ANALIZĂ MATEMATICĂ

Traducere de:
Tatiana şi Octavian Stănăşilă

Георгий Евгеньевич Шилов
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
Функции одного переменого
НАУКА, Москва, 1970

G. E. ȘILOV

A N A L I Z Ă MATEMATICĂ

(Funcții de o variabilă)

Editura Științifică și Enciclopedică
București, 1985

Coperta de Constantin Gheorghiu-Enescu

REDACTOR: MARIA BORICEAN
TEHNOREDACTOR: OLIMPIU POPA

BUN DE TIPAR: 25.XI.1985
COLI DE TIPAR: 57

I. P. INFORMAȚIA
str. Brezoianu nr. 23—25
București

PREFAȚĂ

Analiza matematică este un domeniu vast al matematicii, legat de noțiunile de funcție, derivată și integrală. În etapa actuală ea înglobează un mare număr de domenii mai restrînse — ecuațiile diferențiale (ordinare și cu derivate parțiale), ecuații integrale, funcții de o variabilă complexă, geometrie diferențială, calcul variațional etc. Dar în timp ce conținutul analizei matematice poate fi considerat deja circumscris, părerile referitoare la structura ei se modifică sistematic. În cursul lui E. Goursat din anii '20 analiza matematică era prezentată ca o cîmpie imensă la un nivel uniform de abstracție; în cărțile ulterioare s-a dat o mare atenție punerii în relief a diverselor „etaje" de abstracție, adică a diverselor structuri (în sens Bourbaki), care caracterizează bazele matematico-logice ale tuturor construcțiilor. Revenirea la baze conduce la clarificarea esențialului întregii problematici și eliberează matematica de nevoia studiului individualizat al obiectului, prin includerea unor noi obiecte avînd o altă individualitate dar aceeași construcție în fond.

Astfel, este binecunoscută demonstrația dată de Picard existenței și unicității soluției unei ecuații diferențiale, bazate pe metoda aproximațiilor succesive ale funcției necunoscute pe un interval prin funcții obținute după reguli bine determinate. Ulterior a fost formulat (de către Banach) principiul contracției, numit și „metoda punctului fix", care se aplică demonstrației aceleiași teoreme. În acest mod s-a descoperit esența demonstrației lui Picard, anume existența unui operator contractant într-un spațiu metric. Cadrul propriu-zis — funcțiile numerice pe un interval și ecuația diferențială — s-a dovedit mai puțin important. Ca rezultat, „metoda punctului fix" nu numai

că a făcut demonstrația teoremei lui Picard mai clară, mai „geometrică", dar a dat de asemenea posibilitatea de a demonstra, prin dezvoltarea ideii respective, o clasă de teoreme de existență unde nu este vorba nici de funcții pe un interval, nici de ecuații diferențiale. Același lucru se poate afirma despre geometria spațiilor Hilbert, despre calculul funcționalelor diferențiabile și multe altele.

În acest volum dezvoltăm conceptele fundamentale ale analizei matematice a funcțiilor de o variabilă. Termenul de „o variabilă" este însă înțeles într-un sens mai larg. Într-adevăr, pentru anumite noțiuni fundamentale ale analizei, de exemplu, ca limita și continuitatea, distincția între cazul funcțiilor de o variabilă și cel al funcțiilor de mai multe variabile nu este esențială; în capitolele corespunzătoare preferăm ca expunerea să aibă un nivel optim de generalitate, înțelegînd prin „o variabilă" un punct al unui spațiu metric. Totuși, atunci cînd se ajunge la derivare și integrare, diferența dintre cele două cazuri devine sensibilă și ne mărginim la funcții într-adevăr de o variabilă, mai întîi reală și apoi complexă. În ceea ce privește valorile acestor funcții, ele sînt numerice doar la început, pentru că în cursul expunerii vom considera funcții cu valori vectoriale (chiar cu valori într-un spațiu vectorial normat), ceea ce va permite un cîmp mult extins de aplicații. În concepția noastră, funcțiile analitice fac parte integrantă din calculul diferențial și integral al funcțiilor de mai multe variabile.

Nu am inclus în acest volum integrala Lebesgue deoarece în problemele de analiză tratate aici se întîlnesc doar funcții continue sau avînd un număr finit de discontinuități și pentru integrarea acestora este suficientă integrala Riemann. În probleme mai complicate de analiză superioară (de exemplu, teoria ecuațiilor integrale sau a seriilor Fourier) rolul decisiv al integralei Lebesgue este incontestabil. O expunere a teoriei integralei Lebesgue în acest volum ar risca să îndrepte atenția cititorului spre nuanțe specifice ale teoriei funcțiilor de o variabilă reală și ale teoriei măsurii dincolo de scopul propus. De aceea lăsăm integrala Lebesgue și aplicațiile ei în afara cadrului lucrării de față.

Din punct de vedere formal, cititorului i se cer numai cunoștințele din liceu; astfel, este utilă stăpînirea con-

struirii graficelor de funcţii, cunoaşterea proprietăţilor derivatei şi integralei, precum şi aplicaţiile geometrice simple ale acestora. Această carte nu este propriu-zis un manual de analiză matematică; mai degrabă ea este destinată unei invitaţii la studiu individual, la reflecţie şi comparare sistematică a diverselor aspecte ale teoriei; totuşi unele părţi pot fi folosite la cursuri şi seminarii iar unele exerciţii propuse aici ilustrează şi dezvoltă teoria expusă (mai puţin latura tehnică care este bine reprezentată în culegerile standard de probleme).

Acest volum are trei părţi „Introducere în analiză", „Calcul diferenţial şi integral" şi „Capitole alese de analiză modernă".

În prima parte se începe cu o expunere sistematică a teoriei numerelor reale (capitolul I). Prin numere reale se înţeleg elemente ale unei mulţimi de obiecte satisfăcînd anumite axiome. Există şi alte construcţii ale teoriei numerelor reale unde sînt demonstrate propoziţii pe care noi le alegem ca axiome; în aceste construcţii (dintre care menţionăm pe cea din clasicul curs al lui Landau) se porneşte de la axiomele numerelor naturale şi ale teoriei mulţimilor. În aceste construcţii lipseşte un element esenţial — demonstraţia necontradicţiei sistemului de axiome, defect întîlnit la toate construcţiile moderne ale teoriei numerelor reale. Problema este departe de a fi una tehnică ci ea atinge însăşi fundamentele gîndirii matematice. În acest context alegerea punctului de pornire pentru prezentarea schemei generale a analizei devine neesenţială şi vom încerca să ne apropiem cît mai repede de construcţiile analitice propriu-zise.

În capitolul 2 după o scurtă incursiune în teoria mulţimilor introducem noţiunile de structură matematică şi izomorfism. Ca ilustrare stabilim unicitatea (pînă la un izomorfism) a structurii numerelor reale. Introducem totodată structurile de spaţiu n-dimensional şi de corp al numerelor complexe.

Capitolul 3 este consacrat teoriei spaţiilor metrice. În capitolul 4 dezvoltăm teoria generală a limitelor. În această teorie se fixează o mulţime E pe care se alege o „direcţie" (adică o familie ordonată de mulţimi avînd intersecţia vidă, reprezentînd o noţiune mai puţin generală decît cea de filtru în sensul lui H. Cartan, dar care se dovedeşte suficientă pentru nevoile analizei); de asemenea,

se consideră o funcție definită pe mulțimea E cu valori într-un spațiu metric. Această schemă înglobează toate limitele considerate în analiză, începînd cu limitele de șiruri, pînă la derivată și integrală.

În capitolul următor, capitolul 5, după primele teoreme referitoare la continuitatea funcțiilor numerice definite pe axa reală se introduc, cu ajutorul ecuațiilor funcționale, funcția logaritmică (din care prin inversare se obține exponențiala) și funcțiile trigonometrice. Printre aplicații se consideră elementele de algebră și topologie în mulțimea $\mathbb{C}$ a numerelor complexe, ca și teorema fundamentală a algebrei (teorema de existență a unei rădăcini a unui polinom cu coeficienți complecși).

În capitolul 6 se dezvoltă teoria seriilor (numerice, de puteri, de funcții).

Partea a doua a cărții începe cu capitolul 7 consacrat derivării. De fapt, capitolele 7 și 8 cuprind calculul diferențial. Formula lui Taylor și seria Taylor conduc la extinderea naturală a analizei reale în domeniul complex. În capitolul 9 sînt dezvoltate integrala Riemann și cîteva aplicații ale ei. Pentru dezvoltarea ulterioară a analizei, tehnica funcțiilor analitice este indispensabilă și este expusă în capitolul 10. Teoria funcțiilor analitice se dovedește, în particular, a fi foarte utilă în calculul unor integrale improprii, studiate în capitolul 11.

Partea a treia a acestei cărți urmează aceleași principii ca și primele două părți. Rolul principal revine capitolului 12 unde sînt considerate spații vectoriale, spații metrice, spații normate, algebre normate, spații Hilbert, într-o abordare funcțională. Algebrele normate sînt aplicate la teoria operatorilor liniari într-un spațiu normat; în particular, „calculul operațional" al funcțiilor analitice într-o algebră normată, aplicat algebrei operatorilor liniari, conduce la teoreme de genul alternativei lui Fredholm. Studiul spațiului vectorial normat al șirurilor mărginite și studiul funcționalelor pe acest spațiu sînt legate de noțiunile de limită generalizată și însumare generalizată a seriilor.

În capitolul 13 sînt stabilite teoremele principale asupra soluțiilor ecuațiilor diferențiale ordinare pentru funcții cu valori într-un spațiu normat. Soluția unei ecuații liniare cu coeficienți constanți se scrie cu ajutorul exponențialei (unui operator); prin explicitare se obțin for-

mule pentru soluţiile sistemelor de ecuaţii liniare cu coeficienţi constanţi şi ale ecuaţiilor liniare de ordin superior. Pentru ecuaţiile liniare cu coeficienţi variabili se expune „metoda variaţiei constantelor".

Obiectul principal de studiu în capitolul 14 îl constituie seriile Fourier; se consideră aici diverse tipuri de convergenţă şi însumare.

Capitolul 15 intitulat „Transformarea Fourier" tratează, alături de teoria reală uzuală, probleme legate de extinderea la domeniul complex, incluzînd pe cele legate de transformarea Laplace. În capitolul 16 este expusă teoria curburii curbelor în spaţii multidimensionale.

Întreaga expunere este însoţită de o serie de exerciţii şi probleme; răspunsuri şi indicaţii la aceste probleme sînt date la sfîrşitul cărţii.

Sistemul de numerotare a capitolelor şi paragrafelor se clarifică prin considerarea următorului exemplu: simbolul 10.37 b înseamnă „capitolul 10, paragraful 3, punctul 7, subpunctul b". Formula 10.37(4) înseamnă a patra formulă din punctul 10.37. În cadrul aceluiaşi punct formulele se notează simplu, prin numere de ordine. Desenele şi problemele se numerotează în cadrul fiecărui capitol.

CUPRINS

Prefață 5

PARTEA ÎNTÎI

INTRODUCERE ÎN ANALIZĂ

Capitolul 1. Numere reale 16
1.1. Noțiuni preliminare despre mulțimi 16
1.2. Axiomele numerelor reale 18
1.3. Consecințe ale axiomelor adunării 20
1.4. Consecințe ale axiomelor înmulțirii 21
1.5. Consecințe ale axiomelor de ordine 25
1.6. Consecințe ale axiomei marginii superioare 28
1.7. Principiul lui Arhimede și consecințe 32
1.8. Principiul lui Cantor al intervalelor închise incluse . 37
1.9. Dreapta reală încheiată 39
Exerciții 40
Notă istorică 41

Capitolul 2. Elemente de teoria mulțimilor 42
2.1. Operații cu mulțimi 42
2.2. Echipotența mulțimilor 44
2.3. Mulțimi numărabile 46
2.4. Mulțimi având puterea continuului 50
2.5. Noțiunea de structură matematică; izomorfism de structuri 51
2.6. Spațiul n-dimensional 58
2.7. Numere complexe 65
2.8. Noțiunea generală de funcție; grafic 69
Exerciții 71
Notă istorică 72

Capitolul 3. Spații metrice 74
3.1. Definiții și exemple 74
3.2. Mulțimi deschise 80
3.3. Șiruri convergente; homeomorfism 82
3.4. Valori de aderență și puncte de acumulare 93
3.5. Mulțimi închise 96
3.6. Mulțimi peste tot dense; închiderea unei mulțimi . . 98

3.7. Spații complete 101
3.8. Completare 107
3.9. Compacitate 111
Exerciții 119
Notă istorică 120

Capitolul 4. Teoria generală a limitelor 121
4.1. Definiția limitei 121
4.2. Teoreme generale asupra limitelor 130
4.3. Limite de funcții numerice 131
4.4. Valorile de aderență ale unei funcții 139
4.5. Funcții nedescrescătoare după o direcție 142
4.6. Teoremele fundamentale asupra șirurilor numerice . . . 145
4.7. Limitele funcțiilor vectoriale 149
Exerciții 152
Notă istorică 154

Capitolul 5. Funcții continue 155
5.1. Funcții continue pe un spațiu metric 155
5.2. Funcții numerice continue pe dreapta numerică . . . 163
5.3. Funcții monotone 166
5.4. Logaritmul 170
5.5. Exponențiala 174
5.6. Funcții trigonometrice 184
5.7. Aplicații ale funcțiilor trigonometrice 192
5.8. Funcții vectoriale continue de o variabilă vectorială . 199
5.9. Șiruri de funcții 208
Exerciții 212
Notă istorică 214

Capitolul 6. Serii 216
6.1. Serii numerice. Serii cu termeni pozitivi 216
6.2. Serii de termeni reali cu semne oarecare 225
6.3. Operații cu serii 227
6.4. Serii de vectori 234
6.5. Serii de funcții 243
6.6. Serii de puteri 245
Exerciții 250
Notă istorică 253

PARTEA A DOUA

CALCUL DIFERENȚIAL ȘI INTEGRAL

Capitolul 7. Derivata 256
7.1. Definiția derivatei 256
7.2. Altă definiție a derivatei 267
7.3. Deferențiala 270
7.4. Teoremele creșterilor finite 272
7.5. Poziția unei curbe în raport cu tangenta sa 274
7.6. Regulile lui l'Hôpital 278
Exerciții 281
Notă istorică 284

Capitolul 8. Derivate de ordin superior 285
8.1. Definiții și exemple 285
8.2. Formula lui Taylor 288
8.3. Analiza comportării unei funcții în vecinătatea unui punct dat 292
8.4. Diferențiale de ordin superior 297
8.5. Serii Taylor 298
8.6. Exponențiala și funcțiile trigonometrice în domeniul complex 301
8.7. Funcții hiperbolice 307
Exerciții 310
Notă istorică 312

Capitolul 9. Integrala Riemann 313
9.1. Definiția integralei și teoreme de existență 313
9.2. La ce folosește integrala? 328
9.3. Integrala ca funcție de limita sa superioară 336
9.4. Calculul integralelor nedefinite 342
9.5. Calculul integralelor definite 355
9.6. Aplicațiile integralei 366
9.7. Integrarea și derivarea unui șir de funcții 396
9.8. Integrarea și derivarea în raport cu un parametru . . 403
9.9. Integrale curbilinii 410
Exerciții 419
Notă istorică 422

Capitolul 10. Funcții analitice 423
10.1. Definiții și exemple 423
10.2. Integrale curbilinii ale funcțiilor complexe 432
10.3. Teorema lui Cauchy și consecințele ei 441
10.4. Reziduuri și puncte singulare izolate 457
10.5. Aplicații ale planului complex în el însuși. Funcții elementare 471
Exerciții 481
Notă istorică 484

Capitolul 11. Integrale improprii 486
11.1. Integrale improprii de prima speță 486
11.2. Integrale improprii de speța a doua și a treia 500
11.3. Calculul integralelor improprii cu ajutorul reziduurilor 505
11.4. Integrale improprii cu parametri 516
11.5. Funcțiile Gamma și Beta ale lui Euler 539
Exerciții 544
Notă istorică 545

PARTEA A TREIA
CAPITOLE ALESE DE ANALIZĂ MODERNĂ

Capitolul 12. Structuri fundamentale ale analizei 548
12.1. Spații vectoriale 549
12.2. Spații metrice 574
12.3. Spații vectoriale normate 584
12.4. Spații hilbertiene 605

12.5. Aproximări în spațiul funcțiilor continue pe un compact . . . 619
12.6. Derivarea și integrarea funcțiilor cu valori într-un spațiu normat . . . 636
12.7. Operatori liniari continui . . . 652
12.8. Algebre normate . . . 675
12.9. Proprietăți spectrale ale operatorilor liniari . . . 684
Exerciții . . . 695
Notă istorică . . . 697

Capitolul 13. Ecuații diferențiale . . . 699
13.1. Definiții și exemple . . . 699
13.2. Teorema de punct fix . . . 716
13.3. Existența și unicitatea soluției unei ecuații diferențiale într-un spațiu normat . . . 719
13.4. Sisteme de ecuații vectoriale . . . 725
13.5. Ecuația vectorială de ordin superior . . . 728
13.6. Ecuații și sisteme liniare . . . 730
13.7. Operatorul rezolvant al unei ecuații liniare omogene . . . 734
13.8. Rezolvarea unei ecuații liniare neomogene . . . 739
Exerciții . . . 742
Notă istorică . . . 744

Capitolul 14. Dezvoltări ortogonale . . . 746
14.1. Dezvoltări ortogonale într-un spațiu Hilbert . . . 746
14.2. Serii Fourier clasice . . . 753
14.3. Convergența unei serii Fourier într-un punct și pe o mulțime . . . 759
14.4. Calcule cu serii Fourier și aplicații . . . 769
14.5. Divergența seriilor Fourier și însumarea generalizată . . . 787
14.6. Alte sisteme ortogonale . . . 794
Exerciții . . . 800
Notă istorică . . . 802

Capitolul 15. Transformarea Fourier . . . 804
15.1. Integrala Fourier și inversarea ei . . . 804
15.2. Alte proprietăți ale integralei Fourier . . . 813
15.3. Exemple și aplicații . . . 827
15.4. Transformarea Laplace . . . 831
15.5. Clase de funcții evasianalitice . . . 842
Exerciții . . . 854
Notă istorică . . . 856

Capitolul 16. Curbe în spațiu . . . 857
16.1. Definiții de bază . . . 857
16.2. Curbură. Curburi de ordin superior . . . 866
16.3. Degenerarea bazei naturale . . . 875
16.4. Ecuații naturale . . . 878
16.5. Elice . . . 883
Exerciții . . . 889
Notă istorică . . . 890
Indicații și răspunsuri . . . 891
Bibliografie . . . 902
Index de noțiuni . . . 911

Analiza matematică este o simfonie coerentă a infinitului.

D. Hilbert

PARTEA ÎNTÎI
INTRODUCERE ÎN ANALIZĂ

Capitolul 1.

NUMERE REALE

Concluzionăm că nu există nici un fel de numere absurde, în afara raţiunii, neregulate, inexplicabile sau surde; dar între numere există o astfel de perfecţiune şi armonie încît trebuie să meditäm zile şi nopţi la admirabila lor încheiere.

Simon Stévin (1634)

§ 1.1. Noţiuni preliminare despre mulţimi

1.11. Atunci cînd se consideră mai multe obiecte („elemente") se utilizează termeni ca „totalitate", „colecţie", „mulţime". Se vorbeşte, de exemplu, de mulţimea studenţilor dintr-o sală de curs, de mulţimea firelor de nisip pe o plajă, de mulţimea vîrfurilor unui poligon sau de mulţimea laturilor acestuia. Fiecare din aceste mulţimi este compusă dintr-un anumit număr de elemente, care poate fi evaluat dar practic dificil de stabilit cu precizie. Aceste mulţimi se numesc *finite*. („Există persoane, oh, rege Gelon, care îşi închipuie că numărul firelor de nisip ar fi infinit... Prin demonstraţii geometrice, pe care nu poţi să nu le accepţi, voi dovedi că printre numere există unele care depăşesc numărul firelor dintr-un volum de nisip egal cu mărimea Pămîntului" — **Arhimede.**)

În matematică se întîlnesc adeseori mulţimi ale căror obiecte nu sînt în număr finit; mulţimea numerelor naturale 0,1,2,3,... ca şi cea a tuturor punctelor unui segment sînt exemple simple în acest sens; astfel de mulţimi se numesc *infinite*.

Printre mulţimi vom considera şi mulţimea vidă, care nu conţine nici un element. Vom nota de regulă mulţimile cu litere majuscule $A, B, C, \ldots$ şi elementele lor prin litere mici. Scrierea $a \in A$ (sau $A \ni a$) semnifică faptul că a este element al lui A; iar notaţia $a \notin A$ (uneori $a \overline{\in} A$) arată că a nu este element al lui A. Scrierea $A \subset B$ (sau $B \supset A$) arată că orice element al lui A este şi element al lui B; în acest caz se spune că A este o *submulţime* a lui B. Cea mai mare submulţime a lui B este B însăşi şi cea

mai mică este mulțimea vidă. Orice altă submulțime a lui B conține elemente ale lui B, dar nu pe toate (și se numește *submulțime proprie*). Simbolurile $\in$, $\ni$, $\subset$, $\supset$ se numesc *simboluri de incluziune*. Dacă au loc incluziunile $A \subset B$, $B \subset A$, atunci orice element al lui A este element al lui B și, reciproc, orice element al lui B aparține lui A; astfel, mulțimile A și B se compun din aceleași elemente și sînt deci egale (se scrie $A = B$). Notația analoagă pentru elementele $a = b$ semnifică faptul că a și b sînt unul și același element.

Există metode diferite pentru a defini o mulțime. Cea mai simplă constă în enumerarea tuturor elementelor mulțimii; de exemplu, $A = \{0,1,2,\ldots,15,\ldots\}$. Un alt procedeu adeseori utilizat constă în a enunța proprietățile caracteristice ale elementelor mulțimii; de exemplu, $A = \{x \mid x^2 - 1 < 0\}$ este mulțimea tuturor valorilor (reale) x care verifică inecuația indicată.

1.12. Considerăm două operații simple cu mulțimi: reuniunea și intersecția. Definim mai întîi reuniunea. Considerăm mulțimile $A, B, C, \ldots$ Mulțimea tuturor elementelor care aparțin cel puțin uneia din mulțimile $A, B, C, \ldots$ se numește *reuniunea* mulțimilor $A, B, C, \ldots$ Astfel, reuniunea mulțimii $A = \{6, 7, 8, \ldots\}$ a tuturor numerelor naturale strict mai mari decît 5 cu mulțimea $B = \{0, 3, 6, 9, \ldots\}$ a tuturor numerelor naturale multipli ai lui 3, este mulțimea

$$S = \{0, 3, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots\}$$

a tuturor numerelor naturale exceptînd 1, 2, 4 și 5. Apoi *intersecția* mulțimilor $A, B, C, \ldots$ este mulțimea elementelor care aparțin fiecăreia din mulțimile considerate. Astfel, în exemplul precedent, intersecția mulțimilor $A = \{6, 7, 8, \ldots\}$, $B = \{0, 3, 6, 9, 12, \ldots\}$ este mulțimea

$$D = \{6, 9, 12, \ldots\}.$$

Se poate întîmpla ca mulțimile $A, B, C, \ldots$ să nu aibă nici un element comun. Atunci ele au ca intersecție mulțimea vidă; se mai spune în acest caz că mulțimile $A, B, C, \ldots$ sînt disjuncte. De exemplu, mulțimile de numere

$A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{1, 3\}$ sînt disjuncte, deşi oricare două dintre ele au elemente comune.

Se pot considera reuniuni şi intersecţii ale unor familii oarecare, finite sau infinite, de mulţimi. Astfel, dacă O este un punct fixat într-un plan, atunci reuniunea mulţimilor de puncte ale dreptelor situate în plan şi trecînd prin O este mulţimea punctelor planului, iar intersecţia corespunzătoare este mulţimea formată numai din punctul O.

Pentru reuniune se utilizează simbolurile $\bigcup$ (sau $\sum$); de exemplu,

$$S = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \quad \text{sau} \quad S = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$$

reprezintă reuniunea mulţimilor $A_1, A_2, \ldots, A_\nu, \ldots$

Pentru intersecţie se utilizează simbolurile $\bigcap$ (sau $\prod$); astfel, prin

$$D = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \quad \text{sau} \quad D = \prod_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$$

se notează intersecţia mulţimilor $A_1, A_2, \ldots, A_\nu, \ldots$

§ 1.2. Axiomele numerelor reale

Definiţia dată mai jos porneşte de la proprietăţile elementare ale numerelor, care ne sînt cunoscute din şcoală şi din experienţa cotidiană. Rolul „experienţei cotidiene" în elaborarea axiomei marginii superioare (1.24) este mai puţin evident (ceva similar s-a petrecut cu postulatul lui Euclid asupra paralelelor care stă la baza geometriei elementare). Experienţa nu dictează alegerea axiomelor matematice printr-un determinism categoric; între experienţă şi ştiinţă există o etapă de formare a axiomelor, care pot fi substanţial modificate în cadrul aceleiaşi experienţe. Aşa cum odată cu geometria euclidiană există geometria neeuclidiană Lobacevski, tot astfel o dată cu teoria numerelor reale expusă mai jos există teorii constructive în care o mulţime mărginită nu are în mod necesar o margine superioară [45].

Nu vom defini fiecare număr real în mod separat ci vom defini întreaga mulţime a numerelor reale ca o mulţime înzestrată cu anumite relaţii şi operaţii. Proprietă-

ţile relaţiilor şi operaţiilor sînt date printr-un sistem de axiome.

Axiomele sînt împărţite în patru grupe : axiomele adunării, axiomele înmulţirii, axiomele de ordine ; a patra grupă conţine o singură axiomă — cea a marginii superioare.

DEFINIŢIE. O mulţime $\mathbb{R}$ de elemente $x, y, z, \ldots$ se numeşte *mulţime de numere reale* dacă au loc următoarele proprietăţi :

1.21. *Operaţia de adunare* : oricărei perechi x, y de elemente din $\mathbb{R}$ îi corespunde un element numit *suma* lui x şi y, notat $x + y$, astfel încît :

a. $x + y = y + x$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

b. $(x + y) + z = x + (y + z)$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$; de aceea are sens bine determinat $x + y + z$.

c. Există un element în $\mathbb{R}$ notat 0 (*zero*) astfel încît $x + 0 = x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

d. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există un element y, numit *opusul* lui x, astfel încît $x + y = 0$.

1.22. *Operaţia de înmulţire* : oricăror două elemente $x, y \in \mathbb{R}$ le corespunde un element din $\mathbb{R}$ numit *produsul* lui x şi y, notat $x \cdot y$ (sau xy), astfel încît :

a. $xy = yx$ oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b. $(xy)z = x(yz)$ oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$; din acest motiv expresia xyz are un sens bine determinat.

c. Există un element în $\mathbb{R}$ diferit de 0, notat 1 (*unitatea*), astfel încît $x \cdot 1 = x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

d. Pentru orice $x \neq 0$ din $\mathbb{R}$ există un element u, numit *inversul* lui x, astfel încît $u \cdot x = 1$.

e. Oricare ar fi elementele x, y, z din $\mathbb{R}$ are loc egalitatea $x(y + z) = xy + xz$.

Această ultimă axiomă leagă între ele operaţiile de înmulţire şi adunare.

O mulţime de elemente $x, y, \ldots$ satisfăcînd axiomele 1.21 — 1.22 se numeşte *corp numeric* (sau simplu *corp*).

1.23. *Relaţia de ordine* : pentru orice două elemente x, y din $\mathbb{R}$ se verifică una (sau ambele) din relaţiile $x \leqslant y$ (x este mai mic sau egal cu y) sau $y \leqslant x$, cu proprietăţile următoare :

a. $x \leqslant x$ pentru orice x ; $x \leqslant y$, $y \leqslant x$ implică $x = y$.

b. $x \leqslant y$, $y \leqslant z$ implică $x \leqslant z$.

c. $x \leqslant y$ implică $x + z \leqslant y + z$ pentru orice $z \in \mathbb{R}$.

d. $0 \leqslant x$, $0 \leqslant y$ implică $0 \leqslant xy$.

Inegalitatea $x \leqslant y$ se notează în mod echivalent $y \geqslant x$ (y este mai mare sau egal cu x). Relaţiile $x \leqslant y$, $x \neq y$ se notează pe scurt $x < y$ (x este strict mai mic decît y) sau $y > x$ (y este strict mai mare decît x).

1.24. O mulţime $A \subset \mathbb{R}$ se numeşte *majorată* dacă există un element $z \in \mathbb{R}$ astfel încît $x \leqslant z$ pentru orice $x \in A$; această relaţie este notată uneori $A \leqslant z$. Orice număr z avînd această proprietate în raport cu o mulţime A se numeşte un *majorant* al lui A. Un majorant z_0 al lui A este numit *marginea superioară* a lui A dacă orice alt majorant z al lui A este mai mare sau egal cu z_0 (adică z_0 este cel mai mic majorant al lui A). Dacă există, marginea superioară a unei mulţimi A se notează cu $\sup A$ (de la latinescul *supremum*).

Cu aceste pregătiri putem formula acum ultima axiomă:

Axioma marginii superioare. Orice mulţime nevidă $A \subset \mathbb{R}$ *majorată are margine superioară.*

Cu aceasta, definiţia mulţimii numerelor reale este încheiată şi stabilim acum cîteva consecinţe logice ale axiomelor formulate mai sus; totalitatea acestor consecinţe va furniza un ansamblu de proprietăţi ale sistemului numerelor reale care sînt utilizate în construcţia analizei matematice.

§ 1.3. Consecinţe ale axiomelor adunării

1.31. În mulţimea $\mathbb{R}$ există un singur zero.

Într-adevăr, presupunem că am avea două elemente zero: 0_1, 0_2. Aplicînd axiomele 1.21 a şi c, se obţine

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2.$$

1.32. Orice element $x \in \mathbb{R}$ admite un singur element opus.

Într-adevăr, presupunem că x ar avea două elemente opuse y_1 şi y_2, astfel încît $x + y_1 = x + y_2 = 0$. Atunci conform axiomelor 1.21 a — c am avea

$$y_2 = 0 + y_2 = (x + y_1) + y_2 = x + (y_1 + y_2) =$$
$$= x + (y_2 + y_1) = (x + y_2) + y_1 = 0 + y_1 = y_1.$$

Elementul opus al unui element x se notează prin $-x$. Suma $x + (-y)$ se notează ca de obicei prin $x - y$ și se numește *diferența* lui x și y. Opusul unei sume este suma opuselor, adică $-(x + y) = -x - y$, într-adevăr,

$$-x - y + (x + y) = -x - y + x + y = -x + x - y + y = 0 + 0 = 0.$$

1.33. Ecuația

$$a + x = b \tag{1}$$

admite în $\mathbb{R}$ soluția unică $x = b - a$.

Într-adevăr, dacă se adaugă numărul $-a$ ambilor membri ai ecuației (1) și se aplică axiomele 1.21 a — c, atunci

$$a + x - a = a - a + x = 0 + x = x = b - a;$$

așadar, dacă o soluție există, ea este egală cu $b - a$. Dar $b - a$ este într-adevăr o soluție, deoarece

$$a + (b - a) = a + b + (-a) = a + (-a) + b = 0 + b = b.$$

§ 1.4. Consecințe ale axiomelor înmulțirii

1.41.a. În mulțimea $\mathbb{R}$ există un singur element unitate.

Presupunem că ar exista două 1_1 și 1_2. Atunci aplicînd axioma 1.22a am avea $1_1 = 1_1 \cdot 1_2 = 1_2$.

b. Orice element $x \neq 0$ din $\mathbb{R}$ admite un singur element invers.

Presupunem că $x \neq 0$ ar admite două inverse z_1, z_2, deci $xz_1 = 1$, $xz_2 = 1$. Atunci, conform axiomelor 1.22 a — c, am avea

$$z_2 = 1 \cdot z_2 = (xz_1)z_2 = x(z_1z_2) = x(z_2z_1) = (xz_2)z_1 = 1 \cdot z_1 = z_1.$$

1.42. Elementul invers al unui element $x \neq 0$ se notează $\frac{1}{x}$. Elementul $\frac{1}{xy}$ (invers al unui produs xy, unde $x \neq 0$, $y \neq 0$) este egal cu produsul elementelor inverse ale lui x și y; într-adevăr,

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot xy = \frac{1}{x} \cdot x \cdot \frac{1}{y} \cdot y = 1 \cdot 1 = 1.$$

Produsul $x \cdot \frac{1}{z}$ $(z \neq 0)$ este notat $\frac{x}{z}$ și se numește *câtul* lui x prin z.

1.43. DEFINIȚIE. Numerele 1, $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1, \ldots, n = (n-1) + 1, \ldots$ se numesc *numere naturale*. (În ultimul timp se face convenția de a considera și 0 ca număr natural — *N.T.*)

Mulțimea numerelor naturale poate fi definită ca fiind cea mai mică submulțime a lui $\mathbb{R}$ care conține 1 și o dată ce conține numărul n, conține și pe $n + 1$. În multe probleme trebuie demonstrat că o mulțime de numere naturale A (de exemplu, mulțimea numerelor naturale n pentru care este satisfăcută o proprietate T_n depinzînd de n) conține toate numerele naturale. *Metoda inducției matematice* (numită și *principiul recurenței*), aplicabilă în astfel de probleme, constă în a verifica următoarele condiții:

1) A conține numărul 1;

2) dacă A conține un număr natural n, atunci A conține de asemenea numărul $n + 1$.

Așadar, este clar că mulțimea A conține toate numerele naturale. Vedem totodată că fundamentarea acestei metode de demonstrație decurge de fapt din însăși definiția numerelor naturale.

1.44.a. Numerele naturale, opusele lor și zero se numesc *numere întregi*.

b. Dacă m este un întreg, atunci întregul $2m$ este numit *par*, iar $2m + 1$ *impar*.

c. Cîturile $\frac{m}{n}$, unde m, n sînt întregi și $n \neq 0$, se numesc *numere raționale*.

d. Numerele reale care nu sînt raționale se numesc *irraționale*.

1.45. Ecuația

$$ax = b \qquad (a \neq 0) \tag{2}$$

are în $\mathbb{R}$ o soluție unică, egală cu $\frac{b}{a}$.

Într-adevăr, înmulțind ambii membri ai relației (2) cu $\frac{1}{a}$, se obține

$$\frac{1}{a}(ax) = \left(\frac{1}{a} \cdot a\right) x = 1 \cdot x = x = \frac{b}{a};$$

așadar, dacă există o soluție, atunci aceasta este egală cu $\frac{b}{a}$. Apoi $\frac{b}{a}$ este soluție, deoarece

$$a \cdot \frac{b}{a} = \left(\frac{1}{a} \cdot a\right) b = 1 \cdot b = b.$$

1.46. Prin definiție, pentru $n = 1,2, \ldots$ se pune

$$x^n = \overbrace{x \ldots x}^{n \text{ ori}}.$$

Evident, $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ și $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$ oricare ar fi n și m naturale. Numărul n din expresie x^n se numește *exponentul* puterii. Extindem noțiunea de exponent la numere întregi. Pentru orice $x \neq 0$ punem prin definiție

$$x^0 = 1, \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Verificăm acum că formulele

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m}, \quad (x^n)^m = x^{nm} \tag{3}$$

rămîn valabile pentru orice n și m întregi. Fie $n > 0$, $m = -p < 0$, unde $p \leqslant n$; atunci

$$x^n \cdot x^m = x^n \cdot \frac{1}{x^p} = x^{n-p} \cdot x^p \cdot \frac{1}{x^p} = x^{n-p} = x^{n+m}.$$

Dacă $p > n$, atunci conform 1.42

$$x^n \cdot x^m = x^n \cdot \frac{1}{x^p} = x^n \cdot \frac{1}{x^n x^{p-n}} =$$

$$= x^n \cdot \frac{1}{x^n} \cdot \frac{1}{x^{p-n}} = \frac{1}{x^{p-n}} = x^{n+m}.$$

Dacă $m = -p < 0$, $n = -q < 0$, atunci de asemenea din 1.42 rezultă

$$x^m \cdot x^n = \frac{1}{x^p} \cdot \frac{1}{x^q} = \frac{1}{x^{p+q}} = x^{m+n}.$$

În mod analog se verifică cea de-a doua formulă (3).

1.47.a. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc relaţia

$$0 \cdot x = 0.$$

Într-adevăr,

$$0 \cdot x + 1 \cdot x = (0 + 1)x = 1 \cdot x = x,$$

$$0 \cdot x + 1 \cdot x = 0 \cdot x + x,$$

de unde

$$x = 0 \cdot x + x;$$

în virtutea lui 1.33, $0 \cdot x = x - x = 0$.

Rezultă totodată că 0 nu admite invers, deoarece egalitatea $0 \cdot x = 1$ este imposibilă. Avem aici justificarea regulii şcolăreşti „nu se împarte cu zero".

b. Pe de altă parte, din $xy = 0$ şi $x \neq 0$, rezultă că $y = \left(\frac{1}{x} \cdot x\right) y = \frac{1}{x}(xy) = \frac{1}{x} \cdot 0 = 0$. Astfel, dacă un produs este nul, atunci unul (cel puţin) din factori este nul.

1.48. Oricare ar fi $u \neq 0$, $v \neq 0$ avem

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = \frac{xv + yu}{uv}.$$

Într-adevăr,

$$\frac{xv+yu}{uv}=\frac{1}{uv}(xv+yu)=\frac{1}{uv}\cdot xv+\frac{1}{uv}\cdot yu=\frac{x}{u}+\frac{y}{v}.$$

1.49. Pentru orice $x\in\mathbb{R}$ avem

$$-x=(-1)x.$$

Cei doi membri sînt definiţi independent unul de altul, deci egalitatea trebuie demonstrată. Conform 1.47 a avem

$$(-1)x+x=[(-1)+1]\cdot x=0\cdot x=0,$$

de unde concluzia.

Consecinţele din paragrafele §1.3, §1.4 permit demonstrarea tuturor identităţilor din algebra elementară a numerelor reale — binomul lui Newton, formulele de însumare a progresiilor, proprietăţile determinanţilor etc.

§ 1.5. Consecinţe ale axiomelor de ordine

1.51. *Legături între relaţia de ordine şi operaţia de adunare.*

a. Dacă $x\leqslant y$, $y\leqslant z$ şi $x=z$, atunci $x=y=z$.

Într-adevăr, din faptul că $y\leqslant z=x$ şi $x\leqslant y$, rezultă $y=x$ conform axiomei 1.23 a.

Din punctul a obţinem direct

b. Din inegalităţile $x<y$, $y\leqslant z$ rezultă $x<z$. În mod similar, $x\leqslant y$, $y<z$ implică $x<z$.

c. Relaţiile $x\leqslant y$, $0\leqslant y-x$, $-y\leqslant -x$, $x-y\leqslant 0$ sînt echivalente.

Într-adevăr, adăugînd $-x$ la ambii membri ai primei inegalităţi şi aplicînd 1.23 c se obţine inegalitatea secundă; adăugînd $-y$ la ambii membri ai acestei inegalităţi se obţine cea de-a treia şi apoi adăugînd x la cei doi membri ai inegalităţii a treia se obţine ultima; în fine, adăugînd y ambilor membri ai inegalităţii $x-y\leqslant 0$ se obţine prima inegalitate.

d. $x<y$ implică $x+z<y+z$ pentru orice $z\in\mathbb{R}$. Într-adevăr, $x<y$ implică $x\leqslant y$ şi $x+z\leqslant y+z$. Dacă am avea $x+z=y+z$, atunci, adunînd $-z$ la ambii

membri, ar rezulta $x = y$, ceea ce contrazice ipoteza; în concluzie, $x + z < y + z$.

e. Dacă $x_1 \leqslant y_1, \ldots, x_n \leqslant y_n$, atunci $x_1 + \ldots + x_n \leqslant y_1 + \ldots + y_n$; în plus, dacă există j astfel încît $x_j < y_j$, atunci $x_1 + \ldots + x_n < y_1 + \ldots + y_n$.

Într-adevăr, conform axiomei 1.23 c avem

$$x_1 + \ldots + x_n \leqslant y_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant y_1 + y_2 + \ldots$$

$$\ldots + x_n \leqslant \ldots \leqslant y_1 + \ldots + y_n,$$

în plus, dacă $x_j < y_j$, atunci, aplicînd punctul d, rezultă $x_1 + \ldots + x_n < y_1 + \ldots + y_n$. Aşadar, inegalităţile avînd acelaşi sens pot fi adunate. În particular, dacă $x_1 \leqslant 0, \ldots$ $\ldots, x_n \leqslant 0$, atunci $s = x_1 + \ldots + x_n \leqslant 0$; în plus, dacă avem $x_j < 0$ pentru cel puţin un j, atunci $s < 0$. Un fapt analog are loc înlocuind $\leqslant$ prin $\geqslant$ şi $<$ prin $>$.

f. Relaţiile $x < y$, $0 < y - x$, $-y < -x$, $x - y < 0$ sînt echivalente.

Aceasta se deduce din punctul e în acelaşi mod cum c a fost dedus din axioma 1.23 c.

