(x) | x \in A\} = f(A)$ se numeşte mulțimea valorilor funcției $f$ sau încă imaginea funcției $f\,(f(A) = \operatorname{Im} f)$.
- Pentru a obține intersecția graficului funcției cu axa $Ox$ se rezolvă ecuația $f(x) = 0$, iar pentru a determina intersecția graficului funcției cu axa $Oy$ se calculează $f(0)$ (dacă $0 \in A$).
- Funcția $f$ este pară dacă $f(-x) = f(x), \forall x \in A$ (sub condiția $-x \in A$ pentru $x \in A$), caz în care graficul funcției este simetric în raport cu axa $Oy$ (Fig.25).

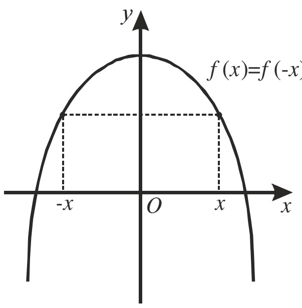


Fig. 25

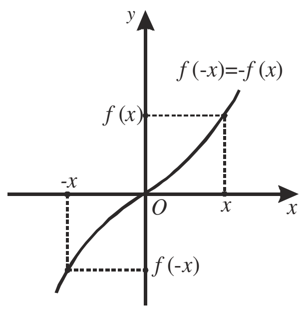


Fig. 26

Funcția $f$ este impară dacă $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in A(-x \in A)$, situație în care graficul lui $f$ este simetric în raport cu originea axelor de coordonate, $O$ (Fig.26).

- Funcția $f$ este convexă (concavă) pe intervalul $A$ dacă $\forall x_1, x_2 \in A$, $\forall q_1, q_2 \geq 0$, $q_1 + q_2 = 1$ avem $f(q_1 x_1 + q_2 x_2) \leq (\geq) q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2)$.

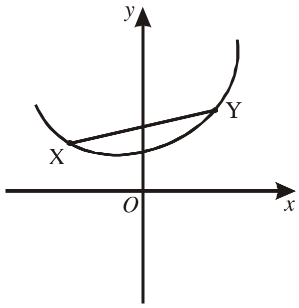


Fig. 27

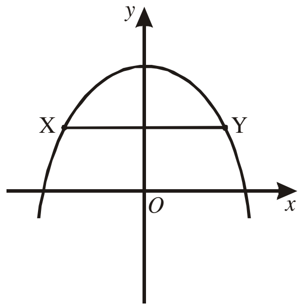
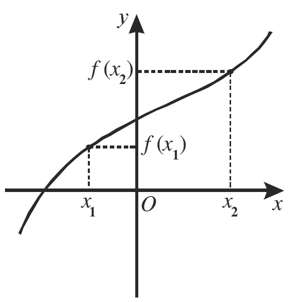


Fig. 28

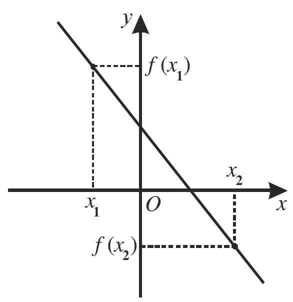
Graficul unei funcții convexe (concave) se află sub (deasupra) orice coardă obținută prin unirea a două puncte situate pe grafic Fig.27(Fig.28).

- Spunem că funcția $f$ este strict crescătoare (descrescătoare) pe $I \subseteq A$, dacă $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ să rezulte $f(x_1) < f(x_2) \left( f(x_1) > f(x_2) \right)$.Graficul unei funcții strict crescătoare (descrescătoare), privit de la stânga la dreapta, este o curbă care „urcă” („coboară”) Fig.29(Fig.30).



$\boldsymbol{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)}$

Fig.29



$\boldsymbol{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)}$

Fig.30

A preciza intervalele de monotonie pentru o funcție $f : A \to B, A, B \subseteq \mathbb{R}$ revine la a indica submulțimea lui $A$ pe care $f$ este strict crescătoare şi submulțimea lui $A$ pe care $f$ este strict descrescătoare.

Dacă între valorile lui $f$ relația $<(>)$ devine $\leq(\geq)$ se spune că funcția este crescătoare (descrescătoare).

Pentru a studia monotonia funcției $f$ se consideră $x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2$ şi se calculează diferența valorilor $f(x_1), f(x_2)$, adică $f(x_1) - f(x_2)$.

Dacă $f(x_1) < f(x_2)$, atunci $f$ este strict crescătoare pe $A$, iar dacă $f(x_1) > f(x_2)$, atunci $f$ este strict descrescătoare pe $A$.

Altfel se studiază semnul raportului

$$R(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \text{ unde}$$

$x_1 < x_2, x_1, x_2 \in A$.

- Funcția $f : A \to B$ este mărginită dacă există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $a \leq f(x) \leq b$, $\forall x \in A$. Pentru grafic această inegalitate arată că acesta este situat între dreptele orizontale $y = a$ şi $y = b$ (Fig.31).

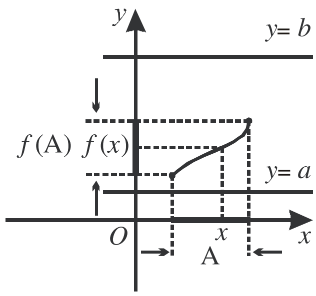



Fig.31

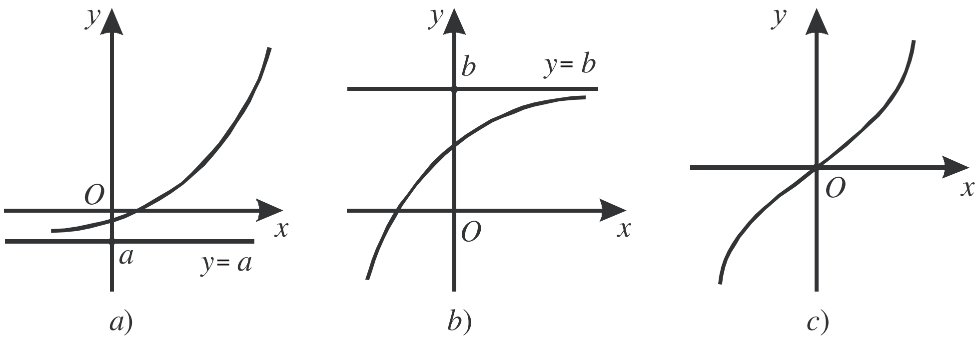



Fig. 32

În Fig.32. a) am reprezentat grafic o funcție care este mărginită inferior şi nemărginită superior. În Fig.32. b) este reprezentat graficul unei funcții mărginite superior şi nemărginite inferior, iar în Fig.32. c) este redat graficul unei funcții care nu este mărginită nici inferior, nici superior.

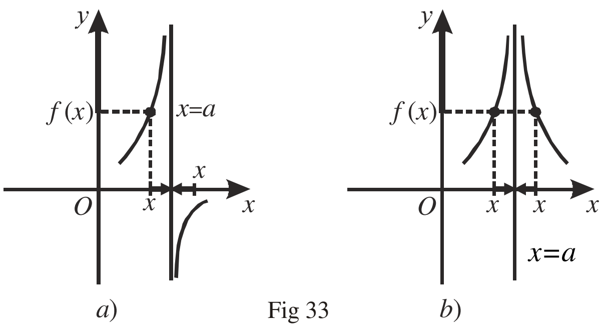



Fig 33

Dreapta verticală $x = a$ este asimptotă verticală pentru graficul funcției $f$ dacă atunci când $x$ se apropie de $a$ (din stânga sau (şi) din dreapta) valoarea $f(x)$ este foarte mare pozitivă sau foarte mare negativă (Fig.33. a), b) ).
Dreapta $y = a$ este asimptotă orizontală la $+\infty$ sau (şi) $-\infty$ dacă atunci când punctele curbei se deplasează spre infinit (sau $-\infty$), distanțele lor la dreapta dată devin foarte mici (Fig. 34. a), b), c)).

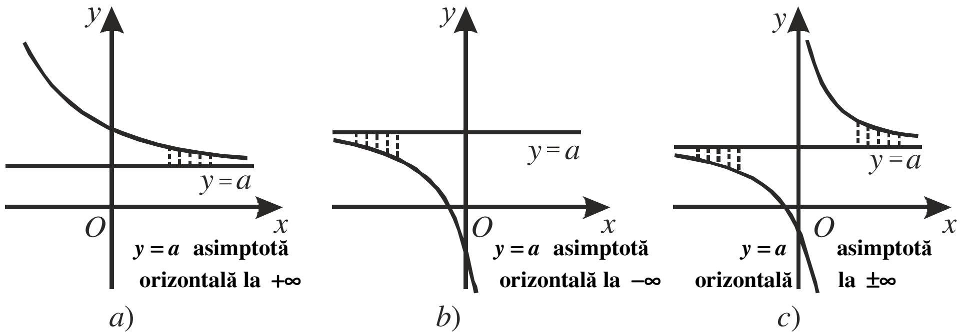


Fig 34

Dreapta $y = mx + n, m \neq 0$ este asimptotă oblică la $+\infty$ sau (şi) $-\infty$ dacă atunci când punctele curbei se deplasează spre infinit sau $(-\infty)$, distanțele lor la dreaptă devin foarte mici (Fig.35. a), b)).

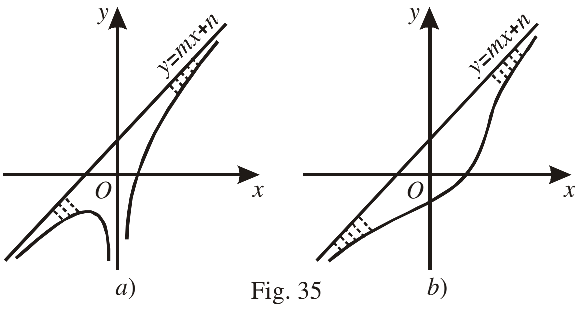


Fig. 35

Se poate vorbi de asimptote orizontale sau oblice, numai dacă domeniul funcției conține intervale de forma $(-\infty, a)$ sau $(a, \infty)$.

A stabili semnul funcției numerice $f : A \to B$ revine la a preciza submulțimile lui $A$, $A_+ = \{x \in A | f(x) > 0\}$, $A_- = \{x \in A | f(x) < 0\}$. Graficul funcției $f$ în punctele din $A_-$ se află sub axa $Ox$, iar în punctele din $A_+$ se află deasupra axei $Ox$ (Fig.36)

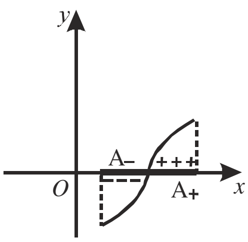


Fig. 36

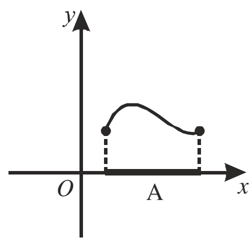


Fig. 37

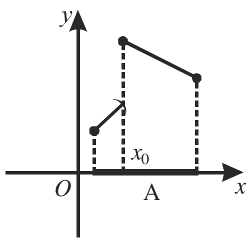


Fig. 38

- Graficul unei funcții este continuu dacă poate fi desenat cu creionul fără a-l ridica de pe foaie (Fig.37). O astfel de funcție o numim continuă pe $A$.
  Dacă acest lucru nu se întâmplă spunem că graficul este discontinuu pe $A$ (în Fig.38 graficul se „rupe” în $x_0$ - este discontinuu în $x_0$).
- Funcția $f$ este bijectivă dacă este injectivă $\left(f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right), x_1, x_2 \in A \Rightarrow x_1=x_2\right)$ şi surjectivă $\left(\forall y \in B, \exists x \in A\right.$ astfel încât $\left.f(x)=y\right)$.

Funcția $f$ este inversabilă dacă este bijectivă. Inversa ei se notează cu $f^{-1}: B \rightarrow A$ şi este definită prin $f^{-1}(y)=x$ cu proprietatea $f(x)=y$.

Graficele funcțiilor $f$ şi $f^{-1}$ sunt simetrice în raport cu prima bisectoare $(y=x)$.

Vom vedea că pentru $4), 5), 6), 7), 8)$ vom da formulări riguroase.

Următoarele funcții sunt considerate **funcții elementare**:

**1) funcția polinomială;**
**2) funcția rațională;**
**3) funcția radical;**
**4) funcția putere;**
**5) funcția exponențială;**
**6) funcția logaritmică;**
**7) funcțiile trigonometrice directe (sin, cos, tg, ctg);**
**8) funcțiile trigonometrice inverse (arcsin, arccos, arctg, arcctg).**

Se consideră că: **orice funcție obținută din cele de mai sus prin aplicarea succesivă, de un număr finit de ori, a operațiilor algebrice, a operației de compunere şi a operației de inversare este, de asemenea, o funcție elementară.**
În acest caz, dacă domeniul de definiție nu este precizat, atunci se subînțelege că **este format din acele puncte $x$ pentru care au sens operațiile prin care este definită funcția.** Acesta este **domeniul maxim de definiție al funcției.**
În continuare vom analiza, pe rând, aceste funcții.

## 1. Funcția polinomială $f(x)=a_n x^n+a_{n-1} x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$

Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x)=a_n x^n+a_{n-1} x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0, a_n \neq 0, a_i \in \mathbb{R}, i=\overline{0, n}$ se numeşte **funcția polinomială de grad $n$.**

**Exemple. 1) Funcția polinomială de grad zero este funcția constantă $f(x)=c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$. Graficul este o dreaptă paralelă cu axa $Ox$ (Fig.39). Dacă $c=0$ avem chiar axa $Ox$.**

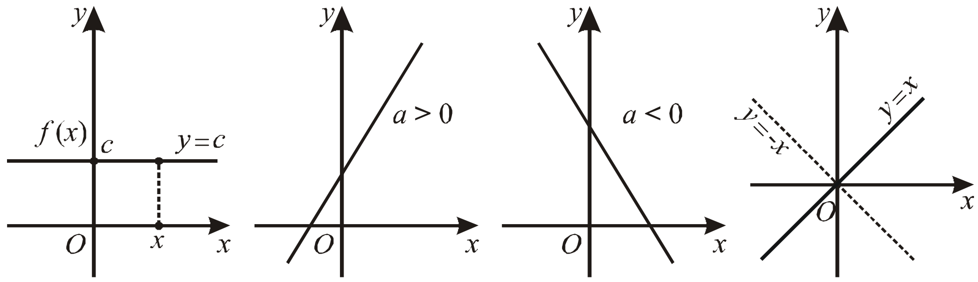
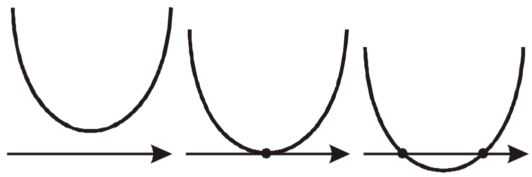



Fig. 39 $a)$ Fig. 40 $b)$ Fig. 41

**2) Funcția polinomială de gradul întâi $f(x)=ax+b, a\neq 0, a,b\in\mathbb{R}$ are ca grafic o dreaptă (Fig.40) – care „urcă” dacă $a>0$ (Fig.40. a)) sau care „coboară” dacă $a<0$ (Fig.40. b)).**
**Dacă $a=1, b=0$, atunci $f(x)=x, \forall x\in\mathbb{R}$ este funcția identică, având graficul prima bisectoare (Fig.41).**
**Dacă $a=-1, b=0$ atunci $f(x)=-x, \forall x\in\mathbb{R}$ are ca grafic a doua bisectoare (Fig.41, am trasat-o întrerupt).**
**3) Dacă $n=2$, se obține funcția polinomială de gradul doi $f(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0, a,b,c\in\mathbb{R}$. Aceste funcții sunt cunoscute sub denumirea de funcții pătratice.**
**Graficul funcției de gradul doi este o parabolă a cărui formă depinde de semnul lui $a$ (Fig.42).**

$a>0$ $a<0$

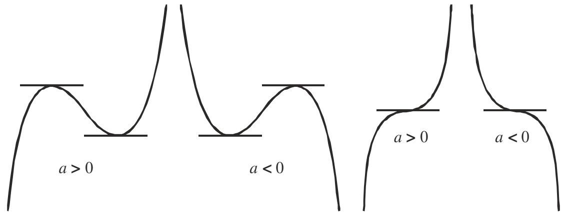
Fig. 42



$\Delta<0$ $\Delta=0$ $\Delta>0$

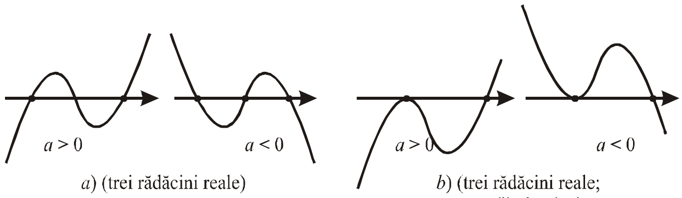
Fig. 43

**Poziția parabolei în raport cu axa $Ox$ este dată de semnul discriminantului $\Delta=b^2-4ac$ (Fig.43).**
**Dacă $a>0, (a<0)$, graficul este convex (concav). Dreapta $x=-\dfrac{b}{2a}$ este axă de simetrie a graficului.**
**Dacă $a>0\,(a<0)$, atunci punctul $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ este punctul de minim (maxim) pentru graficul funcției. Intervalele de monotonie ale funcției sunt: $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right], \left[-\dfrac{b}{2a}, \infty\right)$.**
**4) Dacă $n=3$, se obține funcția polinomială de gradul trei, $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d, a\neq 0$, $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Aceste funcții se mai numesc și funcții cubice.**
**În general, graficul unei funcții cubice are una din formele din Fig.44, aceasta fiind determinată de semnul lui $a$.**

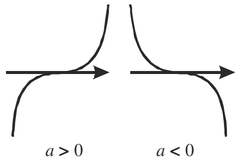



a) (puncte de extrem) Fig. 44 b) (punct de inflexiune)

**Poziția graficului funcției în raport cu axa $Ox$ este în una din situațiile din Fig.45.**




a) (trei rădăcini reale) b) (trei rădăcini reale; una fiind rădăcină dublă; punct de extrem)




c) (o rădăcină reală punct de inflexiune)

Fig.45

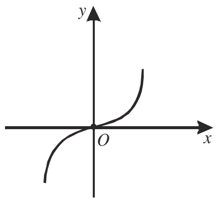



Fig.46

**Pentru $x$ foarte mare, funcția $f(x)$ se aproximează cu termenul care-l conține pe $x$ la puterea cea mai mare, adică $f(x) \approx ax^3$.**

**Funcția $f(x) = x^3$ are graficul din Fig.46, numit parabolă cubică (are forma din Fig.45. c) cu $a > 0$).**

## 2. Funcția rațională $f(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0}, \begin{matrix} n, m \le 2 \\ n, m \in \mathbb{N} \end{matrix}$

Funcția $f : \mathbb{R} - \{x | Q(x) = 0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, unde $P(x), Q(x)$ sunt funcții polinomiale, se numeşte **funcție rațională**.

Dacă $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, a_n \ne 0$ şi
$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0, b_m \ne 0$ atunci

$f(x)=\dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0}$, pentru $x\in\mathbb{R}-\{x|Q(x)=0\}$ (deoarece împărțirea prin zero nu este permisă).

**Observație**. Funcția polinomială $f$ se poate gândi ca o funcție rațională dacă scriem $f(x)=\dfrac{f(x)}{1}$. Funcțiile raționale sunt mai dificil de analizat şi de trasat graficele lor, decât în cazul funcțiilor polinomiale. În acest caz **este important să analizăm comportarea funcției raționale: 1) în jurul punctelor în care se anulează numitorul** $Q(x)$ şi **2)** pentru valori mari ale lui $x$, **atât pozitive cât şi negative.** Dacă $P$ şi $Q$ n-au factori comuni, atunci zerourile lui $Q$ corespund la asimptote verticale pentru graficul lui $f$. Existența asimptotelor orizontale depinde de comportarea funcției $f$ pentru valori mari ale lui $x$ (pozitive sau negative).

Exemple. 1) **Funcția $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x}$ are graficul din Fig.47. În acest caz graficul este o curbă discontinuă, formată din două ramuri care „coboară"; graficul este simetric în raport cu $O$, deoarece funcția este impară $f(-x)=-f(x), \forall x\neq 0$.**

**Dreapta $x=0$ este asimptotă verticală, iar $y=0$ este asimptotă orizontală la $\pm\infty$.**

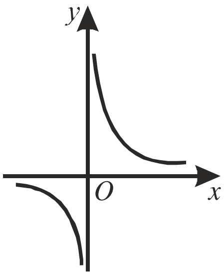


Fig. 47

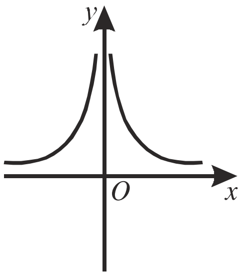


Fig. 48

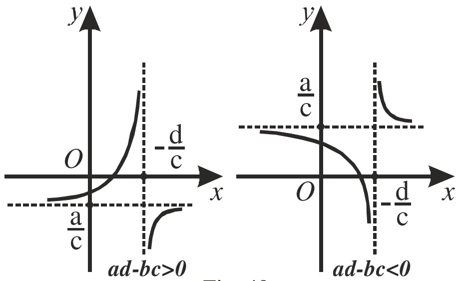


Fig. 49

2) **Funcția $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ are graficul din Fig.48.**

**Graficul este discontinuu, format din două ramuri, una „urcă", alta „coboară". Graficul are $x=0$ ca asimptotă verticală, iar $y=0$ ca asimptotă orizontală la $\pm\infty$. Graficul este simetric în raport cu axa $Oy$ deoarece funcția este pară, $f(-x)=f(x), \forall x\neq 0$.**

3) **Funcția $f:\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}\to\mathbb{R}-\left\{\dfrac{a}{c}\right\}, f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}, a,b,c,d\in\mathbb{R}, c\neq 0, ad-bc\neq 0$ se numeşte funcția omografică al cărui grafic este redat în Fig.49 (după semnul lui $ad-bc$).**

## 3. Funcția radical de ordin $n$, $f(x)=\sqrt[n]{x}$, $n=2,3$

Funcția $f:[0,\infty)\to[0,\infty), f(x)=\sqrt{x}$, se numeşte **funcția radical de ordin doi**, având graficul din Fig.50.

Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x}$, se numește **funcția radical de ordin trei**, având graficul din Fig.51.
Funcția radical de ordin $n$ este bijectivă, inversa ei fiind funcția putere cu exponent natural doi și respectiv trei ( $f^{-1}:[0,\infty)\to[0,\infty), f^{-1}(x)=x^2$ și respectiv $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f^{-1}(x)=x^3$ ).

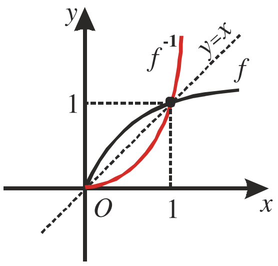


Fig. 50

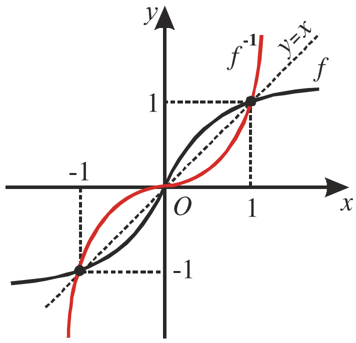


Fig. 51

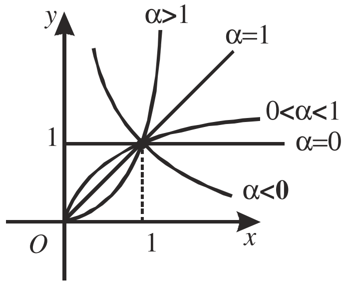


Fig. 52

## 4. Funcția putere $f(x)=x^{\alpha}, \alpha\in\mathbb{R}$

Funcția putere are forma $f(x)=x^{\alpha}$, unde $\alpha\in\mathbb{R}$. Vom preciza domeniul maxim de definiție după diferite valori ale lui $\alpha$.
1) Dacă $\alpha=0$, atunci $f(x)=1, \forall x\in\mathbb{R}$ adică funcția constantă.
2) Dacă $\alpha=n\in\mathbb{N}^*, f(x)=x^n, \forall x\in\mathbb{R}$, caz particular de funcție polinomială.
3) Dacă $\alpha=-n, n\in\mathbb{N}^*, f(x)=\dfrac{1}{x^n}, \forall x\neq 0$, caz particular de funcție rațională.
4) Dacă $\alpha>0$, atunci $f:[0,\infty)\to[0,\infty), f(x)=x^{\alpha}$.
În caz particular dacă $\alpha=\dfrac{1}{n}, n\in\mathbb{N}^*, n$ par se obține funcția radical de ordin par.
Pentru $\alpha=\dfrac{m}{n}, m,n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$, atunci $f(x)=x^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{x^m}$.
5) Dacă $\alpha\neq 0$, atunci $f:(0,\infty)\to(0,\infty), f(x)=x^{\alpha}$.
Graficul funcției pentru $f(x)=x^{\alpha}, x\geq 0$ este redat în Fig.52, pentru diferitele valori ale lui $\alpha$.

## 5. Funcția exponențială $f(x)=a^x, a\neq 1, a>0$

Funcția $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$, $f(x)=a^x, a>0, a\neq 1$ se numeşte **funcția exponențială de bază** $a$.

Dacă $a\in(0,1)$, atunci $f$ este strict descrescătoare, iar pentru $a>1$, $f$ este strict crescătoare. Graficul este format dintr-o singură ramură cotinuă, convexă, situată deasupra axei $Ox$ $\left(f(x)>0,\forall x\right)$ este redat în Fig.53. Dreapta $y=0$ (axa $Ox$) este asimptotă orizontală. Funcția este bijectivă, deci inversabilă. Inversa ei este funcția logaritmică.

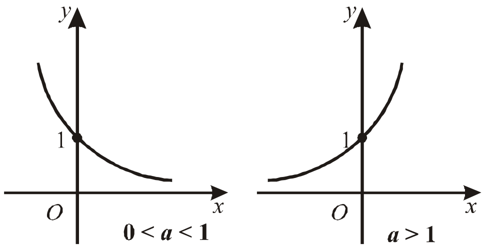



Fig. 53

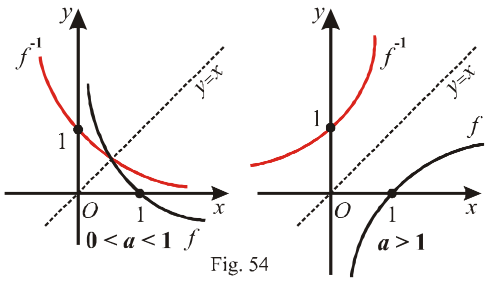



Fig. 54

## 6. Funcția logaritmică $f(x)=\log_a x, 0<a, a\neq 1$

Funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_a x, a>0, a\neq 1$ se numeşte **funcția logaritmică de bază** $a$**.**

Dacă $a\in(0,1)$, atunci $f$ este strict descrescătoare, iar pentru $a>1$, $f$ este strict crescătoare.

Graficul este format dintr-o singură ramură continuă, convexă dacă $a\in(0,1)$ şi concavă pentru $a>1$. Funcția este bijectivă şi deci inversabilă. Inversa este funcția exponențială de aceeaşi bază. Graficul este redat în Fig.54.

| 7. Funcțiile trigonometrice | directe | **sin** | **cos** | **tg** | **ctg** |
|---|---|---|---|---|---|
| | inverse | **arcsin** | **arccos** | **arctg** | **arcctg** |

### 7.1. Funcțiile sin şi arcsin

Funcția $f:\mathbb{R}\to[-1,1]$, $f(x)=\sin x, x\in\mathbb{R}$ se numeşte **funcția sinus** (notată $\sin:\mathbb{R}\to[-1,1]$), care este o funcție mărginită $\left(-1\leq f(x)\leq 1\right)$, impară ($f(-x)=-f(x)$, având graficul simetric în raport cu $O$), periodică (de perioadă principală $T_0=2\pi$).

Restricția funcției la $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, pe care o notăm la fel, $f:\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ este bijectivă și deci inversabilă. Inversa ei este funcția arcsinus (notată $\arcsin:[-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$).

Această funcție este impară $(\arcsin(-x) = -\arcsin x)$. Au loc egalitățile:

$\sin(\arcsin x) = x, \forall x \in [-1,1], \arcsin(\sin x) = x, \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$

Graficele funcțiilor discutate mai sus sunt prezentate în Fig.55.

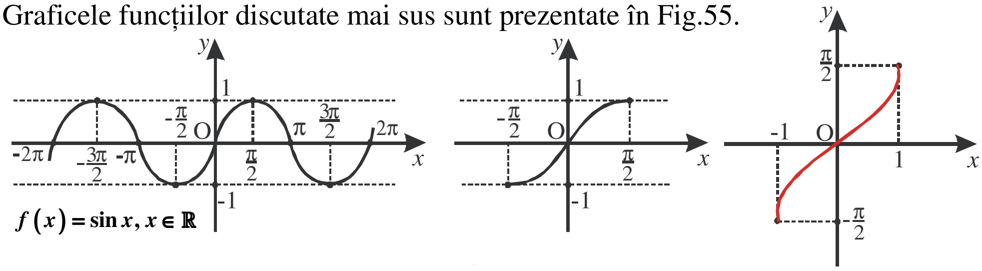



Fig. 55

## 7.2. Funcțiile cos și arccos

Funcția $f:\mathbb{R} \to [-1,1], f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}$ se numește **funcția cosinus** (notată $\cos:\mathbb{R} \to [-1,1]$), care este o funcție mărginită $(-1 \le f(x) \le 1)$, pară ($f(-x) = f(x)$ - având graficul simetric în raport cu axa $Oy$), periodică (de perioadă principală $T_0 = 2\pi$).

Restricția funcției la $[0,\pi]$, pe care o notăm la fel, $f:[0,\pi] \to [-1,1]$ este bijectivă și deci inversabilă. Inversa ei este funcția arccosinus (notată $\arccos:[-1,1] \to [0,\pi]$).

Avem $\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \forall x \in [-1,1]$ ceea ce arată că funcția arccosinus nu este nici pară, nici impară.

Au loc egalitățile: $\cos(\arccos x) = x, \forall x \in [-1,1], \arccos(\cos x) = x, \forall x \in [0,\pi]$.

Legătura între funcțiile arcsin și arccos este dată de relația

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \forall x \in [-1,1]$.

Graficele funcțiilor prezentate mai sus sunt redate în Fig.56.

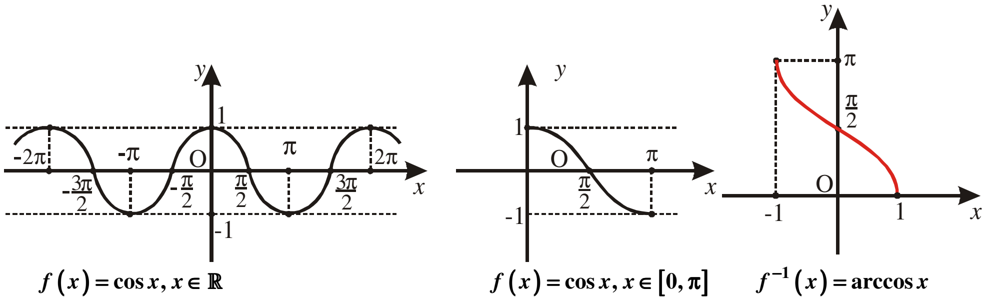



Fig. 56

## 7.3. Funcțiile tg și arctg

Funcția $f:\mathbb{R}-\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}=D\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$ se numeşte **funcția tangentă** (notată tg). Este o funcție nemărginită, impară $(f(-x)=-f(x))$, periodică (de perioadă principală $T_0=\pi$). Restricția funcției $f$ la $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, o notăm tot cu $f$, este bijectivă şi deci inversabilă. Inversa ei este funcția arctangentă (notată $\operatorname{arctg}:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$). Funcția arctg este impară $(\operatorname{arctg}(-x)=-\operatorname{arctg} x)$, mărginită $\left(-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg} x<\frac{\pi}{2}\right)$. Au loc egalitățile: $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x, \forall x\in\mathbb{R}$, $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)=x, \forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Graficele funcțiilor discutate aici sunt redate în Fig.57.

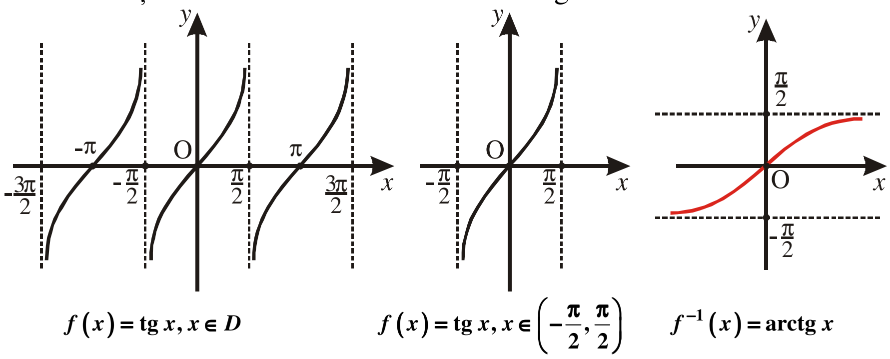



Fig. 57

## 7.4. Funcțiile ctg și arcctg

Funcția $f:\mathbb{R}-\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}=D\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{ctg} x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ se numește **funcția cotangentă** (notată ctg). Este o funcție periodică (de perioadă principală $T_0=\pi$), nemărginită.

Restricția funcției $f$ la $(0,\pi)$ o notăm la fel, $\operatorname{ctg}:(0,\pi)\to\mathbb{R}$ este bijectivă și deci inversabilă. Inversa ei este funcția arccotangentă (notată $\operatorname{arcctg}:\mathbb{R}\to(0,\pi)$).

Au loc relațiile: $\operatorname{arcctg}(-x)=\pi-\operatorname{arcctg} x, \forall x\in\mathbb{R}$, $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)=x, \forall x\in\mathbb{R}$
$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)=x, \forall x\in(0,\pi)$.

Legătura între funcțiile arctg și arcctg este dată de relația $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x=\dfrac{\pi}{2}, x\in\mathbb{R}$.

Graficele funcțiilor discutate aici sunt prezentate în Fig.58.

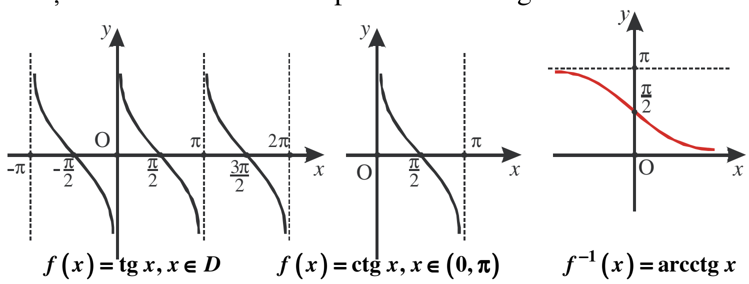
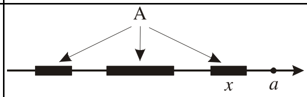
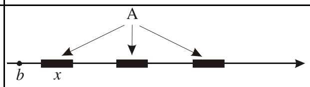
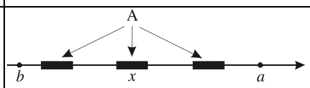
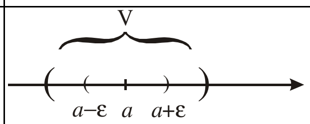
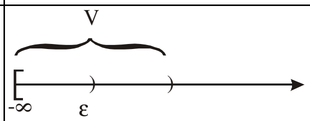
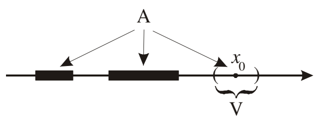



Fig. 58

## REZUMATUL CAPITOLULUI

| **Noțiuni** | **Definiție. Caracterizare** | **Reprezentare** |
|---|---|---|
| **Numărul real** | • **fracție zecimală periodică ( număr rațional) sau**<br>• **fracție zecimală neperiodică(număr irațional)** | $\pm x_0, x_1x_2x_3..., x_0 \in \mathbb{N}, x_1, x_2, ... \in \{0,1,...,9\}$<br>$Q$ = **numere raționale**<br>$\mathbb{R} - Q$ = **numere iraționale** |
| **Mulțimea numerelor reale** $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ | |
| **Dreapta reală incheiată** $\overline{\mathbb{R}}$ | $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$<br>$-\infty < x < \infty, \forall x \in \mathbb{R}$ | |
| $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ $A$ **este majorată** | **dacă există** $a \in \mathbb{R}$ **astfel încât** $x \leq a, \forall x \in A$ |  |
| $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \varnothing, A$ **este minorată** | **dacă există** $b \in \mathbb{R}$ **astfel încât** $x \geq b, \forall x \in A$ |  |
| $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ **este mărginită** | **dacă există** $a, b \in \mathbb{R}$ **astfel încât** $b \leq x \leq a, \forall x \in A$ |  |
| $V$ **este vecinătate a lui** $a \in \mathbb{R}$ | **dacă există** $\varepsilon > 0$ **astfel încât** $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset V$ |  |
| $V$ **este vecinătate a lui** $-\infty$ | **dacă există** $\varepsilon > 0$ **astfel încât** $[-\infty, \varepsilon) \subset V$ |  |
| $V$ **este vecinătate a lui** $+\infty$ | **dacă există** $\varepsilon > 0$ **astfel încât** $(\varepsilon, \infty] \subset V$ |  |
| $a \in \mathbb{R}$ **este punct de acumulare pentru mulțimea** $A \subseteq \mathbb{R}$ **,** | **dacă există** $p > 0$ **astfel încât** $(a - p, a)$ **sau** $(a, a + p)$ **sau** $(a - p, a) \cup (a, a + p) \subseteq A$ | |
| $x_0 \in A$ **este punct izolat al mulțimii A** | **dacă există o vecinătate** $V$ **a lui** $x_0$ **astfel încât** $V \cap A = \{x_0\}$ |  |

## Probleme propuse

### Mulțimea numerelor reale

**1.** **Să se determine minoranții, majoranții, min $A$, max $A$ (dacă există) pentru următoarele submulțimi $A$ ale dreptei reale:**
1) $A=\{-3,-1,2,3,6\}$ ; 2) $A=\{-4\}\cup\{2,3\}$ ; 3) $A=(0,1)\cup(2,5]$ ; 4) $A=[-1,0)\cup\{5\}$ ;
5) $A=[-2,3)\cup[6,9)$ ; 6) $A=[-4,6)\cup(7,11]$ ; 7) $A=[-9,5)\cup\{6\}$ ; 8) $A=(-\infty,1]\cup(2,\infty)$ ;
9) $A=[-6,3)\cup(10,\infty)$ ; 10) $A=(-\infty,0]\cup[2,3]$.

**2.** **Să se determine inf $A$ și sup $A$ (dacă există) pentru următoarele submulțimi $A$ din $\mathbb{R}$ :**
1) $A=\{-10,-6,0,1,9\}$ ; 2) $A=\{-5\}\cup(1,3]$ ; 3) $A=(-2,1)$ ; 4) $A=(-\infty,1)$ ; 5) $A=[0,\infty)$ ;
6) $A=(-1,1)\cup(2,3)$ ; 7) $A=(-5,-3)\cup[0,1]\cup[2,10]$ ; 8) $A=[-3,1]\cup(5,\infty)$ ;
9) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x^2-9\le 0\right\}$ ; 10) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\dfrac{2x+1}{x^2+1}>1\right\}$ ; 11) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,|x+1|-x\ge 1\right\}$.

**3.** **Să se rezolve: 1)ecuațiile: a) $|x|+x^3=0$ ; b) $|2x-3|=x+1$ ; c) $|x|+|x+1|=1$ ;**
d) $\left|x^2-9\right|+\left|x^2-4\right|=5$.

2) inecuațiile: a) a) $|x+5|>11$ ; b) $|2x-5|<3$ ; c) $|1-2x|>3-x$ ; d) $\left|\dfrac{x+2}{2x-3}\right|<3$ ; e) $|x|+|x-1|<5$.

3) ecuațiile: a) $\left[\dfrac{x-1}{2}\right]=\dfrac{x+3}{3}$ ; b) $\left[\dfrac{x+4}{3}\right]=\dfrac{2x-1}{5}$ ; c) $\left[\dfrac{2x+3}{4}\right]=\dfrac{x-4}{3}$.

**4.** **Fie $a,b\in\mathbb{R}$. Definim**
$$\min(a,b)=\begin{cases}a,\text{ dacă } a\le b\\ b,\text{ dacă } b<a\end{cases},\ \max(a,b)=\begin{cases}a,\text{ dacă } a\ge b\\ b,\text{ dacă } b>a\end{cases}.$$ **Arătați că:**
$$\min(a,b)=\frac{1}{2}(a+b-|a-b|),\ \max(a,b)=\frac{1}{2}(a+b+|a-b|),\ \min(a,b)+\max(a,b)=a+b.$$

**5.** **Să se arate că următoarele funcții sunt mărginite pe mulțimile de definiție:**
1) $f:[-1,5]\to\mathbb{R}, f(x)=-3x+2$ ; 2) $f:[-2,4]\to\mathbb{R}, f(x)=x^3$ ;
3) $f:[-1,3]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}-3x, x\in[-1,0]\\ 2x+5, x\in(0,3]\end{cases}$ ; 4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ ;
5) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{|x|}{|x|+1}$.

**6.** **Determinați $\inf\limits_{x\in E} f(x), \sup\limits_{x\in E} f(x)$ pentru $f:E\to\mathbb{R}$ în cazurile:**
1) $f(x)=3x+2, E=[-1,2]$ ; 2) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}, E=[0,3]$ ; 3) $f(x)=x^2-2x, x\in[-1,3]$ ;
4) $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}, x\in[0,1]$ ; 5) $f(x)=\sin x+1, x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ ; 6) $f(x)=3^{-x}-1, x\in[-1,1]$.

**7.** 1) Arătați că: a) $[-1,1]\in\vartheta(0)$ ; b) $[-1,1]\notin\vartheta(-1), [-1,1]\notin\vartheta(1)$ .

**2) Să se determine mulțimile punctelor de acumulare și a punctelor izolate în cazurile:**

**a)** $\{-1\}\cup(0,1)$ ; **b)** $\{-3\}\cup[-1,0)\cup(2,3)$ ; **c)** $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ ; **d)** $(-\infty,-2)\cup\{0\}\cup(2,\infty)$ ;

**e)** $\left\{\frac{1}{n}\middle| n\in N^*\right\}$.

**8.** **(Inegalitățile clasice remarcabile) 1) Inegalitatea lui Bernoulli. Dacă** $a>-1$ **și** $n\in\mathbb{N}^*$, **atunci** $(1+a)^n\ge 1+na$ .

**2) a) Dacă** $a_1,a_2,...,a_n\ge -1$ **de același semn, atunci** $(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)\ge 1+a_1+...+a_n$ .

**b) Dacă** $a_i>0$ **și** $a_1a_2...a_n=1$ , **atunci** $a_1+a_2+...+a_n\ge n, \forall n\in\mathbb{N}^*$ .

**3) Inegalitatea mediilor. Fie** $a_i>0, i=\overline{1,n}$ . **Notăm** $M_g=\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$ , $M_a=\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$ ,

$M_h=\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}$ , **numite media geometrică, aritmetică și respectiv armonică a numerelor** $a_1,a_2,...,a_n$ . **Atunci:** $M_h\le M_g\le M_a$ , **cu egalitate dacă** $a_1=a_2=...=a_n$ .

**4) Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz. Pentru orice numere reale** $a_i,b_i, i=\overline{1,n}$ **are loc inegalitatea:** $\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\le\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)$.

**5) Inegalitatea lui Minkovski. Să se arate că oricare ar fi numerele reale** $a_i,b_i, i=\overline{1,n}$ **are loc inegalitatea:** $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$ .

**6) Inegalitatea lui Cebâșev. a) Dacă** $a_1\ge a_2\ge...\ge a_n$ , $b_1\ge b_2\ge...\ge b_n$ , $a_i,b_i\in\mathbb{R}$ , **atunci** $n\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)\ge\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)$.

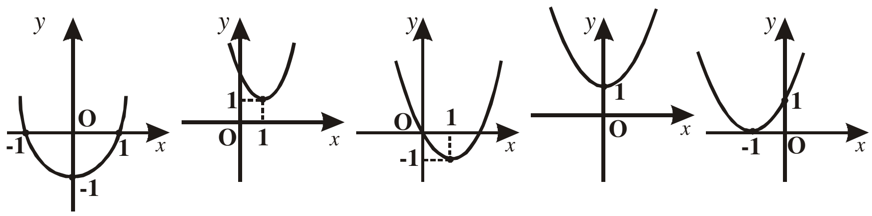
**b) Dacă** $(a_1\le a_2\le...\le a_n, b_1\ge b_2\ge...\ge b_n)$ **sau** $(a_1\ge a_2\ge...\ge a_n, b_1\le b_2\le...\le b_n)$ , **atunci** $n\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)\le\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)$.

## Funcții elementare

**1. Asociați fiecărei funcții de mai jos graficul care-i corespunde:**

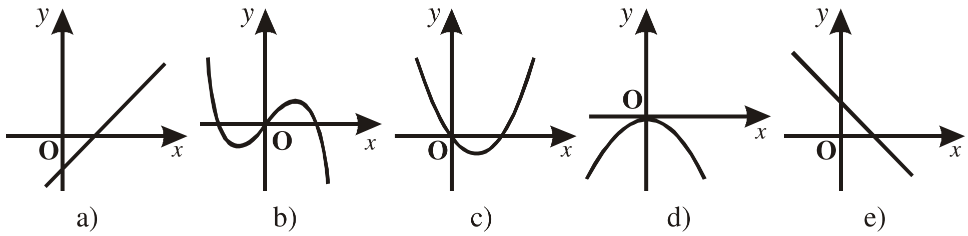
**I. 1)** $f(x)=x^2+1$ ; **2)** $f(x)=(x+1)^2$ ; **3)** $f(x)=x^2-1$ ; **4)** $f(x)=(x-1)^2+1$ ;

**5)** $f(x)=(x-1)^2-1$ .



a) b) c) d) e)

**II.** 1) $f(x)=-x^2$ ; 2) $f(x)=x-1$ ; 3) $f(x)=4x-x^3$ ; 4) $f(x)=x^2-5x$ ; 5) $f(x)=-x+1$ .




**2. Plecând de la graficul funcției $f(x)=x^3$ , trasați graficele următoarelor funcții:**

1) $f(x)=-x^3$ ; 2) $f(x)=x^3+1$ ; 3) $f(x)=x^3-1$ ; 4) $f(x)=(x+1)^3$ ; 5) $f(x)=(x-1)^3$ .

**3. Trasați graficele funcțiilor de mai jos:**

**I.** 1) $f(x)=(x+1)(x-2)$ ; 2) $f(x)=-3(x-1)(x-2)$ ; 3) $f(x)=(x-2)^2$ ; 4) $f(x)=-2(x-1)^2$ ;

5) $f(x)=x^2-3x$ ; 6) $f(x)=-x^2+4$ ; 7) $f(x)=\max(x,x^2)$ ; 8) $f(x)=\min(1,x^2)$ ;

9) $f(x)=\max(2x+1,x^2+1)$ ; 10) $f(x)=\min(x^2,-2x^2+1)$ .

**II.** 1) $f(x)=x(x-1)(x-2)$ ; 2) $f(x)=x^2(x-2)$ ; 3) $f(x)=-(x+3)(x+1)(x-1)$ ;

4) $f(x)=-x(x+2)^2$ ; 5) $f(x)=(x-1)(x+3)^2$ ; 6) $f(x)=-(x+2)^2(x-2)$ ; 7) $f(x)=(x-1)^3$ ;

8) $f(x)=(1-x)^3$ ; 9) $f(x)=\max(x^3,x)$ ; 10) $f(x)=\min(x^2,x^4)$ .

**4. Determinați funcția $f(x)=x^2+bx+c$ , dacă parabola asociată (pe rând):**

1) taie axa $Ox$ în punctele $(2,0)$ și $(3,0)$ ;

2) taie axa $Ox$ în punctele $(-3,0),(-1,0)$ ;

3) conține punctele $(2,1),(-3,0)$ .

**5. Deteminați punctele de intersecție dintre următoarele drepte și curbe:**

1) $y=2, y=x^2-3x+4$ ; 2) $y=2x-1, y=x^2$ ; 3) $y+3=0, y=2x^2+5x-6$ ;

4) $y=2x+3, y=x^2+3x-9$ .

**6. Determinați punctele de intersecție ale curbelor:**

1) $y=x^2-2x-6, y=-2x^2+x+12$ ; 2) $y=x^2-3x-7, y=x^2+x+1$ .

**7. Arătați că dreapta $y=-3x+2$ este tangentă curbei $y=(4x-3)(x-2)$ și determinați punctul de tangență.**

**8. Pentru curbele $y=2x^2+5x, y=x^2+4x+12, y=3x^2+4x-6$ precizați punctul comun.**

**9. Precizați domeniile de definiție ale funcțiilor:**

1) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ ; 2) $f(x)=\dfrac{x}{x(x+1)}$ ; 3) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x}$ ; 4) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$ ;

5) $f(x)=\dfrac{x^3-x+1}{x^2-5x+6}$ ; 6) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^3-2x^2+x}$ .

**10. Trasați graficele următoarelor funcții:**

1) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ ; 2) $f(x)=\dfrac{1}{|x-1|}$ ; 3) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ ; 4) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^3}$ ; 5) $f(x)=\dfrac{1}{x^4}$ ;

6) $f(x)=\frac{1}{(x+2)}$; 7) $f(x)=\frac{1}{(x-3)^4}$.

**11. Să se determine punctele de extrem ale funcțiilor $f:D\to\mathbb{R}$ (precizați $\operatorname{Im} f$):**

1) $f(x)=x^2-3x+2$; 2) $f(x)=|x-1|$; 3) $f(x)=|x-1|+|x-2|$; 4) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$;

5) $f(x)=\frac{x+1}{x^2-x+1}$; 6) $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

**12. Arătați că următoarele funcții sunt mărginite:**

1) $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x+1}$; 2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^2+1}$; 3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$;

4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2|x|+3}{|x|+1}$.

**13. Să se determine semnul funcției $f$ în cazurile:**

1) $f(x)=1-3x$; 2) $f(x)=-x^2+3x$; 3) $f(x)=x^2-9$; 4) $f(x)=\frac{3}{2x+1}$; 5) $f(x)=\frac{-1}{1-x}$;

6) $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$; 7) $f(x)=\frac{x-1}{x+3}$; 8) $f(x)=\frac{1-x}{x^2-4}$.

**14. Dacă $f_i:\mathbb{R}-\{0,1\}\to\mathbb{R}-\{0,1\}, i=1,2,3$ sunt definite prin $f_1(x)=x, f_2(x)=\frac{x-1}{x}$, $f_3(x)=\frac{1}{1-x}$ și $A=\{f_1,f_2,f_3\}$, atunci $f_i\circ f_j\in A, \forall\, i,j=1,2,3$.**

**15. Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea $3f(x)+2f(-x)=\frac{x}{x^2+1}$ este impară și mărginită, iar funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea $2g(x)+g(-x)=\frac{x^2}{x^2+1}$ este pară și mărginită.**

**16. Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^2+3}, g(x)=2x$. Să se calculeze $f(g(-1)), g(f(-2)), f(g(3))$.**

**17. Fie $f:\mathbb{R}-\{-1,0\}\to\mathbb{R}-\{-1,0\}, f(x)=\frac{-1}{x+1}$. Calculați $f\circ f$.**

**18. Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2x+1, x\in\mathbb{Q}\\ \frac{3x}{1-2x}, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$ este bijectivă. Determinați $f^{-1}$.**

**19. Să se determine domeniul maxim de definiție al funcției $f:D\to\mathbb{R}$, în cazurile:**

1) $f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{2-x}$; 2) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$; 3) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3-x}}$; 4) $f(x)=\sqrt[3]{x+1}+\frac{1}{x+1}$;

5) $f(x)=\frac{1}{x-1}+\sqrt{|x|+1}$; 6) $f(x)=\sqrt{|x|-2}+\frac{1}{x^2-9}$; 7) $f(x)=\sqrt{\{x\}-2}$;

8) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-2x}}{(x+1)(x-3)}$; 9) $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{3-x}$; 10) $f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{x-2}$.

**20. Să se calculeze valorile funcției și preimaginile în punctele indicate:**

1) $f(x)=\begin{cases}3x+1, x\le -1\\ \frac{x}{2x+3}, x>-1\end{cases}, f(-2), f(-1), f(0), f^{-1}(\{-2\}), f^{-1}(\{3\})$.

2) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1}, x\ge 0\\ \sqrt[3]{\dfrac{x}{x-3}}, x<0\end{cases}$, $f(-3), f(0), f(3), f^{-1}(\{-1\}), f^{-1}(\{1\})$.

**21. Să se determine mulțimea valorilor funcției $f:D\to\mathbb{R}$, în cazurile:**

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+1$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$; 3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+1}$; 4) $f:(-\infty,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{1-x}$; 5) $f:[1,3]\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x+1}$; 6) $f:[-2,3]\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{1-x}$.

**22. Precizați monotonia funcției pe intervalul indicat, în cazurile:**

1) $f(x)=x^2+1, x\in[0,\infty)$; 2) $f(x)=x^2-4x+3, x\in(-\infty,2]$; 3) $f(x)=x^3-3x, x\in(-1,1)$;

4) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}, x<1$; 5) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}, x\ge 1$; 6) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x}, x\ge 2$; 7) $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2+1}, x>0$;

8) $f(x)=\dfrac{3}{x+2}+\dfrac{3}{4-x}, x\in(1,3)$.

**23. Determinați intervalele de monotonie ale funcției $f:D\to\mathbb{R}, D$ fiind domeniul maxim de definiție, în cazurile:**

1) $f(x)=x^2-3x+2$; 2) $f(x)=-x^2+4x-4$; 3) $f(x)=|x-1|-3|x+2|$; 4) $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$;

5) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$; 6) $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$; 7) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+2}$; 8) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$;

9) $f(x)=3\sqrt{x}+2x$; 10) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-3x$.

**24. Să se determine cea mai mică și cea mai mare valoare a funcției $f$, în cazurile:**

1) $f(x)=3x+1, x\in[-2,3]$; 2) $f(x)=1-2x, x\in[-1,1]$; 3) $f(x)=x+|x|, x\in[-3,3]$;

4) $f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}, x\in[0,1]$; 5) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}, x\in\mathbb{R}$; 6) $f(x)=\sqrt{x+1}, x\in[0,3]$;

7) $f(x)=\sqrt{1-x}, x\in[-2,0]$; 8) $f(x)=x^{\frac{1}{5}}, x\in[1,32]$; 9) $f(x)=x^{-\frac{1}{3}}, x\in[1,27]$.

**25. Explicați de ce funcțiile: 1) $f(x)=[x]+x$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$; 3) $f(x)=\sqrt[3]{x}+1$, nu au puncte de extrem pe domeniul maxim de definiție.**

**26. Stabiliți paritatea funcțiilor următoare:**

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+x$; 2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left|x^3+x\right|$; 3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+|x|$;

4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$; 5) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$; 6) $f:(-\infty,-3]\cup[3,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x(x+3)}+\sqrt{x(x-3)}$.

**27. Arătați că dreapta $x=1$ este axă de simetrie pentru graficul lui $f$, în cazurile:**

1) $f(x)=x^2-2x+1$; 2) $f(x)=|x-1|$; 3) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x^2-2x+2}$; 4) $f(x)=\sqrt{|x-1|}$.

**28. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$. Să se arate că $f$ este impară și mărginită și $\operatorname{Im} f=(-1,1)$.**

**29. Precizați care din funcțiile de mai jos este bijectivă și determinați inversele acestor funcții, în cazurile:**

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x-1$ ; 2) $f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}-\{3\}, f(x)=\frac{3x-1}{x-2}$ ;

3) $f:[0,\infty)\to(0,1], f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ ; 4) $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x+1}$ ;

5) $f:(-\infty,1]\to[0,\infty), f(x)=\sqrt{1-x}$ ; 6) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{1-x}$ ;

7) $f:[-3,\infty)\to(-\infty,1], f(x)=1-\sqrt{x+3}$ ; 8) $f:(-\infty,1]\to[1,\infty), f(x)=\sqrt{1-x}+1$ .

**30. Să se rezolve:**

**a) ecuațiile:** 1) $|x|+|x-1|=1$ ; 2) $|x-1|-3|x+1|=6$ ; 3) $\sqrt{1+3x}=x-1$ ; 4) $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6$ ;

5) $\sqrt{x^2-2x+1}=x^2-3$ ; 6) $\sqrt{2x^2+5x+2}-\sqrt{(x+2)(x-1)}=\sqrt{3(x+2)}$ ;

7) $\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt[3]{5x-12}=1$ ; 8) $x+2\sqrt{x}-8=0$ ;

**b) inecuațiile:** 1) $\frac{1-3x}{x}<0$ ; 2) $(1-3x)(1-x)(2-x)>0$ ; 3) $\frac{x}{x+1}\geq 3$ ; 4) $\frac{x(x-1)}{x+1}-x<2$ ;

5) $(x+2)\sqrt{(4-x)(5-x)}\geq 0$ ; 6) $\sqrt{2+x}<1$ ; 7) $\sqrt[3]{x+3}\geq -2$ ; 8) $\sqrt{x+5}+x<1$ .

**31. Să se precizeze domeniile maxime de definiție pentru următoarele funcții:**

1) $f(x)=3^{\frac{1-x}{\sqrt{x+1}}}$ ; 2) $f(x)=\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}}$ ; 3) $f(x)=\frac{1}{x-2}+\log_3(2x+1)$ ;

4) $f(x)=\frac{1}{x-1}-\lg(1-x)$ ; 5) $f(x)=\sqrt{x}+\log_{\frac{1}{3}}(x^2-1)$ ; 6) $f(x)=\sqrt{x+1}-2\ln(4-x^2)$ ;

7) $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(\log_2(x+3))$ ; 8) $f(x)=\ln(\lg(x-1))$ ; 9) $f(x)=\log_{x-1}(4-x^2)$ ;

10) $f(x)=\sqrt{\ln(x-1)}$ .

**32. a) Să se compare numerele:** 1) $(0,1)^{\frac{4}{3}}$ cu $(0,1)^2$ ; 2) $3^{\sqrt{3}}$ cu $3^{\sqrt{2}}$ ; 3) $\lg 4,1$ cu $\lg\sqrt{17}$ .

**b) Să se ordoneze crescător numerele:** 1) $(0,1)^3, (0,1)^{-2}, 1$ ; 2) $3^{\frac{1}{2}}, 3^0, 3^2$ ; 3) $2^{\sqrt{2}}, 2^{1,4}, 1$ ;

4) $\log_3 4, \frac{3}{2}, \log_2 3$ .

**33. Să se traseze graficul funcțiilor $f:D\to\mathbb{R}$, unde $D$ este domeniul maxim de definiție:**

1) $f(x)=3^{x+1}$ ; 2) $f(x)=3^x+1$ ; 3) $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ ; 4) $f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ ;

5) $f(x)=\log_{\frac{1}{5}}(1-x)$ ; 6) $f(x)=\log_3|x-1|$ .

**34. Stabiliți paritatea funcțiilor de mai jos**

1) $f(x)=2^{x^2}$ ; 2) $f(x)=2^{x^3}$ ; 3) $f(x)=\frac{2^x+2^{-x}}{2}$ ; 4) $f(x)=\log_2\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)$ ;

5) $f(x)=\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$ ; 6) $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$ .

**35. Arătați că $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3^x+\left(\frac{1}{3}\right)^x$ este pară și determinați intervalele de monotonie.**

**Rezolvați ecuația $3^x+\left(\frac{1}{3}\right)^x=\frac{10}{3}$.**

**36.** **Determinați monotonia funcțiilor de mai jos, $f:D\to\mathbb{R}$, unde $D$ este domeniul maxim de definiție:**

**1)** $f(x)=x+3^x$ ; **2)** $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-2x$ ; **3)** $f(x)=3^x+5^x$ ; **4)** $f(x)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ;

**5)** $f(x)=\lg(x+1)$ ; **6)** $f(x)=\ln(3-x)$ ; **7)** $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-4\right)$ ; **8)** $f(x)=\log_3\left(x^2-9\right)$.

**37.** **Să se determine intervalele de monotonie pentru fiecare din funcțiile:**

**1)** $f(x)=2^{x+1}$ ; **2)** $f(x)=2^{(x-1)^2}$ ; **3)** $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x+3}$ ; **4)** $f(x)=\lg\left(x^2-3x+2\right)$ ;

**5)** $f(x)=\lg_{\frac{1}{3}}(1-x)$ ; **6)** $f(x)=\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2-4x\right)$.

**38.** **Arătați că următoarele funcții sunt inversabile și calculați inversa pentru fiecare din ele:**

**1)** $f:\mathbb{R}\to(0,\infty), f(x)=2^x+4^x$ ; **2)** $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\log_2(x+1)$ ; **3)** $f:\mathbb{R}\to(1,\infty)$, $f(x)=10^x+1$ ; **4)** $f:\left(\frac{1}{2},\infty\right)\to\mathbb{R}, f(x)=\log_3(2x-1)$ ; **5)** $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\lg^3 x+1$ ;

**6)** $f:\mathbb{R}\to(1,\infty), f(x)=\sqrt{2^x+1}$.

**39.** **Să se determine semnul funcției $f:D\to\mathbb{R}, D$ fiind domeniul maxim de definiție.**

**1)** $f(x)=3^x-1$ ; **2)** $f(x)=4^x-3\cdot2^x+2$ ; **3)** $f(x)=\lg x-2$ ; **4)** $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x+1)$ ;

**5)** $f(x)=\lg\left(x^2-8\right)$ ; **6)** $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-4x+5\right)$ ; **7)** $f(x)=\lg\frac{x}{x+1}$ ; **8)** $f(x)=\ln\left(x^2-3x+2\right)$.

**40.** **Să se determine mulțimea valorilor funcției $f$ pe intervalul considerat, în cazurile:**

**1)** $f(x)=3^x+1, x\in[-1,1]$ ; **2)** $f(x)=2^{1-x}$ ; **3)** $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}, x\in[-2,1]$ ;

**4)** $f(x)=\log_3(2x+1), x\in[1,4]$ ; **5)** $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(3x-1), x\in[1,3]$ ; **6)** $f(x)=\log_{\frac{1}{9}}(1-2x)$, $x\in[-4,0]$ ; **7)** $f(x)=[\log_3 x], x\in\left[\frac{1}{9},81\right]$ ; **8)** $f(x)=\lg^2 x-3\lg x+2, x\in[1,100]$.

**41.** **Să se rezolve: a) ecuațiile: 1)** $\left(3^x-\frac{1}{3}\right)\left(2^x-16\right)=0$ ; **2)** $10^x+5^x-5\cdot2^x-5=0$ ;

**3)** $\left(7+4\sqrt{3}\right)^x+\left(7-4\sqrt{3}\right)^x=4$ ; **4)** $4\cdot2^{2x}-6^x=18\cdot3^{2x}$ ; **5)** $1+3^{\frac{x}{2}}=2^x$ ;

**6)** $\log_3(x-2)+\log_3 x=\log_3 8$ ; **7)** $\lg^2 x-4\lg x+3=0$ ; **8)** $\log_3 x-\log_x 3=\frac{3}{2}$ ;

**9)** $3\log_x 16-4\log_{16} x=2\log_2 x$ ; **10)** $\left(\sqrt{x}\right)^{\lg x}=\sqrt{100x}$ ; **11)** $\log_2\left(4^x-1\right)\log_2\left(4^{x+1}-4\right)=-1$.

**b) inecuațiile: 1)** $2^{4x}<16$ ; **2)** $3^x\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}\le\left(\frac{1}{27}\right)^2$ ; **3)** $\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6(x-1)}{x+1}}\le\left(\sqrt{2}-1\right)^{-x}$ ;

**4)** $2^x-2^{x-4}-15<0$ ; **5)** $25^{-x}+5^{-x+1}\ge50$ ; **6)** $4^x-2\cdot5^{2x}<10^x$ ; **7)** $\log_3(6x-2)\le0$ ;

**8)** $\log_{\frac{1}{3}}(3x+2)>0$ ; **9)** $(x-3)\log_{\frac{1}{3}}(x+8)\ge0$ ; **10)** $\log_{\frac{1}{3}}(x+4)<\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+x-2\right)$ ;

11) $x+\log_2\left(9-2^x\right)<3$ ; 12) $\log_3^2 x-6\log_3 x+5\geq 0$ ; 13) $5^{\log_5^2 x}+x^{\log_5 x}<10$ ;

14) $\log_x\left(\frac{2x-5}{2x-4}\right)<0$ .

**42.** Să se determine domeniul maxim $D$ de definiție al funcției $f:D\to\mathbb{R}$ :

1) $f(x)=\arcsin(2x-1)$ ; 2) $f(x)=\arcsin\frac{1}{x+1}$ ; 3) $f(x)=\arcsin\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ ;

4) $f(x)=\arccos\left(x^2-3x+1\right)$ ; 5) $f(x)=\operatorname{arctg}(1+\lg x)$ ; 6) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{x}{x^2-1}$ ;

7) $f(x)=\operatorname{arcctg}\sqrt{x^2-4x}$ .

**43.** Comparați numerele: 1) $\arcsin(-0,26)$ și $\arcsin(-0,25)$ ; 2) $\arccos(0,31)$ și $\arccos(0,30)$ ; 3) $\operatorname{arctg} 3$ și $\operatorname{arctg}(3,1)$ ; 4) $\operatorname{arcctg}(-2)$ și $\operatorname{arcctg}(-2,1)$ .

**44.** Precizați intervalele de monotonie ale funcției $f:D\to\mathbb{R}$, unde $D$ este domeniul de definiție.

1) $f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right), D=\left[-\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$; 2) $f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right), D=\left[-\frac{5\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$.

**45.** Să se determine valoarea minimă și maximă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, în cazurile:

1) $f(x)=3\cos 3x-4\sin 3x-2$ ; 2) $f(x)=12\sin 2x+5\cos 2x+1$ ; 3) $f(x)=\cos 2x-3\cos x$ .

**46.** Arătați că: 1) $\sin(2\operatorname{arctg}(-3))=-\frac{3}{5}$ ; 2) $\cos\left(2\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{3}{5}$ ; 3) $\arcsin(\sin 2)=\pi-2$ ;

4) $\arccos(\cos 4)=2\pi-4$ ; 5) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 3)=3-\pi$ ; 6) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 4)=4-\pi$ .

**47.** Reprezentați grafic funcțiile: 1) $f(x)=\cos(2\arccos x)$ ; 2) $f(x)=\cos(2\arcsin x)$ .

**48.** Arătați că: a) inversa funcției $f:\left[\frac{7\pi}{2},\frac{9\pi}{2}\right]\to[-1,1], f(x)=\sin x$ este $f^{-1}:[-1,1]\to\left[\frac{7\pi}{2},\frac{9\pi}{2}\right], f^{-1}(x)=4\pi+\arcsin x$ ; b) inversa funcției $f:[8\pi,9\pi]\to[-1,1]$, $f(x)=\cos x$ este $f^{-1}:[-1,1]\to[8\pi,9\pi], f^{-1}(x)=8\pi+\arccos x$ .

**49.** Să se determine mulțimea valorilor funcțiilor: 1) $f(x)=\arcsin\left(-\sqrt{x}\right)$ ;

2) $f(x)=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

**50.** Precizați care din funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este periodică.

1) $f(x)=x$ ; 2) $f(x)=[x]$ ; 3) $f(x)=\{x\}$ ; 4) $f(x)=\{2x\}$ ; 5) $f(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbb{Q}\\ 0, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$ ;

6) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ ; 7) $f(x)=\sqrt[3]{\sin x}$ ; 8) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, 2k\leq x<2k+1\\ 1, 2k+1\leq x<2k+2\end{cases}, k\in\mathbb{Z}$ ;

9) $f(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbb{Z}\\ 2, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}\end{cases}$.

**51.** Să se arate că pentru orice $t>0$ există o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ periodică de perioadă principală $t$ .În plus, $f([0,t])=f(\mathbb{R})$ .

# 2. LIMITE DE FUNCȚII

**Acest capitol este unul fundamental pentru „Analiza matematică”. Prin exemple sugestive se creionează conceptul de limită a unei funcții într-un punct. Sunt prezentate criterii pentru existența limitei unei funcții într-un punct (cu limite laterale, criteriul majorării, criteriul „cleștelui”). Se dau reguli de calcul pentru limita unei funcții elementare într-un punct de acumulare finit sau infinit(dacă există). În particular se prezintă limitele unor șiruri definite cu ajutorul unor funcții elementare. Operațiile cu limite de funcții, limite remarcabile și eliminarea nedeterminărilor în calculul limitelor constituie ultima parte a capitolului.**

**Istoric. Conceptul de trecere la limită a fost formulat, pentru prima dată, de Isac Newton (1642-1727) și Gottfried Leibniz (1646-1716), fiecare în încercări diferite de a rezolva probleme de calcul. Contribuții importante aduce în acest domeniu și Leonhard Euler (1707-1783). El fundamentează conceptul de funcție. Descrieri verbale ale conceptului de limită au fost propuse de diferiți matematicieni, dar insuficiente pentru a fi utilizate în demonstrații. În 1821, Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) în lucrarea Cours d'Analyse formulează definiții și prezintă argumente cu mai multă atenție decât predecesorii săi. Dar cel care formulează definiția precisă a limitei este Karl Weierstrass (1815-1897). Aceasta este definiția pe care o utilizăm și azi. De fapt, în epocă, Weierstrass era considerat „prințul analiștilor”, tocmai pentru acuratețea și eleganța cu care a soluționat unele probleme fundamentale ale analizei matematice.**



## 2.1. INTRODUCERE

Conceptul de limită a unei funcții într-un punct este fundamental în analiza matematică. Orice noțiune pe care o vom prezenta face referire la limită. Ce este viteza instantanee? Este limita vitezei medii. Ce este panta unei curbe într-un punct? Este limita pantelor secantelor (Fig. 1).

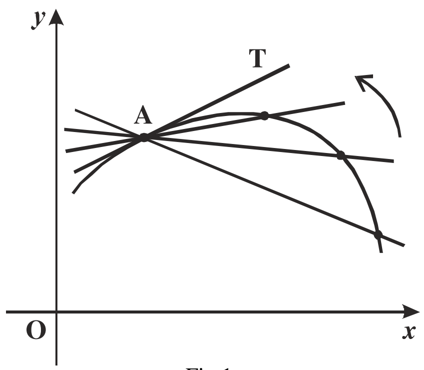



Fig.1

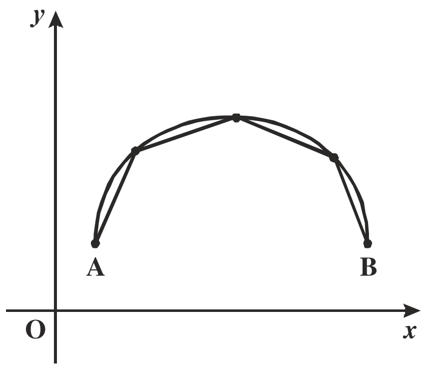
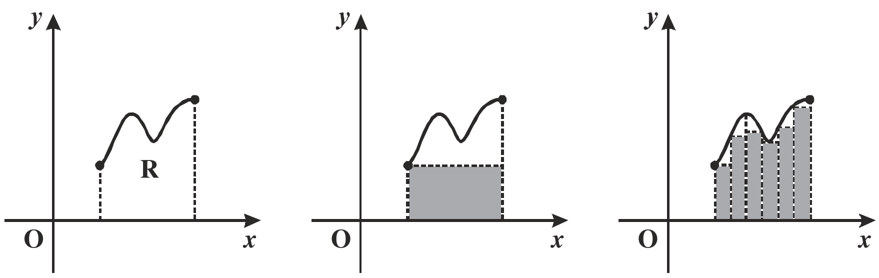



Fig. 2

Ce este lungimea unei curbe? Este limita lungimilor drumurilor poligonale (Fig. 2). Ce este aria unei regiuni mărginite de o curbă? Este o limită a unei sume de arii de dreptunghiuri (Fig. 3).




a) b) c)

Fig. 3

Un şir este o funcţie $x:\mathbb{N}\to\mathbb{R}, n\to x_n$ . Am studiat comportarea lui pentru valori foarte mari ale lui n. De exemplu, $x_n = a^n, a>0, a\neq 1$ , în clasa a X-a.

În acest capitol vom extinde această idee, analizând comportarea unei funcţii $f:E\to\mathbb{R}$ , al cărei domeniu conţine, în general, o mulţime arbitrară de numere reale pozitive. Graficul unui şir este format dintr-o mulţime infinită de puncte izolate. În contrast, funcţiile pe care le vom analiza au graficele de cele mai multe ori curbe continue. Dacă o astfel de funcţie este definită pe o mulţime de forma $[0,\infty)$ , atunci când $x$ creşte spre infinit prin valori reale, comportarea graficului este asemănătoare cu a şirului $(f(n))$ când $n$ tinde la $\infty$, prin valori întregi pozitive. Mai general, vom fi interesaţi de comportarea funcţiei $f$ în jurul unui punct $a$, vom

studia dacă valorile funcției $f, f(x), x \in E$ se apropie de un anumit număr *l*, atunci când $x$ se apropie foarte mult de $a$, $x \neq a$.
În acest fel problema comportării lui *f* în jurul lui *a* are sens chiar dacă *f* nu este definită în *a*.

## 2.2. IDEEA DE LIMITĂ

Considerăm $f : E \to \mathbb{R}, E \neq \varnothing$ şi **un punct de acumulare pentru** $E$ (care poate **să aparțină** sau **nu** lui $E$). Dacă $E$ este un interval, atunci un punct de acumulare este orice punct din $A$ sau unul din capetele intervalului. Problema care ne interesează este comportarea funcției $f$ în jurul lui $a$, **fără a lua în considerare valoarea funcției în** $a$ (în cazul în care $f(a)$ există).

Numărul $l \in \overline{\mathbb{R}}$ **este limita** lui $f$ **când** $x$ **se apropie** de $a$, notată $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ (citim: limită din $f$ de $x$ când $x$ tinde la $a$) dacă şi numai dacă **valorile** $f(x)$ **ale funcției se apropie de** $l$ **când** $x$ **se apropie** de $a$. De exemplu, fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + 2$ şi $a = 2$. Dacă $x$ se apropie de 2 şi $x \neq 2$, atunci $3x$ se apropie de $3 \cdot 2 = 6$ şi $3x + 2$ se apropie de $3 \cdot 2 + 2 = 8$. Deci, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 8$. Dacă luăm $a = -3$ şi $x$ se apropie de $-3$ cu $x \neq -3$, atunci $3x$ se apropie de $3(-3) = -9$ şi $3x + 2$ se apropie de $3(-3) + 2 = -7$. Deci, $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = -7$.

Faptul că $x$ tinde către $a$ din stânga ($x \to a, x < a$), din dreapta $(x \to a, x > a)$ şi respectiv din stânga şi din dreapta către $a$, îl marcăm pe axa $Ox$ printr-o săgeată de la $x$ la $a$ (Fig.4. *a*), *b*) şi respectiv *c*)).
Mai general, dacă $f : E \to \mathbb{R}$ şi $a$ este punct de acumulare pentru $E$, considerând graficul lui $f$ în reperul cartezian $xOy$, **numărul** $a$ **este situat pe axa** $Ox$, iar **limita** $l$ **se află pe axa** $Oy$ (Fig.4.d)). Analog, când $f(x)$ se apropie de $l$ îl marcăm,pe axa *Oy*, printr-o săgeată de la $f(x)$ la *l*.
Luând limita funcției $f$ când $x$ se apropie de $a$ (din stânga, din dreapta sau şi din stânga şi din dreapta lui $a$), **nu este important** dacă $f$ este sau nu definită în

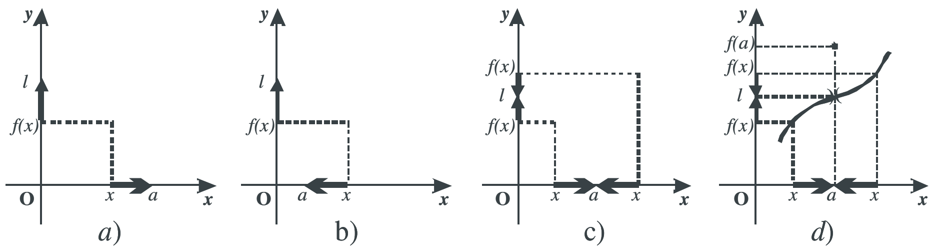
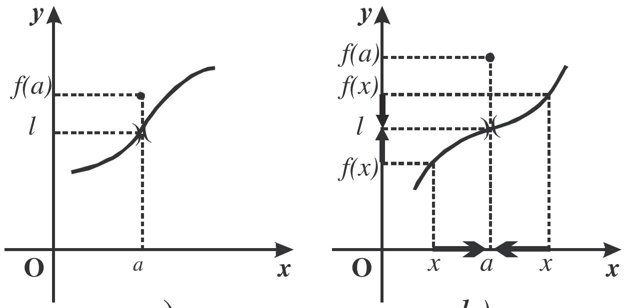



Fig. 4

punctul $a$. Singurul lucru important sunt valorile lui $f$ în $x$, cu $x$ **apropiindu-se de** $a$, cu $x$ **din jurul lui** $a$.

În Fig.5 a) graficul lui $f$ este o curbă discontinuă în $a$, definită în $a$ şi pentru care $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, deoarece, aşa cum este sugerat în Fig.5 b), când $x$ **se apropie de** $a$, $f(x)$ **se apropie de** $l$.




a) b)

Fig. 5

**Exemplul 1. Fie funcția $f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-4}$ şi $a=2$. Să observăm că $f$ nu este definită în 2, dar este definită pentru orice număr $x \neq 2$. Alegând $x$ apropiat de 2 $(x \neq 2)$ avem $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}=x+2$ şi $x+2$ se apropie de $2+2=4$. Deci $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$.**

**Sensul primei egalități de limite este următorul: dacă una din limite există, atunci şi cealaltă există şi mai mult sunt egale. Deci, în loc să calculăm limita funcției $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ (mai complexă) este suficient de găsit limita funcției mai simple $g(x)=x+2$ şi $a=2$.**

**Am văzut că atunci când punem problema limitei funcției $f$ în punctul $a$, numerele $x$ considerate în jurul lui $a$ se împart în două categorii: 1) cele situate la stânga lui $a$ pe axa $Ox$ şi 2) cele situate la dreapta lui $a$ pe axa $Ox$.**

**În primul caz scriem $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x)=l$ (numită limita lui f la stânga lui $a$, notată şi $f(a-0)$ sau $l_s(a)$, ceea ce înseamnă că dacă $x$ se apropie de $a$ din stânga (sau încă, prin valori mai mici decât $a$), atunci $f(x)$ se apropie de $l$. Analog pentru cazul 2) scriem $\lim\limits_{x \searrow a} f(x)=l$ (numită limita lui $f$ la dreapta lui $a$, notată şi $f(a+0)$ sau $l_d(a)$ ), ceea ce înseamnă că dacă $x$ se apropie de $a$ din dreapta (sau încă, prin valori mai mari decât $a$), atunci $f(x)$ se apropie de $l$.**

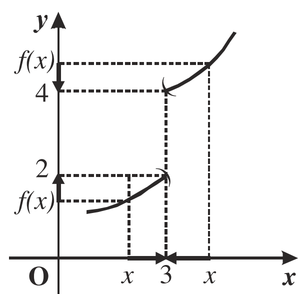



Fig.6

**Considerăm funcția al cărui grafic este cel din Fig.6. Când $x$ se apropie de 3 din stânga (citit pe $Ox$), atunci $f(x)$ (citit pe $Oy$) se apropie de 2. Deci, $\lim\limits_{x \nearrow 3} f(x)=2$. Dacă $x$ se apropie de 3 din dreapta, atunci $f(x)$ se apropie de 4 şi deci $\lim\limits_{x \searrow 3} f(x)=4$.**

**În acest caz $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ nu există, deoarece nu există un singur număr $l$ cu proprietatea că $f(x)$ se apropie de $l$ dacă $x$ se apropie de 3 ( $f(x)$ se apropie de 2 dacă $x$ se apropie de 3 cu $x<3$ şi $f(x)$ se apropie de 4 dacă $x$ se apropie de 3 cu $x>3$ ).**
**Limitele la stânga şi la dreapta se numesc limite laterale.**
**Legătura între limita lui $f$ când se apropie de $a$ şi cele două limite laterale ale lui $f$ când $x$ se apropie de $a$ este următoarea:**

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=l \Leftrightarrow \left(\lim_{x\nearrow a} f(x)=\lim_{x\searrow a} f(x)=l\right)}$$

**Exemplul 2. Să considerăm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ având graficul din Fig.7.**
**Observăm că $\lim\limits_{x\nearrow -1} f(x)=4$ şi $\lim\limits_{x\searrow -1} f(x)=4$ şi deci $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=4$. Pentru limită este neesenţial că $f(-1)=2$ !**
**Din forma graficului în jurul punctului $a=3$, deducem că $\lim\limits_{x\nearrow 3} f(x)=6\neq 1=\lim\limits_{x\searrow 3} f(x)$, ceea ce arată că nu există $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.**

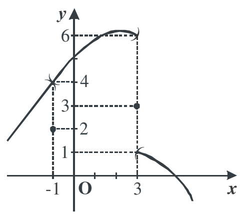


Fig. 7

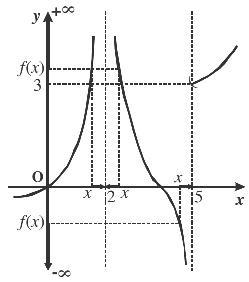


Fig. 8

**Exemplul 3. Considerăm funcţia al cărei grafic este redat în Fig.8. Observăm că atunci când $x$ se apropie de 2 (din stânga sau din dreapta – pe axa $Ox$), $f(x)$ (de pe axa $Oy$) ia valori foarte mari. În acest caz $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\infty$. Se spune că dreapta $x=2$ este asimptotă verticală pentru graficul funcţiei.**
**Ce se întâmplă în jurul punctului $a=5$ ? Dacă $x$ se apropie de 5 din stânga (adică $x<5$), atunci $f(x)$ sunt valori negative foarte mari. În acest caz $\lim\limits_{x\nearrow 5} f(x)=-\infty$. Dreapta $x=5$ este asimptotă verticală la stânga pentru graficul funcţiei $f$. Dacă $x$ se apropie de 5 din dreapta, atunci $f(x)$ se apropie de 3, ceea ce înseamnă că $\lim\limits_{x\searrow 5} f(x)=3$. Din analiza făcută rezultă că nu există $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$.**

**Exemplul 4. Fie funcţia $f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x-1}$. Să arătăm că:**

**a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{2}$; b) nu există $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}$; c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{|x-1|}=\infty$.**

**a) Dacă $x$ se apropie de 3, atunci $x-1$ se apropie de $3-1=2$ şi deci $\dfrac{1}{x-1}$ se apropie de $\dfrac{1}{2}$.b) Funcţia nu este definită în $x=1$. Totuşi, dacă $x$ se apropie de 1 şi $x>1$, atunci**

| $x$ | $\frac{1}{2}$ | 0,9 | 0,99 | 0,999 | 1 | 1,001 | 1,01 | 1,1 | 1,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | -2 | -10 | -100 | -1000 | \| | 1000 | 100 | 10 | 2 |

$\frac{1}{x-1}$ devine un număr pozitiv foarte mare. Pentru $x$ apropiat de 1 şi $x<1$, valorile $\frac{1}{x-1}$ devin negative foarte mari, aşa cum se poate constata din tabelul de valori:

În acest caz $\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = -\infty$ şi $\lim\limits_{x \searrow 1} f(x) = \infty$.

**Notaţie.** $\lim\limits_{x \nearrow 1} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0_-} = -\infty$ şi $\lim\limits_{x \searrow 1} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0_+} = \infty$. Graficul funcţiei este prezentat în Fig.9.

c) Când $x$ se apropie de 1 din stânga $(x<1)$, atunci $x-1$ se apropie de 0 prin valori negative, iar $|x-1|$ se apropie de 0 prin valori pozitive şi atunci $\lim\limits_{x \nearrow 1} \frac{1}{|x-1|} = \frac{1}{0_+} = \infty$. Dacă $x$ se apropie de 1 prin valori mai mari ca 1 $(x>1)$, atunci $x-1$ se apropie de 0 prin valori pozitive şi deci $\lim\limits_{x \searrow 1} \frac{1}{|x-1|} = \frac{1}{0_+} = \infty$. În final, limitele laterale în $a=1$ fiind egale rezultă $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{|x-1|} = \infty$.

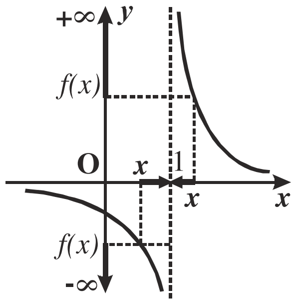


Fig. 9

Din exemplele analizate în limita unei funcţii $f$ când $x$ se apropie de $a$, nu este important dacă $f$ este sau nu definită în punctul $a$. Ceea ce contează sunt valorile lui $f$ **în jurul punctului** $a$. Din acest motiv noţiunea de limită a unei funcţii este un **concept punctual** (legat de punctul $a$). De regulă se notează limita $l$ prin $l(a)$ pentru a marca punctul la care se referă limita. De aceea comportarea limitei unei funcţii într-un punct $a_1$ este independentă de comportarea limitei într-un alt punct $a_2$. Exemplele analizate mai sus ilustrează această idee.

**Exemplul 5.** $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2} = 5$. În $x=2$, funcţia nu este definită. Atât numărătorul cât şi numitorul se anulează şi suntem în cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$. Pentru $x \neq 2$ şi $x$ apropiat de 2, avem: $\frac{x^2+x-6}{x-2} = \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = x+3$. De aici $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} (x+3) = 5$.

Graficul funcţiei $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x-2}$ este redat în Fig.10.

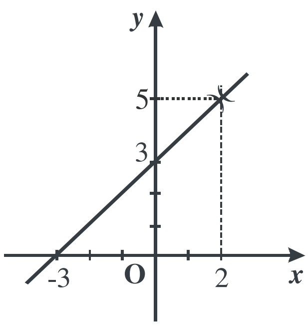


Fig. 10

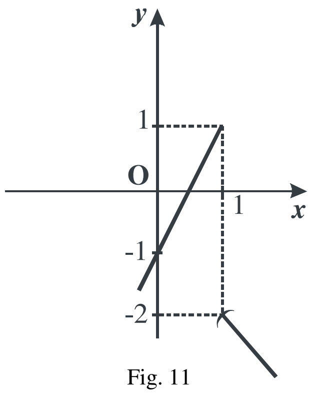


Fig. 11

**Exemplul 6.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}1-3x, x>1\\ 2x-1, x\le 1\end{cases}$.

Să arătăm că nu există $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, dar $\lim\limits_{x\to 1,01} f(x)=-2,03$ și $\lim\limits_{x\to 0,99} f(x)=0,98$.

Prima limită nu există deoarece limitele laterale sunt diferite:
$l_s(1)=\lim\limits_{x\nearrow 1} f(x)=\lim\limits_{x\nearrow 1}(2x-1)=2\cdot 1-1=1, l_d(1)=\lim\limits_{x\searrow 1} f(x)=\lim\limits_{x\searrow 1}(1-3x)=1-3\cdot 1=-2$.

A doua limită există deoarece pentru valori ale lui $x$ apropiate de 1, 01 (la dreapta lui 1,01 sau la stânga lui 1,01, dar mai mari ca 1), valorile $f(x)$ ale funcției se calculează după regula $f(x)=1-3x$ (pentru $x>1$) și deci $1-3x$ se apropie de $1-3\cdot 1,01=-2,03$.

Analog, ultima limită există deoarece pentru valori ale lui $x$ apropiate de $0,99$ (la stânga lui $0,99$ sau la dreapta lui 0,99, dar mai mici ca 1), valorile $f(x)$ ale funcției le calculăm după regula $f(x)=2x-1$. Prin urmare, $2x-1$ se apropie de $2\cdot 0,99-1=1,98-1=0,98$.

Graficul funcției este redat în Fig.11.

Următoarele două exemple sunt mai „stranii”.

**Exemplul 7.** Nu există $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$. Să observăm că funcția $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ nu este definită în $x=0$. Pentru a arăta că nu există această limită vom construi două șiruri de numere reale, ale căror valori sunt apropiate de 0, dar pentru care valorile funcției în aceste puncte nu se apropie de același număr $l$!

Fie șirul $(x_n)$ cu termenul general $x_n=\frac{1}{2n\pi}, n\ge 1$. Observăm că pentru valori mari ale lui $n$, $x_n$ se apropie de 0. În plus, $f(x_n)=\sin 2n\pi=0, \forall n\ge 1$, ceea ce arată că toate valorile funcției sunt egale cu 0. Considerând șirul $(x'_n)$ cu termenul general $x'_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}, n\ge 1$, remarcăm că pentru valori mari ale lui $n, x'_n$ se apropie de 0. Pe de altă parte, valorile funcției în aceste puncte sunt egale cu $f(x'_n)=\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1, \forall n\ge 1$.

Concluzionând, observăm că pentru valori ale lui $x$ apropiate de 0, valorile funcției nu se apropie de același număr $l$. Deci, nu există $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$.

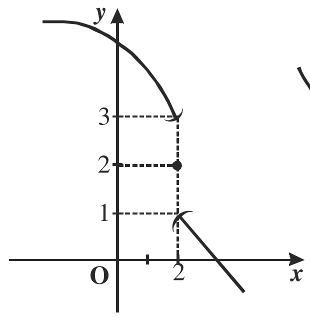
**Exemplul 8.** Este furnizat de funcția lui Dirichlet (matematician francez, 1805-1859) $d:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $d(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbb{Q}\\ 0, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$ (care este funcția caracteristică a lui $\mathbb{Q}$, $\varphi_{\mathbb{Q}}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$).

Această funcție nu are limită în nici un punct $a\in\mathbb{R}$.

Când $x$ se apropie de $a$, $x$ trece atât prin valori raționale cât și iraționale, iar $f(x)$ ia când valoarea 1, când valoarea 0 și deci $f(x)$ nu se apropie de un anumit număr fixat $l$. Deci, nu există $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

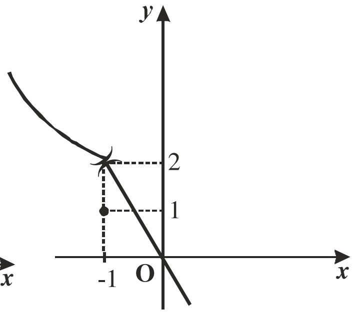
## Probleme propuse

1. În exercițiile următoare 1)-6) se dă $a$ și graficul unei funcții $f$. Utilizând graficul lui $f$ determinați: a) $\lim\limits_{x\nearrow a} f(x)$; b) $\lim\limits_{x\searrow a} f(x)$; c) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$; d) $f(a)$.



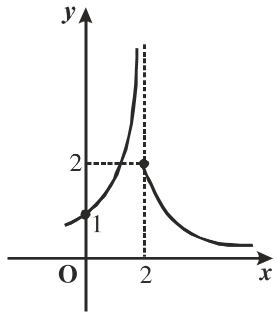

*a=2*

**1)**



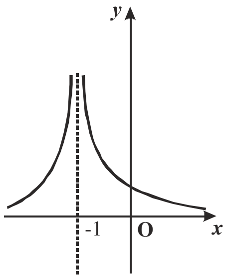

*a=-1*

**2)**



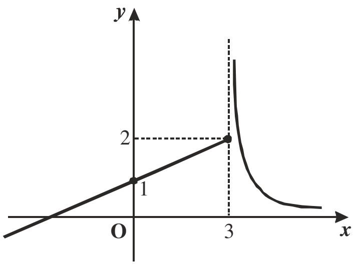

*a=2*

**3)**



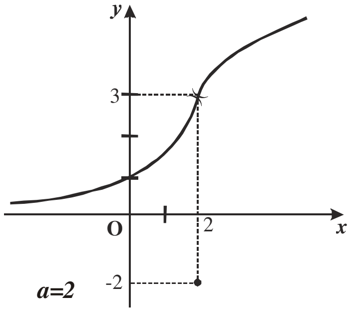

*a=-1*

**4)**




*a=3*

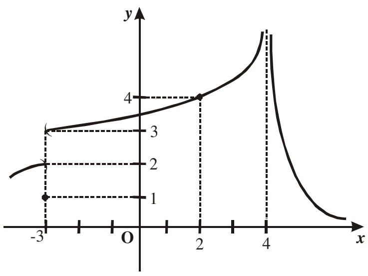
**5)**



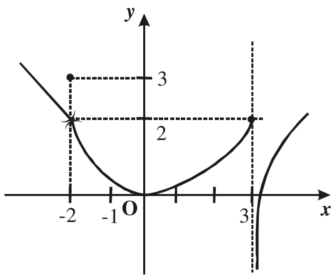

*a=2*

**6)**

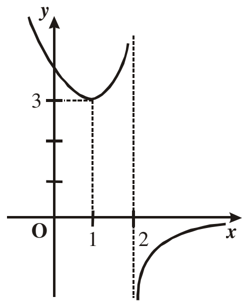
**2.** **În exercițiile 1), 2), 3) precizați valorile lui $a$ pentru care nu există $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.**




1)




2)




3)

**3.** **În exercițiile de mai jos, decideți dacă există sau nu limitele:**

**1)** $\lim\limits_{x \to 1}(3x+5)$; **2)** $\lim\limits_{x \to -3}(4x-6)$; **3)** $\lim\limits_{x \to 0}\frac{x}{|x|}$; **4)** $\lim\limits_{x \to 0}\frac{1}{|x|}$; **5)** $\lim\limits_{x \to 1}\frac{2}{x+3}$; **6)** $\lim\limits_{x \to 3}\frac{2}{x-3}$;

**7)** $\lim\limits_{x \to 3}\frac{3x-9}{x-3}$; **8)** $\lim\limits_{x \to 2}\frac{x^2-4x+4}{x-2}$; **9)** $\lim\limits_{x \to 2}\frac{x-2}{x^2-4x+4}$; **10)** $\lim\limits_{x \to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$;

**11)** $\lim\limits_{x \to 1}\frac{x-1}{x^2-3x+2}$; **12)** $\lim\limits_{x \to 0}\frac{x-3x^2}{x}$; **13)** $\lim\limits_{x \to 1}\frac{x-1}{2-2x}$; **14)** $\lim\limits_{x \to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$; **15)** $\lim\limits_{x \to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$;

16) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^2-1}$; 17) $\lim\limits_{x\to 0} f(x), f(x)=\begin{cases}-1, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$; 18) $\lim\limits_{x\to 2} f(x), f(x)=\begin{cases}1, x<2\\ -1, x\geq 2\end{cases}$;

19) $\lim\limits_{x\to 0} f(x), f(x)=\begin{cases}x^2, x>0\\ -x^2, x<0\end{cases}$; 20) $\lim\limits_{x\to -2} f(x), f(x)=\begin{cases}x^2-1, x\leq -2\\ 1+3x, x>-2\end{cases}$;

21) $\lim\limits_{x\to 2} f(x), f(x)=\begin{cases}2^x+1, x\geq 2\\ 3x-1, x<2\end{cases}$; 22) $\lim\limits_{x\to 1} f(x), f(x)=\begin{cases}-5, x\in\mathbb{Q}\\ 5, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$;

23) $\lim\limits_{x\to 1} f(x), f(x)=\begin{cases}x^2, x\in\mathbb{Q}\\ 1, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$; 24) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$; 25) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5}}{\sqrt{x+2}-2}$.

