АВЕРСЭВ

В. В. Казаков

Наглядная геометрия

7 класс

Опорные конспекты

Контрольные вопросы

Задачи на готовых чертежах

УДК 514(075.3)
ББК 22.151я721
К14

Рецензенты:
учитель математики учреждения образования «Средняя общеобразовательная школа № 123 г. Минска» ***А. Н. Ларченко***;
преподаватель математики учреждения образования «Лицей Белорусского государственного университета» ***Т. П. Бахтина***

Казаков, В. В.
К14 Наглядная геометрия. 7 класс / В. В. Казаков. — 2-е изд. — Минск : Аверсэв, 2013. — 126 с. : ил.

ISBN 978-985-19-0523-8.

Данное пособие является активным приложением к учебнику геометрии для 7 класса. Оно позволяет быстро обобщить, систематизировать учебный материал и, при желании, изучить его с опережением программы. Материал глав сопровождается кратким рассказом по теме, опорным конспектом и набором задач на готовых чертежах, имеющих параллельную двухвариантную структуру. Каждая тема содержит контрольные вопросы и лист ответов, ключевые задачи и систему устных вопросов.

УДК 514(075.3)
ББК 22.151я721

Учебное издание

Казаков Валерий Владимирович

НАГЛЯДНАЯ ГЕОМЕТРИЯ. 7 КЛАСС

2-е издание

Ответственный за выпуск *Д. Л. Дембовский*

Подписано в печать 05.12.2012. Формат 60×84 $^1/_8$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 14,88. Уч.-изд. л. 7,28. Тираж 3100 экз. Заказ 9333.

Общество с дополнительной ответственностью «Аверсэв».
ЛИ № 02330/0003944 от 03.02.2009. Ул. Н. Олешева, 1, офис 309, 220090, Минск.
E-mail: info@aversev.by; www.aversev.by
Контактные телефоны: (017) 268-09-79, 268-08-78.
Для писем: а/я 3, 220090, Минск.

УПП «Витебская областная типография».
ЛП № 02330/0494165 от 03.04.2009.
Ул. Щербакова-Набережная, 4, 210015, Витебск.

ISBN 978-985-19-0523-8

Геометрия — витамин для мозга.
И. Шарыгин

Обращение к ученикам

Ребята!

Вам предлагается система быстрого обучения геометрии. С ее помощью можно самостоятельно изучить материал по геометрии для 7 класса за три месяца, причем знания будут достаточно глубокими. Вы без труда сможете решать многие геометрические задачи и поражать учителя своими познаниями. Занимаясь по предлагаемой системе, вы повысите свою отметку по геометрии как минимум на 2 балла.

Геометрия изучает фигуры и их свойства. Материал по геометрии состоит из определений, аксиом, теорем и задач.

1. В **определении** перечисляются характеристики фигуры, которые отличают ее от других. В определении обычно используется слово «называется». Например: «Равнобедренным треугольником *называется* такой треугольник, у которого две стороны равны». Вместо длинной фразы «треугольник с двумя равным сторонами» мы говорим коротко: «равнобедренный». Обе эти фразы означают одно и то же.

2. Свойства формулируются в виде теорем, которые доказываются на основании уже известных свойств путем рассуждений. Например, для равнобедренного треугольника справедлива теорема: **«Углы при основании равнобедренного треугольника равны».** Ясно, что несколько начальных свойств нельзя доказать, поэтому они принимаются без доказательства. Такие свойства называются *аксиомами*. В результате получается цепочка из свойств: 1-е свойство → 2-е свойство → 3-е свойство → ...

ЕДИНСТВЕННОЕ, ЧТО ОТ ВАС ПОТРЕБУЕТСЯ, – ПОНЯТЬ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА!

В этой книге вы познакомитесь со всеми необходимыми свойствами, запомните их доказательства и научитесь применять при решении задач.

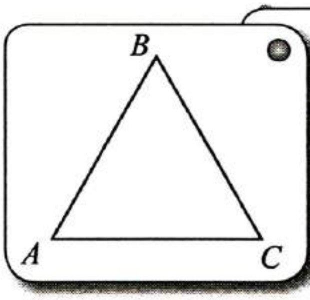
Вы спросите: «Зачем нужно знать доказательства теорем?» Это самый важный вопрос!

Доказательство — это логическое рассуждение. А логические рассуждения составляют суть математики. Доказательства теорем являются образцами таких рассуждений. Запоминая и воспроизводя доказательства, вы приобретаете умение рассуждать. А это умение, согласитесь, нужно всем людям.

Большинство доказательств устроено просто: «Если из A следует B, а из B следует C, то из A следует C». Например, «Если Саша выше Вовы, Вова выше Димы, то Саша выше Димы».

3. Задачи в геометрии можно разделить на три типа:

- на доказательство,
- на вычисление,
- на построение.



Задача 1 (задача на доказательство). Доказать, что у равностороннего треугольника все углы равны.

Эта задача на доказательство решается при помощи двух определений и одной теоремы:

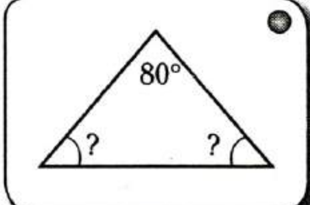
- определение равностороннего треугольника (все его стороны равны);
- определение равнобедренного треугольника (две его стороны равны);
- свойство равнобедренного треугольника (его углы при основании равны).

Доказательство. По определению равностороннего треугольника $AB = BC = AC$.

Так как $AB = BC$, то по свойству равнобедренного треугольника $\angle A = \angle B$.

Так как $AB = AC$, то по свойству равнобедренного треугольника $\angle C = \angle B$.

Тогда $\angle A = \angle B = \angle C$. Что и требовалось доказать.



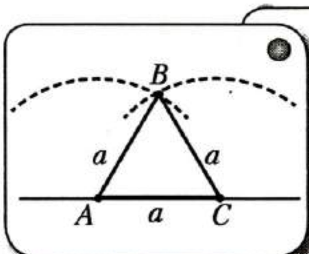
Задача 2 (задача на вычисление). Найти углы при основании равнобедренного треугольника, если угол при его вершине равен 80°.

Для решения этой задачи нужно воспользоваться двумя теоремами:

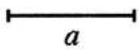
- углы при основании равнобедренного треугольника равны;
- сумма углов любого треугольника равна 180°.

Решение. Так как сумма углов треугольника равна 180°, то углы при основании равнобедренного треугольника в сумме составляют $180° - 80° = 100°$. А так как углы при основании равнобедренного треугольника равны, то каждый из них составляет $100° : 2 = 50°$.

Ответ: 50°; 50°.



Задача 3 (задача на построение). Построить при помощи циркуля и линейки равносторонний треугольник по его стороне a.



Решение. На произвольной прямой при помощи циркуля откладываем отрезок $AC = a$. Строим циркулем две окружности радиусом, равным a, с центрами в точках A и C. Окружности пересекутся в точке B. Соединяем линейкой точки A и B, C и B. Получим ΔABC. Он является искомым, так как $AC = BC = AB = a$.

Как видим, для быстрого и правильного решения геометрических задач необходимо знание всех свойств геометрических фигур. Данная книга как раз и поможет вам легко овладеть этими свойствами. И тогда вы сможете без труда решать ЛЮБЫЕ геометрические задачи.

Темы для изучения в 7 классе

- Тема 1. Прямая и ее части. Окружность. Угол.
- Тема 2. Треугольники.
- Тема 3. Параллельные прямые.
- Тема 4. Сумма углов треугольника.
- Тема 5. Задачи на построение.

Инструкция

Знакомясь с новой темой, нужно понять и запомнить материал. Поверьте, что это легче, чем учить стихотворение или пересказывать английский. И все потому, что перед вами будет лист по данной теме в рисунках — опорный конспект (ОК), который позволяет задействовать зрительную и логическую память. А это на 75 процентов улучшает запоминание. Все вопросы и ответы на них будут повторяться много-много раз учителем и вашими товарищами. Поэтому вы постепенно все поймете и запомните.

Этапы

1. Выслушать **в классе** на уроке рассказ учителя по всей теме или по ее части.

2. Прочитать **дома** рассказ по теме, сопоставляя с опорным конспектом.

3. Прочитать **дома** вопросы по теме и попытаться ответить на каждый из них. В случае затруднения найти ответ на данный вопрос в рассказе по ОК или в учебном пособии.

4. Раскрасить цветными карандашами опорный конспект (сделать разноцветный фон для каждой части опорного конспекта).

5. Дома нарисовать опорный конспект (или его часть) и вслух прокомментировать нарисованное.

6. В классе поднять руку и дать ответ по заданному на дом материалу.

7. В классе получить 10 или 9 за ответ по теме.

ВНИМАНИЕ!

В каждой теме имеются вопросы (они даны внизу опорного конспекта) и ответы на них. В ответах дана суть доказательства, а чертеж при ответе нужно выполнить самому. В каждой теме есть также образцы решения задач. Это наиболее важные задачи данной темы, т. е. ключевые задачи. Кроме того, есть дополнительный материал в виде устных вопросов, на все вопросы даются ответы, которые позволяют углубить познания по теме. И наконец, к каждой теме прилагаются наборы задач с готовыми чертежами. После ознакомления со всей темой их можно решать в любом порядке и столько, сколько захочется. В конце книги есть ответы ко всем задачам и указания к решению наиболее трудных из них.

Все свойства нужно знать!

Это непросто, так как в 7 классе нужно запомнить целых 33 свойства. Два из них вы уже знаете: «Сумма углов треугольника равна 180°»; «Углы при основании равнобедренного треугольника равны». Осталось 31. Справитесь? Даже не сомневайтесь! Вот список этих свойств.

1. Теорема о свойстве смежных углов.
2. Теорема о свойстве вертикальных углов.
3. Теорема о единственности восставленного перпендикуляра к прямой.
4. Теорема о единственности опущенного перпендикуляра на прямую.
5. Теорема о двух прямых, перпендикулярных третьей.
6. Первый признак равенства треугольников.
7. Второй признак равенства треугольников.
8. Третий признак равенства треугольников.
9. Теорема о свойстве углов равнобедренного треугольника.
10. Теорема о свойстве биссектрисы равнобедренного треугольника.

11. Признак равнобедренного треугольника (по двум углам).
12. Признак равнобедренного треугольника (по высоте и медиане).
13. Признак равнобедренного треугольника (по высоте и биссектрисе).
14. Признак равнобедренного треугольника (по медиане и биссектрисе).
15. Теорема о свойстве точек серединного перпендикуляра к отрезку.
16. Первая замечательная точка треугольника (пересечение серединных перпендикуляров).
17. Признаки параллельности прямых.
18. Теорема о существовании прямой, параллельной данной.
19. Теорема о двух прямых, параллельных третьей.
20. Теорема о пересечении двух параллельных прямых третьей прямой.
21. Свойства углов при параллельных прямых и секущей.
22. Теорема о перпендикуляре к одной из двух параллельных прямых.
23. Теорема об углах с соответственно параллельными сторонами.
24. Теорема об углах с соответственно перпендикулярными сторонами.
25. Теорема о сумме углов треугольника.
26. Теорема о внешнем угле треугольника.
27. Теорема о соотношениях между сторонами и углами треугольника.
28. Неравенство треугольника.
29. Признаки равенства прямоугольных треугольников.
30. Теорема о свойстве катета, лежащего против угла 30°.
31. Теорема о свойстве точек биссектрисы угла.
32. Вторая замечательная точка треугольника (пересечение биссектрис треугольника).
33. Теорема о расстоянии между двумя параллельными прямыми.

Обращение к учителям

Уважаемые коллеги!

Вам предлагается система крупноблочного обучения геометрии. Материал каждой главы учебного пособия «Наглядная геометрия. 7 класс» сгруппирован в единый блок, сопровожден кратким рассказом по теме и опорным конспектом к ней. Рассказ по теме сопровождается краткими доказательствами теорем, аналогичных тем, что изложены в учебнике. В каждой теме имеются контрольные вопросы и ответы на них. Ответы на вопросы включают тезисы доказательств, которые ученик должен привести в своем ответе, сопроводив ответ, если нужно, чертежом.

В каждой главе приводятся ключевые задачи по теме. Некоторые из них содержат важные свойства геометрических фигур, которые могут быть доказаны в рамках данной темы, но будут входить в теоретическую часть в последующих темах 8 и 9 классов. Это соответствует принципу опережающего обучения.

В каждой теме есть система устных вопросов, которые носят развивающий характер и служат для углубления знаний учащихся по данной теме. Сюда же относится небольшой дополнительный материал, предназначенный для одаренных учащихся.

Каждая тема сопровождается подборкой задач с готовыми чертежами для начального обучения решению задач, что значительно экономит время учителя. Задачи имеют параллельную двухвариантную структуру и могут использоваться для проведения самостоятельных работ. Ко всем заданиям приведены ответы, а также указания к решению наиболее трудных задач, обозначенных символом (*). Каждая из подборок задач завершается контрольной работой в двух вариантах. Ответы к заданиям контрольной работы в пособии не приводятся.

Если вы решите руководствоваться данным пособием в своей работе, то это даст вам возможность:

1) использовать краткий рассказ по теме и опорный конспект полностью или фрагментарно для изложения нового материала;
2) использовать устные вопросы для углубления знаний учащихся по теоретической части материала;
3) использовать материалы для проведения тематических зачетов (вопросы и ответы на них);
4) использовать задачи с готовыми чертежами при фронтальной работе, для организации индивидуальной работы учащихся, проведения самостоятельных, проверочных и контрольных работ.

Краткие рекомендации

Если вы хотите добиться значительного повышения уровня знаний ваших учеников и работать по технологии крупноблочного обучения математике, то вам будут полезны следующие рекомендации.

Во главу угла в предлагаемой технологии обучения математике ставится основной принцип развивающего обучения, сформулированный Л. В. Занковым: *ведущая роль теоретических знаний*. Мы принимаем это как аксиому и упорно следуем ей. Главная цель работы с учеником на этом этапе — заставить его «говорить» и, как следствие, мыслить! Пусть вначале робко и неуверенно, но от урока к уроку этот компонент его личности будет усиливаться, что неизбежно приведет к развитию интеллекта ребенка. Нужно твердо и настойчиво идти к намеченной цели!

Примерная схема обучения может быть следующая.

1-й урок — учитель излагает ярко и доступно учебный материал по всей теме; затем повторяет его, приводит доказательства теорем (абсолютно четко и лаконично, с минимумом записей на доске), задает на дом задание: выучить доказательства изложенных теорем.

2-й урок — ученики по очереди доказывают все теоремы данной темы у доски, усваивая учебный материал темы; учитель дает на дом задание: решение любого количества задач по данной теме из всего блока выделенных учителем задач для домашней работы (можно воспользоваться рекомендациями *Примерного календарно-тематического планирования*).

3, 4, 5-й уроки — полуустное решение задач с готовыми чертежами (с краткой записью в тетради решений одной-двух задач по выбору учителя); количество решенных задач — не менее 10 за урок.

6-й урок — зачет по теоретической части темы (учащиеся должны знать все теоремы и их доказательства — идеальный вариант).

7-й урок — проверочная письменная работа по домашним задачам: в работу включается 10 задач, выделенных учителем в данной теме для самостоятельного решения учащимися дома.

8-й урок — плановая контрольная (проверочная) работа по теме.

Изучение всего материала (пяти тем) 7 класса может завершиться через $8 \cdot 5 = 40$ уроков при плане 53 урока для средних школ и 70 для гимназий. На оставшихся уроках осуществляется закрепление и углубление теоретических знаний учащихся, формирование устойчивого навыка решения задач.

Заметим, что тема 5 «Задачи на построение» изучается не фрагментарно за 2—3 урока (как рекомендовано и что практически невозможно), а основательно, ввиду крайней ее важности для формирования геометрического мышления учащихся.

Ответим на неизбежно возникающий вопрос: как быть с *Примерным календарно-тематическим планированием*?

Во-первых, главным словом в официальном пособии по планированию процесса преподавания математики является слово «примерное». Отста-

Математика — это искусство красиво мыслить!

вать от рекомендованного нежелательно, а вот опережать можно. Основным критерием нашей работы, уважаемые коллеги, является не точное следование *Примерному календарно-тематическому планированию*, а высокий уровень подготовки учащихся! Если ваши ученики блестяще знают теорию, доказательства теорем, решают практически любую задачу из учебника, какие к вам могут быть претензии? Только похвала и одобрение.

Во-вторых, если все же вы еще не завоевали такой уровень авторитета, что можете настаивать на своей инновационной технологии обучения, то кто вам мешает, изучив тему «Треугольники» за 8 уроков, оставшиеся 9 уроков отвести на решение задач повышенной трудности по данной теме?

Несколько важных деталей

Теоретический материал излагается ***учителем*** на уроке крупноблочно в течение 15—20 минут. В рассказе учитель приводит какие-то яркие детали, возбуждая интерес учащихся, ставит небольшие проблемы, акцентирует внимание учащихся на главном. При первом рассказе некоторые второстепенные детали могут быть опущены. Затем рассказ повторяется. При повторном рассказе, как правило, основное внимание уделяется идеям доказательства теорем. При этом подробная запись доказательств на доске не ведется (это все есть в учебнике). На дом ученику предлагается задание:

1) выучить ответы на вопросы по теме;

2) раскрасить опорный конспект цветными карандашами по блокам (они явно выделены в каждом из предлагаемых конспектов).

Например, в опорном конспекте по теме «Прямая и ее части. Окружность. Угол» имеется три логически связанных блока: 1) прямая и ее части (прямая и ее свойства, параллельные прямые, отрезок, луч, ломаная); 2) окружность и ее элементы; 3) угол, виды углов, свойства углов.

Либо учитель делает ксерокопии опорного конспекта для всех учащихся, либо учащиеся используют приобретенное ими данное пособие и постоянно работают с ним. В помощь начинающему учителю в пособии предлагаются варианты размещения учебного материала на доске.

Следующий урок посвящается изложению теоретического материала ***учащимися*** у доски. Упор делается на доказательство теорем. Учащиеся сами вызываются отвечать у доски. Учитель может в начале урока в течение 2—3 минут лаконично, абсолютно четко повторно изложить доказательства всех теорем по данной теме или же тех теорем, которые вызывали у учащихся затруднение. Затем весь урок учащиеся работают у доски, поочередно доказывая теоремы данной темы. За каждую из доказанных теорем учитель объявляет отметку. Для получения зачетной отметки ученик должен доказать все теоремы по данной теме (или их большую часть). Отметка при этом выставляется как среднее арифметическое всех полученных.

Например, ученик доказал три теоремы по теме «Прямая и ее части. Окружность. Угол»: о свойстве смежных углов, о свойстве вертикальных углов и о существовании единственной перпендикулярной прямой к данной. Полученные отметки: 10, 8, 9. Отметка по теме: $(10 + 8 + 9) : 3 = 9$.

При обучении по данной технологии используются элементы гуманной педагогики: отметка в журнал за знания по данной теме выставляется только по желанию ребенка. Таким образом, у него всегда есть шанс ее повысить.

Темы 2 «Треугольник» и 4 «Сумма углов треугольника» — достаточно объемные и содержат большое количество теорем. Тема 2 содержит 10 теорем (плюс задача о пересечении серединных перпендикуляров), тема 4 — 11 теорем (плюс задача о пересечении биссектрис). Поэтому учитель, который не работал по данной технологии, может испытывать затруднения при лаконичном изложении теорем. В этом случае каждый из указанных опорных конспектов можно разбить на две или три части.

О лаконичном доказательстве теорем

Самое трудное для учителя при обучении по данной технологии — научиться излагать доказательства теорем кратко, чисто, четко. Но это можно сделать. Следует исключить из своего рассказа все лишнее, повторы, слова-паразиты (вроде «понятно, дети?», «вам ясно?» и т. п.), а также тонкие детали, которые будут отшлифованы при последующих обращениях к теореме.

Пример. Теорема о свойстве смежных углов. Засеките время и проведите доказательство самостоятельно, вслух или мысленно проговаривая текст. Сколько времени вы потратили?

Теперь вместе с нами:

1. *Смежные углы* 1 *и* 2 *образуют развернутый угол* (5 секунд). 2. *А развернутый угол равен* 180° (3 секунды).

Итого: 8 секунд.

При повторном рассказе: *Смежные углы образуют развернутый угол, а он равен* 180° (5 секунд).

Возможный ответ на зачете ученика, претендующего на 10 баллов (через 5 уроков после начала изучения темы):

1. *Противоположные лучи смежных углов образуют развернутый угол.*

2. *Общая сторона разбивает развернутый угол на два угла, сумма которых равна развернутому углу, т. е.* 180°.

В среднем на доказательство одной теоремы тратится 15—20 секунд. Конечно, есть теоремы, доказательство которых требует больше времени. Но таких теорем не так уж много. Например, в курсе геометрии 7 класса это теорема о свойстве точек серединного перпендикуляра к отрезку и теорема о соотношении между сторонами и углами треугольника (доказательство их состоит из двух частей), а также признаки параллельности прямых и теорема о свойстве углов при параллельных прямых и секущей. В последних двух теоремах все три признака объединены в одну теорему, равно как и три свойства. В любом случае нужно попытаться сократить, разумеется, не в ущерб научности, время на доказательство.

Третий, четвертый и пятый уроки целиком посвящаются решению задач по всей теме. Задачи решаются на готовых чертежах, заранее выполненных на доске. За урок обычно решается 10—15 задач. Большинство решений задач проводится устно с двукратным повторением шагов решения. Решения отдельных задач (одной-двух) кратко (свернуто) записываются в тетрадь. На уроке могут быть решены и наиболее трудные задачи из блока домашних задач. На этих уроках 2—3 минуты посвящаются повторению доказательств наиболее трудных теорем.

К зачетному уроку учащиеся готовят ответы на все вопросы данной темы. Класс можно разбить на группы, назначить лидера, который поможет подготовиться остальным членам своей группы к зачету. На зачете ученики поочередно формулируют определения и доказывают теоремы по списку вопросов. Каждому ученику придется доказать 3—4 теоремы (не считая тем 1 и 5). В отдельных случаях наиболее сильные учащиеся могут помочь учителю принимать зачет.

В контрольную работу по теме учитель отбирает те задачи, которые решило большинство учащихся. Ученики заранее знают, что будет такая контрольная работа, и в основном стараются выполнять домашние задания самостоятельно.

Через несколько месяцев работы по данной технологи учитель неизбежно замечает, что учащиеся начинают лучше говорить, лучше решать задачи и главное — лучше мыслить! А это и есть основная цель обучения математике: научить ребят мыслить. Мыслить доказательно, аргументированно.

Это совсем кратко о данной технологии. В действительности учитель, взяв за основу некоторые главные принципы, получает широкое поле для своего творчества. Например, большие возможности дает использование современных информационных технологий. Это и запись рассказа учителя по теме на аудио- и видеоносителях с последующим распространением ее среди учащихся (с целью подготовки последних к устным ответам у доски), и использование компьютерного тестирования по теоретической и практической частям темы, и многое другое.

Более подробно о данной технологии с возможными ответами на возникающие вопросы можно будет узнать на сайте издательства «Аверсэв».

В заключение скажем, что основные идеи данной технологии сложились в процессе 30-летней работы автора в качестве учителя, методиста, преподавателя Минского областного института развития образования. Большое влияние на формирование педагогической парадигмы автора, несомненно, оказали работы П. М. Эрдниева, В. Ф. Шаталова, Л. В. Занкова.

Мы желаем вам успеха в деле обучения детей геометрии.

Обращение к родителям

Уважаемые родители!

Если вы обеспокоены уровнем знаний вашего ребенка по математике и хотите ему помочь, то вы должны знать об этой книге следующее. Данное пособие является активным приложением к учебнику геометрии для 7 класса. Работа с ним позволяет быстро обобщить, систематизировать учебный материал и, при желании ребенка, изучить школьный материал с опережением программы. Для этого предлагаются краткие и доступные рассказы по каждой главе учебника, которые — и это самое важное! — сопровождаются рисунками (опорным конспектом), где схематически изображены все геометрические фигуры, относящиеся к данной теме, их свойства и логические связи между ними. К каждой главе даны образцы решения основных задач, контрольные вопросы по теме и четкие ответы на каждый вопрос. Замыкает учебный материал каждой главы блок задач на готовых чертежах, выстроенный по принципу нарастающего уровня сложности. Ко всем задачам приведены ответы, а к наиболее сложным — указания к решению.

Вы можете помочь своему ребенку улучшить знания по геометрии и контролировать процесс обучения, используя данное пособие следующим образом:

- попросить ребенка рассказать о том, что изображено на рисунках опорного конспекта. Развитие речи стимулирует умственную активность и является самым главным фактором развития мышления. При этом вы можете, не зная математики, сопоставлять рассказ ребенка с предлагаемым в пособии текстом краткого рассказа;
- предложить вашему сыну или дочери ответить на контрольные вопросы к теме. При этом сами будете следить за правильностью ответов по готовому листу с ответами на вопросы;
- предложить решить несколько задач по теме и свериться с ответами на них.

Автор пособия — преподаватель Минского областного института развития образования, который является одним из авторов «Сборника заданий для выпускного экзамена по учебному предмету "Математика"», других методических пособий, имеет большой педагогический опыт, более 20 лет читает лекции учителям математики по вопросам обучения учащихся геометрии.

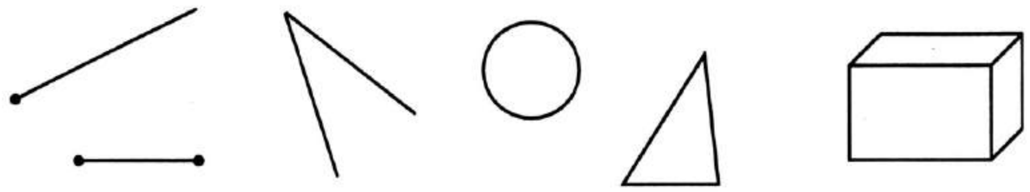
Предлагаемая система обучения апробирована известными учителями математики в течение многих лет и имеет блестящие результаты.

Тема 1

Прямая и ее части. Окружность. Угол

Точка есть то, что не имеет частей.
Евклид

Геометрия изучает геометрические фигуры и их свойства. Простейшие (основные) фигуры: *точка*, *прямая*, *плоскость*. Вы знаете и другие фигуры: луч, отрезок, угол, окружность, треугольник, параллелепипед.



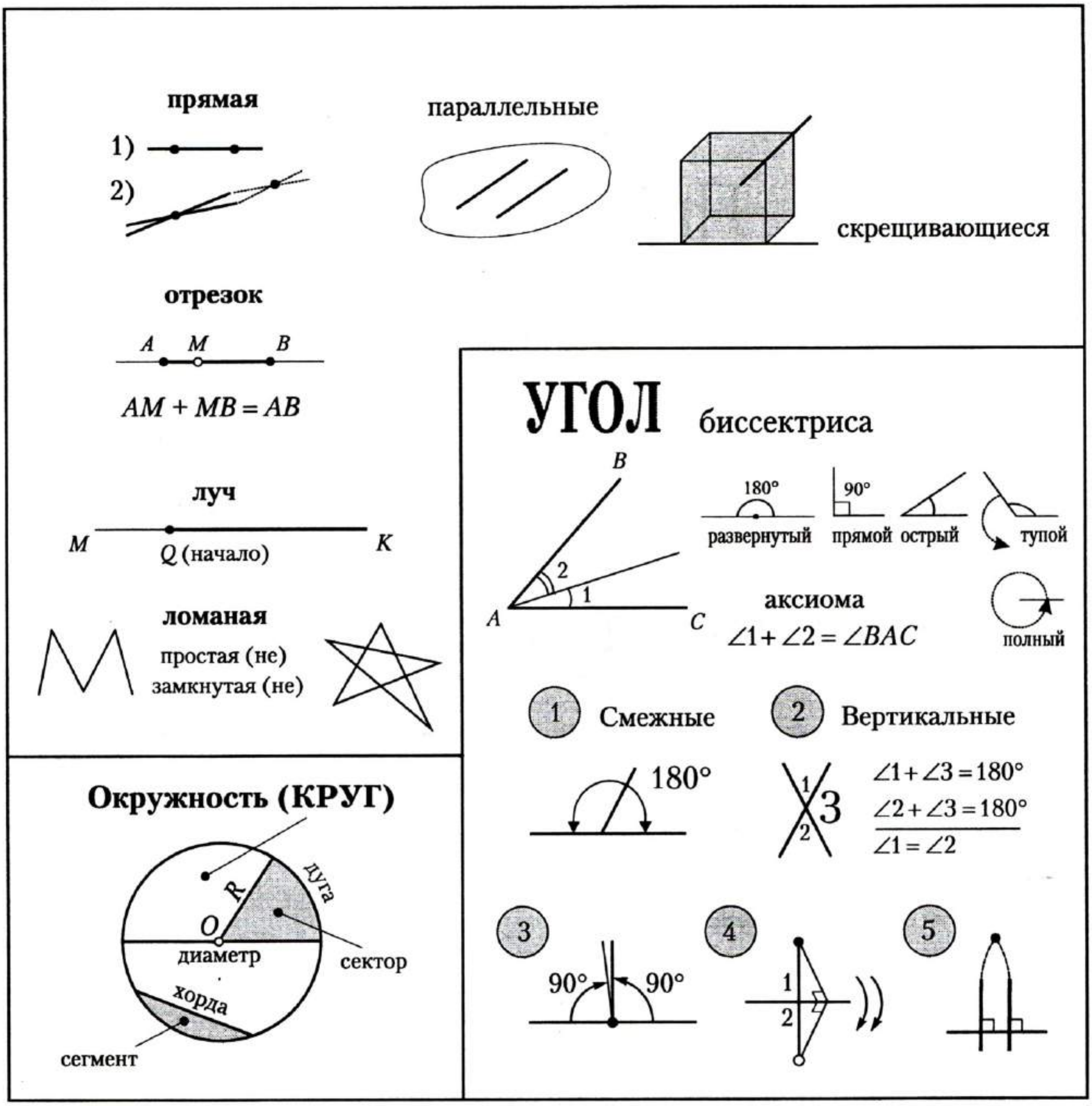
Математическая точка не бывает большой или маленькой. Она не имеет размеров. Математическая точка — это воображаемая точка, хотя мы ее и рисуем.

Что такое прямая? На этот вопрос нельзя ответить. Прямую можно представить как туго натянутую бесконечную нить или как тонкий луч света, пролетающий в бесконечном пространстве. Прямая не имеет толщины, но бесконечна в обе стороны. Прямая на плоскости разбивает плоскость на две *полуплоскости*.

Если на прямой отметить точку, то получим два луча. Два луча, выходящие из одной точки, образуют угол. Если на прямой взять две точки, то получим отрезок. Отрезки, соединенные последовательно концами, образуют ломаную. Замкнутая ломаная образует многоугольник.

Одно из самых первых свойств: «Через две точки проходит единственная прямая». Его принимают без доказательства. Свойства, которые принимают без доказательства, называются *аксиомами*. Свойства, истинность которых устанавливается путем логических рассуждений, называются *теоремами*.

Прямая и ее части. Окружность. Угол



1. Свойства прямой.
2. Параллельные прямые.
3. Отрезок.
4. Равные отрезки.
5. **Аксиома измерения отрезков.**
6. Луч. Противоположные лучи.
7. Ломаная. Простая, замкнутая.
8. Окружность и ее элементы.
9. Угол.
10. Равные углы.
11. Биссектриса угла.
12. Развернутый угол.
13. Градус.
14. Прямой, острый, тупой, полный углы.
15. **Аксиома измерения углов.**
16. Аксиома.
17. Теорема.
18. Смежные углы.
19. **Свойство смежных углов.**
20. Вертикальные углы.
21. **Свойство вертикальных углов.**
22. Перпендикулярные прямые. Перпендикуляр.
23. Теорема о единственности восстановленного перпендикуляра к прямой.
24. Теорема о единственности опущенного перпендикуляра на прямую.
25. Теорема о двух перпендикулярах.

№ 1

Рассказ по опорному конспекту

Свойства прямой. Через две точки можно провести единственную прямую. Если две прямые пересекаются, то в единственной точке. В двух точках пересекаться они не могут, так как через две точки можно провести единственную прямую.

Прямые называются *параллельными*, если они ЛЕЖАТ В ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ и не пересекаются, сколько бы их ни продолжали. Требование, чтобы прямые лежали в одной плоскости, обязательно. Существуют прямые, которые не пересекаются и в то же время не параллельны. Они называются *скрещивающимися* (представьте реку и мост через нее). На рисунке это две прямые, проходящие через указанные ребра куба.

Части прямой — это отрезок и луч. *Отрезок* — это часть прямой, ограниченная двумя точками.

Равными называются отрезки, которые совпадают при наложении. Если на отрезке отметить точку, то она разобьет его на два отрезка, сумма длин которых равна длине данного отрезка.

Луч — это часть прямой, ограниченная одной точкой. Поэтому он бесконечен в одну сторону. Два луча называются *противоположными*, если они имеют общее начало и дополняют друг друга до прямой.

Фигура, которую можно составить из отрезков, последовательно соединенных концами, — *ломаная*. Если начало первого отрезка совпадает с концом последнего, то такая ломаная называется *замкнутой*. Если звенья ломаной не пересекаются и соседние звенья не лежат на одной прямой, то она называется *простой*. Изображенная на рисунке звездочка — замкнутая ломаная из пяти звеньев, которая не является простой ломаной.

Окружность — это фигура, которая состоит из всех точек плоскости, равноудаленных от данной. Важная часть определения ИЗ ВСЕХ ТОЧЕК ПЛОСКОСТИ. Если опустить «из всех точек», то можно получить дугу окружности. Она тоже состоит из точек плоскости, равноудаленных от данной. А если опустить «плоскости», то можно получить сферу. Она тоже состоит из точек, равноудаленных от данной. С окружностью связано семь элементов: радиус, дуга, хорда, диаметр, круг, сектор, сегмент. Иногда путают круг и окружность. Окружность — это линия, а круг — это часть плоскости, ограниченная окружностью.

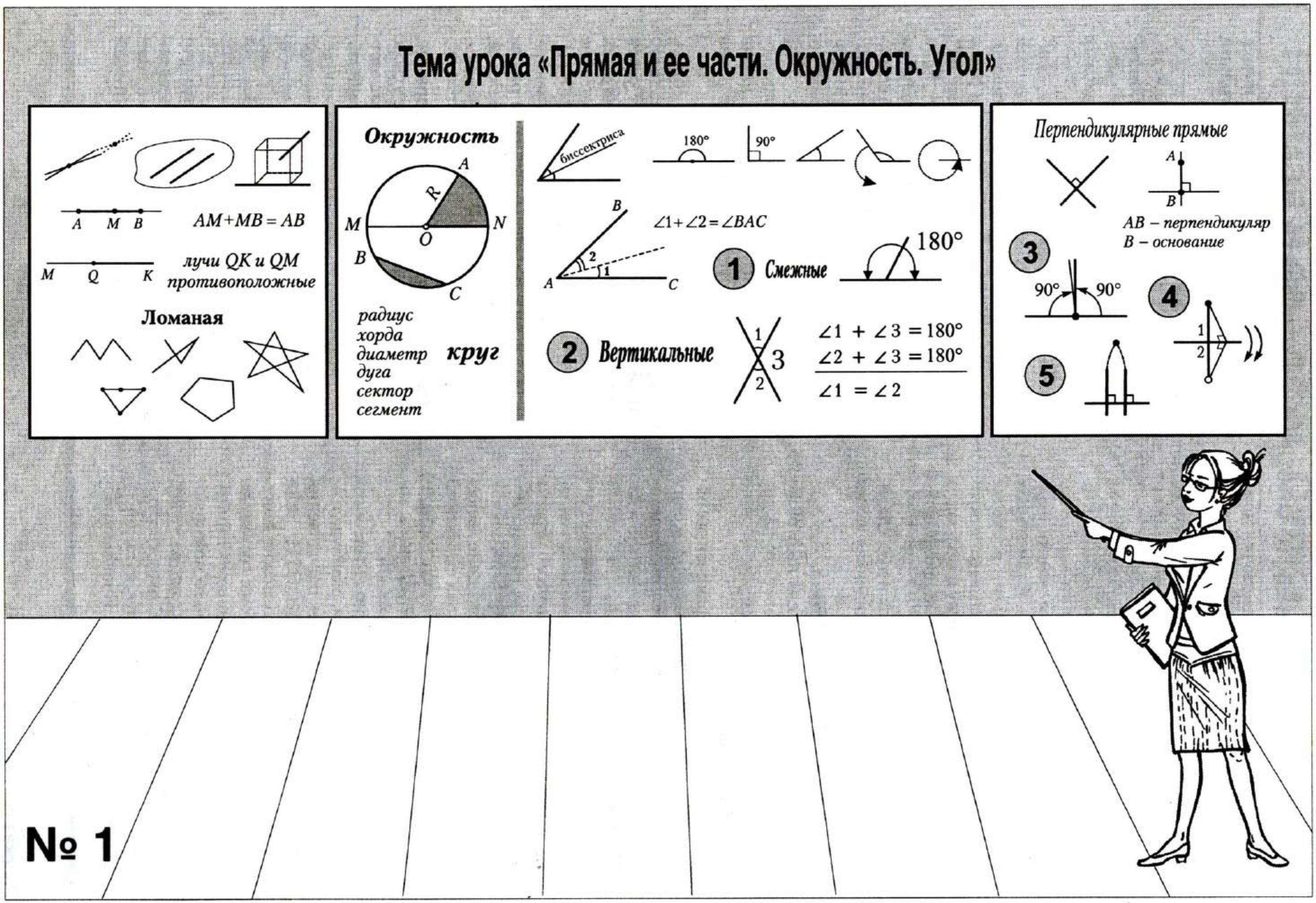
Два луча, выходящие из одной точки, образуют угол. *Равными* называются углы, которые совпадают при наложении. *Биссектрисой* угла называется луч, который выходит из вершины и делит его на два равных угла.

Различают *развернутый*, *прямой*, *острый*, *тупой* и *полный* углы. *Развернутым* называется угол, образованный противоположными лучами. Развернутый угол равен 180°, прямой — 90°, острый — меньше 90°, тупой — больше 90°, но меньше 180°. Если увеличивать развернутый угол, то получим *сверхтупой* угол, а когда стороны угла совпадут — *полный* угол. Полный угол равен 360° (веер, раскрытый до предела). Ясно, что прямой угол получится, если провести биссектрису развернутого угла.

Если внутри угла из его вершины провести луч, то он разобьет данный угол на два угла, сумма градусных мер которых равна градусной мере данного угла.

Если у двух углов одна сторона общая, а две другие — противоположные лучи, то это СМЕЖНЫЕ углы. **Сумма смежных углов равна** 180° (они образуют развернутый угол). При пересечении двух прямых образуется две пары противоположных углов — это ВЕРТИКАЛЬНЫЕ углы (их стороны — противоположные лучи). **Вертикальные углы равны** (углы 1 и 3 в сумме дают 180° как смежные, и углы 2 и 3 в сумме дают 180° как смежные, отсюда $\angle 1 = \angle 2$).

Перпендикулярными называются прямые, которые пересекаются под прямым углом. *Перпендикуляром* к данной прямой называется отрезок прямой, перпендикулярной данной, один конец которого является точкой их пересечения. Он называется **основанием** перпендикуляра. *Через точку, лежащую на прямой, можно провести единственную прямую, перпендикулярную данной.* То же касается точки, не лежащей на прямой. Очень важной является теорема о двух перпендикулярах: две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны между собой (если бы они пересекались, то из точки на прямую можно было бы опустить два перпендикуляра, что невозможно).



Тема урока «Прямая и ее части. Окружность. Угол»
A M B
AM+MB = AB
M Q K
лучи QK и QM противоположные
Ломаная
Окружность
A
R
M
O
N
B
C
радиус
хорда
диаметр
дуга
сектор
сегмент
круг
биссектриса
180°
90°
B
2
1
A
C
∠1+∠2=∠BAC
1 Смежные
180°
2 Вертикальные
1
3
2
∠1 + ∠3 = 180°
∠2 + ∠3 = 180°
∠1 = ∠2
Перпендикулярные прямые
A
B
AB – перпендикуляр
B – основание
3
90°
90°
4
1
2
5
№ 1

Ответы на вопросы к теме

1. Через две точки проходит единственная прямая. Если две прямые пересекаются, то в единственной точке. В двух точках пересекаться они не могут, так как через две точки проходит единственная прямая.

2. Параллельными называются прямые, которые лежат в одной плоскости и не пересекаются.

3. Отрезок — это часть прямой, ограниченная двумя точками.

4. Равными называются отрезки, которые совпадают при наложении.

5. Если на отрезке отметить точку, то она разобьет его на два отрезка, сумма длин которых равна длине данного отрезка.

6. Луч — это часть прямой, ограниченная одной точкой. Противоположными лучами называются два луча, которые имеют общее начало и дополняют друг друга до прямой.

7. Ломаной называется фигура, состоящая из отрезков, последовательно соединенных концами. Ломаная называется простой, если она не имеет самопересечений и никакие два соседних звена не лежат на одной прямой. Ломаная называется замкнутой, если у нее начало первого отрезка совпадает с концом последнего.

8. Окружность — множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки. Эта точка называется центром. Круг — это часть плоскости, ограниченная окружностью. Радиусом называется отрезок, соединяющий центр окружности с любой ее точкой, или длина этого отрезка. Дуга — это часть окружности, ограниченная двумя точками. Хорда — это отрезок, соединяющий две точки окружности. Диаметр — это хорда, проходящая через центр. Сектор — это часть круга, ограниченная двумя радиусами. Сегмент — это часть круга, ограниченная хордой.

9. Угол — это фигура, образованная двумя лучами, выходящими из одной точки.

10. Равными называются углы, которые совпадают при наложении.

11. Биссектрисой угла называется луч, который выходит из вершины и делит его на два равных угла.

12. Развернутым называется угол, стороны которого являются противоположными лучами.

13. Один градус — это $\frac{1}{180}$ часть развернутого угла. Развернутый угол равен 180°.

14. Прямым называется угол, равный 90°. Острым называется угол, меньший 90°. Тупым называется угол, больший 90°, но меньший 180°. Полным называется угол, стороны которого совпадают и который равен 360°.

15. Если внутри угла из его вершины провести луч, то он разобьет угол на два угла, сумма градусных мер которых равна градусной мере данного угла.

16. *Аксиома* — верное утверждение, которое принимается без доказательства.

17. *Теорема* — верное утверждение, требующее доказательства путем логического рассуждения.

18. Смежными называются два угла, у которых одна сторона общая, а две другие — противоположные лучи.

19. *Сумма смежных углов равна 180°* (см. на рисунке теорему 1). *Доказательство.* Общая сторона разбивает развернутый угол на два угла, сумма градусных мер которых равна градусной мере развернутого угла. А развернутый угол равен 180°.

20. Вертикальными называются два угла, стороны которых являются противоположными лучами (дополнительными полупрямыми).

21. *Вертикальные углы равны* (см. на рисунке теорему 2). *Доказательство.* Углы 1 и 3 — смежные, поэтому в сумме дают 180°. Углы 2 и 3 — смежные, поэтому в сумме дают 180°. Значит, углы 1 и 2 равны.

22. Перпендикулярными называются прямые, которые пересекаются под прямым углом. Перпендикуляром к данной прямой называется отрезок перпендикулярной прямой, один конец которого является точкой их пересечения. Он называется основанием перпендикуляра.

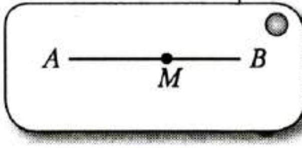
23. *Из точки на прямой можно восстановить (восставить) единственный перпендикуляр к данной прямой* (см. на рисунке теорему 3). *Доказательство.* Отложим прямой угол от правого луча прямой. Получим перпендикуляр. Отложим прямой угол от левого луча. Если стороны прямых углов не совпадут, то получится три угла, которые образуют развернутый угол и при этом в сумме больше 180°.

24. *Из точки вне прямой можно опустить единственный перпендикуляр на данную прямую* (см. на рисунке теорему 4). *Доказательство.* 1. Совместим верхнюю полуплоскость с нижней (перегнем плоскость по прямой). Данная точка совместится с точкой в нижней полуплоскости. Соединим эти точки. Получим перпендикуляр (так как углы 1 и 2 совпали, то они равны и являются смежными, значит, каждый равен 90°). 2. Если из точки можно опустить еще один перпендикуляр, то, перегнув плоскость еще раз, получим еще два равных прямых угла, а значит, еще одну прямую, проходящую через две точки, что невозможно.

25. *Две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны между собой* (см. на рисунке теорему 5). *Доказательство.* Если бы они пересекались, то из точки можно было бы опустить два перпендикуляра на данную прямую. А это невозможно.

Ключевые задачи

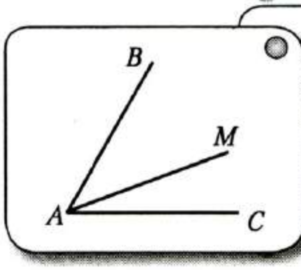
Вначале рассмотрим две главные задачи, которые встречаются практически во всех контрольных работах. Задачи эти очень простые. Но важно при решении сослаться на основное свойство измерения отрезков или углов.



Задача 1. На отрезке AB, равном 24 см, взята точка M. Отрезок AM на 6 см больше отрезка MB. Найдите длину отрезка MB.