1.52 DEFINIŢIE. Dacă $x \geqslant 0$ (resp. $x > 0$), atunci se spune că x este *nenegativ* (resp. *pozitiv*); un număr $x \leqslant 0$ (resp. $x < 0$) se numeşte *nepozitiv* (resp. *negativ*). Numărul 0 este nepozitiv şi nenegativ deopotrivă. (Alţi autori numesc un număr $x \geqslant 0$ *pozitiv* şi un număr $x > 0$ *strict pozitiv* etc.-*N. T.*)

1.53. DEFINIŢIE. Fie două numere reale x şi y; presupunem că $x \leqslant y$. Atunci se spune că x este minimal printre numerele x şi y şi se scrie $x = \min\{x, y\}$, iar y este maximal printre numerele x şi y; se notează $y = \max\{x, y\}$. Se pot defini prin recurenţă $\min\{x_1, \ldots, x_n\}$ şi $\max\{x_1, \ldots, x_n\}$, pentru orice mulţime finită de numere $x_1, x_2, \ldots, x_n$; de exemplu,

$$\max\{x_1, \ldots, x_n\} = \max\{\max(x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n\}.$$

Numărul $|x| = \max\{x, -x\}$ se numeşte *modulul* sau *valoarea absolută* a numărului x. Aşadar, $|x| = x$ pentru $x \geqslant 0$, $|x| = -x$ pentru $x \leqslant 0$; pentru orice x, numărul $|x|$ este nenegativ şi $|-x| = |x|$.

1.54.a. Pentru $a > 0$ inegalitatea $|x| \leqslant a$ este echivalentă cu $x \leqslant a$, $-x \leqslant a$ sau cu dubla inegalitate $-a \leqslant x \leqslant a$.

b. Oricare ar fi numerele reale x, y avem

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|. \tag{1}$$

Într-adevăr, dacă x și y sînt nenegativi (sau nepozitivi), atunci inegalitatea are loc conform definiției modulului; iar dacă $x \geqslant 0$ și $y \leqslant 0$, atunci

$$x + y \leqslant x \leqslant x + |y| = |x| + |y|, \quad -x - y \leqslant -y = |y| \leqslant$$

$$\leqslant |x| + |y|,$$

deci $|x + y| = \max\{x + y, -x - y\} \leqslant |x| + |y|$, ceea ce trebuia demonstrat.

c. Din inegalitatea (1) rezultă raționînd prin inducție

$$|x_1 + \ldots + x_n| \leqslant |x_1| + \ldots + |x_n|.$$

1.55. *Legături între relația de ordine și operația de înmulțire.*

a. Dacă $x > 0$, $y > 0$, atunci $xy > 0$.

b. Dacă $x \leqslant y$, atunci pentru orice $z > 0$, $xz \leqslant yz$. Afirmația a decurge din axioma 1.23d ținînd cont de 1.47b. Afirmația b decurge din inegalitatea $yz - xz = (y - x)z \geqslant 0$ în virtutea lui 1.23 b.

c. Folosind 1.47 b, la punctul b se poate înlocui peste tot $\leqslant$ prin $<$.

d. În particular, pentru $x > 1$ avem $x^2 > x$, iar pentru $0 < x < 1$, avem $x^2 < x$.

e. Dacă $x \leqslant y$, $0 < z \leqslant u$, atunci $xz \leqslant yz \leqslant yu$, deci în condițiile indicate, inegalitățile se pot înmulți.

f. În particular, pentru $0 < x < y$, avem $x^2 < y^2$, ..., $x^n < y^n$.

g. Dacă $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, atunci $xy \leqslant 0$; dacă $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$, atunci $xy \geqslant 0$.

Într-adevăr, în condițiile primei ipoteze, $-x \geqslant 0$ și conform axiomei 1.23 d și proprietății 1.49 avem $(-x)y = -1 \cdot x \cdot y = -(xy) \geqslant 0$, de unde $xy \leqslant 0$. În cazul

ipotezei secunde, $-y \geqslant 0$ și folosind rezultatul precedent, $-xy \leqslant 0$, $xy \geqslant 0$. În toate cazurile semnelele $\leqslant$ pot fi înlocuite prin $<$.

h. În particular, pentru orice $x \neq 0$ avem $x^2 = x \cdot x > 0$. De aici $1 = 1 \cdot 1 > 0$; apoi, conform 1.51 d, $2 = 1 + 1 > 1 + 0 = 1$, $3 = 2 + 1 > 2$ etc.

i. Oricare ar fi x, y avem egalitatea $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

1.56. Dacă $x > 0$, atunci $\frac{1}{x} > 0$; din $0 < x < y$ rezultă $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

Prima propoziție decurge din $x \cdot \frac{1}{x} = 1 > 0$ și 1.55 g. Multiplicînd inegalitatea $0 < x < y$ cu $\frac{1}{xy}$, obținem afirmația secundă. În particular, toate numerele raționale $\frac{p}{q}$, unde p și q sînt naturale ($q \neq 0$) sînt pozitive.

1.57. Proprietatea următoare este adeseori aplicată în demonstrații:

Dacă un număr z este nenegativ ($z \geqslant 0$) și este mai mic decît orice număr pozitiv, atunci $z = 0$.

Într-adevăr, dacă $z > 0$, atunci conform ipotezei am avea $z < z$, ceea ce este imposibil (vezi 1.23).

§ 1.6. Consecințe ale axiomei marginii superioare

Mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale este numită de asemenea *axa reală*, iar numerele reale — *punctele* axei.

1.61. În 1.24 am dat definiția mulțimii majorate. Considerăm acum noțiunea de mulțime minorată. O mulțime $E \subset \mathbb{R}$ se numește *minorată* (sau, echivalent, *mărginită inferior*) dacă există un element $z \in \mathbb{R}$ astfel încît $z \leqslant x$ pentru orice $x \in E$; se mai scrie atunci $z \leqslant E$. Orice număr z avînd proprietatea anterioară în raport cu o mulțime E se numește *minorant* al lui E. Dacă E este majorată, adică există $x \in \mathbb{R}$ astfel încît $E \leqslant y$, atunci mulțimea $-E$ (a numerelor $-x$ cu $x \in E$) este minorată, deoarece $x \leqslant y$ implică $-x \geqslant -y$; în plus, $-y$ este un

minorant al mulțimii $-E$. Reciproc, dacă E este minorată, atunci $-E$ este majorată conform aceluiași raționament; iar dacă η este un minorant al mulțimii E, atunci $-\eta$ este un majorant al mulțimii $-E$.

Un minorant y_0 al unei mulțimi minorate E se numește *marginea inferioară* a lui E dacă orice alt minorant al mulțimii E este $\leqslant y_0$. Dacă există, marginea inferioară a lui E se notează prin $\inf E$.

TEOREMĂ. *Orice mulțime minorată E admite margine inferioară, egală cu* $-\sup(-E)$.

Într-adevăr, mulțimea $-E$ este majorată și conform axiomei 1.24 există numărul $\xi = \sup(-E)$. Arătăm că $-\xi = \inf E$. Pentru orice $x \in E$ avem $-x \leqslant \xi$, de unde $-\xi \leqslant x$; deci $-\xi$ este un minorant al lui E. Fie η un alt minorant al lui E. Atunci $-\eta$ este un majorant al mulțimii $-E$ și ca atare, $-\eta \geqslant \sup(-E) = \xi$, deci $\eta \leqslant -\xi$; tocmai ceea ce trebuie demonstrat.

1.62.a. Dacă mulțimile E și F sînt majorate și $E \subset F$, atunci $\sup E \leqslant \sup F$; dacă E și F sînt minorate și $E \subset F$, atunci $\inf E \geqslant \inf F$.

Într-adevăr, în primul caz $\sup F$ este majorant pentru F deci și pentru E; de aceea $\sup E \leqslant \sup F$. Tot astfel, în cazul secund, $\inf F$ este un minorant pentru F; el va fi minorant și pentru $E \subset F$ deci $\inf F \leqslant \inf E$.

b. Fie E, F submulțimi ale lui $\mathbb{R}$. Dacă pentru orice $x \in E$, $y \in F$ avem $x \leqslant y$, atunci mulțimea E este majorată, iar F este minorată și, în plus, $\sup E \leqslant \inf F$.

Mulțimea E este majorată de orice element $y \in F$, deci $\sup E$ există și $\sup E \leqslant y$, pentru orice $y \in F$. De aici rezultă că F este minorată de $\sup E$, deci $\sup E \leqslant \inf F$.

1.63. Vom demonstra acum existența și unicitatea rădăcinii a n-a a oricărui număr real pozitiv.

TEOREMĂ. *Pentru orice $x > 0$ real și pentru orice $n \geqslant 1$ întreg există și este unic un număr $y > 0$ astfel încît* $y^n = x$. (Acest număr se notează cu $\sqrt[n]{x}$ și se numește *rădăcina de ordin n* a lui x.)

Demonstrație [44]. Considerăm mulțimea A a tuturor numerelor z pozitive astfel încît $z^n \leqslant x$. Această mulțime este majorată (de exemplu de 1 dacă $x \leqslant 1$ și de x dacă

$x \geqslant 1$). Fie $y = \sup A$. Arătăm că $y^n = x$. Presupunem că am avea $y^n < x$ și notăm $x - y^n = \varepsilon$. Aplicînd formula binomului lui Newton ar rezulta că pentru orice $h \leqslant 1$ pozitiv avem

$$(y + h)^n = y^n + ny^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} h^2 y^{n-2} + \ldots =$$

$$= y^n + h\left[ny^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} hy^{n-2} + \ldots\right] \leqslant$$

$$\leqslant y^n + h\left[ny^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} y^{n-2} + \ldots\right] =$$

$$= y^n + h[(1 + y)^n - y^n].$$

Se poate pune $h < \dfrac{\varepsilon}{(1 + y)^n - y^n}$; atunci se obține $(y + h)^n \leqslant y^n + \varepsilon = x$, ceea ce contrazice definiția lui y ca fiind $\sup A$. Așadar, rezultă că $y^n \geqslant x$. Presupunem că $y^n > x$ și punem $y^n - x = \varepsilon$. Pentru orice $h \leqslant 1$ pozitiv avem atunci

$$(y - h)^n = y^n - ny^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} y^{n-2}h^2 - \ldots =$$

$$= y^n - h\left[ny^{n-1} - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} y^{n-2}h + \ldots\right] \geqslant$$

$$\geqslant y^n - h\left[ny^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} y^{n-2}h + \ldots\right] \geqslant$$

$$\geqslant y^n - h\left[ny^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} y^{n-2} + \ldots\right] =$$

$$= y^n - h[(1 + y)^n - y^n],$$

și luînd $h < \dfrac{\varepsilon}{(1 + y)^n - y^n}$, rezultă

$$(y - h)^n \geqslant y^n - \varepsilon = x,$$

ceea ce contrazice din nou faptul că $y = \sup A$. În concluzie, rezultă $y^n = x$, ceea ce trebuia demonstrat.

Unicitatea lui y rezultă observînd că dacă $y_1 < y_2$, atunci $y_1^n < y_2^n$ (1.55 f).

1.64. *Oricare ar fi numerele pozitive x și y avem*

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}. \tag{1}$$

Fie $\xi = \sqrt[n]{x}$, $\eta = \sqrt[n]{y}$, $\tau = \sqrt[n]{xy}$. Avem $\xi^n = x$, $\eta^n = y$; atunci $(\xi\eta)^n = \xi^n \eta^n = xy = \tau^n$. Conform unicității rădăcinii, rezultă că $\tau = \sqrt[n]{xy} = \xi\eta$, ceea ce era necesar.

În mod similar se arată că dacă $x > 0$ și m, n sînt întregi > 1, atunci

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[mn]{x}. \tag{2}$$

1.65. Deoarece $(-x)^n = (-1)^n x^n$, ecuația $y^n = x$, $x > 0$ admite, dacă n este par, soluția negativă $y_2 = -\sqrt[n]{x}$, alături de soluția pozitivă $y_1 = \sqrt[n]{x}$; pentru n par ecuația $y^n = x$, $x < 0$, nu admite soluții reale. Dacă n este impar, ecuația $y^n = x$ admite în domeniul numerelor reale $(\forall x \in \mathbb{R})$ soluția unică $y = \sqrt[n]{x}$ (căci și dacă $x < 0$ există soluția unică $y = -\sqrt[n]{|x|}$).

Formulele 1.64 (1)—(2) permit obținerea tuturor rezultatelor de algebră elementară referitoare la radicali și, în particular, formulele de rezolvare pentru ecuațiile de gradul al doilea și pentru ecuații mai complicate care fac obiectul algebrei elementare.

1.66. O mulțime E majorată și minorată în același timp se numește *mărginită*. Orice mulțime mărginită E admite deopotrivă sup E și inf E.

Intervalele mărginite sînt exemple de mulțimi mărginite. Dacă $a < b$ atunci mulțimea tuturor numerelor reale x verificînd condiția $a \leqslant x \leqslant b$ se numește *interval închis* și se notează $[a, b]$. Mulțimea tuturor numerelor reale x verificînd inegalitatea $a < x < b$ se numește *interval deschis* și se notează prin (a, b). Un interval închis își cuprinde extremitățile; unui interval deschis extremitățile nu îi aparțin. Totuși

$$\sup [a, b] = \sup (a, b) = b, \quad \inf [a, b] = \inf (a, b) = a.$$

Se pot de asemenea considera intervale „semideschise"; astfel, mulțimea $\{x \mid a < x \leqslant b\} = (a, b]$ se numește *interval semideschis la stînga*, iar mulțimea $\{x \mid a \leqslant x < b\} = [a, b)$, *interval semideschis la dreapta*.

Uneori, pentru a unifica terminologia, un punct a este asimilat cu un interval, și anume $a = [a, a] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant a\}$.

§ 1.7. Principiul lui Arhimede și consecințe

1.71. Dacă x este un număr real și n un număr întreg, atunci numerele nx se numesc *multiplii întregi* ai lui x.

Principiul lui Arhimede. Dacă $x > 0$ și y sînt numere reale, atunci există un multiplu întreg nx al lui x astfel încît $(n-1)x \leqslant y$, $nx > y$.

(În alte teorii axiomatice moderne ale numerelor reale principiul lui Arhimede ca și cel al lui Cantor (§1.8) figurează pe lista axiomelor, iar axioma marginii superioare (1.24) devine atunci teoremă.)

Demonstrație. Presupunem că pentru orice p întreg ar avea loc inegalitatea $px \leqslant y$. Atunci mulțimea A a tuturor numerelor px este majorată de y și conform axiomelor 1.24 există $\xi = \sup A$. Numărul $\xi - x < \xi$ nu este un majorant pentru A, deci există p întreg astfel încît $px > \xi - x$. Atunci $(p+1)x > \xi$ și ξ nu ar fi majorant al lui A. Contradicția obținută demonstrează existența unui număr întreg p pentru care $px > y$. În mod analog există q întreg astfel încît $qx < y$ și evident $q \leqslant p$. Examinînd toate perechile $(q, q+1), (q+1, q+2), \ldots, (p-1, p)$ găsim una din ele, de exemplu $(n-1, n)$, astfel încît $(n-1)x \leqslant y$ și $nx > y$.

În particular, dacă $x = 1$ rezultă că pentru orice $y \in \mathbb{R}$ există un întreg n astfel încît $n - 1 \leqslant y < n$. Numărul $n - 1$ se numește *partea întreagă* a numărului y și se notează $[y]$. Numărul $y - [y]$ se numește *partea fracționară* a lui y și se notează (y). Așadar, orice număr real y este suma părților sale întreagă și fracționară: $y = [y] + (y)$.

1.72. Înlocuind peste tot în 1.71 adunarea prin înmulțire se obține versiunea multiplicativă a principiului lui Arhimede:

Dacă $x > 1$, $y > 0$, *atunci există un exponent întreg* n *astfel încît*

$$x^{n-1} \leqslant y, \quad x^n \geqslant y.$$

1.73. Dacă numărul y din enunțul de mai sus al principiului lui Arhimede este el însuși pozitiv, atunci numărul $n > \frac{y}{x}$ este pozitiv. Înmulțind ultima inegalitate prin $\frac{x}{n}$, se ajunge la concluzia următoare:

Oricare ar fi $x > 0$, $y > 0$, *există* n *natural astfel încît* $\frac{y}{n} < x$.

Rezultă ca o consecință: *pentru orice* $y > 0$ *avem*

$$\inf \left\{ \frac{y}{n} \mid n = 1,2, \ldots \right\} = 0.$$

Într-adevăr, mulțimea $\left\{ y, \frac{y}{2}, \frac{y}{3}, \ldots \right\}$ este formată din numere pozitive, deci marginea sa inferioară este nenegativă. În plus, s-a văzut mai sus că aceasta nu poate fi strict pozitivă.

1.74. COROLAR. *Fiecare din sistemele de intervale semideschise* (*unde* $y > 0$)

$$(0, y] \supset \left(0, \frac{y}{2}\right] \supset \ldots \supset \left(0, \frac{y}{n}\right] \supset \ldots, \tag{1}$$

$$(a, a + y] \supset \left(a, a + \frac{y}{2}\right] \supset \ldots \supset \left(a, a + \frac{y}{n}\right] \supset \ldots, \tag{2}$$

$$[a - y, a) \supset \left[a - \frac{y}{2}, a\right) \supset \ldots \supset \left[a - \frac{y}{n}, a\right) \supset \ldots \tag{3}$$

are intersecție vidă.

Într-adevăr, dacă intervalele sistemului (2) ar avea un punct comun ξ, atunci $\xi - a$ ar fi un punct comun pentru sistemul (1); și dacă intervalele din sistemul (3) ar

avea un punct comun η, atunci $a - \eta$ ar fi un punct comun pentru sistemul (1). Dar intervalele sistemului (1) nu au nici un punct comun conform 1.73 şi aceasta completează demonstraţia.

1.75. TEOREMĂ. *Orice interval* (a, b) *conţine un punct raţional.*

Demonstraţie. Fie $h = b - a > 0$ şi n întreg mai mare decît $\frac{1}{h}$ (aplicăm principiul lui Arhimede), deci $\frac{1}{n} < h$. Conform principiului lui Arhimede există m întreg astfel încît $\frac{m}{n} \leqslant a < \frac{m+1}{n}$. Avem $\frac{m+1}{n} - a \leqslant$ $\leqslant \frac{1}{n} < b - a$, deci $\frac{m+1}{n} < b$. Astfel, $a < \frac{m+1}{n} <$ $< b$, deci $\frac{m+1}{n} \in (a, b)$, ceea ce trebuia demonstrat.

În realitate, între numerele a şi b există o infinitate de numere raţionale, deoarece aplicînd raţionamentul anterior intervalului $\left(\frac{m+1}{n}, b\right)$ obţinem un nou număr raţional $\frac{p}{q}$, $\frac{m+1}{n} \leqslant \frac{p}{q} < b$ şi procesul poate continua indefinit.

1.76. Pentru un număr real dat ξ notăm cu N_ξ mulţimea tuturor numerelor raţionale $s \leqslant \xi$ şi P_ξ mulţimea tuturor numerelor raţionale $r \geqslant \xi$. Mulţimea N_ξ este majorată (de ξ) iar P_ξ este minorată (de ξ).

TEOREMĂ. $\sup N_\xi = \xi = \inf P_\xi$.

Demonstraţie. Fie $\sup N_\xi = \alpha$. Deoarece $s \leqslant \xi$ pentru orice $s \in N_\xi$, rezultă că $\alpha \leqslant \xi$, conform definiţiei marginii superioare. Presupunem că $\alpha < \xi$. Conform 1.75 există un punct raţional $p \in (\alpha, \xi)$. Deoarece $p < \xi$ avem $p \in N_\xi$, deci $p \leqslant \sup N_\xi = \alpha$, ceea ce contravine faptului că $p \in (\alpha, \xi)$. Inegalitatea $\alpha < \xi$ este deci imposibilă, de unde $\alpha = \sup N_\xi = \xi$. Se demonstrează în mod analog că $\xi = \inf P_\xi$.

1.77. *Sistemul zecimal (poziţional) de numeraţie al numerelor reale.* Verificăm în cele ce urmează că orice număr real poate fi notat cu ajutorul şirului de simboluri $0, 1, \ldots$ $\ldots, 9$. Punem $9 + 1 = 10$.

Fie $\xi > 0$. Conform 1.72 există un exponent (şi numai unul) p astfel încît $10^p \leqslant \xi < 10^{p+1}$. Alegem apoi θ_0 (dintre numerele $1,2, \ldots, 9$) astfel încît $\theta_0 \cdot 10^p \leqslant$ $\leqslant \xi < (\theta_0 + 1) \cdot 10^p$. Numărul θ_0 este unic determinat deoarece intervalele $\theta \cdot 10^p \leqslant x < (\theta + 1) \cdot 10^p$ pentru $\theta = 0, 1, \ldots, 9$ diferite, sînt disjuncte. Apoi, fiind dat θ_0 alegem numărul θ_1 (din şirul $0,1, \ldots, 9$) astfel încît

$$\theta_0 \cdot 10^p + \theta_1 \cdot 10^{p-1} \leqslant \xi < \theta_0 \cdot 10^p + (\theta_1 + 1) \cdot 10^{p-1}.$$

Continuînd indefinit acest proces, se obţine un şir de simboluri (cifre de la 0 la 9)

$$\theta_0\, \theta_1\, \theta_2 \ldots \quad (\theta_0 \neq 0). \tag{1}$$

Pentru a fixa numărul p se procedează astfel: dacă $p \geqslant$ $\geqslant 0$, atunci se pune virgulă între simbolurile θ_p şi θ_{p+1}; dacă $p < 0$, adică $p = -q$, $q > 0$, atunci se plasează q zerouri suplimentare în faţa şirului (1) şi se separă primul dintre ele printr-o virgulă.

Astfel, fiecărui număr real ξ i-am făcut să corespundă un simbol de forma (1), precedat eventual de cîteva zerouri şi cu o virgulă într-un anumit loc. Acest simbol este numit *reprezentarea zecimală a numărului* ξ; cifrele $\theta_0, \theta_1, \ldots$ în poziţiile lor relative din şirul (1) sînt numite *semnele zecimale ale numărului* ξ. Pentru numărul 1 reprezentarea zecimală are forma $1,000\ldots$, o reprezentare similară au numerele $2,3, \ldots, 9$. Pentru numărul 10 reprezentarea zecimală are forma $10,000\ldots$ Pentru numerele de forma $\frac{s}{10^t}$ (numite „numere zecimale") cu s şi t întregi nenegativi şi numai pentru ele, în scrierea (1) cel mult t cifre după virgulă sînt diferite de zero.

Afirmăm că în simbolul (1) nu se poate întîmpla ca toate cifrele începînd de la un anumit loc să fie egale cu 9. Într-adevăr, dacă am avea numai cifre de 9 începînd

de la locul n după virgulă, atunci ξ ar aparține intervalelor

$$r + \frac{9}{10^n} \leqslant \xi < r + \frac{10}{10^n} = r + \frac{1}{10^{n-1}},$$

$$r + \frac{9}{10^n} + \frac{9}{10^{n+1}} \leqslant \xi < r + \frac{9}{10^n} + \frac{10}{10^{n+1}} = r + \frac{1}{10^{n-1}},$$

. . . . . .

$$r + \frac{9}{10^n} + \frac{9}{10^{n+1}} + \ldots + \frac{9}{10^{n+k}} \leqslant \xi < r + \frac{1}{10^{n-1}},$$

. . . . . .

Toate aceste intervale nu au în comun nici un punct (1.74).

Invers, fie un șir oarecare de cifre de la 0 la 9

$$\tau_1 \tau_2 \ldots \qquad (2)$$

cu virgula pe un anumit loc; în plus, presupunem că τ_i nu sînt toate nule și că oricît de departe se găsesc cifre diferite de 9. Arătăm că atunci există un număr $\xi > 0$ pentru care (2) coincide cu reprezentarea lui zecimală.

Fie τ_m prima cifră nenulă din (2). Virgula este plasată sau în dreapta lui τ_m cu $q \geqslant 0$ cifre (fără a mai socoti τ_m), sau la stînga lui τ_m cu $t \geqslant 1$ cifre (socotind și τ_m); în cazul secund avem $q = -t$. Să notăm

$$\xi = \sup_k \{10^q \cdot \tau_m + 10^{q-1} \cdot \tau_{m+1} + 10^{q-2} \cdot \tau_{m+2} + \ldots$$

$$\ldots + 10^{q-k} \cdot \tau_{m+k}\}.$$

Vom arăta că reprezentarea zecimală a acestui număr ξ coincide cu (2). Fixăm s natural, apoi alegem $r > s$ astfel încît $\tau_{m+r} \leqslant 8$ și fie $k > r$ arbitrar. Atunci, însumînd progresia geometrică, găsim

$$10^{q-(s+1)} \cdot \tau_{m+s+1} + \ldots + 10^{q-r} \cdot \tau_{m+r} + \ldots + 10^{q-k} \cdot \tau_{m+k} \leqslant$$

$$\leqslant 9 \cdot 10^{q-(s+1)} + \ldots + 9 \cdot 10^{q-r} + \ldots + 9 \cdot 10^{q-r} - 10^{q-r} =$$

$$= 9 \cdot \frac{10^{q-(s+1)} - 10^{q-(k+1)}}{1 - 10^{-1}} - 10^{q-r} < 10^{q-s} - 10^{q-r}.$$

De aceea

$$\xi = \sup_k \{10^q \cdot \tau_m + \ldots + 10^{q-s} \cdot \tau_{m+s} + \ldots + 10^{q-k} \cdot \tau_{m+k}\} \leqslant$$

$$\leqslant 10^q \cdot \tau_m + \ldots + 10^{q-s} \cdot \tau_{m+s} + 10^{q-s} - 10^{q-r} <$$

$$< 10^q \cdot \tau_m + \ldots + 10^{q-s}(\tau_{m+s} + 1).$$

Astfel, pentru orice $s = 0, 1, 2, \ldots$

$$10^q \cdot \tau_m + \ldots + 10^{q-s} \cdot \tau_{m+s} \leqslant \xi < 10^q \cdot \tau_m + \ldots$$

$$\ldots + 10^{q-s}(\tau_{m+s} + 1).$$

Punînd aici $s = 0,1,2, \ldots$ şi reamintind definiţia numărului p şi a semnelor $\theta_0, \theta_1, \ldots$ ale numărului ξ, găsim că $p = q$, $\theta_0 = \tau_m$, $\theta_1 = \tau_{m+1}, \ldots$, de unde rezultă coincidenţa reprezentării zecimale a numărului ξ cu simbolul (2).

Dacă $\xi < 0$, atunci $-\xi > 0$ şi de aceea

$$-\xi = \tau_1 \tau_2 \ldots,$$

aşa cum s-a arătat mai sus; punem prin definiţie

$$\xi = -\tau_1 \tau_2 \ldots.$$

În sfîrşit, pentru $\xi = 0$ punem $\xi = 0,00 \ldots$

Cu aceasta este încheiată construcţia sistemului zecimal poziţional.

1.78. În locul numărului 10 se poate lua orice alt număr întreg $P > 1$. Sistemul poziţional corespunzător de notare a numerelor reale se numeşte *sistemul poziţional P-adic*. Cele mai întîlnite cazuri, în afara celui zecimal $P = 10$, sînt sistemele diadic şi triadic, unde P este egal cu 2, respectiv 3. În sistemul diadic, pentru scrierea oricărui număr real se utilizează doar cifrele 0 şi 1, iar în sistemul triadic, cifrele 0, 1 şi 2.

§ 1.8. Principiul lui Cantor al intervalelor închise incluse

1.81. Pe axa reală considerăm o mulţime de intervale avînd proprietatea că pentru orice două intervale unul

este inclus în celălalt. O astfel de mulțime se numește *sistem de intervale incluse.*

În 1.74 am văzut că intersecția unui sistem de intervale incluse poate fi vidă, intervalele considerate acolo fiind semideschise. *A fortiori* intervalele unui sistem de intervale deschise incluse pot să nu aibă puncte comune. Totuși dacă intervalele considerate sînt închise (adică își conțin capetele), atunci există totdeauna un punct comun lor; anume are loc următoarea propoziție importantă:

Principiul intervalelor închise incluse (al lui Cantor): *Pentru orice sistem Q de intervale închise incluse $Q = \{[a, b]\}$, există un punct care aparține tuturor intervalelor sistemului. Mai precis, există*

$$\xi = \sup \{a \mid [a, b] \in Q\},$$

$$\eta = \inf \{b \mid [a, b] \in Q\}.$$

Avem $\xi \leqslant \eta$ și intervalul $[\xi, \eta]$ este intersecția tuturor intervalelor sistemului Q.

Demonstrație. Fie $E = \{a \mid [a, b] \in Q\}$ mulțimea capetelor din stînga și $F = \{b \mid [a, b] \in Q\}$ mulțimea capetelor din dreapta ale intervalelor sistemului Q. Pentru orice două intervale $[a_1, b_1] \subset [a_2, b_2]$ ale sistemului Q avem $a_2 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b_2$, deci orice $a \in E$ este mai mic sau egal cu orice $b \in F$. Din 1.62 b rezultă că numerele ξ și η care figurează în enunțul teoremei există și verifică inegalitatea $\xi \leqslant \eta$. Pentru orice $[a, b] \in Q$ avem $a \leqslant \xi \leqslant \eta \leqslant b$ astfel încît $[\xi, \eta] \subset [a, b]$, deci $[\xi, \eta] \subset \subset \bigcap_{[a, b] \in Q} [a, b]$. Este ușor de văzut că intersecția $\bigcap_{[a, b] \in Q} [a, b]$ constă numai din punctele intervalului $[\xi, \eta]$; anume, pentru orice punct x care nu aparține intervalului $[\xi, \eta]$, de exemplu $x < \xi$, există un capăt stîng $a \in E$ pentru care $x < a < \xi = \sup \{a\}$ și ca atare x nu aparține intervalului corespunzător $[a, b]$. Dacă $\xi = \eta$, atunci prin intervalul $[\xi, \eta]$ înțelegem punctul ξ.

1.82. În ce caz intersecția unui sistem de intervale incluse constă dintr-un singur punct? Răspunsul este dat prin teorema următoare:

TEOREMA. *Intersecția sistemului Q de intervale incluse constă dintr-un singur punct dacă și numai dacă pen-*

tru orice $\varepsilon > 0$, *există în sistemul* Q *un segment* $[a, b]$ *de lungime* $b - a$ *mai mică decît* ε.

Demonstrație. Conform principiului lui Cantor intersecția intervalelor sistemului Q este intervalul $[\xi, \eta]$, care se reduce la un singur punct în cazul cînd $\eta = \xi$. Dacă $\eta \neq \xi$, atunci lungimea oricărui interval $[a, b] \supset [\xi, \eta]$ din sistemul Q nu este mai mică decît $\eta - \xi$; de aceea dacă în sistemul Q există segmente de lungime oricît de mică, atunci intersecția lor este redusă la un punct. Invers, deoarece $\eta = \inf \{b \mid [a, b] \in Q\}$, $\xi = \sup \{a \mid [a, b] \in Q\}$, pentru orice $\varepsilon > 0$ în sistemul Q există un interval $[a_1, b_1]$ pentru care $a_1 > \xi - \frac{\varepsilon}{2}$ și un interval $[a_2, b_2]$ pentru care $b_2 < \eta + \frac{\varepsilon}{2}$. Dacă, de exemplu, $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2]$ atunci avem $a_2 \geqslant a_1 > \xi - \frac{\varepsilon}{2}$, $b_2 < \eta + \frac{\varepsilon}{2}$. Dacă $\xi = \eta$, atunci $b_2 - a_2 < \varepsilon$ și în sistemul Q există un interval de lungime mai mică decît ε și teorema este demonstrată.

§ 1.9. Dreapta reală încheiată

1.91. DEFINIȚIE. *Dreapta reală încheiată* $\overline{\mathbb{R}}$ este o mulțime obținută adjuncționînd la mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale două simboluri $-\infty$ și ∞ (mai precis, $+\infty$), numite *minus infinit* și *plus infinit*. Relația de ordine se extinde la $\overline{\mathbb{R}}$ punînd

$-\infty < x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $x < \infty$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și $-\infty < \infty$.

Axiomele de ordine 1.23 a — d rămîn valabile pentru $\overline{\mathbb{R}}$. Numerele reale uzuale, spre deosebire de simbolurile $-\infty$ și ∞, se numesc *finite*.

1.92. Pentru orice mulțime nevidă $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ se definesc sup E și inf E după regulile următoare. Dacă E nu conține ∞ și este majorată (1.24), atunci sup E păstrează sensul dat în 1.24; în celelalte cazuri (dacă E conține ∞ sau dacă E nu este majorată), se pune sup $E = \infty$. În mod analog, dacă E nu conține $-\infty$ și este minorată, atunci inf E are sensul indicat în 1.61; în celelalte cazuri

se pune $\inf E = -\infty$. Astfel, *în* $\overline{\mathbb{R}}$ *orice mulțime nevidă are margine superioară și margine inferioară.*

1.93. Dacă $a \leqslant b$ sînt două puncte din $\overline{\mathbb{R}}$, atunci mulțimile

$$[a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \leqslant x \leqslant b\},$$

$$(a, b) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x < b\}$$

se numesc *intervale* de capete a și b (prima mulțime numindu-se uneori și segment de capete a, b).

1.94. Formulăm extinderea principiului intervalelor închise incluse la mulțimea $\overline{\mathbb{R}}$. Presupunem că avem pe dreapta reală încheiată $\overline{\mathbb{R}}$ o mulțime Q de segmente $[a,b]$ incluse (în sensul dat în 1.81). Afirmăm că toate aceste segmente au cel puțin un punct comun din $\overline{\mathbb{R}}$. Într-adevăr, fie A mulțimea capetelor din stînga ale intervalelor din Q și B mulțimea capetelor din dreapta corespunzătoare. Punînd $\xi = \sup A$, $\eta = \inf B$, se arată ca în 1.81 că $\xi \leqslant \eta$ și că intersecția tuturor intervalelor $[a, b] \in Q$ coincide cu segmentul $[\xi, \eta]$ și ca atare este nevidă.

EXERCIȚII

1. Să se arate că pentru orice numere reale x și y are loc inegalitatea

$$|x - y| \geqslant \big||x| - |y|\big|,$$

și pentru orice $x, y_1, \ldots, y_n \in \overline{\mathbb{R}}$, inegalitatea

$$|x - y_1 - \ldots - y_n| \geqslant \big||x| - |y_1| - \ldots - |y_n|\big|.$$

2. *Suma aritmetică* $A + B$ a două mulțimi de numere reale A și B este mulțimea tuturor sumelor $x + y$, unde $x \in A$, $y \in B$. Să se arate că dacă mulțimile A și B sînt majorate, atunci $A + B$ este majorată și că

$$\sup (A + B) = \sup A + \sup B.$$

3. Se numește *produsul aritmetic* AB a două mulțimi de numere reale A, B mulțimea tuturor produselor xy, unde $x \in A$, $y \in B$. Să se arate că dacă mulțimile A și B sînt majorate și constau din numere pozitive, atunci mulțimea AB este majorată și

$$\sup (AB) = \sup A \cdot \sup B.$$

4. Prin *putere aritmetică* a n-a a unei mulțimi $A \subset \mathbb{R}$ se înțelege mulțimea tuturor numerelor x^n unde $x \in A$. (Să observăm că, în general, $A^2 \neq$

$\neq A \cdot A$). Să se arate că dacă A constă din numere pozitive și este majorată, atunci mulțimea A^n este majorată și

$$\sup(A^n) = (\sup A)^n.$$

5. Presupunem că mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale este scrisă ca reuniunea a două submulțimi nevide disjuncte A și B astfel încît $a < b$ pentru orice $a \in A$, $b \in B$. Să se arate că există și este unic un număr real γ astfel încît $a \leqslant \gamma \leqslant b$ pentru orice $a \in A$ și $b \in B$ (γ se mai numește „tăietură" în sensul lui Dedekind).

NOTĂ ISTORICĂ

Prima teorie echivalentă cu teoria modernă a numerelor reale a fost în esență construită de matematicianul antic grec Eudox și este expusă în *Elementele* lui Euclid. Urmînd îndeosebi scopuri pur logice, această teorie a fost mai puțin adaptată calculelor și construcțiilor algebrice. Teoriile moderne își au începutul mai degrabă în lucrările lui Gauss (1812), Bolzano (1817) și îndeosebi în *Cursul de analiză pentru Școala Politehnică* al lui Cauchy (1821), bazate pe principiul considerat evident al intervalelor închise incluse. Pasul următor a fost făcut de Dedekind (1872), Weierstrass și Cantor care, pe căi distincte, au definit numerele reale și au dat proprietățile lor pornind de la numerele raționale. Astfel, definiția sistemului numerelor reale a fost redusă la cea a sistemului numerelor raționale și prin aceasta la definiția sistemului $\mathbb{N}$ al numerelor naturale. Tocmai în acest context Dedekind (1881) și mai ales Peano (1891) formulează pentru prima dată axiomele numerelor naturale. Bineînțeles, se pune problema necontradicției sistemului de axiome ale aritmeticii numerelor naturale. D. Hilbert (1900) a inclus aceasta pe lista problemelor matematice fundamentale ale secolului al XX-lea. Hilbert a indicat mijloacele admisibile („finite") pentru rezolvare, dar Gödel (1931) este cel care a arătat că problema nu poate fi principial rezolvată cu aceste mijloace. Necontradicția aritmeticii a fost demonstrată prin mijloace „transfinite" de către Gentzen (1936) și Novikov (1943). Legitimitatea acestor mijloace nu este însă recunoscută de toți matematicienii [33]. Prima construcție axiomatică directă a teoriei numerelor reale care nu se bazează pe numerele raționale a fost propusă de Hilbert (1900).

Capitolul 2

ELEMENTE DE TEORIA MULȚIMILOR

Meritul nemuritor al lui Georg Cantor este acela de a se fi hazardat în domeniul infinitului, fără a se teme de lupta, interioară sau externă, nu numai cu paradoxurile imaginare, cu prejudecățile larg răspîndite, cu sentințele filozofilor, dar și cu opiniile exprimate de mari matematicieni. În acest mod el a creat un nou domeniu — teoria mulțimilor.

F. Hausdorff (1927)

Matematica (grec. *mathema* = cunoaștere) este știința structurilor matematice (mulțimi între elementele cărora există anumite relații) [47].

§ 2.1. Operații cu mulțimi

2.11. Considerăm aici ceva mai în detaliu operațiile cu mulțimi introduse în 1.12. Reamintim că dacă A, B, C, ... sînt mulțimi, atunci colecția tuturor elementelor care aparțin cel puțin uneia din aceste mulțimi se numește reuniunea mulțimilor A, B, C, ... iar colecția elementelor care aparțin fiecărcia din mulțimile A, B, C, ... se numește intersecția acestora.

Reuniunea S a mulțimilor A, B, C, ... este numită uneori *sumă* și este notată $S = A + B + C + \ldots$; intersecția D corespunzătoare este numită *produs*, $D = ABC \ldots$ (acestea nu trebuie confundate cu suma aritmetică și produsul aritmetic introduse în exercițiile de la capitolul 1). Există anumite rațiuni în utilizarea acestor termeni. De exemplu, pentru trei mulțimi oarecare A, B, C are loc egalitatea

$$(A + B)C = AC + BC.$$

Reamintim că două mulțimi sînt *egale* dacă orice element al fiecăreia din ele este inclus în cealaltă. Dăm demonstrația egalității de mai sus ca un exemplu simplu, dar tipic, de raționament referitor la egalitatea de mulțimi.

Trebuie deci să arătăm că orice element x al mulțimii $(A + B)C$ (membrul stîng) aparține mulțimii $AC + BC$ (membrul drept) și, reciproc, orice element al lui $AC + BC$ aparține lui $(A + B)C$. Ca element al intersecției mulțimilor $A + B\,(= A \cup B)$ și C, elementul x trebuie să aparțină fiecăreia din mulțimi, deci $x \in A + B$ și $x \in C$. Deoarece x aparține reuniunii lui A cu B, el aparține cel puțin uneia din aceste mulțimi, de exemplu lui A. Dar atunci $x \in A$ și $x \in C$ deci $x \in AC$, de unde $x \in AC + BC$. Dacă x ar fi aparținut lui B (și nu lui A), atunci $x \in B$ și din nou $x \in AC + BC$. Reciproc, dacă $y \in AC + BC$, atunci y aparține cel puțin unuia din termenii reuniunii, de exemplu $y \in BC$; atunci $y \in B$ și $y \in C$. Din faptul că $y \in B$ rezultă $y \in A + B$ și ca atare $y \in (A + B)C$. Cazul cînd $y \in AC$ se tratează similar. Demonstrația egalității $(A + B)C = AC + BC$ este încheiată aici.

Trebuie semnalat totuși că sîntem departe de a extinde toate regulile aritmetice la operații cu mulțimi. De exemplu, pentru trei mulțimi A, B, C au loc formulele

$$A + A = A,\quad A \cdot A = A,\quad A + BC = (A + B)(A + C),$$

care nu se aseamănă deloc cu egalitățile aritmetice uzuale. Demonstrarea lor este imediată și o lăsăm cititorului.

2.12. Introducem acum o nouă operație. Dacă B este o submulțime a unei mulțimi A, atunci mulțimea tuturor elementelor lui A care nu aparțin lui B se numește *complementara* lui B în raport cu A și se notează $\mathbf{C}B$ sau $A \setminus B$.

Au loc formulele evidente

$$\mathbf{C}(\mathbf{C}B) = A - (A - B) = B,$$

$$(A - B) + B = A.$$

Observăm că pentru două mulțimi A și B oarecare nu are loc în general formula

$$(A + B) - B = A;$$

ea are loc doar în cazul cînd A și B sînt disjuncte.

Dintre formulele mai complicate semnalăm una care va fi întîlnită adeseori

$$\mathbf{C}\sum_{\nu} B_\nu = \prod_{\nu} \mathbf{C}B_\nu ; \qquad (1)$$

aceasta se citeşte : complementara reuniunii unei familii de mulţimi este egală cu intersecţia familiei complementarelor lor.