## 2.3. DEFINIȚIA LIMITEI UNEI FUNCȚII ÎNTR-UN PUNCT

Prezentarea ideii de limită din paragraful precedent a fost una de tip descriptiv. În cele ce urmează o vom defini riguros.

Vom considera o funcție $f$ și un număr real $a$. Nu vom cere ca $f$ să fie definită neapărat în punctul $a$, dar vom cere ca $f$ să fie definită pe o mulțime de forma $D=(a-p,a)\cup(a,a+p)$, cu $p>0$. Aceasta ne asigură că putem calcula $f(x)$ pentru orice $x\neq a$, $x$ suficient de aproape de $a$. Astfel spus $a$ **este punct de acumulare pentru mulțimea de definiție a lui** $f$.

A spune că $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l\in\mathbb{R}$ înseamnă că pentru $x$ suficient de aproape de $a$, $f(x)$ se apropie suficient de mult de $l$.

Aceasta înseamnă că :

| **Formularea descriptivă** | **Formularea cu vecinătăți** | **Formularea cu ε și δ** |
|---|---|---|
| $\lvert f(x)-l\rvert$ poate fi făcut oricât de mic (aceasta înseamnă că $f(x)$ se apropie de $l$), dacă cerem ca $\lvert x-a\rvert$ să fie suficient de mic, dar diferit de zero (aceasta înseamnă că $x$ se apropie de $a$). | Oricare ar fi $V=(l-\varepsilon,l+\varepsilon)\in\vartheta(l)$, există $U=(a-\delta,a+\delta)\in\vartheta(a)$ $\forall x\in U\cap D, x\neq a$, să rezulte $f(x)\in V$ (Fig.12). | Fie $\varepsilon>0$, arbitrar fixat. Atunci $\lvert f(x)-l\rvert$ poate fi făcut mai mic decât $\varepsilon$, dacă cerem ca $\lvert x-a\rvert$ să satisfacă inegalitățile $0<\lvert x-a\rvert<\delta$ pentru $\delta$ suficient de mic. |

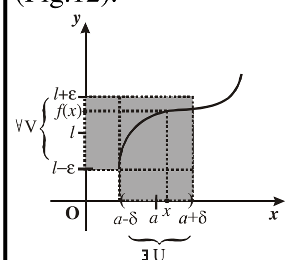


Fig.12

Condiția $x \in U \cap D, x \neq a$ se traduce prin $a-\delta < x < a+\delta \Leftrightarrow -\delta < x-a <$ $< \delta \Leftrightarrow |x-a| < \delta$, iar condiția $f(x) \in V = (l-\varepsilon, l+\varepsilon) \Leftrightarrow l-\varepsilon < f(x) <$ $< l+\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < f(x)-l < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$.

Ultima condiție este echivalentă cu faptul că graficul lui $f$ pentru $x \in D \cap V$ se află între dreptele orizontale $y = l-\varepsilon,\ y = l+\varepsilon$.

Pentru $\varepsilon > 0$, dat, alegerea lui $\delta$ depinde de $\varepsilon$. Pentru fiecare $\varepsilon > 0$ vom determina un $\delta$ care „să lucreze” pentru el. **Pentru o alegere cât mai bună a lui $\delta$, primul lucru este de a stabili o legătură între** $|f(x)-l|$ și $|x-a|$.

Dacă $l = \infty$, atunci vecinătatea $V$ are forma $V = (\varepsilon, \infty]$, iar pentru $l = -\infty$ se ia $V = [-\infty, \varepsilon)$. Dacă $a = \infty$ (ceea ce înseamnă că domeniul lui $f$ conține o mulțime de forma $(\varepsilon, \infty)$), atunci $U = (\delta, \infty]$, iar dacă $a = -\infty$ $(D \supset (-\infty, \varepsilon))$, atunci $U = [-\infty, \delta)$.Cu aceste comentarii formulăm următoarea:

**Definiție (Limita unei funcții)**. Fie $f$ o funcție definită pe o mulțime de forma $D = (a-p, a) \cup (a, a+p),\ p > 0$. Atunci $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă oricare ar fi $V$ o vecinătate a lui $l$,există $U$ o vecinătate a lui $a$ cu proprietatea că pentru orice $x \in U \cap D$ să avem $f(x) \in V$.

**Observații**. **1)**Limita unei funcții într-un punct dacă există este unică.

**2)** De mai sus deducem $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) = \delta > 0$ astfel încât dacă $0 < |x-a| < \delta$ să rezulte $|f(x)-l| < \varepsilon$.

**Temă**. Formulați o definiție a limitei unei funcții într-un punct $a$ în cazurile: 1) $a \in \mathbb{R}, l = \infty$; 2) $a \in \mathbb{R}, l = -\infty$; 3) $a = \infty, l = \infty$; 4) $a = \infty, l = -\infty$; 5) $a = -\infty, l = -\infty$; 6) $a = \infty, l \in \mathbb{R}$; 7) $a = -\infty, l \in \mathbb{R}$.

**Exemple. 1. Să arătăm că $\lim\limits_{x \to 2}(2x-1) = 3$ (Fig.13).**

**R. 1) Determinarea lui $\delta$. Fie $\varepsilon > 0$, arbitrar. Să determinăm $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât dacă $0 < |x-2| < \delta$ să avem $|(2x-1)-3| < \varepsilon$. Legătura între cele două module este imediată $|(2x-1)-3| = |2x-4| = |2(x-2)| = 2|x-2|$. A face $|(2x-1)-3| < \varepsilon$ înseamnă a lua $2|x-2| < \varepsilon$, adică $|x-2| < \frac{\varepsilon}{2}$. Această ultimă relație ne spune să punem $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$.**

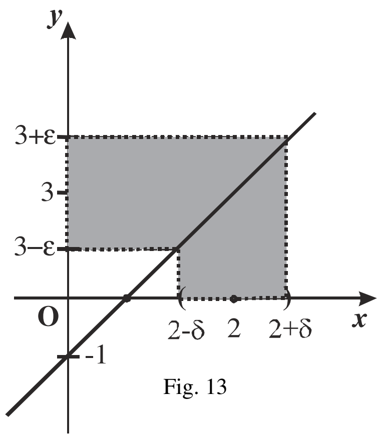


Fig. 13

2) **Arătăm că $\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{2}$ este bun.** (Se mai spune că $\delta(\varepsilon)$ „lucrează” pentru $\varepsilon$ ).

**Dacă $0<|x-2|<\frac{\varepsilon}{2}$, atunci $2|x-2|<\varepsilon$, adică $|2x-4|=|(2x-1)-3|<\varepsilon$.**

**Remarcă. Aici am luat $\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{2}$, dar am fi putut alege orice număr pozitiv $\delta\le\frac{\varepsilon}{2}$. În general, dacă un anumit $\delta$ este bun pentru $\varepsilon$ dat, atunci orice $\delta'>0$ cu $\delta'<\delta$ este, de asemenea, bun.**
**Etapele de parcurs dacă se utilizează definiția pot fi redate schematic ca în Fig.14.**

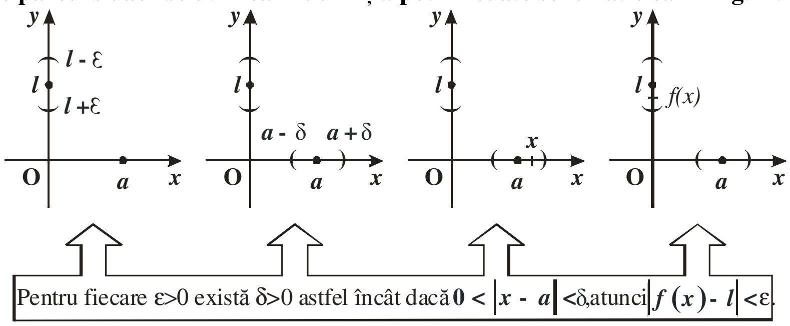



Fig.14

**2. Să arătăm că $\lim\limits_{x\to a} x=a, a\in\mathbb{R}$.**

**R. Fie $\varepsilon>0$. Să determinăm $\delta>0$ astfel încât dacă $0<|x-a|<\delta$ să rezulte $|x-a|<\varepsilon$. Evident se ia $\delta=\varepsilon$.**

**3. $\lim\limits_{x\to a}|x|=|a|, a\in\mathbb{R}$.**

**R. Fie $\varepsilon>0$. Vom determina $\delta>0$ astfel încât dacă $0<|x-a|<\delta$ să rezulte $||x|-|a||<\varepsilon$. Ținem seama de inegalitatea $||x|-|a||\le|x-a|$ este suficient să luăm $\delta=\varepsilon$ când din $0<|x-a|<\varepsilon$ avem $||x|-|a||<\varepsilon$.**

**4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.**

**R. Fie $\varepsilon>0$. Să determinăm $\delta>0$ astfel încât $\forall x>\delta$ să avem $\left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon \Leftrightarrow x>\frac{1}{\varepsilon}$. Luăm $\delta=\frac{1}{\varepsilon}>0$ și se verifică $\left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$ când $x>\delta$. Analog se arată $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$. Se scrie $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{-\infty}=0$.**

**5. $\lim\limits_{x\to a} c=c$, $c$ este o constantă, $a\in\mathbb{R}$.**

**R. Fie $\varepsilon>0$. Trebuie să determinăm $\delta>0$ astfel încât dacă $0<|x-a|<\delta$ să avem $|c-c|<\varepsilon$. Deoarece $|c-c|=0$, întotdeauna avem $|c-c|<\varepsilon$ și deci $\delta$ se poate alege orice număr pozitiv dorim.**

**6. Să se arate că nu există $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$.**

**R. Presupunem, prin absurd, că numărul $l$ este limita lui $f(x)=\frac{|x|}{x}, x\neq 0$ în $x=0$.**

**Alegem $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Există $\delta > 0$ astfel încât dacă $0 < |x - 0| < \delta$, atunci $|f(x) - l| < \frac{1}{4}$. Alegem $x_1 = -\frac{\delta}{4}$, $x_2 = \frac{\delta}{4}$ şi avem $f(x_1) = -1, f(x_2) = 1$. Acum avem:**

**$2 = |f(x_1) - f(x_2)| = |(f(x_1) - l) - (f(x_2 - l))| \le |f(x_1) - l| + |f(x_2) - l| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, fals.**

**7. Să se arate că nu există $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$.**

**R. Să observăm că $\sin x \in [-1, 1], \forall x$. Dacă, prin absurd, ar exista limita egală cu $l$, atunci pentru $\varepsilon = \frac{1}{2}$, există $\delta > 0$ astfel încât dacă $x > \delta$, atunci $|f(x) - l| < \frac{1}{2}$.**

**Alegem $x_1 = 2n\pi > \delta$, $x_2 = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ când $f(x_1) = 0, f(x_2) = 1$.**

**Avem: $1 = |f(x_1) - f(x_2)| \le |f(x_1) - l| + |f(x_2) - l| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, fals.**

**Analog, se arată că nu există $\lim\limits_{x\to-\infty} \sin x$.**

## Limite laterale

Vom defini limitele laterale utilizând $\varepsilon$ şi $\delta$, numai că în aceste situaţii $\delta$ „lucrează” numai pentru $x < a$ în cazul limitei la stânga şi numai pentru $x > a$ în cazul limitei la dreapta. Mai precis au loc următoarele:

**Definiţii. 1)** Fie $f$ o funcţie definită pe o mulţime ce conţine un interval de forma $(a - p, a), p > 0$. Atunci $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = l_s(a) \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) = \delta > 0$ astfel încât dacă $a - \delta < x < a$, atunci $|f(x) - l_s(a)| < \varepsilon$.

Numărul $l_s(a)$ se numeşte **limita la stânga a funcţiei** $f$ **în punctul** $a$. Acest număr se mai notează şi cu $f(a - 0)$.

**2)** Fie $f$ o funcţie definită pe o mulţime ce conţine un interval de forma $(a, a + p), p > 0$.

Atunci $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = l_d(a) \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) = \delta > 0$ astfel încât dacă $a < x < a + \delta$, atunci $|f(x) - l_d(a)| < \varepsilon$.

Numărul $l_d(a)$ se numeşte **limita de dreaptă a funcţiei** $f$ **în punctul** $a$. Acest număr se mai notează şi cu $f(a + 0)$.

## Probleme rezolvate

**Să se calculeze limitele laterale, în punctul $a$ indicat, pentru fiecare din funcțiile:**

**1)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2x+1, x\le 0\\ x^2-x, x>0\end{cases}$, $a=0$; **2)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}1+3x, x>1\\ 2, x=1\\ x^2+3, x<1\end{cases}$, $a=1$.

**R.** **1) Avem :** $l_s(0)=\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)=\lim\limits_{x\nearrow 0}(2x+1)=2\cdot 0+1=1$,

$l_d(0)=\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)=\lim\limits_{x\searrow 0}\left(x^2-x\right)=0^2-0=0$. **Trasați graficul acestei funcții.**

**2)Avem:** $l_s(1)=\lim\limits_{x\nearrow 1} f(x)=\lim\limits_{x\nearrow 1}\left(x^2+3\right)=1^2+3=4, l_d(1)=\lim\limits_{x\searrow 1} f(x)=\lim\limits_{x\searrow 1}(1+3x)=1+3\cdot 1=4$.
**Trasați graficul acestei funcții.**

## Probleme propuse

**1. În maniera de lucru din secțiunea 2.2 deduceți dacă limitele de mai jos există. Dacă limita există să se evalueze.**

**1)** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x}{x+1}$ ; **2)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2(x-1)}{x}$ ; **3)** $\lim\limits_{x\to 9}\frac{x}{\sqrt{x}+2}$ ; **4)** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}$ ; **5)** $\lim\limits_{x\nearrow 1}\frac{x-1}{|x-1|}$ ;

**6)** $\lim\limits_{x\searrow 1}\frac{x-1}{|x-1|}$ ; **7)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{|x-1|}$ ; **8)** $\lim\limits_{x\searrow 1}\frac{\sqrt{x-1}}{x}$ ; **9)** $\lim\limits_{x\nearrow 2}\sqrt{4-x^2}$ ;

**10)** $\lim\limits_{x\nearrow -2} f(x)$, **unde** $f(x)=\begin{cases}3x+2, x\le -2\\ x-1, x>-2\end{cases}$ ; **11)** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, **unde** $f(x)=\begin{cases}x^2, x>2\\ 5, x=2\\ x+2, x<2\end{cases}$.

**2. Pentru limitele de mai jos, determinați cel mai mare $\delta$ care să „lucreze" pentru $\varepsilon$ dat.**

**1)** $\lim\limits_{x\to 1} 2x=2$ ; $\varepsilon=0,1$ ; **2)** $\lim\limits_{x\to 4} 5x=20$ ; $\varepsilon=0,5$ ; **3)** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x}{2}=1; \varepsilon=0,01$.

**3. În exercițiile următoare, utilizând definiția limitei într-un punct cu $\varepsilon$ și $\delta$, arătați că:**

**1)** $\lim\limits_{x\to 2}(3x+1)=7$ ; **2)** $\lim\limits_{x\to 1}(4x-3)=1$ ; **3)** $\lim\limits_{x\to 2}|1-3x|=5$ ; **4)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$.

**4. Să se calculeze limitele laterale, în punctul $a$ indicat, pentru fiecare din funcțiile de mai jos:**

**1)** $f:\mathbb{R}-\{3\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}, a=3$ ; **2)** $f:\mathbb{R}-\{-2\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{-1}{x+2}, a=-2$ ;

**3)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2, x\le 1\\ 2x, x>1\end{cases}$, $a=1$ ; **4)** $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, x<0\\ \frac{1}{x^2}, x>0\end{cases}$, $a=0$ ;

**5)** $f:(-\infty,1)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\sqrt{1-x}}{1-x}, a=1$ ; **6)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-[x], a=\pm 1$,
**unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui $x\in\mathbb{R}$.**

# 2.4. CRITERII DE EXISTENȚĂ A LIMITEI

Prezentăm condițiile în care o funcție are limită într-un punct utilizând :
1) limitele laterale ; 2) limita unei alte funcții sau 3) limitele altor două funcții în acelaşi punct.

### 1. Criteriul cu limite laterale

Următoarea teoremă vine să caracterizeze limita unei funcții într-un punct cu ajutorul limitelor laterale.

**Teoremă.** Fie $f: E \to \mathbb{R}$ o funcție şi $a \in \mathbb{R}$ un punct de acumulare pentru $E$ cu proprietatea că funcția $f$ are limite laterale în punctul $a$. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente :

**1)** $f$ are limită în punctul $a$ ;

**2)** $l_s(a) = l_d(a)$.

În aceste condiții : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l_s(a) = l_d(a)$.

Demonstrația se obține uşor deoarece $\delta$ care „lucrează" pentru limită „lucrează" şi pentru limitele laterale şi reciproc.
Limitele laterale apar natural. Dacă o funcție este definită pe un interval $(a, b)$, atunci în punctul $a$ considerăm numai limita la dreapta în timp ce în punctul $b$ considerăm limita la stânga.
De exemplu, pentru funcția $f: [2, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x-2}$ în $a = 2$ se consideră numai limita la dreapta adică $\lim\limits_{x \searrow 2} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 2} \sqrt{x-2} = \sqrt{2-2} = 0$.

## Probleme rezolvate

**Să se stabilească dacă următoarele funcții au limită în punctul $a$ indicat:**

**1)** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 3x-2, & x \le 0 \\ -2, & x > 0 \end{cases}, a = 0$ ; **2)** $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x}, & x < 0 \\ \dfrac{1}{x^2}, & x > 0 \end{cases}, a = 0$ ;

**3)** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 5x+1, & x > 3 \\ 3x+2, & x \le 3 \end{cases}, a = 3$ ; **4)** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ x, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}, a = 1$.

**R. 1) Calculăm limitele laterale în $a = 0$ şi avem:**
$l_s(0) = \lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow 0} (3x-2) = 3 \cdot 0 - 2 = -2,\ l_d(0) = \lim\limits_{x \searrow 0} (-2) = -2$.
**Cum $l_s(0) = l_d(0) = -2$ se deduce că există $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ şi această limită are valoarea comună a limitelor laterale, adică $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -2$.**

2) Avem: $l_s(0)=\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)=\lim\limits_{x\nearrow 0}\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{0_-}=-(-\infty)=\infty$,

$l_d(0)=\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)=\lim\limits_{x\searrow 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{0_+}=\infty$.

Cum $l_s(0)=l_d(0)=\infty$ se deduce că $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$.

3) Avem: $l_s(3)=\lim\limits_{x\nearrow 3} f(x)=\lim\limits_{x\nearrow 3}(3x+2)=3\cdot 3+2=11$,

$l_d(3)=\lim\limits_{x\searrow 3} f(x)=\lim\limits_{x\searrow 3}(5x+1)=5\cdot 3+1=16$.

Deoarece $l_s(3)\neq l_d(3)$, limita $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ nu există.

4) Numerele $x$ care se apropie de 1 (din stânga sau dreapta lui 1), trec atât prin valori raționale cât și iraționale. Valorile $f(x)$ în aceste numere se calculează fie după forma $f(x)=x^2$, fie după forma $f(x)=x$. Aceste valori trebuie să se apropie de același număr $l$. Aceasta se întâmplă dacă $x^2=x$ ceea ce dă $x\in\{0,1\}$. Punctele găsite sunt singurele puncte în care $f$ are limită. În cazul $a=1$, funcția are limită și aceasta este egală cu $l=\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$. Descrierea de mai sus se traduce prin egalitatea

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=l \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\in\mathbb{Q}}} x^2=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}}} x=l$.

## Probleme propuse

**1.** Să se stabilească dacă următoarele funcții au limită în punctul $a$ indicat:

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x+\frac{|x|}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$; $a=0$; 2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x<1\\ 2x, & x\geq 1\end{cases}$; $a=1$;

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} \frac{x^3}{|x|}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$; $a=0$; 4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leq 1\\ 2x-1, & x>1\end{cases}$; $a=1$;

5) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2+|x|}{|x|}$; $a=0$; 6) $f:\mathbb{R}-\{\pm 2\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x+1}{x^2-4}$; $a=2$;

7) $f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x}{(x-1)^2}$; $a=1$; 8) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2-x, & x\in\mathbb{Q}\\ 2, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$; $a_1=2, a_2=1$.

**2.** Să se determine constanta $\alpha\in\mathbb{R}$ pentru care următoarele funcții $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ au limită în punctul $a$ indicat:

1) $f(x)=\begin{cases} \alpha x+1, & x\leq 1\\ x+3, & x>1\end{cases}$; $a=1$; 2) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2+\alpha^2}, & x\geq 0\\ 2x+1, & x<0\end{cases}$; $a=0$;

3) $f(x)=\begin{cases} 3x+2\alpha, & x\leq 1\\ \alpha x-1, & x>1\end{cases}$, $a=1$.

## 2. Criteriul majorării

Cunoaşterea limitei unei funcţii într-un punct permite calcularea limitei altei funcţii în acelaşi punct. Mai precis are loc următoarea:

**Teoremă. (Criteriul majorării)**

**1)** Fie $f, g : E \to \mathbb{R}$ două funcţii şi $a$ un punct de acumulare pentru $E$ şi $V$ o vecinătate a lui $a$.
Dacă $\left| f(x) - l \right| \le g(x), \forall x \in V \cap E, x \ne a$ şi dacă $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, atunci $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

---

**2)** (**Criteriul majorării la** $+\infty$) Dacă $f(x) \ge g(x), \forall x \in V \cap E, x \ne a$ şi $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

---

**3)** (**Criteriul majorării la** $-\infty$) Dacă $f(x) \le g(x), \forall x \in V \cap E, x \ne a$ şi $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, atunci $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

### Probleme rezolvate

**1. Să se arate că $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a, a \in \mathbb{R}$.**

**R. Avem: $\left| \sin x - \sin a \right| = 2\left| \sin\frac{x-a}{2} \right| \left| \cos\frac{x+a}{2} \right| \le 2\left| \sin\frac{x-a}{2} \right| \le 2\left| \frac{x-a}{a} \right| \le \left| x-a \right|$,**
**unde am folosit $\left| \sin x \right| \le x, \left| \cos x \right| \le 1$. Aşadar $\left| \sin x - \sin a \right| \le \left| x-a \right| = g(x)$.**
**Dacă $x \to a$, atunci $x - a \to 0$ şi deci $\left| x-a \right| \to 0$. Prin urmare $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$.**

**Observaţii. 1) Pentru a obţine limita funcţiei $f(x) = \sin x$ într-un punct $a \in \mathbb{R}$, se înlocuieşte $x$ cu $a$. De aici $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = \sin 0 = 0$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. Am văzut că funcţia $f(x) = \sin x$ nu are limită la $\pm\infty$.**

**2) Analog, se arată că $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a, a \in \mathbb{R}$. Deci, $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$, $\lim\limits_{x\to\pi} \cos x = \cos\pi = -1$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x = \cos\frac{\pi}{2} = 0$. Funcţia $f(x) = \cos x$ nu are limită la $\pm\infty$.**

**2. Să se calculeze: 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^2 + x + 1\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^3 + x + 1\right)$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x + \sin x\right)$.**

**R. 1) Avem: $x^2 + x + 1 > x \; (\forall x \in \mathbb{R})$. Cum $\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$, rezultă conform criteriului majorării la $+\infty$ că $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^2 + x + 1\right) = \infty$.**

**2) Are loc inegalitatea $x^3 + x + 1 < x^3$ dacă $x < -1$ (ori $-\infty$ este punct de acumulare pentru**

$(-\infty,-1)$ ). **Pe de altă parte** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ **şi deci** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+x+1\right)=-\infty$.

**3) Este evidentă inegalitatea** $x+\sin x\geq x-1$ **(deoarece** $\sin x\in[-1,1]$ **).**

**Cum** $\lim\limits_{x\to\infty}(x-1)=\infty$ **, se obţine** $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sin x)=\infty$.

## Probleme propuse

**Să se calculeze limitele următoare:**

**1)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}$ **; 2)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x+2\cos x}{x}$ **; 3)** $\lim\limits_{x\to0} x\sin\frac{1}{x}$ **; 4)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3x^2+x\right)$ **; 5)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^2+x\right)$ **;**

**6)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\cos x)$.

## 3. Trecerea la limită în inegalităţi. Criteriul „cleştelui”

Dacă pe o vecinătate a unui punct de acumulare $a$ pentru mulţimea $E$ pe care sunt definite două funcţii care au limită în $a$ are loc o inegalitate între acestea, atunci prin trecere la limită inegalitatea se păstrează. Mai precis are loc următoarea:

**Teoremă.** Fie $f,g:E\to\mathbb{R}$, $a$ punct de acumulare pentru $E$ şi $V$ o vecinătate a punctului $a$. Dacă $f(x)\leq g(x),\forall x\in V\cap E, x\neq a$ şi dacă $f$ şi $g$ au limite în punctul $a$ în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci : $\lim\limits_{x\to a} f(x)\leq\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

În particular : 1) dacă $f(x)\geq0,\forall x\in V\cap E, x\neq a$ , atunci $\lim\limits_{x\to a} f(x)\geq0$ ;

2) dacă $f(x)\leq0,\forall x\in V\cap E, x\neq a$ , atunci $\lim\limits_{x\to a} f(x)\leq0$ ;

3) dacă $\alpha\leq f(x)\leq\beta,\forall x\in V\cap E, x\neq a$ , atunci

$\alpha\leq\lim\limits_{x\to a} f(x)\leq\beta$.

Cu aceste elemente pregătitoare se poate formula următoarea:

**Teoremă.** (a „cleştului” sau „a celor doi jandarmi” sau „a sandvişului”)
Fie trei funcţii $f,g,h:E\to\mathbb{R}$, $a$ punct de acumulare pentru $E$ şi $V$ o vecinătate a lui $a$.

Dacă: **1)** $f(x)\leq g(x)\leq h(x),\forall x\in V\cap E, x\neq a$;

**2)** $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=l$,

atunci $g$ are limită în $a$ şi mai mult $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l$.

Schematic:

$$\begin{array}{ccccc} f(x) & \leq & g(x) & \leq & h(x) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ l & & l & & l \end{array}$$

## Probleme rezolvate

**Să se calculeze: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a lui $a\in\mathbb{R}$ $\left([a]\in\mathbb{Z},[a]\le a<[a]+1\right)$.**

**R.** **1) Din definiția părții întregi rezultă $x-1<[x]\le x,(1)$.**

**Pentru $x>0\,(x\to\infty)$ din $(1)$ rezultă: $\frac{x-1}{x}<\frac{[x]}{x}\le 1$. Punem $f(x)=\frac{x-1}{x}, h(x)=1$.**

**Cum $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$ (am ținut seamă că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$) și $\lim\limits_{x\to\infty}1=1$, aplicân criteriul „cleștelui” se obține $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}=1$.**

**2) Au loc inegalitățile $f(x)=\frac{x-1}{x}\le\frac{x+\sin x}{x}\le\frac{x+1}{x}=h(x)$, deoarece $\sin x\in[-1,1]$.**

**Am văzut mai sus că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{x}=1$. Cum $h(x)=1+\frac{1}{x}$ deducem $\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=1$.**

**Conform criteriului „cleștelui” rezultă $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=1$.**

## Probleme propuse

**1. Să se calculeze limitele de mai jos, dacă există:**

**1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{[x]+[2x]}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+\cos x}{x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\frac{1}{x}\right]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a lui $a\in\mathbb{R}$.**

**2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea $|f(x)-x|\le x^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Să se arate că $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.**

### 4. Produsul dintre o funcție mărginită și una de limită zero

Un alt rezultat important care permite calculul limitei unui produs de funcții este dat de următoarea:

**Teoremă.** Fie $f,g:E\to\mathbb{R}$, $a$ punct de acumulare pentru $E$ și $V$ o vecinătate a lui $a$.

Dacă : **1)** $|f(x)|\le M, \forall x\in V\cap E, M>0$ ($f$ este **mărginită** pe o vecinătate a lui $a$);

**2)** $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$,

atunci $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)=0$.

**Limita produsului dintre o funcție mărginită și o funcție de limită zero este zero.**

### Probleme rezolvate

**Să se calculeze limitele: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cos x$ ; 2) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$.**

**R. 1) Funcția $f(x)=\cos x$ este mărginită deoarece $-1\le\cos x\le 1, \forall x\in\mathbb{R}$.**

**Cum $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, conform teoremei deducem $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cos x=0$.**

**2) Pentru $x\neq 0$, funcția $f(x)=\sin\frac{1}{x}\in[-1,1]$, adică este mărginită.**

**Cum $\lim\limits_{x\to 0} x=0$, via teorema, rezultă $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$.**

### Probleme propuse

**Să se calculeze limitele: 1) $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}$ ; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x$ ; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x^2+1}$.**

## 2.5. LIMITELE FUNCȚIILOR ELEMENTARE

Vom da regula de calcul pentru limita funcției, în general, în două cazuri :

1) **când $a$ este punct de acumulare finit**;
2) **când $a$ este punct de acumulare infinit** (dacă există).

În cazul 2) vom deduce apoi limitele unor şiruri definite prin funcții elementare (pentru care domeniul de definiție conține un interval de forma $(\varepsilon,\infty)$, $\varepsilon>0$ astfel încât $\infty$ să fie punct de acumulare pentru domeniul de definiție al funcției). Dacă limita şirului este finită spunem că **şirul este convergent**, iar dacă limita este egală cu $-\infty$ sau $+\infty$ sau nu există, atunci şirul se numeşte **şir divergent**.
Rezultatul fundamental în cazul 1) care se va deduce este dat de următoarea :

**Teoremă.** Fie funcția elementară $f$ definită pe $(a-p,a)\cup(a,a+p)$, $a\in\mathbb{R},\ p>0$ pentru care există $\lim\limits_{x\to a} f(x)\in\mathbb{R}$. Atunci : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

**Limita unei funcții elementare într-un punct de acumulare finit, din domeniul de definiție, se obține înlocuind pe $x$ cu $a$.**

### 1. Limita funcției constante

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=c, c\in\mathbb{R}$.

Atunci $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x)=c, \forall a\in\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}}$.

Dacă $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}, f(n)=c, \forall n\in\mathbb{N}$ este şirul constant, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} c=c$. Se spune că şirul constant $(c)_n$ **este convergent** la $c$.

**Exemple.** $\lim\limits_{x\to 5} 3=3,\ \lim\limits_{x\to\infty}(-5)=-5,\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1=1,\ \lim\limits_{n\to\infty} 2=2,\ \lim\limits_{n\to\infty}(-1)=-1$.

## 2. Limita funcţiei polinomiale

Fie
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+...+a_1x+a_0, a_i\in\mathbb{R}, i=\overline{0,k}, a_k\neq 0, k=1,2.$

1. **Punctul de acumulare** $a$ **este finit** $(a\in\mathbb{R})$

Dacă $x\to a$, atunci $a_ix^i\to a_ia^i$ şi deci

$f(x)\to f(a)=a_ka^k+a_{k-1}a^{k-1}+...+a_1a+a_0$, adică regula formulată în teoremă se verifică.

**Exemple. Să se calculeze limitele : a)** $\lim\limits_{x\to 1}(3x+2)$ **; b)** $\lim\limits_{x\to -2}(x^2-3x)$ **; c)** $\lim\limits_{x\to 0}(x^3+2x^2-1)$.

**R. a) Avem :** $\lim\limits_{x\to 1}(3x+2)=3\cdot 1+2=3+2=5$ ;

**b)** $\lim\limits_{x\to -2}(x^2-3x)=(-2)^2-3(-2)=4+6=10$ ;

**c)** $\lim\limits_{x\to 0}(x^3+2x^2-1)=0^3+2\cdot 0^2-1=-1$.

### Exerciţii propuse

**Să se calculeze limitele : a)** $\lim\limits_{x\to 2}(4x-5)$ **; b)** $\lim\limits_{x\to -3}(-x^2+x-1)$ **; c)** $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2-3x+3)$.

2. **Punctul de acumulare** $a$ **este infinit**

Fie $a=\pm\infty$. În acest caz se aduce funcţia polinomială la forma

$f(x)=x^k\left(a_k+\frac{a_{k-1}}{x}+...+\frac{a_1}{x^{k-1}}+\frac{a_0}{x^k}\right)$.

Dacă $x\to\pm\infty$, atunci $\frac{a_{k-1}}{x},...,\frac{a_1}{x^{k-1}},\frac{a_0}{x^k}\to 0$ (am văzut că $\frac{1}{x^l}\to 0, l>0$, dacă $x\to\pm\infty$ şi am folosit notaţia $\frac{1}{\pm\infty}=0$) şi deci $\frac{a_{k-1}}{x}+...+\frac{a_1}{x^{k-1}}+\frac{a_0}{x^k}\to 0$. Aceasta arată că pentru determinarea limitei $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ este suficient să calculăm $\lim\limits_{x\to\pm\infty} a_kx^k$.

Avem explicit: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty\cdot a_k=\begin{cases}\infty, \text{dacă } a_k>0\\ -\infty, \text{dacă } a_k<0\end{cases}$ şi respectiv

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=(-\infty)^k\cdot a_k=\begin{cases}\infty, \text{dacă } (a_k<0 \text{ şi } k \text{ impar}) \text{sau } (a_k>0 \text{ şi } k \text{ par})\\ -\infty, \text{în rest}\end{cases}$$

Aşadar avem următoarea:

**Regulă. Limita unei funcţii polinomiale la $\pm\infty$ este aceeaşi cu limita termenului de grad maxim :** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} a_k x^k$ **.**

---

**În particular, limita unui şir definit printr-o funcţie polinomială este egală cu limita termenului de grad maxim :** $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_k n^k$ **.**

În Fig. 15 sunt prezentate două situaţii grafice.

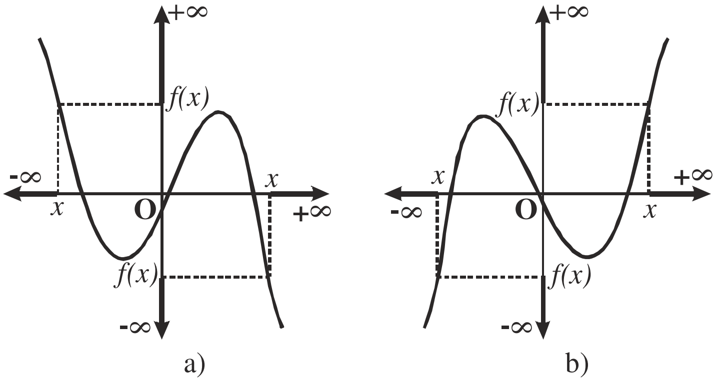



Fig. 15

**Exemple. Să se calculeze limitele : a)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3-2x^2+3\right)$ **; b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^3+x^2-100\right)$ **;**

**c)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(5x^2-3x+1\right)$ **; d)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-3n^2+1\right)$ **; e)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^3-n^2+n-1\right)$ **.**

**R. a)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3-2x^2+3\right)=\lim\limits_{x\to\infty} x^3=\infty^3=\infty$ **;**

**b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^3+x^2-100\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^3\right)=-2(-\infty)^3=-2(-\infty)=\infty$ **;**

**c)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(5x^2-3x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(5x^2\right)=5(-\infty)^2=5\cdot\infty=\infty$ **;**

**d)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-3n^2+1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-3n^2\right)=-3\cdot\infty^2=-3\cdot\infty=-\infty$ **;**

**e)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^3-n^2+n-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty} n^3=\infty^3=\infty$ **.**

**Observaţie. Şirurile care au limita $+\infty$ sau $-\infty$ se numesc şiruri divergente. Şirurile din exemplele d), e) sunt şiruri divergente.**

## Exerciţii propuse

**Să se calculeze limitele : a)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-3x^2+x-1\right)$ **; b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-5x^3+x^2\right)$ **;**

**c)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4x^3-2x^2+1000\right)$ **; d)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(6n^2+n-\sqrt{2}\right)$ **; e)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-n^3+20n^2-9n\right)$ **.**

## 3. Limita funcției raționale

Fie $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $f:\mathbb{R}\text{-}\{x \mid Q(x)=0\}\to\mathbb{R}$, unde $P$ și $Q$ sunt funcții polinomiale, $P(x)=a_k x^k+a_{k-1}x^{k-1}+...+a_1x+a_0$, $Q(x)=b_l x^l+b_{l-1}x^{l-1}+$ $+...+b_1x+b_0$, $a_i, b_j\in\mathbb{R}, a_k, b_l\neq 0$, $k,l\leq 2, k,l\in\mathbb{N}$.

**1) Punctul de acumulare $a$ este finit $(a\in\mathbb{R})$**

Avem de analizat subcazurile :

**1.1) $Q(a)\neq 0$, adică $a$ nu este rădăcină pentru numitor.**

În acest caz dacă $x\to a$, atunci $P(x)\to P(a)$ și $Q(x)\to Q(a)$, iar $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}\to\dfrac{P(a)}{Q(a)}$. Prin urmare avem următoarea :

**Regulă. Limita funcției raționale în punct de acumulare finit, în care nu se anulează numitorul, este egală cu valoarea ei în acel punct.**

**Exemple. Să se calculeze limitele : a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+1}$ ; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-3}{x+5}$ ; c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5}{1-x}$.**

**R.** a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{1-1}{1+1}=\dfrac{0}{2}=0$ ; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-3}{x+5}=\dfrac{0-3}{0+5}=-\dfrac{3}{5}$ ;

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5}{1-x}=\dfrac{2^2-5}{1-2}=\dfrac{4-5}{-1}=\dfrac{-1}{-1}=1$.

### Exerciții propuse

**Să se calculeze limitele : a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+1}$ ; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^2}{x+1}$ ; c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}$ ;**

**d) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$.**

**1.2.) $Q(a)=0$, adică $a$ este rădăcină pentru numitor.**

Discuția pentru acest caz este mai complexă. Vom ilustra această situație prin diferite exemple, arătând cum procedăm practic în calcularea limitelor. Dacă, de exemplu, și numărătorul se anulează în $a, P(a)=0$, atunci se efectuează mai întâi simplificarea fracției prin $x-a\,(x\neq a)$ după care se vede dacă numitorul fracției simplificate îl mai are pe $a$ ca rădăcină sau nu.

**Exemple**. **Să se calculeze limitele (dacă există):**

a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$; b) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{x+1}$; c) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{(x+1)^2}$; d) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{x^2-1}$; e) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15}$.

**R.** a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\left(\text{caz de nedeterminare }\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{x-2}=-2$.

b) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{x+1}$ **nu există deoarece limita la stânga în** $a=-1$ **este egală cu**

$l_s(-1)=\lim\limits_{x\nearrow-1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{0-}=-\infty$ **în timp ce limita la dreapta este** $l_d(-1)=\lim\limits_{x\searrow-1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{0_+}=\infty$.

**(Comportarea graficului funcției în jurul lui $-1$ este redată în Fig.16)**

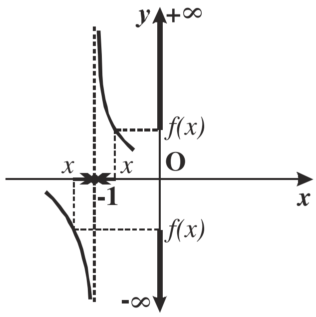



Fig. 16

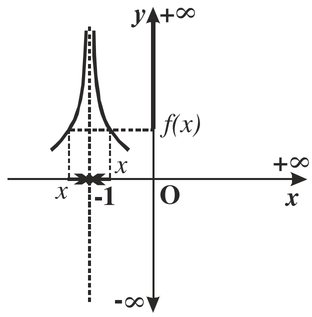



Fig. 17

**Se spune că dreapta verticală** $x=-1$ **este asimptotă verticală la stânga şi la dreapta pentru funcție. Din** $l_s(-1)\neq l_d(-1)$ **se deduce că nu există limita în** $a=-1$.

**Aşadar, dacă $a$ este punct de acumulare finit şi este rădăcină a numitorului, dar nu este rădăcină şi pentru numărător, atunci se calculează limitele laterale în $a$.**
**c) Să arătăm acum că limita există.**
**Calculăm ca mai sus limitele laterale şi avem:**

$l_s(-1)=\lim\limits_{x\nearrow-1}\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{0_+}=\infty$, $l_d(-1)=\lim\limits_{x\searrow-1}\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{0_+}=\infty$.

**Deoarece** $l_s=l_d=\infty$ **avem că şi** $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{(x+1)^2}=\infty$ **(** $x=-1$, **asimptotă verticală).**

**(Comportarea funcției în jurul lui 1 este redată în Fig.17)**

d) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{x^2-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{x-1}=-\dfrac{1}{2}$.

**e) Numitorul** $x^2+8x+15$ **se anulează pentru** $a=-3$, **în timp ce numărătorul nu se anulează** $(-3)^2+2(-3)-15=-12\neq0$.

**În această situație se calculează limitele laterale în** $a=-3$.

**Avem:** $l_s(-3)=\lim\limits_{x\nearrow-3}\dfrac{x^2+2x-15}{(x+3)(x+5)}=\dfrac{-12}{(0_-)\cdot2}=\dfrac{12}{0_+}=+\infty$ **şi**

$l_d(-3)=\lim\limits_{x\searrow-3}\dfrac{x^2+2x-15}{(x+3)(x+5)}=\dfrac{-12}{0_+(2)}=\dfrac{-12}{0_+}=-\infty$.

**Cum** $l_s(-3)\neq l_d(-3)$ **rezultă că limita respectivă nu există.**

**Dreapta $x=-1$ este asimptotă verticală la stânga şi la dreapta pentru funcție.**

## Exerciții propuse

**Să se calculeze limitele (dacă există): a)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x-1}$ **; b)** $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2+x-1}{x^3+1}$ **;**

**c)** $\lim\limits_{x\to -5}\frac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15}$ **; d)** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+1}{\left(x^2-4\right)^2}$ **; e)** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+4}$ **; f)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\left(x^2-1\right)^2}{x^2-2x+1}$ **; g)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{\left(x-1\right)^2}$ **.**

**Reprezentați grafic comportamentul funcțiilor în jurul punctelor de acumulare.**

**2) Cazul**: $a$ **punct de acumulare infinit** $(a=\pm\infty)$

În acest caz avem pentru $f$ scrierea:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^k\left(a_k+\frac{a_{k-1}}{x}+\ldots+\frac{a_1}{x^{k-1}}+\frac{a_0}{x^k}\right)}{x^l\left(b_l+\frac{b_{l-1}}{x}+\ldots+\frac{b_1}{x^{l-1}}+\frac{b_0}{x^l}\right)};$$

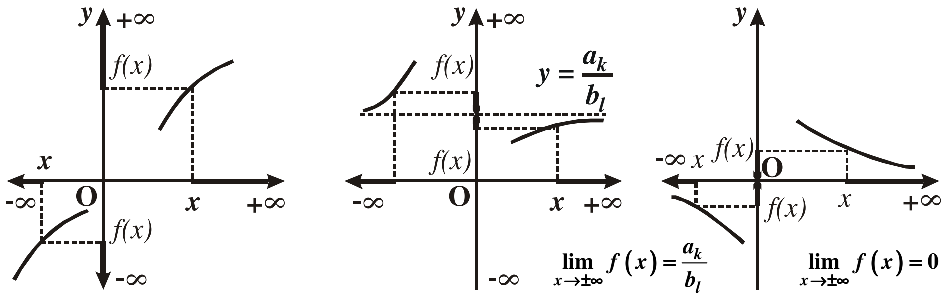
Termenii care conțin pe $\frac{1}{x}$ la diferite puteri au limita zero.

Deci

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\begin{cases}\frac{a_k}{b_l}(\pm\infty)^{k-l}, \text{ pentru } k>l \text{ (gradul numărătorului > gradul numitorului)}\\[2ex] \frac{a_k}{b_l}, \text{ pentru } k=l \left(\begin{array}{l}\text{gradul numărătorului =}\\ \text{= gradul numitorului}\\ \frac{a_k}{b_l}=\text{câtul coeficienților}\\ \text{termenilor de grad maxim}\end{array}\right)\\[2ex] 0, \text{ pentru } k<l \text{ (gradul numărătorului < gradul numitorului)}\end{cases}$$

**Regulă. Pentru limita funcției raționale la $\pm\infty$ sau limita unui şir definit printr-o funcție rațională la $+\infty$ se compară gradul numărătorului cu gradul numitorului.**

Comportarea graficului unei astfel de funcții este redat în Fig. 18 pentru câteva cazuri. Reprezentați și alte situații.




$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

a)

$y=\frac{a_k}{b_l}$, **asimptotă orizontală**

b)

$y=0$ **asimptotă orizontală**

c)

Fig. 18

**Exemple. Să se calculeze limitele:**

**a)** $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x^2-3x}$; **b)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3+2x+6}{3x^2-5x}$; **c)** $\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3-5}{2x^3+3x}$; **d)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{-5x^4+x^3-x+2}{4x^4+3x}$;

**e)** $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n+2x}{-3x^3+5x-9}, n\in\mathbb{N}$; **f)** $\lim_{n\to\infty}\frac{-2n^2+3n}{3n+1}$; **g)** $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n^3+5}{-3n^3+n^2}$; **h)** $\lim_{n\to\infty}\frac{1000n+1}{n^2-n-10}$.

**R.** **a)** $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x^2-3x}=0$ **(gradul numărătorului < gradul numitorului);**

**b)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3+2x+6}{3x^2-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)x^{3-2}=\left(-\frac{1}{3}\right)(-\infty)=+\infty$ **(gradul numărătorului > gradul numitorului);**

**c)** $\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3-5}{2x^3+3x}=\frac{6}{2}=3$ **(gradul numărătorului = gradul numitorului);**

**d)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{-5x^4+x^3-x+2}{4x^4+3x}=-\frac{5}{4}$; **e)** $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n+2x}{-3x^3+5x-9}=\begin{cases}-\infty, n>3\\ -\frac{1}{3}, n=3\\ 0, n<3\end{cases}$;

**f)** $\lim_{n\to\infty}\frac{-2n^2+3n}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}-\frac{2}{3}n=-\frac{2}{3}(\infty)=-\infty$ **(șirul dat este divergent);**

**g)** $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n^3+5}{-3n^3+n^2}=\frac{\frac{1}{2}}{-3}=-\frac{1}{6}$ **(șirul este convergent, având limita finită):**

**h)** $\lim_{n\to\infty}\frac{1000n+1}{n^2-n-10}=0$ **(șirul este convergent, având limita finită).**

**Temă. Reprezentați grafic comportarea funcțiilor în jurul punctelor de acumulare.**

## Exerciții propuse

**Să se calculeze limitele:**

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x}{3x^2-5x+1}$ ; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-x+1}{x^3+1}$ ; c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-x}{x+1}$ ; d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x^2}{x^2-1}$ ; e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^2}{x^2+3x}$ ;

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+3}{2x^2-x}$ ; g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-5x+6}{2x^2-6x}$ ; h) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+1}{x^\alpha+1}, \alpha\in\mathbb{R}$ ; i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4x^3+2x}{5x^\alpha+3}, \alpha\in\mathbb{N}^*$ ;

j) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-3n^2+2n-5}{2n^3+3n^2-n}$ ; k) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4-3n^2+1}{-5n^4+4n^3-1}$ ; l) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n^5+n^3+1}{n^3+1}$ ; m) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}+\dfrac{n+1}{n+2}\right)$ ;

n) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+...+n}{n^2}$ ; p) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}$ ; q) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{(k+1)!}$ ; r) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n+1}-\alpha n-\beta\right)=0$ .

**Reprezentați grafic comportarea funcțiilor în jurul punctelor de acumulare.**

## 4. Limita funcției radical

### 1) Radical de ordin doi

Pentru $f:[0,\infty)\to[0,\infty), f(x)=\sqrt{x}$ și $a\in[0,\infty)$ punct de acumulare,

avem $\boxed{\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}}$ . Dacă $a=\infty$ ,atunci $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty}$ .

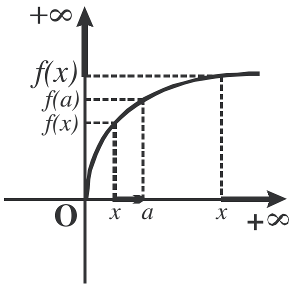



Fig. 19

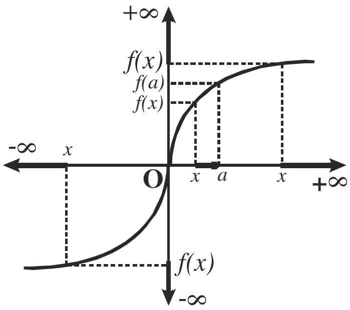



Fig. 20

Comportarea graficului funcției în jurul punctului de acumulare este dată în Fig.19.

### 2) Radical de ordin trei

Pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x}$ și $a\in\mathbb{R}$

avem $\boxed{\lim\limits_{x\to a}\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{a}}$, iar dacă $a=-\infty$ , atunci $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x}=-\infty}$ .

În fine pentru $a=\infty$ , $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x}=\infty}$.

Comportarea graficului funcției în jurul punctelor de acumulare este ilustrată în Fig.20.

Pentru funcția șir $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $f(n)=\sqrt[m]{n}, m\in\mathbb{N}, m\in\{2,3\}$, avem

$\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=\sqrt[m]{\infty}=\infty$.

Dacă $m=3$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{-n}=-\infty$. Dacă $P$ este funcție polinomială, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[m]{P(n)}=\sqrt[m]{\lim\limits_{n\to\infty}P(n)}$ (limita radicalului este egală cu radicalul limitei – dacă ambii radicali există).

## Șirul remarcabil: șirul puterilor cu exponent real, $\left(n^{\alpha}\right)$

Are loc următoarea:

**Teoremă**. Fie șirul $(x_n)$, cu $x_n=n^{\alpha}, n\geq 1, \alpha\in\mathbb{R}$.

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha}=\begin{cases}\infty, \alpha>0\\ 1, \alpha=0\\ 0, \alpha<0\end{cases}$.

Șirul $(x_n)$ cu $x_n=n^{\alpha}, n\geq 1$ se numește **șirul puterilor cu exponent real** $\alpha$.

**Exemple.1)** $\lim\limits_{n\to\infty} n=\lim\limits_{n\to\infty} n^2=\lim\limits_{n\to\infty} n^3=\lim\limits_{n\to\infty} n^{1000}=\lim\limits_{n\to\infty} n^{2006}=\infty$.

**2)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[4]{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{n}=\infty \quad (k\in\mathbb{N}, k\geq 2)$

**3)** $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0, \lim\limits_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0, \lim\limits_{n\to\infty} n^{-\frac{2}{3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}=0$.

**Exemple. Să se calculeze limitele:**

**a)** $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}$ ; **b)** $\lim\limits_{x\to -27}\sqrt[3]{x}$ ; **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[4]{x}$ ; **d)** $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt[5]{x}$ ; **e)**; $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n}$ ; **f)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{-2n^3+n-1}$ ;

**g)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{4n^2+n}{9n^2-n}}$ ; **h)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}}{2n+1}$.

**R. a)** $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}=\sqrt{4}=2$ ; **b)** $\lim\limits_{x\to -27}\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{-27}=-3$ ; **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[4]{x}=\infty$ ; **d)** $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt[5]{x}=-\infty$ ;

**e)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n}=\infty$ **(deoarece** $\sqrt{n^2+n}>\sqrt{n}, \forall n\in\mathbb{N}$ **și se aplică criteriul majorării la** $+\infty$**). Șirul dat este divergent.**

**f)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{-2n^3+n-1}=\sqrt[3]{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-2n^3+n-1\right)}=\sqrt[3]{-\infty}=-\infty$. **Șirul este divergent.**

**g)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{4n^2+n}{9n^2-n}}=\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+n}{9n^2-n}}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$. **Șirul dat este convergent.**

h) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}}{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{\sqrt{1+0}}{2+0}=\frac{1}{2}$ **(deoarece**

$\frac{1}{n}\to 0$ **dacă** $n\to\infty$ **).**

## Exerciții propuse

**Să se calculeze limitele: a)** $\lim\limits_{x\to 9}\sqrt{x}$ **; b)** $\lim\limits_{x\to -32}\sqrt[5]{x}$ **; c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x}$ **; d)** $\lim\limits_{x\to 81}\sqrt[4]{x}$ **; e)** $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}$ **;**

**f)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[4]{16n^5+n^4-3n^2}$ **; g)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{-n^2+2n}$ **; h)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{3n}{6n+1}}$ **; i)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{2n^2+1}{16n^2-n}}$ **;**

**j)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^2-1}{n^3+n}}$ **; k)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ **, l)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ **; m)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ **.**

**Reprezentați grafic comportarea funcțiilor în jurul punctelor de acumulare.**

## 5. Limita funcției exponențiale

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to(0,\infty),\ f(x)=b^x,\ b>0,\ b\neq 1$.

Dacă $0<b<1$, atunci:

**1)** pentru $a\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a}b^x=b^a$;

**2)** pentru $a=-\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty}b^x=\infty$;

**3)** pentru $a=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}b^x=0$.

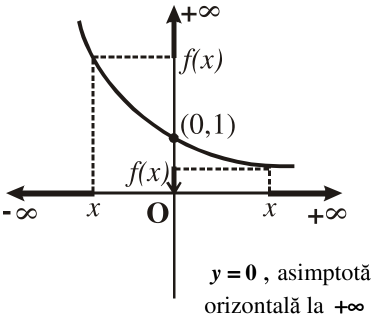



Fig. 21

Comportarea graficului funcției în jurul punctelor de acumulare este redată în Fig.21.

Dacă $b>1$, atunci:

**1)** pentru $a\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a}b^x=b^a$;

**2)** pentru $a=-\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty}b^x=0$;

**3)** pentru $a=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}b^x=\infty$.

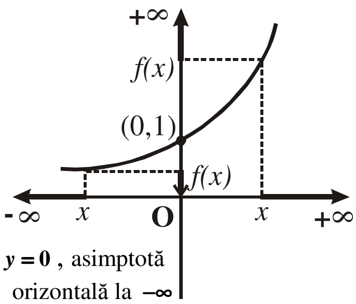



Fig. 22

Comportarea graficului funcției în jurul punctelor de acumulare este redată în Fig.22.

## Şir remarcabil: şirul exponenţial cu baza b, $\left(b^n\right)$

Are loc următoarea:

**Teoremă**. Avem: $\lim_{n\to\infty} b^n = \begin{cases} \infty, \text{ dacă } b>1 \\ 1, \text{ dacă } b=1 \\ 0, \text{ dacă } b\in(-1,1) \\ \text{nu există, dacă } b\le -1. \end{cases}$

**Exemple. Să se calculeze limitele: a)** $\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{2}\right)^x$ **; b)** $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x$ **; c)** $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^x$ **; d)** $\lim_{x\to\infty} 4^x$ **;**

**e)** $\lim_{x\to 3} 2^x$ **; f)** $\lim_{x\to-\infty} 5^x$ **; g)** $\lim_{n\to\infty} 3^n$ **; h)** $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ **.**

**R. a)** $\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ **; b)** $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$ **(baza** $b=\frac{1}{3}\in(0,1)$ **);**

**c)** $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^x = \infty$ **(baza** $b=\frac{1}{5}\in(0,1)$ **); d)** $\lim_{x\to\infty} 4^x = \infty$ **(baza** $b=4>1$ **);**

**e)** $\lim_{x\to 3} 2^x = 2^3 = 8$ **; f)** $\lim_{x\to-\infty} 5^x = 0$ **(baza** $b=5>1$ **); g)** $\lim_{n\to\infty} 3^n = \infty$ **(baza** $b=3>1$ **);**

**h)** $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ **(baza** $b\in(-1,1)$ **.**

### Exerciţii propuse

**Să se calculeze limitele: a)** $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{3}\right)^x$ **; b)** $\lim_{x\to-2}\left(\frac{1}{2}\right)^x$ **; c)** $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x$ **; d)** $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$ **; e)** $\lim_{x\to-\infty} 6^x$ **;**

**f)** $\lim_{x\to\frac{1}{2}} 9^x$ **; g)** $\lim_{n\to\infty} 2^n$**; h)** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ **;i)** $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{2^n+3^n}$ **; j)** $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{3^n+4^n}$ **;**

**k)** $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$ **; l)** $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}$ **; m)** $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}$ **.**

**Reprezentaţi grafic comportarea funcţiilor în jurul punctelor de acumulare.**

## 6. Limita funcției logaritmice

Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\log_b x,\ b>0,\ b\neq 1$.

Dacă $0<b<1$, atunci:

**1)** pentru $a=0,\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\infty$;

**2)** pentru $a\in(0,\infty),\ \lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$;

**3)** pentru $a=\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$.

Comportarea graficului funcției în jurul punctelor de acumulare este dată în Fig.23.

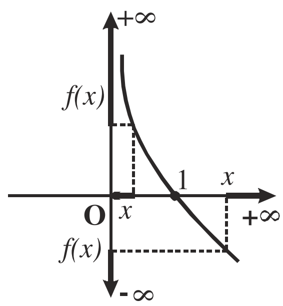
Dacă $b>1$, atunci:

**1)** pentru $a=0,\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$;

**2)** pentru $a\in(0,\infty),\ \lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$;

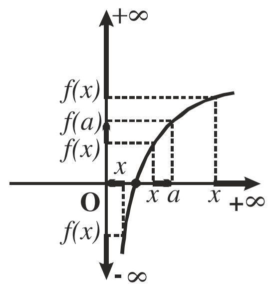
**3)** pentru $a=\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

Comportarea graficului funcției în jurul punctelor de acumulare este dată în Fig.24.




**$x=0$, asimptotă verticală**

Fig. 23




**$x=0$, asimptotă verticală**

Fig. 24

**Exemple. Să se calculeze limitele:**

**a)** $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}} \log_{\frac{1}{2}} x$; **b)** $\lim\limits_{x\to 3} \log_{\frac{1}{3}} x$; **c)** $\lim\limits_{x\to\infty} \log_{\frac{1}{2}} x$; **d)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \lg x$; **e)** $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x$; **f)** $\lim\limits_{x\to e^2} \ln x$;

**g)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log_{\frac{1}{3}} x$.

**R.** a) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}} \log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2$ ; b) $\lim\limits_{x\to 3} \log_{\frac{1}{3}} x = \log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$ ; c) $\lim\limits_{x\to\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$ , (baza $b = \frac{1}{2} < 1$); d) $\lim\limits_{x\searrow 0} \lg x = -\infty$ (baza $b = 10 > 1$); e) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$ (baza $b = e > 1$); f) $\lim\limits_{x\to e^2} \ln x = \ln e^2 = 2$ ; g) $\lim\limits_{x\searrow 0} \log_{\frac{1}{3}} x = \infty$ (baza $b = \frac{1}{3} < 1$).

**Exerciții propuse**

**Să se calculeze limitele: a) $\lim\limits_{x\to 3} \log_{\frac{1}{9}} x$ ; b) $\lim\limits_{x\to\infty} \log_{\frac{1}{2}} x$ ; c) $\lim\limits_{x\searrow 0} \log_{\frac{1}{5}} x$ ; d) $\lim\limits_{x\to e^3} \ln x$ ; e) $\lim\limits_{x\searrow 0} \log_5 x$ ; f) $\lim\limits_{x\to 100} \lg x$ ; g) $\lim\limits_{n\to\infty} \lg\left(\frac{10n^2+1}{n^2+n}\right)$ ; h) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_3\left(\frac{n^2-1}{3n^2+1}\right)$.**

**Reprezentați grafic comportarea funcțiilor în jurul punctelor de acumulare.**

## 7. Limitele funcțiilor trigonometrice directe

**a) Funcția sinus,** $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$.

**1)** Dacă **punctul de acumulare este finit**, adică $a \in \mathbb{R}$, atunci am văzut (la criteriul majorării) că $\boxed{\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a}$ .

**Regulă. Limita funcției sin într-un punct de acumulare finit $a \in \mathbb{R}$ se obține înlocuind pe $x$ cu $a$.**

**2)** Dacă $a = \pm\infty$, atunci $f$ nu are limită în $a$.

Într-adevăr, pentru $a = \infty$ observăm că pentru $x_n = 2n\pi \to \infty$ dacă $n \to \infty$ avem $f(x_n) = \sin 2n\pi = 0$. Luând alte valori ale lui $x$ foarte mari, $x'_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \to \infty$ dacă $n \to \infty$ când $f(x'_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. Constatăm că dacă luăm valori foarte mari ale lui $x$ $(x \to \infty)$, valorile funcției nu se apropie de același număr. Deci $f$ nu are limită la $+\infty$. Analog se arată pentru $a = -\infty$ (se iau șirurile date de $x_n = -2n\pi,\ x'_n = \frac{\pi}{2} - 2n\pi$ cu $n$ foarte mare).

**Exemple. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = \sin 0 = 0$ ; 2) $\lim\limits_{x\to 1} \sin x = \sin 1$ ; 3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \sin x = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .**

**b) Funcția cosinus,** $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$.

**1)** Dacă **punctul de acumulare este finit**, adică $a \in \mathbb{R}$, atunci am văzut că .

$$\boxed{\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a}$$

Deci, are loc următoarea

**Regulă. Limita funcției cos într-un punct de acumulare finit $a \in \mathbb{R}$ se obține înlocuind pe *x* cu *a*.**

**2)** Dacă $a = \pm\infty$, atunci $f$ nu are limită (demonstrați !).

Exemple. **1)** $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$ ; **2)** $\lim\limits_{x\to \pi} \cos x = \cos \pi = -1$ ; **3)** $\lim\limits_{x\to 3} \cos x = \cos 3$ .

**c) Funcția tangentă,** $\operatorname{tg}: \mathbb{R} - \left\{ (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \middle| k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$ .

**1)** Dacă $a$ aparține domeniului de definiție, atunci $\boxed{\lim\limits_{x\to a} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a}$ .

**Regulă. Limita funcției tg într-un punct de acumulare din domeniul de definiție se obține înlocuind pe *x* cu *a*.**

**2)** Dacă $a = \dfrac{\pi}{2}$, atunci $\boxed{\lim\limits_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = +\infty \ ; \ \lim\limits_{x \searrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = -\infty}$

Comportarea graficului funcției în jurul punctelor de acumulare este redat în Fig.25.

Exemple. **1)** $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 0 = 0$ ; **2)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1$ ; **3)** $\lim\limits_{x\nearrow \frac{3\pi}{2}} \operatorname{tg} x = \infty$ ; **4)** $\lim\limits_{x\searrow \frac{3\pi}{2}} \operatorname{tg} x = -\infty$ .

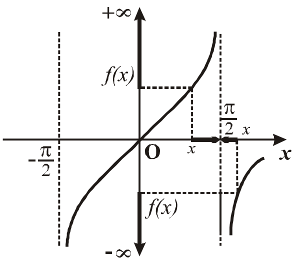


Fig.25

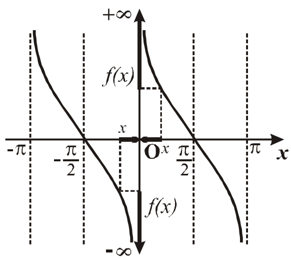


Fig.26

**d) Funcția cotangentă,** $\operatorname{ctg}: \mathbb{R} - \{ k\pi | k \in \mathbb{Z} \} \to \mathbb{R}$ .

**1)** Dacă punctul de acumulare $a$ este din domeniul de definiție al funcției, atunci

$\boxed{\lim\limits_{x\to a} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} a}$ . Deci, are loc următoarea

**Regulă. Limita funcției ctg într-un punct de acumulare din domeniul de definiție se obține înlocuind pe *x* cu *a*.**

**2)** Dacă $a=0$, atunci $\boxed{\lim_{x\nearrow 0} \operatorname{ctg} x = -\infty \quad ; \lim_{x\searrow 0} \operatorname{ctg} x = \infty}$

Comportarea graficului funcției în jurul punctelor de acumulare este redat în Fig.26.

**Exemple. 1)** $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1$ **; 2)** $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = 0$ **; 3)** $\lim_{x\nearrow\pi} \operatorname{ctg} x = -\infty$ .

## 8. Limitele funcțiilor trigonometrice inverse

**a') Funcția arcsinus,** $\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Se demonstrează că dacă $a \in [-1,1]$, atunci $\boxed{\lim_{x\to a} \arcsin x = \arcsin a}$ .

**Exemple. 1)** $\lim_{x\to -1} \arcsin x = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ **; 2)** $\lim_{x\to 0} \arcsin x = \arcsin 0 = 0$ **;**

**3)** $\lim_{x\to\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin x = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$.

**b') Funcția arccosinus,** $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$.

Dacă $a \in [-1,1]$, atunci $\boxed{\lim_{x\to a} \arccos x = \arccos a}$ .

**Exemple. 1)** $\lim_{x\to -1} \arccos x = \arccos(-1) = \pi$ **; 2)** $\lim_{x\to 0} \arccos x = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ **;**

**3)** $\lim_{x\to\frac{\sqrt{3}}{2}} \arccos x = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$.

**c') Funcția arctangentă,** $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

**1)** Dacă $a \in \mathbb{R}$, atunci $\boxed{\lim_{x\to a} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} a}$

**2)** Dacă $a = \infty$, atunci $\boxed{\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}}$ .

**3)** Dacă $a = -\infty$, atunci $\boxed{\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}}$ .

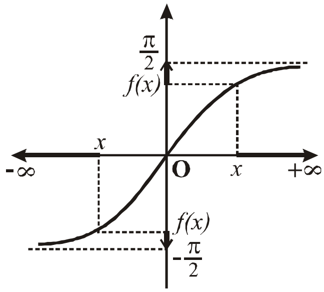
Comportarea funcției în jurul punctelor de acumulare este redată în Fig.27.

**Exemple.** 1) $\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$;

2) $\lim\limits_{x\to 3} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 3$;

3) $\lim\limits_{x\to \frac{\sqrt{3}}{3}} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$;

4) $\lim\limits_{n\to \infty} \operatorname{arctg} n = \frac{\pi}{2}$.




$y = -\frac{\pi}{2}$, as. orizontală la $-\infty$

$y = \frac{\pi}{2}$, as. orizontală la $+\infty$

Fig.27

**d') Funcția arccotangentă,** $\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$.

1) Dacă $a \in \mathbb{R}$, atunci $\boxed{\lim\limits_{x\to a} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} a}$.

2) Dacă $a = \infty$, atunci $\boxed{\lim\limits_{x\to \infty} \operatorname{arcctg} x = 0}$.

3) Dacă $a = -\infty$, atunci $\boxed{\lim\limits_{x\to -\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi}$.

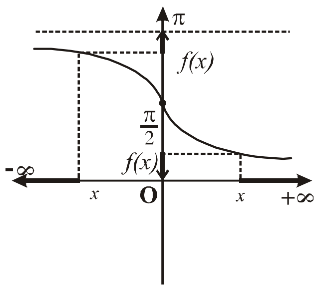
Comportarea funcției în jurul punctelor de acumulare este redată în Fig.28.

**Exemple.** 1) $\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}$;

2) $\lim\limits_{x\to 2} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} 2$;

3) $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$;

4) $\lim\limits_{n\to \infty} \operatorname{arcctg} n = 0$.




$y = \pi$, as. orizontală la $-\infty$

$y = 0$, as. orizontală la $+\infty$

Fig.28

**Regulă. Pentru toate funcțiile elementare, limita funcției în orice punct al mulțimii de definiție *a*, se obține înlocuind pe *x* cu *a*:**

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

## 2.6. OPERAȚII CU LIMITE DE FUNCȚII

Pentru operațiile cu limite de funcții are loc următoarea:

**Teoremă**. Fie $f, g : E \to \mathbb{R}$ și $a$ un punct de acumulare pentru $E$. Dacă $\lim_{x \to a} f(x) = l_1$ și $\lim_{x \to a} g(x) = l_2, l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}, c \in \mathbb{R}$, atunci funcția:

**1)** $(f+g)$ are limită în $a$ dacă $l_1 + l_2$ are sens și $\lim_{x \to a}(f+g)(x) = l_1 + l_2 =$
$= \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$. (**Limita sumei este egală cu suma limitelor**)

**Caz exceptat**: $(\infty - \infty)$ dacă $l_1 = \infty, l_2 = -\infty$ sau $l_1 = -\infty, l_2 = \infty$.

**2)** $(cf)$ are limită în $a$ dacă $cl_1$ are sens și $\lim_{x \to a} cf(x) = cl_1 = c \lim_{x \to a} f(x)$.
(**O constantă iese în afara limitei**)

**3)** $(f \cdot g)$ are limită în $a$ dacă $l_1 \cdot l_2$ are sens și $\lim_{x \to a}(fg)(x) = l_1 \cdot l_2 =$
$= \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x)$.
(**Limita produsului este egală cu produsul limitelor**)

**Caz exceptat**: $(0 \cdot \infty), l_1 = 0$ și $l_2 = \pm\infty$ sau $l_1 = \pm\infty, l_2 = 0$.

**4)** $\frac{f}{g}$ are limită în $a$ dacă $\frac{l_1}{l_2}$ are sens și $\lim_{x \to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l_1}{l_2} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, dacă $l_2 \neq 0$. (**Limita câtului este egală cu câtul limitelor**)

**Cazuri exceptate**: $\left(\frac{0}{0}; \frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right) l_1 = l_2 = 0$ sau $l_1 = \pm\infty, l_2 = \pm\infty$.

**5)** $|f|$ are limită în $a$ și $\lim_{x \to a}|f|(x) = \left|\lim_{x \to a} f(x)\right| = |l_1|$.
(**Limita modulului este egală cu modulul limitei**)

**6)** Dacă $f(x) > 0, \forall x \in E$ și dacă $l_1^{l_2}$ are sens, atunci $f^g$ are limită în $a$ și
$\lim_{x \to a}(f(x))^{g(x)} = l_1^{l_2} = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)^{\lim_{x \to a} g(x)}$.
(**Limita se distribuie în bază și în exponent**)

**Cazuri exceptate**: $(0^0) : l_1 = 0, l_2 = 0$; $(\infty^0) : l_1 = \pm\infty, l_2 = 0$;
$(1^\infty) : l_1 = 1, l_2 = \pm\infty$.

**Observații**: **1**) Rezultatul din **2**) se poate extinde la $n$ funcții $f_i, i=\overline{1,n}$, care au limitele $l_i, l_i \in \overline{\mathbb{R}}, i=\overline{1,n}$ în $a$ și pentru care are sens $l_1+l_2+...+l_n$. Avem: $\lim\limits_{x\to a}\left(f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f_1(x)+\lim\limits_{x\to a} f_2(x)+...+\lim\limits_{x\to a} f_n(x)$.

**2**) Rezultatul din **3**) se păstrează pentru $n$ funcții $f_i, i=\overline{1,n}$, care au limitele $l_i, l_i \in \overline{\mathbb{R}}, i=\overline{1,n}$, în $a$ și pentru care are sens produsul $l_1 \cdot l_2 \cdot ... \cdot l_n$. Avem: $\lim\limits_{x\to a}\left(f_1(x)f_2(x)...f_n(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f_1(x)\lim\limits_{x\to a} f_2(x)...\lim\limits_{x\to a} f_n(x)$.

În particular, dacă $f_1=f_2=...=f_n=f$, atunci $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\right)^n=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^n$.

**3**) Dacă $g(x)>0, x\neq a$ și $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, atunci $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{0_+}=\infty$.

Dacă $g(x)<0, x\neq a$ și $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, atunci $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{0-}=-\infty$.

**4**) Dacă $g(x)=c, \forall x$, atunci din **6**) rezultă $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\right)^c=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^c$ (excepția cazului $l_1=0$ și $c\leq 0$). Pentru $c=\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$, avem

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

**Limita radicalului este egală cu radicalul limitei**.

Dacă $f(x)=b>0$, atunci $\boxed{\lim\limits_{x\to a} b^{g(x)}=b^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}}$.

În fine, dacă $f(x)=x>0, g(x)=r\in\mathbb{R}$, atunci $x^r=e^{r\ln x}$ și $\lim\limits_{x\to a} x^r=e^{r\lim\limits_{x\to a}\ln x}$.

**5**) Dacă $f, g$ sunt șiruri, atunci rezultatele din teoremă și observația **4**) , caracterizează operațiile cu limite de șiruri.

**Exemple. Să se calculeze limitele: 1)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+3x+\ln x\right)$; **2)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2x+1}+\frac{3x}{4x+3}+\frac{x^2-1}{4x^2+1}\right)$;

**3)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2\left(\frac{1}{2}\right)^x+\frac{x^2}{2x+1}\right)$; **4)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{1-x}\cdot 2^x$; **5)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{2x+1}\cdot 3^x$; **6)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{2\cos x-1}$; **7)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{3x+1}}{\ln x}$;

**8)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2^x}{1+3^x}$; **9)** $\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{2x+3}{1-x}\right)^{x+2}$; **10)** $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{4x^2+x}}^{\,x+1}$.

**R.** **Fie $l$ limita respectivă. Atunci:**

1) $l=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+3x\right)+\lim\limits_{x\to 1}\ln x=1+3\cdot 1+\ln 1=4$;

2) $l=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{2x+1}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{4x+3}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{4x^2+1}=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$;

3) $l=2\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x+1}=2\cdot 0+\infty=\infty$;

4) $l=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{1-x}\cdot\lim\limits_{x\to 1}2^x=\lim\limits_{x\to 1}\left(-1-x\right)\lim\limits_{x\to 1}2^x=-2\cdot 2=-4$;

5) $l=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{2x+1}\right)\lim\limits_{x\to-\infty}3^x=\frac{1}{2}\cdot 0=0$; 6) $l=\frac{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1+\sin x\right)}{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(2\cos x-1\right)}=\frac{1+1}{2\cdot 0-1}=-2$;

7) $l=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{3x+1}}{\lim\limits_{x\to\infty}\ln x}=\frac{\frac{1}{3}}{\infty}=0$; 8) $l=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}2^x}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+3^x\right)}=\frac{0}{1+0}=0$;

9) $l=\left(\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x+3}{1-x}\right)^{\lim\limits_{x\to-1}(x+2)}=\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}$; 10) $l=\left(\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{4x^2+x}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)}=\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^{\infty}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}=0$.

## Probleme propuse

**I. a)** 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x^3-x^2+3-2e^x\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(3\arcsin x-2\arccos x\right)$; 3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(3\sin x-2\operatorname{tg}x\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2x+1}+\frac{2x}{3x+2}-\frac{3x}{4x+3}\right)$; 5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x}-1+2^x\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3\left(\frac{1}{2}\right)^x+2\ln x\right)$;

7) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)$; 8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3\operatorname{arcctg}2x-2\operatorname{arcctg}x\right)$.

**b)** 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}+\frac{3n}{4n+2}\right)$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{2n^2+1}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3+n^2}{3n^3-n+1}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+1}-\frac{n^3+1}{n^3+2}\right)$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n-1}$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{3n^2}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2}{n+1}-an-b\right)=1, a,b\in\mathbb{R}$.

**II. a)** 1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-x}\cdot\arcsin x$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}3^x\cdot\ln x$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{3x^2+1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x$; 4) $\lim\limits_{x\nearrow\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}x\cdot\frac{4x^2-\pi^2}{2(2x-\pi)}$;

5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(\sin x\right)\left(\cos x\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2+1}\cdot e^x$; 7) $\lim\limits_{x\to 4}\left(2\sqrt{x}-\frac{x^2-16}{x-4}+\log_4 x\right)$.

**b)** 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n}{3n+1}\cdot\frac{4n+1}{5n-1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n\frac{3n}{2n+5}$ ; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{4n^2}{n^2+n-1}}\log_3\left(\frac{n}{3n+1}\right)$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2+4n+1}-an-b\right)=2\sqrt{2}, a,b\in\mathbb{R}$ ;

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+an+b}+cn\right)=3, a,b,c\in\mathbb{R}$ .

**III. a)** 1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\frac{x^2-4}{x-2}}{2^x}$ ; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{2x^2+3}}{\frac{x}{2x+1}+\left(\frac{1}{5}\right)^x}$ ; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x-3\cos x}{1+\operatorname{tg}x-2^x}$ ; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{2x-1}{x-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ;

5) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\frac{x+1}{x-2}\cdot\ln\frac{1}{x}$ ; 6) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ .

**b)** 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ ; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}$ ; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$ ; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{n^2+1}+n}$ ;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{3^n+1}$ ; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+2^n}{1+3+\ldots+3^n}$ ; 7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(n^2+1\right)}{\ln\left(n^2+2\right)}$.

**IV.** 1) $\lim\limits_{x\to 1}\left|\frac{2x-1}{1-3x}\right|\cdot 3^x$ ; 2) $\lim\limits_{x\to -1}\left|\frac{x^2-1}{1-5x^2}\right|\cdot\arcsin x$ ; 3) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\left|\arcsin x\right|\cdot\left(x^2+\frac{1}{4}\right)$.

**V. a)** 1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x+1}{3x}\right)^{\frac{x^2}{x+1}}$ ; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2x^2+1}\right)^{\frac{x}{x^3+1}}$ ; 3) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{\frac{x}{x+1}}$ ; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{5x^2+1}{3x^2+2}}$ ;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}2^{\frac{x^2+1}{3x^2+x+1}}$ ; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x^2-4x+9}}{x+3}\right)^{\frac{1}{x}}$ ; 7) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3x^2+5x-6}{x^3}}$ ; 8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(1+\operatorname{tg}x)^{\frac{\sin x}{3\cos x+\sqrt{2}}}$ ;

9) $\lim\limits_{x\to 0}(2\arccos x-\pi)^{3\sin x}$ ; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{2x^3+x-1}{8x^3+x^2+1}}^{\sqrt{\frac{4x}{x+1}}}$ .

**b)** 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2n+1}}$ ; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{n+1}{n^2+1}}$ ; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{2n}{3n+1}}$ ; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+1}\right)^{\frac{n^2+1}{n}}$ .

## 2.7. LIMITE REMARCABILE

**1.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$$

$$\lim_{u(x)\to 0}\frac{\sin u(x)}{u(x)}=\lim_{u(x)\to 0}\frac{\operatorname{tg} u(x)}{u(x)}=\lim_{u(x)\to 0}\frac{\arcsin u(x)}{u(x)}=\lim_{u(x)\to 0}\frac{\operatorname{arctg} u(x)}{u(x)}=1$$

Aceste limite elimină o nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$.

**Exemple. Să se calculeze limitele: 1)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$; **2)** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 3x}$; **3)** $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x+\arcsin 2x}{x}$; **4)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{\sin x^3}$; **5)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin 2x}{\sin 3x+\sin 4x}$; **6)** $\lim_{x\to\infty} x\arcsin\frac{1}{2x}$.

**R. Notăm cu $l$ limita de calculat. Avem:**

1) $l=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1=3$;

2) $l=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x}{2x}\cdot\frac{2x}{3x}\cdot\frac{3x}{\operatorname{tg}3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\operatorname{tg}3x}= \;=1\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}$;

3) $l=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}+\frac{\arcsin 2x}{2x}\cdot 2\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}+2\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{2x}=1+2\cdot 1=3$;

4) $l=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{x^3}\cdot\frac{x^3}{\sin x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin x^3}=1^3\cdot 1=1$;

5) $l=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2}{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3+\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4}=\frac{1+2}{3+4}=\frac{3}{7}$; (Altfel se poate prelucra limita scriindu-se

$l=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(1+\frac{\sin 2x}{\sin x}\right)}{\sin 3x\left(1+\frac{\sin 4x}{\sin 3x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 3x}\cdot\frac{1+\frac{\sin 2x}{\sin x}}{1+\frac{\sin 4x}{\sin 3x}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1+2}{1+\frac{4}{3}}=\frac{3}{7}$ – am ținut seama că

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}$); 6) $\lim_{x\to\infty}\frac{\arcsin\frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

## Probleme propuse

**1. Să se calculeze limitele:**

**I.** 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin 3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 10x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin nx}, m,n\in\mathbb{N}^*$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)\sin\frac{1}{x+1}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}2^x\sin\left(\frac{1}{2}\right)^x$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^5 x}{\left(x^2+x\right)\sin x^4}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{\sin x^2}$.

**II.** 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\operatorname{tg} 6x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 3x}{\arcsin 9x}$; 3) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\operatorname{tg}(x+1)}{x^2-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}\left(x^2-1\right)}{\sin\left(x^2-3x+2\right)}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+1\right)\arcsin\frac{1}{3\left(x^2+1\right)}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x+\arcsin 2x}{\arcsin 3x+\arcsin 4x}$; 7) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\arcsin\left(x^2-4\right)}{\sin\left(x^2-5x+6\right)}$.

**2.**

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$$

$$\lim_{u(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)}=\lim_{u(x)\to-\infty}\left(1+\frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)}=\lim_{u(x)\to 0}\left(1+u(x)\right)^{\frac{1}{u(x)}}=e$$

Aceste limite elimină o nedeterminare de forma $1^\infty$

**Exemple. Să se calculeze limitele:**

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^x$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+2\sin^2 x\right)^{\frac{3}{x^2}}$; 4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x+1}\right)^x$.

**R.** **1) Trecând la limită în bază şi exponent rezultă nedeterminarea $1^\infty$. Se prelucrează limita astfel:** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right]^{\frac{x}{3x}}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{3x}}=e^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{e}$.

**2) Suntem în cazul de nedeterminare $1^\infty$. Limita se scrie succesiv**

$$\lim_{x\to 0}\left[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{x}}=\left[\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=e^1=e.$$

**3) Avem nedeterminarea $1^\infty$. Limita devine:**

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(1+2\sin^2 x\right)^{\frac{1}{2\sin^2 x}}\right]^{2\sin^2 x\cdot\frac{3}{x^2}}=\left[\lim_{x\to 0}\left(1+2\sin^2 x\right)^{\frac{1}{2\sin^2 x}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}6\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}=e^6.$$

**4) Din nou avem nedeterminarea $1^\infty$. Prelucrăm limita astfel:**

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}\right]^{\frac{3x}{x+1}}=\left[\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}\right]^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x}{x+1}}=e^3.$$

## Exerciții propuse

**Să se calculeze limitele: 1)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^x$ **;2)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\sin^2 x\right)^{\frac{5}{x^2}}$ **; 3)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin 3x\right)^{\frac{1}{9x}}$ **;**

**4)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$ **.**

**3.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\,(a>0,a\neq 1);\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^r-1}{x}=r,r\in\mathbb{R}^*$$

$$\lim_{u(x)\to 0}\frac{\ln(1+u(x))}{u(x)}=1;\ \lim_{u(x)\to 0}\frac{a^{u(x)}-1}{u(x)}=\ln a;\ \lim_{u(x)\to 0}\frac{(1+u(x))^r-1}{u(x)}=r$$

Aceste limite elimină o nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$.

**Exemple. Să se calculeze limitele:**

**1)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+ex)}{x}$ **; 2)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\lg(1+10x)}{x}$**; 3)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\ln(1+\sin 2x)}$**; 4)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{5x}$ **; 5)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{e^{3x}-1}$ **.**

**R. Notăm cu *l* limita de calculat. Avem:**

**1)** $l=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+ex)}{ex}\cdot e=1\cdot e=e$ **; 2)** $l=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+10x)}{x\ln 10}=\frac{1}{\ln 10}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+10x)}{10x}\cdot 10=\frac{10}{\ln 10}$ **;**

**3)** $l=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{\sin 2x}\cdot\frac{\sin 2x}{\ln(1+\sin 2x)}=1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$**; 4)** $l=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot\frac{3}{5}=1\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$**;**

**5)** $l=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{2x}{3x}\cdot\frac{3x}{e^{3x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{3x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{e^{3x}-1}=1\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}$**.**

## Probleme propuse

**Să se calculeze limitele: 1)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{3x}$**; 2)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)+\ln(1+3x)}{x}$**;**

**3)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln\left(x^3+x-1\right)}{\ln\left(x^2+x-1\right)}$**; 4)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\ln(1+3x)}$**; 5)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\operatorname{arctg} 2x)}{\ln(1+\operatorname{tg} 3x)}$**; 6)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+2\cos x)}{\cos x}$**;**

**7)** $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\ln[1+\operatorname{tg}(x+1)]}{1+\arcsin 3(x+1)}$**; 8)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{x}{2}}-1}{x}$**; 9)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x^2+x}$**; 10)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{3x}{2}}-1}{e^{\frac{x}{2}}-1}$**.**

## 2.8. CAZURI EXCEPTATE LA OPERAȚII CU LIMITE DE FUNCȚII. METODE DE ELIMINARE A NEDETERMINĂRII

Vom ilustra cazurile de nedeterminare $\frac{0}{0}; 0\cdot\infty; \frac{\pm\infty}{\pm\infty}; \infty-\infty; 0^0; \infty^0; 1^\infty$ prin aplicații din care să rezulte tehnica de lucru pentru eliminarea acestor nedeterminări. O parte din aceste cazuri le-am întâlnit. Recomandăm cititorului revederea acelor probleme.

### 1. Cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$

a) **limite de funcții raționale în puncte finite** $a$

(Se face simplificarea prin $(x-a)^k, k\in\mathbb{N}^*$)

1) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\searrow 2}\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$; 3) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{(x-1)(x+2)}$; 4) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x^2+3}$;

5) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$.

b) **limite de funcții raționale în compunere cu funcția modul**

(Se explicitează modulul)

1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{|x|}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{|x-1|}{x-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2+|x|}{|x|}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-2x}{|x|}$; 5) $\lim\limits_{x\to1}\frac{|x-1|^2}{x-1}$.

c) **limite de funcții definite prin cât de expresii iraționale**

- **sub radicali de ordine diferite figurează aceeași expresie**

(Se schimbă variabila, notându-se radicalul de ordin egal cu cel mai mic multiplu comun al ordinelor radicalilor cu altă variabilă, când se ajunge la limita unei funcții raționale)

1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$; 3) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

- **sub radicali figurează expresii diferite**

(amplificarea numărătorului şi (sau) numitorului cu expresia conjugată)

1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to5}\frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3}$; 3) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2}}{x-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$;

5) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-5x+6}$; 6) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$; 7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$; 8) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{\sqrt[3]{x^2-1}-2}$.

d) **limite de funcții trigonometrice**

Pentru a elimina nedeterminarea se utilizează limitele:

$$\lim_{u(x)\to0}\frac{\sin u(x)}{u(x)}=\lim_{u(x)\to0}\frac{\operatorname{tg} u(x)}{u(x)}=\lim_{u(x)\to0}\frac{\arcsin u(x)}{u(x)}=\lim_{u(x)\to0}\frac{\operatorname{arctg} u(x)}{u(x)}=1.$$

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin \alpha x}{\beta x}, \alpha,\beta\in\mathbb{R}, \beta\neq 0$ ; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{5x^2}$ ; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ ; 4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg} x-1}{\sin^2 x-\cos^2 x}$ ;

5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg} x-3}{3x-\pi}$ ; 6) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$ ; 7) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ ; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}$ ;

9) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sin\left(x^2+x-2\right)}{\sin\left(x^2+3x+2\right)}$ ; 10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos x}{x^2}$ .

e) **limite de funcții exponențiale, logaritmice**

Pentru a elimina nedeterminarea se utilizează limitele:

$$\lim_{u(x)\to 0}\frac{\ln\left(1+u(x)\right)}{u(x)}=1,\ \lim_{u(x)\to 0}\frac{a^{u(x)}-1}{u(x)}=\ln a, a>0, a\neq 1.$$

1) $\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{\ln(1+2x)}{4x^2}$ ; 2) $\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sqrt{x}}$ ; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+3x-x^2\right)}{x}$ ; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(2x-1)}{x^2+x-2}$ ;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\operatorname{arctg} x)}{x}$ ; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{\ln(1+x)}$ ; 7) $\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\ln(\cos x)}$ ; 8) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln\left(x^2+3x-3\right)}{\sin\left(x^2-5x+4\right)}$ ;

9) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1}{\sqrt{x}-1}$ ; 10) $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-a^a}{x-a}, a>0$ .

## 2. Cazul de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$

a) **limite de funcții raționale**

1) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{-5x^3+6x^2-3}{2x^2+3x-5}$ ; 2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{4x^3-5x}{-x+1}$ ; 3) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^5-2x^3+9}{-3x^5+x}$ ; 4) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x^4+3x^2-1}{3x^4+5x+2}$ .

b) **limite de funcții iraționale, exponențiale, logaritmice**

1) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\sqrt{x^2+3x+1}}{-2x+5}$ ; 2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{2x^2+x}}{3x+1}$ ; 3) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}$ ; 4) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+2}}$ ; 5) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\ln\left(1+e^{3x}\right)}{x}$ .

## 3. Cazul de nedeterminare $\infty-\infty$

a) **limite de funcții raționale** (Se aduc la același numitor)

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$ ; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x^2-4}\right)$ ; 3) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x^2-9}-\frac{1}{x^3-27}\right)$ ;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x(x+1)}\right)$ .

b) **limite de funcții iraționale (prin amplificare cu conjugata)**

1) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)$ ; 2) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)$ ; 3) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)$ ;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+4}\right)$; 5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+4}\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

c) **limite de funcții iraționale**

Forțare de factor comun a lui $x$ la puterea cea mai mare.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3+x}-\sqrt[3]{x^2+1}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+x+1}-x\right)$; 3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^4+x^2+1}-\sqrt{x^2+x+1}\right)$.

## 4. Cazul de nedeterminare $0\cdot\infty$

Se transformă în $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$.

**Să se calculeze limitele:**

1) $\lim\limits_{x\to0} x\operatorname{ctg} x$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{\pi}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)$; 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg} x$;

5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sec 2x$; 6) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)$;

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+x^3+1}-x^2\right)\sin\frac{1}{x}$.

## 5. Cazul de nedeterminare $1^\infty$

Se utilizează $\lim\limits_{u(x)\to0}\left(1+u(x)\right)^{\frac{1}{u(x)}}=e$ sau $\lim\limits_{u(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)}=e$.

**Să se calculeze limitele:**

1) $\lim\limits_{x\to5}(6-x)^{\frac{1}{x-5}}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+x^2+x+1}{x^3+2x^2+3x+4}\right)^x$; 7) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$; 8) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}, a,b>0$;

9) $\lim\limits_{x\to e}\left(\frac{a^{\ln x}+b^{\ln x}}{a+b}\right)^{\frac{1}{\ln x-1}}, a,b>0$; 10) $\lim\limits_{x\to e}(\ln x)^{\frac{1}{x^2-3xe+2e^2}}$; 11) $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$;

12) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

### 6. Cazul de nedeterminare $0^0$

Se utilizează $\lim\limits_{x\searrow 0} x\ln x = 0$ şi scrierea $f^g = e^{g\ln f}$ .

**1)** $\lim\limits_{x\searrow 0} x^x$ ; **2)** $\lim\limits_{x\searrow 0} (\sin x)^x$ ; **3)** $\lim\limits_{x\searrow 0} x^{\sin x}$ ; **4)** $\lim\limits_{x\searrow 1} (x-1)^{\operatorname{tg}(x-1)}$ ; **5)** $\lim\limits_{x\searrow 0} (\arcsin x)^{\sin x}$ ;
**6)** $\lim\limits_{x\nearrow 1} \left(1-\sqrt{x}\right)^{x-1}$ .

### 7. Cazul de nedeterminare $\infty^0$

Se utilizează scrierea $f^g = e^{g\ln f}$ şi $\lim\limits_{x\searrow 0} x\ln x = 0$ .

**1)** $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ ; **2)** $\lim\limits_{x\searrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^x$ ; **3)** $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\sin\frac{1}{x}}$ ; **4)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\operatorname{tg} x}$ ; **5)** $\lim\limits_{x\to\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ ; **6)** $\lim\limits_{x\to\infty} (x+1)^{\frac{1}{\ln x}}$ .

## 2.9. LIMITE DE FUNCŢII ÎN PROBLEME PRACTICE

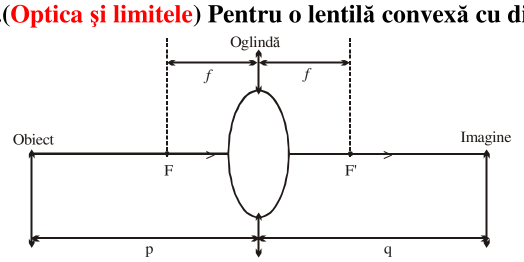
**1.(Teoria relativităţii şi limitele) Einstein a arătat că masa unui corp este funcţie de viteza sa, $m(v) = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$, unde $v$ este viteza în $km/s, 0 \le v < c$,**

**$c = 300.000 km/s$ ( viteza luminii), $m_0$ este masa corpului în repaos. Să observăm că dacă $v = 0$, atunci $m(0) = m_0$ , care este masa corpului în repaos. Pentru $v \to c, v < c$ (deci, la viteze foarte mari), $\lim\limits_{v\to c} m(v) = \infty$!**

**2.(Funcţia " catastrofă" şi limitele) Se consideră funcţia**

**$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\left(50+x^{20}\right)^2 - 2500}{x^{20}}$. Această funcţie are proprietatea că pentru $x = 0,4$ , $f(0,4) \approx 100,044$, iar pentru $x = 0,3$, utilizând calculatorul care poate afişa 12 cifre găsim $f(x) = 0$!!! Efectuând calculele, pentru $x \ne 0$, găsim $f(x) = x^{20} + 100$ şi deci $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 100$. Matematicianul francez, René Thom, este creatorul "Teoriei catastrofelor" , pentru care în 1958 a obţinut medalia FIELDS, echivalentul premiului NOBEL în matematică.**

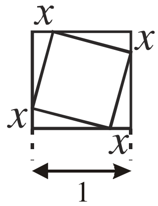
**3.(Optica şi limitele) Pentru o lentilă convexă cu distanţa focală $f$ şi distanţa de la un obiect la centrul lentilei egală cu $p$ , iar de la imagine la centrul lentilei egală cu $q$ există relaţia $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{f}$.**



F, F' focare

**De aici $q = \dfrac{pf}{p-f}, p \ne f, p > f$. Ce se întâmplă când obiectul se apropie de**

focarul lentilei $(p \to f)$? Avem $\lim_{p \searrow f} q(p) = \lim_{p \searrow f} \frac{pf}{p-f} = \infty$, ceea ce arată că imaginea obiectului este "aruncată" la infinit. Ce se întâmplă cu imaginea dacă $p \to \infty$?




**4.(Geometria şi limitele)** Într-un pătrat de latură 1 se înscrie un alt pătrat, aşa cum se indică în figura alăturată. Notăm cu $p(x)$ şi $s(x)$ perimetru şi aria pătratului inscris. Ce puteţi afirma despre limitele funcţiilor $p(x)$ şi $s(x)$ în $0_+, 1_-$ şi $\frac{1}{2}$ Calculaţi $p(x)$ şi $s(x)$ şi verificaţi afirmaţiile făcute mai sus.