Решение. По основному свойству измерения отрезков $AM + MB = AB$. Пусть $MB = x$ см, тогда $AM = (x + 6)$ см. Получим $x + (x + 6) = 24$, $2x = 18$, $x = 9$.

Ответ: $MB = 9$ см.

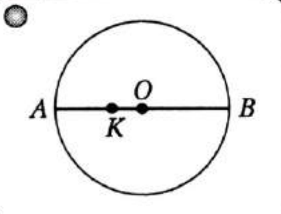


Задача 2. Внутри угла BAC, равного 60°, из его вершины проведен луч AM. Угол BAM в 2 раза больше угла MAC. Найдите величину угла MAC.

Решение. По основному свойству измерения углов $\angle BAM + \angle MAC = \angle BAC$.
Пусть $\angle MAC = x$, тогда $\angle BAM = 2x$.
Получим $x + 2x = 60°$, $3x = 60°$, $x = 20°$.
Ответ: $\angle MAC = 20°$.

Примечание. Возможен другой способ записи решения, где вместо $\angle MAC = x$ пишут $\angle MAC = x°$.
$\angle MAC = x°$, $\angle BAM = 2x°$; $x + 2x = 60$, $3x = 60$, $x = 20$; $\angle MAC = 20°$.

Задача 3. *Дано*: O — центр окружности; $AB = 30$ см, $AK : KO = 3 : 2$.
Найти: KB.



Решение. $AO = \frac{1}{2}AB = 15$ см — радиус равен половине диаметра.

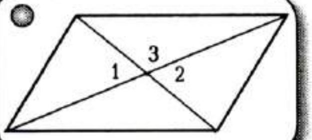
AK — 3 части, KO — 2 части, AO — 5 частей. На 1 часть приходится $15 : 5 = 3$ (см).

$KO = 2 \cdot 3 = 6$ (см), $OB = AO = 15$ см, $KB = KO + OB = 6 + 15 = 21$ (см).

Ответ: 21 см.

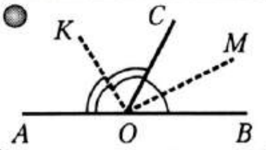
Примечание. Второй способ записи решения: $AK = 3x$ см, $KO = 2x$ см, $AB = 10x$ см. По условию $10x = 30$, тогда $x = 3$.
$KB = KO + OB = 7x = 21$ см.

Задача 4. *Дано*: $\angle 1 + \angle 2 = 140°$. *Найти*: $\angle 3$.



Решение. $\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные; $\angle 1 = 140° : 2 = 70°$.
$\angle 1 + \angle 3 = 180°$ как смежные; $\angle 3 = 180° - 70° = 110°$.
Ответ: 110°.

Задача 5. Докажите, что биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны.
Дано: OK — биссектриса $\angle AOC$, OM — биссектриса $\angle BOC$.
Доказать: $\angle KOM = 90°$.



Доказательство. (Идея доказательства: сумма смежных углов равна 180°, тогда сумма половинок двух смежных углов $180° : 2 = 90°$.)

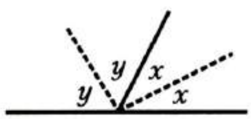
$\angle AOC + \angle BOC = 180°$ как смежные;

$\angle COM = \frac{1}{2}\angle COB$ по определению биссектрисы;

$\angle COK = \frac{1}{2}\angle COA$ по определению биссектрисы;

$\angle COM + \angle COK = \frac{1}{2}(\angle COA + \angle COB) = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$.

Примечание. Мы показали возможное оформление задачи на контрольной работе. При решении задач на уроке и дома (по согласованию с учителем) можно делать менее строгие записи. Это значительно экономит время. Например, возможно такое «рабочее» оформление решения:



$2x + 2y = 180°$ (свойство смежных углов);
$x + y = 90°$.

Запомните!

1 Свойство смежных углов.
Сумма смежных углов равна 180°.

2 Свойство вертикальных углов.
Вертикальные углы равны.

3 Теорема о существовании и единственности восставленного перпендикуляра.
Из точки на прямой всегда можно восставить и единственный перпендикуляр к данной прямой.

4 Теорема о существовании и единственности опущенного перпендикуляра.
Из точки вне прямой всегда можно опустить и единственный перпендикуляр на данную прямую.

5 Теорема о двух прямых, перпендикулярных третьей.
Две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны между собой.

Дополнительный материал

Простые вопросы

1. Сколько смежных углов имеет данный угол?
2. Сколько вертикальных углов имеет данный угол?
3. Если данный угол острый, то каким будет угол, смежный с ним? А вертикальный ему угол?
4. Если данный угол тупой, то каким будет угол, смежный с ним? А вертикальный ему угол?
5. Могут ли быть смежные углы равны?
6. Если данный угол увеличить, то как изменится угол, смежный с ним? А вертикальный ему угол?
7. Если данный угол уменьшить, то как изменится смежный с ним угол? А вертикальный ему угол?
8. Если данный угол увеличить на 20°, то как изменится смежный с ним угол? А вертикальный ему угол?
9. Если данный угол прямой, то каким будет смежный с ним угол? А вертикальный ему угол?
10. Если данный угол увеличить в 2 раза, то как изменится смежный с ним угол? А вертикальный ему угол?
11. Если данный угол тупой, то какой угол больше: смежный с данным или вертикальный ему?
12. Даны две пересекающиеся прямые. Сколько пар смежных углов они образуют? сколько пар вертикальных?
13. На прямой отметили точку. Сколько лучей можно указать?
14. На прямой отметили 10 точек. Сколько лучей образовалось?
15. Прямую разделили на части в десяти точках. Сколько и каких фигур образовалось?
16. На прямой отметили 3 точки. Сколько отрезков образовалось при этом? А если отметить 4 точки?
17. Не отрывая карандаша от бумаги, нарисуйте пятью прямолинейными отрезками звездочку. Сколько пар смежных углов при этом образовалось на рисунке? А сколько пар вертикальных?
18. Какие заглавные буквы русского алфавита можно изобразить ломаными линиями. Какого вида эти ломаные?
19. Сколько вы можете предложить неправильных вариантов написания слова «биссектриса»?
20. Как переводится слово «градус»?
21. Сколько теорем в данной теме?

Непростые вопросы

22.* Сколько условий требуется, чтобы углы были по определению смежными?
23.* Как звучит теорема о свойстве смежных углов в форме «Если ..., то ...»? Что в теореме дано, а что нужно доказать?
24.* Как звучит утверждение, обратное теореме о свойстве смежных углов («Если ..., то ...»)? Верно ли это утверждение?
25.* Если у двух углов одна сторона общая и их сумма равна 180°, то обязательно ли они смежные?
26.* Если у двух углов две стороны являются противоположными лучами и их сумма равна 180°, то обязательно ли они смежные?
27.* Как звучит теорема о свойстве вертикальных углов в форме «Если ..., то ...»? Что в теореме дано, а что нужно доказать?

28.* Как звучит утверждение, обратное теореме о свойстве вертикальных углов («Если ..., то ...»)? Верно ли это утверждение?

Примечание. Если хотя бы в одном случае утверждение неверно, то в математике такое утверждение считается неверным. В математике не бывает одно и то же утверждение иногда верным, а иногда неверным.

29.* Если сторона одного угла является противоположным лучом к стороне другого и углы равны, то обязательно ли они вертикальные?

30.* Если на прямой отметить 10 точек, то сколько отрезков при этом образуется? А если 100 точек? А если n точек?

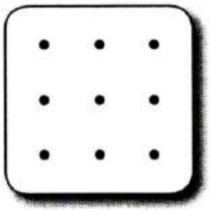
31.* Если внутри угла из его вершины провести 5 лучей, то сколько углов при этом образуется? А если 100 лучей? А если n лучей?

32.* На плоскости дано 10 точек, из них никакие три не лежат на одной прямой. Сколько существует отрезков с концами в данных точках?

33.* На плоскости дано 10 прямых. Из них никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Сколько существует точек пересечения этих прямых?

34.* Изобразите шестизвенную замкнутую ломаную, каждое звено которой имеет только одну точку пересечения с каким-то другим звеном.

35.* Не отрывая карандаша от бумаги, соедините четырьмя прямолинейными отрезками изображенные 9 точек.



Ответы на простые и непростые вопросы

1. Два.
2. Один.
3. Смежный — тупой. Вертикальный — острый.
4. Смежный — острый. Вертикальный — тупой.
5. Да, если они по 90°.
6. Смежный с ним угол уменьшится, вертикальный — увеличится.
7. Смежный с ним угол увеличится, вертикальный — уменьшится.
8. Смежный с ним угол уменьшится на 20°, вертикальный — увеличится на 20°.
9. Смежный с ним угол — прямой, вертикальный ему — прямой.
10. Смежный угол уменьшится, но не в 2 раза (были, например, углы 10° и 170°, стали 20° и 160°). Вертикальный угол увеличится в 2 раза.
11. Смежный угол меньше, чем вертикальный, так как смежный будет острым, а вертикальный — тупым.
12. Четыре пары смежных углов и две пары вертикальных.
13. Два противоположных луча.
14. Каждая из 10 точек будет началом двух противоположных лучей. Таким образом, всего образуется 20 лучей.
15. 9 отрезков и 2 луча.
16. Если 3 точки, то 3 отрезка. Если 4 точки, то 6 отрезков.
17. Пять точек пресечения дадут по 4 пары смежных углов — всего 20 пар смежных. Пять точек пересечения дадут по 2 пары вертикальных углов — всего 10 пар вертикальных.
18. Б, Г, И, Л, М, О, П, Р, С, Ь, Ъ. Из них: Г, И, Л, П, С — простые незамкнутые, Б, Р, Ь, Ъ — непростые незамкнутые, О — простая замкнутая ломаная.
19. Например:

биСектриса	биссектриСCа	бЕСектриСCа
биСектриСCа	бЕссектриса	
бЕСектриса	бЕссектриСCа	

20. «Градус» переводится с латинского как «шаг», «ступень».
21. 3.

22.* Два: 1) одна сторона общая; 2) две другие — противоположные лучи.

23.* «Если даны два смежных угла, то их сумма равна 180°». Дано: два смежных угла. Нужно доказать: их сумма равна 180°.

24.* «Если сумма двух углов 180°, то эти углы смежные». Это утверждение неверно. Например, любые два угла квадрата в сумме дают 180°, но они не являются смежными.

25.* Нет.

26.* Нет.

27.* «Если углы вертикальные, то эти углы равны». Дано: два вертикальных угла. Нужно доказать: эти углы равны.

28.* «Если два угла равны, то они вертикальные». Это утверждение неверно. Два любых угла прямоугольника равны, но они не являются вертикальными.

29.* Нет.

30.* Ответ: 45. Из них 9 одинарных, 8 двойных, 7 тройных, 6 четверных, 5 пятерных, 4 шестерных, 3 семерных, 2 восьмерных и 1 данный отрезок, т. е. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$. Можно рассуждать иначе: каждая из 10 точек образует с оставшимися 9 точками девять отрезков. Всего таких образований $10 \cdot 9 = 90$. Самих отрезков в 2 раза меньше, т. е. $90 : 2 = 45$ (2 образования — относительно одного конца, а затем относительно второго конца отрезка — дают 1 отрезок).

Если точек 100, то количество отрезков составит $\frac{100 \cdot 99}{2} = 4950$. Если точек n, то образуется $\frac{n(n-1)}{2}$ отрезков.

31.* Ответ: 21. Из них 6 одинарных, 5 двойных, 4 тройных, 3 пятерных, 2 шестерных и 1 данный угол. Можно рассуждать иначе: каждый из 7 лучей образует с оставшимися 6 лучами угол. Всего таких образований $7 \cdot 6 = 42$. Самих углов в два раза меньше: $42 : 2 = 21$.

Если внутри провести 100 лучей, то углов будет $\frac{102 \cdot 101}{2} = 5151$.

А если n лучей, то всего образуется $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ углов.

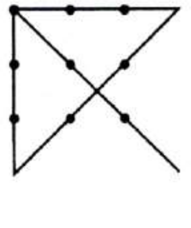
Примечание. Мы не считали углы, большие 180°.

32.* Каждая из 10 точек образует с оставшимися 9 точками отрезок. Всего таких образований $10 \cdot 9 = 90$. Самих отрезков в 2 раза меньше, т. е. $90 : 2 = 45$.

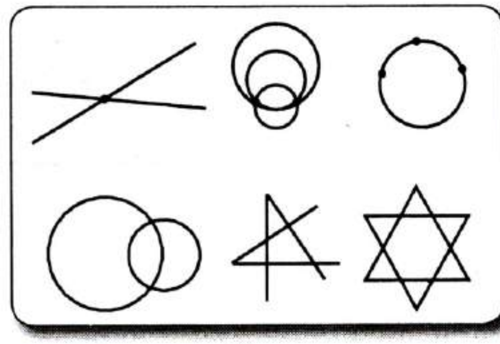
33.* Любая из 10 прямых пересекает каждую из 9 остальных в некоторой точке. Всего для данной прямой 9 точек пересечения. И для каждой из 10 прямых будет 9 точек пересечения с оставшимися 9 прямыми. Получаем $10 \cdot 9 = 90$ точек пересечений. Но при этом каждая точка засчитана дважды: относительно одной, а затем относительно второй прямой. Поэтому всего точек пересечения в 2 раза меньше, т. е. $90 : 2 = 45$.

34.*

35.*



Для тех, кому нравится математика



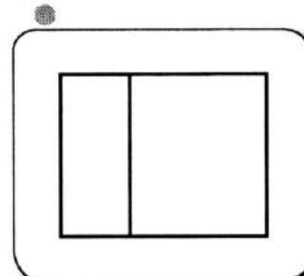
Вы знаете, что через две точки всегда можно провести прямую? Всегда ли можно провести одну прямую через три точки? А сколько прямых можно провести через одну точку?

Сколько окружностей можно провести через две точки, через три точки? (В 5-й главе вы узнаете, как это сделать при помощи циркуля и линейки.)

В скольких точках могут пересекаться две окружности, два угла, два треугольника? На последнем рисунке изображена звезда Давида — прочитайте о ней в Интернете.

Почему нельзя сказать, что «прямые называются *параллельными*, если они не пересекаются»? Но ведь и скрещивающиеся прямые не пересекаются. Напомним, что требование ЛЕЖАТ В ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ обязательно! Покажите в классе на пересечении стен и потолка параллельные прямые и скрещивающиеся прямые.

Что вначале следует определить: биссектрису или равные углы? Равные углы! Ведь биссектриса делит угол на два РАВНЫХ угла, и мы должны знать, какие углы называются равными. Что вначале следует определить: диаметр или хорду? Хорду! Так как диаметр — это хорда, и мы должны знать, что это такое. Как видите, геометрия складывается из очень понятных правил.



Аксиома измерения отрезков (если на отрезке взять точку, то она разобьет его на два отрезка, сумма длин которых равна длине данного отрезка) кажется лишней. И так ведь ясно! Что же это за свойство? Не спешите. Разобьем прямоугольник на два прямоугольника. Скажите, сумма площадей полученных прямоугольников будет равна площади данного прямоугольника? Да! А будет ли сумма периметров полученных прямоугольников равна периметру большого прямоугольника? Нет! Как видите, сумма каких-то характеристик частей в одном случае равна характеристике самой фигуры, а в другом — нет. Поэтому специально указывают, в каких случаях это так: если точка лежит на отрезке, то сумма длин полученных отрезков равна длине данного отрезка; если луч проходит внутри угла, то сумма градусных мер полученных углов равна градусной мере данного угла.

Приведем еще первые четыре аксиомы измерения отрезков.

1. Каждый отрезок имеет длину, большую нуля.
2. Если отрезки равны, то они равны по длине.
3. Если отрезки равны по длине, то они равны.
4. Каждому положительному числу соответствует длина некоторого отрезка.

Но при решении задач употребляется только пятая аксиома (о разбиении отрезка точкой), которую вы уже знаете. Третья аксиома также важна. Для длин отрезков это утверждение справедливо, а для площадей фигур — нет. Неверно утверждение, что если площади фигур равны, то равны и сами фигуры. Например, неравные прямоугольники с измерениями 4×6 см и 3×8 см равны по площади.

Кстати, вы помните, как называется угол, который больше развернутого, но меньше полного угла? Он называется «сверхтупой». Позже вы узнаете, что бывают углы, которые больше полного угла.

А теперь ответьте на вопрос: «На сколько градусов поворачивается солдат по команде "Кругом"?»

Если ответили правильно, тогда «Кругом!» и «Бегом заниматься спортом!».

с/р

Задачи по теме «Прямая и ее части. Окружность. Угол»

I в　　　　II в

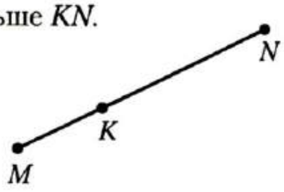
1 *Дано*: $AB = 20$ см, AC на 6 см больше BC.
Найти: BC.

Ответ:

2 *Дано*: $AB = 32$ см, AK на 10 см меньше KB.
Найти: KB.

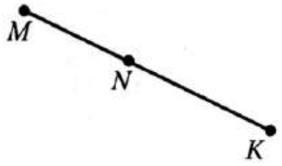
Ответ:

3 *Дано*: $MN = 36$ см, MK в 2 раза меньше KN.
Найти: KN.



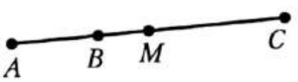
Ответ:

4 *Дано*: $MK = 48$ см, MN равен $\frac{3}{5}$ NK.
Найти: MN.



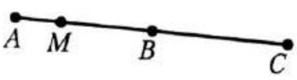
Ответ:

5 *Дано*: $BM = 8$ см, M — середина AC; $AB : BM = 2 : 1$.
Найти: AC.



Ответ:

6 *Дано*: $MB = 24$ см, B — середина AC; $AM : MB = 1 : 3$.
Найти: AC.

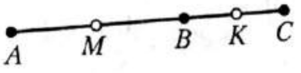


Ответ:

7 *Дано*: $AB = 32$ см, M — середина AC, K — середина BC.
Найти: MK.

Ответ:

8 *Дано*: M — середина AB, K — середина BC; $MK = 26$ см.
Найти: AC.

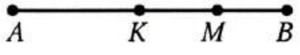


Ответ:

9 *Дано*: $AB = 50$ см, $AC = 42$ см, $DB = 48$ см.
Найти: DC.

Ответ:

10 *Дано*: $KM = 10$ см, $AM = 32$ см, $KB = 28$ см.
Найти: AB.



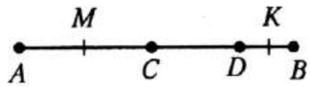
Ответ:

I в   II в

11*

Дано: $AC = CB$, $2CD = 3DB$,
$CD = 12$ см,
M, K — середины AC и DB.

Найти: MK.

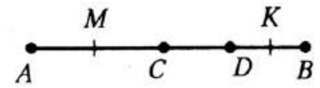


Ответ:

12*

Дано: $AC = CB$, $5CD = 4DB$,
$DB = 20$ см,
M, K — середины AC и DB.

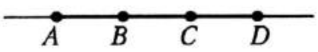
Найти: MK.



Ответ:

13*

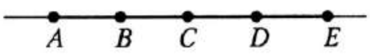
На прямой отмечено 4 точки. Сколько отрезков образуется при этом на рисунке?



Ответ:

14*

На прямой отмечено 5 точек. Сколько отрезков образуется при этом на рисунке?



Ответ:

15*

На отрезке AB взята точка M. Докажите, что расстояние между серединами отрезков AM и MB равно половине отрезка AB.

Закончите рисунок.

16*

На отрезке CD взята точка K. Докажите, что длина отрезка CD в 2 раза больше расстояния между серединами отрезков CK и KD.

Закончите рисунок.

17*

На прямой отложены отрезки $RS = 2{,}6$ см и $ST = \frac{17}{6}$ см. Найдите длину отрезка TR, если точка R лежит между точками T и S.

Сделайте рисунок в тетради.

Ответ:

18*

Отрезки $MK = 3{,}2$ см и $KN = \frac{32}{9}$ см лежат на прямой. Найдите длину отрезка NM, если точка M лежит между точками K и N.

Сделайте рисунок в тетради.

Ответ:

19*

Точка K_1 — середина отрезка AB. Точка K_2 — середина отрезка K_1B. Точка K_3 — середина отрезка K_2B. Точка K_4 — середина отрезка K_3B. Длина отрезка K_2K_4 равна 6 см. Найдите AB.

Сделайте рисунок в тетради.

Ответ:

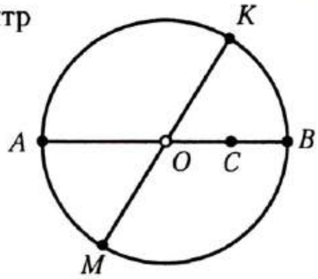
20*

Точка P_1 — середина отрезка CD. Точка P_2 — середина отрезка P_1D. Точка P_3 — середина отрезка P_2D. Точка P_4 — середина отрезка P_3D. Длина отрезка P_1P_4 равна 21 см. Найдите AB.

Сделайте рисунок в тетради.

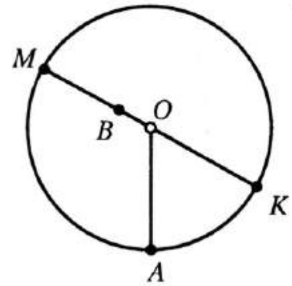
Ответ:

21 *Дано*: O — центр окружности, $MK = 12$ см, $AO = 2BC$.
Найти: AC.



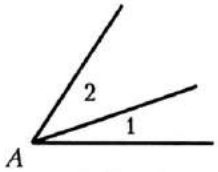
Ответ:

22 *Дано*: O — центр окружности, $BK = 24$ см, $OB = \frac{1}{3}OA$.
Найти: MK.



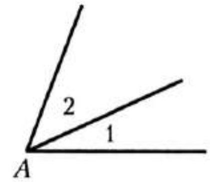
Ответ:

23 *Дано*: $\angle A = 60°$.
Углы 1 и 2 относятся как 2 : 3.
Найти: $\angle 1$, $\angle 2$.



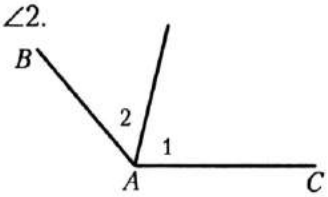
Ответ:

24 *Дано*: $\angle A = 80°$.
Углы 1 и 2 относятся как 3 : 5.
Найти: $\angle 1$, $\angle 2$.



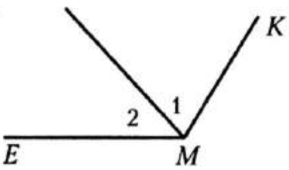
Ответ:

25 *Дано*: $\angle BAC = 140°$,
$\angle 1$ на $30°$ больше $\angle 2$.
Найти: $\angle 1$, $\angle 2$.



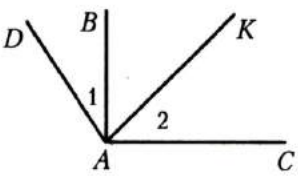
Ответ:

26 *Дано*: $\angle EMK = 120°$,
$\angle 2$ на $20°$ меньше $\angle 1$.
Найти: $\angle 1$, $\angle 2$.



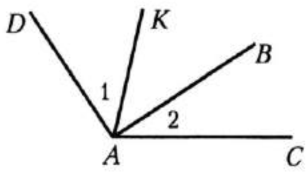
Ответ:

27 *Дано*: $BA \perp AC$, $\angle 1 = \frac{3}{5}\angle 2$,
AK — биссектриса $\angle BAC$.
Найти: $\angle DAC$.



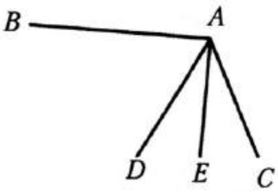
Ответ:

28 *Дано*: $DA \perp AB$, $\angle 2 = \frac{7}{9}\angle 1$,
AK — биссектриса $\angle DAB$.
Найти: $\angle DAC$.



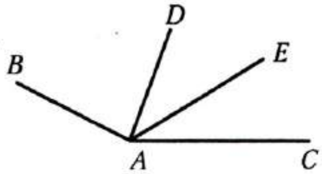
Ответ:

29 *Дано*: AD — биссектриса $\angle BAC$,
AE — биссектриса $\angle DAC$,
$\angle BAC = 120°$.
Найти: $\angle BAE$.



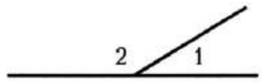
Ответ:

30 *Дано*: AD — биссектриса $\angle BAC$,
AE — биссектриса $\angle DAC$,
$\angle BAE = 120°$.
Найти: $\angle BAC$.



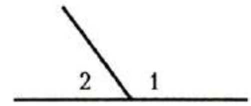
Ответ:

31 *Дано*: $\angle 1$ составляет $\frac{1}{3}$ часть прямого угла.
Найти: $\angle 2$.



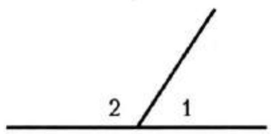
Ответ:

32 *Дано*: $\angle 1$ составляет 70 % развернутого угла.
Найти: $\angle 2$.



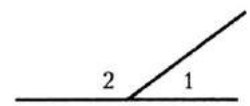
Ответ:

33 *Дано*: углы 1 и 2 относятся как 4 : 5.
Найти: $\angle 1$.



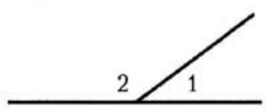
Ответ:

34 *Дано*: углы 1 и 2 относятся как 2 : 7.
Найти: $\angle 2$.



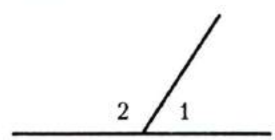
Ответ:

35 *Дано*: $\angle 1$ на 60° меньше $\angle 2$.
Найти: $\angle 1$.



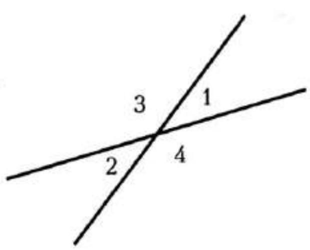
Ответ:

36 *Дано*: $\angle 2$ на 40° больше $\angle 1$.
Найти: $\angle 2$.



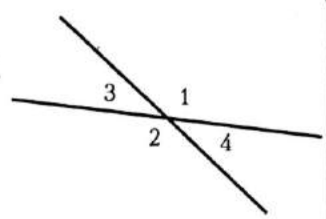
Ответ:

37 *Дано*: $\angle 1 = 35°$.
Найти: $\angle 3 + \angle 4$.



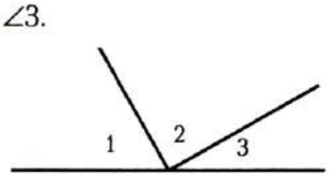
Ответ:

38 *Дано*: $\angle 3 = 40°$.
Найти: $\angle 1 - \angle 4$.



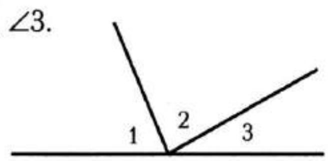
Ответ:

39 *Дано*: $\angle 1 : \angle 2 : \angle 3 = 5 : 9 : 4$.
Найти: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$.



Ответ:

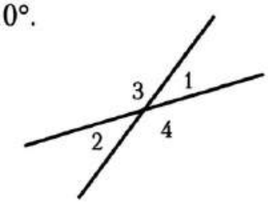
40 *Дано*: $\angle 1 : \angle 2 : \angle 3 = 7 : 8 : 3$.
Найти: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$.



Ответ:

41 *Дано*: $\angle 3 - \angle 1 = 110°$.

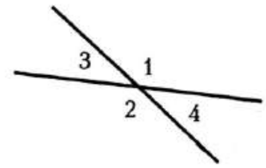
Найти: $\angle 4$.



Ответ:

42 *Дано*: $\angle 1 + \angle 2 = 240°$.

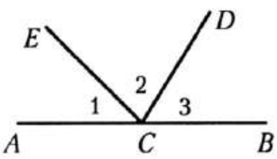
Найти: $\angle 3$.



Ответ:

43 *Дано*: $\angle 1 + \angle 2 = 110°$,
CD — биссектриса $\angle ECB$.

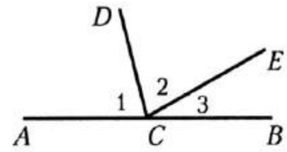
Найти: $\angle 1$.



Ответ:

44 *Дано*: CD — биссектриса $\angle ACE$,
$\angle 1 + \angle 3 = 105°$.

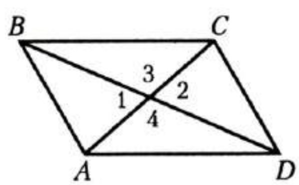
Найти: $\angle 3$.



Ответ:

45 *Дано*: $\angle 1 = \frac{7}{8} \angle 3$.

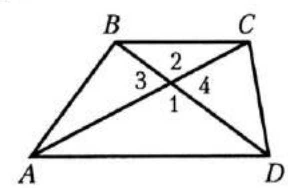
Найти: $\angle 4$.



Ответ:

46 *Дано*: $\angle 3 = 0{,}8\ \angle 2$.

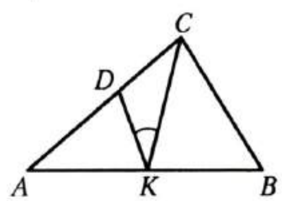
Найти: $\angle 1$.



Ответ:

47 *Дано*: $\angle AKC = 100°$, $\angle BKD = 110°$.

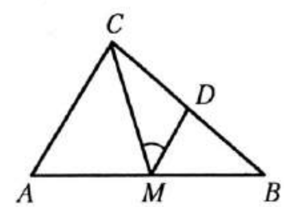
Найти: $\angle DKC$.



Ответ:

48 *Дано*: $\angle AMD = 115°$, $\angle BMC = 110°$.

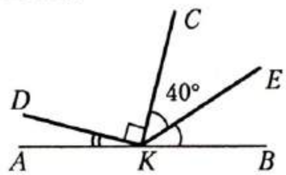
Найти: $\angle CMD$.



Ответ:

49 *Дано*: KE — биссектриса $\angle CKB$,
$\angle CKE = 40°$, $DK \perp CK$.

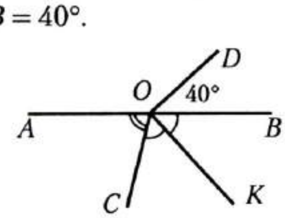
Найти: $\angle AKD$.



Ответ:

50 *Дано*: OK — биссектриса $\angle BOC$,
$OD \perp OK$, $\angle DOB = 40°$.

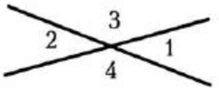
Найти: $\angle AOC$.



Ответ:

51* *Дано*: $\angle 1$ в 4 раза меньше суммы $\angle 2 + \angle 3 + \angle 4$.

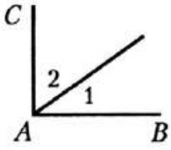
Найти: $\angle 3$.



Ответ:

52* *Дано*: $\angle CAB = 90°$, $\frac{1}{4}\angle 1 = \frac{1}{5}\angle 2$.

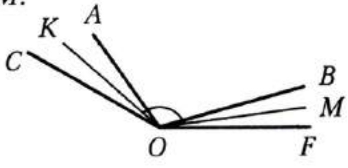
Найти: $\angle 1$.



Ответ:

53* *Дано*: $\angle COF = 160°$, $\angle AOB = 100°$; OK и OM — биссектрисы $\angle COA$ и $\angle BOF$.

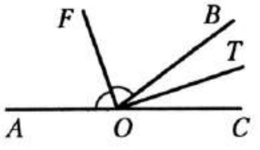
Найти: $\angle KOM$.



Ответ:

54* *Дано*: OF — биссектриса $\angle AOB$, $OT \perp OF$, $\angle TOC = 20°$.

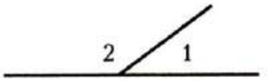
Найти: $\angle BOC$.



Ответ:

55* $\angle 1 = 30°$. Найдите, чему равен угол между биссектрисами данных смежных углов.

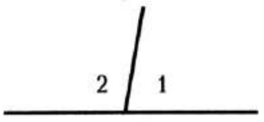
Закончите рисунок.



Ответ:

56* $\angle 1 = 80°$. Найдите, чему равен угол между биссектрисами данных смежных углов.

Закончите рисунок.



Ответ:

57* Докажите, что биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны.

Сделайте рисунок в тетради.

58* Докажите, что биссектрисы вертикальных углов являются противоположными лучами.

Сделайте рисунок в тетради.

59* Из точки на плоскости проведены три луча. Они образуют три угла, меньших 180°, которые относятся как 2 : 3 : 4. Найдите величины этих углов.

Сделайте рисунок в тетради.

Ответ:

60* Из точки на плоскости проведены три луча. Они образуют три угла, меньших 180°, которые относятся как 3 : 4 : 5. Найдите величины этих углов.

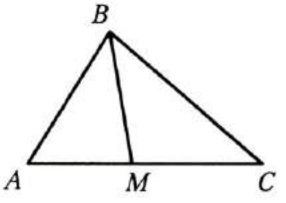
Сделайте рисунок в тетради.

Ответ:

Контрольная работа

Вариант 1

1 Запишите все отрезки, изображенные на рисунке.

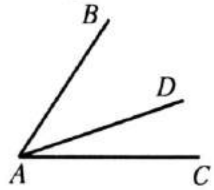


Ответ:

2 Дан отрезок $AB = 36$ см. Точка K — середина AB. Точка M — середина KB. Найдите длину отрезка MK.

Ответ:

3 Угол BAC равен 70°. Угол BAD больше угла DAC на 20°. Найдите угол DAC.



Ответ:

4 Смежные углы ABC и DBC относятся как $2:7$, BK — биссектриса угла DBC. Найдите угол ABK.

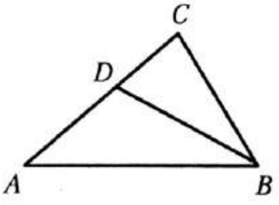
Ответ:

5 Два диаметра окружности пересекаются, образуя четыре угла. Сумма двух больших углов равна 200°. Найдите разность большего и меньшего углов.

Ответ:

Вариант 2

1 Запишите все отрезки, изображенные на рисунке.

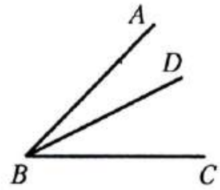


Ответ:

2 Дан отрезок $MN = 48$ см. Точка A — середина MN. Точка B — середина MA. Найдите длину отрезка AN.

Ответ:

3 Угол ABC равен 54°. Угол ABD меньше угла DBC на 10°. Найдите угол DBC.



Ответ:

4 Смежные углы BOA и COA относятся как $4:5$, OM — биссектриса угла AOC. Найдите угол BOM.

Ответ:

5 Два диаметра окружности пересекаются, образуя четыре угла. Сумма двух меньших углов равна 80°. Найдите разность большего и меньшего углов.

Ответ:

Тема 2
Треугольники

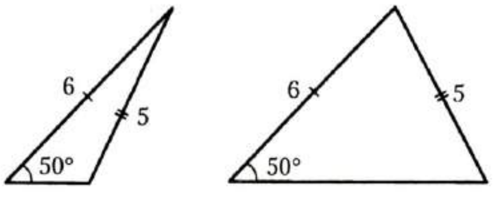
Клетка геометрии — треугольник. Он так же неисчерпаем, как и Вселенная.

И. Шарыгин

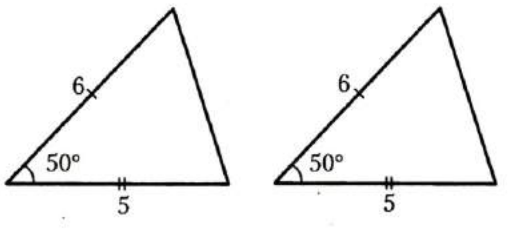
Треугольник — одна из самых замечательных и самых важных фигур в геометрии. Все знают, как он выглядит. Но что же такое треугольник? Допустим, что треугольник — это замкнутая ломаная из трех звеньев. Можно представить себе треугольник, сделанный из проволоки. Но известно, что у него есть площадь. Поэтому треугольник — это трехзвенная замкнутая ломаная вместе с частью плоскости, которую она ограничивает. Представьте себе треугольник, сделанный из фанеры или вырезанный из картона.

Очень важным моментом при решении геометрических задач является нахождение равных треугольников. Очевидно, что если у двух треугольников все стороны и углы окажутся соответственно равными, то и треугольники будут равны. На практике равные треугольники определяют, прикладывая их друг к другу. Если треугольники совпадут при наложении, значит, они равны. Этот способ и позволяет дать определение равных треугольников.

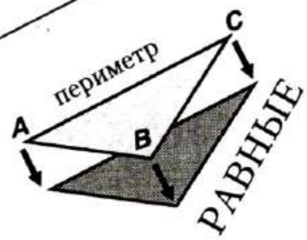
Но вот, допустим, у каждого из двух треугольников есть две стороны, которые равны 5 см и 6 см, и какой-то из углов равен 50°. Можно ли утверждать, что треугольники равны? Оказывается, нет. На рисунке вы видите два треугольника с указанными размерами. Они не равны.



При каких же минимальных условиях треугольники будут равны? Существуют по крайней мере три признака равенства треугольников, когда по равенству некоторых сторон и углов можно абсолютно точно сказать, что они равны. Например, если бы угол 50° был образован сторонами длиной 5 см и 6 см, то треугольники были бы равны между собой.

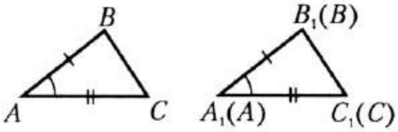


Треугольники

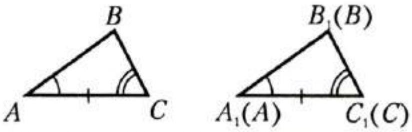


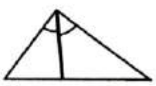
В равных треугольниках
против равных сторон ...

1 ПРИЗНАК (по двум ст. и углу между ними)

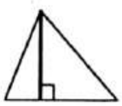


2 ПРИЗНАК (по ст. и двум прилеж. к ней углам)

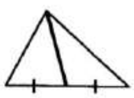




биссектриса

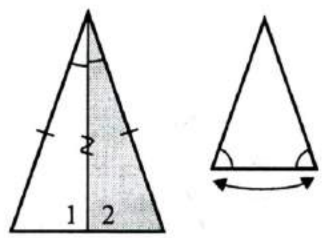


высота



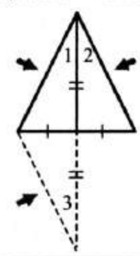
медиана

РАВНОБЕДРЕННЫЙ



ПРИЗНАКИ

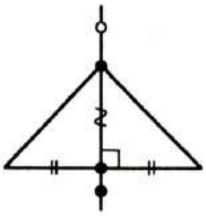
Если два угла равны ...
Если высота — медиана, то ...
Если высота — биссектриса, то ...
Если медиана — биссектриса, то ...



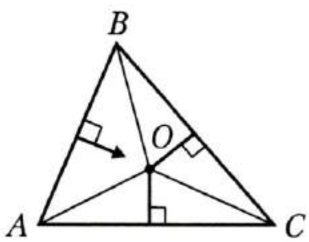
СВОЙСТВА

1. *Углы при основании равны*
2. *Биссектриса является ...*

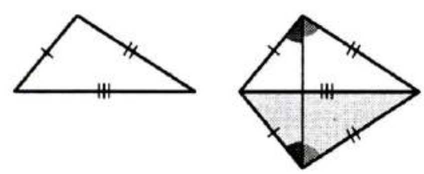
СЕРЕДИННЫЙ
ПЕРПЕНДИКУЛЯР



ГМТ



3 ПРИЗНАК (по трем сторонам)



1-я замечательная точка

O равноудалена от *A* и *C*
O равноудалена от *B* и *C*
значит, *O* равноудалена от *A* и *B*!

1. Треугольник.
2. Периметр треугольника.
3. Равные треугольники.
4. **Свойство равных треугольников.**
5. 1-й признак равенства треугольников.
6. 2-й признак равенства треугольников.
7. Медиана, биссектриса, высота.
8. Равнобедренный треугольник.
9. Свойство углов равнобедренного треугольника.
10. Свойство биссектрисы равнобедренного треугольника.
11. **Признак равнобедренного треугольника (обратная теорема).**
12. 2-й признак равнобедренного треугольника.
13. 3-й признак равнобедренного треугольника.
14. 4-й признак равнобедренного треугольника.
15. Равносторонний треугольник.
16. 3-й признак равенства треугольников.
17. Серединный перпендикуляр.
18. **Свойство серединного перпендикуляра.**
19. ГМТ.
20. 1-я замечательная точка.

№ 2

Рассказ по опорному конспекту

Треугольник — это трехзвенная замкнутая ломаная вместе с частью плоскости, которую она ограничивает. Сумма длин всех трех сторон треугольника называется *периметром*. Треугольники называются *равными*, если совпадают при наложении. Если равные треугольники наложить так, что они совпадут, то окажется, что *в равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы, а против равных углов лежат равные стороны.*

Первый признак равенства треугольников. *Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.* Действительно, если наложить треугольники друг на друга равными углами, то совпадут и равные стороны. Значит, совпадут и оставшиеся две вершины.

Второй признак равенства треугольников. *Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Если наложить треугольники друг на друга равными сторонами, то совпадут углы, прилежащие к этим сторонам. Значит, совпадут и третьи вершины.

Перпендикуляром, опущенным из данной точки на данную прямую, называется *отрезок* прямой, перпендикулярной данной, проходящей через данную точку, с концами в данной точке и в точке пересечения с данной прямой. Точка пересечения называется *основанием* перпендикуляра.

Высотой треугольника называется перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на противоположную сторону или ее продолжение.

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника, заключенный между вершиной и точкой пересечения биссектрисы угла и стороны треугольника.

Треугольник, у которого две стороны равны, называется *равнобедренным*. Равные стороны называются *боковыми сторонами*, третья сторона — *основанием*, вершина напротив этой стороны — *вершиной равнобедренного треугольника*. Причем названия «основание», «боковые стороны» и «вершина» равнобедренного треугольника сохраняются, как бы треугольник ни был расположен.

Свойства равнобедренного треугольника. 1. *В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.* **2.** *Биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная из вершины к основанию, является высотой и медианой.*

Признак равнобедренного треугольника (по двум углам). *Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.*

Есть еще три признака равнобедренного треугольника. Треугольник является равнобедренным, если:

высота треугольника является и медианой;

высота треугольника является и биссектрисой;

медиана треугольника является и биссектрисой (доказывается продлением медианы на ее длину).

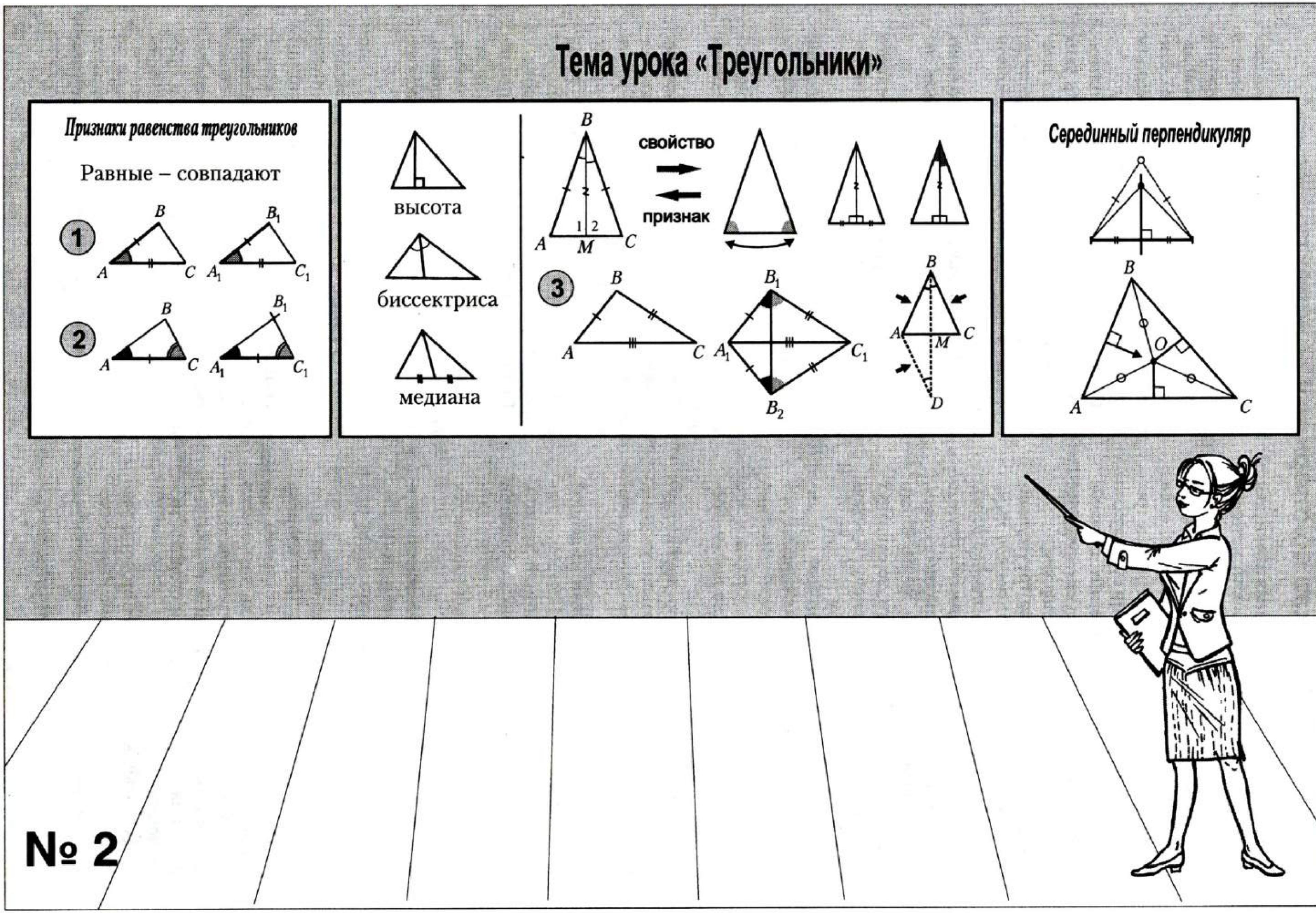
Третий признак равенства треугольников. *Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, перпендикулярная этому отрезку и проходящая через его середину.