Demonstrăm acest fapt : fie $x \in \mathbf{C}\sum_{\nu} B_\nu$ deci $x \notin \sum_{\nu} B_\nu$. Atunci pentru orice ν avem $x \notin B_\nu$, adică $x \in \mathbf{C}B_\nu$ şi în concluzie $x \in \prod_{\nu} \mathbf{C}B_\nu$. Invers, dacă $x \in \prod_{\nu} \mathbf{C}B_\nu$ atunci $x \notin \mathbf{C}B_\nu$ pentru orice ν, adică $x \notin B_\nu$ pentru orice ν; aşadar, $x \notin \sum_{\nu} B_\nu$, adică $x \in \mathbf{C}\sum_{\nu} B_\nu$, ceea ce trebuia demonstrat.

Aplicînd ambilor membri ai egalităţii (1) operaţia $\mathbf{C}$ şi punînd $A_\nu = \mathbf{C}B_\nu$, se obţine formula

$$\sum_{\nu} \mathbf{C}A_\nu = \mathbf{C}\prod_{\nu} A_\nu, \qquad (2)$$

deci *complementara intersecţiei unei familii de mulţimi este egală cu reuniunea familiei complementarelor lor.*

Rezultatele anterioare pot fi rezumate într-o regulă generală : *pentru a permuta simbolul* $\mathbf{C}$ *cu* $\sum$ (sau $\prod$) *trebuie înlocuit* $\sum$ *cu* $\prod$ (*resp.* $\prod$ *cu* $\sum$).

§ 2.2. Echipotenţa mulţimilor

Vom stabili acum cîteva reguli care permit compararea mulţimilor după numărul şi „bogăţia" lor de elemente.

Pentru mulţimile finite problema este simplă : dacă A şi B sînt mulţimi finite se observă direct care din ele este mai bogată în elemente şi este natural să considerăm că A şi B sînt echipotente (sau echivalente) dacă au acelaşi număr de elemente. Această definiţie nu se extinde totuşi direct la mulţimile infinite şi este necesară o reformulare a ei care să permită o astfel de extindere. Trebuie remarcat că pentru stabilirea echipotenţei sau neechipotenţei mulţimilor finite A şi B nu este totuşi necesar de

calculat numărul lor de elemente. De exemplu, dacă A este mulțimea elevilor dintr-o clasă și B este mulțimea scaunelor din aceeași clasă, atunci în loc de a ști cîți elevi și cîte scaune avem, putem invita fiecare elev să ocupe cîte un scaun și acest experiment arată imediat dacă mulțimile A și B sînt echipotente sau nu. Sub o formă abstractă, procedeul utilizat în acest exemplu *constă în stabilirea unei corespondențe biunivoce între mulțimile A și B*, pentru a verifica echipotența mulțimilor A și B.

2.21. DEFINIȚIE. Dacă oricărui element al unei mulțimi A îi putem face să corespundă un element bine determinat dintr-o mulțime B, astfel încît orice element din B corespunde unui element din A și numai unuia, atunci se spune că *există o corespondență biunivocă* (sau *bijectivă*) între mulțimile A și B, iar acestea se numesc *echipotente*. Această nouă definiție a echipotenței este valabilă pentru orice mulțimi nu neapărat finite; astfel mulțimea A a numerelor naturale $1,2,\ldots$ este echipotentă cu mulțimea B a numerelor întregi negative $-1, -2, \ldots$ și corespondența bijectivă între mulțimile A și B se stabilește după regula: oricărui număr $n \in A$ îi corespunde numărul $-n \in B$.

De asemenea, mulțimea numerelor $1,2, \ldots$ este echipotentă cu mulțimea tuturor numerelor pozitive pare $2,4, \ldots$, corespondența realizîndu-se prin regula $n \mapsto 2n$. Pe acest exemplu se vede că o mulțime poate fi echipotentă cu una din submulțimile ei proprii; desigur această situație nu poate avea loc decît pentru mulțimi infinite.

O corespondență bijectivă între elementele $x \in A$ și $y \in B$ va fi notată prin $x \leftrightarrow y$.

Relația de echipotență este notată prin semnul $\sim$. Se vede ușor că această relație este *reflexivă* (adică $A \sim A$), *simetrică* (dacă $A \sim B$ atunci $B \sim A$) și *tranzitivă* (dacă $A \sim B$ și $B \sim C$, atunci $A \sim C$). Dacă două mulțimi sînt echipotente se mai spune că ele *au aceeași putere*.

2.22. *Exemple.* Intervalul $[0, a]$, $a > 0$, este echipotent cu intervalul $[0, 1]$; o corespondență bijectivă între ele se stabilește prin $x \in [0,1] \leftrightarrow y = ax \in [0, a]$. Două intervale închise oarecare $[a, b]$ și $[a + h, b + h]$ având

aceeaşi lungime $b - a$ sînt de asemenea echipotente: $x \in [a, b] \leftrightarrow y = x + h \in [a + h, b + h]$. Aşadar, orice două intervale închise ale dreptei reale sînt echipotente. De asemenea, orice două intervale deschise sînt echipotente. Corespondenţa $x \leftrightarrow y = \frac{1}{x}$ stabileşte echipotenţa intervalului $0 < x < 1$ cu semiaxa $y > 1$, iar corespondenţa $x \leftrightarrow y = \frac{x}{1 + x^2}$ stabileşte echipotenţa între dreapta numerică şi intervalul $(-1, 1)$.

Demonstrăm acum că intervalul $[a, b]$ este echipotent cu intervalul (a, b). Considerăm un şir oarecare A de puncte distincte din intervalul $[a, b]$ incluzînd cele două extremităţi: $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3, \ldots, x_n, \ldots$. Atunci $x_3, x_4, \ldots$ aparţin intervalului (a, b) ca şi celelalte puncte ale intervalului $[a, b]$ cu excepţia capetelor. Stabilim acum corespondenţa între punctele intervalului închis şi cele ale intervalului deschis după regula

$$x_1 \leftrightarrow x_3,$$

$$x_2 \leftrightarrow x_4,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n \leftrightarrow x_{n+2},$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$y \notin A \leftrightarrow y.$$

Această corespondenţă este evident bijectivă. Deci intervalele $[a, b]$ şi (a, b) sînt echipotente. Aplicînd corespondenţele obţinute mai sus, conchidem că *orice interval deschis este echipotent cu orice interval închis, cu orice semidreaptă şi cu întreaga dreaptă reală.*

§ 2.3. Mulţimi numărabile

2.31. DEFINIŢIE. O mulţime echipotentă cu mulţimea tuturor numerelor naturale $0, 1, 2, \ldots$ se numeşte *numărabilă.*

Altfel spus: o mulţime este numărabilă dacă toate elementele sale pot fi numerotate cu ajutorul tuturor numerelor naturale.

Dăm acum cîteva teoreme simple relativ la mulțimile numărabile.

2.32. *Orice submulțime infinită B a unei mulțimi numărabile A este de asemenea numărabilă.* Într-adevăr, elementele lui B pot fi numerotate în ordinea succesiunii în A (și vor fi utilizate toate numerele naturale deoarece B este infinită).

2.33. *Reuniunea unei familii finite sau numărabile de mulțimi numărabile este o mulțime numărabilă.*

Demonstrație. Considerăm mai întîi cazul a două mulțimi. Fie $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ și $B = \{b_1, b_2, \dots\}$ două mulțimi numărabile. Ordonăm toate elementele reuniunii lor după regula următoare:

$$a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots$$

Aceste elemente pot fi numerotate în ordinea succesiunii lor în acest șir. Orice element întîlnit de două ori (care aparține deci lui $A \cap B$) va fi indexat la prima lui apariție și omis la cea de a doua. În final orice element al reuniunii $A \cup B$ va avea un număr de ordine.

De exemplu, mulțimea tuturor numerelor întregi $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ este numărabilă ca reuniunea mulțimilor numărabile $0, 1, 2, 3, \dots$ și $-1, -2, \dots$

Printr-un raționament analog se demonstrează teorema în cazul a trei, patru și în general a unui număr finit de mulțimi numărabile. Pentru cazul unei familii numărabile de mulțimi numărabile

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots\},$$

$$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots\},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$A_k = \{a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}, \dots\},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

singura diferență este în modul de dispunere a elementelor tuturor acestor mulțimi într-un șir; anume se pot consi-

dera de exemplu grupe de elemente avînd aceeași sumă a indicilor :

$$a_{11};\ a_{21}, a_{12};\ a_{22}, a_{13}, a_{31};\ a_{41}, a_{32}, a_{23}, a_{14};\ \ldots;$$

restul demonstrației rămîne neschimbat.

2.34. *Mulțimea tuturor numerelor raționale* (adică a numerelor de forma $\frac{p}{q}$, p și q fiind întregi) *este numărabilă.*

Într-adevăr, mulțimea tuturor numerelor raționale este reuniunea mulțimilor numărabile următoare :

1) mulțimea A_1, a tuturor numerelor întregi $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

2) mulțimea A_2 a tuturor fracțiilor de forma $\frac{n}{2}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

3) mulțimea A_3 a tuturor fracțiilor de forma $\frac{n}{3}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

. . . . . .

k) mulțimea A_k a tuturor fracțiilor de forma $\frac{n}{k}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

. . . . . .

Mulțimile $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$ formează o familie numărabilă de mulțimi ; fiecare din acestea fiind numărabilă, reuniunea lor este de asemenea numărabilă, conform 2.33.

2.35. Dacă

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots\} \text{ și } B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$$

sînt mulțimi numărabile, atunci mulțimea $A \times B$ a tuturor perechilor ordonate (a_k, b_n) $(k, n = 1, 2, \ldots)$ este de asemenea numărabilă.

Într-adevăr, mulțimea tuturor acestor perechi poate fi reprezentată ca reuniunea familiei numărabilă de mulțimi

numărabile

$$A_1 = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), \ldots, (a_1, b_n), \ldots\},$$

$$A_2 = \{(a_2, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_2, b_n), \ldots\},$$

. . . . . .

$$A_k = \{(a_k, b_1), (a_k, b_2), \ldots, (a_k, b_n), \ldots\},$$

. . . . . .

şi aplicăm 2.33.

Acest exemplu admite o interpretare geometrică : oricărei perechi (a_k, b_n) îi corespunde un punct în plan cu coordonatele a_k, b_n; se vede în particular că mulţimea tuturor punctelor din plan avînd coordonatele raţionale este numărabilă.

2.36. *Mulţimea tuturor polinoamelor* $P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$ *(de grad oarecare) avînd coeficienţi raţionali* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *este numărabilă.*

Mulţimea polinoamelor de forma indicată este reuniunea familiei numărabile de mulţimi A_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, unde A_n este mulţimea polinoamelor de grad $\leqslant n$. În consecinţă, conform teoremei 2.33 este suficient de arătat că fiecare din mulţimile A_n este numărabilă. Pentru $n = 0$ aplicăm direct numărabilitatea mulţimii numerelor raţionale, care a fost stabilită în 2.34. Apoi se procedează prin recurenţă : presupunem că este stabilită numărabilitatea lui A_n şi demonstrăm că A_{n+1} este numărabilă. Orice element din A_{n+1} se pune sub forma $Q(X) + a_{n+1} X^{n+1}$, unde $Q(X)$ este un polinom de grad $\leqslant n$ cu coeficienţi raţionali, deci un element din A_n, iar a_{n+1} este raţional. Orice element din A_{n+1} corespunde unei perechi $(Q(X), a_{n+1})$ în care fiecare componentă parcurge o mulţime numărabilă de valori. Conform 2.35 mulţimea A_{n+1} este de asemenea numărabilă, ceea ce trebuia demonstrat.

2.37. *Mulţimea tuturor numerelor algebrice (adică a rădăcinilor de polinoame cu coeficienţi raţionali) este numărabilă.*

Conform 2.36 toate polinoamele cu coeficienţi raţionali pot fi numerotate cu ajutorul numerelor naturale,

astfel încît aceste polinoame să formeze un şir

$$P_1(X),\ P_2(X),\ \ldots,\ P_n(X),\ \ldots$$

Dar fiecare din aceste polinoame au cel mult un număr finit de rădăcini reale (5.87). Scriind mai întîi toate rădăcinile polinomului $P_1(X)$, apoi cele ale polinomului $P_2(X)$ etc. se ajunge la o numerotare a tuturor numerelor algebrice.

§ 2.4. Mulţimi avînd puterea continuului

Există mulţimi infinite ale căror elemente nu pot fi indexate cu numerele naturale. Astfel de mulţimi se numesc *nenumărabile*. Mulţimea tuturor punctelor unui interval (numită uneori *un continuum*) este un exemplu în acest sens.

2.41. TEOREMĂ (Cantor, 1874). *Mulţimea tuturor punctelor intervalului* $0 \leqslant x \leqslant 1$ *este nenumărabilă.*

Demonstraţie. Presupunem contrariul, anume că mulţimea tuturor punctelor intervalului [0, 1] ar fi numărabilă, deci elementele ei pot fi dispuse într-un şir $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n, \ldots$ Acest şir fiind fixat construim un şir de intervale incluse.

Împărţim intervalul [0, 1] în trei părţi egale. Punctul x_1 nu poate aparţine tuturor acestor trei intervale $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Atunci putem alege un interval dintre acestea care nu conţine x_1 (nici în interior, nici la vreunul din capete), pe care îl notăm cu Δ_1. Împărţim Δ_1 în trei subintervale închise egale şi notăm Δ_2 pe cel care nu conţine x_2. O dată construite intervalele $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \supset \Delta_n$, se notează prin Δ_{n+1} subintervalul închis (rezultat din împărţirea lui Δ_n în trei părţi egale) care nu conţine x_{n+1} etc. Şirul infinit de intervale $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots$ va avea, conform teoremei 1.81, un punct comun ξ. Acest punct ξ aparţine fiecăruia din intervalele Δ_n şi deci nu poate coincide cu nici un punct x_n. Aşadar, şirul $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n, \ldots$ nu epuizează toate punctele intervalului

$[0, 1]$, ceea ce contravine ipotezei. Teorema este demonstrată.

2.42. Am văzut că toate numerele raționale din intervalul $[0, 1]$ formează o mulțime numărabilă. Numerele iraționale sînt „mult mai numeroase" decît numerele raționale; mai precis, numerele iraționale formează o mulțime nenumărabilă (căci altfel mulțimea tuturor numerelor intervalului $0 \leqslant x \leqslant 1$ ar rezulta numărabilă ca reuniune a două mulțimi numărabile).

Mai mult, deoarece numerele iraționale algebrice (rădăcini de polinoame cu coeficienți raționali) formează o mulțime numărabilă (2.37), rezultă că mulțimea numerelor transcendente, adică numerele care nu sînt rădăcini de polinoame cu coeficienți raționali, este nenumărabilă.

Raționamentul anterior demonstrează *existența* numerelor transcendente, care nu este deloc evidentă *a priori*.

2.43. DEFINIȚIE. Orice mulțime echipotentă cu mulțimea tuturor punctelor intervalului $[0, 1]$ se numește *mulțime de puterea continuului*.

Am văzut că mulțimile de puncte ale oricărui interval $[a, b]$, ale oricărui interval (α, β) sau ale întregii drepte reale $\mathbb{R}$ sînt echipotente cu mulțimea punctelor intervalului $[0, 1]$; așadar, toate aceste mulțimi au puterea continuului.

§ 2.5. Noțiunea de structură matematică; izomorfism de structuri

2.51. Dintr-un punct de vedere general matematica este construită pe conceptul de mulțime. Dar bogăția oricărei teorii matematice depinde de legăturile între elementele (și submulțimile) mulțimilor studiate în teoria respectivă. Aceste legături sînt formulate într-un mod abstract cu ajutorul axiomelor. Ca un exemplu putem cita sistemul numerelor reale considerat în capitolul 1; acesta reprezintă o mulțime ale cărei elemente satisfac un anumit set de axiome, suficient de complicat. O mulțime înzestrată cu anumite condiții impuse elementelor și submulțimilor ei este numită o *structură matematică*. O definiție riguroasă a structurilor matematice ar trebui să

conţină o definiţie generală a acelor condiţii [5]. Ne mărginim la o descriere, însoţită de cîteva exemple, a noţiunii de structură matematică.

2.52. Două structuri cu condiţii de acelaşi tip se numesc *izomorfe* dacă se poate stabili o corespondenţă bijectivă între elementele lor astfel încît îndeplinirea, sau neîndeplinirea condiţiilor care definesc structura, să fie conservată. Orice structură este izomorfă cu ea însăşi (pentru că aplicaţia identică este evident bijectivă şi conservă toate condiţiile impuse elementelor şi submulţimilor structurii). Dar există de asemenea aplicaţii neidentice ale unei structuri pe ea însăşi care conservă condiţiile care descriu structura; astfel de aplicaţii se numesc *automorfisme ale structurii*.

Considerăm, de exemplu, structura de mulţime total ordonată. Se numeşte *total ordonată* o mulţime E de elemente $x, y, \ldots$ înzestrată cu condiţia suplimentară că pentru două elemente diferite oarecare x, y să aibă loc una din relaţiile $x < y$ sau $y < x$ şi dacă $x < y$, $y < z$, atunci $x < z$. Un exemplu îl oferă dreapta reală extinsă (încheiată) sau orice submulţime a dreptei reale cu relaţia de ordine uzuală. Două mulţimi ordonate E_1, E_2 se numesc *izomorfe* dacă între ele este stabilită o corespondenţă bijectivă astfel încît din faptul că $x_1 \in E_1$, $y_1 \in E_1$, $x_1 < y_1$ pentru elementele corespunzătoare $x_2 \in E_2$, $y_2 \in E_2$ să rezulte că $x_2 < y_2$. În acest sens, dreapta reală este izomorfă cu orice interval deschis; dar ea nu este izomorfă cu un interval închis (pentru că acesta are un cel mai mic element iar dreapta reală nu are). Un automorfism al unei mulţimi total ordonate A este orice corespondenţă bijectivă de la mulţimea A pe A însăşi, care conservă ordinea: dacă $x_1 < y_1$ şi dacă lui x_1 îi corespunde x_2 iar lui y_1 îi corespunde y_2, atunci $x_2 < y_2$. Pentru intervalul (0, 1) ca mulţime total ordonată, formula $y = x^n$ defineşte pentru orice întreg $n \geqslant 1$ un automorfism.

Sînt posibile structuri pe care sistemul de axiome le defineşte pînă la un izomorfism; cu alte cuvinte, este posibil ca oricé două structuri cu un sistem dat de axiome să fie izomorfe. Se spune atunci că sistemul de axiome al structurii date este complet şi că structura însăşi este unică.

2.53. Ca un exemplu considerăm problema unicității sistemului numerelor reale. În capitolul 1 am denumit sistem de numere reale o mulțime de elemente satisfăcînd axiomele 1.21—1.24. Se ridică întrebarea: este unică o mulțime de elemente satisfăcînd toate aceste axiome? Sînt izomorfe două structuri de numere reale? Mai exact: dacă se consideră două exemplare ale sistemului de numere reale, se poate stabili între elementele acestora o corespondență bijectivă pentru care rezultatelor adunării și înmulțirii numerelor primului sistem să le corespundă rezultatele aceleiași operații în al doilea sistem, cu păstrarea totodată a relației de ordine și pentru care se corespund marginile inferioară și superioară a două mulțimi care ele însele se corespund? Răspunsul la această întrebare este afirmativ și este cuprins în teorema următoare a cărei demonstrație este dată în 2.54—2.58.

TEOREMĂ. *Fie R_1 și R_2 două exemplare ale sistemului de numere reale; numerele din primul sistem vor fi indexate cu indicele 1 și cele din sistemul secund cu indicele 2. Atunci între numerele $x_1 \in R_1$ și $x_2 \in R_2$ se poate stabili o corespondență bijectivă notată $\sim$, astfel încît să fie îndeplinite următoarele proprietăți:*

1) *dacă $x_1 \sim x_2$, $y_1 \sim y_2$ atunci $x_1 + y_1 \sim x_2 + y_2$;*

2) *dacă $x_1 \sim x_2$, $y_1 \sim y_2$ atunci $x_1 y_1 \sim x_2 y_2$;*

3) *dacă $x_1 \sim x_2$, $y_1 \sim y_2$, $x_1 < y_1$ atunci $x_2 < y_2$;*

4) *dacă $A_1 \subset R_1$ este o mulțime mărginită superior, atunci mulțimea A_2 a elementelor corespunzătoare din R_2 este de asemenea mărginită superior și* sup $A_1 \sim$ sup A_2.

2.54. Abordînd demonstrația teoremei 2.53, notăm mai întîi că echipotența mulțimilor R_1 și R_2 rezultă direct din posibilitatea reprezentării fiecărui sistem prin fracții zecimale infinite (1.77). Folosim aici un alt procedeu mai adaptat verificării proprietăților 1) — 4). Notăm prin Q_1 și Q_2 mulțimile de numere raționale din sistemele R_1 și R_2 respectiv. Între Q_1 și Q_2 se stabilește o corespondență bijectivă unică prin însăși scrierea numerelor raționale sub forma $\frac{m}{n}$. Este evident că sînt îndeplinite proprietățile 1) — 3) deoarece operațiile indicate se exprimă direct prin simbolurile m și n. Dacă acum $\xi_1 \in R_1$ este un

număr oarecare, atunci conform 1.76 avem

$$\xi_1 = \sup N_1(\xi_1) = \inf P_1(\xi_1),$$

unde $N_1(\xi_1)$ este mulțimea numerelor raționale $r_1 \leqslant \xi_1$, iar $P_1(\xi_1)$ mulțimea numerelor raționale $s_1 \geqslant \xi_1$; așadar $r_1 \leqslant s_1$. Notăm cu N_2 mulțimea numerelor raționale ale sistemului R_2 care corespund numerelor raționale din mulțimea $N_1(\xi_1)$ $\left(\text{adică avînd aceeași scriere } \frac{m}{n}\right)$ și prin P_2 mulțimea numerelor raționale ale sistemului R_2 care corespund numerelor din mulțimea $P_1(\xi_1)$. Avem $r_2 \leqslant s_2$ pentru orice $r_2 \in N_2$ și $s_2 \in P_2$ și conform 1.62 b) avem $\sup N_2 \leqslant \inf P_2$. Deoarece toate numerele raționale din sistemul R_2 aparțin lui N_2 sau lui P_2, atunci între numerele $\alpha_2 = \sup N_2$ și $\beta_2 = \inf P_2$ nu există numere raționale. Aceasta înseamnă că $\alpha_2 = \beta_2$ pentru că altminteri între α_2 și β_2 ar exista puncte raționale (conform 1.75). Asociem numărului $\xi_1 \in R_1$ numărul $\xi_2 = \alpha_2 = \beta_2 \in R_2$. Prin simetrie, corespondența astfel indicată este bijectivă.

2.55. Demonstrăm acum proprietățile 3) și 4). Dacă $x_1 < y_1$ atunci conform 1.75 găsim un număr rațional r_1, $x_1 < r_1 < y_1$; pentru numerele corespunzătoare x_2, r_2, y_2 vom avea atunci (prin însăși definiția corespondenței) că $x_2 < r_2 < y_2$, deci proprietatea 3) este demonstrată. Fie acum A_1 o mulțime mărginită superior și $\xi_1 = \sup A_1$; fie A_2 mulțimea care corespunde lui A_1 și fie ξ_2 numărul care corespunde lui ξ_1. Avem $\xi_1 \geqslant x_1$ pentru orice $x_1 \in A_1$, de unde $\xi_2 \geqslant x_2$ pentru orice $x_2 \in A_2$ și ca atare $\xi_2 \geqslant \sup A_2$. Dacă $\sup A_2 < \xi_2$, atunci există un număr y_2 (chiar rațional) astfel încît $x_2 < y_2 < \xi_2$ pentru orice $x_2 \in A_2$, de unde $x_1 < y_1 < \xi_1$ pentru orice $x_1 \in A_1$ și pentru y_1 care corespunde lui y_2. Dar atunci $\sup A_1 \leqslant y_1 < \xi_1$, în contradicție cu ipoteza. Astfel, $\sup A_2 = \xi_2$, ceea ce demonstrează 4).

2.56. Pentru demonstrarea proprietăților 1) și 2) stabilim în prealabil două leme.

a. LEMĂ. *Fie y și z numere reale și r un număr rațional astfel încît $r > y + z$; atunci există numere raționale $u > y$, $v > z$ astfel încît $u + v = r$.*

Demonstrație. Fie $r - (y + z) = h$. Luăm pentru u orice număr rațional din intervalul $(y, y + h)$ și punem $v = r - u$; evident, $v > r - (y + h) = z$, ceea ce trebuia arătat.

b. LEMĂ. *Fie y, z numere reale pozitive și un număr rațional $r > yz$; există atunci numere raționale $u > y$, $v > z$ astfel încît $uv = r$.*

Demonstrație. Fie $\frac{r}{yz} = h$. Pentru u luăm orice număr rațional din intervalul (y, yh) și punem $v = \frac{r}{u}$; evident, $v > \frac{r}{yh} = z$, ceea ce trebuia probat.

2.57. Verificăm acum proprietatea 1). Fie $x_1 \sim x_2$, $y_1 \sim y_2$, $x_1 + y_1 \sim z_2 \neq x_2 + y_2$ și să presupunem, de exemplu, $z_2 > x_2 + y_2$. Alegem un număr rațional $t_2 \in (x_2 + y_2, z_2)$. Conform lemei 2.56a există numere raționale $u_2 > x_2$, $v_2 > y_2$, $u_2 + v_2 = t_2$. Pentru numerele corespunzătoare z_1, t_1, u_1, v_1 avem $x_1 < u_1$, $y_1 < v_1$, $x_1 + y_1 < u_1 + v_1 = t_1$. Însă $t_2 < z_2 \sim x_1 + y_1$, deci $t_1 < x_1 + y_1$, în contradicție cu ipoteza făcută. Ipoteza $z_2 < x_2 + y_2$ conduce în mod similar la o contradicție.

2.58. Trecînd la proprietatea 2), o vom proba mai întîi pentru x_1 și y_1 pozitive; lor le corespund conform 3) numere x_2, y_2 de asemenea pozitive. Să presupunem că $x_1y_1 \sim z_2 \neq x_2y_2$ și, de exemplu, $z_2 > x_2y_2$. Alegem un număr rațional $t_2 \in (x_2y_2, z_2)$. Conform lemei 2.56 b există numere raționale $u_2 > x_2$, $v_2 > y_2$, $u_2v_2 = t_2$. Pentru numerele corespunzătoare z_1, t_1, u_1, v_1 avem $x_1 < u_1$, $y_1 < v_1$, $x_1y_1 < u_1v_1 = t_1$. Dar $t_2 < z_2 \sim x_1y_1$, deci $t_1 < x_1y_1$, în contradicție cu ipoteza făcută. Presupunerea $z_2 < x_2y_2$ conduce de asemenea la o contraducție. Cazul cînd unul din factori este egal cu zero este evident.

Trecînd la cazul general și avînd în vedere regula semnelor, este suficient să arătăm că $-1 \cdot x_1 \sim -1 \cdot x_2$. Să presupunem că $-1 \cdot x_1$ corespunde numărului z_2. Conform 1) egalitatea $-1 \cdot x_1 + x_1 = 0$ implică atunci $z_2 + x_2 = 0$, de unde $z_2 = -1 \cdot x_2$, ceea ce trebuia arătat. Teorema este astfel complet demonstrată.

2.59. Am demonstrat unicitatea, pînă la un izomorfism, a sistemului numerelor reale. Ne oprim acum la problema determinării automorfismelor acestui sistem. Conform 2.52 un automorfism al sistemului $\mathbb{R}$ este o aplicaţie bijectivă $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care conservă rezultatele adunării şi înmulţirii, relaţia de ordine şi marginea superioară. Arătăm că singura aplicaţie cu această proprietate este aplicaţie identică. Fie x' elementul lui $\mathbb{R}$ în care este transformat prin automorfismul ales elementul x din $\mathbb{R}$. Elementul $1'$ este unitatea în corpul $\mathbb{R}$ deoarece pentru orice x avem $1' \cdot x' = x'$; conform unicităţii unităţii (1.41 a) avem $1' = 1$. Rezultă atunci $2' = 1' + 1' = 2, \ldots, n' = (n-1)' + 1' = n$; $\left(\frac{m}{n}\right)' = \frac{m'}{n'} = \frac{m}{n}$. Conform unicităţii elementului opus (1.32) rezultă $\left(-\frac{m}{n}\right)' = -\frac{m}{n}$. Astfel, automorfismul considerat conservă sistemul numerelor raţionale. Dar atunci el conservă orice număr real, deoarece conform 1.76 avem pentru orice $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi = \sup N_\xi$, unde N_ξ este clasa numerelor raţionale care nu depăşesc ξ, iar automorfismul considerat conservă relaţia de ordine şi marginea superioară. Aşadar acest automorfism este aplicaţia identică $\xi \mapsto \xi$.

§ 2.6. Spaţiul n-dimensional

2.61. DEFINIŢIE. Fie $n \geqslant 1$ un număr natural fixat; notăm cu $\mathbb{R}_n$ mulţimea tuturor sistemelor ordonate („vectori") de n numere reale

$$x = (x_1, \ldots, x_n).$$

Numerele $x_1, \ldots, x_n$ se numesc *coordonatele* vectorului x. Vom considera că un vector $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *este egal* cu vectorul $y = (y_1, \ldots, y_n)$ dacă şi numai dacă au loc egalităţile $x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$.

Mulţimea $\mathbb{R}_n$ se numeşte *spaţiul real n-dimensional* (şi se mai notează $\mathbb{R}^n$, ca produs cartezian a n exemplare ale dreptei reale).

2.62. Introducem în spațiul $\mathbb{R}_n$ operația de adunare prin

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n). \quad (1)$$

Arătăm că pentru operația de adunare în $\mathbb{R}_n$ sînt îndeplinite axiomele adunării 1.21, unde prin simbolurile $x, y, \ldots$ se înțeleg elemente ale spațiului $\mathbb{R}_n$. Fie $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$. Avem:

a. $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) = y + x$.

b. $(x + y) + z = (x_1 + y_1 + z_1, \ldots, x_n + y_n + z_n) =$

$= x + (y + z)$.

c. Pentru vectorul $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ („vectorul nul") are loc egalitatea $x + 0 = (x_1 + 0, \ldots, x_n + 0) = x$.

d. Pentru orice $x \in \mathbb{R}_n$ există un element opus y astfel încît $x + y = 0$; anume, putem lua $y = (-x_1, \ldots, -x_n)$.

O dată cu axiomele a) — d) sînt îndeplinite desigur toate consecințele lor exprimate în propozițiile din §1.3.

2.63. Introducem în spațiul $\mathbb{R}_n$ operația de înmulțire cu orice număr $\alpha \in \mathbb{R}$ după formula

$$\alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n). \quad (2)$$

Este evident că au loc formulele ($(\forall)\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $(\forall)x$, $y \in \mathbb{R}_n$):

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y;$$

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x;$$

$$1 \cdot x = x;$$

$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x.$$

2.64. Reamintim că vectorii

$$x^{(1)} = (x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}), \ldots, x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)})$$

din spațiul $\mathbb{R}_n$ se numesc *liniar dependenți* dacă există constantele reale $C_1, \ldots, C_m$, nu toate nule, astfel încît

$$C_1 x^{(1)} + \ldots + C_m x^{(m)} = 0. \tag{3}$$

Dacă egalitatea (3) este posibilă numai dacă $C_1 = \ldots = C_m = 0$, atunci vectorii $x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}$ se numesc *liniar independenți*. Egalitatea vectorială (3) este conform definiției 2.61 echivalentă cu n egalități numerice pentru coordonate:

$$C_1 x_1^{(1)} + \ldots + C_m x_1^{(m)} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$C_1 x_n^{(1)} + \ldots + C_m x_n^{(m)} = 0.$$

De aceea conform unui rezultat bine cunoscut din teoria sistemelor de ecuații liniare [40], dependența liniară a vectorilor $x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}$ este echivalentă faptului că rangul matricii $\|x_j^{(k)}\|$ este strict mai mic decît m. În particular, în $\mathbb{R}_n$ un sistem de n vectori liniar independenți poate fi dat cu ajutorul oricărei matrici pătrate $\|x_j^{(k)}\|$ cu n linii și n coloane avînd determinantul nenul. Orice $n+1$ vectori din $\mathbb{R}_n$ sînt evident liniar dependenți.

2.65. Fie $f_1, \ldots, f_n$ un sistem oarecare de n vectori liniar independenți din $\mathbb{R}_n$. Atunci pentru orice vector $g \in \mathbb{R}_n$ sistemul de $n+1$ vectori $f_1, \ldots, f_n, g$ este liniar dependent, deci există o relație de dependență liniară

$$C_0 g + C_1 f_1 + \ldots + C_n f_n = 0, \tag{4}$$

Dar $C_0 \neq 0$ (altfel $f_1, \ldots, f_n$ ar rezulta liniar dependenți), deci ecuația (4) poate fi rezolvată relativ la g; se obține atunci o relație de forma

$$g = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n. \tag{5}$$

Numerele $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ se numesc *coordonatele* vectorului g relativ la baza $f_1, \ldots, f_n$.

Astfel, alegînd vectorii

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

în locul lui $f_1, \ldots, f_n$ respectiv, rezultă că pentru orice vector $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_n$ avem

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$$

și astfel numerele $x_1, \ldots, x_n$ sînt coordonatele vectorului x relativ la baza specială $e_1, \ldots, e_n$ (numită *baza canonică* a lui $\mathbb{R}_n$).

2.66. Fie $f_1, \ldots, f_n$ o bază fixată în spațiul $\mathbb{R}_n$. Dacă $g = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n$ și $h = \beta_1 f_1 + \ldots + \beta_n f_n$, atunci conform proprietăților 2.63 :

$$g + h = (\alpha_1 + \beta_1) f_1 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n) f_n,$$

$$Cg = C\alpha_1 f_1 + \ldots + C\alpha_n f_n \text{ pentru orice număr real } C,$$

astfel încît adunării vectorilor și înmulțirii unui vector printr-un număr C le corespund, în orice bază, adunarea coordonatelor respective și înmulțirea lor cu acel număr C. Se poate spune că aplicația care la orice vector $x = (x_1, \ldots, x_n)$ asociază vectorul $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, unde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sînt coordonatele vectorului x în raport cu o bază fixată $f_1, \ldots, f_n$, este un automorfism (2.52) al spațiului n-dimensional $\mathbb{R}_n$.

2.67. În general, în acord cu definiția automorfismului unei structuri matematice (2.52), un automorfism al spațiului n-dimensional $\mathbb{R}_n$ este o aplicație bijectivă $x' = A(x)$ a spațiului $\mathbb{R}_n$ pe el însuși astfel încît să fie îndeplinite următoarele condiții :

a. $A(\alpha x) = \alpha A(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}_n$ și orice $\alpha \in \mathbb{R}_n$.

b. $A(x + y) = A(x) + A(y)$ pentru orice x și y din $\mathbb{R}_n$.

Din proprietățile a și b rezultă o formulă mai generală, și anume :

c. $A\left(\sum_{k=1}^{p} \alpha_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k A(x_k)$ pentru orice vectori $x_1, \ldots, x_p$ și orice $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ reali.

Căutăm expresia generală a automorfismului A în funcție de coordonatele vectorului x. Fie $x = (x_1, \ldots, x_n)$ și $x' = A(x) = (x'_1, \ldots, x'_n)$. Fie apoi $e_j = (0, \ldots, \underset{j}{1}, \ldots 0)$

și $e'_j = A(e_j) = (a_{j1}, \ldots, a_{jn})$. Avem

$$x' = \sum_{k=1}^{n} x'_k e_k = A(x) = A\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j A(e_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk} e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{jk} x_k\right) e_k,$$

de unde

$$x'_k = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} x_j. \tag{1}$$

Astfel, automorfismul A este determinat în coordonate prin sistemul (1) de relații liniare. Deoarece aceste formule trebuie să reprezinte o aplicație bijectivă a spațiului $\mathbb{R}_n$ pe el însuși, matricea $\|a_{jk}\|$ este nedegenerată, adică

$$\det \|a_{jk}\| \neq 0,$$

conform teoremelor fundamentale de algebră liniară [40].

Reciproc, orice matrice nedegenerată $\|a_{jk}\|$ determină prin formulele (1) o aplicație a spațiului $\mathbb{R}_n$ pe el însuși verificînd condițiile a,b, care în plus este bijectivă, deci un automorfism al spațiului $\mathbb{R}_n$.

În concluzie, *automorfismele spațiului* $\mathbb{R}_n$ *sînt descrise prin matrici nedegenerate conform formulelor* (1).

Considerăm cîteva exemple. Automorfismul I, definit prin matricea

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix}$$

transformă orice vector în el însuși; el este *automorfismul identic*. Automorfismul definit de matricea

$$\begin{Vmatrix} 1 & \cdot & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & \lambda_j & \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & 1 \end{Vmatrix}$$

linia j

(elementele omise fiind nule), multiplică prin λ_j coordonata j-a a fiecărui vector; el se numește *dilatarea de raport* λ_j *pe axa* j. Automorfismul definit de matricea

$$\begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{Vmatrix} \qquad (\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \neq 0),$$

efectuează cîte o dilatare pe fiecare axă; el multiplică prima coordonată cu λ_1, cea de a doua cu λ_2 etc. Dacă toate numerele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sînt egale între ele (egale cu λ), atunci automorfismul corespunzător definit prin matricea

$$\begin{Vmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{Vmatrix} \qquad (\lambda \neq 0),$$

transformă orice vector x în vectorul λx. Un astfel de automorfism se numește *omotetia de raport* λ.

2.68. *Spațiul euclidian n-dimensional.* **a.** Fie x și y doi vectori oarecare ai spațiului n-dimensional $\mathbb{R}_n$: $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$. Numărul

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k \tag{1}$$

se numește *produsul scalar* al vectorilor x și y. Numărul

$$|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2} \geqslant 0$$

se numește *lungimea* sau *norma* vectorului x. Un vector x pentru care $|x| = 1$ se numește *unitar* (sau *normat*). Vom vedea mai jos că produsul scalar permite construirea unei geometrii utilizînd noțiunile de lungime, unghi și mai tîrziu, de arie și volum. Spațiul $\mathbb{R}_n$ înzestrat cu produsul scalar (1) este numit *spațiul euclidian n-dimensional* și este notat cu E_n.

b. Este ușor de arătat că produsul scalar (1) are următoarele proprietăți :

1) $(y, x) = (x, y)$ pentru orice doi vectori x și y ;

2) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ oricare ar fi x și y din E_n și α real

3) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ pentru orice x, y, z din E_n ;

4) $(x, x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in E_n$ și dacă $(x, x) = 0$, atunci $x = 0$.

Pornind de la proprietățile 1), 2), 3) se poate deduce formula generală

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j (x_i, y_j), \tag{2}$$

valabilă oricare ar fi vectorii $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m$ și numerele reale $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_m$.

c. Stabilim *inegalitatea lui Cauchy* :

$$|(x, y)| \leqslant |x| \cdot |y|. \tag{3}$$

Demonstrația este bazată pe proprietățile 1), 2), 3) și pe prima parte din 4). Considerăm expresia

$$\varphi(\lambda) = (x - \lambda y, x - \lambda y) = (x, x) - 2\lambda(x, y) + \lambda^2(y, y) =$$

$$= A - 2\lambda B + \lambda^2 C^2,$$

unde $A = (x, x)$, $B = (x, y)$, $C = (y, y)$. Conform 4) avem $\varphi(\lambda) \geqslant 0$ pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$. Astfel, polinomul $\varphi(\lambda)$ nu poate avea rădăcini reale distincte (căci altfel ar lua valori de semn diferit). Rezultă atunci că $B^2 - AC = (x, y)^2 - (x, x)(y, y)$ nu poate fi pozitiv. În consecință,

$$(x, y)^2 \leqslant (x, x)(y, y) = |x|^2 |y|^2,$$

de unde (3).

În coordonate $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, inegalitatea (3) se scrie sub forma

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \eta_k^2} \cdot \tag{4}$$

Astfel scrisă ea este valabilă pentru orice numere reale $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n$.

d. Verificăm inegalitatea triunghiului

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|. \tag{5}$$

Într-adevăr, oricare ar fi x, y, avem

$$|x + y|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) +$$

$$+ (y, y) \leqslant |x|^2 + 2|x|\,|y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2,$$

de unde (5). În coordonate $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, inegalitatea (5) devine

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\xi_j + \eta_j)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \eta_j^2};$$

ca și (4) ea este valabilă pentru orice numere reale $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n$.

Se poate de asemenea demonstra pentru $y = 0$, $z = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, inegalitatea

$$\left| \sqrt{\sum_{1}^{n} \xi_k^2} - \sqrt{\sum_{1}^{n} \zeta_k^2} \right| \leqslant \sqrt{\sum_{1}^{n} (\xi_k - \zeta_k)^2}. \tag{6}$$

Inegalitățile (4) și (6) care sînt valabile pentru $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ reale oarecare sînt foarte des aplicate în analiză, în teoria spațiilor metrice, pentru multe tipuri de estimări, care nu au legături neapărat cu originea geometrică a acestor inegalități.