**5.(Calculul aproximativ şi limitele)** Am văzut că pentru $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$, $x \geq -1, x \neq 0$

avem $\lim_{x \to 0} f(x) = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2}$.

Altfel spus pentru $x \to 0$, $\sqrt{1+x}-1$ se poate echivala cu $\frac{x}{2}$ adică $\sqrt{1+x}-1 \approx \frac{x}{2}$.

Să calculăm $\sqrt{105}$. Avem $\sqrt{105} = 10\sqrt{1,05} = 10\sqrt{1+0,05} \approx 10\left(1+\frac{0,05}{2}\right) = 10(1+0,025) =$

$= 10,25$. Calculaţi 1) $\sqrt{912} = \sqrt{900+12} = 30\sqrt{1+\frac{12}{900}}$; 2) $\sqrt{260}$; 3) $\sqrt{1632}$.

Arătaţi că $\sqrt[n]{1+x}-1 \approx \frac{x}{n}$ şi calculaţi 1) $\sqrt[3]{1047}$; 2) $\sqrt[5]{1080}$;

**6.(Jocurile de societate şi şirurile)** Se expediază câte o scrisoare (care conţine o listă cu cinci nume de persoane) la cinci persoane, care trebuie să trimită 1 € la numele din topul listei şi apoi să şteargă acea persoană. Fiecare dintre aceste cinci persoane care au primit scrisoarea îşi adaugă numele lor la baza listei şi trimit scrisoarea astfel completată la cinci prieteni. Presupunând că nimeni nu rupe lanţul, câţi euro au primit cei cinci de pe scrisoarea de la începutul jocului ?

Jocul poate fi gândit ca fiind organizat pe nivele. Nivelul 1 corespunde trimiterii listei iniţiale la primele cinci persoane. Deci, prima persoană de pe listă va primi în total 5 €. Nivelul 2 înseamnă trimiterea de liste de către cele cinci persoane, care au primit liste la nivelul 1, la câte alte cinci. În total apar în joc la acest nivel $5 \cdot 5 = 5^2 = 25$ de persoane. Deci, a doua persoană de pe lista iniţială va primi 25 €. A treia persoană va primi $5^3 = 125$ €, a patra 625 €, iar a cincea 3125 €.

**7.(Medicina şi şirurile)** Cantitatea unui antibiotic în sânge este dată de formula $c_n = c\left[1+e^{kt}+e^{2kt}+...+e^{(n-1)kt}\right]$, unde $c$ este cantitatea de antibiotic în miligrame, $n$ este numărul de doze, $t$ este timpul între doze, iar $k$ este o constantă care precizează cât de repede sângele metabolizează antibioticul. Presupunem că o doză de antibiotic creşte nivelul sângelui cu 0,5 mg/l. Dacă antibioticul este dat la 4 ore şi $k = -0,867$, să se determine concentraţia de antibiotic înainte de a cincea doză.

Avem de calculat elementul $c_4 = c\left(1+e^{4k}+e^{8k}+e^{12k}\right)$. Găsim $c_4 \approx 0,516$ mg.

**8. (Tenisul, probabilităţile şi şirurile)** Într-un ghem de tenis de câmp la scorul 40-40, un jucător are nevoie, pentru adjudecarea ghemului, de două puncte consecutive (avantaj şi apoi câştigă ghemul). Se demonstrează că probabilitatea de a câştiga ghemul este limita şirului $(p_n)$, unde $p_n = p^2\left(1+\left[2p(1-p)\right]+\left[2p(1-p)\right]^2+...+\left[2p(1-p)\right]^{n-1}\right)$, unde $p$ este probabilitatea ca jucătorul să câştige un punct. De exemplu, pentru $p = 0,55$ obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 0,599$.

**9.** (**Rata inflaţiei**) Când un economist calculează rata inflaţiei pentru obiecte de uz casnic, alimente, motorină sau sănătate el calculează dobânda compusă cu care creşte preţul acelui obiect, aliment, motorină etc. De exemplu, dacă litrul de motorină este de 0,85 € şi se estimează o rată a inflaţiei de 4,3 % anuală la motorină, atunci peste trei ani valoarea unui litru se calculează astfel: 1) după un an: $0,85+0,85\cdot\frac{4,3}{100}\approx 0,886$; 2) după doi ani: $0,886+0,886\cdot\frac{4,3}{100}\approx 0,924$; 3) după trei ani: $0,924+0,924\cdot\frac{4,3}{100}\approx 0,964$.

În general, am văzut că dacă $p$ este preţul la momentul actual, iar $d$ este inflaţia anuală (sau dobânda la depozite), atunci după $n$ ani valoarea este dată de $p_n = p(1+d)^n$.

**10. Aria unui cerc (lungimea cercului)** se defineşte ca limita ariilor (perimetrelor) poligoanelor cu $n$ laturi înscrise şi circumscrise cercului. Când $n\to\infty$ şi lungimile laturilor tind la zero, atunci poligoanele tind să coincidă cu cercul. Ariile (perimetrele) poligoanelor $I_n$ (înscrise) şi $C_n$ (circumscrise) tind la o limită comună $A$ (perimetrul $P$), care reprezintă aria (perimetrul) cercului. Dacă $A(I), P(I)$ este aria şi respectiv perimetrul (suma lungimilor laturilor) poligonului $I$, atunci
$A = \lim\limits_{n\to\infty} A(I_n) = \lim\limits_{n\to\infty} A(C_n),\ P = \lim\limits_{n\to\infty} P(I_n) = \lim\limits_{n\to\infty} P(C_n)$.

În mod similar se defineşte aria şi lungimea unei figuri convexe.

## REZUMATUL CAPITOLULUI

| Noţiune | Definiţie. Caracterizare | Comentarii |
|---|---|---|
| Limita unei funcţii $f:(a-p,a)\cup(a,a+p)$, $p>0$, în $x=a$ | $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$ $(\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, 0<\lvert x-a\rvert<\delta$ $\Rightarrow \lvert f(x)-l\rvert<\varepsilon)$ | |
| $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ | • cu ajutorul vecinătăţilor $\forall V\in\mathcal{V}(l), \exists U\in\mathcal{V}(a)$, $\forall x\in U\cap E, x\neq a, f(x)\in V$<br>• cu limitele laterale $l_s(a)=l_d(a)=l$<br>• criteriul majorării $\lvert f(x)-l\rvert\le g(x)$, $\forall x\in V\in\mathcal{V}(a), x\neq a$ $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=l$<br>• criteriul „cleştelui” $f(x)\le g(x)\le h(x), \forall x\in V\in\mathcal{V}(a), x\neq a$ | |

| | | |
|---|---|---|
| | $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=l \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} g(x)=l$ | |
| **Limitele funcțiilor elementare** $f:E\to\mathbb{R}, a\in E$, **punct de acumulare** | **Limita unei funcții elementare într-un punct de acumulare finit, din domeniul de definiție se obține înlocuind pe** $x$ **cu** $a$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ | |
| **Operații cu limite de funcții** $f,g:E\to\mathbb{R}, a\in E$, **punct de acumulare** $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l_1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=$ $=l_2$, $l_1,l_2\in\overline{\mathbb{R}}$ | **1) dacă** $l_1+l_2$ **are sens, atunci** $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)$ <br> **2) dacă** $l_1 l_2$ **are sens, atunci** $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$ <br> **3) dacă** $\frac{l_1}{l_2}$ **are sens, atunci** $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ <br> **4) dacă** $f(x)>0, \forall x$ **și are sens** $l_1^{l_2}$, **atunci** $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\right)^{g(x)}=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ | **Caz exceptat:** $\infty-\infty$ <br> **Caz exceptat:** $0\cdot\infty$ <br> **Cazuri excetate:** $\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ <br> **Cazuri exceptate:** $0^0, \infty^0, 1^\infty$ |
| **Limite remarcabile** | **1)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$ <br> **2)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ <br> **3)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1; \lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a, a>0, a\neq 1$ | |

## Teste de evaluare

**Testul 1** (1 punct din oficiu)

**1.** **Să se calculeze limitele: a)** $\lim\limits_{x\to 9}\frac{x+1}{\sqrt{x}-1}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$.

**(3 puncte)**

**2.** **Să se determine parametrii** $a,b\in\mathbb{R}$ **pentru care funcția** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\begin{cases}\frac{ax+1}{x-1}, x<1\\ bx-3, x\geq 1\end{cases}$ **are limită în** $x=1$. **(1 punct)**

**3.** **Să se determine** $a,b\in\mathbb{R}$ **astfel încât** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-2ax-3b\right)=1$. **(1 punct)**

**4.** **Să se calculeze limitele: a)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x}}{3x+1}$ **; b)** $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{n+3}{n}\right)^{2n}$ **; c)** $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$ **. (3 puncte)**

**5.** **Stabiliți dacă există** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ **, unde** $f(x) = \begin{cases} x^2, x \in \mathbb{Q} \\ 2x, x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ **. (1 punct)**

## **Testul 2** (de tip grilă) (1 punct din oficiu)

**1.** **Să se calculeze limitele:**

**1)** $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{-2n+1}{4n-1}$ **; a)** $\frac{1}{2}$ **; b)** $-\frac{1}{2}$ **; c) 2; d)** $\frac{1}{4}$ **. (1 punct)**

**2)** $\lim\limits_{n \to \infty} \left(n - \sqrt{n^2 - 3n}\right)$ **; a) 1; b)** $\frac{2}{3}$ **; c)** $\frac{3}{2}$ **; d) 0. (1 punct)**

**3)** $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$ **; a) -1; b) 0; c) 1; d)** $\infty$ **. (1 punct)**

**4)** $\lim\limits_{x \to 3} \frac{|x-3|}{(x-3)^2}$ **; a)** $-\infty$ **; b)** $\infty$ **; c) 0; d) nu există. (1 punct)**

**5)** $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{\sin(x-1)}$ **; a)** $-\frac{1}{2}$ **; b) 2; c) -1; d) 0. (1 punct)**

**2.** **Fie** $a, b \in \mathbb{R}$ **astfel încât** $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+1} - ax - b\right) = 5$ **. Atunci: a)** $a = 1, b = -5$ **;**
**b)** $a = -5, b = 1$ **; c)** $a = b = 1$ **; d)** $a = -1, b = 1$ **. (2 puncte)**

**3.** **Fie** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^x, x \le 0 \\ x^2 + ax + b, x > 0 \end{cases}$ **. Valorile lui** $a, b \in \mathbb{R}$ **pentru care există limitele,**
$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ **și** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ **sunt: a)** $a = b = 1$ **, b)** $a = b = -1$ **; c)** $a = 1, b = -1$ **; d) nu există.**
**(2 puncte)**

# 3. FUNCȚII CONTINUE

În acest capitol, care este asemănător cu cel precedent, se definesc conceptele de funcție continuă într-un punct și pe o mulțime.
Sunt prezentate operațiile algebrice cu funcții continue (într-un punct și pe o mulțime), compunerea funcțiilor continue, proprietățile locale și pe intervale ale funcțiilor continue (proprietatea lui Darboux, semnul funcțiilor continue, rezolvări de ecuații și inecuații). Problemele propuse sunt diverse, ilustrând și aprofundând teoria.

**Istoric.** Rezultatele acestui capitol sunt datorate matematicienilor: Bolzano (1781- 1848), Cauchy (1789- 1857), Weierstrass (1815- 1897), Darboux (1842- 1917).



## 3.1. INTRODUCERE

În capitolul precedent am studiat comportarea unei funcții $f:E\to\mathbb{R}$ în jurul unui punct de acumulare $a$ al mulțimii $E$, fără a lua în considerare valoarea funcției în punctul $a$ ( punctul $a$ nu aparține obligatoriu mulțimii $E$). În cele ce urmează vom fi interesați atât de comportarea funcției $f$ în jurul lui $a$ cât și de valoarea lui $f$ în punctul $a$.

Deci, **aici obligatoriu** $a\in E$. Mai precis, să comparăm valorile funcției în jurul lui $a$ cu valoarea funcției în punctul $a$, adică atunci când $x$ „ se apropie” de $a$ să vedem dacă $f(x)$ „ se apropie” de $f(a)$. Dacă răspunsul este afirmativ, atunci spunem că $f$ este continuă în $x=a$. Matematic putem formula afirmația de mai sus cu ajutorul șirurilor astfel: pentru orice șir $(x_n)$, $x_n\to a$, $x_n\in E$ ( $x_n$ nu neapărat diferit de $a$ ) , șirul valorilor funcției $(f(x_n))$ converge la $f(a)$. Altfel spus să comparăm $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (dacă există) cu valoarea funcției în $x=a$, adică cu $f(a)$.

Evident această ultimă formulare are sens dacă $a$ din $E$ este şi punct de acumulare pentru $E$. Dar ea rămâne valabilă şi pentru $a \in E$, punct izolat, pentru că nu avem decât să luăm şirul $(x_n)$ cu $x_n = a$, $\forall n(\text{sau}\ \forall n \geq n_0)$ pentru care, evident, $x_n \to a$, când avem $f(x_n) = f(a), \forall n$ (sau $\forall n \geq n_0$) şi $f(x_n) \to f(a)$. Deci observăm că **în puncte izolate din** $E$ problema pusă în discuție este verificată. Astfel de puncte prezintă un interes scăzut, deoarece ele nu au legătură cu procesul de trecere la limită. De aceea, **vom considera în cele ce urmează doar puncte** $a \in E$, **care sunt puncte de acumulare pentru** $E$, adică $a \in E \cap E'$.
Naiv, o funcție $f : E \to \mathbb{R}$ este continuă în $x = a$, dacă există o vecinătate a punctului $(a, f(a))$ pe care graficul, trecând prin acest punct, se desenează continuu. Extinzând, $f$ este continuă pe un interval $E$ (dacă este continuă în fiecare punct din $E$) dacă graficul funcției este o curbă continuă.

## 3.2 DEFINIȚIA UNEI FUNCȚII CONTINUE ÎNTR-UN PUNCT

**1. Analiza unui exemplu**
Să considerăm funcția $f : [0,3] \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 3x, x \in [0,1] \\ x^2, x \in (1,2) \\ 3, x = 2 \\ 4, x \in (2,3] \end{cases}$$

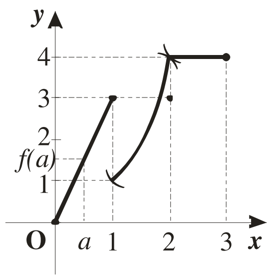


Fig. 1

al cărui grafic este cel din Fig. 1.
După cum se poate observa este format din trei părți, graficul fiind întrerupt în dreptul absciselor 1 şi 2. Punctul marcat printr-un cerc plin aparține graficului. **Ne propunem să comparăm** $\lim_{x \to a} f(x)$ (în cazul în care există) **cu valoarea funcției în punctul** $a, f(a)$. Analizăm cazurile:
1) Dacă $a \in [0,1)$, atunci $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a}(3x) = 3a = f(a)$, adică limita funcției $f$ în $x$=$a$ este egală cu valoarea funcției $f$ în $x = a$, $f(a)$. Constatăm că în acest punct, $(a, f(a))$, graficul funcției nu este întrerupt. Chiar mai mult, pe o vecinătate a lui $a$, suficient de mică, graficul care trece prin $(a, f(a))$ se poate desena fără a se ridica vârful creionului de pe hârtie (deci este continuu).
Deci, dacă într-un punct de abscisă $a$ graficul nu se întrerupe, atunci limita funcției în $a$ se obține înlocuind direct în funcție pe $x$ cu $a$.

2) Dacă $a=1$, atunci avem $l_s(1)=\lim\limits_{x\nearrow 1} f(x)=\lim\limits_{x\nearrow 1}(3x)=3$,

$l_d(1)=\lim\limits_{x\searrow 1} f(x)=\lim\limits_{x\searrow 1}\left(x^2\right)=1$, ceea ce arată că $f$ **nu are limită în punctul** $a=1$.

În acest punct **graficul se întrerupe ( este discontinuu).**

3) $a\in(1,2)$. Avem $l_s(a)=l_d(a)=f(a)=a^2$, adică $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ şi graficul funcției este continuu.

4) Pentru $a=2$, avem $l_s(2)=\lim\limits_{x\nearrow 2} f(x)=\lim\limits_{x\nearrow 2}\left(x^2\right)=4$,

$l_d(2)=\lim\limits_{x\searrow 2} f(x)=\lim\limits_{x\searrow 2} 4=4$, dar $f(2)=3$. În acest caz există limita funcției $f$ în $x=2, \lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$, dar aceasta **este diferită** de valoarea funcției $f$ în $a=2, \lim\limits_{x\to 2} f(x)\neq f(2)$. Se observă că şi în acest caz **graficul este discontinuu** în $a=2$.

5) Dacă $a\in(2,3]$, atunci $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ şi graficul funcției este continuu.

După aceste comentarii putem formula următoarele

**Definiții**: **1)** Fie $f:E\to\mathbb{R}$ şi $a\in E\cap E'$. Se spune că funcția $f$ **este continuă în punctul** $a$, dacă există $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ şi $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Punctul $a$ se numeşte **punct de continuitate** pentru funcția $f$.

**2)** O funcție $f:E\to\mathbb{R}$ **este discontinuă în punctul** $a\in E$, dacă nu este continuă în acest punct.

Punctul $a$ se numeşte **punct de discontinuitate** pentru funcția $f$.

**Observații. 1**) Definiția continuității unei funcții într-un punct reclamă trei lucruri: $1^0$) există şi este finită $\lim\limits_{x\to a} f(x)$; $2^0$) are sens $f(a)$; $3^0$) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

**2**) Definiția continuității unei funcții într-un punct este similară definiției limitei unei funcții într-un punct, cu deosebire că în definiția limitei se impune condiția $x\neq a$, în timp ce în definiția continuității această condiție dispare.

**3)** În punctul în care funcția nu este definită nu are sens să se pună problema continuității sau a discontinuității.

Exemple. **1) Pentru funcția $f(x)=\operatorname{tg} x$ şi punctul $x=\frac{\pi}{2}$ nu are sens să punem problema continuității sau discontinuității, deoarece $f$ nu este definită în acest punct.**

**2) Funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\lg x$ și $x=-10$. Nu se poate pune problema continuității sau discontinuității funcției $f$ în $x=-10$, deoarece funcția nu este definită în acest punct.**

**3) Fie $f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ și punctul $x=2$. Observăm că**

**$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$, dar nu este definită funcția $f$ în $x=2$.**

**Dacă însă luăm funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, x\neq 2\\ 4, x=2\end{cases}$ atunci $g$ prelungește prin continuitate funcția $f$ în $x=2$. Despre această construcție, în paragraful următor.**

**4)** Egalitatea din definiția **1**), $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ se poate scrie

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=f\left(\lim\limits_{x\to a} x\right)$, și se traduce prin „o funcție continuă comută cu limita”
( proprietate ce va fi extinsă și la alte funcții decât cea identică).

**Exemple: 1) Să se studieze continuitatea funcțiilor de mai jos $(f:\mathbb{R}\to\mathbb{R})$ în punctele indicate:**

**a) $f(x)=\begin{cases}x^3, x\leq 3\\ 3x^2, x>3\end{cases}, a=3$; b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|}, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}, a=0$; c) $f(x)=\begin{cases}x, x\in\mathbb{Q}\\ 0, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}, a=0$.**

**R. a) Trebuie să vedem dacă există $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ și în caz afirmativ să o comparăm cu $f(3)$. Studiem existența limitei în $a=3$, calculând limitele laterale. Avem: $l_s(3)=\lim\limits_{x\nearrow 3} f(x)=\lim\limits_{x\nearrow 3} x^3=27$,**

**$l_d(3)=\lim\limits_{x\searrow 3} f(3)=\lim\limits_{x\searrow 3} 3x^2=27$, iar $f(3)=27$.**

**Deci $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=27=f(3)$, ceea ce înseamnă că $f$ este continuă în $a=3$.**

**b) Să observăm că $|x|=x$ dacă $x\geq 0, |x|=-x$, dacă $x<0$, determină calcularea limitelor laterale în $a=0$. Avem: $l_s(0)=\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{\sin x}{-x}=-1, l_d(0)=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Cum $l_s\neq l_d$, rezultă că nu există limita funcției în $a=0$, și deci $f$ nu este continuă în $a=0$. Acest punct este punct de discontinuitate pentru $f$.**

**c) Pentru astfel de funcții (numite de tip Dirichlet) avem regula pentru existența limitei în $x=a$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in\mathbb{Q}}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}}} f(x)$.**

**De aici deducem că $f$ are limită în $a=0$ și $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$. Cum $f(0)=0$, se obține că $f$ este continuă în $a=0$.**

**Observație. Deși funcția este continuă în $x=0$, nu se poate trasa graficul lui $f$ în jurul lui 0, pentru a vedea dacă este continuu sau nu!!!**

**2) Să se determine parametrul real $\alpha$, pentru care funcția**

**$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2\alpha x+1, x\leq 1\\ \alpha x^2+3\alpha x, x>1\end{cases}$, este continuă în punctul $a=1$.**

**R. Condiția de continuitate în $a=1$, fiind vorba de o funcție multiformă în $x=1$, se exprimă cu ajutorul limitelor laterale**

$$\lim_{x\nearrow 1} f(x)=\lim_{x\searrow 1} f(x)=f(1)\Leftrightarrow \lim_{x\nearrow 1}(2\alpha x+1)=\lim_{x\searrow 1}\left(2\alpha x^2+3\alpha x\right)=2\alpha+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha+1=\alpha+3\alpha\Leftrightarrow\alpha=\frac{1}{2}.$$

**Deci, pentru $\alpha=\frac{1}{2}$, funcția este continuă în $a=1$; în caz contrar $\left(\alpha\neq\frac{1}{2}\right)$ funcția este discontinuă în $a=1$.**

## 2. Prelungirea prin continuitate a unei funcții într-un punct

Fie $f:E\to\mathbb{R}, a\notin E, a$ punct de acumulare pentru $E$. Dacă există şi este finită $\lim_{x\to a} f(x)=l\in\mathbb{R}$, atunci are loc următoarea:

**Definiție.** Funcția $\overline{f}:E\cup\{a\}\to\mathbb{R}$ definită prin $\overline{f}(x)=\begin{cases} f(x), x\in E\\ l, x=a\end{cases}$, se numeşte **prelungirea prin continuitate a funcției $f$ în punctul $a$.**

Din $\lim_{x\to a}\overline{f}(x)=\lim_{x\to a} f(x)=l=\overline{f}(a)$ rezultă continuitatea funcției $\overline{f}$ în punctul $x=a$. În plus, $\overline{f}$ este unica funcție cu această proprietate, în sensul că dacă înlocuim pe $l$ cu $l'\neq l$, în $x=a$, funcția obținută nu mai este continuă în $x=a$.

**Exemple. 1) Să se stabilească dacă următoarele funcții pot fi prelungite prin continuitate în punctele indicate:**

**a)** $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=x\sin\frac{1}{x}, a=0; f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\sin\frac{1}{x}, a=0$

**R. a) Deoarece $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$, funcția se poate prelungi prin continuitate în $a=0$ cu ajutorul funcției $\overline{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \overline{f}(x)=\begin{cases} f(x), x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$.**

**b) S-a văzut că nu există limita funcției $f$ în $a=0$. Deci $f$ nu poate fi prelungită prin continuitate în $a=0$.**

**2) Să se determine constantele $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $\frac{1}{x(x-1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}, \forall x\in\mathbb{R}-\{0,1\}$.**

**R. Înmulțind relația dată cu $x$ şi respectiv $x-1$ se obțin egalitățile $\frac{1}{x-1}=a+\frac{bx}{x-1}, \frac{1}{x}=\frac{a(x-1)}{x}+b, \forall x\in\mathbb{R}-\{0,1\}$.**

**Prelungim prima relație prin continuitate în punctul $x=0$, rezultă $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x-1}=-1=a$.**

**Analog, a doua relație o prelungim prin continuitate în punctul $x=1$ și obținem $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x}=1=b$.**

**Deci** $\frac{1}{x(x-1)}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$.

### 3. Continuitate laterală

Pentru $f:E\to\mathbb{R}$ și $a\in E\cap E'$, am definit continuitatea lui $f$ în $x=a$ prin egalitatea $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$, dacă există $\lim\limits_{x\to a}f(x)$. Este posibil să avem doar $\lim\limits_{x\nearrow a}f(x)=f(a)$ sau $\lim\limits_{x\searrow a}f(x)=f(a)$. În aceste cazuri vorbim de continuitate laterală în $x=a$.

Mai precis au loc următoarele:

**Definiții. 1)** Fie $a\in E$ punct de acumulare pentru $E\cap(-\infty,a)$. Se spune că $f:E\to\mathbb{R}$ **este continuă la stânga** în $a$ dacă există $\lim\limits_{x\nearrow a}f(x)$ și $\lim\limits_{x\nearrow a}f(x)=f(a)$.

**2)** Fie $a\in E$ punct de acumulare pentru $E\cap(a,\infty)$. Se spune că *f* **este continuă la dreapta în** $x=a$ dacă există $\lim\limits_{x\searrow a}f(x)$ și $\lim\limits_{x\searrow a}f(x)=f(a)$.

Următoarea teoremă implică cele două tipuri de continuitate.

**Teoremă.** Funcția $f:E\to\mathbb{R}$ **este continuă în** $a\in E$ **dacă și numai dacă** *f* **este continuă la stânga și la dreapta în** *a*.

Deci, *f* continuă în $a\Leftrightarrow l_s(a)=l_d(a)=f(a)$.

**Demonstrație.** Evidentă. ■

**Observații. 1)** Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, atunci în $x=a$ se pune problema continuității la dreapta, iar în $x=b$ se pune problema continuității la stânga.

**2)** Acest criteriu se aplică funcțiilor multiforme $f$, care pentru $x\le a$ au o exprimare, iar pentru $x>a$ au altă exprimare.

**Exemplu. Să se studieze continuitatea funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, în punctele, indicate:**

**1)** $f(x)=\begin{cases}x^2-3x, & x\le 1\\ 3x+1, & x>1\end{cases}, a=1$; **2)** $f(x)=\begin{cases}\frac{2^{x-1}-1}{x-1}, & x<1\\ \alpha, & x=1\\ \ln(x+1), & x>1\end{cases}, a=1$; **3)** $f(x)=[2x], a=\frac{1}{2}$

**R. 1) Avem :** $l_s(1)=\lim\limits_{x\nearrow 1}\left(x^2-3x\right)=-2, l_d(1)=\lim\limits_{x\searrow 1}(3x+1)=4, f(1)=-2$.

**Din** $l_s(1)=f(1)$ **rezultă** $f$ **continuă la stânga în** $x=1$**, dar nu este continuă în** $x=1$**.**

**2) Avem:** $l_s(1)=\lim\limits_{x\nearrow 1}\dfrac{2^{x-1}-1}{x-1}=\ln 2, l_d(1)=\lim\limits_{x\searrow 1}\ln(x+1)=\ln 2$**, iar** $f(1)=\alpha$.

**Dacă** $\alpha=\ln 2$**, atunci** $l_s(1)=l_d(1)=f(1)$ **şi deci** $f$ **este continuă în** $x=1$**. Dacă** $\alpha\neq\ln 2$**, atunci** $f$ **este discontinuă în** $x=1$**.**

**3) Explicităm funcția în jurul lui** $a=\frac{1}{2}$**. Avem:** $f(x)=0$**, dacă** $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ **şi** $f(x)=1$**, dacă** $x\in\left[\frac{1}{2},1\right)$**. Cu aceasta** $l_s\left(\frac{1}{2}\right)=0, l_d\left(\frac{1}{2}\right)=1$ **şi** $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$**. Din** $l_d\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)$ **rezultă că** $f$ **este continuă la dreapta în** $a=\frac{1}{2}$**.**

Ținând seamă de definiția limitei unei funcții într-un punct cu ajutorul vecinătăților, precum şi de caracterizările limitei cu $\varepsilon-\delta$, sau cu limitele laterale, continuitatea unei funcții într-un punct se poate reformula echivalent. Mai precis are loc următoarea:

**Teoremă (de caracterizare a continuității).** Fie $f:E\to\mathbb{R}$ şi $a\in E\cap E'$. Următoarele afirmații sunt echivalente pentru continuitatea lui $f$ în $x=a$:

**1)** ( **Criteriul** $\varepsilon-\delta$) Pentru orice $\varepsilon>0$, există un număr real $\delta>0$, astfel încât pentru $\forall x\in E$ cu $|x-a|<\delta$ să rezulte $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ (Fig. 2).
**Observație.** În general $\delta$ depinde de $a$ şi $\varepsilon$.

**2)** (**Criteriul cu vecinătăți**) Pentru orice vecinătate $V$ a lui $f(a)$, există $U$ o vecinătate a lui $a$ astfel încât $\forall x\in U\cap E$ să rezulte $f(x)\in V$, adică $f(U\cap E)\subseteq V$ (Fig. 3).

**3)** (**Continuitatea bilaterală**) Dacă există $\lim\limits_{x\nearrow a}f(x)\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\searrow a}f(x)\in\mathbb{R}$ şi $\lim\limits_{x\nearrow a}f(x)=\lim\limits_{x\searrow a}f(x)=f(a)$.

**Observații. 1)** Dacă $f$ este continuă în $x=a$, atunci din criteriul $\varepsilon-\delta$ graficul lui $f$, pe o vecinătate a lui $a$, se află între două drepte paralele cu axa $Ox$, $y=f(a)-\varepsilon, y=f(a)+\varepsilon$ ( Fig. 2).

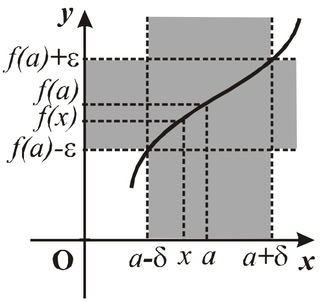



Fig.2

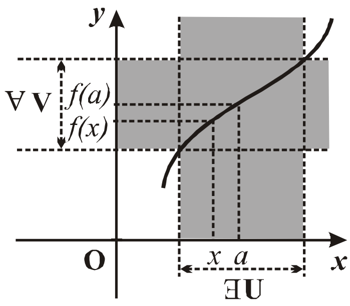



Fig.3

**2**) Reformulați, utilizând teorema, continuitatea laterală într-un punct.

### 4. Puncte de discontinuitate. Discontinuități de prima și a doua speță

Am văzut că o funcție $f:E\to\mathbb{R}$, care nu este continuă într-un punct $x=a$ se spune că este discontinuă în acel punct sau că punctul $x=a$ este un **punct de discontinuitate** pentru *f*. Pe de altă parte *f* este continuă în orice punct izolat din *E*, ceea ce înseamnă că orice punct de discontinuitate trebuie să fie punct de acumulare al lui *E*, caz în care se poate vorbi de existența limitelor laterale.
Cerința de continuitate în punctul $x=a$ se exprimă prin
$\lim\limits_{x\nearrow a} f(x)=\lim\limits_{x\searrow a} f(x)=f(a)$. (1)
Formulăm următoarele:

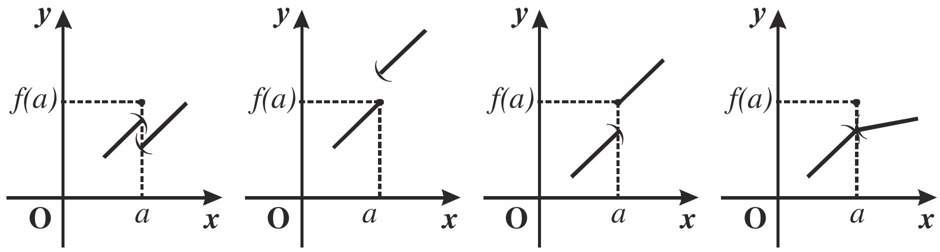
**Definiții.** Fie $x=a\in E$ punct de discontinuitate pentru $f$.
**1)** Punctul $x=a$ se numește **punct de discontinuitate de prima speță** pentru funcția *f*, dacă are limite laterale, finite în *a*.

Deci, $x=a$ este punct de discontinuitate de prima speță $\Leftrightarrow$ există $l_s(a)$ și $l_d(a)\in\mathbb{R}$ și 1) $l_s(a)\neq l_d(a)$ sau 2) $l_s(a)=l_d(a)\neq f(a)$.

**2)** Punctul $x=a\in E$ se numește **punct de discontinuitate de a doua speță** pentru funcția *f*, dacă nu este punct de discontinuitate de prima speță a lui *f*.

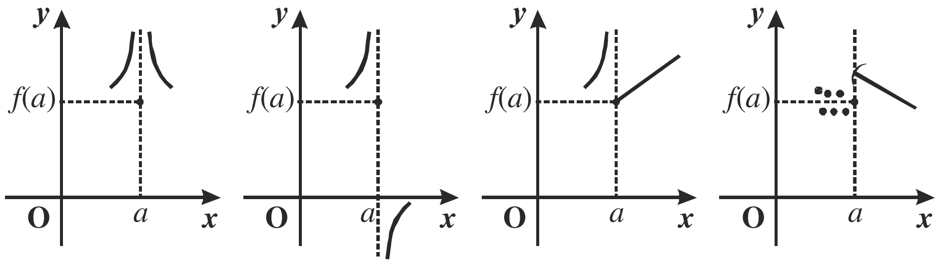
Deci, $x=a$ este punct de discontinuitate de a doua speță $\Leftrightarrow$ cel puțin una din limitele laterale $l_s(a), l_d(a)$ nu există sau este infinită.

În Fig. 4 se dau reprezentări de funcții care au discontinuități de prima speță în $x=a$, iar în Fig. 5 sunt redate reprezentări de funcții care au discontinuități de speța a doua în $x=a$.



$l_s(a) \neq l_d(a)$ $\quad$ $l_s(a) = f(a) \neq l_d(a)$ $\quad$ $l_s(a) \neq l_d(a) = f(a)$ $\quad$ $l_s(a) = l_d(a) \neq f(a)$

Fig. 4



$l_s(a) = l_d(a) = \infty$ $\quad$ $l_s(a) = \infty, l_d(a) = -\infty$ $\quad$ $l_s(a) = \infty, l_d(a) = f(a)$ $\quad$ $\nexists\, l_s(a)$

Fig. 5

**Exemple. Să se precizeze felul punctelor de discontinuitate pentru funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, în cazurile:**

**1)** $f(x)=\begin{cases} x+2, x\leq -1 \\ 3x, x>-1 \end{cases}, a=-1$ ; **2)** $f(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}, a=0$ ;

**3)** $f(x)=[x], a\in\mathbb{Z}$; **funcția parte întreagă; 4)** $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}, a=0$ .

**R. 1) Din** $l_s(-1)=-1+2=1\neq l_d(-1)=-3$**, rezultă că punctul** $a=-1$ **este punct de discontinuitate de prima speță pentru *f*.**

**2) Deoarece am arătat, în capitolul precedent, că în** $a=0$ **, funcția nu are limite laterale, rezultă că acest punct este de discontinuitate de speța a doua pentru *f*.**

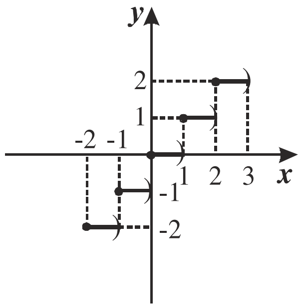


Fig. 6

**3) Se constată din egalitățile** $[x+0]=x=[x],[x-0]=x-1,\ \forall x\in\mathbb{Z}$ **că** $l_s(a)=a-1$ **şi** $l_d(a)=a, f(a)=a$ **. Deci,** $x=a$ **este punct de discontinuitate de prima speță pentru** ***f*****. Graficul funcției este redat în Fig.6.**

**4) Avem** $l_s(0)=\lim\limits_{x\nearrow 0}\frac{1}{x}=\frac{1}{0_-}=-\infty, l_d(0)=\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{1}{x}=\frac{1}{0_+}=\infty$

**Deci** $a=0$ **este punct de discontinuitate de speța a doua pentru** ***f*****.**

## 3.3. CONTINUITATEA PE O MULȚIME

Fie $\boldsymbol{f:E\to\mathbb{R}}$. Am văzut ce înseamnă continuitatea funcției într-un punct fixat $\boldsymbol{x=a\in E}$. Acest concept se numeşte continuitate punctuală. Totuşi problema se poate extinde la mai multe puncte din *E*.
Mai precis au loc următoarele:

**Definiții. 1)** Fie $\boldsymbol{f:E\to\mathbb{R}}$ şi $\boldsymbol{A\subseteq E}$. Se spune că *f* **este continuă pe mulțimea** *A* dacă este continuă în fiecare punct din *A*.

**2)** Dacă *f* **este continuă pe tot domeniul de definiție**, atunci se spune că *f* **este continuă**, fără a mai indica mulțimea pe care *f* are această proprietate.

**Observație.** Dacă $\boldsymbol{E=[a,b]}$, atunci în $\boldsymbol{x=a}$ vorbim de continuitate la dreapta, iar în $\boldsymbol{x=b}$ despre continuitate la stânga.
Suntem interesați în a studia continuitatea funcțiilor pe domeniul lor de definiție. Următorul rezultat este deosebit de important. Are loc următoarea

**Teoremă. Funcțiile elementare sunt funcții continue.**

**Demonstrație.** Am văzut, în capitolul precedent, că pentru funcțiile elementare (**polinomiale,raționale, funcția radical,funcția putere, funcția exponențială, funcția logaritmică, funcțiile trigonometrice directe, funcțiile trigonometrice inverse**) limita acestora într-un punct *a* din domeniul de definiție, se obține înlocuind pe *x* cu *a*, adică $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, ceea ce exprimă faptul că o astfel de funcție este continuă într-un punct arbitrar din domeniul de definiție.
**Observații. 1)** Evident că dacă $\boldsymbol{f:E\to\mathbb{R}}$ **este continuă**, atunci $\boldsymbol{\forall B\subseteq E, B\neq\varnothing, f}$ **rămâne continuă pe** *B*.
**2)** Atunci când ni se cere să studiem continuitatea unei funcții, dacă domeniul de definiție nu este dat, atunci trebuie să-l precizăm. Dacă domeniul are puncte

izolate, atunci în aceste puncte funcția este continuă. Dacă *f* este multiformă, atunci studiem continuitatea pe fiecare ramură precum şi în punctele de trecere de la o formă la alta. Dacă *f* nu este dată explicit, atunci mai întâi explicităm funcția. În final precizăm mulțimea punctelor de continuitate pentru *f*, adică domeniul de continuitate al funcției.

**Exemple.** **1) Să se studieze continuitatea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ,în cazurile:**

**a)** $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}, x\in(-\infty,0)\\ x+1, x\in[0,1]\\ 2x^2, x\in(1,\infty)\end{cases}$ **; b)** $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$ **; c)** $f(x)=\begin{cases}\alpha x-1, x\le -1\\ 2x-3\alpha, x>-1, \alpha\in\mathbb{R}\end{cases}$ **.**

**R. a) Pe fiecare din intervalele $(-\infty,0),(0,1),(1,\infty)$ , funcția *f* este continuă, fiind restricția unor funcții elementare. Rămâne să studiem continuitatea în punctele de trecere de la o formă la alta, adică în punctele $x=0, x=1$.**

**Studiem continuitatea în $x=0$ . Avem: $l_s(0)=\lim\limits_{x\nearrow 0}f(x)=\lim\limits_{x\nearrow 0}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{0_+}=\infty$ ,**

**$l_d(0)=\lim\limits_{x\searrow 0}f(x)=\lim\limits_{x\searrow 0}(x+1)=1, f(0)=1$ , ceea ce arată că $x=0$ este punct de discontinuitate de speța a doua pentru $f$ .**

**Studiem continuitatea în $x=1$ . Din $l_s(1)=\lim\limits_{x\nearrow 1}f(x)=\lim\limits_{x\nearrow 1}(x+1)=2$,**

**$l_d(1)=\lim\limits_{x\searrow 1}f(x)=\lim\limits_{x\searrow 1}(2x^2)=2$ şi $f(1)=1+1=2$ , deducem că *f* este continuă în $x=1$ .**

**Concluzie. Funcția *f* este continuă pe $\mathbb{R}-\{0\}$ .**

**b) În acest caz funcția trebuie explicitată. Pentru calculul $\lim\limits_{n\to\infty}e^{nx}$ avem cazurile (după semnul lui *x*) $\lim\limits_{n\to\infty}e^{nx}=\begin{cases}0, x<0\\ 1, x=0\\ \infty, x>0\end{cases}$ . Deci *f* are forma**

**1) dacă $x<0, f(x)=\dfrac{|x|+x^2\lim\limits_n e^{nx}}{1+\lim\limits_n e^{nx}}=|x|$;**

**2) dacă $x=0, f(0)=\dfrac{0+0\cdot 1}{1+1}=0$;**

**3) dacă $x>0$,**

**atunci $f(x)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_n\dfrac{e^{nx}\left(\frac{|x|}{e^{nx}}+x^2\right)}{e^{nx}\left(\frac{1}{e^{nx}}+1\right)}=\lim\limits_n\dfrac{\frac{|x|}{e^{nx}}+x^2}{\frac{1}{e^{nx}}+1}=\dfrac{x^2}{1}=x^2$ .**

**În final, $f(x)=\begin{cases}|x|, x<0\\ 0, x=0\\ x^2, x>0\end{cases}=\begin{cases}-x, x<0\\ 0, x=0\\ x^2, x>0\end{cases}$ .**

**Pe $(-\infty,0),(0,\infty)$ funcția *f* este continuă, fiind restricția unor funcții elementare.**

Studiem continuitatea în $x=0$. Avem: $l_s(0)=\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)=\lim\limits_{x\nearrow 0}(-x)=0$,

$l_d(0)=\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)=\lim\limits_{x\searrow 0} x^2=0$ şi $f(0)=0$, ceea ce arată că *f* este continuă în $x=0$.

Concluzie. Funcţia *f* este continuă (pe $\mathbb{R}$).

c) Funcţia este continuă pe $(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$, fiind definită prin intermediul restricţiei unor funcţii elementare. Rămâne să studiem continuitatea în $x=-1$.

Avem: $l_s(-1)=\lim\limits_{x\nearrow -1} f(x)=-\alpha-1, l_d(-1)=\lim\limits_{x\searrow -1} f(x)=-2-3\alpha, f(-1)=-\alpha-1$.

Funcţia *f* este continuă în $x=-1$, dacă $-\alpha-1=-2-3\alpha \Leftrightarrow \alpha=-\frac{1}{2}$.

Concluzie. Dacă $\alpha=-\frac{1}{2}$, funcţia *f* este continuă pe $\mathbb{R}$, iar dacă $\alpha\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$, atunci *f* este continuă pe $\mathbb{R}-\{-1\}$.

2) Să se determine funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, continuă în $x=0$ pentru care $f(x)-f\left(\frac{x}{3}\right)=x, \forall x\in\mathbb{R}^*, f(0)=\frac{1}{3}$.

R. În relaţia dată se pune în locul lui $x: \frac{x}{3},\frac{x}{3^2},...,\frac{x}{3^n}$ şi avem egalităţile:

$$f\left(\frac{x}{3}\right)-f\left(\frac{x}{3^2}\right)=\frac{x}{3},$$

$$f\left(\frac{x}{3^2}\right)-f\left(\frac{x}{3^3}\right)=\frac{x}{3^2},$$

......................................

$$f\left(\frac{x}{3^n}\right)-f\left(\frac{x}{3^{n+1}}\right)=\frac{x}{3^n}.$$

Adunând aceste relaţii, membru cu membru, cu aceea din enunţ se obţine

$f(x)-f\left(\frac{x}{3^{n+1}}\right)=x\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^n}\right)$ sau $f(x)-f\left(\frac{x}{3^{n+1}}\right)=x\frac{(1/3)^{n+1}-1}{(1/3)-1}$ sau

$f(x)-f\left(\frac{x}{x^{n+1}}\right)=\frac{3x}{2}\left[1-(1/3)^{n+1}\right](*)$.

Cum $\frac{x}{3^{n+1}}=x\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\xrightarrow[n]{}0$, iar *f* este continuă în $x=0$ se deduce $f\left(\frac{x}{3^{n+1}}\right)\xrightarrow[n]{}f(0)$.

Trecând în $(*)$ la limită după $n\to\infty$ rezultă $f(x)-f(0)=\frac{3x}{2}$, adică $f(x)=\frac{3x}{2}+\frac{1}{3}$.

## 3.4. OPERAŢII CU FUNCŢII CONTINUE

### 1. Continuitate punctuală, continuitate pe o mulţime

Deoarece definiţia continuităţii se exprimă prin intermediul limitei de funcţie (sau de şiruri), operaţiile cu limite de funcţii(de şiruri) şi proprietăţile lor se regăsesc la funcţii continue. Operaţiile algebrice şi compunerea conservă continuitatea (punctuală sau pe o mulţime) altfel spus, efectuând operaţii algebrice sau compunere cu funcţii continue ( **într-un punct** sau **pe o mulţime**) se obţin tot funcţii continue ( **în acel punct** sau **pe acea mulţime**).

Mai precis are loc următoarea

**Teoremă.** Fie $f, g : E \to \mathbb{R}$, două funcții continue în $a \in E$(pe $A \subseteq E$), $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci:

**1**) Funcția $f+g$ este continuă în $a$ (pe $A$).

**Suma a două funcții continue este o funcție continuă.**

**2**) Funcția $\alpha f$ este continuă în $a$ (pe $A$).

**Produsul dintre o constantă și o funcție continuă este o funcție continuă.**

**3**) Funcția $fg$ este continuă în $a$ (pe $A$).

**Produsul a două funcții continue este o funcție continuă.**

**4**) Câtul $\frac{f}{g}$ este o funcție continuă în $a$ (pe $A$), dacă $g(a) \neq 0 \left(g(x) \neq 0, \forall x \in A\right)$

**Câtul a două funcții continue este o funcție continuă.**

**5**) Funcția $f^g$ este continuă în $a$ (pe $A$), dacă $f(a) > 0 \left(f(x) > 0, \forall x \in A\right)$.

**6**) Funcția $|f|$ este continuă în $a$ (pe $A$).

**Modulul unei funcții continue este o funcție continuă.**

**7**) $\max(f, g), \min(f, g)$ sunt continue în $a$ (pe $A$).

**Demonstrație.** Rezultatele enunțate mai sus se deduc din rezultatele obținute pentru limite de funcții. De exemplu, pentru **1)** trebuie probat că $\lim_{x \to a}\left(f(x) + g(x)\right) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = f(a) + g(a) = (f+g)(a)$, unde în penultima egalitate am folosit continuitatea funcțiilor $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ în punctul $\boldsymbol{a}$. Pentru **7)** precizăm că $\max\left(f(x), g(x)\right) = \begin{cases} f(x), f(x) \geq g(x) \\ g(x), f(x) < g(x) \end{cases}, x \in E$ și

$$\min\left(f(x),g(x)\right)=\begin{cases}f(x), f(x)\le g(x)\\ g(x), f(x)>g(x)\end{cases}, x\in E.$$

Se stabileşte uşor că: $\max\left(f(x),g(x)\right)=\frac{1}{2}\left[f(x)+g(x)+\left|f(x)-g(x)\right|\right]$ şi

$\min\left(f(x),g(x)\right)=\frac{1}{2}\left[f(x)+g(x)-\left|f(x)-g(x)\right|\right], x\in E$, iar acum din **1)** şi **6)** rezultă **7)**.

Pentru continuitatea pe $A$ se utilizeză definiţia continuităţii pe o mulţime şi într-un punct.■

**Observaţii. 1)** Proprietăţile **1)** şi **2)** se pot grupa în exprimarea: Dacă $f,g$ sunt continue în $a$ (pe $A$), $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, atunci funcţia $\alpha f+\beta g$ este continuă în $a$ (pe $A$). Dacă $\alpha=1,\beta=-1$, atunci $f-g$, adică **diferenţa** a două funcţii continue este o funcţie continuă.

**2)** Proprietăţile **1)** şi **3)** rămân valabile pentru un număr finit de funcţii continue în $a$ (pe $A$), $f_i:E\to\mathbb{R}, i=\overline{1,n}$. Atunci $f_1+f_2+...+f_n$, $f_1f_2...f_n$ sunt, de asemenea, funcţii continue în $a$ (pe $A$).

**3)** Dacă în **1), 3), 5)** o funcţie este continuă, iar cealaltă discontinuă în $a$, atunci $f+g, fg, \frac{f}{g}$ sunt discontinue în $a$.

**Exemple. 1) Funcţia $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x)=x^3+x^2+e^x$ ,este continuă pe $\mathbb{R}$, fiind suma a două funcţii (elementare) continue pe $\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x^2$ ( funcţie polinomială), $g(x)=e^x$ ( funcţia exponenţială).**

**2) Funcţia $h:(0,\infty)\to\mathbb{R}, h(x)=\sqrt{x}\ln x$, este continuă pe $(0,\infty)$, fiind produsul a două funcţii (elementare) continue pe $(0,\infty)$, $f(x)=\sqrt{x}$ ( funcţia radical), $g(x)=\ln x$ (funcţie logaritmică).**

**3) Funcţia $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x)=\frac{e^x}{x^2+x+1}$, este continuă pe $\mathbb{R}$ fiind câtul a două funcţii (elementare) continue pe $\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$ (funcţia exponenţială), $g(x)=x^2+x+1$ (funcţie polinomială), $g(x)\neq 0, \forall x$.**

**4) Funcţia $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x)=\left(x^2+1\right)^{3x}$, este continuă pe $\mathbb{R}$, deoarece $x^2+1>0, \forall x\in\mathbb{R}$.**

**5) Funcţia $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x)=\max\left(x+1, 1-x^2\right)$, este continuă pe $\mathbb{R}$, deoarece funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+1, g(x)=1-x^2$ sunt funcţii continue pe $\mathbb{R}$, ca funcţii elementare (polinomiale).**

## 2. Continuitatea funcțiilor compuse

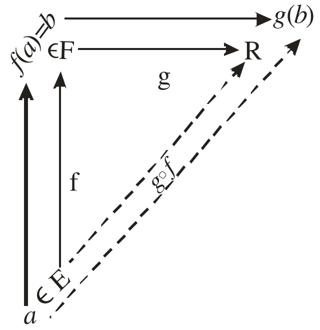
Un alt mod de a genera funcții continue îl constituie compunerea funcțiilor continue. Mai precis are loc următoarea

**Teoremă.** Fie $f: E \to F, g: F \to \mathbb{R}$.

**1)** Dacă *f* este continuă în $a \in E$, iar *g* este continuă în $f(a) = b$, atunci funcția $g \circ f$ este continuă în *a*.

**2)** Dacă *f* este continuă pe $A \subseteq E$, iar *g* este continuă pe $f(A)$, atunci $g \circ f$ este continuă pe $A$.

**Compunerea a două funcții continue este o funcție continuă.**




**Demonstrație.**

**1)** Fie șirul $(x_n), x_n \in E, \forall n, x_n \to a$. Deoarece *f* este continuă în *a*, rezultă $f(x_n) \to f(a)$. Fie șirul imagine
$(f(x_n)), f(x_n) \in F, \forall n, f(x_n) \to b = f(a)$. Cum *g* este continuă în *b*, rezultă $g(f(x_n)) \to g(b)$, adică $(g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(a)$.

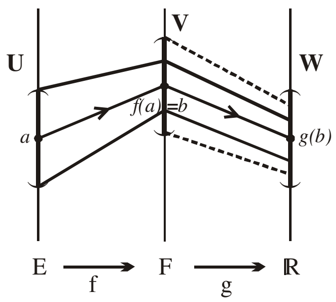



Fig.7

Recapitulând avem: $x_n \in E, \forall n, x_n \to a$ pentru care $(g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(a)$, ceea ce arată că $g \circ f$ este continuă în $a$.

**2)** Se obține din definiția unei funcții continue pe o mulțime și **1)**. ■

**Observații. 1**) Refaceți demonstrația de la **1)** din teoremă, utilizând criteriul cu vecinătăți (Fig.7).

**2**) Dacă $a \in E \cap E'$ și $b = f(a) \in F \cap F'$, atunci **teorema exprimă proprietatea funcțiilor continue de a comuta cu limitele**: $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = g\left(\lim\limits_{x \to a} f(x)\right)$.

**3**) În general, compunerea unui număr finit de funcții continue este o funcție continuă.

**Exemple.** 1) Funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x)=2^{x^2+1}$ este continuă, fiind compunerea a două funcții continue (elementare), $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+1$ (funcție polinomială) și $g(x)=2^x$ (funcție exponențială).

2) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x)=\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2+2}\right)$ este o funcție continuă, fiind compunerea a două funcții continue (elementare) $f:\mathbb{R}\to(0,\infty), g:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+2}$ (funcție rațională), $g(x)=\ln x$ (funcție logaritmică).

3) $h:[-1,1]\to\mathbb{R}, h(x)=\sqrt{1-x^2}$ este continuă, fiind compunerea a două funcții continue ( elementare) $f:[-1,1]\to[0,\infty), g:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=1-x^2, g(x)=\sqrt{x}$ .

## Probleme propuse

**1.** Să se studieze continuitatea funcțiilor $f:E\to\mathbb{R}$ de mai jos în punctele indicate:

1) $f(x)=x^2-1, a=1$; 2) $f(x)=\sqrt{x+1}, a=0$; 3) $f(x)=\begin{cases} x-1, x\le 1 \\ 1-x, x>1\end{cases}, a=1$

4) $f(x)=\begin{cases} x^2-5x+1, x\le 2 \\ -5, x>2\end{cases}, a=2$; 5) $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-16}{x-4}, x\ne 4 \\ 8, x=4\end{cases}, a=4$;

6) $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin 5x}{x}, x\ne 0 \\ 5, x=0\end{cases}, a=0$; 7) $f(x)=\begin{cases} \ln(x+1), x\ge 0 \\ x^2+x, x<0\end{cases}, a=0$ ;

8) $f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}, x\ne 1 \\ \frac{3}{2}, x=1\end{cases}, a=1$; 9) $f(x)=\begin{cases} (x+1)\sin\frac{1}{x+1}, x\ne -1 \\ -1, x=-1\end{cases}, a=-1$;

10) $f(x)=\begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, x\ne 0 \\ e^2, x=0\end{cases}, a=0$ ; 11) $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin 3(x-1)}{x^2-1}, x\ne \pm 1 \\ \frac{3}{2}, x=\pm 1\end{cases}, a=\pm 1$ .

**2.** 1) Să se studieze continuitatea funcțiilor $f:E\to\mathbb{R}$ de mai jos în punctele indicate:

1) $f(x)=\begin{cases} 1, x\in\mathbb{Q} \\ 0, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}, a=1, a=\sqrt{2}$; 2) $f(x)=\begin{cases} x^2, x\in\mathbb{Q} \\ x, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}, a=\pm 1$.

( $f$ de la 1) este funcția lui Dirichlet, funcția caracteristică a lui $\mathbb{Q}$ )

2) Dați exemplu de funcție continuă într-un singur punct; în două puncte.

**3.** Să se stabilească dacă următoarele funcții pot fi prelungite prin continuitate în punctele indicate:

1) $f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2-1}{x^3+x^2-x-1}, a=1$; 2) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=x\cos\frac{1}{x}, a=0$;

3) $f:(-1,\infty)-\{0\}\to\mathbb{R}, f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}, a=0$; 4) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2^{-x^2}-1}{x^2}, a=0.$

**4.** **Să se determine constantele $a,b,c\in\mathbb{R}$ pentru care au loc, pe rând, egalitățile:**

1) $\frac{1}{x^2-1}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}, x\neq\pm1$; 2) $\frac{1}{(x^2-4)(x+1)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{x+2}, x\neq\pm2, x\neq-1$;

3) $\frac{1}{x(x+1)(x+2)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x+2}, x\neq0,-1,-2.$

**5.** **Să se determine parametrii reali $\alpha,\beta$ pentru care funcțiile de mai jos $f:E\to\mathbb{R}$, sunt continue în punctele indicate:**

1) $f(x)=\begin{cases}3x+\alpha-1, x\leq2\\ x^2+\alpha x-2, x>2\end{cases}, a=2$; 2) $f(x)=\begin{cases}\frac{\alpha(x^2-25)}{x-5}, x>5\\ -3\alpha x+1, x\leq5\end{cases}, a=5$;

3) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{\alpha^2x+1}, x\geq1\\ 2\alpha x+3, x<1\end{cases}, a=1$; 4) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-2}{x-1}, x<1\\ x+\alpha, x\geq1\end{cases}, a=1$;

5) $f(x)=\begin{cases}\frac{\alpha\sin(x+1)}{x^2+4x+3}, x>-1\\ 2\alpha x+1, x\leq-1\end{cases}, a=-1$; 6) $f(x)=\begin{cases}\alpha x+\beta, x<-1\\ 1, x=-1\\ \alpha x^2+2, x>-1\end{cases}, a=-1$;

7) $f(x)=\begin{cases}e^x, x\leq0\\ \alpha x^2+\beta x+1, x>0\end{cases}, a=0$ și există $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

**6.** **Pentru funcția $f:E\to\mathbb{R}$ dată și punctul $a$ indicat, stabiliți natura punctului de discontinuitate:**

1) $f(x)=\begin{cases}x^2+5, x>1\\ 3, x\leq1\end{cases}, a=1$; 2) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, x>0\\ 2x, x\leq0\end{cases}, a=0$; 3) $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{1}{x}, x\neq0\\ 0, x=0\end{cases}, a=0$.

**7.** **Să se determine domeniul de continuitate al funcției $f:E\to\mathbb{R}$, în cazurile:**

**I.** 1) $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$; 2) $f(x)=\sqrt{x+1}$; 3) $f(x)=e^x+\ln x$; 4) $f(x)=\frac{x^2+1}{x+2}+\sin x$;

5) $f(x)=(x^2+x)\ln x$; 6) $f(x)=\sqrt{x-1}e^x$; 7) $f(x)=|x^2+x|+1$; 8) $f(x)=\max(x,2x+1)$;

9) $f(x)=\min(-1,x^2-1)$; 10) $f(x)=\max(x,\sqrt{x-1})$; 11) $f(x)=\min(x+1,2^x)$;

12) $f(x)=\max(1,x,x^2)$; 13) $f(x)=\min(x,x^2,x^3)$;

14) $f(x)=e^{x^2-1}$; 15) $f(x)=\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

**II.** 1) $f(x)=\begin{cases}2x+1, x\leq-1\\ 1-2x, x>-1\end{cases}$; 2) $f(x)=\begin{cases}1, x\in(-1,1)\\ 0, x\in\{2,3\}\end{cases}$; 3) $f(x)=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, x>0\\ 0, x=0\\ -1, x<0\end{cases}$;

4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-25}{x-5}, x\neq 5\\ 10, x=5\end{cases}$; 5) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3^{x-1}-1}{x-1}, x<1\\ \ln(x+2), x\geq 1\end{cases}$; 6) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}, x\neq 0\\ \dfrac{1}{3}, x=0\end{cases}$.

III. 1) $f(x)=\begin{cases}x, x\in\mathbb{Q}\\ x^2, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$; 2) $f(x)=\begin{cases}x^2, x\in\mathbb{Q}\\ 5x+6, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$; 3) $f(x)=\begin{cases}x^2, x\in\mathbb{Q}\\ 2, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$;

4) $f(x)=\left[x^2\right], x\in[0,2]$; 5) $f(x)=[\ln x], x\in\left[1,e^3\right]$.

IV. 1) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n+x^2}{x^{3n}+1}$; 2) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+x^n\left(x^2+5\right)}{x\left(x^n+2\right)}$; 3) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{nx}-1}{e^{nx}+1}$.

**8.** **Să se determine parametrii $\alpha,\beta\in R$ pentru care funcțiile următoare sunt continue pe domeniul de definiție, în cazurile:**

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2+\alpha x, x\leq 1\\ x^3+\alpha^3, x>1\end{cases}$; 2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}, x\neq 3\\ \alpha, x=3\end{cases}$;

3) $f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-5x+6}, x\neq 3\\ \alpha, x=3\end{cases}$;

4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2-1, x\leq 2\\ \alpha x+\beta, x>2\end{cases}$ și există $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$;

5) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x+\min(x,2\alpha x+3), x\leq 1\\ \alpha x^2+\max\left(x^2,\alpha x-1\right), x>1\end{cases}$.

**9.** **Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ verifică inegalitatea dată, atunci $f$ este continuă în $x=0$, în fiecare din cazurile:**

a) $|f(x)|\leq Mx, M>0, \forall x\in\mathbb{R}$; b) $\left|f(x)-x^2\right|\leq Mx^2, M>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

**10.** **Să se determine funcțiile care satisfac una din condițiile următoare:**

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuă în $x=0$ și $f(2x)=f(3x), \forall x\in\mathbb{R}$.

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, continuă în $x=0, f(3x)=f(x)+x, \forall x\in\mathbb{R}$.

**11.** **Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Precizați continuitatea funcțiilor $f,g$ și apoi pentru funcțiile $f+g, fg, \dfrac{f}{g}$, în cazurile:**

1) $f(x)=\begin{cases}-x, x\geq 0\\ 2x, x<0\end{cases}, g(x)=\begin{cases}1-2x, x<1\\ 2-3x, x\geq 1\end{cases}$; 2) $f(x)=\begin{cases}x+1, x\geq -1\\ 3x+1, x<-1\end{cases}, g(x)=1-3x$;

3) $f(x)=\begin{cases}x+2, x\leq 1\\ 3, x>1\end{cases}, g(x)=\begin{cases}-1, x>-1\\ 1, x\leq 1\end{cases}$; 4) $f(x)=\begin{cases}2x, x\leq 0\\ 3x, x>0\end{cases}, g(x)=\begin{cases}2x-1, x\leq 1\\ 3x-2, x>1\end{cases}$.

**12.** **a) Pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, precizați continuitatea funcției $f^2, f(x)=\begin{cases}x+1, x\leq 2\\ \alpha x+1, x>2\end{cases}$.**

**b) Dați un exemplu de funcție $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ discontinuă în orice punct $a\in[0,1]$ cu proprietatea că $f^2:[0,1]\to\mathbb{R}$, este continuă în orice punct $a\in[0,1]$.**

**13.** Fie $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, unde $h(x)=\max(f(x),g(x)), x\in\mathbb{R}$. **Studiați continuitatea lui** $h$ **dacă** $f(x)=\begin{cases}2x+\alpha, x\le 1\\ x-1, x>1\end{cases}, g(x)=\begin{cases}x-1, x\le 1\\ x-\alpha, x>1\end{cases}, \alpha\in\mathbb{R}$.

**14.** Fie $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, unde $h(x)=g(f(x)), x\in\mathbb{R}$. **Studiați continuitatea lui** $h$ **în cazurile:**

**I.** 1) $f(x)=x+1, g(x)=[x]$; 2) $f(x)=\begin{cases}-1, x<1\\ 1, x\ge 1\end{cases}, g(x)=\operatorname{sgn}(x)$; 3) $f(x)=\begin{cases}1, x\ge -1\\ 2x+3, x<-1\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x+2, x<1\\ -1, x\ge 1\end{cases}$; 4) $f(x)=\begin{cases}2x+1, x\le 0\\ 1-3x, x>0\end{cases}, g(x)=\begin{cases}x^2, x\le 1\\ 2x^2-1, x\ge 1\end{cases}$.

5) $f(x)=\begin{cases}2x, x\in\mathbb{Q}\\ x^2, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}, g(x)=\begin{cases}x^3, x\in\mathbb{Q}\\ 9x, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$.

**II.** $(\alpha\in\mathbb{R})$ 1) $f(x)=\begin{cases}x+\alpha, x>1\\ \alpha x+2, x\le 1\end{cases}, g(x)=\begin{cases}3x+2, x\le -1\\ 1+2x, x>-1\end{cases}$;

2) $f(x)=\begin{cases}\alpha x, x\ge 1\\ 2x, x<1\end{cases}, g(x)=\begin{cases}-x+\alpha, x<-1\\ x+2\alpha, x\ge -1\end{cases}$.

**15.** **Dacă** $|f|$ **este continuă în** $a$, **atunci** $f$ **este continuă în** $a$? **Dacă răspunsul este fals, găsiți un contraexemplu.**

**16.** a) **Dacă** $f,g:E\to\mathbb{R}$ **sunt discontinue în** $a$, **atunci** $f+g, fg, \frac{f}{g}$ **sunt discontinue în** $a$ ?

b) **Dacă** $f,g:E\to\mathbb{R}, a\in E, f+g, f-g$ **sunt continue în** $a$, **atunci** $f,g$ **sunt continue în** $a$?

## 3.5. PROPRIETĂȚI ALE FUNCȚIILOR CONTINUE

### 1. Proprietăți locale

Proprietățile locale de care se bucură limitele de funcții, le regăsim şi la continuitatea punctuală a funcțiilor. Mai precis are loc următoarea

**Teoremă 1)** (**de mărginire locală a unei funcții continue**). Dacă $f:E\to\mathbb{R}$ **este o funcție continuă într-un punct** $a\in E$, atunci există o vecinătate a punctului pe care $f$ este mărginită.

**2)** (**pentru semnul unei funcții continue, nenule, într-un punct**). Dacă $f:E\to\mathbb{R}$ **este o funcție continuă** în $a\in E$ și $f(a)\ne 0$, atunci există o vecinătate a lui $a$ pe care $f$ nu-şi schimbă semnul.

**Demonstrație.** **1)** Din definiția continuității unei funcții într-un punct $a$ avem că $\forall\varepsilon>0$, există $\delta(a,\varepsilon)=\delta>0$ astfel încât dacă $|x-a|<\delta$ să rezulte $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$. Dar ultima egalitate se scrie: $f(a)-\varepsilon<f(x)<f(a)+\varepsilon$, ceea

ce înseamnă că pentru $\varepsilon > 0$, dat, funcția este mărginită pentru $x \in (a-\delta, a+\delta) = U_a$ (unde $U_a$ reprezintă o vecinătate a lui *a*).

**2)** Presupunem că $f(a) > 0$. Din definiția continuității lui $f$ în $a$ rezultă $-f(a) < f(x) - f(a) < f(a)$, pentru $\varepsilon = f(a)$, adică $f(x) > 0$ pentru $x \in (a-\delta, a+\delta)$.

Analog, dacă $f(a) < 0$. ■

**Observații**. **1**) Această teoremă este o teoremă de existență locală, pentru funcții continue, în sensul că ne spune ce se întâmplă pe o anumită vecinătate a unui punct în care funcția este continuă.
**2**) Arătați că dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este continuă cu proprietatea că oricare ar fi $(a,b) \subset I$, există $c \in (a,b)$ astfel încât $f(c) = 0$, atunci $f(x) = 0, \forall x \in I$.

## 2. Proprietăți pe intervale

### 1) Proprietatea lui Darboux

Funcțiile continue au proprietatea remarcabilă de a transforma un interval oarecare tot într-un interval, sau altfel spus, o funcție continuă definită pe un interval nu poate „sări” de la o valoare la alta, fără să treacă prin toate valorile intermediare. Această proprietate nu este caracteristică numai funcțiilor continue. Există funcții care fără să fie continue pe un interval au această proprietate. De exemplu, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin\frac{1}{x}, x \neq 0$ și $f(0) = 0$.

Are loc următoarea

> **Definiție**. Fie *I* un interval. Se spune că funcția $f : I \to \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux pe intervalul *I*, dacă pentru orice puncte $a, b \in I, a < b$ și oricare număr real $\lambda$ situat între $f(a)$ și $f(b)$ (dacă $f(a) < f(b)$) sau între $f(b)$ și $f(a)$ (dacă $f(b) < f(a)$), **există** cel puțin un punct $x_\lambda$ **din intervalul** $(a,b)$ astfel încât $f(x_\lambda) = \lambda$.

**Observații**. **1**) Deci, o funcție care are proprietatea lui Darboux pe un interval *I*, dacă ia două valori distincte, atunci ia toate valorile cuprinse între ele. Din acest motiv proprietatea se mai numește și **proprietatea valorilor intermediare**.
**2**) Trebuie observat că dacă $\lambda$ este o valoare intermediară între $f(a)$ și $f(b)$, atunci $x_\lambda \in (a,b)$ și nu $x_\lambda \in I - (a,b)$, adică $x_\lambda$ **este un punct situat între abscisele** *a* și *b* **pentru care s-au considerat valorile** $f(a)$ și $f(b)$ și nu oricum din *I*.
**3**) Altfel formulată proprietatea: **pentru** $\lambda$ **valoare intermediară între** $f(a)$ și $f(b)$, **ecuația** $f(x) = \lambda$, **are cel puțin o soluție** $x_\lambda$ în intervalul $(a,b)$.

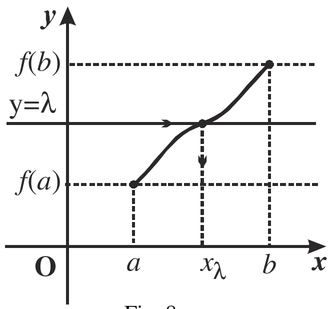


Fig. 8

4) **Geometric**, o funcție care are proprietatea lui Darboux pe intervalul $[a,b], a<b$ şi $f(a)<f(b)$, se exprimă prin aceea că o dreaptă orizontală $y=\lambda$ situată între dreptele orizontale $y=f(a)$ şi $y=f(b)$ intersectează graficul lui $f$ cel puțin într-un punct de abscisă $x_\lambda \in (a,b)$ (Fig.8).

5) Pentru a arăta că o funcție $f: I \to \mathbb{R}$, $I$ interval, **nu are proprietatea lui Darboux pe** $I$, se aleg două puncte $a,b \in I$, se calculează $f(a), f(b)$ şi se alege o valoare $\lambda \in (f(a), f(b))$ sau $\lambda \in (f(b), f(a))$ pentru care se arată că ecuația $f(x)=\lambda$ **nu are soluție în intervalul** $(a,b)$.

6) Se arată că dacă $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ ($I, J \subseteq \mathbb{R}$, **intervale**) sunt funcții cu proprietatea lui Darboux, atunci $g \circ f$ este, de asemenea, o funcție cu proprietatea lui Darboux.

**Exemple. 1) Funcția $f:[-1,1] \to \mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x+1, x \in [-1,0] \\ x, x \in (0,1] \end{cases}$ nu are proprietatea lui Darboux pe $[-1,1]$.**

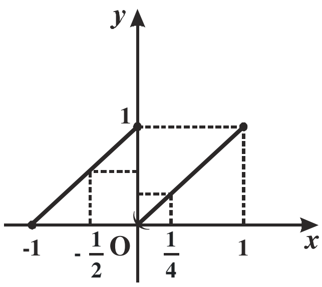


Fig. 9

**R. Fie $a=-\frac{1}{2}<b=\frac{1}{4}$ pentru care $f(a)=\frac{1}{2}, f(b)=\frac{1}{4}$ (Fig.9).**

**Fie $\lambda=\frac{1}{3} \in \left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$.**

**Constatăm că ecuația $f(x)=\lambda$, nu are soluție în $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$.**

**Într-adevăr, dacă ar exista $x_\lambda \in \left(-\frac{1}{2},0\right]$, atunci $f(x_\lambda)=x_\lambda+1=\frac{1}{3}$, adică $x_\lambda=-\frac{2}{3} \notin \left(-\frac{1}{2},0\right]$.**

**De asemenea, dacă ar exista $x_\lambda \in \left(0,\frac{1}{4}\right)$, atunci $f(x_\lambda)=x_\lambda=\frac{1}{3}$. Dar $x_\lambda \notin \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$. În final, ecuația $f(x)=\frac{1}{3}$ nu are soluție în intervalul $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$. Să observăm că funcția dată are pe $x=0$ ca punct de discontinuitate de speța întâi.**

**2) Funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x, x \in \mathbb{Q} \\ x^3, x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$ nu are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$.**

**R. Punctele de continuitate ale lui $f$ se obțin rezolvând ecuația $x=x^3$. Găsim $x \in \{\pm 1, 0\}$. Restul punctelor sunt de discontiniutate de speța a doua.**
**Luăm $a=\sqrt{8}, b=\sqrt{10}$ pentru care $f(a)=8\sqrt{8}, f(b)=10\sqrt{10}$. Fie $\lambda=27 \in (8\sqrt{8}, 10\sqrt{10})$. Arătăm că nu există $x_\lambda \in (a,b)$ pentru care $f(x_\lambda)=\lambda$. Dacă ar exista $x_\lambda \in (a,b) \cap \mathbb{Q}$ pentru care $f(x_\lambda)=\lambda$ am avea $x_\lambda=27$, care însă nu aparține intervalului $(a,b)$. De**

**asemenea, pentru $x_\lambda \in (a,b)\cap(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$ din $f(x_\lambda)=\lambda$ rezultă $x_\lambda^3=27$, adică $x_\lambda=3$, care nu aparține lui $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$. Deci, ecuația $f(x)=\lambda$, nu are soluție în $(a,b)$, adică $f$ nu are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$.**

**3) Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbb{Q}\\0, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$, nu are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$.**

**R. Deoarece $f(\mathbb{R})=\{0,1\}$, pentru $\lambda\in(0,1)$, ecuația $f(x)=\lambda$ nu are soluție în $\mathbb{R}$.
Deci, $f$ nu are proprietatea lui Darboux.**

Următorul rezultat afirmă că o clasă de funcții cu proprietatea lui Darboux este cea a funcțiilor continue pe un interval. Are loc următoarea

**Teoremă**. (**Cauchy-Weierstrass-Bolzano**). Orice funcție continuă $f:I\to\mathbb{R}$, $I$ interval, are proprietatea lui Darboux pe *I*.

**Observații**. **1**) Reciproca teoremei este falsă. N-avem decât să luăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin\frac{1}{x}$, dacă $x\neq 0$ şi $f(0)=0$, care are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$, dar este discontinuă în $x=0$.
**2**) Cerința ca $f$ să fie definită pe un interval este esențială.

Funcția $f:(-1,0)\cup(0,1)\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}-1, x\in(-1,0)\\ 1, x\in(0,1)\end{cases}$ este continuă, dar nu ia valori intermediare între $-1$ şi 1, deoarece $\operatorname{Im} f=\{-1,1\}$.

**3**) Dacă $f:I\to\mathbb{R}$ (*I* interval) are proprietatea lui Darboux, atunci $\operatorname{Im} f$ conține un interval, adică o mulțime infinită de puncte (între $f(a)$ şi $f(b)$ - presupunem $f(a)<f(b)$ - $a,b\in I$ se află toate punctele intervalului $(f(a),f(b))$, adică $(f(a),f(b))\subseteq \operatorname{Im} f$ ).

Dacă $f(I)$ nu este interval, atunci $f$ nu are proprietatea lui Darboux. (De ex. funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x, x\in(0,1]\\3, x=0\end{cases}$ nu are proprietatea lui Darboux deoarece $f([0,1])=(0,1]\cup\{3\}$ care nu este interval).

Deci, dacă $f:I\to\mathbb{R}$ are un număr finit $(\geq 2)$ de valori, $f$ nu are proprietatea lui Darboux.
Alte consecințe importante ale acestei teoreme au aplicabilitate în rezolvarea ecuațiilor (pentru determinarea unei rădăcini, cu o anumită acuratețe prin **metoda bisecției intervalului**) şi a inecuațiilor (prin studiul semnului unei funcții continue).

**Corolar 1** (**de localizare a unei rădăcini**). a) Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă pentru care $f(a)f(b)\le 0$. Atunci există cel puțin un punct $c\in[a,b]$ astfel încât $f(c)=0$ (Fig.10 a), b))

**Dacă o funcție continuă are valori de semne contrare la capetele unui interval, atunci ea se anulează cel puțin o dată pe interval.**

b) Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcție continuă pentru care

$\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \text{ şi } \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty\right)$ sau $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty \text{ şi } \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty\right)$,

atunci există $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(c)=0$ (Fig. 10 c))

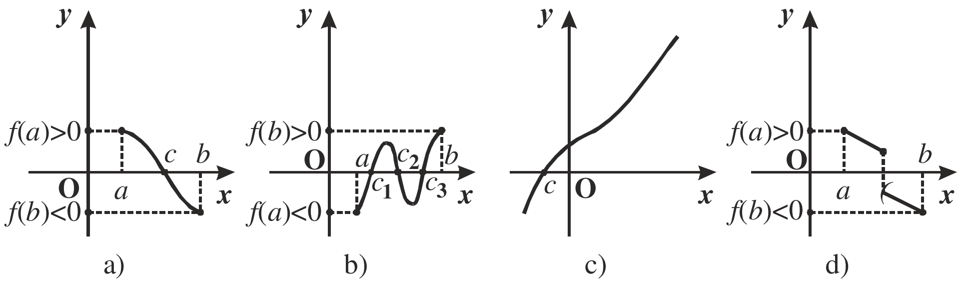



Fig. 10

**Demonstrație**. a) Din $f(a)f(b)\le 0$ se deduce $f(a)\le 0$ şi $f(b)\ge 0$ sau $f(a)\ge 0$ şi $f(b)\le 0$. Cum $f$ este continuă, are proprietatea lui Darboux, adică $f$ nu poate sări de la o valoare negativă $f(a)$ (în primul caz) la alta pozitivă $f(b)$ fără să treacă prin zero. Deci, există $c\in[a,b]$ astfel încât $f(c)=0$.

b) Din $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, există $a<0$ pentru care $f(a)<0$, iar din $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, există $b>0$, pentru care $f(b)>0$. Deci $f(a)\cdot f(b)<0$. Din a) rezultă că există $c\in(a,b)$ astfel încât $f(c)=0$. ■

**Observații**. **1**) Prima parte a corolarului se poate reformula spunând că ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție în intervalul $[a,b]$.

**2**) Dacă $f(a)f(b)<0$ (**inegalitate strictă**), atunci există cel puțin un element $c\in(a,b)$ (**interval deschis**) astfel încât $f(c)=0$.

**3**) Dacă $f$ este strict monotonă, atunci **soluția este unică** (deoarece $f$ este injectivă).

4) Dacă $f$ este discontinuă pe $[a,b]$, atunci din $f(a)f(b)<0$ nu mai rezultă cu necesitate că există $c\in(a,b)$ cu $f(c)=0$ (Fig.10 d)).

5) Intervalul $[a,b]$ pe care se află soluția $c$ poate fi micşorat prin bisecțiunea intervalului. Se iau intervalele $\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\left[\frac{a+b}{2},b\right]$. Dacă $f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le 0$ sau $f\left(\frac{a+b}{2}\right)f(b)\le 0$, atunci rădăcina $c$ se află în $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ sau respectiv în $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$. Noul interval în care se află rădăcina se împarte din nou în două părți de lungimi egale şi se procedează ca mai sus. De observat că lungimea intervalului în care se află rădăcina, după acest procedeu, este $\frac{b-a}{2},\frac{b-a}{2^2},\ldots$. În acest fel se poate obține o bună aproximare a rădăcinii $c$.

**Exemple. 1) Ecuația $x^n-a=0, a\ge 0, n\in\mathbb{N}^*$, are cel puțin o rădăcină reală.**

**R. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^n-a$, funcție continuă. Pe de altă parte $f(0)=-a\le 0$, $f(a+1)=(a+1)^n-a>1+na-a>0$. Deci, există $c\in(0,a+1)$ astfel încât $f(c)=0$. Prin acest exmplu am arătat existența soluției ecuației $x^n-a=0, n\in\mathbb{N}^*, a>0$, pe care am abordat-o în anii precedenți.**

**2) Să se arate că ecuația $x+e^x=0$ are exact o soluție în intervalul $[-1,1]$.**

**R. Fie $f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=x+e^x$, funcție continuă (ca sumă de funcții continue).**

**Din $f(-1)f(1)=\left(-1+\frac{1}{e}\right)(1+e)<0$ rezultă că există $c\in(-1,1)$ cu $f(c)=0$, Funcția $f$ fiind strict crescătoare, este injectivă. Deci soluția găsită este unică.**

**3) Să se arate că ecuația $x^3+x^2+5x+2006=0$ are cel puțin o soluție pe $\mathbb{R}$.**

**R. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+x^2+5x+2006$, continuă pentru care avem $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ şi $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$. Conform punctului b) al corolarului există $c\in\mathbb{R}$ pentru care $f(c)=0$.**

**Observație**. Analog se arată că ecuația $f(x)=0$, unde $f(x)$ este funcție polinomială de grad impar, are cel puțin o soluție reală.

**Corolar 2** (**Criteriu ca o funcție continuă să aibă punct fix**). Fie $f:[0,1]\to[0,1]$ o funcție continuă. Atunci ecuația $x-f(x)=0$ are cel puțin o soluție în $[0,1]$.

O astfel de soluție se numeşte **punct fix** pentru $f$.

Deci, $c\in[0,1]$ **este punct fix pentru** $f$ dacă $f(c)=c$.

**Demonstrație**. Se consideră funcția $g:[0,1]\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)-x$, care este o funcție continuă (diferență de funcții continue).
Avem $g(0)=f(0)\geq 0, g(1)=f(1)-1\leq 0$, adică $g(0)g(1)\leq 0$. Conform corolarului precedent există $c\in[0,1]$ astfel încât $g(c)=0$, adică $f(c)=c$. ■

**Observații**. **1**) Acest rezultat spune că plecând continuu din punctul $(0,f(0))$ în punctul $(1,f(1))$, graficul este tăiat cel puțin într-un punct de prima bisectoare $y=x$ (Fig.11).

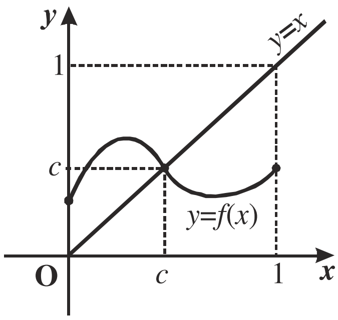


Fig. 11

**2**) Un rezultat similar are loc dacă în loc de $f$ continuă impunem ca $f$ să fie monotonă pe $[0,1]$. Are loc teorema lui Knaster: Dacă $f:[0,1]\to[0,1]$ este o funcție monoton crescătoare, atunci există $c\in[0,1]$ astfel încât $f(c)=c$.

**3**) Dacă intervalul nu este închis, concluzia nu mai este valabilă. De exemplu $f:(0,1)\to(0,1), f(x)=x^2$, n-are punct fix.

**Exemple. 1) Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, două funcții continue pentru care $f(a)<g(a)$, $f(b)>g(b)$. Să se arate că există $c\in(a,b)$ astfel încât $f(c)=g(c)$.**
**Interpretare geometrică.**
**R. Se consideră funcția continuă $h:[a,b]\to\mathbb{R}, h(x)=f(x)-g(x)$ pentru care avem $h(a)<0$, $h(b)>0$. Cum $h$ are proprietatea lui Darboux, există $c\in(a,b)$ cu $h(c)=0$, adică $f(c)=g(c)$. Graficele celor două funcții se taie în $x=c$.**
**2) Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, continuă. Să se arate că există $c\in[a,b]$ astfel încât $f(c)=\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.**

**R. Presupunem că $f(a)<f(b)$. Atunci $f(a)<\dfrac{f(a)+f(b)}{2}<f(b)$. Deoarece $f$ este continuă, iar $\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$ este o valoare intermediară, $f$ are proprietatea lui Darboux pe $[a,b]$ și deci există $c\in[a,b]$ astfel încât $f(c)=\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.**
**Dacă $f(a)=f(b)$, atunci $\dfrac{f(a)+f(b)}{2}=f(a)$ și se ia $c=a$.**

Următorul rezultat este important în **rezolvarea inecuațiilor**. Practic acum avem argumentarea rezolvării acestora din anii precedenți.

Avem

**Corolar 3 (Semnul unei funcții continue).** Fie $f : I \to \mathbb{R}, I$ interval, $f$ continuă, care nu se anulează pe *I*. Atunci $f$ are acelaşi semn pe *I*.

**O funcție continuă care nu se anulează pe un interval, păstrează semn constant pe tot intervalul.**

**Demonstrație.** Vom demonstra prin reducere la absurd. Presupunem că există $a, b \in I, a < b$ în care $f$ ia valori de semne contrare, adică astfel încât $f(a)f(b) < 0$. Din corolarul **1.** a) se deduce că există $c \in (a,b) \subset I$ astfel încât $f(c) = 0$, contradicție. În concluzie $f$ are semn constant pe *I*. ■

**Procedeu practic de rezolvare a inecuațiilor** $f(x) > (\geq, <, \leq) 0, x \in D$.

**1**) Se rezolvă ecuația $f(x) = 0$ şi se ordonează crescător soluțiile situate în domeniul lui $f$ : $x_1 < x_2 < ... < x_n$.

**2**) Pentru a determina semnul lui $f$ pe intervalul $(x_i, x_{i+1})$ (adică semnul lui $f$ între două rădăcini consecutive) se alege un punct convenabil $c_i \in (x_i, x_{i+1})$ şi se calculează valoarea lui $f$ în acest punct, adică $f(c_i)$. Semnul acestui număr este semnul lui $f$ pe tot intervalul $(x_i, x_{i+1})$. Analog, procedăm pentru semnul lui $f$ la stânga lui $x_1$ şi la dreapta lui $x_n$.

**3**) Dacă rădăcinile lui $f$ sunt simple, atunci dacă am stabilit semnul lui $f$ pe un interval $(x_i, x_{i+1})$, atunci pe intervalele vecine $(x_{i-1}, x_i), (x_{i+1}, x_{i+2})$ avem semne contrare celui de pe $(x_i, x_{i+1})$. Se repetă procedeul până se epuizează domeniul lui $f$ (semnele alternează).

**Exemplu. Să se rezolve inecuațiile:**

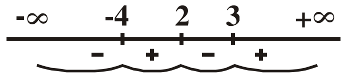
**a)** $x^3 - x^2 - 14x + 24 < 0$ ; **b)** $\dfrac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x - 2} \geq 0$ ; **c)** $\dfrac{\lg^2 x - 3\lg x + 4}{\lg x - 1} < 2$.

**R. a) Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$ este continuă. Ecuația $f(x) = 0$ are soluțiile $x_1 = -4, x_2 = 2, x_3 = 3$. Deoarece $f$ este continuă şi nu se anulează pe intervalele $(-\infty, -4), (-4, 2), (2, 3), (3, \infty)$, $f$ are semn constant pe fiecare interval.**

**Din $f(-5) = -56 < 0, -5 < -4$ se deduce $f(x) < 0, \forall x < -4$. Din $f(0) = 24 > 0, 0 \in (-4, 2)$ rezultă $f(x) > 0, \forall x \in (-4, 2)$. Era de aşteptat ca $f(x) > 0, \forall x \in (-4, 2)$, deoarece $f(x) < 0, \forall x < -4$, iar în $x = -4$, $f(-4) = 0$ şi $x = -4$ este rădăcină simplă pentru $f(x) = 0$. Dacă $x \in (2, 3)$, atunci $f(x) < 0$, pentru că $x = 2$ este rădăcină simplă a ecuației $f(x) = 0$. Analog, $f(x) > 0, \forall x > 3$. Aceste rezultate se trec în tabelul de semn al funcției,**

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

sau pe axa reală

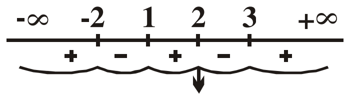



**Deci, $f(x)<0$ dacă $x\in(-\infty,-4)\cup(2,3)$.**

**b) Se impune condiția $x-2\neq 0, x\neq 2$. Se rezolvă ecuația $f(x)=0$ și se obțin soluțiile $x_1=-2$, $x_2=1, x_3=3$. Observăm că toate rădăcinile sunt simple. Este suficient să găsim semnul lui $f$ pe un interval și apoi pe celelalte intervale, alternăm semnele. Pentru $x=0\in(-2,1), f(0)=-3<0$. Tabelul de semn pentru $f$ este**

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | |

sau pe axa reală

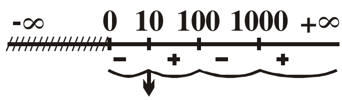



**Săgeata în dreptul lui $x=2$, ne spune că în acest punct funcția nu este definită. De aici $f(x)\geq 0$ dacă $x\in(-\infty,-2]\cup[1,2)\cup[3,\infty)$.**

**c) Se impun condițiile: $x>0, \lg x-1\neq 0$, adică $x>0, x\neq 10$. Se aduce inecuația la forma echivalentă $f(x)=\dfrac{\lg^2 x-5\lg x+6}{\lg x-1}<0$. Ecuația $f(x)=0$ are soluțiile $x_1=100, x_2=1000$. Pentru $x=1, f(1)=-6<0$. Rădăcinile fiind simple, tabelul de semn are forma**

| $x$ | $0$ | | $10$ | | $100$ | | $1000$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

sau pe axa reală




**Deci, $f(x)<0$ dacă $x\in(0,10)\cup(100,1000)$.**

Următorul rezultat afirmă că o funcție continuă duce un interval într-un interval. Mai precis are loc următorul

**Corolar 4**. Fie $f:E\to\mathbb{R}$ o funcție continuă și un interval $I\subseteq E$. Atunci mulțimea $f(I)$ este un interval (Fig. 12. a), b)).

**Demonstrație**. Trebuie probat că $\forall\, \alpha,\beta \in f(I), \alpha < \beta$, avem $[\alpha,\beta] \subseteq f(I)$. Dacă $\alpha,\beta \in f(I)$, atunci există $a,b \in I$ astfel încât $f(a)=\alpha, f(b)=\beta$. Fie $\lambda \in [\alpha,\beta]$. Funcția $f$ fiind continuă are proprietatea lui Darboux. Deci există $x_\lambda \in [a,b]$ astfel încât $f(x_\lambda)=\lambda$, ceea ce arată că $\lambda \in f(I)$. Deci $[\alpha,\beta] \subseteq f(I)$. ■

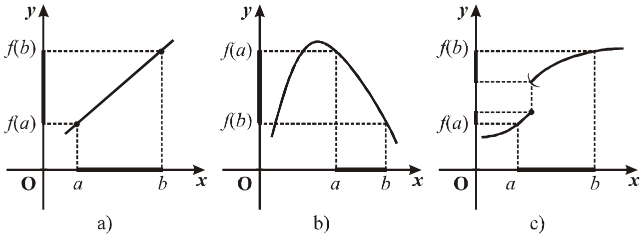



Fig.12

**Observații**. **1**) Dacă $f$ nu este continuă pe *I*, atunci $f(I)$ poate să nu mai fie interval (Fig. 12. c)).

**2**) Cu ajutorul acestui corolar se poate demonstra riguros surjectivitatea unor funcții elementare.

**Exemple. 1) Funcția $f:\mathbb{R}\to[-1,1], f(x)=\sin x$ este continuă și $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.**

**Deci, $f\left(\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)=[-1,1]$ și evident $f(\mathbb{R})=[-1,1]$. Prin urmare funcția $f:\mathbb{R}\to[-1,1], f(x)=\sin x$ este surjectivă.**

**2) Să arătăm că funcția exponențială $f:\mathbb{R}\to(0,\infty), f(x)=a^x, a>0, a\neq 1$ este surjectivă. Pentru $y>0$, trebuie să arătăm că există $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=y \Leftrightarrow a^x-y=0$.**

**Se consideră funcția $f_y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_y(x)=a^x-y$, continuă pe $\mathbb{R}$ pentru care, dacă $a>1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_y(x)=-y<0$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f_y(x)=+\infty$ sau dacă $0<a<1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_y(x)=\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f_y(x)=-y<0$. Deci conform corolar 1. b), există $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $f_y(c)=0$, adică $a^c-y=0$.**

**3**) Afirmația din corolar rămâne valabilă dacă $f:I\to\mathbb{R}, I$ interval și $f$ are proprietatea lui Darboux.

## REZUMATUL CAPITOLULUI

| Noţiunea | Definiţie. Caracterizare | Observaţii |
|---|---|---|
| Funcţie continuă într-un punct | $f: E \to \mathbb{R}, a \in E \cap E'$<br>$f$ este continuă în<br>$x = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ | Dacă $a \in E$ este punct izolat, atunci $f$ este continuă în $x = a$. Nu are sens problema continuităţii în punctele în care $f$ nu este definită. |
| Funcţie continuă pe o mulţime | $f: E \to \mathbb{R}, A \subseteq E, A \neq \varnothing$<br>$f$ este continuă pe $A \Leftrightarrow f$ este continuă în fiecare punct din $A$<br>Funcţiile elementare sunt funcţii continue. | Dacă $f$ este continuă pe $E$, atunci spunem că $f$ este continuă (fără a mai preciza mulţimea) |
| Continuitatea laterală | 1) $f: E \to \mathbb{R}, a \in \left(E \cap (-\infty, a)\right)'$<br>$f$ este continuă la stânga în<br>$x = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = f(a)$<br>2) $f: E \to \mathbb{R}, a \in \left(E \cap (a, -\infty)\right)'$<br>este continuă la dreapta în<br>$x = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \searrow a} f(x) = f(a)$ | |
| Continuitatea punctuală în $x = a$. Condiţii echivalente. | 1( cu şiruri)<br>$\forall (x_n), x_n \in E, x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$<br>2) (criteriul $\varepsilon - \delta$)<br>$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) = \delta > 0, \forall x \in E, \lvert x - a \rvert < \delta$<br>$\Rightarrow \lvert f(x) - f(a) \rvert < \varepsilon$<br>3) (cu vecinătăţi)<br>$\forall V \in \mathcal{V}(f(a)), \exists U \in \mathcal{V}(a)$,<br>$\forall x \in U \cap E \Rightarrow f(x) \in V$<br>4) (continuitate bilaterală)<br>$l_s(a) = l_d(a) = f(a)$ | |
| Puncte de discontinuitate | 1) de primă speţă.<br>$x = a \in E$ este punct de discontinuitate de prima speţă pentru $f$ dacă $a$ este punct de discontinuitate, iar $f$ are limite laterale finite în $a$<br>2) de speţa a doua- dacă nu este de prima speţă | |

| | | |
|---|---|---|
| **Operații cu funcții continue** | **Suma(diferanța), produsul, câtul, compunerea a două funcții continue este o funcție contiunuă** | **1) $f(a)>0, \forall a\in E, f,g$ funcții continue $\Rightarrow f^g$ funcție continuă.**<br>**2) $f$ continuă $\Rightarrow \lvert f\rvert$ continuă**<br>**3) $f,g$ continue $\Rightarrow \min(f,g), \max(f,g)$ continue** |
| **Proprietăți ale funcțiilor continue** | **1) $f:E\to\mathbb{R}, a\in E\cap E' f(a)\neq 0\Rightarrow$ $\exists V\in\vartheta(a), f(x)\neq 0, \forall x\in V$**<br>**2) Proprietatea lui Darboux(P.D.)**<br>**$f:I\to\mathbb{R}, I$ interval. $f$ are P.D. pe I $\Leftrightarrow \forall a,b\in I, a<b, \forall\lambda\in(f(a),f(b)),$ $\exists x_\lambda\in(a,b), f(x_\lambda)=\lambda$**<br>**3) $f:I\to\mathbb{R}, I$ interval, $f$ continuă $\Rightarrow f$ are P.D.( Cauchy)**<br>**4) $f:I\to\mathbb{R}, I$ interval , $f$ continuă și $f(x)\neq 0, \forall x\in I\Rightarrow f$ are semn constant pe $I$** | |
| | **5) $f:E\to\mathbb{R}, f$ continuă, $I\subseteq E$ interval $\Rightarrow f(I)$ este interval** | **$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, continuă $\Rightarrow f([a,b])=[m,M]$, unde $m=\inf\limits_{a\le x\le b} f(x)$, $M=\sup\limits_{a\le x\le b} f(x)$ (Teorema intervalului)** |

## Probleme propuse

**1.** **Să se precizeze care din funcțiile de mai jos, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, au proprietatea lui Darboux (pe $\mathbb{R}$):**

**1)** $f(x)=\begin{cases}1, x>0\\ 0, x=0\\ -1, x<0\end{cases}$ **(funcția semn, $f(x)=\operatorname{sgn}(x)$ ); 2)** $f(x)=\operatorname{sgn}(x^2-1)$;

**3)** $f(x)=\begin{cases}x-1, x\le 1\\ 0, x>1\end{cases}$; **4)** $f(x)=[x]$; **5)** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{\lvert x\rvert}, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$; **6)** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$;

7) $f(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbb{Q}\\ -1, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$; 8) $f(x)=\begin{cases}3-x, x\in\mathbb{Q}\\ \dfrac{2}{x}, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$; 9) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$.