Свойство точек серединного перпендикуляра. *Любая точка серединного перпендикуляра равноудалена от концов отрезка. Если точка равноудалена от концов отрезка, то она лежит на серединном перпендикуляре к этому отрезку.*

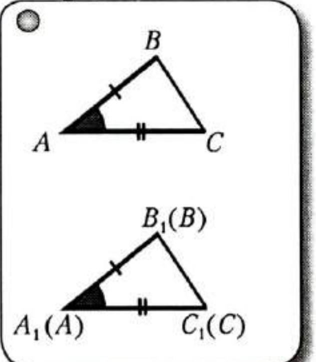
Геометрическое место точек (ГМТ) — это множество всех точек плоскости, обладающих общим свойством. Например, все точки серединного перпендикуляра равноудалены от концов отрезка, и все точки плоскости, равноудаленные от концов отрезка, лежат на серединном перпендикуляре.

Первая замечательная точка. *Все три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекаются в одной точке — центре описанной окружности.*


Тема урока «Треугольники»
Признаки равенства треугольников
Равные – совпадают
1
2
высота
биссектриса
медиана
свойство
признак
3
Серединный перпендикуляр
№ 2

Подробные доказательства теорем

Первый признак равенства треугольников. *Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.*

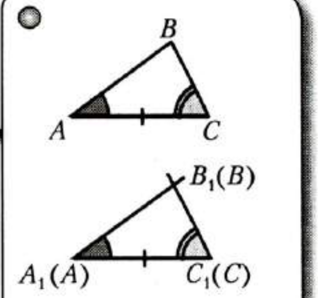


Дано: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$.

Доказать: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство. (Принцип наложения.) Наложим треугольники друг на друга так, чтобы $\angle A$ совпал с $\angle A_1$. Так как отрезки AB и A_1B_1 равны, то они совпадут при наложении. Тогда точка B совпадет с точкой B_1. Так как отрезки AC и A_1C_1 равны, то они совпадут при наложении. Тогда точка C совпадет с точкой C_1. Так как через две точки можно провести единственную прямую, то совпадут и отрезки BC и B_1C_1. Треугольники совпали. Значит, они равны.

Второй признак равенства треугольников. *Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

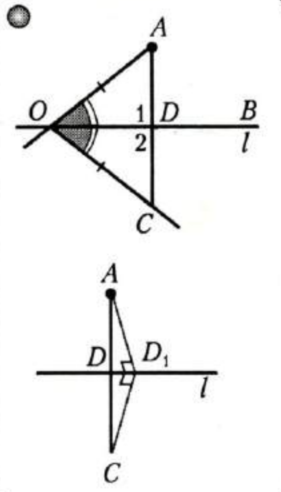


Дано: $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Доказать: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство. (Принцип наложения.) Наложим треугольники друг на друга так, чтобы сторона AC совпала со стороной A_1C_1. Так как $\angle A$ равен $\angle A_1$, то они совпадут при наложении. Так как $\angle C$ равен $\angle C_1$, то они совпадут при наложении. Тогда совпадут лучи AB и A_1B_1, CB и C_1B_1 и совпадут вершины B и B_1. Треугольники совпали. Значит, они равны.

***Теорема о единственности перпендикуляра.** *Из любой точки, не лежащей на данной прямой, можно опустить перпендикуляр на данную прямую, и только один.*

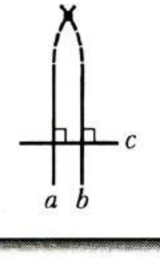


Доказательство.

1) Докажем существование такого перпендикуляра. Из данной точки A проведем луч AO под произвольным углом AOB к данной прямой l. Отложим в нижней полуплоскости $\angle BOC$, равный $\angle AOB$. Отложим отрезок OC, равный отрезку AO. Соединим точки A и C. Из равенства треугольников по 1-му признаку следует равенство углов 1 и 2. Так как они смежные, то каждый из них равен 90°. AD — искомый перпендикуляр.

2) Докажем единственность перпендикуляра. Если существует еще один перпендикуляр AD_1, опущенный из данной точки A на данную прямую l, то из равенства треугольников ADD_1 и CDD_1 по 1-му признаку следует, что $\angle CD_1D = \angle AD_1D = 90°$. Тогда $\angle AD_1C$ — развернутый, AD_1C — прямая. Но через две точки A и C не могут проходить две прямые. Значит, перпендикуляр AD — единственный.

***Теорема о двух прямых, перпендикулярных третьей (теорема о двух перпендикулярах).** *Две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны между собой.*

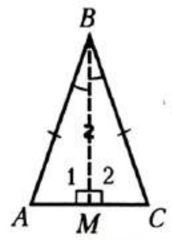


Доказательство. Если бы прямые a и b, перпендикулярные прямой c, пересекались в какой-то точке, то из точки на прямую были бы опущены два перпендикуляра, что невозможно.

Примечание. Можно говорить: *два перпендикуляра к одной прямой параллельны.* Доказательство не изменится.

* По учебному пособию «Геометрия 7» (автор В. В. Шлыков).

Свойства равнобедренного треугольника.



1. *В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.*

2. *Биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная из вершины к основанию, является высотой и медианой.*

Дано: $AB = BC$, BM — биссектриса.

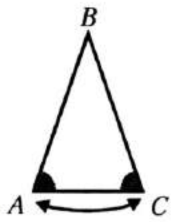
Доказать: $\angle A = \angle C$, $AM = MC$, BM — высота.

Доказательство. Проведем биссектрису BM из вершины равнобедренного треугольника. Получим два треугольника ABM и CBM, которые равны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда следует:

1) $\angle A = \angle C$ как соответственные в двух равных треугольниках;

2) $AM = MC$, поэтому BM — медиана; $\angle 1 = \angle 2$, а так как эти углы смежные, то $\angle 1 = \angle 2 = 90°$, поэтому BM — высота.

Признак равнобедренного треугольника (по двум углам).



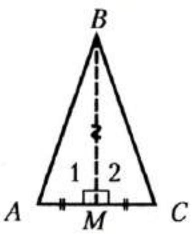
Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.

Дано: $\angle A = \angle C$.

Доказать: $AB = BC$.

Доказательство. Перевернем треугольник и наложим на данный так, чтобы совпали стороны AC и CA. При этом совпадут и углы A и C, так как они равны по условию. Треугольники совпадут. Но тогда совпадут и стороны AB и BC. (Данный и перевернутый треугольники равны по 2-му признаку.)

Признак равнобедренного треугольника (по высоте и медиане).



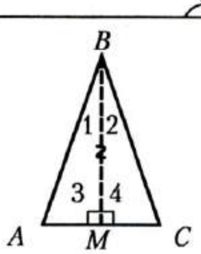
Если в треугольнике высота является и медианой, то он равнобедренный.

Дано: BM — высота и медиана.

Доказать: $AB = BC$.

Доказательство. $\Delta ABM = \Delta CBM$ по 1-му признаку (сторона BM — общая, $AM = MC$, так как BM — медиана; $\angle 1 = \angle 2$, так как BM — высота). Поэтому $AB = BC$.

Признак равнобедренного треугольника (по высоте и биссектрисе).



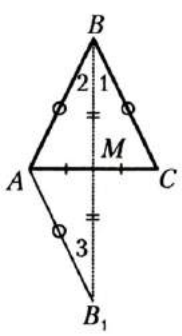
Если в треугольнике высота является и биссектрисой, то он равнобедренный.

Дано: BM — высота и биссектриса.

Доказать: $AB = BC$.

Доказательство. $\Delta ABM = \Delta CBM$ по 2-му признаку (сторона BM — общая, $\angle 1 = \angle 2$, так как BM — биссектриса; $\angle 3 = \angle 4$, так как BM — высота). Поэтому $AB = BC$.

Признак равнобедренного треугольника (по медиане и биссектрисе).



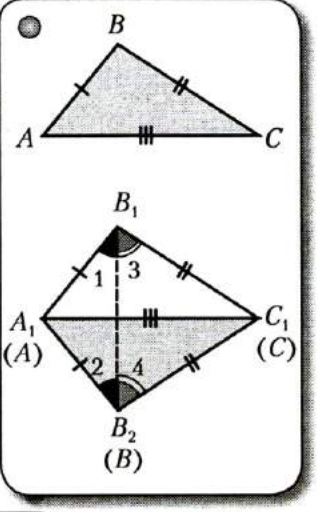
Если в треугольнике медиана является и биссектрисой, то он равнобедренный.

Дано: BM — медиана и биссектриса.

Доказать: $AB = BC$.

Доказательство. Продлим медиану BM на ее длину, т. е. $MB_1 = BM$. $\Delta AMB_1 = \Delta CMB$ по 1-му признаку ($AM = MC$, так как BM — медиана; $BM = MB_1$, $\angle BMC = \angle B_1MA$ как вертикальные). Отсюда $AB_1 = BC$ и $\angle 1 = \angle 3$. Но $\angle 1 = \angle 2$, так как BM — биссектриса. Поэтому $\angle 2 = \angle 3$. Значит, ΔABB_1 — равнобедренный. Поэтому $AB = AB_1$, откуда $AB = BC$.

Третий признак равенства треугольников. *Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

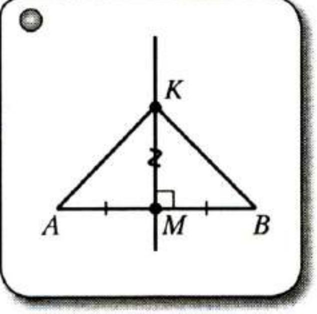


Дано: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$.
Доказать: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство. (Принцип приложения.) Перевернем ΔABC и приложим к $\Delta A_1B_1C_1$ так, чтобы совпали большие стороны AC и A_1C_1. Соединим точки B_1 и B_2. Получим два равнобедренных треугольника $\Delta B_1A_1B_2$ и $\Delta B_1C_1B_2$. У них $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ как углы при основании. Тогда $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$. Треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_1B_2C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

Значит, $\Delta A_1B_1C_1$ равен ΔABC.

Свойство точек серединного перпендикуляра. *Любая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов отрезка. Если точка равноудалена от концов отрезка, то она лежит на серединном перпендикуляре к нему.*

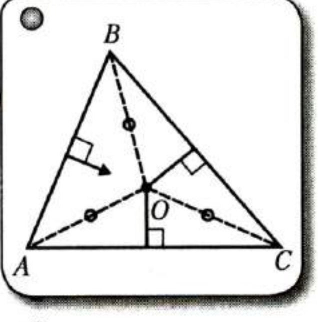


Доказательство.

1) Если точка K принадлежит серединному перпендикуляру, то из равенства ΔAMK и ΔBMK по 1-му признаку следует, что $AK = KB$.

2) Если $AK = KB$, то медиана KM равнобедренного ΔAKB будет и высотой. Точка K принадлежит серединному перпендикуляру KM.

Первая замечательная точка. *Все три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекаются в одной точке — центре описанной окружности.*



Доказательство. Проведем два серединных перпендикуляра: к сторонам AC и BC. Пусть O — точка их пересечения. По свойству серединного перпендикуляра $AO = CO$ и $BO = CO$. Тогда $AO = BO$, т. е. точка O равноудалена от концов отрезка AB. Значит, она лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB, т. е. третий серединный перпендикуляр проходит через точку O. O — центр окружности с радиусом OA, которая проходит через вершины треугольника.

Ответы на вопросы к теме

1. Треугольник — это трехзвенная замкнутая ломаная вместе с частью плоскости, которую она ограничивает.

2. Периметром называется сумма длин всех сторон треугольника.

3. Треугольники называются равными, если они совпадают при наложении.

4. В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы и против равных углов лежат равные стороны.

5. *Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Доказательство. Наложим треугольники друг на друга так, чтобы $\angle A$ совпал с $\angle A_1$. Тогда совпадут лучи AB и A_1B_1, AC и A_1C_1. Так как отрезок AB равен отрезку A_1B_1, то точка B совпадет с точкой B_1. Так как отрезок AC равен отрезку A_1C_1, то точка C совпадет с точкой C_1. Но через две точки можно провести единственную прямую. Поэтому совпадут и отрезки BC и B_1C_1. Треугольники совпали. Значит, они равны.

6. *Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Доказательство. Наложим треугольники друг на друга так, чтобы сторона AC совпала со стороной A_1C_1. Так как $\angle A$ равен $\angle A_1$, то они совпадут при наложении. Так как $\angle C$ равен $\angle C_1$, то они совпадут при наложении. Тогда совпадут лучи AB и A_1B_1, CB и C_1B_1. Совпадут и вершины B и B_1. Треугольники совпали. Значит, они равны.

7. *Высотой* треугольника называется перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на противоположную сторону или ее продолжение.

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника, заключенный между вершиной и точкой пересечения биссектрисы угла и стороны треугольника.

8. Треугольник, у которого две стороны равны, называется равнобедренным.

9. *В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.*

Доказательство. Проведем биссектрису треугольника из вершины к основанию. Из равенства полученных треугольников по двум сторонам и углу между ними следует равенство углов при основании.

10. *Если у треугольника два угла равны, то он равнобедренный.*

Доказательство. Перевернем треугольник и наложим на данный так, чтобы совпали нижние стороны. При этом совпадут левый и правый углы, так как они равны по условию. Треугольники совпадут. Тогда правая сторона совпадет с левой стороной.

11. *Биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная из вершины к основанию, является высотой и медианой.*

Доказательство. Из равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними следует, что углы 1 и 2 равны. Так как эти углы смежные, то каждый из них равен 90°. Поэтому биссектриса является высотой. Из равенства треугольников следует, что равны отрезки основания. Поэтому биссектриса является и медианой.

12. *Если в треугольнике высота является и медианой, то он равнобедренный.*

Доказательство. Данная высота разбивает треугольник на два треугольника, которые равны по 1-му признаку. Отсюда следует равенство сторон, лежащих против прямых углов в этих треугольниках.

13. *Если в треугольнике высота является и биссектрисой, то он равнобедренный.*

Доказательство. Данная высота разбивает треугольник на два треугольника, которые равны по 2-му признаку. Отсюда следует равенство сторон, лежащих против прямых углов в этих треугольниках.

14. *Если в треугольнике медиана является и биссектрисой, то он — равнобедренный.*

Доказательство. Продлим медиану на ее длину. Треугольники с равными вертикальными углами равны по 1-му признаку. Тогда равны их третьи стороны и равны углы 2 и 3. Так как биссектриса делит угол пополам, то $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 1 = \angle 3$ и левый большой треугольник равнобедренный по признаку равнобедренного треугольника. Тогда равны все три стороны, обозначенные стрелками, и данный треугольник — равнобедренный.

15. Треугольник, у которого все стороны равны, называется равносторонним.

16. *Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Доказательство. Приложим данные треугольники равными сторонами и соединим их противоположные вершины. Полученные левый и правый треугольники будут равнобедренными и поэтому углы при их основаниях будут равны. Тогда верхний и нижний треугольники равны по 1-му признаку.

17. *Серединным перпендикуляром* к отрезку называется прямая, перпендикулярная этому отрезку и проходящая через его середину.

18. *Любая точка серединного перпендикуляра равноудалена от концов отрезка. Если точка равноудалена от концов отрезка, то она лежит на серединном перпендикуляре к нему.*

Доказательство. Из равенства треугольников по 1-му признаку следует, что данная точка серединного перпендикуляра равноудалена от концов отрезка. Если некоторая точка плоскости равноудалена от концов отрезка, то получим равнобедренный треугольник. Его медиана, проведенная к основанию, будет и высотой. Значит, эта точка будет лежать на серединном перпендикуляре к отрезку.

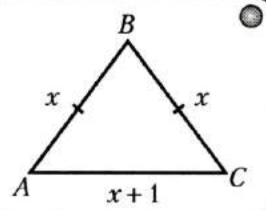
19. *Геометрическое место точек (ГМТ)* — множество всех точек плоскости, обладающих общим свойством.

20. *Все три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекаются в одной точке — центре описанной около этого треугольника окружности.*

Доказательство. Точка пересечения двух серединных перпендикуляров будет равноудалена от концов каждой из этих двух сторон, а значит, и от концов третьей стороны. Поэтому она будет лежать на третьем серединном перпендикуляре.

Если поставить ножку циркуля в точку O, то раствором циркуля радиусом, равным AO, можно провести окружность, которая пройдет через все три вершины треугольника. Такая окружность называется описанной около треугольника.

Ключевые задачи



Задача 1. В равнобедренном ΔABC, где $AB = BC$, периметр равен 16 см, а основание больше боковой стороны на 1 см. Найдите стороны треугольника.

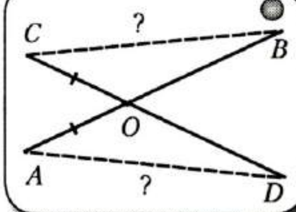
Дано: $AB = BC$; AC на 1 см больше AB; $P_{ABC} = 16$ см.

Найти: AC, AB, BC.

Решение. 1-й способ. Если бы AC было меньше на 1 см, т. е. было равно AB, то периметр был бы $16 - 1 = 15$ см. Тогда $AB = BC = 15 : 3 = 5$ см, $AC = 5 + 1 = 6$ (см).

2-й способ. Пусть $AB = BC = x$ см, тогда $AC = (x + 1)$ см. Получим уравнение $x + x + (x + 1) = 16$, откуда $3x + 1 = 16$, $3x = 16 - 1$, $3x = 15$, $x = 15 : 3 = 5$. Тогда $AB = BC = 5$ см, $AC = 5 + 1 = 6$ (см).

Ответ: 6; 5; 5.

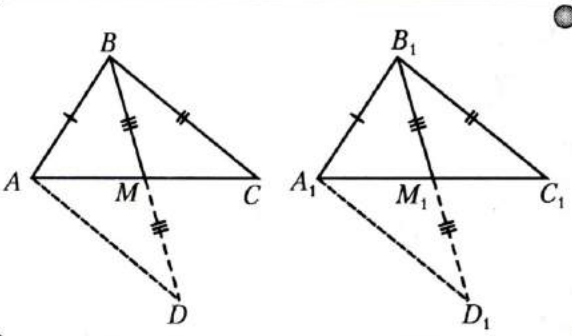


Задача 2. Два равных отрезка AB и CD пересекаются в точке O так, что $AO = CO$. Докажите, что $AD = CB$.

Дано: $AB = CD$, $AO = CO$.

Доказать: $CB = AD$.

Доказательство. Из условия следует, что $OB = OD$. Рассмотрим ΔAOD и ΔCOB. У них $OC = OA$, $OB = OD$, $\angle COB = \angle AOD$ как вертикальные. Треугольники равны по 1-му признаку. Тогда $CB = AD$ как стороны, лежащие в равных треугольниках против равных углов.



Задача 3. Докажите равенство треугольников по двум сторонам и медиане между ними.

Дано: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$; BM и B_1M_1 — медианы, $BM = B_1M_1$.

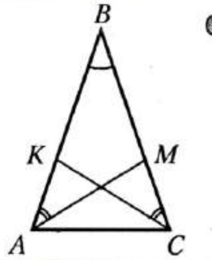
Доказать: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство. Продлим в каждом треугольнике данную медиану на ее длину, т. е. $MD = BM$, $M_1D_1 = B_1M_1$.

Получим $\Delta AMD = \Delta CMB$ и $\Delta A_1M_1D_1 = \Delta C_1M_1B_1$ по 1-му признаку, откуда $AD = BC$ и $A_1D_1 = B_1C_1$. Тогда треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ равны по трем сторонам.

Отсюда $\angle ABD = \angle A_1B_1D_1$.

Тогда $\Delta ABM = \Delta A_1B_1M_1$ по 1-му признаку и $AM = A_1M_1$. А так как BM и B_1M_1 — медианы, то $AC = A_1C_1$ и треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по 3-му признаку.



Задача 4. Докажите, что в равнобедренном треугольнике биссектрисы, проведенные к боковым сторонам, равны между собой.

Дано: $AB = BC$; AM и CK — биссектрисы.

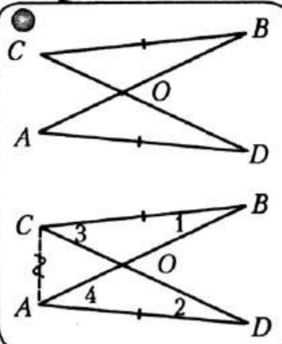
Доказать: $AM = CK$.

Доказательство. Рассмотрим треугольники AMB и CKB. У них $\angle B$ — общий, $AB = BC$ по условию, $\angle KCB = \angle MAB$ как половинки двух равных углов при основании равнобедренного треугольника.

Тогда $\Delta AMB = \Delta CKB$ по 2-му признаку.
Отсюда $AM = CK$.

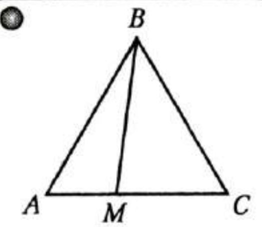
Примечание. Можно рассмотреть треугольники AMC и CKA с общей стороной AC.

Задача 5. Два равных отрезка AB и CD пересекаются в точке O так, что расстояния AD и CB равны. Докажите, что $AO = CO$.



Дано: $AB = CD$, $CB = AD$.
Доказать: $AO = CO$.
Доказательство. Соединим точки A и C. Рассмотрим ΔACB и ΔCAD. У них сторона AC — общая, $AB = CD$ и $AD = CB$ по условию. Тогда треугольники равны по трем сторонам. Из равенства треугольников следует, что $\angle 1 = \angle 2$ как лежащие в равных треугольниках против равных сторон.
Соединив точки B и D, аналогично докажем, что $\angle 3 = \angle 4$.
Тогда $\Delta COB = \Delta AOD$ по 2-му признаку, поэтому $AO = CO$. Что и требовалось доказать.

Задача 6. Дан равносторонний треугольник ABC. На стороне AC взята такая точка M такая, что сумма периметров треугольников ABM и CBM равна 48 см. Найдите длину стороны треугольника ABC, если $BM = 9$ см.



Дано: ΔABC — равносторонний; $P_{ABM} + P_{CBM} = 48$ см;
$BM = 9$ см.
Найти: AB.
Решение. Сложим периметры ΔABM и ΔCBM. Получим периметр ΔABC плюс удвоенную сторону BM:

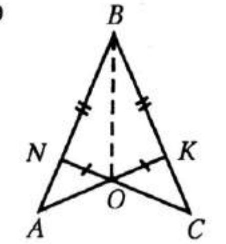
$$P_{ABM} + P_{CBM} = (AB + BM + AM) + (CB + BM + MC) =$$
$$= AB + BC + (AM + MC) + 2BM = P_{ABC} + 2BM.$$

Из условия $P_{ABC} + 2 \cdot 9 = 48$, откуда $P_{ABC} = 48 - 18 = 30$ см. Так как у равностороннего треугольника все стороны равны, то

$$AB = BC = AC = 30 : 3 = 10 \text{ см}.$$

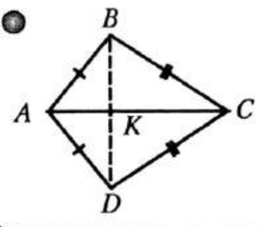
Ответ: 10 см.

Задача 7. *Дано*: $NO = KO$, $BK = BN$.
Доказать: $AB = BC$.

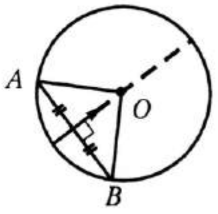


Доказательство. Проведем BO. $\Delta NBO = \Delta KBO$ по 3-му признаку. Отсюда $\angle BNO = \angle BKO$. $\Delta ABK = \Delta CBN$ по 2-му признаку ($\angle B$ — общий, $BK = BN$ по условию, $\angle BNO = \angle BKO$ по доказанному).
Отсюда $AB = BC$.

Задача 8. Докажите, что если $AB = AD$, $BC = DC$, то $BD \perp AC$.



Доказательство. Из равенства треугольников ABC и ADC по трем сторонам следует равенство углов BAC и DAC. Так как в равнобедренном треугольнике ABD биссектриса AK будет и высотой, то $AC \perp BD$.



Задача 9. Докажите, что серединный перпендикуляр к хорде проходит через центр окружности.

Доказательство. $OA = OB$ как радиусы. Так как точка O равноудалена от концов отрезка AB, то она лежит на серединном перпендикуляре к нему.

Запомните!

1 Признаки равенства треугольников.
1-й. По двум сторонам и углу между ними.
2-й. По стороне и двум прилежащим к ней углам.
3-й. По трем сторонам.

2 Свойство углов равнобедренного треугольника.
Углы при основании равнобедренного треугольника равны.

3 Обратная теорема.
Если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный.

4 Свойство биссектрисы равнобедренного треугольника.
Биссектриса, высота и медиана равнобедренного треугольника, проведенные из вершины к основанию, совпадают.

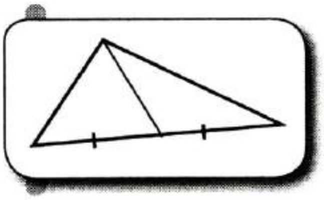
5 Признаки равнобедренного треугольника.
Треугольник является равнобедренным, если:
а) высота является и медианой;
б) высота является и биссектрисой;
в) биссектриса является и медианой.

6 Теорема о свойстве точек серединного перпендикуляра.
1) Любая точка серединного перпендикуляра равноудалена от концов отрезка.
2) Если точка равноудалена от концов отрезка, то она лежит на серединном перпендикуляре к нему.

7 Теорема о пересечении серединных перпендикуляров.
Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке — центре описанной около треугольника окружности.

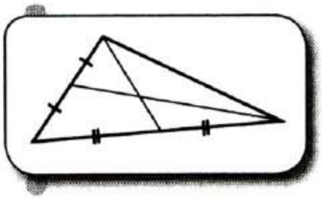
Дополнительный материал

Простые вопросы



1. В треугольнике провели медиану. Сколько треугольников изображено на рисунке?
2. Если стороны треугольника продлить, то сколько углов всего образуется, не считая развернутых? А считая и развернутые?
3. Верно ли, что биссектриса треугольника лежит на биссектрисе угла?
4. Может ли высота треугольника делить сторону пополам?
5. Может ли биссектриса треугольника быть перпендикулярной стороне треугольника?
6. Верно ли утверждение: «Биссектриса равнобедренного треугольника является высотой и медианой»?
7. Является ли любой равнобедренный треугольник равносторонним?
8. Является ли любой равносторонний треугольник равнобедренным?
9. Может ли биссектриса некоторого равнобедренного треугольника, проведенная к боковой стороне, быть медианой?
10. Может ли высота треугольника быть равна его медиане, проведенной из той же вершины?
11. Может ли биссектриса треугольника быть равна его высоте, проведенной из той же вершины?
12. Существует ли треугольник, периметр которого в 3 раза больше одной из сторон?
13. Если медиана образует равные углы с соседними сторонами треугольника, то какой угол она образует с третьей стороной?
14. Что для студентов означает слово «медиум»?
15. Сколько всего теорем в данной теме?

Непростые вопросы



16.* В треугольнике провели 2 медианы. Сколько треугольников изображено на рисунке?
17.* В треугольнике провели 3 медианы. Сколько треугольников изображено на рисунке?
18.* Может ли в треугольнике высота являться медианой, но не являться биссектрисой?
19.* Как звучит теорема о свойстве углов равнобедренного треугольника в форме «Если ..., то ...»?
20.* Как звучит утверждение, обратное теореме о свойстве углов равнобедренного треугольника, в форме «Если ..., то ...»?
21.* Может ли медиана треугольника равняться соседней стороне?
22.* Может ли биссектриса треугольника равняться соседней стороне?
23.* Может ли высота треугольника равняться соседней стороне?
24.* Может ли серединный перпендикуляр к стороне треугольника иметь общую точку с каждой из двух других сторон?
25.* Может ли серединный перпендикуляр к стороне треугольника делить противоположный угол треугольника пополам?

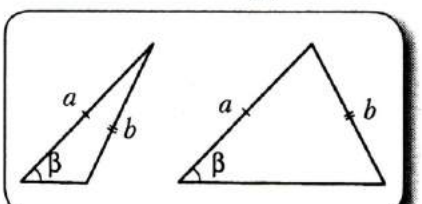
Ответы на простые и непростые вопросы

1. Три. Два маленьких и один данный.
2. 12; 24.
3. Да.
4. Да. В равнобедренном треугольнике.
5. Да. В равнобедренном треугольнике.
6. Нет. Только биссектриса, проведенная из вершины к основанию.
7. Нет.
8. Да.
9. Да. Если треугольник равносторонний.
10. Да. В равнобедренном треугольнике это высота, проведенная к его основанию.
11. Да. В равнобедренном треугольнике это биссектриса, проведенная к его основанию.
12. Да. Например, равносторонний.
13. 90°. Если медиана является биссектрисой, то треугольник равнобедренный и эта медиана является и высотой, проведенной к основанию.
14. Медиум — студенческий праздник, знаменующий середину учебы.
15. Тринадцать теорем, включая задачу о пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.
16.* 8.
17.* 16.
18.* Нет. Если высота является медианой, то треугольник равнобедренный и эта высота является и биссектрисой.
19.* «Если треугольник равнобедренный, то углы при основании равны».
20.* «Если у треугольника два угла равны, то треугольник равнобедренный».
21.* Да.
22.* Да.
23.* Да. В прямоугольном треугольнике.
24.* Да. В равнобедренном прямоугольном треугольнике.
25.* Да. Если треугольник равнобедренный.

Для тех, кому нравится математика

Сколько существует треугольников, у которых равны по две стороны, т. е. $a = a_1$, $b = b_1$? Верно! Бесконечно много. Угол между ними фиксирует некоторый треугольник. Говорят, две стороны и угол между ними задают треугольник. Аналогично сторона и два прилежащих к ней угла задают треугольник. А задают ли треугольник три угла? Три угла задают форму треугольника, но не его размеры. Все треугольники с соответственно равными углами будут одинаковы по форме, но могут отличаться размерами (большие — маленькие). В математике такие треугольники называют *подобными*.

Будут ли равны треугольники по двум сторонам и углу напротив одной из этих сторон?



Не обязательно. На рисунке приведены два таких треугольника. Поэтому следует говорить «по двум сторонам и углу между ними», а не «по двум сторонам и углу».

Вообще говоря, признаков равенства треугольников можно придумать достаточно много. Например, треугольники будут равны:

а) по двум сторонам и медиане между ними;

б) по двум сторонам и биссектрисе между ними;

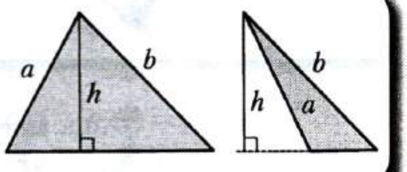
в) по медиане и двум углам, которые медиана образует с соседними сторонами;

г) по двум углам и медиане, по двум углам и биссектрисе, по двум углам и высоте, проведенным из вершины *соответственного угла*;

д) по трем медианам, трем высотам, трем биссектрисам.

Треугольник может быть задан тремя своими элементами, один из которых линейный (длина некоторого отрезка). Но не всякие три элемента задают треугольник однозначно. Как вы видели выше, две стороны и угол напротив одной из них могут задавать два неравных между собой треугольника.

Две стороны и высота, проведенная к третьей стороне, также могут задавать два неравных треугольника.



У треугольника три вершины, поэтому у него три медианы, три высоты и три биссектрисы. Известно, что все три медианы пересекаются в одной точке. Аналогично все три высоты, все три биссектрисы и все три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекаются в одной точке. Это удивительные и красивые свойства. Поэтому указанные четыре точки пересечения называются «замечательными точками треугольника».

Может ли точка пересечения высот лежать вне треугольника? Да, когда у него один угол тупой. Может ли точка пересечения высот лежать в вершине треугольника? Да, когда у треугольника есть прямой угол. Учитывая сказанное, правильно говорить, что «высоты или их продолжения пересекаются в одной точке».

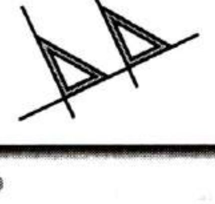
Относительно перпендикулярности следует понимать следующее. *Перпендикулярная прямая* — это прямая. *Перпендикуляр* — это отрезок. *Серединный перпендикуляр* — это снова прямая. Кстати, в начале XX века в царской гимназии серединный перпендикуляр назывался «медиатрисса».

Мы доказали свойство: биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная из вершины к основанию, является его высотой и медианой. А если дана медиана, проведенная из вершины равнобедренного треугольника? Нужно ли доказывать, что она является биссектрисой и высотой? Оказывается, что нет. Так как из одной вершины можно опустить лишь одну высоту и одну медиану, то высота, медиана и биссектриса равнобедренного треугольника, проведенные из его вершины к основанию, СОВПАДАЮТ. То есть если дана указанная медиана, то она же является высотой и биссектрисой. Если дана указанная высота, то она является биссектрисой и медианой.

Таким образом, известная нам теорема может звучать так:

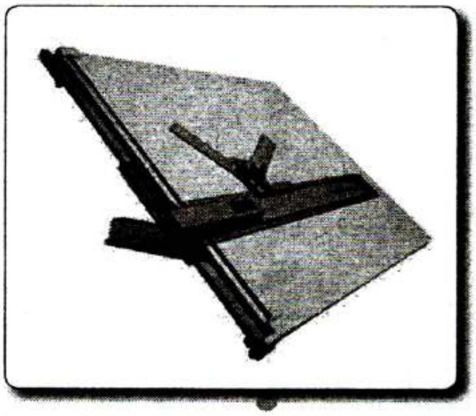
«Биссектриса, высота и медиана равнобедренного треугольника, проведенные из вершины к основанию, совпадают».

Что такое признак? Это набор условий, при которых некоторая фигура принадлежит к определенному виду или выполняется определенное соотношение между фигурами. Например, если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны; если у треугольника равны два угла, то он равнобедренный. Эти теоремы так и называются — признаками: признак равенства треугольников, признак равнобедренного треугольника.



На практике для построения на плоскости двух параллельных прямых поступают следующим образом. Берут произвольную прямую и при помощи угольника проводят перпендикулярную к ней прямую. Затем сдвигают угольник на нужное расстояние вдоль данной прямой и проводят вторую перпендикулярную прямую.

Согласно теореме о двух перпендикулярах две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны между собой.



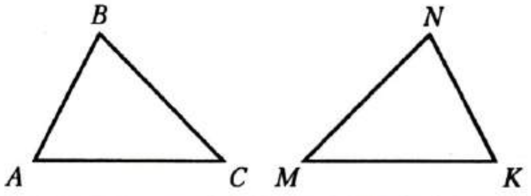
По этому же принципу устроен чертежный инструмент, который называется «рейсшина». В конструкторских бюро инженеры пользуются ею для проведения на чертежах параллельных прямых. Это постоянно приходится делать. Лист бумаги закрепляют параллельно краю чертежного стола. По кромке стола перпендикулярно кромке движется большая линейка с закрепленной перекладиной под прямым углом на одном конце. А вообще, это довольно древний инструмент. Более совершенным был кульман, а сегодня есть плоттер.

Грузите в Википедии «рейсшина», «кульман», «плоттер», «САПР». Сегодня компьютер работает на создание 3D-модели в системе CAD трехмерного геометрического проектирования.

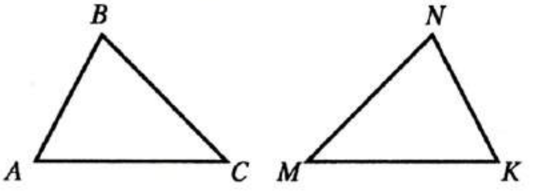
Кстати, профессия инженера, которая очень тесно связана с геометрией, является одной из самых престижных в мире. По данным журнала «Forbes» в США инженеры возглавили рейтинг самых востребованных профессий.

Задачи по теме «Треугольники»

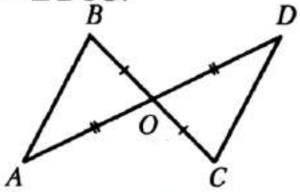
1 *Дано*: $AC = MK$, $\angle A = \angle K$, $\angle C = \angle M$.
Доказать: $\Delta ABC = \Delta KNM$.



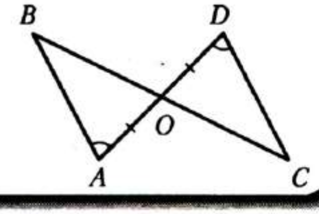
2 *Дано*: $AC = MK$, $CB = MN$, $\angle C = \angle M$.
Доказать: $\Delta ABC = \Delta MNK$.



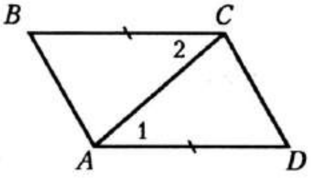
3 *Дано*: $AO = OD$, $BO = OC$.
Доказать: $\Delta ABO = \Delta\ DCO$.



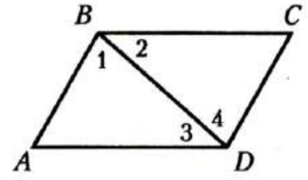
4 *Дано*: $AO = OD$, $\angle BAD = \angle CDA$.
Доказать: $\Delta AOB = \Delta DOC$.



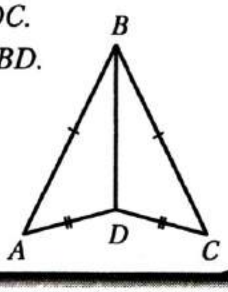
5 *Дано*: $AD = BC$, $\angle 1 = \angle 2$.
Доказать: $\Delta ABC = \Delta CDA$.



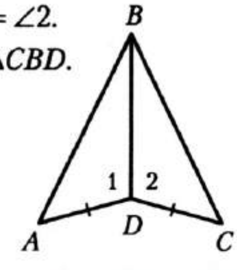
6 *Дано*: $\angle 1 = \angle 4$, $\angle 2 = \angle 3$.
Доказать: $\Delta ABD = \Delta CDB$.



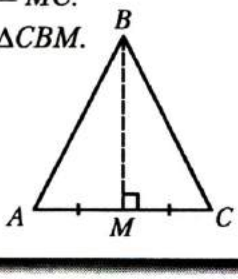
7 *Дано*: $AB = BC$, $AD = DC$.
Доказать: $\Delta ABD = \Delta CBD$.



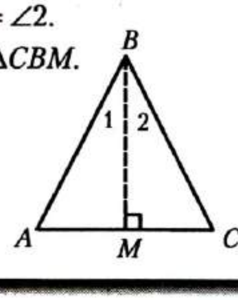
8 *Дано*: $AD = DC$, $\angle 1 = \angle 2$.
Доказать: $\Delta ABD = \Delta CBD$.



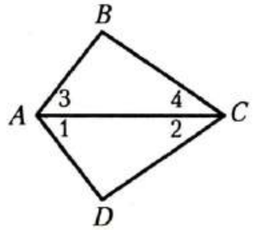
9 *Дано*: $BM \perp AC$, $AM = MC$.
Доказать: $\Delta ABM = \Delta CBM$.



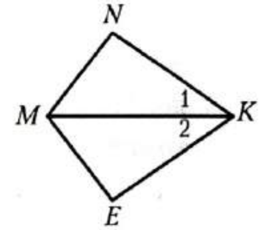
10 *Дано*: $BM \perp AC$, $\angle 1 = \angle 2$.
Доказать: $\Delta ABM = \Delta CBM$.



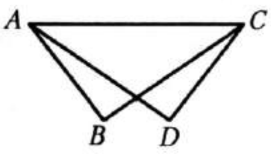
11 *Дано*: $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$.
Доказать: $\Delta ABC = \Delta ADC$.



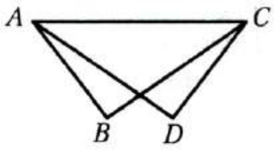
12 *Дано*: $NK = EK$, $\angle 1 = \angle 2$.
Доказать: $\Delta MEK = \Delta MNK$.



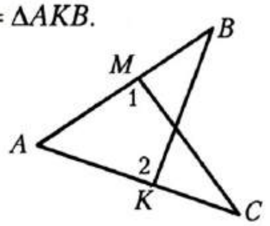
13 *Дано*: $AB = CD$, $\angle BAC = \angle DCA$.
Доказать: $\Delta ABC = \Delta CDA$.



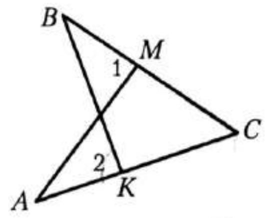
14 *Дано*: $AD = BC$, $\angle CAD = \angle ACB$.
Доказать: $\Delta ABC = \Delta CDA$.



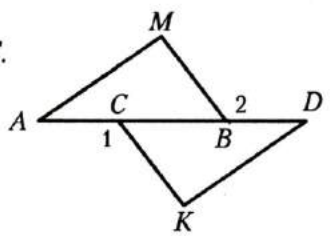
15 *Дано*: $AM = AK$, $\angle 1 = \angle 2$.
Доказать: $\Delta AMC = \Delta AKB$.



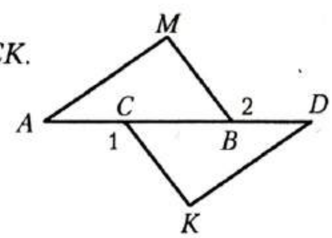
16 *Дано*: $CM = CK$, $\angle 1 = \angle 2$.
Доказать: $\Delta AMC = \Delta BKC$.



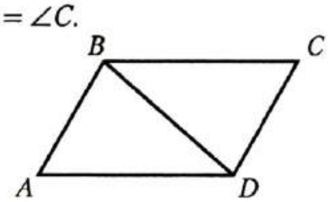
17 *Дано*: $AB = CD$, $\angle A = \angle D$, $\angle 1 = \angle 2$.
Доказать: $\Delta AMB = \Delta DKC$.



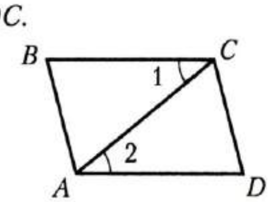
18 *Дано*: $CK = BM$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle M = \angle K$.
Доказать: $\Delta ABM = \Delta DCK$.



19 *Дано*: $AB = CD$, $AD = BC$.
Доказать: $\angle A = \angle C$.

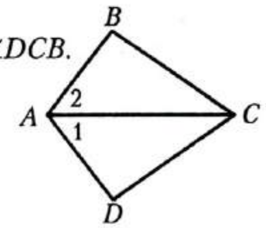


20 *Дано*: $AD = BC$, $\angle 1 = \angle 2$.
Доказать: $AB = DC$.



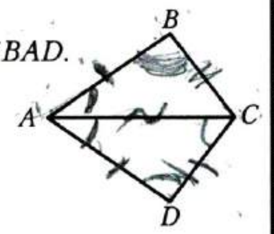
21 *Дано*: $AB = AD$, $\angle 1 = \angle 2$.

Доказать: CA — биссектриса $\angle DCB$.



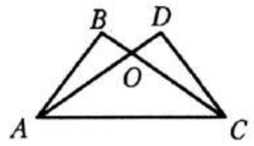
22 *Дано*: $AB = AD$, $BC = DC$.

Доказать: AC — биссектриса $\angle BAD$.



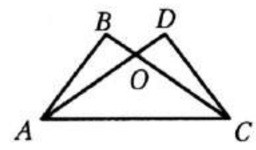
23* *Дано*: $AB = CD$, $CB = AD$.

Доказать: $\Delta ABO = \Delta CDO$.



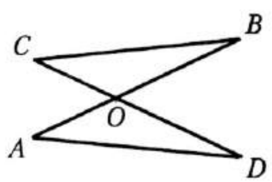
24* *Дано*: $\Delta ABO = \Delta CDO$.

Доказать: $\Delta ABC = \Delta CDA$.



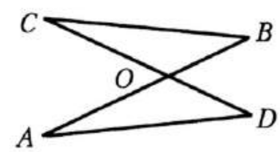
25* *Дано*: $AB = CD$, $CB = AD$.

Доказать: $\Delta COB = \Delta AOD$.