Semnalăm încă un număr de inegalități utile :

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\xi_k - \eta_k| \leqslant \rho(x, y) = \sqrt{\sum_{1}^{n} (\xi_k - \eta_k)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{n} \cdot \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\xi_k - \eta_k|. \tag{7}$$

Pentru a verifica aceasta, observăm inegalitatea evidentă

$$(\xi_k - \eta_k)^2 \leqslant \sum_{1}^{n} (\xi_k - \eta_k)^2,$$

de unde

$$|\xi_k - \eta_k| \leqslant \sqrt{\sum_1^n (\xi_k - \eta_k)^2}. \qquad (8)$$

Trecînd la $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n}$ în membrul sting se obține prima inegalitate (7). Pe de altă parte, avem

$$\sum_1^n (\xi_k - \eta_k)^2 \leqslant \sum_1^n \max_k (\xi_k - \eta_k)^2 = n \cdot \max (\xi_k - \eta_k)^2 =$$

$$= n \cdot [\max |\xi_k - \eta_k|]^2,$$

de unde se obține cea de a doua inegalitate (7).

e. Definiția generală a unghiului format de doi vectori va fi dată mai jos (5.74). Putem însă formula acum definiția noțiunii de ortogonalitate. Doi vectori x și y se numesc *ortogonali* dacă $(x, y) = 0$. În particular, vectorul nul $(0, \ldots, 0)$ este ortogonal la orice vector $x \in E_n$. Dacă doi vectori x și y sînt ortogonali, atunci

$$|x + y|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) +$$
$$+ (y, y) = |x|^2 + |y|^2;$$

aceasta este *teorema clasică a lui Pitagora*.

Orice vectori $x_1, \ldots, x_m$ nenuli și ortogonali doi cîte doi sînt liniar independenți; într-adevăr, o egalitate $C_1 x_1 + \ldots + C_m x_m = 0$ înmulțită scalar cu vectorul x_k devine, conform (2) și din ipoteza de ortogonalitate, $C_k(x_k, x_k) = 0$. Deoarece $(x_k, x_k) \neq 0$ rezultă $C_k = 0$, pentru orice $1 \leqslant k \leqslant m$, ceea ce trebuia dovedit.

În concluzie subliniem că am construit spațiul vectorial n-dimensional $\mathbb{R}_n$ și spațiul euclidian n-dimensional E_n pornind de la structura deja cunoscută a numerelor reale. În cele ce urmează (mai precis în capitolul 12), vom vedea că spațiile vectoriale și, în particular, spațiile euclidiene, pot fi tratate ele însele axiomatic, ca structuri matematice definite prin axiomele lor. În (2.53) am văzut că orice două structuri de numere reale sînt izomorfe. Într-un mod similar, vom vedea că orice spațiu vectorial n-dimensional definit axiomatic este izomorf cu $\mathbb{R}_n$ și orice spațiu euclidian n-dimensional este izomorf cu spațiul E_n.

§ 2.7. Numere complexe

2.71. O întrebare naturală este următoarea : este posibil să introducem în $\mathbb{R}_n$ o operație de înmulțire a vectorilor astfel încît rezultatul ei să fie un vector din $\mathbb{R}_n$ și axiomele înmulțirii 1.22 a—e să fie îndeplinite? Pentru $n = 2$ aceasta este posibil după regula care urmează. Fie $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, orice vector $z \in \mathbb{R}_2$ poate fi scris sub forma $z = (x, y) = xe_1 + ye_2$, unde x și y sînt coordonatele vectorului z în raport cu baza e_1, e_2. Punem

$$e_1^2 = e_1,\ e_1e_2 = e_2e_1 = e_2,\quad e_2^2 = -e_1.$$

Extindem această înmulțire asupra tuturor vectorilor $z = xe_1 + ye_2 \in \mathbb{R}_2$, urmînd legea liniară ; dacă $w = ue_1 + ve_2$, atunci

$$zw = (xe_1 + ye_2)(ue_1 + ve_2) = xue_1^2 + xve_1e_2 + yue_2e_1 + yve_2^2 = (xu - yv)e_1 + (xv + yu)e_2.$$

Pe scurt, definiția înmulțirii în $\mathbb{R}_2$ este :

$$zw = (x, y)(u, v) = (xu - yv, xv + yu). \tag{1}$$

Evident, avem :

a. $wz = (ux - vy, vx + uy) = zw$.

b. Dacă $\gamma = (\alpha, \beta)$, atunci

$$(zw)\gamma = (xu\alpha - yv\alpha - xv\beta - uy\beta,\quad xu\beta - yv\beta + xv\alpha + yu\alpha) = (x(u\alpha - v\beta) - y(v\alpha + u\beta),\ x(v\alpha + u\beta) + y(u\alpha - v\beta)) = z(w\gamma).$$

c. Pentru punctul $e = (1, 0)$ și pentru orice $z = (u, v)$, avem

$$(1, 0)(u, v) = (u, v).$$

d. Pentru orice $(x, y) \neq (0, 0)$ există un element invers, anume

$$(u, v) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right).$$

Într-adevăr,

$$(x, y)(u, v) = \left(\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}, \frac{xy}{x^2+y^2} - \frac{xy}{x^2+y^2}\right) = (1, 0).$$

e. Pentru orice $z = (x, y)$, $w = (u, v)$, $\gamma = (\alpha, \beta)$

$$(z + w)\gamma = z\gamma + w\gamma.$$

Într-adevăr,

$$(z + w)\gamma = (x + u, y + v)(\alpha, \beta) =$$

$$= ((x + u)\alpha - (y + v)\beta, (x + u)\beta + (y + v)\alpha) =$$

$$= ((x\alpha - y\beta) + (u\alpha - v\beta), (x\beta + y\alpha) +$$

$$+ (u\beta + v\alpha)) = (x\alpha - y\beta, x\beta + y\alpha) + (u\alpha -$$

$$- v\beta, u\beta + v\alpha) = (x, y)(\alpha, \beta) + (u, v)(\alpha, \beta) =$$

$$= z\gamma + w\gamma.$$

Astfel, pentru înmulțirea pe care am introdus-o în $\mathbb{R}_2$ toate axiomele 1.22 a — e sînt verificate. Rezultă deci că au loc toate consecințele lor semnalate în propozițiile date în §1.4.

2.72. DEFINIȚIE. Spațiul $\mathbb{R}_2$ înzestrat cu operațiile de adunare 2.62 (1) și de înmulțire 2.71(1) este numit *corpul numerelor complexe* și este notat prin $\mathbb{C}$. Mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale este aplicată bijectiv pe o submulțime a lui $\mathbb{C}$ prin regula

$$x \leftrightarrow (x, 0),$$

iar operațiile de adunare și înmulțire sînt conservate deoarece

$$(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0), \quad (x, 0)(y, 0) = (xy, 0).$$

Din acest motiv, numerele complexe $(x, 0)$ sînt numite *numere reale* și sînt notate $(x, 0) = x$.

Aşadar, vectorul $e_1 = (1, 0)$ este notat cu 1 şi celălalt vector al bazei $e_2 = (0, 1)$ este notat cu i. Orice număr complex (x, y) poate fi pus acum sub forma $(x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy$. Prin definiţie, avem $i^2 = (e_2)^2 = -e_1 = (-1, 0) = -1$, deci în corpul numerelor complexe se poate extrage rădăcina pătrată a numărului -1. Cea de a doua rădăcină pătrată a lui -1 este numărul $-i$ deoarece $(-i)^2 = (-1)^2 i^2 = -1$. Nu există alte rădăcini pătrate complexe ale lui -1 : într-adevăr, dacă $z^2 = -1$ pentru $z \in \mathbb{C}$, atunci $z^2 + 1 = (z + i)(z - i) = 0$, de unde, conform 1.47b (şi ţinînd cont de 2.71), sau $z - i = 0$ sau $z + i = 0$, adică $z = i$ sau $z = -i$.

Regula înmulţirii 2.71 (1) poate fi pusă sub forma

$$(x + iy)(u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu),$$

ceea ce corespunde regulii uzuale de înmulţire a două binoame, ţinînd cont de egalitatea $i^2 = -1$.

Pentru un număr dat $z = x + iy$, numerele reale x şi y se numesc *partea reală* şi, respectiv, *partea imaginară* ale numărului z; notăm $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

2.73. Numerele complexe $z = x + iy$ şi $\bar{z} = x - iy$ se numesc *conjugate*.

Au loc următoarele proprietăţi :

a. Relaţia $z = \bar{z}$ este echivalentă cu faptul că z este real.

b. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
c. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ } oricare ar fi z_1, z_2 complexe.

Demonstraţie. **a.** Relaţia $x + iy = x - iy$ este echivalentă cu $y = 0$, adică $z = x + iy$ este în acest caz şi numai în acesta real.

b. Fie $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$; atunci

$$\overline{z_1 + z_2} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

c. Analog

$$\overline{z_1 z_2} = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + x_2 y_1) = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

În particular, din punctul c rezultă relația

d. $\alpha z = \alpha \bar{z}$ pentru orice α real.

2.74. *Unicitatea sistemului numerelor complexe.*

TEOREMĂ. *Dacă în spațiul bidimensional* $\mathbb{R}_2$ *este introdusă o înmulțire a elementelor care verifică axiomele* 1.22, *atunci este posibil să găsim în* $\mathbb{R}_2$ *doi vectori liniari independenți* g_1 *și* g_2 *astfel încît* $g_1^2 = g_1$, $g_2^2 = -g_1$, $g_1 g_2 = g_2 g_1 = g_2$.

Demonstrație. Conform axiomei 1.22 c, în $\mathbb{R}_2$ există elementul 1 diferit de 0; notăm $g_1 = 1$. Fie apoi f_1 un vector oarecare liniar independent de g_1. Avem $f_1^2 = \alpha g_1 + \beta f_1$ cu α și β reale. Pentru un vector $f_2 = f_1 + \gamma g_1 \neq 0$ (γ real) avem $(f_1 + \gamma g_1)^2 = f_1^2 + 2\gamma f_1 + \gamma^2 g_1 = \alpha g_1 + \beta f_1 + 2\gamma f_1 + \gamma^2 g_1$ și dacă se pune $\gamma = -\frac{\beta}{2}$, rezultă $f_2^2 = (\alpha + \gamma^2) g_1$. Numărul real $\alpha + \gamma^2$ nu poate fi nul conform 1.47 a. El nu poate fi nici pozitiv pentru că ar rezulta $(f_2 - \sqrt{\alpha + \gamma^2}\, g_1)(f_2 + \sqrt{\alpha + \gamma^2}\, g_1) = 0$, în contradicție cu 1.47 b. Așadar, $\alpha + \gamma^2 = -\delta$, $\delta > 0$. Înlocuind f_2 cu $g_2 = \frac{1}{\sqrt{\delta}} f_2$, rezultă $g_2^2 = \frac{(\alpha + \gamma^2) g_1}{\delta} = -g_1$. Egalitățile $g_1 g_2 = g_2 g_1 = g_2$ decurg din faptul că g_1 este element unitate pentru înmulțire. Teorema este demonstrată.

Din această teoremă rezultă că între orice două spații bidimensionale înzestrate fiecare printr-o înmulțire verificînd axiomele 1.22 se poate stabili o corespondență biunivocă conservînd operația de înmulțire; cu alte cuvinte, structurile în discuție (spații bidimensionale cu înmulțire) sînt izomorfe.

2.75. *Automorfismele sistemului numerelor complexe.* Am văzut în 2.59 că singurul automorfism al sistemului numerelor reale este automorfismul identic $\xi \mapsto \xi$. Iată definiția unui automorfism al corpului numerelor complexe: o aplicație bijectivă $z \mapsto z'$ a planului complex $\mathbb{C}$ pe el însuși se numește *automorfism* dacă pentru orice $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ și pentru orice α real avem:

1) $(z_1 + z_2)' = z_1' + z_2'$;
2) $(z_1 z_2)' = z_1' z_2'$;
3) $(\alpha z)' = \alpha z_1'$.

Proprietățile 1) și 3) arată că de fapt un automorfism este un automorfism al lui $\mathbb{C}$ ca spațiu vectorial (2.67); în plus, acesta trebuie să conserve operația de înmulțire (proprietatea 2)).

Un automorfism neidentic al sistemului $\mathbb{C}$ poate fi dat prin regula

$$x + iy \mapsto x - iy. \tag{1}$$

Arătăm că sistemul $\mathbb{C}$ nu admite nici un alt automorfism neidentic. Fie $(x + iy)'$ elementul în care se transformă un element $x + iy$ printr-un automorfism. Din 3) rezultă că $1' \cdot z' = (1 \cdot z)' = z'$, deci $1'$ este element unitate pentru înmulțire în $\mathbb{C}$; conform unicității acestuia, avem $1' = 1$. Conform 2) pentru orice x real avem $x' = (x \cdot 1)' = x \cdot 1' = x \cdot 1 = x$, deci automorfismul conservă întreaga mulțime a numerelor reale. Apoi avem conform 2),

$$(i')^2 = i^2 = -1,$$

deci i' este egal fie cu i, fie cu $-i$ (2.72). În primul caz avem $(x + iy)' = x' + i'y' = x + iy$ și în cazul secund, $(x + iy)' = x' + i'y' = x - iy$, ceea ce demonstrează propoziția.

Studiul numerelor complexe va fi continuat în capitolul 5 (în 5.72).

2.76. Este posibil pentru $n > 2$ să fie introdusă o operație de înmulțire a vectorilor din spațiul $\mathbb{R}_n$ verificînd axiomele 1.22 a — e? O teoremă a lui Frobenius dă un răspuns negativ. Nu vom da demonstrația acestei teoreme, evident interesantă [25].

§ 2.8. Noțiunea generală de funcție; grafic

2.81. Fie X și Y două mulțimi. Presupunem că există un procedeu f prin care oricărui element $x \in X$ îi corespunde un element $y \in Y$; atunci corespondența $x \mapsto y$ (sau $y = f(x)$) se numește *funcție* avînd X ca domeniu de definiție și Y ca domeniu de valori. În acest context x se mai numește *variabilă independentă* (sau *argument*) iar y se numește *variabilă dependentă* (sau *valoare*) a funcției.

Trebuie subliniat faptul că definiția unei funcții nu cere ca orice $y \in Y$ să fie o valoare $f(x)$ pentru vreun $x \in X$ și nici ca la valori distincte ale lui x să corespundă valori distincte ale lui y. Dacă totuși aceste două condiții sînt îndeplinite, atunci f este o corespondență bijectivă între mulțimile X și Y (deci corespondențele bijective sînt cazuri speciale de funcții). Dacă domeniul de valori Y al unei funcții f este dreapta numerică $\mathbb{R}$, atunci funcția f se numește *funcție numerică*. Dacă Y este spațiul vectorial $\mathbb{R}_n$ (§2.6), atunci funcția f este o *funcție vectorială*.

Dacă domeniul de definiție X al unei funcții f este dreapta numerică $\mathbb{R}$ sau dreapta numerică încheiată $\overline{\mathbb{R}}$ (1.91) sau o mulțime $E \subset \overline{\mathbb{R}}$, atunci f se numește *funcție de o variabilă reală*.

Dacă domeniul de definiție al funcției f este mulțimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale, atunci f se numește *șir de elemente din* Y (notat $f_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$). Observăm că noțiunea de șir de elemente ale unei mulțimi nu se reduce la noțiunea de submulțime cel mult numărabilă; într-un șir elementele se pot repeta dar într-o submulțime nu. Astfel, șirul $f_1 = a$, $f_2 = a$, ... (a fiind un element fixat al mulțimii Y) este o entitate matematică distinctă de mulțimea $\{a\}$; iar șirul $f_1 = a$, $f_2 = b_1$, $f_3 = a$, $f_4 = b_2$, $f_5 = a$, $f_6 = b_3$, ... diferă de submulțimea numărabilă $\{a, b_1, b_2, b_3, \ldots\}$ a mulțimii Y.

2.82. Reamintim noțiunea de *produs cartezian* (sau *direct*) a două mulțimi. Produsul cartezian al mulțimilor X și Y este mulțimea $P(X, Y)$ a tuturor perechilor (x, y) unde primul element aparține lui X și al doilea mulțimii Y. Două perechi (x, y) și (x', y') sînt *egale*, prin definiție, dacă $x = x'$ și $y = y'$. (Se mai scrie $X \times Y$ în loc de $P(X, Y)$.) Astfel, planul real $\mathbb{R}_2$ este produsul cartezian $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a două drepte reale.

Fixăm în mulțimea Y un element y_0 și considerăm submulțimea tuturor perechilor $(x, y_0) \in P(X, Y)$. Această submulțime este evident echipotentă cu X și este numită *secțiunea în* $P(X, Y)$ *definită de elementul* y_0. Produsul cartezian $P(X, Y)$ este egal cu reuniunea tuturor secțiunilor (care sînt echipotente cu X, deci echipotente între ele).

2.83. Dacă $f : X \to Y$ este o funcție, atunci prin *grafic al lui* f se înțelege submulțimea produsului cartezian

$P(X, Y)$ formată de toate perechile (x, y) pentru care $y = f(x)$. În cazul cînd $X = \mathbb{R}_1$ și $Y = \mathbb{R}_1$ se obține definiția uzuală a graficului unei funcții reale de o variabilă reală. În multe cazuri importante graficul unei funcții reale de o variabilă reală reprezintă o linie în planul (x, y). Dacă domeniul de definiție X al unei funcții f este planul $x = (x_1, x_2)$ și domeniul de valori este dreapta numerică, atunci graficul lui f este o submulțime a lui $\mathbb{R}_3$ care se poate reprezenta sub forma unei suprafețe. Dacă domeniul de definiție X al unei funcții f este axa reală iar domeniul de valori Y este planul $y = (y_1, y_2)$, atunci graficul lui f este de asemenea o submulțime a lui $\mathbb{R}_3$; dar de această dată el reprezintă o linie care intersectează orice plan $x =$ constant în cel mult un punct. Toate exemplele considerate reprezintă obiecte importante de analiză și vor fi studiate în cele ce urmează într-un mod sistematic.

2.84. *Observație asupra funcțiilor uniforme și multiforme.* În virtutea definiției 2.81 orice funcție $f : X \to Y$ asociază oricărui element $x \in X$ un element unic $y \in Y$ și în acest sens ea se numește *uniformă* (sau *univocă*). Uneori se poate defini o corespondență de la X la Y prin care oricărui $x \in X$ să-i corespundă mai multe elemente din mulțimea Y. Se poate extinde definiția funcției tocmai în acest sens. Totuși dificultățile care apar în acest caz ne fac să nu îl luăm în considerație. Pentru o astfel de corespondență se utilizează termenul de „funcție multiformă" (sau multivocă). Uneori se reunesc mai multe funcții uniforme într-o singură formulă (de exemplu pentru a simplifica notația); o astfel de reuniune se numește de asemenea *funcție multiformă*. De exemplu funcția multiformă $y = x \pm \sqrt{1 - x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, este o notație prescurtată pentru cele două funcții uniforme $y_1 = x + \sqrt{1 - x^2}$, $y_2 = x - \sqrt{1 - x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

EXERCIȚII

1. Să se demonstreze că mulțimile de mai jos sînt numărabile:

a) Mulțimea tuturor intervalelor $a < x < b$ cu extremitățile raționale;

b) Mulțimea tuturor poligoanelor plane cu un număr finit de laturi și avînd vîrfurile de coordonate raționale.

2. Să se demonstreze că fiecare din mulțimile următoare este finită sau numărabilă:

a) Mulțimea intervalelor deschise disjuncte două cîte două pe dreapta reală.

b) Mulțimea curbelor închise, disjuncte două cîte două în plan, fiecare autointeresectîndu-se sub forma unor opturi.

c) Mulțimea M a numerelor reale pozitive astfel încît toate sumele finite Σx_j cu $x_j \in M$ să fie majorate de un număr fix A.

(*Observație.* V. V. Grușin și V. P. Palamodov au demonstrat afirmații analoage pentru orice mulțime de figuri disjuncte ale planului care conțin puncte triple (ca în litera T) și de asemenea pentru orice mulțime de figuri disjuncte în spațiu care au fie puncte singulare de tip „buton" fie părți de tipul „banda lui Möbius", [46].)

3. Să se descompună mulțimea numerelor naturale 0, 1, 2, ... într-o reuniune numărabilă de mulțimi numărabile disjuncte două cîte două.

4. *Problemă amuzantă.* I. Matematicianul X povestește că într-o zi a primit ca oaspeți frații N. Aceștia și-au scos șepcile și le-au lăsat în hol. În momentul plecării, spre marea mirare a gazdei, se observă că lipsea o șapcă deși nimeni nu a intrat în hol.

II. Altă dată frații N au venit din nou în vizită la X și au lăsat șepcile la cuier, iar la plecare au găsit o șapcă în plus. Gazda și oaspeții știau foarte bine că la sosire cuierul era gol.

III. Data următoare frații N și-au luat șepcile și au plecat, gazda îi însoțește în stradă și, la întoarcere, vede în cuier atîtea șepci cîte erau înaintea plecării oaspeților.

IV. În fine, a patra oară frații au venit cu capul descoperit și la plecare și-au luat șepcile rămase de la ultima lor vizită. Revenind după ce și-a condus oaspeții X a găsit atîtea șepci cîte avea în cuier înaintea plecării fraților N.

Cum se explică aceste fapte paradoxale?

5. Dacă se reunește o mulțime finită sau numărabilă B cu o mulțime infinită A atunci se obține o mulțime echipotentă cu A.

6. Să se demonstreze că mulțimea I a numerelor iraționale și mulțimea T a numerelor transcendente au puterea continuului.

7. Mulțimea tuturor șirurilor formate din 0 și 1 este de puterea continuului.

8. Mulțimea tuturor șirurilor crescătoare de numere naturale are puterea continuului.

9. Mulțimea tuturor șirurilor de numere naturale (nu neapărat crescătoare) are puterea continuului.

10. Mulțimea tuturor șirurilor de numere reale are puterea continuului.

11. Mulțimea tuturor punctelor din spațiul n-dimensional $\mathbb{R}_n (n \geq 1)$ are puterea continuului.

12. Să se demonstreze că mulțimea tuturor funcțiilor definite pe segmentul $[0, 1]$ și avînd doar două valori posibile nu are puterea continuului.

13. Să se arate că mulțimea tuturor submulțimilor unei mulțimi A nu este echipotentă cu A.

NOTĂ ISTORICĂ

Ideile principale ale teoriei mulțimilor, formulate pentru prima dată la sfîrșitul secolului al XIX-lea de Cantor, au pătruns apoi în cele mai diferite domenii ale matematicii, desăvîrșind limbajul acesteia. La confluența dintre secolele al XIX-lea și al XX-lea s-a observat că logica tradițională este generatoare de contradicții în teoria mulțimilor. Această situație dramatică care a pus la îndoială multe rezultate de matematică

și-a găsit ieșirea în crearea sistemelor axiomatice ale teoriei mulțimilor care au fixat nu numai proprietățile obiectelor, dar și mijloacele logice admisibile (P. Cohen, *Set theory and the continuum hypothesis*, N. Y.-Amsterdam, Benjamin, 1966).

Rolul jucat de structurile matematice a fost pus în relief de Bourbaki în articolul „Arhitectura matematicii", 1948. Opera în mai multe volume elaborată de Bourbaki *Eléments de mathématiques* (prima fascicolă apărută în 1939) a fost consacrată reprezentării întregii matematici sub forma unui sistem de structuri. La ora actuală se poate spune că matematicile fiind inepuizabile, o astfel de operă nu va putea fi încheiată.

Sistemele de coordonate (în plan și spațiul tridimensional) au fost introduse de Descartes în 1637, a cărui lucrare *Geométrie* a exercitat o influență extraordinară asupra dezvoltării matematicii.

Spațiile cu mai multe dimensiuni au fost introduse de Cayley și Grassmann (1846). Numerele complexe au apărut mult mai devreme (în secolul al XVI-lea) la algebriștii italieni care le-au folosit în rezolvarea ecuațiilor algebrice; regulile de operare asupra expresiilor de forma $a + b\sqrt{-1}$ sînt descrise în *Algebra* lui Bombelli (1579). Deoarece în acea epocă nu s-a putut atribui numerelor complexe nici un sens intuitiv, ele au fost denumite numere „imaginare", „absurde" etc. pînă în momentul cînd Gauss (1797) și, în mod independent, Bessel (1798) și Argand (1806) le-au interpretat ca puncte în plan. În 1903 Frobenius a stabilit inexistența, pentru $n > 2$, a unui spațiu n-dimensional înzestrat cu adunarea pe componente și înmulțirea satisfăcînd axiomele 1.21—1.22.

La sfîrșitul secolului al XIX-lea, o dată cu dezvoltarea teoriei mulțimilor, a devenit clar că reprezentarea formală a numărului complex $a + b\sqrt{-1}$ printr-un cuplu (a, b) este la fel de utilă ca și reprezentarea geometrică.

Definiția generală a unei funcții (2,81) a fost formulată pentru funcții numerice de Lobacevski (1834) și de Dirichlet (1837), după ce apăruse sub o formă mai puțin generală la Euler (1751). Aceasta a încoronat munca matematicienilor din secolul al XVIII-lea, separînd noțiunea generală de funcție, de noțiunea aflată în permanentă expansiune în cursul dezvoltării matematicii, anume cea de reprezentare analitică [27].

Capitolul 3

SPAȚII METRICE

Singurul fapt care lipsește teoriei mulțimilor pentru a-și ocupa locul în cadrul analizei este conceptul general de trecere la limită.

J. Hadamard (1900)

Spațiile metrice reprezintă una din cele mai importante structuri matematice. În particular, ele stau la baza teoriei generale a limitelor, expusă în capitolul 4.

§ 3.1. Definiții și exemple

3.11. DEFINIȚIE. O mulțime oarecare M de elemente („puncte") $x, y, \ldots$ se numește *spațiu metric* dacă există o regulă prin care fiecărui cuplu (x, y) de elemente din M să-i corespundă un număr real $\rho(x, y)$ (numit *distanța de la x la y*) astfel încît să fie satisfăcute condițiile (axiomele) următoare:

a. $\rho(x, y) > 0$ pentru $x \neq y$; $\rho(x, x) = 0$ pentru orice x.

b. $\rho(y, x) = \rho(x, y)$ pentru orice x și y (*simetria* distanței).

c. $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ pentru orice x, y, z (*inegalitatea triunghiului*).

Inegalitatea triunghiului își are originea geometrică în faptul că în geometria elementară lungimea laturii xz a unui triunghi xyz nu depășește suma lungimilor celorlalte laturi xy și yz.

Regula care permite ca oricărei perechi $(x, y) \in M \times M$ să-i asociem numărul $\rho(x, y)$, adică funcția $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$, se numește *metrica* spațiului M. Observăm că orice submulțime $M' \subset M$ a unui spațiu metric M este de asemenea un spațiu metric în raport cu distanța din M.

Semnalăm cîteva consecințe simple ale axiomelor a—c.

d. Pentru orice elemente $x_1, \ldots, x_n$ ale unui spațiu metric M are loc inegalitatea

$$\rho(x_1, x_n) \leqslant \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \ldots + \rho(x_{n-1}, x_n)$$

(aceasta fiind o generalizare a unui fapt cunoscut în geometria elementară: lungimea segmentului care unește capetele unei linii poligonale este mai mică decît suma lungimilor celorlalte laturi). Pentru demonstrație se aplică succesiv axioma din punctul c:

$$\rho(x_1, x_n) \leqslant \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_n) \leqslant$$

$$\leqslant \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \rho(x_3, x_n) \leqslant$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\leqslant \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \ldots + \rho(x_{n-1}, x_n).$$

e. Pentru orice patru puncte x, y, z, v ale unui spațiu metric M are loc „inegalitatea patrulaterului":

$$|\rho(x, y) - \rho(z, v)| \leqslant \rho(x, z) + \rho(y, v). \qquad (1)$$

Într-adevăr, conform **d** avem

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, v) + \rho(v, y),$$

$$\rho(z, v) \leqslant \rho(z, x) + \rho(x, y) + \rho(y, v),$$

sau

$$\rho(x, y) - \rho(z, v) \leqslant \rho(x, z) + \rho(v, y),$$

$$\rho(z, v) - \rho(x, y) \leqslant \rho(z, x) + \rho(y, v).$$

Membrii secunzi ai acestor inegalități coincid conform axiomei b. Primii membri sînt opuși; rezultă astfel (1).

f. Punînd $v = y$ în inegalitatea (1) se obține

$$|\rho(x, y) - \rho(z, y)| \leqslant \rho(x, z) \qquad (2)$$

(în geometria elementară aceasta exprimă faptul că diferența lungimilor a două laturi într-un triunghi nu depășește lungimea celei de a treia).

3.12.a. O mulțime B dintr-un spațiu metric M se numește *mărginită* dacă toate distanțele unui punct oarecare $a \in M$ la toate punctele $b \in B$ sînt majorate de o constantă reală fixă. În acest caz distanțele de la orice alt punct fix c la toate punctele lui B sînt de asemenea majorate de o constantă fixă și același lucru are loc pentru distanțele între puncte oarecare ale mulțimii B. Aceasta rezultă din inegalitatea triunghiului

$$\rho(b, c) \leqslant \rho(b, a) + \rho(a, c).$$

Numărul real și pozitiv

$$\operatorname{diam} B = \sup_{x \in B,\ y \in B} \rho(x, y)$$

se numește *diametrul* mulțimii B (presupusă mărginită).

b. În cazul $M = \mathbb{R}_1$ (axa reală), o mulțime B este mărginită în sensul anterior dacă și numai dacă este mărginită în sensul uzual (1.66), deoarece în ambe le cazuri aceasta revine la faptul că B este conținută într-un interval mărginit.

c. O submulțime B a unui spațiu metric M este nemărginită dacă pentru orice C real există $x, y \in B$ astfel încît $\rho(x, y) > C$. În acest caz, pentru orice C și pentru orice punct fix $a \in M$ se poate găsi un punct $x \in B$ pentru care $\rho(a, x) > C$; deoarece în caz contrar mulțimea B ar fi mărginită și conform axiomei a distanțele între perechile de puncte oarecare ale ei ar fi majorate.

d. Definițiile unui spațiu metric mărginit sau nemărginit se obțin din a și c pentru $B = M$.

e. Mulțimea tuturor punctelor x dintr-un spațiu metric M pentru care toate distanțele de la x la un punct dat x_0 sînt inferioare unui număr dat $r > 0$, adică $\rho(x, x_0) < r$, se numește *sferă plină* (sau mai exact *sferă deschisă*) de rază r; punctul x_0 este centrul acestei sfere. Mulțimea $\{x \mid \rho(x, x_0) \leqslant r\}$ se numește *sfera închisă de rază r* centrată în x_0. Mulțimea punctelor x astfel încît $\rho(x, x_0) = r$ formează *sfera* de rază r centrată în x_0. În cele ce urmează, prin sferă vom înțelege o sferă plină.

f. Orice sferă de centru x_0 se numește *vecinătate* a lui x_0. Un punct x_0 se numește punct *interior* al unei mulțimi $E \subset M$ dacă el are o vecinătate inclusă în E.

3.13. *Exemple.*

a. Orice mulțime M de puncte de pe dreapta reală $\mathbb{R}_1$ este un spațiu metric cu distanța definită prin $\rho(x, y) = |x - y|$.

Verificarea condițiilor 2.11 a-c rezultă din proprietățile binecunoscute ale modulului (1.54b). Dacă M este întreaga dreaptă, atunci sfera deschisă de rază r centrată într-un punct x_0 este intervalul $|x - x_0| < r$; o sferă închisă de rază r centrată într-un punct x_0 este intervalul $|x - x_0| \leqslant r$; în fine, o sferă de rază r centrată într-un punct $x_0 \in \mathbb{R}_1$ este redusă la cele două puncte $x = x_0 \pm r$.

b. Orice mulțime M în planul $\mathbb{R}_2$ sau în spațiul tridimensional $\mathbb{R}_3$ este un spațiu metric dacă se alege ca distanță între punctele $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ și $y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ (din $\mathbb{R}_3$ pentru a fixa ideile), distanța geometrică uzuală:

$$\rho(x, y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2 + (\xi_3 - \eta_3)^2}.$$

Inegalitatea triunghiului (axioma c) se reduce aici la inegalitatea geometrică cunoscută conform căreia o latură a unui triunghi nu depășește suma celorlalte două. Un exemplu mai general va fi studiat în cele ce urmează.

3.14.a. Considerăm un spațiu euclidian n-dimensional $\mathbb{R}_n$ (2.61). Reamintim că orice vector $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ din acest spațiu are lungimea $|x| = \sqrt{\sum_1^n \xi_k^2} = \sqrt{(x, x)} \geqslant 0$. Definim acum distanța între elementele $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ și $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ din $\mathbb{R}_n$ prin formula

$$\rho(x, y) = |x - y| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (\xi_k - \eta_k)^2}. \tag{1}$$

Axiomele distanței 3.11 a — b sînt aici imediate. Pentru a verifica axioma din 3.11 c înlocuim, într-una din inegalitățile de la 2.68, x prin $x - y$, y prin $y - z$, deci $x + y$ prin $x - z$ și vom avea

$$\rho(x, z) = |x - z| \leqslant |x - y| + |y - z| = \rho(x, y) + \rho(y, z),$$

ceea ce era necesar. Astfel, spațiul $\mathbb{R}_n$ înzestrat cu distanța (1), ca și orice submulțime $E \subset \mathbb{R}_n$ cu aceeași distanță, este un spațiu metric.

b. Cum pot fi descrise mulțimile mărginite din spațiul n-dimensional $\mathbb{R}_n$? Dacă o mulțime $A \subset \mathbb{R}_n$ este mărginită, atunci distanțele tuturor punctelor $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in A$ la un punct oarecare fixat din $\mathbb{R}_n$, de exemplu vectorul nul, sînt majorate de o constantă fixă. Altfel spus, există o constantă $b > 0$ astfel încît pentru orice $x \in A$,

$$|x| = \sqrt{\sum_1^n \xi_k^2} \leqslant b.$$

Dar atunci pentru orice $k = 1,2, \ldots, n$ și pentru $x \in A$ avem $|\xi_k| \leqslant b$, adică fiecare coordonată a punctelor din A este mărginită pe axa reală. Reciproc, dacă o mulțime $A \subset \mathbb{R}_n$ este astfel încît orice coordonată a punctelor sale este majorată pe axa reală, adică există $b > 0$ astfel încît $|\xi_k| \leqslant b$ pentru orice $k = 1,2, \ldots, n$ și pentru orice $x \in A$, atunci

$$|x| = \sqrt{\sum_1^n \xi_k^2} \leqslant \sqrt{\sum_1^n b^2} = b\sqrt{n},$$

deci mulțimea A este mărginită în spațiul $\mathbb{R}_n$. Deci o mulțime $A \subset \mathbb{R}_n$ este mărginită dacă și numai dacă mulțimea valorilor tuturor coordonatelor punctelor $x \in A$ este mărginită pe dreapta numerică.

3.15. Pentru spațiile metrice se poate introduce conform 2.52 un concept de izomorfism, care în acest caz se numește *izometrie*. Două spații metrice se numesc *izometrice* dacă se poate stabili între elementele acestor spații o corespondență bijectivă care conservă distanțele.

De exemplu, două segmente egale pe dreapta numerică înzestrată cu metrica sa naturală sînt izometrice, în timp ce două segmente de lungimi distincte nu sînt izometrice. Orice figură din plan este izometrică cu simetrica sa în raport cu o dreaptă. Notăm că o izometrie în spațiul n-dimensional care transformă suma a doi vectori oarecare x și y în suma imaginilor lor (izometrie liniară) conservă de asemenea produsul scalar, ceea ce rezultă din egalitatea

$$(x + y, x + y) = (x, x) \quad 2(x, y) + (y, y).$$

Indicăm acum două exemple simple de aplicații izometrice ale unui spațiu euclidian n-dimensional $\mathbb{R}_n$ pe el însuși:

a. Simetria în raport cu planul $x_n = 0$: orice vector $x = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n)$ este transformat în vectorul $x' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, -\xi_n)$.

b. Translația de vector $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$: orice vector $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ este transformat în vectorul $x + \beta = (\xi_1 + \beta_1, \ldots, \xi_n + \beta_n)$. De observat că pentru $\beta \neq 0$ această aplicație nu este un automorfism al spațiului $\mathbb{R}_n$ (2.67) deoarece nu conservă originea coordonatelor, adică nu transformă 0 în 0.

c. În general, dacă există o transformare izometrică a unui spațiu n-dimensional $\mathbb{R}_n$ pe el însuși prin care o mulțime $G \subset \mathbb{R}_n$ se transformă într-o mulțime $F \subset \mathbb{R}_n$, atunci aceste mulțimi G și F se numesc *geometric egale* (sau *congruente*), conform terminologiei din geometria elementară (deși egalitatea este definită acolo numai pentru figuri de tip special).

3.16. *Metrizarea produsului cartezian de spații metrice.* Fie M_1 și M_2 două spații metrice; atribuim indicii 1 și 2 simbolurilor care desemnează metrica și punctele spațiilor respective. Fie $M = M_1 \times M_2$ produsul cartezian al mulțimilor M_1 și M_2 (2.82), adică mulțimea tuturor cuplurilor $x = (x_1, x_2)$, $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$. Definim o metrică în mulțimea M astfel: dacă $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, atunci

$$\rho(x, y) \equiv \rho[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = \max \{\rho_1(x_1, y_1), \rho_2(x_2, y_2)\}. \tag{1}$$

Verificăm axiomele 3.11 a-c. Dacă $x \neq y$, atunci $x_1 \neq y_1$ sau $x_2 \neq y_2$, adică $\rho_1(x_1, y_1) > 0$ sau $\rho_2(x_2, y_2) > 0$; în cele două cazuri, conform definiției (1) avem atunci $\rho(x, y) > 0$. Și dacă $x = y$, atunci $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, de unde $\rho_1(x_1, y_1) = 0$, $\rho_2(x_2, y_2) = 0$ și deci $\rho(x, y) = 0$. Axioma a este astfel verificată. Apoi $\rho(y, x) = \max \{\rho_1(y_1, x_1), \rho_2(y_2, x_2)\} = \max \{\rho_1(x_1, y_1), \rho_2(x_2, y_2)\} = \rho(x, y)$ și astfel axioma b este verificată. În fine, fie $z = (z_1, z_2)$; evaluăm $\rho(x, z) = \max \{\rho_1(x_1, z_1), \rho_2(x_2, z_2)\}$. Pentru a fixa ideile, fie $\rho(x, z) = \rho_1(x_1, z_1)$; atunci

$$\rho(x, z) = \rho_1(x_1, z_1) \leqslant \rho_1(x_1, y_1) + \rho_1(y_1, z_1) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z),$$

ceea ce demonstrează axioma c.

Notăm că metrica (1), pentru orice secțiune (x, z) cu $z \in M_2$ fixat (2.82), este identică cu metrica spațiului M_1, astfel că orice secțiune (x, z) nu este doar echipotentă dar este chiar izometrică cu spațiul M_1. În plus, formula (1) nu este unicul mod de a introduce o metrică în produsul cartezian al spațiilor M_1, M_2. Ar putea fi folosite și alte formule, de exemplu

$$\rho(x, y) = \rho_1(x_1, y_1) + \rho_2(x_2, y_2) \tag{2}$$

sau

$$\rho(x, y) = \sqrt{\rho_1^2(x_1, y_1) + \rho_2^2(x_2, y_2)}. \tag{3}$$

Lăsăm cititorului să verifice axiomele metricii în cazurile (2) și (3).

§ 3.2. Mulțimi deschise

3.21. O mulțime U într-un spațiu metric M se numește *mulțime deschisă* dacă orice punct x_0 al lui U este un punct interior, adică există o sferă deschisă (a cărei rază poate să depindă de x_0), centrată în x_0 și conținută în U.

Astfel, o sferă deschisă centrată în x_1

$$U = \{x \in M \mid \rho(x, x_1) < r\}$$

este o mulțime deschisă. Într-adevăr, fie $x_0 \in U$ și $\rho(x_0, x_1) = \theta < r$. Luăm sfera (plină) U_0 centrată în x_0 de rază $r_0 < r - \theta$ și demonstrăm că $U_0 \subset U$. Într-adevăr, pentru orice $x \in U_0$, conform inegalității triunghiului, avem

$$\rho(x, x_1) \leqslant \rho(x, x_0) + \rho(x_0, x_1) < r_0 + \theta < r,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

3.22. TEOREMĂ. *Orice reuniune a unei familii de mulțimi deschise și intersecția unui număr finit de mulțimi deschise sînt mulțimi deschise.*

Demonstrație. Faptul că o reuniune de mulțimi deschise este deschisă rezultă din însăși definiția 3.21. Studiem cazul intersecției unui număr finit de mulțimi des-

chise. Fie x_0 un punct care aparţine mulţimilor deschise $U_1, U_2, \ldots, U_m$ dintre care prima conţine o sferă de rază r_1 centrată în x_0, a doua o sferă de rază r_2 centrată în x_0, etc.; atunci sfera centrată în x_0 de rază $r = \min(r_1, r_2, \ldots, r_m)$ este inclusă în fiecare din mulţimile $U_1, U_2, \ldots, U_m$ şi ca atare este inclusă în intersecţia lor.

Raţionamentul anterior nu este valabil şi pentru o familie infinită de mulţimi deschise deoarece marginea inferioară a unei mulţimi infinite de numere pozitive poate să fie egală cu zero. De exemplu, intersecţia mulţimilor deschise $U_n = \left\{x \mid \rho(x, x_0) < \frac{1}{n}\right\}$, $n = 1,2,3,\ldots$ conţine numai punctele x pentru care $\rho(x, x_0) = 0$, deci conform axiomei 3.11 a, ea se reduce la punctul x_0; această intersecţie nu este în general o mulţime deschisă.