**2.** **Fie $\mathcal{C}$ mulțimea tuturor cercurilor de rază cel mult 10 cm. Arătați că există cel puțin un cerc din $\mathcal{C}$ a cărei arie este egală cu 250 cm $^2$.**

**3.** **Să se arate că ecuațiile de mai jos au cel puțin o soluție în intervalul indicat:**

1) $x^4+3x+1=0,[-1,0]$; 2) $x^5+x^2-1=0,\mathbb{R}$; 3) $x^{13}+7x^3-5=0,(0,\infty)$; 4) $x^3=\sqrt{x+2},[1,2]$;

5) $(x-1)e^x+x=0,[0,1]$; 6) $x\cdot 2^x-1=0,(0,1)$; 7) $x+\ln x=0,\left(\dfrac{1}{e},1\right)$; 8) $(1-x)\cos x=\sin x,[0,1]$;

9) $\sin 2x-\cos x=0,[0,\pi]$; 10) $x\sin^4 x-1=0,\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$; 11) $\arcsin x+\operatorname{arctg} x+1=0,[-1,1]$;

12) $x+\operatorname{arctg} x-1=0,\mathbb{R}$; 13) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-4}=0,(1,4)$.

**4.** **Arătați că: a) ecuația $x^4+7x^3-9=0$ are cel puțin două rădăcini reale;**

**b) ecuația $x^3-4x+2=0$ are trei rădăcini reale distincte în $[-3,3]$ și localizați rădăcinile între întregi consecutivi.**

**c) ecuația $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4=0$ cu $(a+c+e)^2<(b+d)^2$ are o rădăcină reală de modul cel mult 1.**

**5.** **Să se stabilească semnul funcțiilor pe domeniul de definiție**

1) $f(x)=x^3+x^2-2x$; 2) $f(x)=x^3-3x-2$; 3) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}$; 4) $f(x)=(x+1)\sqrt{x-2}$;

5) $f(x)=\dfrac{3^x-1}{x+2}$; 6) $f(x)=\dfrac{\ln^2 x-1}{\sqrt{x-1}}$; 7) $f(x)=(2^x-16)(\ln x+1)$; 8) $f(x)=\sin x+\cos x$;

9) $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$; 10) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg} x-1}{\operatorname{tg} x+1}$.

**6.** **Să se rezolve inecuațiile:**

1) $x^3+x^2\le 0$; 2) $x^3-x^2-2x>0$; 3) $\dfrac{x}{(x-1)(x+2)}\ge 0$; 4) $x^2\sqrt{x+1}\le 0$; 5) $(x-1)\sqrt{x-1}\ge 0$;

6) $\dfrac{\sqrt{x+5}}{1-x}<1$; 7) $\dfrac{4-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+3}}\le 3$; 8) $(2^x-4)(x+1)\ge 0$; 9) $\sqrt{x-2}\,(3^x-9)\le 0$;

10) $(x^2-4)(\lg x+1)>0$; 11) $\dfrac{2^x-16}{\ln x-1}\le 0$; 12) $\dfrac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x}\le\dfrac{1}{2}$; 13) $\dfrac{\log_5(x^2+3)}{4x^2-16x}<0$;

14) $(\log_x 2)(\log_{2x} 2)(\log_2 4x)>1$; 15) $\dfrac{9^x-7\cdot 3^x}{9^x-4\cdot 3^x+3}\ge 1$; 16) $\dfrac{\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{x+4}}{\log_{\frac{1}{2}}(x+2)}\le 1$;

17) $2\sin^2 x-\sin x+\sin 3x<1$; 18) $\operatorname{ctg} x+\dfrac{\sin x}{\cos x-2}\ge 0$.

7. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, o funcție continuă și mărginită. Să se arate că ecuația $f(x)=2x+1$ are cel puțin o soluție.

8. Fie $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x}$ pentru care $f(-1)f(1)<0$. Ecuația $f(x)=0$, nu are soluții. Se contrazice corolarul de localizare a unei rădăcini ?

9. a) Fie $f:[-a,a]\to[-a,a], a>0$ o funcție continuă. Arătați că există $c,c'\in[a,b]$ astfel încât $f(c)=c$ și $f(c')=-c'$.Interpretare geometrică. b) Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este continuă și mărginită, atunci *f* are un punct fix.

10. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, continuă cu $f(0)=f(1)$. Arătați că există un punct $c\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ astfel încât $f(c)=f\left(c+\frac{1}{2}\right)$.

11. Fie $f,g:[a,b]\to[a,b]$ continue cu $g(a)=b, g(b)=a$. Să se arate că ecuația $f(x)=g(x)$ are cel puțin o soluție reală.

## Teste de evaluare

**Testul 1 (1 punct din oficiu)**

1. Stabiliți punctele în care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2x, & x\in\mathbb{Q}\\ 2-2x, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$ este continuă. (2 puncte)

2. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2+a, & x<1\\ 2, & x=1\\ bx, & x>1\end{cases}$ să fie continuă pe $\mathbb{R}$. (1 punct).

3. Să se studieze continuitatea funcției $f:[0,3]\to\mathbb{R}, f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^n+x^n}{3^n}$. (2 puncte)

4. Să se determine parametrii reali $a,b,c$ pentru care funcția $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+b, & x\le 0\\ \sqrt{cx^2+4x+4}, & x\in\left(0,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\end{cases}$ este continuă în $x=0, f(-1)=f(1)$ și există $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$. (2 puncte)

5. a) Să se arate că ecuația: $(x^2+x+1)(x-2)+(x^2-x+1)(x-3)=0$ are o rădăcină în intervalul $(2,3)$.

b) Stabiliți semnul funcției $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln^2 x-3\ln x+2$. (2 puncte)

c) Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă cu $f(a)\ge a, f(b)\le b$. Arătați că $f$ are cel puțin un punct fix.

**Testul 2 (1 punct din oficiu)**

**1.** **Fie funcția** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left[x+\frac{1}{2}\right]$**, unde** $[x]$ **este partea întreagă a lui** $x$**. Să se determine punctele de discontinuitate ale lui** $f$**. (2 puncte)**

**2.** **Să se determine** $a,b\in\mathbb{R}$ **astfel încât funcția** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2+a, x\le 2\\ ax+b, x>2\end{cases}$ **să fie continuă pe** $\mathbb{R}$ **și în plus să existe** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$**. (2 puncte)**

**3.** **Să se studieze continuitatea funcției** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2+nx}{1+|nx|}$**. (1 punct)**

**4.** **Fie funcția continuă** $f:[-2,2)\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-2x$**.**

**a) Să se arate că** $f([-2,2))=[-1,8]$ **unde** $-1$ **și** $8$ **sunt marginile valorilor funcției.**

**b) Nu contravine aceasta cu proprietatea funcțiilor continue definite pe un interval închis și mărginit ? (2 puncte)**

**5.** **a) Să se arate că ecuația** $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}-1=0$ **are cel puțin o rădăcină în intervalul** $[5,17]$**.**

**b) Să se rezolve inecuația** $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}-1>1$**. (2 puncte)**

**Testul 3 (tip grilă) (1 punct din oficiu)**

**1.** **Se consideră funcția** $f:[0,2]\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x-[x]}{2x-[x]+1}$**, unde** $[x]$ **este partea întreagă a lui** $x$**.**
**Dacă** $S$ **este suma punctelor de discontinuitate ale funcției** $f$**, atunci:**

**a)** $S=\frac{1}{2}$**; b)** $S=1$**; c)** $S=2$**; d)** $S=3$**; e)** $\left(S=\frac{3}{2}\right)$**. (2 puncte)**

**2.** **Fie funcția** $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}e^x, \text{ dacă } x\in[0,1]\\ \frac{a\sin(x-1)}{x^2-3x+2}, x\in(1,\pi], a\in\mathbb{R}\end{cases}$**.**

**Să se determine valoarea parametrului** $a$ **astfel încât** $f$ **să fie continuă pe** $[0,\pi]$**.**

**a)** $a=2$**; b)** $a=3e$**; c)** $a=-e$**; d)** $a=2e$**; e)** $a=e$**. (1 punct)**

**3.** **Să se determine mulțimea punctelor în care funcția** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^3-2x, x\in\mathbb{Q}\\ x^2-2, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$ **este continuă: a)** $\{-\sqrt{2},0\}$**; b)** $\{-\sqrt{2},1,\sqrt{2}\}$**; c)** $\{0,\sqrt{2}\}$**; d)** $\varnothing$**; e)** $\{\pm\sqrt{2}\}$**. (2 puncte)**

**4.** **Care din funcțiile** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$**, de mai jos, are proprietatea lui Darboux ?**

**a)** $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{1}{x}, x\ne 0\\ 0, x=0\end{cases}$**; b)** $f(x)=\begin{cases}x, x\in\mathbb{Q}\\ x^3, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$**; c)** $f(x)=[x]-x$**;**

d) $f(x)=\operatorname{sgn}(x)$ ; e) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$. (2 puncte)

5. 1) Ecuația $x^2-2\cdot 3^{-x}+1=0$ are o singură rădăcină reală, localizată în intervalul:

a) $\left(\frac{1}{2},1\right)$; b) $\left(\frac{3}{2},\infty\right)$; c) $\left(-\frac{1}{2},0\right)$; d) $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$; e) $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

2) Mulțimea de soluții a inecuației: $\dfrac{\ln\left(2x^2-3x+1\right)}{x^2-3x}\leq 0$ este:

a) $\left[\frac{3}{2},3\right)$; b) $(0,3)$; c) $(-1,0]$; d) $(1,\infty)$; e) $\varnothing$. (2 puncte)

Testul 4 (tip grilă) (1 punct din oficiu)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x+a, x\leq 0\\ \dfrac{\sqrt{x+1}-b^2}{x}, x>0\end{cases}$ cu parametrii $a,b\in\mathbb{R}$.

Dacă $A=\left\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid f \text{ este continuă}\right\}$, iar $\alpha=\sum\limits_{(a,b)\in A}\left(a^2+b^2\right)$, atunci:

a) $\alpha=\frac{5}{2}$; b) $\alpha=\frac{1}{4}$; c) $\alpha=\frac{4}{5}$; d) $\alpha=2$; e) $\alpha=\frac{5}{4}$. (2 puncte)

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}ax+b, x\leq 2\\ x^2+bx+a, x>2, a,b\in\mathbb{R}\end{cases}$.

Funcția $f$ este continuă dacă și numai dacă: a) $a=0, b=1$; b) $a=b+4$; c) $b=0, a=-1$; d) $a=1, b=-1$;

e) $a=3, b=5$. (1 punct)

3. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to(-\infty,-1)\cup\{0\}\cup(1,\infty), f(x)=\begin{cases}-\left(x^2+1\right), x<0\\ 0, x=0\\ x^2+1, x>0\end{cases}$.

Atunci: a) $f$ nu este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$; b) $f$ nu este bijectivă; c) $f^{-1}$ este continuă dar are inversa discontinuă; d) $f$ este continuă în $x=0$; e) $f^{-1}$ nu este continuă. (2 puncte)

4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, funcția definită astfel $f(x)=\begin{cases}x, x\in\mathbb{Q}\\ -x, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$.

Atunci: a) $f$ nu este inversabilă; b) $f$ este continuă pe mulțimea $\{\pm 1\}$;

c) $f$ este continuă în $x=0$. (2 puncte)

5. 1) Ecuația $2^x\left(x^2+1\right)-3=0$, are o unică soluție în intervalul:

a) $(-1,0)$; b) $(0,1)$; c) $(2,3)$; d) $(-2,-1)$; e) $(3,\infty)$;

2) Mulțimea de soluții a inecuației $\dfrac{\arccos x}{\arcsin^2 x-3\arcsin x}\geq 0$ este egală cu:

a) $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right)$; b) $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$; c) $[-1,0)\cup\{1\}$; d) $\left(-\frac{1}{2},0\right)$; e) $(0,1)$. (2 puncte)

# 4. FUNCȚII DERIVABILE

**În acest capitol este dezvoltată teoria diferențierii. Este prezentată noțiunea de derivată a unei funcții într-un punct şi se dau derivatele funcțiilor elementare, operațiile algebrice (suma, produsul, câtul) cu funcții derivabile.**

**Sunt prezentate aplicații ale derivatelor în studiul funcțiilor. Rolul derivatei întâi în studiul monotoniei, stabilirea punctelor de extrem şi rezolvarea unor inegalități. Rolul derivatei a doua în stabilirea intervalelor de convexitate(concavitate) şi precizarea punctelor de inflexiune sau a celor de extrem pentru o funcție.**

**Un paragraf conține aplicații practice rezolvate utilizând cunoştințe din acest capitol .**

**Istoric. Calculul diferențial a fost generat de probleme de mecanică şi de geometrie. Calculul diferențial se ocupă de raportul cu care se schimbă „lucrurile". Matematicianul englez Sir Isaac Newton ( 1642 – 1727), unul dintre cei mai mari matematicieni ai lumii, este considerat „descoperitorul" calculului diferențial în 1666 şi prezentat în „Method of Fluxions" (1671). Totuşi această lucrare n-a fost publicată până în 1736, timp în care matematicianul şi filozoful german Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) a descoperit independent de Newton , calculul diferențial, pe care l-a publicat în 1684. Ultimii şapte ani din viață, Leibniz şi i-a petrecut într-o amară controversă cu Newton privind prioritatea în descoperirea calculului diferențial. Descoperirea calcului diferențial a avut un impact profund în comunitatea matematicienilor. Notația lui Newton pentru derivată este** $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$**, iar cea a lui Leibniz este** $f'(x)=\frac{dy}{dx}$.

**Alți matematicieni care au adus contribuții importante la dezvoltarea calculului diferențial sunt P. Fermat ( 1601-1665), M. Rolle (1652-1719), J. L. Lagrange ( 1736-1813), L'Hôpital (1661 – 1704), (care a scris prima carte despre calculul diferențial, „Analyse des infiniments petits"apărută în 1696 la Paris şi în care se află şi celebra regulă care–i poartă numele . Totuşi regula a fost stabilită de Jean Bernoulli(1667-1748), matematician elvețian – din celebra familie de matematicieni Bernoulli – care s-a ocupat de instruirea matematică lui l'Hôpital , activitate pentru care era remunerat ), B.Taylor (1685-1731), A.L. Cauchy (1789-1857), J. G . Darboux (1842-1917).**

**" Si Newton et Leibniz avaient su que les fonctions continues n'ont pas nécessairement de dérivées la calcul différentiel n'aurait jamais été crée."**
**Emile Piccard (1905).**

**"Qu'est-ce qu'une dérivée véritablement ?**
**Résponse : une limite:"**
**Cauchy „Cours d'Analyse" , 1821.**

**„Legea diferențială este singura formă care satisface pe deplin exigența cauzalității proprie fizicianului modern." A. Einstein**

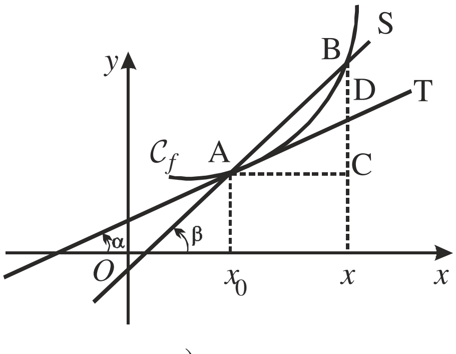
# 4.1. PROBLEME CARE CONDUC LA NOȚIUNEA DE DERIVATĂ

Două probleme au stat la originea noțiunii de derivată:
**1) Definirea tangentei la o curbă în plan.**
**2) Definirea vitezei instantanee a unui punct mobil.**

### 1. Tangenta la o curbă

Să considerăm $f:[a,b]\to\mathbb{R}, a<b$ o funcție continuă. Am definit mulțimea $G_f=\{(x,f(x));x\in[a,b]\}$ ca fiind graficul lui $f$, iar $\mathcal{C}_f$ reprezentarea geometrică a lui $G_f$. Fie $x_0\in(a,b)$ și $(x_0,f(x_0))\in G_f$ punctul de pe grafic de abscisă $x_0$.

Dorind să dea un sens dreptei tangente în $(x_0,f(x_0))$ la $\mathcal{C}_f$, LEIBNIZ a fost condus la noțiunea de **derivată a unei funcții într-un punct.**



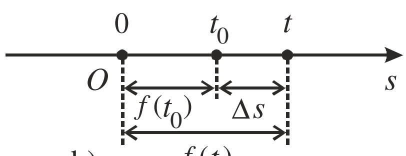




Fig. 1

Fie $x \in (a,b)$, $x \neq x_0$ şi punctul $(x, f(x)) \in G_f$. În Fig.1.a), am notat cu $\mathcal{C}_f$ graficul lui $f$ în reperul $xOy$, $A(x_0, f(x_0))$, $B(x, f(x))$, secanta $AB$ prin $S$, tangenta în $A$ cu $T$, $\alpha$ unghiul tangentei cu axa $Ox$, $\beta$ unghiul secantei $AB$ cu axa $Ox$ unde $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$. Pentru $\beta > 0$, unghiul este măsurat în sens trigonometric (invers deplasării acelor de ceas), iar pentru $\beta < 0$ în sens antitrigonometric. Am dus $AC$ paralelă cu $Ox$. Atunci $AC = x - x_0$ (am presupus $x \geq x_0$), $BC = f(x) - f(x_0)$. Se ştie din geometrie că panta dreptei $AB$ este:

$m_x = m_{AB} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \operatorname{tg} \beta$, adică raportul între creşterea funcţiei $(f(x) - f(x_0))$ şi creşterea argumentului $(x - x_0)$.

Dacă $x \to x_0$, atunci $f(x) \to f(x_0)$ şi punctul $B$ se mişcă pe $\mathcal{C}_f$ către $A$. Dacă în această situaţie unghiul $\beta$ tinde către o valoare $\alpha$ diferită de $\frac{\pi}{2}$ şi $-\frac{\pi}{2}$, atunci există limita $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} m_x = m_0 = \lim\limits_{\beta \to \alpha} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha$ şi reprezintă **panta tangentei** la $\mathcal{C}_f$ în $A(x_0, f(x_0))$. Atunci ecuaţia tangentei în $A(x_0, f(x_0))$ la $\mathcal{C}_f$ este $\boxed{y - f(x_0) = m_0(x - x_0)}$ şi corespunde la $m_0 \in \mathbb{R}$ (deci $m_0$ finit).

Dacă $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$, atunci $m_0 = \pm\infty$, iar ecuaţia tangentei în $A$ este $\boxed{x = x_0}$ adică o dreaptă paralelă cu $Oy$.

**Observaţie**. Panta curbei continue $y = f(x)$ în punctul $A$ este panta tangentei în $A$ la curbă.

**2. Viteza instantanee**

Studiind problema vitezei instantanee a unui punct material, NEWTON a fost condus la studiul limitei unui raport de tipul lui $m_x$.

Presupunem că un punct se deplasează pe o axă $s$ şi fie $s = f(t)$ coordonata sa la momentul $t$ (Fig. 1.b)).

Atunci $\Delta s = f(t) - f(t_0)$ reprezintă drumul parcurs în intervalul $[t_0, t]$ $(\Delta t = t - t_0)$ iar raportul $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ reprezintă **viteza medie** în intervalul de timp $[t_0, t]$, iar limita **(dacă există)**

$\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = v(t_0)$ se numeşte **viteza instantanee** la momentul $t_0$.

Analog, dacă $v(t)$ este viteza punctului la momentul $t$, atunci **accelerația punctului material la momentul** $t_0$ este $a(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$, dacă limita există.

## 4.2 DEFINIȚIA DERIVATEI UNEI FUNCȚII ÎNTR-UN PUNCT

Noțiunea de **derivată,** alături de noțiunea de **integrală,** este cea mai importantă din analiza matematică.
În secțiunea 5.1 am văzut că probleme diverse au condus pe marii matematicieni LEIBNIZ şi NEWTON la examinarea raportului $R(x) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $x \neq x_0$, a existenței limitei acestuia când $x \to x_0$.
Fie $f : E \to \mathbb{R}$ unde $E$ este un **interval** sau o **reuniune de intervale** din $\mathbb{R}$.

**Definiții. 1)** Se spune că funcția $f$ **are derivată** în $x_0 \in E$ dacă limita $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ există în $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

În acest caz această limită se notează cu $f'(x_0)$ şi se numeşte **derivata funcției $f$ în punctul $x_0$**.

Deci $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

**2)** Se spune că funcția $f$ **este derivabilă în $x_0 \in E$** dacă limita $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ există în $\mathbb{R}$ (**există** şi este **finită**).

În acest caz limita se notează, de asemenea, cu $f'(x_0)$, adică

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

**Observații. 1)** Notația $f'(x_0)$ a fost făcută de matematicianul francez Lagrange. Să observăm că dacă $f$ **are derivată într-un punct** $x_0$ aceasta poate fi un număr real finit, caz în care $f$ **este derivabilă** în $x_0$, dar poate fi $+\infty$ sau $-\infty$ când spunem că $f$ **are derivată infinită în** $x_0$ (când $f$ nu este derivabilă în $x_0$ !).

Mulțimea punctelor din $E$ în care $f$ este derivabilă se numeşte **domeniul de derivabilitate** al funcției $f$ , notat $D_{f'} \subset E$ .

**2**) Pentru $f'(x_0)$ uneori se utilizează notațiile : $D_f(x_0), \dfrac{df(x_0)}{dx}$.

**3**) Notând $\Delta f = f(x) - f(x_0)$-numită creşterea funcției, $\Delta x = x - x_0$-numită creşterea argumentului, atunci $f'(x_0)$ reprezintă limita raportului dintre creşterea funcției şi creşterea argumentului ,când creşterea argumentului tinde la zero, adică:
$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.
Alteori este utilizată scrierea următoare: schimbând variabila în limita raportului prin $h = x - x_0 \to 0$ dacă $x \to x_0$ avem $(x_0 + h \in E)$.
$f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

**4**) Revenind la problema din 4.1, care a condus la noțiunea de derivată a unei funcții într-un punct putem face precizările următoare:
**Dacă funcția** $f$ (continuă în $x_0$) **are derivată în punctul** $x_0$ **,atunci graficul său** $\mathcal{C}_f$ admite tangentă în punctul corespunzător $A(x_0, f(x_0)$ şi anume :

- **Dacă derivata este finită** , atunci coeficientul unghiular al tangentei este egal cu $m = f'(x_0)$, când ecuația tangentei în $A$ la curba $\mathcal{C}_f$ are forma
  $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ (Fig.2.a).
- **Dacă derivata este infinită**, atunci tangenta este paralelă cu $Oy$ şi are ecuația $x = x_0$ (Fig.2.b).

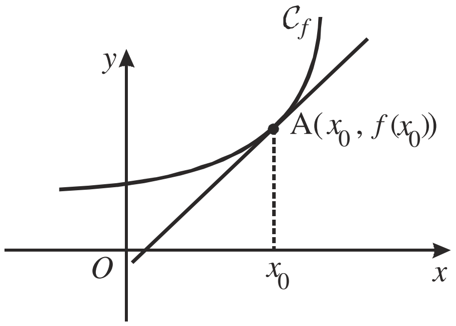
**5**) Dacă $E = [a, b]$, atunci prin derivata lui $f$ în $a$ înțelegem
$f'(a) = \lim\limits_{x \searrow a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, iar prin derivata lui $f$ în $b$ înțelegem
$f'(b) = \lim\limits_{x \nearrow b} \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b}$ ,dacă aceste limite există.

**6**) Faptul că $f$ are derivată în $x_0$, numărul $f'(x_0)$ se poate exprima cu ajutorul şirurilor : $\forall x_n \in E, x_n \to x_0, x_n \neq x_0$ să rezulte $\dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \to f'(x_0)$.

Să observăm că $x_0 \in E$ trebuie să fie punct de acumulare pentru domeniul lui *f*, ceea ce aici are loc deoarece $E$ este interval sau reuniune de intervale.

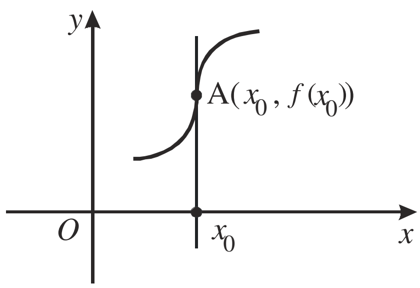
**7**) **Interpretarea practică a derivatei**. Raportul $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ măsoară **viteza medie de schimbare a valorilor funcției** $f$ **relativ la schimbarea argumentului**, în timp ce $f'(x_0)$ poate fi interpretată ca viteza instantanee în $x_0$, de schimbare a lui $\boldsymbol{f}$ relativ la $\boldsymbol{x}$.

De exemplu pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x+1, f'(x)=3, \forall x\in\mathbb{R}$ ,reprezintă panta dreptei asociată funcției. Semnificația lui $f'(x)=3$ este următoarea: la o creştere a lui $x$ cu **o unitate**, $f$ creşte cu **trei unități**. În acest caz viteza de schimbare este constantă. De obicei, viteza de schimbare, adică $f'(x)$ este o funcție de $x$ ,ceea ce înseamnă că ea variază de la un punct la altul. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-3x+5$, atunci $f'(x)=2x-3, \forall x\in\mathbb{R}$.




a) $m=tg\,\alpha=f'(x_0)\in\mathbb{R}$

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$




b) $f'(x_0)=\infty$

$x=x_0$

Fig. 2

## Exerciții rezolvate

**1. Să se arate că funcțiile următoare sunt derivabile în punctele indicate şi să se calculeze derivata. Scrieți ecuația tangentei la curbă în acel punct.**

**Pentru calculul derivatei în $x_0$ utilizați fie $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, fie**

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

**a) $f(x)=x^2, x_0=-3$ ; b) $f(x)=\sqrt{x}, x_0=2$.**

**R. a) Trebuie arătat că există limita raportului**

**$R(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ când $x\to x_0$ şi că acestă limită este finită.**

**Avem:** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3}=\lim\limits_{x\to -3}(x-3)=-6\in\mathbb{R}$.

**Deci $f'(-3)=-6$, ceea ce arată că $f$ este derivabilă în $x=-3$.**

**Ecuația tangentei în $(-3, f(-3))$ este $y-y_0=m(x-x_0)$, unde $y_0=f(x_0)=9$ adică :**

$y-9=-6(x+3)$ sau $6x+y+9=0$.

b) În acest caz $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\in\mathbb{R}$.

Deci $f'(2)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ și $f$ este derivabilă în $x=2$.

Ecuația tangentei în $(2,\sqrt{2})$ este : $y-\sqrt{2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}(x-2)$.

2. Să se arate că funcția $f(x)=\sqrt{x}$ are derivată în $x_0=0$ și să se calculeze $f'(x_0)$.

R. Calculăm limita raportului $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{0_+}=\infty$. Deci $f$ nu este derivabilă în $x=0$ ,dar are derivata infinită în $x=0, f'(0)=\infty$ .

3. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x\cdot\sin\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 0,\ x=0\end{cases}$ nu este derivabilă în $x_0=0$.

R. Avem : $\frac{f(x)-f(0)}{x}=\sin\frac{1}{x}$, care nu are limită în $x_0=0$. Deci $f$ nu este derivabilă în 0.

4. Pe parabola $f(x)=x^2-7x+3$ să se determine un punct în care tangenta la parabolă să fie paralelă cu dreapta $y=-5x+3$ și să se scrie ecuația tangentei .

R. Dacă $A(x_0,y_0)$ este un astfel de punct , atunci panta tangentei în $A$ este egală cu $m=f'(x_0)$.

Avem : $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2-7x+3-x_0^2+7x_0-3}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2-7(x-x_0)}{x-x_0}=$

$=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x+x_0-7)}{x-x_0}=2x_0-7.$

Cum panta tangentei este egală cu panta dreptei $y=-5x+3$, adică cu -5 , avem egalitatea $2x_0-7=-5$ .De aici $x_0=1$ când $y_0=-3$ .

Deci punctul căutat este $(1,-3)$ , iar ecuația tangentei este $y-(-3)=-5(x-1)$ sau $y+5x-2=0$ .

5. Dacă $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ are derivată în punctul $x_0\in(a,b)$, atunci să se calculeze:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)\right]$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f\left(x_0-\frac{1}{n}\right)\right]$.

R. 1) Se consideră șirul $x_n=x_0+\frac{1}{n}, n\geq 1, x_n\to x_0.$

Scriem șirul sub forma : $\frac{f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)}{x_0+\frac{1}{n}-x_0}\to f'(x_0)$.

2) Se pune şirul sub forma $\frac{f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)}{x_0+\frac{1}{n}-x_0}+\frac{f\left(x_0-\frac{1}{n}\right)-f(x_0)}{x_0-\frac{1}{n}-x_0}$ şi ţinând seama de criteriul cu şiruri pentru derivata unei funcţii într-un punct găsim că limita are valoarea $2f'(x_0)$.

## Probleme propuse

**1.** a) Să se calculeze limitele de mai jos şi să se explice ce reprezintă fiecare dintre ele :

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$; 3) $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$; 4) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{e^x-\frac{1}{e}}{x+1}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$;

6) $\lim\limits_{x\nearrow -2}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x+2}$; 7) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{\sin x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{6}}$; 8) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg} x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$; 10) $\lim\limits_{x\nearrow 1}\frac{\arccos x}{x-1}$.

b) Să se arate că funcţiile următoare sunt derivabile în punctele indicate şi să se calculeze derivata. Scrieţi ecuaţia tangentei în acel punct la grafic.

1) $f(x)=x^2, x_0=1$; 2) $f(x)=3x^2, x_0=-1$; 3) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}, x_0=-1$; 4) $f(x)=\sqrt[3]{x}, x_0=1$;

5) $f(x)=x^3+x, x_0=0$; 6) $f(x)=\sqrt{3x}, x_0=5$; 7) $f(x)=x^2, x\in\mathbb{Q}, f(x)=0, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}, x_0=0$.

**2.** Să se arate că funcţiile următoare au derivată în punctele $x_0$ indicate şi să se calculeze $f'(x_0)$:

1) $f(x)=\sqrt{x-1}, x_0=1$; 2) $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}, x_0=2$; 3) $x|x|\le f(x)\le x^2, x_0=0$.

**3.** Să se arate că $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x\cdot\cos\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$ nu este derivabilă în $x_0=0$, dar

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$ este derivabilă în $x_0=0$.

**4.** a) Să se determine punctele de pe curba $f(x)=x^3-3x+2$ în care tangenta este paralelă cu dreapta $y=3x$ şi să se scrie ecuaţiile acestor tangente.

b) Fie curba de ecuaţie $y=ax^2+bx+c$, care trece prin punctul $(1,2)$. Ştiind că panta tangentei în $(2,1)$ este zero, determinaţi *a,b,c*.

**5.** Dreapta $y=-\frac{3x}{4}-\frac{3}{32}$ este tangentă graficului funcţiei $f(x)=\frac{x^4}{2}-x$. Să se determine coordonatele punctului de tangenţă.

**6.** Să se determine coordonatele punctelor de intersecţie ale axei $Ox$ cu tangentele la graficul funcţiei $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$, care formează unghiul $\frac{3\pi}{4}$ cu axa $Ox$.

**7.** 1) Să se arate că tangentele la graficul funcţiei $f(x)=\frac{x-4}{x-2}$, în punctele de intersecţie cu axele de coordonate, sunt paralele.

**2) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left(x^2+2mx+n\right)/\left(x^2+1\right), m,n\in\mathbb{R}, m\neq 0$ . Arătați că există două puncte pe graficul funcție în care tangenta este paralelă cu $Ox$ şi produsul absciselor este –1. Determinați *m*,*n* astfel încât $f(1)=2, f'(2)=0$ .**

**8. Să se arate că tangenta la curba $f(x)=x^5+8x+1$ în orice punct $\left(x_0, f(x_0)\right), x_0\in\mathbb{R}$ formează cu axa $Ox$ un unghi ascuțit.**

**9. În care puncte ale graficului funcției $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+7x-4$ tangenta formează cu axa $Ox$ un unghi de $45°$ ?**

**10. În problemele de mai jos exprimați raportul , rata de schimbare cu ajutorul derivatei:**

1) **Rata de creştere a numărului *N* de bacterii într-o cultură la timpul $t$ este direct proporțional cu numărul *N* de bacterii .**
2) **Rata de descreştere a temperaturii *T* a corpului uman la momentul $t$ este proporțională cu diferența dintre temperatura corpului şi cea a mediului înconjurător.**
3) **Rata de descreştere a cantității Q de radium dintr-o substanță la momentul $t$ este direct proporțională cu cantitatea Q din acel moment.**
4) **Forța *F* de atracție între două obiecte în spațiu este invers proporțională cu pătratul distanței $x$ dintre ele. Determinați rata de schimbare a lui $F$ relativă la $x$ .**

**11. Testele de memorizare arată că $N(t)=10\sqrt{t}$ reprezintă numărul de cuvinte pe care o persoană normală le poate memora în $t$ minute. Determinați rata de creştere a lui *N* când $t=16$ .**

**12. În formulările de mai jos exprimați derivata *x* ca rată a schimbării lui … relativ la… .**

**1) $\frac{dh}{dx}$ , unde $h$ este înățimea deasupra nivelului mării şi $x$ este distanța parcursă orizontal de-a lungul unei şosele drepte.**

**2) $\frac{dN}{dt}$ ,unde $N$ este numărul de persoane din stadion la momentul $t$ , după ce porțile s-au deschis.**

**3) $\frac{dq}{dv}$ , unde *q* este carburantul utilizat de automobil în litri/km, iar *v* este viteza automobilului în km/h.**

**13. Un lichid fierbinte a fost lăsat să se răcească. Temperaturile înregistrate la fiecare minut sunt date în tabelul**

| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | $100^0$ | $93^0$ | $87^0$ | $83^0$ | $80^0$ | $78^0$ |

**Determinați viteza de descreştere a temperaturii după 3 minute.**

**14. Un punct $A$ se mişcă de-a lungul unei drepte astfel încât după $t$ secunde spațiul parcurs este dat de legea $s(t)=t^3-12t^2+36t-27$ . Ce reprezintă $s'(t), s'(2)$ ?**

**15. O săgeată este aruncată din $O$ şi descrie curba $y=100x-x^2$ . Fie $A$ punctul în care săgeata atinge $Ox$ . Dacă $H$ este punctul, de pe traictorie, de înălțime maximă, atunci $f'(H)=0$ . Ce se întâmplă cu săgeata în acest punct ?**

## 4.3. DERIVATE LATERALE

### 1. Derivata la stânga

În acelaşi mod în care am considerat, într-un punct, limita la stânga sau la dreapta, continuitatea la stânga sau la dreapta pentru funcții, în aceeaşi manieră se poate introduce noțiunea de derivabilitate la stânga sau la dreapta pentru o funcție.

Fie $f : E \to \mathbb{R}$, unde $E$ este un **interval** sau **o reuniune de intervale** din $\mathbb{R}$ şi $x_0 \in \mathbb{R}$ punct de acumulare pentru $E \cap (-\infty, x_0) \neq \varnothing$.

**Definiții. 1)** Se spune că funcția $f$ are **derivată la stânga** în $x_0$ dacă limita $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ **există în** $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

În acest caz se notează limita prin $f_s^{'}(x_0)$.

**2)** Se spune că funcția $f$ este **derivabilă la stânga** $x_0$ dacă limita $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ **există în** $\mathbb{R}$.

**Deci, $f$ este derivabilă la stânga în $x_0$ dacă $f_s^{'}(x_0)$ există şi este finită.**

**Semnificația geometrică.** Am văzut la 5.2 (Observația 4) că dacă $f$ (continuă în $x_0$) are derivată în punctul $x_0$, atunci $f'(x_0)$ reprezintă panta tangentei în $A(x_0, f(x_0))$ la grafic dacă $f'(x_0)$ este finit, iar dacă $f'(x_0) = \pm\infty$, atunci tangenta în $A$ la grafic este paralelă cu $Oy$.

Presupunem că $f$ este continuă la stânga în $x_0$. Dacă $f_s^{'}(x_0) \in \mathbb{R}$, atunci acest număr este panta semitangentei la grafic în $A$ (Fig.3), ( în Fig.3.a, $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ iar în Fig.3.b, $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

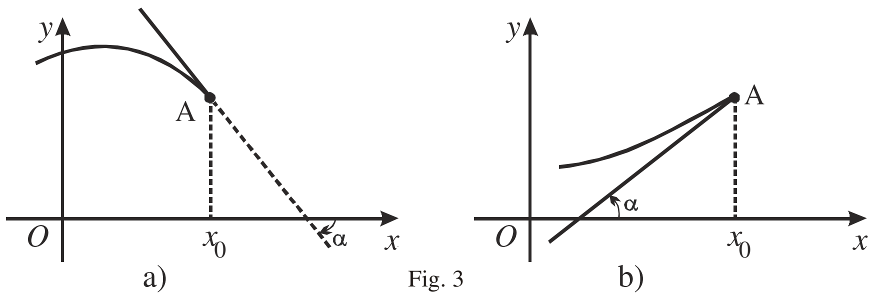


Fig. 3

Dacă $f_s^{'}(x_0) = -\infty$, atunci semitangenta în $A$ este paralelă cu $Oy$ (Fig 4.a), iar dacă, $f_s^{'}(x_0) = \infty$, de asemenea semitangenta este paralelă cu $Oy$ (Fig.4.b).

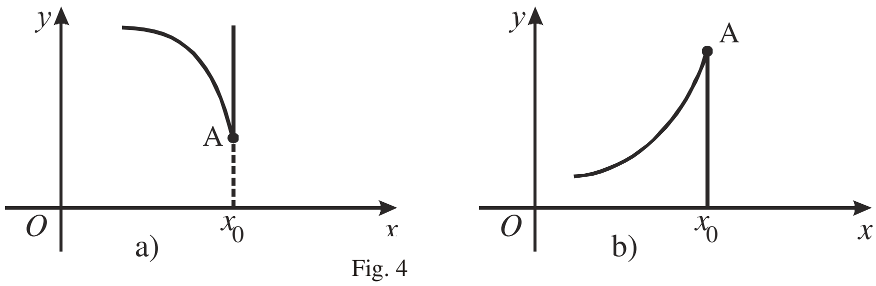



Fig. 4

## Exerciții rezolvate

**Să se stabilească dacă următoarele funcții au derivate la stânga în punctele indicate.**

**1)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}, x_0=0$; **2)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}, x_0=0$;

**3)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\min(2x+1, 3x+5), x_0=-4$; **4)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=[x-1], x_0=3$;

**5)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x-1}, x_0=1$.

**R. 1) Trebuie văzut dacă există limita raportului** $\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{-x}{x}=-1$. **Deci** $f_s'(0)=-1\in\mathbb{R}$, **ceea ce arată că** $f$ **este derivabilă la stânga în** $x_0=0$.

**2) Cercetăm existența limitei raportului** $\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{-1}{x}=\dfrac{-1}{0_-}=+\infty$. **Prin urmare** $f$ **are derivată infinită la stânga în** $x_0=0, f_s'(0)=\infty$, **adică** $f$ **nu este derivabilă la stânga în** $x_0=0$.

**3) Se explicitează funcția dată și se obține:** $f(x)=\begin{cases} 2x+1, & 2x+1\leq 3x+5 \\ 3x+5, & 3x+5<2x+1 \end{cases}=\begin{cases} 2x+1, & x\geq -4 \\ 3x+5, & x<-4 \end{cases}$.

**Avem raportul** $R(x)$ **egal cu (pentru** $x<-4$**)**

$R(x)=\dfrac{f(x)-f(-4)}{x-(-4)}=\dfrac{3x+5-(-7)}{x+4}=\dfrac{3(x+4)}{x+4}=3$, **pentru care** $\lim\limits_{x\nearrow -4}R(x)=3$, **care este de fapt** $f_s'(-4)$. **Cum** $f_s'(-4)\in\mathbb{R}$ **se deduce că** $f$ **este derivabilă la stânga în** $x_0=-4$.

**4) În jurul punctului** $x_0=3$, **funcția** $f$ **are exprimarea** $f(x)=\begin{cases} \dots\dots \\ 1, & x\in[2,3) \\ 2, & x\in[3,4) \\ \dots\dots \end{cases}$. **Limita raportului**

$R(x)$ **la stânga lui** $x_0=3$ **este:** $\lim\limits_{x\nearrow 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\nearrow 3}\dfrac{1-2}{x-3}=\dfrac{-1}{0_-}=\infty$. **Deci** $f_s'(3)=\infty\in\overline{\mathbb{R}}$, **arată că** $f$ **are derivată infinită la stânga lui** $x_0=3$ **adică** $f$ **nu este derivabilă la stânga în** $x_0=3$.

**5) Se calculează limita** $\lim\limits_{x\nearrow 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\nearrow 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}-0}{x-1}=\lim\limits_{x\nearrow 1}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\dfrac{1}{0_+}=\infty$, **care arată că** $f_s'(1)=\infty$ **și deci** $f$ **nu este derivabilă la stânga în** $x_0=1$, **dar are derivată infinită la stânga în acest punct.**

## Exerciții propuse

**Să se stabilească dacă funcțiile următoare au derivate la stânga în punctele indicate (și scrieți ecuațiile semitangentelor în aceste puncte la grafice):**

**1)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x-1|, x_0=1$ ; **2)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left|x^2-5x+6\right|, x_0=1, x_0=2, x_0=3$ ;

**3)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\max(x-3, 2x+1), x_0=-4$ ; **4)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=[2x+1], x_0=\frac{1}{2}$ ;

**5)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x+1}, x_0=-1$ .

### 2. Derivata la dreapta

Fie funcția $f:E\to\mathbb{R}$ unde $E$ este un **interval** sau **o reuniune de intervale** $x_0\in E$ punct de acumulare pentru $E\cap(x_0,\infty)\neq\varnothing$.

**Definiții. 1)** Se spune că funcția $f$ are **derivată la dreapta** în $x_0$ dacă limita $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ **există în** $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$.

Limita de mai sus se notează cu $f_d'(x_0)$.

**2)** Se spune că funcția $f$ este **derivabilă la dreapta** în $x_0$ dacă limita $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ **există în** $\mathbb{R}$.

**Deci,** $f$ **este derivabilă la dreapta în** $x_0$ **dacă** $f_d'(x_0)$ **există și este finită.**

**Semnificația geometrică**. Dacă $f_d'(x_0)\in\mathbb{R}$ ($\Rightarrow f$ este continuă la dreapta în $x_0$), atunci acest număr este panta semitangentei la grafic în $A$ (Fig. 5) (în Fig. 5.a, $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, iar în Fig. 5.b, $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$).

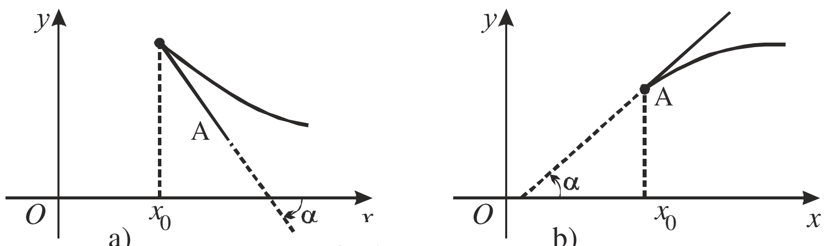


Fig. 5

Dacă $f_d'(x_0) = -\infty$ şi $f$ continuă la dreapta în $x_0$ atunci semitangenta este paralelă cu $Oy$ (Fig. 6.a), iar pentru $f_d'(x_0) = \infty$ şi $f$ continuă la dreapta în $x_0$, de asemenea, semitangenta este paralelă cu $Oy$ (Fig. 6.b).

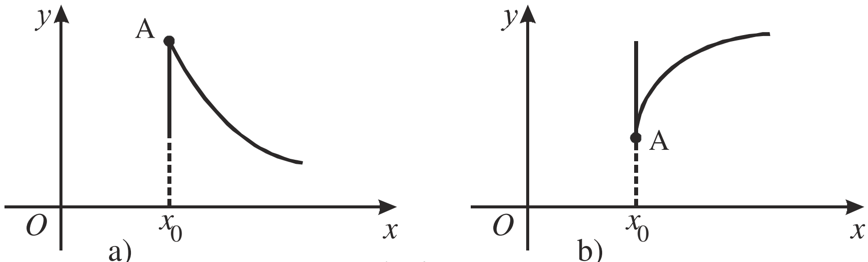


Fig. 6

## Exerciţii rezolvate

**Pentru funcţiile de la 4.3.1 (Exerciţii rezolvate) să se precizeze care este derivata la dreapta (dacă există) în punctele indicate.**

**R. 1) Cum limita $\lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{x}{x} = 1$ există şi este finită se deduce că $f(x) = |x|$ este derivabilă la dreapta în $x_0 = 0$ şi $f_d'(0) = 1$. Să observăm că această derivată este diferită de $f_s'(0) = -1$.**

**Graficul (trasaţi-l) are un colţ „ascuţit” în $x = 0$, cu panta schimbându-se brusc de la $-1$ la $1$, când $x$ creşte de la valori negative la valori pozitive şi panta nu este definită în zero.**

**2) Acum avem: $\lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{1}{x} = \infty$, adică $f$ are derivată la dreapta în $x_0 = 0$, dar este infinită $f_d'(0) = \infty$ (şi deci $f$ nu este derivabilă la dreapta în $x_0 = 0$).**

**3) Se calculează $\lim\limits_{x \searrow -4} \dfrac{f(x) - f(-4)}{x - (-4)} = \lim\limits_{x \searrow -4} \dfrac{2x + 1 - (-7)}{x + 4} = \lim\limits_{x \searrow -4} \dfrac{2(x + 4)}{x + 4} = 2$, număr ce reprezintă $f_d'(-4) = 2$ şi arată că $f$ este derivabilă la dreapta în $x_0 = -4$.**

**4) Avem $\lim\limits_{x \searrow 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim\limits_{x \searrow 3} \dfrac{2 - 2}{x - 3} = 0$.**

**Deci $f_d'(3) = 0$, adică $f$ este derivabilă la dreapta în $x_0 = 3$.**

**5) Limita raportului $R(x)$ este $\lim\limits_{x \searrow 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \searrow 1} \dfrac{\sqrt[3]{x - 1}}{x - 1} = \lim\limits_{x \searrow 1} \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x - 1)^2}} = \infty$.**

**Deci $f_d'(1) = \infty$, adică $f$ are derivată infinită în $x_0 = 1$.**

## Exerciții propuse

**Pentru funcțiile de la 1. (Probleme propuse) să se precizeze care este derivata la dreapta (dacă există) în punctele indicate. Scrieți ecuațiile semitangentelor la grafice în aceste puncte.**

### 3. Legătura între derivata într-un punct și derivatele laterale

Fie funcția $f : E \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in E$ (**interval** sau **reuniune de intervale**), unde $x_0$ nu este extremitate de interval. Atunci se poate da o caracterizare a faptului că $f$ are derivată (este derivabilă) în $x_0$ cu ajutorul derivatelor laterale în $x_0$.
Mai precis are loc următoarea

**Teoremă. 1)** Funcția $f$ **are derivată în** $x_0 \Leftrightarrow f$ are derivate laterale în $x_0$ și $f_s^{'}(x_0) = f_d^{'}(x_0) = f^{'}(x_0) \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

**2)** Funcția $f$ **este derivabilă în** $x_0 \Leftrightarrow f$ este derivabilă bilateral (adică la stânga și la dreapta) în $x_0$ și $f_s^{'}(x_0) = f_d^{'}(x_0) = f^{'}(x_0) \in \mathbb{R}$.

**Demonstrație**. Imediat, ținând seama de legătura între existența derivatei unei funcții într-un punct și derivatele laterale în acest punct. ■

**Observație**. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dacă $f$ are derivată în punctul $x_0 = a$, atunci ea coincide cu derivata la dreapta în $x_0 = a$, adică $f^{'}(a) = f_d^{'}(a) = \lim\limits_{x \searrow a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.
Analog, dacă $f$ are derivată în $x_0 = b$, atunci ea coincide cu derivata la stânga în $x_0 = b$, adică $f^{'}(b) = f_s^{'}(b) = \lim\limits_{x \nearrow b} \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b}$.

## Exerciții rezolvate

**Să se studieze derivabilitatea funcțiilor de mai jos $(f : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$, în punctele indicate:**

**1) $f(x) = |x|, x_0 = 0$; 2) $f(x) = x|x|, x_0 = 0$; 3) $f(x) = \min(2x+1, 3x+5), x_0 = -4$;**

**4) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}, x_0 = 1$; 5) $f(x) = \begin{cases} \sin x, x \le 0 \\ x, x > 0 \end{cases}, x_0 = 0$; 6) $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, x < 0 \\ \ln(1+x), x \ge 0 \end{cases}, x_0 = 0$.**

**R. 1) Am văzut la 4.3.1. și 4.3.2. că $f_s^{'}(0) = -1 \ne f_d^{'}(0) = 1$, adică $f$ nu este derivabilă în $x_0 = 0$. Observăm că funcția dată este continuă în $x_0 = 0$.**

**2) Se explicitează funcția, când se obține $f(x) = \begin{cases} x^2, x \ge 0 \\ -x^2, x < 0 \end{cases}$, iar de aici**

**$f_s^{'}(0) = \lim\limits_{x \nearrow 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \nearrow 0} \dfrac{-x^2}{x} = 0$, $f_d^{'}(0) = \lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{x^2}{x} = 0$, ceea ce arată că $f$ este derivabilă în $x_0 = 0$ și $f'(0) = 0$.**

3) Din 4.3.1. rezultă $f_s'(-4)=3$, iar în 4.3.2. am găsit $f_d'(-4)=2$. Din faptul că derivatele laterale ale funcției $f$ în $x_0=-4$ sunt diferite rezultă că $f$ nu este derivabilă în acest punct.

4) În 4.3.1. am obținut $f_s'(1)=\infty$, iar la 4.3.2. s-a găsit că $f_d'(1)=\infty$. Deci $f$ nu este derivabilă în $x_0=1$, dar $f$ are derivată în acest punct și $f'(1)=\infty$.

5) Pentru a decide dacă $f$ este derivabilă în $x_0=0$ se calculează derivatele laterale. Avem: $f_s'(0)=\lim\limits_{x\nearrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\nearrow 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $f_d'(0)=\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{x}{x}=1$. Cum $f_s'(0)=f_d'(d)\in\mathbb{R}$, rezultă că $f$ este derivabilă în $x_0=0$ și $f'(0)=1$.

6) Calculăm derivatele laterale în $x_0=0$. Avem: $f_s'(0)=\lim\limits_{x\nearrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\nearrow 0}\frac{e^x-1}{x}=1$, $f_d'(0)=\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\searrow 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim\limits_{x\searrow 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$. De aici $f_s'(0)=f_d'(0)=f'(0)=1$, ceea ce arată că $f$ este derivabilă în $x_0=0$.

## Exerciții propuse

**1.** Să se studieze derivabilitatea funcțiilor de mai jos, în punctele indicate:

1) $f(x)=|x-1|, x_0=1$; 2) $f(x)=(x+1)|x+1|, x_0=-1$; 3) $f(x)=\max\left(x,x^2\right), x_0=0$;

4) $f(x)=\begin{cases}x\sqrt{x}, x\ge 0\\ |x|, x<0\end{cases}, x_0=0$; 5) $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x+1}, x\ge -1\\ \frac{x+1}{x-1}, x<-1\end{cases}, x_0=-1$;

6) $f(x)=\begin{cases}\cos(x-2), x>2\\ x-1, x\le 2\end{cases}, x_0=2$; 7) $f(x)=\begin{cases}2^x-1, x\ge 0\\ \sin x, x<0\end{cases}, x_0=0$;

8) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-1}, x\ge 1\\ \arccos x, x\in[0,1)\end{cases}, x_0=1$; 9) $f(x)=\begin{cases}x+|x-1|, x<1\\ \cos(x-1), x\ge 1\end{cases}, x_0=1$;

10) $f(x)=\begin{cases}\ln(1+3x), x\ge 0\\ 3x, x<0\end{cases}, x_0=0$; 11) $f(x)=x|x-a|+|x-b|, x_0\in\{a,b\}$.

**2.** Studiați derivabilitatea funcției $<>:[0,\infty)\to\mathbb{R}, <x>=\min\left(x-[x],\lceil x\rceil-x\right)$, unde $\lceil x\rceil=\min\{n\in\mathbb{Z}\,|\,n\ge x\}$ ($<x>$ reprezintă diferența dintre $x$ și cel mai apropiat întreg; $<>$ este funcția „dinți de fierăstrău”) în punctele $x_k=\frac{k}{2}, k\in\mathbb{N}$.

**3.** (Regula „cleștelui”) Fie $f,g,h:E\to\mathbb{R}, x_0\in E\cap E'$ astfel încât $g(x)\le f(x)\le h(x)$, $\forall x\in V\in\vartheta(x_0)$ și $g(x_0)=f(x_0)=h(x_0)$. Dacă $g$ și $h$ sunt derivabile în $x_0$, atunci și $f$ este derivabilă în $x_0$ și $f'(x_0)=g'(x_0)=h'(x_0)$.

**4.** Să se determine coeficienții $a,b,c$ astfel încât curba $f(x)=ax^2+bx+c$ să treacă prin punctul $(1,3)$ și să fie tangentă dreptei $y=-4x+8$ în punctul $(2,0)$. Pentru $a,b,c$ astfel determinați găsiți punctul de pe grafic în care tangenta este paralelă cu axa $Ox$.

**5.** **1) Să se determine $a,b \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\ln^3 x, x \ge e\\ ax+b, x<e\end{cases}$ este continuă în $x=e$ şi există $\lim\limits_{x\to e}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}$.**

**2) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} mx^2+n, x\le -1\\ 2\ln(x+2), x>-1\end{cases}$. Să se determine parametrii reali $m,n$ pentru care $f$ este derivabilă în $x_0=-1$.**

## 4. Interpretarea geometrică a derivatei. Puncte remarcabile pentru graficul unei funcții

Să considerăm $f:(a,b)\to\mathbb{R}, x_0\in(a,b), f$ **continuă** în $x_0$.
În acest paragraf suntem interesați de forma graficului funcției $f$ în jurul punctului $A(x_0, f(x_0))$ în următoarele situații:

- $f$ are **derivate laterale infinite egale** în $x_0$;
- $f$ are **derivate laterale infinite diferite** în $x_0$;
- $f$ are **are derivate laterale diferite în** $x_0$ şi **cel puțin una din ele este finită.**

Le vom analiza pe rând .

### 1) Puncte de inflexiune

Fie $f'(x_0)=\infty$ şi în jurul punctului $A$ forma graficului este în general cea din Fig.7.a (în jurul lui $x_0$, la stânga, graficul se spune că este **convex**, iar la dreapta **concav**). Fie $f'(x_0)=-\infty$ şi graficul lui $f$ are, în jurul lui $A$ în general, forma din Fig.7.b.
În ambele cazuri tangenta **traversează** graficul.
Fie $f_s'(x_0)=f_d'(x_0)\in\mathbb{R}$ şi forma graficului în jurul lui $x_0$ poate fi convex (concav) şi respectiv concav (convex), Fig.7.c).

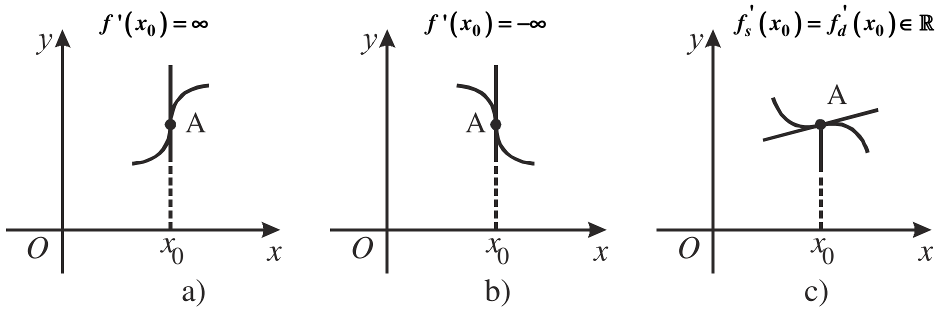


Fig. 7

Punctul $A$ definit în cele trei cazuri se numeşte **punct de inflexiune** pentru graficul funcției.
Mai precis are loc următoarea

**Definiție**. Se spune că $x_0$ este **punct de inflexiune al funcției** $f$ dacă funcția este **continuă** în $x_0$, **are derivată** în $x_0$ (finită sau infinită) şi dacă graficul este convex (concav) de o parte a lui $x_0$ şi concav (convex) de cealaltă parte.

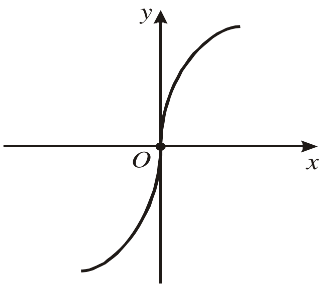



Fig. 8

Punctele de inflexiune vor fi caracterizate echivalent utilizând semnul derivatei a doua !

**Exemplu. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x}$ . Se găseşte uşor că pentru $x_0=0$ avem: $f'(0)=\infty$, ceea ce arată că punctul $(0, f(0))$ este punct de inflexiune pentru grafic, iar forma graficului este (se ştie) cea din Fig.8.**

## Exerciții propuse

**1. Să se arate că punctele indicate pentru fiecare din funcțiile de mai jos $(f:\mathbb{R}\to\mathbb{R})$, sunt puncte de inflexiune pentru grafic:**

**1) $f(x)=-\sqrt[3]{x-1}, A(1,0)$ ; 2) $f(x)=\sqrt[3]{x+2}, A(-2,0)$ ; 3) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, x>0\\ \sqrt[3]{x}, x\le 0\end{cases}, A(0,0)$.**

**2. Să se studieze pentru care din funcțiile de mai jos $x=0$ este punct de inflexiune (schițând graficul în jurul lui $x=0$ ):**

**1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}1+\sqrt{x}, x\ge 0\\ -\sqrt{-x}, x<0\end{cases}$ ; 2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x}$ ;3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}e^x, x\ge 0\\ -\frac{e^x}{2}+\frac{1}{2}, x<0\end{cases}$.**

### 2) Puncte de întoarcere

Dacă $f_s'(x_0)=-\infty\left(\Rightarrow \alpha\to-\frac{\pi}{2}\right)$ şi $f_d'(x_0)=\infty\left(\Rightarrow \alpha\to\frac{\pi}{2}\right)$, atunci forma graficului lui $f$ în jurul lui $A(x_0, f(x_0))$ este cea indicată în Fig.9.a (unde am notat prin $\alpha$ unghiul format de semitangentă cu axa $Ox, \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Dacă $f_s^{'}(x_0)=\infty$ şi $f_d^{'}(x_0)=-\infty$, atunci aliura graficului lui $f$ în jurul punctului $A(x_0, f(x_0))$ este ca în Fig.9.b.

Punctul $A(x_0, f(x_0))$ se numeşte **punct de întoarcere** pentru graficul funcţiei $f$, dacă funcţia $f$ este continuă în $x_0$ şi dacă derivatele laterale ale funcţiei $f$ în $x_0$ sunt **infinite** şi **diferite**.

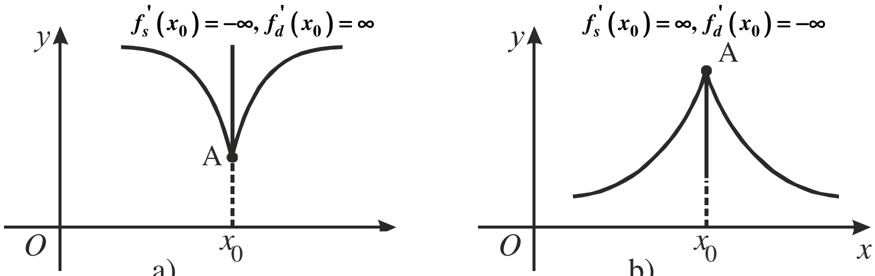



Fig. 9

**Exemplu. Fie funcţia** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, x\geq 0\\ \sqrt{-x}, x<0\end{cases}$.

**Să arătăm că punctul $(0,0)$ este punct de întoarcere pentru graficul funcţiei.**

**Pentru aceasta calculăm derivatele laterale în $x=0$. Avem:**

$$f_s^{'}(0)=\lim_{x\nearrow 0}\frac{\sqrt{-x}}{x}=\lim_{x\nearrow 0}\frac{\sqrt{-x}}{-\sqrt{-x}\sqrt{-x}}=\frac{1}{0_-}=-\infty,\quad f_d^{'}(0)=\lim_{x\searrow 0}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\searrow 0}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}}=\frac{1}{0_+}=\infty.$$

**Cum derivatele laterale în $x=0$ sunt infinite şi diferite, se deduce că punctul $A(0,0)$ este punct de întoarcere pentru graficul funcţiei $f$.**

## Exerciţii propuse

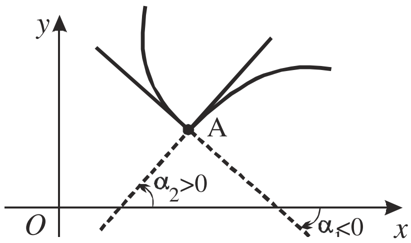
**Să se arate că punctele indicate pentru fiecare din funcţiile $(f:\mathbb{R}\to\mathbb{R})$ de mai jos, sunt puncte de întoarcere pentru grafic:**

**1)** $f(x)=\sqrt{|x-1|}, A(1,0)$ **; 2)** $f(x)=\sqrt{|x+1|}, A(-1,0)$ **; 3)** $f(x)=\sqrt{|x^2-1|}, A(1,0), B(-1,0)$.

### 3) Puncte unghiulare

Situaţia în care derivatele laterale ale funcţiei $f$ în punctul $x_0$ sunt diferite şi cel puţin una dintre ele este finită, are ca interpretare geometrică existenţa semitangentelor de pante diferite $f_s^{'}(x_0)=\text{tg}\,\alpha_1$, $f_d^{'}(x_0)=\text{tg}\,\alpha_2$, fapt ilustrat în Fig.10.

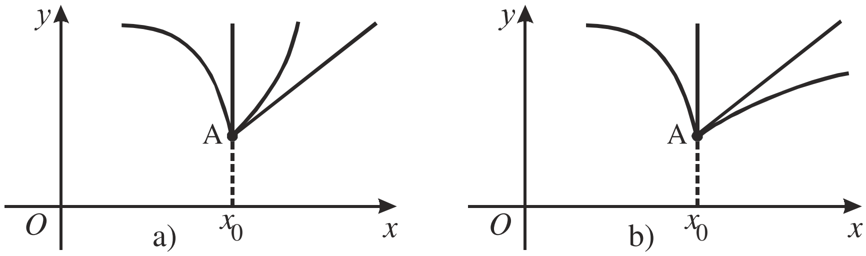
Sunt de analizat următoarele cazuri:




$(f_s^{'}(x_0), f_d^{'}(x_0)\in\mathbb{R}$, **diferite)**

Fig. 10

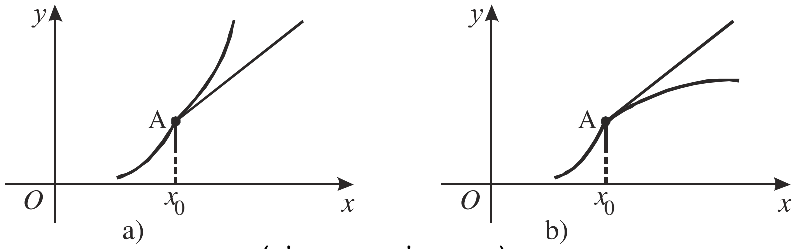
**Cazul 1.** $f_s'(x_0) = -\infty$, $f_d'(x_0) \in \mathbb{R}$. În punctul $A(x_0, f(x_0))$ graficul are două semitangente distincte, de ecuații: $x = x_0$, $y - f(x_0) = f_d'(x_0)(x - x_0)$.
Forma graficului în jurul punctului $A$ este indicată în Fig. 11 (a, b).




$\left(f_s'(x_0) = -\infty, f_d'(x_0) \in \mathbb{R}\right)$

Fig. 11

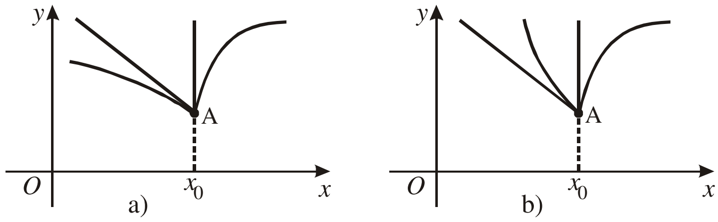
**Cazul 2.** $f_s'(x_0) = \infty$, $f_d'(x_0) \in \mathbb{R}$. În punctul $A$ graficul are două semitangente diferite de ecuații: $x = x_0$, $y - f(x_0) = f_d'(x_0)(x - x_0)$.
Aliura graficului în jurul punctului $A$ este prezentată în Fig. 12(a, b).




$\left(f_s'(x_0) = \infty, f_d'(x_0) \in \mathbb{R}\right)$

Fig. 12

**Cazul 3.** $f_s'(x_0) \in \mathbb{R}$, $f_d'(x_0) = \infty$. Dreptele de ecuații
$y - f(x_0) = f_s'(x_0)(x - x_0)$, $x = x_0$ sunt cele două semitangente la grafic în punctul $A$.
În jurul punctului $A$ forma graficului este cea indicată în Fig.13 (a, b).

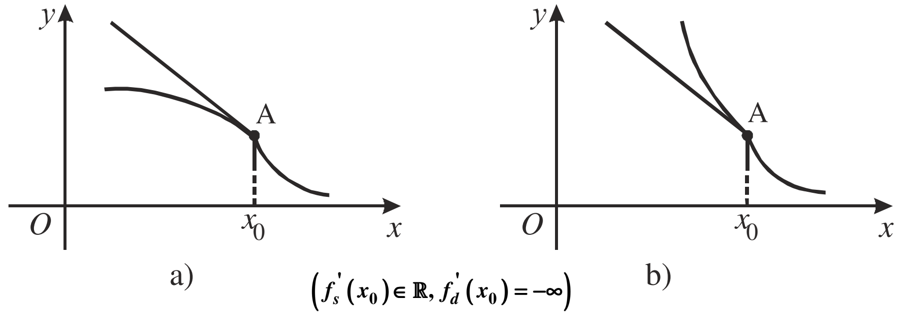



$\left(f_s'(x_0) \in \mathbb{R}, f_d'(x_0) = \infty\right)$

Fig. 13

**Cazul 4.** $f_s'(x_0)\in\mathbb{R}$, $f_d'(x_0)=-\infty$. În acest caz ecuațiile

$y-f(x_0)=f_s'(x_0)(x-x_0)$, $x=x_0$ reprezintă ecuațiile semitangentelor în $A$ la grafic. În jurul punctului $A$ graficul arată ca în Fig.14 (a, b).




$\left(f_s'(x_0)\in\mathbb{R}, f_d'(x_0)=-\infty\right)$

Fig. 14

**Cazul 5.** $f_s'(x_0), f_d'(x_0)\in\mathbb{R}, f_s'(x_0)\neq f_d'(x_0)$. În acest caz graficul are în punctul $A$ două semitangente distincte, de ecuații

$y-f(x_0)=f_s'(x_0)(x-x_0)$, $y-f(x_0)=f_d'(x_0)(x-x_0)$.

Forma graficului în acest caz este indicată în Fig. 10.

Să observăm că în cele cinci cazuri analizate, cele două semitangente în punctul $A$ la grafic formează un unghi între ele. Din acest motiv punctul $A$ se numeşte punct unghiular al graficului.

Punctul $A(x_0, f(x_0))$ se numeşte **punct unghiular** pentru graficul funcției $f$, dacă funcția $f$ este continuă în $x_0$ şi dacă derivatele laterale ale funcției $f$ în $x_0$ sunt **diferite** şi **cel puțin una este finită**.

### Exercițiu rezolvat

**Să se arate că punctele indicate sunt puncte unghiulare pentru graficul funcției:**

**$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left|x^2-9\right|, A(3,0), B(-3,0)$. Scrieți ecuațiile semitangentelor la grafic în aceste puncte.**

**R. Funcția este** $f(x)=\begin{cases} x^2-9, x\in(-\infty,-3]\cup[3,\infty) \\ 9-x^2, x\in(-3,3)\end{cases}$ **pentru care avem:**

$$f_s'(3)=\lim_{x\nearrow 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\nearrow 3}\frac{9-x^2}{x-3}=\lim_{x\nearrow 3}-(x+3)=-6,$$

$$f_d'(3)=\lim_{x\searrow 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\searrow 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\searrow 3}(x+3)=6.$$

**Cum $f_s'(3)\neq f_d'(3)$ şi $f_s'(3), f_d'(3)\in\mathbb{R}$, deducem că $A(3,0)$ este punct unghiular pentru graficul funcției.**

**Ecuațiile semitangentelor sunt: $y=-6(x-3), y=6(x-3)$.**

**Pentru $x=-3$ avem, asemănător:**

$$f_s'(-3)=\lim_{x\nearrow -3}\frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)}=\lim_{x\nearrow -3}\frac{x^2-9}{x+3}=\lim_{x\nearrow -3}(x-3)=-6,$$

$$f_d'(-3)=\lim_{x\searrow -3}\frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)}=\lim_{x\searrow -3}\frac{9-x^2}{x+3}=\lim_{x\searrow -3}-(x-3)=6.$$

**Din $f_s'(-3)=-6\neq 6=f_d'(-3)$ rezultă că $B(-3,0)$ este punct unghiular pentru graficul funcției.**

**Ecuațiile semitangentelor sunt: $y=-6(x+3)$, $y=6(x+3)$.**

## Exerciții propuse

**Să se arate că punctele indicate pentru fiecare din funcțiile $(f:\mathbb{R}\to\mathbb{R})$ de mai jos sunt puncte unghiulare (scriind şi ecuațiile semitangentelor):**

**1) $f(x)=\left|x^2-4\right|, A(-2,0), B(2,0)$; 2) $f(x)=|x|e^{|x-1|}, A(0,0), B(1,1)$;**

**3) $f(x)=\max\left(x,x^3\right), A(0,0), B(-1,-1), C(1,1)$; 4) $f(x)=x|x+1|-|x-1|, A(-1,2), B(1,2)$;**

**5) $f(x)=\begin{cases} x^3, x\leq 0 \\ \sqrt{x}, x>0 \end{cases}, A(0,0)$.**

# 4.4. CONTINUITATEA UNEI FUNCȚII DERIVABILE

Următorul rezultat stabileşte că numai funcțiile continue pot fi derivabile. Mai precis are loc următoarea:

**Teoremă. 1)** Orice funcție **derivabilă** într-un punct **este continuă** în acel punct.

**2)** Orice funcție **derivabilă** pe o mulțime **este continuă** pe acea mulțime.

**Demonstrație. 1)** Fie $f:E\to\mathbb{R}$ şi $x_0\in E$ un punct de acumulare pentru $E$ în care $f$ este derivabilă. Să probăm că $f$ este continuă în $x_0$.

Pentru orice $x\in E, x\neq x_0$ are loc egalitatea

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0).$$

Trecând aici la limită după $x\to x_0$ şi ținând seama că $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$ se obține $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, ceea ce arată că $f$ este continuă în $x_0$.

**2)** O funcție este derivabilă pe o mulțime dacă este derivabilă în fiecare punct din mulțime. Se aplică apoi **1)**.■

**Observații**. **1**) O funcție poate fi continuă în $x_0$, fără a fi derivabilă în $x_0$. Așa este funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x|$, care este continuă în $x_0=0$, dar nu este derivabilă în acest punct $\left(f_s'(0)=-1\neq 1=f_d'(0)\right)$.

Deci **condiția de continuitate într-un punct** este **condiție necesară** pentru derivabilitatea funcției în acel punct. **Nu are sens să punem problema derivabilității într-un punct în care funcția nu este continuă sau în puncte izolate**.

**2**) Ideea intuitivă că o funcție este continuă dacă graficul nu are „rupturi" și că o funcție este derivabilă dacă nu are „colțuri" este bună la acest nivel.

Funcția $f(x)=x\sin\frac{1}{x}, x\neq 0, f(0)=0$, este continuă în $x=0$, dar nu-i derivabilă în $x=0$. Graficul lui $f$ este cuprins între dreptele $y=-x, y=x\left(\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leq 1\right)$ și n-are colțuri.

## Exerciții rezolvate

**1. Să se determine parametrii reali $m,n$ astfel încât funcția următoare să fie derivabilă în punctul indicat:**

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x^2-1, x\leq 2 \\ mx+n, x>2 \end{cases}, x_0=2.$$

**R. 1)** **Este necesar ca $f$ să fie continuă în $x_0=2$, ceea ce înseamnă**

$$\lim_{x\nearrow 2} f(x)=\lim_{x\searrow 2} f(x)=f(2)\Leftrightarrow \lim_{x\nearrow 2}\left(x^2-1\right)=\lim_{x\searrow 2}(mx+n)=2^2-1\Leftrightarrow 3=2m+n,(1).$$

**Funcția $f$ este derivabilă în $x_0=2\Leftrightarrow f_s'(2)=f_d'(2)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \lim_{x\nearrow 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=$**

$$\lim_{x\searrow 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\Leftrightarrow \lim_{x\nearrow 2}\frac{x^2-1-3}{x-2}=\lim_{x\searrow 2}\frac{mx+n-3}{x-2}\Leftrightarrow \lim_{x\nearrow 2}(x+2)=\lim_{x\searrow 2}\frac{mx+3-2m-3}{x-2}\Leftrightarrow 4=m.$$

**Din $(1)$ rezultă $n=-5$.**

**2. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$ este continuă în $x=0$, dar nu este derivabilă în $x=0$.**

**R. Din $0\leq\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leq|x|$ se deduce (criteriul „cleștelui") $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0=f(0)$, ceea ce arată că $f$ este continuă în $x=0$.**

Să observăm că raportul $R(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\sin\frac{1}{x}$, pentru $x\neq 0$ nu are limită pentru $x\to 0$, adică $f$ nu este derivabilă în $x=0$.

**3.** Să se determine punctele de derivabilitate ale funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x^3-x^2, x\in\mathbb{Q} \\ 0, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$.

R. În primul rând trebuie să găsim, pentru acest gen de funcții, punctele în care funcția este continuă. Să determinăm punctele $x_0$ în care $f$ este continuă. Trebuie să fie verificată condiția:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\mathbb{Q}}} f(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}}} f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow x_0^3-x_0^2=0$$, iar de aici $x_0\in\{0,1\}\subset\mathbb{Q}$.

Prin urmare problema derivabilității poate fi pusă doar în $x_0=0$ și $x_0=1$. Funcția $f$ este derivabilă în $x_0=0$ dacă

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\mathbb{Q}}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}}}\frac{f(x)-f(0)}{x}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\mathbb{Q}}}\frac{x^3-x^2}{x}=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}}}\frac{0}{x}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 0=0$$, ceea ce arată că $f$ este derivabilă în $x_0=0$.

Analog, $f$ este derivabilă în $x_0=1\Leftrightarrow\lim_{\substack{x\to 1\\ x\in\mathbb{Q}}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\lim_{\substack{x\to 1\\ x\in\mathbb{Q}}}\frac{x^2(x-1)}{x-1}=$

$\lim_{\substack{x\to 1\\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}}\frac{0}{x-1}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 1=0$, fals. Deci $f$ nu este derivabilă în $x_0=1$.

## Exerciții propuse

**1.** Să se determine parametrii reali $m,n$ astfel încât funcțiile următoare să fie derivabile în punctele indicate:

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x^2+mx+n, x\le 2\\ nx+m, x>2\end{cases}, x_0=2$; 2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{1}{mx+n}, x<0\\ \frac{1}{x^2-9x+21}, x\ge 0\end{cases}, x_0=0$;

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} mx+n, x>1\\ x^2+1, x\le 1\end{cases}, x_0=1$; 4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x^2+mx+n, x>0\\ \sin x, x\le 0\end{cases}, x_0=0$;

5) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} me^{2x}, x\le 0\\ \sin 2x+n\cos 3x, x>0\end{cases}, x_0=0$;

6) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x^4+mx+2, x<0\\ n+\ln\left(1+x^4\right), x\ge 0\end{cases}, x_0=0$.

**2.** Fie funcțiile $g,h:(a,b)\to\mathbb{R}$, derivabile, $x_0\in(a,b)$ și $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ definită prin

$f(x)=\begin{cases} g(x), x\in(a,x_0] \\ h(x), x\in(x_0,b) \end{cases}$. **Atunci $f$ este derivabilă pe $(a,b)$ dacă şi numai dacă $g(x_0)=h(x_0)$ şi $g'(x_0)=h'(x_0)$.**

**3. 1) Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x\cos\frac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$ este continuă în $x=0$, dar nu este derivabilă în $x=0$.**

**2) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x^2}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$. Arătaţi că $f$ este continuă şi derivabilă în $x=0$.**

**4. Să se determine punctele de derivabilitate ale funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x^4, x\in\mathbb{Q} \\ 2x^2, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$. Generalizaţi.**

# 4.5. DERIVABILITATEA PE UN INTERVAL. FUNCŢIA DERIVATĂ

Fie $f:E\to\mathbb{R}$ şi $I$ un interval din $E$.

> **Definiţie.** Se spune că funcţia $f$ este **derivabilă pe intervalul** *I* dacă este derivabilă în fiecare punct al intervalului *I*.

**Observaţii**. **1**) Dacă $f$ **este derivabilă pe tot domeniul său de definiţie,** vom spune mai simplu, că $f$ este **derivabilă**, fără altă specificaţie legată de mulţime.

**2**) Dacă notăm cu $D_{f'}$ submulţimea lui $E$ formată din toate punctele $x\in E$ cu proprietatea că $f$ este derivabilă în punctul $x$, adică

$D_{f'}=\{x\in E \mid \exists f'(x) \text{ şi } f'(x)\in\mathbb{R}\}$ (numit **domeniul de derivabilitate al funcţiei** $f$), atunci se poate defini o funcţie pe $D_{f'}$ cu valori reale, care asociază fiecărui punct $x\in D_{f'}$ numărul real $f'(x)$, $D_{f'}\ni x\to f'(x)\in\mathbb{R}$.

Această funcţie se notează cu $f'$ şi se numeşte **funcţia derivată a lui** $f$ sau simplu **derivata lui** $f$. Procedeul prin care se obţine $f'$ din $f$ se numeşte **derivare**.

**3**) Este clar că $D_{f'} \subseteq E$. Nu are sens să se vorbească de derivabilitatea unei funcții în puncte care nu se află în domeniul de definiție al funcției.

**Exemplu. Să se calculeze $f'$, dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+3x$.**

**R. Fie $x_0\in\mathbb{R}$, arbitrar. Atunci** $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2+3x-x_0^2-3x_0}{x-x_0}=$

$$=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}+\frac{3(x-x_0)}{x-x_0}\right]=\lim_{x\to x_0}(x+x_0+3)=2x_0+3.$$

**Deci $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f'(x)=2x+3, \forall x\in\mathbb{R}$.**

## Probleme propuse

**1. Determinați domeniile de derivabilitate și calculați $f'$ pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, în cazurile:**

**1)** $f(x)=x^2-x$; **2)** $f(x)=x^3$; **3)** $f(x)=x|x|$; **4)** $f(x)=3x+|x|$; **5)** $f(x)=|x|+|x-1|$.

**2. Să se determine $a,b$ astfel încât $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, să aibă derivata continuă în cazurile:**

**1)** $f(x)=\begin{cases} ax^3+bx+2, x\le 2\\ bx^2-a, x>2\end{cases}$; **2)** $f(x)=\begin{cases} x^2-1, x\le 2\\ ax+b, x>2\end{cases}$; **3)** $f(x)=\begin{cases} ax^2+b, x<-1\\ bx^5+ax+4, x\ge -1\end{cases}$;

**4)** $f(x)=\begin{cases} 4x, x\le 0\\ ax^2+bx, x\in(0,1)\\ 3-2x, x\ge 1\end{cases}$.

**3. Arătați că următoarele perechi de funcții au graficele tangente în punctul indicat**

**1)** $f(x)=x^2, g(x)=-x^2+4x-2, x_0=1$; **2)** $f(x)=e^x, g(x)=ex, x_0=1$.

**4. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât următoarele funcții să fie derivabile pe domeniul maxim de definiție:**

**1)** $f(x)=\begin{cases} ax+b, x\le 0\\ \dfrac{x-1}{x^2+1}, x>0\end{cases}$; **2)** $f(x)=\begin{cases} e^{ax}, x\le 0\\ (ax)^x, x>0\end{cases}, a>0$.

**5. Să se studieze derivabilitatea funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:**

**1)** $f(x)=|x^3-3x^2|$; **2)** $f(x)=x|x-1|+(x-1)|x|$.

**6. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care graficul funcției $f(x)=\sqrt[3]{x^2+ax+1}$ are tangentă în orice punct $x_0\in\mathbb{R}$.**

# 4.6. REGULI DE DERIVARE. DERIVATELE FUNCȚIILOR ELEMENTARE

Derivata unei funcții este definită printr-o limită ceea ce face calculul direct destul de delicat. Este, prin urmare, foarte avantajos de a stabili reguli generale pentru aceste calcule. Vom distinge, în principal, reguli asociate operațiilor elementare efectuate între două funcții şi cele relative la compunerea a două funcții.

## 1. Derivatele unor funcții elementare

**1. Funcția constantă.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=c, \forall x\in\mathbb{R}$, unde $c$ este un număr real dat.

**Teoremă.** **Funcția constantă** $f(x)=c$ **este derivabilă pe** $\mathbb{R}$ şi derivata sa este egală cu zero, adică $f'(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$.

**Notație.** Se scrie $c'=0$.

**Demonstrație.** Fie $x_0\in\mathbb{R}$, un punct arbitrar. Raportul $R(x)$ devine

$$R(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{c-c}{x-x_0}=0, x\neq x_0.$$

De aici $\lim\limits_{x\to x_0} R(x)=0$, adică $f'(x_0)=0$. Cum $x_0$ a fost ales arbitrar se deduce că

$f'(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}.$ ■

Exemple. **Dacă $f(x)=1, \forall x\in\mathbb{R}$, atunci $1'=0$. Dacă $f(x)=-5, \forall x\in\mathbb{R}$, atunci $(-5)'=0$.**

**2. Funcția identică.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x, \forall x\in\mathbb{R}$.

**Teoremă.** **Funcția identică** **este derivabilă pe** $\mathbb{R}$ şi derivata sa este egală cu unu, adică $f'(x)=1, \forall x\in\mathbb{R}$.

**Notație.** Se scrie $(x)'=1$.

**Demonstrație.** Fie $x_0 \in \mathbb{R}$, un punct arbitrar. Pentru $x \neq x_0$, raportul $R(x)$ devine: $R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$.

Deci $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} R(x) = 1$. Deoarece $x_0$ a fost ales arbitrar din $\mathbb{R}$ rezultă $f'(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. ■

**3. Funcția putere cu exponent natural.** Se consideră funcția

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*$.

**Teoremă. Funcția putere** $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*$ **este derivabilă** pe $\mathbb{R}$ și derivata sa este egală cu $f'(x) = nx^{n-1}, \forall x \in \mathbb{R}$.

**Notație.** Se scrie $(x^n)' = nx^{n-1}$.

**Demonstrație.** Fie $x_0 \in \mathbb{R}$, un punct oarecare. Pentru $x \neq x_0$, raportul $R(x)$ se scrie succesiv:

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)\left(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \ldots + x_0^{n-1}\right)}{x - x_0} =$$

$$= x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + x_0^{n-1}.$$

De aici $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} R(x) = \underbrace{x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + \ldots + x_0^{n-1}}_{n \text{ ori}} = nx_0^{n-1}$.

Cum $x_0$ a fost ales arbitrar din $\mathbb{R}$, deducem că $f'(x) = nx^{n-1}, \forall x \in \mathbb{R}$. ■

**Exemple. Pentru $f(x) = x^3$, avem $(x^3)' = 3x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. De exemplu, pentru $x = 3, f'(3) = 3 \cdot 3^2 = 27$, iar pentru $x = -2, f'(-2) = 3(-2)^2 = 12$. Dacă $f(x) = x^5$, atunci $f'(x) = 5x^4, \forall x \in \mathbb{R}$.**

**4. Funcția radical de ordin n.** Fie funcția

$f : E \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[n]{x}, \forall x \in E, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ unde $E = [0, \infty)$ dacă $n$ este par și $E = \mathbb{R}$, dacă $n$ este impar.

**Teoremă. Funcția radical este derivabilă în orice punct** $x \neq 0, x \in E$ şi derivata sa este egală cu $f'(x) = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}, \forall x \neq 0$.

În punctul $x = 0$ **funcția radical nu este derivabilă**, dar are derivata $f'(0) = +\infty$.

**Notație.** Se scrie $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.

**Observații. 1**) Dacă $n = 2$, atunci $\boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, \forall x > 0}$.

Dacă $n = 3$, atunci $\boxed{\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \forall x \neq 0}$.

**2**) Dacă $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $x > 0$, atunci vom arăta că $\boxed{\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha - 1}}$.

Dacă $\alpha = -1$, atunci $\boxed{\left(x^{-1}\right)' = \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}}$.

Dacă $\alpha = \dfrac{1}{n}$, atunci $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ şi $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ pentru $x > 0$ dacă $n$ este par sau $x \in \mathbb{R}^*$ dacă $n$ este impar.

**Exemple. 1) Dacă $f(x) = x^{\frac{2}{3}}, x > 0$, atunci $f'(x) = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \dfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.**

**Dacă se cere $f'(1)$, atunci acest număr este egal cu $\dfrac{2}{3}$.**

**Pentru $f'(2)$ avem valoarea $\dfrac{2}{3\sqrt[3]{2}}$.**

**2) Dacă $f(x) = x^{\frac{3}{5}}, x > 0$, atunci $f'(x) = \dfrac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1} = \dfrac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} = \dfrac{3}{5x^{\frac{2}{5}}} = \dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$.**

**5. Funcția trigonometrică sinus.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x, \forall x\in\mathbb{R}$.

**Teoremă. Funcția trigonometrică sinus este derivabilă pe** $\mathbb{R}$ și derivata sa este egală cu $f'(x)=(\sin)'(x)=\cos x, \forall x\in\mathbb{R}$.

**Notație.** Ar trebui să scriem $f'(x)=(\sin)'(x)=\cos x, x\in\mathbb{R}$. Vom conveni să notăm $(\sin)'(x)=(\sin x)'$, atunci când este vorba de **derivata funcției sinus** într-un punct arbitrar. Dacă însă este vorba de funcția constantă $f(x)=\sin c$, cu $c$ număr real dat, atunci $(\sin c)'=0$. Este cu totul altceva $(\sin)'(c)=\cos c$, aici fiind vorba de derivata funcției sinus într-un punct $c\in\mathbb{R}$.

**Exemple.** $f'(0)=(\sin)'(0)=\cos 0=1$; $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=(\sin)'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**Problemă propusă. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\le\frac{2\pi}{3}\\ ax+b, & x>\frac{2\pi}{3}\end{cases}$ să fie derivabilă în $x=\frac{2\pi}{3}$.**

**6. Funcția trigonometrică cosinus.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\cos x, \forall x\in\mathbb{R}$.

**Teoremă. Funcția trigonometrică cosinus este derivabilă pe** $\mathbb{R}$ și derivata sa este egală cu $f'(x)=(\cos)'(x)=-\sin x, \forall x\in\mathbb{R}$.

**Notație.** Asemănător comentariului de la **5**. vom conveni să notăm **derivata funcției cosinus** prin $f'(x)=(\cos x)'=-\sin x, \forall x\in\mathbb{R}$.

## Probleme propuse

**1. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}1+a\cos x, & x\le\frac{\pi}{3}\\ b+\sin\frac{x}{2}, & x>\frac{\pi}{3}\end{cases}$, să fie derivabilă în $x=\frac{\pi}{3}$.**

**2. Să se determine numerele $a_1, b_1, a_2, b_2$ pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} a_1x+b_1, x>\frac{\pi}{2} \\ \cos x, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ a_2x+b_2, x<-\frac{\pi}{2}\end{cases}$ este derivabilă.**

**7. Funcția logaritm natural.** Se consideră $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x, \forall x>0$ .

**Teoremă. Funcția logaritmică este derivabilă pe** $(0,\infty)$ și derivata sa este egală cu $f'(x)=(\ln)'(x)=\frac{1}{x}, \forall x>0$ .

**Notație**. Derivata funcției $f(x)=\ln x$ este $f'(x)=(\ln)'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}, \forall x>0$.

**Exemple.** $f'(1)=1$ ; $f'(e)=\frac{1}{e}, f'(3)=\frac{1}{3}$.

**Observație.** Dacă se consideră $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\log_a x, a>0, a\neq 1$, funcția logaritmică de bază $a$ , atunci $\boxed{(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}, \forall x>0}$ .

**Demonstrație**. Este imediat dacă se ține seama că $\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$.■

**2. Operații cu funcții derivabile**

Rezultatele care urmează se referă la operații cu funcții derivabile **într-un punct** și **pe o mulțime.** Se va vedea în continuare că operațiile algebrice cu funcții derivabile conduc la funcții derivabile.

**Suma**

Fie $f, g: E\to\mathbb{R}$ două funcții și $x_0\in E\cap E'$.

**Teoremă. 1**) Dacă funcțiile $f$ și $g$ sunt derivabile în $x_0$, atunci $f+g$ este derivabilă în $x_0$ și avem egalitatea: $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

**2**) Dacă $f, g$ sunt funcții derivabile (pe E), atunci și suma lor $f+g$ este o funcție derivabilă (pe E) și $(f+g)'=f'+g'$.

(**Derivata sumei este egală cu suma derivatelor**)

**Demonstrație. 1)** Se scrie raportul $R(x)$ pentru $f+g$ :

$$R(x)=\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{(f(x)-f(x_0))+(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}=$$

$= \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$, dacă $x \neq x_0$.

Trecând la limită aici după $x \to x_0$ și ținând seama de faptul că $f$ și $g$ sunt derivabile în $x_0$ obținem: $(f+g)'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} R(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} +$

$+ \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$.

**2**) Se utilizează definiția funcției derivabile pe o mulțime și **1**).■

**Observații. 1**) Dacă $f_1, f_2, ..., f_n : E \to \mathbb{R}$ sunt funcții derivabile (pe $E$), atunci $f_1 + f_2 + ... + f_n$ este derivabilă (pe $E$) și $(f_1 + f_2 + ... + f_n)' = f_1' + f_2' + ... + f_n'$.

**2**) Dacă $f+g$ este derivabilă, atunci nu rezultă $f, g$ derivabile.

## Exerciții rezolvate

**Să se calculeze derivata funcției $f$ și apoi $f'(x_0)$, unde $x_0$ este punctul indicat în dreptul fiecărei funcții:**

**1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x + x^3 + x, x_0 = 0$ ; 2) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^4+\ln x, x_0=1$ ;**

**3) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+3, x_0=2$ .**

**R. 1) $f'(x)=(\sin x)'+(x^3)'+x'=\cos x+3x^2+1, \forall x\in\mathbb{R}$ . În particular**

**$f'(0)=\cos 0+3\cdot 0^2+1=1+1=2$ .**

**2) $f'(x)=(x^4)'+(\ln x)'=4x^3+\dfrac{1}{x}, \forall x>0$ , iar pentru $x=1$ avem $f'(1)=4+1=5$ .**

**3) $f'(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)'+(x^{-2})'+3'=-\dfrac{1}{x^2}+(-2x^{-3})+0=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}$ , iar pentru $x=2$ avem**

**$f'(2)=-\dfrac{1}{4}-\dfrac{2}{8}=-\dfrac{1}{2}$ .**

## Exerciții propuse

**1. Să se calculeze derivata funcției $f$ și apoi $f'(x_0)$, unde $x_0$ este punctul indicat în dreptul fiecărei funcții:**

**1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=1+x+x^2+x^3, x_0=1$ ; 2) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}, x_0=-1$ ;**

**3) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=-3+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}, x_0=1$ ; 4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x+\cos x+100$ , $x_0=\dfrac{\pi}{2}$ ;**

**5) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\log_3 x+\lg x+\sqrt{x}-5, x_0=3$ .**

**2. 1) Dați exemplu de două funcții nederivabile în $x_0$ , pentru care suma este derivabilă în $x_0$ .**

**2) Construiți două funcții $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ , nederivabile pentru care $f+g$ este derivabilă.**

**3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x|x-a|+|x-b|$. Să se arate că $f$ este derivabilă $\Leftrightarrow a=b=-1$. Generalizare.**

## Produsul

Se consideră $f,g:E\to\mathbb{R}$ două funcții și $x_0\in E\cap E'$.

**Teoremă. 1**) Dacă funcțiile $f$ și $g$ sunt derivabile în $x_0$, atunci produsul lor $f\cdot g$ este o funcție derivabilă în $x_0$ și avem egalitatea: $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$.

**2**) Dacă $f,g$ sunt funcții derivabile (pe E), atunci și produsul lor $f\cdot g$ este o funcție derivabilă (pe E) și $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$.

(**Derivata produsului este egală cu prima funcție derivată înmulțită cu a doua nederivată, plus prima funcție nederivată înmulțită cu a doua derivată**)

**Demonstrație. 1**) Fie $x\neq x_0, x\in E$ și raportul $R(x)$ pentru $f\cdot g$ se scrie succesiv astfel: $R(x)=\dfrac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=$

$$=\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

(Am adunat și scăzut la numărător $f(x_0)g(x)$).

Deoarece funcția $g$ este derivabilă în $x_0$, ea este continuă în acest punct și deci $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$. Funcțiile $f,g$ fiind derivabile în $x_0$ rezultă

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0),\ \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=g'(x_0).$$

Acum trecând la limită în $R(x)$ după $x\to x_0$ se obține: $(f\cdot g)'(x_0)=$

$$=\lim_{x\to x_0}R(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}g(x)+f(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).$$

**2**)Se utilizează definiția funcției derivabile pe o mulțime și **1**).■

**Observații. 1**) Dacă $f,g,h:E\to\mathbb{R}$ sunt trei funcții derivabile (pe $E$), atunci $f\cdot g\cdot h$ este o funcție derivabilă (pe $E$) și avem:

$(f\cdot g\cdot h)'=f'\cdot g\cdot h+f\cdot g'\cdot h+f\cdot g\cdot h'$.