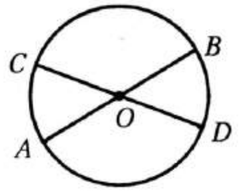
26* *Дано*: $AB = CD$, $AD = CB$.

Доказать: $\angle A = \angle C$.



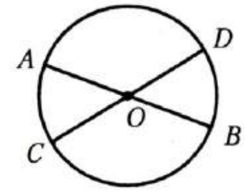
27* *Дано*: AB и CD — диаметры.

Доказать: $\angle CAB = \angle BDC$.



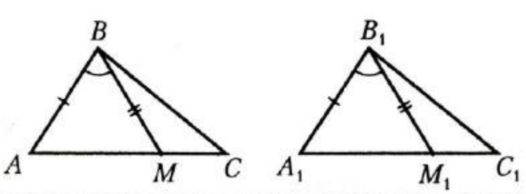
28* *Дано*: AB и CD — диаметры.

Доказать: $\angle ABC = \angle CDA$.



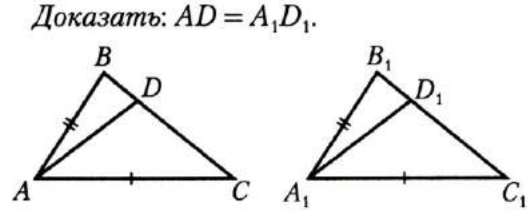
29* *Дано*: $MC = \frac{1}{2}AM$, $M_1C_1 = \frac{1}{2}A_1M_1$,
$AB = A_1B_1$, $BM = B_1M_1$, $\angle ABM = \angle A_1B_1M_1$.

Доказать: $BC = B_1C_1$.



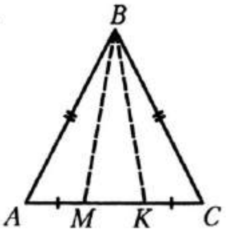
30* *Дано*: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$,
$BD = \frac{1}{3}DC$, $B_1A_1 = \frac{1}{3}D_1C_1$.

Доказать: $AD = A_1D_1$.



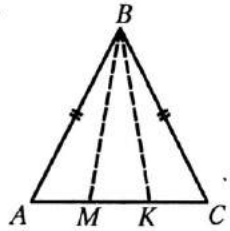
31 *Дано*: $AB = BC$, $AM = KC$.

Доказать: $BM = BK$.



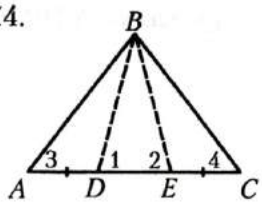
32 *Дано*: $AB = BC$, $AK = MC$.

Доказать: $BM = BK$.



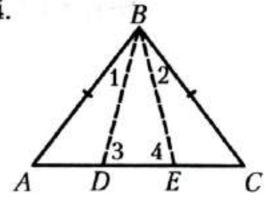
33 *Дано*: $AD = EC$, $\angle 1 = \angle 2$.

Доказать: $\angle 3 = \angle 4$.



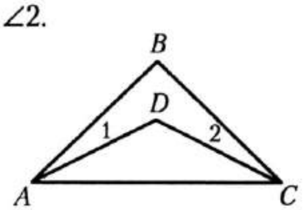
34 *Дано*: $AB = BC$, $\angle 1 = \angle 2$.

Доказать: $\angle 3 = \angle 4$.



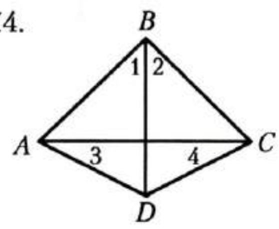
35 *Дано*: $AB = BC$, $AD = DC$.

Доказать: $\angle 1 = \angle 2$.



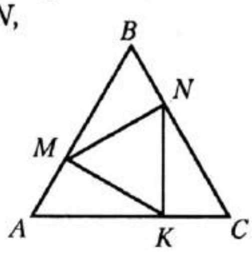
36 *Дано*: $AB = BC$, $\angle 1 = \angle 2$.

Доказать: $\angle 3 = \angle 4$.



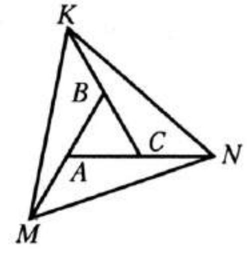
37* *Дано*: ΔABC — равносторонний, $MB = 2AM$, $NC = 2BN$, $AK = 2KC$.

Доказать: ΔMNK — равносторонний.



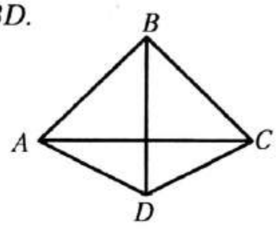
38* *Дано*: ΔABC — равносторонний, $AM = AB$, $CN = AC$, $BK = BC$.

Доказать: ΔMNK — равносторонний.



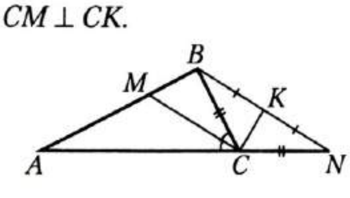
39* *Дано*: $AB = BC$, $AD = DC$.

Доказать: $AC \perp BD$.



40* *Дано*: CM — биссектриса ΔABC, $CB = CN$, CK — медиана ΔBCN.

Доказать: $CM \perp CK$.



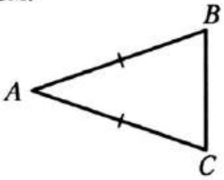
41 *Дано*: ΔADC — равносторонний, $AB = BC$, $AB + AC = 13$ см, $P_{ABC} = 21$ см.
Найти: P_{ADC}.

Ответ:

42 *Дано*: ΔADC — равносторонний, $AB = BC$, $AB = 2AC$, $P_{ABC} = 30$ см.
Найти: P_{ADC}.

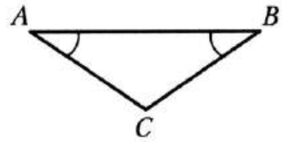
Ответ:

43 *Дано*: $AB = AC$, $P_{ABC} = 28$ см, AB больше BC на 2 см.
Найти: BC.



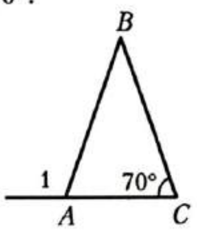
Ответ:

44 *Дано*: $\angle A = \angle B$, $AB : AC = 3 : 2$, $P_{ABC} = 28$ см.
Найти: AB.



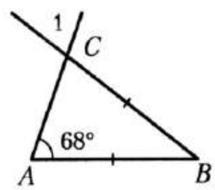
Ответ:

45 *Дано*: $AB = BC$, $\angle C = 70°$.
Найти: $\angle 1$.



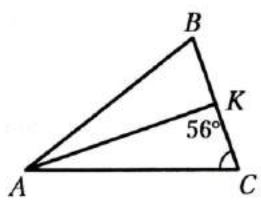
Ответ:

46 *Дано*: $AB = BC$, $\angle A = 68°$.
Найти: $\angle 1$.



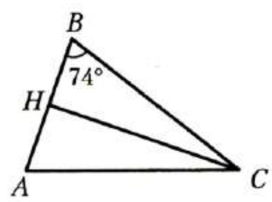
Ответ:

47 *Дано*: биссектриса AK делит BC пополам, $\angle C = 56°$.
Найти: $\angle BAK$.



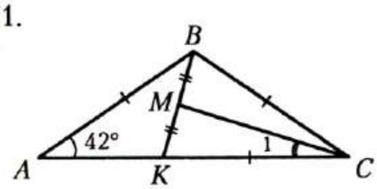
Ответ:

48 *Дано*: высота CH делит AB пополам. $\angle B = 74°$.
Найти: $\angle A$.



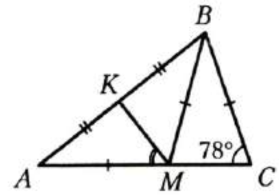
Ответ:

49 *Дано*: $AB = BC = KC$, $KM = MB$, $\angle A = 42°$.
Найти: $\angle 1$.



Ответ:

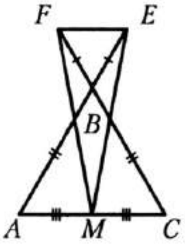
50 *Дано*: $MB = CB = AM$, $\angle C = 78°$.
Найти: $\angle AMK$.



Ответ:

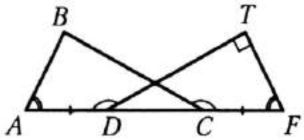
51* *Дано*: $AB = BC$, $BF = BE$, $AM = MC$.

Доказать: ΔFME — равнобедренный.



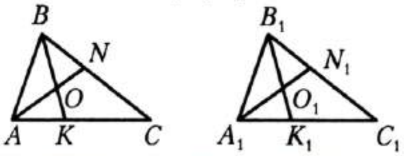
52* *Дано*: $\angle A = \angle F$, $\angle ADT = \angle FCB$, $AD = CF$, $\angle T = 90°$.

Доказать: $\angle B = 90°$.



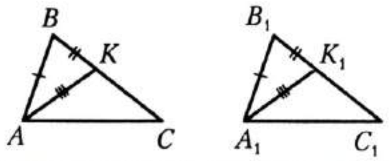
53* *Дано*: $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$; BK и AN — биссектрисы; B_1K_1 и A_1N_1 — биссектрисы.

Доказать: $\Delta ABO = \Delta A_1B_1O_1$.



54* *Дано*: $AB = A_1B_1$, AK и A_1K_1 — биссектрисы; $BK = B_1K_1$, $AK = A_1K_1$.

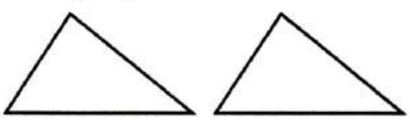
Доказать: $AC = A_1C_1$.



55 *Дано*: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, BK и B_1K_1 — соответствующие биссектрисы.

Доказать: $BK = B_1K_1$.

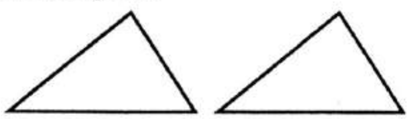
Закончите рисунок.



56 *Дано*: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, BM и B_1M_1 — соответствующие медианы.

Доказать: $BM = B_1M_1$.

Закончите рисунок.

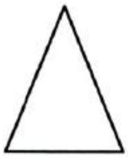


57 Докажите, что любая точка высоты равнобедренного треугольника, проведенной к основанию, равноудалена от вершин при основании.

Закончите рисунок.

58 Докажите, что любая точка медианы равнобедренного треугольника, проведенной к основанию, равноудалена от вершин при основании.

Закончите рисунок.



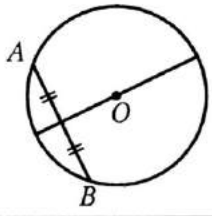
59* Докажите, что если любая точка высоты треугольника равноудалена от концов стороны, к которой она проведена, то треугольник равнобедренный.

Сделайте рисунок в тетради.

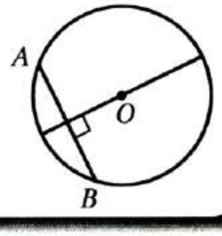
60* Докажите, что если любая точка медианы треугольника равноудалена от концов стороны, к которой она проведена, то треугольник равнобедренный.

Сделайте рисунок в тетради.

61 Докажите, что диаметр, проходящий через середину хорды, перпендикулярен ей.



62 Докажите, что диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам.



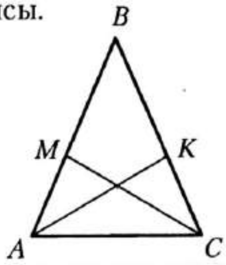
63 Периметр равнобедренного треугольника равен 32 см. Биссектриса, проведенная из его вершины, делит его на два треугольника, периметр каждого из которых равен 24 см. Найдите длину этой биссектрисы.

Ответ:

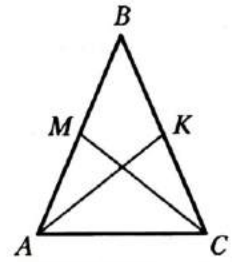
64 Биссектриса, проведенная из вершины равнобедренного треугольника, равна 5 см. Периметр одного из образованных треугольников равен 30 см. Найдите периметр данного равнобедренного треугольника.

Ответ:

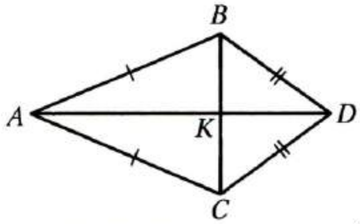
65 *Дано*: $AB = BC$, AK и CM — соответствующие биссектрисы.
Доказать: $AK = CM$.



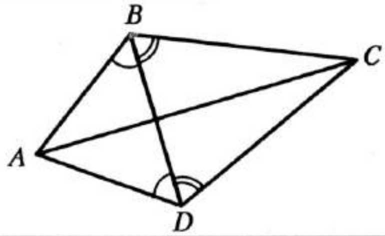
66 *Дано*: $AB = BC$, AK и CM — соответствующие медианы.
Доказать: $AK = CM$.



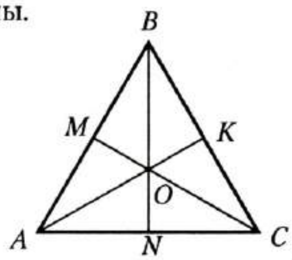
67 *Дано*: $AB = AC$, $BD = DC$.
Доказать: $\Delta ABK = \Delta ACK$.



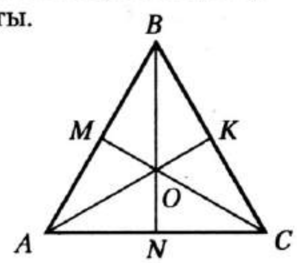
68 *Дано*: $\angle ABD = \angle ADB$, $\angle CBD = \angle CDB$.
Доказать: $\Delta ABC = \Delta ADC$.



69 *Дано*: ΔABC — равносторонний, AK, CM, BN — медианы.
Доказать:
$\Delta AOM = \Delta BOK$.



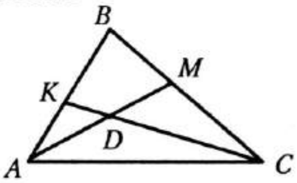
70 *Дано*: ΔABC — равносторонний, AK, CM, BN — высоты.
Доказать:
$\Delta AOC = \Delta BOC$.



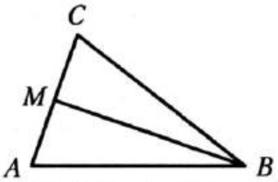
Контрольная работа

Вариант 1

1 Запишите все треугольники, изображенные на чертеже.



2 Дан равнобедренный треугольник ABC, у которого $AB = BC$. Его периметр 42 см. Высота BM равна 16 см. Найдите периметр треугольника BMC.



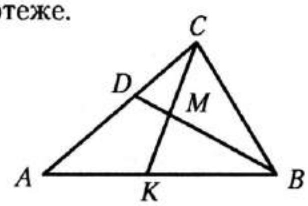
3 Периметр треугольника ABC равен 70 см. Сторона AB меньше стороны AC на 10 см и меньше стороны BC в 2 раза. Найдите длины сторон треугольника.

4 Треугольники ABC и ADC расположены по одну сторону от прямой AC. Известно, что $AB = CD$, $AD = CB$, M — середина AC. Докажите, что треугольник BMD — равнобедренный.

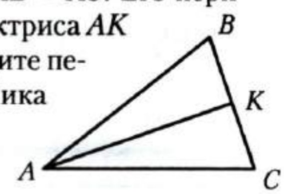
5 В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведены биссектрисы AM и CK, которые пересекаются в точке O. Докажите, что $OM = OK$.

Вариант 2

1 Запишите все треугольники, изображенные на чертеже.



2 Дан равнобедренный треугольник ABC, у которого $AB = AC$. Его периметр 36 см. Биссектриса AK равна 10 см. Найдите периметр треугольника ABK.



3 Периметр треугольника ABC равен 32 см. Сторона BC больше стороны AC на 3 см и больше стороны AB в 3 раза. Найдите длины сторон треугольника.

4 Треугольники ABC и ADC расположены по одну сторону от прямой AC. Известно, что $AB = CD$, $AD = CB$, K — середина BD. Докажите, что треугольник AKC — равнобедренный.

5 В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведены серединные перпендикуляры AK и CM к боковым сторонам ($EM \perp BC$, $FK \perp AB$), которые пересекают противоположные боковые стороны в точках M и K. Докажите, что $AM = CK$.

Тема 3
Параллельные прямые

Если теорему так и не смогли доказать, она становится аксиомой.
Евклид

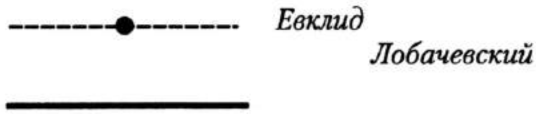
В геометрии нельзя «на глазок» определить, параллельны прямые или нет. Это может быть либо дано, либо доказано. Вы уже знаете, что на плоскости справедлива теорема: «Две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны между собой».

Есть еще три признака параллельности прямых, которые можно объединить в одну теорему, она так и называется: «Признаки параллельности прямых». Данные признаки связаны с углами, которые образуются при пересечении двух прямых третьей прямой. Это так называемые накрест лежащие углы, соответственные углы и односторонние углы.

Оказывается, что если накрест лежащие углы равны, или соответственные углы равны, или сумма односторонних углов равна 180°, то прямые будут параллельны.

Справедливы и обратные утверждения. Если даны две заведомо параллельные прямые, которые пересечены третьей, то накрест лежащие углы равны, соответственные углы равны и сумма односторонних углов равна 180°.

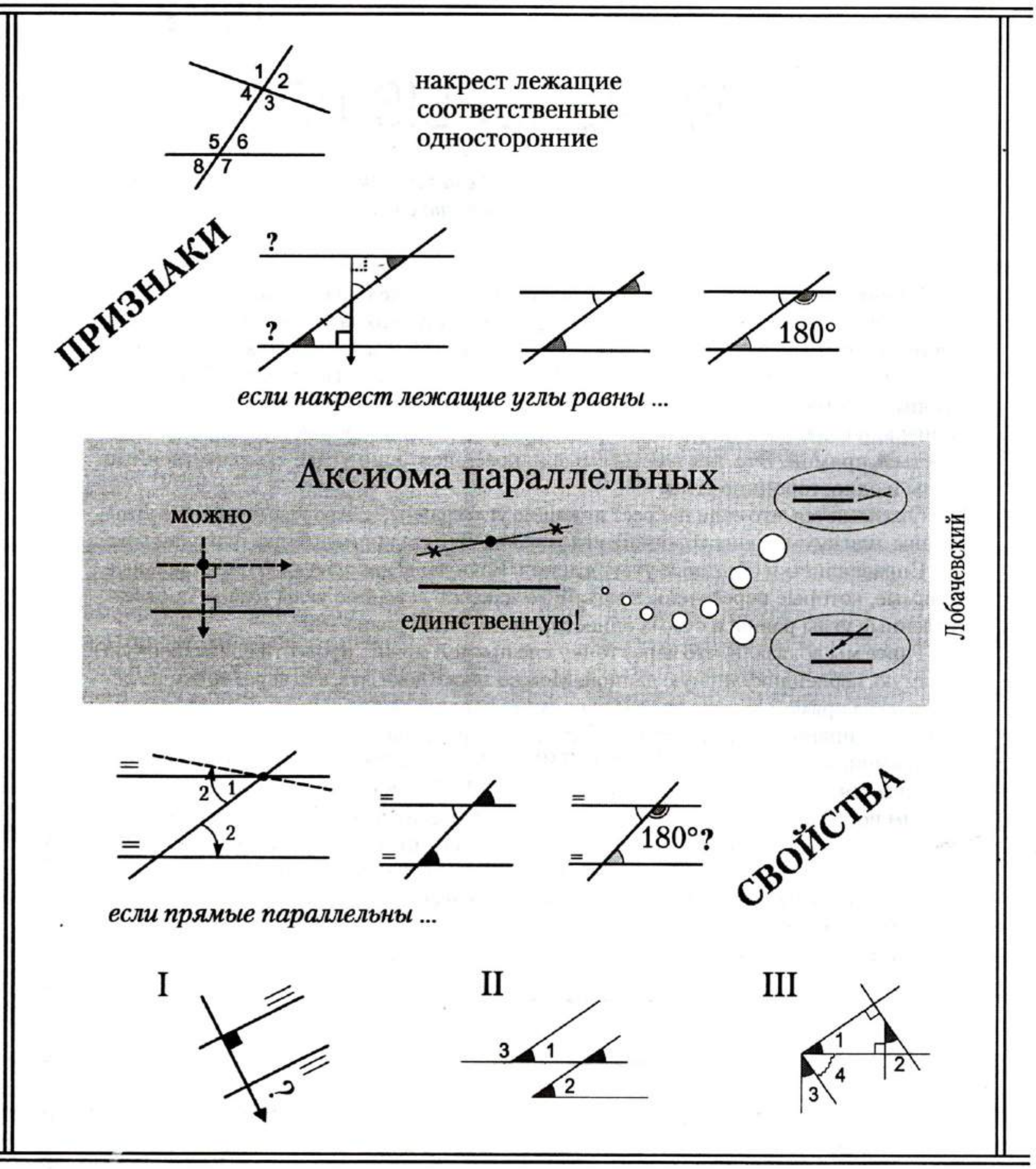
Ранее мы доказали, что через точку вне прямой можно провести единственную прямую, перпендикулярную данной. Можно также доказать, что через точку, не лежащую на прямой, можно провести прямую, параллельную данной. А вот доказать, что такая прямая — единственная, нельзя! Утверждение «Через точку, не лежащую на прямой, можно провести ЕДИНСТВЕННУЮ прямую, параллельную данной» называется аксиомой параллельных прямых. У Евклида эта аксиома называлась пятым постулатом. На протяжении двух тысячелетий это утверждение вызывало захватывающие и драматичные споры между такими знаменитыми учеными, как Лобачевский, Гаусс и другие. Споры состояли в том, можно или нельзя доказать этот пятый постулат Евклида на основании уже известных теорем. В конце концов работы в этом направлении привели к полному пересмотру научных представлений о геометрии Вселенной.



ПАРАЛЛЕЛЬНЫ

НЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫ

Параллельные прямые



1. Две прямые и секущая. Виды углов.
2. **Признаки параллельности прямых.**
3. Теорема о существовании параллельной прямой.
4. Аксиома параллельных прямых.
5. Теорема о двух прямых, параллельных третьей.
6. **Свойства углов при параллельных прямых и секущей.**
7. Теорема о перпендикуляре к одной из двух параллельных прямых.
8. Теорема об углах с соответственно параллельными сторонами.
9. **Теорема об углах с соответственно перпендикулярными сторонами.**

№ 3

Рассказ по опорному конспекту

При пересечении двух прямых третьей, которая называется *секущей*, образуется 4 пары *накрест лежащих* углов, 4 пары *соответственных* и 4 пары *односторонних*.

3 и 5; 4 и 6 — внутренние накрест лежащие углы; 1 и 7; 2 и 8 — внешние накрест лежащие углы;

1 и 5; 2 и 6; 4 и 8; 3 и 7 — соответственные углы;

3 и 6; 4 и 5 — внутренние односторонние углы; 2 и 7; 1 и 8 — внешние односторонние углы.

Признаки параллельности прямых. *Если накрест лежащие углы равны, или соответственные углы равны, или сумма односторонних углов равна* 180°, *то прямые параллельны.* В первую очередь нужно доказать, что если накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны. Доказательство опирается на уже доказанное нами свойство: две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны между собой. Из середины отрезка секущей опускают перпендикуляр на одну из параллельных прямых. Затем перпендикуляр продляют до пересечения со второй прямой. Из равенства полученных треугольников следует, что прямая, проходящая через перпендикуляр, будет перпендикулярна и второй прямой. Дальнейшее просто.

Через точку, не лежащую на данной прямой, МОЖНО провести прямую, параллельную данной. Опустив перпендикуляр из точки на прямую, а затем, восставив перпендикуляр к проведенной прямой, получим две прямые, перпендикулярные третьей, которые будут параллельны. А вот доказать, что такая прямая единственная, нельзя. Поэтому справедлива АКСИОМА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ: «Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит ЕДИНСТВЕННАЯ прямая, параллельная данной».

Теорема о двух прямых, параллельных третьей. *Две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой.* Если бы они пересекались, то через одну точку проходили бы две прямые, параллельные третьей.

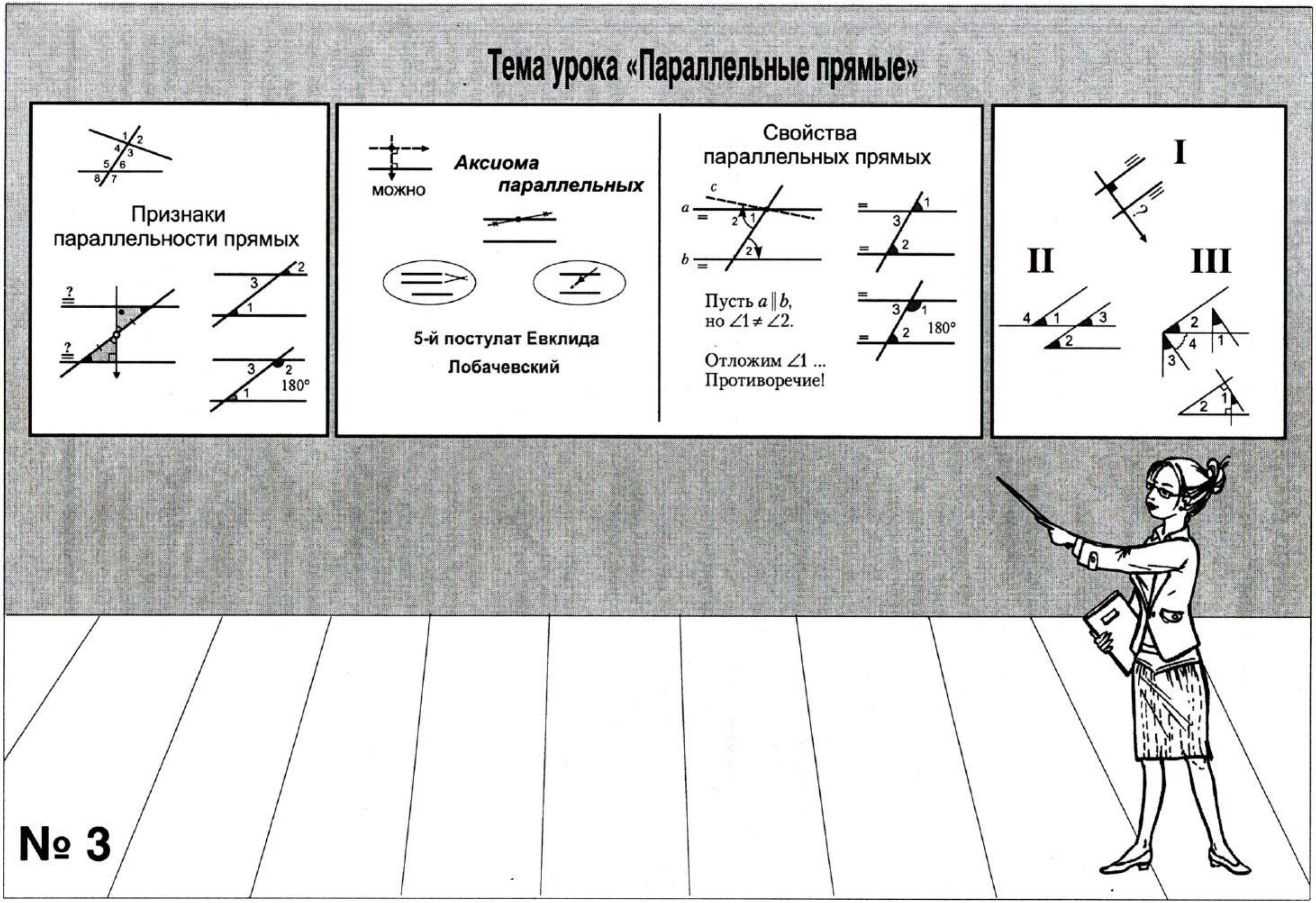
Теорема о пересечении параллельных прямых. *Если на плоскости прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.* Если бы эта прямая не пересекала вторую прямую, то она была бы ей параллельна. Но тогда через одну точку проходили бы две прямые, параллельные третьей. А это невозможно.

Свойства углов при параллельных прямых и секущей. *Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны, соответственные углы равны и сумма односторонних углов равна* 180°. В первую очередь нужно доказать, что если прямые параллельны, то накрест лежащие углы равны. Пусть прямые параллельны, а накрест лежащие углы 1 и 2 не равны. Отложим угол, равный углу 2, как показано на рисунке. Получим еще одну прямую, параллельную нижней прямой (если накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны). Но через точку нельзя провести две прямые, параллельные третьей. Значит, наше предположение неверно, и накрест лежащие углы равны. Остальное несложно.

Из указанных свойств параллельных прямых вытекает важное следствие: **перпендикуляр к одной из параллельных прямых будет перпендикуляром и к другой.** Доказательство следует из равенства соответственных углов.

Теорема об углах с соответственно параллельными сторонами. *Углы с соответственно параллельными сторонами равны, если они одновременно острые или одновременно тупые, и в сумме составляют* 180°, *если один из них острый, а другой — тупой.* Продлив стороны данных углов, получим две пары равных соответственных углов, откуда $\angle 1 = \angle 2$. Продлив сторону угла 1 за его вершину, получим доказательство второй части теоремы.

Теорема об углах с соответственно перпендикулярными сторонами. *Углы с соответственно перпендикулярными сторонами равны, если они одновременно острые или одновременно тупые, и в сумме составляют* 180°, *если один из них острый, а другой — тупой.* Проведя перпендикулярные лучи из вершины угла 1, получим, что углы 2 и 3 равны и углы 3 и 1 дополняют один и тот же угол 4 до 90°. Значит, $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 1 = \angle 2$. Продлив сторону угла 2 за его вершину, получим доказательство второй части теоремы.


№ 3
Тема урока «Параллельные прямые»
Признаки
параллельности прямых
180°
можно
Аксиома
параллельных
5-й постулат Евклида
Лобачевский
Свойства
параллельных прямых
Пусть $a \parallel b$,
но $\angle 1 \neq \angle 2$.
Отложим $\angle 1$ ...
Противоречие!
180°
I
II
III

Ответы на вопросы к теме

1. Внутренние накрест лежащие углы: 3 и 5; 4 и 6; внешние накрест лежащие углы: 1 и 7; 2 и 8; соответственные углы: 1 и 5; 2 и 6; 4 и 8; 3 и 7; 3 и 6; внутренние односторонние углы: 4 и 5; 3 и 6; внешние односторонние углы: 2 и 7; 1 и 8.

2. *Если при пересечении двух прямых третьей накрест лежащие углы равны, или соответственные углы равны, или сумма односторонних углов равна* 180°, *то прямые параллельны.*

Доказательство. Пусть накрест лежащие углы равны. Из середины отрезка секущей опустим перпендикуляр на одну из данных прямых и продлим его до пересечения с другой прямой. Полученные треугольники равны по 2-му признаку. Имеем еще один прямой угол. Две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны между собой.

Пусть равны соответственные углы. Из равенства вертикальных углов следует равенство накрест лежащих углов, значит, прямые параллельны.

Пусть сумма односторонних углов равна 180°. Из свойства смежных углов следует равенство накрест лежащих углов, значит, прямые параллельны.

3. *Через точку, не лежащую на прямой, всегда МОЖНО провести прямую, параллельную данной.*

Доказательство. Опустим из данной точки перпендикуляр на данную прямую. Это можно сделать. Восставим перпендикуляр из данной точки к полученной прямой. Это можно сделать. Два перпендикуляра к одной прямой параллельны.

4. *Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести ТОЛЬКО ОДНУ ПРЯМУЮ, параллельную данной.*

5. *Две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой.*

Доказательство. Если бы они пересекались в некоторой точке, то через точку проходили бы две прямые, параллельные данной, что невозможно.

6. *Если в плоскости прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.*

Доказательство. Если прямая пересекает одну из параллельных прямых и не пересекает другую, то она параллельна этой второй прямой. Но через точку нельзя провести две прямые, параллельные третьей.

7. *Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то накрест лежащие углы равны, соответственные углы равны и сумма односторонних углов равна* 180°.

Доказательство. Если накрест лежащие углы 1 и 2 не равны, то, отложив угол, равный углу 2, получим еще одну прямую, параллельную нижней прямой. Но через точку можно провести только одну прямую, параллельную данной. Значит, накрест лежащие углы 1 и 2 равны. Далее. Так как вертикальные углы равны, то и соответственные углы равны. Так как смежные углы в сумме дают 180°, то и односторонние углы в сумме дадут 180°.

8. *Перпендикуляр к одной из параллельных прямых будет перпендикуляром и к другой.*

Доказательство следует из равенства соответственных углов.

9. *Углы с соответственно параллельными сторонами равны, если они одновременно острые или одновременно тупые, и в сумме составляют* 180°, *если один из них острый, а другой — тупой.*

Доказательство. 1) Продлим стороны углов 1 и 2 до пересечения. Получим две пары равных соответственных углов.

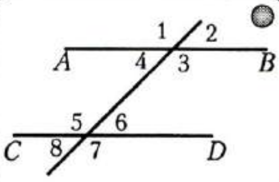
2) Так как углы 1 и 3 смежные, то $\angle 1 + \angle 3 = 180°$. Тогда $\angle 2 + \angle 3 = 180°$.

10. *Углы с соответственно перпендикулярными сторонами равны, если они оба острые или оба тупые, и в сумме составляют* 180°, *если один из них острый, а другой — тупой.*

Доказательство. 1) Из вершины угла 1 проведем прямые, перпендикулярные его сторонам. Тогда $\angle 3 = \angle 2$ как острые углы с соответственно параллельными сторонами. Но углы 1 и 3 дополняют угол 4 до 90°. Поэтому $\angle 1 = \angle 3$, откуда $\angle 1 = \angle 2$.

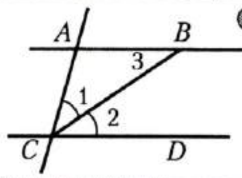
2) Продлим сторону угла 2 за его вершину. Получим тупой угол, который в сумме с углом 2, а значит, и с углом 1 составляет 180°.

Ключевые задачи



Задача 1. При пересечении двух параллельных прямых секущей образовано 8 углов. Угол 1 равен 150°. Найдите остальные углы.

Решение. Так как $AB \parallel CD$, то $\angle 7 = \angle 1 = 150°$ как внешние накрест лежащие, $\angle 5 = \angle 1 = 150°$ как соответственные, $\angle 3 = \angle 1 = 150°$ как вертикальные, $\angle 5 = \angle 3 = 150°$ как внутренние накрест лежащие, $\angle 2 = 180° - \angle 1 = 30°$ по свойству смежных углов, $\angle 8 = \angle 2 = 30°$ как внешние накрест лежащие, $\angle 6 = \angle 2 = 30°$ как соответственные, $\angle 4 = \angle 2 = 30°$ как вертикальные.

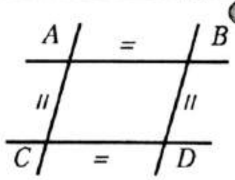


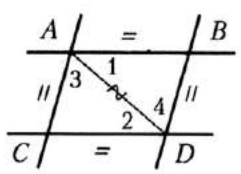
Задача 2. Докажите, что биссектриса одного из внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей отсекает на одной из параллельных прямых отрезок, равный отрезку секущей.

Дано: $AB \parallel CD$, CB — биссектриса $\angle ACD$.

Доказать: $AC = AB$.

Доказательство. $\angle 1 = \angle 2$, так как CB — биссектриса; $\angle 3 = \angle 2$ как накрест лежащие при параллельных прямых. Тогда $\angle 1 = \angle 3$. Отсюда следует, что ΔCAB — равнобедренный по признаку. Следовательно, $AC = AB$.





Задача 3. Докажите, что две параллельные прямые при пересечении двух других параллельных прямых отсекают на них равные отрезки.

Дано: $AB \parallel CD$, $AC \parallel BD$.

Доказать: $AC = BD$.

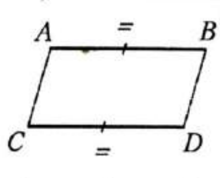
Доказательство. Проведем отрезок AD.

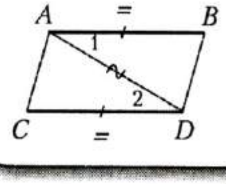
Рассмотрим ΔADC и ΔDAB. У них сторона AD — общая,

$\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD,

$\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие при параллельных прямых AC и BD.

Следовательно, треугольники равны по 2-му признаку. Отсюда $AC = BD$ как стороны, лежащие против равных углов в равных треугольниках.





Задача 4. Докажите, что если два отрезка равны и параллельны, то отрезки, соединяющие их соответственные концы, параллельны.

Дано: $AB \parallel CD$, $AB = CD$.

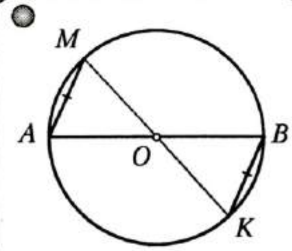
Доказать: $AC \parallel BD$.

Доказательство. Проведем отрезок AD.

Рассмотрим ΔADC и ΔDAB.

У них сторона AD — общая, $AB = CD$ по условию, $\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей AD. Треугольники равны по 1-му признаку. Значит, $\angle ACD = \angle BDA$ как углы, лежащие против равных сторон в равных треугольниках. Но это накрест лежащие углы. Поэтому $AC \parallel BD$.

Задача 5. В окружности диаметром AB проведены две равные хорды AM и BK так, что точки M и K лежат по разные стороны от прямой AB. Докажите, что данные хорды параллельны.



Дано: AB — диаметр, $AM = BK$.

Доказать: $AM \parallel BK$.

Доказательство. Соединим центр окружности O с точками M и K. Рассмотрим ΔAOM и ΔBOK. У них $OA = OB$, $OM = OK$ как радиусы, $AM = BK$ по условию. Треугольники равны по 3-му признаку. Значит, $\angle A = \angle B$ как углы, лежащие против соответственно равных сторон в равных треугольниках. Но это накрест лежащие углы при прямых AM и BK и секущей AB. Тогда $AM \parallel BK$ по признаку параллельности прямых.

Дополнительный материал

Простые вопросы

1. Сколько углов, меньших 180°, образуется, если две параллельные прямые пересечь двумя секущими?

2. Две прямые пересечены третьей. Сколько пар внутренних накрест лежащих углов образуется при этом? А сколько пар внешних накрест лежащих углов?

3. Две прямые пересечены третьей. Сколько пар соответственных углов образуется при этом?

4. Две прямые пересечены третьей. Могут ли накрест лежащие углы быть не равны?

5. Две прямые пересечены третьей. Один из накрест лежащих углов равен 61°, другой — 59°. На сколько градусов нужно увеличить меньший угол, чтобы прямые стали параллельными?

6. Две прямые пересечены третьей. Один из внутренних односторонних углов — 88°, другой — 93°. На сколько градусов нужно уменьшить больший угол, чтобы прямые стали параллельными?

7. Даны две параллельные прямые и секущая. Могут ли внутренние односторонние углы быть равны между собой?

8. Если один из внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей острый, то какой второй угол? Почему?

9. Если внутренние односторонние углы равны между собой, то обязательно ли прямые параллельны?

10. Сколько теорем в теме «Параллельные прямые»?

Непростые вопросы

11.* Если две прямые не пересекаются, то обязательно ли они параллельны?

12.* Существует ли прямая, которая параллельна каждой из двух пересекающихся прямых?

13.* Какое определение вы дали бы накрест лежащим углам?

14.* Каким методом доказывается теорема о свойстве параллельных прямых: «Если две параллельные прямые пересечены третьей, то накрест лежащие углы равны»?

15.* Верно ли, что если стороны углов соответственно параллельны, то углы равны?

16.* Верно ли, что если стороны углов соответственно перпендикулярны, то углы равны?

Ответы на простые и непростые вопросы

1. 16.
2. Две пары. Две пары.
3. Четыре пары.
4. Да, если прямые не параллельны.
5. На 2°.
6. На 1°.
7. Да, если секущая перпендикулярна этим прямым.
8. Тупой, так как эти углы в сумме равны 180°.
9. Не обязательно. Прямые будут параллельны, только если сумма этих углов равна 180°.
10. 8.
11.* Нет. Они могут быть скрещивающимися. Прямые будут параллельны, только если не пересекаются и при этом лежат в одной плоскости.
12.* Нет. Иначе через точку пройдут две прямые, параллельные данной, что невозможно.
13.* Например. Пусть AB и CD — две прямые и AC — третья прямая, пересекающая прямые AB и CD. Прямая AC по отношению к прямым AB и CD называется секущей. Если точки B и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC, то углы BAC и DCA называются внутренними накрест лежащими.
14.* Методом от противного.
15.* Нет. Углы могут дополнять друг друга до 180°.
16.* Нет. Углы могут дополнять друг друга до 180°.

Для тех, кому нравится математика

Накрест лежащие углы существуют при любых двух прямых и секущей. Но не всегда они равны. Если они равны, то прямые параллельны. И наоборот, если прямые параллельны, то эти углы равны. Признак и свойство параллельных прямых можно объединить в одну теорему: «Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда накрест лежащие углы равны». Это необходимое и достаточное условие параллельности. С одной стороны, для того чтобы прямые были параллельны, достаточно того, чтобы накрест лежащие углы были равны. С другой стороны, из параллельности прямых с необходимостью следует, что накрест лежащие углы равны.

Схематически любую теорему можно представить в виде $A \Rightarrow B$ (из A следует B). Здесь A — это условие теоремы, то, что дано по условию, а B — это заключение теоремы, то, что нужно доказать. В нашем признаке параллельности прямых условие A — накрест лежащие углы равны, заключение B — прямые параллельны.


Евклид

Если наряду с утверждением $A \Rightarrow B$ верно и утверждение $B \Rightarrow A$, то второе утверждение называется теоремой, обратной к данной. В нашем случае это свойство параллельных прямых:

Если B — прямые параллельны, то A — накрест лежащие углы равны.

Не все теоремы имеют обратные к себе. Например, теорема о свойстве смежных углов «Если смежные углы равны, то их сумма равна 180°» — не имеет обратной. Утверждение «Если сумма двух углов равна 180°, то углы смежные» — неверно, так как можно указать пример, когда это условие не выполняется.

Точка, прямая, плоскость — это неопределяемые понятия геометрии, то есть мы не даем им определения. А остальные фигуры определяются через указанные.

В зависимости от того, какие взять неопределяемые понятия и какие аксиомы, строится вся геометрическая система, т. е. весь набор последующих определений и теорем.

Геометрия, которую вы изучаете в школе, называется «евклидовой геометрией». Ее основы заложил древнегреческий математик Евклид. Русский математик Николай Лобачевский в XVIII веке создал другую геометрию. Он предположил, что через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, параллельные данной. Получилась новая система определений и теорем, которая отличалась от системы Евклида. Эту геометрию назвали по имени ее создателя — «геометрия Лобачевского».

Поскольку геометрия в приближенной форме описывает окружающий мир, то задача ученых создать такую геометрию, которая делала бы это точнее всего. Так вот, оказывается, что геометрия Лобачевского точнее описывает геометрию Вселенной, чем геометрия Евклида. Результатами геометрии Лобачевского пользовался великий ученый А. Эйнштейн.

Николай Иванович Лобачевский

Запомните!

1 Признаки параллельных прямых.
Если при пересечении двух прямых третьей накрест лежащие углы равны, или соответственные углы равны, или сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

2 Свойства параллельных прямых.
Если две параллельные прямые пересечены третьей, то накрест лежащие углы равны, соответственные углы равны и сумма односторонних углов равна 180°.

3 Теорема о двух перпендикулярах к одной прямой на плоскости.
Два перпендикуляра к одной прямой параллельны.

4 Теорема о перпендикуляре к одной из двух параллельных прямых.
Перпендикуляр к одной из двух параллельных прямых будет перпендикуляром и к другой.

5 Теорема о двух прямых, параллельных третьей.
Две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой.

6 Теорема об углах с соответственно параллельными сторонами.
Углы с соответственно параллельными сторонами или равны, или в сумме составляют 180°.

7 Теорема об углах с соответственно перпендикулярными сторонами.
Углы с соответственно перпендикулярными сторонами или равны, или в сумме составляют 180°.

Задачи по теме «Параллельные прямые»

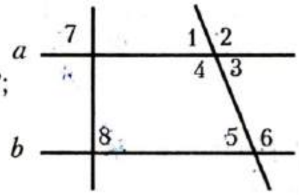
1 Докажите, что $a \parallel b$, если:

а) $\angle 2 = \angle 6$;

б) $\angle 3 = \angle 5$;

в) $\angle 4 + \angle 5 = 180°$;

г) $\angle 7 = \angle 8 = 90°$.