3.23. Orice interval de forma (α,β), (α,∞) sau $(-\infty,\alpha)$ este evident o mulţime deschisă. O reuniune finită sau numărabilă de intervale (α_k, β_k), $k = 1,2,\ldots$ este de asemenea o mulţime deschisă. Ne propunem acum să arătăm că orice mulţime deschisă U pe axa reală este o reuniune finită sau numărabilă de intervale deschise disjuncte.

Pentru aceasta fie un punct oarecare $x \in U$. Prin definiţie odată cu punctul x vor aparţine mulţimii U punctele unui întreg interval deschis care conţine x. Vom construi atunci cel mai mare interval deschis care conţine x şi este conţinut în mulţimea U. Fie S mulţimea punctelor la dreapta lui x care nu aparţin lui U. Dacă S este mulţimea vidă, atunci semidreapta (x,∞) este conţinută în U. Dacă mulţimea S nu este vidă, atunci să notăm cu ξ marginea ei inferioară. Este evident că acest punct ξ nu aparţine lui U deoarece orice punct al lui U are o vecinătate conţinută în U, care deci nu conţine nici un punct al mulţimii S; iar punctul ξ ca margine inferioară a lui S va avea în orice vecinătate a lui puncte din S. În particular, $\xi \neq x$. Este de asemenea evident că întreg intervalul (x, ξ) este conţinut în U.

O construcţie similară se poate face la stînga punctului x; se ajunge la un interval (η, x) conţinut în U a cărui extremitate stîngă nu aparţine lui U (sau acest interval este întreaga semidreaptă $(-\infty, x)$).

Astfel, am construit, pornind de la un punct dat $x \in U$, un interval (η, ξ) aparţinînd mulţimii U ale cărui extremităţi (în cazul cînd sînt finite) nu aparţin lui U. Astfel de intervale se numesc *componentele mulţimii deschise* U.

Dacă două intervale componente (η_1, ξ_1) şi (η_2, ξ_2) au un punct comun x_0, atunci ele coincid; într-adevăr, inegalitatea $\xi_1 < \xi_2$, de exemplu, este imposibilă deoarece punctul ξ_1, pe de o parte trebuie să aparţină lui U ca punct interior al intervalului (x_0, ξ_2), iar pe de alta, ca extremitate a intervalului (x_0, ξ_1) el nu poate aparţine lui U. De aceea mulţimea U este reuniunea intervalelor sale componente disjuncte două cîte două. O astfel de reuniune este în mod necesar finită sau numărabilă, deoarece în fiecare din intervalele componente se poate alege cîte un punct raţional (1.75), iar mulţimea numerelor raţionale este numărabilă (2.34). Cu aceasta demonstraţia este încheiată.

§ 3.3. Şiruri convergente; homeomorfism

3.31. *Şiruri convergente.* Fie un şir $\{x_n\} = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ de puncte dintr-un spaţiu metric M. Vom spune că acest şir *converge către un punct* $x \in M$ (şi vom scrie $x_n \to x$) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ se poate indica un număr N natural astfel încît pentru orice $n \geqslant N$ să aibă loc inegalitatea

$$\rho(x, x_n) < \varepsilon.$$

Altfel spus, şirul x_n converge către x dacă toate punctele acestui şir, începînd de la un rang, aparţin toate oricărei sfere fixate centrate în x (în exteriorul sferei rămînînd doar un număr finit de puncte ale şirului).

Punctul x se numeşte atunci *limita* şirului x_n, ceea ce se notează prin simbolul

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n.$$

Simbolul $x_n \to x$ se citeşte „x_n converge către x" sau, mai detaliat, „şirul x_n converge către x pentru $n \to \infty$ pentru metrica ρ". Dacă pentru un şir dat x_n nu există nici un punct x pentru care relaţia $x_n \to x$ să fie valabilă, atunci şirul x_n se numeşte *divergent*.

3.32. *Exemple.*

a. Dacă M este dreapta numerică $M = \mathbb{R}$, cu metrica 3.13 a, $\rho(x, y) = |x - y|$, atunci definiţia 3.31 ia forma următoare : un şir de numere reale $x_1, x_2, \ldots$ converge către un număr x dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ se poate indica un număr natural N astfel încît pentru orice $n > N$ să aibă loc inegalitatea $|x - x_n| < \varepsilon$. Astfel, şirul de puncte $x_n = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ pe dreapta numerică (cu metrica 3.13 a) converge către punctul $x = 0$; într-adevăr, alegem pentru $\varepsilon > 0$ dat un număr natural $N > \frac{1}{\varepsilon}$; pentru orice $n \geqslant N$ avem $0 < x_n = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N} < \varepsilon$, deci punctele respective x_n aparţin sferei de rază ε şi de centru $x = 0$.

b. Arătăm că relaţiile $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ într-un spaţiu metric implică relaţia $\rho(x, y) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$ pe dreapta numerică (această proprietate este numită uneori „continuitatea distanţei").

Pentru un $\varepsilon > 0$ dat, alegem N natural astfel încît pentru $n > N$ să aibă loc inegalităţile

$$\rho(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \rho(y, y_n) < \frac{\varepsilon}{2};$$

atunci conform inegalităţii patrulaterului 3.11 (1) pentru $n > N$ avem

$$|\rho(x, y) - \rho(x_n, y_n)| \leqslant \rho(x, x_n) + \rho(y, y_n) < \varepsilon,$$

ceea ce trebuia probat.

c. Deşi teoria generală a limitelor va fi expusă în capitolul 4, avem în prealabil nevoie de cîteva proprietăţi simple ale şirurilor numerice convergente. Arătăm mai întîi că pentru două şiruri numerice x_n, y_n relaţiile

$$x = \lim x_n, \quad y = \lim y_n, \quad x_n \leqslant y_n \; (n = 1, 2, \ldots)$$

implică inegalitatea $x \leqslant y$.

Într-adevăr, presupunem că $x > y$ și fie $\varepsilon = x - y > 0$. Fie N astfel incît pentru $n > N$ să aibă loc inegalitățile

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Atunci

$$x_n > x - \frac{\varepsilon}{2} = (y + \varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2} > \left(y_n - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2} = y_n,$$

în contradicție cu presupunerea făcută. Propoziția este deci demonstrată.

d. Demonstrăm că pentru două șiruri numerice x_n, y_n relațiile

$$x = \lim x_n, \quad y = \lim y_n$$

implică

$$x + y = \lim (x_n + y_n).$$

Pentru $\varepsilon > 0$ alegem N natural astfel încît pentru $n \geqslant N$ să aibă loc inegalitățile

$$|x - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |y - y_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Atunci pentru $n > N$ are loc inegalitatea

$$|(x + y) - (x_n + y_n)| = |(x - x_n) + (y - y_n)| \leqslant$$
$$\leqslant |x - x_n| + |y - y_n| < \varepsilon,$$

ceea ce trebuia arătat.

e. Pentru trei șiruri numerice x_n, y_n, z_n din relațiile $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n, y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n, z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n, x_n + y_n \leqslant z_n (n = 1,2,\ldots)$ rezultă inegalitatea

$$x + y \leqslant z.$$

Folosind direct c și d.

f. Fie M un spațiu real m-dimensional înzestrat cu metrica 3.14.: dacă $x = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$, $y = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$.

atunci

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (\xi_k - \eta_k)^2}.$$

Demonstrăm că un șir de vectori $x_n = (\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nm})$ converge către un vector $x = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ dacă și numai dacă cele m șiruri numerice ale componentelor sînt convergente

$$\xi_{n1} \to \xi_1, \ldots, \xi_{nm} \to \xi_m. \tag{1}$$

Într-adevăr, presupunem îndeplinite relațiile (1). Pentru $\varepsilon > 0$ dat se poate găsi un număr N astfel încît pentru orice $n > N$ să aibă loc inegalitățile

$$|\xi_{n1} - \xi_1| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}, \ldots, |\xi_{nm} - \xi_m| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}},$$

deci $\max\limits_k |\xi_{nk} - \xi_k| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$.

Pentru aceiași $n > N$, conform inegalităților 2.68 (8), avem

$$\rho(x_n, x) = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (\xi_{nk} - \xi_k)^2} \leqslant \sqrt{m} \max_k |\xi_{nk} - \xi_k| < \varepsilon,$$

deci $x_n \to x$ în metrica spațiului $\mathbb{R}_m$.

Reciproc, presupunem că $x_n \to x$ în metrica spațiului $\mathbb{R}_m$. Pentru $\varepsilon > 0$ dat, găsim atunci un număr N astfel încît pentru orice $n > N$,

$$\rho(x_n, x) = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (\xi_{nk} - \xi_k)^2} < \varepsilon.$$

În acest caz avem

$$\max_k |\xi_{nk} - \xi_k| \leqslant \rho(x_n, x) < \varepsilon,$$

deci șirul ξ_{nk} converge către numărul ξ_k $(k = 1, \ldots, m)$, ceea ce trebuia demonstrat.

3.33. a. Arătăm că dacă un șir x_n este convergent, atunci el nu converge decît către un singur element al spațiului M. Presupunem că $x_n \to x$ și de asemenea

$x_n \to y$. Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$ fixat, găsim un rang N de la care începînd avem $\rho(x, x_n) < \varepsilon$, $\rho(y, x_n) < \varepsilon$; atunci $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y) < 2\varepsilon$. Deoarece $\varepsilon > 0$ este arbitrar, avem $\rho(x, y) = 0$ conform 1.57, de unde $x = y$ în virtutea axiomei 3.11 b.

b. Arătăm că dacă un şir $x_1, x_2, \ldots$ este convergent, atunci el este mărginit în spaţiul M; altfel spus, numerele $\rho(x_n, b)$, b fiind un element oarecare din M, formează pe dreapta numerică o mulţime mărginită (vezi 3.12a).

Într-adevăr, fie $p = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$; pentru orice $\varepsilon > 0$, deci şi pentru $\varepsilon = 1$ găsim un număr N astfel încît pentru $n > N$ să aibă loc inegalitatea $\rho(x_n, p) < \varepsilon = 1$. Fie apoi $D = \max\{\rho(x_1, p), \ldots, \rho(x_N p)\}$. Atunci $\rho(x_n, p) \leqslant \max\{1, D\}$ pentru orice $n = 1, 2, \ldots$, ceea ce demonstrează că şirul $x_1, x_2, \ldots$ este mărginit.

3.34. *Homeomorfism de spaţii metrice.* În multe probleme de analiză un rol important nu îl joacă atît forma explicită a metricii spaţiului, cît modul de a recunoaşte care sînt şirurile convergente sau divergente de puncte ale spaţiului. În legătură cu acest fapt introducem următoarea definiţie:

a. Două spaţii metrice M' şi M'' se numesc *homeomorfe* dacă se poate stabili o corespondenţă bijectivă între punctele lor astfel încît orice convergenţă $x'_n \to x'$ în M' să implice convergenţa punctelor corespunzătoare $x''_n \to x''$ în M'' şi invers, din convergenţa $x''_n \to x''$ în M'' să decurgă convergenţa punctelor corespunzătoare $x'_n \to x'$ în M'. Orice corespondenţă bijectivă de tipul indicat se numeşte un *homeomorfism*.

b. Teorema următoare furnizează un criteriu de homeomorfism pentru o corespondenţă bijectivă între punctele a două spaţii metrice.

TEOREMĂ. *Fie $\sim$ o aplicaţie bijectivă a unui spaţiu metric M' avînd metrica $\rho'(x', y')$, pe un spaţiu metric M'' avînd metrica $\rho''(x'', y'')$. Aplicaţia $\sim$ este un homeomorfism dacă şi numai dacă pentru orice $x' \in M'$ şi pentru orice $\varepsilon' > 0$ există $\varepsilon'' > 0$ astfel încît aplicaţia inversă în raport cu $\sim$ transformă sfera $\{y'' \in M'' \mid \rho''(x'', y'') < \varepsilon''\}$ în sfera $\{y' \in M' \mid \rho'(x', y') < \varepsilon'\}$ şi, reciproc, pentru orice $\varepsilon'' > 0$ există $\varepsilon' > 0$ astfel încît aplicaţia $\sim$ transformă sfera $\{y' \in M' \mid \rho'(x', y') < \varepsilon'\}$ în sfera $\{y'' \in M'' \mid \rho''(x'', y'') < \varepsilon''\}$.*

Demonstrație. Presupunem că aplicația bijectivă $\sim$ este un homeomorfism astfel încît pentru orice șir $x'_n \to x'$ avem $x''_n \to x''$ și reciproc. Fixăm punctul $x' \in M'$ și $\varepsilon' > 0$. Dacă nu ar exista ε'' menționat în enunțul teoremei, atunci pentru orice $n = 1,2, \ldots$ sfera $\left\{y'' \in M'' \mid \rho''(x'', y'') < \frac{1}{n}\right\}$ ar fi transformată prin aplicația inversă lui $\sim$ în mulțimea conținînd puncte din exteriorul sferei $\{y' \in M' \mid \rho'(x', y') < \varepsilon'\}$. În particular, pentru orice $n = 1,2,\ldots$ se poate găsi un punct $y''_n \in M''$ pentru care $\rho''(x'', y''_n) < \frac{1}{n}$, $\rho'(x', y'_n) \geqslant \varepsilon'$. Așadar, $y''_n \to x''$ și $y'_n \not\to x'$, ceea ce este absurd. Așadar, pornind de la un număr $\varepsilon' > 0$ arbitrar dat am putut găsi ε'' ca în enunț, dacă aplicația $\sim$ a fost un homeomorfism. Permutînd M'' și M' în raționamentul anterior se poate găsi ε' pornind cu $\varepsilon'' > 0$ dat.

Reciproc, să presupunem că se poate găsi un ε'' pentru orice $x' \in M'$ și pentru orice $\varepsilon' > 0$. Arătăm că $x''_n \to x''$ implică $x'_n \to x'$. Alegem un $\varepsilon' > 0$ oarecare și găsim ε'' corespunzător și N astfel încît pentru $n \geqslant N$ inegalitatea $\rho''(x''_n, x'') < \varepsilon''$ să fie satisfăcută. Aplicînd $\sim$ și ținînd cont de presupunerea făcută obținem $\rho'(x'_n, x') < \varepsilon'$. Astfel $x'_n \to x'$. Permutînd M'' și M' se obține că $x'_n \to x'$ implică $x''_n \to x''$. Teorema este astfel demonstrată.

c. Aceeași mulțime E poate fi înzestrată cu metrici diferite, definind astfel structuri distincte de spații metrice pe E. Două metrici $\rho'(x, y)$ și $\rho''(x, y)$ pe un același spațiu E se numesc *homeomorfe* (sau echivalente) dacă aplicația identică $x \mapsto x$ este un homeomorfism între spațiile metrice respective.

d. Aplicînd criteriul b situației descrise la punctul c se obține teorema următoare:

TEOREMĂ. *Două metrici ρ' și ρ'' date pe o aceeași mulțime E sînt homeomorfe dacă și numai dacă pentru orice $x \in E$ și pentru orice $\varepsilon' > 0$ există ε'' astfel încît sfera $\{y \mid \rho''(x, y) < \varepsilon''\}$ este inclusă în sfera $\{y \mid \rho'(x, y) < \varepsilon'\}$ și, reciproc, pentru orice $\varepsilon'' > 0$ există ε' astfel încît sfera $\{y \mid \rho'(x, y) < \varepsilon'\}$ este inclusă în sfera $\{y \mid \rho''(x, y) < \varepsilon''\}$.*

e. Ca exemplificare considerăm trei metrici distincte pe produsul cartezian M a două spaţii metrice M_1 şi M_2 (3.16):

$$\rho^{(1)}(x, y) = \max\{\rho_1(x_1, y_1),\ \rho_2(x_2, y_2)\};$$

$$\rho^{(2)}(x, y) = \rho_1(x_1, y_1) + \rho_2(x_2, y_2);$$

$$\rho^{(3)}(x, y) = \sqrt{\rho_1^2(x_1, y_1) + \rho_2^2(x_2, y_2)}\ .$$

Ele sînt homeomorfisme pe M. Aceasta decurge din inegalităţile

$$\max\{a,b\} \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} \leqslant a + b \leqslant 2\max\{a, b\} \quad (1)$$

valabile pentru orice numere reale nenegative a şi b. De exemplu, dacă $a \leqslant b$, atunci

$$\max\{a, b\} = b = \sqrt{b^2} \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} \leqslant \sqrt{a^2 + 2ab + b^2} =$$
$$= a + b \leqslant 2b = 2\max\{a, b\},$$

şi rezultă (1).

3.35. Vom introduce mai jos o metrică pe dreapta încheiată $\overline{\mathbb{R}}$ (1.91), această metrică fiind homeomorfă pe mulţimea $\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty < x < \infty\}$ cu metrica uzuală 3.13a. Pentru aceasta considerăm, mai întîi o funcţie ajutătoare.

a. Fie funcţia reală f definită pe $\overline{\mathbb{R}}$ prin

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}. \quad (1)$$

Definim de asemenea $f(-\infty) = -1$, $f(+\infty) = +1$ şi astfel f este prelungită la dreapta încheiată $\overline{\mathbb{R}}$. Graficul funcţiei f este reprezentat în fig. 3.1.

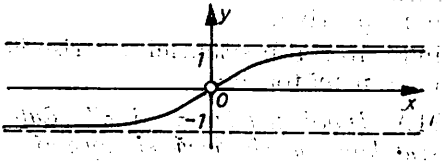


Fig. 3.1

În punctele b, c, d vom deduce cîteva inegalităţi relativ la această funcţie.

b. Evident, $f(x) > 0$ pentru $x > 0$, $f(x) < 0$ pentru $x < 0$ şi $f(0) = 0$. Apoi pentru orice x finit avem $f(-x) =$

$= -(f(x)$ și

$$|f(x)| = \frac{|x|}{1+|x|} < \frac{|x|+1}{1+|x|} = 1. \qquad (2)$$

c. Arătăm că pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|. \qquad (3)$$

Pentru $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ avem

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y}\right| = \frac{|x-y|}{(1+x)(1+y)} \leqslant$$

$$\leqslant |x - y|.$$

De asemenea, pentru $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{x}{1-x} - \frac{y}{1-y}\right| =$$

$$= \frac{|x-y|}{(1-x)(1-y)} \leqslant |x - y|.$$

Pentru $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$ avem

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x)| + f(y) = \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{y}{1+y} \leqslant$$

$$\leqslant |x| + y = -x + y = |x - y|;$$

în fine, pentru $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$, conform celor spuse anterior, rezultă

$$|f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)| \leqslant |y - x| = |x - y|,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

d. Presupunem că pentru anumiți x, y și pentru $0 < \delta < 1$ avem

$$|f(x)| < 1 - \delta, \qquad |f(y)| < 1 - \delta.$$

Atunci

$$|x - y| \leqslant \frac{1}{\delta^2} |f(x) - f(y)|. \qquad (4)$$

Pentru a demonstra aceasta, rezolvăm (1) în raport cu x. Pentru $x \geqslant 0$, $|x| = x$, deci $x = \frac{f(x)}{1 - f(x)}$; pentru $x \leqslant$

$\leqslant 0$, $|x| = -x$, avem $x = \dfrac{f(x)}{1 + f(x)}$.

Astfel, pentru $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$

$$|x - y| = \left| \frac{f(x)}{1 - f(x)} - \frac{f(y)}{1 - f(y)} \right| =$$

$$= \frac{|f(x) - f(y)|}{|1 - f(x)|\,|1 - f(y)|} \leqslant \frac{1}{\delta^2}\,|f(x) - f(y)|.$$

Dacă $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$, atunci $-x \geqslant 0$, $-y \geqslant 0$ şi, conform celor spuse anterior,

$$|x - y| = |-y - (-x)| \leqslant \frac{1}{\delta^2}\,|f(-y) - f(-x)| =$$

$$= \frac{1}{\delta^2}\,|f(x) - f(y)|.$$

Dacă $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, atunci

$$|x - y| = |x| + y = \frac{|f(x)|}{1 + f(x)} + \frac{f(y)}{1 - f(y)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\delta^2}\,[|f(x)| + f(y)] = \frac{1}{\delta^2}\,|f(x) - f(y)|;$$

dacă $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$, atunci conform celor spuse anterior,

$$|x - y| = |y - x| < \frac{1}{\delta^2}\,|f(y) - f(x)| =$$

$$= \frac{1}{\delta^2}\,|f(x) - f(y)|,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

e. Considerăm acum pe $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ (1.91), funcţia numerică

$$r(x, y) = |f(x) - f(y)|, \qquad (5)$$

unde f este funcţia introdusă la punctul a.

TEOREMĂ. *Funcția* $r(x, y)$ *este o metrică pe* $\overline{\mathbb{R}}$; *restrînsă la mulțimea* $\mathbb{R}$ *a punctelor finite* $-\infty < x < \infty$, *această metrică este homeomorfă cu metrica uzuală*

$$\rho(x, y) = |x - y|. \tag{6}$$

Interpretarea geometrică a metricii $r(x, y)$ este evidentă conform figurii 3.1. Anume, se ia pentru distanța $r(x, y)$ între punctele x, y de pe axa orizontală, lungimea segmentului corespunzător $[f(x), f(y)]$ al axei verticale.

Demonstrația teoremei. Verificăm axiomele 3.11 a-c. Direct din definiția (5) rezultă că axioma b (de simetrie) este satisfăcută. Pentru axioma a ($r(x, y) = 0$ dacă $x = y$ și $r(x, y) > 0$ dacă $x \neq y$), aceasta decurge de asemenea din definiție și din inegalitatea (3). Axioma c a triunghiului este satisfăcută conform inegalității

$$r(x, z) = |f(x) - f(z)| \leqslant |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)| =$$

$$= r(x, y) + r(y, z).$$

Arătăm acum că metricile $r(x, y)$ și $\rho(x, y)$ sînt homeomorfe pe mulțimea $\mathbb{R}$ a punctelor finite.

Fie $x_n \to x$ în metrica (6). Pentru orice $\varepsilon > 0$ găsim un număr N astfel încît pentru $n \geqslant N$ inegalitatea $|x_n - x| < \varepsilon$ să fie satisfăcută. Atunci conform inegalității (3) pentru $n \geqslant N$ avem

$$r(x_n, x) = |f(x_n) - f(x)| \leqslant |x_n - x| < \varepsilon,$$

deci $x_n \to x$ și în metrica (5).

Presupunem acum că $x_n \to x$ în metrica (5). Avem $|f(x)| < 1$; să punem $|f(x)| = 1 - 2\delta$, $0 < \delta < \frac{1}{2}$. Pentru un $\varepsilon > 0$ dat găsim un număr N astfel încît pentru $n \geqslant N$

$$r(x_n, x) = |f(x_n) - f(x)| < \min(\varepsilon, \delta) \cdot \delta^2.$$

Atunci, pentru $n \geqslant N$ avem

$$|f(x_n)| \leqslant |f(x)| + \min(\varepsilon, \delta) \cdot \delta^2 \leqslant |f(x)| + \delta = 1 - \delta,$$

deci dat fiind că $|f(x)| = 1 - 2\delta < 1 - \delta$, se poate aplica inegalitatea (4):

$$\rho(x_n, x) = |x_n - x| \leqslant \frac{1}{\delta^2} |f(x_n) - f(x)| \leqslant \min(\varepsilon, \delta) \leqslant \varepsilon.$$

Deci $x_n \to x$ în metrica (6). Teorema este astfel demonstrată.

f. Considerăm spațiul $\overline{\mathbb{R}}$ înzestrat cu metrica (5) și descriem sfera de rază $c > 0$ centrată în ∞. Prin definiție, aceasta este mulțimea acelor $x \in \overline{\mathbb{R}}$ care verifică inegalitatea

$$|f(\infty) - f(x)| = \left| 1 - \frac{x}{1 + |x|} \right| \leqslant c. \qquad (7)$$

Ne mărginim la cazul cel mai important cînd c este mic, $0 < c \leqslant 1$. Deoarece valorile lui $f(x)$ sînt negative pentru $x < 0$ și $f(\infty) - f(x) > 1$, inegalitatea (7) nu poate fi verificată decît de valorile $x \geqslant 0$. Inegalitatea (7) devine

$$1 - \frac{x}{1 + x} = \frac{1}{1 + x} \leqslant c \quad \text{sau} \quad x \geqslant \frac{1}{c} - 1.$$

Așadar, sfera considerată $\{x | r(x, \infty) \leqslant c\}$ este intervalul $\frac{1}{c} - 1 \leqslant x \leqslant \infty$. Analog, sfera (plină) de rază $c \leqslant 1$ centrată în $-\infty$ este intervalul $-\infty \leqslant x \leqslant -\frac{1}{c} + 1$.

În particular, șirul de puncte $1, 2, 3, \ldots$ din spațiul $\overline{\mathbb{R}}$ aparține, începînd de la un anumit rang, oricărei sfere de centru ∞, astfel că în spațiul $\overline{\mathbb{R}}$ avem $\lim_{n \to \infty} n = \infty$. Același șir nu are limită în $\mathbb{R}$.

g. Trebuie subliniat faptul că spațiul $\overline{\mathbb{R}}$ înzestrat cu metrica (5) este izometric cu intervalul $[-1, 1]$ înzestrat cu metrica uzuală. Corespondența $\overline{\mathbb{R}} \sim [-1, 1]$ se realizează prin $x \sim f(x)$; ea este bijectivă și în plus distanța între două puncte $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ pentru metrica (5) este evident egală cu distanța uzuală între punctele corespunzătoare $f(x)$ și $f(y)$.

Îndepărtînd extremităţile ($-\infty$ şi ∞ pentru spaţiul $\overline{\mathbb{R}}$ şi -1, $+1$ pentru intervalul închis $[-1, 1]$), se obţine o izometrie a axei reale $\mathbb{R}$ cu metrica (5) pe intervalul deschis $(-1, 1)$ cu metrica uzuală. Aplicînd punctul e se vede că spaţiul metric $\mathbb{R}$, cu metrica sa uzuală, este homeomorf cu intervalul deschis $(-1, 1)$, ceea ce poate fi de altfel verificat şi direct.

§ 3.4. Valori de aderenţă şi puncte de acumulare

3.41. Fie acum un şir $\{x_n\}$ de puncte dintr-un spaţiu metric M. Se spune că un punct $y \in M$ este o *valoare de aderenţă* a şirului $\{x_n\}_n$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ şi pentru orice N natural se poate determina un număr $n \geqslant N$ pentru care $\rho(y, x_n) < \varepsilon$.

Altfel spus, un punct y este o valoare de aderenţă a unui şir x_n, dacă orice sferă centrată în y conţine puncte ale şirului avînd numere de ordine oricît de mari dorim (nu neapărat toţi termenii aşa cum se întîmplă pentru un şir convergent, începînd de la un anumit rang). Un şir convergent $x_n \to x$ are x (şi numai x) ca valoare de aderenţă; demonstraţia acestui fapt este similară celei date în 3.33 a. Un şir divergent poate să nu aibă valori de aderenţă sau poate avea oricît de multe. Astfel, şirul de puncte $x_n = (-1)^n\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ pe dreapta numerică, înzestrată cu metrica ei uzuală, are două valori de aderenţă, şi anume -1 şi $+1$, fără a converge către vreuna din ele; şirul $x_n = n^{(-1)^n}$ are o singură valoare de aderenţă $y = 0$ şi nu converge către aceasta; dacă se consideră toate punctele raţionale de pe dreapta reală într-un şir (2.34), atunci orice punct al dreptei va fi o valoare de aderenţă a acestui şir.

3.42. Dacă un şir $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ are o valoare de aderenţă y atunci se poate extrage din şirul x_n un subşir convergent către y. Anume, dacă y este o valoare de aderenţă a şirului x_n, atunci pentru orice m există în şirul x_n un punct x_{n_m} $(n_m > n_{m-1})$ pentru care $\rho(y, x_{n_m}) < \frac{1}{m}$; subşirul compus din punctele $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$ converge evident către punctul y. Reciproc, dacă un şir x_n admite un sub-

șir $x_{n_m}(m = 1,2, \ldots)$ convergent către un punct $y \in M$, atunci acest punct este o valoare de aderență pentru întreg șirul x_n. Ajungem astfel la o definiție echivalentă a unei valori de aderență : *un punct y este o valoare de aderență a unui șir x_n dacă șirul x_n admite un subșir care converge către punctul y.*

3.43. Cea de a doua definiție a unei valori de aderență nu este bazată decît pe noțiunea de șir convergent. Deoarece un homeomorfism al unui spațiu metric M pe un alt spațiu metric M' conservă convergența șirurilor, ajungem la concluzia următoare : *dacă un punct $y \in M$ este o valoare de aderență a unui șir $x_n \in M$ și dacă un spațiu M' este homeomorf cu spațiul M, atunci punctul $y' \in M'$, care corespunde punctului $y \in M$ prin homeomorfismul considerat, este o valoare de aderență pentru șirul corespunzător de puncte $x'_n \in M'$.*

În particular, dacă se introduc pe aceeași mulțime M două metrici diferite dar homeomorfe ρ și ρ' și dacă $y \in M$ este o valoare de aderență a unui șir x_n pentru metrica ρ, atunci y este o valoare de aderență a șirului x_n și pentru metrica ρ'.

3.44.a. Fie A o submulțime a unui spațiu metric M. Se spune că un punct $y \in M$ este un *punct de acumulare* al mulțimii A dacă orice vecinătate $V_r(y) = \{x \mid \rho(x, y) < r\}$ a punctului y conține un punct $x \in A$, distinct de y.

Propozițiile 3.42 și 3.43, referitoare la valorile de aderență, rămîn valabile pentru punctele de acumulare. Dacă y este un punct de acumulare al unei mulțimi $A \subset M$, atunci se poate forma (ca în 3.42) un șir de puncte distincte ale mulțimii A convergent către y; reciproc, dacă se poate alege un șir de puncte distincte din A convergent către un punct $y \in M$, atunci acest punct y este un punct de acumulare pentru mulțimea A. Rezultă atunci că punctele de acumulare ale unei mulțimi $A \subset M$ sînt conservate prin orice homeomorfism al spațiului metric M (vezi 3.43).

b. *Exemplu.* Fie A o mulțime majorată (minorată) pe axa reală și presupunem că $\xi = \sup A (\eta = \inf A)$ nu aparține lui A; arătăm atunci că ξ (resp. η) este un punct de acumulare al mulțimii A.

Dăm demonstrația pentru punctul $\xi = \sup A$. Conform definiției marginii superioare, pentru orice $n = 1,2,\ldots$ există un punct $x_n \in A$ astfel încît $\xi - \frac{1}{n} < x \leqslant \xi$. Deoarece $\xi \notin A$ prin ipoteză, avem $x_n \neq \xi$. Numărul ξ este deci un punct de acumulare al mulțimii A, ceea ce trebuia demonstrat.

3.45. Este util să avem proprietăți generale care să permită deducerea existenței de puncte de acumulare pentru anumite clase de mulțimi. În acest sens dăm teorema care urmează.

TEOREMĂ (Bolzano-Weierstrass). *Orice mulțime infinită A de puncte ale unui segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$ are cel puțin un punct de acumulare.*

Demonstrație. Dacă o mulțime infinită E este inclusă în intervalul $[c, d]$, atunci cel puțin unul din segmentele jumătate $\left[c, \frac{c+d}{2}\right]$, $\left[\frac{c+d}{2}, d\right]$ conține o submulțime infinită a lui E. Acest fapt elementar ne permite să construim, pornind de la intervalul $[a, b] = \Delta_1$ care conține mulțimea infinită A, un șir de intervale închise incluse $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots$ fiecare conținînd o submulțime infinită a lui A și fiecare interval fiind jumătate din cel anterior. Conform principiului lui Cantor 1.81, aceste intervale au un punct comun x_0; arătăm că acesta este un punct de acumulare al mulțimii A. Alegem un interval V de lungime $\delta > 0$ și fie x_0 mijlocul său. Alegem apoi n astfel încît lungimea intervalului Δ_n este inferioară lui $\frac{\delta}{2}$; acest interval este inclus în V și conține punctul x_0. Odată cu intervalul Δ_n, intervalul V conține o infinitate de puncte ale mulțimii A; deci x_0 este un punct de acumulare al mulțimii A, ceea ce trebuia demonstrat.

3.46. O propoziție similară este valabilă și pentru șiruri, anume:

TEOREMA (lui Bolzano-Weierstrass pentru șiruri). *Orice șir de puncte din intervalul $[a,b]$ are cel puțin o valoare de aderență.*

Demonstrația repetă pe cea din 3.45 ținînd cont de faptul că punctele unui șir se pot repeta.

3.47. Pe dreapta numerică $\mathbb{R}$ există mulțimi infinite fără puncte de acumulare (de exemplu 1,2,3, ...). Dar pe dreapta încheiată $\overline{\mathbb{R}}$ cu metrica 3.35 e, orice mulțime infinită are cel puțin un punct de acumulare; aceasta rezultă din faptul că $\overline{\mathbb{R}}$ este izometric cu intervalul $[-1,1]$ avînd metrica uzuală (3.35 g), iar proprietatea unui punct de a fi punct de acumulare este conservată printr-o aplicație izometrică (și chiar printr-un homeomorfism, așa cum am văzut în 3.43).

3.48. Propoziția următoare furnizează o condiție suficientă de absență a valorilor de aderență:

Un șir $x_1, x_2, \ldots$ pentru care toate distanțele $\rho(x_m, x_n)$ sînt minorate de o constantă pozitivă C, adică $\rho(x_m, x_n) \geqslant C$ pentru orice m, n, nu admite nici o valoare de aderență.

Într-adevăr, dacă y ar fi o valoare de aderență a șirului x_n, atunci ar exista în acest șir puncte x_m și x_n, $m \neq n$, astfel încît $\rho(y, x_m) < \frac{C}{2}$, $\rho(y, x_n) < \frac{C}{2}$, de unde

$$\rho(x_m, x_n) \leqslant \rho(x_m, y) + \rho(y, x_n) < C,$$

ceea ce contravine ipotezei.

§ 3.5. Mulțimi închise

3.51. DEFINIȚIE. O mulțime $F \subset M$ se numește *închisă* dacă ea își conține toate punctele de acumulare.

Exemple. **a.** Un interval $a \leqslant x \leqslant b$ este mulțime închisă pe dreapta numerică iar intervalul $a \leqslant x < b$ nu este mulțime închisă deoarece nu conține punctul b care este punct de acumulare.

b. În orice spațiu metric orice sferă (plină) $U = \{x \mid \rho(x, x_0) \leqslant r\}$ este o mulțime închisă (de altfel, aceasta este rațiunea pentru care este numită sfera închisă).

Într-adevăr, fie x_1 un punct oarecare care nu aparține sferei U și $\rho(x_0, x_1) = r_1 > r$. Sfera de centru x_1 și rază $\frac{1}{2}(r_1 - r)$ nu conține nici un punct al sferei U; dacă ar

conține unul z, atunci am avea

$$\rho(x_0, x_1) \leqslant \rho(x_0, z) + \rho(x_1, z) < r + \frac{1}{2}(r_1 - r) =$$

$$= \frac{1}{2}(r_1 + r) < r_1,$$

în contradicție cu egalitatea $\rho(x_0, x_1) = r_1$. Deci punctul x_1 nu poate fi punct de acumulare al mulțimii U.

3.52. Mulțimile închise dintr-un spațiu metric M sînt strîns legate de mulțimile deschise din acest spațiu. Anume, are loc teorema următoare:

TEOREMĂ. *Într-un spațiu metric M, complementara U a unei mulțimi închise F este deschisă. Complementara E a unei mulțimi deschise U este închisă.*

Demonstrație. Fie F o mulțime închisă și U complementara ei; arătăm că U este deschisă. Considerăm un punct oarecare $x_0 \in U$ și trebuie să arătăm că există o sferă definită prin inegalitatea $\rho(x, x_0) < r$, inclusă în mulțimea U.

Raționăm prin reducere la absurd. Presupunem că orice sferă centrată în x_0 ar conține puncte din F. Atunci conform definiției unui punct de acumulare, punctul x_0 este punct de acumulare al mulțimii F. Deoarece F este închisă, avem $x_0 \in F$, ceea ce contrazice ipoteza că $x_0 \in U$. Așadar, U este o mulțime deschisă.

Trecem la a doua parte a teoremei. Fie U o mulțime deschisă și F complementara ei; arătăm că F este închisă. Orice punct x_0 din U este conținut în U împreună cu o sferă centrată în x_0 și ca atare el nu poate fi punct de acumulare al lui F. Așadar, punctele de acumulare ale mulțimii F nu pot fi conținute decît în mulțimea F însăși, deci F este închisă. Teorema este astfel demonstrată.

3.52. a. Reamintindu-ne 3.23, obținem o descriere generală a mulțimilor închise pe dreapta $-\infty < x < \infty$: *orice mulțime închisă a dreptei se obține eliminînd de pe dreaptă o familie finită sau numărabilă de intervale deschise disjuncte două cîte două.* Intervalele eliminate care sînt componentele complementarei unei mulțimi închise sînt numite *intervalele contigui* ale acelei mulțimi închise.

b. O mulțime A majorată (resp. minorată) în $\mathbb{R}$, care este și închisă, își conține totdeauna marginea superioară (resp. inferioară); altminteri această margine ar fi un punct de acumulare al lui A (3.44b), deci mulțimea ar fi neînchisă.

3.54. Folosind proprietățile binecunoscute ale mulțimilor deschise într-un spațiu metric (3.22) și relația între mulțimile deschise și închise stabilită anterior, rezultă că reuniunea unui număr finit de mulțimi închise ca și intersecția unei familii oarecare de mulțimi închise sînt de asemenea mulțimi închise.

Într-adevăr, fie F_ν mulțimi închise, ν parcurgînd o mulțime de indici și U_ν mulțimile deschise complementare corespunzătoare. Conform formulei 2.12, avem

$$\mathbf{C} \bigcap_\nu F_\nu = \bigcup_\nu \mathbf{C} F_\nu = \bigcup_\nu U_\nu.$$

Mulțimea $\bigcup_\nu U_\nu$ este deschisă deci complementara ei $\bigcap_\nu F_\nu$ este închisă. Dacă ν parcurge o mulțime finită de indici, atunci $\bigcap_\nu U_\nu$ este deschisă conform 3.22; aplicînd 2.12 avem

$$\mathbf{C} \bigcup_\nu F_\nu = \bigcap_\nu \mathbf{C} F_\nu = \bigcap_\nu U_\nu;$$

în consecință, mulțimea $\bigcup_\nu F_\nu$ rezultă închisă.

§ 3.6. Mulțimi peste tot dense; închiderea unei mulțimi

3.61. *Mulțimi peste tot dense.* O mulțime A într-un spațiu metric M se numește *peste tot densă în raport cu o mulțime* $B \subset M$ dacă orice punct $x \in B$ aparține lui A sau este un punct de acumulare pentru A. Cu alte cuvinte, A este peste tot densă în raport cu B dacă orice sferă centrată într-un punct $x \in B$ conține un punct $y \in A$.

Dacă în plus $A \subset B$, atunci se spune că A este *peste tot densă în* B. Astfel, mulțimea punctelor rționale este peste tot densă pe dreapta numerică $-\infty < x < \infty$, iar mulțimea punctelor $(r_1, \ldots, r_n)$ de coordonate raționale este peste tot densă în spațiul euclidian n-dimensional.

3.62. Proprietatea de a fi „peste tot densă" este tranzitivă în sensul următor: dacă o mulțimea A este peste tot densă în raport cu o mulțime B și dacă B este la rîndul ei peste tot densă în raport cu C, atunci A este peste tot densă în raport cu C. Într-adevăr, pentru orice $\varepsilon > 0$ fixat și pentru orice $z \in C$ există un punct $y \in B$ astfel încît $\rho(y, z) < \frac{\varepsilon}{2}$; apoi se poate găsi $x \in A$ astfel încît $\rho(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$; așadar, pentru orice $\varepsilon > 0$ se poate găsi, pornind de la un punct dat $z \in C$, un punct $x \in A$ astfel încît $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z) < \varepsilon$. Astfel, mulțimea A este peste tot densă în raport cu C.

3.63. *Închidere.* Fie A o mulțime într-un spațiu metric M. Mulțimea punctelor din A reunită cu mulțimea punctelor de acumulare ale lui A se numește *închiderea* lui A și se notează cu $\bar{A}$. Dacă A este o mulțime închisă, adică A își conține punctele de acumulare, atunci $\bar{A} = A$. În general, $\bar{A} \supset A$. Dacă $\bar{A} = A$, atunci toate punctele de acumulare ale lui A aparțin lui A și ca atare A este închisă. Așadar, afirmațiile „A este închisă" și „$\bar{A} = A$" sînt echivalente. Dacă $\bar{A} \subset A$, atunci $\bar{A} = A$ (deoarece totdeauna $\bar{A} \supset A$), deci A este închisă.

3.64. Arătăm că închiderea oricărei mulțimi A este o mulțime închisă. Remarcăm mai întîi că orice mulțime este peste tot densă în închiderea ei. În particular, A este peste tot densă în $\bar{A}$ și $\bar{A}$ este peste tot densă în închiderea ei $\bar{\bar{A}}$. Conform tranzitivității demonstrată mai sus, rezultă că A este peste tot densă în $\bar{\bar{A}}$, adică orice punct al mulțimii $\bar{\bar{A}}$ este fie un punct din A, fie un punct de acumulare al lui A. Așadar $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$, deci $\bar{A}$ este închisă.

Astfel, închiderea mulțimii punctelor raționale de pe axa $-\infty < x < +\infty$ coincide cu întreaga axă.

3.65. Arătăm că *închiderea $\bar{A}$ a unei mulțimi mărginite A este o mulțime mărginită* și că diam $\bar{A}$ = diam A.