Într-adevăr $(f\cdot g\cdot h)'=(f\cdot g)'\cdot h+(f\cdot g)\cdot h'=(f'\cdot g+f\cdot g')h+(f\cdot g)\cdot h'=$
$=f'\cdot g\cdot h+f\cdot g'\cdot h+f\cdot g\cdot h'$.
În general dacă $f_i:E\to\mathbb{R}, i=\overline{1,n}$, sunt funcții derivabile (pe $E$), atunci $f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n$ este derivabilă (pe $E$) şi
$(f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n)'=f_1'\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n+f_1\cdot f_2'\cdot f_3\cdot\ldots\cdot f_n+\ldots+f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_{n-1}\cdot f_n'$,
demonstrația făcându-se prin inducție.
**2)** Dacă $f(x)=k, \forall x\in E$, adică $f$ este funcția constantă şi $g$ este o funcție derivabilă (pe *E*), atunci $k\cdot g$ este o funcție derivabilă (pe $E$) şi

$$\boxed{(kg)'=k\cdot g'}$$
(**Constanta iese în afara derivării**).

În particular pentru $k=-1$, se obține $\boxed{(-g)'=-g'}$.

Acum ținând seama de rezultatul pentru sumă şi acest ultim rezultat avem pentru două funcții $f,g$ derivabile (pe $E$) că $f-g$ este o funcție derivabilă (pe $E$) şi

$$\boxed{(f-g)'=f'-g'}$$
(**Derivata diferenței a două funcții este egală cu diferența derivatelor**)

**3)** Dacă $f\cdot g$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$, atunci $f,g$ pot (sau nu) să fie derivabile.

## Exerciții rezolvate

**Să se calculeze derivata funcției $f$ şi apoi $f'(x_0)$, acolo unde $x_0$ este indicat în dreptul funcției:**

**1)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x^5-2x^3+4x+6, x_0=0$;

**2)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}, n\in\mathbb{N}^*, x_0=1$; **3)** $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x\ln x, x_0=e$;

**4)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x\sin x$; **5)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x\cos x$;

**6)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x\sin x\cos x, x_0=\pi$; **7)** $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x}\sin x+5\cos x-\frac{3}{x}+9$;

**8)** $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\sin x$; **9)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(2x^3-3x^2+5x-3)(1+\sin x)$;

**10)** $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)(1+2x+3x^2)$.

**R. 1)** $f'(x)=15x^4-6x^2+4, 4$; **2)** $f'(x)=2+3\cdot 2x+\ldots+n(n-1)x^{n-2}$,

$\sum_{k=2}^{n}(k-1)k=\sum_{k=2}^{n}k^2-\sum_{k=2}^{n}k=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$ ; 3) $f'(x)=\ln x+1$ ;2;

4) $f'(x)=\sin x+x\cos x$ ; 5) $f'(x)=\cos x-x\sin x$ ; 6) $f'(x)=\sin x\cos x+x\cos^2 x-x\sin^2 x=$

$=\frac{1}{2}\sin 2x+x\cos 2x;\pi$ ; 7) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x+\sqrt{x}\cos x-5\sin x+\frac{3}{x^2}$ ;

8) $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cdot\frac{1}{x}\cdot\sin x+\sqrt[3]{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\sin x+\sqrt[3]{x}\cdot\frac{1}{x}\cos x$ ;

9) $f'(x)=\left(6x^2-6x+5\right)(1+\sin x)+\left(2x^3-3x^2+5x-3\right)\cos x$ ;

10) $f'(x)=\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)\left(1+2x+3x^2\right)+\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)(2+6x)$ .

## Exerciții propuse

1. Să se calculeze derivata funcției $f$ și apoi $f'(x_0)$, acolo unde $x_0$ este indicat în dreptul funcției:

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x^4-2x^3+5x+10, x_0=-1$ ; 2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(1-3x)(1+6x), x_0=0$ ;

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin 2x, x_0=\frac{\pi}{2}$ ; 4) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=(1+x)\ln x$ ;

5) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)\ln x$ ; 6) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(2\sin x+3)(1-5\cos x)$ ;

7) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left(1-3x^2\right)(1-2\sin x)$ ; 8) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\left(-\frac{3}{x}+4\right)(2\ln x-3)$ ;

9) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=(1+x)(2\ln x)(3\sin x-5)$ ; 10) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=3x^2\cdot\ln x\cdot\sin x$ ;

11) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x\cos x-5x\ln x+3\sin x-x^2+2x$ ;

12) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\left(3\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}\right)\sin x+5(\sin x)\ln x-x^3+4x+5$ .

2. În exercițiile următoare să se determine $f'(0)$ dacă $g(0)=3$ și $g'(0)=2$ .

1) $f(x)=x\,g(x)$ ; 2) $f(x)=3x^2g(x)-5x$ .

3. 1) Dați exemple de două funcții nederivabile în $x_0$, având produsul o funcție derivabilă în $x_0$ .

2) Construiți două funcții $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nederivabile cu $f\cdot g$ derivabilă.

4. Fie $f$ derivabilă în $x_0$, $f(x_0)\neq 0$, $g$ nederivabilă în $x_0$, dar continuă în $x_0$. Arătați că $f\cdot g$ nu este derivabilă în $x_0$ .

**Câtul**

Fie $f, g : E \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in E \cap E'$.

**Teoremă. 1)** Dacă funcţiile $f, g$ sunt derivabile în $x_0$, $g(x_0) \neq 0$, atunci şi funcţia – cât $\frac{f}{g}$ este derivabilă în $x_0$ şi are loc egalitatea

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

**2)** Dacă funcţiile $f, g$ sunt derivabile (pe $E$), $g(x) \neq 0, x \in E$, atunci funcţia – cât $\frac{f}{g}$ este derivabilă (pe $E$) şi

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}.$$

(**derivata câtului este egală cu derivata numărătorului înmulţită cu numitorul nederivat minus numărătorul nederivat înmulţit cu derivata numitorului, totul supra numitorul la pătrat**)

**Exemple. 1) Fie $f(x) = \text{tg}\, x, x \in \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} | \cos x = 0\} = E$. Atunci** $\boxed{(\text{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \forall x \in E}$.

**Într-adevăr** $(\text{tg}\, x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$.

**2) Considerăm $f(x) = \text{ctg}\, x, x \in \mathbb{R} - \{x | \sin x = 0\} = E$. Atunci** $\boxed{(\text{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \forall x \in E}$.

**Avem:** $(\text{ctg}\, x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

## Exerciţii rezolvate

**Să se calculeze derivata funcţiei $f$ şi apoi $f'(x_0)$, acolo unde $x_0$ este indicat în dreptul funcţiei:**

**1)** $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x-1}, x_0 = 2$; **2)** $f : \mathbb{R} - \{1, 2\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}, x_0 = 0$;

**3)** $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{x+1}$; **4)** $f : (0, \infty) - \{e\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{\ln x - 1}$;

**5)** $f : \mathbb{R} - \{x | \text{tg}\, x = 1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}, x_0 = \frac{\pi}{2}$.

**R. 1)** $f'(x) = \frac{1'(x-1) - 1(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}, x \neq 1$; $f'(2) = \frac{-1}{(2-1)^2} = -1$.

**2) Se observă că** $f(x) = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$ **şi deci** $f'(x) = \left(-\frac{1}{x-1}\right)' + \left(\frac{1}{x-2}\right)' = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-2)^2}$.

3) $f'(x)=\dfrac{\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'(x+1)-x\sqrt{x}(x+1)'}{(x+1)^2}=\dfrac{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(x+1)-x\sqrt{x}}{(x+1)^2}=\dfrac{\sqrt{x}(x+3)^2}{2(x+1)^2}$.

4) $f'(x)=\dfrac{(\ln x)'(\ln x-1)-\ln x(\ln x-1)'}{(\ln x-1)^2}=\dfrac{\frac{1}{x}(\ln x-1)-(\ln x)\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x-1)^2}=-\dfrac{1}{x(\ln x-1)^2}$.

5) $f'(x)=\dfrac{(\sin x+\cos x)'(\sin x-\cos x)-(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)'}{(\sin x-\cos x)^2}=$

$=\dfrac{(\cos x-\sin x)(\sin x-\cos x)-(\sin x+\cos x)(\cos x+\sin x)}{(\sin x-\cos x)^2}=\dfrac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}$ ; $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-2$.

## Exerciții propuse

**1. Să se calculeze derivata funcției $f$ și apoi $f'(x_0)$, acolo unde $x_0$ este indicat în dreptul funcției:**

1) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}, x\neq 1, x_0=0$ ; 2) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}, x\neq -1,-2$ ; 3) $f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}, x\neq -2, x_0=1$ ;

4) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}, x_0=-1$ ; 5) $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x^3+1}$, $x\neq -1, x_0=0$ ; 6) $f(x)=\dfrac{x^3-2x}{x^2+x+1}, x_0=1$ ;

7) $f(x)=\dfrac{1-x^3}{1+x^3}, x\neq -1$ ; 8) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}, x\geq 0$ ; 9) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}, x\geq 0, x\neq 1$ ;

10) $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}+1}, x\geq 0$ ; 11) $f(x)=\dfrac{\ln x+x}{\ln x-x}, x>0, x_0=1$ ; 12) $f(x)=\dfrac{\ln x+x^2}{\ln x-x^2}, x>0$ ;

13) $f(x)=\dfrac{2\sin x}{3\cos x-5}, x_0=0$ ; 14) $f(x)=\dfrac{-\sin x+3\cos x}{\sin x+4}$ ; 15) $f(x)=\dfrac{2\sin x-5\cos x}{3\sin x+4}$.

**2. În exercițiile următoare să se determine $f'(0)$ dacă $g(0)=3$ și $g'(0)=3$ :**

1) $f(x)=g(x)-\dfrac{1}{g(x)}$ ; 2) $f(x)=g(x)+\dfrac{x}{g(x)}$.

## 3. Derivarea funcțiilor compuse

În paragraful **2** am constatat că efectuând operații algebrice cu funcții derivabile se obțin, de asemenea, funcții derivabile. Un alt mod de a genera funcții derivabile îl constituie compunerea funcțiilor derivabile.

Mai precis are loc următoarea

**Teoremă. 1)** Fie $I, J$ intervale şi $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ două funcţii. Dacă $f$ este derivabilă în $x_0 \in I$, iar $g$ este derivabilă în punctul $f(x_0) = y_0$, atunci funcţia compusă $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă în $x_0$ şi mai mult

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

**2)** Fie $I, J$ intervale şi $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ două funcţii. Dacă $f$ este derivabilă pe *I* şi $g$ este derivabilă pe *J*, atunci $g \circ f$ este derivabilă pe *I* şi

$$(g \circ f)' = g'(f) \cdot f'$$

**Observaţii. 1)** Dacă se consideră trei funcţii derivabile $f : I \to J, g : J \to K$, $h : K \to \mathbb{R}$ atunci funcţia $h \circ g \circ f : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă şi $(h \circ g \circ f)' = h'(g \circ f) \cdot g'(f) \cdot f'$ rezultat ce se obţine imediat aplicând corolarul precedent $[h \circ (g \circ f)]' = h'(g \circ f) \cdot (g \circ f)' = h'(g \circ f) \cdot g'(f) \cdot f'$.

**2)** Deci

**Derivata unei funcţii compuse se obţine înmulţind derivatele funcţiilor care se compun în ordinea compunerii lor.**

## Exerciţii rezolvate

**1. Fie $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x^2 + 3x + 2, h(x) = x^3$ pentru care $g'(x) = 2x + 3$ şi $h'(x) = 3x^2$. Să considerăm funcţia $f = h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (h \circ g)(x) = h(g(x)) = (x^2 + 3x + 2)^3$.**

**Atunci $f'(x) = (h \circ g)'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = 3g(x) \cdot (2x + 3) = 3(x^2 + 3x + 2)(2x + 3)$.**

**Observaţie. În acest exerciţiu am ales noi funcţiile $g, h$ şi cu ajutorul lor am constituit funcţia compusă $f = h \circ g$. De obicei în aplicaţii se dă funcţia $f$ şi rămâne în seama cititorului evidenţierea funcţiilor care se compun. Se impune o atenţie deosebită la ordinea în care apar funcţiile în compunere.**

**2. Să se calculeze derivatele funcţiilor compuse (punând de fiecare dată în evidenţă funcţiile care se compun):**

**a) $f(x) = \sin x^2, x \in \mathbb{R}$; b) $f(x) = \sin^2 x, x \in \mathbb{R}$; c) $f(x) = \sin^3(x^2 + 1), x \in \mathbb{R}$;**

**d) $f(x) = \ln(1 + x^2 + x^3), x > 0$; e) $f(x) = \ln^5 x, x > 0$; f) $f(x) = \ln^3(3x^2 + 5x), x > 0$.**

**R. a) Funcţia $f$ este compunerea funcţiilor $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x^2$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = \sin x$.**

**Atunci $f = h \circ g, f(x) = h(g(x)) = \sin x^2$. Deci $f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = (\cos x^2) \cdot 2x = 2x \cos x^2$.**

**Este clar că $h, g$ sunt derivabile şi are loc teorema de la derivarea funcţiilor compuse. De acum înainte această observaţie o va face cititorul. Deci prima funcţie din compunere este sin şi apoi funcţia polinomială $g(x) = x^2$. Dacă gândim funcţia $f(x) = \sin u(x)$, unde $u(x) = x^2$, atunci conform formulei de la derivarea funcţiei compuse avem:**

$f'(x)=(\sin u(x))'=\cos u(x)\cdot u'(x)=2x\cos x^2$.

b) În acest caz trebuie să evidențiem două funcții: $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\sin x$ și $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x)=x^2$ (funcția putere), pentru care $g'(x)=\cos x, h'(x)=2x$. Deci $f(x)=(h\circ g)(x)$ și $f'(x)=h'(g(x))\cdot g'(x)=h'(\sin x)\cdot(\sin x)'=2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x$.

Analog am putea considera $f(x)=u^2(x)$, unde $u(x)=\sin x$ și deci

$f'(x)=2\cdot u(x)\cdot u'(x)=2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x$.

c) În acest caz avem în compunere funcțiile $g,h,i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, unde

$g(x)=x^2+1, h(x)=\sin x, i(x)=x^3$ pentru care $g'(x)=2x$, $h'(x)=\cos x, i'(x)=3x^2$ când

$f(x)=(i\circ h\circ g)(x)=i\left(h\left(g(x)\right)\right)=i\left(h\left(x^2+1\right)\right)=i\left(\sin\left(x^2+1\right)\right)=\left(\sin\left(x^2+1\right)\right)^3$, adică ordinea în compunere este funcția putere, funcția sin și apoi funcția polinomială.

De aici $f'(x)=i'\left(h\left(g(x)\right)\right)\cdot h'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)=3h\left(g(x)\right)^2\cdot\cos\left(g(x)\right)\cdot 2x=$

$=3\sin^2\left(x^2+1\right)\cdot\cos\left(x^2+1\right)\cdot 2x$.

d) Aici se compune în ordine funcția logaritmică $h:(0,\infty)\to\mathbb{R}, h(x)=\ln x$ cu funcția polinomială $g:(0,\infty)\to(1,\infty), g(x)=x^3+x^2+1$ cu $h'(x)=\frac{1}{x}$ și $g'(x)=3x^2+2x$ când avem: $f(x)=(h\circ g)(x)$. Deci $f'(x)=h'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)=\frac{1}{g(x)}\cdot\left(3x^2+2x\right)=\frac{3x^2+2x}{x^3+x^2+1}$.

Dacă gândeam funcția $f$ ca fiind $f(x)=\ln u(x)$ unde $u(x)=g(x)$, atunci

$f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{3x^2+2x}{x^3+x^2+1}$.

e) Scriind $f(x)=(\ln x)^5$ se constată ușor că prima funcție din compunere este funcția putere $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x)=x^5$, iar a doua funcție este $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\ln x$ pentru care $h'(x)=5x^4, g'(x)=\frac{1}{x}$. Așadar $f'(x)=\left[(\ln x)^5\right]'=5(\ln x)^4\cdot\frac{1}{x}=\frac{5}{x}\ln^4 x$.

f) Se remarcă ușor că în structura funcției sunt trei funcții ce se compun $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=3x^2+5x$ (funcție polinomială), $h:(0,\infty)\to\mathbb{R}, h(x)=\ln x$ (funcția logaritmică) și în fine $i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, i(x)=x^3$ (funcția putere). Deci $f(x)=(i\circ h\circ g)(x)$. Avem $g'(x)=6x+5, h'(x)=\frac{1}{x}, i'(x)=3x^2$. Acum este ușor de văzut că $f'(x)=i'\left(h\left(g(x)\right)\right)\cdot h'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)=3\ln^2\left(3x^2+5x\right)\cdot\frac{1}{3x^2+5x}\cdot(6x+5)$.

**Observații**. **1)** Dacă funcția se exprimă prin radical dintr-o funcție derivabilă, atunci studiul derivabilității se face în punctele în care se anulează radicalul.

**2)** Este util pentru profesor în predarea derivatei funcției compuse de a utiliza, pentru funcțiile care se compun, cretă de culori diferite, pentru fiecare funcție o altă culoare, păstrând aceeași culoare pentru funcția respectivă pe tot parcursul derivării.

**Pentru primul exemplu analizat mai sus avem:**
$\left(\sin x^2\right)' = \left(\cos x^2\right)\cdot 2x$**, unde funcţia** $h = \sin$ **este scrisă cu roşu, iar** $g(x) = x^2$ **apare scrisă cu negru.**

### Exerciţii propuse

**1. Să se calculeze derivatele următoarelor funcţii** $f$ **indicând domeniul de definiţie** $(D_f)$ **şi de derivabilitate** $(D_{f'})$**:**

**1)** $f(x) = \left(x^2 - 3x\right)^5$; **2)** $f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^3$; **3)** $f(x) = \left(1+\sqrt{x}\right)^3$; **4)** $f(x) = \sqrt{1-x^2}$;

**5)** $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$; **6)** $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$; **7)** $f(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$; **8)** $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x}$;

**9)** $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$; **10)** $f(x) = \sin(3x+1)$; **11)** $f(x) = \frac{1}{2}\cos x^2$; **12)** $f(x) = \operatorname{tg}\left(x^2+1\right)$;

**13)** $f(x) = \operatorname{ctg}\left(x^4 + x^2 + 1\right)$; **14)** $f(x) = \left(1+\sin^2 x\right)^5$; **15)** $f(x) = \sin^3\left(x^2 + 3x\right)$; **16)** $f(x) = \cos^2 x^3$;

**17)** $f(x) = \left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)^3$; **18)** $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$; **19)** $f(x) = \sin\sqrt{1+x}$; **20)** $f(x) = \sin(\sin x)$;

**21)** $f(x) = \ln(1-x)$; **22)** $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$; **23)** $f(x) = \ln\sqrt{x}$; **24)** $f(x) = \ln\sin x$; **25)** $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

**2. Se dau** $f(0) = 1, f'(0) = 2, f(1) = 0, f'(1) = 1, f(2) = 2, f'(2) = 2,\ g(0) = 2, g'(0) = 1, g(1) = 1,$ **,** $g'(1) = 1, g(2) = 2, g'(2) = 1, h(0) = 1, h'(0) = 2, h(1) = 1, h'(1) = 1, h(2) = 0, h'(2) = 2.$

**Să se calculeze: 1)** $(f\circ g)'(0)$; **2)** $(f\circ g)'(1)$; **3)** $(g\circ f)'(2)$; **4)** $(f\circ h\circ g)'(0)$; **5)** $(g\circ f\circ h)'(1)$.

**3. Fie** $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **funcţii derivabile astfel încât** $f'(x) = g(x)$ **şi** $g'(x) = f(x)$**. Dacă** $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x) = f^2(x) - g^2(x)$**, atunci calculaţi** $h'(x)$**.**

**4. a) Fie** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **o funcţie derivabilă. Arătaţi că dacă 1)** $f$ **este pară, atunci** $f'$ **este impară; 2)** $f$ **este impară, atunci** $f'$ **este pară; 3)** $f$ **periodică, atunci** $f'$ **este periodică.**

**b) Dacă** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **este derivabilă şi funcţie pară, atunci** $f'(0) = 0$**.**

**c) Fie** $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$**,** $f$ **funcţie pară şi derivabilă cu** $g(x) = \left(\frac{x^3}{3}+1\right)f(x)$**. Arătaţi că** $g'(0) = 1$**.**

**5. Un obiect se mişcă de-a lungul curbei** $y = x^3 - 3x + 5$ **astfel încât abscisa** $x$ **la momentul** $t$ **este dată de** $x = 2t^2 - t + 2, t \ge 0$**. Care este viteza de schimbare a lui** $y$ **când** $t = 2$**?**

## 4. Derivarea funcţiei inverse

Prezentăm în acest paragraf o ultimă modalitate de a obţine funcţii derivabile, oferind în acelaşi timp un procedeu important de derivare. Am văzut în ce condiţii o funcţie continuă are o inversă continuă. Rezultatul următor vine să puncteze condiţiile în care o funcţie derivabilă are inversă derivabilă.

Mai precis are loc următorul rezultat:

**Teoremă de derivare a funcției inverse. 1)** Fie $f:I\to J, I, J$ intervale, $f$ **continuă** și **bijectivă**. Dacă $f$ **este derivabilă** în punctul $x=x_0$ și $f'(x_0)\neq 0$, atunci **funcția inversă** $f^{-1}:J\to I$ **este derivabilă în punctul** $f(x_0)=y_0$ și mai mult:

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Dacă $f'(x_0)=0$, atunci $\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\begin{cases}\infty, \text{ dacă } f \text{ este crescătoare}\\ -\infty, \text{ dacă } f \text{ este descrescătoare.}\end{cases}$

**2)** Dacă $f:I\to J, I, J$ intervale, $f$ **continuă** și **bijectivă** este o funcție **derivabilă pe** $I$ și $f'(x)\neq 0, \forall x\in I$, atunci $f^{-1}:J\to I$ **este derivabilă pe** $J$ și mai mult $\left(f^{-1}\right)'(f)=\frac{1}{f'}$.

**Observații**. **1)** Formula din teoremă admite o interpretare geometrică simplă. Coeficientul unghiular al tangentei la curba $y=f(x)$ în $(x_0, y_0)$ este $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$ (Fig. 15); cât privește coeficientul unghiular al tangentei la curba $x=f^{-1}(y)$ în $(y_0, x_0)$, el este egal cu $\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\operatorname{tg}\beta$. Este evident că $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

Deci $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$, adică $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=1$ sau $f'(x_0)\left(f^{-1}\right)'(y_0)=1$.

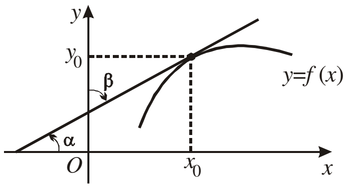


Fig. 15

**2)** Dacă în enunț în loc de $f'(x_0)\neq 0$ se ia

$f'(x_0)=0$, atunci $\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\infty$, dacă $f$ este o funcție strict crescătoare (deoarece $x-x_0$ și $f(x)-f(x_0)$ au același semn și prin urmare $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$) și $\left(f^{-1}\right)'(y_0)=-\infty$, dacă $f$ este o funcție strict descrescătoare ($x-x_0$ și $f(x)-f(x_0)$ au semne contrare).

Așadar pentru $f'(x_0)=0$ funcția $f^{-1}$ nu este derivabilă în $y_0$, dar **are derivată infinită** în $y_0$.

## Exercițiu rezolvat

**Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+2x^2+4x+4$. Să se arate că:**

**a) $f$ este bijectivă; b) $\left(f^{-1}\right)'(4)=\frac{1}{4}$ și că $\left(f^{-1}\right)'(y)>0, \forall y\in\mathbb{R}$.**

**R. a) Pentru a arăta că $f$ este injectivă probăm că $f$ este strict monotonă. Fie deci $x_1<x_2$ și calculăm diferența $f(x_2)-f(x_1)=x_2^3-x_1^3+2\left(x_2^2-x_1^2\right)+4(x_2-x_1)=(x_2-x_1)\left[x_2^2+x_2(x_1+2)+\right.$ $\left.+x_1^2+2x_1+4\right]>0$, deoarece $x_2-x_1>0$ și paranteza dreaptă conține o expresie pozitivă pentru că $\Delta_{x_2}=(x_1+2)^2-4\left(x_1^2+2x_1+4\right)=-3x_1^2-4x_1-12=-\left(3x_1^2+4x_1+12\right)<0, \forall x_1\in\mathbb{R}$. Deci din $x_1<x_2$ se obține $f(x_1)<f(x_2)$, ceea arată că $f$ este strict crescătoare.**

**Din $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ și $f$ continuă se deduce că $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, adică este dovedită surjectivitatea lui $f$. Deci în final $f$ este bijectivă.**

**b) Din $f(x_0)=y_0=4$ rezultă $x_0^3+2x_0^2+4x_0+4=4$ cu singura soluție reală $x_0=0$.**

**Acum conform teoremei de derivare a funcției inverse avem $\left(f'(x)=3x^2+4x+4\right)$: $\left(f^{-1}\right)'(4)=$ $=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{4}$ și în general $\left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{3x^2+4x+4}>0$, deoarece $3x^2+4x+4>0, \forall x\in\mathbb{R}$.**

## Probleme propuse

**1. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+\ln x$. Să se arate că:**

**a) $f$ este bijectivă; b) $\left(f^{-1}\right)'(1)=\frac{1}{2}$.**

**2. Fie $f:(0,\infty)\to(1,\infty), f(x)=x^4+x^2+x+1$.**

**Să se arate că funcția $f$ este bijectivă și să se calculeze $\left(f^{-1}\right)'(4)$.**

**3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x+ex$. Să se arate că $f$ este bijectivă și apoi să se calculeze $\left(f^{-1}\right)'(2e), \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f^{-1}(x)-\sqrt{x}}{x-f^{-1}(x)}$.**

**4. 1) Fie $f:\mathbb{R}\to(1,\infty), f(x)=3^{-2x}+3^{-x}+1$. Să se arate că $f$ este bijectivă și să se calculeze $\left(f^{-1}\right)'(3)$.**

**2) Fie $f:\mathbb{R}\to(1,\infty), f(x)=4^x+2^x+1$. Arătați că $f$ este bijectivă și $\left(f^{-1}\right)'(x)>0, \forall x>1$. Calculați $f'(0)$ și $\left(f^{-1}\right)'(3)$.**

**5. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x^2-2x, & x\le 0\\ -x^2-2x, & x>0\end{cases}$.**

**Demonstrați că $f$ este bijectivă și apoi calculați $\left(f^{-1}\right)'(3)$.**

**6. Fie $f:(0,\infty)\to(1,\infty), f(x)=e^x+x^2+x$. Arătați că $f$ este bijectivă și apoi calculați $\left(f^{-1}\right)'(e+2)$.**

**7.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}3-x, x\in\mathbb{Q}\\ \frac{2}{x}, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$. **a) Arătați că $f$ este inversabilă și calculați $f^{-1}$.**

**b) Studiați continuitatea și derivabilitatea funcțiilor $f$ și $f^{-1}$.**

## Consecințe. Derivatele unor funcții elementare

**1) Funcția exponențială.** Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\log_a x, a>0, a\neq 1$. Deci $y=\log_a x$, iar $x=a^y$.

Se știe că această funcție este continuă, bijectivă, derivabilă și $f'(x)=\frac{1}{x\ln a}\neq 0$, iar inversa este funcția $f^{-1}:\mathbb{R}\to(0,\infty), f^{-1}(y)=a^y$, adică funcția exponențială de bază $a$. Suntem în condițiile teoremei de mai sus și deci

$$\left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{f'(x)}=x\ln a=a^y\ln a, \forall y\in\mathbb{R}.$$

Așadar avem următoarea:

**Teoremă. Funcția exponențială de bază** $a, f:\mathbb{R}\to(0,\infty), f(x)=a^x$, $a>0, a\neq 1$ **este derivabilă pe** $\mathbb{R}$ și $\left(a^x\right)'=a^x\ln a, \forall x\in\mathbb{R}$.

Dacă $a=e$ atunci $\left(e^x\right)'=e^x, \forall x\in\mathbb{R}$.

Dacă $u$ este o funcție derivabilă, atunci $\left(a^u\right)'=a^u\cdot u'\cdot\ln a$ și $\left(e^u\right)'=e^u\cdot u'$.

**Exemple. 1)** $f(x)=e^{x^2}$. **Atunci** $f'(x)=e^{x^2}\cdot\left(x^2\right)'=2xe^{x^2}$.

**2)** $f(x)=2^{\sin x}$. **Atunci** $f'(x)=2^{\sin x}\cdot(\sin x)'\cdot\ln 2=(\cos x)\cdot 2^{\sin x}\ln 2$.

**3)** $f(x)=5^{\ln x}, x>0$. **Avem** $f'(x)=5^{\ln x}\cdot(\ln x)'\cdot\ln 5=\frac{1}{x}\cdot 5^{\ln x}\cdot\ln 5$.

**4)** $f(x)=e^{\frac{1}{x}}, x\neq 0$. **Atunci** $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$.

**5)** $f(x)=3^{\frac{x}{x+1}}, x\neq -1$.

**Avem** $f'(x)=3^{\frac{x}{x+1}}\cdot\left(\frac{x}{x+1}\right)'\ln 3=\frac{1}{(x+1)^2}\cdot 3^{\frac{x}{x+1}}\ln 3$.

**2) Funcția arcsinus.** Fie $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$, $f(x)=\sin x$, care se știe că este continuă, bijectivă și $f'(x)=\cos x\neq 0$ pentru $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Prin urmare se poate aplica teorema de derivare a funcției inverse $f^{-1}:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $f^{-1}(y)=\arcsin y$. Fie $y_0\in(-1,1)$, arbitrar.

Avem $(\arcsin)'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{\cos x_0}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x_0}}=\frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}}$.

Dacă $y_0=-1$, atunci $x_0=-\frac{\pi}{2}$ și $f'(x_0)=0$. Cum $f$ este strict crescătoare se deduce $(\arcsin)'(-1)=\infty$.

Analog dacă $y_0=1$, atunci $x_0=\frac{\pi}{2}$ și $f'(x_0)=0$ când $(\arcsin)'(1)=\infty$.

Așadar avem următoarea:

**Teoremă. Funcția arcsinus,** $f(x)=\arcsin x$ **este derivabilă pe** $(-1,1)$ și

$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\forall x\in(-1,1)$.

În plus, $(\arcsin)'(-1)=(\arcsin)'(1)=\infty$.

Dacă $u$ este o funcție derivabilă cu $|u(x)|<1$, atunci $(\arcsin u)'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

**Exemple. 1)** $f(x)=\arcsin(x^2-x)$ **pentru care se impune** $-1<x^2-x<1$**, când**

$f'(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{1-(x^2-x)^2}}$. **Pentru** $x=0$ **se obține** $f'(0)=-1$**, iar dacă** $x=\frac{1}{2}$**, atunci** $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

**2)** $f(x)=\arcsin e^x$**, pentru care impunem** $e^x<1$**, adică** $x<0$.

**Avem** $f'(x)=\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$. **Dacă** $x=-1$**, atunci** $f'(-1)=\frac{1}{\sqrt{e^2-1}}$.

**Ce se întâmplă dacă** $x=0$**? Atunci** $f_s'(0)=\frac{1}{0_+}=\infty$ **ceea ce arată că** $f$ **are derivată la stânga în** $x=0$**, dar este infinită. Prin urmare** $f$ **nu este derivabilă la stânga în** $x=0$.

**3)** $f(x)=\arcsin\frac{1}{x}$. **Se cere pentru derivabilitate** $\left|\frac{1}{x}\right|<1$**, adică** $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$. **Avem:**

$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}=-\frac{1}{x^2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}}=\begin{cases}-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, x>1\\ \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, x<-1\end{cases}$$. **Am utilizat** $\sqrt{x^2}=|x|$.

**Pentru** $x=2, f'(2)=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$ **(după prima formă din** $f', 2>1$**), iar dacă** $x=-2$**, atunci** $f'(-2)=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$ **(după a doua formă din** $f', -2<-1$**).**

**3) Funcția arccosinus.** Se consideră $f:[0,\pi]\to[-1,1], f(x)=\cos x$.

Se ştie că $f$ este bijectivă, continuă şi $f'(x)=-\sin x\neq 0$ dacă $x\in(0,\pi)$.

Funcției inverse $f^{-1}:[-1,1]\to[0,\pi], f^{-1}(y)=\arccos y$ i se poate aplica teorema de derivare a funcției inverse. Lăsăm în seama cititorului acest exercițiu. Se cunoaşte de la trigonometrie formula $\arcsin y+\arccos y=\frac{\pi}{2}, \forall y\in[-1,1]$.

Dacă $y\in(-1,1)$, atunci din această formulă prin derivare se obține:

$$(\arccos y)'=\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin y\right)'=-(\arcsin y)'=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Dacă $y=-1$, atunci $(\arccos)'(-1)=-\infty$, iar pentru $y=1$, avem $(\arccos)'(1)=-\infty$, deoarece funcția arccos este strict descrescătoare. Deci avem următoarea:

**Teoremă. Funcția arccosinus**, $f(x)=\arccos x$ **este derivabilă pe** $(-1,1)$ şi

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x\in(-1,1).$$

În plus, $(\arccos)'(-1)=(\arccos)'(1)=-\infty$.

Dacă $u$ este o funcție derivabilă cu $|u|<1$, atunci $(\arccos u)'=-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

**Exemple. 1)** $f(x)=\arccos(x^2+2x)$. **Pentru derivabilitatea funcției se pune condiția** $|x^2+2x|<1$.

**Atunci** $f'(x)=-\frac{2(x+1)}{\sqrt{1-(x^2+2x)^2}}=-\frac{2(x+1)}{\sqrt{(1-x^2-2x)(1+x^2+2x)}}=-\frac{2(x+1)}{|x+1|\sqrt{1-x^2-2x}}$.

**Pentru** $x=0$ **avem** $f'(0)=-2$**, iar dacă** $x=\frac{1}{3}$**, atunci** $f'\left(\frac{1}{3}\right)=-3\sqrt{2}$.

**2)** $f(x)=\arccos(\sin x), x\in\mathbb{R}-\{x\in\mathbb{R}|\sin x=\pm1\}$. **Atunci**

$$f'(x) = -\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = -\frac{\cos x}{|\cos x|} = \begin{cases} -1, \cos x > 0 \\ 1, \cos x < 0 \end{cases}.$$

**Pentru** $x = \frac{\pi}{6}, f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -1$, **deoarece** $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$, **iar dacă** $x = \frac{2\pi}{3}$, **atunci** $f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1$, **deoarece** $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} < 0$.

**4) Funcția arctangentă.** Fie $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} x$, care este continuă, bijectivă şi $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Funcției inverse $f^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$ i se poate aplica teorema de derivare a funcției inverse. Fie $y_0 \in \mathbb{R}$, arbitrar. Atunci

$$(\operatorname{arctg})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \cos^2 x_0 = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x_0} = \frac{1}{1+y_0^2} (x_0 = \operatorname{arctg} y_0).$$ Deci avem următoarea:

**Teoremă.** **Funcția arctangentă**, $f(x) = \operatorname{arctg} x$ **este derivabilă pe** $\mathbb{R}$ şi

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dacă $u$ este o funcție derivabilă, atunci $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$.

**Exemple. 1)** $f(x) = \operatorname{arctg} x^2$. **Avem:** $f'(x) = \frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2} = \frac{2x}{1+x^4}$.

**Dacă** $x = 0$. **atunci** $f'(0) = 0$, **iar pentru** $x = -1, f'(-1) = -1$.

**2)** $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}, x \neq -1$. **Avem:** $f'(x) = \frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)'}{1+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2} = \frac{1}{2x^2+2x+1}$.

**Pentru** $x = 0, f'(0) = 1$, **iar pentru** $x = 1, f'(1) = \frac{1}{5}$.

**Problemă propusă. Să se determine** $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ **astfel încât funcția**

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} a_1(x-2)^2 + b_1, x > 1 \\ x^2 \operatorname{arctg} x, |x| \le 1 \\ a_2(x+2)^2 + b_2, x < -1 \end{cases}$$ **să fie derivabilă.**

**5) Funcția arccotangentă.** Fie $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}, f(x)=\text{ctg}\, x$, o funcție continuă, bijectivă și $f'(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}\neq 0, \forall x\in(0,\pi)$. Funcția inversă este $f^{-1}:\mathbb{R}\to(0,\pi)$, $f^{-1}(y)=\text{arcctg}\, y$ și i se poate aplica teorema de derivare a funcției inverse. Vom utiliza însă relația $\text{arctg}\, x+\text{arcctg}\, x=\frac{\pi}{2}, \forall x\in\mathbb{R}$, care prin derivare dă $(\text{arcctg}\, x)'=-\frac{1}{1+x^2}$. Așadar avem următoarea :

**Teoremă**. **Funcția arccotangentă**, $f(x)=\text{arcctg}\, x$ **este derivabilă pe** $\mathbb{R}$ și în plus, $(\text{arcctg}\, x)'=-\frac{1}{1+x^2}\quad\forall x\in\mathbb{R}$.

Dacă $u$ este o funcție derivabilă, atunci $(\text{arcctg}\, u)'=-\frac{u'}{1+u^2}$.

Exemple. **1)** $f(x)=\text{arcctg}\left(x^2-3x\right)$. **Avem:** $f'(x)=-\frac{\left(x^2-3x\right)'}{1+\left(x^2-3x\right)^2}=-\frac{2x-3}{1+\left(x^2-3x\right)^2}$.

**Pentru** $x=0$ **se obține** $f'(0)=3$, **iar dacă** $x=1$, **avem** $f'(1)=\frac{1}{5}$.

**2)** $f(x)=\text{arcctg}\frac{1}{x}, x\neq 0$. **Atunci** $f'(x)=-\frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{1}{1+x^2}$.

**Pentru** $x=1, f'(1)=\frac{1}{2}$, **iar dacă** $x=-1$, **atunci** $f'(-1)=\frac{1}{2}$.

## 5. Derivata logaritmică

Pentru determinarea derivatei unei funcții este mai ușor să luăm, la început, logaritmul (natural) al acelei funcții și apoi să calculăm derivata.

**Derivata logaritmică a funcției** $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ **este derivata logaritmului acestei funcții**, adică $(\ln f(x))'=\frac{f'(x)}{f(x)}$.

Exemplu. **Ne propunem în continuare să găsim o formulă care să dea derivata funcției** $f:I\to\mathbb{R}, I$ **interval,** $f(x)=\left(u(x)\right)^{v(x)}, u,v:I\to\mathbb{R}$ **cu** $u(x)>0, \forall x\in I, u,v$ **derivabile.**
**Vom considera derivata logaritmică a funcției** $f$. **Prin logaritmare (în bază e) avem:**

$\ln f(x)=v(x)\cdot\ln u(x)$. De aici prin derivare se deduce: $\frac{f'(x)}{f(x)}=v'(x)\ln u(x)+v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}$ sau

$$f'(x)=f(x)\left[v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right]=(u(x))^{v(x)}\cdot v'(x)\cdot\ln u(x)+v(x)\cdot(u(x))^{v(x)-1}\cdot u'(x).$$

Renunţând la argumentul $x$, are loc formula

$$\left(u^{v}\right)'=u^{v}\cdot v'\cdot\ln u+v\cdot u^{v-1}u'.$$

Funcţia $u^{v}$ **se derivează** considerând întâi $u$ constant şi derivând ca o funcţie exponenţială, apoi considerând $v$ constant şi derivând ca o putere, şi se adună cele două derivate.

**Observaţie.** Formula de mai sus se poate deduce observând că $u^{v}=e^{v\ln u}$ şi apoi se derivează obţinând:

$$\left(u^{v}\right)'=e^{v\ln u}\cdot(v\ln u)'=u^{v}\cdot\left(v'\cdot\ln u+v\cdot\frac{u'}{u}\right)=u^{v}\cdot v'\cdot\ln u+v\cdot u^{v-1}\cdot u'.$$

**Exemplu.** $f(x)=x^{x+1}, x>0$. Avem: $f'(x)=\left(x^{x+1}\right)'=x^{x+1}(x+1)'\ln x+(x+1)x^{x}\cdot x'=$

$=x^{x+1}\cdot\ln x+(x+1)x^{x}=x^{x}(x\ln x+x+1)$.

Dacă $x=1$, atunci $f'(1)=2$, iar dacă $x=e$, avem $f'(e)=e^{e}(2e+1)$.

## Exerciţii propuse

Să se calculeze derivatele următoarelor funcţii, precizând $D_f$ şi $D_{f'}$ :

**I.** 1) $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$ ; 2) $f(x)=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ ; 3) $f(x)=\arcsin\frac{x^2-1}{x^2}$ ;

4) $f(x)=\arcsin\sqrt{1-4x}$ ; 5) $f(x)=\arcsin 2x\sqrt{1-x^2}$ ; 6) $f(x)=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

**II.** 1) $f(x)=\arccos\sqrt{x}$ ; 2) $f(x)=\arccos e^{x}$ ; 3) $f(x)=\arccos\frac{2x}{1+x^2}$ ; 4) $f(x)=\arccos\frac{1}{x-1}$ ;

5) $f(x)=\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$ ; 6) $f(x)=\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$.

**III.** 1) $f(x)=\operatorname{arctg}(\ln x)$ ;2) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$ ; 3) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1+x^2}{1-x^2}$ ; 4) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

**IV.** 1) $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ ; 2) $f(x)=x^{\sqrt{x}}$ ; 3) $f(x)=(\sin x)^{x}$ ; 4) $f(x)=x^{\sin x}$ ; 5) $f(x)=(\cos x)^{\sin x}$ ;

6) $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$.

După parcurgerea derivatelor funcţiilor elementare şi a unor funcţii compuse se impune sistematizarea lor sub forma tabelului următor.

## Tabel cu derivatele funcţiilor elementare

| Funcţia | Derivata | Domeniul de derivabilitate | Funcţia compusă | Derivata |
|---|---|---|---|---|
| $c$ (constantă) | $0$ | $\mathbb{R}$ | | |
| $x$ | $1$ | $\mathbb{R}$ | $u$ | $u'$ |
| $x^n \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ | $nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ | $u^n \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ | $n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ |
| $x^{\alpha} \left(\alpha \in \mathbb{R}\right)$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ | $D_{f'} \supseteq (0, \infty)$ | $u^{\alpha}$ ( $\alpha \in \mathbb{R}$ , $u > 0$ ) | $\alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$ |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ | $\mathbb{R}^*$ | $\frac{1}{u}(u \neq 0)$ | $-\frac{u'}{u^2}$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $(0, \infty)$ | $\sqrt{u}\,(u > 0)$ | $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $\mathbb{R}$ | $e^u$ | $e^u \cdot u'$ |
| $a^x, 0 < a \neq 1$ | $a^x \ln a$ | $\mathbb{R}$ | $a^u \left(0 < a \neq 1\right)$ | $a^u \ln a \cdot u'$ |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ | $(0, \infty)$ | $\ln u (u > 0)$ | $\frac{u'}{u}$ |
| $\log_a x, 0 < a \neq 1$ | $\frac{1}{x \ln a}$ | $(0, \infty)$ | $\log_a u (u > 0)$ | $\frac{u'}{u \ln a}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | $\mathbb{R}$ | $\sin u$ | $\cos u \cdot u'$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | $\mathbb{R}$ | $\cos u$ | $-\sin u \cdot u'$ |
| $\text{tg}\, x$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ | $\cos x \neq 0$ | $\text{tg}\, u (\cos u \neq 0)$ | $\frac{u'}{\cos^2 u}$ |
| $\text{ctg}\, x$ | $-\frac{1}{\sin^2 x}$ | $\sin x \neq 0$ | $\text{ctg}\, u (\sin u \neq 0)$ | $-\frac{u'}{\sin^2 u}$ |
| $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $(-1, 1)$ | $\arcsin u \left(\lvert u \rvert \leq 1\right)$ | $\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ |
| $\arccos x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $(-1, 1)$ | $\arccos u \left(\lvert u \rvert \leq 1\right)$ | $-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ |
| $\text{arctg}\, x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | $\mathbb{R}$ | $\text{arctg}\, u$ | $\frac{u'}{1+u^2}$ |
| $\text{arcctg}\, x$ | $-\frac{1}{1+x^2}$ | $\mathbb{R}$ | $\text{arcctg}\, u$ | $-\frac{u'}{1+u^2}$ |
| $\text{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (sinus hiperbolic) | $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch}\, x$ | $\mathbb{R}$ | $\text{sh}\, u$ | $\text{ch}\, u \cdot u'$ |
| $\text{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (cosinus hiperbolic) | $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{sh}\, x$ | $\mathbb{R}$ | $\text{ch}\, u$ | $\text{sh}\, u \cdot u'$ |

## 4.7. DERIVATE DE ORDIN SUPERIOR

**Derivate de ordin doi**

Fie $E \subseteq \mathbb{R}$, interval sau reuniune de intervale din $\mathbb{R}$ şi fie $f : E \to \mathbb{R}$ o funcţie.

**Definiţie.** Funcţia $f$ se numeşte **derivabilă de ordinul 1** dacă este derivabilă.

Funcţia $f' : E \to \mathbb{R}$ se numeşte **derivata de ordinul 1** a lui $f$.

Dacă $f$ este derivabilă, atunci $\forall x \in E, f'(x) \in \mathbb{R}$ şi deci se poate defini o funcţie $g : E \to \mathbb{R}, g(x) = f'(x)$ pe care am denumit-o derivata lui $f$.

**Definiţie.** Funcţia $f$ **este de două ori derivabilă în** $x_0 \in E$, dacă:

- $f$ este derivabilă într-o vecinătate a lui $x_0$;
- $f'$ este derivabilă în $x_0$.

În acest caz derivata lui $f'$ în $x_0$ se numeşte **derivata a doua** (sau de **ordinul doi**) a lui $f$ în punctul $x_0$ şi se notează $f''(x_0)$. Aşadar

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

**Definiţie**. Funcţia $f$ este de două ori derivabilă dacă $f'$ este derivabilă.
Funcţia $(f')' : E \to \mathbb{R}$ se numeşte **derivata de ordinul doi a lui** $f$.

În loc de $(f')'$ se scrie $f''$ sau $f^{(2)}$.

**Derivate de ordin $n(n \geq 3)$ (facultativ)**

Presupunem că printr-un procedeu oarecare am definit ce înseamnă „$f$ este derivabilă de ordinul $n$” şi „$f^{(n)}$ este derivata de ordinul $n$ a lui $f$”, unde $n \in \mathbb{N}$.

Prin convenţie derivata de ordinul zero $f^{(0)} = f$.

**Definiţie**. Fie $n \in \mathbb{N}$. Funcţia $f$ se numeşte **derivabilă de ordinul** $n+1$ dacă este derivabilă de ordinul $n$ şi dacă derivata sa de ordinul $n$, $f^{(n)}$ este derivabilă.

În acest caz $\left(f^{(n)}\right)'$ se notează $f^{(n+1)}$ şi se numeşte derivata de ordin $n+1$ a lui $f$.

Conform principiului inducției complete sunt definite conceptele: „$f$ este derivabilă de ordinul $n$” şi „$f^{(n)}$ este derivata de ordin $n$ a lui $f$”,pentru orice $n$.

**Definiție**. Funcția $f$ se numeşte **derivabilă de ordinul** $\infty$ sau încă funcție **infinit derivabilă** dacă este derivabilă de orice ordin $n, n \in \mathbb{N}$.

**Teoremă. Orice funcție elementară este infinit derivabilă.**

## Exerciții rezolvate

**1. Să se arate că funcțiile $f(x)=e^{2x}, g(x)=e^{3x}, x \in \mathbb{R}$ verifică egalitatea:**
**$f''(x)-5f'(x)+6f(x)=0, x \in \mathbb{R}$.**

**R. Pentru funcția $f$ avem $f'(x)=2e^{2x}, f''(x)=4e^{2x}, x \in \mathbb{R}$. Relația de demonstrat devine:**
**$4e^{2x}-10e^{2x}+6e^{2x}=0$, adevărată $\forall x \in \mathbb{R}$. Deci pentru $f$ se verifică relația. Analog se procedează cu $g$.**

**Observație. O astfel de ecuație ca aceea din enunț se numeşte ecuație diferențială de ordinul doi omogenă. Faptul că funcțiile $f, g$ verifică ecuația, înseamnă că aceste două funcții sunt soluții ale ecuației. Ca şi în cazul şirurilor recurente de ordinul doi şi aici se caută soluții de forma $f(x)=e^{rx}$, obținându-se ecuația în $r$: $r^2-5r+6=0$, numită ecuația caracteristică a ecuației diferențiale de ordinul doi omogenă. Dacă $r_1, r_2$ sunt rădăcinile acestei ecuații atunci soluția generală a ecuației diferențiale se poate pune sub una din formele:**

**1) $f(x)=\alpha e^{r_1x}+\beta e^{r_2x}$, dacă $r_1 \neq r_2$;**

**2) $f(x)=e^{r_1x}(\alpha+\beta x)$, dacă $r_1=r_2$;**

**3) $f(x)=e^{ax}(\alpha\cos bx+\beta\sin bx)$, dacă $r_1=a+ib, r_2=a-ib, b \neq 0$.**

**2. Să se rezolve ecuația $f''(x)=0$, unde $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$.**

**R. Avem $f'(x)=\dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}, f''(x)=\dfrac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}$. Deci $f''(x)=0$ implică $x_1=-\sqrt{3}, x_2=0, x_3=\sqrt{3}$.**

**3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=\begin{cases}\sin^2 x, x \le 0\\ x^2, x>0\end{cases}$. Să se arate că $f$ este de două ori derivabilă în $x_0=0$ şi să se calculeze $f''(0)$.**

**R. Să observăm că $f$ este continuă în $x_0=0$. Studiem dacă $f$ este derivabilă în $x_0=0$. Avem:**

$$f_s'(0)=\lim_{x\nearrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\nearrow 0}\frac{\sin^2 x}{x}=\lim_{x\nearrow 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x=1\cdot 0=0,$$

$$f_d'(0)=\lim_{x\searrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\searrow 0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\searrow 0}x=0.$$

**Cum $f_s'(0)=f_d'(0)=0\in\mathbb{R}$ rezultă că $f$ este derivabilă în $x_0=0$ şi $f'(0)=0$.**

Studiem dacă $f$ este de două ori derivabilă în $x_0 = 0$. Pentru aceasta calculăm $f'$, care este egală cu $f'(x) = \begin{cases} 2\sin x\cos x, x < 0 \\ 0, x = 0 \\ 2x, x > 0 \end{cases}$.

Avem: $f_s''(0) = \lim\limits_{x \nearrow 0} \dfrac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim\limits_{x \nearrow 0} \dfrac{2\sin x\cos x}{x} = 2$, $f_d''(0) = \lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{2x}{x} = 2$.

Din $f_s''(0) = f_d''(0) = 2 \in \mathbb{R}$ rezultă că $f$ este de două ori derivabilă în $x_0 = 0$ şi $f''(0) = 2$.

4. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + m, x \le 2 \\ -2x^2 + nx + p, x > 2 \end{cases}$.

Să se determine $m, n, p$ numere reale astfel încât $f$ să fie de două ori derivabilă în $x = 2$.

R. În general pentru a determina cei trei parametri avem nevoie de trei ecuaţii.
Iată cele trei condiţii care conduc la obţinerea ecuaţiilor.

1) Funcţia $f$ este continuă în $x = 2$ (fiind derivabilă în acest punct).

Condiţia se scrie

$$\lim_{x \nearrow 2} f(x) = \lim_{x \searrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \lim_{x \nearrow 2}\left(x^2 + 3x + m\right) = \lim_{x \searrow 2}\left(-2x^2 + nx + p\right) = 10 + m \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10 + m = -8 + 2n + p, \ (1).$$

2) Funcţia $f$ este derivabilă în $x = 2 \Leftrightarrow f_s'(2) = f_d'(2) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \nearrow 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} =$

$$= \lim_{x \searrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{x \nearrow 2} \frac{x^2 + 3x + m - (10 + m)}{x - 2} = \lim_{x \searrow 2} \frac{-2x^2 + nx + p - (10 + m)}{x - 2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$\lim\limits_{x \nearrow 2}(x + 5) = \lim\limits_{x \searrow 2}(-2x - 4 + n) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 7 = n - 8$. De aici $n = 15$.

3) Funcţia $f$ este de două ori derivabilă în $x = 2 \Leftrightarrow f_s''(2) = f_d''(2) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \nearrow 2} \dfrac{f'(x) - f'(2)}{x - 2} =$

$= \lim\limits_{x \searrow 2} \dfrac{f'(x) - f'(2)}{x - 2} \in \mathbb{R}$ unde $f'(x) = \begin{cases} 2x + 3, x < 2 \\ 7, x = 2 \\ -4x + n, x > 2 \end{cases}$.

Deci $\lim\limits_{x \nearrow 2} \dfrac{2x + 3 - 7}{x - 2} = \lim\limits_{x \searrow 2} \dfrac{-4x + n - 7}{x - 2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2 = \lim\limits_{x \searrow 2} \dfrac{-4x + n - 7}{x - 2}$, egalitate imposibilă, deoarece limita din dreapta este: $+\infty$ dacă $n > 15, -\infty$ dacă $n < 15$ şi $-4$ dacă $n = 15$.

Prin urmare nu există $m, n, p \in \mathbb{R}$, pentru care $f$ să fie de două ori derivabilă în $x = 2$.

5. Să se arate că pentru $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ au loc egalităţile:

1) $(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$ dacă $f$ şi $g$ sunt de două ori derivabile;

2) $(fg)''' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$ dacă $f, g$ sunt de trei ori derivabile şi în general:

3) $(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + C_n^1 f^{(n-1)}g' + C_n^2 f^{(n-2)}g'' + ... + C_n^{n-1} f' g^{(n-1)} + f \cdot g^{(n)}$, cunoscută sub denumirea de formula lui Leibniz.

Aplicaţii. Să se calculeze: a) $\left(x^2 \sin x\right)^{(20)}$; b) $\left(x^2 e^{3x}\right)^{(10)}$.

R. 1) Avem succesiv:

$(fg)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ şi

$(f \cdot g)'' = (f' \cdot g + f \cdot g')' = (f' \cdot g)' + (f \cdot g')' = f'' \cdot g + f' \cdot g' + f' \cdot g' + f \cdot g'' =$

$= f'' \cdot g + 2f' \cdot g' + f \cdot g'' = C_2^0 f'' \cdot g + C_2^1 f' \cdot g' + C_2^2 f \cdot g''$.

Analog

$(f\cdot g)''' = (f''\cdot g)' + (2f'\cdot g')' + (f\cdot g'')' = f'''\cdot g + f''\cdot g' + 2f''\cdot g' + 2f'\cdot g'' + f'\cdot g'' +$

$+ f\cdot g''' = f'''\cdot g + 3f''\cdot g' + 3f'\cdot g'' + f\cdot g''' = C_3^0 f'''\cdot g + C_3^1 f''\cdot g' + C_3^2 f'\cdot g'' + C_3^3 f\cdot g'''$.

**3) Se demonstrează prin inducție matematică.**

**a) Conform formulei lui Leibniz avem:**

$$\left(x^2\sin x\right)^{(20)} = C_{20}^0(\sin x)^{(20)}\cdot\left(x^2\right) + C_{20}^1(\sin x)^{(19)}\left(x^2\right)' + C_{20}^2(\sin x)^{(18)}\left(x^2\right)'' +$$

$$+ C_{20}^3(\sin x)^{(17)}\left(x^2\right)''' + \dots$$

**Dar** $\left(x^2\right)' = 2x, \left(x^2\right)'' = 2, \left(x^2\right)^{(n)} = 0, \forall n \geq 3$.

**Așadar** $\left(x^2\sin x\right)^{(20)} = x^2\sin x - 20(2x)\cos x - 380\sin x$ .

**b) Asemănător se găsește** $\left(x^2e^{3x}\right)^{(10)} = 3^9 e^{3x}\left(3x^2 + 20x + 30\right)$.

**6. a) Cu ajutorul egalității** $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}, x \neq 1$ **și derivării să se calculeze suma** $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$ .

**b) Să se stabilească egalitatea** $\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$.

**R. a) Membrul stâng al egalității date reprezintă suma unor termeni în progresie geometrică de rație** $x \neq 1$ **. Derivând acea egalitate, rezultă**

$$1 + 2x + \dots + nx^{n-1} = \left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)' \text{ sau } 1 + 2x + \dots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}, x \neq 1 .$$

**b) Se consideră dezvoltarea** $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^k x^k + \dots + C_n^n x^n, n \in \mathbb{N}^*$ **care derivată în raport cu variabila** $x$ **dă** $n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + \dots + kC_n^k x^{k-1} + \dots + nC_n^n x^{n-1}$.

**În această ultimă egalitate se face** $x = 1$ **și rezultă egalitatea propusă.**

**Observație. Dacă ultima egalitate s-ar fi derivat în raport cu** $x$ **și apoi se particulariza** $x = 1$ **, se obținea o nouă egalitate.**

**Dacă dezvoltarea binomială** $(1+x)^n$ **s-ar fi înmulțit cu** $x$ **și apoi se deriva s-ar fi obținut altă egalitate în care se particulariza** $x$ **. Am oferit cititorului câteva sugestii pentru a genera egalități interesante utilizând derivarea.**

**7. Să se determine ordinul de multiplicitate al rădăcinii** $x = 2$ **pentru ecuația** $f(x) = 0$ **unde** $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ .

**R. Se calculează derivatele:** $f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 21x^2 - 4x + 4, f''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 42x - 4$ ,

$f'''(x) = 60x^2 - 120x + 42, f^{(IV)}(x) = 120x - 120$ **și se constată că** $f(2) = f'(2) = f''(2) = 0$ **și** $f'''(2) \neq 0$ .

**8. Să se determine parametrii reali** $a, b$ **pentru ca ecuația** $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 18 = 0$ **, să aibă ca rădăcină dublă** $x = 3$ .

**R. Din** $f(3) = f'(3) = 0$ **rezultă sistemul** $3a + b = -15, 6a + b = -27$ **cu soluția** $a = -4, b = -3$ .

**9.** Fie funcția polinomială $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+5x^2-3x+1$. Să se determine $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ astfel încât: $f(x)=a+b(x-1)+c(x-1)^2+d(x-1)^3, x\in\mathbb{R}$.

**R.** În egalitate se face $x=1$ şi rezultă $a=4$. Se derivează egalitatea şi se obține $f'(x)=3x^2+10x-3=b+2c(x-1)+3d(x-1)^2, x\in\mathbb{R}$, (1).

În (1) se face $x=1$ şi avem $b=10$. Se derivează (1) şi găsim:

$6x+10=2c+6d(x-1), x\in\mathbb{R}$, (2).

În (2) punem $x=1$ când $c=8$. În fine derivând (2) avem:

$6=6d$, iar de aici $d=1$.

## Probleme propuse

**1.** Să se arate că funcția:

1) $f(x)=\alpha e^{2x}+\beta e^{3x}, \alpha,\beta\in\mathbb{R}, x\in\mathbb{R}$ verifică egalitatea $f''(x)-5f'(x)+6f(x)=0, x\in\mathbb{R}$;

2) $f(x)=xe^{2x}$ verifică egalitatea $f''(x)-4f'(x)+4f(x)=0, x\in\mathbb{R}$;

3) $f(x)=\alpha e^{2x}\cos 3x+\beta e^{2x}\sin 3x$ verifică egalitatea $f''(x)-4f'(x)+13f(x)=0, x\in\mathbb{R}$.

**2.** Să se rezolve ecuația $f''(x)=0$, în cazurile:

1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}, x\geq 0$; 2) $f(x)=x\ln x, x>0$; 3) $f(x)=(x^2-3x)e^{2x}, x\in\mathbb{R}$;

4) $f(x)=\ln(x^2+x), x\in(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$; 5) $f(x)=\operatorname{arctg} x, x\in\mathbb{R}$.

**3.** Să se arate că următoarele funcții sunt de două ori derivabile în punctul $x_0$ indicat în dreptul fiecărei funcții:

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x-1|^3, x_0=1$; 2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg} x, & x\geq 0\\ x^3+x, & x<0\end{cases}, x_0=0$.

**4.** Să se determine parametrii $a,b,c,$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, să fie de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$.

1) $f(x)=\begin{cases}2\sin x+\cos x, & x\geq 0\\ ax^2+bx+c, & x<0\end{cases}$; 2) $f(x)=\begin{cases}x^2+ax-2, & x<2\\ 4, & x=2\\ bx^2-2x+c, & x>2\end{cases}$; 3) $f(x)=\begin{cases}x^2+3x+a, & x\leq 2\\ -2x^2+bx+c, & x>2\end{cases}$.

**5.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2x^3+mx^2+8x+n, & x<0\\ 3, & x=0\\ x^2+px+q, & x>0\end{cases}$.

Să se determine $m,n,p,q$ numere reale astfel încât $f$ să fie de două ori derivabilă în $x_0=0$.

**6.** Să se determine funcția polinomială de grad minim $P(x)$ pentru care funcția

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}P(x), & |x|<1\\ \ln|x|, & |x|\geq 1\end{cases}$ este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$;

2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}P(x), & x<0\\ e^{-x}, & x\geq 0\end{cases}$ este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$;

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{5x}{4+x^2}, & |x|\geq 1\\ P(x), & |x|<1\end{cases}$ este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$.

**7.** Să se arate că funcțiile următoare verifică (pe domeniile definiție respective) identitățile scrise în dreptul fiecăreia:

1) $f(x)=e^{2x}(1+x)+x^2+2x, x\in\mathbb{R}$ ; $f''(x)-4f'(x)+4f(x)=4x^2-6, x\in\mathbb{R}$ ;

2) $f(x)=e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}, x>0$ ; $4xf''(x)+2f'(x)-f(x)=0, x>0$ .

**8.** a) Să se calculeze derivatele de ordinul doi pentru funcțiile:

1) $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{1+x}$ ; 2) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x\ln x$ ;

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=xe^{x^2}$ ; 4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=xe^{2x}$ ;

5) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x^2+1)\operatorname{arctg} x$ ; 6) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin^2 x$ ; 7) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x\sin x$ ;

b) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă pentru care $x^3-2x^2f^2(x)+5x-f(x)-5=0, x\geq 1$ . Să se determine $f''(1)$ dacă $f(1)<0$ .

**9.** 1) Să se determine funcția polinomială $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, P(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0$ pentru care $P''(x)=3, P'(0)=P(0)$ și $P(2)=1$ .

2) Să se determine funcția polinomială $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, P(x)=ax^3$ cu proprietatea $P(2x)=P'(x)P''(x)$ .

3) Să se determine funcția polinomială $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea: $P(x^2)=P'(x^2)P''(x), \forall x\in\mathbb{R}$ .

**10.** Utilizând derivarea să se calculeze:

1) $x+2^2x^2+...+n^2x^n, x\neq 1$ ; 2) $x+3x^3+5x^5+...+(2n+1)x^{2n+1}, x\neq 1$ ; 3) $\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k$ .

**11.** Să se determine ordinul de multiplicitate pentru fiecare din rădăcinile scrise în dreptul ecuațiilor:

a) $x^6-7x^5+15x^4-40x^2+48x-16=0, x=2$ ;

b) $x^4+4x^3-2x^2-12x+9=0, x=1$ ;

c) $2x^5-x^4-7x^3+7x^2+x-2=0, x=1$ ;

d) $x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3=0, x=-1$ ;

e) $6x^5-35x^4+60x^3-80x+48=0, x=2$ .

**12.** Fie ecuația $x^4-10x^3+36x^2+4mx-3n=0, m,n\in\mathbb{R}$ . Să se determine parametrii reali $m,n$ astfel încât ecuația dată să aibă o rădăcină triplă.

**13.** Fie funcția polinomială $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+5x^2-3x+1$ . Să se determine $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=a+b(x-1)+c(x-1)^2+d(x-1)^3, \forall x\in\mathbb{R}$ .

## Teste de evaluare

### Testul 1 (1 punct din oficiu)

**1.** a) Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^2+5}, \forall x\in\mathbb{R}$ . Să se arate că $f$ are derivată în $x_0=2$ și să se calculeze $f'(2)$ . (1 punct)

b) Să se arate că punctul $(1,0)$ este punct unghiular al funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x|x-1|, \forall x\in\mathbb{R}$ . (1 punct)

**2. a) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-x, \forall x\in\mathbb{R}$, în punctul $(2, f(2))$. (1 punct)**

**b) Construiți o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care să fie continuă pe $\mathbb{R}$, derivabilă pe $\mathbb{R}-\{0;1\}$ și nederivabilă pe $\{0;1\}$. (1 punct)**

**3. Să se determine parametrii reali $m, n, p$ astfel încât funcția**

**$f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x^2+mx+p, x\in[-1,0) \\ nx^2+4x+1, x\in[0,1]\end{cases}$ să fie continuă pe $[-1,1]$, derivabilă pe $(-1,1)$ și $f(-1)=f(1)$. (2 puncte)**

**4. Să se studieze derivabilitatea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\max\{1, x^2, x^3\}, x\in\mathbb{R}$. (1 punct)**

**5. a) Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea $|f(x)-x|\le x\operatorname{arctg} x, \forall x\in\mathbb{R}$. Să se arate că $f$ este derivabilă în $x_0=0$ și $f'(0)=1$. (1 punct)**

**b) Să se determine numerele reale $a, b, c$ astfel încât funcția $F:\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{3-2x}, \forall x<\frac{3}{2}$ să aibă proprietatea $F'(x)=f(x), \forall x<\frac{3}{2}$, unde $f:\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)\to\mathbb{R}, f(x)=x\sqrt{3-2x}$. (1 punct)**

## Testul 2 (1 punct din oficiu)

**1. a) Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-x^2+x+5$. Să se arate că $f$ este derivabilă în $x_0=-1$ și să se scrie ecuația tangentei în punctul $(-1,2)$. (1 punct)**

**b) Să se determine funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+ax+b$, știind că graficul său trece prin punctul $(1,3)$, iar tangenta la graficul funcției în acest punct este paralelă cu prima bisectoare. (1 punct)**

**2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dată prin relația $f(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+bx+c, x<1 \\ \operatorname{arctg}(x-1), x\ge 1\end{cases}$. Știind că $f$ este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$, să se determine $a, b, c\in\mathbb{R}$. (1 punct)**

**3. Fie $f:(1,\infty)\to(-2,\infty), f(x)=x^3-3x$. Să se arate că $f$ este inversabilă și să se calculeze $\left(f^{-1}\right)'(2)$. (2 puncte)**

**4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2, x>0 \\ 0, x\le 0\end{cases}$. Să se studieze derivabilitatea lui $f$ și să se determine punctele unde tangenta la grafic trece prin origine. (1 punct)**

**5. a) Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}$. Să se arate că: $xf''(x)+\frac{1}{2}f'(x)-\frac{1}{4}f(x)=0$. (1 punct)**

**b) Să se calculeze derivata de ordinul 2 a funcției $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln(1-x^2)$. (2 puncte)**

**Testul 3 (tip grilă) (1 punct din oficiu)**

**1. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$. Atunci $f'(1)$ este egal cu:**

**a) $\dfrac{3}{4\sqrt{2}}$; b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; c) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$; d) $0$; e) $\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$. (1 punct)**

**2. Să se determine parametrii reali $m$ şi $n$ astfel încât graficele funcțiilor $f(x)=mx^2+nx+2$, $g(x)=1-\dfrac{1}{x}$ să aibă tangentă comună în punctul de abscisă $x=1$. a) $m=1, n=-1$; b) $m=3, n=-5$; c) $m=-3, n=5$; d) $m=0, n=4$; e) $m=n=1$. (1 punct)**

**3. Dacă $f$ este o funcție polinomială cu proprietatea $(f'(x))^5=(f(x))^4, \forall x\in\mathbb{R}$, atunci gradul lui $f$ este egal cu:**
**a) unu; b) doi; c) trei; d) patru; e) cinci. (1 punct)**

**4. Fie funcția $f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{1-x}$. Atunci $f''(0)$ este egal cu:**
**a) $1$; b) $2$; c) $4$; d) $3$; e) $-2$. (1 punct)**

**5. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, x<0\\ x^2+ax+b, x\ge 0\end{cases}$. Atunci $f$ este derivabilă dacă:**

**a) $a=b=1$; b) $a=\dfrac{1}{2}, b=-2$; c) $a=-\dfrac{1}{2}, b=2$; d) $a=\dfrac{1}{3}, b=0$; e) $a=\dfrac{1}{2}, b=1$. (1 punct)**

## 4.8. STUDIUL FUNCȚIILOR CU AJUTORUL DERIVATELOR. ROLUL DERIVATEI ÎNTÂI

În paragrafele precedente am prezentat regulile de calcul privind derivatele, iar în paragrafele următoare vom studia proprietățile remarcabile pe care le au funcțiile derivabile definite pe un interval.
În particular vom demonstra teoremele lui Fermat şi Lagrange, care sunt, fără îndoială,unele din teoremele cele mai utile şi cele mai întrebuințate ale calculului diferențial aşa cum veți avea ocazia să constatați.

### 1. Puncte de extrem ale unei funcții

Fie funcția $f:E\to\mathbb{R}, E$ interval sau reuniune de intervale.

**Definiție.** Un punct $a\in E$ se numeşte **punct de maxim local** al funcției $f$ dacă există o vecinătate $V$ a lui $a$, în care funcția are valori mai mici decât în $a$, adică

$$f(x)\le f(a), \forall x\in V\cap E.$$

Dacă $a$ este un punct de maxim local al lui $f$, atunci numărul $f(a)$ se numeşte **maxim** al lui $f$, iar punctul $(a, f(a))$ de pe grafic se numeşte **punct de maxim local al graficului.**

În Fig. 16 a), b) este ilustrat faptul că $x = a$ este punct de maxim local al funcției $f$.

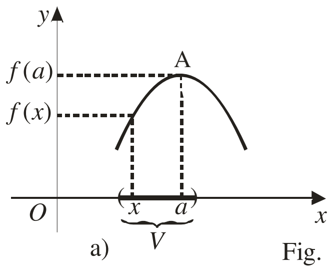
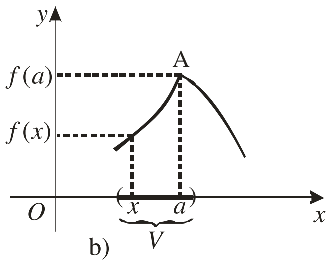



Fig. 16



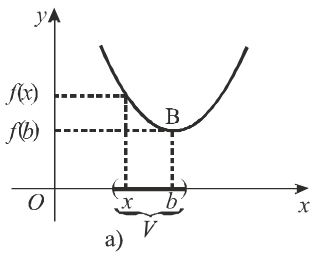

**Observație.** Utilizarea adjectivului „local" pentru un punct de maxim este motivată de faptul că inegalitatea $f(x) \leq f(a)$ **are loc pe o anume vecinătate** $V$ **a punctului** $a$**.**

**Definiție.** Un punct $b \in E$ se numește **punct de minim local** pentru funcția $f$ dacă există o vecinătate $V$ a lui $b$, în care funcția are valori mai mari decât în $b$, adică

$$f(b) \leq f(x), \forall x \in V \cap E.$$

Dacă $b$ este un punct de minim local al lui $f$, atunci numărul $f(b)$ se numește **minim** al lui $f$, iar punctul $(b, f(b))$ de pe grafic se numește **punct de minim local al graficului.**

În Fig. 17 a), b) este ilustrat faptul că $x = b$ este punct de minim local al lui $f$.



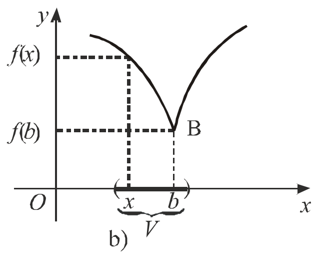




Fig. 17

**Definiție.** Un **punct de minim local** sau **maxim local** pentru o funcție $f$ se numește **punct de extrem local** al funcției. Valorile funcției în punctele sale de extrem, maximele și minimele funcției, se numesc **extremele locale ale funcției**. Punctele de maxim și de minim local ale graficului se numesc **puncte de extrem local ale graficului**.

**Definiție.** Un punct $x_0 \in E$ se numește **punct de maxim absolut** al funcției $f$ dacă $f(x) \le f(x_0), \forall x \in E$.

**Observații. 1)** Să remarcăm că $x_0 \in E$ este punct de maxim absolut pentru $f$ dacă valorile funcției **pe domeniul de definiție** sunt cel mult egale cu valoarea funcției în $x_0$.

**2)** Evident, orice punct de maxim absolut este și punct de maxim local dar, în general, nu și reciproc.

**3)** O funcție poate avea mai multe puncte de maxim absolut ($x_0, x_1$ în Fig.18).

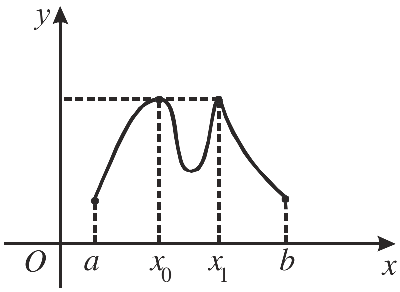


Fig. 18

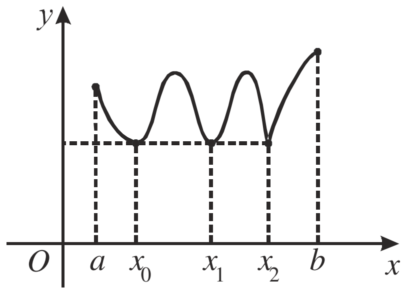


Fig. 19

**Definiție.** Un punct $x_0 \in E$ se numește **punct de minim absolut** al funcției $f$ dacă $f(x) \ge f(x_0), \forall x \in E$.

**Observații. 1)** Un punct este minim absolut pentru $f$ dacă valorile funcției pe **domeniul de definiție** sunt cel puțin egale cu valoarea funcției în $x_0$.

**2)** Orice punct de minim absolut este și punct de minim local, dar, în general, nu și reciproc.

**3)** O funcție poate avea mai multe puncte de minim absolut ($x_0, x_1, x_2$ în Fig.19).

**Definiție.** Un **punct de maxim absolut** sau **de minim absolut** se numește **punct de extrem absolut.**

**Observație.** Dacă o funcție $f$ este continuă pe un interval închis $[a,b]$ și își atinge valoarea maximă (minimă) într-un punct $c \in (a,b)$, atunci $c$ este în același timp un punct de maxim (minim) local al lui $f$.

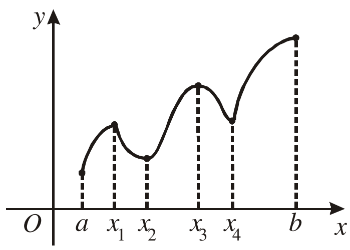


Fig. 20

Figura 20 ilustrează graficul unei funcții continue pe intervalul $[a,b]$. Punctele $x_2, x_4$ sunt puncte

de minim local ale lui $f$ , iar $x_1, x_3$ sunt puncte de maxim local ale lui $f$ .
Se observă că o valoare maximă locală $f(x_1)$ poate fi mai mică decât o valoare minimă locală $f(x_4)$.

## 2. Teorema lui Fermat

Un rezultat remarcabil pentru o funcție derivabilă într-un punct de extrem este formulat în:

**Teorema (Fermat *).** Fie $f : E \to \mathbb{R}, E$ **interval** iar $x_0$ un **punct de extrem din interiorul intervalului.** Dacă funcția $f$ este derivabilă în $x_0$, atunci $f'(x_0) = 0$.

**Demonstrație.** Putem presupune că $x_0$ este un punct de maxim local (În caz contrar înlocuim $f$ cu $-f$ ). Prin urmare există o vecinătate $V \in V(x_0)$ şi deci un număr $\varepsilon > 0$ astfel încât $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset V \cap E$ pentru care $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Fie $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$.

Atunci $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ (deoarece $f(x) \leq f(x_0), x < x_0$).

Cum $f$ este derivabilă în $x_0$, există: $\lim\limits_{x \nearrow x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ şi în plus, de mai sus, $f'(x_0) \geq 0$. (1)

Acum luăm $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ pentru care $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$.

Raționând ca mai sus deducem $\lim\limits_{x \searrow x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \leq 0$ (2).

Din (1) şi (2) rezultă $f'(x_0) = 0$, ceea ce trebuia demonstrat. ■

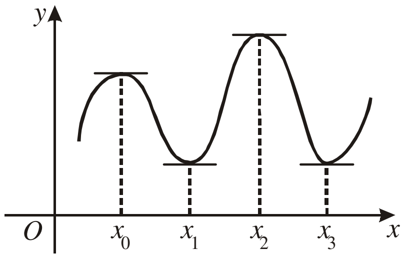


Fig. 21

**Interpretare geometrică**. Din $f'(x_0) = 0$, rezultă că tangenta la grafic în punctul $(x_0, f(x_0))$ este paralelă cu axa $Ox$ (Fig.21).
Teorema lui Fermat spune că: graficul unei funcții derivabile are tangentă paralelă cu axa

* Fermat, Pierre de (1601-1665) – matematician francez.

$Ox$ în **punctele sale de extrem** (de maxim sau de minim) care **nu coincid cu extremitățile graficului.**

**Observații. 1)** Teorema lui Fermat are un caracter local, vizând comportarea funcției în vecinătatea unui punct fixat. Să observăm că $f'(x_0)$ poate fi zero şi pentru $x_0$ punct de inflexiune !

**2)** Dacă punctul $x_0 \in E$ n-ar fi din **interiorul intervalului**, atunci concluzia teoremei lui Fermat nu mai este adevărată. Este suficient să considerăm funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=x$ pentru care $f'(x)=1, \forall x\in[0,1]$.

**3)** Reciproca teoremei lui Fermat, în general, nu este adevărată, adică derivata unei funcții se poate anula într-un punct, fără ca acesta să fie punct de extrem.

De exemplu funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3$ pentru care $f'(x)=3x^2$ şi deci $f'(0)=0$, dar $x_0=0$ nu este punct de extrem pentru $f$ (este punct de inflexiune).

**4)** Un punct $x_0\in E$ poate fi punct de extrem pentru $f$ fără să existe $f'(x_0)$.

Aşa este funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x|$, pentru care $x_0=0$ este punct de minim, dar ştim că $f$ nu este derivabilă în $x_0=0$ (deci condiția ca $f$ să fie derivabilă în $x_0$ nu este condiție necesară ca $x_0$ să fie punct de extrem).

Aşadar dacă $f:E\to\mathbb{R}$ continuă pe intervalul $E$, $f$ are extrem în punctul interior $x_0$, atunci fie derivata lui $f$ în $x_0$ nu există, fie $f'(x_0)=0$.

**5)** Dacă $f:E\to\mathbb{R}$ este o **funcție derivabilă** pe un interval deschis $E$, atunci zerourile derivatei $f'$ sunt numite **puncte critice** ale lui $f$ pe $E$.

Valoarea funcției într-un punct critic se numeşte **valoare staționară**, deoarece viteza de schimbare a lui $f$ relativ la $x$ este zero, $f'(x_0)=0$, iar $(x_0, f(x_0))$ este **punct staționar**.

Natura punctelor staționare poate fi determinată prin precizarea semnului derivatei la stânga şi la dreapta punctului (Fig. 22).

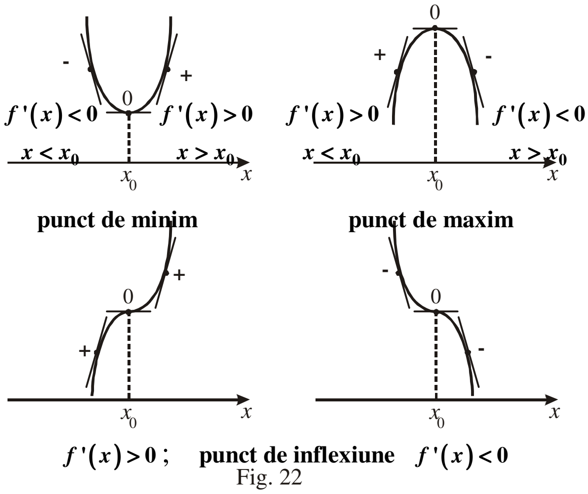



Fig. 22

Să reținem că: **1) valorile extreme ale unei funcții $f:[a,b]\to\mathbb{R}, f$ derivabilă, se pot obține la capetele intervalului sau în puncte critice din interiorul intervalului.**
**2) dacă $f$ are punct de întoarcere sau unghiular, acesta este punct de extrem (într-un astfel de punct $f$ nu este derivabilă).**

Teorema lui Fermat afirmă că punctele de extrem local ale **unei funcții derivabile** $f$ sunt printre punctele critice, adică punctele de extrem local ale lui $f$ sunt printre soluțiile ecuației $f'(x)=0$.

## Exerciții rezolvate

**1. Dacă $a,b>0, a^x+b^x\geq 2, \forall x\in\mathbb{R}$, atunci $ab=1$.**

**R. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=a^x+b^x$, pentru care $f(0)=2$. Cum din ipoteză $f(x)\geq f(0), \forall x\in\mathbb{R}$ se deduce că $x_0=0$ este un punct de minim pentru $f$ și $0\in\mathbb{R}$. Conform teoremei lui Fermat rezultă $f'(0)=0$. Dar $f'(x)=a^x\ln a+b^x\ln b$. Așadar $\ln a+\ln b=0$ sau $\ln(ab)=0$, adică $ab=1$.**

**Observație. Ce se întâmplă dacă inegalitatea are loc $\forall x\in\mathbb{Q}$?**

**2. Să se arate că există cel puțin un număr real $a>0$ cu proprietatea că:**

**1) $a^x\geq x+1, \forall x\in\mathbb{R}$; 2) $\ln x\geq a\cdot\dfrac{x-1}{x}, \forall x>0$.**

**R. 1) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=a^x-x-1$. Din ipoteză $f(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$. Cum $f(0)=0$ se deduce că $x_0=0$ este punct de minim pentru $f$. Aplicând teorema lui Fermat rezultă $f'(0)=0$. Dar $f'(x)=a^x\ln a-1$ și deci $\ln a-1=0$ adică $a=e$. Așadar $a=e$ este numărul căutat.**

**Observație. Se arată că $a=e$ este singurul număr real ce verifică inegalitatea.**

**2) $x=1$ punct de minim; $a=1$.**

**3. Să se determine valoarea parametrului $a>0$, astfel încât să fie valabilă inegalitatea $2^x+a^x\geq 3^x+4^x, \forall x\in\mathbb{R}$.**

**R. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2^x+a^x-3^x-4^x$. Inegalitatea din enunț se scrie $f(x)\geq 0=f(0), \forall x\in\mathbb{R}$, ceea ce arată că $x=0$ este un punct de minim al funcției $f$. Conform teoremei lui Fermat se deduce că $f'(0)=0$, unde $f'(x)=2^x\ln 2+a^x\ln a-3^x\ln 3-4^x\ln 4$, cu $a>0, a\neq 1$. Din $f'(0)=0$ rezultă $\ln 2+\ln a-\ln 3-\ln 4=0$ sau $\ln 2a=\ln 12$, iar de aici $a=6$. Dacă $a=6$, inegalitatea se scrie $2^x+6^x-3^x-4^x=(1-2^x)(2^x-3^x)\geq 0$ și este adevărată deoarece dacă $x\geq 0$, atunci $1-2^x\leq 0, 2^x-3^x\leq 0$, iar pentru $x<0$ avem $1-2^x>0, 2^x-3^x>0$.**

**Dacă $a=1$, atunci inegalitatea nu se verifică pentru $x=2$.**

## Exerciții propuse

**1.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x_0\in\mathbb{R}$ un punct fixat. Arătați că $x_0$ este punct de extrem pentru $f$ în cazurile:

1) $f(x)=x^2-2x, x_0=1$, punct de minim; 2) $f(x)=-x^2+4x, x_0=2$ punct de maxim;

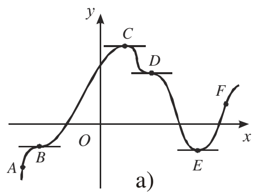
3) $f(x)=x^3+3x^2, x_0=-2$, punct de maxim, $x_0=0$, punct de minim; 4) $f(x)=x^4-4x^3+4x^2$, $x_0=0, x_0=1$, puncte de minim, $x_0=1$ punct de maxim; 5) $f(x)=\sin x-\sin^2 x, x_0=\frac{\pi}{6}$, punct de maxim, $x_0=\frac{\pi}{2}$ este punct de minim.

**2.** Determinați punctele critice ale funcției $f:E\to\mathbb{R}$, în cazurile:

1) $f(x)=x^2-3x+2$; 2) $f(x)=-x^2+6x$; 3) $f(x)=x^3+3x$; 4) $f(x)=\frac{1}{x(x-1)}$;

5) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$; 6) $f(x)=x^2e^x$; 7) $f(x)=x-\ln x$; 8) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$; 9) $f(x)=\frac{\cos x}{\cos 2x}$;

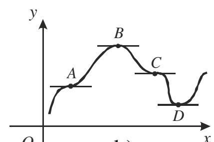
10) $f(x)=\frac{x}{2}-\operatorname{arctg} x$.



a)

**3.** Pentru „trenulețul groazei” curba pe care o descrie este cea din fig. a). Precizați punctele de extrem și punctele de inflexiune. După senzațiile trăite puteți preciza când vă aflați în fiecare din aceste puncte ? Aceeași întrebare pentru un automobilist care se află pe traseul din fig. b).

**4.** Dacă $a,b,c>0, a^x+b^x+c^x\geq 3, \forall x\in\mathbb{R}$, atunci $abc=1$.
Generalizare.



b)

**5.** Dacă $a_i>0, i=\overline{1,n}, \sum_{i=1}^{n} a_i^x \geq \sum_{i=1}^{n} a_i, \forall x\in\mathbb{R}$, atunci $\prod_{i=1}^{n} a_i^{a_i}=1$.

**6.** Fie $a,b>0, a^x-b^x\geq x, \forall x\in\mathbb{R}$. Să se arate că $a=be$ și $b\geq 1$.

**7.** Să se arate că există cel puțin un număr real $a>0$ cu proprietatea $a^x\geq x^a, \forall x>0$.

**8.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât: $(1+x)^n\geq 1+ax, \forall x>-1$ ($n\in\mathbb{N}$ - fixat).

## 3. Teorema lui Lagrange

Această teoremă este o generalizare simplă a teoremei lui Rolle în care funcția $f$ nu mai ia obligatoriu valori egale la capetele $a,b$ ale intervalului considerat.
Mai precis are loc următoarea

**Teorema (lui Lagrange *).**
Fie o funcție $f:[a,b]\to\mathbb{R}, a,b\in\mathbb{R}, a<b$.
Dacă: 1) $f$ este **continuă pe intervalul închis** $[a,b]$;
2) $f$ este **derivabilă pe intervalul deschis** $(a,b)$, atunci există cel puțin un punct $c$ din intervalul deschis $(a,b)$, $c\in(a,b)$ pentru care
$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$.

---
***Lagrange, Joseph Louis (1736-1813) – faimos matematician francez**

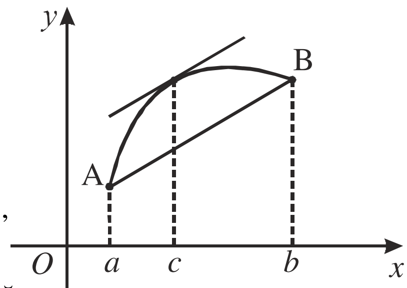



Fig. 23

**Interpretarea geometrică.** Scrisă formula lui Lagrange sub forma $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$, această formulă exprimă faptul că există pe graficul funcției $f$ cel puțin un punct $(c, f(c))$, diferit de extremități, în care panta tangentei $(f'(c))$ să fie egală cu panta coardei determinată de punctele $A(a, f(a)), B(b, f(b))$, ceea ce înseamnă că această tangentă este paralelă cu coarda $AB$ (Fig. 23).

**Interpretarea fizică.** Presupunem că $x$ este timpul și $f(x)$ este coordonata unui punct, care se mișcă pe o dreaptă, la momentul $x$. Expresia $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ reprezintă viteza medie a mișcării punctului în intervalul de timp de la $a$ la $b$. Formula lui Lagrange arată că există un moment $x=c$ în care viteza instantanee este egală cu viteza medie în intervalul de timp $[a,b]$. Dacă $f$ este o funcție care verifică ipotezele teoremei lui Lagrange și în plus $f(a)=f(b)$ ($f$ are valori egale la capetele intervalului), atunci există $c\in(a,b)$ astfel încât $f'(c)=0$ (Teorema lui Rolle).

## Exerciții rezolvate

**1. Să se aplice teorema lui Lagrange funcției $f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2x-1}{x+5}$.**

**R. Funcția $f$ este continuă pe $[-1,1]$ (ca funcție elementară – rațională), derivabilă pe $(-1,1)$ (ca funcție elementară). Conform teoremei lui Lagrange există $c\in(-1,1)$ astfel încât**

**$f(1)-f(-1)=2f'(c)$, unde $f'(x)=\frac{11}{(x+5)^2}$. Deci $\frac{1}{6}+\frac{3}{4}=\frac{22}{(c+5)^2}$, ecuație ce are soluțiile**

**$c_{1,2}=-5\pm2\sqrt{6}$. Cum $c\in(-1,1)$ se reține doar valoarea $c=-5+2\sqrt{6}$.**

**2. Să se determine abscisa unui punct $c$ în care tangenta la graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,**

**$f(x)=\begin{cases}\frac{x+2}{2}, x\le 0\\ \sqrt{x+1}, x>0\end{cases}$, să fie paralelă la coarda care unește punctele de abscise $x_1=-4, x_2=3$.**

**R. Având în vedere interpretarea geometrică a teoremei lui Lagrange, problema revine la a aplica teorema lui Lagrange funcției $f$ pe $[-4,3]$.**

**Să remarcăm că $f$ este continuă pe $[-4,0)$ ca funcție rațională și pe $(0,3]$ este compunere de funcții continue. Din $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)=\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)=f(0)\Leftrightarrow 1=1$ se deduce că $f$ este continuă și $x=0$.**

**Prin urmare $f$ este continuă pe $[-4,3]$. Funcția $f$ este derivabilă pe $(-4,3)-\{0\}$ (ca funcție**

elementară şi compunere de funcţii elementare). Din

$$f_s'(0)=f_d'(0)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \lim_{x\nearrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\searrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \lim_{x\nearrow 0}\frac{\frac{x+2}{2}-1}{x}=$$

$= \lim_{x\searrow 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, se deduce că $f$ este derivabilă şi în $x=0$.

Deci $f$ este derivabilă pe $(-4,3)$.

Aplicând teorema lui Lagrange, există $c\in(-4,3)$ astfel încât $f(3)-f(-4)=7f'(c)$, unde

$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, x\in(-4,0)\\ \frac{1}{2\sqrt{x+1}}, x\in(0,3)\end{cases}$ şi deci $2+1=7f'(c)$. Este clar că $c\notin(-4,0)$, căci $3\neq\frac{7}{2}$.

Atunci $c\in(0,3)$ când formula lui Lagrange se scrie $3=\frac{7}{2\sqrt{c+1}}$.

De aici $c=\frac{13}{36}\in(0,3)$.

3. Să se arate că $\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\frac{5\pi}{18}<\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{36}$.

R. Valoarea $\frac{\sqrt{2}}{2}$ provine din $\sin\frac{\pi}{4}$ şi inegalitatea de demonstrat se aduce la forma:

$0<\sin\frac{5\pi}{18}-\sin\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{36}$, care sugerează considerarea funcţiei $f:\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{18}\right]\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x$

(continuă pe domeniul de definiţie, derivabilă pe $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{18}\right)$) căreia i se aplică formula lui Lagrange.

Deci există $c\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{18}\right)$ astfel încât $\sin\frac{5\pi}{18}-\sin\frac{\pi}{4}=\left(\frac{5\pi}{18}-\frac{\pi}{4}\right)\cos c$ sau $\sin\frac{5\pi}{18}-\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{36}\cos c$. Cum

$c\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ avem $\cos c\in(0,1)$ şi deci inegalitatea dorită are loc.

4. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţiei $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}e^x, x\in[-1,0]\\ ax+b, x\in(0,1]\end{cases}$ să i se poată aplica teorema lui Lagrange şi să aplice efectiv teorema.

R. Să verificăm cerinţele din teoremă.

1) Continuitatea funcţiei $f$ pe $[-1,1]$. Funcţia $f$ este continuă pe $[-1,0)$, $(0,1]$ deoarece este definită prin intermadiul unor funcţii elementare, exponenţială şi respectiv polinomială. Pentru ca $f$ să fie continuă pe $[-1,1]$ impunem ca $f$ să fie continuă şi în $x=0$. Avem: $f$ este continuă în $x=0\Leftrightarrow \lim_{x\nearrow 0}f(x)=\lim_{x\searrow 0}f(x)=f(0)\Leftrightarrow 1=b$.

2) Derivabilitatea funcţiei $f$ pe $(-1,1)$. Funcţia $f$ este derivabilă pe $(-1,1)-\{0\}$, deoarece $f$ este definită cu ajutorul unor funcţii elementare.

Ca $f$ să fie derivabilă pe $(-1,1)$, aceasta trebuie să fie derivabilă şi în $x=0$ ceea ce conduce la

$f_s'(0)=f_d'(0)\in\mathbb{R}$, adică: $\lim_{x\nearrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\searrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim_{x\nearrow 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\searrow 0}\frac{ax+1-1}{x}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 1=a$.

Deci dacă $a=b=1$, condițiile din teorema lui Lagrange sunt validate și prin urmare există $c\in(-1,1)$ astfel încât $f(1)-f(-1)=2f'(c)$ sau $2-\frac{1}{e}=2f'(c)$. Pe intervalul $(-1,0)$, $f'(c)=e^c$ și deci $2-\frac{1}{e}=2e^c$ conduce la $c=\ln\frac{2e-1}{2e}\in(-1,0)$. Pe intervalul $(0,1)$, $f'(c)=1$ și formula lui Lagrange devine $2-\frac{1}{e}=2$, fals.

5. Folosind teorema lui Lagrange să se determine rădăcinile ecuației $3^x+4^x=2^x+5^x$.

R. Dacă se scrie ecuația sub forma $3^x-2^x=5^x-4^x$, atunci se sugerează considerarea funcției $f(t)=t^x$, căreia i se aplică (!) formula lui Lagrange pe intervalele $[2,3],[4,5]$. Deci există $c_1\in(2,3)$, $c_2\in(4,5)$ astfel încât $3^x-2^x=xc_1^{x-1}$ și respectiv $5^x-4^x=xc_2^{x-1}$. Ecuația se scrie $x\left(c_1^{x-1}-c_2^{x-1}\right)=0$. De aici $x_1=0$ sau $c_1^{x-1}=c_2^{x-1}$ cu soluția $x_2=1$.

Așadar soluțiile ecuației date sunt: $x_1=0, x_2=1$.

6. Aplicând formula lui Lagrange funcției $f(x)=\ln x$ pe intervalul $[n,n+1]$, $n\in\mathbb{N}^*$ să se demonstreze că șirul cu termenul general $a_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln n$ este convergent și limita sa este cuprinsă între $0$ și $1$.