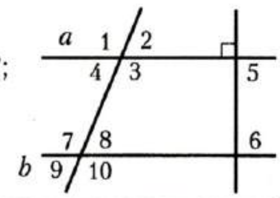
2 Докажите, что если $a \parallel b$, то:

а) $\angle 3 = \angle 7$;

б) $\angle 4 = \angle 9$;

в) $\angle 2 + \angle 10 = 180°$;

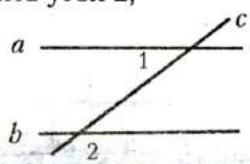
г) $\angle 5 = \angle 6 = 90°$.



3 Если $\angle 1 = 30°$, $\angle 2 = 152°$, то:

а) параллельны ли прямые *a* и *b*;

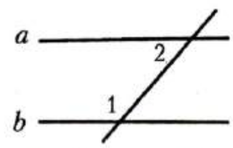
б) как нужно изменить угол 2, чтобы $a \parallel b$?



4 Если $\angle 1 = 140°$, $\angle 2 = 39°$, то:

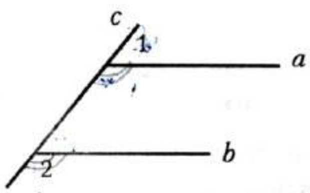
а) параллельны ли прямые *a* и *b*;

б) как нужно изменить угол 2, чтобы $a \parallel b$?



5 *Дано*: $a \parallel b$, $\angle 1 = 45°$.

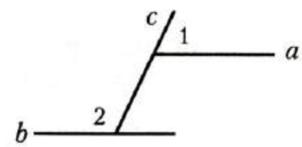
Найти: $\angle 2$.



Ответ:

6 *Дано*: $a \parallel b$, $\angle 1 = 65°$.

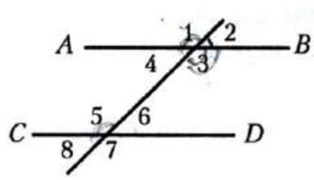
Найти: $\angle 2$.



Ответ:

7 *Дано*: $AB \parallel CD$.

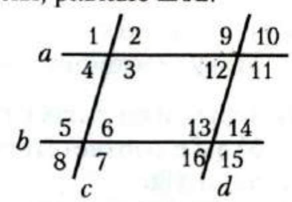
Найти: все углы, равные $\angle 1$.



Ответ:

8 *Дано*: $a \parallel b$, $c \parallel d$.

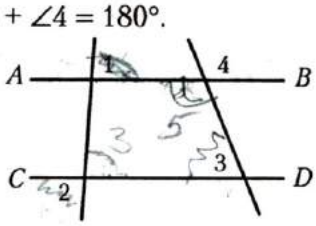
Найти: все углы, равные $\angle 12$.



Ответ:

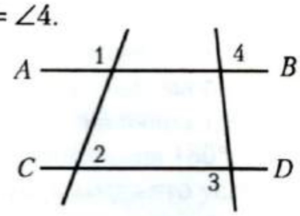
9 *Дано*: $\angle 1 = \angle 2$.

Доказать: $\angle 3 + \angle 4 = 180°$.



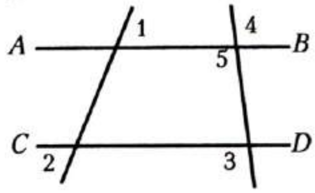
10 *Дано*: $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

Доказать: $\angle 3 = \angle 4$.



11 *Дано*: $\angle 1 = 50°$, $\angle 2 = 50°$, $\angle 3 = 108°$.

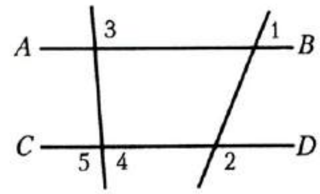
Найти: $\angle 4 + \angle 5$.



Ответ:

12 *Дано*: $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, $\angle 3 = 96°$.

Найти: $\angle 5 - \angle 4$.

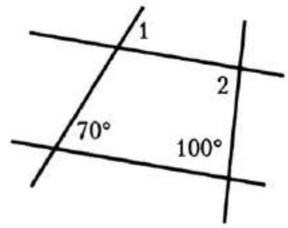


Ответ:

13 При каком значении угла 1 угол 2 равен 95°?

Ответ:

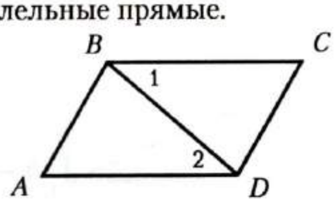
14 При каком значении угла 1 угол 2 равен 80°?



Ответ:

15 *Дано*: $\angle 1 = \angle 2$.

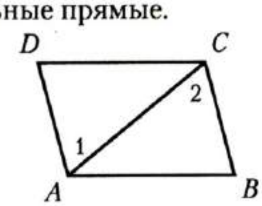
Найти: параллельные прямые.



Ответ:

16 *Дано*: $\angle 1 = \angle 2$.

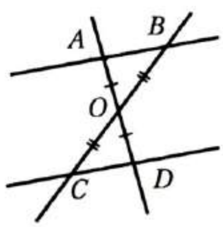
Найти: параллельные прямые.



Ответ:

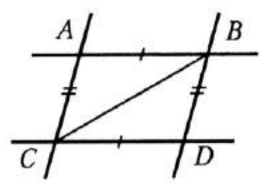
17 *Дано*: $AO = OD$, $BO = OC$.

Доказать: $AB \parallel CD$.



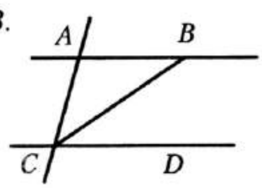
18 *Дано*: $AB = CD$, $AC = BD$.

Доказать: $AC \parallel BD$.



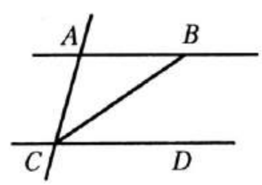
19 *Дано*: $AB \parallel CD$, CB — биссектриса $\angle ACD$.

Доказать: $AC = AB$.

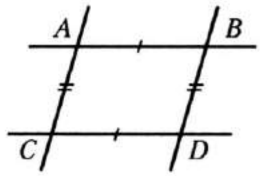


20 *Дано*: $AC = AB$, CB — биссектриса $\angle ACD$.

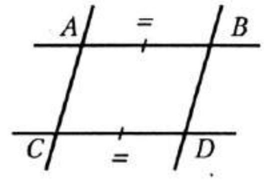
Доказать: $AB \parallel CD$.



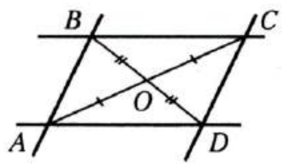
21 *Дано*: $AB = CD$, $AC = BD$.
Доказать: $AB \parallel CD$, $AC \parallel BD$.



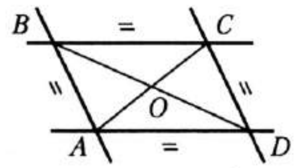
22 *Дано*: $AB = CD$, $AB \parallel CD$.
Доказать: $AC \parallel BD$.



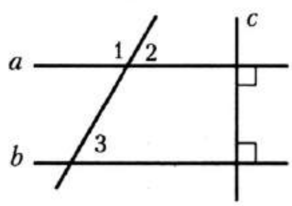
23 *Дано*: $AO = OC$, $BO = OD$.
Доказать: $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$.



24 *Дано*: $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$.
Доказать: $AO = OC$, $BO = OD$.

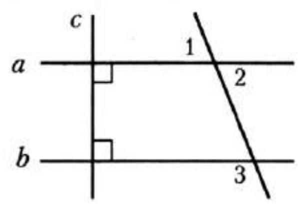


25 *Дано*: $a \perp c$, $b \perp c$, $\angle 2 + \angle 3 = 122°$.
Найти: $\angle 1$.



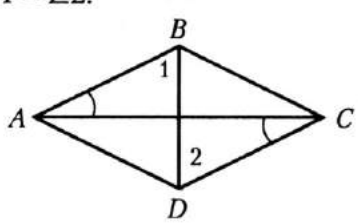
Ответ:

26 *Дано*: $a \perp c$, $b \perp c$, $\angle 1 + \angle 2 = 96°$.
Найти: $\angle 3$.

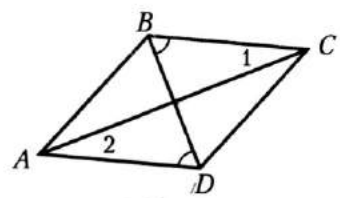


Ответ:

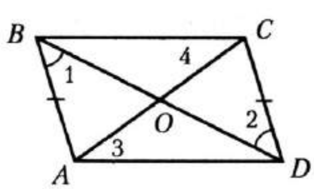
27 *Дано*: $\angle BAC = \angle DCA$.
Доказать: $\angle 1 = \angle 2$.



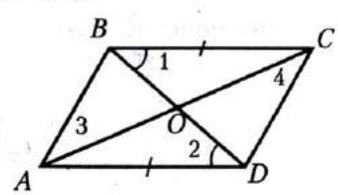
28 *Дано*: $\angle CBD = \angle ADB$.
Доказать: $\angle 1 = \angle 2$.



29* *Дано*: $AB = CD$, $\angle 1 = \angle 2$.
Доказать: $\angle 3 = \angle 4$.



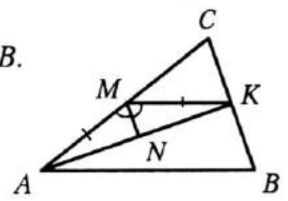
30* *Дано*: $BC = AD$, $\angle 1 = \angle 2$.
Доказать: $\angle 3 = \angle 4$.



31*

Дано: $AB = AC$, AK — биссектриса ΔABC, $AM = MK$, MN — биссектриса ΔAMK.

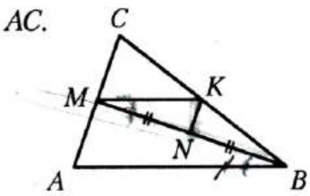
Доказать: $MN \parallel CB$.



32*

Дано: $AB = BC$, BM — медиана ΔABC, $MK \parallel AB$, KN — медиана ΔMKB.

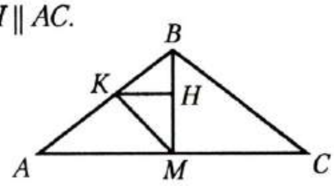
Доказать: $KN \parallel AC$.



33

Дано: $AB = BC$, BM — медиана ΔABC, KH — высота ΔMKB.

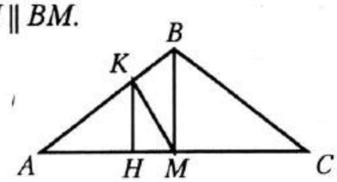
Доказать: $KH \parallel AC$.



34

Дано: $AB = BC$, BM — биссектриса ΔABC, KH — высота ΔAKM.

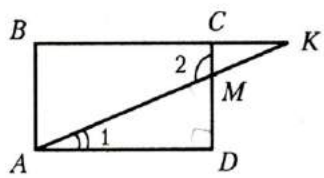
Доказать: $KH \parallel BM$.



35

Дано: $ABCD$ — прямоугольник (все углы прямые), $\angle 1 = 40°$.

Найти: $\angle 2$.

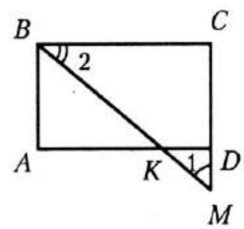


Ответ:

36

Дано: $ABCD$ — прямоугольник (все углы прямые), $\angle 1 = 50°$.

Найти: $\angle 2$.

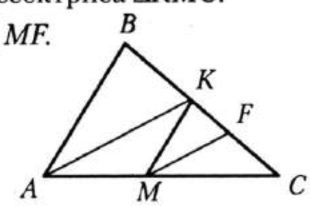


Ответ:

37*

Дано: $MK \parallel AB$, AK — биссектриса ΔBAC, MF — биссектриса ΔKMC.

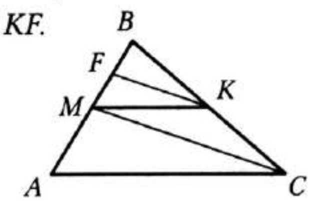
Доказать: $AK \parallel MF$.



38*

Дано: $MK \parallel AC$, CM — биссектриса ΔACB, KF — биссектриса ΔMKB.

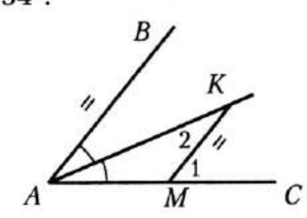
Доказать: $CM \parallel KF$.



39

Дано: AK — биссектриса $\angle BAC$, $MK \parallel AB$, $\angle 1 = 54°$.

Найти: $\angle 2$.

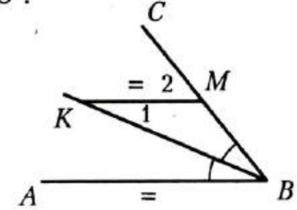


Ответ:

40

Дано: BK — биссектриса $\angle ABC$, $KM \parallel AB$, $\angle 1 = 28°$.

Найти: $\angle 2$.



Ответ:

41 Из точки M, взятой внутри угла, равного $38°$, проведены два луча, параллельные сторонам угла. Найдите наименьший из возможных углов, образованных этими лучами.

Сделайте рисунок в тетради.

Ответ:

42 Из точки K, взятой внутри угла, равного $64°$, проведены две прямые, перпендикулярные сторонам угла. Найдите наименьший из возможных углов, образованных этими прямыми.

Сделайте рисунок в тетради.

Ответ:

43 Два угла со взаимно параллельными сторонами относятся как $2 : 7$. Найдите эти углы.

Сделайте рисунок в тетради.

Ответ:

44 Стороны двух углов взаимно перпендикулярны. Один из них на $54°$ больше другого. Найдите эти углы.

Сделайте рисунок в тетради.

Ответ:

45 Из точки, взятой внутри угла, равного $42°$, опущены перпендикуляры на его стороны. Найдите угол между перпендикулярами.

Сделайте рисунок в тетради.

Ответ:

46 Из точки, взятой вне угла, равного $42°$, опущены перпендикуляры на его стороны. Найдите угол между перпендикулярами.

Сделайте рисунок в тетради.

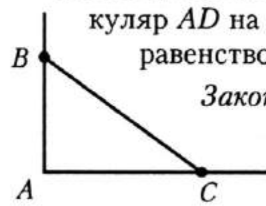
Ответ:

47 На сторонах прямого угла C взяты точки A и B. Из точки C опущен перпендикуляр CD на прямую AB. Докажите равенство углов ACD и ABC.

Закончите рисунок.

48 На сторонах прямого угла A взяты точки B и C. Из точки A опущен перпендикуляр AD на прямую BC. Докажите равенство углов ABC и DAC.

Закончите рисунок.



49 На стороне острого угла A взята точка B. Из точки B опущен перпендикуляр BC на другую сторону угла. Далее проведены $CD \perp AB$, $DE \perp AC$, $EF \perp AB$. Докажите равенство углов: а) EDC и CAB; б) FED и DCB.

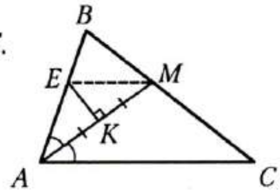
Сделайте рисунок в тетради.

50 На стороне острого угла A взята точка B. Из точки B опущен перпендикуляр BC на другую сторону угла. Далее проведены $CD \perp AB$, $DE \perp AC$, $EF \perp AB$. Докажите равенство углов: а) BCD и BAC; б) AEF и ACD.

Сделайте рисунок в тетради.

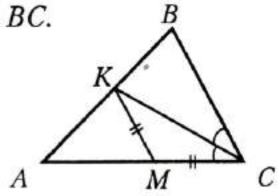
51 *Дано*: AM — биссектриса ΔABC, KE — серединный перпендикуляр к отрезку AM.

Доказать: $EM \parallel AC$.



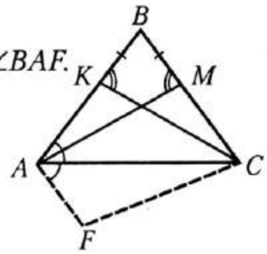
52 *Дано*: CK — биссектриса ΔABC, $CM = MK$.

Доказать: $MK \parallel BC$.



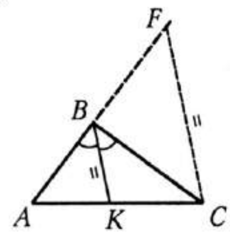
53* *Дано*: $BM = BK$, $\angle AMB = \angle CKB$, AC — биссектриса $\angle BAF$.

Доказать: $AF \parallel BC$.



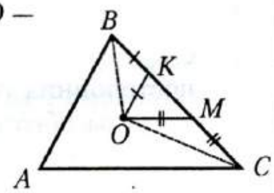
54 *Дано*: BK — биссектриса ΔABC, $CF \parallel BK$.

Доказать: ΔBCF — равнобедренный.



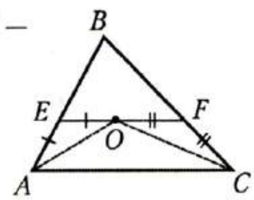
55 *Дано*: $OK \parallel AB$, $OM \parallel AC$, $OK = BK$, $OM = MC$.

Доказать: BO и CO — биссектрисы.

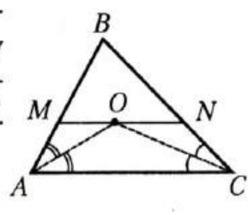


56 *Дано*: $EF \parallel AC$, $AE = EO$, $CF = FO$.

Доказать: AO и CO — биссектрисы.

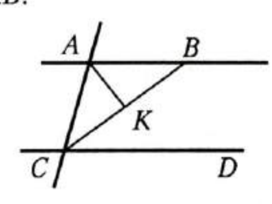


57* Через точку пересечения биссектрис ΔABC проведена прямая, параллельная прямой AC, пересекающая сторону AB в точке M, а сторону BC в точке N. Докажите, что $MN = AM + CN$.



58* *Дано*: $AB \parallel CD$, CB — биссектриса $\angle ACD$, AK — биссектриса $\angle CAB$.

Доказать: $CK = KB$.



59* Придумайте задачу на тему «Параллельные прямые».

Запишите условие придуманной задачи.

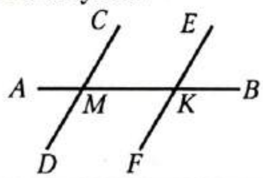
60* Придумайте задачу на тему «Параллельные прямые».

Запишите условие придуманной задачи.

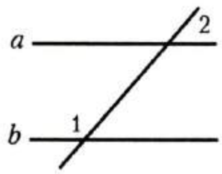
Контрольная работа

Вариант 1

1 Запишите два накрест лежащих угла, два соответственных угла и два внутренних односторонних угла.



2 $a \parallel b$, $\angle 1 = 130°$. Найдите $\angle 2$.



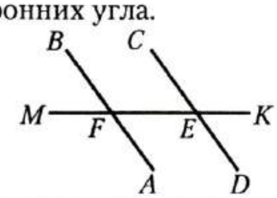
3 Прямые AB и CD параллельны, MN — секущая. Два внутренних односторонних угла относятся как 2 : 3. Найдите все углы, образованные параллельными прямыми и секущей.

4 В треугольнике ABC равны стороны AC и BC. На стороне AC взята точка M. Через точку M проведена прямая, параллельная BC, которая пересекает сторону AB в точке K. Докажите, что ΔAMK — равнобедренный.

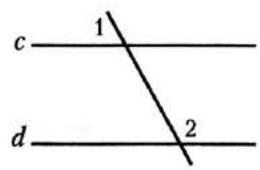
5 Дан четырехугольник $ABCD$. Известно, что $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$. Докажите, что биссектрисы углов A и C параллельны или совпадают.

Вариант 2

1 Запишите два накрест лежащих угла, два соответственных угла и два внутренних односторонних угла.



2 $c \parallel d$, $\angle 1 = 45°$. Найдите $\angle 2$.



3 Прямые AB и CD параллельны, NP — секущая. Разность двух внутренних односторонних углов равна 40°. Найдите все углы, образованные параллельными прямыми и секущей.

4 В треугольнике MNK равны стороны MN и MK. На стороне MN взята точка A. Через точку A проведена прямая, параллельная NK, которая пересекает сторону MK в точке B. Докажите, что ΔMAB — равнобедренный.

5 Дан четырехугольник $MNPK$. Известно, что $MN \parallel PK$, $NP \parallel MK$. Докажите, что биссектрисы углов N и K параллельны или совпадают.

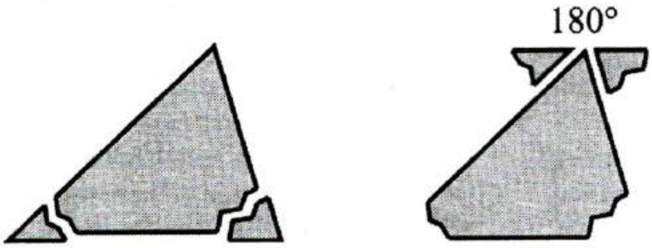
Тема 4
Сумма углов треугольника

Доводы, до которых человек додумывается сам, обычно убеждают его больше, нежели те, которые пришли в голову другим.

Б. Паскаль

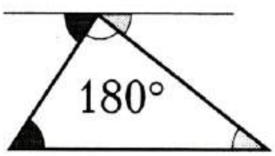
Великий французский ученый XVII века Блез Паскаль в детстве любил возиться с геометрическими фигурами. Он был знаком с транспортиром и умел измерять углы. Юный исследователь заметил, что у всех треугольников сумма трех углов получается одна и та же — 180°. «Как же это доказать? — подумал Паскаль. — Ведь нельзя же проверить сумму углов у всех треугольников — их бесконечное множество». Тогда он отрезал ножницами два уголка треугольника и приложил их к третьему углу. Получился развернутый угол, который, как известно, равен 180°. Это было его первое собственное открытие. Дальнейшая судьба мальчика была уже предопределена.

В этой теме вы познакомитесь с пятью признаками равенства прямоугольных треугольников и, пожалуй, с самым популярным свойством прямоугольного треугольника с углом 30°. Оно звучит так: катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы. Разделив равносторонний треугольник высотой, мы сразу получим доказательство этого свойства.

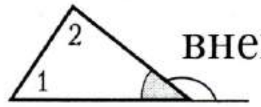


Блез Паскаль — французский мыслитель, математик и физик, один из величайших умов XVII века.

Сумма углов треугольника

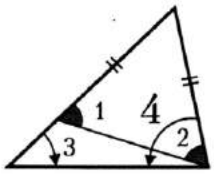


(Равносторонний
Прямоугольный)

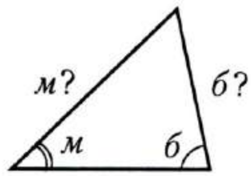


внешний

1. *Против большей стороны ...*

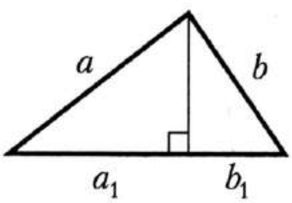


2. *Против большего угла ...*



катет < гип.
перп. < накл.

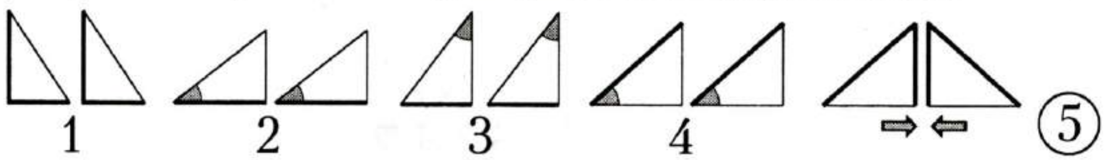
Неравенство треугольника

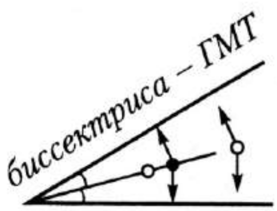


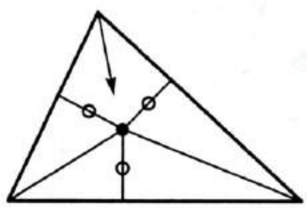
$$+\begin{array}{l} a_1 < a \\ b_1 < b \\ \hline c < a+b \end{array}$$

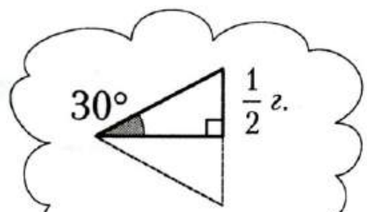
$$\boxed{\begin{array}{c} a < b+c \\ b < a+c \\ c < a+b \end{array}}$$

Признаки равенства прямоугольных треугольников

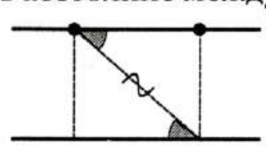








Расстояние между



параллельными

1. **Теорема о сумме углов треугольника.**
2. Свойство углов равностороннего треугольника.
3. Свойство острых углов прямоугольного треугольника.
4. **Теорема о внешнем угле треугольника.**
5. Теорема о соотношении сторон и углов.
6. Следствия:
   1) о катете и гипотенузе;
   2) о наклонной и перпендикуляре.
7. Расстояние от точки до прямой.
8. **Теорема о неравенстве треугольника.** Следствие о ломаной.
9. Первые 4 признака равенства прямоугольных треугольников.
10. **Пятый признак равенства прямоугольных треугольников.**
11. Теорема о свойстве точек биссектрисы угла.
12. 2-я замечательная точка.
13. **Теорема о катете, лежащем против угла в 30°.**
14. Расстояние между параллельными прямыми.

№ 4

Рассказ по опорному конспекту

Теорема. *Сумма углов треугольника равна* 180°. Для доказательства проведем через вершину прямую, параллельную основанию. Темные углы равны и серые углы равны как накрест лежащие при параллельных прямых. Темный угол, серый угол и угол при вершине образуют развернутый угол, их сумма 180°.

Из теоремы следует, что углы равностороннего треугольника равны по 60° и что сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

Внешним углом треугольника называется угол, смежный с углом треугольника. Поэтому иногда углы самого треугольника называют *внутренними углами*.

Теорема о внешнем угле треугольника. *Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним.* Действительно, внешний угол и два внутренних, не смежных с ним, дополняют закрашенный угол до 180°.

Из теоремы следует, что *внешний угол больше любого внутреннего, не смежного с ним.*

Теорема о соотношениях между сторонами и углами треугольника. *В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, а против большего угла лежит большая сторона.*

Отсюда следует: 1) *Катет меньше гипотенузы.* 2) *Перпендикуляр меньше наклонной.*

Расстояние от точки до прямой. Так как перпендикуляр меньше любой наклонной, проведенной из той же точки, то его длина принимается за расстояние от точки до прямой.

Неравенство треугольника. *Длина любой стороны треугольника меньше суммы двух других его сторон, т. е.* $a < b + c$, $b < a + c$, $c < a + b$. Следствие. *Длина ломаной больше отрезка, соединяющего ее концы.*

ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

По двум катетам. *Если два катета одного прямоугольного треугольника соответственно равны двум катетам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

По катету и прилежащему острому углу. *Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого треугольника, то такие треугольники равны.*

По катету и противолежащему острому углу. *Если катет и противолежащий ему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему ему острому углу другого треугольника, то такие треугольники равны.*

По гипотенузе и острому углу. *Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Доказательство этих признаков сразу сводится к одному из признаков равенства треугольников.

По катету и гипотенузе. *Если катет и гипотенуза одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и гипотенузе другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.*

Доказательство. Приложим треугольники равными катетами. Получим равнобедренный треугольник. Его высота, проведенная из вершины, будет и медианой. Тогда у треугольников равны и вторые катеты, и треугольники равны по трем сторонам.

Теорема о свойстве катета, лежащего против угла 30°. *Катет, лежащий против угла* 30°, *равен половине гипотенузы.* Доказывается достроением треугольника до равностороннего.

Теорема о свойстве точек биссектрисы угла. *Любая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон. Если точка равноудалена от сторон угла, то она лежит на биссектрисе угла.* Доказывается проведением двух перпендикуляров к сторонам угла и рассмотрением прямоугольных треугольников.

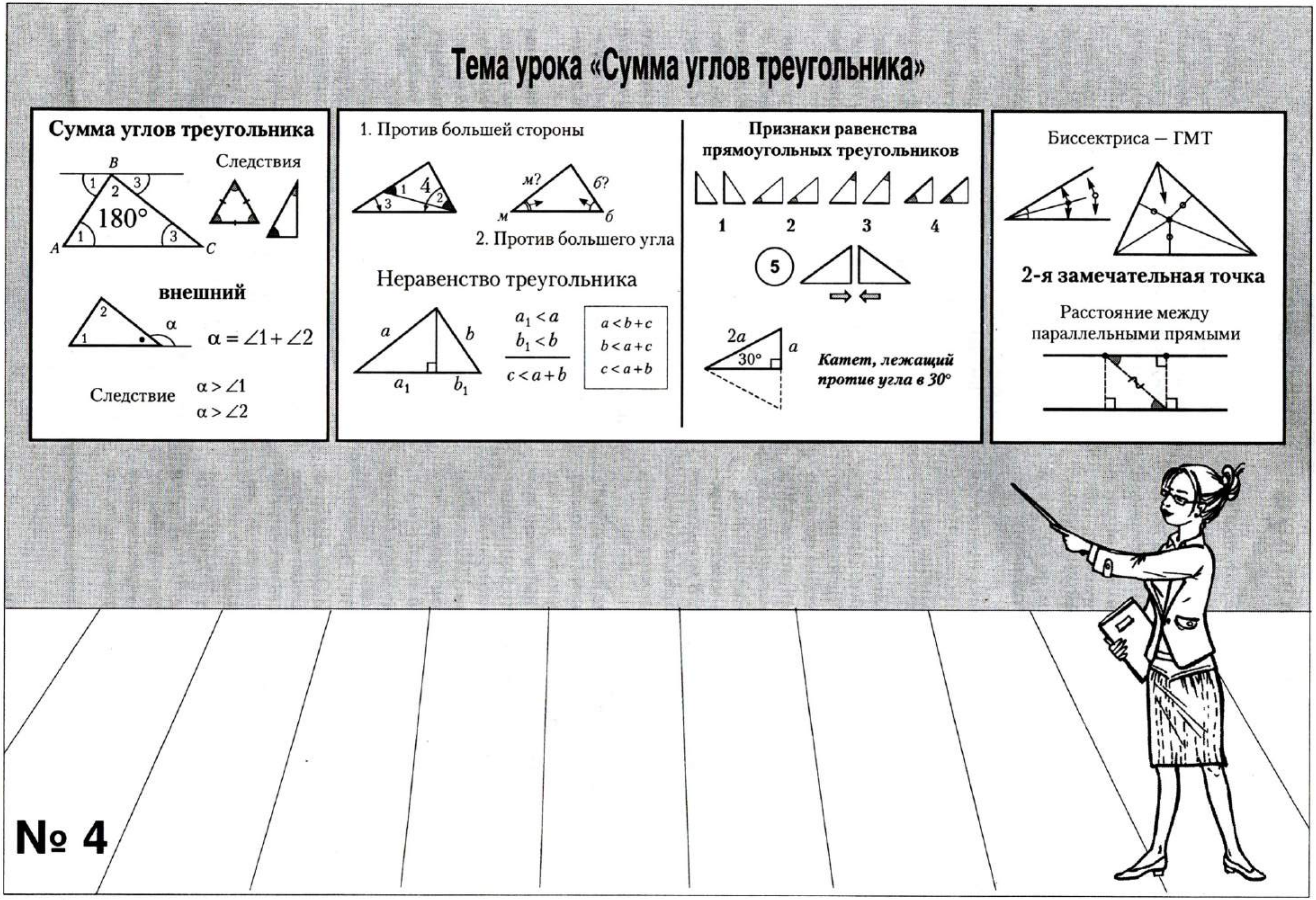
Вторая замечательная точка. *Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

Расстояние между параллельными прямыми.

Теорема. *Все точки каждой из двух параллельных прямых находятся на равном расстоянии от другой прямой.*

Из теоремы следует определение расстояния между параллельными прямыми.

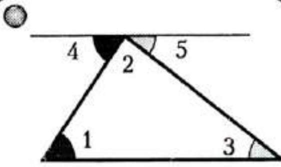
Определение. *Расстоянием между двумя параллельными прямыми называется расстояние от любой точки одной из параллельных прямых до другой прямой.*



Тема урока «Сумма углов треугольника»
Сумма углов треугольника
B
1
3
2
180°
A
1
3
C
Следствия
внешний
2
1
α
α = ∠1 + ∠2
Следствие
α > ∠1
α > ∠2
1. Против большей стороны
1
4
2
3
м?
б?
м
б
2. Против большего угла
Неравенство треугольника
a
b
a1
b1
a1 < a
b1 < b
c < a + b
a < b + c
b < a + c
c < a + b
Признаки равенства
прямоугольных треугольников
1
2
3
4
5
2a
30°
a
Катет, лежащий
против угла в 30°
Биссектриса – ГМТ
2-я замечательная точка
Расстояние между
параллельными прямыми
№ 4

Подробные доказательства теорем

Теорема о сумме углов треугольника. *Сумма углов треугольника равна* 180°.

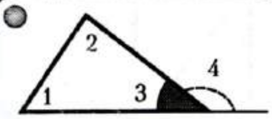


Доказательство. Проведем через вершину треугольника прямую, параллельную основанию. $\angle 4 = \angle 1$, $\angle 5 = \angle 3$ как накрест лежащие при параллельных прямых и соответствующей секущей. Углы 4, 2 и 5 образуют развернутый угол, и их сумма равна 180°. Тогда $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$.

Следствие 1. *Углы равностороннего треугольника равны по* 60°.

Следствие 2. *Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна* 90°.

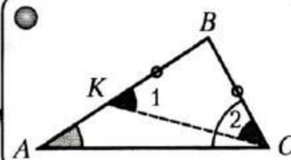
Теорема о внешнем угле треугольника. *Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним.*



Доказательство. Внешний угол 4 и угол 3 в сумме составляют 180° как смежные углы. Углы 1 и 2 в сумме с углом 3 также составляют 180°. Значит, $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$.

Следствие. *Внешний угол больше любого внутреннего, не смежного с ним.*

Теорема о соотношениях между сторонами и углами треугольника. *В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, и наоборот, против большего угла лежит большая сторона.*



Доказательство. 1) Докажем, что против большей стороны лежит больший угол. Пусть $AB > BC$. Отложим сторону BC на стороне AB, т. е. $BK = CB$. Так как ΔKCB — равнобедренный, то $\angle 1 = \angle 2$. В ΔAKC угол A меньше внешнего $\angle 1$ (по следствию из теоремы о внешнем угле). Угол C больше $\angle 2$. Следовательно, $\angle C$ больше $\angle A$. Что и требовалось доказать.

2) Докажем, что против большего угла лежит большая сторона. Пусть $\angle C$ больше $\angle A$.

Если $AB < BC$, то по доказанному в 1-й части $\angle C$ меньше $\angle A$. Противоречие.

Если $AB = BC$, то треугольник ABC равнобедренный и тогда $\angle C$ равен $\angle A$. Противоречие.

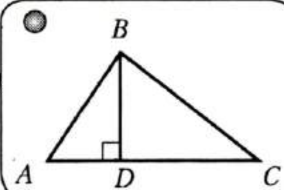
Остается признать, что $AB > BC$.

Следствие 1. *Катет меньше гипотенузы.*

Следствие 2. *Перпендикуляр меньше наклонной.*

Доказательство. Гипотенуза лежит против прямого угла, а катет — против острого, который меньше прямого.

Неравенство треугольника. *Длина любой стороны треугольника меньше суммы двух других его сторон.*

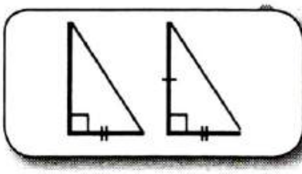


Доказательство. Опустим высоту BD на большую сторону AC. Так как катет меньше гипотенузы, то из прямоугольных треугольников ADB и CDB получим, что $AD < AB$ и $DC < BC$. Отсюда $AC < AB + BC$. Для двух меньших сторон очевидно, что $AB < BC + AC$ и $BC < AB + AC$.

Следствие. *Длина ломаной больше отрезка, соединяющего ее концы.*

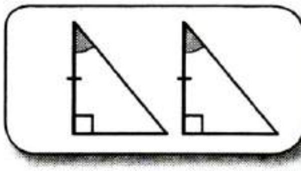
Доказательство проводят, соединяя концы двух последовательных звеньев ломаной.

Признаки равенства прямоугольных треугольников.



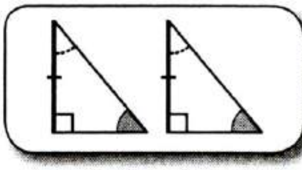
1) По двум катетам. *Если два катета одного прямоугольного треугольника соответственно равны двум катетам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Доказательство. Треугольники равны по 1-му признаку равенства треугольников.



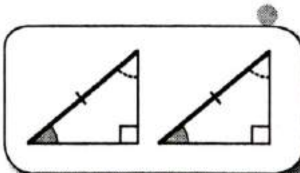
2) По катету и прилежащему острому углу. *Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Доказательство. Треугольники равны по 2-му признаку равенства треугольников.



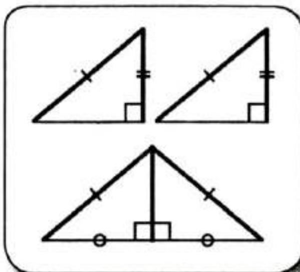
3) По катету и противолежащему острому углу. *Если катет и противолежащий ему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему ему острому углу другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Доказательство. Так как сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°, то равны и вторые острые углы. Тогда треугольники равны по 2-му признаку равенства треугольников.



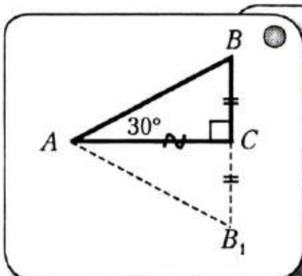
4) По гипотенузе и острому углу. *Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Доказательство. Так как сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°, то равны и вторые острые углы. Тогда треугольники равны по 2-му признаку равенства треугольников.



5) По катету и гипотенузе. *Если катет и гипотенуза одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и гипотенузе другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.*

Доказательство. Приложим треугольники равными катетами. Получим равнобедренный треугольник и его высоту, проведенную из вершины. Она является и медианой. Тогда у треугольников равны и вторые катеты, и треугольники равны по трем сторонам (или по двум катетам).



Теорема о свойстве катета, лежащего против угла 30°.

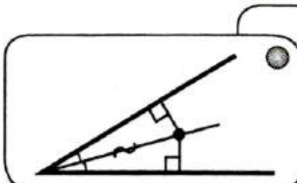
1) *Катет, лежащий против угла* 30°, *равен половине гипотенузы.*

2) *Если катет равен половине гипотенузы, то он лежит против угла* 30°.

1) *Доказательство.* Продлив катет BC на его длину, получим равносторонний ΔABB_1 ($\angle B = 60°$, $\Delta ABC = \Delta AB_1C$, $\angle B_1 = 60°$, $\angle A = 60°$). $AB = BB_1$, $BC = \frac{1}{2}AB$.

2) *Доказательство.* Продлив катет BC на его длину, получим равносторонний ΔABB_1 ($AB = BB_1$, $\Delta ABC = \Delta AB_1C$, $AB_1 = AB$) и $\angle B = 60°$.

Тогда $\angle BAC = 30°$.



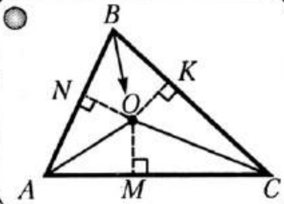
Теорема о свойстве точек биссектрисы угла. *Любая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон. Если точка равноудалена от сторон угла, то она лежит на биссектрисе угла.*

Доказательство. 1) Если точка лежит на биссектрисе, то прямоугольные треугольники равны по общей гипотенузе и острому углу. Тогда равны и катеты, лежащие против половинок угла, т. е. равны расстояния от точки до сторон угла.

2) Если точка равноудалена от сторон угла, то прямоугольные треугольники равны по общей гипотенузе и катету. Тогда равны и углы, лежащие против этих катетов, т. е. точка лежит на биссектрисе.

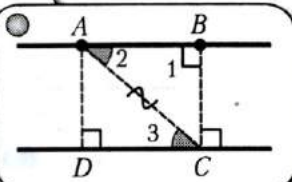
Биссектриса является геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон угла.

Вторая замечательная точка. *Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*



Доказательство. Проведем две биссектрисы AO и CO. Так как точка O принадлежит биссектрисе AO, то $OM = ON$. Так как точка O принадлежит биссектрисе CO, то $OM = OK$. Тогда $ON = OK$. Так как точка O равноудалена от сторон угла B, то она лежит на биссектрисе этого угла, т. е. третья биссектриса проходит через точку O.
Примечание. Точка пересечения биссектрис является центром вписанной в треугольник окружности.

Теорема. *Все точки каждой из двух параллельных прямых находятся на равном расстоянии от другой прямой.*



Доказательство. Опустим перпендикуляры AD и BC. Перпендикуляр к одной из параллельных прямых является перпендикуляром и к другой. Поэтому $\angle 1 = 90°$. Углы 2 и 3 равны как накрест лежащие при параллельных прямых и секущей. Тогда треугольники ABC и CDA равны по гипотенузе и острому углу. Отсюда $AD = BC$.

Из доказанного следует определение расстояния между параллельными прямыми.

Ответы на вопросы к теме

1. Теорема. *Сумма углов треугольника равна* 180°.

Доказательство. Проведем через вершину прямую, параллельную основанию. Получим две пары равных накрест лежащих углов. Так как развернутый угол равен 180°, то сумма углов треугольника 180°.

2. Следствие 1. *Каждый из углов равностороннего треугольника равен* 60°. Углы равностороннего треугольника равны между собой. Поэтому каждый из них равен $180° : 3 = 60°$.

3. Следствие 2. *Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна* 90°. Прямой угол равен 90°. Сумма острых углов $180° - 90° = 90°$.

4. *Внешним углом* треугольника называется угол, смежный с углом треугольника.

Теорема. *Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним.*

Доказательство. Внешний угол дополняет смежный с ним внутренний угол треугольника до 180°, и два угла, не смежных с ним, дополняют этот угол до 180°.

Следствие. *Внешний угол больше любого из внутренних углов, не смежных с ним.*

5. Теорема. *В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, а против большего угла лежит большая сторона.*

Доказательство. 1) Отложим меньшую сторону на большей стороне. Получим равнобедренный треугольник, у которого $\angle 1 = \angle 2$. Так как $\angle 3$ меньше внешнего угла 1, а $\angle 4$ больше угла 2, то $\angle 3$ меньше $\angle 4$.

2) Если бы против большего угла лежала меньшая сторона, то это противоречило бы 1-й части теоремы: против большей стороны лежит больший угол. А если бы противолежащие стороны были равны, то треугольник был бы равнобедренным и данные углы были бы равны. А это не так.

6. Следствие 1. Катет меньше гипотенузы (катет лежит против острого, гипотенуза — против прямого угла).

Следствие 2. Перпендикуляр меньше наклонной (катет меньше гипотенузы).

7. Так как перпендикуляр меньше наклонной, то за *расстояние от точки до прямой* принимается длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

8. Неравенство треугольника. *Длина стороны треугольника меньше суммы двух других его сторон.*

Доказательство. Опустим высоту на большую сторону c. Так как катет меньше гипотенузы, то $a_1 < a$ и $b_1 < b$. Отсюда $c < a + b$. Для сторон a и b, меньших, чем c, очевидно, что $a < b + c$ и $b < a + c$.

9. 1) По двум катетам. *Доказательство.* Треугольники равны по 1-му признаку равенства треугольников.

2) По катету и прилежащему острому углу. *Доказательство.* Треугольники равны по 2-му признаку равенства треугольников.

3) По катету и противолежащему острому углу. *Доказательство.* Так как сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°, то равны и вторые острые углы. Тогда треугольники равны по 2-му признаку равенства треугольников.

4) По гипотенузе и острому углу. *Доказательство.* Так как сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°, то равны и вторые острые углы. Тогда треугольники равны по 2-му признаку равенства треугольников.

10. 5) По гипотенузе и катету. *Доказательство.* Приложим треугольники равными катетами. Получим равнобедренный треугольник, высота которого будет являться и медианой. Тогда будут равны и вторые катеты, и данные треугольники равны по трем сторонам.

11. а) *Катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы.*

Доказательство. а) Продлим данный катет на его длину. Прямоугольные треугольники равны по двум катетам. Тогда все углы большого треугольника равны по 60°. Поэтому он — равносторонний, и данный катет равен половине его стороны.

б) *Если катет равен половине гипотенузы, то он лежит против угла 30°.*

Продлим катет на его длину. Получим равносторонний треугольник, так как прямоугольные треугольники равны по двум катетам. Его углы равны по 60°, и данный катет лежит против угла 30°.

12. Теорема. *Любая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон. Если точка равноудалена от сторон угла, то она лежит на биссектрисе угла.*

Доказательство. а) Если точка лежит на биссектрисе, то прямоугольные треугольники равны по общей гипотенузе и острому углу. Тогда равны и катеты, лежащие против половинок угла, т. е. равны расстояния от точки до сторон угла.

б) Если точка равноудалена от сторон угла, то прямоугольные треугольники равны по общей гипотенузе и катету. Тогда равны и углы, лежащие против этих катетов, т. е. точка лежит на биссектрисе.