Din incluziunea $A \subset \bar{A}$ rezultă că diam $A \leqslant$ diam $\bar{A}$. Apoi, fiind date două puncte oarecare $\bar{x}$ și $\bar{y}$ ale mulțimii $\bar{A}$ și un $\varepsilon > 0$, alegem $x \in A$, $y \in A$ astfel încît

$\rho(x, \bar{x}) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\rho(y, \bar{y}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Atunci

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) \leqslant \rho(\bar{x}, x) + \rho(x, y) + \rho(y, \bar{y}) < \frac{\varepsilon}{2} + \operatorname{diam} A + \frac{\varepsilon}{2},$$

de unde

$$\operatorname{diam} \bar{A} = \sup \rho(\bar{x}, \bar{y}) \leqslant \varepsilon + \operatorname{diam} A,$$

și cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar,

$$\operatorname{diam} \bar{A} \leqslant \operatorname{diam} A.$$

Ținînd cont de inegalitatea contrară, rezultă $\operatorname{diam} \bar{A} = \operatorname{diam} A$.

3.66. Fie F o mulțime închisă și $G \supset F$ un domeniu într-un spațiu metric M. Arătăm că există un domeniu $H \supset F$ conținut în domeniul G împreună cu închiderea lui, adică $F \subset G \subset \bar{H} \subset G$.

Pentru aceasta, să notăm cu $\mathrm{d}(x)$ distanța de la un punct $x \in G$ la exteriorul domeniului G, adică

$$\mathrm{d}(x) = \inf_{y \in M \setminus G} \rho(x, y).$$

Pentru orice $x \in G$, avem $\mathrm{d}(x) > 0$ deoarece x aparține lui G o dată cu o vecinătatea lui. Definim mulțimea H ca reuniunea tuturor sferelor deschise de centre $x \in F$ și raze $\frac{1}{2}\mathrm{d}(x)$. Este evident că $F \subset H$; conform 3.22 H este un domeniu. Arătăm că închiderea $\bar{H}$ a mulțimii H este conținută în domeniu G. Presupunem contrariul: există un punct $y \in \bar{H} \cap (M - G)$. Alegem un șir $z_n \in H$, $z_n \to y$ și un șir $x_n \in F$ astfel ca $\rho(x_n, z_n) \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{d}(x_n)$. Avem

$$\mathrm{d}(x_n) \leqslant \rho(x_n, y) \leqslant \rho(x_n, z_n) + \rho(z_n, y) \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{d}(x_n) + \rho(z_n, y).$$

Rezultă

$$\mathrm{d}(x_n) \leqslant 2\rho(z_n, y), \quad \rho(x_n, y) \leqslant 2\rho(z_n, y),$$

deci $y = \lim x_n \in F \subset G$, ceea ce contrazice presupunerea că $y \in M - G$. Deci $\bar{H} \subset G$.

3.67. În particular, dacă F este mărginită (3.12 a), atunci funcția $d(x)$ admite estimarea (x_0 fiind un punct fix al lui F)

$$d(x) = \inf_{y \in M \setminus G} \rho(x, y) \leqslant \inf_{y \in M \setminus G} [\rho(x, x_0) + \rho(x_0, y)] \leqslant \leqslant \operatorname{diam} F + d(x_0). \tag{1}$$

În consecință, mulțimea H construită în 3.66 este mărginită dacă F este mărginită, deoarece definiția lui H și relația (1) arată că

$$\operatorname{diam} H \leqslant \operatorname{diam} F + 2 \sup_{x \in F} d(x) \leqslant 3 \operatorname{diam} F + 2 d(x_0).$$

§ 3.7. Spații complete

3.71.a. Șirul de puncte $x_1, x_2, \ldots$ al unui spațiu metric M se numește *fundamental* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr natural N astfel încît pentru $\nu \geqslant N$ și $\mu \geqslant N$ să fie îndeplinită inegalitatea $\rho(x_\nu, x_\mu) < \varepsilon$. Șirurile fundamentale se mai numesc șiruri Cauchy.

b. Orice șir convergent $x_1, x_2, \ldots \to x$ este fundamental: într-adevăr, conform inegalității triunghiului avem

$$\rho(x_\nu, x_\mu) \leqslant \rho(x_\nu, x) + \rho(x, x_\mu)$$

și deoarece $x_\nu \to x$, membrul drept devine mai mic decît orice $\varepsilon > 0$ dat pentru ν și μ suficient de mari.

c. *Orice șir Cauchy $x_1, x_2, \ldots$ este mărginit.* Pentru demonstrație alegem N astfel încît $\rho(x_\nu, x_\mu) \leqslant 1$ pentru $\nu \geqslant N$, $\mu \geqslant N$. Atunci pentru orice $\nu = 1, 2, \ldots$ avem

$$\rho(x_\nu, x_N) \leqslant \begin{cases} \max\{\rho(x_1, x_N), \ldots, \rho(x_{N-1}, x_N)\} & (\nu \leqslant N), \\ 1 & (\nu \geqslant N), \end{cases}$$

deci distanțele tuturor punctelor x_n, $n \geqslant 1$, la punctul x_N sînt mărginite de o constantă fixată.

d. DEFINIȚIE. Un spațiu metric M se numește *complet* dacă orice șir Cauchy de puncte din M converge către un punct din M.

3.72. *Exemple.*

a. Arătăm că *axa reală înzestrată cu metrica*

$$\rho(x, y) = |x - y|$$

este un spațiu metric complet.

Altfel spus, *un șir de numere reale* $x_1, x_2, \ldots$ *este convergent dacă și numai dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există un număr* N *astfel încît inegalitatea* $|x_n - x_m| < \varepsilon$ *să fie satisfăcută de îndată ce* $n > N$, $m > N$.

Astfel enunțată, teorema a este numită *criteriul lui Cauchy*. Pentru demonstrație procedăm după cum urmează.

Fie $x_1, x_2, \ldots$ un șir Cauchy de numere reale. El este șir mărginit conform 3.71 b; pentru orice $m = 1,2, \ldots$ punem $a_m = \inf_{n \geqslant m} x_n$, $b_m = \sup_{n \geqslant m} x_n$. Este clar că inegalitățile $a_m \leqslant a_{m+1}$, $b_m \geqslant b_{m+1}$ sînt valabile pentru orice m, de unde $[a_m, b_m] \supset [a_{m+1}, b_{m+1}]$.

Conform principiului lui Cantor 1.81 există un punct $p \in \mathbb{R}$ comun tuturor intervalelor $[a_m, b_m]$, $m = 1,2, \ldots$ Arătăm că $p = \lim_{n \to \infty} x_n$. Pentru orice $\varepsilon > 0$ dat căutăm să găsim un număr N astfel încît pentru $n \geqslant N$, $m \geqslant N$ să avem

$$\rho(x_n, x_m) = |x_n - x_m| \leqslant \varepsilon.$$

Fixăm aici $m = N$ și luăm succesiv $n = N + 1, \ldots$ Toate valorile lui x_n fiind diferite de x_N cu cel mult ε (pentru $n > N$), aceeași proprietate o au numerele a_N și b_N. Numărul p aparține intervalului $[a_N, b_N]$, deci pentru orice $n > N$ avem

$$|p - x_n| \leqslant b_N - a_N = (b_N - x_N) + (x_N - a_N) \leqslant 2\varepsilon.$$

Așadar $x_N \to p$, ceea ce trebuia demonstrat.

b. Intervalul $(0, 1)$ este un spațiu metric pentru metrica uzuală a dreptei reale. Șirul $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ este un șir Cauchy în acest spațiu metric dar nu are limită; în consecință intervalul $(0, 1)$ *nu este un spațiu complet.*

Acest exemplu arată printre altele că proprietatea unui spațiu de a fi complet depinde esențial de alegerea metricii și nu poate fi conservată prin trecerea la o metrică homeomorfă; într-adevăr, spațiile metrice $\mathbb{R}$ și $(0, 1)$ sînt homeomorfe (3.35 g) dar unul din ele este complet și celălalt nu.

c. Arătăm că *un spațiu real m-dimensional* $\mathbb{R}^m$ *înzestrat cu metrica* 3.14 (1) *este complet.* Fie $x_n = (\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nm})$ $(n = 1,2, \ldots)$ un șir fundamental (Cauchy) de vectori din $\mathbb{R}_m$. Alegem pentru orice $\varepsilon > 0$ dat, un număr N astfel încît pentru $p > N$, $q > N$ să avem

$$|x_p - x_q| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (\xi_{pk} - \xi_{qk})^2} < \varepsilon.$$

Conform inegalității 2.68 (7) pentru orice k și pentru orice $p, q > N$ avem

$$|\xi_{pk} - \xi_{qk}| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (\xi_{pk} - \xi_{qk})^2} < \varepsilon.$$

Vedem că orice șir de numere reale ξ_{pk} $(k = 1,2, \ldots$ $\ldots, m)$ este un șir Cauchy pe dreapta reală. Aplicînd a stabilim existența limitelor

$$\xi_k = \lim_{p \to \infty} \xi_{pk} \quad (k = 1, \ldots, m).$$

Formăm vectorul $x = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$. Aplicînd din nou 2.68 (7) rezultă

$$|x - x_p| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (\xi_k - \xi_{pk})^2} \leqslant \sqrt{m} \max_k |\xi_k - \xi_{pk}|. \quad (1)$$

Acum alegem, pentru $\varepsilon > 0$ dat arbitrar, un număr natural N astfel încît pentru $p > N$ să fie satisfăcute toate inegalitățile

$$|\xi_k - \xi_{pk}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} \quad (k = 1, \ldots, m).$$

Atunci pentru aceleași valori ale lui p avem de asemenea $|x - x_p| \leqslant \varepsilon$, ceea ce rezultă din (1); rezultă că șirul vectorilor x_n converge către vectorul x. Așadar, spațiul $\mathbb{R}_m$ este complet.

3.73. a. Fie M un spațiu metric complet care este o parte (cu aceeași metrică) a unui spațiu metric P. Să arătăm că M este închisă în P. Fie $y \in P$ un punct de acumulare al mulțimii M și x_n un șir de puncte din M care converge către punctul y. Deoarece x_n este un șir Cauchy (3.71 b) și M este complet, există în M un punct $z = \lim_{n\to\infty} x_n$. În virtutea unicității unei limite (3.33 a), $y = z \in M$, ceea ce trebuia dovedit.

b. Reciproc, dacă se consideră o submulțime închisă A a unui spațiu metric complet M, considerată ca spațiu metric, cu metrica indusă de pe M, atunci A este un spațiu metric complet. Într-adevăr, orice șir Cauchy $y_\nu \in A$ converge în M (deoarece M este complet) și limita sa aparține mulțimii A, aceasta din urmă fiind închisă.

c. În particular, orice interval $[a, b]$ pe dreapta numerică este un spațiu complet, pentru că este o submulțime închisă (3.51 a) a unui spațiu metric complet (3.72 a).

3.74. Pentru dreapta numerică este valabil principiul intervalelor incluse al lui Cantor (1.81): orice sistem de intervale închise incluse are un punct comun. Pentru un spațiu metric complet, se pot semnala diverse propoziții analoage.

a. Fie Q o familie de submulțimi nevide $A, B, \ldots$ ale unei mulțimi M care au proprietatea următoare: Oricare ar fi două submulțimi ale familiei, una este inclusă în alta. O astfel de familie Q se numește *sistem de submulțimi incluse.*

LEMĂ. *Fie Q un sistem de submulțimi incluse $A, B, \ldots$ într-un spațiu metric complet M. Dacă există printre ele submulțimi de diametru* (3.12 a) *oricît de mic, atunci există un punct $p \in M$, astfel ca pentru orice vecinătate $V_r(p) = \{x \mid \rho(x, p) < r\}$ se poate găsi o mulțime $A \in Q$, inclusă în $V_r(p)$.*

Demonstrație. Prin ipoteză, pentru orice $m = 1,2,3,\ldots$ există o mulțime $A = A_m \in Q$ astfel ca $\operatorname{diam} A_m \leqslant \frac{1}{m}$.

Fie x_m un punct oarecare al lui A_m. Deoarece, pentru $n > m$, avem sau $A_n \subset A_m$ sau $A_m \subset A_n$, atunci $\rho(x_n, x_m) \leqslant \frac{1}{m}$, deci şirul $x_1, x_2, \ldots$ este şir Cauchy. Fie $p = \lim_{m \to \infty} x_m$; să arătăm că acest punct p satisface condiţiile lemei. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar; alegem un n astfel încît $\rho(p, x_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ şi diam $A_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Atunci, pentru orice $x \in A_n$, avem

$$\rho(p, x) \leqslant \rho(p, x_n) + \rho(x_n, x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

deci $A_n \subset V_\varepsilon(p)$, ceea ce trebuia demonstrat.

b. *Observaţie.* În ipotezele lemei a, nu poate exista decît un singur punct p ce satisface condiţiile lemei. Într-adevăr, dacă ar exista un alt punct q, astfel încît $\rho(p, q) = 2\varepsilon_1 > 0$, atunci sferele $V_\varepsilon(p)$ şi $V_\varepsilon(q)$ sînt disjuncte; în plus, conform lemei a, există în sistemul Q, mulţimile A şi B astfel ca $A \subset V_\varepsilon(p)$, $B \subset V_\varepsilon(q)$; dar aceasta contrazice faptul că una din mulţimile A sau B este inclusă una în cealaltă.

c. LEMĂ. *Presupunem că în condiţiile lemei din punctul* a, *toate mulţimile sistemului* Q *sînt în plus închise. Atunci punctul* p *satisfăcînd condiţiile lemei aparţine oricărei mulţimi a sistemului* Q.

Demonstraţie. Presupunem că punctul p nu aparţine unei mulţimi B, din sistemul considerat. B fiind închisă, există un $\varepsilon > 0$ astfel încît sfera $V_\varepsilon(p)$ şi mulţimea B să fie disjuncte. Conform lemei a, există o mulţime $A \in Q$ conţinută în întregime în sfera $V_\varepsilon(p)$. Evident, această mulţime A nu are puncte comune cu mulţimea B şi se ajunge la o contradicţie. Lema este demonstrată.

d. Următorul caz particular al lemei din punctul c este des folosit.

LEMA (sferelor închise). *Într-un spaţiu metric complet, un şir de sfere închise incluse*

$$U_\nu = \{y \mid \rho(y, y_\nu) \leqslant r_\nu\}, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

de căror raze r_ν *tind către zero pentru* $\nu \to \infty$ *monoton descrescător, au un punct comun.*

e. *Observație.* Dacă există un șir de intervale închise incluse pe dreapta numerică, ele au totdeauna un punct comun, independent de faptul că lungimile lor tind la zero. Într-un spațiu metric, chiar complet, poate exista un șir de sfere incluse ce nu au nici un punct comun. Să considerăm, de exemplu, spațiul format dintr-un șir numărabil de puncte $x_1, x_2, \ldots$ înzestrat cu distanța definită prin $\rho(x_n, x_{n+p}) = 1 + \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Acest spațiu satisface toate axiomele spațiului metric. El este complet deoarece nu admite nici un șir Cauchy divergent și chiar nici un șir Cauchy compus din puncte distincte. Sfera V_n de rază $1 + \frac{1}{n}$ centrată în x_n conține punctele $x_n, x_{n+1} \ldots$ și nu conține alte puncte. Este evident că $V_1 \supset V_2 \supset \ldots$ și că $\bigcap_1^\infty V_n$ este vidă.

3.75. a. TEOREMĂ (Baire). *Dacă un spațiu metric complet M este reprezentat ca reuniune numărabilă de submulțimi închise ale sale $A_1, A_2, \ldots$, atunci una cel puțin din aceste submulțimi conține o sferă (plină) a spațiului M.*

Demonstrație. Presupunem contrariul, anume că nici una din mulțimile $A_1, A_2, \ldots$ nu conține vreo sferă. Fie x_1 un punct care nu aparține mulțimii A_1; deoarece A_1 este închisă, există o sferă $V_{r_1}(x_1) = \{x \mid \rho(x, x_1) \leqslant r_1\}$, care nu conține nici un punct din A_1. În interiorul sferei $V_{r_1/2}(x_1)$ există un punct x_2 care nu aparține lui A_2; o dată cu x_2 există apoi o sferă $V_{r_2}(x_2)$ care nu este conținută în mulțimea A_2. Se poate admite că $V_{r_1}(x_1) \supset V_{r_2}(x_2)$ și $r_2 < \frac{r_1}{2}$. Continuînd construcția în același mod se obține un șir de sfere $V_{r_1}(x_1) \supset V_{r_2}(x_2) \supset \ldots$ astfel încît sfera $V_{r_n}(x_n)$ nu are puncte comune cu mulțimea $A_n (n = 1, 2, \ldots)$. Punctul x_0 comun tuturor acestor sfere, care există conform lemei 3.74a, nu aparține la nici una din mulțimile $A_1, A_2, \ldots$, ceea ce contrazice condiția $x_0 \in M = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$. Teorema este demonstrată.

b. *Exemplu.* Arătăm că mulțimea X a tuturor numerelor iraționale din intervalul închis $M = [a, b]$ nu poate fi reprezentată ca reuniune numărabilă de submulțimi închise

ale lui M. Într-adevăr, dacă am avea $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ cu $A_n \subset M$ submulțimi închise, atunci M ar fi reprezentat ca reuniune numărabilă de mulțimi închise. Deoarece $M = [a, b]$ este spațiu complet (3.73 c), s-ar contrazice teorema lui Baire.

c. Aplicînd teorema intervalelor închise incluse am demonstrat în 2.41 că mulțimea punctelor intervalului $[0, 1]$ nu este numărabilă. Acum sîntem în măsură să stabilim o propoziție analoagă pentru o clasă mai largă de spații metrice complete.

Dăm în prealabil următoarea definiție: un punct x_0 al unui spațiu metric M se numește *izolat*, dacă există o sferă $\rho(x, x_0) < \delta$ care nu conține alte puncte din M în afara lui x_0. De exemplu, fie M o mulțime de puncte ale axei $-\infty < x < \infty$ cu metrica uzuală; atunci $x_0 \in M$ este un punct izolat, dacă există un interval conținînd punctul x_0 și care nu conține nici un alt punct al mulțimii M.

LEMĂ. *Un spațiu metric complet M, care este mulțime numărabilă, conține cel puțin un punct izolat.*

Demonstrație. Orice punct este o submulțime închisă a unui spațiu metric. Aplicînd teorema lui Baire, vedem că, în cazul considerat, există un punct x_0 al spațiului M care conține o sferă $V_r(x_0)$; acest lucru nu este posibil decît dacă punctul x_0 este izolat. Rezultă de aici că:

d. *Orice spațiu metric complet M fără puncte izolate nu este numărabil.*

Observație. Această afirmație nu mai este valabilă dacă renunțăm la ipoteza că în spațiul M nu există puncte izolate. Astfel, orice mulțime închisă numărabilă a dreptei, considerată ca un spațiu metric, poate servi ca exemplu (de exemplu, un șir convergent considerat împreună cu limita sa).

§ 3.8. Completare

3.81. Teoremele demonstrate în 3.73 — 3.75 se bazează în mod esențial pe faptul că spațiul metric M este complet. În cele ce urmează, completitudinea spațiului metric va juca un rol important. Pe de altă parte, în ceea ce privește spațiile care nu sînt complete, orice astfel de spațiu poate fi inclus într-un spațiu complet.

TEOREMĂ (F. Hausdorff). *Fie M un spațiu metric. Există un spațiu metric complet $\bar{M}$ (numit completatul spațiului M) care are proprietățile următoare:*

1) M este izometric cu o parte $M_1 \subset \bar{M}$;

2) M_1 este densă în $\bar{M}$.

Orice două spații $\bar{M}$, $\bar{\bar{M}}$, verificînd condițiile 1) și 2) sînt izometrice unul cu altul.

Demonstrația este dată în 3.82—3.87.

3.82. Două șiruri Cauchy $\{y_\nu\}$ și $\{z_\nu\}$ din spațiul M sînt numite *cofinale* dacă $\lim_{\nu\to\infty} \rho(y_\nu, z_\nu) = 0$. De exemplu, orice două șiruri din spațiul M care converg către aceeași limită sînt cofinale și șirurile convergente spre limite distincte nu sînt. Două șiruri Cauchy cofinale fiecare cu un al treilea sînt cofinale între ele. Datorită acestui fapt, toate șirurile Cauchy care se pot forma cu elemente ale spațiului M pot fi împărțite în clase, în sensul că toate șirurile unei clase sînt cofinale între ele, în timp ce orice șir care nu aparține unei clase nu este cofinal cu nici un șir al acestei clase. Cu aceste clase (pe care le vom nota cu $Y, Z, \ldots$) vom construi un nou spațiu $\bar{M}$. Vom defini distanța între două clase Y și Z prin formula

$$\rho(Y, Z) = \lim_{\nu\to\infty} \rho(y_\nu, z_\nu) \qquad (1)$$

unde $\{y_\nu\}$ este un șir Cauchy oarecare din clasa Y, iar $\{z_\nu\}$ un șir Cauchy oarecare al clasei Z. Înainte de orice, trebuie să verificăm că limita respectivă există și nu depinde de alegerea șirurilor $\{y_\nu\}$ și $\{z_\nu\}$ din clasele Y și Z respectiv. Din inegalitatea patrulaterului 3.11(1) rezultă că

$$|\rho(y_\nu, z_\nu) - \rho(y_{\nu+\mu}, z_{\nu+\mu})| \leqslant \rho(y_\nu, y_{\nu+\mu}) + \rho(z_\nu, z_{\nu+\mu}),$$

de unde rezultă că numerele reale $\rho(y_\nu, z_\nu)$ formează un șir verificînd criteriul lui Cauchy. Deci $\lim_{\nu\to\infty} \rho(y_\nu, z_\nu)$ există.

Dacă $\{y'_\nu\}$ și $\{z'_\nu\}$ sînt alte două șiruri Cauchy din clasele Y și Z respectiv, atunci aplicînd tot inegalitatea patrulaterului, găsim

$$|\rho(y_\nu, z_\nu) - \rho(y'_\nu, z'_\nu)| \leqslant \rho(y_\nu, y'_\nu) + \rho(z_\nu, z'_\nu) \to 0,$$

ceea ce înseamnă că şirul $\rho(y'_\nu, z'_\nu)$ are aceeaşi limită cu şirul $\rho(y_\nu, z_\nu)$. Astfel, definiţia distanţei între două clase nu depinde de alegerea şirurilor Cauchy din aceste clase.

3.83. Trebuie să probăm că mărimea

$$\rho(Y, Z) = \lim_{\nu\to\infty} (y_\nu, z_\nu)$$

satisface axiomele spaţiului metric (3.11 a — c).

Axioma 3.11 a : $\rho(Y, Z) > 0$ pentru $Y \neq Z$, $\rho(Y, Y) = 0$ este verificată în felul următor. Înainte de toate, avem $\rho(Y, Y) = 0$ prin construcţia funcţiei ρ, deoarece în formula 3.82(1) putem pune $y_\nu = z_\nu$. Apoi presupunem că $\rho(Y, Z) = 0$. Aceasta înseamnă că pentru orice şir Cauchy $\{y_\nu\}$ din clasa Y şi pentru orice şir Cauchy $\{z_\nu\}$ din clasa Z, are loc egalitatea $\lim_{\nu\to\infty} \rho(y_\nu, z_\nu) = 0$. Dar această egalitate având loc, $\{y_\nu\}$ şi $\{z_\nu\}$ sînt şiruri cofinale, şi clasele Y şi Z trebuie să coincidă. Deci, dacă $\rho(Y, Z) = 0$, atunci $Y = Z$; rezultă de aici că, pentru $Y \neq Z$, $\rho(Y, Z) > 0$, ceea ce trebuia să demonstrăm.

Axioma 3.11 b : $\rho(Y, Z) = \rho(Z, Y)$ este satisfăcută prin construcţie.

Verificăm axioma 3.11 c : $\rho(Y, U) \leqslant \rho(Y, Z) + \rho(Z, U)$. Fie $\{y_\nu\}$, $\{z_\nu\}$, $\{u_\nu\}$ şiruri Cauchy fixate din clasele Y, Z, U respectiv. Inegalitatea căutată se obţine trecînd la limită (3.32 c — d) în inegalitatea

$$\rho(y_\nu, u_\nu) \leqslant \rho(y_\nu, z_\nu) + \rho(z_\nu, u_\nu).$$

Rămîne să verificăm acum, pentru spaţiul $\overline{M}$, toate concluziile teoremei 3.81.

3.84. Arătăm că $\overline{M}$ conţine o submulţime M_1 izometrică cu spaţiul M. Fiecărui element $y \in M$ îi facem să corespundă clasa $Y \subset \overline{M}$ care conţine şirul constant $y, y, y, \ldots$ (adică clasa tuturor şirurilor convergente către y). Dacă prin această lege de corespondenţă, lui y îi corespunde clasa Y şi lui z clasa Z, atunci

$$\rho(Y, Z) = \lim_{\nu\to\infty} \rho(y, z) = \rho(y, z).$$

Rezultă că mulţimea M_1 a claselor care corespund punctelor lui M este o parte a spaţiului $\overline{M}$, izometrică cu spaţiul M.

3.85. Arătăm că mulțimea M_1 este densă în $\bar{M}$. Fie Y o clasă oarecare din $\bar{M}$ și $\{y_\nu\}$ un șir Cauchy din clasa Y. Considerăm șirul de clase $Y_1, Y_2, \ldots, Y_\mu, \ldots$, unde Y_μ este determinată de șirul $y_\mu, y_\mu, \ldots$, adică ea corespunde elementului y_μ după legea de corespondență $M \to M_1$ definită anterior. Pentru orice $\varepsilon > 0$ fixat există un număr μ_0 astfel încît $\rho(y_{\mu+p}, y_\mu) \leqslant \varepsilon$ pentru $\mu > \mu_0$. Atunci

$$\rho(Y, Y_\mu) = \lim_{\nu \to \infty} (y_\nu, y_\mu) \leqslant \varepsilon,$$

ceea ce arată că Y este limita claselor Y_μ. Orice clasă Y_μ aparține mulțimii M_1 prin construcție și astfel am demonstrat că M_1 este o parte densă a lui $\bar{M}$.

3.86. Vom arăta că $\bar{M}$ este un spațiu complet. Fie $Y_1, Y_2, \ldots$ un șir Cauchy de elemente din $\bar{M}$. Pentru fiecare clasă Y_ν, găsim o clasă $Z_\nu \subset M_1$ astfel încît $\rho(Y_\nu, Z_\nu) < \frac{1}{\nu}$ și fie $z_\nu \in M$ un element reprezentant al clasei Z_ν. Vom demonstra că șirul $\{z_\nu\}$ este Cuachy în spațiul M. Într-adevăr,

$$\rho(z_\nu, z_\mu) = \rho(Z_\nu, Z_\mu) \leqslant \rho(Z_\nu, Y_\nu) + \rho(Y_\nu, Y_\mu) + \rho(Y_\mu, Z_\mu) \leqslant$$

$$\leqslant \rho(Y_\nu, Y_\mu) + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\mu} \to 0 \text{ pentru } \nu \to \infty, \mu \to \infty.$$

Șirul Cauchy $\{z_\nu\}$ definește o clasă $Z \subset \bar{M}$; vom arăta că Z este limita în $\bar{M}$ a șirului Y_ν. Pentru orice $\varepsilon > 0$ dat, există ν_0 astfel încît pentru orice $\nu \geqslant \nu_0$ avem:

$$\rho(Z, Y_\nu) \leqslant \rho(Z, Z_\nu) + \rho(Z_\nu, Y_\nu) = \lim_{\mu \to \infty} \rho(z_\mu, z_\nu) + \frac{1}{\nu} < \varepsilon.$$

Deci orice șir Cauchy $Y_\nu \subset \bar{M}$ are o limită în $\bar{M}$, ceea ce trebuia demonstrat.

3.87. Vom arăta că orice spațiu metric $\bar{\bar{M}}$ ce are proprietățile 1) și 2) este izometric cu spațiul $\bar{M}$. Într-adevăr, fie M_1 și M_2 submulțimi ale spațiilor $\bar{M}$ și $\bar{\bar{M}}$, izometrice cu spațiul M și, în consecință, unul cu altul. Vom prelungi această izometrie de la mulțimile M_1 și M_2 la spațiile $\bar{M}$ și $\bar{\bar{M}}$. Fie $Y \subset \bar{M}$ un element oarecare și $Y_\nu \subset M_1$ un șir de

elemente, convergent către Y. Şirul corespunzător $Z_\nu \subset M_2$ este şir Cauchy, deoarece M_1 fiind izometric cu M_2 distanţele între elementele şirului Z_ν sînt egale cu cele între elementele corespunzătoare ale şirului Y_ν. $\bar{\bar{M}}$ fiind complet, există în $\bar{\bar{M}}$ un element $Z = \lim_{\nu\to\infty} Z_\nu$ care îl facem să corespundă elementului ales mai înainte $Y \subset \bar{M}$. El este definit într-un mod univoc, deoarece şirurile cofinale în $\bar{M}$ corespund şirurilor cofinale în $\bar{\bar{M}}$ şi înlocuind şirul Y_ν printr-un şir cofinal, se înlocuieşte şirul Z_ν printr-un şir cofinal. Corespondenţa construită este biunivocă şi epuizează toate elementele lui $\bar{\bar{M}}$ şi $\bar{M}$. Rămîne să demonstrăm că ea este o izometrie. Presupunem că două elemente Y şi Y' ale spaţiului $\bar{M}$ corespund elementelor Z şi Z', respectiv, ale spaţiului $\bar{\bar{M}}$ şi că

$$Y = \lim Y_\nu,\ Y'_\nu = \lim Y'_\nu \quad (Y_\nu, Y'_\nu \text{ din } M_1).$$

Dacă, în plus, Z_ν şi Z'_ν sînt două elemente ale lui M_2 corespunzînd elementelor Y_ν şi Y'_ν, respectiv, atunci $\rho(Z_\nu, Z'_\nu) = \rho(Y_\nu, Y'_\nu)$ şi conform lemei continuităţii distanţei 3.32 b avem

$$\rho(Z, Z') = \lim_{\nu\to\infty} \rho(Z_\nu, Z'_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} \rho(Y_\nu, Y'_\nu) = \rho(Y, Y').$$

ceea ce trebuia. Astfel teorema 3.81 este complet demonstrată.

3.88. Presupunem că un spaţiu metric dat M este o parte a unui alt spaţiu metric complet M^*. Atunci se poate alege pentru completatul lui M, închiderea $\bar{M}$ a mulţimii M în spaţiul M^*. Într-adevăr, $\bar{M}$ este un spaţiu complet, deoarece el este o submulţime închisă a unui spaţiu complet M^* (3.73 b); în plus, M este o submulţime densă în $\bar{M}$. $\bar{M}$ verifică deci ipoteza teoremei demonstrate şi poate fi luat ca un completat al spaţiului M.

§ 3.9. Compacitate

3.91. a. DEFINIŢIE. Un spaţiu metric M în care orice şir (infinit) de puncte are o valoare de aderenţă este numit *spaţiu compact* (sau un *compact*). Un spaţiu metric M în

care pentru orice punct $a \in M$ există o sferă compactă $\{x \in M \mid \rho(a, x) \leqslant \varepsilon\}$ este numit spațiu *local compact*.

Dacă un spațiu metric M este compact, atunci orice submulțime infinită $E \subset M$ are un punct de acumulare. Într-adevăr, se poate extrage dintr-o submulțime infinită în E, un șir infinit $x_1, x_2, \ldots$ de puncte distincte a cărui valoare de aderență este un punct de acumulare al mulțimii E. Reciproc, presupunem că orice submulțime infinită a spațiului metric M are un punct de acumulare; să arătăm că M este compact. Fie $x_1, x_2, \ldots$ un șir de puncte din M (nu neapărat distincte). Dacă acest șir nu conține decît un număr finit de puncte distincte ale spațiului M, atunci cel puțin unul se repetă de un număr infinit de ori și este deci o valoare de aderență a șirului $x_1, x_2, \ldots$. Dacă șirul conține o infinitate de puncte distincte ale lui M, atunci punctul de acumulare al acestei mulțimi infinite este o valoare de aderență a întregului șir. Astfel, definiția spațiului compact dată mai înainte este echivalentă cu definiția următoare: *un spațiu metric este compact dacă orice submulțime infinită a sa conține un punct de acumulare.*

b. *Exemple.* Orice interval $a \leqslant x \leqslant b$ al dreptei numerice este un compact (3.45). Dreapta reală $\mathbb{R}$ nu este un spațiu compact, deoarece șirul $1, 2, \ldots, n, \ldots$, de exemplu, nu are valoare de aderență în $\mathbb{R}$. Totuși $\mathbb{R}$ este un spațiu local compact. Dreapta numerică încheiată $\overline{\mathbb{R}}$ înzestrată cu metrica $r(x, y)$ (3.35 e) este un compact. Mulțimea punctelor raționale ale unui interval $[a, b]$ dotat cu metrica de pe dreapta numerică, nu este compactă și nici local compactă.

c. Am remarcat în 3.43 că proprietatea unui punct dat de a fi valoare de aderență a unui șir x_n se păstrează prin trecere la o nouă metrică homeomorfă cu metrica inițială. Deoarece definițiile unui spațiu compact și ale unui spațiu local compact nu se bazează decît pe noțiunea de valoare de aderență, deducem că proprietățile unui spațiu de a fi compact sau local compact se păstrează dacă se trecere la o nouă metrică homeomorfă cu metrica inițială. Astfel, axa reală $\mathbb{R}$ este un spațiu local compact în raport cu metrica uzuală $\rho(x, y) = |x - y|$ și în raport cu metrica $r(x, y)$ (3.35 e).

3.92.a. TEOREMĂ. *Orice spațiu compact este complet.*

Demonstrație. Fie $x_1, x_2, \ldots$ un șir Cauchy de puncte ale unui spațiu compact M și x_0 o valoare de aderență a

acestui şir. Să arătăm că $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$. Pentru orice $\varepsilon > 0$ dat, găsim întîi un număr N astfel încît $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ pentru orice $m > N$, $n > N$; apoi găsim un număr $p > N$ astfel încît $\rho(x_p, x_0) < \varepsilon/2$. Atunci, pentru orice $n > N$,

$$\rho(x_n, x_0) \leqslant \rho(x_n, x_p) + \rho(x_p, x_0) < \varepsilon,$$

de unde afirmaţia.

b. TEOREMĂ. *O submulţime compactă M a unui spaţiu metric P este închisă în P.*

Aceasta rezultă din a şi din 3.73 a.

c. Fie M o submulţime compactă a unui spaţiu metric P şi fie $G \subset P$ o mulţime deschisă ce conţine M. Construim mulţimea deschisă M_δ care este reuniunea tuturor sferelor deschise de rază δ, centrate în punctele mulţimii M. Să verificăm că *există un $\delta > 0$ pentru care $M_\delta \subset G$.*

Raţionăm prin reducere la absurd şi găsim, pentru orice $n = 1, 2, \ldots$, două puncte $x_n \in M$, $y_n \in P - G$ pentru care $\rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$. Şirul x_n este situat în compactul M, deci se poate extrage din el un subşir convergent; renumerotînd din nou termenii şi eliminînd punctele care nu aparţin subşirului, putem spune că $x_n \to x \in M$. Deoarece

$$\rho(y_n, x) \leqslant \rho(y_n, x_n) + \rho(x_n, x) \leqslant \frac{1}{n} + \rho(x_n, x),$$

atunci $y_n \to x$. Dar mulţimea $P - G$ este închisă, deci $x \in P - G$. Contradicţie.

3.93 a. O extindere a clasei spaţiilor compacte o constituie clasa spaţiilor precompacte. Un spaţiu metric M se numeşte *precompact* dacă orice şir de puncte ale sale conţine un subşir Cauchy. Dacă, în plus, M este complet, acest şir Cauchy este convergent şi spaţiul M este compact. Astfel, un spaţiu precompact complet este compact. Reciproc, un spaţiu compact este complet (3.92 a) şi, evident, precompact. Un interval (a, b) al dreptei numerice reprezintă un exemplu simplu de spaţiu precompact care nu este compact.

b. TEOREMĂ. *Orice spaţiu precompact este mărginit.*

Demonstraţie. Vom demonstra că un spaţiu care nu este mărginit, nu este precompact. Într-un spaţiu nemărginit M, distanţele de la un punct oarecare a fixat la alte puncte $x \in M$ nu sînt majorate de o constantă (3.12 c).

Aplicînd această proprietate, să fixăm în mod arbitrar un punct $x_1 \in M$ și să construim apoi prin recurență un șir de puncte $x_2, x_3, \ldots$ astfel încît să satisfacă inegalitățile:

$$\rho(x_{n+1}, x_1) > \sum_{k=1}^{n-1} \rho(x_{k+1}, x_k) + 1 \quad (n = 1,2, \ldots).$$

Atunci conform 3.11 d, pentru $n > m$,

$$\rho(x_n, x_m) \geqslant \rho(x_n, x_{n-1}) - [\rho(x_{n-1}, x_{n-2}) + \ldots + \rho(x_{m+1}, x_m)] \geqslant$$

$$\geqslant \rho(x_n, x_{n-1}) - \sum_{k=1}^{n-2} \rho(x_{k+1}, x_k) > 1,$$

astfel încît este imposibil să extragem din șirul x_n un subșir Cauchy. Spațiul M nu este deci precompact, ceea ce trebuia demonstrat.

c. *Criteriul lui Hausdorff.* Pentru a vedea dacă un spațiu metric M este precompact, este uneori util să îl includem izometric într-un spațiu metric mai bogat P. Presupunînd izometrică incluziunea $M \subset P$, să numim o mulțime $B \subset P$, *ε-rețea* a mulțimii $M \subset P$, dacă distanța oricărui punct x al mulțimii M la un punct $y \in B$ nu depășește ε, adică oricare ar fi $x \in M$, există $y \in B$ astfel încît $\rho(x, y) \leqslant \varepsilon$. Deci reuniunea tuturor sferelor de rază ε centrate în punctele mulțimii B conține toată mulțimea M.

În general, dacă reuniunea unor mulțimi U_α conține o mulțime M, se spune că mulțimile U_α acoperă mulțimea M sau că formează o acoperire a mulțimii M. Se poate deci spune că o mulțime B este o ε-rețea pentru o mulțime M dacă mulțimea tuturor sferelor de rază ε centrate în punctele mulțimii B acoperă mulțimea M. [„Dacă în orice punct al mulțimii B, care este ε-rețea pentru mulțimea M, se aprinde o lampă luminînd la distanță ε, atunci întreaga mulțime M va fi luminată" — (*Din lecțiile lui L. A. Lusternic*)].

TEOREMĂ (F. Hausdorff). *O mulțime M conținută într-un spațiu metric P este precompactă (pentru metrica lui P) dacă și numai dacă există în P, pentru orice $\varepsilon > 0$, o ε-rețea finită pentru M.*

Demonstrație. Fie M o mulțime precompactă și un $\varepsilon > 0$. Arătăm că există o ε-rețea finită pentru M. Considerăm un punct oarecare $x_1 \in M$. Dacă orice alt punct al mulțimii M este situat la o distanță $\leqslant \varepsilon$ de punctul x_1, atunci punctul x_1 reprezintă el însuși o ε-rețea pentru M și construcția este terminată. Dacă M are puncte distanțate de x_1 cu mai mult de ε, alegem dintre ele un punct x_2. Dacă acum orice punct al mulțimii M este distanțat cu mai puțin de ε de punctul x_1, sau de punctul x_2, atunci x_1 și x_2 luate împreună formează o ε-rețea finită pentru M și construcția este terminată; dacă nu, se continuă procedeul în aceeași manieră. Prin construcție, distanța lui x_n la fiecare din punctele precedente $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ este superioară lui ε. Pentru această rațiune, dacă este posibil să continuăm indefinit construcția, ajungem la o submulțime infinită $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ a mulțimii M care nu conține nici un șir Cauchy, ceea ce contrazice precompacitatea lui M. M fiind precompactă, construcția anterioară este terminată după un număr finit de pași și conduce la o ε-rețea finită pentru mulțimea M.

Reciproc, să presupunem că există în spațiul P, pentru orice $\varepsilon > 0$, o ε-rețea finită pentru mulțimea M; să arătăm că M este precompactă. Fie $A \subset M$ o submulțime infinită oarecare; trebuie să găsim în A un șir Cauchy. Pentru primul punct al acestui șir alegem un punct oarecare $x_0 \in A$. Aplicînd ipoteza teoremei pentru $\varepsilon = 1$ putem acoperi mulțimea A printr-un număr finit de sfere de rază 1 dintre care una (să o notăm cu U_1) conține o submulțime infinită $A_1 \subset A$. Alegem în A_1 un punct oarecare $x_1 \neq x_0$. Aplicînd ipoteza teoremei, cu $\varepsilon = \frac{1}{2}$, putem acoperi mulțimea A_1 cu un număr finit de sfere de rază $\frac{1}{2}$ dintre care cel puțin una, notată U_2, conține o submulțime infinită $A_2 \subset A_1$. Alegem un punct oarecare $x_2 \in A_2$ diferit de x_0 și de x_1. Continuînd, construim un șir de mulțimi infinite $A \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_\nu \supset \ldots$ $\left(\text{orice mulțime } A_\nu \text{ este conținută în sfera } U_\nu \text{ de rază } \frac{1}{\nu}\right)$ și de asemenea un șir de puncte distincte $x_0, x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_\nu, \ldots$, unde $x_\nu \in A_\nu$. Șirul $x_0, x_1, x_2, \ldots$ este șir

Cauchy. Într-adevăr, pentru $\mu < \nu$, avem $U_\mu \supset A_\mu \supset A_\nu$, deci $\rho(x_\mu, x_\nu) < \frac{2}{\mu}$. Această mărime tinde la zero pentru $\mu \to \infty$; în consecință, șirul $x_0, x_1, \ldots$ este Cauchy, ceea ce trebuia demonstrat.