R. Pe intervalul $[k,k+1], k\in\mathbb{N}^*$, funcția $f(x)=\ln x$ este continuă, iar pe intervalul $(k,k+1)$ este derivabilă. Deci în virtutea teoremei lui Lagrange există $c_k\in(k,k+1)$ astfel încât $f(k+1)-f(k)=\frac{1}{c_k}$ sau $\ln(k+1)-\ln k=\frac{1}{c_k}$, iar de aici $\frac{1}{k+1}<\ln(k+1)-\ln k=\frac{1}{c_k}<\frac{1}{k}$, deoarece $k<c_k<k+1$.

Punând aici $k=1,2,...,n$ avem inegalitățile

$$\frac{1}{2}<\ln 2-\ln 1<1$$

$$\frac{1}{3}<\ln 3-\ln 2<\frac{1}{2}$$

............................

$$\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n},$$

care adunate, membru cu membru, dau

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}. \quad (1)$$

Acum $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)+\frac{1}{n+1}<0$, deoarece $\frac{1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>e$, care este adevărată . Prin urmare $a_{n+1}<a_n, \forall n\geq 1$, ceea ce arată că șirul $(a_n)$ este strict descrescător. Vom arăta acum mărginirea șirului. Din prima inegalitate din (1) rezultă $a_{n+1}<1$, iar din a doua inegalitate din (1), $a_n>\ln(n+1)-\ln(n)>0$.

Deci $a_n\in(0,1),\forall n$. Conform teoremei lui Weierstrass șirul $(a_n)$ este convergent și $\lim_{n\to\infty}a_n=c\in[0,1]$, unde $c\simeq 0,577215...$ se numește constanta lui Euler.

7. Aplicând teorema lui Lagrange să se demonstreze inegalitățile:

a) $e^x > x+1, \forall x > 0$ ; b) $\operatorname{arctg} x > \frac{x}{1+x^2}, \forall x > 0$ .

R. a) Fie $f:[0,x]\to\mathbb{R}, f(t)=e^t$ , căreia i se aplică (se poate) formula lui Lagrange, când avem: $e^x-1=xe^c, c\in(0,x)$. De aici $(e^c>1)$ rezultă $e^x-1>x$ , inegalitatea propusă spre demonstrat.

b) Luăm $f:[0,x]\to\mathbb{R}, f(t)=\operatorname{arctg} t$ , căreia i se aplică formula lui Lagrange.

Avem: $\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} 0 = x\cdot\frac{1}{1+c^2}$ , unde $c\in(0,x)$. De aici $\operatorname{arctg} x > \frac{x}{1+x^2}$ , deoarece $c>x$ .

8. Aplicând teorema lui Lagrange funcției $f:[0,x]\to\mathbb{R}, f(t)=\frac{1}{1+t}$ se obține punctul $c=c(x)$ .

Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{c(x)}{x}$.

R. Funcția $f$ îndeplinește condițiile din teorema lui Lagrange pe $[0,x]$.

Deci există $c(x)\in(0,x)$ astfel încât $f(x)-f(0)=xf'(c)$ sau $\frac{1}{x+1}-1=\frac{-x}{(1+c)^2}$ sau $c^2+2c-x=0$ cu soluțiile $c_{1,2}=-1\pm\sqrt{1+x}$ . Cum $c\in(0,x)$ se reține $c(x)=-1+\sqrt{1+x}$ . Acum $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1+\sqrt{1+x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x}{x\left(-1-\sqrt{1+x}\right)}=\frac{1}{2}$.

9. Să se calculeze, utilizând teorema lui Lagrange, limita $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{\ln n}{n}-\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right)=0$.

R. Se consideră funcția $f:[n,n+1]\to\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}^*, f(t)=\frac{\ln t}{t}$ căreia i se aplică (se poate) teorema lui Lagrange. Deci există $c_n\in(n,n+1)$ astfel încât $f(n+1)-f(n)=f'(c_n)$, unde $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

Limita cerută devine: $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(-\frac{1-\ln c_n}{c_n^2}\right)=-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{c_n}\cdot\frac{1-\ln c_n}{c_n}$.

Din $n<c_n<n+1$ rezultă $\frac{n}{n+1}<\frac{n}{c_n}<1$, ceea ce dă $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{c_n}=1$. De asemenea, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\ln c_n}{c_n}=0$ pentru că $c_n\to\infty$ dacă $n\to\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\ln x}{x}=0$.

Aşadar limita de calculat este zero.

## Exerciții propuse

1. Care este eroarea care se comite atunci când se înlocuieşte $\sqrt{101}$ cu 10 ? Dar $\sqrt[3]{8,001}$ cu $\sqrt[3]{8}$ ?

2. Utilizând formula lui Lagrange pentru funcția $f:[100,104]\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x}$ să se arate că $\sqrt{104}-10<0,2$.

3. Să se arate că $\sqrt[3]{30}-3<\frac{1}{9}$.

4. a) Să se aplice teorema lui Lagrange pentru funcțiile de mai jos:
1) $f:[0,3]\to\mathbb{R}, f(x)=x^3$; 2) $f:[1,2]\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x$; 3) $f:[1,4]\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x}$ ;

4) $f:[0,2]\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{4-x^2}$ ; 5) $f:[0,2]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2}, x\in[0,1]\\ \dfrac{1}{x}, x\in(1,2]\end{cases}$;

6) $f:[-3,3]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1}, x\in(0,3]\\ \dfrac{x}{2}+1, x\in[-3,0]\end{cases}$.

**b) Să se determine parametrii $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât funcției $f$ să i se poată aplica teorema lui Lagrange pe mulțimea de definiție. Să se aplice efectiv teorema.**

1) $f:[0,2]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2, x\in[0,1]\\ mx-1, x\in(1,2]\end{cases}$; 2) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2+2x+1, x\in[-1,0]\\ m\sin\pi x+n, x\in(0,1]\end{cases}$;

3) $f:[0,2]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2+3x+m, x\in[0,1]\\ nx+1, x\in(1,2]\end{cases}$; 4) $f:[1,3]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2x^2+n, x\in[1,2]\\ 2mx^3+11m, x\in(2,3]\end{cases}$;

5) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^4+mx+2, x\in[-1,0)\\ n+\ln(1+x^2), x\in[0,1]\end{cases}$; 6) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}e^x, x\in[-1,0]\\ mx+n, x\in(0,1]\end{cases}$.

**5. Să se demonstreze inegalitățile:**

1) $|\sin x-\sin y|\le|x-y|, \forall x,y\in\mathbb{R}$ ; 2) $|\cos x-\cos y|\le|x-y|, \forall x,y\in\mathbb{R}$ ;

3) $|\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} y|\le|x-y|, \forall x,y\in\mathbb{R}$ ; 4) $\dfrac{x-y}{x}<\ln\dfrac{x}{y}<\dfrac{x-y}{y}, 0<x<y$ (inegalitatea lui Neper);

5) $\dfrac{b-a}{\cos^2 a}<\operatorname{tg} b-\operatorname{tg} a<\dfrac{b-a}{\cos^2 b}, 0\le a<b<\dfrac{\pi}{2}$; 6) $n(b-a)a^{n-1}<b^n-a^n<n(b-a)b^{n-1}, 0<a<b$ .

**6. Să se determine abscisa unui punct $c$ în care tangenta la graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x$ să fie paralelă cu coarda care unește punctele de abscise $x_1=-2, x_2=1$ .**

**7. Aplicând teorema lui Lagrange funcției $f(x)=\ln x$ pe intervalul $[k,k+1], k\in\mathbb{N}^*$ să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+...+\dfrac{1}{n}\right)$.**

**8. 1) Fie $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$ , $f(t)=\ln(1+t)$ . Aplicând formula lui Lagrange funcției $f$ pe intervalul $[0,x], x>0$ să se arate că $x<(1+x)\ln(1+x), \forall x>0$ ;**

**2) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\cos(kx), a_i\in\mathbb{R}, i=\overline{0,n}$ . Să se arate că există $c\in(0,1)$ astfel încât $f(c)=a_0+\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\dfrac{\sin k}{k}$.**

**9. Aplicând teorema lui Lagrange funcției:**

1) $f:[0,x]\to\mathbb{R}, 0<x<1, f(t)=\dfrac{t}{1-t}$, se obține $c=c(x)$. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}c(x)$;

2) $f:[x,x+1]\to\mathbb{R}, x>0, f(t)=\sqrt{1+t}$ se obține $c=c(x)$. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{c(x)}{x}$;

3) $f:[0,x]\to\mathbb{R}, x\in(0,1), f(t)=\dfrac{t+1}{t-1}$ se obține $c=c(x)$. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{c(x)}{1-\sqrt{x+1}}$.

**10. Să se calculeze:** 1) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{e^n}{n}-\dfrac{e^{n+1}}{n+1}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)$;

**3)** $\lim_{n\to\infty}\left[(n+1)(n+1)^{\frac{1}{n+1}}-n\cdot n^{\frac{1}{n}}\right]$; **4)** $\lim_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]$.

**11.** **1) Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este derivabilă şi $|f'(x)|\le 1, \forall x$, atunci $|f(x_1)-f(x_2)|\le|x_1-x_2|$, $\forall x_1, x_2$. Aplicaţie. 1) $f(x)=\sin x$; 2) $f(x)=\cos x$.**

**2) Fie $f:I\to\mathbb{R}$ ($I$ interval mărginit) o funcţie derivabilă cu derivata mărginită. Arătaţi că $f$ este mărginită.**

**12.** **Să se rezolve ecuaţia $3^x+6^x=5^x+4^x$.**

**13.** **Să se compare $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}$ cu $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}$. Generalizaţi.**

## Consecinţă (Rolul derivatei întâi. Intervale de monotonie. Puncte de extrem)

### 1. Intervale de monotonie

Un alt rezultat important pentru o funcţie derivabilă **pe un interval** este furnizat de semnul derivatei. Acesta va fi utilizat pentru determinarea intervalelor de monotonie. Mai precis are loc următorul:

**Corolar 3**. Fie $f:E\to\mathbb{R}, E$ **interval**, o funcţie derivabilă.

**1)** Dacă $f'(x)\ge 0, \forall x\in E$, atunci $f$ este **crescătoare** pe $E$.

**2)** Dacă $f'(x)\le 0, \forall x\in E$, atunci $f$ este **descrescătoare** pe $E$;

sau

**1')** Dacă $f'(x)>0, \forall x\in E$, atunci $f$ este **strict crescătoare** pe $E$;

**2')** Dacă $f'(x)<0, \forall x\in E$, atunci $f$ este **strict descrescătoare** pe $E$.

**Demonstraţie**. **1**) Fie $x_1, x_2\in E, x_1<x_2$ şi $f'(x)\ge 0, \forall x\in E$. Se aplică teorema lui Lagrange pe intervalul $[x_1, x_2]$. Prin urmare există $c\in(x_1, x_2)$ astfel încât $f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(c)\ge 0$, ceea ce arată că $f(x_1)\le f(x_2)$. Aşadar din $x_1<x_2, x_1, x_2\in E$ rezultă $f(x_1)\le f(x_2)$, ceea ce demonstrează că $f$ este crescătoare pe $E$. Acum este clar că dacă $f'>0$, atunci am fi obţinut $f(x_1)<f(x_2)$, ceea ce conduce la $f$ strict crescătoare pe $E$, adică 1') .Analog dacă $f'(x)\le 0, \forall x\in E$ se obţine că
$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(c)\le 0$, adică $f(x_1)\ge f(x_2)$.
Deci pentru $x_1<x_2, x_1, x_2\in E$ rezultă $f(x_1)\ge f(x_2)$, ceea ce înseamnă că $f$ este descrescătoare pe $E$. Dacă $f'(x)<0, \forall x\in E$, atunci găsim $f(x_1)>f(x_2)$ şi prin urmare $f$ este strict descrescătoare pe $E$. ■

**Observaţii**. **1**) Pentru a marca monotonia unei funcţii folosind semnul derivatei se utilizează tabele ca mai jos:

| $x$ | E |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+ \quad + \quad +$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ |

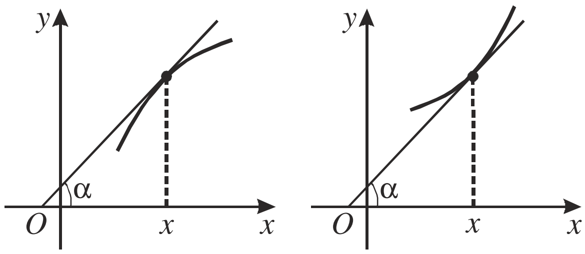



Fig. 24 $\left(f'(x) = tg\alpha > 0 \Rightarrow \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$

unde în linia corespunzătoare lui $f$ am indicat printr-o săgeată orientată în sus $(\nearrow)$ faptul că $f$ este (**strict**) **crescătoare** pe $E$ sau o săgeată orientată în jos $(\searrow)$ pentru a marca faptul că $f$ este (**strict**) **descrescătoare** pe $E$. Avem

$\operatorname{tg}\alpha = f'(x) > 0 \Rightarrow \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (Fig.24), iar $\operatorname{tg}\alpha = f'(x) < 0 \Rightarrow \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ (Fig.25).

| $x$ | E |
|---|---|
| $f'(x)$ | $- \quad - \quad -$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ |

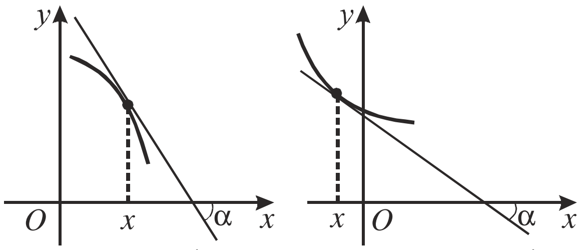



Fig. 25 $\left(f'(x) = tg\alpha < 0 \Rightarrow \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)\right)$

**2**) Pentru a determina intervalele de monotonie ale unei funcții derivabile $f : E \to \mathbb{R}$, $E$ nu neapărat interval din $\mathbb{R}$ se procedează astfel:

a) se calculează derivata $f'$ a funcției $f$;
b) se rezolvă (în $\mathbb{R}$) ecuația $f'(x) = 0, x \in E$;
c) se determină intervalele în care $f'$ păstrează același semn;
d) se ține seama de corolarul 3) și se stabilesc intervalele de monotonie.

În concluzie, prima derivată dă informații despre comportarea curbei (Fig.26):

1) $f'(x) > 0$ în $A$ și funcția **este strict crescătoare**;

2) $f'(x) < 0$ în $C$ și funcția **este strict descrescătoare**;

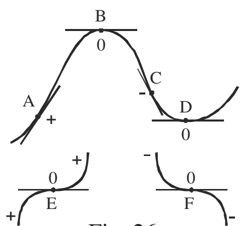



Fig. 26

3) $f'(x)=0$ în $B$ şi $D$, numite **puncte staționare** ($B$ **este punct de maxim local**, iar $D$ **este punct de minim local**);

4) punctele $E, F$ sunt, de asemenea, **puncte staționare** pentru care în jurul lor $f'(x)>0$ şi respectiv $f'(x)<0$ ($E, F$ sunt puncte de inflexiune).

## Exerciții rezolvate

**1. Să se precizeze intervalele de monotonie pentru următoarele funcții:**

**1)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^4-8x^2$; **2)** $f:\mathbb{R}-\{-2,1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x+3}{x^2+x-2}$;

**3)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^2-3x+5}$.

**R. Aplicăm schema indicată urmărind etapele de parcurs.**

**1) a) Calculul derivatei. Avem $(E=\mathbb{R}): f'(x)=4x^3-16x$;**

**b) Rezolvarea în $\mathbb{R}$ a ecuației $f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3-16x=0 \Rightarrow x_1=0, x_2=-2, x_3=2$.**

**c) Se întocmeşte tabelul de semn al derivatei, ca mai jos:**

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $\infty$ | $\searrow$ | $-16$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-16$ | $\nearrow$ | $\infty$ |

**Pe fiecare interval $(-\infty,-2),(-2,0),(0,2),(2,\infty)$ funcția $f'$ este continuă şi nu se anulează, prin urmare păstrează acelaşi semn, pe un interval dat. Este de ajuns, de exemplu, pentru a vedea semnul lui $f'$ pe $(-\infty,-2)$ să calculăm $f'$ într-un punct oarecare din acest interval (de obicei se alege punctul încât calculul lui $f'$ să fie cât mai simplu; alteori se recurge la calculul limitei $\lim\limits_{x\nearrow -2} f'(x)$ pentru a vedea semnul la stânga lui $x=-2$, care se va păstra pe tot intervalul $(-\infty,-2)$. Să luăm $x=-3$ pentru care $f'(-3)=4(-3)^3-16(-3)=-60<0$. Deci $f'(x)<0, \forall\, x\in(-\infty,-2)$.**

**Dacă $x=-2$ este rădăcină simplă pentru $f'$, (cum este cazul de față) iar $f'$ este continuă (cum este cazul de față), atunci pe următorul interval semnul alternează. Altfel luăm un punct $x_0\in(-2,0)$ şi vedem care este semnul lui $f'(x_0)$, care se păstrează pe tot intervalul $(-2,0)$.**

**Aşadar pe intervalele $(-\infty,-2],[0,2]$ funcția $f$ este strict descrescătoare, iar pe intervalele $[-2,0],[2,\infty)$ funcția $f$ este strict crescătoare.**

**2) Avem pentru derivata lui $f$ expresia $f'(x)=-\dfrac{x^2+6x+5}{(x^2+x-2)^2}$.**

**Ecuația $f'(x)=0$, conduce la rezolvarea ecuației $x^2+6x+5=0$, cu soluțiile $x_1=-1, x_2=-5$ (care aparțin domeniului de definiție).**

**Se face tabelul de semn al derivatei**

| $x$ | $-\infty$ | | $-5$ | | $-2$ | | $-1$ | | $1$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ | \| | $-$ | |
| $f(x)$ | $\infty$ | $\searrow$ | $\frac{-1}{9}$ | $\nearrow$ | \| | $\nearrow$ | $-1$ | $\searrow$ | \| | $\searrow$ | |

Deci pe intervalele $(-\infty,-5],[-1,1),(1,\infty)$ funcția $f$ este strict descrescătoare, iar pe intervalele $[-5,-2),(-2,-1]$ funcția $f$ este strict crescătoare.

3) Calculul derivatei dă $f'(x)=\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+5}}$. Soluțiile ecuației $f'(x)=0$ sunt date de $2x-3=0$, când găsim $x=\frac{3}{2}$. Tabelul de semn al derivatei este

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{3}{2}$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-\ -\ -$ | $0$ | $+\ +\ +$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Deci pe $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$ funcția $f$ este strict descrescătoare, iar pe $\left[\frac{3}{2},\infty\right)$ funcția $f$ este strict crescătoare.

**2.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x^3+3mx^2+12x+6, m\in\mathbb{R}$.
Să se determine $m$ astfel încât $f$ să aibă aceeași monotonie pe $\mathbb{R}$.
**R.** Derivata funcției este $f'(x)=6x^2+6mx+12$.
Cum coeficientul trinomului de gradul doi pentru $x^2$ este $6>0$, putem vorbi de $f'(x)\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Inegalitatea are loc dacă $\Delta\leq 0$, ceea ce dă $m\in\left[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right]$.

## Exerciții propuse

**1.** Să se stabilească intervalele de monotonie pentru funcțiile următoare:
1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^3+3x$ ; 2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^3+x^2$ ;
3) $f:\mathbb{R}-\{\pm1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x+3}{x^2-1}$ ; 4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ ;
5) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ ; 6) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2e^x$ ;
7) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=(x+1)\ln x$ ; 8) $f:\mathbb{R}-\left\{(-1)^k\frac{\pi}{2}+k\pi; k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\cos x}{1-\sin x}$ ;
9) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-\sin x$ ; 10) $f:\mathbb{R}-[-1,0]\to\mathbb{R}, f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

**2.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\ln\left(1+x^2\right)-mx, m\in\mathbb{R}$. Să se determine $m$ pentru care funcția $f$ este monoton crescătoare pe $\mathbb{R}$.

**3.** 1) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{me^x-(1+m)e^{-x}}{1+e^x}$. Să se determine $m$ astfel încât $f$ să fie monoton descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

2) Pentru $m\in\mathbb{R}^*$ studiați monotonia funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{e^{mx}}{x^2+m^2}$.

## 2. Puncte de extrem

Utilizând monotonia unei funcții, putem stabili punctele de minim sau maxim local pentru o **funcție derivabilă**. Un punct $x_0$ din **interiorul domeniului** de definiție $E$ este punct de minim local dacă avem situația marcată în tabelul de mai jos:

| $x$ | | | | $x_0$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | − | − | 0 | + | + | + |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | | $f(x_0)$ | | $\nearrow$ | |

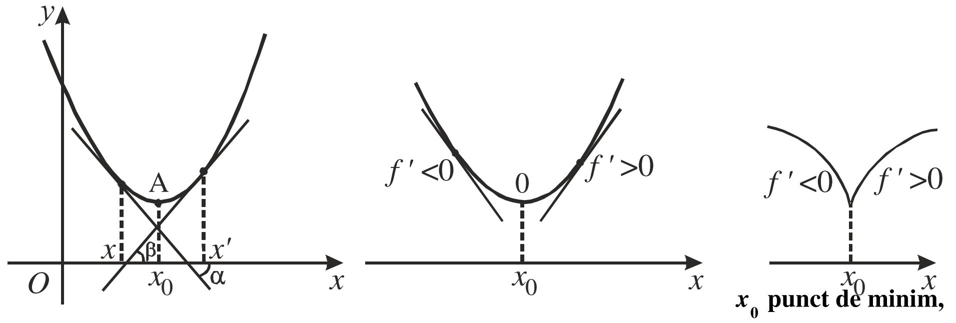



Fig. 27

**$x_0$ punct de minim, $f'(x_0)=0$**

**$x_0$ punct de minim, $\nexists\, f'(x_0)$**

Punctul $A(x_0, f(x_0))$ (Fig.27) este **punct de minim local** pentru graficul funcției dacă într-o vecinătate a lui $A$, panta tangentei la grafic se schimbă de la valori negative, prin zero la valori pozitive, când ne deplasăm de-a lungul curbei în direcția pozitivă a axei $Ox$.

Punctul $x_0$ din interiorul domeniului de definiție $E$ este punct de maxim local dacă avem situația de mai jos din tabel:

| $x$ | | | | $x_0$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | + | + | 0 | − | − | − |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | | $f(x_0)$ | | $\searrow$ | |

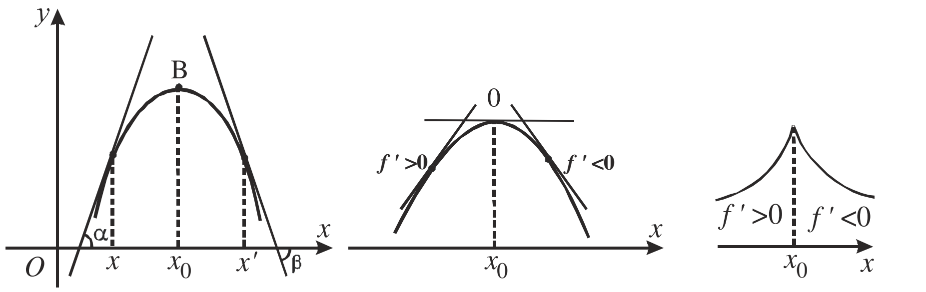



Fig. 28

**$x_0$ punct de maxim, $f'(x_0)=0$**

**$x_0$ punct de maxim, $\nexists\, f'(x_0)$**

Punctul $B(x_0, f(x_0))$ (Fig.28) este **punct de maxim local** pentru graficul funcției dacă într-o vecinătate a lui $B$, panta tangentei la grafic se schimbă de la valori pozitive, prin zero la valori negative, când ne deplasăm de-a lungul curbei în direcția pozitivă a axei $Ox$.

Să observăm că în ambele cazuri există o vecinătate $V$ a lui $x_0$ în care are loc inegalitatea $f(x) \geq f(x_0)$ sau $f(x) \leq f(x_0), \forall x \in V$.

Să știm deci că eventualele puncte de extrem local sunt soluții ale ecuației $f'(x) = 0$, pentru o **funcție derivabilă** $f$, pentru care are loc una din situațiile indicate în tabelele de mai sus. Să reținem însă că absența punctelor critice (soluții ale ecuației $f'(x) = 0$) nu înseamnă inexistența valorilor minimale sau maximale.

Spre exemplu, pentru funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -x, x < 0 \\ x^2 e^{-x}, x \geq 0 \end{cases}$ avem tabelul:

| $x$ | $-\infty$ | | | | 0 | | 2 | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | - | - | - | -1 | 0 | + | 0 | - | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | | | 0 | $\nearrow$ | $\frac{4}{e}$ | $\searrow$ | |

Punctul $x = 0$ este punct de minim, fără ca $f$ să fie derivabilă în $x = 0$, $f'_s(0) = -1, f'_d(0) = 0$.

Am văzut că o funcție continuă, de exemplu, pe $[a, b]$ este mărginită și își atinge marginile pe compactul $[a, b]$. Este posibil ca aceste valori extreme să se realizeze în $x = a, x = b$.

**Pentru a găsi** $\max\limits_{a \leq x \leq b} f(x), \min\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$ **se compară valorile funcției** în $x = a, x = b$, **în punctele critice** (soluțiile ecuației $f'(x) = 0$) **precum și în punctele unghiulare și de întoarcere.**

## Exerciții rezolvate

**1. Reluăm una din problemele prezentate mai sus pentru a stabili natura punctelor de extrem, precum și valoarea extremelor.**

**1) Pentru funcția $f(x) = x^4 - 8x^2$, avem tabelul:**

| $x$ | $-\infty$ | | -2 | | 0 | | 2 | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | $\infty$ | $\searrow$ | -16 (m) | $\nearrow$ | 0 (M) | $\searrow$ | -16 (m) | $\nearrow$ | $\infty$ |

De aici constatăm că $x_1 = -2, x_2 = 2$ reprezintă puncte de minim când $f(-2) = f(2) = -16$ este valoarea minimă. Valoarea -16 reprezintă valoarea minimă absolută sau globală a funcţiei $f$. Punctul $x = 0$ este un punct de maxim pentru $f$, iar valoarea maximă locală este $f(0) = 0$. Aceasta nu este o valoare maximă globală deoarece există $x = 3$, de exemplu, pentru care $f(3) = 9 > 0$.
De obicei sub valorile minime locale se pune litera $m$, iar sub valorile maxime locale se pune litera $M$ între paranteze.

**2.** Să se determine cel mai mare termen al şirului $a_n = -\frac{n^4}{4} + 27n + 7$.

**R.** Se consideră funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = -\frac{x^4}{4} + 27x + 7$, cu $f'(x) = -x^3 + 27$. Cum $x = 3$ este soluţie a ecuaţiei $f'(x) = 0$ avem $f'(x) > 0$ dacă $x < 3$ şi $f'(x) < 0$ dacă $x > 3$, ceea ce arată că $x = 3$ este punct de maxim pentru $f$. Deci $f(1) < f(2) < f(3) > f(4) > f(5) > ...$ sau $a_1 < a_2 < a_3 > a_4 > ...$

Deci cel mai mare termen al şirului este $a_3 = \frac{271}{4}$.

**3.** Să se determine $\max\limits_{-4 \le x \le 4} f(x)$ şi $\min\limits_{-4 \le x \le 4} f(x)$, dacă $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$.

**R.** Funcţia $f$ fiind derivabilă avem $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$ şi $f'(x) = 0$ dă $x_1 = -3, x_2 = 1$ puncte situate în $(-4, 4)$. Deci trebuie comparate valorile funcţiei în punctele $x_0 = -4, x_1 = -3, x_2 = 1$ şi $x_3 = 4$. Avem: $f(-4) = 25, f(-3) = 32, f(1) = 0$ şi $f(4) = 81$.
De aici $\max\limits_{-4 \le x \le 4} f(x) = 81 = f(4)$, $\min\limits_{-4 \le x \le 4} f(x) = 0 = f(1)$.

## Exerciţii propuse

**1.** Să se stabilească punctele de extrem şi natura acestora pentru funcţiile de mai jos:
a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$; b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$;
c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x}{x^2 + 9}$; d) $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$;
e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x^2 - x)e^x$; f) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{x}$;
g) $f : (0, \infty) - \left\{\frac{1}{e}\right\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{1 + \ln x}$; h) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x$;
i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + \sin 2x$; j) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = xe^{x - x^2}$;
k) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1 + 3x}{\sqrt{4 + 5x^2}}$; l) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 + 1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{\pi x^2}{8} - \frac{x - 1}{2}$.

**2.** Să se determine cea mai mare şi cea mai mică valoare pentru funcţiile:
a) $f : [1, 6] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{8} + \frac{2}{x}$; b) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = x^5 - x^3 + x + 2$;
c) $f : [-2, 3] \to \mathbb{R}, f(x) = \left| 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 43 \right|$; d) $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}, f(x) = \cos^2 \frac{x}{2} \sin x$;
e) $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}\cos 2x + \sin x$; f) $f : [-2, 0] \to \mathbb{R}, f(x) = \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right|$;

g) $f:\left[\frac{1}{2},4\right]\to\mathbb{R}, f(x)=\left|x^2+2x-3\right|+\frac{3}{2}\ln x$ ; h) $f:[0,10]\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x(10-x)}$ ;

i) $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$ ; j) $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}, f(x)=\sin 2x-x$ .

**3. O persoană doreşte să-şi construiască lipit de casă încă o cameră în formă dreptunghiulară cu suprafaţa de 18 $m^2$. Dorind să consume cât mai puţine cărămizi în construcţia ei, se întreabă cum să procedeze. Va şti el cum să-şi dimensioneze noua cameră ? Ajutaţi-l !**

**4. O persoană şi-a construit în curte un bazin în formă dreptunghiulară de arie 24 $m^2$, iar în jurul bazinului alei cu lăţimea de 1,5 m, pe laturile cele mai lungi ale bazinului şi respectiv 1 m lăţime, pe laturile mai scurte ale bazinului. Determinaţi aria pe care o ocupă bazinul şi aleile lui. Care sunt dimensiunile bazinului care fac minimă această arie ?**

**5. Legea de mişcare a unei particule în planul $tOs$ este dată de formula $s(t)=t^3-9t^2+24t+6$, $t\geq 0$. Ce reprezintă $s'(t), t\geq 0$. Reprezentaţi grafic în acelaşi reper cartezian $tOs$ funcţiile $s(t)$ şi $s'(t)$. Determinaţi $s''(t)$. Care este semnificaţia pentru $s''(t)$. Reprezentaţi $s(t)$ pe o axă orizontală. Ce se întâmplă cu particula la momentele $t=2, t=4$ ? Dar pentru $t>4$ ?**

**6. (Funcţia profit şi punctul de profit maxim). O fabrică ştie că dacă într-o săptămână sunt cerute $x$ (în sute) bucăţi dintr-un produs, atunci funcţia cost total (în mii €) este $C(x)=3x+14$, iar funcţia venit total (în mii €) este $V(x)=19x-2x^2$. Determinaţi nivelul cererii care maximizează profitul ( $P(x)=V(x)-C(x)$ ).**

**7. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left(x^2+4x+m\right)e^x, m\in\mathbb{R}$. Să se determine parametrul $m$ astfel încât funcţia $f$ să aibă puncte de extrem.**

**8. Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=a^x-(a-1)x, a>0, a\neq 1$. Dacă $m(a)$ este valoarea minimă a lui $f$ să se calculeze $\lim\limits_{a\to 0} m(a)$.**

**9. Să se determine cel mai mic termen al şirului $(a_n)$ cu $a_n=n^2-\frac{14}{3}n$.**

**10. Fie $a,b\geq e$ pentru care $a^x+b^x\geq x^a+x^b, \forall\, x>0$. Atunci $a=b=e$.**

**11. Să se determine funcţia polinomială de grad minim care are un maxim egal cu 6 pentru $x=1$ şi un minim egal cu 2 pentru $x=3$.**

**12. Arătaţi că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left(x^2+mx\right)e^{-x}, m\in\mathbb{R}$ are două puncte de extrem, $\forall\, m$. Dacă $x_1, x_2$ sunt abscisele acestor puncte, atunci $e^{x_1}f(x_1)+e^{x_2}f(x_2)$ este independent de $m$.**

## 3. Demonstrarea unor inegalităţi cu ajutorul derivatelor

Utilizând corolarul 3, se pot demonstra elegant o serie de inegalităţi. De fapt o inegalitate de forma $f(x)\geq 0$ pentru $x\geq x_0$ sugerează utilizarea monotoniei funcţiei pentru rezolvare. La monotonie avem relaţii de tipul $f(x)\geq f(x_0)$ sau $f(x)\leq f(x_0)$ pentru $x\geq x_0$. Se disting cel puţin trei tehnici de lucru pentru a proba o inegalitate de forma $f(x)\geq 0, \forall\, x\geq x_0$.

1) Dacă $f$ este (strict) crescătoare şi $f(x_0)=0$, atunci din $x\geq x_0$ rezultă

$f(x) \geq f(x_0) = 0$. Sub formă de tabel avem:

| $x$ | $x_0$ | | | | | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | + | + | + | + | |
| $f(x)$ | 0 | | | ↗ | | | |

2) Dacă $f$ are un minim global $x_m \in (x_0, \infty)$ pentru care $f(x_m) = 0$, atunci evident $f(x) \geq f(x_m) = 0, \forall\, x \geq x_0$.

3) Dacă $f$ este descrescătoare pe $[x_0, \infty)$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ ($+\infty$ este un punct de acumulare pentru $[x_0, \infty)$), atunci avem $f(x) \geq 0, \forall\, x \geq x_0$.

Tabelul arată sub forma :

| $x$ | $x_0$ | | | | | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | - | - | - | - | |
| $f(x)$ | | | | ↘ | | | 0 |

Observații analoge se pot face pentru inegalități valabile pe $(-\infty, x_0]$ sau pe intervale de forma $[a,b]$, $(a,b)$ etc.

Ilustrăm aceste observații prin :

## Exerciții rezolvate

**1. Să se demonstreze inegalitățile :**

**1)** $2x^3 + 3x^2 - 12x + 7 > 0, \forall\, x > 1$ **; 2)** $\frac{x}{e} \geq \ln x, \forall\, x > 0,$ **şi să se arate că** $\pi^e < e^\pi$ **;**

**3)** $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}}, \forall\, x > 0$.

**R. 1) Se consideră funcția** $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$ **pentru care** $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2)$.

**Ecuația** $f'(x) = 0$ **are soluțiile** $x_1 = -2, x_2 = 1,$ **care nu aparțin intervalului** $(1, \infty)$**. Tabelul pentru semnul derivatei şi monotonia funcției este redat în continuare :**

| $x$ | 1 | | | | | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | + | + | + | + | |
| $f(x)$ | | | | ↗ | | | |

**Să remarcăm că** $f$ **este strict crescătoare pe** $(1, \infty)$**, iar** $f(1) = 0$**. Deci din** $x > 1$ **se obține** $f(x) > f(1) = 0$**, adică exact inegalitatea propusă spre demonstrat.**

2) Luăm funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x}{e}-\ln x$. Derivata funcției este $f'(x)=\frac{1}{e}-\frac{1}{x}=\frac{x-e}{ex}$.
În acest caz tabelul are structura:

| $x$ | $0$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-\quad-\quad-$ | $0$ | $+\quad+\quad+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |

Din tabel se observă că $x=e$ este punct de minim global când $f(e)=0$. Prin urmare $\forall\, x>0,\ f(x)\geq f(e)=0$, adică exact inegalitatea propusă spre demonstrat.
Inegalitatea, în cazul particular, se scrie echivalent (prin logaritmare în baza $e$) : $e\ln\pi<\pi$ sau $\frac{\pi}{e}-\ln\pi>0$, adică $f(\pi)>f(e)$ ceea ce-i adevărat deoarece $\pi>e$ și $f$ este strict crescătoare pe $[e,\infty)$.

3) Considerăm funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Trebuie să arătăm că $f(x)<0,\forall\, x>0$. Din nou dorim să studiem monotonia funcției. Pentru aceasta calculăm $f'$.

Avem $f'(x)=\frac{2x+1-2\sqrt{x^2+x}}{2x(1+1)\sqrt{x^2+x}}$.

Semnul lui $f'$ este dat de semnul numărătorului, deoarece pentru $x>0$, numitorul este pozitiv.
Pentru a afla semnul numărătorului se rezolvă ecuația $2x+1-2\sqrt{x^2+x}=0$. Se constată ușor că este o ecuație imposibilă. Prin urmare pe intervalul $(0,\infty)$ numărătorul are același semn.
Tabelul are structura de mai jos :

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+\quad+\quad+\quad+\quad+$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $0$ |

Deci $f$ este strict crescătoare pe $(0,\infty)$. Este suficient să observăm că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, ceea ce-I imediat. Deci inegalitatea este stabilită.

2. Să se demonstreze inegalitatea: $e^x<(1+x)^{1+x},\forall\, x>0$.

R. Pentru ușurința demonstrației (în acest caz atât baza cât și exponentul conțin variabila $x$) se preferă scrierea echivalentă a inegalității în urma logaritmării în baza $e$, astfel:

$x<(1+x)\ln(1+x),\forall\, x>0$ sau $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x),\forall\, x>0$.

Fie acum funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)$ pentru care

$f'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}=-\frac{x}{(1+x)^2}$.

Tabelul cu semnul derivatei și monotonia funcției arată astfel:

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-\quad-\quad-\quad-\quad-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | |

În acest caz funcția $f$ este strict descrescătoare. Din faptul că $\lim_{x \searrow 0} f(x) = 0$ rezultă $f(x) < 0, \forall x$, adică inegalitatea dorită.

3. Să se arate că funcția $f:(1,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \log_x(x+1)$ este strict descrescătoare și apoi să se probeze inegalitatea $\log_2 3 > \log_4 5$.

R. Scriem funcția $f$ sub forma $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$ pentru care derivata este

$f'(x) = \dfrac{x \ln x - (x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2 x}$. Numitorul lui $f'$ este strict pozitiv pentru orice $x > 1$.

Rămâne să studiem semnul numărătorului. Aici se poate considera funcția $g:(1,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x \ln x$ și atunci numărătorul este $g(x) - g(x+1)$. Dacă știm monotonia lui $g$, atunci din $x < x+1$ deducem semnul diferenței $g(x) - g(x+1)$. Avem $g'(x) = \ln x + 1$. Cum pentru $x > 1$ rezultă $g'(x) > 0$, deducem că $g$ este o funcție strict crescătoare. Prin urmare $g(x) < g(x+1), \forall x > 1$. Așadar numărătorul lui $f'$ este negativ. În final $f'(x) < 0, \forall x > 1$, ceea ce demonstrează că $f$ este strict descrescătoare pe $(1,\infty)$.

Pentru a demonstra inegalitatea să observăm că ea se traduce cu ajutorul lui $f$ prin $f(2) > f(4)$, care este adevărată deoarece $2 < 4$ și $f$ este strict descrescătoare.

4. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x^5 + 7x^3 + 2x + 1$ $f$ este bijectivă.

R. Prezentăm aici o cale simplă, utilizând tabelul cu semnul derivatei și monotonia funcției, de a proba că o funcție este bijectivă.

Avem : $f'(x) = 15x^4 + 21x^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Tabelul arată astfel :

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + + + + + | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Din faptul că $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ rezultă că funcția $f$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. Se știe că orice funcție strict monotonă pe domeniul de definiție este injectivă.

Din $f$ continuă, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ rezultă $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, ceea ce arată că $f$ este surjecție.

Ultima linie a tabelului dă informațiile din care se deduce injecția și surjecția funcției. Deci $f$ este bijecție.

## Exerciții propuse

1. Să se demonstreze inegalitățile :

1) $\dfrac{2}{2x+1} < \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right), \forall x > 0$ ; 2) $x \ln\left(1 + \dfrac{a}{x}\right) < a, a > 0, \forall x > 0$ ;

3) $\ln(n+1) > \dfrac{1}{ne} + \ln n, n \in \mathbb{N}^*$ ; 4) $\ln\left(1 + \sqrt{1+x^2}\right) < \dfrac{1}{x} + \ln x, \forall x > 0$ .

2. Să se demonstreze inegalitățile :

1) $e^x \geq x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ ; 2) $e^x \geq ex, \forall x > 0$ ; 3) $\dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x), \forall x > -1$ ;

4) $\frac{x}{1+x^2}-\frac{x^2}{2}\le \text{arctg}\, x, \forall\, x\in\mathbb{R}$ ; 5) $\ln x\le x-1, \forall\, x>0$ .

**3. Să se demonstreze inegalitățile :**

1) $a^{1+\frac{x}{a}}-a-x>0, \forall\, x>0, a\ge e$ ; 2) $n^{\sqrt{n+1}}>(n+1)^{\sqrt{n}}, \forall\, n\ge 9$ ; 3) $x(2+\cos x)>3\sin x, x>0$ ;

4) $\cos x<\frac{\sin^2 x}{x^2}, 0<x<\frac{\pi}{2}$ ; 5) $\left(x+\frac{1}{x}\right)\text{arctg}\, x>1, \forall x>0$ ; 6) $\ln(1+x)<\frac{x}{\sqrt{1+x}}, \forall\, x>0$ .

**4. Să se demonstreze inegalitățile :**

1) $x^4+8x+12x^2\ln x-8x^3-1>0, \forall\, x>1$ ; 2) $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}\le\sqrt{1+x}, \forall\, x\ge 0$ ;

3) $\ln n<m\sqrt[m]{n}, m,n\in\mathbb{N}^*$ ; 4) $\frac{1}{3}tg\, x+\frac{2}{3}\sin x>x, 0<x<\frac{\pi}{2}$ ; 5) $\ln(1+x^2)<x\, arctg\, x<x^2, \forall x>0$ ;

6) $e^x-1-x<x^2e^x, \forall\, x>0$ ; 7) $(e+x)^{e-x}>(e-x)^{e+x}, \forall\, x\in(0,e)$ ;

8) $x+\frac{x^3}{6}\le \arcsin x, x\in[0,1)$ .

**5. Să se arate că următoarele funcții sunt bijective :**

1) $f:(0,\infty)\to(1,\infty), f(x)=x^4+x^2+x+1$ ; 2) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+\ln x$ ;

3) $f:(0,\infty)\to(1,\infty), f(x)=e^x+x^2+x$ ; 4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x+xe$ ;

5) $f:[e,\infty)\to[0,\infty), f(x)=x\ln x-x$ ; 6) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+\sin x$ .

**6. Fie $a>0$ . Să se arate că dacă $a^x\ge x^a, \forall\, x>0$ , atunci $a=e$ .**

**7. Să se determine $a$ astfel încât $\frac{ax}{1+x^2}\le \text{arctg}\, x+\frac{x^2}{2}, \forall\, x\in\mathbb{R}$ .**

## 4. Regulile lui L' Hospital

### Calcularea formelor de nedeterminare în cazul limitelor

**"Au reste je reconnois devoir beaucoup aux lumieres de Mrs. Bernoulli, sur tout à celles du jeune presentement Professeur à Groningue . Je me suis servi sans façon de leurs dècouvertes ..." ( L'Hospital," Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes",1696).**

Am văzut că pentru a elimina nedeterminările în cazul limitelor de funcții am apelat la scrieri convenabile, artificii de calcul, pentru a pune în evidență structuri ale căror limite sunt cunoscute. Scopul acestui paragraf este de a calcula limita unui raport de funcții cu ajutorul limitei raportului derivatelor lor, desigur în anumite condiții precizate de cele două reguli l'Hospital.

## 1. Cazul de nedeterminare: $\frac{0}{0}$

**Prima regulă a lui l'Hospital.** Fie $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ două funcţii cu proprietăţile:

**1)** $f, g$ derivabile pe $(a,b)$;

**2)** $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = \lim\limits_{x \searrow a} g(x) = 0$;

**3)** $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$;

**4)** există $\lim\limits_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci există limita $\lim\limits_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ şi mai mult $\lim\limits_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

**(limita raportului este egală cu limita raportului derivatelor).**

**Observaţii. 1) Interpretarea geometrică a regulii lui l'Hospital**

Fie $I = (a < t < b)$. Fie $\tilde{f}, \tilde{g}$ prelungirile lui $f$ şi $g$ şi $x = a$. În planul $xOy$ fie curba $(\Gamma)$ definită parametric prin: $x = \tilde{g}(t)$, $y = \tilde{f}(t)$. Deoarece $\tilde{f}(a) = \tilde{g}(a) = 0$, curba $(\Gamma)$ trece prin origine (Fig.29). Dacă $t > a$, în punctul P corespunzător de pe grafic există tangenta PT a cărei pantă este egală cu $\frac{d(y)}{d(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$.

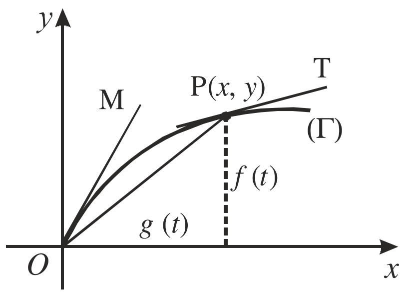


Fig. 29

În figură panta dreptei OP este egală cu $\frac{f(t)}{g(t)}$. Egalitatea $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, se traduce prin aceea că dacă panta tangentei PT are limita $l$, atunci panta corzii OP are aceeaşi limită, care ar putea fi panta tangentei OM la curba $(\Gamma)$.

**2)** Regula rămâne adevărată **mutatis mutandis** dacă $x \nearrow a$ (sau $x \to a$).

**3)** Regula are loc pentru cazul $a$ punct de acumulare finit.

Rezultatul rămâne valabil şi dacă punctul de acumulare este infinit $a = \infty$. Printr-o substituţie de forma $x = \frac{1}{t}$ se reduce acest caz la $a = 0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right)'}{\left(g\left(\frac{1}{t}\right)\right)'}\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{t^2}f'\left(\frac{1}{t}\right)}{-\frac{1}{t^2}g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**4)** Dacă expresia $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ reprezintă **din nou forma de nedeterminare** $\left(\frac{0}{0}\right)$ şi dacă funcțiile $f', g'$ satisfac condițiile teoremei precedente, atunci $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$. Aceste egalități ar putea fi înțelese în sensul că dacă a treia limită există, atunci şi prima şi a doua limita există.

## 2. Cazul de nedeterminare: $\frac{\infty}{\infty}$

**A doua regulă a lui l'Hospital.** Fie $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ două funcții cu proprietățile:

**1)** $f, g$ sunt derivabile pe $(a,b)$;

**2)** $\lim_{x\searrow a} f(x)=\lim_{x\searrow a} g(x)=\infty$;

**3)** $g(x)\neq 0, g'(x)\neq 0, \forall x\in(a,b)$;

**4)** există $\lim_{x\searrow a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\in\overline{\mathbb{R}}$.

Atunci există limita $\lim_{x\searrow a}\frac{f(x)}{g(x)}$ şi are loc egalitatea $\lim_{x\searrow a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\searrow a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

**Observații**. **1**) Regula rămâne valabilă **mutatis mutandis** pentru $x\nearrow a$ (sau $x\to a$) şi la fel dacă $x\to\pm\infty$.

**2**) În virtutea celor două reguli există o metodă generală de calcul a limitei câtului a doua funcții, bazată pe egalitatea:

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Această tehnică de lucru se numeşte **regula lui l'Hospital**.

**3**) Dacă $f', g'$ satisfac ipotezele din una din cele două reguli, regula lui l'Hospital se poate aplica pentru a doua oară:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

**4**) Prima şi a doua regulă a lui l'Hospital se referă la cazul când căutăm limita câtului a două funcții $f$ şi $g$ care tind simultan la zero sau la infinit când $x\to a$. A găsi o astfel de limită înseamnă a elimina o nedeterminare de tipul $\frac{0}{0}$ (sau $\frac{\infty}{\infty}$).

Vom arăta că şi celelalte cazuri de **nedeterminare:** $0\cdot\infty$, $\infty-\infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$ **sunt reductibile la cazurile** $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$. **Primele două prin transformări, iar ultimile trei, luând logaritmul funcțiilor corespunzătoare.**

**5**) În aplicațiile curente, condițiile din enunțul reguli sunt satisfăcute. De aceea, **de obicei**, se trece direct la calculul limitei în $a$ a funcției $\frac{f'}{g'}$. **Dacă aplicarea regulii conduce la o contradicție, înseamnă că, dintre condițiile teoremei, cel puțin una nu este îndeplinită.**

Dacă avem de calculat limita $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}$ (suntem în cazul $\frac{0}{0}$; $0\le\left|x^2\sin\frac{1}{x}\right|\le x^2 \Rightarrow x^2\sin\frac{1}{x}\to 0$ dacă $x\to 0$), atunci în încercarea de a aplica direct regula lui l'Hospital avem $\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{1}$, care nu există deoarece nu există $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$. Se observă că în acest caz condiția 4) din prima teoremă nu se îndeplinită. Totuşi limita dată este $\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$.

**6**) Reciproca regulii lui l'Hospital este falsă: adică $\frac{f}{g}$ are limită în $x=a$, nu rezultă că şi $\frac{f'}{g'}$ are limită în $x=a$. Într-adevăr fie funcțiile $f(x)=x+\sin x, g(x)=x$. Ne interesează limita $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$( suntem în cazul $\frac{\infty}{\infty}$; $x-1\le x+\sin x\le x+1$ plus criteriul majorării). Este clar că $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1$, dar $\frac{f'(x)}{g'(x)}=1+\cos x$, care nu are limită când $x\to\infty$.

**7**) Atregem atenția că nu întotdeauna aplicarea corectă a regulii lui l'Hospital conduce la situații mai simple. În aceste cazuri **se recomandă** fie **o rescriere pentru** $\frac{f}{g}$ **și o nouă încercare de a aplica regula lui l'Hospital**, fie **utilizarea limitelor structurilor cunoscute studiate la capitolul** "**Limite** de funcții".
De aceea recomandăm:

**În calculul limitelor de funcții combinarea metodelor elementare cu regulile lui l'Hospital.**

## Exerciții rezolvate

**1. Să se calculeze limitele:**

a) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} \frac{\arcsin(2x+1)}{4x^2-1}$ ; b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 2x-\cos 3x}{\sin 5x \sin 8x}$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$.

**R.** **a) Suntem în cazul de nedeterminare $\left(\frac{0}{0}\right)$ și aplicăm regula lui l'Hospital obținând:**

$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} \frac{\arcsin(2x+1)}{4x^2-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} \frac{\frac{2}{\sqrt{1-(2x+1)^2}}}{8x} = -\frac{1}{2}$. **Mai simplu era dacă am fi scris limita sub forma:**

$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} \frac{\arcsin(2x+1)}{2x+1}\cdot\frac{1}{2x-1} = \lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} \frac{\arcsin(2x+1)}{2x+1}\cdot \lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} \frac{1}{2x-1} = 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$, **unde am utilizat limita cunoscută** $\lim\limits_{u(x)\to 0} \frac{\arcsin u(x)}{u(x)} = 1$.

**b) Suntem în cazul de nedeterminare $\left(\frac{0}{0}\right)$. Aplicăm regula lui l'Hospital și obținem:**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x-\cos 3x}{\sin 5x \sin 8x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin 2x+3\sin 3x}{5\cos 5x \sin 8x+8\sin 5x\cos 8x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-4\cos 2x+9\cos 3x}{25\sin 5x\sin 8x+40\cos 5x\cos 8x+40\cos 5x\cos 8x-64\sin 5x\sin 8x} = \frac{5}{80} = \frac{1}{16}.$$

**Cu mai multă grijă am fi putut prelucra fracția asfel** $\frac{\cos 2x-\cos 3x}{5x\cdot 8x}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{8x}{\sin 8x}$.

**Pentru prima fracție utilizarea regulii lui l'Hospital conduce la**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x-\cos 3x}{40x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin 2x+3\sin 3x}{80x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{-4\cos 2x+9\cos 3x}{80} = \frac{5}{80} = \frac{1}{16}.$$

**Pentru celelalte fracții limita este egală cu unu. Scrierea fracției sub forma indicată conduce la calcule mai puține în aplicarea regulii lui l'Hospital.**
**c) Limita devine succesiv (se aplică regula lui l'Hospital)**

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x+2\sin 2x}{2\sin x\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-x\sin x+4\cos 2x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\frac{6}{2}=3.$$

**Mai simplu era dacă după prima aplicare a regulii lui l'Hospital am fi scris fracţia sub forma $\frac{1}{2\cos x}\cdot\left(1+\frac{x}{\sin x}\cdot\cos x+4\cos x\right)$ când limita este egală cu $\frac{1}{2}(1+1+4)=3$.**

**2. Să se calculeze limitele :**

**a) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^k}, k\in\mathbb{N}^*$; a') $\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{n^k}, k\in\mathbb{N}^*$; b) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^a}, a>0$ ; b') $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.**

**R. a) Fie $f(x)=e^x, g(x)=x^k$, evident funcţii derivabile pe $\mathbb{R}$.**

**Avem: $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$ (deci suntem în cazul $\frac{\infty}{\infty}$), $f'(x)=e^x, g'(x)=kx^{k-1}\neq 0$, $\forall x>0$. De asemenea există limita $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{kx^{k-1}}$. Cu această limită suntem din nou în cazul de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$. Se aplică regula lui l'Hospital pentru $\frac{f'}{g'}$ şi avem**

**$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{k(k-1)x^{k-2}}$. Aplicând de $k$ ori această regulă găsim: $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{k!}=\infty$. Aşadar**

**$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^k}=\infty$. În exerciţiile pe care le rezolvăm, convenim să detaliem doar situaţiile în care unele din condiţiile regulii lui l'Hospital nu sunt îndeplinite.Deci pentru exemplu de mai sus vom scrie:**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^k}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{kx^{k-1}}=\cdots=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{k!}=\infty.$$

**Observaţie. Din $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^k}=\infty$ rezultă uşor că $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{P_k(x)}=\infty$, unde $P_k(x)$ este o funcţie polinomială de grad $k$, limită ce are următoarea semnificaţie:**

**Funcţia exponenţială creşte mult mai repede decât orice funcţie polinomială, pentru valori mari ale argumentului.**

**a') Aici avem de calculat limita şirului $(a_n)$, cu $a_n=\frac{e^n}{n^k}, k\in\mathbb{N}^*$. Această limită se deduce din limita precedentă, transcriind-o în limbaj de şiruri.**

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall(x_n), x_n\to\infty \Rightarrow f(x_n)\to\infty, \text{ unde } f(x)=\frac{e^x}{x^k}.$$

**Luând $x_n=n\to\infty$, avem $f(n)=\frac{e^n}{n^k}\to\infty$.**

**b) Avem succesiv $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^a}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{ax^{a-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{ax^a}=0$. De aici se deduce uşor că $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{P_k(x)}=0$ ,pentru orice $P_k(x)$ funcţie polinomială de grad $k$, rezultat care afirmă că**

**Orice funcție polinomială crește mult mai repede decât funcția logaritmică, pentru valori mari ale argumentului.**

**b') Se scrie șirul sub forma** $\sqrt[n]{n}=n^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln n}$.

**În general dacă avem** $f^g$**, atunci** $\boxed{f^g=e^{g\ln f}}$ **, egalitate ce se verifică printr-o simplă logaritmare în bază** $e$.

**Deci** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}}\overset{b')}{=}e^0=1$.

**Observație. Sunt câteva exerciții simple prin care pledăm în calculul limitelor de funcții pentru utilizarea combinată a tehnicilor clasice (limite fundamentale) cu regula lui l'Hospital.**

## Exerciții propuse

**Să se determine următoarele limite:**

**I.** 1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4-1}{x^3-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x^2+5x+6}$; 3) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$; 4) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1}$;

5) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{5x+2}+2}{\sqrt{3x+10}-2}$; 6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$; 7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$; 8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{3x}$;

9) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}x}{\ln(1+2x)}$; 10) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(2x-1)}{x^2+x-2}$; 11) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\mathrm{arctg}x}{x^3}$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi-2\mathrm{arctg}x}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$;

13) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$; 14) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x\cos x}$; 15) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$; 16) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 2x}$;

17) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x-\sin x}$; 18) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$; 19) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 4x}{1-2\sin 2x-\cos 4x}$; 20) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(e^{x^2}-1\right)^2}{\frac{x^2}{2}+\cos x-1}$.

**II.** 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{5x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^n}{x^m}, n,m\in\mathbb{N}^*$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+e^x\right)}{x}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+2e^x\right)}{\ln\left(1+3e^x\right)}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x+e^x\right)}{\ln\left(x^2+e^{2x}\right)}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x+e^x}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+x^2-e^x}{x^3+x^4+e^{2x}}$.

## Alte cazuri de nedeterminare

**Celelalte cazuri de nedeterminare:** $0\cdot\infty,\infty-\infty,0^0,\infty^0,1^\infty$ **pot fi reduse la cazurile** $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$ **printr-o scriere adecvată pentru** $f\cdot g, f-g$ **și respectiv** $f^g$.

## 3. Cazul de nedeterminare: $0 \cdot \infty$

Pentru calculul limitei produsului $f \cdot g$ în punctul $x_0$ cu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, iar $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = \infty$ există două posibilități de rescriere a produsului $f \cdot g$.

**1)** Dacă $g(x) \neq 0$ pentru $x \neq x_0, x \in E$, atunci scriem $f \cdot g = \dfrac{f}{\frac{1}{g}}$ şi

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{g(x)} = 0$ când s-a redus cazul la $\dfrac{0}{0}$.

**2)** Dacă $f(x) \neq 0$ pentru $x \neq x_{0,} x \in E$, atunci avem scrierea $f \cdot g = \dfrac{g}{\frac{1}{f}}$ cu

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{|f(x)|} = \lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = \infty$ şi deci s-a redus cazul la $\dfrac{\infty}{\infty}$.

**Observație.** Se preferă unul sau celălalt caz după cum aplicarea regulii lui l'Hospital conduce mai rapid la rezultat.

### Exerciții rezolvate

**Să se calculeze limitele: a)** $\lim\limits_{x \searrow 0} x \ln x$ ; **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x$; **c)** $\lim\limits_{x \to 0} \sin x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)$;

**d*)** $\lim\limits_{x \to \infty} x\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x - e\right]$.

**R. a) Suntem în cazul $0 \cdot \infty$. Prelucrând după primul caz obținem:**

$\lim\limits_{x \searrow 0} x \ln x = \lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{x}{\frac{1}{\ln x}} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{1}{-\frac{1}{x \ln^2 x}} = -\lim\limits_{x \searrow 0} x \ln^2 x$, **iar acum avem de calculat o limită mai complicată decât cea inițială. În această situație se utilizează scrierea din cazul al doilea când avem:** $\lim\limits_{x \searrow 0} x \ln x = \lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \searrow 0} (-x) = 0$.

**b) Avem cazul de nedeterminare $0 \cdot \infty$. Obținem:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{\frac{1}{x}} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-x^2 e^x\right)$ **şi din nou avem de calculat o limită mai complicată decât cea inițială. Trecem la scrierea**

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{e^{-x}} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{-e^{-x}} = 0$.

**c) Avem cazul de nedeterminare $0 \cdot \infty$. Limita se scrie:**

$$\lim_{x\to 0}\sin x\cdot\ln(\mathrm{tg}x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\mathrm{tg}x)}{\frac{1}{\sin x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\mathrm{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos^2 x}=0.$$

**d*)** $\lim xe\left[\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-1\right]=e\lim x\left[e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1}-1\right]=e\lim x\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right]=$

$=e\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}=-\frac{e}{2}.$

## Exerciții propuse

**Să se calculeze limitele următoare:**

1) $\lim_{x\searrow 0}x^2\ln x$; 2) $\lim_{x\searrow 0}e^{-\frac{1}{x}}\ln x$; 3) $\lim_{x\to 0}x\mathrm{ctg}\,x$; 4) $\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{4}-\mathrm{arctg}\frac{x}{x+1}\right)$;

5) $\lim_{x\searrow e}\ln(x-e)\cdot(\ln x-1)$; 6) $\lim_{x\searrow 1}(x-1)\ln\sqrt{x^2+2x-3}$; 7) $\lim_{x\searrow 1}(x-1)e^{\frac{1}{x-1}}$.

## 4. Cazul de nedeterminare: $\infty-\infty$

Avem de calculat $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]$ și $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$ sau $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=-\infty$. Și în acest caz se poate reduce în două moduri la cazurile studiate până acum dacă uzităm scrierile

**1)** $f-g=\dfrac{\frac{f-g}{fg}}{\frac{1}{fg}}=\dfrac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}}$ când se obține cazul $\left(\frac{0}{0}\right)$ sau

**2)** $f-g=f\left(1-\frac{g}{f}\right)$ când pentru $\frac{g}{f}$ avem cazul $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Dacă aici $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{f(x)}=1$, atunci pentru $f\left(1-\frac{g}{f}\right)$ avem cazul de nedeterminare $0\cdot\infty$.

## Exerciții rezolvate

**Să se calculeze limitele: a)** $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\ln x)$; **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^x-x\right)$.

**R.** **a) Suntem în cazul de nedeterminare (** $\infty-\infty$ **). Se aduce limita la forma** $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)$,

**când** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$ **Deci limita cerută este egală cu** $\infty(1-0)=\infty$.

b) Avem nedeterminarea $(\infty-\infty)$. Limita se scrie $\lim\limits_{x\to\infty} e^x\left(1-\frac{x}{e^x}\right)$ unde

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0$. Deci limita este egală cu $\infty(1-0)=\infty$.

Observație. De remarcat că atât în cazul a), cât și în cazul b) am forțat factor comun funcția mai „puternică”: $x$ față de $\ln x$ ($a$)) și respectiv $e^x$ față de $x$ ($b$)).

## Exerciții propuse

Să se calculeze limitele:

1) $\lim\limits_{x\searrow 0}(\text{ctg}\,x+\ln x)$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\text{ctg}\,x-\frac{1}{x}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\text{ctg}^2 x\right)$;

5) $\lim\limits_{x\nearrow\frac{\pi}{2}}(\text{tg}\,x-\text{tg}\,3x)$ ; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\pi x}{2}-x\,\text{arctg}\,x\right)$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

8) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x+1}{x^2+x-2}-\frac{1}{x\ln x}\right)$; 9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x(x+1)(x+2)}-x\right)$.

## 5. Cazurile de nedeterminare: $0^0, \infty^0, 1^\infty$ (facultativ)

Suntem în situația de a calcula $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}$ (în ipoteza $f(x)>0$, $\forall x\neq x_0,\ x,\ x_0\in E$).

Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, atunci suntem în cazul $0^0$; dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, atunci avem nedeterminarea $\infty^0$, iar dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1$ și $\lim\limits_{x\to x_0}|g(x)|=\infty$ ,atunci avem nedeterminarea $1^\infty$.

Pentru a calcula limita funcției $f^g$ pentru $x\to x_0$ se utilizează egalitatea

$$\boxed{f^g=e^{g\ln f}}$$

(se demonstrează aplicând funcția ln), care o reducem la calculul limitei $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)$, cu care ne plasăm în cazul $0\cdot\infty$.

## Exerciții rezolvate

Să se calculeze următoarele limite: a) $\lim\limits_{x\searrow 0} x^x$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$;

R. a) Avem $\lim\limits_{x\searrow 0} x^x=\left(0^0\right)=\lim\limits_{x\searrow 0} e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\searrow 0} x\ln x}$.

Dar $\lim_{x\searrow 0} x\ln x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\searrow 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\searrow 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$. Aşadar $\lim_{x\searrow 0} x^x=e^0=1$.

b) Suntem în cazul de nedeterminare $\infty^0$. Limita se scrie:

$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}=(\infty^0)=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln x}$, când $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$.

Deci limita cerută este $e^0=1$.

c) Limita devine $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=(1^\infty)=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\cos x}$,

iar $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x\cos x}=-\frac{1}{2}$, unde am folosit că $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Aşadar limita cerută este $e^{-\frac{1}{2}}$.

## Exerciţii propuse

**1.** Să se calculeze limitele:

I. $(0^0)$ 1) $\lim_{x\searrow 0} x^{\mathrm{tg}x}$ ; 2) $\lim_{x\searrow 0}(\sin x)^{\sin x}$; 3) $\lim_{x\searrow 0}[\ln(1+x)]^x$; 4) $\lim_{x\searrow 1}(\ln x)^{x-1}$;

5) $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)^x$; 6) $\lim_{x\searrow 0}(2^x-1)^{\sin x}$; 7) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$; 8) $\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$;

9) $\lim_{x\to 0}\left(x\cos\frac{x}{x^2+1}\right)^{\frac{x}{x^2+1}}$.

II. $(\infty^0)$ 1) $\lim_{x\searrow 0}(\mathrm{ctg}\,x)^x$; 2) $\lim_{x\to\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$; 3) $\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$; 4) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\mathrm{tg}\,x)^{2x-\pi}$;

5) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\mathrm{tg}\,x}$; 6) $\lim_{x\to\infty}(x^2+x+1)^{\frac{1}{x}}$; 7) $\lim_{x\to\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$.

III. $(1^\infty)$ 1) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}$; 2) $\lim_{x\to 5}(6-x)^{\frac{1}{x-5}}$; 3) $\lim_{x\searrow 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; 4) $\lim_{x\searrow 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$;

5) $\lim_{x\to 1}(\ln ex)^{\frac{1}{x-1}}$; 6) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}\,x\right)^x$; 7) $\lim_{x\to 0}(1+\arcsin x)^{\frac{1}{\sin x}}$; 8) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(2-tg\,x)^{\frac{1}{\sin x-\cos x}}$;

9) $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$; 10) $\lim_{x\to 0}[\cos(\sin x)]^{\frac{1}{x^2}}$; 11) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\mathrm{ctg}\,x}$; 12) $\lim_{x\searrow 0}(1+\mathrm{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$;

13) $\lim_{x\to 0}\left[\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]^{\frac{1}{\sin x}}$; 14) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; 15) $\lim_{x\to 0}(e^x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$;

16) $\lim_{x\to 0}(\cos x+\sin^2 x)^{\frac{1}{x^2}}$; 17) $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}+x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right]^x$; 18) $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}+x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^x$.

**2.** Cum poate fi utilizată regula lui l'Hospital pentru calculul următoarelor limite de şiruri:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{e^n}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^n+n\right)^{\frac{1}{n}}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} n\right)^{\frac{1}{n}}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi n}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{tg}^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+\ln n}$ .

**3.** **Să se arate că limitele: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=1$ ; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=0$ , nu pot fi găsite cu regula lui l'Hospital.**

## 4.9. STUDIUL FUNCŢIILOR CU AJUTORUL DERIVATELOR. ROLUL DERIVATEI A DOUA

### 1.Convexitate şi concavitate

Am văzut că semnul primei derivate dă informaţii asupra monotoniei funcţiei, iar zerourile primei derivate sunt eventuale puncte de extrem. Aceste informaţii şi altele le utilizăm în trasarea graficului unei funcţii, numai că în destule cazuri, sunt necesare şi informaţii suplimentare, care să le întregească pe cele furnizate de prima derivată. Aşa de pildă o funcţie derivabilă poate fi strict crescătoare în două moduri, după cum tangenta la grafic se află sub grafic (Fig. 30.a) ) sau deasupra graficului (Fig.30.b) ). Analog, o funcţie derivabilă poate fi strict descrescătoare în două moduri după poziţia tangentei la grafic în raport cu acesta: sub grafic (Fig.31.a) ) sau deasupra graficului (Fig.31.b) ).

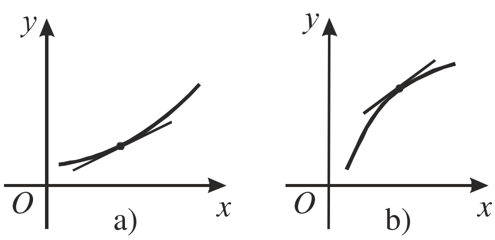



Fig. 30

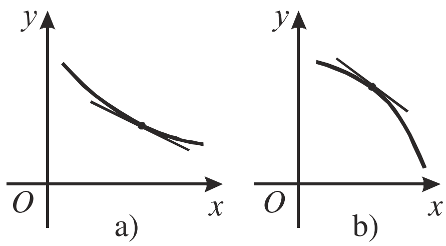



Fig. 31

Prin următoarea definiţie precizăm riguros formele graficului prezente mai sus.

**Definiţii. 1**) O funcţie $f:I\to\mathbb{R}, I\subseteq\mathbb{R}$ interval, se numeşte **convexă pe intervalul** $I$ dacă $\forall x_1,x_2\in I, \forall t\in[0,1]$ are loc inegalitatea :

$$f\left((1-t)x_1+tx_2\right)\le(1-t)f(x_1)+tf(x_2).$$

**2**) O funcţie $f:I\to\mathbb{R}, I\subseteq\mathbb{R}$ interval, se numeşte **concavă pe intervalul** $I$ dacă $\forall x_1,x_2\in I, \forall t\in[0,1]$ are loc inegalitatea:

$$f\left((1-t)x_1+tx_2\right)\ge(1-t)f(x_1)+tf(x_2).$$

**Observaţii. 1**) Dacă în definiţia precedentă inegalităţile sunt stricte atunci spunem că funcţia $f$ este **strict convexă** şi respectiv **strict concavă**.

**2**) Este imediat că funcția $f$ este **concavă** dacă $(-f)$ este **convexă** pe $I$.

**3**) Funcția convexă (concavă) pe un interval admite următoarea interpretare geometrică. Să considerăm punctele $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $x_1 \neq x_2$ aparținând graficului funcției $f$ și punctul $x_t = (1-t)x_1 + tx_2, t \in [0,1]$, care aparține segmentului de capete $x_1, x_2$ (se verifică ușor dubla inegalitate $x_1 \leq x_t \leq x_2$ ) (Fig.32).

Coarda $AB$ are ecuația $y = f(x_2) + \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_2)$ și ordonata punctului $C$ de abscisă $x_t$ de pe această coardă va fi

$$y_c = f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_t - x_2) = (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Dacă $f$ este convexă, atunci $f(x_t) \leq y_c$. Punctul $C'$ aparținând graficului are coordonatele $(x_t, f(x_t))$. Semnificația inegalității $f(x_t) \leq y_c$, cazul funcției convexe, este aceea că **graficul funcției $f$ este situat sub orice coardă dacă unim două puncte situate pe graficul funcției**, cu abscisele aparținând lui $I$.

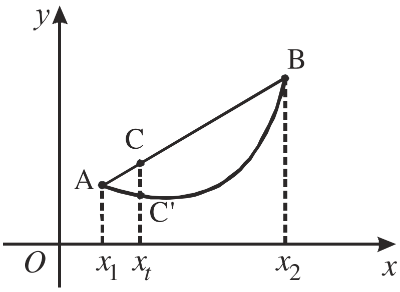


Fig. 32

Analog, semnificația inegalității $f(x_t) \geq y_c$, cazul funcției concave, este că **graficul funcției $f$ este situat deasupra coardei determinate de orice două puncte situate pe graficul funcției, cu abscisele aparținând lui *I*.** Dacă în fiecare punct graficul funcției admite o tangentă unică, atunci inegalitatea $f(x_t) \leq y_c$ este echivalentă cu faptul că în fiecare punct $(x, f(x)), x \in [x_1, x_2]$ tangenta la graficul lui $f$ este situată **sub** graficul lui $f$. O interpretare analogă pentru inegalitatea $f(x_t) \geq y_c$.

Se mai spune despre funcția convexă că are graficul o **curbă convexă**, iar despre funcția concavă că are graficul o **curbă concavă**. În limbajul trivial spunem despre graficul convex, având forma secțiunii unui vas cu gura în sus, că „ține apa”, în timp ce graficul concav „nu ține apa”.

## Exerciții rezolvate

**Să se demonstreze că au loc următoarele proprietăți:**

**1) Produsul dintre o funcție convexă și o funcție constantă pozitivă este o funcție convexă.**

**2) O sumă finită de funcții convexe este o funcție convexă.**

**3) Dacă $g: I \to J \subseteq \mathbb{R}, f: J \to \mathbb{R}, g$ convexă ,iar $f$ convexă și crescătoare, atunci $f \circ g$ este convexă.**

**4) Dacă $g$ este inversa lui $f$ , atunci au loc afirmațiile:**

a) $f$ **convexă, crescătoare** $\Rightarrow g$ **concavă, crescătoare;**

b) $f$ **convexă, descrescătoare** $\Rightarrow$ **g convexă, descrescătoare;**

c) $f$ **concavă, descrescătoare** $\Rightarrow g$ **concavă, descrescătoare.**

**5) Dacă** $f: I \to \mathbb{R}$, $I$ **interval, este o funcție neconstantă și convexă, atunci** $f$ **nu-și poate atinge valoarea cea mai mare în interiorul intervalului.**

**R. Demonstrăm 3) și 5).**

**3) Din** $g$ **convexă pe** $I$ **rezultă**

$$g\left((1-t)x_1+tx_2\right) \le (1-t)g(x_1)+tg(x_2), \forall x_1,x_2 \in I, \forall t \in [0,1].$$

**De aici rezultă (** $f$ **crescătoare, combinată cu** $f$ **convexă):**

$(f \circ g)\left((1-t)x_1+tx_2\right) \le f\left((1-t)g(x_1)+tg(x_2)\right) \le (1-t)(f \circ g)(x_1)+t(f \circ g)(x_2)$, **ceea ce arată că** $f \circ g$ **este convexă ( de observat momentul când a intervenit faptul că** $f$ **este crescătoare- deci de reținut că** $f, g$ **convexe nu implică numai decât** $f \circ g$ **convexă!).**

**5) Vom demonstra prin reducere la absurd. Presupunem că** $f$ **își atinge valoarea cea mai mare în** $x_0$ **din interiorul intervalului** $I$**. Cum** $f$ **nu este constantă rezultă că** $x_0$ **poate fi inclus într-un interval** $(x_1,x_2)$ **astfel încât** $x_1 < x_0 < x_2$ **și cel puțin la capetele intervalului** $f$ **să fie strict mai mică decât** $f(x_0)$**. Fie** $f(x_1) < f(x_0), f(x_2) \le f(x_0)$**. Punem** $x_0 = (1-t)x_1+tx_2$ **și înmulțim prima inegalitatea cu** $(1-t)$**, a doua cu t și le adunăm, când avem:**

$(1-t)f(x_1)+tf(x_2) < f(x_0) = f\left((1-t)x_1+tx_2\right)$, **relație ce contrazice convexitatea lui** $f$ **.**

## Exerciții propuse

**Formulați proprietăți analoge cu 1), 2), 3), 5), de la exerciții rezolvate pentru funcții concave.**

### 2.Condiție suficientă de convexitate( concavitate)

Următorul rezultat vine să caracterizeze funcțiile convexe (concave) pe un interval prin intermediul semnului celei de-a doua derivate.

Mai precis are loc următoarea:

**Teoremă.** Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}, a<b$ o funcție de două ori derivabilă pe $[a,b]$.

**1**) Dacă $f''(x) \ge 0, \forall x \in (a,b)$, atunci funcția $f$ este convexă pe intervalul $[a,b]$.

**2**) Dacă $f''(x) \le 0, \forall x \in (a,b)$, atunci funcția $f$ este concavă pe intervalul $[a,b]$.

**Demonstrație**. **1**) Fie $a \le x_1 < x_2 \le b$. Pentru fiecare punct $x \in (x_1,x_2)$ se aplică teorema lui Lagrange funcției $f$ pe intervalele $[x_1,x]$, $[x,x_2]$ și deci există $c_1 \in (x_1,x), c_2 \in (x,x_2)$ astfel încât

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(c_1), \quad \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(c_2).$$

Cum $c_1 < c_2$ rezultă $f'(c_1) \le f'(c_2)$ (din enunț $f'' \ge 0$ arată că $f'$ este crescătoare) adică $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$.

Din $x \in (x_1, x_2)$ arbitrar, aceasta este echivalentă cu scrierea: $x = (1-t)x_1 + tx_2, \forall t \in (0,1)$.

Înlocuind pe $x$ în inegalitatea de mai sus rezultă $f(x) \le (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$, ceea ce arată că $f$ este convexă pe $[a,b]$.

**2**) Analog. ■

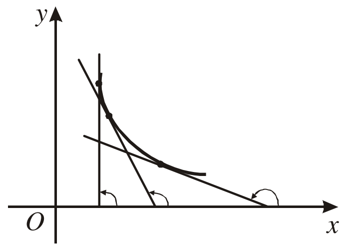


Fig. 33

**Observații**. **1**) Este valabilă şi afirmația reciprocă şi anume : Dacă $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ este de două ori derivabilă pe $[a,b]$ şi este convexă (concavă), atunci $f'' \ge 0 (\le 0)$.

**2**) **Interpretarea geometrică**. Derivata a doua $f''$, fiind derivata primei derivate, din $f'' \ge 0$ se deduce că $f'$ este o funcție crescătoare , ceea ce înseamnă că pentru un grafic convex panta tangentei la grafic creşte când punctul de tangență se deplasează spre dreapta (Fig.33). O interpretare analogă se poate da dacă $f'' \le 0$.

### Intervale de convexitate (concavitate)

Am văzut în paragraful precedent că dacă $f: I \to \mathbb{R}$ este o funcție de două ori derivabilă pe intervalul $I$ şi dacă $f'' \ge 0$, atunci $f$ este convexă pe $I$, iar dacă $f'' \le 0$, funcția este concavă pe $I$. Aşadar semnul celei de-a doua derivate permite să găsim intervalele de convexitate şi concavitate pentru o funcție. Pentru determinarea intervalelor de convexitate(concavitate) recomandăm parcurgerea etapelor:

**1**) Se calculează $f''$;

**2**) Se rezolvă ecuația $f''(x) = 0$;

**3**) Cu ajutorul rădăcinilor derivatei a doua se determină intervalele pe care derivata a doua păstrează acelaşi semn;

**4**) Dacă $f'' > 0$ pe un interval , atunci $f$ este convexă pe acel interval, iar dacă $f'' < 0$ pe un interval, atunci $f$ este concavă pe acel interval.

Faptul că pe un interval $[x_1, x_2]$, $f$ este convexă, se marchează într-un tabel de

forma:

| $x$ | $x_1$ | | | | | $x_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | | | $\smile$ | | | |
| $f''$ | + | + | + | + | + | |

iar dacă este concavă

| $x$ | $x_1$ | | | | | $x_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | | | $\frown$ | | | |
| $f''$ | - | - | - | - | - | |

## Exerciţii rezolvate

**1. Să se determine intervalele de convexitate şi concavitate pentru următoarele funcţii:**

**a)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+3x^2$ ; **b)** $f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$;

**c)** $f(x)=x^2e^x$ ; **d)** $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x\ln x$ ; **e)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x-\cos x$.

**R. a) Calculăm $f''$ şi avem $f'(x)=3x^2+6x, f''(x)=6(x+1)$. Ecuaţia $f''(x)=0$ are soluţia $x=-1$. Se întocmeşte tabelul de semn pentru $f''$, care are forma :**

| $x$ | $-\infty$ | | -1 | | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\frown$ | | 2 | $\smile$ | | |
| $f''(x)$ | - | - | 0 | + | + | + |

**Deci pe intervalul $(-\infty,-1)$ funcţia este concavă,iar pe intervalul $(-1,\infty)$ funcţia este convexă.**

**b) Avem : $f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}$; $f''(x)=\dfrac{-4}{(x+1)^3}$.**

**Tabelul cu semnul lui $f''$ este**

| $x$ | $-\infty$ | | -1 | | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\smile$ | | \| | $\frown$ | | |
| $f''(x)$ | + | + | \| | - | - | - |

**din care deducem că funcţia este convexă pe intervalul $(-\infty,-1)$ şi concavă pe intervalul $(-1,\infty)$.**

**c) Avem: $f'(x)=(x^2+2x)e^x$ şi $f''(x)=(x^2+4x+2)e^x$. Ecuaţia $f''(x)=0$ are soluţiile $x_{1,2}=-2\pm\sqrt{2}$ .Tabelul cu semnul lui $f''$ este :**

| $x$ | $-\infty$ | | $-2-\sqrt{2}$ | | | $-2+\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\smile$ | | | $\frown$ | | | $\smile$ | |
| $f''(x)$ | + | + | 0 | - | - | 0 | + | + |

**Deci $f$ este funcție convexă pe intervalele $\left(-\infty,-2-\sqrt{2}\right)$, $\left(-2+\sqrt{2},\infty\right)$ şi concavă pe intervalul $\left(-2-\sqrt{2},-2+\sqrt{2}\right)$.**

**d) Calculăm $f''$. Avem $f'(x)=\ln x+1$, $f''(x)=\dfrac{1}{x}$. Ecuația $f''(x)=0$ nu are soluții. Tabelul are forma:**

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $\smile$ | |
| $f''(x)$ | | $+\ +\ +\ +\ +$ | |

**Deci $f$ este convexă pe domeniul de definiție.**

**e) $f'(x)=\cos x+\sin x$, $f''(x)=-\sin x+\cos$. Ecuația $f''(x)=0$ este $\operatorname{tg}x=1$ cu soluțiile $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Funcția $f$ find periodică se constantă că şi $f'$ şi $f''$ au aceeaşi calitate ( demonstrați ! ). Perioada principală este $T_0=2\pi$. Deci este suficient să stabilim intervalele de convexitate pe $[0,2\pi]$, iar pe $\mathbb{R}$ le determinăm adăugând la capetele intervalelor găsite pe $[0,2\pi]$ multiplu de perioada principală.**
**Tabelul este**

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{4}$ | | $\frac{5\pi}{4}$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $\smile$ | | $\frown$ | | $\smile$ | |
| $f''(x)$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-\ -$ | $0$ | $+$ | $+$ |

**Deci $f$ este convexă pe intervalele $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right),\left(\dfrac{5\pi}{4},2\pi\right)$ şi concavă pe intervalul $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right)$. Acum pe $\mathbb{R}$ avem că $f$ este convexă pe intervalele $\left(2k\pi,\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\right),\left(\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi,2\pi+2k\pi\right)$ $,k\in\mathbb{Z}$ şi concavă pe intervalele $\left(\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi\right),k\in\mathbb{Z}$.**

**2.(Inegalitatea lui Jensen) Dacă $f:I\to\mathbb{R}$, $I$ interval, este o funcție convexă, atunci**
**$f\left(q_1x_1+q_2x_2+...+q_nx_n\right)\le q_1f\left(x_1\right)+q_2f\left(x_2\right)+...+q_nf\left(x_n\right)$, unde**
**$q_i>0, i=\overline{1,n}, q_1+q_2+...+q_n=1, \forall\, x_i\in I, q_1x_1+...+q_nx_n\in I$.**
**Dacă $f$ este concavă, atunci are loc inegalitatea de sens contrar.**

**R. Demonstrația se va face prin inducție matematică după $n$ .Vom presupune că $f$ este convexă. Pentru $n=2$ afirmația are loc, fiind chiar definiția funcției convexe. Presupunem inegalitatea adevărată pentru $n$ şi o demonstrăm pentru $n+1$ ,adică fie $x_1,x_2,...,x_{n+1}\in I$ şi $(n+1)$ numere positive $q_1,q_2,..,q_{n+1}$ cu $q_1+...+q_{n+1}=1$. Să arătăm că $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n+1}q_ix_i\right)\le\sum\limits_{i=1}^{n+1}q_if\left(x_i\right)$.**

**Se înlocuieşte în stânga suma ultimilor doi termeni $q_nx_n+q_{n+1}x_{n+1}$ cu un singur termen scriind $\left(q_n+q_{n+1}\right)\left(\dfrac{q_n}{q_n+q_{n+1}}x_n+\dfrac{q_{n+1}}{q_n+q_{n+1}}x_{n+1}\right)=x_n'$ . Deci**

$f\left(q_1x_1+...+\left(q_n+q_{n+1}\right)x_n^{'}\right)\le q_1f\left(x_1\right)+...+\left(q_n+q_{n+1}\right)f\left(x_n^{'}\right)$

$\le q_1f\left(x_1\right)+...+\left(q_n+q_{n+1}\right)\left[\frac{q_n}{q_n+q_{n+1}}f\left(x_n\right)+\frac{q_{n+1}}{q_n+q_{n+1}}f\left(x_{n+1}\right)\right]=\sum_{i=1}^{n+1}q_if\left(x_i\right)$.

**Conform metodei inducției matematice, inegalitatea este adevărată $\forall n\ge 2$.**

**3. Să se demonstreze că într-un triunghi $ABC$ au loc inegalitățile :**

**1) $\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ; 2) $\cos A\cos B\cos C\le\frac{1}{8}$ ; 3) $\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{a+c-b}+\frac{c}{a+b-c}\ge 3$;**

**4) $r_a+r_b+r_c\ge 9r$, unde $r_a,r_b,r_c$ reprezintă razele cercurilor exînscrise triunghiului $ABC$.**

**R. 1) Funcția $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x$ cu $f''(x)=-\sin x<0,\forall x\in(0,\pi)$ este o funcție concavă pe $[0,\pi]$. Deci (luăm $q_1=q_2=q_3=\frac{1}{3}$ în inegalitatea lui Jensen)**

**$f\left(\frac{1}{3}A+\frac{1}{3}B+\frac{1}{3}C\right)=f\left(\frac{A+B+C}{3}\right)\ge\frac{1}{3}f(A)+\frac{1}{3}f(B)+\frac{1}{3}f(C)$, adică exact inegalitatea dorită.**

**2) Dacă un unghi al triunghiului este obtuz, atunci cosinusul acelui unghi este negativ şi deci întreg membru stâng este la fel, şi inegalitatea se verifică. Presupunem că $A,B,C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Inegalitatea se logaritmează şi se scrie echivalent $\ln\cos A+\ln\cos B+\ln\cos C\le\ln\frac{1}{8}$.**

**Se ia acum funcția $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln\cos x$, pentru care $f''(x)=-\frac{1}{\cos^2 x}<0$, ceea ce arată că $f$ este concavă ( Altfel se poate decide că este concavă fiind compunere de funcții $g(x)=\cos x$, care este concavă şi $h(x)=\ln x$, care este concavă şi crescătoare.**

**Atunci $f=h\circ g$ este concavă) Deci $f\left(\frac{A+B+C}{2}\right)\ge\frac{1}{3}f(A)+\frac{1}{3}f(B)+\frac{1}{3}f(C)$ sau**

**$\ln\cos\frac{\pi}{3}\ge\frac{1}{3}\ln\cos A+\frac{1}{3}\ln\cos B+\frac{1}{3}\ln\cos C$, adică $3\ln\frac{1}{2}\ge\sum\ln\cos A$.**

**3) Notând $a+b+c=2p$, atunci inegalitatea se rescrie $\frac{a}{2(p-a)}+\frac{b}{2(p-b)}+\frac{c}{2(p-c)}\ge 3$, ceea ce sugerează( termenii din stânga) considerarea funcției $f:(0,p)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{2(p-x)}$ pentru care $f''(x)>0$ ceea ce arată că $f$ este convexă.**

**Aşadar $f\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c\right)\le\frac{1}{3}f(a)+\frac{1}{3}f(b)+\frac{1}{3}f(c)$ sau încă**

**$f\left(\frac{2p}{3}\right)\le\frac{1}{3}\left[\frac{a}{2(p-a)}+\frac{b}{2(p-b)}+\frac{c}{2(p-c)}\right]$ sau în final $3\le\frac{a}{2(p-a)}+\frac{b}{2(p-b)}+\frac{c}{2(p-c)}$.**

**4) Se ştie că $r_a=\frac{s}{p-a},...,r=\frac{s}{p}$. Prin urmare $\frac{r_a}{r}=\frac{p}{p-a}$ şi inegalitatea devine**

**$\frac{p}{p-a}+\frac{p}{p-b}+\frac{p}{p-c}\ge 9,\ (1)$. Luăm funcția $f:(0,p)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{p-x}$ cu $f''>0$, ceea ce arată că $f$ este convexă. Aşadar $f\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c\right)\le\frac{1}{3}f(a)+\frac{1}{3}f(b)+\frac{1}{3}f(c)$ sau**

$f\left(\frac{2p}{3}\right) \le \frac{1}{3}\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)$ adică $\frac{3}{p} \le \frac{1}{3}\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)$, iar de aici găsim uşor inegalitatea $(1)$.

## Exerciţii propuse

**1.** **Să se determine intervalele de convexitate şi concavitate pentru funcţiile următoare ( $f : D \to \mathbb{R}$, unde $D$ este domeniul maxim de definiţie) :**

1) $f(x)=x^3-5x^2+3x-5$ ; 2) $f(x)=x^3-6x^2+12x+4$ ; 3) $f(x)=-x^4-2x^3+36x^2+x$ ;

4) $f(x)=3x^5-5x^4+3x-2$ ; 5) $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$ ; 6) $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ ; 7) $f(x)=\frac{(x+1)^2}{x-1}$ ;

8) $f(x)=\frac{x^3}{x^2+12}$ ; 9) $f(x)=x\left|\frac{x}{1+x}\right|$ ; 10) $f(x)=\sqrt[3]{x+2}$ ; 11) $f(x)=\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}$ ;

12) $f(x)=x\sqrt{\frac{x-1}{3x+1}}$ ; 13) $f(x)=\sqrt[3]{4x^3-12x}$ ; 14) $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ ; 15) $f(x)=x^2\ln x$ ;

16) $f(x)=x\ln(1+|x|)$ ; 17) $f(x)=x-\ln|x|$ ; 18) $f(x)=\frac{\ln x}{1+\ln x}$ ; 19) $f(x)=xe^x$ ;

20) $f(x)=e^{-x^2}$ ; 21) $f(x)=(1+x^2)e^x$ ; 22) $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$ ; 23) $f(x)=\frac{1}{x}e^{\frac{1}{|x-1|}}$ ;

24) $f(x)=x-\sin x$ ; 25) $f(x)=\frac{\sin x+1}{\sin x}$ ; 26) $f(x)=\operatorname{arctg} x-x$ ;

27) $f(x)=\arcsin\frac{1-x}{1+x}$ ; 28) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2-1}$ ; 29) $f(x)=x^x$.

**2.** **Aplicând funcţiei concave $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x$, inegalitatea lui Jensen ,să se demonstreze inegalitatea dintre media geometrică şi cea aritmetică.**

**3.** **Aplicând funcţiei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x\ln x$, inegalitatea lui Jensen să se demonstreze inegalitatea dintre media geometrică şi cea armonică.**

**4.** **Să se demonstreze că într-un triunghi $ABC$ au loc inegalităţile :**

1) $\cos A+\cos B+\cos C \le \frac{3}{2}$,cu $A,B,C \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ; 2) $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$ ;

3) $\sqrt{\cos A}+\sqrt{\cos B}+\sqrt{\cos C} \le \frac{3\sqrt{2}}{2}, A,B,C \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ;4) $\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C \ge 3\sqrt{3}, A,B,C \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

5*) $a+b+c \le \frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{a+c-b}+\frac{c^2}{a+b-c}$.

**5.** **Să se arate că dacă $a,b,c,d$ sunt laturile unui patrulater convex, atunci**

$$\frac{a}{b+c+d-a}+\frac{b}{a+c+d-b}+\frac{c}{a+b+d-c}+\frac{d}{a+b+c-d} \ge 2.$$

## 3.Condiţie suficientă pentru un punct de inflexiune

În paragraful 4.3.4 am definit ce este un punct de inflexiune cu precizările de rigoare a ceea ce înseamnă că graficul este convex sau concav.

Are loc următoarea:

**Teoremă**. Fie $f : E \to R$ şi $x_0$ un punct din intervalul $E$.
Dacă $f$ este de două ori derivabilă într-o vecinătate $V$ a lui $x_0$ şi dacă există două numere $\alpha, \beta \in V$ astfel încât

**1)** $\alpha < x_0 < \beta$;

**2)** $f''(x_0) = 0$;

**3)** ( $f'' < 0$ pe $(\alpha, x_0)$ şi $f'' > 0$ pe $(x_0, \beta)$ )sau ( $f'' > 0$ pe $(\alpha, x_0)$ şi $f'' < 0$ pe $(x_0, \beta)$ ), atunci $x_0$ este punct de inflexiune pentru $f$.

Punctul $M(x_0, f(x_0))$ se numeşte **punct de inflexiune al graficului**.

**Demonstrație**. Din definiția punctului de inflexiune şi teorema de la paragraful "Condiție suficientă de convexitate". ■

**Observații**. **1)** $x_0$ este punct de inflexiune dacă $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ şi $f'''(x_0) \neq 0$.

**2)** Condiția $f''(x_0) = 0$ nu implică automat $x_0$ punct de inflexiune. Într-adevăr fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^4$ pentru care $f'(x) = 4x^3$ şi $f''(x) = 12x^2$. Ecuația $f''(x) = 0$ are soluția $x_0 = 0$, care însă nu este punct de inflexiune pentru $f$ deoarece $f''(x) > 0$, atât pentru $x < 0$ cât şi pentru $x > 0$.

**3)** Condiția ca $f$ **să fie continuă** în $x_0$ **este importantă**.

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, x \leq 0 \\ -\sqrt{x}, x > 0 \end{cases}$ cu $f''(x) = \begin{cases} -2, x < 0 \\ \dfrac{1}{4\sqrt{x}}, x > 0 \end{cases}$ ,ceea ce înseamnă că pe intervalul $(-\infty, 0)$, $f'' < 0$, adică $f$ este concavă, iar pe $(0, \infty)$, $f'' > 0$, adică $f$ este convexă. Dar $x_0 = 0$ nu este punct de inflexiune **funcția nefiind continuă în acest punct**.

**4)** De asemenea dacă $f$ **nu are derivată** (finită sau infinită) în $x_0$, atunci $x_0$ **nu este punct de inflexiune** pentru $f$.

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2, x \leq 0 \\ \sqrt{x}, x > 0 \end{cases}$ cu $f'(x) = \begin{cases} 2x, x < 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0 \end{cases}$ şi

$$f''(x) = \begin{cases} 2, x > 0 \\ -\dfrac{1}{4\sqrt{x^3}}, x > 0 \end{cases}.$$

Se constată că $f$ este continuă în $x_0 = 0$ şi $f_s^{'}(0) = 0$, $f_d^{'}(0) = \infty$. Deci $f$ nu are derivată în $x_0 = 0$. Acest punct este **punct unghiular pentru** $f$, deşi $f'' > 0$ dacă $x < 0$ şi $f'' < 0$ pentru $x > 0$.