13. *Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Проведем две биссектрисы. Точка их пересечения равноудалена от сторон одного угла и от сторон второго угла. Значит, она равноудалена и от сторон третьего угла, т. е. лежит на третьей биссектрисе.

14. Теорема. *Все точки каждой из двух параллельных прямых находятся на равном расстоянии от другой прямой.*

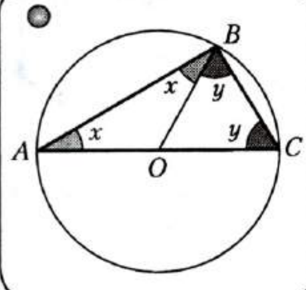
Доказательство. Опустим два перпендикуляра на нижнюю прямую. Верхний треугольник будет прямоугольным, так как перпендикуляр к одной из параллельных прямых будет перпендикуляром и к другой. Накрест лежащие углы равны. Треугольники равны по общей гипотенузе и острому углу. Поэтому данные перпендикуляры равны.

Так как все расстояния от точек одной параллельной прямой до другой равны, то расстоянием между двумя параллельными прямыми называется расстояние от любой точки одной из параллельных прямых до другой прямой.

Задачи 1, 2 и 3 являются важными теоремами!

Ключевые задачи

Задача 1. Докажите, что угол с вершиной на окружности, опирающийся на диаметр, — прямой.

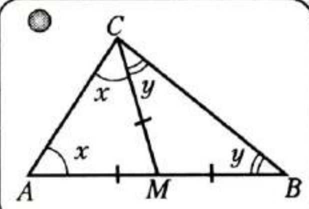


Дано: AC — диаметр.

Доказать: $\angle ABC = 90°$.

Доказательство. Соединим вершину B с центром O данной окружности. $OA = OB = OC$ как радиусы. Треугольники AOB и COB — равнобедренные. Тогда углы при их основаниях равны. Обозначим градусные меры этих углов x и y. Так как сумма углов треугольника равна 180°, то $2x + 2y = 180°$. Отсюда $x + y = 90°$, т. е. $\angle ABC = 90°$.

Задача 2. Докажите, что если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

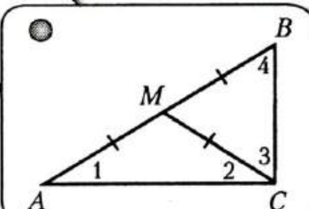


Дано: CM — медиана, $CM = \frac{1}{2}AB$.

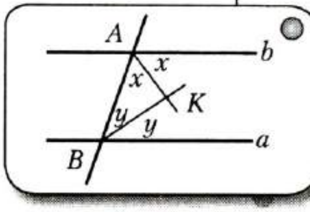
Доказать: $\angle ACB = 90°$.

Доказательство. Так как M — середина AB, то $AM = MB = \frac{1}{2}AB$. Тогда $AM = CM$, $BM = CM$. Треугольники AMC и BMC — равнобедренные. Тогда углы при их основаниях равны. Обозначим их градусные меры x и y. Так как сумма углов треугольника равна 180°, то $2x + 2y = 180°$. Отсюда $x + y = 90°$, т. е. $\angle ACB = 90°$.

Задача 3. Докажите, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.



Доказательство. В прямоугольном треугольнике, где $\angle C = 90°$, отложим $\angle 2$, равный $\angle 1$. Тогда ΔAMC — равнобедренный, $MA = MC$. Так как $\angle 3$ дополняет $\angle 2$ до 90°, а $\angle 4$ дополняет $\angle 1$ до 90°, то $\angle 3 = \angle 4$, и тогда $MB = MC$. Отсюда CM — медиана и $CM = \frac{1}{2}AB$.



Задача 4. Докажите, что биссектрисы внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей взаимно перпендикулярны.

Дано: $a \parallel b$, AK — биссектриса; BK — биссектриса.

Доказать: $\angle AKB = 90°$.

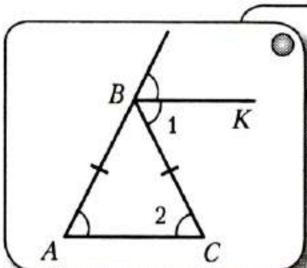
Доказательство. Обозначим половинки каждого из внутренних односторонних углов x и y. Так как сумма внутренних односторонних углов при параллельных прямых равна 180°, то $2x + 2y = 180°$. Отсюда $x + y = 90°$. Поскольку сумма углов треугольника 180°, то $\angle AKB = 180° - 90° = 90°$.

Верно и обратное утверждение. *Если биссектрисы внутренних односторонних углов взаимно перпендикулярны, то прямые параллельны.*

Дано: AK — биссектриса; BK — биссектриса; $\angle AKB = 90°$.

Доказать: $a \parallel b$.

Доказательство. Так как сумма острых углов прямоугольного треугольника AKB равна 90°, то $x + y = 90°$. Тогда $2x + 2y = 180°$. По признаку параллельности $a \parallel b$.

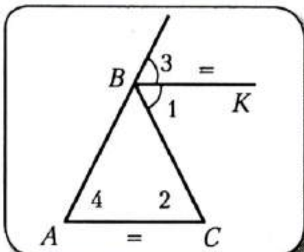


Задача 5. Докажите, что в равнобедренном треугольнике биссектриса внешнего угла при вершине параллельна основанию.

Дано: $AB = BC$; BK — биссектриса.

Доказать: $BK \parallel AC$.

Доказательство. Внешний угол при вершине B равен сумме углов A и C. Так как биссектриса делит угол пополам, а углы при основании равнобедренного треугольника равны, то $\angle 1 = \angle 2$. А это накрест лежащие углы. Поэтому $BK \parallel AC$ по признаку параллельности прямых.



Верно и обратное утверждение. *Если биссектриса внешнего угла при вершине треугольника параллельна основанию, то треугольник равнобедренный.*

Дано: BK — биссектриса, $BK \parallel AC$.

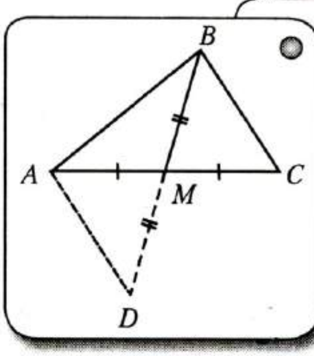
Доказать: ΔABC — равнобедренный.

Доказательство. $\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие, $\angle 3 = \angle 4$ как соответственные при параллельных прямых. Так как $\angle 1 = \angle 3$, то $\angle 2 = \angle 4$, а значит, ΔABC — равнобедренный по признаку равнобедренного треугольника.

Задача 6. Докажите, что если в равнобедренном треугольнике один из углов равен 60°, то он равносторонний.

Доказательство. Если угол при вершине равнобедренного треугольника равен 60°, то углы при основании равны по $\dfrac{180° - 60°}{2} = 60°$. Так как у треугольника все углы равны, то он равносторонний.

Если угол при основании равен 60°, то второй угол при основании также равен 60° и угол при вершине равен 60°. Следовательно, треугольник равносторонний.



Задача 7. Докажите, что медиана треугольника меньше полусуммы двух соседних его сторон.

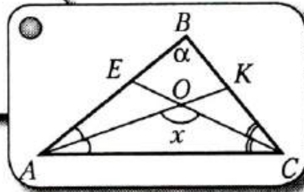
Доказательство. Докажем, что для медианы BM справедливо $BM < \frac{1}{2}(AB + BC)$.

Продлим медиану BM на ее длину: $MD = BM$.

Треугольники AMD и CMB равны по 1-му признаку. Из равенства треугольников следует $AD = BC$.

В треугольнике ABD по неравенству треугольника $BD < AB + AD$, т. е. $2BM < AB + BC$, $BM < \frac{1}{2}(AB + BC)$.

Задача 8. Угол при вершине треугольника равен α. Найдите угол между биссектрисами треугольника, проведенными к сторонам этого угла, обращенный к третьей стороне.



Решение. В треугольнике ABC $\angle A+\angle C=180^\circ-\alpha$, $\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle C=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$.

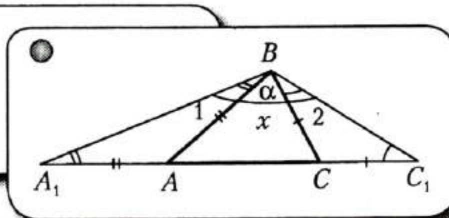
В треугольнике AOC $\angle AOC=180^\circ-\left(\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle C\right)=180^\circ-\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=90^\circ+\frac{\alpha}{2}$.

Итак, угол между указанными биссектрисами, обращенный к основанию, находится по формуле

$$\boxed{x=90^\circ+\frac{\alpha}{2}}$$

Из формулы, в частности, следует, что этот угол всегда тупой.

Задача 9. Угол при вершине треугольника ABC равен α. Найдите угол при вершине треугольника, полученного из данного поворотом сторон AB и CB соответственно вокруг вершин A и C до положения развернутого угла.



Дано: $\angle ABC=\alpha$, $AA_1=AB$, $CC_1=CB$.

Найти: $\angle A_1BC_1=x$.

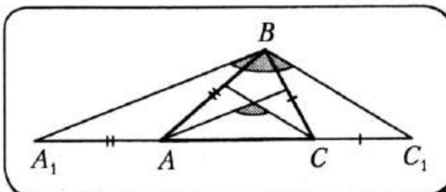
Решение. ΔA_1AB и ΔC_1CB — равнобедренные. По свойству внешнего угла $\angle 1=\frac{1}{2}\angle A$, $\angle 2=\frac{1}{2}\angle C$. Тогда $\angle 1+\angle 2=\frac{1}{2}(\angle A+\angle C)=\frac{1}{2}(180^\circ-\alpha)=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$.

$\angle A_1BC_1=\angle 1+\angle 2+\alpha=90^\circ-\frac{\alpha}{2}+\alpha=90^\circ+\frac{\alpha}{2}$.

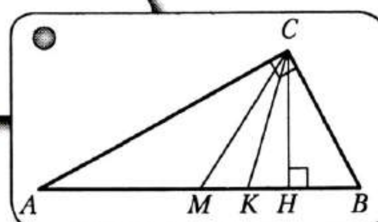
Итак, справедлива формула

$$\boxed{x=90^\circ+\frac{\alpha}{2}}$$

Примечание. То, что угол между биссектрисами (задача 8) находится по такой же формуле, не является совпадением. Так как биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию, то биссектрисы углов A и C параллельны основаниям A_1B и C_1B равнобедренных треугольников A_1AB и C_1CB. Тогда угол между биссектрисами равен углу A_1BC_1 как углы с соответственно параллельными сторонами.



Задача 10. Из вершины прямого угла прямоугольного треугольника проведены высота, медиана и биссектриса. Докажите, что биссектриса делит пополам угол между высотой и медианой.



Дано: $\angle ACB=90^\circ$, CM — медиана, CH — высота, CK — биссектриса.

Доказать: $\angle MCK=\angle HCK$.

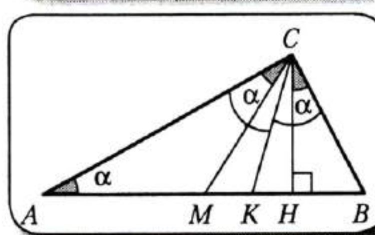
Доказательство.

1) Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна ее половине (ключевая задача 3). Поэтому ΔAMC — равнобедренный, $\angle A=\angle ACM=\alpha$.

2) Из ΔACB и ΔBCH следует, что углы A и BCH дополняют угол B до 90°. Поэтому $\angle BCH=\alpha$.

3) Так как CK — биссектриса, то $\angle ACK=\angle BCK$.

4) $\angle MCK=\angle ACK-\alpha$, $\angle HCK=\angle BCK-\alpha$. Отсюда следует, что $\angle MCK=\angle HCK$.



Дополнительный материал

Простые вопросы

1. Сколько острых углов может иметь треугольник?
2. Сколько тупых углов может иметь треугольник?
3. Сколько прямых углов может иметь треугольник?
4. В треугольнике два угла в сумме дают меньше 90°. Какой это треугольник?
5. Если угол между боковыми сторонами равнобедренного треугольника равен 60°, то чему равны два остальных угла?
6. Если угол при основании равнобедренного треугольника равен 60°, то чему равны два остальных угла?
7. Если сумма двух углов треугольника равна третьему углу, то чему равен наибольший угол треугольника?
8. Если углы треугольника относятся как 13 : 14 : 27, то чему равен наибольший угол?
9. Если сумма двух углов прямоугольного треугольника равна 130°, то чему равен наименьший угол треугольника?
10. Если отрезать углы треугольника и отрезанные части сложить вместе так, чтобы была общая вершина, то угол во сколько градусов можно получить?
11. Сколько всего теорем в данной теме?

Непростые вопросы

12.* В треугольнике два угла в сумме составляют больше 90°. Какой это треугольник?
13.* Чему равна сумма углов четырехугольника?
14.* Чему равна сумма внешних углов треугольника, взятых по одному при каждой вершине?
15.* Если углы треугольника относятся как $m : n : (m + n)$, то чему равен наибольший угол?
16.* Сумма двух углов треугольника в 2 раза больше третьего угла. Чему равен третий угол?
17.* Могут ли биссектрисы двух углов треугольника быть взаимно перпендикулярны?
18.* Могут ли две высоты треугольника быть взаимно перпендикулярны?

Ответы на простые и непростые вопросы

1. Два или три.
2. Один. Иначе сумма углов треугольника будет больше 180°.
3. Один. Иначе сумма углов треугольника будет больше 180°.
4. Тупоугольный, так как третий угол больше 90°.
5. 60°; 60°.
6. 60°; 60°.
7. 90°.
8. 90°, так как $13 + 14 = 27$, т. е. сумма двух углов равна третьему.
9. 40°.
10. 180°.
11. 12, считая 4 признака равенства прямоугольных треугольников отдельно.
12.* Можно только определенно сказать, что треугольник не является прямоугольным.

13.* 360°. Диагональ разбивает его на два треугольника.

14.* 360°. (Сумма трех развернутых углов — по одному при каждой вершине треугольника — $180° \cdot 3 = 540°$. Сумма внутренних углов треугольника равна 180°. Тогда сумма искомых внешних углов $540° - 180° = 360°$.)

15.* 90°, так как сумма двух углов равна третьему.

16.* 60°.

17.* Нет. Иначе сумма половинок двух углов треугольника будет равна 90°, а сумма двух этих углов 180°.

18.* Да. В прямоугольном треугольнике две высоты являются катетами.

Для тех, кому нравится математика

Данная тема содержит цепочку теорем, в которой каждая последующая теорема в своем доказательстве опирается на предыдущую.

Из теоремы о сумме углов треугольника следует доказательство теоремы о внешнем угле треугольника. На следствие из данной теоремы опирается доказательство первой части теоремы о соотношении сторон и углов в треугольнике. Вторая часть этой теоремы доказывается при помощи первой части теоремы. Из второй части вытекает утверждение о том, что катет меньше гипотенузы. А при доказательстве теоремы о неравенстве треугольника используется как раз тот факт, что катет меньше гипотенузы.

Сумма углов → Внешний угол → Следствие → Против большей стороны → Против большего угла → Катет меньше гипотенузы → Неравенство треугольника.

Попробуйте найти в теме «Параллельные прямые» такую же цепочку теорем.

Задача-тест. Найдите периметр треугольника со сторонами 5 см, 12 см и 7 см.

Если у вас получилось 24 см, то вы ошиблись. Мы уже знаем, что у треугольника длина любой стороны меньше суммы длин двух других его сторон. А в нашем случае получается: $5 + 7 = 12$, что противоречит неравенству треугольника. Следовательно, треугольника с заданными сторонами не существует.

Запомните!

1 **Сумма углов треугольника равна 180°.**

2 **Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним.**

3 **В треугольнике против большей стороны лежит больший угол и наоборот.**

4 **В треугольнике любая сторона меньше суммы двух других его сторон.**

5 **Признаки равенства прямоугольных треугольников:**

1) по двум катетам;
2) по катету и прилежащему острому углу;
3) по катету и противолежащему острому углу;
4) по гипотенузе и острому углу;
5) по гипотенузе и катету.

6 **Катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы.**

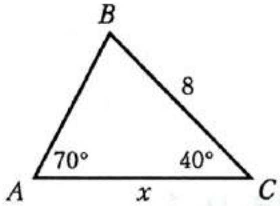
7 **Биссектриса — геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла.**

8 **Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.**

С уважением, ваш В. Казаков

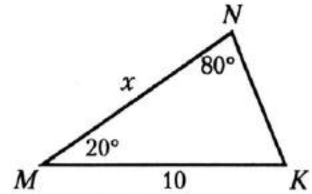
Задачи по теме «Сумма углов треугольника»

1 *Дано*: $\angle A = 70°$, $\angle C = 40°$, $BC = 8$ см.
Найти: AC.



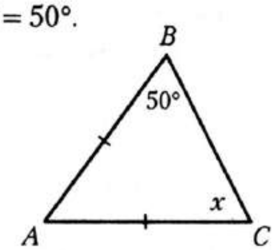
Ответ:

2 *Дано*: $\angle M = 20°$, $\angle N = 80°$, $MK = 10$ см.
Найти: MN.



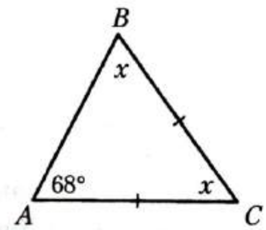
Ответ:

3 *Дано*: $AB = AC$, $\angle B = 50°$.
Найти: $\angle C$.



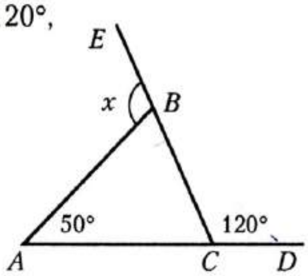
Ответ:

4 *Дано*: $AC = BC$, $\angle A = 68°$.
Найти: $\angle B$.



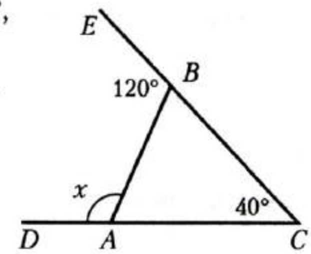
Ответ:

5 *Дано*: $\angle BCD = 120°$,
$\angle A = 50°$.
Найти: $\angle ABE$.



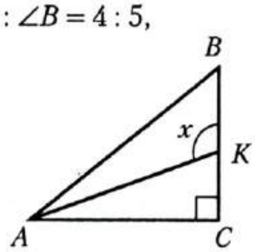
Ответ:

6 *Дано*: $\angle C = 40°$,
$\angle ABE = 120°$.
Найти: $\angle BAD$.



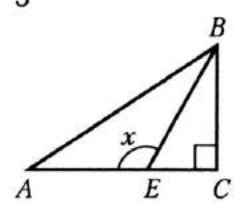
Ответ:

7 *Дано*: $\angle C = 90°$, $\angle A : \angle B = 4 : 5$,
AK — биссектриса.
Найти: $\angle AKB$.



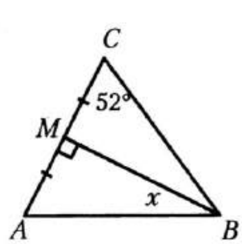
Ответ:

8 *Дано*: $\angle C = 90°$, $\angle A = \dfrac{2}{3}\angle B$,
BE — биссектриса.
Найти: $\angle BEA$.



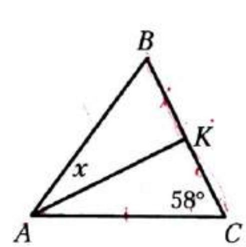
Ответ:

9 *Дано*: BM — высота,
$AM = MC$, $\angle C = 52°$.
Найти: $\angle ABM$.



Ответ:

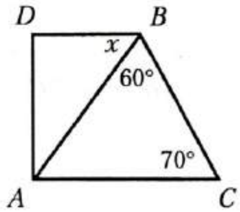
10 *Дано*: $BK = KC$,
AK — биссектриса,
$\angle C = 58°$.
Найти: $\angle BAK$.



Ответ:

11 *Дано*: $\angle ABC = 60°$, $\angle C = 70°$, $AD \perp BD$, $AD \perp AC$.

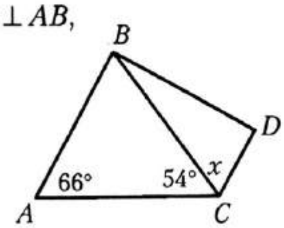
Найти: угол x.



Ответ:

12 *Дано*: $\angle A = 66°$, $\angle ACB = 54°$, $BD \perp AB$, $DC \perp BD$.

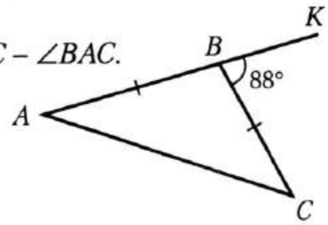
Найти: угол x.



Ответ:

13 *Дано*: $AB = BC$, $\angle KBC = 88°$.

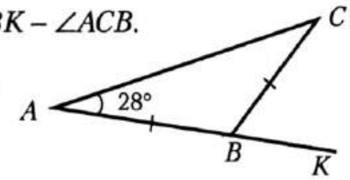
Найти: $\angle ABC - \angle BAC$.



Ответ:

14 *Дано*: $AB = BC$, $\angle A = 28°$.

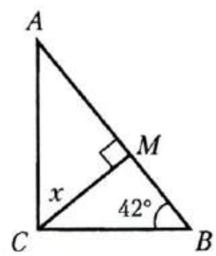
Найти: $\angle CBK - \angle ACB$.



Ответ:

15 *Дано*: $\angle ACB = 90°$, $\angle B = 42°$, $CM \perp AB$.

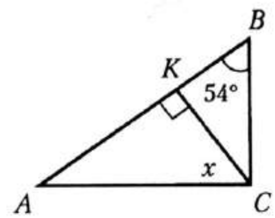
Найти: угол x.



Ответ:

16 *Дано*: $\angle ACB = 90°$, $\angle B = 54°$, $CK \perp AB$.

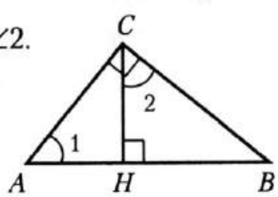
Найти: угол x.



Ответ:

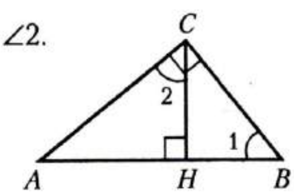
17 *Дано*: $\angle ACB = 90°$, CH — высота.

Доказать: $\angle 1 = \angle 2$.



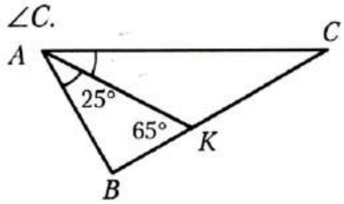
18 *Дано*: $\angle ACB = 90°$, CH — высота.

Доказать: $\angle 1 = \angle 2$.



19 *Дано*: $\angle BAK = 25°$, $\angle AKB = 65°$, AK — биссектриса.

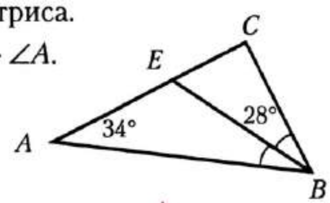
Найти: $\angle B - \angle C$.



Ответ:

20 *Дано*: $\angle A = 34°$, $\angle CBE = 28°$, BE — биссектриса.

Найти: $\angle C - \angle A$.

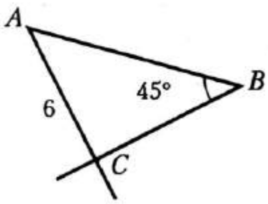


Ответ:

21

Дано: $AC \perp BC$, $\angle B = 45°$, $AC = 6$ см.

Найти: BC.

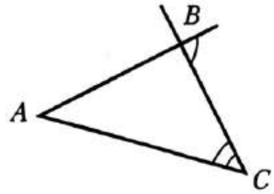


Ответ:

22

Дано: $AB \perp BC$,
$\angle B + \angle C = 135°$,
$AB + BC = 8$ см.

Найти: BC.

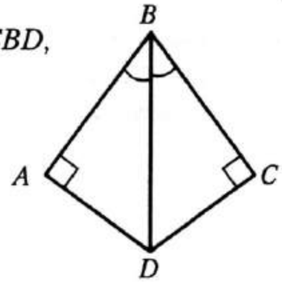


Ответ:

23

Дано: $\angle ABD = \angle CBD$,
$\angle A = \angle C = 90°$.

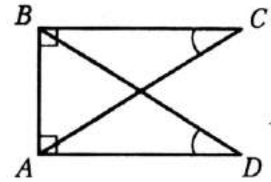
Доказать:
$AD = CD$.



24

Дано: $\angle ABC = \angle BAD = 90°$,
$\angle C = \angle D$.

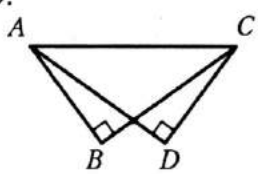
Доказать:
$AC = BD$.



25

Дано: $\angle B = \angle D = 90°$,
$AD = BC$.

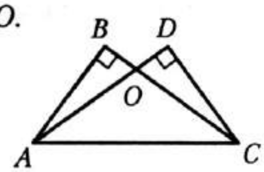
Доказать: $AB = CD$.



26

Дано: $\angle B = \angle D = 90°$,
$AB = CD$.

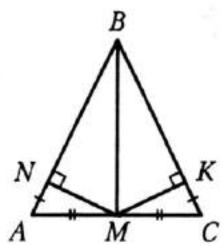
Доказать: $AO = CO$.



27

Дано: $MK \perp BC$,
$MN \perp AB$,
$AM = MC$,
$AN = CK$.

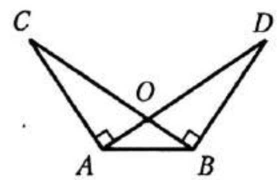
Доказать:
$BN = BK$.



28

Дано: $\angle CAD = \angle DBC = 90°$,
$AD = CB$.

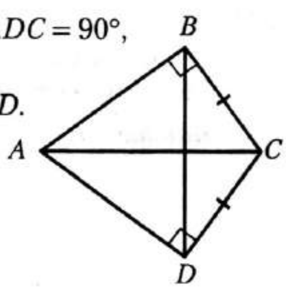
Доказать: ΔAOB — равнобедренный.



29*

Дано: $\angle ABC = \angle ADC = 90°$,
$BC = DC$.

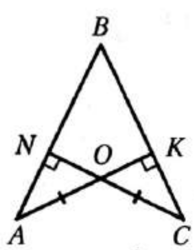
Доказать: $AC \perp BD$.



30*

Дано: $\angle N = \angle K = 90°$,
$AO = CO$.

Доказать: $AB = CB$.



31 Углы треугольника относятся как 1 : 2 : 3. Найдите наибольший из углов.

Запишите решение.

Ответ:

32 Один из углов треугольника больше другого на 20° и меньше третьего на 20°. Найдите меньший из углов.

Запишите решение.

Ответ:

33 Разность острых углов прямоугольного треугольника равна 28°. Найдите угол, лежащий против большего из катетов.

Запишите решение.

Ответ:

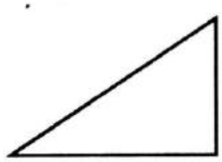
34 Острые углы прямоугольного треугольника относятся как 2 : 3. Найдите угол, лежащий против меньшего из катетов.

Запишите решение.

Ответ:

35 Сумма гипотенузы и катета, лежащего против угла 30°, равна 12 см. Найдите длину гипотенузы.

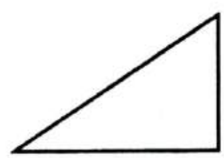
Закончите рисунок.



Ответ:

36 Гипотенуза и катет равны 3 см и 1,5 см. Найдите угол, лежащий против другого катета.

Закончите рисунок.



Ответ:

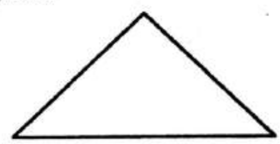
37 Внешний угол при основании равнобедренного треугольника равен 132°. Найдите угол при вершине треугольника.

Закончите рисунок.

Ответ:

38 Разность двух углов равнобедренного треугольника равна 90°. Найдите углы при основании.

Закончите рисунок.



Ответ:

39 Докажите, что высоты равнобедренного треугольника, проведенные к боковым сторонам, равны между собой.

Сделайте рисунок в тетради.

40 Докажите, что если две высоты треугольника равны, то треугольник равнобедренный.

Сделайте рисунок в тетради.

41 В прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, равна 4,5 см. Один из катетов равен 9 см. Найдите угол треугольника, противолежащий этому катету.

Сделайте рисунок в тетради.

Ответ:

42 В остроугольном равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 38 см, а вершина основания удалена от боковой стороны на 19 см. Найдите угол при основании треугольника.

Сделайте рисунок в тетради.

Ответ:

43 В прямоугольном треугольнике катет равен 12 см, противолежащий ему угол равен 60°. Найдите длину высоты, опущенной на гипотенузу.

Сделайте рисунок в тетради.

Ответ:

44 В прямоугольном треугольнике ABC к гипотенузе AB проведена высота CD. Угол B равен 60°, отрезок BD равен 1 см. Найдите гипотенузу AB.

Сделайте рисунок в тетради.

Ответ:

45 Угол между двумя радиусами окружности равен 120°. Радиус равен 8 см. Найдите расстояние от центра окружности до хорды, соединяющей концы данных радиусов.

Сделайте рисунок в тетради.

Ответ:

46 Дана окружность радиусом 12 см. Расстояние от центра окружности до хорды равно 6 см. Найдите угол между радиусами, проведенными к концам хорды.

Сделайте рисунок в тетради.

Ответ:

47 На стороне угла, равного 30°, на расстоянии 10 см от вершины угла взята точка. Найдите расстояние от этой точки до второй стороны угла.

Сделайте рисунок в тетради.

Ответ:

48 На стороне угла на расстоянии 98 см от вершины угла взята точка. Расстояние от этой точки до второй стороны угла равно 49 см. Найдите величину данного угла.

Сделайте рисунок в тетради.

Ответ:

49 В прямоугольном треугольнике один из углов равен 60°, а гипотенуза — 12 см. Из вершины прямого угла опущена высота. Найдите больший из отрезков, на которые разбивается гипотенуза.

Сделайте рисунок в тетради.

Ответ:

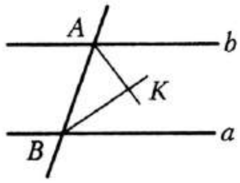
50 В прямоугольном треугольнике острые углы относятся как 2 : 1. Из вершины прямого угла опущена высота, которая делит гипотенузу на отрезки, меньший из которых равен 8 см. Найдите гипотенузу.

Сделайте рисунок в тетради.

Ответ:

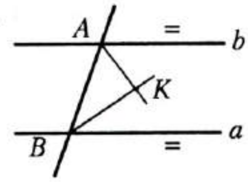
51 *Дано*: AK — биссектриса, BK — биссектриса, $AK \perp BK$.

Доказать: $a \parallel b$.



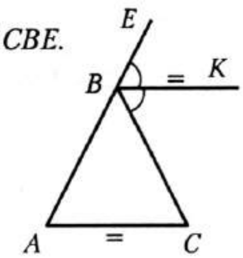
52 *Дано*: $a \parallel b$, AK — биссектриса, $\angle AKB = 90°$.

Доказать: BK — биссектриса.



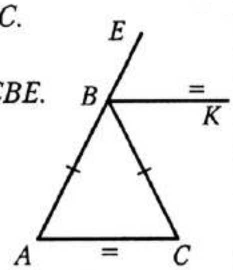
53 *Дано*: $BK \parallel AC$, BK — биссектриса $\angle CBE$.

Доказать: $AB = BC$.



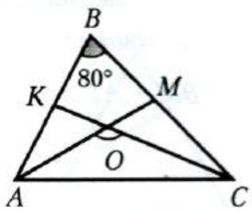
54 *Дано*: $AB = BC$, $BK \parallel AC$.

Доказать: BK — биссектриса $\angle CBE$.



55* *Дано*: $\angle B = 80°$, AM — биссектриса, CK — биссектриса.

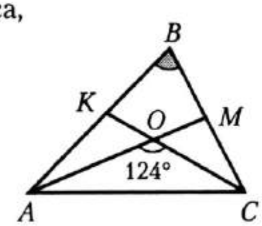
Найти: $\angle AOC$.



Ответ:

56* *Дано*: AM — биссектриса, CK — биссектриса, $\angle AOC = 124°$.

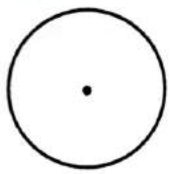
Найти: $\angle B$.



Ответ:

57 Из точки окружности проведены радиус и равная ему хорда. Найдите угол между этим радиусом и хордой.

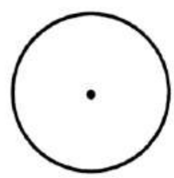
Закончите рисунок.



Ответ:

58 Из точки окружности проведены две хорды, каждая из которых равна радиусу. Найдите угол между этими хордами.

Закончите рисунок.



Ответ:

59 Угол между высотой прямоугольного треугольника, опущенной на гипотенузу, и одним из катетов равен 60°. Второй катет равен 12 см. Найдите гипотенузу.

Сделайте рисунок в тетради.

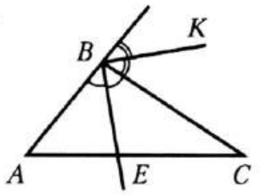
Ответ:

60 Угол между высотой прямоугольного треугольника, опущенной на гипотенузу, и одним из катетов равен 30°. Этот катет равен 8 см. Найдите гипотенузу.

Сделайте рисунок в тетради.

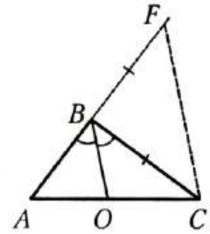
Ответ:

61 Докажите, что биссектрисы внешнего и внутреннего углов при одной вершине треугольника взаимно перпендикулярны.



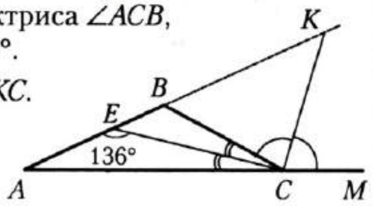
62 *Дано*: BO — биссектриса $\angle ABC$, $BF = BC$.

Доказать: $FC \parallel BO$.



63* *Дано*: CK — биссектриса $\angle BCM$, CE — биссектриса $\angle ACB$, $\angle AEC = 136°$.

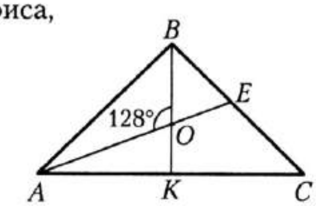
Найти: $\angle AKC$.



Ответ:

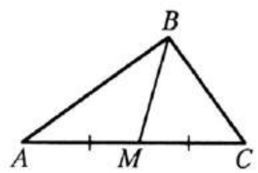
64* *Дано*: BK — биссектриса, AE — биссектриса, $\angle AOB = 128°$.

Найти: $\angle C$.



Ответ:

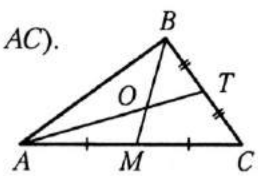
65* Докажите, что любая медиана треугольника меньше его полупериметра.



66* *Дано*: BM — медиана, AT — медиана.

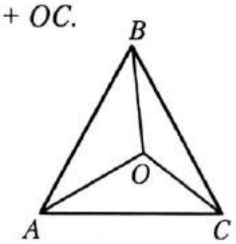
Доказать:

$BM + AT > \frac{1}{2}(BC + AC)$.



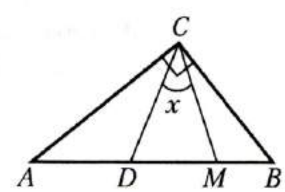
67* *Дано*: ΔABC — равносторонний.

Доказать: $AO < OB + OC$.



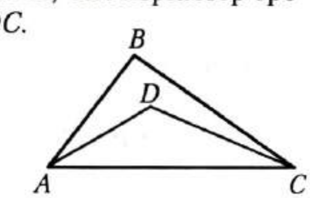
68* *Дано*: $\angle C = 90°$, $AM = AC$, $BD = BC$.

Найти: $\angle DCM$.

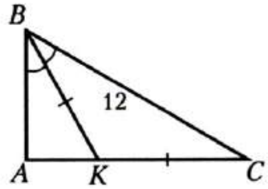


69* Докажите, что периметр треугольника ABC больше, чем периметр треугольника ADC.

70* Докажите, что периметр треугольника ABC больше, чем периметр треугольника ADC.



71 В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A проведена биссектриса BK, равная 12 см. Найдите больший катет, если известно, что $BK = KC$.

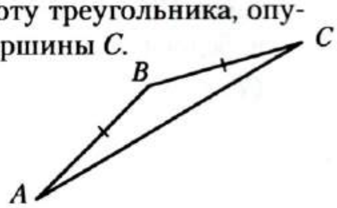


Ответ:

72 В прямоугольном треугольнике проведена биссектриса угла, равного 60°. Найдите длину этой биссектрисы, если она короче большего катета на 2 см.

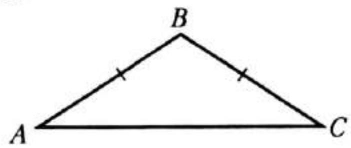
Ответ:

73 В равнобедренном треугольнике ABC угол A равен 15°, $AB = BC = 6$ см. Найдите высоту треугольника, опущенную из вершины C.



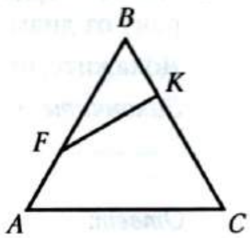
Ответ:

74 В равнобедренном треугольнике ABC угол B равен 120°, $AB = BC$. Высота, опущенная из вершины A, равна 8 см. Найдите AC.

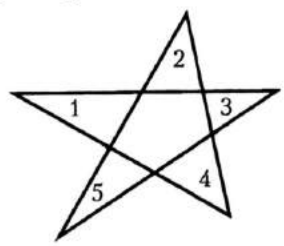


Ответ:

75* ΔABC — равносторонний. $FB = 2AF$, $KC = 2BK$. Докажите, что ΔFBK — прямоугольный.

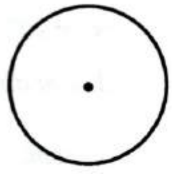


76* Докажите, что сумма углов звездочки равна 180°.



77 Из точки окружности проведены диаметр и хорда, равная половине диаметра. Найдите угол между диаметром и хордой.

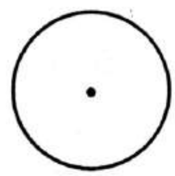
Закончите рисунок.



Ответ:

78 AB, BC и CD — хорды окружности, равные ее радиусу. Найдите угол между радиусами OA и OD.

Закончите рисунок.



Ответ:

79 Даны хорда и перпендикулярный ей диаметр. Конец хорды соединен с концом диаметра отрезком, составляющим с диаметром угол 30°. Найдите отношение отрезков, на которые хорда делит диаметр.

Сделайте рисунок в тетради.

Ответ:

80 Даны хорда и перпендикулярный ей диаметр. Конец хорды соединен с концом диаметра отрезком, составляющим с диаметром угол 60°. Найдите отношение отрезков, на которые хорда делит диаметр.

Сделайте рисунок в тетради.

Ответ:

81 Две стороны равнобедренного треугольника равны 5 см и 10 см. Найдите периметр треугольника.

Сделайте рисунок в тетради.

Ответ:

82 Один из углов равнобедренного треугольника равен 92°. Найдите остальные углы треугольника.

Сделайте рисунок в тетради.

Ответ:

83 Докажите, что внешний угол при вершине равнобедренного треугольника в 2 раза больше внутреннего угла при основании.

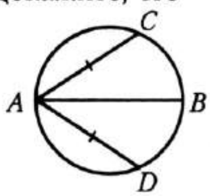
Сделайте рисунок в тетради.

84 Докажите, что если один из внешних углов прямоугольного треугольника равен 135°, то этот треугольник равнобедренный.

Сделайте рисунок в тетради.

85 Из конца диаметра AB проведены равные хорды AC и AD по разные стороны от диаметра. Докажите, что $CB = DB$.

Закончите рисунок.

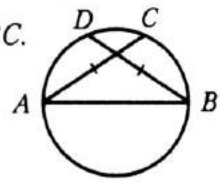


Ответ:

86 Из конца диаметра AB проведены равные хорды AC и BD по одну сторону от диаметра.

Докажите, что $AD = BC$.

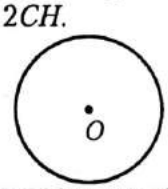
Закончите рисунок.



Ответ:

87 В окружности радиусом, равным 6 см, проведен диаметр AB. Из точки C, лежащей на окружности, опущен перпендикуляр CH на диаметр. Найдите $\angle ABC$, если $AC = 2CH$.

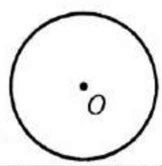
Закончите рисунок.



Ответ:

88 Треугольник ABC вписан в окружность так, что AC — диаметр, вершина B лежит на окружности. Найдите отношение высоты BH к катету AB, если $BC = \frac{1}{2}AC$.

Закончите рисунок.



Ответ:

89 В треугольнике ABC проведена медиана BM. Найдите $\angle C$, если $BM = \frac{2}{3}$, $AC = 1\frac{1}{3}$, $\angle A = 58°$.

Сделайте рисунок в тетради.

Ответ:

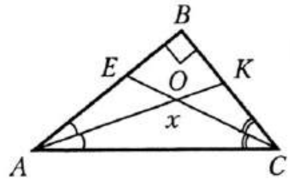
90 В треугольнике ABC проведена медиана CK. Найдите $\angle A$, если $CK = \frac{4}{5}$, $AB = 1\frac{3}{5}$, $\angle B = 42°$.

Сделайте рисунок в тетради.

Ответ:

91 *Дано*: AK — биссектриса, CE — биссектриса.

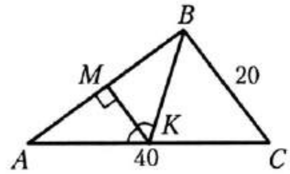
Найти: $\angle AOC$.



Ответ:

92 *Дано*: $KM \perp AB$, $\angle AKM = \angle BKM$, $AC = 40$ см, $BC = 20$ см.

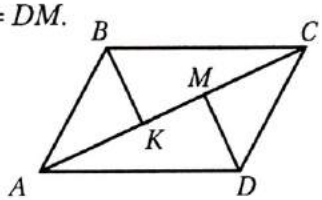
Найти: P_{BKC}.



Ответ:

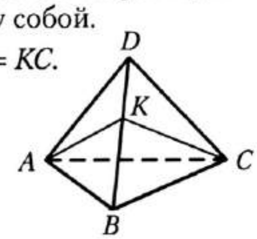
93* *Дано*: $AB = CD$, $BC = AD$, $BK \perp AC$, $DM \perp AC$.

Доказать: $BK = DM$.



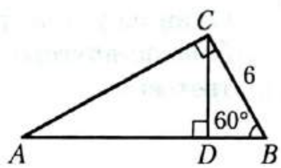
94* Все ребра треугольной пирамиды $DABC$ равны между собой.

Докажите, что $AK = KC$.



95 *Дано*: $\angle ACB = 90°$, $\angle B = 60°$, $BC = 6$ см.

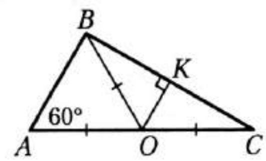
Найти: AD.



Ответ:

96 *Дано*: $AO = OC = BO = 6$ см, $\angle BAC = 60°$, $OK \perp BC$.

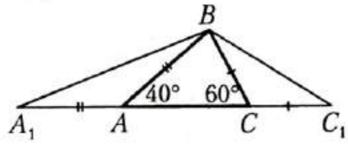
Найти: OK.



Ответ:

97* *Дано*: $AA_1 = AB$, $CC_1 = CB$, $\angle A = 40°$, $\angle C = 60°$.

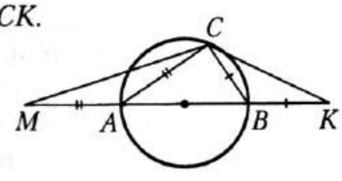
Найти: $\angle A_1BC_1$.



Ответ:

98* *Дано*: $BK = BC$, $AM = AC$, AB — диаметр.

Найти: $\angle MCK$.



Ответ:

99 Сумма двух углов прямоугольного треугольника равна 179°. Найдите средний по величине угол треугольника.

Запишите решение.

Ответ:

100 Разность острых углов прямоугольного треугольника равна 1°. Найдите меньший по величине угол треугольника.

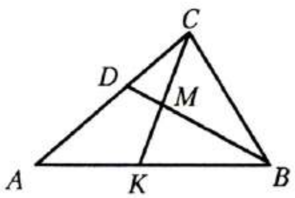
Запишите решение.

Ответ:

Контрольная работа

Вариант 1

1 Запишите внешние углы для треугольника DMC.