3.94. Aplicăm acest criteriu pentru a demonstra că orice mulțime mărginită M într-un spațiu euclidian n-dimensional $P = \mathbb{R}_n$ este precompactă. Într-adevăr, pentru orice m, o sferă din spațiul P care conține mulțimea mărginită M (3.14 b) nu are decît un număr finit de puncte ale căror coordonate sînt de forma $\frac{k}{2^m}$ cu k întreg și mulțimea tuturor punctelor de acest tip este, evident, o ε-rețea pentru M dacă m este ales suficient de mare.

3.95. Să formulăm acum un criteriu simplu, suficient, de precompacitate: *o mulțime M este precompactă într-un spațiu metric P dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, se poate găsi în P o mulțime precompactă B_ε (eventual infinită) care este o ε-rețea pentru M.*

Demonstrația acestei propoziții este ușoară. Anume, pentru orice ε dat, o $\frac{\varepsilon}{2}$-rețea finită Z pentru mulțimea $B_{\varepsilon/2}$, care există, în virtutea precompacității lui $B_{\varepsilon/2}$, este ε-rețea pentru mulțimea M. Într-adevăr, pentru orice punct $x \in M$, există prin ipoteză un punct $y \in B_{\varepsilon/2}$ astfel încît $\rho(x, y) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ și un punct $z \in Z$ astfel încît $\rho(y, z) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$; atunci $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z) \leqslant \varepsilon$. Deci pentru orice $\varepsilon > 0$ mulțimea M are o ε-rețea finită și în consecință este precompactă.

3.96.a. Completatul $\overline{M}$ al oricărei mulțimi precompacte M este compact. Într-adevăr, deoarece mulțimea M este densă în $\overline{M}$, ea este o ε-rețea pentru $\overline{M}$, pentru orice $\varepsilon > 0$. Prin ipoteză, M este precompactă; rezultă de aici, conform 3.95, că $\overline{M}$ este la fel; dar $\overline{M}$ este complet, deci este un compact, ceea ce trebuia arătat.

b. Închiderea $\overline{M}$ a oricărei submulțimi precompacte M a unui spațiu metric complet P este compactă. Aceasta

rezultă din punctul a şi din observaţia 3.88 conform căreia se poate alege pentru completatul lui M închiderea sa în P.

c. O submulţime precompactă M a unui spaţiu metric complet P este un compact, dacă şi numai dacă ea este închisă în P.

Într-adevăr, dacă submulţimea M este închisă în spaţiul metric complet P, M însuşi este un spaţiu metric complet (3.73 b). Dacă, în plus, M este precompactă, atunci conform 3.93 a ea este compactă. Reciproca rezultă din 3.92 b.

d. Prin conjuncţia afirmaţiilor 3.93 c şi 3.96 c, se obţine următorul rezultat.

TEOREMĂ. *O mulţime M într-un spaţiu metric complet P este compactă, dacă şi numai dacă ea este închisă în P şi dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există în P o ε-reţea finită pentru M.*

e. O mulţime M în spaţiul $\mathbb{R}_n$ este compactă dacă şi numai dacă M este închisă şi mărginită în $\mathbb{R}_n$. Într-adevăr, dacă M este compactă, atunci mulţimea M este închisă (3.92 b) şi mărginită (3.93 b); dacă mulţimea M este mărginită în $\mathbb{R}_n$, ea este precompactă (3.94) deci compactă (3.96 c), dat fiind că $\mathbb{R}_n$ este complet (3.72 c). În particular, o sferă închisă $\{x \mid |x - x_0| \leqslant r\}$ este o mulţime închisă (3.51 b) şi mărginită, deci orice sferă închisă în spaţiul $\mathbb{R}_n$ este compactă.

f. *Orice mulţime compactă M a dreptei numerice este mărginită şi îşi conţine marginile sale inferioară şi superioară.*

Într-adevăr, mulţimea M este mărginită şi închisă ($é$); rămâne de aplicat 3.53 b.

3.97. Propoziţia următoare privind compactele este des aplicată.

LEMĂ (asupra acoperirilor finite). *Dacă o familie $B = \{B_\alpha\}$ de submulţimi deschise ale unui spaţiu metric P este o acoperire a unei submulţimi compacte $K \subset P$, atunci există o subfamilie finită $B_1, \ldots, B_m$ a lui B, care acoperă K.*

Demonstraţie. Presupunem contrariul, anume că nici o subfamilie finită a familiei B nu acoperă K.

Deoarece K este un compact, există, pentru orice $\varepsilon > 0$, conform 3.93 c, un număr finit de sfere (închise) $U_1, \ldots, U_{m_\varepsilon}$ de rază ε care acoperă K. Dacă ar exista,

pentru fiecare din sferele U_j $(j = 1. \ldots, m_1)$, o subfamilie finită B_j a familiei B, ce acoperă o sferă U_j, atunci reunind aceste subfamilii, vom căpăta o subfamilie finită a lui B, ce acoperă K. Deci, cel puţin una din sferele U_j, de exemplu U_1, nu poate fi acoperită de către nici o subfamilie finită a familiei B.

Dăm numărului ε valori succesive $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$; pentru orice n, avem o sferă $U_{1/n}(x_n)$ de rază $\frac{1}{n}$ şi de centru x_n care nu poate fi acoperită de nici o subfamilie finită a familiei B. Fie x o valoare de aderenţă a şirului x_n. Punctul x aparţine unei mulţimi B_α, împreună cu o sferă $U_\rho(x)$ de rază ρ. Plecînd de la un anumit număr, sfera $U_\rho(x)$ conţine sferele $U_{1/n}(x_n)$ cu n oricît de mari. Deci sferele sînt acoperite de o singură mulţime B_α, ceea ce contrazice construcţia. Lema este demonstrată.

3.98. Am extins (3.74) principiul intervalelor închise incluse (1.81) ale dreptei numerice, la un spaţiu metric complet, înlocuind în enunţul său intervalele închise prin submulţimi închise de diametre oricît de mici. Dacă aceste submulţimi sînt compacte, nu mai sînt necesare ipoteze suplimentare:

TEOREMĂ. *Orice familie Q de submulţimi incluse compacte nevide ale unui spaţiu metric are intersecţia nevidă.*

Demonstraţie. Fixăm în familia Q unul din compacte K_0. Dacă teorema nu este adevărată, există, pentru orice punct $x \in K_0$, un compact $K_x \in Q$ care nu conţine punctul x. Mulţimea K_x fiind închisă (3.92 b), există o vecinătate a punctului x care nu are puncte comune cu K_x. Vecinătăţile astfel obţinute, pentru toate punctele $x \in K_0$, formează o acoperire a compactului K_0; conform 3.97, putem alege o acoperire finită. Vom nota vecinătăţile ce formează acoperirea finită prin $V_1, \ldots, V_n$. Fie $K_1, \ldots$ $\ldots, K_n$ mulţimi compacte din sistemul Q care nu se intersectează respectiv cu $V_1, \ldots, V_n$. Intersecţia $K_1 \cap \ldots$ $\ldots \cap K_n$ nu are puncte comune cu nici una din vecinătăţile $V_1, \ldots, V_n$, deci nici cu compactul K_0. Astfel, intersecţia $K_0 \cap K_1 \cap \ldots \cap K_n$ este vidă. Dar, deoarece Q este o familie de mulţimi incluse, orice intersecţie finită a mulţimilor acestei familii este încă o mulţime a acestei familii şi nu poate fi deci vidă. Contradicţia obţinută demonstrează teorema.

EXERCIȚII

1. Notăm cu A' mulțimea punctelor de acumulare ale submulțimii A a unui spațiu metric M. Definim apoi, prin recurență, mulțimea $A^{(n)} = (A^{(n-1)})'$. Pentru un n dat, să se construiască pe dreaptă o mulțime A astfel ca $A^{(n)}$ să fie nevidă și $A^{(n+1)}$ vidă.

2. Să se demonstreze că A' este închisă pentru orice $A \subset M$.

3. Se dă o mulțime $A \subset \mathbb{R}_1$ astfel încît, pentru un anumit n, mulțimea $A^{(n)}$ să fie numărabilă. Demonstrați că A este numărabilă.

4. Un punct x pe dreapta reală este numit *punct de condensare* al unei mulțimi A care nu este numărabilă, dacă orice vecinătate a sa conține o mulțime nenumărabilă de puncte din A. Demonstrați că orice mulțime A care nu este numărabilă are puncte de condensare; mai exact, aproape toate punctele sale, cu excepția, poate, a unei mulțimi numărabile, sînt puncte de condensare.

5. Dacă o mulțime E a dreptei reale este acoperită printr-un sistem oarecare de intervale deschise, atunci se poate extrage un subsistem cel mult numărabil care acoperă E.

6. Mărimea

$$\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y)$$

se numește *distanța* de la punctul x la mulțimea A. Demonstrați că, pentru o mulțime A închisă, relațiile:

$$\rho(x, A) = 0 \text{ și } x \in A$$

sînt echivalente și că dacă A nu este închisă, ele nu sînt echivalente.

7. Demonstrați că, pentru orice mulțime A a unui spațiu metric M, mulțimea punctelor x pentru care $\rho(x, A) < \varepsilon$ este deschisă și mulțimea punctelor y pentru care $\rho(y, A) \leqslant \varepsilon$ este închisă.

8. Se dau două mulțimi închise disjuncte F_1 și F_2 într-un spațiu metric M. Construiți două mulțimi deschise disjuncte U_1 și U_2 astfel încît $U_1 \supset F_1$, $U_2 \supset F_2$.

9. Fie M un spațiu metric mărginit. Pentru două submulțimi oarecare $A \subset M$ și $B \subset M$ să introducem mărimea

$$\rho(A, B) = \sup_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \{\rho(x, B), \rho(y, A)\}.$$

Arătați că submulțimile închise A, B, ... din M formează un spațiu metric dacă se definește distanța între două submulțimi închise prin formula de mai sus. Arătați că acest spațiu este complet dacă M este complet și compact dacă M este compact.

10. Dacă un spațiu metric M este format din $n < 4$ puncte, există un spațiu metric M' izometric cu M și situat în spațiu euclidian $\mathbb{R}_{n-1}$. Pentru $n \geqslant 4$ această propoziție este în general falsă.

11. Notăm prin $\overline{\mathbb{R}}_n$ spațiul euclidian $\mathbb{R}_n$ completat cu punctul ∞. Definiți pe $\overline{\mathbb{R}}_n$ o metrică r care să fie homeomorfă pe $\mathbb{R}_n$ cu metrica uzuală ρ (3.14) și astfel încît orice șir $x_m \in \mathbb{R}_n$, nemărginit pentru metrica uzuală, să aibă punctul ∞ ca valoarea sa de aderență.

12. Rezolvați exercițiul 11 înlocuind spațiul $\mathbb{R}_n$ printr-un spațiu metric M oarecare nemărginit.

13. În exercițiul 11, luați în locul dreptelor considerate (conform indicației pentru exercițiul 11) dreptele trecînd prin centrul sferei S_n. Ce mulțime de elemente „la infinit" va asigura existența unei valori de aderență a oricărui șir de puncte $x_m \in \mathbb{R}_n$ (în noua metrică)?

NOTĂ ISTORICĂ

Prima definiție corectă a limitei unui șir numeric a fost dată de Bolzano (1817), apoi de Cauchy (1821) în lucrarea sa *Curs de analiză pentru Școala Politehnică*. În particular,. Bolzano este primul care a formulat în termeni clari „criteriul lui Cauchy" și chiar a încercat să îl stabilească; dar raționamentul său „în absența oricărei definiții aritmetice a numărului real nu a fost și nu putea fi decît un cerc vicios (Bourbaki). Cauchy însuși a dedus criteriul care-i poartă numele, din principiul intervalelor închise incluse pe care îl considera evident.

Noțiunea de punct de acumulare al unei mulțimi deschise sau închise (mai întîi pe dreapta reală, apoi în spațiul euclidian n-dimensional) și teoremele asupra structurilor acestor mulțimi au fost date de Cantor în anii '70 ai secolului al XIX-lea. Teorema asupra extragerii unei acoperiri finite a fost demonstrată pentru prima oară de Borel în 1895 pentru un interval închis și pentru acoperirea inițială numărabilă. Această teoremă a fost extinsă de Lebesgue în 1902 la cazul general. În 1906 Fréchet a introdus noțiunea de spațiu metric asigurînd un cadru în care noțiunile introduse în perioada precedentă au fost generalizate într-un mod natural. În plus, Fréchet a introdus noțiunile de completitudine și de compacitate pentru un spațiu metric.

Noțiunea de spațiu topologic, datorată lui Hausdorff (1914) și pe care o citățm aici doar în trecere, a oferit posibilități foarte largi [19] de dezvoltare și extindere a conceptului de spațiu metric.

Capitolul 4

TEORIA GENERALĂ A LIMITELOR

Excelenta lucrare a domnului A. Cauchy *Curs de analiză pentru Şcoala Politehnică*, pe care fiecare analist ce iubeşte rigoarea în cercetarea matematică trebuie să o citească, mi-a servit ca ghid.

Niels Abel (1826)

§ 4.1. Definiţia limitei

4.11. DEFINIŢIE. Fie o mulţime oarecare E; un sistem $\mathcal{S}$ de submulţimi nevide $A, B, \ldots$ ale lui E se numeşte *direcţie* dacă pentru orice pereche de submulţimi $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{S}$ are loc una din incluziunile $A \subset B$ sau $B \subset A$ şi intersecţia tuturor $A \in \mathcal{S}$ este vidă.

4.12. DEFINIŢIE. Fie $y = f(x)$ o funcţie dată pe o mulţime E ale cărei valori aparţin unui spaţiu metric M, avînd ρ ca metrică (3.11). Spunem că funcţia $y = f(x)$ *are limită după direcţia* $\mathcal{S}$ dacă există un punct $p \in M$ cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$, există o mulţime $A \in \mathcal{S}$ astfel încît $(\forall)\ x \in A$

$$\rho[p, f(x)] < \varepsilon. \tag{1}$$

În acest caz, punctul p se numeşte *limită* a funcţiei f după direcţia $\mathcal{S}$. Toată situaţia descrisă este desemnată prin simbolul

$$p = \lim_{\mathcal{S}} f(x) \tag{2}$$

sau $f(x) \underset{\mathcal{S}}{\to} p$, sau mai simplu $f(x) \to p$.

În 4.13 — 4.16 considerăm exemple.

4.13. Fie E mulţimea tuturor numerelor naturale $1,2,\ldots$ Alegem pentru direcţia $\mathcal{S}$, sistemul tuturor submulţimilor $A_n \subset E$ de forma

$$A_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}\ (n = 1,2, \ldots).$$

Este evident că din orice două mulțimi oarecare A_n, A_m una o conține pe cealaltă; în plus, intersecția tuturor mulțimilor A_n $(n = 1,2,\ldots)$ este vidă. Deci, sistemul $\mathcal{S}$ este o direcție pe care o notăm prin $n \to \infty$. Funcția $y = f(x)$ este, în acest caz, un șir de puncte $y_1, y_2, \ldots$ $\ldots, y_n, \ldots$ ale spațiului metric M. Conform definiției noastre, șirul y_n are limită după direcția $\mathcal{S}$, adică pentru $n \to \infty$, dacă există un punct $p \in M$, astfel încît pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr N cu inegalitatea

$$\rho(y_n, p) \leqslant \varepsilon$$

satisfăcută pentru orice $n \geqslant N$.

Un șir de puncte $\{y_n\}$ care are o limită p se numește *convergent către* p. Este evident că această definiție coincide cu cea dată în 3.31. Notația 4.12 (2) ia forma $p = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

4.14. **a.** Fie $E = \mathbb{R}_a^+$ semiaxa reală $\{x : a \leqslant x\}$. Alegem pentru direcția $\mathcal{S}$ sistemul tuturor submulțimilor $A_\xi \subset \mathbb{R}_a^+$ de forma:

$$A_\xi = \{x \in \mathbb{R}_a^+ \mid x \geqslant \xi\}.$$

Este evident că $\mathcal{S}$ este o direcție în sensul lui 4.11. O notăm $x \to +\infty$. Conform definiției noastre, o funcție $f(x)$ definită pentru $x \geqslant a$ (cu valori într-un spațiu metric M) are limită după direcția $\mathcal{S}$, adică pentru $x \to +\infty$, dacă există un punct $p \in M$ astfel încît, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr ξ cu proprietatea că pentru orice $x \geqslant \varepsilon$ avem inegalitatea:

$$\rho(p, f(x)) \leqslant \varepsilon.$$

Punctul p se numește *limita* funcției $f(x)$ pentru $x \to \infty$; notația respectivă are forma:

$$p = \lim_{x\to\infty} f(x).$$

b. Dacă $M = \mathbb{R}$ este dreapta numerică, obținem definiția unei funcții numerice avînd limită pentru $x \to \infty$, anume: o funcție numerică $f(x)$ definită pentru $x \geqslant a$

are limita p, cînd $x_n \to \infty$, dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un punct ξ astfel încît inegalitatea

$$|p - f(x)| < \varepsilon$$

să fie satisfăcută de îndată ce $x \geqslant \xi$.

c. Pentru semiaxa reală $\mathbb{R}_a^- = \{x \mid x \leqslant a\}$ se introduce direcţia $x \to -\infty$. Ea este definită ca sistemul tuturor submulţimilor $B_\xi \subset \mathbb{R}_a^-$ de forma

$$B_\xi = \{x \in \mathbb{R}_a^- \mid x \leqslant \xi\} \subset \mathbb{R}_\xi^- .$$

Conform definiţiei date, funcţia $f(x)$ considerată pentru $x \leqslant a$ are limita p pentru $x \to -\infty$, dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$ se poate găsi un număr ξ, astfel încît pentru orice $x \leqslant \xi$ avem inegalitatea

$$\rho(p, f(x)) \leqslant \varepsilon$$

sau, dacă funcţia $f(x)$ este numerică,

$$|p - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

d. Analog, se introduce direcţia $x \to \pm\infty$, sau $|x| \to \infty$, pe dreapta numerică. Direcţia $|x| \to \infty$ este formată din mulţimile $\{x \mid |x| \geqslant C\}$. Astfel capătă sens $\lim_{|x| \to \infty} f(x)$.

4.15. a. Fie E un spaţiu metric. Presupunem că un punct $a \in E$ nu este punct izolat în E, altfel spus, că orice sferă $U_r(a) = \{x \in E : \rho(x, a) < r\}$ conţine puncte din E diferite de a. Definim direcţia $x \to a$ ca fiind mulţimea tuturor sferelor $U_r(a) = \{x \in E : \rho(a, x) < r\}$ din care este eliminat punctul a. Presupunerea că a nu este un punct izolat, înseamnă că nici una din mulţimile $U_r(a)$ nu este vidă. Celelalte proprietăţi ale direcţiei sînt imediate. Conform definiţiei date, o funcţie $f(x)$ definită pe E (cu valori într-un spaţiu metric M) *are limită pentru* $x \to a$, dacă există un punct $p \in M$, astfel încît oricare ar fi $\varepsilon > 0$ să existe un număr $\delta > 0$, cu proprietatea că

$$\rho(f(x), p) \leqslant \varepsilon$$

pentru toți $x \in U_\delta(a)$ (adică pentru orice $x \neq a$ satisfăcînd inegalitatea $\rho(x, a) < \delta$).
Notația 4.12 (2) devine

$$p = \lim_{x \to a} f(x). \tag{1}$$

Punctul p se numește de asemenea *limita funcției f pentru $x \to a$*. [În această definiție, valoarea funcției $f(x)$ pentru $x = a$ este fără importanță. Funcția $f(x)$ poate chiar să nu fie definită în $x = a$.]

b. În particular, dacă $E = \mathbb{R}$, $M = \mathbb{R}$, sîntem conduși la definiția următoare:

Direcția $x \to a$ este mulțimea tuturor intervalelor $(a - \delta, a + \delta)$ din care este îndepărtat punctul $x = a$. O funcție numerică f, definită pe dreapta numerică $\mathbb{R}$, *are limita p în punctul $a \in \mathbb{R}$* dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un $\delta > 0$ astfel încît din faptul că $|x - a| < \delta$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq a$ să rezulte inegalitatea

$$|f(x) - p| \leqslant \varepsilon.$$

Notația (1) nu se schimbă:

$$p = \lim_{x \to a} f(x).$$

c. Exemplele 4.13 și 4.14 a-c sînt cazuri particulare ale definiției 4.15 a. Să verificăm aceasta pentru exemplele 4.14 a-c. Dreapta numerică $\mathbb{R}$ poate fi înzestrată cu metrica spațiului $\overline{\mathbb{R}}$ (3.35 e); atunci direcțiile $x \to -\infty$ și $x \to +\infty$ descrise în 4.14. a coincid cu direcțiile $x \to -\infty$ și $x \to +\infty$ respectiv (4.15 a), unde $-\infty$ și $+\infty$ sînt considerate puncte ale spațiului metric $\overline{\mathbb{R}}$ (ținînd cont de 3.35 f).

4.16. *Limita după o direcție pe o submulțime.*

a. Fie E o mulțime ce conține o direcție $\mathcal{S}$. Fixăm o parte $G \subset E$ și considerăm o familie de mulțimi $G \cap A$, unde A este o mulțime oarecare a direcției $\mathcal{S}$. Presupunem că mulțimile $G \cap A$ sînt nevide. Atunci, intersecția acestor mulțimi fiind vidă (deoarece intersecția tuturor mul-

ţimilor $A \in \mathcal{S}$ este vidă), ele încă formează o direcţie pe care o vom nota cu $G \cap \mathcal{S}$. Fie f o funcţie definită pe mulţimea E cu valori într-un spaţiu metric M. Dacă $\lim_{\mathcal{S}} f(x)$ există şi este egală cu p, este evident că $\lim_{G \cap \mathcal{S}} f(x)$ există şi este egală cu p de asemenea. Dar dacă există $\lim_{G \cap \mathcal{S}} f(x)$, nu neapărat există $\lim_{\mathcal{S}} f(x)$. Să stabilim propoziţia următoare care furnizează o condiţie de echivalenţă a celor două limite în discuţie:

LEMĂ. *Dacă mulţimea G conţine o mulţime B a direcţiei $\mathcal{S}$, atunci existenţa $\lim_{G \cap \mathcal{S}} f(x)$ implică existenţa $\lim_{\mathcal{S}} f(x)$* ($= \lim f(x)$). *Dacă mulţimea G nu conţine nici un $B \in \mathcal{S}$* $_{G \cap \mathcal{S}}$ *şi spaţiul metric M are cel puţin două puncte distincte p şi q, $p \neq q$, atunci există o funcţie f cu valori în M pentru care* $\lim_{G \cap \mathcal{S}} f(x) = p$, *iar* $\lim_{\mathcal{S}} f(x)$ *nu există.*

Demonstraţie. Fie $G \supset B$, $B \in \mathcal{S}$ şi $\lim_{G \cap \mathcal{S}} f(x) = p$. Pentru un $\varepsilon > 0$ dat, alegem, în direcţia $G \cap \mathcal{S}$, o mulţime $G \cap A$ în punctele căreia se verifică inegalitatea $\rho(f(x), p) < \varepsilon$. Mulţimea $G \cap A$ conţine mulţimea $B \cap A$ care este sau B sau A, deci aparţine direcţiei $\mathcal{S}$. Inegalitatea $\rho(f(x), p) < \varepsilon$ este de asemenea satisfăcută pe mulţimea $B \cap A$. De aici rezultă că $\lim_{\mathcal{S}} f(x)$ există (şi este egală cu p).

Presupunem că mulţimea G nu conţine niciun $B \in \mathcal{S}$ şi fie H complementara lui G (în raport cu E). Punem $f(x)$ egală cu p pentru $x \in G$ şi cu q pentru $x \in H$. Fie $\varepsilon < \frac{1}{2} \cdot \rho(p, q)$. Dacă $\lim_{\mathcal{S}} f(x) = t$ ar exista, atunci există $A \in \mathcal{S}$ astfel încît $\rho(f(x), t) < \varepsilon$ pentru orice $x \in A$. Dar cele două mulţimi $G \cap A$ şi $H \cap A$ sînt nevide prin ipoteză; considerînd pe rînd $x \in G \cap A$ şi $x \in H \cap A$ vedem că cele două inegalităţi $\rho(p, t) < \varepsilon$, $\rho(q, t) < \varepsilon$ ar trebui să fie satisfăcute de unde $\rho(p, q) \leqslant \rho(p, t) + \rho(q, t) < 2\varepsilon$ în contradicţie cu definiţia lui ε. Lema este demonstrată.

b. Dacă o funcţie f nu este definită decît pe mulţimea G, notaţia $\lim_{\mathcal{S}} f(x)$ nu are un sens direct. În cazul că G conţine o mulţime a direcţiei $\mathcal{S}$, punem prin definiţie $\lim_{\mathcal{S}} f(x) = \lim_{\mathcal{S}} f_E(x)$, unde $f_E(x)$ este o prelungire oarecare a funcţiei f de la G la tot E. Conform celor demonstrate, rezultatul are sens şi nu depinde de modul de prelungire a lui f de la G la E.

În particular, limita unui şir

$$y_1, \ldots, y_n, \ldots \quad (4.13)$$

este, natural, definită nu numai în cazul cînd şirul $y_1, y_2, \ldots$ este dat pentru toţi indicii $1,2, \ldots$, dar chiar cînd el este dat numai pentru indici n superiori unui n_0; atunci $\lim_{n\to\infty} y_n$ nu depinde de valorile $y_1, \ldots, y_{n_0}$ pe care i-am putea introduce în discuţie dintr-un motiv oarecare. În mod analog, definiţia $\lim_{x\to\infty} f(x)$ (4.14) presupune că se dau valorile lui $f(x)$ pentru x superiori unui x_0 fixat şi nu depinde de valorile lui $f(x)$ pentru $x \leqslant x_0$. De asemenea, definiţia $\lim_{x\to a} f(x)$ (4.15) nu cere decît valorile funcţiei f într-o vecinătate a punctului $x = a$, adică într-o sferă $\rho(x, a) < r$, $x \neq a$.

c. Să revenim la cazul mulţimii G care are puncte comune cu fiecare din mulţimile $A \in \mathcal{S}$ şi nu conţine nici un $A \in \mathcal{S}$. Ca şi mai înainte, notăm prin H complementara lui G în raport cu E. Considerăm familia $H \cap \mathcal{S}$ a mulţimilor $H \cap A$, unde A parcurge $\mathcal{S}$. Deoarece, în acest caz, nici o $H \cap A$ nu este vidă, sistemul $H \cap \mathcal{S}$ formează ea însăşi o direcţie şi putem să ne punem problema existenţei $\lim_{H\cap\mathcal{S}} f(x)$. Dacă $\lim_{\mathcal{S}} f(x) = p$ există, atunci există $\lim_{G\cap\mathcal{S}} f(x)$ şi $\lim_{H\cap\mathcal{S}} f(x)$, egale fiecare cu p. Totuşi, exemplul dat în partea a doua a demonstraţiei lemei arată că existenţa $\lim_{G\cap\mathcal{S}} f(x)$ şi $\lim_{H\cap\mathcal{S}} f(x)$ nu implică existenţa $\lim_{\mathcal{S}} f(x)$.

TEOREMĂ. *Dacă* $\lim_{G\cap\mathcal{S}} f(x)$ *şi* $\lim_{H\cap\mathcal{S}} f(x)$ *există şi sînt egale, atunci* $\lim_{\mathcal{S}} f(x)$ *există de asemenea.*

Demonstrație. Fie $p = \lim_{G \cap \mathcal{S}} f(x) = \lim_{H \cap \mathcal{S}} f(x)$. Pentru orice $\varepsilon > 0$ dat, găsim A și B în $\mathcal{S}$ în așa fel ca inegalitatea

$$\rho(f(x), p) < \varepsilon \tag{1}$$

să fie satisfăcută pentru toate punctele mulțimilor $G \cap A$ și $H \cap B$.

Una din mulțimile A și B este inclusă una în alta, de exemplu $A \subset B$. Atunci inegalitatea (1) este satisfăcută pentru toate punctele mulțimilor $G \cap A$ și $H \cap A$, deci pentru orice punct al mulțimii $A = (G \cap A) \cup (H \cap A)$. Cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar, rezultă $\lim_{\mathcal{S}} f(x) = p$, ceea ce trebuia demonstrat.

4.17. *Aplicații bijective ale mulțimii E și transformările corespunzătoare ale limitelor.*

a. Presupunem că o aplicație bijectivă a mulțimii E pe mulțimea F face să corespundă fiecărui $x \in E$ un $y = \omega(x) \in F$. Fie $\mathcal{S}$ o direcție a mulțimii E formată din mulțimile $A \subset E$; fie $B \subset F$ imaginea mulțimii A prin aplicația ω. Familia $\mathcal{T}$ a tuturor mulțimilor B formează o direcție în F, deoarece din proprietățile aplicației bijective ω rezultă că mulțimile B, ca și mulțimile A, sînt incluse unele în altele, iar intersecția lor este vidă. Fie apoi f o funcție dată pe mulțimea E cu valori în spațiul metric M. Definim o funcție pe mulțimea F prin formula

$$g(y) = g(\omega(x)) = f(x). \tag{1}$$

TEOREMĂ. *Funcția g are limită după direcția $\mathcal{T}$, dacă și numai dacă funcția f are limită după direcția $\mathcal{S}$ și, în plus,*

$$\lim_{\mathcal{S}} f(x) = \lim_{\mathcal{T}} g(y).$$

Demonstrație. Presupunem că $\lim_{\mathcal{T}} g(y) = p$ există. Pentru un $\varepsilon > 0$ dat, se poate găsi o mulțime $B \in \mathcal{T}$ astfel încît $\rho(g(y), p) < \varepsilon$ pentru $y \in B$. Pe mulțimea corespunzătoare $A \in \mathcal{S}$ avem

$$\rho(f(x), p) = \rho(g(\omega(x)), p) < \varepsilon,$$

deci $p = \lim_{s} f(x)$. Reciproca rezultă din simetria construcției, ceea ce încheie demonstrația.

b. Din 4.16 b. rezultă că teorema precedentă rămîne valabilă dacă aplicația bijectivă ω este definită nu pe tot E, ci numai pe o submulțime $A \in \mathcal{S}$.

Considerăm două exemple.

c. Fie E semiaxa $\{x \mid x > a\}$ și fie $y = -x$ aplicația semiaxei E pe semiaxa $F = \{y \mid y < -a\}$. Alegem pe E direcția $x \to \infty$. Direcția corespunzătoare pe F este evident $y \to -\infty$. Conform punctului a, limitele $\lim_{x\to\infty} f(x)$ și $\lim_{y\to-\infty} f(-y)$ sau există amîndouă, sau nu există și dacă ele există, coincid:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{y\to-\infty} f(-y).$$

d. Alegem pentru E intervalul $|x - x_0| \leqslant 1$ fără punctul x_0 și pentru F mulțimea $|y| \geqslant 1$. Formula $y = \frac{1}{x - x_0}$ definește o aplicație bijectivă a lui E pe F. Direcției $x \to x_0$ pe intervalul E îi corespunde direcția $|y| \to \infty$ pe mulțimea F. Conform punctului a, limitele $\lim_{|y|\to\infty} f(y)$ și $\lim_{x\to x_0} f\left(\frac{1}{x - x_0}\right)$ există sau nu simultan și dacă ele există, atunci coincid:

$$\lim_{|y|\to\infty} f(y) = \lim_{x\to x_0} f\left(\frac{1}{x - x_0}\right)$$

4.18. Definiția unei limite, dată în 4.12, depinde, în mod natural, de metrica spațiului M. Totuși, înlocuind metrica $\rho(x, y)$ printr-o metrică homeomorfă $r(x, y)$ (3.34 c), relația

$$\lim_{s} f(x) = p \qquad (1)$$

rămîne valabilă pentru metrica $r(x, y)$ dacă ea era valabilă pentru metrica $\rho(x, y)$. Aplicăm criteriul homeomorfismului 3.34 d. Presupunem că relația (1) este valabilă

pentru metrica ρ și metrica r este homeomorfă cu metrica ρ. Fie $\varepsilon > 0$ fixat arbitrar; trebuie găsit un $A \in \mathcal{S}$ ale cărui puncte verifică inegalitatea

$$r(f(x), p) < \varepsilon. \qquad (2)$$

În virtutea criteriului 3.34 d, putem găsi, plecînd de la un $\varepsilon > 0$ dat, un $\delta > 0$ astfel încît $\rho(p, y) < \delta$ să implice $r(p, y) < \varepsilon$. După ce am determinat δ, alegem un $A \in \mathcal{S}$ în așa fel ca să avem

$$\rho(f(x), p) < \delta$$

pentru $x \in A$. Atunci (2) este satisfăcută de asemenea pentru $x \in A$, ceea ce trebuia demonstrat. Evident, reciproca este de asemenea adevărată: dacă relația (2) este îndeplinită pentru metrica r, metrica ρ fiind homeomorfă cu metrica r, atunci relația (1) este adevărată pentru metrica ρ.

4.19. *Criteriul lui Cauchy.* Criteriul lui Cauchy de existență a limitei unui șir numeric, dat în 3.72 a, poate fi extins în cazul general în ipoteza că funcția f ia valori într-un spațiu complet:

TEOREMĂ. *Pentru ca o funcție f, definită pe E avînd o direcție $\mathcal{S}$ fixată și cu valori într-un spațiu metric complet M, să aibă limită după direcția $\mathcal{S}$, este necesar și suficient ca să fie verificat următorul criteriu al lui Cauchy: pentru orice $\varepsilon > 0$, există o mulțime $B \in \mathcal{S}$ astfel încît*

$$\rho[f(x'), f(x'')] < \varepsilon \qquad (1)$$

de îndată ce $x' \in B$, $x'' \in B$.

Demonstrație. Presupunem îndeplinit criteriul lui Cauchy. Considerăm în spațiul M toate mulțimile $f(A)$, unde $A \in \mathcal{S}$. ($f(A)$ reprezintă mulțimea valorilor $f(x)$ cînd $x \in A$). Mulțimile $A \in \mathcal{S}$ formînd un sistem de mulțimi incluse, mulțimile $f(A)$ formează tot un astfel de sistem (pe M). După cum se vede din inegalitatea (1), există printre mulțimile $f(A)$, mulțimi de diametru oricît de mic. Deci, spațiul M fiind complet și ținînd cont de lema 3.74 a, există în M un punct p astfel încît orice sferă $V_\varepsilon(p) =$

$= \{y \in M \mid \rho(y, p) < \varepsilon\}$ conține una din mulțimile $f(B)$, $B \in \mathcal{S}$. Așadar, pentru orice $x \in B$, avem:

$$\rho(f(x), p) < \varepsilon.$$

Dar aceasta înseamnă că funcția f are limita egală cu p după direcția $\mathcal{S}$.

Reciproca nu necesită ipoteza de completitudine a spațiului M. Fie f o funcție ce are limita p după direcția $\mathcal{S}$. Găsim, pentru un $\varepsilon > 0$ dat, o mulțime $B \in \mathcal{S}$ ale cărei puncte satisfac inegalitatea

$$\rho[p, f(x)] \leqslant \frac{\varepsilon}{2};$$

atunci, oricare ar fi x', x'' din B, avem:

$$\rho[f(x'), f(x'')] \leqslant \rho[p, f(x')] + \rho[p, f(x'')] \leqslant \varepsilon,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

§ 4.2. Teoreme generale asupra limitelor

Fie din nou E o mulțime oarecare avînd o direcție fixată $\mathcal{S}$ și f o funcție definită pe E cu valori într-un spațiu metric M.

4.21. Dacă funcția f este constantă pe E, adică f ia aceeași valoare $p \in M$ în fiecare punct al mulțimii E, atunci există limita sa după direcția $\mathcal{S}$, egală cu p.

Evident, inegalitatea 4.12 (1) este în acest caz satisfăcută pentru orice $\varepsilon > 0$ și pentru orice $A \in \mathcal{S}$.

4.22. Funcția f nu poate avea decît o singură limită după direcția $\mathcal{S}$.

Într-adevăr, fie

$$p = \lim_{\mathcal{S}} f(x) \in M \text{ și } q = \lim_{\mathcal{S}} f(x) \in M.$$

Pentru un $\varepsilon > 0$ dat, găsim o mulțime $A \in \mathcal{S}$ ale cărei puncte verifică inegalitatea

$$\rho(f(x), p) \leqslant \varepsilon \qquad (1)$$

și o mulțime $B \in S$ ale cărei puncte verifică inegalitatea

$$\rho(f(x), q) \leqslant \varepsilon. \qquad (2)$$

Fie, de exemplu, $A \subset B$. Atunci, pentru orice punct al mulțimii A, cele două inegalități (1) și (2) sînt satisfăcute. Fie $x \in A$ un punct oarecare; atunci din (1) și (2) rezultă:

$$\rho(p, q) \leqslant \rho(f(x), p) + \rho(f(x), q) \leqslant 2\varepsilon.$$

Deci, $\varepsilon > 0$ fiind arbitrar de mic, avem $\rho(p, q) = 0$, adică $p = q$.

4.23. Se spune că funcția f *aparține asimptotic unei mulțimi* $G \subset M$ dacă există o mulțime $A \in \mathcal{S}$ în punctele căreia $f(x)$ aparține lui G, adică $x \in A \Rightarrow f(x) \in G$.

TEOREMĂ. *Dacă* $\lim\limits_{\mathcal{S}} f(x) = p$ *și mulțimea* $G \subset M$ *conține o sferă deschisă centrată în* p, *atunci funcția* f *aparține asimptotic lui* G.

Demonstrație. Presupunem că G conține o sferă $V = \{y \mid \rho(y, p) < \varepsilon\}$. Găsim o mulțime $A \in \mathcal{S}$ ale cărei puncte verifică inegalitatea $\rho(f(x), p) < \varepsilon$. Aceasta înseamnă că incluziunea $f(x) \in V \subset G$ este valabilă pentru orice punct al mulțimii A, ceea ce trebuia demonstrat.

§ 4.3. Limite de funcții numerice

4.31. a. În paragrafele 4.3—4.6 vom construi o teorie a limitelor funcțiilor numerice, adică a funcțiilor care iau valori pe dreapta numerică (pe $\mathbb{R}$ sau $\overline{\mathbb{R}}$). Particularitățile unor astfel de funcții sînt datorate existenței, pe dreapta numerică, a unei metrici, a unei ordini și a operațiilor aritmetice. Propriu-zis există chiar două metrici diferite: metrica uzuală $\rho(x, y) = |x - y|$ valabilă în domeniul $\mathbb{R}$ al numerelor finite și metrica $r(x, y)$ (3.35 e) valabilă în domeniul extins $\overline{\mathbb{R}}$. Dar în domeniul $\mathbb{R}$ aceste metrici sînt homeomorfe (3.35 e); rezultă de aici (4.18) că existența unei limite finite

$$p = \lim_{\mathcal{S}} f(x)$$

nu depinde de alegerea metricii ρ sau r.

b. Fie f și g două funcții definite pe o mulțime E cu valori în $\overline{\mathbb{R}}$. Vom nota $f \leqslant g$ dacă inegalitatea $f(x_0) \leqslant g(x_0)$ este îndeplinită pentru orice $x_0 \in E$. Funcția f se numește *majorată pe mulțimea* E dacă există un număr finit C astfel încît, pentru orice $x \in E$, să aibă loc inegalitatea $f(x) \leqslant C$. Funcția f se numește *minorată* pe E dacă există un număr finit C astfel încît, pentru orice $x \in E$, să aibă loc inegalitatea $f(x) \geqslant C$. Funcția f se numește *mărginită* (sau *mărginită în modul*) dacă există un număr finit C astfel încît, pentru orice $x \in E$, să avem inegalitatea $|f(x)| \leqslant C$.

În orice punct $x_0 \in E$, unde două funcții f și g sînt finite, definim $(f + g)(x_0)$ ca fiind rezultatul adunării valorilor corespunzătoare $f(x_0)$ și $g(x_0)$. În acest mod este definită funcția sumă $f + g$. Scăderea, înmulțirea și împărțirea sînt definite în mod analog; ultima, pentru un punct dat x_0, nu este posibilă decît dacă numitorul nu se anulează în acest punct.

4.32. Dezvoltînd definiția 4.23, spunem că funcția numerică f este

(a) *nenegativă* (*pozitivă*) după direcția $\mathcal{S}$,
(b) *mărginită* (*majorată*, *minorată*) după direcția $\mathcal{S}$,
(c) *infinit mică* după direcția $\mathcal{S}$,
(d) *infinit mare pozitiv* după direcția $\mathcal{S}$,
(e) *infinit mare negativ* după direcția $\mathcal{S}$,

dacă respectiv:

(a) există o mulțime $A \in \mathcal{S}$ pe care funcția f este nenegativă (pozitivă);

(b) există $B \in \mathcal{S}$ pe care funcția f este mărginită (majorată, minorată); se notează $f(x) = O(1)$;

(c) $\lim\limits_{\mathcal{S}} f(x) = 0$ (adică, pentru orice $\varepsilon > 0$, există o mulțime $B \in \mathcal{S}$ pe care $|f(x)| < \varepsilon$); se notează $f(x) = o(1)$;

(d) pentru orice $C \in \mathbb{R}$, există o mulțime $B \in \mathcal{S}$ pe care $f(x) > C$; se notează $\lim\limits_{\mathcal{S}} f(x) = \infty$;

(e) pentru orice $C \in \mathbb{R}$, există o mulțime $B \in \mathcal{S}$ pe care $f(x) < C$; se notează $\lim\limits_{\mathcal{S}} f(x) = -\infty$.