**5**) Pentru ca $x_0$ să fie punct de inflexiune pentru funcţia $f$ (îndeplinid condiţiile teoremei) trebuie să avem una din situaţiile indicate mai jos.

| $x$ | $0$ | | | $x_0$ | | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $\smile$ | | | $\frown$ | | |
| $f''(x)$ | | + | + | 0 | - | - | |

| $x$ | $0$ | | | $x_0$ | | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $\frown$ | | | $\smile$ | | |
| $f''(x)$ | | - | - | 0 | + | + | |

## Exerciţii rezolvate

**Să se determine punctele de inflexiune pentru funcţiile:**

**1)** $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - x + 2$; **2)** $f:\mathbb{R} - \{\pm 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$;

**3)** $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

**R.1) Avem** $f'(x) = 3x^2 - 1$ **şi** $f''(x) = 6x$ **. Ecuţia** $f''(x) = 0$ **are soluţia** $x = 0$ **.Cum** $f''(x) < 0$ **dacă** $x < 0$ **şi** $f''(x) > 0$ **dacă** $x > 0$ **rezultă că** $x = 0$ **este punct de iflexiune pentru** $f$ **, iar punctul** $(0,2)$ **este punct de inflexiune pentru graficul funcţiei.**

**2) Se calculează** $f''$ **şi se rezolvă ecuaţia** $f''(x) = 0$ **.**

**Avem:** $f''(x) = \dfrac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}$, $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ **. Tabelul ( în jurul punctului** $x = 0$ **)**

| $x$ | $-1$ | | | $0$ | | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $\frown$ | | | $\smile$ | | |
| $f''(x)$ | | - | - | 0 | + | + | |

**arată că** $x = 0$ **este punct de inflexiune pentru** $f$ **iar punctul** $(0,0)$ **este punct de inflexiune pentru grafic.**

**3) Avem** $f''(x) = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3} = 0$ **implică** $x = e^{\frac{3}{2}}$ **. Tabelul arată că** $x = e^{\frac{3}{2}}$ **este punct de inflexiune pentru funcţie.**

| $x$ | $0$ | | | $e^{\frac{3}{2}}$ | | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $\frown$ | | | $\smile$ | | |
| $f''(x)$ | | - | - | 0 | + | + | |

## Exerciții propuse

**Să se determine punctele de inflexiune pentru funcțiile:**

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-5x^2+3x-5$; 2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$;

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2}$; 4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^{-x^2}$;

5) $f:\mathbb{R}-\{-1,0\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{1+x}e^{\frac{1}{x}}$; 6) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^2\ln x$;

7) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\arcsin\dfrac{x-1}{\sqrt{2(x^2+1)}}$; 8) $f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{1-x}$;

9) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-2\operatorname{arctg}x$; 10) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(1+x^2)$.

### 4.Condiție suficientă pentru un punct de extrem

S-a văzut că studiind semnul derivatei întâi de o parte şi de alta a unui punct de extrem, se poate preciza dacă acesta este punct de maxim sau de minim.Următorul rezultat spune că aceeaşi concluzie se poate trage dacă studiem semnul derivatei a doua **în punctul de extrem**. Mai precis are loc:

**Teorema**. Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă şi $x_0\in(a,b)$ un punct de extrem pentru $f$.

**1**) Dacă $f''(x_0)>0$, atunci $x_0$ este **punct de minim local** pentru $f$.

**2**) Dacă $f''(x_0)<0$, atunci $x_0$ **este punct de maxim local** pentru $f$.

**Demonstrație**. **1**) Din $f''(x_0)>0$, există $\delta>0$ astfel încât pe $(x_0-\delta,x_0+\delta)$, $f'$ este crescătoare. Dar din ipoteză $f'(x_0)=0$. Atunci $\forall x\in(x_0-\delta,x_0)$ avem $f'(x)\le f'(x_0)=0$, adică pe intervalul $(x_0-\delta,x_0)$ funcția $f$ este descrescătoare. Analog dacă $x\in(x_0,x_0+\delta)$, atunci $0=f'(x_0)\le f'(x)$ şi prin urmare $f$ este crescătoare pe intervalul $(x_0,x_0+\delta)$. De aici se deduce că $x_0$ este punct de minim pentru $f$.

**2**) Analog cu 1). ■

**Observații. 1**) Pentru **punctul de minim** avem tabelul (pe o vecinătate a lui $x_0$).

Din tabel rezultă că $f'$ trece de la valori negative, prin zero la valori pozitive, atunci când $x$ creşte, ceea ce înseamnă că $(f')'(x)>0, \forall x\in V$.

| | V | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | | $x_0$ | | |
| $f'(x)$ | - | - | 0 | + | + |
| $f''(x)$ | + | + | + | + | + |
| $f(x)$ | $\searrow$ | | $f(x_0)$ | | $\nearrow$ |

Pentru **punctul de maxim** avem tabelul (pe o vecinătate a lui $x_0$):

În acest caz observăm că $f'$ trece de la valori pozitive, prin zero la valori negative, atunci când $x$ creşte ceea ce înseamnă că $(f')'(x) < 0, \forall x \in V$.

V

| $x$ | | | $x_0$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | + | 0 | - | - |
| $f''(x)$ | - | - | - | - | - |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | | $f(x_0)$ | | $\searrow$ |

Chestiunile discutate mai sus au corespondent grafic ( $y = f(x)$ este o funcție oarecare, de două ori derivabilă pe domeniul de definiție) sugestiv dat în Fig.34. $(+,0,-$ sunt pentru panta tangentei la grafic).

**2**) Dacă $f''(x_0) < 0$, tangenta la grafic în punctul $(x_0, f(x_0))$ se află deasupra graficului , iar dacă $f''(x_0) > 0$ această tangentă este sub grafic.

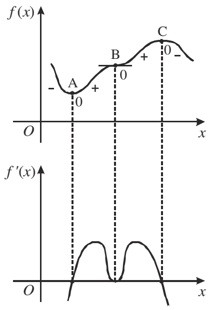


Fig. 34

## Exerciții rezolvate

**Să se precizeze natura punctelor de extrem $x_0$ indicate pentru funcțiile de mai jos :**

**1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2, x_0 \in \{0,1,2\}$; 2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2e^x, x_0 \in \{-2,0\}$;**

**R. 1) Avem $f'(x) = 4x(x^2 - 3x + 2)$. Din $f'(x) = 0$ rezultă $x \in \{0,1,2\}$. Pe de altă parte $f''(x) = 4(3x^2 - 6x + 2)$. Cum $f''(0) = 8 > 0,\ f''(1) = -4 < 0, f''(2) = 8 > 0$ rezultă că $x = 0, x = 2$ sunt puncte de minim local pentru $f$, iar $x = 1$ este punct de maxim local al lui $f$.**

**2) Avem $f'(x) = (x^2 + 2x)e^x = 0$ cu soluțiile $x_1 = -2, x_2 = 0$. Derivata a doua este $f''(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x$. Cum $f''(-2) = -2e^{-2} < 0$, iar $f''(0) = 2 > 0$ rezultă că $x = -2$ este punct de maxim pentru $f$, în timp ce $x = 0$ este punct de minim pentru $f$.**

## Exerciții propuse

**1. Să se precizeze natura punctelor de extrem $x_0$ pentru funcțiile $f: E \to \mathbb{R}$, E fiind domeniul maxim de definiție(utilizând semnul lui $f''(x_0)$) :**

**1) $f(x) = x^3 - 3x + 2$; 2) $f(x) = x^3 - x^2$; 3) $f(x) = \dfrac{1}{x(x-1)}$; 4) $f(x) = \dfrac{8(x-1)}{x^2 + 6x + 18}$;**

**5) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$; 6) $f(x) = x - \ln x$; 7) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$; 8) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$;**

**9) $f(x) = xe^{-x}$ ; 10) $f(x) = \sin 2x + 2\cos x, \in [0, 2\pi]$.**

**2. Dintr-o foaie dreptunghiulară de dimensiuni 12 cm, 7,5 cm se taie din fiecare colț un pătrat de**

latura $x$. Din foaia rămasă se formează o cutie deschisă de laturi 12-2 $x$, 7,5-2 $x$ şi înălţimea $x$. Arătaţi că volumul cutiei este de $V(x)=4x^3-39x^2+90x$ şi determinaţi $x$ pentru care volumul este maxim.

3. O piatră este aruncată vertical în sus şi după $t$ secunde înălţimea atinsă (în metri) este dată de legea $y(t)=100t-5t^2$. Determinaţi înălţimea maximă pe care o atinge piatra şi timpul la care se realizează.

4. Lângă zidul casei cineva vrea să delimiteze printr-un gard de 20 m lungime, 3 laturi ale unui dreptunghi (a patra latură fiind zidul casei). Scrieţi aria dreptunghiului în funcţie de o latură. Determinaţii laturile care fac maximă aria.

5. O fabrică de frigidere produce $n$ frigidere săptămânal la un cost de $300n+2000$ €. Funcţia cerere este dată de $500-2n$. Care este numărul de frigidere fabricate săptămânal ca profitul să fie maxim ?

## 4.10. PROBLEME DE EXTREM. APLICAŢII ALE DERIVATELOR

### Exerciţii rezolvate

1. Să se scrie numărul 8 ca sumă a două numere pentru care suma cuburilor să fie cea mai mică posibilă.

R. Fie $x, y$ cele două numere a căror sumă este egală cu 8. Deci $x+y=8$. De aici $y=8-x$. Ni se cere să determinăm numărul $x$ pentru care funcţia $f(x)=x^3+(8-x)^3$ ia cea mai mică valoare. Pentru a determina punctul de extrem al acestei funcţii se calculează $f'(x)=48x-192$ şi se rezolvă ecuaţia $f'(x)=0$, când se obţine $x=4$. Se verifică faptul că $x=4$ este punct de minim al funcţiei când $\min f=128$. Din $x+y=8$ găsim $y=4$. Aşadar cele două numere sunt : $x=y=4$.

2. Să se determine imaginea intervalului $[-1,3]$ prin funcţia $f(x)=4x^3-12x$.

R. Trebuie să determinăm mulţimea valorilor $f(x)$ ale funcţiei când $x\in[-1,3]$, iar în virtutea continuităţii, aceasta este un interval $\left[\min\limits_{x\in[-1,3]} f(x), \max\limits_{x\in[-1,3]} f(x)\right]$. Deci practic trebuie să găsim cea mai mică şi cea mai mare valoare a funcţiei pe intervalul $[-1,3]$. Se determină punctele de extrem ale funcţiei utilizând derivata. Avem $f'(x)=12x^2-12$, iar ecuaţia $f'(x)=0$ are soluţiile $x_1=-1, x_2=1$, puncte din intervalul $[-1,3]$. Se compară valoarea funcţiei în punctul $x=1$ ( situat în interiorul intervalului $[-1,3]$ ) cu valorile funcţiei la capetele intervalului. Se găseşte $\max\limits_{x\in[-1,3]} f(x)=f(3)=72$, $\min\limits_{x\in[-1,3]} f(x)=f(1)=-8$. Deci $f([-1,3])=[-8,72]$.

3. Să se arate că $|x^3-3x|\le 2, \forall |x|\le 2$.

R. Inegalitatea de demonstrat este echivalentă cu : $-2\le x^3-3x\le 2, \forall |x|\le 2$. Se consideră funcţia $f:[-2,2]\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-3x$, căreia trebuie să-i găsim extremele. Ca şi la problema precedentă vom compara valorile funcţiei în punctele în care $f'$ se anulează cu valorile funcţiei la capetele intervalului. Avem $f'(x)=3x^2-3$, iar $f'(x)=0$ are soluţiile $x_1=-1, x_2=1$. Din tabelul următor:

| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $1$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-2$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $2$ |

se deduce că $\min\limits_{x\in[-2,2]} f(x)=f(-2)=f(1)=-2$, iar $\max\limits_{x\in[-2,2]} f(x)=f(-1)=f(2)=2$.

Aşadar: $-2\le f(x)\le 2, \forall x\in[-2,2]$.

**4.** Să se determine dreptunghiul de arie maximă înscris într-un cerc de rază R.

**R.** Notăm cu $x, y$ dimensiunile dreptunghiului $ABCD$ înscris în cercul de centru $O$ şi rază $R$ (Fig. 35) ale cărui diagonale sunt diametre şi deci se intersectează în $O$. Avem aria $S$ a dreptunghiului egală cu $S = xy$. Ideea este de a exprima pe $y$ în funcţie de $x$ şi în acest fel aria $S$ devine o funcţie de o singură variabilă. Din triunghiul dreptunghic $ABC$, via teorema lui Pitagora, $x^2+y^2=4R^2$, iar de aici $(y>0)\, y=\sqrt{4R^2-x^2}$. Aşadar aria $S$ este egală cu $S(x)=x\sqrt{4R^2-x^2}, x\in(0,2R)$. Ni se cere $x$ pentru care aria $S$ este maximă. Derivata funcţiei $S$ este

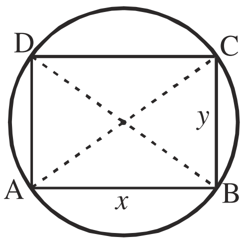


Fig. 35

$S'(x)=\dfrac{2\left(2R^2-x^2\right)}{\sqrt{4R^2-x^2}}$ iar ecuaţia $S'(x)=0$ are soluţia $x=R\sqrt{2}\,(x>0)$.

Cum pentru $x<R\sqrt{2}$, $S'(x)>0$, iar dacă $x>R\sqrt{2}$ atunci $S'(x)<0$, deducem că $x=R\sqrt{2}$ este punct de maxim pentru $S$, când $\max\limits_{x\in(0,2R)} S(x)=2R^2$. Este uşor de văzut că $x=R\sqrt{2}$, $y=R\sqrt{2}$. Aşadar dreptunghiul de arie maximă înscris în cercul de rază $R$ este pătratul de latură $R\sqrt{2}$.

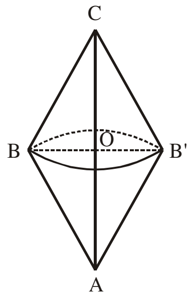


Fig. 36

**5.** Perimetrul unui triunghi isoscel este $2p$. Care sunt lungimile laturilor sale astfel încât volumul corpului format prin rotirea triunghiului în jurul bazei să fie maxim ?

**R.** Fie triunghiul $ABC$, de bază $AC=x$. Atunci $AB=BC=p-\dfrac{x}{2}$. Prin rotirea triunghiului $ABC$ în jurul bazei $AC$ se obţine un corp de rotaţie format din două conuri (Fig.36). Vom exprima volumul $V$ al corpului în funcţie de variabila $x$. Avem $V=\dfrac{\pi\cdot h^2\cdot AC}{3}$, unde

$h=OC=\sqrt{\left(p-\dfrac{x}{2}\right)^2-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}$ când

$V=V(x)=\dfrac{1}{3}p\pi\cdot(p-x)x.$

Trebuie determinat $x$ pentru care volumul corpului este maxim. Pentru aceasta calculăm derivata $V'(x)$ şi o egalăm cu zero. Avem: $V'(x)=\dfrac{1}{3}p\pi(p-2x)=0$ când $x=\dfrac{p}{2}$. Cum la stânga lui $x=\dfrac{p}{2}, V'(x)>0$, iar la dreapta lui $x=\dfrac{p}{2}, V'(x)<0$, deducem că $x=\dfrac{p}{2}$ este punct de maxim pentru $V$ şi $\max V(x)=\dfrac{\pi p^3}{12}$. Triunghiul isoscel ce face maxim volumul $V$ are laturile: $\dfrac{p}{2},\dfrac{3p}{4},\dfrac{3p}{4}$.

**6.** Se dau în plan punctele $A(0,1), B(2,3)$. Pe axa $Ox$ să se determine punctul $M$ pentru care suma $S=AM+MB$ este cea mai mică.

**R.** Fie $M(x,0)$ un punct de pe axa $Ox$. Atunci $S$ devine: $S=S(x)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(x-2)^2+9}$, o funcție de $x$, pentru care trebuie determinat punctul de minim. Pentru aceasta calculăm derivata $S'$: $S'(x)=\dfrac{x\sqrt{x^2-4x+13}+(x-2)\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2-4x+13}}$. Ecuația $f'(x)=0$ are soluția $x=\dfrac{1}{2}$. Deci punctul căutat este $M\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ când $\min S(x)=2\sqrt{5}$.

**Altfel.** Se ia $A'$, simetricul lui $A$ în raport cu $Ox$. Dreapta $A'B$ taie pe $Ox$ în punctul $M$ cerut !

**7.** **(Derivatele și afacerile).** Funcția $y=\dfrac{x^2}{2}-8x+60$ este costul în mii € pentru fabricarea a $x$ (însute) produse. Care este numărul minim de produse pentru a minimiza costurile de producție ?

**R.** Din $y'=0$ rezultă $x=8$ pentru care $y''(8)>0$, ceea ce arată că $x=8$ este punct de minim. Costurile totale sunt minime dacă se produc 800 de produse. În acest caz $y(8)=28$ (mii) €.

## Probleme propuse

**1.** Care număr pozitiv adunat cu inversul său dă cea mai mică sumă?

**2.** Să se descompună numărul 36 ca produs de două numere pentru care suma pătratelor lor este cea mai mică posibilă.

**3.** Să se scrie 13 ca suma a două numere pozitive $x,y$ pentru care expresia $3\sqrt{x}+2\sqrt{y}$ este maximă.

**4.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-3x+3}$. Să se determine imaginea lui $f$.

**5.** Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$ nu poate avea valori mai mari decât $\dfrac{3}{2}$ și valori mai mici decât $\dfrac{1}{2}$.

**6.** Să se determine cea mai mică și cea mai mare valoare a funcțiilor:

1) $f(x)=x^3-6x+1, x\in[-1,2]$; 2) $f(x)=\left[6x^5-15x^4+10x^3+1\right], x\in[-1,3], [\ ]$ este partea întreagă; 3) $f(x)=\dfrac{7x^2-8}{x^2+x+1}, x\in[-1,3]$.

**7.** Pentru ce valoare a parametrului $a$ valorile funcției $f(x)=x^3-6x^2+9x+a$ în punctul $x=2$ și în punctele de extrem, luate într-o anumită ordine, formează o progresie geometrică?

**8.** Să se demonstreze inegalitățile:

1) $1\le x^5-x^3+x+2\le 3, \forall x\in[-1,1]$; 2) $5\sqrt[3]{e}\le\left(3x^2-7x+7\right)e^x\le\dfrac{11}{3}\sqrt[3]{e^2}, \forall x\in\left[0,\dfrac{2}{3}\right]$;

3) $\dfrac{1}{4}\le\sin^6 x+\cos^6 x\le 1, \forall x\in\mathbb{R}$; 4) $\cos x\sin 2x>-\dfrac{7}{9}, \forall x\in[-\pi,\pi]$;

5) $-\dfrac{11}{27}\le 4x^3-x|x-2|\le 105, \forall x\in[0,3]$; 6) $0\le(x-1)^2\sqrt{x^2-2x+3}\le 4\sqrt{6}, \forall x\in[0,3]$.

**9.** Cât trebuie să fie unghiul de la vârful unui triunghi isoscel de arie dată astfel încât raza cercului înscris în acest triunghi să fie cea mai mare ?

**10.** În triunghiul de bază $a$ și înălțime $h$ să se înscrie un dreptunghi de arie maximă.

**11.** Laturile neparalele ale unui trapez și baza mică sunt de 10 cm. Să se determine baza mare astfel încât aria trapezului să fie maximă.

**12.** Într-un semicerc se înscrie un trapez care are baza mare diametrul semicercului . Să se determine unghiul de la baza trapezului pentru ca aria trapezului să fie maximă.

**13. Perimetrul unui triunghi isoscel este $2p$. Care sunt laturile sale astfel încât volumul corpului format prin rotirea triunghiului în jurul înălțimii să fie maxim?**
**14. Volumul unui prisme triunghiulare regulate este $V$. Cât trebuie să fie latura bazei astfel încât aria suprafeței totale să fie cea mai mică ?**
**15. Determinați înălțimea cilindrului de volum maxim posibil care poate fi înscris într-o sferă de rază $R$.**
**16. Să se determine relația între raza $R$ şi înălțimea $h$ a unui cilindru de volum dat, care are aria suprafeței totale cea mai mică posibilă.**
**17. Determinați înălțimea conului circular drept de volum maxim, care poate fi înscris într-o sferă de rază $R$.**
**18. Să se determine înălțimea unui con circular drept circumscris unei sfere de rază $R$, care are cel mai mic volum.**
**19. Dintre toți cilindrii drepți înscrişi într-un con circular drept de rază $R$ şi înălțime $h$, care este cel cu volumul maxim?**
**20. Într-o emisferă se înscrie un trunchi de con având ca bază cercul emisferei. Ce înălțime trebuie să se dea trunchiului de con pentru ca aria sa laterală să fie minimă?**
**21. Determinați laturile dreptunghiului cu cea mai mare arie, care poate fi înscris în elipsa: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$.**
**22. Care este punctul de pe elipsa $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{18}-1=0$ în care tangenta formează cu axele de coordonate un triunghi de arie minimă?**
**23. Se dau punctele $A(1,4), B(3,0)$ pe elipsa $2x^2+y^2=18$. Să se determine al treilea punct $C$ pe elipsă pentru care aria triunghiului $ABC$ este maximă.**
**24. Pe parabola $y=x^2$ să se determine punctul cel mai apropiat de dreapta $y=2x-2$.**
**25. (Derivatele şi afacerile). Funcția $y=12x-2a-ax^2$ descrie profitul (în sute de €) al unei fabrici care utilizează $x$ maşini pentru a fabrica produsele, iar $a$ este numărul de curse într-o zi.**
**a) Arătați că sistemul este neeconomic dacă se fac $a=4$ livrări pe zi.**
**b) Dacă se fac $a=3$ livrări pe zi, determinați numărul $x$ de maşini care ar trebui utilizate ca profirul să fie maxim.**
**26. (Derivatele şi afacerile). Un fabricant ştie că dacă $x$ (sute) produse sunt cerute într-o anumită săptămână, atunci: 1) funcția cost total (în mii €) este $3x+14$ şi 2) funcția venit total este (în mii €) $19x-2x^2$. Determinați:**
**a) funcția profit ( $P(x)=V(x)-C(x)$ ); b) punctul care precizează când avem profit şi când suntem în pierdere; c) nivelul de cereri care maximizează profitul.**

## 4.11. ASIMPTOTE

O problemă importantă în trasarea graficelor funcțiilor este determinarea asimptotelor. Într-o exprimare superficială **vom întelege prin asimptotă o dreaptă** (verticală, orizontală sau oblică) față de care graficul funcției ”se apropie oricât de mult”.O astfel de problemă se poate pune pentru funcții ce au ramuri spre infinit, adică funcții al **căror grafic nu este conținut într-un dreptunghi**. Vom distinge două categorii de asimptote: verticale şi oblice.

## 1. Asimptote verticale

Fie $f: E \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$ **punct de acumulare** pentru $E$.

> **Definiție.** Se spune că dreapta $x = a$ este **asimptotă verticală la stânga** pentru $f$, dacă $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = +\infty$ sau $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = -\infty$.

**Observații**. **1**) Dreapta $x = a$ ,într-un reper cartezian $xOy$, este o dreaptă paralelă cu $Oy$ (deci „verticală”).

**2**) **Interpretarea geometrică**. Dacă $x = a$ este asimptotă verticală la stânga a lui $f$, iar $M(x, f(x))$ și $N(a, f(x)), x < a$ (Fig.37), atunci lungimea segmentului $MN$ tinde la zero când $x \nearrow a$ și ordonata lui $M$ tinde către $+\infty$ sau $-\infty$.

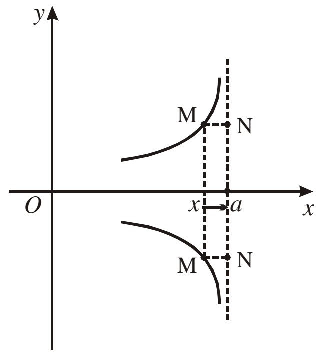



Fig. 37

**Exemplu.** **Fie funcția**

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, x < 1 \\ 1, x \geq 1 \end{cases}$$ **. Să observăm că**

$\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = \dfrac{1}{0_-} = -\infty$ **, ceea ce arată că $x = 1$ este asimptotă verticală la stânga pentru $f$ .**

Analog se definește conceptul de asimptotă verticală la dreapta. Mai precis are loc următoarea:

> **Definiție**. Se spune că dreapta $x = a$ este **asimptotă verticală la dreapta** pentru $f$, dacă $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = +\infty$ sau $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = -\infty$.

Observații analoge cu acelea de la definiția precedentă se pot face și în acest caz.

**Exemplu. Fie funcția $f: (3, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{x-3}$. Avem $\lim\limits_{x \searrow 3} f(x) = \dfrac{1}{0_+} = \infty$, ceea ce arată că dreapta $x = 3$ este simptotă verticală la dreapta pentru $f$ .**

> **Definiție**. Se spune că dreapta $x = a$ este **asimptotă verticală** pentru $f$ dacă ea este asimptotă verticală atât la stânga cât și la dreapta sau numai lateral.

**Observații**. **1**) Pentru existența asimptotei verticale **nu este necesar ca** $f$ **să fie definită în** $x = a$ (vezi exemplul precedent, $f$ nu este definită în $x = 3$). Evident $f$ nu are asimptotă verticală pe $x = a$, dacă punctul $x = a$ este de continuitate pentru $f \left( \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) \in \mathbb{R} \right)$.

**2**) Funcțiile date spre studiu sunt de cele mai multe ori funcții elementare sau compuneri de funcții elementare, iar pentru astfel de funcții asimptotele verticale se determină ușor:

- funcția polinomială fiind continuă pe $\mathbb{R}$, nu are asimptote verticale;
- funcția rațională are ca asimptote verticale dreptele $x=a$, unde $a$ este zero al numitorului;
- funcția logaritmică $f(x)=\ln x$, are ca asimptotă verticală dreapta $x=0$, iar dacă $f(x)=\ln g(x)$, atunci vor fi asimptote verticale dreptele $x=a$, unde $a$ este soluție a ecuației $g(x)=0$.
- funcția $f(x)=\operatorname{tg} x$, are asimptote verticale dreptele $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$ ( acestea fiind punctele în care funcția nu este definită); etc.

## Exerciții rezolvate

**Să se determine asimptotele verticale pentru funcțiile $f:E\to\mathbb{R}$ ( $E$ fiind domeniul maxim de definiție):**

**1) $f(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$; 2) $f(x)=\sqrt{\frac{1}{(x+1)(x-1)}}$; 3) $f(x)=\ln\left(x^2-5x+6\right)$.**

R. **1) În acest caz $E=\mathbb{R}-\{\pm2\}$. Deci posibile asimptote verticale sunt dreptele $x=\pm2$. Cum $\lim\limits_{x\nearrow-2}\frac{x^2}{x^2-4}=+\infty$ și $\lim\limits_{x\searrow-2}\frac{x^2}{x^2-4}=-\infty$ rezultă că $x=-2$ este asimptotă verticală a lui $f$. De asemenea $\lim\limits_{x\nearrow2}f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\searrow2}f(x)=+\infty$, adică $x=2$ este asimptotă verticală a lui $f$.**

**2) Domeniul de definiție al funcției este $E=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$. Din $\lim\limits_{x\nearrow-1}f(x)=\lim\limits_{x\searrow1}f(x)=\infty$ se deduce că dreptele $x=-1$ și $x=1$ sunt asimptote verticale pentru $f$.**

**3) Avem $E=(-\infty,2)\cup(3,\infty)$. Se găsește ușor că $\lim\limits_{x\nearrow2}f(x)=\lim\limits_{x\searrow3}f(x)=-\infty$ ceea ce arată că dreptele $x=2$, $x=3$ reprezintă asimptotele verticale ale lui $f$.**

## Exerciții propuse

**Să se determine asimptotele verticale pentru funcțiile $f:E\to\mathbb{R}$ ( $E$ fiind domeniul maxim de definiție):**

**1) $f(x)=\frac{1}{x+1}$; 2) $f(x)=\frac{x}{x^2-5x+4}$; 3) $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x}}$; 4) $f(x)=\frac{\ln x}{1+\ln x}$;**

**5) $f(x)=x+\ln\left(x^2-1\right)$; 6) $f(x)=e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$; 7) $f(x)=\frac{1}{x-1}e^x$; 8) $f(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;**

**9) $f(x)=xe^{\frac{1}{|x-1|}}$; 10) $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-2x}}$.**

**2.Asimptote oblice**

Cea de-a doua categorie de asimptote o constitue asimptotele oblice.

Fie $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unde $E$ **conține un interval de forma** $(a,\infty)$.

**Definiție**. Se spune că dreapta $y = mx + n$ este **asimptotă oblică la ramura spre** $+\infty$ **a funcției** $f$, dacă distanța dintre dreaptă şi grafic, măsurată pe verticală, tinde către zero când $x$ tinde către $\infty$, adică dacă $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - mx - n\right] = 0$.

Analog se poate defini conceptul de asimptotă oblică la ramura spre $-\infty$, admițând că $E$ **conține un interval de forma** $(-\infty, b), b \in \mathbb{R}$.

**Definiție**. Se spune că dreapta $y = m'x + n'$ este **asimptotă oblică la ramura spre** $-\infty$ **a funcției** $f$, dacă distanța dintre dreaptă şi grafic, măsurată pe verticală, tinde către zero când $x$ tinde către $-\infty$, adică dacă $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x) - m'x - n'\right] = 0$.

În Fig.38 avem reprezentarea geometrică a asimptotei oblice la ramura spre $+\infty$ unde $M(x, mx+n), N(x, f(x))$ sunt puncte situate pe dreaptă şi respectiv pe grafic.

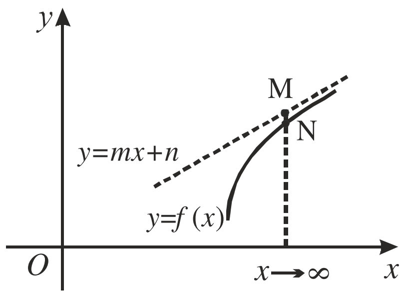



Fig. 38

**Observații**. **1**) În general, asimptotele unei funcții sunt numite **asimptote la graficul funcției** ( sau vom spune că **graficul are asimptote**).

**2**) În general, asimptotele oblice la $+\infty$ şi $-\infty$ ( în cazul în care există) sunt diferite.

**3**) Evident pentru $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ **nu are sens problema asimptotelor oblice la** $+\infty$ sau $-\infty$ ($\pm\infty$ **nu sunt puncte de acumulare pentru intervalul** $(\alpha, \beta)$ ).

**4**) Există funcții care nu au asimptote.

Problema de care ne vom ocupa în continuare este aceea a existenței asimptotelor oblice şi a modului de determinare a lor ( deci a elementelor $m, n$ şi respectiv $m', n'$ cu ajutorul lui $f$ ).

Are loc următoarea:

**Teoremă. 1**) Dreapta $y = mx + n$ este asimptotă oblică la ramura spre $+\infty$ a lui $f$ dacă şi numai dacă $m, n \in \mathbb{R}$ ($m, n$ **sunt finite**) unde

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x},\ n = \lim_{x\to\infty} \left[f(x) - mx\right], m \neq 0.$$

**2**) Dreapta $y = m'x + n'$ este asimptotă oblică la ramura spre $-\infty$ a lui $f$ dacă şi numai dacă $m', n' \in \mathbb{R}$ ($m', n'$ **sunt finite**) unde

$$m' = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x},\ n' = \lim_{x\to-\infty} \left[f(x) - m'x\right], m' \neq 0.$$

**Demonstrație**. Vom demonstra **1**), pentru **2**) procedându-se analog. Presupunem că $y = mx + n$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ pentru $f$ şi să determinăm pe $m$ şi $n$. Aşadar ştim că $\lim_{x\to\infty}\left[f(x) - mx - n\right] = 0$.

Avem: $f(x) - mx = \left[f(x) - mx - n\right] + n$ şi deci

$\lim_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - mx - n\right] + n = 0 + n = n$ şi de asemenea,

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - m\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x) - mx}{x} = \frac{n}{\infty} = 0$. Cum $\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{f(x)}{x} - m\right) + m$ se deduce că $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - m\right) + m = m.$

Reciproc, dacă au loc relațiile $m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\ n = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - mx\right]$, $m, n \in \mathbb{R}, m \neq 0$, atunci se găseşte uşor că $\lim_{x\to\infty}\left[f(x) - mx - n\right] = 0$, relație care arată că $y = mx + n$ este asimptotă oblică la $+\infty$ pentru $f$. ■

**Observații**. **1**) Practic pentru a determina asimptota oblică la $+\infty$ pentru $f$ se procedează astfel:

- se calculează $m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$;
- dacă $m$ **este finit şi nenul** atunci se calculează limita $n = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - mx\right]$;
- dacă şi $n$ **este finit**, atunci dreapta $y = mx + n$ reprezintă asimptota oblică spre $+\infty$ a lui $f$ .

Analog pentru determinarea asimptotei oblice spre $-\infty$ a lui $f$ .

**2**) Dacă cel puțin una din cele două limite nu există sau este infinită, curba nu are asimptotă oblică la $+\infty$ ($-\infty$).

**3**) În teorema precedentă am cerut $m \neq 0$. Dacă $m = 0$ şi $n$ este **finit**, atunci $y = n$ se numeşte **asimptotă orizontală spre** $+\infty$ a lui $f$. Dacă $m' = 0$ şi $n'$ este finit, atunci dreapta $y = n'$ se numeşte **asimptotă orizontală spre** $-\infty$ a lui $f$. Denumirea de „orizontală” pentru asimptotă provine din aceea că dreapta $y = n\left(y = n'\right)$ este paralelă cu axa $Ox$.

Aşadar:

**1)** dacă $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = n, n$ finit, atunci dreapta $y = n$ este **asimptotă orizontală** spre $+\infty$ **pentru** $f$;

**2)** dacă $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = n', n'$ finit, atunci dreapta $y = n'$ este **asimptotă orizontală** spre $-\infty$ **pentru** $f$;

**Observație**. O funcție $f$ **nu poate admite atât asimptotă orizontală cât şi oblică spre** $+\infty$ ($-\infty$).

## Exerciții rezolvate

**Să se determine asimptotele (orizontale, oblice) pentru funcțiile $f : E \to \mathbb{R}$, $E$ fiind domeniul maxim de definiție.**

**1)** $f(x) = \dfrac{|x|}{x+3}$; **2)** $f(x) = \dfrac{x^2}{3x+1}$; **3)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x}$; **4)** $f(x) = |x| e^{\frac{1}{x}}$.

**R.** **1)** $E = \mathbb{R} - \{-3\}$. **Se explicitează funcția şi se obține:** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+3}, x \geq 0 \\ \dfrac{-x}{x+3}, x < 0, x \neq -3 \end{cases}$.

**Este uşor de văzut că** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$ **şi** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$, **adică** $y = 1, y = -1$ **sunt asimptote orizontale pentru** $f$ **spre** $+\infty$ **şi respectiv spre** $-\infty$.

**2)** $E = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$. **Cum** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) \notin \mathbb{R}$ **rezultă că** $f$ **nu admite asimptote orizontale spre** $\pm\infty$. **Se caută asimptota oblică la ramura spre** $+\infty$, **de forma** $y = mx + n$ **pentru care se calculează** $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{3x^2+x} = \dfrac{1}{3}$ **şi**

$n = \lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2}{3x+1} - \dfrac{x}{3}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x}{3(3x+1)} = -\dfrac{1}{9}$. **Deci** $y = \dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{9}$ **este asimptota oblică de la** $+\infty$ **pentru graficul lui** $f$. **Se vede imediat că aceeaşi dreaptă reprezintă asimptota oblică şi la** $-\infty$. **3)** $E = \mathbb{R} - \{0\}$. **În acest caz** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2x} = \dfrac{1}{2}$ **în timp ce**

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2x} = -\dfrac{1}{2}$. Deci $y=\dfrac{1}{2}$ şi $y=-\dfrac{1}{2}$ reprezintă asimptotele orizontale la $+\infty$ şi respectiv $-\infty$ pentru funcţia $f$.

4) $E=\mathbb{R}^*$. Funcţia se explicitează astfel: $f(x)=\begin{cases} xe^{\frac{1}{x}}, x>0 \\ -xe^{\frac{1}{x}}, x<0 \end{cases}$.

Se vede uşor că $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$, adică $f$ nu posedă asimptote orizontale spre $\pm\infty$.

Căutăm asimptote oblice:

- spre $+\infty$ de forma $y=mx+n$, unde $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}=1$ şi

  $n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=1$. Deci $y=x+1$ este asimptota oblică spre $+\infty$ pentru $f$.

- spre $-\infty$ de forma $y=m'x+n'$, unde

  $m'=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-e^{\frac{1}{x}}\right)=-1$ şi $n'=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right]=-1$. Deci

  $y=-x-1$ este asimptota oblică la $-\infty$ pentru $f$.

## Exerciţii propuse

**1.** Să se determine asimptotele (orizontale, oblice) pentru funcţiile $f:E\to\mathbb{R}, E$ fiind domeniul maxim de definiţie.

1) $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$; 2) $f(x)=\dfrac{x}{2x-1}$; 3) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+5}$; 4) $f(x)=\sqrt{x^2-x}-x$;

5) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; 6) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$; 7) $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$;

8) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{|1-x^2|}}$; 9) $f(x)=\ln\dfrac{x-1}{x+2}$; 10) $f(x)=|x-1|e^{\frac{1}{x}}$; 11) $f(x)=\sin 2x+2\cos x$;

12) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$; 13) $f(x)=\dfrac{x}{2}+\operatorname{arctg} x$; 14) $f(x)=x^2e^{\frac{1}{x}}$.

**2.** Fie $f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x+1}$. Să se determine $a,b$ dacă $y=x+1$ este asimptotă, iar în $x=1$, $f$ are un extrem.

## REZUMATUL CAPITOLULUI

| Noțiunea | Definiție. Caracterizare. | Interpretarea geometrică. Notații |
|---|---|---|
| **Derivata unei funcții într-un punct** | $f: E \to \mathbb{R}, E$ **interval,** $x_0 \in E \cap E'$<br>• $f$ **are derivată în** $x_0 \Leftrightarrow$ **există** $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ **în** $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$<br>• $f$ **este derivabilă în** $x_0 \Leftrightarrow$ **există** $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ **în** $\mathbb{R}$ | • $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$, **este derivata funcției** $f$ **în** $x_0$<br>• **Dacă** $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, **atunci acest număr este coeficientul unghiular al tangentei la grafic în** $(x_0, f(x_0))$ **. Ecuația tangentei este :** $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$<br>• **Dacă** $f'(x_0) = \pm\infty$, **atunci tangenta la grafic în** $(x_0, f(x_0))$ **este dreapta:** $x = x_0$ |
| **Derivatele laterale** | $f: E \to \mathbb{R}, E$ **interval** $x_0 \in E, x_0$ **punct de acumulare pentru** $E \cap (-\infty, x_0)$ **și pentru** $E \cap (x_0, \infty)$<br>• $f$ **are derivată la stânga în** $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbb{R}}$<br>• $f$ **are derivată la dreapta în** $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbb{R}}$ | $\lim\limits_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f_s'(x_0)$<br>$\lim\limits_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f_d'(x_0)$<br>• **Dacă** $f_s'(x_0), f_d'(x_0) \in \mathbb{R}$, **atunci aceste numere sunt pantele semitangentelor la grafic în** $(x_0, f(x_0))$. |
| **Puncte de întoarcere** | $(x_0, f(x_0))$ **este punct de întoarcere pentru graficul lui** $f$ **dacă** $f_s'(x_0), f_d'(x_0)$ **sunt infinite și diferite** | ( $f$ **este continuă în** $x_0$ ) |
| **Punct unghiular** | $(x_0, f(x_0))$ **este punct unghiular pentru graficul lui** $f$ **dacă** $f_s'(x_0), f_d'(x_0)$ **sunt diferite și cel puțin una este finită** | ( $f$ **este continuă în** $x_0$ ) |
| **Funcție derivată** | $f: E \to \mathbb{R}, I \subseteq E,$ **interval**<br>• $f$ **este derivabilă pe intervalul** $I$ **dacă este derivabilă în fiecare punct din** $I$ | $D_{f'} = \{x \in E \mid \exists f'(x) \in \mathbb{R}\}$ **se numește domeniul de derivabilitate al funcției** $f$ |

| | | |
|---|---|---|
| | | **Funcția** $f^{'}:D_{f^{'}}\to\mathbb{R}, x\to f^{'}(x)$ **se numeşte derivata lui** $f$ |
| **Operații cu funcții derivabile** | $f,g:E\to\mathbb{R}$ **derivabile în** $x_0\in E\cap E^{'}$ **(pe** $E$ **)**<br>**Atunci : 1)** $f+g$ **este derivabilă în** $x_0$ **( pe** $E$ **) şi**<br>$(f+g)^{'}(x_0)=f^{'}(x_0)+g^{'}(x_0)$<br>**2)** $f\cdot g$ **este derivabilă în** $x_0$ **( pe** $E$ **) şi**<br>$(f\cdot g)^{'}(x_0)=f^{'}(x_0)g(x)+f(x_0)g^{'}(x_0)$<br>**3)** $\frac{f}{g}$ **este derivabilă în** $x_0$<br>**( dacă** $g(x_0)\neq 0$ **) ( pe** $E$ **,dacă** $g(x)\neq 0,\forall x\in E$ **) şi**<br>$\left(\frac{f}{g}\right)^{'}(x_0)=\frac{f^{'}(x_0)g(x_0)-f(x_0)g^{'}(x_0)}{g^2(x_0)}$ | $(f+g)^{'}=f^{'}+g^{'}$<br>**Derivata sumei este egală cu suma derivatelor**<br>$(f\cdot g)^{'}=f^{'}\cdot g+f\cdot g^{'}$<br>$\left(\frac{f}{g}\right)^{'}=\frac{f^{'}\cdot g-f\cdot g^{'}}{g^2}$ |
| **Derivarea funcțiilor compuse** | $I\xrightarrow{f}J\xrightarrow{g}\mathbb{R}, f$ **derivabilă în** $x_0, g$ **derivabilă în** $f(x_0)=y_0$**. Atunci**<br>$(g\circ f)^{'}(x_0)=g^{'}(f(x_0))\cdot f^{'}(x_0)$ | $(g\circ f)^{'}=g^{'}(f)\cdot f^{'}$ |
| **Teorema lui Lagrange** | $f:[a,b]\to\mathbb{R}, a<b.$<br>**1)** $f$ **continuă pe** $[a,b]$;<br>**2)** $f$ **derivabilă** $(a,b)$;<br>**Atunci** $\exists c\in(a,b)$ **astfel încât**<br>$f(b)-f(a)=(b-a)f^{'}(c)$ | $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f^{'}(c)$, **adică panta dreptei determinată de punctele** $A(a,f(a)), B(b,f(b))$ **este aceeaşi cu a unei tangente la grafic într-un punct** $(c,f(c))$ **situat pe curba** $AB$ |
| **Consecințe ale teoremei lui Lagrange** | **3.( Monotonia unei funcții derivabile)** $f:E\to\mathbb{R}.$<br>• $f^{'}(x)>0,\forall x\Rightarrow f$ **este strict crescătoare pe** $E$<br>• $f^{'}(x)<0,\forall x\Rightarrow f$ **este strict descrescătoare pe** $E$ | **Pentru a determina intervalele de monotonie ale unei funcții derivabile se procedează astfel:**<br>**1) Se rezolvă ecuația** $f^{'}(x)=0$;<br>**2) Se determină intervale pe care** $f$ **păstrează acelaşi semn.** |

## Teste de evaluare

### Testul 1 (1 punct din oficiu)

**1.** a) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} xe^x, x\leq 1 \\ -x^2+mx+n, x>1, m,n\in\mathbb{R}\end{cases}$.

Să se determine $m,n$ astfel încât $f$ să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$ .

**b) Să se determine punctele de extrem ale lui $f$ pentru $m,n$ de la a).**
**(ADMITERE, CHIMIE-FIZICĂ, GALAȚI, 1990) . (2 puncte)**

2. **Să se arate că $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}, x > 1$ . (1 punct) (ADMITERE, A.S.E., BUCUREŞTI, 1991)**

3. **Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{(x+3)(x-1)^2}{x^2}$. Se cer:**

**a) asimptota oblică la $+\infty$ ; b) punctele de extrem local. (2 puncte)**
**(ADMITERE, A.S.E., BUCUREŞTI, 1992)**

4. **Fie $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x - \sqrt{a^2x^2 + ax + 1}, x \le 1 \\ \sqrt{x-1} + |a|\sqrt{x}, x > 1 \end{cases}$.**

**a) Să se discute continuitatea lui $f$ după valorile parametrului real $a$ .**
**b) Pentru $a = -1$ să se studieze derivabilitatea lui $f$ . (2puncte)**
**(ADMITERE, A.S.E., CLUJ, 1993)**

5. **Să se calculeze limitele: a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(m\cos\frac{1}{x} - n\cos\frac{2}{x}\right) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow m = n = 1$ .**

**(2 puncte)**

## Testul 2 (1 punct din oficiu)

1. **Se consideră funcția $f:[0,b] \to \mathbb{R}, 0 < b < 1, f(x) = \frac{1}{1-x}$.**

**1) Să se arate că $f$ satisface condițiile teoremei lui Lagrange pe $[0,b]$.**
**2) Aplicând teorema lui Lagrange lui $f$ pe $[0,b]$ să se determine $c \in (0,b)$ depinzând de $b$ şi notat prin c$(b)$.**
**3) Să se calculeze $\lim\limits_{b\to 0} c(b)$. (2 puncte) (ADMITERE, CIBERNETICĂ, BUCUREŞTI, 1993)**

2. **Să se determine $m$ real astfel încât funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ,**

**$f(x) = \frac{me^x - (1+m)e^{-x}}{1+e^x}$ să fie strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ . (1 punct)**
**(ADMITERE, MATEMATICĂ, CRAIOVA, 1994)**

3. **Fie funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2+1} - \operatorname{arctg} x$ .**

**a) Se cere $f'(x)$. b) Să se arate că $\frac{x}{1+x^2} < \operatorname{arctg} x, \forall x > 0$. (2 puncte)**
**(ADMITERE, UNIVERSITATE, BAIA MARE, 1995)**

4. **Să se arate că dacă $m, M$ sunt valorile extreme ale funcției $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + ax + b$,**

**$a,b \in \mathbb{R}$, $a < 0$ , atunci $mM = b^2 + \frac{4a^3}{27}$. (1 punct) (ADMITERE, F.S.E., IAŞI, 1997)**

5. **Să se calculeze limitele a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(1+e^{ax})}{\ln(1+e^{bx})}$, $a,b > 0$ ; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$ ; c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right)$.**

**(3 puncte)**

## Testul 3 ( tip grilă) (1 punct din oficiu)

**1.** **Care este valoarea limitei:** $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$?

**a)** $\frac{1}{2}$ **; b)** $2$ **; c)** $1$ **; d)** $\infty$ **; e)** $0$**. (1 punct)**
**(ADMITERE, UNIVERSITATEA ROMÂNO-AMERICANĂ, BUCUREŞTI, 1998)**

**2.** **Mulţimea valorilor lui** $x$ **pentru care sunt adevărate inegalităţile:** $\frac{x^2}{x^2+1}\le\ln\left(1+x^2\right)\le x^2$**, este:**
**a)** $(0,\infty)$**; b)** $(-\infty,\infty)$**; c)** $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$**; d)** $(-1,1)$**; e)** $(-1,\infty)$**. (2 puncte)**
**(ADMITERE, UNIVERSITATEA TEHNICĂ ,CLUJ, 1998)**

**3.** **Fie** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x+x$**. Care afirmaţie este adevărată?**
**a) funcţia** $f$ **are extreme locale; b) funcţia** $f$ **are asimptotă verticală; c) funcţia** $f$ **are asimptotă oblică; d) funcţia** $f$ **are asimptotă orizontală. (2 puncte) (ADMITERE, F.S.E., PITEŞTI, 1998)**

**4.** **Se consideră funcţia** $f:\mathbb{R}-\{a\}\to\mathbb{R}$**, definită prin** $f(x)=\frac{x^2+2px+5}{x-a}$**. Funcţia** $f$ **admite extreme locale în** $x=-1$ **şi** $x=3$ **pentru** $a$ **şi** $p$ **având valorile: a)** $a=2, p=-1$**;**
**b)** $a=1, p=1$**; c)** $a=-3, p=1$**; d)** $a=1, p=-1$**; e)** $a=3, p=-2$**. (2 puncte)**
**(ADMITERE, UNIVERSITATE, TÂRGU MUREŞ, 1998)**

**5.** **Mulţimea** $A=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{R}\}$ **pentru care funcţia** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$**,** $f(x)=\begin{cases}x^2+a, x\le 2\\ ax+b, x>2\end{cases}$ **este continuă pe** $\mathbb{R}$ **şi există** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ **este:**
**a)** $A=\{(0,4)\}$**; b)** $A=\{(a,b)\mid a\in[0,4], b=1\}$**; c)** $A=\{(a,b)\mid a\le 0, b>0\}$**;**
**d)** $A=\{(a,b)\mid a\in\mathbb{R}, b=a\}$**; e)** $A=\{(4,0)\}$**; (2 puncte)**
**(ADMITERE, ACADEMIA TEHNICĂ MILITARĂ, BUCUREŞTI, 2000)**

**6.** **Egalitatea** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x-2}{x^2+1}\right)^{bx}=e^{-6}$ **are loc dacă:**
**a)** $b=2$**; b)** $b=6$**; c)** $b=-2$**; d)** $b=5$ **e)** $b=3$**. (1 punct)**
**(ADMITERE,UNIVERSITATEA MARITIMĂ, CONSTANŢA,2000)**

**7.** **Valorile lui** $a,b\in\mathbb{R}$ **pentru care funcţia** $f(x)=a\ln x+bx^2+x$ **are extreme în** $x=1$ **şi** $x=2$ **sunt a)** $a=-\frac{1}{3}, b=1$**; b)** $a=-\frac{2}{3}, b=-\frac{1}{6}$**; c)** $a=-\frac{1}{3}, b=-\frac{1}{6}$**; d)** $a=-\frac{2}{3}, b=-1$**; e) nu există.**
**(1 punct) (ADMITERE, F.S.E., UNIVERSITATE, PLOIEŞTI, 2000)**

# 5. REPREZENTAREA GRAFICĂ A FUNCȚIILOR

**În acest ultim capitol sunt realizate graficele unor funcții elementare, utilizând cunoştințe dobândite până acum la analiza matematică. Plecând de la graficul funcției $f$ se discută şi rezolvă grafic ecuația $f(x)=m, m\in\mathbb{R}$, adică se determină numărul de soluții ale ecuației şi se precizează intervalele cărora le aparțin.**



## REPREZENTAREA GRAFICĂ A FUNCȚIILOR

Scopul acestui capitol este de a realiza reprezentarea geometrică a unei funcții $f:A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ceea ce vom numi într-o formulare uzuală **trasarea graficului funcției** $f$ sau **desenarea graficului funcției** $f$ într-un reper cartezian $xOy$ ales.
Acest lucru îl vom realiza cu ajutorul cunoştințelor studiate până în acest moment.
Se obişnuieşte parcurgerea unor etape în cadrul cărora se stabilesc **diferite elemente,** utile în trasarea graficului.
Uneori, fie din motive ce privesc **dificultatea unor calcule**, fie din motive de simplitate a funcției se renunță la determinarea unor elemente sau se renunță la o etapă (derivata a doua) sau chiar mai mult.
Până la urmă trasarea unui grafic **ține de exercițiu**. De aceea recomandăm cititorilor să aibă răbdarea necesară, de fiecare dată, pentru a parcurge toate etapele necesare ce premerg trasării graficului, până la obținerea unei dexterități. Etapele de parcurs le vom marca cu litere romane. Aceste etape sunt:

**I. Domeniul $E$ de definiție al funcției**

Acesta poate fi indicat în mod explicit în enunț sau în caz contrar el este format din toate punctele pentru care operațiile prin care este definită funcția au sens (determinând **domeniul maxim** pe care poate fi definită funcția).

**1. Determinarea perioadei şi a simetriilor** permit limitarea mulțimii pe care studiem funcția (**dacă funcția are perioada principală** $T_0$, atunci **se va studia funcția pe un interval de lungimea unei perioade**, de exmplu $[0,T_0]$; dacă am trasat graficul funcției pe acest interval, atunci generarea lui pe întreg domeniul de definiție se face prin translatarea spre dreapta pe intervalele $[T_0, 2T_0], [2T_0, 3T_0], ...$ şi spre stânga pe intervalele $[-T_0, 0], [-2T_0, -T_0], ...$ a graficului realizat pe intervalul $[0, T_0]$; **dacă funcția este pară** $(f(-x) = f(x), \forall x \in E)$, **sau impară** $(f(-x) = -f(x), \forall x \in E)$ atunci **este suficient studiul funcției pe submulțimea** $E \cap [0, \infty)$; dacă **funcția este pară** atunci **graficul funcției** (prescurtat $G_f$) **este simetric în raport cu axa** $Oy$ **,** iar dacă **funcția este impară**, atunci **graficul este simetric în raport cu originea** $O$ **a reperului cartezian ales** $xOy$ ).

**2. Determinarea intersecțiilor graficului funcției cu axele de coordonate**

- $G_f \cap Oy$: Dacă $0 \in E$, atunci se calculează $f(0)$ şi avem pentru grafic punctul $(0, f(0))$.
- $G_f \cap Ox$: Se rezolvă ecuația $f(x) = 0$. Se rețin acele soluții *x*, situate în domeniul de definiție $E$.

**3. Calcularea valorilor sau limitelor lui** $f$ **la capetele intervalelor lui** $E$.

**II. Derivata întâi**

1. Se stabileşte mulțimea punctelor în care funcția este derivabilă şi se precizează natura punctelor în care $f$ nu este derivabilă (**unghiulare, de întoarcere**).
2. Se calculează prima derivată, $f'$.
3. Se rezolvă ecuația $f'(x) = 0$. Soluțiile $x_i' \in E$ sunt eventuale puncte de **minim** sau **maxim** ale lui $f$. Se calculează $f(x_i')$. Se stabileşte semnul lui $f'$ pe intervale. Această ultimă acțiune se poate realiza în etapa V.

**III. Derivata a doua**

1. Se calculează derivata a doua, $f''$.
2. Se rezolvă ecuația $f''(x) = 0$. Se rețin acele soluții $x_i'' \in E$, ele fiind eventuale puncte de inflexiune ale graficului.

Se calculează $f(x_i'')$. Se stabileşte semnul lui $f''$ pe intervale.

Această ultimă acțiune se poate realiza în etapa V.

Facem observația că această etapă se elimină dacă expresia lui $f''$ este complicată. Această etapă permite precizarea formei graficului funcției pe intervale (**convex** dacă $f'' > 0$ şi **concav** dacă $f'' < 0$ ).

**IV. Asimptote**

Se determină cele două categorii de asimptote (dacă există).

**1) Asimptote verticale**. Se determină punctele $a$, pentru care cel puțin una din limitele laterale $\lim_{x \nearrow a} f(x), \lim_{x \searrow a} f(x)$ este infinită.

## 2) Asimptote oblice

- **la ramura spre** $+\infty$ are forma: $y = mx + n$, unde

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x},\ n = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - mx\right],\ m, n \in \mathbb{R}.$$

- **la ramura spre** $-\infty$ are forma: $y = m'x + n'$, unde

$$m' = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x},\ n' = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - m'x\right],\ m', n' \in \mathbb{R}.$$

Dacă $m = 0, n \in \mathbb{R}$ atunci $y = n$ este **asimptotă orizontală spre** $+\infty$; dacă $m' = 0, n' \in \mathbb{R}$, atunci $y = n'$ este **asimptotă orizontală spre** $-\infty$.

## V. Tabelul de variație

Rezultatele din etapele precedente vor fi cumulate într-un tabel numit **tabelul (tabloul) de variație al funcției** alcătuit din următoarele rubrici orizontale:

1. Prima rubrică are **domeniul de definiție** $E$ sau **domeniul de studiu** $[0, T_0]$, $E \cap [0, \infty)$ în care sunt trecute valorile importante ale lui $x: x_i, x_i', x_i'', 0$ precum și semnele: | (bară verticală) sau (două bare verticale continue, cu spațiul dintre ele hașurat) pentru arăta că $f$ nu este definită acolo.

2. A doua rubrică **conține semnul primei derivate** și numărul 0 (dacă există) precum și semnele: (cu specificația că $f'$ nu este definită) și ¦ (bară verticală punctată) pentru a marca faptul că în acel punct $f$ nu este derivabilă.

3. În rubrica a treia se trec **valorile corespunzătoare ale funcției** $f$, $f(x_i)$, $f(x_i')$, $f(x_i'')$, $f(0)$, **limitele funcției** (**sau valorile funcției**) **la capetele intervalelor din** $E$ precum și săgețile ↗ sau ↘ care marchează monotonia funcției (creșterea sau descreșterea funcției). De asemenea, în această linie pot figura semnele |, pentru a preciza că $f$ nu este definită într-un punct sau pe un interval. Dacă în această rubrică apar anomalii de genul funcția $f$ „urcă” de la o valoare mai mare la una mai mică, înseamnă că s-a greșit la semnul derivatei sau la limite ori valori în aceste puncte, etc.

4. Rubrica a patra conține **semnul celei de-a doua derivate** și numărul 0 (dacă există), semnele de la 2, precum și $\cup$ dacă $f'' > 0$ sau $\cap$ dacă $f'' < 0$.

În cazul dificultăților de calcul pentru $f''$ sau în rezolvarea ecuației $f''(x) = 0$, această rubrică se omite. Deci dacă n-avem etapa III, atunci această linie va lipsi din tabel.

## VI. Trasarea graficului

Într-un reper cartezian $xOy$ se vor marca **prin linii punctate** asimptotele după care **se vor trece toate punctele**: $(x_i, 0), \left(x_i', f\left(x_i'\right)\right), \left(x_i'', f\left(x_i''\right)\right), (0, f(0))$.

**Aceste puncte se unesc printr-o curbă continuă**, ținând seama de asimptote, monotonie, convexitate, concavitate, etc.

Pentru a obține graficul funcției $x \to |f(x)|$, se trasează uşor graficul funcției $x \to f(x)$. Se rețin acele porțiuni ale graficului, pentru care $y = f(x)$ este mai mare sau egal cu zero, ceea ce înseamnă că aceste porțiuni sunt situate deasupra axei $Ox$. Porțiunile din grafic situate sub axa $Ox$, se simetrizează în raport cu această axă şi se obține astfel întreg graficul funcției $x \to |f(x)|$.

**Reprezentarea grafică a funcțiilor. Rezolvarea grafică a ecuațiilor**

Prezentăm în continuare graficele câtorva funcții precum şi rezolvarea grafică a unor ecuații care depind de un parametru.

1) $\boxed{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - x}$ (funcție polinomială);

Să se traseze graficul funcției $f$ şi să se discute numărul de rădăcini reale ale ecuației $f(x) = m$, după valorile parametrului real $m$.

**R**. Vom parcurge etapele prezentate în secțiunea teoretică.

I. **Domeniul de definiție**. $E = \mathbb{R}$. Să observăm că funcția este **impară** deoarece $f(-x) = (-x^3) - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x), \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Deci vom studia funcția pe $E_s = [0, \infty)$ (**intervalul de studiu**)

- $G_f \cap Ox : f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1$;
- $G_f \cap Oy : x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$.
- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

II. **Derivata întâi**. Fiind o funcție polinomială, atunci se ştie că aceasta este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Avem: $f'(x) = 3x^2 - 1$. Ecuația $f'(x) = 0$ are soluția (în $E_s$) $x_1' = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ pentru care $f(x_1') = -\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

III. **Derivata a doua**. Avem: $f''(x) = 6x$, iar ecuația $f''(x) = 0$ are soluția $x_1'' = 0$ când $f(0) = 0$.

IV. **Asimptote**

1) **verticale**: nu sunt (funcția fiind continuă pe $[0, \infty)$);

2) **oblică** spre $+\infty$: $y = mx + n$, unde $m = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty \notin \mathbb{R}$.

Deci nu avem nici asimptotă oblică spre $+\infty$ pentru $f$.

Din $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ se deduce că $f$ nu are asimptotă orizontală spre $+\infty$.

**V. Tabelul de variație**

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{3}/3$ | | $1$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-2\sqrt{3}/9$ $(m)$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ $\nearrow$ | $\infty$ |
| $f''(x)$ | $0$ | $+$ $+$ | $+$ $+$ | $+$ $+$ | $+$ | $+$ $+$ | |

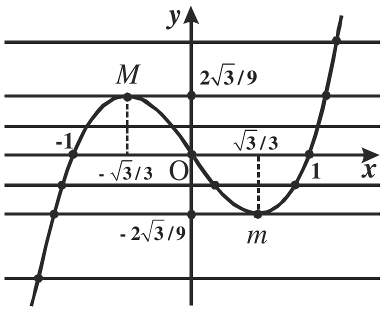



Fig. 1

VI. **Graficul** (este redat în Fig. 1).
Cum $f$ este impară, graficul este simetric în raport cu $O$.

**Rezolvarea grafică a ecuației $f(x)=m, m\in\mathbb{R}$.** Vom arăta în continuare o altă modalitate de tratare a acestei chestiuni, utilizând graficul funcției. Metoda se numește, din acest motiv, **metoda grafică**. Fie dreapta $y=m$, paralelă cu axa $Ox$. Când $m$ este variabil din $\mathbb{R}$, această dreaptă, parcurge mulțimea tuturor dreptelor din planul $xOy$, care sunt paralele cu $Ox$.

Dacă această dreaptă taie graficul funcției $y=f(x)$, într-unul sau mai multe puncte, atunci abscisele acestor puncte vor fi soluții ale ecuației $f(x)=m$.

Dacă dreapta nu intersectează graficul, atunci pentru acele valori ale lui $m$, ecuația $f(x)=m$ nu are soluții.

În discuția ecuației, prin metoda grafică, distingem cazurile:

1) $m<-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$. Se observă că dreapta $y=m$ taie graficul într-un singur punct. Deci ecuația $f(x)=m$ are o unică soluție reală situată în intervalul $(-\infty,-1)$.

2) $m=-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$. Ecuația $f(x)=m$ are o soluție $x_1\in(-\infty,-1)$ și rădăcina dublă $x_2=x_3=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

3) $m \in \left(-\frac{2\sqrt{3}}{9}, 0\right)$. Ecuația are trei rădăcini reale distincte: $x_1 < -1,\ x_2 \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $x_3 \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$ generate de cele trei puncte de intersecție ale dreptei $y = m$ cu graficul funcției.

4) $m = 0$. Ecuația are trei rădăcini reale distincte $x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$.

5) $m \in \left(0, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$. Ecuația are trei rădăcini reale distincte: $x_1 \in \left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $x_2 \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$, $x_3 > 1$.

6) $m = \frac{2\sqrt{3}}{9}$. Ecuația are trei rădăcini reale $x_1 = x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (rădăcină dublă) şi $x_3 > 1$.

7) $m > \frac{2\sqrt{3}}{9}$. În acest caz ecuația $f(x) = m$ are o singură rădăcină reală $x_1 > 1$.

**Observații**. **1)** Cum se aleg valorile pentru $m$? Sunt acele valori semnificative ale funcției, care se pot lua din tabelul de variație al funcției. Uneori pentru a preciza mai bine intervalele soluțiilor se aleg şi alte valori.

**2)** Această ecuație cu parametru a fost simplă, iar discuția se poate soluționa fie cu şirul lui Rolle, fie prin metoda grafică. **Dar există cazuri când este preferată una din cele două tehnici, pentru rapiditatea rezolvării**.

2) $\boxed{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \left|x^3 - x\right|}$

Să se traseze graficul funcției $g$.

**R**. Observăm că $g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, ceea ce arată că graficul funcției $g$ este situat deasupra axei $Ox$. De asemenea funcția $g = |f|$, unde $f$ este funcția analizată în exemplul precedent. Deci $g$ coincide cu $f$ acolo unde $f \geq 0$ şi este egală cu $(-f)$ acolo unde $f \leq 0$.

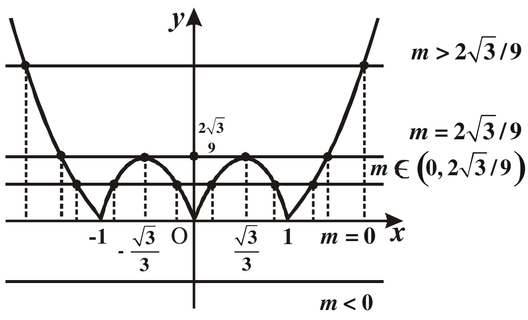



Fig.2

Deci graficul lui $g$ se obține din graficul lui $f$ simplu: **coincide cu graficul lui** $f$ pe mulțimea acelor $x$ pentru care $f(x) \geq 0$ şi este **simetricul graficului lui** $f$ în raport cu axa $Ox$ pentru acei $x \in \mathbb{R}$ pentru care $f(x) \leq 0$.

Aşadar graficul lui $g$ este cel indicat în Fig. 2.

**Observaţii**. **1)** Realizând graficul funcţiei $g$ plecând de la graficul lui $f$, se poate pierde faptul că punctele $(-1, 0), (0, 0), (1, 0)$ sunt puncte unghiulare ale graficului.

**2)** De regulă, când în structura unei funcţii apare modulul se **trece la explicitarea acestuia**. Trasaţi graficul acestei funcţii independent de graficul funcţiei precedente, prin parcurgerea tuturor etapelor.

**Rezolvarea grafică e ecuaţiei** $\boldsymbol{g(x) = m, m \in \mathbb{R}}$. Discuţia ecuaţiei $g(x) = m, m \in \mathbb{R}$ ar decurge astfel:

a) $m < 0$. Ecuaţie imposibilă.

b) $m = 0$. Ecuaţia are trei soluţii reale distincte: $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$.

c) $m \in \left(0, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$. Ecuaţia are şase soluţii reale distincte: $x_1 < -1, x_2 \in \left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $x_3 \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right), x_4 \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), x_5 \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right), x_6 > 1$.

d) $m = \frac{2\sqrt{3}}{9}$. Ecuaţia are şase soluţii reale: $x_1 < -1, x_2 = x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (rădăcină dublă), $x_4 = x_5 = \frac{\sqrt{3}}{3}, x_6 > 1$.

e) $m > \frac{2\sqrt{3}}{9}$. Ecuaţia are două soluţii reale: $x_1 < -1$, $x_2 > 1$.

3) $\boxed{f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{x+1}}$ (funcţie raţională)

a) Să se traseze graficul funcţiei $f$.

b) Să se discute numărul de rădăcini reale ale ecuaţiei: $x^2 - mx - m = 0$, după valorile parametrului real $m$.

**R**. a) I. **Domeniul de definiţie**. $E = \mathbb{R} = -\{-1\}$. Funcţia nu este nici pară, nici impară, cum uşor se poate vedea.

- $G_f \cap Ox : f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
- $G_f \cap Oy : f(0) = 0$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x \nearrow -1} = -\infty, \lim\limits_{x \searrow -1} = +\infty$ (ultimele două limite arată că $x = -1$ este asimptotă verticală).

II. **Prima derivată**. Funcţia $f$ este derivabilă pe $E$ şi $f'(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.

Ecuaţia $f'(x)=0$ are soluţiile $x_1'=-2, x_2'=0$ pentru care $f(-2)=-4$ şi $f(0)=0$.

III. **A doua derivată**. Avem: $f''(x)=\dfrac{2}{(x+1)^3}$. Ecuaţia $f''(x)=0$ nu are soluţii, ceea ce arată că nu avem puncte de inflexiune.

IV. **Asimptote**.

1) verticale: $x=-1$ (s-a văzut la I.).

2) oblică spre $+\infty$: $y=mx+n$, unde $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2+x}=1$ şi

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{x+1}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x+1}=-1.$$

Deci $y=x-1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ pentru $f$.

Aceeaşi dreaptă se găseşte ca asimptotă oblică spre $-\infty$.

V. **Tabelul de variaţie**

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − \| | − | 0 | + + | + |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-4$ $(M)$ | ↘ $-\infty$ \| | $+\infty$ ↘ | $0$ $(m)$ | ↗ | $+\infty$ |
| $f''(x)$ | | − − − | | \| | + + + + + | | | |

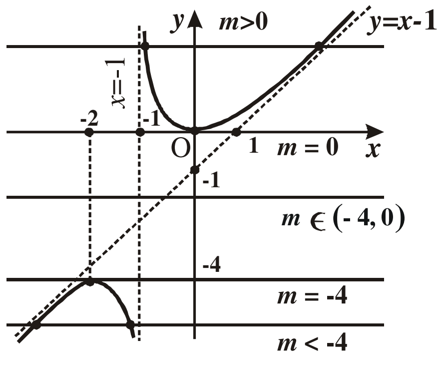



Fig.3

VI. **Graficul** este redat în Fig. 3.

b) Ecuaţia se mai scrie $m(x+1)=x^2$ sau $(x\neq -1)$ $m=\dfrac{x^2}{x+1}$, adică am pus în evidenţă funcţia $f$ căreia i-am trasat graficul. Valorile principale pentru $m$ se aleg, de obicei, valorile extreme ale funcţiei (aici valorile $-4$ şi 0). Discuţia este următoarea (am marcat pe grafic câte o dreaptă $y=m$ pentru fiecare caz analizat):

1) $m<-4$. Ecuaţia are două rădăcini reale distincte: $x_1<-2,\ x_2\in(-2,-1)$.

2) $m=-4$. Ecuaţia are rădăcina dublă $x=-2$.

3) $m\in(-4,0)$. Ecuația nu are soluție.

4) $m=0$. Ecuația are rădăcina dublă $x=0$.

5) $m>0$. Ecuația are două rădăcini reale distincte: $x_1\in(-1,0)$, $x_2>0$.

**Observație**. Aşa cum este dată ecuația, fiind de gradul doi, se putea face discuția utilizând discriminantul.

4) $\boxed{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2}}$

Să se reprezinte grafic funcția $f$ şi apoi să se discute ecuația $f(x)=m,\ m\in\mathbb{R}$.

**R**. I. **Domeniul de definiție**. $E=\mathbb{R}$.

- $G_f\cap Ox: f(x)=0\Rightarrow x=0,\ x=3$.
- $G_f\cap Oy: f(0)=0$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

II. **Prima derivată**. Avem: $f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{\sqrt[3]{\left(x^3-3x^2\right)^2}}\in\mathbb{R}$ dacă $x\neq 0,\ x\neq 3$.

Deci $f$ este derivabilă pe $\mathbb{R}-\{0,3\}$.

Ce se poate afirma despre punctele în care $f$ nu este derivabilă ?

Pentru $x=0$ avem: $f_s'(0)=\lim\limits_{x\nearrow 0} f'(x)=\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{x-2}{\sqrt[3]{x(x-3)^2}}=\infty$ şi

$f_d'(0)=\lim\limits_{x\searrow 0} f'(x)=-\infty$ relații care arată că punctul $(0,0)$ este un punct de întoarcere pentru grafic.

Pentru $x=3$ se găseşte uşor că $f_s'(3)=f_d'(3)=\infty$, ceea ce arată că $x=3$ este punct de inflexiune.

III. **A doua derivată**. Găsim: $f''(x)=\dfrac{-2}{(x-3)\sqrt[3]{\left(x^3-3x^2\right)^2}}$, $x\neq 0$, $x\neq 3$. Ecuația

$f''(x)=0$ n-are soluții.

IV. **Asimptote**

1) verticale: nu există.

2) oblice: • la ramura spre $+\infty$, are forma $y=mx+n$, unde $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ şi

$n=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt[3]{x^3-3x^2}-x\right]=$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2}{\sqrt[3]{\left(x^3-3x^2\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3-3x^2}+x^2}=-1.$$ Deci $y=x-1$.

- la ramura spre $-\infty$ se obține aceeaşi dreaptă $y=x-1$.

V. **Tabelul de variație**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $+\infty \vert -\infty$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+\infty \vert +\infty$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $\sqrt[3]{-4}$ $(m)$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $f''(x)$ | | $+$ | $\vert$ | | $+$ | | $\vert$ | $-$ | |

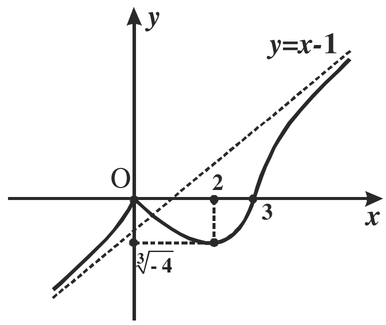



Fig. 4

VI. **Graficul** este prezentat în Fig. 4.

**Rezolvarea grafică a ecuației** $f(x)=m, m\in\mathbb{R}$. Discuția ecuației este imediată.

1) Dacă $m<\sqrt[3]{-4}$, atunci ecuația are o singură soluție reală: $x_1<0$.

2) Dacă $m=\sqrt[3]{-4}$, atunci ecuația are trei rădăcini reale: $x_1<0, x_2=x_3=2$.

3) Dacă $m\in\left(\sqrt[3]{-4},0\right)$, ecuația are trei rădăcini reale distincte: $x_1<0$, $x_2\in(0,2)$, $x_3\in(2,3)$.

4) Dacă $m=0$, ecuația are trei rădăcini reale: $x_1=x_2=0, x_3=3$.

5) Dacă $m>0$, ecuația are o singură rădăcină reală: $x_1>3$.

5) $\boxed{f:E\to\mathbb{R},\ f(x)=x+\sqrt{x^2+2x}}$

a) Să se determine domeniul maxim de definiție $E$ şi să se traseze graficul funcției.

b) Să se discute ecuația $\sqrt{x^2+2x}=m-x, m$ fiind parametru real.

**R**. a) Domeniul maxim de definiție se determină din cerința de existență a radicalului de ordin par. Deci se impune $x^2+2x\geq 0$, cu soluția $x\in(-\infty,-2]\cup[0,\infty)$.

I. **Domeniul de definiție**. $E=(-\infty,-2]\cup[0,\infty)$

- $G_f\cap Ox: f(x)=0\Rightarrow x+\sqrt{x^2+2x}=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+2x}=-x\Leftrightarrow x^2+2x=x^2$

(ultima echivalentă are loc pe $E\cap(-x\geq 0)$) cu soluția $x=0$, când $f(0)=0$.

- $G_f \cap Oy : f(0) = 0$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = (\infty - \infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2 - x^2 - 2x}{x - \sqrt{x^2+2x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x}{x\left(1+\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}\right)} = -1$ ceea

  ce arată că $y = -1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty,\ f(-2) = -2,\ f(0) = 0$.

II. **Prima derivată**. Funcția $f$ este derivabilă pe $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$ și

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+2x} + x + 1}{\sqrt{x^2+2x}}.$$

Ecuația $f'(x) = 0$ se reduce la $\sqrt{x^2+2x} + x + 1 = 0$, care nu are soluții.

III. **Derivata a doua**. Plecând de la $f'(x) = 1 + \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$ găsim

$f''(x) = \dfrac{-1}{\left(x^2+2x\right)\sqrt{x^2+2x}}$. Ecuația $f''(x) = 0$ nu are soluții.

IV. **Asimptote**

1) verticale • nu există. 2) oblică • la ramura spre $+\infty$, are forma $y = mx + n$,

unde $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + \sqrt{x^2+2x}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\left(1+\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}\right)}{x} = 2$ și

$$n = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - mx\right] = \lim_{x\to\infty}\left[x + \sqrt{x^2+2x} - 2x\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x} - x\right) = (\infty - \infty) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x} + x} = 1.$$

Așadar $y = 2x + 1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ pentru $f$.

• dreapta $y = -1$, am văzut, reprezintă asimptotă orizontală la ramura de la $-\infty$.

V. **Tabelul de variație**

| $x$ | $-\infty$ | -2 | | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-\ -$ | | | $+\ +$ | |
| $f(x)$ | -1 $\searrow$ | -2 | | 0 $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $f''(x)$ | $-\ -$ $\frown$ | | | $-\ -$ $\frown$ | |

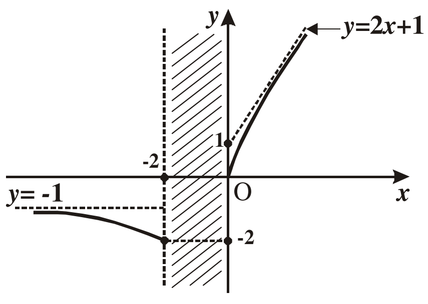


Fig.5

VI. **Graficul** funcției este cel din Fig. 5.

b) 1) Dacă $m \in (-\infty, -2) \cup (-1, 0)$, ecuația nu are soluții.

2) Dacă $m \in [-2, -1)$, ecuația are o rădăcină: $x_1 \le -2$.

3) Dacă $m \in [-1, 0)$, ecuația nu are rădăcini.

4) Dacă $m \ge 0$, ecuația are o rădăcină: $x_1 \ge 0$.

6) $$\boxed{f : E \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{|\ln x|}{x}}$$

a) Să se determine domeniul maxim de definiție şi să se traseze graficul funcției $f$.

b) Să se discute ecuația $f(x) = m,\ m \in \mathbb{R}$.

**R**. a) Pentru determinarea domeniului maxim de definiție se impune condiția $x > 0$.

I. **Domeniul maxim de definiție**. $E = (0, \infty)$.

Funcția $f$ este continuă pe $E$ (fiind cât de funcții continue).

Se explicitează funcția $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x}, & x \ge 1 \\ -\dfrac{\ln x}{x}, & x \in (0,1) \end{cases}$

- $G_f \cap Ox : f(x) = 0 \Rightarrow x = 1$.
- $G_f \cap Oy = \varnothing \ (x = 0 \notin E)$.
- $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{|\ln x|}{x} = \dfrac{\infty}{0_+} = \infty$, adică $x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta.
- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$, ceea ce arată că $y = 0$ reprezintă asimptota orizontală la ramura de la $+\infty$.

II. **Derivata întâi**. Funcția $f$ este derivabilă pe $(0, \infty) - \{1\}$ şi

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \ln x}{x^2}, & x > 1 \\ \dfrac{\ln x - 1}{x^2}, & x \in (0, 1) \end{cases}.$$

Studiem derivabilitatea funcției $f$ în $x = 1$, utilizând corolarul (consecința) teoremei lui Lagrange şi avem: $f_s'(1) = \lim\limits_{x \nearrow 1} f'(x) = \lim\limits_{x \nearrow 1} \dfrac{\ln x - 1}{x^2} = -1$ şi

$f_d'(1) = \lim\limits_{x \searrow 1} f'(x) = \lim\limits_{x \searrow 1} \dfrac{1 - \ln x}{x^2} = 1$ .

Cum $f_s'(1) \neq f_d'(1)$ şi $f_s'(1)$, $f_d'(1)$ sunt finite deducem că $f$ nu este derivabilă în $x = 1$, iar punctul $x = 1$ este punct unghiular al funcției.

Ecuația $f'(x) = 0$ are soluția $x = e \in E$ .

III. **Derivata a doua**. Avem: $f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}, & x > 1 \\ \dfrac{3 - 2\ln x}{x^3}, & x \in (0, 1) \end{cases}$ .

Ecuația $f''(x) = 0$ conduce la ecuația $2\ln x - 3 = 0$, care se constată că are soluția $x_0'' = e^{\frac{3}{2}} > e$ .

IV. **Asimptote**

1) verticale: $x = 0$ .

2) orizontale: $y = 0$ la ramura de la $+\infty$ .

V. **Tabelul de variație**

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $e$ | | $x_0''$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $-1 \mid 1$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $e^{-1}$ $(M)$ | $\searrow$ | | $\searrow$ | $0$ |
| $f''(x)$ | | $+$ $+$ | $\mid$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ $+$ | |

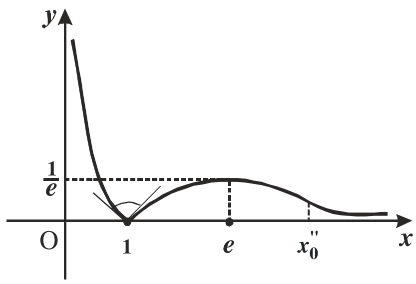


Fig. 6

VI. **Graficul** este redat în Fig. 6.

b) 1) Dacă $m < 0$, ecuația nu are soluții.

2) Dacă $m = 0$, ecuația are soluția $x = 1$ .

3) Dacă $m \in \left(0, \dfrac{1}{e}\right)$, atunci ecuația are trei soluții reale diferite: $x_1 \in (0, 1)$, $x_2 \in (1, e)$, $x_3 > e$ .

4) Dacă $m = \dfrac{1}{e}$, ecuația are trei rădăcini reale: $x_1 \in (0, 1)$, $x_2 = x_3 = e$ .

5) Dacă $x > \dfrac{1}{e}$, ecuația are o singură rădăcină reală: $x_1 \in (0, 1)$.

7) $\boxed{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=xe^{x}}$

Să se reprezinte grafic funcția şi apoi să se discute ecuația $f(x)=m$, după valorile parametrului real $m$.

**R**. I. **Domeniul de definiție**. $E=\mathbb{R}$.

- $G_f \cap Ox: f(x)=0 \Rightarrow x=0$.
- $G_f \cap Oy: f(0)=0$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0$, ceea ce arată că $y=0$ este aimptotă orizontală spre $-\infty$ pentru $f$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

II. **Derivata întâi**. Funcția $f$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ (fiind produs de funcții derivabile) şi $f'(x)=(x+1)e^{x}$. Ecuația $f'(x)=0$ are soluția $x=-1$, eventual punct de extrem ($x=-1$ este punct de minim deoarece pentru $x<-1, f'(x)<0$, iar dacă $x>-1, f'(x)>0$), când $f(-1)=-\frac{1}{e}$.

III. **Derivata a doua**. Avem: $f''(x)=(x+2)e^{x}$, iar ecuația $f''(x)=0$ are soluția $x=-2$, care este punct de inflexiune pentru $f$ deoarece dacă $x<-2, f''(x)<0$, iar pentru $x>-2, f''(x)>0$ ($f$ fiind continuă în $x=-2$), $f(-2)=-\frac{2}{e^{2}}$.

IV. **Asimptote**

1) verticale – nu există (deoarece $f$ este continuă pe $\mathbb{R}$).

2) orizontală: $y=0$ spre $-\infty$.

3) oblică: la ramura spre $+\infty$, are forma $y=mx+n$, unde $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty\notin\mathbb{R}$ şi deci nu avem asimptotă oblică.

V. **Tabelul de variație**

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-\frac{2}{e^2}$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{e}$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |
| $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | |

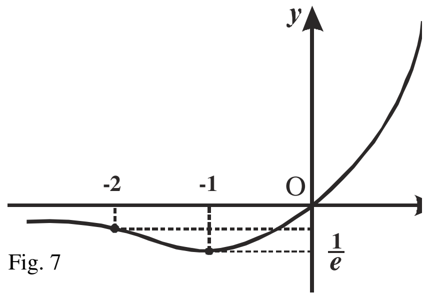



Fig. 7

VI. **Graficul** este cel din Fig. 7.

**Rezolvarea grafică a ecuației $f(x) = m, m \in \mathbb{R}$.** Discuția ecuației este următoarea:

1) Dacă $m < -\frac{1}{e}$, ecuația n-are soluții.

2) Dacă $m = -\frac{1}{e}$, ecuația are rădăcina dublă $x = -1$.

3) Dacă $m \in \left(-\frac{1}{e}, 0\right)$ ecuația are două rădăcini reale distincte: $x_1 < -1,\ x_2 \in (-1, 0)$.

4) Dacă $m \geq 0$, ecuația are o rădăcină reală: $x_1 \geq 0$.

8) $\boxed{f : E \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\cos x}{\cos 2x}}$

a) Să se determine domeniul maxim de definiție $E$ şi să se traseze graficul funcției.

b) Să se discute ecuația $2m\cos^2 x - \cos x - m = 0$, după valorile parametrului real $m$.

**R**. a) Pentru a stabili domeniul de definiție se impune condiția $\cos 2x \neq 0$. Soluțiile ecuației $\cos 2x = 0$ sunt $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Deci $E = \mathbb{R} - \left\{\pm\frac{\pi}{4} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Să observăm că funcția $f$ este periodică, de perioadă principală $T_0 = 2\pi$ (deoarece funcția $f$ se exprimă cu ajutorul funcției $\cos x$, $f(x) = \frac{\cos x}{2\cos^2 x - 1}$).

Prin urmare este suficient să realizăm graficul funcției pe intervalul de studiu de lungimea unei perioade $T_0 = 2\pi$. Fie acest interval: $E_s = [-\pi, \pi]$. Să observăm de asemenea că $f$ este o funcție pară $(f(-x) = f(x))$ ceea ce permite să restrângem intervalul de studiu la $[0, \pi]$ (graficul pe $[-\pi, 0]$ este simetricul graficului realizat pe $[0, \pi]$ față de $Oy$ ).

Aşadar vom lua ca interval de studiu $E_s^{'} = [0, \pi]$.

I. **Domeniul de definiție**. $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$.

- $G_f \cap Ox : f(x) = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$.
- $G_f \cap Oy : f(0) = 1$.
- $f(0) = 1,\ f(\pi) = -1$.

II. **Derivata întâi**. Funcția este derivabilă pe $[0, \pi]-\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$ şi $f'(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 2x}$.

Ecuația $f'(x)=0$ are soluțiile $x_1=0, x_2=\pi$, eventuale puncte de extrem pentru $f$.

III. **Derivata a doua**. Are forma: $f''(x)=\frac{7\cos x-6\cos^3 x}{\cos^3 2x}$, iar ecuația $f''(x)=0$ se reduce la rezolvarea ecuațiilor $\cos x=0, \cos^2 x=\frac{7}{6}$. Prima ecuație are soluția $x=\frac{\pi}{2}$, iar cealaltă este imposibilă $\left(\frac{7}{6}>1\right)$.

IV. **Asimptote**

1) verticale.

Să observăm că $\lim\limits_{x\nearrow\frac{\pi}{4}} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\searrow\frac{\pi}{4}} f(x)=-\infty$, ceea ce arată că $x=\frac{\pi}{4}$ este asimptotă verticală, iar $\lim\limits_{x\nearrow\frac{3\pi}{4}} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\searrow\frac{3\pi}{4}} f(x)=-\infty$ adică dreapta $x=\frac{3\pi}{4}$ este asimptotă verticală.

2) oblice – nu există, deoarece domeniul de studiu nu conține interval de forma $(-\infty, a)$ sau $(a, \infty)$.

V. **Tabelul de variație**

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{4}$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\frac{3\pi}{4}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | $+$ | $+$ | \| | $+$ | $0$ |
| $f(x)$ | $1$ $(m)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ \| $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ \| $-\infty$ | $\nearrow$ | $-1$ $(M)$ |
| $f''(x)$ | | $+$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $-$ | |

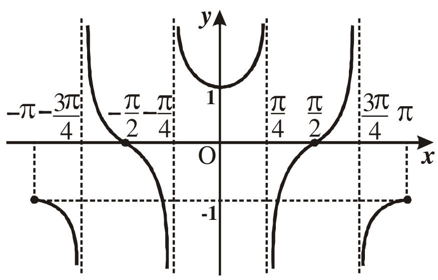



Fig.8

b) Se aduce ecuația la forma $m\cos 2x=\cos x$ sau pentru $\cos 2x\neq 0, m=f(x)$. Discuția ecuației temă.

VI. **Graficul** funcției este redat pe $[-\pi,\pi]-\left\{\pm\frac{\pi}{4},\pm\frac{3\pi}{4}\right\}$ în Fig. 8, iar pe domeniul maxim de definiție în Fig. 9 (de fapt am generat graficul pe încă două intervale de lungime $2\pi$, $[\pi, 3\pi]$ şi respectiv $[-3\pi, -\pi]$, aceasta realizându-se prin translatarea spre dreapta şi respectiv spre stânga a graficului din intervalul $[-\pi, \pi]$ ).

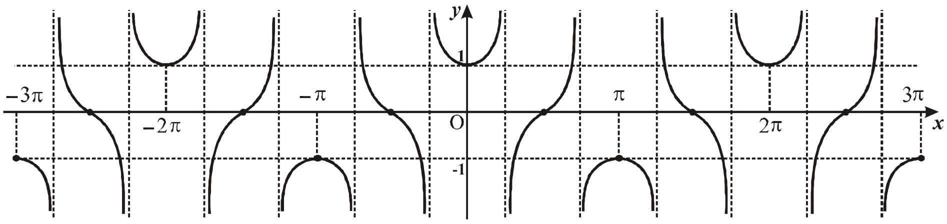



Fig.9

9) $\boxed{f : E \to \mathbb{R},\ f(x)=\frac{x}{2}+\operatorname{arctg} x}$

a) Să se determine domeniul maxim de definiție şi să se traseze graficul funcției $f$.

b) Să se discute ecuația $f(x)=m$, după valorile parametrului real $m$.

**R**. a) Cum funcția arctg este definită pe $\mathbb{R}$, deducem $E=\mathbb{R}$.

I. **Domeniul de definiție**. $E=\mathbb{R}$. Să observăm că funcția $f$ este impară:

$$f(-x)=-\frac{x}{2}+\operatorname{arctg}(-x)=-\left(\frac{x}{2}+\operatorname{arctg} x\right)=-f(x),\ \forall\ x\in\mathbb{R}.$$

Deci este suficient să studiem funcția pe intervalul $E_s=[0,\infty)$. Graficul funcției este simetric în raport cu originea $O$ a reperului cartezian $xOy$.

- $G_f\cap Ox : f(x)=0 \Rightarrow \frac{x}{2}+\operatorname{arctg} x=0$.

Să observăm că $x=0\in E_s$ este soluție a ecuației. Cum $f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{1+x^2}>0$ rezultă că $f$ este strict crescătoare şi deci injectivă. Prin urmare $x=0$ este unica soluție a ecuației.

- $G_f\cap Oy : f(0)=0$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ (deci nu avem asimptotă orizontală spre $+\infty$ ).

II. **Derivata întâi**. Funcția este derivabilă pe $[0,\infty)$ şi

$$f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2+3}{2\left(1+x^2\right)}.$$

Ecuația $f'(x)=0$ se reduce la $x^2+3=0$ care nu are soluții reale.

III. **Derivata a doua**. Are expresia: $f''(x)=-\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$.

Ecuația $f''(x)=0$ conduce la $x=0\in E_s$. Cum pentru $x<0,\ f''(x)>0$, iar pentru $x>0,\ f''(x)<0$, rezultă că $x=0$ este punct de inflexiune pentru $f$.

IV. **Asimptote**

1) verticale • nu există ( $f$ fiind continuă pe intervalul de studiu $E_s$ ).

2) oblică • la ramura spre $+\infty$, are forma $y=mx+n$, unde

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)=\frac{1}{2},\ \text{deoarece}\ \lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=\frac{\frac{\pi}{2}}{\infty}=0\ \text{şi}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\operatorname{arctg} x\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Aşadar $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{2}$ reprezintă asimptota oblică la ramura de la $+\infty$.

• la ramura de la $-\infty$, are forma $y=m'x+n'$, unde $m'=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{2}$ şi

$n'=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-m'x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg} x=-\dfrac{\pi}{2}$. Prin urmare $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{2}$ este asimptotă oblică la ramura de la $-\infty$.

V. **Tabelul de variație**

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + + + + + + + | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |
| $f''(x)$ | $0$ | − − − − − − | |

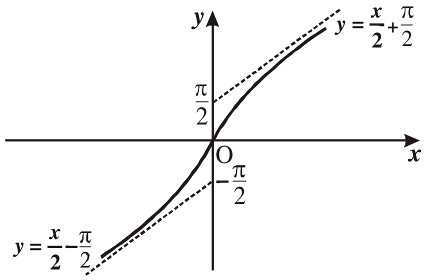


Fig.10

VI. **Graficul** (Fig. 10)

b) Avem cazurile:

1) Dacă $m<0$, ecuația are o singură rădăcină reală: $x_1<0$.

2) Dacă $m=0$, ecuația are o singură rădăcină reală: $x_1=0$.

3) Dacă $m>0$, ecuația are o singură rădăcină reală: $x_1>0$.

## REZUMATUL CAPITOLULUI

<table>
<tr><th>Noțiunea</th><th>Etape</th></tr>
<tr><td>Reprezentarea grafică a funcțiilor</td><td>
I. Precizarea domeniului E de definiție al funcției<br>
•$Gf \cap Ox : f(x) = 0 \Rightarrow (x_1, 0), (x_2, 0), ...$<br>
•$Gf \cap Oy$ : Se calculează $f(0)$, dacă $0 \in E$<br>
• Se calculează valorile sau limitele lui $f$ la capetele intervalelor<br>
II. Derivata întâi<br>
• Se determină $E_{f'}$ ( domeniul de derivabilitate)<br>
• Se rezolvă ecuația $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1', x_2', ...$<br>
• Se calculează $f(x_1'), f(x_2'), ...$<br>
III. Derivata a doua<br>
• Se calculează $f''(x)$<br>
• Se rezolvă ecuația $f''(x) = 0 \Rightarrow x_1'', x_2'', ...$<br>
• Se calculează $f(x_1''), f(x_2''), ...$<br>
IV. Asimptote<br>
1) verticale : $x = a$, dacă cel puțin una din limitele laterale<br>
$\lim\limits_{x \nearrow a} f(x), \lim\limits_{x \searrow a} f(x)$ este infinită<br>
2) oblice • la ramura de la $+\infty, y = mx + n$, unde<br>
$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}, n = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - mx\right] \in \mathbb{R}$$<br>
• la ramura de la $-\infty, y = m'x + n'$, unde<br>
$$m' = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}, n' = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - m'x\right] \in \mathbb{R}$$<br>
V. Tabelul de variație-Se completează cu elementele găsite în etapele I-IV, determinându-se semnele pentru $f'$ și $f''$, iar pentru $f$ se marchează monotonia prin săgeți $\nearrow$ sau $\searrow$<br>
<table>
<tr><td>$x$</td><td></td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td></td></tr>
<tr><td>$f''(x)$</td><td></td></tr>
</table>
VI. Trasarea graficului<br>
• Se trasează punctat asimptotele la graficul funcției în reperul $xOy$<br>
• Se marchează în reper, din tabel, punctele determinate în celelalte etape<br>
• Se unesc aceste puncte print-o linie continuă, ținând seama de forma graficului
</td></tr>
</table>

## Probleme propuse

**1. Să se determine domeniul maxim de definiție și apoi să se traseze graficele următoarelor funcții (discutând cu ajutorul graficului ecuația $f(x)=m, m\in\mathbb{R}$ ):**

**I.** 1) $f(x)=x^3-3x+2$ ; 2) $f(x)=x^3-x^2$ ; 3) $f(x)=4x^3-3x+1$ ; 4) $f(x)=(x+1)(x-2)^2$ ;

5) $f(x)=x^4-4x^3+4x^2$ ; 6) $f(x)=\frac{5x^4}{81}-\frac{10x^2}{9}+2$ .

**II.** 1) $f(x)=\frac{x^2+2}{2x}$ ; 2) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ ; 3) $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$ ; 4) $f(x)=\frac{1}{x(x-1)}$ ; 5) $f(x)=\frac{1}{x^2-4x+3}$ ;

6) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ ; 7) $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{(x+1)^2}$ ; 8) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+1}$ ; 9) $f(x)=\frac{x+3}{x^2+x-2}$ ;

10) $f(x)=\frac{8(x-1)}{x^2+6x+18}$ ; 11) $f(x)=\frac{x^3}{1-x^2}$ ; 12) $f(x)=\frac{2x^3+x^2-1}{x^2-1}$ ; 13) $f(x)=\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}$ ;

14) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{x-1}, & x<1\\ x, & x\geq 1\end{cases}$ ; 15) $f(x)=\left|\frac{5}{x-1}\right|$ ; 16) $f(x)=\left|\frac{3x}{2-x}\right|$ ; 17) $f(x)=\left|\frac{x-1}{3-x}\right|$ ;

18) $f(x)=x\left|\frac{x}{x+1}\right|$ .