Ответ:

2 Треугольник ABC — равнобедренный, $AB = AC$.

Угол B равен 70°. Найдите угол A.

Ответ:

3 Один из углов треугольника в 3 раза больше другого угла и на 30° больше третьего.

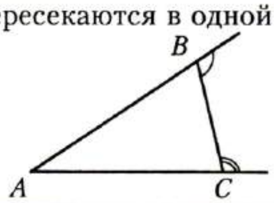
Найдите углы треугольника.

Ответ:

4 Треугольник ABC — прямоугольный. Точка M — середина гипотенузы AC. Через точку M проведена прямая, перпендикулярная гипотенузе, которая пересекает катет BC в точке E. Найдите катет BC, если $\angle BEM = 120°$, $EC = 4$ см.

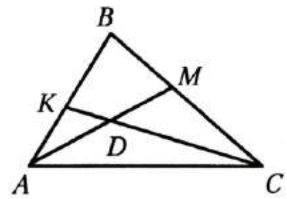
Ответ:

5 Докажите, что биссектрисы внешних углов при вершинах B и C и биссектриса угла A пересекаются в одной точке.



Вариант 2

1 Запишите внешние углы для треугольника DMC.



Ответ:

2 Треугольник ABC — равнобедренный, $AC = BC$.

Угол A равен 80°. Найдите угол C.

Ответ:

3 Один из углов треугольника на 20° больше другого и в 2 раза меньше третьего.

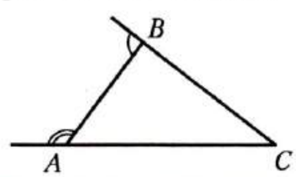
Найдите углы треугольника.

Ответ:

4 Треугольник ABC — прямоугольный. Точка K — середина гипотенузы AB. Через точку K проведена прямая, перпендикулярная гипотенузе, которая пересекает катет AC в точке N. Найдите катет AC, если $KN = 2{,}5$ см, $AN = 5$ см.

Ответ:

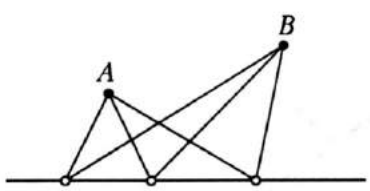
5 Докажите, что биссектрисы внешних углов при вершинах A и B и биссектриса угла C пересекаются в одной точке.

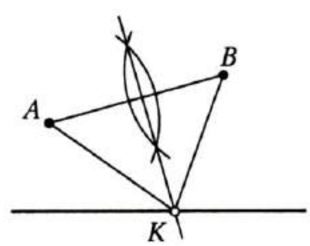


Тема 5
Задачи на построение

Основными чертежными инструментами являются циркуль и линейка. Математиков во все времена интересовали задачи, которые можно решать, пользуясь этими двумя инструментами. Решение задач на построение — очень увлекательное занятие, подобное разгадыванию кроссвордов и решению прочих головоломок.

Рассмотрим одну из таких задач. Пусть на плоскости даны прямая и две точки, которые лежат по одну сторону от прямой. Нужно найти на прямой точку, которая находится на одинаковом расстоянии от двух данных точек. Найти точку — это значит построить ее при помощи циркуля и линейки. Если перемещать точку по прямой, то расстояния от этой точки до двух данных точек будут меняться. И когда расстояния станут равными, то точка на прямой будет лежать на серединном перпендикуляре к отрезку, соединяющему данные точки A и B. Это и есть идея построения. Чтобы построить серединный перпендикуляр, нужно одинаковым радиусом построить две дуги с центрами в точках A и B, а затем провести прямую через точки пересечения этих дуг. В пересечении построенной прямой и данной прямой получим искомую точку K.





Надеемся, что вы уловили сущность задачи на построение. Данная задача может иметь и практический смысл. Допустим, есть два населенных пункта и шоссе рядом с ними. На шоссе нужно найти место для остановки, чтобы путь для жителей обоих населенных пунктов до остановки был одинаковым.

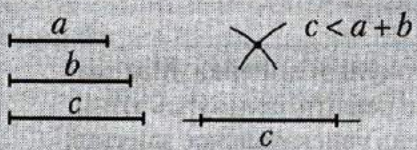
Изучая эту тему, вы познакомитесь с пятью основными задачами на построение и тремя примерами применения основных задач к решению других.

Задачи на построение

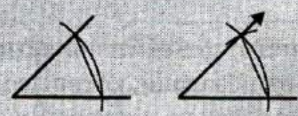
Циркуль + Линейка

Основные задачи

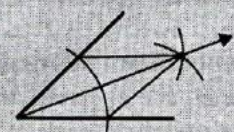
1. Треугольник по трем ст.



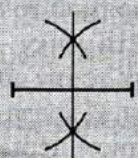
2. Угол, равный данному



3. Биссектриса



4. Середина отрезка

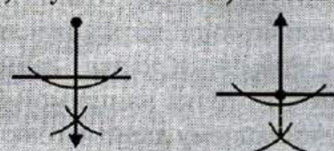


+ серединный ⊥-р

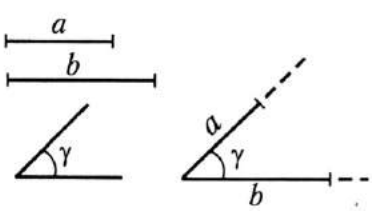
5. Перпендикуляр

а) опустить

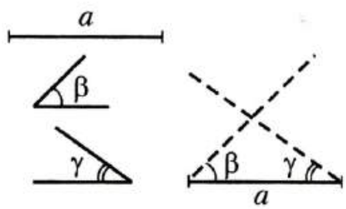
б) восставить



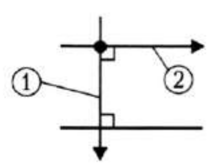
Пример 1. Треугольник по двум ст. и углу между ними



Пример 2. Треугольник по ст. и двум прилеж. к ней углам



Пример 3. Построить прямую, параллельную данной



ГМТ

окружность
биссектриса
серединный
точки, равноудаленные от прямой

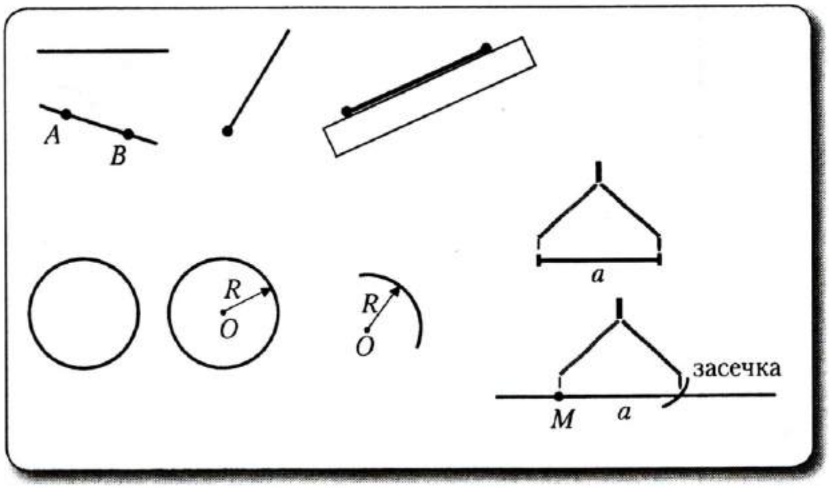
1) анализ (поиск решения)
2) построение (описание шагов)
3) доказательство (удовлетворяет условию?)
4) исследование (сущ. и ед.)

1. Операции циркулем и линейкой.
2. Построение отрезка, равного данному.
3. Построение треугольника по трем сторонам.
4. Построение угла, равного данному.
5. Деление отрезка пополам или построение серединного перпендикуляра.
6. Построение биссектрисы угла или деление угла пополам.
7. Опустить перпендикуляр на данную прямую.
8. Восставить перпендикуляр из точки на прямой.
9. Построение треугольника по двум сторонам и углу между ними.
10. Построение треугольника по стороне и двум прилежащим к ней углам.
11. Построение прямой, параллельной данной.
12. Этапы решения задачи на построение.
13. Геометрические места точек.

№ 5

Рассказ по опорному конспекту

Задачи на построение имеют очень древнюю историю. Поиски решений некоторых из таких задач послужили толчком к развитию математики. При решении задачи на построение требуется построить фигуру при помощи двух инструментов: циркуля и линейки. Линейка считается односторонней и без делений. При помощи такой линейки нельзя построить две параллельные прямые и нельзя замерять и откладывать отрезки.



При помощи *линейки* можно построить:

а) произвольную прямую, луч, произвольный отрезок (отрезок заданной длины НЕЛЬЗЯ!);

б) прямую, проходящую через две точки;

в) луч с вершиной в данной точке, проходящий через некоторую точку;

г) отрезок, соединяющий две точки.

При помощи *циркуля* можно построить:

а) произвольную окружность;

б) окружность данным радиусом с данным центром;

в) дугу окружности;

г) отложить отрезок, равный данному, на данной прямой.

Для построения отрезка, равного данному, следует выполнить следующие операции:

1) провести прямую;

2) отметить на этой прямой точку;

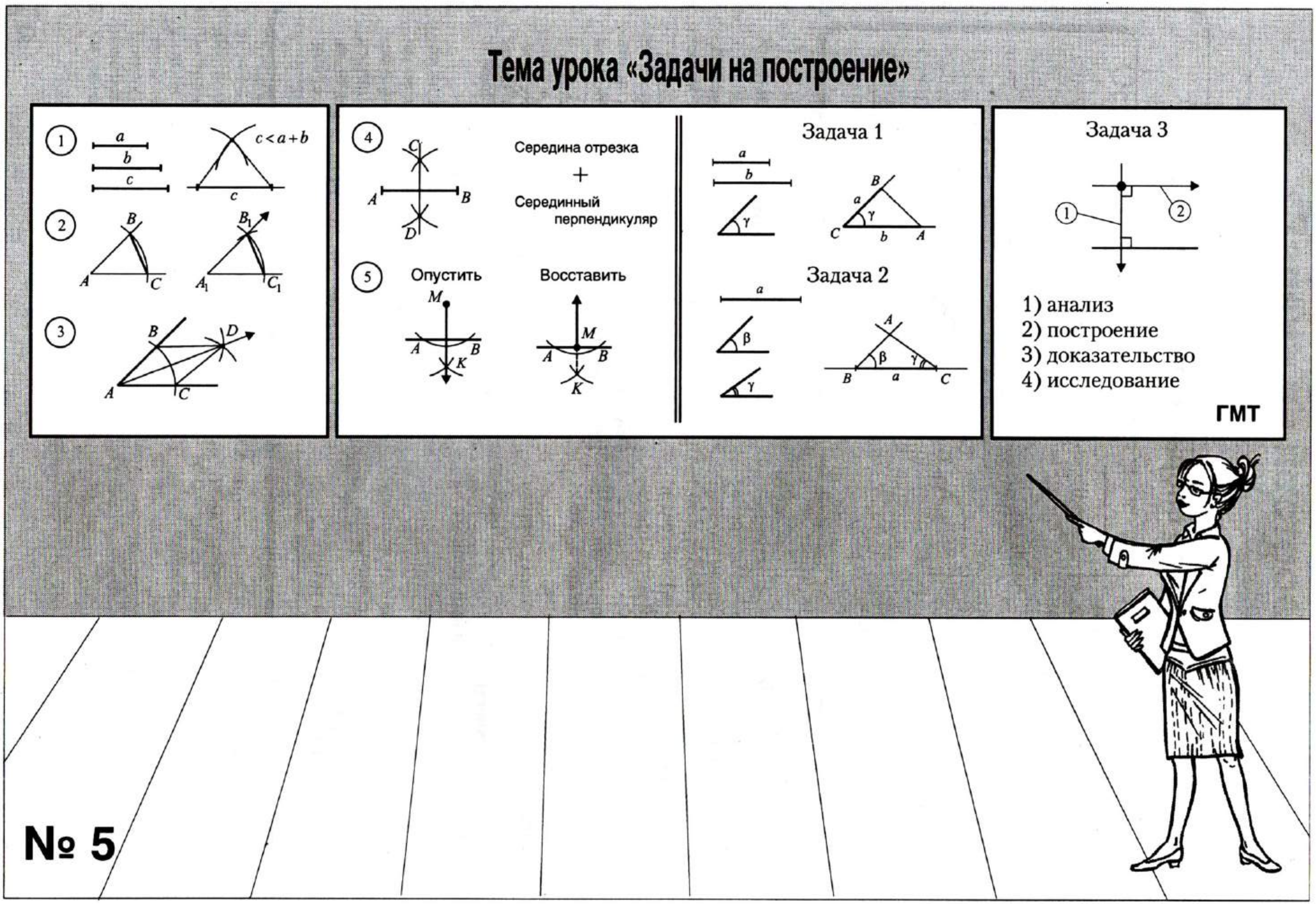
3) при помощи циркуля замерить данный отрезок;

4) поставить ножку циркуля в отмеченную точку и сделать на прямой засечку, не меняя раствор циркуля.

Больше к этой задаче мы возвращаться не будем, т. е. при решении задачи будем считать ее элементарной операцией *откладывание отрезка на прямой*.

Иногда нам не требуется строить всю окружность, а нужно только найти точку пересечения окружности с другой фигурой. В этом случае говорят: «сделаем засечку» (на прямой, на отрезке, на окружности).

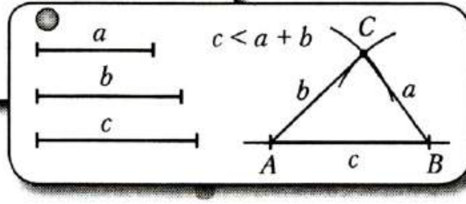
Рассмотрим пять основных задач на построение. Это простые задачи, которые встречаются чаще других. В дальнейшем при решении сложных задач мы будем ссылаться на эти пять задач, не описывая их решения. Это будет что-то вроде таблицы умножения.


Тема урока «Задачи на построение»
1
a
b
c
c < a + b
c
2
B
A
C
B1
A1
C1
3
B
D
A
C
4
C
A
B
D
Середина отрезка
+
Серединный перпендикуляр
5
Опустить
M
A
B
K
Восставить
M
A
B
K
Задача 1
a
b
γ
B
a
γ
C
b
A
Задача 2
a
β
γ
A
β
γ
B
a
C
Задача 3
1
2
1) анализ
2) построение
3) доказательство
4) исследование
ГМТ
№ 5

Основные задачи

№ 1. Построение треугольника по трем сторонам.

Даны отрезки a, b и c, равные сторонам искомого треугольника.



Построение. Откладываем один из данных отрезков на произвольной прямой. Например, отрезок $AB = c$. Проводим две дуги радиусами a и b с центрами в точках A и B. Точку C пересечения дуг соединяем с точками A и B. ΔABC — искомый.

Доказательство. У треугольника ABC $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

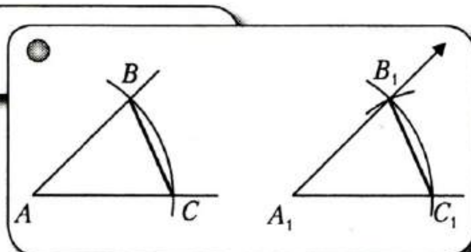
Исследование. Задача имеет решение, если для данных отрезков выполняется неравенство треугольника: $a < b + c$, $b < a + c$, $c < a + b$.

Если решение существует, то оно единственное, так как все построенные треугольники равны по третьему признаку равенства.

Примечание. Вместо трех неравенств достаточно одного, записанного для большей стороны: $c < a + b$.

№ 2. Построение угла, равного данному.

Пусть дан угол A. Построим равный ему угол.



Построение.

1) Строим произвольный луч с вершиной A_1;

2) произвольным радиусом с центром в точке A проводим дугу BC;

3) не меняя раствора циркуля, проводим вторую дугу с центром в точке A_1, которая пересекает построенный луч в точке C_1;

4) замеряем отрезок CB;

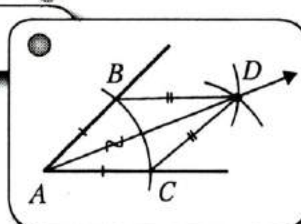
5) проводим третью дугу радиусом, равным CB, с центром в точке C_1, которая пересекает вторую дугу в точке B_1;

6) проводим луч A_1B_1.

Угол $B_1A_1C_1$ — искомый.

Доказательство. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по трем сторонам. Поэтому $\angle A_1 = \angle A$.

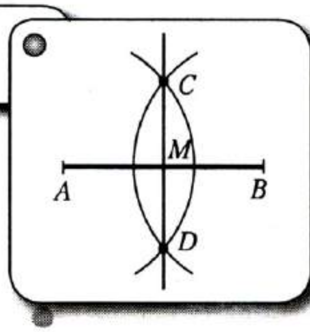
№ 3. Построение биссектрисы угла.



Построение. Из вершины угла A как из центра произвольным радиусом проводим дугу BC. Из точек B и C как из центров одним и тем же радиусом проводим две дуги до пересечения их в точке D. Проводим луч AD. AD — искомая биссектриса.

Доказательство. $\Delta ABD = \Delta ACD$ по трем сторонам. Тогда $\angle BAD = \angle CAD$ как соответственные в двух равных треугольниках. Поэтому AD — биссектриса.

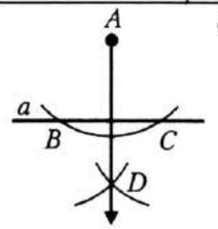
№ 4. Деление отрезка пополам (или построение серединного перпендикуляра к отрезку).

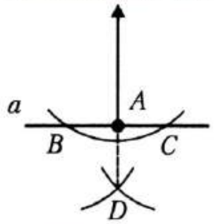


Построение. Пусть дан отрезок AB. Из точек A и B как из центров произвольным, но одним и тем же радиусом проводим две дуги. Соединяем точки C и C_1 пересечения этих дуг. В пересечении с прямой AB получаем точку M — середину отрезка AB.

Доказательство. Точки C и D равноудалены от концов отрезка AB. Поэтому они лежат на серединном перпендикуляре к нему.

№ 5. Построение прямой, перпендикулярной данной (построение прямого угла).





а) Опустить перпендикуляр из точки на данную прямую.

Построение. Произвольным радиусом с центром в данной точке A проводим дугу, которая пересекает прямую a в точках B и C. Из точек B и C как из центров одним и тем же радиусом проводим две дуги до пересечения их в точке D. Проводим прямую AD. Получим $AD \perp a$.

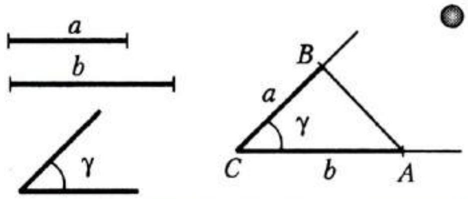
Доказательство. Точки A и D равноудалены от концов отрезка BC. Тогда AD – серединный перпендикуляр к отрезку BC. Поэтому $AD \perp a$.

б) Восставить перпендикуляр из точки, лежащей на прямой.

Построение и доказательство полностью совпадают с пунктом а).

Применение основных задач к решению других задач.

Пример 1. Построить треугольник по двум сторонам и углу между ними.



Построение. Строим угол C, равный данному углу γ.

На сторонах угла C откладываем $CA = b$ и $CB = a$.

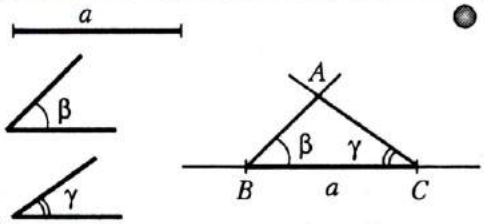
Соединяем точки B и C.

ΔABC – искомый.

Доказательство. Построенный треугольник удовлетворяет условию.

Исследование. Решение всегда существует, и единственное, так как все построенные треугольники будут равны по 1-му признаку.

Пример 2. Построить треугольник по стороне и двум прилежащим к ней углам.



Построение. Строим отрезок BC, равный отрезку a.

Строим угол β с вершиной в точке B.

Строим угол γ с вершиной в точке C.

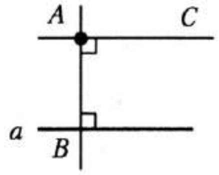
A – точка пересечения лучей этих углов.

ΔABC – искомый.

Доказательство. Построенный треугольник удовлетворяет условию.

Исследование. Решение существует, если $\beta + \gamma < 180°$. Если решение существует, то оно единственное, так как все построенные треугольники будут равны по 2-му признаку.

Пример 3. Построить прямую, параллельную данной и проходящую через данную точку.



Пусть даны прямая a и точка A, не лежащая на данной прямой.

Построение. Опустим из точки A перпендикуляр AB на прямую a.

Восставим из точки A перпендикуляр AC к прямой AB.

Прямая AC параллельна прямой a.

Доказательство. Следует из теоремы: две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны между собой.

При решении задачи на построение описывают четыре этапа решения.

Анализ. На этом этапе, как правило, предполагают, что задача решена, и делают чертеж с изображением искомой фигуры. Затем указывают *идею решения* задачи.

Построение. На этом этапе дают *описание последовательности шагов*, приводящих к построению искомой фигуры. В начале обучения решению задач на построение проводят и сами операции построения на произвольно взятых отрезках, углах и других фигурах. Позже только указывают шаги построения.

Доказательство. На этом этапе доказывают, что построенная фигура удовлетворяет условию задачи. Иногда это следует непосредственно из построения. Иногда требует настоящего доказательства.

Исследование. На данном этапе обычно выясняют возможность построения фигуры по данным задачи и количество решений. То есть выясняют, при любых ли размерах заданных в условии отрезков и углов возможно решение и сколько неравных между собой фигур можно построить по данным задачи.

Иногда 1-й и 4-й этапы ввиду их очевидности опускают!

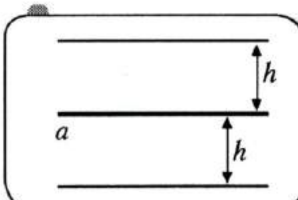
Геометрические места точек:

1) окружность — геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки;

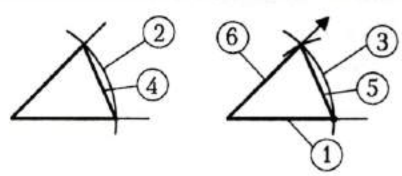
2) серединный перпендикуляр — геометрическое место точек, равноудаленных от концов отрезка;

3) биссектриса угла — геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла;

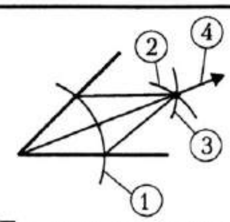
4) множество точек, равноудаленных от данной прямой, — это две прямые, параллельные данной и находящиеся на заданном расстоянии от нее.



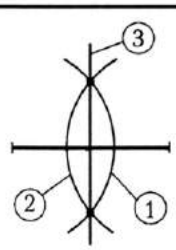
ПАМЯТКА



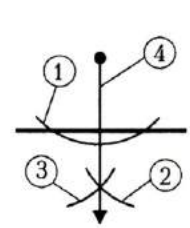
Угол, равный данному



Биссектриса угла



Середина отрезка



Перпендикуляр к прямой

Ответы на вопросы к теме

1. Операции циркулем — проведение окружности, дуги, замер длины отрезка; линейкой — проведение прямой, луча, отрезка.

2. На прямой отмечаем точку, замеряем циркулем данный отрезок, ставим ножку циркуля в отмеченную точку и радиусом, равным данному отрезку, делаем засечку на прямой.

3. На прямой откладываем отрезок c. Из его концов как из центров радиусами, равными a и b, проводим дуги до их пересечения. Решение существует, если для наибольшего отрезка выполняется $c < a + b$. Решение единственное, так как треугольники равны по трем сторонам.

4. Строим луч, произвольным радиусом проводим дугу с центром в вершине данного угла. Тем же радиусом проводим вторую дугу с центром в вершине построенного луча. Замеряем расстояние между точками пересечения первой дугой сторон данного угла. Радиусом, равным этому расстоянию, с центром в точке, лежащей на построенном луче, проводим третью дугу до пересечения со второй дугой. Равенство углов следует из равенства треугольников по 3-му признаку.

5. Проводим дугу произвольным радиусом с центром в вершине угла, которая пересекает стороны угла в двух точках. Из этих точек как из центров одним и тем же радиусом проводим две дуги до пересечения их в некоторой точке. Проводим луч из вершины угла, проходящий через эту точку. То, что построенный луч — биссектриса, следует из равенства треугольников по 3-му признаку.

6. Из концов отрезка как из центра произвольным, но одним и тем же радиусом проводим две дуги до пересечения их в двух точках. Соединяем эти точки. Так как каждая из точек равноудалена от концов отрезка, то они принадлежат серединному перпендикуляру. А через две точки проходит единственная прямая. Поэтому это — серединный перпендикуляр.

7—8. Из данной точки как из центра проводим дугу произвольным радиусом, которая пересекает данную прямую в двух точках. Из этих точек как из центров проводим две дуги равным радиусом до пересечения их в некоторой точке. Проводим прямую через эту точку и данную точку. Данные точки будут равноудалены от точек пересечения дуги и прямой. Поэтому соединяющая их прямая — серединный перпендикуляр.

9. Строим угол, равный данному, на его сторонах от вершины угла откладываем отрезки, равные данным сторонам. Построенный треугольник удовлетворяет условию.

10. Строим отрезок, равный данному. Строим два угла, равные данным углам, с вершинами в концах построенного отрезка до пересечения сторон этих углов в некоторой точке.

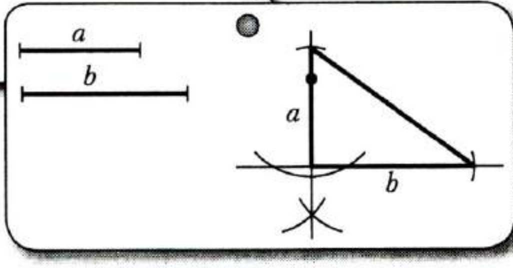
11. Опускаем из данной точки перпендикуляр на данную прямую. Из данной точки восставляем перпендикуляр к построенной прямой.

12. 1) Анализ — поиск решения. 2) Построение — описание шагов построения. 3) Доказательство — подтверждение того, что построенная фигура удовлетворяет требованию задачи. 4) Исследование — выяснение существования решения и его единственности.

13. 1) Окружность — ГМТ, равноудаленных от данной. 2) Биссектриса угла — ГМТ, равноудаленных от сторон угла. 3) Серединный перпендикуляр — ГМТ, равноудаленных от концов отрезка. 4) ГМТ, равноудаленных от данной прямой, — две параллельные прямые, находящиеся на заданном расстоянии от данной прямой.

Ключевые задачи

Задача 1. Постройте прямоугольный треугольник по двум катетам.



Решение. Пусть даны катеты a и b.

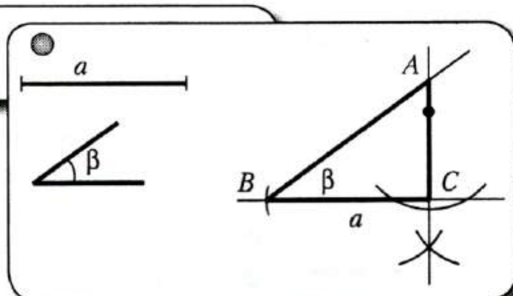
Построение. а) Строим прямой угол, для чего опускаем перпендикуляр из произвольной точки на произвольную прямую.

б) На сторонах прямого угла от его вершины откладываем данные катеты.

в) Соединяем концы отложенных отрезков.

Доказательство. Следует из построения.

Задача 2. Постройте прямоугольный треугольник по катету и прилежащему острому углу.



Решение. Пусть даны катет a и прилежащий острый угол β.

Построение. а) Строим прямой угол (перпендикуляр к произвольной прямой из произвольной точки). Получим угол C.

б) На одной стороне прямого угла от его вершины откладываем отрезок $CB = a$.

в) Строим угол B, равный данному углу β.

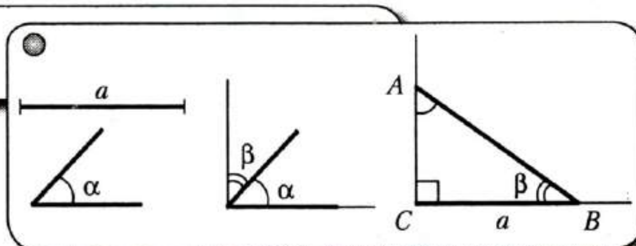
г) В пересечении стороны угла β и второй стороны прямого угла получим вершину A.

ΔABC — искомый.

Доказательство. $\angle C = 90°$, $BC = a$ — катет, $\angle B = \beta$ — прилежащий острый угол.

Примечание. Мы не описываем построение угла, равного данному, так как это — основная задача 2. Также мы могли бы не показывать на рисунке построение прямого угла, так как это — основная задача 5.

Задача 3. Постройте прямоугольный треугольник по катету и противолежащему острому углу.



Решение.

Анализ. Так как углы прямоугольного треугольника в сумме равны 90°, то мы сможем построить прямоугольный треугольник по катету и прилежащему острому углу $\beta = 90° - \alpha$.

Для построения угла β можно внутри угла 90° отложить угол α.

Построение. Пусть дан катет a и противолежащий острый угол α.

а) Строим прямой угол.

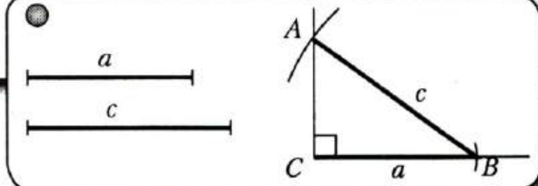
б) Внутри его откладываем угол α. Получаем угол $\beta = 90° - \alpha$.

в) Строим прямоугольный треугольник по катету a и прилежащему острому углу β. (Это ключевая задача 2.)

ΔABC — искомый.

Доказательство. $\angle C = 90°$, $BC = a$ — катет, $\beta = 90° - \alpha$ — противолежащий острый угол.

Задача 4. Постройте прямоугольный треугольник по катету и гипотенузе.



Решение.

Построение. Пусть даны катет a и гипотенуза c.

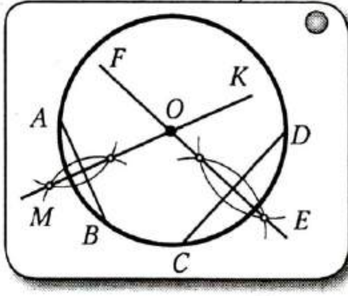
а) Строим прямой угол.

б) На одной стороне прямого угла от его вершины откладываем отрезок $CB = a$.

в) Из точки B как из центра радиусом, равным c, делаем засечку на второй стороне прямого угла. Получим точку A. Соединяем точки A и B.

ΔABC — искомый.

Доказательство. $\angle C = 90°$, $BC = a$ — катет, $AB = c$ — гипотенуза.



Задача 5. Дана окружность. Постройте ее центр при помощи циркуля и линейки.

Решение.

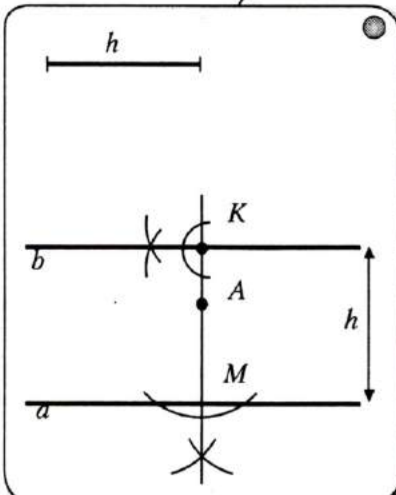
Анализ. Мы знаем, что серединный перпендикуляр к хорде проходит через центр окружности (ключевая задача 9 в теме «Треугольники»). Серединные перпендикуляры к двум хордам окружности будут пересекаться в ее центре. Отсюда построение.

Построение. а) Проводим хорду AB и строим к ней серединный перпендикуляр MK (основная задача 4).

б) Проводим хорду CD и строим к ней серединный перпендикуляр FE.

в) Находим точку их пересечения. Точка O — центр окружности.

Доказательство. Центр окружности с одной стороны принадлежит прямой MK, с другой стороны — прямой EF. Существует единственная точка, принадлежащая каждой из этих прямых. Это точка O. Следовательно, O — центр окружности.



Задача 6. Постройте прямую, параллельную данной, если расстояние между прямыми равно заданному отрезку.

Решение.

Построение. Пусть даны прямая a и отрезок h — расстояние между параллельными прямыми.

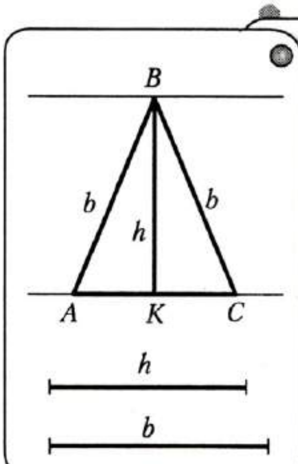
а) Строим прямую, перпендикулярную прямой a, для чего из произвольной точки A опускаем перпендикуляр AM на прямую a.

б) Откладываем на перпендикулярной прямой отрезок $MK = h$.

в) Из точки K восставляем перпендикуляр к прямой KM.

$b \parallel a$.

Доказательство. Два перпендикуляра к одной прямой параллельны. Расстояние между параллельными прямыми равно длине перпендикуляра, опущенного из любой точки одной прямой на другую. $KM \perp a$, $KM = h$.



Задача 7. Постройте равнобедренный треугольник по высоте, проведенной к основанию, и боковой стороне.

Решение.

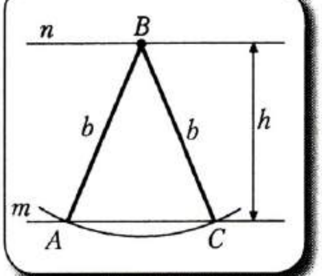
Анализ. Изобразим искомый треугольник ABC и его высоту BK. Пусть $AB = BC = b$, $BK = h$. Вершина B удалена от прямой AC на расстояние h. Все точки, удаленные от прямой AC на расстояние h, лежат на прямой, параллельной AC. Если провести две параллельные прямые с расстоянием между ними, равным h, то на одной прямой будет лежать вершина B, на другой — A и C. Расстояния между B и A и между B и C равны b. Тогда, взяв произвольную точку на одной из параллельных прямых в качестве вершины треугольника ABC, мы сможем при помощи циркуля раствором, равным b, построить точки A и C.

Построение. Пусть высота равна h, боковая сторона равна b.

а) Проводим произвольную прямую m.

б) Строим параллельную ей прямую n на расстоянии h (ключевая задача 6).

в) Из произвольной точки B, взятой на прямой n, как из центра радиусом, равным b, проводим дугу, которая пересекает прямую m в точках A и C. ΔABC — искомый.

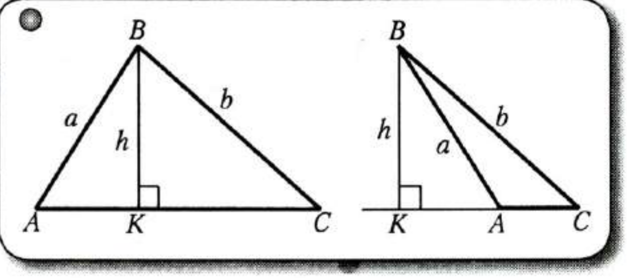


Доказательство. Так как $AB = BC = b$, то треугольник — равнобедренный с боковой стороной, равной b. Высота, опущенная на основание, равна h как расстояние между параллельными прямыми.

Исследование. Так как катет меньше гипотенузы, то высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, меньше боковой стороны. Поэтому решение возможно, если $h < b$. В этом случае решение единственное.

Примечание. Вторым способом решения является построение прямоугольного треугольника ABK по катету h и гипотенузе b.

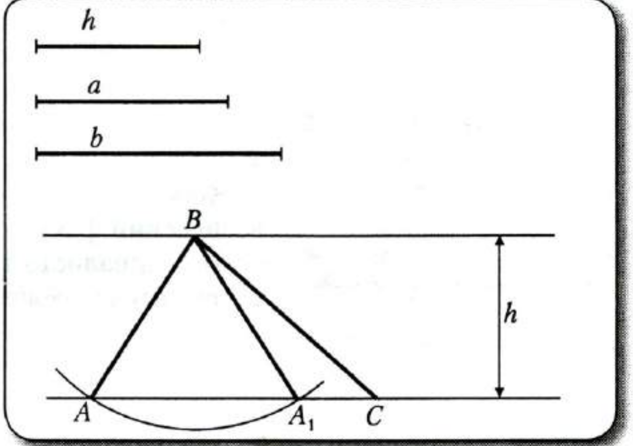
Задача 8. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, опущенной на третью сторону.



Решение.

Анализ. Учитывая, что основание высоты может принадлежать стороне треугольника или ее продолжению, в общем случае существует два разных треугольника со сторонами a, b и высотой h, опущенной на третью сторону. В обоих случаях решение сводится к построению прямоугольного треугольника по катету и гипотенузе. Можно также провести две параллельные прямые на расстоянии h друг от друга, и, взяв точку на одной из них, сделать засечки радиусами a и b на другой прямой.

Построение. а) Строим две параллельные прямые с расстоянием h между ними (ключевая задача 7).



б) Из точки B, взятой на одной из прямых, как из центра проводим дугу AA_1 радиусом, равным a.

в) Из точки B проводим дугу радиусом, равным b, которая пересекает вторую прямую в точке C. ΔABC и ΔA_1BC — искомые.

Доказательство. В ΔABC $AB = a$, $BC = b$ по построению, высота, опущенная из вершины B, равна h. В ΔA_1BC $A_1B = a$, $BC = b$ по построению, высота, опущенная из вершины B, равна h.

Исследование. Так как перпендикуляр всегда меньше наклонной, проведенной из той же точки, то задача имеет решение, только если $h \leqslant a$ и $h \leqslant b$. Если $h < a$, $h < b$ и $a \neq b$, то задача имеет два решения. Если $a = h$ или $b = h$, то треугольник прямоугольный и задача имеет единственное решение. Если $h < a$ и $a = b$, то задача имеет единственное решение — равнобедренный треугольник. Если $h > a$ или $h > b$, задача не имеет решения.

В записи решения задачи на построение обязательны два этапа.

2-й этап. Построение.

Здесь следует описать алгоритм построения требуемой фигуры. Дать своего рода инструкцию, такую, чтобы любой, следуя шагам инструкции, построил бы требуемую фигуру.

3-й этап. Доказательство.

Здесь нужно показать, что построенная фигура — именно та, которую требуется построить по условию. Иногда равенство отрезков, углов, параллельность или перпендикулярность прямых или отрезков следует непосредственно из построения. В этом случае так и указывают: «по построению».

Для тех, кому нравится математика

Древнегреческие ученые достигли высокого совершенства в решении геометрических задач, в частности в решении задач на построение. Однако существуют три задачи, которые известны всем без исключения, кто когда-либо интересовался математикой. Они сформулированы в глубокой древности, и многие поколения математиков пытались найти их решения. Это задачи об удвоении куба, о трисекции угла и о квадратуре круга.

Задача 1. Построить циркулем и линейкой ребро куба, объем которого вдвое больше объема заданного куба (удвоение куба).

Задача 2. Разделить данный угол циркулем и линейкой на три равные части (трисекция угла).

Задача 3. Построить циркулем и линейкой квадрат, площадь которого равна площади данного круга (квадратура круга).

Эти задачи овеяны легендами и преданиями. Например, задачу об удвоении куба называют *делийской задачей*, так как, по преданию, для избавления от эпидемии на острове Делос в Эгейском море оракул потребовал вдвое увеличить кубический жертвенник.

Карл Гаусс

Все три задачи оказались неразрешимы при помощи циркуля и линейки. Но попытки их решить привели к развитию математики. Кроме древнегреческих математиков позже задачами занимались европейские математики: Виет, Декарт, Ньютон.

История решения задачи о квадратуре круга длилась четыре тысячелетия, а сам термин «квадратура круга» стал синонимом неразрешимых задач.

Король математиков Карл Га́усс (XIX в.) в юности поступил на филологический факультет Геттингенского университета в Германии и хотел стать специалистом в области языка и литературы. Однако уже на первом курсе увлекся решением одной задачи: «Построить при помощи циркуля и линейки правильный семнадцатиугольник (многоугольник, у которого все 17 сторон и 17 углов равны)». Потратив около недели и решив задачу, он посвятил свою жизнь математике. Эту свою первую серьезную задачу он считал одной из важнейших в жизни. Поэтому завещал после смерти выбить на своем могильном камне чертеж ее решения!

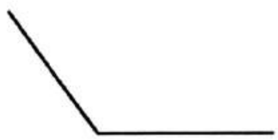
С уважением,
ваш
В. Казаков

Задачи на построение

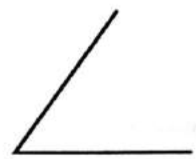
1 Разделите данный отрезок на 4 равные части.

2 Постройте отрезок, равный $\frac{3}{4}$ данного отрезка.

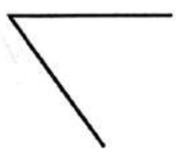
3 Разделите данный угол на 4 равные части.



4 Постройте угол, равный $\frac{5}{4}$ данного угла.

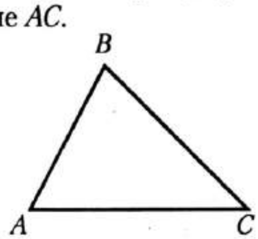


5 Постройте угол, равный данному.

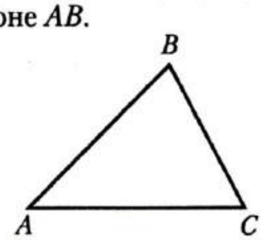


6 Постройте угол, равный данному.

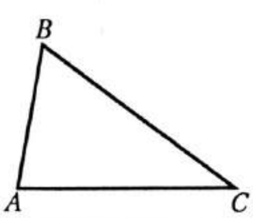
7 Постройте биссектрису, проведенную к стороне AC.



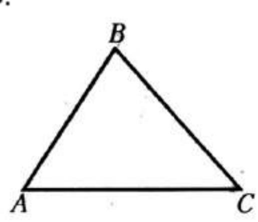
8 Постройте биссектрису, проведенную к стороне AB.



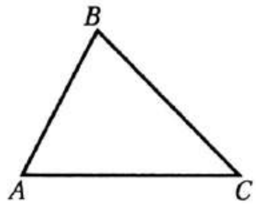
9 Постройте высоту, опущенную на сторону AC.



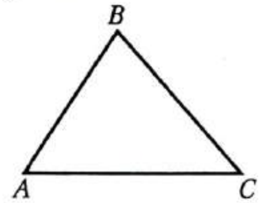
10 Постройте высоту, опущенную на сторону AB.



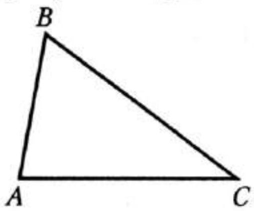
11 Постройте точку пересечения медиан, проведенных из вершин A и C.



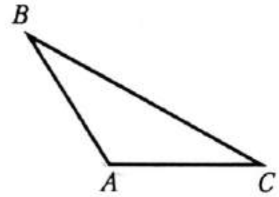
12 Постройте точку пересечения биссектрис треугольника.



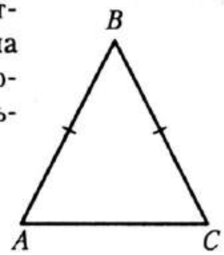
13 Постройте точку пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.



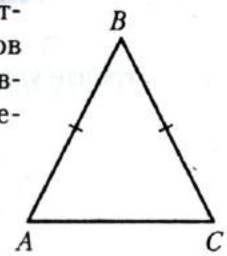
14 Постройте точку пересечения высот, проведенных из вершин B и C.



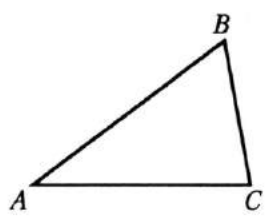
15 Постройте биссектрису внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника ABC.



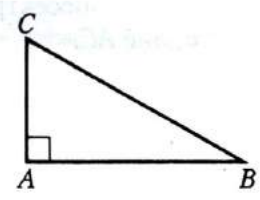
16 Постройте биссектрису одного из углов при основании равнобедренного треугольника ABC.



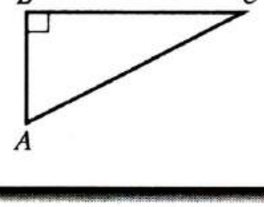
17 Постройте треугольник, равный данному.



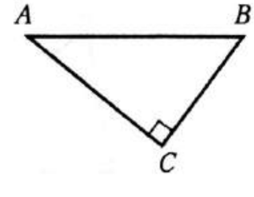
18 Постройте треугольник, равный данному.



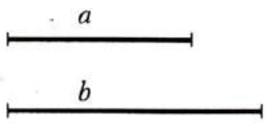
19 Постройте окружность, центр которой лежит на середине стороны AC, а радиус равен половине AC.



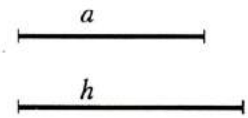
20 Постройте окружность, центр которой лежит на середине стороны AB, а радиус равен половине AB.