**III.** 1) $f(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x}}$ ; 2) $f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$ ; 3) $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x}}$ ; 4) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ; 5) $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ ;

6) $f(x)=\sqrt{\frac{x-3}{x^2-x-2}}$ ; 7) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$ ; 8) $f(x)=2x+\sqrt{1+x^2}$ ; 9) $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ ;

10) $f(x)=\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x}$ ; 11) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$ ; 12) $f(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$ ;

13) $f(x)=\frac{\sqrt{|1-x^2|}}{x}$ ; 14) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{|1-x^2|}}$ ; 15) $f(x)=\frac{|x|}{\sqrt{|1-x^2|}}$ .

**IV.** 1) $f(x)=x\ln x$ ; 2) $f(x)=x-\ln x$ ; 3) $f(x)=x^2\ln x$ ; 4) $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$ ;

5) $f(x)=x+\ln\left(x^2-1\right)$ ; 6) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ ; 7) $f(x)=\frac{\ln x}{1+\ln x}$ ; 8) $f(x)=\ln x^2-\frac{x-4}{x-2}$ ;

9) $f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ ; 10) $f(x)=\ln\frac{x-1}{x+2}$ ; 11) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ ; 12) $f(x)=\left|\ln|x|\right|$ .

**V.** 1) $f(x)=xe^{-x}$ ; 2) $f(x)=\frac{e^x}{x}$ ; 3) $f(x)=\frac{e^x}{x+1}$ ; 4) $f(x)=x^2e^{-x}$ ; 5) $f(x)=x^2e^x$ ;

6) $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ ; 7) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ ; 8) $f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$ ; 9) $f(x)=e^{\frac{x-1}{x^2}}$ ; 10) $f(x)=e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$ ;

11) $f(x)=\frac{1}{e^x-1}$ ; 12) $f(x)=|x|e^{-|x-1|}$ .

**VI.** 1) $f(x)=\sin x+\cos x$ ; 2) $f(x)=\sin x+\sin x\cos x$ ; 3) $f(x)=\sin 2x+2\cos x$ ;

4) $f(x)=\sin 2x-2\sin x$ ; 5) $f(x)=\frac{\cos x}{2+\cos x}$ ; 6) $f(x)=\frac{\sin x}{1+\sin x}$ ; 7) $f(x)=\sqrt{\sin x}$ ;

8) $f(x)=\sin x^2$ ; 9) $f(x)=\ln|\sin x|$ ; 10) $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ .

**VII**. 1) $f(x)=\operatorname{arctg} x^2$ ; 2) $f(x)=x\operatorname{arctg} x$ ; 3) $f(x)=\ln x-\operatorname{arctg} x$ ; 4) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ ;

5) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{x}{x-1}$ ; 6) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2-1}$ ; 7) $f(x)=\arccos\frac{4-3x^2}{x^3}$ ; 8) $f(x)=\arcsin\frac{(x+1)^2}{2(1+x^2)}$ ;

9) $f(x)=\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$ ; 10) $f(x)=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ ; 11) $f(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ ; 12) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$ .

**VIII**. 1) $f(x)=x^x$ ; 2) $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ ; 3) $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ ; 4) $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$ ; 5) $f(x)=\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{1+x}$ .

**2**. Fie $f_m(x)=\frac{mx^2+(m-1)x}{x+1}, x\neq -1$ .

a) **Să se arate că asimptotele oblice ale familiei $(f_m(x))$ trec printr-un punct fix.**

**b) Să se determine $m$ astfel încât $f_m$ să aibă un extrem în $x=-2$ .**

**c) Pentru $m$ determinat la b) să se traseze graficul lui $f_m$ .**

**3. Fie funcția $f(x)=\frac{mx^2-1}{(x-1)(x-2)}, x\neq 1, x\neq 2, m\in\mathbb{R}$ .**

**a) Să se determine $m$ astfel încât $f$ să admită puncte de extrem.**
**b) Pentru $m=-2$ să se traseze graficul funcției.**

**4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{ax+a-2}{x^2+1}, a\in\mathbb{R}$ .**

**1) Să se determine $a$ astfel încât $f$ să aibă un extrem egal cu 1, în $x=1$ .**
**2) Pentru $a$ determinat la 1) să se traseze graficul funcției.**

**5. Fie $f(x)=\frac{x^3}{x^2+ax+a}, a\in\mathbb{R}$ .**

**Să se determine parametrul $a$ pentru care graficul funcției admite o singură asimptotă verticală. Pentru $a=4$ trasați graficul funcției.**

**6. Se consideră $f(x)=\frac{x^3-3x^2+m}{x-1}, x\neq 1, m\in\mathbb{R}$ .**

**Să se determine $m$ astfel încât graficul funcției să fie tangent axei $Ox$ . Pentru $m=0$ să se traseze graficul funcției.**

**7. Să se determine parametrul real $m$ pentru care graficul funcției $f(x)=\frac{x^2-2x+m}{x^2-6x+8}$ este tangent axei $Ox$ .**
**Pentru $m$ astfel determinat să se traseze graficul funcției.**

**8. Fie $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{2x^2-2x+a}, x\neq 0, x\neq 1, a\in\mathbb{R}$ .**

**a) Să se determine $a$ pentru care graficul lui $f$ admite asimptote verticale.**
**b) Pentru $a=0$ , trasați graficul funcției.**

**9. Să se determine parametrii reali $a,b$ pentru care funcția $f:E\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2-2x+a}{x^2+2ax+b}$ să aibă o singură asimptotă verticală, dreapta $x=1$ . Pentru $a,b$ astfel determinați să se traseze graficul lui $f$ .**

10. Fie $f(x)=\frac{x^2+ax+b}{\sqrt{x^2-1}}, a,b\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine parametrii reali $a,b$ pentru care $y=x+1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ pentru $f$, iar $x=2$ este punct de extrem.

b) Pentru $a=1, b=5\sqrt{2}$ să se traseze graficul funcției.

11. Să se determine parametrii reali $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care funcția $f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{ax^2+b}{x-1}$, are tangenta la grafic în $x=2$ dreapta $y=-2x+13$. Pentru $a,b$ determinați, trasați graficul funcției.

12. Fie $f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2+ax+b}{2(x+1)}, a,b\in\mathbb{R}$.

Să se determine $a,b$ astfel încât graficul funcției să treacă prin punctul $A(0,-1)$, iar $x=1$ să fie punct de extrem pentru $f$. Cu $a,b$ astfel determinați să se traseze graficul lui $f$.

13. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax(x-b)(x-c), a\neq 0, a,b,c\in\mathbb{R}$.

Să se determine $a,b,c$ astfel încât $x=\frac{4}{3}$ să fie punct de minim, iar pentru $x=6, f$ să ia valoarea minimă $6$.

14. Fie $f(x)=\frac{\left|ax^2+bx+c\right|}{x-2}, a>0, a,b,c\in\mathbb{R}, c<0, x\neq 2$.

a) Să se determine $a,b,c$ pentru care $y=x+3$ este asimptotă oblică și $f(0)=1$.

b) Pentru $a=1, b=2, c=-3$ trasați graficul lui $f$.

15. Să se determine parametrii $a,b,c$ astfel încât graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x^2+cx-2}$ să treacă prin $O(0,0)$, să fie tangent axei $Ox$ în $O$, iar $x=1$ să fie asimptotă verticală. Pentru valorile găsite trasați graficul lui $f$.

16. Se consideră $f:E\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x^2+cx+d}, a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Să se determine $a,b,c,d$ astfel încât graficul funcției să intersecteze axa $Oy$ în punctul de ordonată $y=-3$ și să nu intersecteze dreapta $y=1$ și $x=1$ este unica asimptotă verticală. Pentru valorile obținute trasați graficul funcției.

17. Fie $f:E\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x+d}, a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Să se determine $a,b,c,d$ dacă $x=3, y=x+2$ sunt asimptote pentru grafic și $f(1)=1$.

Trasați graficul funcției pentru valorile lui $a,b,c,d$ astfel determinate.

18. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{ax+b}{\sqrt{x^2+x+1}}, a,b\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine $a$ și $b$ astfel încât $f$ să fie strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) Pentru $b=1$ să se reprezinte grafic $f$.

## Teste de evaluare

**Testul 1 (1 punct din oficiu)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-x^3$. a) Să se arate că există un punct $c\in(-2,1)$ în care tangenta la graficul funcției $f$ este paralelă cu coarda care unește punctele $A(-2,6)$ și $B(1,0)$ și să se determine coordonatele acelui punct. b) Să se traseze graficul funcției $f$. (2 puncte)

**2.** Fie $f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+m}{x-1}$.

a) Să se determine parametrul real $m$ astfel încât graficul funcției să fie tangent la axa $Ox$.

b) Pentru $m=4$ să se studieze variația funcției și să se reprezinte grafic. (2 puncte)

**3.** Se consideră $f:D\to\mathbb{R}, f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x^n(x^2+4)}{x(x^n+1)}$, unde $D$ este domeniul maxim de definiție.

a) Să se determine $D$ și forma explicită a lui $f$.

b) Să se traseze graficul funcției $f$. (2 puncte)

**4.** a) Să se reprezinte grafic funcția $f:D\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{|\ln x|}{\sqrt{x}}, D$ este domeniul maxim de definiție al funcției $f$.

b) Să se discute numărul rădăcinilor reale ale ecuației $f(x)=m, m\in\mathbb{R}$.

c) Să se arate că $3^{\sqrt{5}}<5^{\sqrt{3}}$. (2 puncte)

**Testul 2 (1 punct din oficiu)**

**1.** Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2-ax}{\sqrt{x^2+1}}, a\in\mathbb{R}$. Pentru ce valori ale lui $a$ funcția $f$ admite un extrem local situat la distanța 1 față de $Oy$? Pentru $a=3$, să se reprezinte grafic funcția $f$. (2 puncte)

**2.** Fie funcția $f(x)=\dfrac{x^2+2ax+b}{x^2+1}, a\neq 0, b\in\mathbb{R}, \forall x\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că există două puncte ale graficului lui $f$ în care tangenta este paralelă cu axa $Ox$ și produsul absciselor acestor două puncte este $-1$.

b) Să se determine $a,b$ astfel încât $f(1)=2$ și $f'(2)=0$.

c) Să se reprezinte grafic funcția astfel determinată. (2 puncte)

**3.** Fie $f:\mathbb{R}-\{\pm\sqrt{3}\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-3}$.

a) Să sereprezinte grafic funcția $f$; b) Să se discute numărul de rădăcini reale ale ecuației $x^3-mx^2+3m=0$, unde $m\in\mathbb{R}$. (2 puncte)

**4.** Să se traseze graficele funcțiilor definite pe domeniul maxim de definiție:

a) $f(x)=\dfrac{1}{1+\operatorname{tg} x}$; b) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2-1}$. (2 puncte)

**Testul 3 (1 punct din oficiu)**

**1.** a) Să se reprezinte grafic funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{|x^2-1|}-x$.

b) Să se determine numărul de rădăcini reale ale ecuației $\sqrt{|x^2-1|}=x+m$, după valorile parametrului real $m$. (2 puncte)

2. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x^5+15x^4-10x^3-90x^2+mx+n$ are puncte de inflexiune coliniare $\forall\, m,n\in\mathbb{R}$. (2 puncte)

3. Se consideră funcția $f:D\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^3-3x+a}{x^2+4x+b}, a,b$ parametri reali, iar $D$ este domeniul maxim de definiție al funcției.

a) Să se determine $a$ și $b$ astfel ca funcția să aibă extreme pentru $x=1$ și $x=-5$. b) Să se determine $D$; c) Să se studieze variația funcției și să se reprezinte grafic funcția. (2 puncte)

4. Să se traseze graficele funcțiilor definite pe domeniile maxime de definiție: a) $f(x)=\ln\left(\dfrac{2|x|-1}{x+2}\right)^2$;

b) $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{4x^2-1}}$. (2 puncte)

# 6. TESTE DE RECAPITULARE FINALĂ

**Testul 1**

**1.** Fie $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & 5\\ x & y\end{pmatrix}$. Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ pentru care $AB = BA$.

**2.** Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$. Să se calculeze: a) $A^2$ şi $A^3$; b) $f(A)$, dacă $f(X)=2X+X^2-X^3$; c) $x,y,z,t\in\mathbb{Q}$ astfel încât $A\cdot B=I_2$, unde $B=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$; d) $S=B^{-1}+B^{-2}+B^{-3}$.

**3.** Să se discute şi rezolve sistemul $\begin{cases}x-my+z=1\\ x-y+z=-1\\ mx+m^2y-z=m^2\end{cases}$, după valorile parametrului real $m$.

**4.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(0,4), B(2,4)$. Să se scrie ecuaţia cercului circumscris triunghiului $ABO$ şi să se determine punctele de intersecţie ale lui cu dreapta $y=x$.

**5.** Fie şirurile $(x_n),(y_n), n\geq 1$, definite prin $x_1=2, x_{n+1}=\dfrac{x_n+2}{2x_n+1}, n\geq 1$ şi respectiv $y_n=\dfrac{1-x_n}{1+x_n}, n\geq 1$.

a) Determinaţi $x_2, y_1, y_2$. b) Arătaţi că $(y_n)$ este o progresie geometrică de raţie $q=-\dfrac{1}{3}$.
c) Determinaţi $x_n, y_n$ în funcţie de $n$. d) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

**6.** Fie funcţia $f: D\to\mathbb{R}, f(x)=x-\sqrt{ax^2+bx+1}, a,b\in\mathbb{R}, a>0, D$ fiind domeniul maxim de definiţie.

a) Să se determine $a,b$ pentru care $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\dfrac{1}{2}$. Pentru $a=b=1$, precizaţi asimptotele la graficul funcţiei obţinute.

**7.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}xe^x, x<0\\ \dfrac{x}{x^2+1}, x\geq 0\end{cases}$. a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; b) Să se arate că $f$ este derivabilă în $x=0$ şi să se calculeze $f'(0)$. c) Trasaţi graficul lui $f$.

## Testul 2

1. a) Fie sistemul $\begin{cases} a^2x+2y=0 \\ 4x+ay=0 \end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$, iar $A$ matricea sistemului care verifică egalitatea $A^2=6A$. Arătați că sistemul este compatibil nedeterminat.

b) Arătați că nu există matricea $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. a) Să se calculeze $A^2, A^3, A^4$. b) Determinați $A^n, n\in\mathbb{N}^*$. c) Să se calculeze $S=A+A^2+...+A^{2006}$.

3. Fie sistemul $\begin{cases} 3x+y-z=ax \\ -x+y+z=ay \\ 2x+4y+z=az \end{cases}$. Să se determine parametrul real $a$ pentru care sistemul este compatibil nedeterminat şi să se rezolve.

4. Se consideră elipsa $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. a) Desenați elipsa și aflați distanța dintre focarele ei.

b) Scrieți ecuațiile tangentelor la elipsă paralele cu dreapta $3x+5y=1$.

5. Să se calculeze limitele: a) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x+x^2+x^3-3}{x^2-1}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+5}{\sqrt{n^2+5}}$; c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+5}{\sqrt{x^2+5}}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(a^{\frac{1}{x}}+a^{-\frac{1}{x}}-2\right), a>0$.

6. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x^3-2x+1, x\le 0 \\ ax^2+bx+c, x>0 \end{cases}$. Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât $f$ să fie derivabilă în $x=0$ şi $f(-1)=f(1)$.

7. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}-\{3\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2+|x-5|}{x-3}$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x), \lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.

b) Determinați asimptotele la graficul funcției.

c) Studiați derivabilitatea lui $f$ în $x=5$.

## Testul 3

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+ay+z=2 \\ x+(2a+1)y+2z=-3 \\ x+ay+(a-3)z=2 \end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$. a) Să se calculeze deteminantul $\Delta$ al matricei $A$ a sistemului şi să se rezolve ecuația $\Delta=0$.

b) Pentru $a=0$, determinați $A^{-1}$.

c) Pentru $a=1$ rezolvați sistemul .

2. Să se determine matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ soluție a ecuației matriceale: $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

**3.** Fie mulţimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{Z}\right\}$ şi $U(G)=\left\{A\in G \middle| A \text{ este inversabilă şi } A^{-1}\in G\right\}$.

**Arătaţi că dacă: a)** $A, B\in G$ **, atunci** $A+B, AB\in G$ **.**

**b)** $A\in U(G)$ **, atunci** $\det(A)=1$ **şi** $A^4=I_2$ **.**

**c)** $A,B,C,D\in U(G)$ **şi** $ABCD=I_2$ **atunci printre ele există două care sunt egale.**

**4. Fie hiperbola de ecuaţie** $(H): \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}-1=0$. **a) Să se calculeze distanţa de la un focar al hiperbolei la o asimptotă a ei.**

**b) Determinaţi aria triunghiului format de asimptote cu tangenta în unul din vârfurile hiperbolei.**

**c) Scrieţi ecuaţiile tangentelor la hiperbolă în punctele de abscisă** $x=5$.

**5. Fie şirul** $(a_n)$ **cu** $a_0=2, a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{1}{3}, n\ge 1$. **a) Să se calculeze primii trei termeni cu formula de mai sus. b) Să se arate că** $a_n=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{3}, \forall n\ge 1$. **c) Arătaţi că** $a_{n+1}<a_n, \forall n$.

**d) Calculaţi** $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a_{n+1}}{na_n}$.

**6. Fie funcţia** $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}, x>-1$ **.**

**a) Să se calculeze** $f'(x), x>-1$.

**b) Să se determine** $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{f(x)-f(1)}$.

**c) Precizaţi monotonia lui** $f$ **pe** $(-1,\infty)$ **.**

**d) Precizaţi punctele de inflexiune ale graficului lui** $f$**.**

**7. Se consideră funcţia** $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2x+3}{x^2+3x+2}, x>-1$.

**a) Să se arate că există** $a,b\in\mathbb{R}$ **astfel încât** $f(x)=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}$.

**b) Să se calculeze** $\lim_{x\to -1} f(x), \lim_{x\to -2} f(x)$ **şi să se precizeze asimptotele la graficul funcţiei.**

**c) Să se calculeze** $\lim_{n\to\infty}\left[f(0)-f(1)+f(2)-...+(-1)^n f(n)\right]$.

## Testul 4

**1. Se consideră matricele** $A=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ **şi** $C=A+B$.

**a) Arătaţi că** $A^2=-6A, B^2=6B$ **şi calculaţi** $A^5, B^6$. **Formulaţi regula de calcul pentru** $A^n, B^n, n\in\mathbb{N}^*$.

**b) Arătaţi că** $AB=BA$ **şi apoi calculaţi** $C^{10}$ **.**

**2.** Să se arate că: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+1 & b+1 & c+1 \\ a^3+1 & b^3+1 & c^3+1 \end{vmatrix} = (a+b+c)(a-b)(c-b)(c-a)$.

**3.** Fie matricea $A = \begin{pmatrix} x-2 & 1 \\ 1 & x-2 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine $x$ pentru care $\det(A) = 0$.

b) Să se calculeze $A^2$ şi să se verifice egalitatea $A^2 = (2x-4)A - \det(A) I_2$.

c) Arătați că $A^2 = (2x-4)A$ dacă şi numai dacă $x \in \{1, 3\}$.

d) Dacă $x = 3$, atunci arătați că $A^n = \begin{pmatrix} a_n & a_n \\ a_n & a_n \end{pmatrix}$, unde $a_n = 2^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

**4.** În planul cartezian $xOy$ se consideră elipsa $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$, de focare $F_1, F_2$, iar $A\left(\frac{5}{3}, 2\sqrt{2}\right)$. Să se determine $F_1A + F_2A$ şi să se calculeze aria maximă a triunghiului $F_1MF_2$, unde $M \in (E)$.

**5.** Să se determine parabola $(P): y^2 = 2px$ ştiind că este tangentă dreptei de ecuație $y = -x - 1$. Precizați punctul de tangență $T$. Scrieți ecuația normalei în $T$ la parabolă. Calculați aria triunghiului $TFO$.

**6.** Fie funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Definim şirul $(a_n), a_n = f(1^2) + f(2^2) + ... + f(n^2), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că $f(x) = \ln(1+\sqrt{x}) - \ln\sqrt{x}, x > 0, a_n = \ln(1+\sqrt{n}), n \in \mathbb{N}$.

b) Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} (1+\sqrt{x}) f(x)$.

**7.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x, x \in (-\infty, 1] \cup [2, \infty) \\ 2^x, x \in (1, 2) \end{cases}$.

a) Precizați punctele de discontinuitate ale lui $f$.

b) Calculați $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$.

c) Calculați $f''(x), f'''(x)$ şi apoi $f^{(n)}(x)$.

## Testul 5

**1.** Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze determinantul matricei $AI_3$.

**b) Să se arate că : 1) $A^2 = 3A$ ; 2) $A + A^2 + ... + A^{2006} = \frac{3^{2006} - 1}{2} A$ .**

**c) Dacă tripletele $(a,b,c),(x,y,z),(u,v,w)$ sunt formate din elemente în progresie aritmetică atunci determinantul $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0$ .**

**2. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care matricea $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 2 & 1-a & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ este inversabilă şi determinaţi inversa $A^{-1}$ pentru $a = 2$ .**

**3. Să se determine o soluţie $x_0, y_0, z_0$ a sistemului $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$ cu proprietatea $x_0 + y_0 + z_0 = 8$.**

**4. 1) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru ca punctele $A(-1,-2), B(2,3), C(5,a)$ să fie coliniare.**

**2) În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(1,2), B(3,1), C(2,-1)$.**
**Arătaţi că $ABC$ este triunghi dreptunghic şi scrieţi ecuaţia cercului circumscris triunghiului $ABC$ .**

**5. Fie funcţia $f : \mathbb{R} - \{-1,0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 + x}$.**

**a) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$.**

**b) Determinaţi asimptotele la graficul lui $f$ .**

**c) $\lim_{n \to \infty} [f(1) + f(2) + ... + f(n)]$.**

**6. Se consideră funcţia $f : D \to \mathbb{R}, f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$, unde $D$ este domeniul maxim de definiţie.**

**a) Precizaţi mulţimea $D$ .**

**b) Determinaţi limita şirului $(a_n) n \geq 1$, definit prin $a_n = f(1) + f(2) + ... + f(n)$.**

**c) Calculaţi $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n}$.**

**d) Determinaţi asimptota graficului la ramura de la $+\infty$ .**

**7. Se consideră funcţia $f : D \to \mathbb{R}, f(x) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^3 + nx}{n^3 + 2n + 1}\right)^{n^2}$ , unde $D$ este domeniul maxim de definiţie.**

**a) Să se determine $f$ .**

**b) Să se scrie ecuaţia tangentei în punctul de abscisă $x = 2$ .**

**c) Se consideră şirul $(a_n)$ cu $a_n = f(0) + f(-1) + ... + f(-n)$. Calculaţi $\lim_{n \to \infty} a_n$ .**

## Testul 6 ( grilă )

1. Câte matrice din mulţimea $\mathcal{M}=\left\{\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{Q}\right\}$ au determinantul zero?

a) una ; b) două ; c) o infinitate; d) nici una.

2. Dacă $A\in M_n(\mathbb{R})$ şi $\det(A)=3$, $\det(2A)=24$, atunci:

a) $n=2$ ; b) $n=3$ ; c) $n=4$ ; d) $n=5$ .

3. Numărul de minori de ordin doi ai unei matrice de tip $(3,4)$ este egal cu:

a) 6 ; b) 12 ; c) 18 ; d) 24.

4. Ecuaţia $x^2+y^2-2mx+4y+8=0$ reprezintă ecuaţia unui cerc dacă

a) $m\in\mathbb{R}$ ; b) $|m|>2$; c) $m\in\{\pm 2\}$; d) $m\in(-2,2)$,

iar pentru $m=3$, ecuaţia tangentei în punctul $P(2,0)$ este:

a) $x-2y=0$ ; b) $x-2y+1=0$ ; c) $x-2y-2=0$ ; d) $x+2y-1=0$.

5. Dreapta $y=2x$ este asimptotă pentru hiperbola $(H):\dfrac{x^2}{a^2}-y^2-1=0$ dacă: a) $a=1$ b) $a=2$ ; c) $a=\dfrac{1}{2}$ ; d) $a=3$ ,

iar tangenta la hiperbolă în $P\left(1,\sqrt{3}\right)$ cu $a$ determinat mai sus este: a) $4x-\sqrt{3}y-1=0$ ;

b) $4x-\sqrt{3}y+1=0$ ; c) $\dfrac{x}{4}-3y-1=0$ ; d) $\dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{\sqrt{3}}=0$ .

6. Fie funcţia $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x^3-x}, x>1$ .

Atunci: 1) $\lim\limits_{x\to\infty} x^n f(x)=\infty$, dacă: a) $n=1$ ; b) $n=2$ ; c) $n=3$ ; d) $n>3$.

2) Numărul de asimptote la graficul lui $f$ este egal cu: a) 1 ; b) 2 ; c) 3 ; d) 4.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[f(2)+f(3)+...+f(n)\right]$ este egală cu: a) $\dfrac{1}{2}$ ; b) $\dfrac{1}{3}$ ; c) $\dfrac{1}{4}$ ; d) $\dfrac{1}{5}$.

7. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-\sqrt{x^2+1}$ .Atunci :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ este egală cu : a) $0$ ; b) $-\infty$ ; c) $1$ ; d) $-1$ .

2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ este egală cu : a) $0$ ;b) $\infty$ ; c) $-1$ ;d) $1$ .

3) Asimptota oblică la $-\infty$ este dreapta : a) $y=x$ ;b) $y=2x$ ; c) $y=3x$ ; d) $y=-x$ .

## Testul 7( grilă )

1. Ce relaţie satisface matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ : a) $A^2-A=I_2$ ; b) $A^2-2A=3I_2$ ;

c) $A^2-5A=2I_2$ ; d) $A^2=5A$ .

2. Dacă $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, atunci $A^3$ este egală cu: a) $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

**3. Fie $f(x)=x^3+x+1$. Atunci valoarea determinantului $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f(1) & f(2) & f(3) \\ f^2(1) & f^2(2) & f^2(3) \end{vmatrix}$ este egală cu: a) $4480$ ; b) $4450$ ; c) $4320$ ; d) $0$ .**

**4. Fie punctele $A(-2,4), B(4,0)$. Atunci: 1) Punctul C situat pe prima bisectoare, coliniar cu punctele A, B are coordonatele: a) $(1,1)$ ; b) $(2,2)$ ; c) $(3,3)$ ; d) $(-1,-1)$.**

**2) Ecuația cercului de diametru $[AB]$ este : a) $x^2+y^2-2x-4y-3=0$ ;**

**b) $x^2+y^2-4x-2y-5=0$ ; c) $x^2+y^2-4x-4y=0$ ; d) $x^2-y^2-2x=0$ .**

**3) Ecuația tangentei în $B$ la acest cerc este : a) $2x-3y-8=0$ ; b) $3x-2y-9=0$ ;**

**c) $3x+2y-9=0$ ; d) $3x+2y+9=0$ .**

**5. Fie funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{3x+1}{x}, x\neq 0$. Atunci: 1) Şirul $(a_n)n\geq 1, a_n=f(n)$ este :**

**a) nemărginit şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ ; b) mărginit şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=3$ ; c) strict crescător şi nemărginit.**

**2) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln a_n-\ln 3)$ este eglă cu: a) $\frac{1}{3}$ ; b) $\frac{1}{2}$; c) $3$ ; d) $2$ .**

**3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{3}\right)^n$ este egală cu: a) $0$ ; b) $e$ ; c) $e^3$; d) $e^{\frac{1}{3}}$ .**

**6. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=xe^{x^2}$. Atunci : 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ este egală cu :**

**a) $0$ ; b) $1$ ; c) $2$ ; d) $\frac{1}{2}$ .**

**2) Numărul de asimptote la graficul funcției este egal cu: a) $0$ ; b) $1$ ; c) $2$ ; d) $3$ .**

**7. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x}}, x>0$. Atunci :**

**1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[f(1)+f(2)+...+f(n)\right]$ este egală cu : a) $1$ ; b) $\frac{1}{2}$ ; c) $-1$ ; d) $\frac{1}{3}$.**

**2) Funcția $f$ este : a) strict crescătoare; b) strict descrescătoare; c) nu este monotonă.**

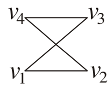
# INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

## ELEMENTE DE CALCUL MATRICEAL ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

## Capitolul 1. Matrice

**Tabele de tip matriceal. Matrice 3.** a) $(3,4)$; b) $\begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix}3&5&-3&4\end{pmatrix}$; d) 1;

**4.** $R=\{(a_1,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_1),(a_3,b_2)\}$; **6.** a) $a_{12}=a_{14}=a_{15}=a_{21}=a_{23}=a_{25}=a_{32}=a_{34}=$ $=a_{35}=a_{41}=a_{43}=a_{45}=a_{51}=a_{52}=a_{53}=a_{54}=1$, în rest zero.

b) $a_{12}=a_{13}=a_{14}=a_{21}=a_{31}=a_{34}=a_{41}=a_{43}=1$, în rest zero . **7.**  ;

**9.** a) $2\cdot2\cdot2=2^3=8$; b) $3^4=81$; c) $2^{3\cdot4}=2^{12}=4096$; **10.** a) $A=\begin{pmatrix}3&-2\\-5&3\end{pmatrix}, \bar{A}=\begin{pmatrix}3&-2&5\\-5&3&-3\end{pmatrix}$.

**Operații cu matrice . Egalitatea a două matrice. 1.** a) $x=y=t=0, z=1$;

b) $x=0, y=\frac{1}{2}, z=-3, t=5.$

**Transpusa unei matrice. 3.** Numărul de matrice de forma $\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}$, a,b,c$\in\{0,1\}$ este $2^3=8$ ,iar numărul de matrice de forma $\begin{pmatrix}a&b&c\\b&d&e\\c&e&f\end{pmatrix}$,$a,b,c,d,e,f\in\{0,1\}$ este $2^6=64$ .

**4.** Orice matrice de forma $\begin{pmatrix}0&a\\-a&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{pmatrix}$.

**Adunarea matricelor. 1.** a) $\begin{pmatrix}4\\2\\-2\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}3&1\\-5&1\end{pmatrix}$; c)-d) nu are sens; e) $\begin{pmatrix}10&10&10\\10&10&10\\10&10&10\end{pmatrix}$;

**3.** $x=-2, y=-4, z=1$; **4.** a) $X=B-A$; b) $X=A-B$;

**5.** $A=\begin{pmatrix}2&-1\\2&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&2\\-4&2\end{pmatrix}$; **6.** a) $B+{}^tA={}^t\left(A+{}^tB\right)$; b) ${}^tA+{}^tB={}^t\left(A+B\right)$;

**8.** a) ${}^t\left(M+{}^tM\right)={}^tM+{}^t\left({}^tM\right)={}^tM+M\Rightarrow M+{}^tM$ simetrică ;

b) ${}^t\left(M-{}^tM\right)={}^tM-M=-\left(M-{}^tM\right)\Rightarrow M-{}^tM$ antisimetrică ; c) $S_M+A_M=M$; Aplicații.

1) $S_M=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&5\end{pmatrix}, A_M=\begin{pmatrix}0&\frac{-5}{2}\\\frac{5}{2}&0\end{pmatrix}$; **9.** $a_{11}=\frac{n(n+1)}{2}, a_{12}=n^2, a_{21}=2^{n+1}-2-n,$

$a_{22}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$ pentru $S_n$; **10.** $A=\begin{pmatrix}2&\lambda\\-6-\lambda&-2\end{pmatrix}, \lambda\in\mathbb{R}$;

**11.** $c_{23}=$ tricouri roșii mărimea M, $c_{32}=$ tricouri albe mărimea XXL, $c_{43}=$ tricouri verzi mărimea M. **12.** $A'B'C'D'$ se obține din $ABCD$ prin translația de vector $\vec{v}=(-2,3)$; **15.** a) 13 24 33 15 22 11

33 14 15 43 44 15 35 45 44 24 33 43 15 24 33 43 15 11 31 11 32 45 31 44. b) Modestia, sentimentul moderat al valorii proprii.

Înmulțirea cu scalari a matricelor. 1. a) $A=(0{,}93\ 0{,}95\ 0{,}85)$; b) $B=0{,}97A$; c) $C=1{,}02A$; 3. $T=\begin{pmatrix}0&3&3&0\\0&0&3&3\end{pmatrix}, 3T=\begin{pmatrix}0&9&9&0\\0&0&9&9\end{pmatrix}, \frac{1}{3}T=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$; 4. $\begin{pmatrix}-4&-3&10\\11&-5&13\end{pmatrix}$; 5. a) $x=6, y=-1$; b) $x=3, y=-1, z=2$; 7. a) Se obține sistemul $\alpha+\beta+\gamma=0, 2\beta+2\gamma=0, 3\gamma=0$, b) $a=2, b=0, c=3$; 9. a) $X=\begin{pmatrix}4&2\\0&1\end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$; Înmulțimea matricelor. 1. 1) $AB=(-10)$; 2) $AB=(-4)$; 3) $AB=(4\,6)$; 4)-5) nu are sens; 6) $AB=\begin{pmatrix}2&-10\\-3&15\end{pmatrix}$; 2. $x=2, y=4$; 6. Din AX=XA se obține un sistem de ecuații. Găsim $X=\begin{pmatrix}x&y&z\\0&x&y\\0&0&x\end{pmatrix}, x,y,z\in\mathbb{R}$; 7. $X=\begin{pmatrix}x&y\\y&x+2y\end{pmatrix}, x,y\in\mathbb{R}$; 8. Se utilizează egalitatea AX=XA pentru $A\in\left\{\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right\}$ și rezultă $X=aI_3, a\in\mathbb{R}$; 9. 1) $X=\begin{pmatrix}-9&11\\13&-13\end{pmatrix}$; 3) $X=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&2&-1\end{pmatrix}$; 11 a) Produsul este 74, iar cifra de control 80-74=6; 13. AP= punctele obținute acasă ; DP=punctele obținute în deplasare; AP+DP= punctele obținute în total. Ordinea este :Dinamo, Steaua, Rapid.

Ridicarea la putere a unei matrice. 2. $A^2=-I_2, A^3=-A, A^4=I_2 \Rightarrow n=4$; 3. 1) $Tr(A)=1+4=5$, $\det(A)=1\cdot4-2\cdot3=-2 \Rightarrow A^2=5A+2I_2 \Rightarrow A^3=5A^2+2A=$ $=27A+10I_2 \Rightarrow a=27, b=10$ ; 2) $a=7, b=0$; 4. $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$; 1) $X^2=I_2 \Rightarrow a^2+bc=d^2+bc=1$ și $b(a+d)=c(a+d)=0$. Cazul 1. $a+d\neq0 \Rightarrow b=c=0 \Rightarrow a=d=1$ sau $a=d=-1$;
Cazul 2. $a+d=0 \Rightarrow d=-a$ și $a^2+bc=1$; 5. a) $A^2=A$; b) inducție;
c) $(1+2+3+...+n)A=\dfrac{n(n+1)}{2}A$.
6. I. 1) $A^n=\begin{pmatrix}1&3n\\0&1\end{pmatrix}, S_n=\begin{pmatrix}n&\frac{3}{2}n(n+1)\\0&n\end{pmatrix}$; II 1) $A^n=(I_3+B)^n=I_3+nB$, unde $b_{13}=1$, iar $b_{ij}=0$ în rest; 2) $a_{11}=a_{13}=a_{31}=a_{33}=2^{n-1}$, în rest $a_{ij}=0$.

## Capitolul 2. Determinanți

Determinanți de ordin 2. 1. 1)5; 2)1; 3) –24; 4) 1; 4. 1) Falsă. Se iau $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$; 2) Adevărată. Prin calcul direct; 3) Adevărată pentru $\det AB=\det(A)\det(B)=\det(B)\det(A)=\det(BA)$; 6. $\det(AB)=\det(A)\det(B)=12$; $\det(A^3)=(\det(A))^3=27$; $\det(2A)=2^2\det(A)=12$.

Determinanți de ordin 3. 1. I. 1) -21;2) -72; 3) -8; 4) 11; II. 1) 0; 2) $abc(b-a)(c-a)$

$(c-b)$; 5. $x=\frac{1}{3}, y=\frac{10}{3}, z=-\frac{13}{3}$.

**Proprietăți ale determinanților.** 2. Determinantul are 16 elemente, din care cel puțin 13 sunt egale cu zero. Deci există cel puțin o linie( sau o coloană) formată numai din zerouri. Deci determinantul este nul. În general un determinant de ordin $n$ care are cel puțin $n^2-n+1$ elemente egale cu zero este nul. 3. 1) $L_1 \leftrightarrow L_2$; 4) $C_3=2C_1$; 6) sumă de doi determinanți, fiecare egal cu zero; 7) $C_3=C_1+C_2$; 8) $L_1+L_2$; 4. $D_2=-D_1, D_3=D_1$, $D_4=D_1$. 7. $AE_1$ este matricea obținută din $A$, interschimbând coloanele 1, 2; $E_1A$ este matricea obținută din $A$, interschimbând liniile 1, 2; $\det(AE_1)=\det(E_1A)=$ $\det(E_1)\det(A)=-\det(A)$; 8. $\det(E_1A)=-5, \det(E_2A)=15, \det(E_3A)=5$;
9. 1) $C_1-2C_2$, $C_3+C_2$; 2) $C_2-C_1, C_3-C_1$; 3) $L_1-L_3, L_2-L_3$; 4) $C_3-C_1, C_2-C_3$;
10. 1) $C_1+C_3$ și avem primele două coloane proporționale; 2) $L_1+L_2+L_3$ și rezultă elementele primei linii egale cu zero; 3) $C_2-C_1, C_3-\lambda C_2 \Rightarrow$ un determinant în care $C_1=C_3$; 4) $C_2-C_1, C_3-C_1$ și forțați factor comun în $C_2$ pe $b-a$ și în $C_3$ pe $c-a$;
11. 1) Se scot factori comuni pe linii $a, b$ și respectiv $c$; $abc(b-a)(c-a)(c-b)$;
2) $abc(b-a)(c-a)(c-b)$; 3) $(y-2x)(3z-2x)(3z-y)$; 4) $(a+b+c)$ $(b-a)(c-a)(c-b)$; 5) Se scrie ca sumă de determinanți; $(y-x)(z-x)(z-y)xyz$;
12. 1) $\cos 2x=2\cos^2 x-1$; 2) $\sin 2x=2\sin x\cos x, \sin 3x=\sin x\left(3-4\sin^2 x\right)$; 3) $C_2+C_1$, $L_2-L_1, L_3-L_1$; $\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-b)$; 13. 1) $L_3+L_2+L_1, C_2-C_1, C_3-C_1$; $(x+y+z-1)^2$; 2) $C_2-C_1, C_3-C_1; 2xyz(x+y+z)^3$; 3) $L_2+L_1, C_2-C_1, C_3-C_1$;
4) Sumă de determinanți prin scrierea $-2a=-a-a$; 14. 1) $L_1+L_2+L_3$;
$x_1=-4, x_2=x_3=2$; 2) $L_1+L_2+L_3; x_1=-3, x_{2,3}=\frac{3\pm i\sqrt{3}}{2}$; 5) $x_1=0, x_2=3$.

**Inversa unei matrice.** 1. Se arată că $A\cdot A^{-1}=I$; 2. I. 1) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; 2) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;
3) nu există $(\det A=0)$; II. 1) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$; 2) nu există; 3. $A$ este nesingulară dacă $\det(A)\neq 0$; I. 1) $m\in\mathbb{R}-\{\pm 2\}$; II. 1) $m^3-3m+2\neq 0 \Rightarrow m\in\mathbb{R}-\{-2,1\}$;
III. 1) Trebuie ca $\det(A)\neq 0, \forall x$, adică $(1-m)x^2+2x+3-2m\neq 0, \forall x \Leftrightarrow (\Delta<0, m\neq 1)$.
De aici $m\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup(2,\infty)$; 5. 1) a) $X=\begin{pmatrix}-5 & 5\\ -7 & 7\end{pmatrix}$; b) $X=\begin{pmatrix}7 & -5\\ 7 & -5\end{pmatrix}$; c) $X=\begin{pmatrix}-35 & 25\\ -49 & 35\end{pmatrix}$;
6. $AX=B \Rightarrow X=A^{-1}B$; 1) $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & -3\end{pmatrix}$; $A^{-1}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{19}{11}, y=-\frac{1}{11}$; 7. $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 18 & 16 & 19 \\ 19 & 16 & 1 & 21 & 0 \\ 20 & 20 & 19 & 14 & 0 \end{pmatrix}$. Din $B\cdot A$ rezultă mesajul codificat 1 20 40 5 21 41 18 19 38 16 37 51 19 19 19.

**Ecuația unei drepte. Coliniaritatea a trei puncte.** 1. 1) $3x+2y-6=0$; 2) $6x+5y-7=0$; 2. 1) $C,E\in AB$; 3. 1) $m\in\{0,1\}$; 6. Se determină coordonatele punctelor și apoi se probează coliniaritatea lor.

**Aria unui triunghi.** 1. 6; 2. 4; 3. 3; 4. 49; 5. $7x+24y-134=0, x-2=0$; 6. $3x+4y-13=0$; 7. $3x-4y-25=0, 3x-4y+5=0$; 10. $4x-y+11=0, y-3=0$; 11. $3x-y+2=0$; 12. $M=G\left(0,\frac{5}{3}\right)$.

**Teste de evaluare.** Testul 1. 1. a) $L_1=-L_3$; b) $C_1+C_2+C_3$ și se dă factor comun 2 de pe $C_1; C_2-C_1, C_3-C_1$ și se scrie determinantul obținut ca sumă de determinanți.
2. a) $D\left(-\frac{3}{2}\right)=0$; b) $x_1=-\frac{3}{2}, x_2=x_3=3$; 3. b) $x=y=1, z=2$; 4. a) $x\in\{-3,1\}$; b) $M(3,2), N\left(\frac{5}{2},0\right), P\left(\frac{115}{33},\frac{130}{33}\right)$ sunt mijloacele diagonalelor $[AC],[BD],[EF]$, care sunt puncte coliniare; 5. Fie $M_1=\begin{pmatrix} 301 & 378 & 367 & 238 & 345 \\ 135 & 173 & 168 & 107 & 156 \end{pmatrix}$. Avem $\det(A)=1\neq 0$ și deci $A$ este inversabilă. Se calculează matricea $M=A^{-1}M_1=\begin{pmatrix} 31 & 32 & 31 & 24 & 33 \\ 11 & 45 & 44 & 11 & 24 \end{pmatrix}$. Deci, mesajul cifrat cu pătratul lui Polybe este 31 11 32 45 31 44 24 11 32 24, a cărui decodificare conduce la mesajul „ la mulți ani”.

Testul 2(grilă) 1. 1) $i$ ) c); $ii$ ) a); 2) $i$ )b); $ii$ ) c); 2. b); 3. d); 4. a); 5. $i$ )b; $ii$ ) a); $iii$ ) b); 6. a).

## Capitolul 3. Sisteme de ecuații liniare

1. 1) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

2. 1) $\begin{cases} 3x+y=0 \\ -2x+5y=1 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 3x_2+2x_3=1 \\ -x_1+x_2=2 \\ -2x_1+3x_3=3 \end{cases}$; 5. 1) a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\Rightarrow x=1, y=1$; b) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$; c) $\left(\frac{2}{11},\frac{3}{11}\right)$; d) $(2,3,-1)$; e) $(1,2,-2)$; f) $\left(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

2) a) $m \neq \pm 2 \Rightarrow x = y = -\frac{1}{(m+2)}$; $m = -2 \Rightarrow$ sistm incompatibil (s.i.) ; $m = 2 \Rightarrow$ sistem compatibil (s.c.)nedeterminat cu soluția $x = \frac{-1-2\alpha}{2}, y = \alpha \in \mathbb{R}$;

3) $\det(A) \neq 0 \Rightarrow m \neq -2, m \neq 1 \Rightarrow$ sistem Cramer; $m = -2 \Rightarrow$ s.i. ; $m = 2 \Rightarrow$ s.i.;

6. I.1. a) $\left(-\frac{1}{11}, \frac{19}{11}\right)$; b) $\left(\frac{13}{9}, -\frac{1}{9}\right)$; c) $(0,0)$; d) $(1,1,-2)$; e) $(3,1,1)$;

II. a) $\frac{1}{\sqrt{x-7}} = a, \frac{1}{\sqrt{y+6}} = b, x > 7, y > -6 \Rightarrow x = 16, y = 30$; b) $\frac{x+y}{xy} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{5}$;

c) se împarte prima ecuație cu $xy \Rightarrow \frac{15}{y} - 8 + \frac{2}{x} = 0$; $\left(\frac{10}{19}, \frac{25}{7}, \frac{25}{4}\right)$; 7. a) $y = \frac{2}{3}x + 2$; 8. a) $(3,-5)$; 9. $A(2,-1), B(-1,3)$, $C(2,4)$; 10. $m \neq -4$; 11. $f(x) = 2x^2 - 3x - 3$; 12. 1) a) $x = \frac{37}{5}, y = -\frac{4}{5}$; 13. a) $A = 3, B = -2$; 14. a) $\det(A) \neq 0 \Rightarrow m \neq \pm 2$ ;

15. a) $\det(A) = 0 \Rightarrow m \in \{-1,1,0\}$; b) $m = 1$; c) $m \in \{-2,1\}$. 16. a) $(2,4)$; c) $(2,-1,1)$.

17. a) $\left(\frac{7\lambda}{13}, \frac{16\lambda}{13}, \lambda\right), \lambda \in \mathbb{R}$; c) $(1-\lambda, \lambda-2, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}$; 18. a) $\det(A) \neq 0 \Rightarrow (0,0,0)$;

b) $\left(\frac{\alpha}{3}, \frac{2\alpha}{3}, \alpha\right), \alpha \in \mathbb{R}$; 19. a) $m \neq -\frac{17}{5}, m \neq 2 \Rightarrow$ s.c.d.; $m = 2$ sau $m = -\frac{17}{5} \Rightarrow$ s.i.;

23. $\overline{abc} = 685$; 25. $A = 45, B = 15$.

Teste de evaluare. Testul 1. 1. $a = \frac{5}{2}, b = 2, c = 4$;

2. a) $a \neq -2, a \neq 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{(a-1)}, y = -\frac{a}{(a-1)}$, $z = \frac{(3a-1)}{(a-1)}$; b) $a = 1 \Rightarrow$ s.i. ; $a = -2 \Rightarrow$ s.i.;

3. $\Delta = 0 \Rightarrow m = 4$ ;

4.Din primele trei ecuații $\Delta = 0 \Rightarrow m = 3 \Rightarrow x = y = -\lambda, z = \lambda \in \mathbb{R}$. Din ecuația a patra $\lambda = \pm 9 \Rightarrow (9,9,-9); (-9,-9,9)$.

Testul 2. 1. $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ \frac{9}{4} & -4 & \frac{1}{4} \\ 1 & -6 & 4 \end{pmatrix}$; 2. a) $\Delta = (a-1)(a-2)(a+3) \neq 0 \Rightarrow x = y = z = 0$;

b) $(\alpha, -\alpha, 0)\alpha \in \mathbb{R}$ .3. $\Delta = \alpha^2; \alpha \neq 0 \Rightarrow$ s.c.d. , $\alpha = 0 \Rightarrow$ s.i. ;

4. $\Delta = -a(a-2)(a-3) \neq 0 \Rightarrow$ s.c.d. $(0,0,0)$;

$a = 0 \Rightarrow (\alpha, -\alpha, 2\alpha), \alpha \in \mathbb{R}; a = 2 \Rightarrow (-3\alpha, \alpha, -2\alpha), \alpha \in \mathbb{R}; a = 3 \Rightarrow (-\alpha, \alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$.

Testul 3. (grilă) 1. b) ; 2. a) ; 3. c) ; 4. d).

## ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

## Capitolul 1. Mulțimea numerelor reale

**1.** 1) Minorant este orice număr $\leq -3$; majorant este orice număr $\geq 6$; $\min A = -3; \max A = 6$;
3) Minorant este orice număr $\leq 0$ ; majorant este orice număr $\geq 5$ ; $\nexists \min A$ ; $\max A = 5$ ;
**2.** 3) $\inf A = -2, \sup A = 1$; 5) $\inf A = 0 = \min A, \sup A$ nu există în $\mathbb{R}$;
**5.** 1) $-13 \leq f(x) \leq 5$; 4) $-1 \leq f(x) \leq 1$; 5) $0 \leq f(x) \leq 1$; **6.** 1) $f(E) = [-1,8] \Rightarrow \inf f = -1$, $\sup f = 8$; 2) $f$ este strict crescătoare și din $0 \leq x \leq 3 \Rightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(3) \Rightarrow -1 \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow$ $\inf f = -1, \sup f = \frac{1}{2}$; **7.** 2) a) $A' = [0,1]; \{-1\}$; $A' = [-\infty,-1] \cup [1,\infty)$; nu avem puncte izolate;
e) $A' = \{0\}$, iar $x_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$ sunt puncte izolate ; **8.** 1), 2), 3) Inducție matematică ; 4) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k x - b_k)^2 = \left(\sum a_k^2\right) x^2 + 2\sum a_k b_k x + \sum b_k^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ dacă $\Delta \leq 0$; 5. a) Se ridică la pătrat și se utilizează 4) ; 6) Din $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0; 1 \leq i < j \leq n$ rezultă $a_i b_i + a_j b_j \geq a_i b_j + a_j b_i$ care se adună pentru $1 \leq i < j \leq n$ ( în total $\frac{n(n-1)}{2}$ ). Se obține
$(n-1)\left(\sum a_i b_i\right) \geq a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_1 b_3 + \ldots + a_1 b_n + a_n b_1 + a_2 b_3 + a_3 b_2 + \ldots + a_{n-1} b_n + a_n b_{n-1}$, iar de aici $n \sum a_i b_i \geq \left(\sum a_i\right)\left(\sum b_i\right)$. Avem egalitate dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ sau $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$.
Funcții elementare **1.** I. $(1,d),(2,e),(3,a),(4,b),(5,c)$; II. $(1,d),(2,a),(3,b),(4,c),(5,e)$;
**4.** 1) $f(2) = 0, f(3) = 0; f(x) = x^2 - 5x + 6$; **5.** 2) $(1,1)$; 4) $(3,9),(-4,-5)$; **6.** 1) $(3,-3),(-2,2)$;
**9.** 1) $D = \mathbb{R} - \{1\}$; 2) $D = \mathbb{R} - \{-1,0\}$; 3) $D = \mathbb{R} - \{0,3\}$; 4) $D = \mathbb{R}$; **11.** 1) $x^2 - 3x + 2 = y$;
$\Delta_x \geq 0 \Rightarrow y \geq -\frac{1}{4} \Rightarrow A\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ punct de minim și $\operatorname{Im} f = \left[-\frac{1}{4}, \infty\right)$; 3) $f(x) = 3 - 2x$ dacă $x \leq 1$; $f(x) = 1, x \in (1,2)$; $f(x) = 2x - 3, x \in [2,\infty)$; $A(\alpha,1)$ punct de minim $\forall \alpha \in [1,2]$ și $\operatorname{Im} f = [1,\infty)$; **12.** 1) $0 < f(x) \leq 1$; 3) $-1 \leq f(x) \leq 1$; 4) $2 < f(x) \leq 3$.
**14.** $f_1 \circ f_1 = f_1, f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1 = f_2, f_1 \circ f_3 = f_3 \circ f_1 = f_3,$ $f_2 \circ f_3 = f_3 \circ f_2 = f_1, f_3 \circ f_3 = f_2$;
**15.** În relația dată se pune $-x$ în locul lui $x$ și găsim $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ care este impară și $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}; g(x) = \frac{x^2}{3(x^2+1)}$; **17.** $f(f(x)) = \frac{-(x+1)}{x}$; **18.** $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}, x \in \mathbb{Q}$,
$f^{-1}(x) = \frac{x}{(3+2x)}, x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; **19.** 1) $x \neq 0, 2 - x \geq 0 \Rightarrow D = (-\infty,2] - \{0\}$; 6) $D = (-\infty,-2] \cup [2,\infty)$ $-\{\pm 3\}$; 7) $D = \varnothing$; 10) $1 - x \geq 0, x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \in \varnothing$; **20.** 1) $f(-2) = -5, f(-1) = -2, f(0) = 0$;
$f^{-1}(\{-2\}) = \{x \mid f(x) = -2\}$; a) $3x + 1 = -2, x \leq -1 \Rightarrow x = -1$; b) $\frac{x}{(2x+3)} = -2, x > -1 \Rightarrow x \in \varnothing$.
Deci $f^{-1}(\{-2\}) = \{-1\}$; **21.** 1) $x^2 + 1 = y; \Delta_x \geq 0 \Rightarrow y \geq 1$ și deci $\operatorname{Im} f = [1,\infty)$; 2) $\operatorname{Im} f = (0,1]$;
**22.** 1) s.c. ; 2) s.d. ; 3) s.d. ; 4) s.d. ; 5)-6) s.c. ; **24.** 1) $f$ este strict crescătoare și din $-2 \leq x \leq 3 \Rightarrow$

$f(-2)\le f(x)\le f(3)\Rightarrow -5\le f(x)\le 10.$ $\min\limits_{[-2,3]} f(x)=-5, \max\limits_{[-2,3]} f(x)=10;$ **25.** 1) $f(x)=2x-\{x\}$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$; **26.** 1) $f(-x)=-x^3-x=-f(x)\Rightarrow f$ impară , 2) pară ; 3) nici pară, nici impară; **27.** 1) $f(1-x)=f(1+x)$; **28.** Din $f$ impară este suficient să arătăm că $f(x)<1, \forall x\ge 0$; **29.** 1) $f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{3}$; 4) nu este bijectivă; 2), 3), 5),..., 8) sunt bijective;

**30.** a) 4) $-1$; 6) $-2,1,13$; 7) $-3,4$; 8) 4; b) 1) $(-\infty,0)\cup\left(\dfrac{1}{3},\infty\right)$; 2) $\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)\cup(1,2)$; 5) $[-2,4]\cup[5,\infty)$; 6) $[-2,-1)$; 8) $[-5,-1)$; **31.** 1) $(-1,\infty)$; 2) $(-\infty,1]\cup(2,\infty)-\{0\}$; 3) $\left(-\dfrac{1}{2},\infty\right)-\{2\}$; 5) $(1,\infty)$; 6) $[-1,2)$; **34.** 1) pară; 2) nici pară, nici impară; 3) pară; 4)-6) impară; **35.** $f$ este s.c. pe $[0,\infty)$ şi s.d. pe $(-\infty,0]$; $\pm 1$; **39.** 1) $f>0$ dacă $x>0$ şi $f\le 0$ dacă $x\le 0$; 2) $f>0$ dacă $x\in(-\infty,0)\cup(1,\infty)$ şi $f\le 0$ dacă $x\in[0,1]$; **41.** a) 1) $-1,4$; 2) 1; 3) $\pm 2$; 5) 2; 7) 10,1000; b) 1) $(-\infty,1)$; 2) $(-\infty,-1]$; 3) $(-1,2]\cup[3,\infty)$; 4) $(-\infty,4)$.

## Capitolul 2. Limite de funcții

**2.2.1.** 1) $l_s(2)=3,\ l_d(2)=1, \nexists\ l(2),\ f(2)=2$; 4) $l_s(-1)=l_d(-1)=l(-1)=\infty,\ \nexists\ f(-1)$;
**2.** 1) Limita există pentru orice punct a$\in \mathbb{R}$ - $\{-3\}$; $l_s(-3)=2\ne l_d(-3)=3$;
**3.** 1) $l(1)=8$; 2) $l(-3)=-18$; 3) $l_s(0)=-1,\ l_d(0)=1\Rightarrow$ nu există limită în $x_0=0$; 6) $l_s(3)=\dfrac{2}{0_-}=-\infty,\ l_d(3)=\dfrac{2}{0_+}=\infty\Rightarrow$ limita nu există în $x_0=3$; 8) $l(2)=\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$; 9) $l(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}$, care nu există deoarece $l_s(2)=\dfrac{1}{0_-}=-\infty,\ l_d(2)=\dfrac{1}{0_+}=\infty$; 21) $l_s(2)=\lim\limits_{x\nearrow 2}(3x-1)=5,\ l_d(2)=\lim\limits_{x\searrow 2}(2^x+1)=5\Rightarrow l(2)=5$; 23) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\in\mathbb{Q}}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}}} f(x)$ $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} x^2=\lim\limits_{x\to 1} 1\Leftrightarrow 1=1\Rightarrow l(1)=1$; 24) Se amplifică fracția cu conjugata numărătorului; $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$; 25) $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$. **2.3.1.** 2) $l(0)=\lim\limits_{x\to 0} x(x-1)=0$; 5) $l_s(1)=\lim\limits_{x\nearrow 1}\dfrac{x-1}{1-x}=-1$; 6) $l_d(1)=$ $=\lim\limits_{x\searrow 1}\dfrac{x-1}{x-1}=1$; 7) Din 5) şi 6) rezultă $l_s(1)=-1\ne l_d(1)=1$ şi deci nu există $l(1)$;
**2.** 1) Aplicăm criteriul $\varepsilon-\delta$. Fie $\varepsilon>0$. Să găsim $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ pentru care $0<|x-1|<\delta$ să implice $|2x-2|<\varepsilon$. Din ultima inegalitate găsim $2|x-1|<\varepsilon$, adică $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Alegem $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}=0{,}05$, care „lucrează pentru $\varepsilon$." **3.** Ca la 2; **4.** 1) $l(3)=6$; 2) $l_s(-2)=\infty$, $l_d(-2)=-\infty$; 3) $l_s(1)=1, l_d(1)=2$; 4) $l_s(0)=-\infty, l_d(0)=\infty$; 5) $l_s(1)=\infty$; 6) Se explicitează partea întreagă, $[x]$, pentru $x\in[-2,2)$; **2.4.1** (Criteriul cu limite laterale)
**1.** 1) $l_s(0)=\lim\limits_{x\nearrow 0}(x-1)=-1, l_d(0)=\lim\limits_{x\searrow 0}(x+1)=1\Rightarrow$ nu există $l(0)$; 8) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\in\mathbb{Q}}} f(x)=$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}}} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}(x^2-x)=\lim\limits_{x\to 1} 2 \Leftrightarrow 0=2,$ fals. Deci $f$ nu are limită în $a=1$; 2) $-1\le\cos x\le 1$; 1; 3) 0; 2. $x-x^2\le f(x)\le x+x^2$ plus criteriul „cleștelui”;

2.7.1. 1. I. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{m}{n}$; 4)-6) 1; 7) 0; II. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) $-2$; 2. 1) $\sqrt[3]{e^2}$; 2) $e^{-5}$; 3) $\sqrt[3]{e}$; 4) $\frac{1}{e}$; 3. 1) $\frac{5}{3}$; 2) 5; 3) $\frac{4}{3}$; 4) $\frac{2}{3}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) 2; 2.8.1) $\left(\frac{0}{0}\right)$ a) 1) -2; 2) $l_s(2)=-\infty, l_d(2)=\infty \Rightarrow$ nu există $l(2)$; 3) $-\frac{1}{3}$; 4) 0; 5) $-8$; c) • 1) $\frac{1}{2}$; 2) 3; 3) $\frac{4}{3}$; 4) $\frac{1}{9}$; 5) $\frac{3}{2}$; • 1) 1; 2) 3; 3) $\frac{3}{2\sqrt{2}}$; 4) $-\frac{1}{36}$; 5) $\frac{3}{4}$; 6) $-\frac{1}{3}$; 7) $\frac{1}{3}$; 8) 2; e) 1) $\infty$; 2) 0; 3) 3; 4) $\frac{2}{3}$; 5)-6) 1; 7) $-\infty$; 8) $-\frac{5}{3}$.

Teste de evaluare. Testul 1.1. a) 5; b) 6; c) $-1$; 2. $a=-1, b=2$; 3. $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{2}{3}$; 4. a) $-\frac{2}{3}$; b) $e^6$; c) 1; 5. da; Testul 2( de tip grilă) 1. 1) b; 2) c; 3) a; 4) b; 5) a; 2. a; 3. a.

## Capitolul 3. Funcții continue

3.4.1.1)Este continuă; 2) Nu are sens; $a=0$ nu este punct de acumulare pentru E; 3) $l_s(1)=l_d(1)=f(1)=0 \Rightarrow f$ continuă în $a=1$; 2. 1. 2) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in\mathbb{Q}}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}}} f(x)=f(a)$ $\Leftrightarrow a^2=a \Rightarrow a\in\{0,1\}$, puncte de continuitate; 2. $f(x)=x$ dacă $x\in\mathbb{Q}$; $f(x)=0$ dacă $x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ este continuă numai în $a=0$; 3. 1) $l(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\frac{1}{2} \Rightarrow f$ poate fi prelungită prin continuitate în $a=1$; $\overline{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \overline{f}(x)=f(x)$ dacă $x\ne 1$ și $\overline{f}(1)=\frac{1}{2}$; 2) da; $\overline{f}(0)=0$; 3) Da; $\overline{f}(0)=e$; 4) da; $\overline{f}(0)=-\ln 2$; 4. 1) $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}$; 2) $a=-\frac{1}{3}, b=\frac{1}{12}, c=\frac{1}{4}$; 5. 1) $l_s(2)=l_d(2)=f(2) \Leftrightarrow 5+\alpha=2+2\alpha \Rightarrow \alpha=3$; 6) $\alpha=-1, \beta=0$; 7) $\alpha\in\mathbb{R}, \beta=1$; 6. 1) $l_d(1)=6, l_s(1)=f(1)=3 \Rightarrow a=1$ p.d. de speța I; 2) $l_d(0)=\infty, l_s(0)=0=f(0) \Rightarrow a=0$ p.d. de speța II; 7. IV. 1) $f(x)=x^2$ dacă $x\in(-1,1], f(x)=0$ dacă $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$; $E_c=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$;
8. 1) $l_s(1)=l_d(1)=f(1) \Leftrightarrow 1+\alpha=1+\alpha^3 \Rightarrow \alpha\in\{0,\pm 1\}$; 2) $\alpha=1$; 3) $\alpha=0, \beta=2$; 4) $\alpha=4, \beta=-5$; 9. a) $0\le|f(0)|\le 0 \Rightarrow f(0)=0$; $-Mx\le f(x)\le Mx \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, via criteriul „cleștelui”;

**10.** a) $3x=y\Rightarrow f(y)=f\left(\frac{2}{3}y\right)=...=f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n y\right)=...,\left(\frac{2}{3}\right)^n y\underset{n}{\to}0\Rightarrow f(y)=f(0)$ ( $f$ fiind continuă în $x=0$ ); **12.** b) $f(x)=-1, x\in\mathbb{Q}$ și $f(x)=1, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\Rightarrow f^2(x)=1,\forall x\in\mathbb{R}$; **13.** $f(x)-g(x)=x+\alpha+1$ dacă $x\le 1, f(x)-g(x)=\alpha-1$ dacă $x=1;\alpha\ne-\frac{1}{2}\Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R}-\{1\};\alpha=-\frac{1}{2}\Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R}$; **14.** I. 1) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$; 2) $\mathbb{R}-\{1\}$;
II 1) $g$ este continuă pe $\mathbb{R}, f$ este continuă pe $\mathbb{R}-\{1\}\Rightarrow h$ continuă pe $\mathbb{R}-\{1\}$;
2) $\alpha=2\Rightarrow h$ continuă pe $\mathbb{R};\alpha\ne 2\Rightarrow h$ continuă pe $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2},1\right\}$; **3.5.** 1) -2) $f(\mathbb{R})=\{-1,0,1\}\Rightarrow f$ nu are P.D. pe $\mathbb{R}$; 3) $f$ este continuă pe $\mathbb{R}\Rightarrow f$ are P.D. pe $\mathbb{R}$, 4) $f(\mathbb{R})=\mathbb{Z}\Rightarrow f$ nu are P.D. pe $\mathbb{R}$; **2.** $\mathcal{C}=\left\{C_x \middle| ariaC_x=\pi x^2, x\le 10\right\}$ și $f:\mathcal{C}\to\mathbb{R}, f(C_x)=\pi x^2-250$. Din $f(1)f(10)<0\ \Rightarrow\exists C_\alpha\in\mathcal{C}$ astfel încât $f(C_\alpha)=0\Leftrightarrow\pi\alpha^2=250$; **4.** a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^4+7x^3-9$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty, f(0)=-9, \lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty\Rightarrow$ există $x_1<0$ și $x_2>0$ cu $f(x_1)=f(x_2)=0$;
b) $f:[-3,3]\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-4x+2; f(-3)=-13, f(-2)=2, f(0)=2\ , f(1)=-1$, $f(2)=2$; c) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4, f(-1)f(1)<0\Rightarrow$ $\exists x_0\in(-1,1),\ \ f(x_0)=0$; **5.** 1) $f(x)>0$ dacă $x\in(-2,0)\cup(1,\infty), f(x)<0$ dacă $x\in(-\infty,-2)\cup(0,1)$; $f(x)=0$ dacă $x\in\{-2,0,1\}$; 4) $f(x)=0$ dacă $x=2; f(x)>0$ dacă $x>2$; **6.** 1) $(-\infty,1]\cup\{0\}$; 2) $(-1,0)\cup(2,\infty)$; 3) $(-2,0]\cup(1,\infty)$; 4) $\{-1,0\}$; 5) $[1,\infty)$;
6) $(-5,-1)\ \cup(1,\infty)$; 7) $[-1,\infty)$; 8) $(-\infty,-1]\cup[2,\infty)$; 9) $\{2\}$; 10) $\left(0,\frac{1}{10}\right)\cup(2,\infty)$;
11) $(e,4]$; 12) $\left(0,\sqrt{2}\right)\cup\left[2^{\sqrt{2}},\infty\right)$; 13) $(0,4)$; 14) $\left(2^{-\sqrt{2}},2^{-1}\right)\cup\left(1,2^{\sqrt{2}}\right)$; 15) $(0,1)$;
16) $(-2,-1)\ \cup(0,\infty)$; 17) $\left(2k\pi,\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right)\cup$ $\cup\left(\frac{7\pi}{4}+2k\pi,2\pi+2k\pi\right),k\in\mathbb{Z}$; 18) $\left(2k\pi,\frac{\pi}{3}+2k\pi\right]\cup\left(\pi+2k\pi,\frac{5\pi}{3}+2k\pi\right],k\in\mathbb{Z}$;
**7.** $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)-2x-1$ este continuă pe $\mathbb{R}$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\infty, \lim\limits_{x\to\infty}g(x)=-\infty$;
**8.** Nu, pentru că $\mathbb{R}^*$ nu este interval !; **9.** Funcția $g:[-a,a]\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)-x$ este continuă și $g(-a)=f(-a)+a\ge 0, g(a)=f(a)-a\le 0\Rightarrow\exists c\in(-a,a)$ astfel încât $g(c)=0$; b) $f$ fiind mărginită, există $m,M\in\mathbb{R}$ astfel încât $m\le f(x)\le M,\forall x\in\mathbb{R}$.
Se ia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)-x$ cu $g(m)=f(m)-m\ge 0, g(M)=f(M)-M\le 0$.
Deci există $c\in[m,M]$ cu $g(c)=0$; **10.** $g:[0,1]\to\mathbb{R}, g(x)=f\left(x+\frac{1}{2}\right)-f(x)$ cu

$g(0)g\left(\frac{1}{2}\right)\le 0$; 11. $g:[a,b]\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)-g(x)$ cu $g(a)g(b)\le 0.$

Teste de evaluare. Testul 1.1. $x=\frac{1}{2}$; 2. $a=1, b=2$; 3. $f(x)=0, x\in[0,3), f(3)=1$; $f$ continuă pe $[0,3)$; 4. $a=1, b=2, c=-4$; 5. a) $f(2)f(3)<0$; b) $f(x)>0$ dacă $x\in(0,e)\cup(e^2,\infty)$; $f(x)<0$ dacă $x\in(e,e^2)$; c) $h:[a,b]\to\mathbb{R}, h(x)=f(x)-x$ este continuă şi $h(a)\ge 0, h(b)\le 0$; Testul 2. 1. $x_k=\frac{1}{2}+k, k\in\mathbb{Z}$; 2. $a=4, b=0$;
3. $f(x)=\operatorname{sgn}(x)\Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R}-\{0\}$; 4.b) Reciproca nu este adevărată. Mulțimea valorilor poate fi $[m,M]$ fără ca funcția să fie definită pe un interval închis şi mărginit;
5. a) $f(5)f(17)<0$ şi $f$ continuă; b) $u=\sqrt[3]{2-x}, v=\sqrt{x-1}$ şi ecuația asociată are soluțiile 1, 2 şi 10; $x\in(1,2)\cup(10,\infty)$;
Testul 3.1. d); 2. c); 3. b); 4. a); $\inf f(x)=-1, \sup f(x)=1$. Fie $\lambda\in[-1,1]$. Dacă $\lambda=0$, atunci există $x_\lambda=0$ pentru care $f(x_\lambda)=\lambda$. Dacă $\lambda\ne 0$, atunci $\cos\frac{1}{x}=\lambda$ dacă, de exemplu, $x_\lambda=\frac{1}{\arccos\lambda}\in\mathbb{R}$. Deci $f$ are proprietatea lui Darboux; 5. 1)e); 2) a);
Testul 4. 1. a); 2. b); 3. c); 4. c); 5. 1) b); 2) c).

## Capitolul 4. Funcții derivabile

4.2.1. a) 1) $f'(2)=4$, unde $f(x)=x^2$; 2) $f'(4)=\frac{1}{4}$, unde $f(x)=\sqrt{x}$; b) $f'(1)=2$; $y-1=2(x-1)$; 4. a) $m=3, (\sqrt{2},2-\sqrt{2}), (-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$; b) $a=1, b=-4, c=5$;
5. $\left(\frac{1}{2},-\frac{15}{32}\right)$; 6. $(8,0),(0,0)$; 7. 2) $m=4, n=-5$; 8. $m=f'(x_0)=5x_0^4+8>0$;
10. 1) $\frac{dN}{dt}=kN, k>0$; 2) $\frac{dT}{dt}=-k(T-T_0), k>0$; 3) $\frac{dQ}{dt}=-kQ, k>0$, 4) $F=\frac{k}{x^2}, k>0$, $\frac{dF}{dx}=-\frac{2k}{x^2}$; 14. $s'(t)=3t^2-24t+36$ este viteza la momentul $t$; 15. Săgeata este paralelă cu axa $Ox$ când ajunge în $H$; 4.3.3.1. 1) $f_s'(1)=-1\ne f_d'(1)=1\Rightarrow f$ nu este derivabilă în $x=1$; 11) Se ştie că: a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x-a|$ este derivabilă pe $\mathbb{R}-\{a\}$;
b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-a)|x-b|$ este derivabilă pe $\mathbb{R}\Leftrightarrow a=b$. Se ia $f_1(x)=x|x-a|$, $f_2(x)=|x-a|$ când $f-f_1=f_2$. Dacă $a=0$, atunci $f-f_1$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$, în timp ce $f_2$ este derivabilă pe $\mathbb{R}-\{b\}$. Deci $a\ne 0$ şi $f-f_1$ este derivabilă pe $\mathbb{R}-\{a\}$. La fel trebuie să fie şi $f_2\Rightarrow a=b$. Avem $f(x)=(x+1)|x-a|$. De aici $a=b=-1$; 3. Pentru

$x > x_0 \Rightarrow \dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \le \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le \dfrac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}$. Pentru $x \to x_0$ rezultă $g'(x_0) \le f_d'(x_0) \le h'(x_0)$. Pentru $x < x_0$ rezultă $g'(x_0) \ge h'(x_0)$; 4. $a=-1, b=0, c=4$; 5. 2) $m=-1, n=1$; 4.4.1. 1) $n=4+m$; 2) $m=-9, n=21$; 3) $m=2, n=0$; 4) $m=1, n=0$;
2. $f$ continuă în $x_0 \Rightarrow g(x_0)=h(x_0)$, iar $f$ derivabilă în $x_0 \Rightarrow g'(x_0)=h'(x_0)$;
4. $x=0$ ( Se studiază derivabilitatea numai în punctele de continuitate: $0, \pm\sqrt{2}$ );
4.5.1. 1) $D_{f'}=\mathbb{R}; f'(x)=2x-1$; 3) $D_{f'}=\mathbb{R}; f'(x)=2x, x\ge 0, f'(x)=-2x, x<0$;
4) $D_{f'}=\mathbb{R}-\{0\}; f'(x)=2, x\le 0, f'(x)=4, x>0$; 5) $D_{f'}=\mathbb{R}-\{0,1\}$;
2. 1) $a=-2, b=-8$; 2) $a=4, b=-5$; 3.1) $f(1)=g(1)=1$ şi $f'(1)=g'(1)=2$;
4. 1) $a=1, b=-1$; 5. 1) $f(x)=x^2|x-3|; D_{f'}=\mathbb{R}-\{3\}$; 6. $f'(x)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2+ax+1\ne 0$, $\forall x \Leftrightarrow \Delta_x<0 \Leftrightarrow a^2-4<0 \Rightarrow a\in(-2,2)$; 4.7.4. 1) $a=-\dfrac{1}{2}, b=2, c=1$; 5. $m=1, n=q=3$, $p=8$; 6. 1) $P(x)=-\dfrac{x^4}{4}+x^2-\dfrac{3}{4}$; 9. 3) $P(x)=0, x\in\mathbb{R}$ este o soluție a parabolei .
Fie $P$ o funcție polinomială cu grad $(P)=n$. Din relație, prin trecere la grad, rezultă $2n=(2n-2)+(n-2)$, adică $n=4$. Se găseşte $P(x)=\dfrac{x^4}{48}$;

10. 1) $x\left(1+2^2x+\ldots+n^2x^{n-1}\right)= x\left(x+2x^2+\ldots+nx^n\right)'=x\left[x\left(1+2x+\ldots+nx^{n-1}\right)\right]'=$ $x\left[x\left(x+x^2+\ldots+x^n\right)'\right]'=x\left[x\left(x\dfrac{x^n-1}{x-1}\right)'\right]'$; 2) $x\left(1+3x^2+5x^4+\ldots+(2n+1)x^{2n}\right)=$ $=x\left(x+x^3+x^5+\ldots+x^{2n+1}\right)'=x\left[x\dfrac{\left(x^2\right)^{n+1}-1}{x^2-1}\right]'$; 3) Se derivează $(1+x)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^kx^k$ şi se obține $n(1+x)^{n-1}=\sum\limits_{k=1}^{n}kC_n^kx^{k-1}$, care se înmulțeşte cu $x$ şi se derivează, făcând apoi $x=1$, când rezultă $n(n+1)2^{n-2}$; 13. $f(1)=1\Rightarrow a=1; f'(1)=10\Rightarrow b=10; f''(1)=16$ $\Rightarrow c=8$; $f'''(1)=6\Rightarrow d=1$; Testul de evaluare. Testul 1. 1. a) $f'(2)=\dfrac{2}{3}$; b) $f_s'(1)=-1$ $\ne f_d'(1)=1$; 2. a) $y-f(2)=f'(2)(x-2); y=3x-4$; b) $f(x)=|x(x-1)|$; 3. $m=4$, $n=-7, p=1$; 4. $f(x)=x^2, x<-1; f(x)=1\, x\in[-1,1]; f(x)=x^3, x>1$; $D_{f'}=\mathbb{R}-\{\pm1\}$;
5. a) Dacă $x=0$, atunci din condiție $f(0)=0$. Se împarte inegalitatea cu $|x|\ne 0$ şi rezultă $0\le\left|\dfrac{f(x)}{x}-1\right|\le|\operatorname{arctg} x|$. De aici $f'(0)=1$; b) $a=\dfrac{2}{5}, b=-9, c=-27$;
Testul 2.1. a) $f'(-1)=6; y-6x-8=0$; b) $f(1)=3, f'(1)=1; a=-1, b=3$; 2. $a=-3$,

$b=4, c=-2$; 3. $f$ injecție și surjecție; $\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}, f(x_0)=y_0 \Rightarrow x_0=2$;

$\left(f^{-1}\right)'(2)=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{9}$; Testul 3. 1. a); 2. b); 3. d); 4. b); 5. e); 4.9.2.1. 1) $f'(x)=2x-2=0$

$\Rightarrow x=1; x<1; \Rightarrow f'(x)<0$ și $x>1 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow x=1$, punct de minim;

2. 1) $f'(x)=2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$; 3) $f'(x)=3x^2+3=0 \Rightarrow x\in\varnothing$. Deci, $f$ nu are puncte critice; 4. $f(x)=a^x+b^x+c^x \geq f(0)=3, \forall x \Rightarrow x_0=0$, punct de minim. Deci $f'(0)=0$. De aici $abc=1$; 6. $f(x)=a^x-b^x-x \geq f(0), \forall x \Rightarrow x_0=0$, punct de minim. Deci $f'(0)=0 \Rightarrow a=be$; *3.3. $f:[27,30]\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x}$ plus teorema lui Lagrange;

4. a) 1) $c=\sqrt{3}$; 2) $c=\frac{1}{\ln 2}$; 3) $c=\frac{9}{4}$; 4) $c=\sqrt{2}$; b) 1) $m=2, c=\frac{3}{4}$; 2) $m=\frac{2}{\pi}, n=1$, $c=-\frac{3}{4}\in(-1,0), c=\frac{1}{\pi}arc\cos\frac{1}{4}\in(0,1)$; 6. Se aplică Lagrange funcției $f$ pe $[-2,1]$; $c=-\frac{1}{2}$; 7. $\frac{1}{k+1}<\ln(k+1)-\ln k<\frac{1}{k}, k=\overline{1,n}$, care adunate dau $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}<\ln(n+1)$ $<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. De aici $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)=\infty$; 9. 1) $c(x)=1-\sqrt{1-x}$; 0;

10. 1) $f:[n,n+1]\to\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}^*, f(x)=\frac{e^x}{x}$ și se aplică Lagrange; $-\infty$; 2) 1; 3) 1; 4) $\frac{e}{4}$;

12. $x_1=0, x_2=1$; 4. I.1. 1) $\frac{4}{3}$; 2) $-4$; 3) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $-\frac{3}{2}$; 8) $\frac{1}{3}$; 9) $\frac{1}{2}$; 11) $\frac{1}{3}$; 13) $-2$; 15) 2; 16) $\frac{1}{128}$; 23) $f'(2)=4(1+\ln 2)$, unde $f(x)=x^x$; 26) $a=2, b=-8, c=6$;

4.10. 1. Se determină minimul funcției $f(x)=x+\frac{1}{x}, x>0; x_0=1$; 2. $xy=36$. Se cere $\min f(x), f(x)=x^2+\left(\frac{36}{x}\right)^2; x=y=6$; 3. $f(x)=3\sqrt{x}+2\sqrt{13-x}$; $x=9, y=4; 13$;

4. $\left[-\frac{1}{3},1\right]$; 9. $60^0$; 13. $\frac{4p}{5},\frac{3p}{5},\frac{2p}{5}$; 14. $\sqrt[3]{4V}$; 19. $r=\frac{2R}{3}; V=\frac{4\pi R^2h}{27}$; 21. $a\sqrt{2}, b\sqrt{2}$;

22. $(2,3)$; 23. $C\left(-\sqrt{6},-\sqrt{6}\right)$; 24. $(1,1)$; 25. a) $y=12x-8-4x^2$. Un sistem este neeconomic dacă profitul este negativ, $\forall x$. Avem $y'(x)=12-8x$, $y''(x)=-8<0$ (semnifică maxim). Din $y'=0\Rightarrow x=1{,}5$. Cum $x\in\mathbb{N}\Rightarrow x\in\{1,2\}$. Dacă $x=1\Rightarrow y=0$; Dacă $x=2\Rightarrow y=0$, ceea ce arată că în ambele cazuri nu există profit. Deci sistemul este neeconomic dacă se fac 4 livrări pe zi; b) $y=12x-6-3x^2, y'=12-6x$; $y'=0\Rightarrow x=2$. Cum $y''=-6<0$ avem profit maxim egal cu $y(2)=6(00$ €).Deci utilizând 2 mașini profitul este de 600 €. 26. a) $P(x)=-2x^2+16x-14$; b) $P'(x)=0\Rightarrow x=1, x=7$. Deci dacă $x\in(100,700)\Rightarrow P(x)>0$, iar în rest $P(x)<0$. c) $P'(x)=0\Rightarrow x=4$ și în plus

$P''(4)=-4<0$, ceea ce arată că $x=4$ este punct de maxim. Avem $\max P=18$, ceea ce înseamnă că avem un profit de 18. 000€ dacă cererea de produse este de 400.

Teste de evaluare. Testul 1.1. a) $m=2(e+1), n=-(e+1)$; b) $f'(x)=0 \Rightarrow x=-1$, punct de minim, $x=e+1$, punct de maxim; 2. $f(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}, f'(x)>0, \forall x>1 \Rightarrow f$ strict crescătoare $\Rightarrow f(x)>f(1)=0$; 3. a) $y=x+1$; b) $f'(x)=0 \Rightarrow x=1$;

4. a) $a \in \left\{\frac{3}{5},-1\right\} \Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R}-\{1\}$; $a \in \mathbb{R}-\left\{\frac{3}{5},-1\right\} \Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R}-\{1\}$;

5. a) 2; Testul 2.1. 2) $c(b)=1-\sqrt{1-b}$; 3) 0; 2. $f'(x)>0 \Rightarrow m \geq 0$; 3. a)-b)

$f'(x)=-\frac{2x^2}{\left(1+x^2\right)^2} \leq 0 \Rightarrow f$ descrescătoare pe $\mathbb{R}$. Din $x>0 \Rightarrow f(x) \leq f(0)=0$;

4. $f'(x)=3x^2+a, a<0; f'(x)=0 \Rightarrow x_1=-\sqrt{-\frac{a}{3}}, x_2=\sqrt{-\frac{a}{3}}$;

$M=f(x_1)=b+\frac{2a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}}, m=f(x_2)=b-\frac{2a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}}, mM=b^2+\frac{4a^3}{27}$; 5. a) $\frac{a}{b}$; b) 1; c) $\frac{2}{3}$;

Testul 3. 1. a); 2. b); 3. $y=x$, a.v. la $-\infty$; c); 4. d); 5. e); 6. c); 7. b).

## Capitolul 5. Reprezentarea grafică a funcțiilor

1.I. Pentru toate funcțiile domeniul maxim de definiție este $\mathbb{R}$. 1) $x=-1$, punct de maxim; $x=1$, punct de minim; $x=0$, punct de inflexiune; 2) $x=0$, punct de maxim; $x=\frac{2}{3}$, punct de minim; $x=\frac{1}{3}$ punct de inflexiune; 3) $x=-\frac{1}{2}$, punct de maxim; $x=\frac{1}{2}$, punct de minim; $x=0$, punct de inflexiune; 4) $x=0$, punct de maxim; $x=2$, punct de minim; $x=1$, punct de inflexiune; 5) $x=0, x=2$, puncte de minim; $x=1$, punct de maxim; 2 puncte de inflexiune în intervalele $(0,1),(1,2)$; 6) $x=\pm 3$, puncte de minim; $x=0$, punct de maxim; $x=\pm\sqrt{3}$, puncte de inflexiune. II. 1) $\mathbb{R}^*$; $x=-\sqrt{2}$, punct de maxim; $x=\sqrt{2}$, punct de minim; $y=\frac{x}{2}$ a.o.; $x=0$ a.v.; 2) $\mathbb{R}-\{1\}$; $y=1$ a.o.; $x=1$ a.v.;

3) $\mathbb{R}-\{\pm 1\}$; $x=\pm 1$ a.v.; $y=0$ a.o.; $x=0$, punct de minim ; 4) $\mathbb{R}-\{0,1\}$; $x=0, x=1$, a.v.; $y=0$, a.o.; $x=\frac{1}{2}$, punct de maxim; 5) $\mathbb{R}-\{1,3\}$; $x=1, x=3$ a.v.; $y=0$ a.o.; $x=2$, punct de maxim; 6) $\mathbb{R}$; $y=0$ a.o. $x=-1$, punct de minim; $x=1$, punct de maxim; $x=0, x=\pm\sqrt{3}$, puncte de inflexiune;

III. 1) $(0,\infty)$; $x=0$ a.v. la dreapta; $y=0$ a.o. la $+\infty$; 2) $\mathbb{R}$; $x=-\frac{1}{2}$, punct de minim; $x=\frac{-3\pm\sqrt{41}}{8}$, puncte de inflexiune; $y=-1$ a.o. la $-\infty$; $y=1$ a.o. la $+\infty$;

3) $(-\infty,0)\cup[1,\infty)$; $x=0$ a.v. la stânga; $y=1$ a.o.; 4) $\mathbb{R}$; $x=0$, punct de inflexiune; $y=-1$ a.o. la $-\infty$; $y=1$ a.o. la $+\infty$; 5) $x=-\sqrt{3}$, punct de maxim; $x=\sqrt{3}$, punct de minim; $x=0$ punct de inflexiune; $x=\pm 1$ a.v. IV . 1) $(0,\infty)$; $x=\frac{1}{e}$ punct de minim; 2) $(0,\infty)$ $x=1$, punct de minim; $x=0$ a.v. la dreapta; 3) $(0,\infty)$; $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$, punct de minim; $x=\frac{1}{\sqrt{e^3}}$, punct de inflexiune; 4) $\mathbb{R}$; $x=0$, punct de minim ; $x=\pm 1$, puncte de inflexiune;
5) $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$; $x=-1-\sqrt{2}$, punct de maxim; $x=-1$ a.v. la stânga; $x=1$ a.v. la dreapta;
V. 1) $\mathbb{R}$; $x=1$, punct de maxim; $x=2$, punct de inflexiune; $y=0$ a.o. la $+\infty$; 2) $\mathbb{R}^*$; $x=1$, punct de minim; $x=0$ a.v.; $y=0$ a.o.; 3) $\mathbb{R}-\{-1\}$; $x=0$, punct de minim; $x=-1$ a.v.; $y=0$ a.o. la $-\infty$; 4) $\mathbb{R}$; $x=2$, punct de maxim; $x=0$, punct de minim; $x=2\pm\sqrt{2}$, puncte de inflexiune; $y=0$ a.o. la $+\infty$; 5) $\mathbb{R}$; $x=-2$, punct de maxim; $x=0$, punct de minim; $x=-2\pm\sqrt{2}$, puncte de inflexiune; $y=0$ a.o. la $-\infty$; VI. 1) $E_s=[0,2\pi]$; $x=\frac{\pi}{4}$, punct de maxim; $x=\frac{5\pi}{4}$, punct de minim; 2) $E_s=[0,2\pi]$; $x=\frac{\pi}{3}$, punct de maxim; $x=\frac{5\pi}{3}$, punct de minim; $x=0, x=\pi-\arccos\frac{1}{4}$, puncte inflexiune; 3) $E_s=[0,2\pi]$; $x=\frac{\pi}{6}$, punct de maxim; $x=\frac{5\pi}{6}$, punct de minim; $x=\pi, x=\frac{3\pi}{2}$, puncte de inflexiune;
VII. 1) $\mathbb{R}$; $x=0$, punct de minim; $x=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$, puncte de inflexiune; $y=\frac{\pi}{2}$, a.o.; 2) $\mathbb{R}$; $x=0$, punct de minim; $y=-\frac{\pi x}{2}-1$ a.o. la $-\infty$; $y=\frac{\pi x}{2}-1$ a.o. la $+\infty$; 3) $(0,\infty)$; $x=0$ a.v.;
4) $\mathbb{R}^*$; $y=0$ a.o.; 5) $\mathbb{R}-\{1\}$; $x=\frac{1}{2}$ punct de inflexiune; $y=\frac{\pi}{4}$ a.o.
VIII. 1) $(0,\infty)$; $x=\frac{1}{e}$, punct de minim; 2) $(0,\infty)$; $x=e$ punct de maxim; un punct de inflexiune în intervalul $(e,\infty)$; $y=1$ a.o. la $+\infty$; 3) $(-1,\infty)-\{0\}$; $x=-1$ a.v.; $y=1$ a.o. la $+\infty$;
2. a) $y=mx-1$, a.o.; $mx-y-1=0, \forall m\in\mathbb{R}\Rightarrow x=0, y=-1$; b) $f'(-2)=0\Rightarrow m=1$;
3. $m\in\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)\cup(1,\infty)$; 4. $a=2$; 5. $a=4$; 6. $m\in\{0,4\}$; 8. $a\le\frac{1}{2}$; 9. $a=-1, b=1$;
10. $a=1, b=\frac{3}{2}$; 13. $a=-\frac{1}{6}, b=3, c=8$; 14. a) $a=b=1, c=-2$; 15. $a=b=0, c=1$;
16. $a=c=-2, b=-3, d=1$; 17. $a=1, b=-1, c=-2, d=-3$;
Teste de evaluare. Testul 1.1. a) Se aplică Lagrange funcției $g:[-2,1]\to\mathbb{R}, g(x)=x-x^3$;
2. $m\in\{0,4\}$; 3. a) $f(x)=\frac{1}{x}$ dacă $|x|<1, x\ne 0$; $f(x)=\frac{x^2+4}{x}$, dacă $|x|>1$, $f(1)=3$;

$D=\mathbb{R}-\{-1,0\}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty; l_s(-1)=-5,\ l_d(-1)=-1,$ $l_s(0)=-\infty, l_d(0)=\infty,\ l_s(1)=1, l_d(1)=5$. $x=0$, a.v., $y=x$. a.o.; 4. a) $D=(0,\infty)$; $x=0$ a.v. $y=0$ a.v. la $+\infty$; $(1,0)$ punct unghiular; $\left(e^2,\frac{2}{e}\right)$ punct de maxim. Testul 2. 1. $f'(-1)=0$ sau $f'(1)=0 \Rightarrow a=-3$ sau $a=3$;

2.a) $f'(x)=0$ radăcini reale dacă $\Delta_x>0$; b) $a=4, b=-5$; 4. a) Se trasează graficul pe $E_s=[0,\pi]-\left\{\frac{3\pi}{4}\right\}$;

Testul 3.1.a) $y=-2x$ a.o. la $-\infty$; $y=0$ a.o. la $+\infty$; $(-1,1),(1,-1)$ puncte de întoarcere pentru grafic; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right)$ punct de maxim; 3.a) $a=2, b=4$; b) $D=\mathbb{R}-\{-2\}$; c) $y=x-4$ a.o., $x=-2$ a.v.; $(-5,-12)$ punct de maxim, $(1,0)$ punct de minim; 4. a) $D=\mathbb{R}-\left\{-2,\pm\frac{1}{2}\right\}$, $y=\ln 4$ a.o., $(0,-\ln 4)$ punct unghiular.

## Capitolul 6. Teste de recapitulare finală

Testul 1.1. $x=0, y=3$; 2. a) $A^2=\begin{pmatrix}7 & -2\\ -3 & 6\end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix}-13 & 14\\ 21 & -6\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}18 & -12\\ -18 & 12\end{pmatrix}$; c) $x=0, y=\frac{1}{3}, z=\frac{1}{2}, t=\frac{1}{6}$; d) $B^{-1}=A \Rightarrow S=A+A^2+A^3$; 3. $\Delta=1-m^2$; 4. $(x-1)^2+(y-2)^2=5$; $(0,0),(3,3)$; 5. $x_2=\frac{4}{5}, y_1=-\frac{1}{3}, y_2=\frac{1}{9}$; b) $q=-\frac{1}{3}$; d) $y_n\to 0, x_n\to 1$; 6. $a=b=1$; 7. a) 0; 0; b) $f'(0)=1$; Testul 2. 1. a) $A^2=6A\Rightarrow a=2$; b) $\det\left(A^2\right)=\left(\det(A)\right)^2\geq 0$, iar $\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-1!$; 2. a) şi b) Se determină $A^{2k}, A^{2k+1}$; 3. $\Delta=-a(a-2)(a-3)$; 4. $c^2=a^2-b^2=9\Rightarrow c=3$; $F_1(-3,0), F_2(3,0)\Rightarrow F_1F_2=6$; b) $y=-\frac{3}{5}x+n$ este tangentă elipsei; $3x+5y=\pm 25$; 5. a) 3; b) 3; c) $-3$; d) $\ln^2 a$; 6. $a=3, b=-2, c=1$; 7. b) $x=3, y=x+4$ la $+\infty$, $y=x+2$ la $-\infty$; Testul 3.1. a) $\Delta=(a+1)(a-4)$; c) $\left(\frac{9}{2},-\frac{5}{2},0\right)$; 2. $X=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$; 3. b) Fie $A=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}c & d\\ -c & d\end{pmatrix}, a,b,c,d\in\mathbb{Z}$, din $AA^{-1}=I\Rightarrow \det(A)\det\left(A^{-1}\right)=1 \Rightarrow \left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=\ 1\Rightarrow a^2+b^2=1$ şi $c^2+d^2=1; a^2+b^2=1\Rightarrow$ ( $a=0$ şi $b=\pm 1$ sau $a=\pm 1, b=0$ ). Deci

$A \in \left\{ I_2, -I_2, E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, -E \right\}$ pentru care $A^4 = I_2$; c) Avem $U(G) \subset G$. Dacă prin absurd $A, B, C, D$ sunt diferite din $U(G)$, atunci $\{A, B, C, D\} = \{I_2, -I_2, E, -E\}$ și $ABCD = E^2 = -I_2$, fals; 5. d) 1; 6. b) $\frac{1}{f'(1)} = 2$; c) strict crescătoare; d) $x = 0$;

7. a) $a = b = 1$; c) Utilizând a) $\Rightarrow 1 + \frac{(-1)^n}{n+2} \to 1$;

Testul 4.1. b) $X^n = t^{n-1}X, \forall n \geq 2, t \in \{\pm 6\}$; c) $AB = BA = O_2; C^{10} = 6^9 I_3$; 3. a) $x \in \{1, 3\}$; d) Inducție matematică; 4. $A \in (E) \Rightarrow AF_1 + AF_2 = 2a$, unde $a = 5$; aria este maximă dacă $M = B$ sau $M = B'$; 12; 5. $T(1, -2)$; 6. b) $\infty$; 1; 7. a) Nu are; b) $f_s'(1) = 2, f_d'(1) = 2\ln 2$;

Testul 5.1. c) $C_1 + C_3 \Rightarrow C_2$ și $C_3$ sunt proporționale; 2. $\det(A) = (a-1)^2 \neq 0 \Rightarrow a \neq 1$;

3. $(\alpha, 2\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$ pentru care $\alpha + 2\alpha + \alpha = 8 \Rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow (2, 4, 2)$; 4. 1) $a = 8$;

2) $AB = BC = \sqrt{5}, AC = \sqrt{10}, AC^2 = AB^2 + BC^2$; $R = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}, O'\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$;

5. a) $a = 1, b = -1$; b) $y = 0, z = 0, x = -1$; 2) 1; 6. a) $(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$; b) $a_n = \ln(1+n) \to \infty$; c) 0; 7. a) $f(x) = e^{x-2}$; b) $y = x$; c) $\frac{1}{e(e-1)}$; Testul 6.1. a); 2. b); 3. c); 4. b; c); 5. c); a); 6. 1) d); 2) a; 3) c); 7. 1) b); 2) a); 3) b); Testul 7. 1. c); 2. d) 3. a); 4. 1) b); 2) a); 3) b; 5. 1) b); 2) a); 3) d); 6. 1) b); 2) a); 7. 1)a); 2)b).

# CUPRINS