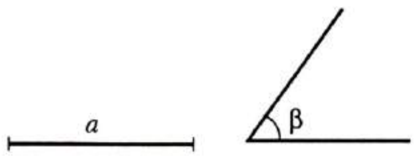
21 Постройте равнобедренный треугольник по основанию a и боковой стороне b.



22 Постройте равнобедренный треугольник по основанию a и высоте h.

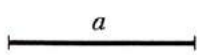


23 Постройте равнобедренный треугольник по основанию a и углу при основании β.

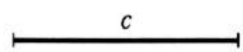


24 Постройте равнобедренный треугольник по основанию a и углу при вершине α.

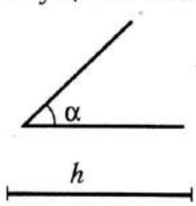
25 Постройте равносторонний треугольник по его стороне a.



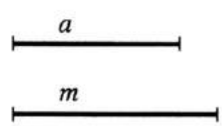
26 Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной c.



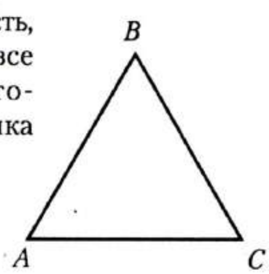
27 Постройте прямоугольный треугольник по острому углу α и высоте h, опущенной на гипотенузу.



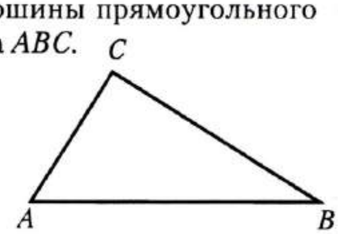
28 Постройте прямоугольный треугольник по катету a и медиане m, проведенной к другому катету.



29 Постройте окружность, проходящую через все вершины равностороннего треугольника ABC.



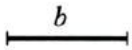
30 Постройте окружность, проходящую через все вершины прямоугольного треугольника ABC.



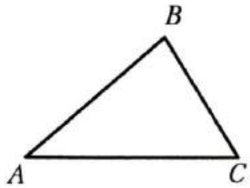
Контрольная работа

Вариант 1

1 Отметьте произвольную точку A и постройте окружность радиусом, равным заданному отрезку b, с центром в точке A.



2 Постройте медиану BM треугольника ABC.



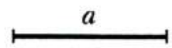
3 На окружности с центром в точке O отмечена точка M. Постройте равносторонний треугольник с вершинами в точках O и M.

4 Постройте равнобедренный треугольник по основанию и высоте, проведенной к боковой стороне.

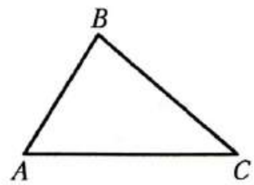
5 Постройте прямоугольный треугольник по медиане, проведенной к гипотенузе, и углу, который медиана образует с одним из катетов.

Вариант 2

1 Отметьте произвольную точку B и постройте окружность радиусом, равным заданному отрезку a, с центром в точке B.



2 Постройте высоту BK треугольника ABC.



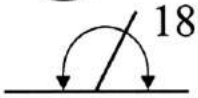
3 На окружности с центром в точке O отмечена точка K. Постройте прямоугольный треугольник с вершинами в точках O и K.

4 Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне и медиане, проведенной к боковой стороне.

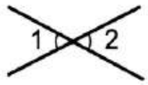
5 Постройте прямоугольный треугольник по высоте и медиане, проведенным к гипотенузе.

Заключение

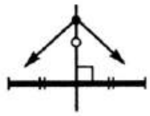
1 Смежные



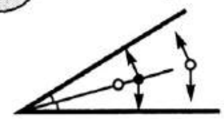
2 Вертикальные



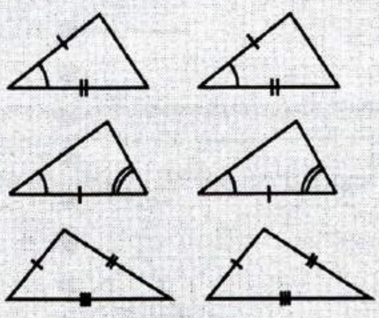
3 Серединный п-р



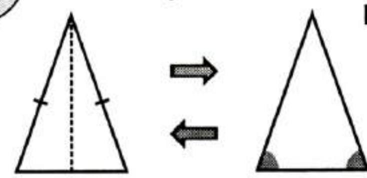
4 Биссектриса



5 Признаки равенства треугольников



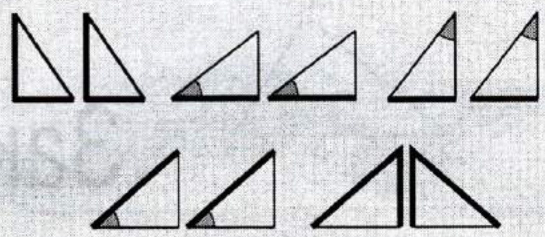
6 Равнобедренный



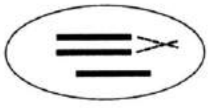
Признаки

1.
+2.
+3.
+4.

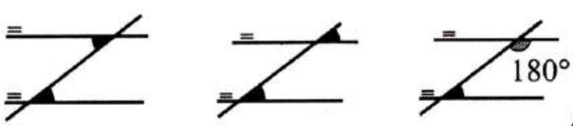
Свойства углов и биссектрисы

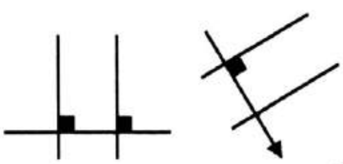


7 Параллельные прямые

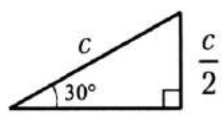


Признаки — свойства



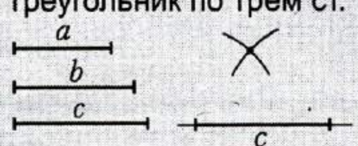


10 Катет, лежащий против угла в 30°

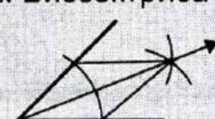


11 Задачи на построение

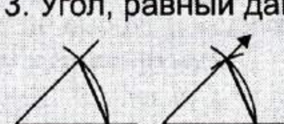
1. Треугольник по трем ст.



2. Биссектриса



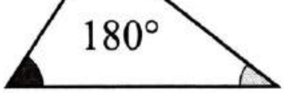
3. Угол, равный данному

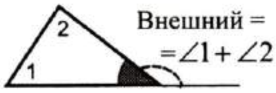


4. Середина

5. Опустить — восставить

8 Сумма углов треугольника





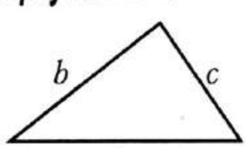
Внешний = $=\angle 1+\angle 2$

9 Неравенство треугольника

$a<b+c$

$b<a+c$

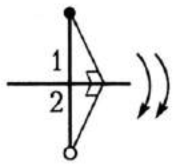
$c<a+b$



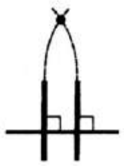
Итак, изучены все теоремы по курсу геометрии 7 класса. В начале книги мы говорили вам о том, что из аксиом и теорем выстраиваются цепочки: доказательство каждой новой теоремы опирается на предыдущие. Поэтому так важно было не пропустить ни одной теоремы.

Приведем пример одной такой цепочки из шести свойств:

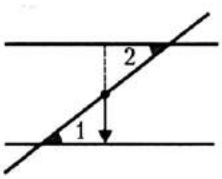
1. Аксиома прямой.
Через две точки проходит единственная прямая.
Принимается без доказательства.



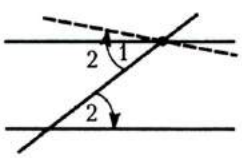
2. Теорема о единственности перпендикуляра.
Из точки к прямой можно провести единственный перпендикуляр.
Доказывается на основании свойства 1.



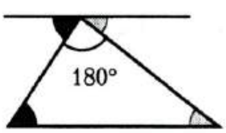
3. Теорема о двух прямых, перпендикулярных третьей.
Две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны между собой.
Доказывается на основании свойства 2.



4. Признак параллельности прямых.
Если накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.
Доказывается на основании свойства 3.



5. Свойство углов при параллельных прямых.
Если прямые параллельны, то накрест лежащие углы равны.
Доказывается на основании свойства 4.



6. Теорема о сумме углов треугольника.
Сумма углов треугольника равна 180°.
Доказывается на основании свойства 5.

Перечислим основные теоремы, которыми вы будете пользоваться постоянно при решении задач и доказательстве других теорем.

1. *Сумма смежных углов равна* 180°.

2. *Вертикальные углы равны.*

3. *Серединный перпендикуляр* — геометрическое место точек, равноудаленных от концов отрезка.

4. *Биссектриса угла* — геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла.

5. *Признаки равенства треугольников*:
а) по двум сторонам и углу между ними;
б) по стороне и двум прилежащим к ней углам;
в) по трем сторонам.

6. *Признаки равенства прямоугольных треугольников*:
а) по двум катетам;
б) по катету и прилежащему острому углу;
в) по катету и противолежащему острому углу;
г) по гипотенузе и острому углу;
д) по катету и гипотенузе.

7. *Свойства и признаки равнобедренного треугольника*:
а) углы при основании равнобедренного треугольника равны;
б) если у треугольника равны два угла, то он равнобедренный;
в) биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является его высотой и медианой;
г) если в треугольнике высота является биссектрисой, или высота является медианой, или биссектриса является медианой, то треугольник равнобедренный.

8. *Свойства и признаки параллельных прямых.*
а) Признаки параллельности прямых:
если накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны;
если соответственные углы равны, то прямые параллельны;
если сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.
б) Свойства углов при параллельных прямых:
если прямые параллельны, то накрест лежащие углы равны;
если прямые параллельны, то односторонние углы равны;
если прямые параллельны, то сумма внутренних односторонних углов равна 180°.
в) Две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой.
г) Две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны между собой.
д) Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и второй.

9. *Сумма углов треугольника равна* 180°.

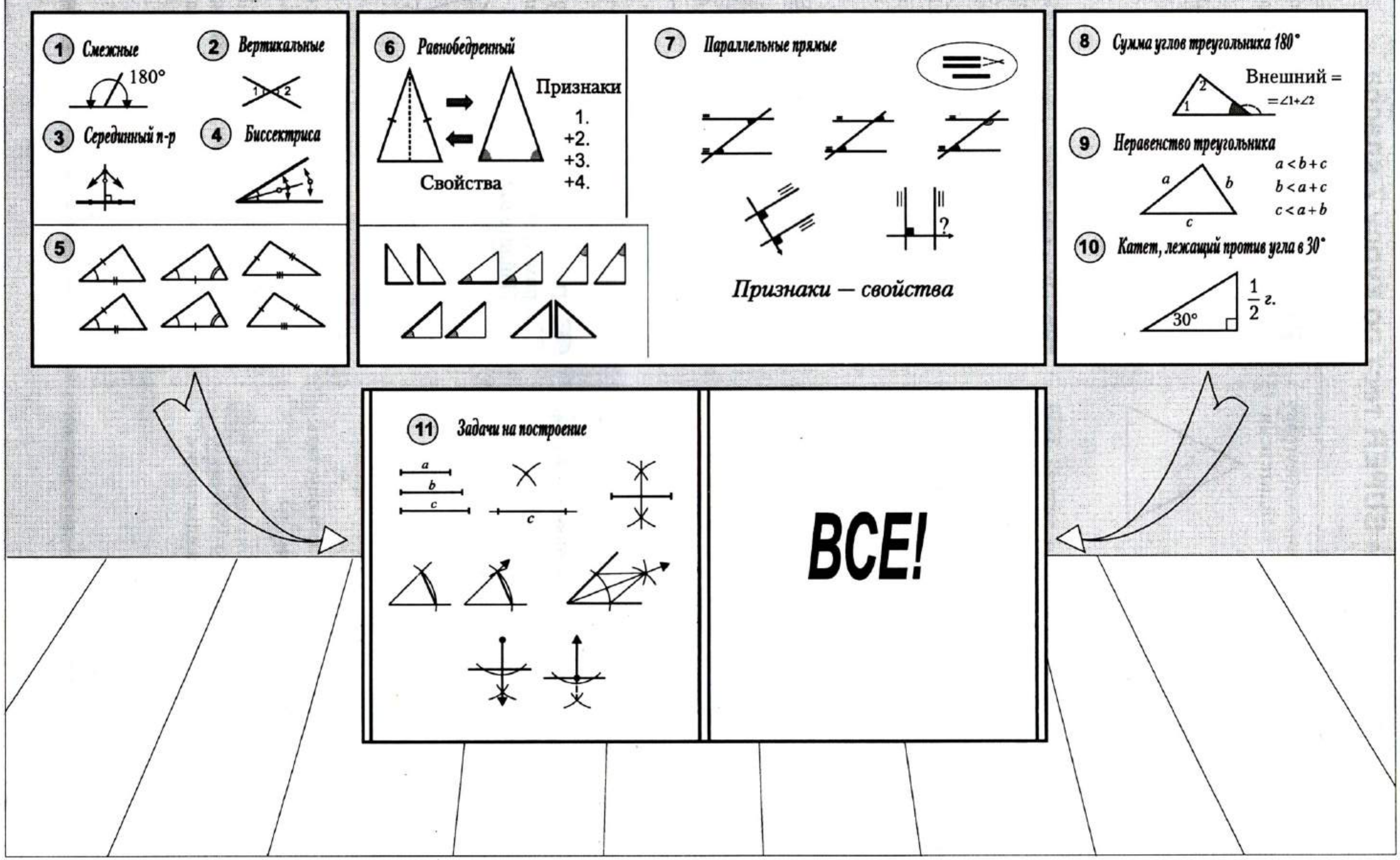
10. *Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним.*

11. *Неравенство треугольника*:
любая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.

12. *Задачи на построение*:
а) построение треугольника по трем сторонам;
б) построение угла, равного данному;
в) построение биссектрисы угла;
г) деление отрезка пополам, или построение серединного перпендикуляра к отрезку;
д) проведение через точку прямой, которая перпендикулярна данной прямой.

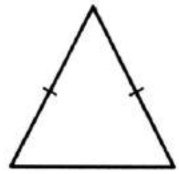
13. *Этапы решения задач на построение*:
а) анализ;
б) построение;
в) доказательство;
г) исследование.

Тема урока «Теоремы 7 класса»

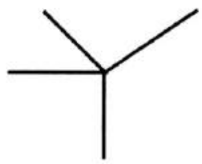


Итоговый SUPER тест по курсу 7 класса

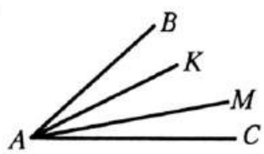
1 Две стороны равнобедренного треугольника равны 5 см и 10 см. Найдите периметр треугольника.



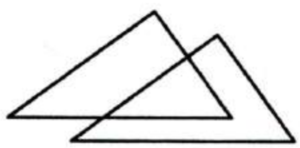
2 Сколько углов, меньших 180°, изображено на рисунке?



3 $\angle BAC = 54°$, AK — биссектриса $\angle BAM$, $\angle KAC = 38°$. Найдите $\angle MAC$.



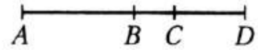
4 Сколько отрезков изображено на рисунке?



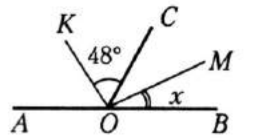
5 Из точки на прямую можно опустить:

1) один перпендикуляр;
2) два перпендикуляра;
3) ни одного перпендикуляра;
4) сколько угодно перпендикуляров.

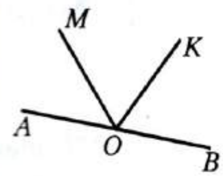
6 $AD : BD = 2 : 1$, $AD : CD = 3 : 1$, $AD : BC = x : 1$. Найдите число x.



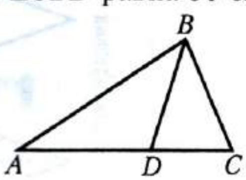
7 OK и OM — биссектрисы, $\angle COK = 48°$. Найдите угол x.



8 $\angle AOK = 110°$, $\angle BOM = 150°$. Найдите $\angle MOK$.



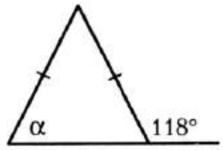
9 Периметр ΔABC равен 60 см, сумма периметров ΔABD и ΔCBD равна 90 см. Найдите BD.



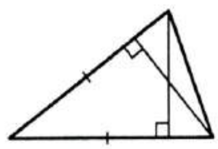
10 Из точки на прямой можно восставить:

1) один перпендикуляр;
2) два перпендикуляра;
3) ни одного перпендикуляра;
4) сколько угодно перпендикуляров.

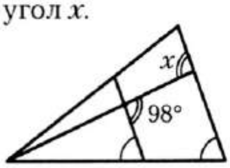
11 По рисунку найдите угол α.



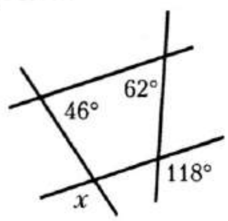
12 Сколько пар равных прямоугольных треугольников изображено на рисунке?



13 По рисунку найдите угол x.

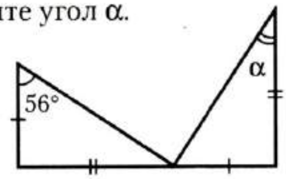


14 По рисунку найдите угол x.

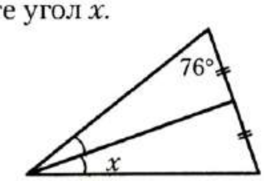


15 Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен 70°. Найдите угол при основании.

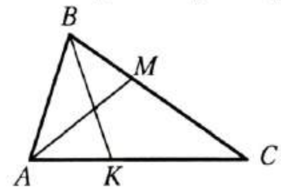
16 По рисунку найдите угол α.



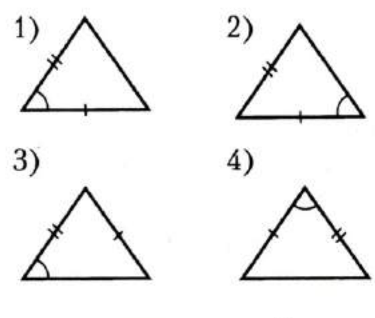
17 По рисунку найдите угол x.



18 AM и BK — биссектрисы, $AM = BK$, $AB = 6$ см, $BC = 9$ см. Найдите периметр ΔABC.

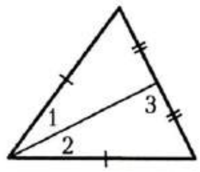


19 О каких двух треугольниках можно точно утверждать, что они равны между собой? 1) 1 и 2; 2) 1 и 3; 3) 2 и 3; 4) 1 и 4.

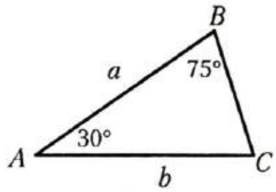


20 Сумма двух углов равнобедренного треугольника равна 86°. Найдите угол при основании.

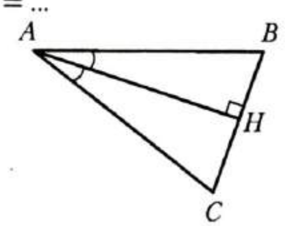
21 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 140°$. Найдите $\angle 1$.



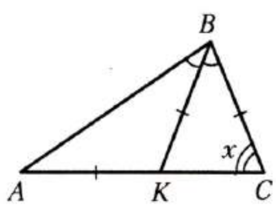
22 Если $a + b = 12$, то $b = ...$



23 Если периметр ΔABC равен 62 см, $BH = 8$ см, то $AB = ...$



24 BK – биссектриса, $AK = BK = BC$. Найдите угол x.



25 Найдите периметр треугольника, который задан одним из следующих наборов длин трех его сторон:

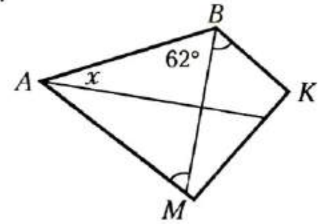
1) 5 см, 5 см, 10 см;

2) 9 см, 17 см, 7 см;

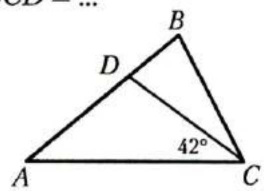
3) 23 см, 21 см, 6 см;

4) 15 см, 6 см, 8 см.

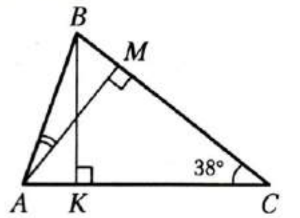
26 AK и BM – биссектрисы, $\angle ABM = 62°$. Найдите угол x.



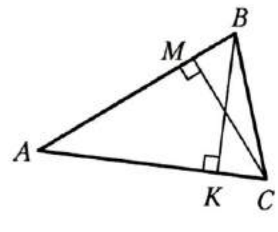
27 Если $AD = DC$, $AB = AC$, $\angle ACD = 42°$, то $\angle BCD = ...$



28 Если $BK = AM$, то $\angle BAM = ...$



29 Если $CM = BK$, $BM = 4$ см, $AC = 12$ см, то $AM = ...$



30 При каких расстояниях между тремя точками они лежат на одной прямой?

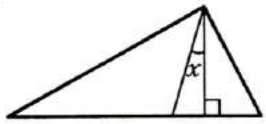
1) 3 см, 8 см, 6 см;

2) 14 см, 7 см, 5 см;

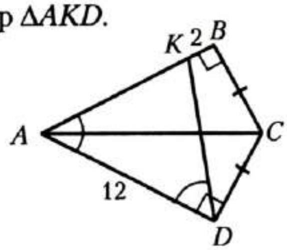
3) 18 см, 21 см, 3 см;

4) 9 см, 9 см, 1 см.

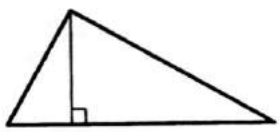
31 Углы треугольника относятся как 2 : 7 : 9. Найдите угол между высотой и биссектрисой, которые проведены к большей стороне.



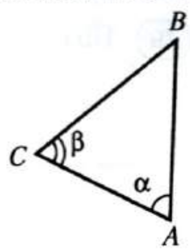
32 $KB = 2$ см, $AD = 12$ см, $\angle BAD = \angle ADK$. Найдите периметр ΔAKD.



33 В прямоугольном треугольнике один из углов равен 60°, гипотенуза равна 12 см. Найдите больший из отрезков, на которые высота делит гипотенузу.



34 Известно, что $\alpha < \beta$ и стороны, лежащие напротив углов α и β, равны 17 и 18 см. Найдите AB.



35 Если две стороны треугольника равны 6 см и 8 см, то медиана, проведенная к третьей стороне, может быть равна:

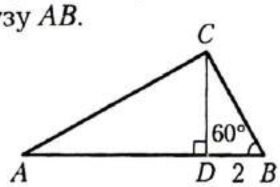
1) 7 см;

2) 6 см;

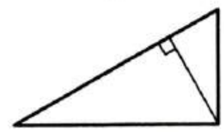
3) 8 см;

4) 10 см.

36 В прямоугольном треугольнике ABC к гипотенузе AB проведена высота CD. Угол B равен 60°, отрезок BD равен 2 см. Найдите гипотенузу AB.

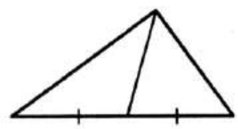


37 Сумма катета и гипотенузы равна 36 см. Отношение этого катета к гипотенузе 1 : 2. Найдите меньший из отрезков, на которые высота треугольника делит гипотенузу.



38 Если периметр треугольника равен 24 см, то медиана треугольника может быть равна ...

1) 12 см; 2) 14 см; 3) 10 см; 4) 15 см.

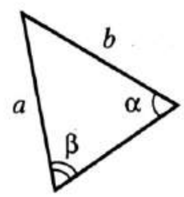


39 Если $a > b$, то:

1) $\alpha > \beta$;

2) $\alpha = \beta$;

3) $\alpha < \beta$.



40 Величины двух углов треугольника могут быть равны:

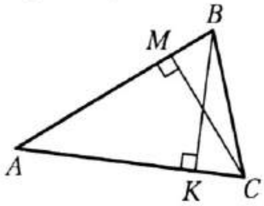
1) 110° и 92°;

2) 78° и 101°;

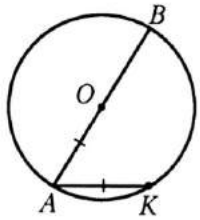
3) 93° и 88°;

4) 170° и 12°.

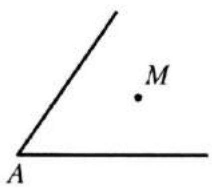
41 $\angle ABC = \angle ACB$, $AK = 8$ см, $MB = 2$ см, $BC = 6$ см. Найдите периметр ΔABC.



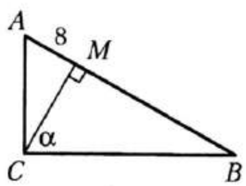
42 O — центр окружности, $AO = AK$. Найдите $\angle ABK$.



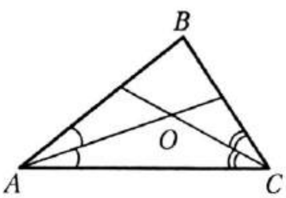
43 $\angle A = 60°$, точка M равноудалена от каждой из сторон угла на 10 см. Найдите расстояние от точки M до вершины угла.



44 $\angle ACB = 90°$, $\angle\alpha = 60°$, $AM = 8$ см. Найдите гипотенузу.

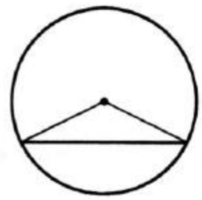


45 Расстояние от точки O до прямой AC равно 8 см. Найдите сумму расстояний от точки O до прямых AB и BC.

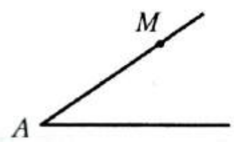


46 В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 24 см, а вершина основания удалена от боковой стороны на 12 см. Найдите угол при основании треугольника.

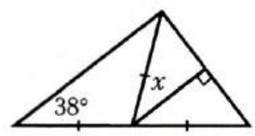
47 Дана окружность радисом 12 см. Расстояние от центра окружности до хорды равно 6 см. Найдите угол между радиусами, проведенными к концам хорды.



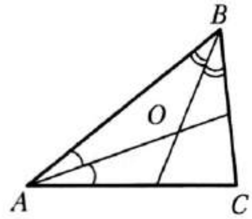
48 $AM = 52$ см. Расстояние от точки M до второй стороны угла равно 26 см. Найдите угол между биссектрисой данного угла и его стороной.



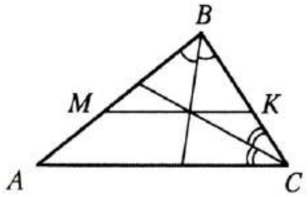
49 По рисунку найдите угол x.



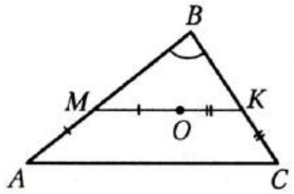
50 $\angle OCB = 86°$. Найдите $\angle AOB$.



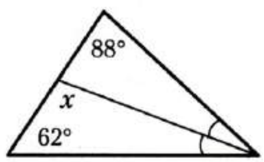
51 Если $MK \parallel AC$ и $AM = 5$ см, $CK = 4$ см, то $MK = ...$



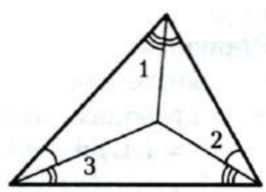
52 Если $\angle B = 70°$, то $\angle AOC = ...$



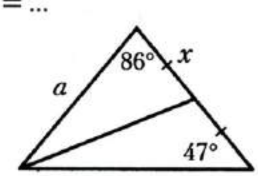
53 Угол x равен ...



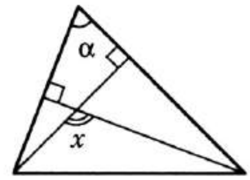
54 Если $\angle 1 + \angle 2 = 64°$, то $\angle 3 = ...$



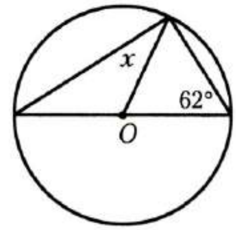
55 Если $a + x = 24$, то $x = ...$



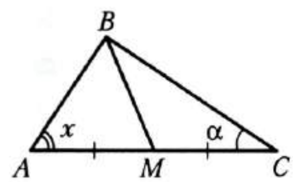
56 Если $\alpha = 64°$, то $x = ...$



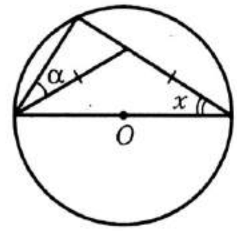
57 Если O — центр окружности, то $x = ...$



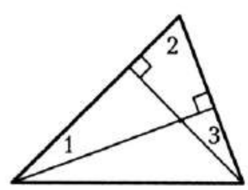
58 Если $BM = \frac{1}{2} AC$, $\alpha = 27°$, то $x = ...$



59 Если O — центр окружности, $\alpha = 26°$, то $x = ...$



60 Если $\angle 1 = 32°$, то $\angle 2 - \angle 3 = ...$



Ответы и указания

ТЕМА 1

1. 7 см. **2.** 21 см. **3.** 24 см. **4.** 18 см. **5.** 48 см. **6.** 64 см. **7.** 16 см. **8.** 52 см. **9.** 40 см. **10.** 50 см. **11*.** 26 см. **12*.** 44 см. **13*.** 6. **14*.** 10. Каждая из 5 точек образует с оставшимися 4 точками отрезок. При этом каждый из отрезков считается дважды. Поэтому всего отрезков $\frac{5\cdot 4}{2}=10$. **15*.** K – середина AM, P — середина MB. $KM=\frac{1}{2}AM$, $MP=\frac{1}{2}MB$, $KM+MP=\frac{1}{2}AM+\frac{1}{2}MB=\frac{1}{2}(AM+MB)=\frac{1}{2}AB$. **16*.** См. № 15*. **17*.** $\frac{7}{30}$ см. **18*.** $\frac{16}{45}$ см. **19*.** 32 см. *Указание.* Примите отрезок K_4B за 1 часть. **20*.** 48 см. **21.** 9 см. **22.** 36 см. **23.** 24°; 36°. **24.** 30°; 50°. **25.** 55°; 85°. **26.** 50°; 70°. **27.** 117°. **28.** 125°. **29.** 90°. **30.** 160°. **31.** 150°. **32.** 54°. **33.** 80°. **34.** 140°. **35.** 60°. **36.** 110°. **37.** 290°. **38.** 100°. **39.** 50°; 90°; 40°. **40.** 70°; 80°; 30. **41.** 145°. **42.** 60°. **43.** 40°. **44.** 30°. **45.** 96°. **46.** 100°. **47.** 30°. **48.** 45°. **49.** 10°. **50.** 80°. **51*.** 108°. Если $\angle 1=x$, то $\angle 3=\angle 4=180°-x$. По условию $x+2(180°-x)=4x$, откуда $x=72°$, $\angle 3=108°$. **52*.** 40°. *Указание.* Из условия следует, что $\angle 1:\angle 2=4:5$. **53*.** 130°. **54*.** 40°. **55*.** 90°. **56*.** 90°. **57*.** Обозначим половинки углов x и y. $2x+2y=180°$, $x+y=90°$. **58*.** Обозначим два смежных угла x и y. $x+y=180°$. Половинки вертикальных углов равны $\frac{x}{2}$. Тогда $\frac{x}{2}+y+\frac{x}{2}=180°$. Биссектрисы вертикальных углов образуют развернутый угол. **59*.** 80°; 120°; 160°. *Указание.* Полный угол равен 360°. **60*.** 90°; 120°; 150°.

ТЕМА 2

1. 2-й признак. **2.** 1-й признак. **3.** 1-й признак. **4.** 2-й признак. **5.** 1-й признак. **6.** 2-й признак. **7.** 3-й признак. **8.** 1-й признак. **9.** 1-й признак. **10.** 2-й признак. **11.** 2-й признак. **12.** 1-й признак. **13.** 1-й признак. **14.** 1-й признак. **15.** 2-й признак. **16.** 2-й признак. **17.** 2-й признак. **18.** 2-й признак. **19.** 3-й признак. **20.** 1-й признак. **21.** 1-й признак. **22.** 3-й признак. **23*.** $\Delta ABC=\Delta ADC$ по трем сторонам, откуда $\angle B=\angle D$. Соединим точки B и D. $\Delta ABD=\Delta CDB$ по трем сторонам, откуда $\angle BAD=\angle DCB$. Тогда $\Delta ABO=\Delta CDO$ по стороне ($AB=DC$) и двум прилежащим к ней углам. **24*.** *Указание.* Из равенства ΔABO и ΔCDO следует $AD=CB$. **25*.** Соединим точки A и C. Получим $\Delta ABC=\Delta CDA$ по трем сторонам, откуда $\angle B=\angle D$. Соединим точки B и D. Получим $\Delta DCB=\Delta BAD$, откуда $\angle A=\angle C$. Тогда $\Delta COB=\Delta AOD$ по 2-му признаку. **26*.** См. № 25*. **27*.** *Указание.* Следует из равенства ΔAOC и ΔBOD по 2-му признаку. **28*.** См. № 27*. **29*.** $\Delta ABM=\Delta A_1B_1M_1$ по 1-му признаку, откуда $\angle A=\angle A_1$, $AM=A_1M_1$. Так как $AC=\frac{3}{2}AM$, $A_1C_1=\frac{3}{2}A_1M_1$, то $AC=A_1C_1$. Тогда $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ по 1-му признаку. Откуда $BC=B_1C_1$. **30*.** См. № 29*. **37*.** *Указание.* $\Delta MAK=\Delta NBM=\Delta KCN$ по 1-му признаку. **38*.** *Указание.* $\angle MAN=\angle KBM=\angle NCK=120°$, откуда $\Delta MAN=\Delta KBM=\Delta NCK$. **39*.** $\Delta ABD=\Delta CBD$, отсюда BD — биссектриса $\angle ABC$. В равнобедренном ΔABC биссектриса будет и высотой. **40*.** ΔBCN — равнобедренный, поэтому медиана CK будет и биссектрисой. А биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны. **41.** 15 см. **42.** 18 см. **43.** 8 см. **44.** 12 см. **45.** 110°. **46.** 68°. **47.** 34°. **48.** 74°. **49.** 21°. *Решение.* $\angle ACB=$ $=\angle BAC=42°$, CM — медиана равнобедренного ΔKCB будет и биссектрисой, и $\angle 1 = 21°$. **50.** 51°. См. № 49. **51*** *Указание.* $\angle A = \angle C$, $AE = CF$, $\Delta AEM = \Delta CFM$. **52*** *Указание.* $AC = FD$, $\angle TDF = \angle BCA$, $\Delta ABC = \Delta FTD$. **53*** *Указание.* Они равны по 2-му признаку. **54*** *Указание.* ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ равны по 2-му признаку. **59*** ΔABC — данный, BM — высота. По условию $AK = KC$. В равнобедренном ΔAKC высота KM будет и медианой. В ΔABC высота BM является и медианой. ΔABC — равнобедренный по признаку. **60*** См. № 59*. **63.** 8 см. **64.** 50 см.

ТЕМА 3

3. а) Нет; б) уменьшить на 2°. **4.** а) Нет; б) увеличить на 1°. **5.** 135°. **6.** 115°. **7.** 3; 5; 7. **8.** 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16. **11.** 216°. **12.** 12°. **13.** 65°. **14.** 70°. **15.** $BC \parallel AD$. **16.** $AD \parallel BC$. **25.** 119°. **26.** 132°. **29*** *Указание.* Так как $\Delta ABD = \Delta CDB$ по 1-му признаку, то $\angle ADB = \angle CBD$, и поэтому $BC \parallel AD$, откуда $\angle 3 = \angle 4$. **30*** См. № 29*. **31*** *Указание.* В равнобедренном ΔAMK биссектриса MN будет и высотой. **32*** Медиана BM будет высотой и биссектрисой. ΔMKB — равнобедренный ($\angle KMB = \angle ABM = \angle CBM$), и медиана KN будет и высотой. Два перпендикуляра (KN и AC) к одной прямой (BM) параллельны. **33.** *Указание.* Рассмотрите два перпендикуляра к одной прямой. **34.** См. № 33. **35.** 130°. **36.** 40°. **37*** *Указание.* Докажите, что ΔAMK — равнобедренный, и воспользуйтесь свойством внешнего угла треугольника. **38*** См. № 37*. **39.** 27°. **40.** 56°. **41.** 38°. **42.** 64°. **43.** 40°; 140°. **44.** 63°; 117°. **45.** 138°. **46.** 42°. **53*** $\Delta ABM = \Delta CBK$ по 2-му признаку. Отсюда ΔABC — равнобедренный и $\angle BAC = \angle BCA$. Тогда $\angle BCA = \angle CAF$, откуда $AF \parallel BC$. **54*** *Указание.* Равны накрест лежащие и соответственные углы. **57*** *Указание.* Докажите, что ΔAMO и ΔCNO — равнобедренные.

ТЕМА 4

1. 8 см. **2.** 10 см. **3.** 50°. **4.** 44°. **5.** 110°. **6.** 100°. **7.** 110°. **8.** 117°. **9.** 38°. **10.** 32°. **11.** 50°. **12.** 60°. **13.** 48°. **14.** 28°. **15.** 42°. **16.** 54°. **19.** 50°. **20.** 56°. **21.** 6 см. **22.** 4 см. **27.** *Указание.* $\Delta AMN = \Delta CMN$ по катету и гипотенузе. **28.** *Указание.* $\Delta ACD = \Delta BDC$, откуда $AC = BD$. Тогда $\Delta AOC = \Delta BOD$. **29*** $\Delta ABC = \Delta ADC$, откуда $\angle BCA = \angle DCA$. В равнобедренном ΔBCD биссектриса будет и высотой. **30*** *Указание.* $\Delta AON = \Delta COK$, откуда $OK = ON$, $AK = CN$. Тогда $\Delta AKB = \Delta CNB$. **31.** 90°. **32.** 40°. **33.** 59°. **34.** 36°. **35.** 8 см. **36.** 60°. **37.** 84°. **38.** 30°. **41.** 60°. **42.** 75°. **43.** 6 см. **44.** 4 см. **45.** 4 см. **46.** 120°. **47.** 5 см. **48.** 30°. **49.** 9 см. **50.** 32 см. **51.** Из ΔAKB $\angle BAK + \angle ABK = 90°$, $2\angle BAK + 2\angle ABK = 180°$. **52.** См. № 51. **53.** *Указание.* $\angle EBC = \angle A + \angle C$. $\angle C = \angle KBC$. **54.** См. № 53. **55*** $\angle A + \angle C = 180° - 80° = 100°$, $\angle OAC + \angle OCA = 100° : 2 = 50°$, $\angle AOC = 180° - 50° = 130°$. **56*** 68°. См. № 55*. **57.** 60°. **58.** 120°. **59.** 24 см. **60.** 16 см. **61.** Биссектрисы смежных углов перпендикулярны. **62.** Биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию (ключевая задача 5). **63*** 46°. *Указание.* Так как биссектрисы смежных углов перпендикулярны, то $\angle ECK = 90°$; $\angle AEC = 136°$ — внешний. **64*** 76°; см. № 55* и № 56*. **65*** По неравенству треугольника $BM < AM + AB$, $BM < MC + BC$. Отсюда $2BM < AM + MC + AB + BC$, $BM < \frac{1}{2}(AC + AB + BC)$. **66*** По неравенству треугольника $BO + OT > BT$,

$AO + OM > AM$, $BO + OT + AO + OM > BT + AM$, $BM + AT > \frac{1}{2}(AC + BC)$.

67* Углы в ΔABC равны по 60°. Так как $\angle ABO$ и $\angle BAO$ меньше 60°, то их сумма меньше 120°. Поэтому $\angle AOB$ больше 60°. В треугольнике против большего угла лежит большая сторона. Поэтому $AO < AB$ (1). Из ΔBOC

$BC < OB + OC$ (2). Из (1) и (2) следует $AO < OB + OC$. **68*.** 45°. *Указание.* $\angle ACD = \alpha$, $\angle BCM = \beta$, $\angle DCM = x$. $\alpha + x + \beta = 90°$. Так как $\angle AMC = x + \alpha$, $\angle BDC = x + \beta$, то из ΔDCM $(x + \alpha) + (x + \beta) + x = 180°$. Отсюда $x = 45°$. **69*.** По неравенству треугольника $DB + BC > DC$, откуда $AB + BC + AC > AD + DC + AC$. **70*.** Продлим AD до пересечения с BC в точке K. $AB + BC > AK + KC$ (см. № 69*), $AK + KC > AD + DC$. **71.** 18 см. **72.** 4 см. **73.** 3 см. **74.** 16 см. **75*.** Проведем медиану KM ΔFBK. Так как $MB = BK$, $\angle B = 60°$, то ΔMBK — равносторонний. Поэтому $KM = MB$. Так как $KM = \frac{1}{2}BF$, то ΔFKB — прямоугольный (ключевая задача 5). **76*.** *Указание.* Рассмотрим маленький треугольник с углом 1. Два других угла являются внешними для треугольников с углами 2 и 4 и 3 и 5. **77.** 60°. **78.** 180°. **79.** 1 : 3. **80.** 1 : 3. **81.** 25 см. **82.** 44°; 44°. **87.** 60°. **88.** 1 : 2. **89.** 32°. **90.** 48°. **91.** 135°. См. № 55 и № 56. **92.** 60 см. *Решение.* Так как биссектриса KM является и высотой, то ΔAKB — равнобедренный, $AK = KB$. Тогда $BK + KC + BC = AC + BC = 60$ см. **93*.** *Указание.* Так как $\Delta ABC = \Delta DCA$, то равны соответствующие высоты. **94*.** ΔABK и CBK равны по 1-му признаку. **95.** 9 см. **96.** 4 см. **97*.** 130°. См. ключевую задачу 9. **98*.** 135°. См. ключевую задачу 9 и используйте то, что угол с вершиной на окружности, опирающийся на диаметр, прямой. **99.** 89°. **100.** 44,5°.

ТЕМА 5

1. *Указание.* Примените т. Фалеса. **2.** *Указание.* Разделите отрезок на 4 равные части. **3.** *Указание.* Постройте два раза биссектрису угла. **4.** *Указание.* Разделите угол на 4 равные части и дополните данный угол на $\frac{1}{4}$ данного. **17.** *Указание.* Воспользуйтесь любым из признаков равенства треугольников. **18.** *Указание.* Воспользуйтесь любым из признаков равенства прямоугольных треугольников. **19.** *Указание.* Разделите AC пополам. **20.** См. № 19. **21.** *Указание.* Постройте треугольник по трем сторонам: a, b, b. **22.** *Указание.* Восставьте к отрезку a серединный перпендикуляр h. **23.** *Указание.* Постройте треугольник по основанию a и двум прилежащим к нему углам, равным β. **24.** *Указание.* Постройте угол $\frac{\alpha}{2}$, угол $\beta = 90° - \frac{\alpha}{2}$, треугольник по стороне a и двум прилежащим к ней углам, равным β. **26.** *Указание.* Постройте серединный перпендикуляр к отрезку c и отложите на нем от основания отрезок, равный $\frac{c}{2}$. **27.** *Указание.* Постройте прямоугольный треугольник по катету h и противолежащему острому углу α. **28.** *Указание.* Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе m и катету a и воспользуйтесь определением медианы. **29.** *Указание.* Постройте два серединных перпендикуляра к сторонам треугольника, или постройте две биссектрисы треугольника, или постройте две высоты. **30.** *Указание.* Найдите середину гипотенузы AB и постройте окружность радиусом $R = \frac{1}{2}AB$.

ИТОГОВЫЙ SUPER ТЕСТ

1. 25. **2.** 6. **3.** 22°. **4.** 15. **5.** 1). **6.** 6. **7.** 42°. **8.** 80°. **9.** 15 см. **10.** 1). **11.** 62°. **12.** 3 пары. **13.** 98°. **14.** 134°. **15.** 35°. **16.** 34°. **17.** 18°. **18.** 24 см. **19.** 1) и 4). **20.** 43°. **21.** 25°. **22.** 6. **23.** 23 см. **24.** 72°. **25.** 50 см. **26.** 28°. **27.** 27°. **28.** 19°. **29.** 8 см. **30.** 3). **31.** 25°. **32.** 32 см. **33.** 9 см. **34.** 18 см. **35.** 6 см. **36.** 8 см. **37.** 6 см. **38.** 3). **39.** 1). **40.** 2). **41.** 26 см. **42.** 30°. **43.** 20 см. **44.** 32 см. **45.** 16 см. **46.** 75°. **47.** 120°. **48.** 15°. **49.** 38°. **50.** 126°. **51.** 9 см. **52.** 135°. **53.** 103°. **54.** 26°. **55.** 8 см. **56.** 116°. **57.** 28°. **58.** 53°. **59.** 32°. **60.** 26°.

Содержание

АВЕРСЭВ

Наглядная геометрия

7 класс

Опорные конспекты
Контрольные вопросы
Задачи на готовых чертежах

ISBN 978-985-19-0523-8