4.33. Relația $\lim_{\mathcal{S}} f(x) = p$ este echivalentă cu relația

$$\lim_{\mathcal{S}} f[(x) - p] = 0.$$

Aceasta rezultă din definițiile limitei și a distanței pe dreapta numerică $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\rho(a, b) = |a - b|.$$

4.34. a. LEMĂ. *Fie* $\lim_{\mathcal{S}} f(x) = p$; *pentru orice* $\varepsilon > 0$, *există o mulțime* $A \in \mathcal{S}$ *în punctele căreia sînt verificate inegalitățile*

$$|f(x) - p| < \varepsilon, \text{ dacă } p \text{ este finit},$$

$$f(x) > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ dacă } p = +\infty,$$

$$f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}, \text{ dacă } p = -\infty.$$

Lema este o consecință imediată a teoremei 4.33, ținînd cont de metrica corespunzătoare (pe $\mathbb{R}$ și pe $\overline{\mathbb{R}}$).

b. Fie un $p \neq 0$ finit ; se poate găsi un $\varepsilon > 0$ astfel încît intervalul $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ nu conține punctul 0 și este format din numere de același semn cu p. De unde :

Dacă o funcție f are limita $p > 0$ după o direcție $\mathcal{S}$, atunci f este pozitivă după direcția S ; dacă f are limita $p < 0$ după direcția S, atunci f este negativă după direcția $\mathcal{S}$.

Rezultatul este valabil și pentru $p = \infty$ și $p = -\infty$, ceea ce rezultă direct din 4.34 a.

c. Propoziția următoare este într-un anumit sens reciproca propoziției b :

Dacă f este nenegativă după direcția $\mathcal{S}$ *și are limita p, atunci* $p \geqslant 0$.

Într-adevăr, dacă avem $p < 0$, atunci, conform proprietății a, există o mulțime $A \in \mathcal{S}$ pe care $f(x) < 0$. Pe de altă parte, $f(x)$ fiind nenegativă după direcția $\mathcal{S}$, există o mulțime $B \in \mathcal{S}$ pe care $f(x) \geqslant 0$. Cum $A \cap B$ nu este vidă, ajungem la o contradicție.

d. Subliniem că prin trecere „la limită" de tip (b) se păstrează semnul >0 (sau <0), în timp ce prin trecere „la limită" de tip (c) se păstrează semnul $\geqslant 0$ (sau $\leqslant 0$). Dacă se cunoaște numai că $p \geqslant 0$, nu se poate deduce nimic asupra semnului funcției f pe mulțimile $A \in \mathcal{S}$; ea putînd lua atît valori pozitive cît și negative. Dacă se știe că $f(x) > 0$ pe anumiți $A \in \mathcal{S}$, limita p poate fi pozitivă sau nulă.

e. Spunem că $f \leqslant g (f < g)$ după direcția $\mathcal{S}$, dacă diferența $g(x) - f(x)$ este nenegativă (pozitivă) după direcția $\mathcal{S}$, pentru orice x.

f. Dacă f și g au limitele după direcția $\mathcal{S}$ egale cu p, respectiv, q și dacă $f \leqslant g$ după direcția $\mathcal{S}$, atunci $p \leqslant q$ (aceasta rezultă din definiție și din punctul c).

g. Dacă f și g au limitele după direcția $\mathcal{S}$ egale cu p, respectiv, q și dacă $p < q$, atunci $f < g$ după direcția $\mathcal{S}$ (aceasta rezultă din b).

h. Dacă $f \leqslant g \leqslant h$ după direcția $\mathcal{S}$ și dacă f și h au aceeași limită $p = \lim\limits_{\mathcal{S}} f(x) = \lim\limits_{\mathcal{S}} h(x)$, atunci g are de asemenea limita p după direcția $\mathcal{S}$.

Este suficient să examinăm cazul $p = 0$ înlocuind, în cazul contrar, $f(x)$ și $g(x)$ prin $f(x) - p$ și $g(x) - p$ (4.33). Pentru un $\varepsilon > 0$ dat, găsim o mulțime $A \in \mathcal{S}$ pe care $|f(x)| < \varepsilon$ și $|h(x)| < \varepsilon$; este evident că pe mulțimea A avem de asemenea $|g(x)| < \varepsilon$, ceea ce trebuia arătat.

4.35. a. Dacă f și g sînt mărginite după direcția $\mathcal{S}$, atunci $f + g$ și $f \cdot g$ sînt la fel.

Într-adevăr, presupunem că inegalitatea $|f(x)| \leqslant C_1$ este satisfăcută pe o mulțime $A \in \mathcal{S}$, inegalitatea $|g(x)| \leqslant C_2$ pe o mulțime $B \in \mathcal{S}$. Dacă, de exemplu, $A \subset B$, atunci pentru orice $x \in A$ au loc inegalitățile

$$|f(x) + g(x)| \leqslant C_1 + C_2 \text{ și } |f(x) \cdot g(x)| \leqslant C_1 C_2,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

b. Dacă f și g sînt infiniți mici după direcția $\mathcal{S}$, atunci $f+g$ este de asemenea.

Pentru $\varepsilon > 0$ dat, alegem mulțimile $A \in \mathcal{S}$ și $B \in \mathcal{S}$ pe care $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ respectiv; dacă, de exemplu, $A \subset B$, atunci

$$|f(x) + g(x)| < \varepsilon,$$

pentru orice $x \in A$, ceea ce trebuia arătat.

c. Dacă f este mărginită după direcția $\mathcal{S}$ și g este infinit mic după direcția $\mathcal{S}$, atunci $f \cdot g$ este infinit mic după direcția $\mathcal{S}$.

Într-adevăr, presupunem că inegalitatea $|f(x)| \leqslant C$ este satisfăcută pe o mulțime $A \in \mathcal{S}$ și că pentru un $\varepsilon > 0$ dat, găsim o mulțime $B \in \mathcal{S}$ pe care $|g(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{C}$. Pe $A \cap B$ are loc inegalitatea $|f(x) \cdot g(x)| \leqslant C$, ceea ce trebuia probat.

4.36. **a.** Dacă $\lim\limits_{\mathcal{S}} f(x) = p$, $\lim\limits_{\mathcal{S}} g(x) = q$, atunci funcția $f+g$ are după direcția $\mathcal{S}$ limită, care este egală cu $p+q$.

Într-adevăr, $f(x) + g(x) - (p+q) = (f(x) - p) + (g(x) - q)$, sumă de infiniți mici, este un infinit mic (4.35 b).

b. Dacă $\lim\limits_{\mathcal{S}} f(x) = p$, $\lim\limits_{\mathcal{S}} g(x) = q$, atunci funcția $f \cdot g$ are pe direcția $\mathcal{S}$ limita pq.

Într-adevăr, $f(x)\,g(x) - pq = fg - fq + fq - pq = f(g-q) + q(f-p)$; fiecare termen este infinit mic, conform 4.35 c.

c. Dacă $\lim\limits_{\mathcal{S}} f(x) = p \neq 0$, atunci $\frac{1}{f}$ este mărginită după direcția $\mathcal{S}$.

Într-adevăr, găsim o mulțime $A \in \mathcal{S}$ pe care $|f(x)| \geqslant \frac{p}{2}$ (4.34 a); pentru $x \in A$, avem $\frac{1}{|f(x)|} \leqslant \frac{2}{p}$, ceea ce era necesar de arătat.

d. Dacă $\lim_{\mathcal{S}} f(x) = p \neq 0$, atunci $\frac{1}{f}$ are limita $\frac{1}{p}$ după direcția $\mathcal{S}$.

Într-adevăr, $\frac{1}{p} - \frac{1}{f} = \frac{f-p}{pf} = \frac{1}{pf}(f-p)$ este un infinit mic, conform 4.33 c și 4.35 c.

e. Dacă $\lim_{\mathcal{S}} g(x) = q$, $\lim_{\mathcal{S}} f(x) = p \neq 0$, atunci $\frac{g}{f}$ are limita $\frac{q}{p}$ după direcția $\mathcal{S}$.

Este o consecință a punctelor b și d.

4.37. a. Dacă $\lim_{\mathcal{S}} f(x) = 0$, atunci $\lim_{\mathcal{S}} \frac{1}{|f(x)|} = \infty$ și reciproc : dacă $\lim_{\mathcal{S}} |g(x)| = \infty$, atunci $\lim_{\mathcal{S}} \frac{1}{g(x)} = 0$.

Concluzia decurge din echivalența inegalităților $|f(x)| < \varepsilon$ și $\frac{1}{|f(x)|} > \frac{1}{\varepsilon}$.

b. Dacă $\lim_{\mathcal{S}} f(x) = \infty$, atunci $\lim_{\mathcal{S}} [-f(x)] = -\infty$. Dacă $\lim_{\mathcal{S}} f(x) = \infty$ și $\lim_{\mathcal{S}} g(x) = p > 0$, atunci $\lim_{\mathcal{S}} f(x)g(x) = \infty$; dacă $\lim_{\mathcal{S}} g(x) = p < 0$, atunci $\lim_{\mathcal{S}} f(x)g(x) = -\infty$.

Acestea sînt consecințe imediate ale definițiilor 4.32 (d, e).

4.38. DEFINIȚIE. Fie f și g două funcții date pe o mulțime E pe care este fixată o direcție $\mathcal{S}$. Funcția f este numită un *infinit mic în raport cu* g (sau, dacă g este infinit mic ca însăși, *infinit mic de ordin superior în raport cu* g), dacă

$$\lim_{\mathcal{S}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Se notează $f(x) = o(g(x))$.

Funcția f este numită *infinit mare în raport cu* g (sau, dacă g este infinit mare ea însăși, *infinit de ordin superior*

în raport cu g), dacă

$$\lim_{\mathcal{S}} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \infty.$$

Funcțiile f și g sînt numite *echivalente* (după direcția $\mathcal{S}$) dacă

$$\lim_{\mathcal{S}} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

a. Din 4.37 a rezultă că dacă f este infinit mic în raport cu g, atunci g este infinit mare în raport cu f.

b. Dacă f și g sînt echivalente și dacă există

$$\lim_{\mathcal{S}} \frac{g(x)}{h(x)} = L,$$

unde h este o funcție dată pe E, atunci limita

$$\lim_{\mathcal{S}} \frac{f(x)}{h(x)},$$

există și este egală cu L. Într-adevăr,

$$\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{g(x)f(x)}{h(x)g(x)} \to L$$

conform 4.36 b. Deci căutînd limita unui raport se poate înlocui numărătorul (și numitorul de asemenea) printr-o funcție echivalentă.

4.39. *Simbolul* E.

a. Simbolul E desemnează o funcție a cărei limită (după o direcție dată) este egală cu 1. O funcție E care satisface 4.23 este numită *unitate asimptotică*. Evident, un produs și un cît de două unități asimptotice sînt unități asimptotice.

b. LEMĂ. *Dacă* $\lim_{\mathcal{S}} u(x) = 0$, *atunci oricare ar fi* p *natural*,

$$(1 + u(x))^p = 1 + pEu(x). \qquad (1)$$

Demonstrație. Conform formulei lui Newton,

$$(1 + u(x))^p = 1 + pu(x) + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} u^2(x) + \ldots + u^p(x) =$$

$$= 1 + pu(x)\left[1 + \frac{p-1}{1 \cdot 2} u(x) + \ldots + \frac{1}{p} u^{p-1}(x)\right] =$$

$$= 1 + pu(x)\,E,$$

limita expresiei din paranteza mare fiind egală cu 1 (4.36 a, b).

c. Adesea se folosesc unități asimptotice în calculul unor limite. Să calculăm, de exemplu,

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^p - (1+x+x^2)^q}{(1+2x)^r - (1-2x+x^3)^s} \quad (p, q, r, s - \text{numere naturale}).$$

Conform definiției și lemei b, avem :

$$(1+x)^p = 1 + pxE_1;\ x + x^2 = x(1+x) = xE_2;$$

$$(1 + x + x^2)^q = (1 + xE_2)^q = 1 + qxE_2E_3 = 1 + qxE_4;$$

$$(1+2x)^r = 1 + 2xrE_5;\ 2x - x^3 = 2x\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) = 2xE_6;$$

$$(1 - 2x + x^3)^s = (1 - 2xE_6)^s = 1 - 2xsE_6E_7 = 1 - 2xsE_8;$$

$$\frac{(1+x)^p - (1+x+x)^q}{(1+2x)^r - (1-2x+x^3)^s} = \frac{(1+pxE_1) - (1+qxE_4)}{(1+2xrE_5) - (1-2xsE_8)} =$$

$$= \frac{pE_1 - qE_4}{2rE_5 + 2sE_8} \to \frac{p-q}{2(r+s)},$$

ceea ce încheie calculul.

d. Limita unei funcții raționale $R(x)$ pentru $x \to \pm\infty$. Considerăm o funcție rațională

$$R(x) = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n},\quad a_0 \neq 0, b_0 \neq 0.$$

Pentru $|x| \to \infty$, avem

$$= \frac{a_0 x^m \left(1 + \frac{a_1}{a_0}\frac{1}{x} + \ldots + \frac{a_m}{a_0}\frac{1}{x^m}\right)}{b_0 x^n \left(1 + \frac{b_1}{b_0}\frac{1}{x} + \ldots + \frac{b_n}{b_0}\frac{1}{x^n}\right)} =$$

$$= \frac{a_0 x^m E_1}{b_0 x^n E_2} = \frac{a_0}{b_0} x^{m-n} E_3.$$

Conform regulilor 4.36 — 4.37, rezultă de aici pentru $m \leqslant n$:

$$\lim_{|x|\to\infty} R(x) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } m < n \\ \dfrac{a_0}{b_0} \text{ pentru } m = n. \end{cases}$$

Cînd $m > n$, funcţie $R(x)$ are limita infinită, al cărei semn depinde de direcţia aleasă ($x \to +\infty$ sau $-\infty$), de semnul lui $\frac{a_0}{b_0}$ şi de paritatea sau imparitatea lui $m-n$. Lăsăm cititorului să clasifice cazurile posibile.

§ 4.4. Valorile de aderenţă ale unei funcţii

4.41. Să studiem comportamentul unei funcţii numerice f cu valori în dreapta reală încheiată $\overline{\mathbb{R}}$ (§1.9) după o direcţie $\mathcal{S}$. Pentru orice mulţime $A \in \mathcal{S}$, punem:

$$a_A = \inf \{f(x) \mid x \in A\}, \qquad b_A = \sup \{f(x) \mid x \in A\};$$

în mulţimea $\overline{\mathbb{R}}$ cele două mărimi indicate există şi $a_A \leqslant b_A$. Deoarece orice două mulţimi A şi B ale sistemului $\mathcal{S}$ sînt în relaţii de incluziune, atunci segmentele $[a_A, b_A]$, $[a_B, b_B]$ sînt în relaţii de incluziune. Punem:

$$\xi = \sup_{A\in\mathcal{S}} a_A, \qquad \eta = \inf_{A\in\mathcal{S}} b_A; \tag{1}$$

conform principiului generalizat la lui Cantor (1.94) avem $\xi \leqslant \eta$ şi

$$[\xi, \eta] = \bigcap_{A\in\mathcal{S}} [a_A, b_A]. \tag{2}$$

Numărul $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ se numește valoarea inferioară de aderență (sau limita inferioară) a funcției f după direcția $\mathcal{S}$, numărul $\eta \in \overline{\mathbb{R}}$, valoarea superioară de aderență (sau limita superioară) a funcției f după direcția $\mathcal{S}$; aceasta se notează

$$\xi = \underset{\mathcal{S}}{\lim}\, f(x), \quad \eta = \overline{\underset{\mathcal{S}}{\lim}}\, f(x).$$

4.42. Egalitatea (2), (4.41) antrenează rezultatul următor: pentru orice $\varepsilon > 0$, există o mulțime $A \in \mathcal{S}$ astfel încît

$$a_A = \inf \{f(x) \mid x \in A\} \geqslant \xi - \varepsilon,$$

$$b_A = \sup \{f(x) \mid x \in A\} \leqslant \eta + \varepsilon$$

(Dacă ξ aparține lui $\overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$, punem $\xi - \varepsilon = \xi$; în mod analog, $\eta + \varepsilon = \eta$ și $\eta \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$.)

4.43. În consecință obținem: dacă $\xi = \eta$, funcția f are limită după direcția $\mathcal{S}$, care este egală cu $\xi = \eta$; dacă ξ și η sînt finiți și $\xi = \eta$, atunci $\xi = \eta$ este limita finită a funcției f după direcția $\mathcal{S}$.

4.44. Reciproc, dacă funcția f are limita p după direcția $\mathcal{S}$, atunci intervalul $[\xi, \eta] = \bigcap_{A \in \mathcal{S}} [a_A, b_A]$ se reduce la punctul p, în sensul că $\xi = \eta = p$.

4.45. Pentru a clarifica sensul noțiunilor introduse dăm definiția următoare (conform definiției 3.41):

Un număr $y \in \overline{\mathbb{R}}$ se numește *valoarea de aderență a funcției f după direcția $\mathcal{S}$* dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$ și pentru orice $A \in \mathcal{S}$, există un punct $x \in A$ astfel încît

$$|f(x) - y| < \varepsilon, \text{ dacă } y \text{ este finit};$$

$$f(x) > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ dacă } y = \infty;$$

$$f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}, \text{ dacă } y = -\infty.$$

Dacă funcția f are limita p după direcția $\mathcal{S}$, atunci p este o valoare de aderență a funcției f după direcția $\mathcal{S}$; afirmația inversă nu are loc în general.

4.46. Arătăm că pentru orice valoare de aderență $y \in \mathbb{R}$ a funcției f, au loc inegalitățile $\xi \leqslant y \leqslant \eta$, ξ și η fiind definite în 4.41.

Într-adevăr, dacă y este o valoare de aderență a funcției f după direcția $\mathcal{S}$, atunci pentru orice $A \in \mathcal{S}$:

$$a_A = \inf \{f(x) \mid x \in A\} \leqslant y \leqslant \sup \{f(x) \mid x \in A\} = b_A$$

și deci $y \in \cap [a_A, b_A] = [\xi, \eta]$.

Dar punctele ξ și η ele însești sînt valori de aderență ale funcției f după direcția $\mathcal{S}$, astfel că definiția 4.41 nu contrazice 4.45. Să verificăm aceasta pentru punctul ξ. Dacă ξ este un număr finit, atunci pentru un $\varepsilon > 0$ dat, există un $A_0 \in \mathcal{S}$ astfel încît $0 \leqslant \xi - a_{A_0} < \frac{\varepsilon}{2}$, deci pentru orice $A \subset A_0$, avem $a_{A_0} \leqslant a_A \leqslant \xi$, de unde $0 \leqslant \xi - a_A < \frac{\varepsilon}{2}$. Deoarece $a_A = \inf \{(f(x) \mid x \in A\}$, există un punct $x \in A$, pentru care $0 \leqslant f(x) - a_A < \frac{\varepsilon}{2}$ și, în consecință,

$$|f(x) - \xi| \leqslant \varepsilon.$$

Pentru orice $B \supset A_0$, există un astfel de punct x pe care îl putem alege în mulțimea A_0. Deci, ξ este o valoare de aderență a funcției f după direcția $\mathcal{S}$. Demonstrația pentru cazul cînd $\xi \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$, la fel ca și demonstrația analoagă pentru punctul η urmează aceeași schemă.

4.47. COROLAR. *Mulțimea tuturor valorilor de aderență ale funcției f pe dreapta închei ată nu este vidă și marginile ei sînt punctele*

$$\xi = \underline{\lim_{\mathcal{S}}} f(x) \quad \text{și} \quad \eta = \overline{\lim_{\mathcal{S}}} f(x).$$

4.48. Dacă funcţia f are limita p după direcţia $\mathcal{S}$, atunci după cum am văzut, $\xi = \eta = p$; în acest caz şi numai atunci numărul p este unica valoare de aderenţă a funcţiei f după direcţia $\mathcal{S}$.

§ 4.5. Funcţii nedescrescătoare după o direcţie

Un şir numeric $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ se numeşte *nedescrescător* dacă $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n \leqslant y_{n+1} \leqslant \ldots$.

Să dăm o definiţie analoagă pentru o funcţie numerică $y = f(x)$ dată pe o mulţime oarecare E pe care este fixată o direcţie $\mathcal{S}$.

4.51. DEFINIŢIE. O funcţie numerică f este numită *nedescrescătoare după direcţia* $\mathcal{S}$ dacă, oricare ar fi mulţimile $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{S}$, relaţia $B \supset A$ antrenează inegalitatea

$$\sup\{f(x) \mid x \in B \setminus A\} \leqslant \inf\{f(x) \mid x \in A\}. \tag{1}$$

4.52. *Exemple.*

a. Dacă $E = \{1, 2, \ldots\}$, atunci funcţia $y = f(x)$ este un şir numeric $y_1, y_2, \ldots$ Fie, ca de obicei, direcţia $\mathcal{S}$ dată pe E de mulţimile $A_n = \{n, n+1, \ldots\}$, $n = 1,2, \ldots$ Arătăm că definiţia 4.51 se confundă atunci cu definiţia iniţială a unui şir nedescrescător. Presupunem că şirul y_n este descrescător în sensul definiţiei 4.51. Pentru două mulţimi $A_n = \{n+1, \ldots\}$ şi $B_n = \{n, n+1, \ldots\}$ avem $B_n - A_n = \{n\}$ în sensul că 4.51 (1) implică

$$f_n \leqslant \inf\{f_p \mid p > n\} \leqslant f_{n+1}.$$

Reciproc, din îndeplinirea inegalităţilor $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots \leqslant f_n \leqslant \ldots$ rezultă că pentru orice $A = \{f_n, f_{n+1}, \ldots\} \in \mathcal{S}$ şi $A \subset B = \{f_k, f_{k+1}, \ldots\} \in \mathcal{S}$, $k < n$, avem $\sup\{f(x) \mid x \in B \setminus A\} = \sup\{f_k, \ldots, f_{n-1}\} = f_{n-1} \leqslant f_n = \inf\{f(x) \mid x \in A\}$ astfel că şirul $f(x)$ este descrescător în sensul definiţiei 4.51.

b. Dacă $E = \mathbb{R}_a^+$ este semiaxa reală $a \leqslant x$ cu direcţia $\mathcal{S}$ definită de submulţimile $A_\xi = \{x \in \mathbb{R}_a^+ \mid x \geqslant \xi\}$, atunci funcţia f este nedescrescătoare pentru $x \to \infty$ dacă şi numai dacă $a \leqslant y < z$ implică $f(y) \leqslant f(z)$.

Într-adevăr, presupunem că funcţia f este nedescrescătoare în sensul definiţiei 4.51. Atunci, pentru două mulţimi A_y şi A_z, $A_y \supset A_z$, adică pentru $y < z$, avem: $f(y) \leqslant \sup\{f(x) | y \leqslant x < z\} \leqslant \inf\{f(x) | x \geqslant z\} \leqslant f(z)$. Reciproc, dacă $f(y) \leqslant f(z)$ oricare ar fi $y < z$ din $\mathbb{R}_a^+$, funcţia f este nedescrescătoare în sensul definiţiei 4.51, deoarece, dacă $x' \in A_y \setminus A_z$ (adică $y \leqslant x' < z$) şi $x'' \in A_z$ (adică $x'' \geqslant z$), atunci $f(x') \leqslant f(x'')$ şi, conform 1.62 b,

$$\sup\{f(x') | x' \in (A_y \setminus A_z)\} \leqslant \inf\{f(x'') | x'' \in A_z\}.$$

4.53. TEOREMĂ. *Dacă o funcţie f este nedescrescătoare şi majorată după o direcţie $\mathcal{S}$, atunci ea are limită după direcţia $\mathcal{S}$:* $\lim\limits_{\mathcal{S}} f(x) = \sup\{f(x) | x \in A\}$, *unde* $A \in \mathcal{S}$ *este o mulţime oarecare pe care f este majorată.*

Demonstraţie. Presupunem că f este majorată pe o mulţime $A \in \mathcal{S}$. Punem $p = \sup\{f(x) | x \in A\}$. Pentru un $\varepsilon > 0$ dat, găsim un punct $x_0 \in A$ astfel încît

$$p - \varepsilon < f(x_0) \leqslant p.$$

Intersecţia tuturor mulţimilor sistemului $\mathcal{S}$ fiind vidă, există o mulţime $B \in \mathcal{S}$ care nu conţine punctul x_0. Este evident atunci că este adevărată prima din cele două incluziuni posibile $A \supset B$, $B \subset A$. Cum f nu descreşte după direcţia $\mathcal{S}$, avem

$$\inf\{f(x) | x \in B\} \geqslant \sup\{f(x) | x \in A \setminus B\} \geqslant f(x_0) > p - \varepsilon.$$

Dar, din faptul că $B \subset A$, rezultă că

$$\sup\{f(x) | x \in B\} \leqslant \sup\{f(x) | x \in A\{ = p$$

(vezi 1.62 a). Deci

$$p - \varepsilon < f(x) \leqslant p,$$

în orice punct $x \in B$, ceea ce încheie demonstraţia.

Pentru o funcţie nedescrescătoare f avînd limita p după o direcţie $\mathcal{S}$, se utilizează notaţia $f(x) \nearrow_{\mathcal{S}} p$ sau simplu $f(x) \nearrow p$.

4.54. O funcție numerică f se numește *necrescătoare după o direcție* $\mathcal{S}$ dacă oricare ar fi mulțimile $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{S}$ relația $B \supset A$ antrenează inegalitatea :

$$\inf \{f(x) \mid x \in B \setminus A\} \geqslant \sup \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Pentru funcțiile necrescătoare are loc o teoremă analoagă celei 4.53 :

TEOREMĂ. *Dacă o funcție f este necrescătoare și minorată după o direcție $\mathcal{S}$, atunci ea are o limită după direcția $\mathcal{S}$:*

$$p = \lim_{\mathcal{S}} f(x) = \inf \{f(x) \mid x \in A\},$$

unde A este o mulțime oarecare pe care f este minorată.

Această teoremă rezultă imediat din teorema 4.53, dacă facem observația că, în ipoteza teoremei noastre, $-f$ este nedescrescătoare și majorată după direcția $\mathcal{S}$ și că, dacă $p = \inf \{f(x) \mid x \in A\}$, atunci conform 1.61,

$$\sup \{-f(x) \mid x \in A\} = -p.$$

Pentru o funcție necrescătoare f, care are limita p, se utilizează notația $f(x)_{\mathcal{S}} \searrow p$ sau simplu $f(x) \searrow p$.

4.55. TEOREMĂ. *Dacă o funcție f este nedescrescătoare și nemajorată după direcția $\mathcal{S}$, atunci*

$$\lim_{\mathcal{S}} f(x) = \infty$$

(vezi 4.32 (d)).

Într-adevăr, fie un număr C ; funcția f nefiind majorată după direcția $\mathcal{S}$, există în orice mulțime $B \in \mathcal{S}$, un punct $x_0 \in B$ astfel încît $f(x_0) > C$. Fiind fixată mulțimea B, găsim, în direcția $\mathcal{S}$, o mulțime $A \subset B$ neconținînd punctul x_0. Prin ipoteză

$$C \leqslant \sup \{f(x) \mid x \in B \setminus A\} \leqslant \inf \{f(x) \mid x \in A\};$$

deci inegalitatea

$$f(x) \geqslant C$$

este satisfăcută în orice punct al mulțimii A și teorema este demonstrată.

4.56. Un fapt analog are loc pentru o funcție f necrescătoare după o direcție $\mathcal{S}$:

TEOREMĂ. *Dacă o funcție numerică f este necrescătoare și neminorată după o direcție $\mathcal{S}$, atunci* $\lim_{\mathcal{S}} f(x) = -\infty$.

Demonstrația constă în aplicarea 4.55 funcției $-f$.

§ 4.6. Teoremele fundamentale asupra șirurilor numerice

4.61. Vom aplica teoria generală din paragrafele 4.3—4.5 în cazul șirurilor numerice. Definiția limitei unui șir numeric a fost dată deja în 3.32 (a). O amintim: Un șir numeric $\{y_n\} = \{y_1, \ldots, y_n, \ldots\}$ $(y_n \in \mathbb{R})$ se numește *convergent către un număr* $p \in \mathbb{R}$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există un N natural astfel încît inegalitatea

$$|p - y_n| < \varepsilon$$

să fie satisfăcută de îndată ce $n \geqslant N$.

Numărul p este atunci numit *limita șirului* y_n și se notează:

$$p = \lim_{n \to \infty} y_n.$$

Dacă numerele y_n sînt considerate ca puncte în spațiul închis $\overline{\mathbb{R}}$, definiția unei limite finite rămîne aceeași dar devin posibile de asemenea limite infinite. Un șir $y_1, \ldots, y_n, \ldots$ care converge către $+\infty$ în spațiul $\overline{\mathbb{R}}$ este divergent în spațiul $\mathbb{R}$. Contrar altor șiruri divergente, un astfel de șir este numit *divergent spre* $+\infty$. Un șir divergent spre $-\infty$ este definit într-un mod analog.

4.62. Criteriul lui Cauchy 4.19 pentru șiruri numerice coincide cu cel dat în 3.72:

Un șir numeric $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ are o limită (finită) dacă și numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr N astfel încît

$$|x_m - x_n| < \varepsilon$$

de îndată ce $n \geqslant N$, $m \geqslant N$.

4.63. a. Conform definiției 4.32 (b), un șir $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n, \ldots$ se numește *majorat* pentru $n \to \infty$ (*minorat*, *mărginit*) dacă există un număr C și un număr N astfel încît, pentru orice $n \geqslant N$, are loc inegalitatea $x_n \leqslant C (x_n \geqslant C, |x_n| \leqslant C)$. De altfel, numai un număr finit de numere de la 1 la $N-1$ nu satisfac condiția $n \geqslant N$; mulțimea numerelor $x_1, \ldots, x_{N-1}$ fiind mărginită, putem să nu amintim numărul N în definiția unui șir mărginit; se poate de asemenea omite expresia „pentru $n \to \infty$".

b. Apoi, conform definițiilor 4.51 și 4.54, un șir $x_1, x_2, \ldots$ este numit *nedescrescător* (*necrescător*) pentru $n \to \infty$, dacă există un N astfel încît pentru $n \geqslant N$ este satisfăcută inegalitatea $x_{n+1} \geqslant x_n$ $(x_{n+1} \leqslant x_n)$.

c. În virtutea teoremei 4.53, orice șir $x_1, x_2, \ldots$ majorat și nedescrescător are o limită pentru $n \to \infty$. În mod analog (4.54), un șir $x_1, x_2, \ldots$ minorat și necrescător are de asemenea o limită. Și dacă un șir nedescrescător (necrescător) nu este majorat (minorat), el converge către ∞ $(-\infty)$ (4.55, 4.56).

d. *Exemplu.* Fie șirul numeric

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, \ldots);$$

arătăm că acest șir are limită finită pentru $n \to \infty$. Într-adevăr, conform formulei binomului lui Newton:

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{n^2} +$$

$$+ \frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} + \ldots = 1 + 1 +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots;$$

numărul termenilor acestei sume și fiecare termen cresc cu n, deci numerele u_n cresc de asemenea. În fine, înlo-

cuind $1 - \frac{k}{n}$ prin 1, obţinem

$$u_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} <$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} =$$

$$= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}} < 1 + 2 = 3,$$

deci şirul u_n este majorat. Aplicînd c, rezultă că limita şirului u_n există. Această limită este notată cu litera e :

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Acestea fiind spuse, este clar că $2 < e \leqslant 3$. Un calcul mai exact arată că $e = 2{,}71828\ldots$ Se poate demonstra că numărul e este iraţional (vezi ex. 14 cap. 8) şi chiar transcendent (*teorema lui Hermite* (vezi, de exemplu, [13])).

4.64. Vom da în continuare alte definiţii şi rezultate privind valorile de aderenţă ale şirurilor numerice. Conform definiţiei 4.45, un punct $\xi \in \mathbb{R}$ se numeşte *valoare de aderenţă a unui şir* x_n dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$ şi orice N, există un număr $n \leqslant N$ astfel încît

$$|x_n - \xi| < \varepsilon, \text{ dacă } \xi \text{ este finit,}$$

$$x_n > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ dacă } \xi = \infty,$$

$$x_n < -\frac{1}{\varepsilon} \text{ dacă } \xi = -\infty.$$

Pentru orice n, punem

$$a_n = \inf \{x_n, x_{n+1}, \ldots\} \in \overline{\mathbb{R}},$$

$$b_n = \sup \{x_n, x_{n+1}, \ldots\} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Conform 4.41, intervalele $[a_n, b_n]$ ale dreptei numerice încheiate formează un șir de intervale incluse, cu intersecția $[\xi, \eta]$, unde $\xi = \sup a_n$, $\eta = \inf b_n$. Toate valorile de aderență ale șirului x_n aparțin intervalului $[\xi, \eta]$; în plus, chiar punctele ξ și η sînt totdeauna valori de aderență și se numesc *limita inferioară*, respectiv *superioară* a șirului; le notăm după cum urmează:

$$\xi = \varliminf_{n\to\infty} x_n, \qquad \eta = \varlimsup_{n\to\infty} x_n.$$

Cînd $\xi = \eta$, șirul x_n are limita $\xi = \eta$ ($\in \overline{\mathbb{R}}$). Cînd $\xi = \eta$ sînt finite șirul x_n are limita $\xi = \eta$. Reciproc, dacă șirul x_n are limita p, atunci $\xi = \eta = p$ și șirul x_n are numărul p ca unică valoare de aderență.

4.65. *Limita unui șir și limita unei funcții.* Dacă o funcție f definită pentru orice $t \geqslant t_0$ are limită pentru $t \to \infty$, $\lim_{t\to\infty} f(t) = p$, atunci șirul numerelor

$$y_n = f(n) \quad (n \text{ întreg, superior lui } t_0)$$

are aceeași limită p (4.16 a).

Concluzia reciprocă asupra existenței limitei unei funcții $f(x)$, definită pentru $x \geqslant x_0$ plecînd de la existența limitei șirului $f(n)$ nu este valabilă. Astfel, funcția $f(x) = (x)$ (partea fracționară a lui x, 1.71) nu are limită pentru $x \to \infty$, cu toate că $f(n) = (n) = 0$ are limita 0.

4.66. Totuși are loc următoarea:

TEOREMĂ. *Pentru ca o funcție $f(x)$ definită pentru $x \geqslant x_0$ să aibă limită cînd $x \to \infty$, este necesar și suficient ca orice șir $f(x_n)$ (unde $x_n \geqslant x_0$ este un șir oarecare divergent spre ∞) să aibă limită.*

Demonstrație. 1) Dacă $f(x)$ are limita p pentru $x \to \infty$, atunci orice șir $f(x_n)$, unde $x_n \to \infty$, are aceeași limită p.

Aceasta rezultă din nou din 4.16 a.

2) Dacă $f(x)$ nu are limită pentru $x \to \infty$, atunci criteriul lui Cauchy 4.19 nu este satisfăcut. Deci, pentru un $h > 0$ și pentru orice n, se pot găsi punctele $x_n' > n$, $x_n'' > n$ astfel încît

$$|f(x_n') - f(x_n'')| > h. \tag{1}$$

Considerăm șirul

$$x_1', x_1'', x_2', x_2'', \ldots, x_n', x_n'', \ldots$$

Este evident că el tinde spre ∞ și că șirul valorilor corespunzătoare ale funcției f:

$$f(x_1'), f(x_1''), f(x_2'), f(x_2''), \ldots$$

nu are limită deoarece (1) arată că acest șir nu satisface criteriul lui Cauchy.

Faptele expuse nu exclud totuși posibilitatea de a deduce existența $\lim_{x\to\infty} f(x)$ din existența limitei $\lim_{n\to\infty} f(n)$ $(n \in \mathbb{N})$ dacă punem condiții suplimentare funcției f.

§ 4.7. Limitele funcțiilor vectoriale

4.71. Considerăm aici funcții f cu valori într-un spațiu n-dimensional $\mathbb{R}_n$ (2.61). Spațiul n-dimensional fiind metric, definiția unei limite după direcția $\mathcal{S}$ este aplicabilă, și pentru o astfel de limită proprietățile date în §4.2. sînt valabile. În plus, anumite proprietăți ale limitelor funcțiilor numerice, menționate în §§4.3—4.5, rămîn adevărate pentru funcții cu valori în $\mathbb{R}_n$, anume proprietățile legate de operații liniare și care nu utilizează ordinea. Le prezentăm succesiv.

4.72. Pentru funcții cu valori într-un spațiu n-dimensional $\mathbb{R}_n$ sînt definite următoarele operații:

a) Adunarea: dacă două funcții f și g iau valori într-un spațiu $\mathbb{R}_n$, atunci suma lor, adică funcția care în orice punct $x_0 \in E$ ia valoarea $f(x_0) + g(x_0)$ este o funcție cu valori în $\mathbb{R}_n$.

b) Înmulțirea cu o funcție reală: dacă o funcție f ia valori într-un spațiu $\mathbb{R}_n$ și dacă o funcție α ia valori reale, atunci produsul lor, adică funcția care în orice punct $x_0 \in E$ ia valoarea $\alpha(x_0)f(x_0)$ este o funcție cu valori în spațiul $\mathbb{R}_n$.

c) În cazul $n = 2$, unde funcțiile vectoriale f și g pot fi interpretate ca funcții cu valori complexe, produsul $f(x)g(x)$ și cîtul $\frac{f(x)}{g(x)}$ (ultimul pentru $g(x) \neq 0$) sînt definite după regulile operațiilor cu numere complexe.

4.73. a. Relația $\lim_{\mathcal{S}} f(x) = p \in \mathbb{R}_n$ este echivalentă cu $\lim_{\mathcal{S}} [f(x) - p] = 0$ și cu $\lim_{\mathcal{S}} |f(x) - p| = 0$.

b. O funcție f cu valori în $\mathbb{R}_n$ este mărginită după o direcție $\mathcal{S}$, dacă există un număr finit c și o mulțime $A \in \mathcal{S}$ ale cărei puncte verifică inegalitatea $|f(x)| \leqslant c$.

Dacă f și g sînt mărginite după direcția $\mathcal{S}$, funcția $f + g$ este de asemenea mărginită.

c. Dacă $\lim_{\mathcal{S}} f(x) = p \in \mathbb{R}_n$, $\lim_{\mathcal{S}} g(x) = q \in \mathbb{R}_n$, atunci funcția $f + g$ are, după direcția $\mathcal{S}$, limita egală cu $p + q$:

$$\lim_{\mathcal{S}} [f(x) + g(x)] = \lim_{\mathcal{S}} f(x) + \lim_{\mathcal{S}} g(x).$$

d. Dacă $\lim_{\mathcal{S}} f(x) = p \in \mathbb{R}_n$, $\lim_{\mathcal{S}} \alpha(x) = l \in \mathbb{R}$, atunci funcția $\alpha \cdot f$ are, după direcția $\mathcal{S}$, limita egală cu lp:

$$\lim_{\mathcal{S}} \alpha(x) f(x) = \lim_{\mathcal{S}} \alpha(x) \cdot \lim_{\mathcal{S}} f(x).$$

e. În cazul $n = 2$, unde funcțiile vectoriale f, g pot fi interpretate ca funcții cu valori complexe, astfel ca operația de înmulțire să aibă un sens, avem: dacă $\lim_{\mathcal{S}} f(x) = p \in \mathbb{C}$, $\lim_{\mathcal{S}} g(x) = q \in \mathbb{C}$, atunci

$\lim_{\mathcal{S}} f(x) \cdot g(x) = pq$ și $\lim_{\mathcal{S}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p}{q}$ (ultima egalitate pentru $q \neq 0$).

f. *Exemplu.* În planul complex $\mathbb{C}$ al numerelor complexe $z = x + iy$, definim direcția $z \to \infty$ ca fiind formată din toate mulțimile A_r de forma

$$A_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > r\}.$$

Proprietățile unei direcții (4.11) sînt, evident, îndeplinite și se poate vorbi de existența limitei $\lim_{z \to \infty} f(z)$ pentru funcții $f(z)$ definite pentru $|z| \geqslant r_0$. În particular, dacă $f(z) =$

$= \frac{1}{z}$, pentru $z \neq 0$, avem :

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1}{z} = 0,$$

deoarece, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, avem $|f(z)| = \frac{1}{|z|} < \varepsilon$ pe mulțimea

$$A_{1/\varepsilon} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| > \frac{1}{\varepsilon} \right\}.$$

Apoi, pentru orice polinom de variabilă $\frac{1}{z}$, adică pentru orice polinom de forma

$$a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{z^n}$$

cu coeficienți complecși $a_0, a_1, \ldots, a_n$, avem în virtutea punctelor c și e :

$$\lim_{z\to\infty} \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{z^n} \right) = a_0.$$

4.74. O funcție f cu valori într-un spațiu n-dimensional $\mathbb{R}_n$ poate fi pusă sub forma

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)),$$

unde $f_k(x)$ sînt coordonatele vectorului $f(x)$, care reprezintă funcții numerice. În plus, are loc inegalitatea următoare (2.68(7)) :

$$\max_{k=1,\ldots,n} |f_k(x) - f_k(y)| \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left[f_j(x) - f_j(y) \right]^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} |f_j(x) - f_j(y)|. \qquad (1)$$

De aici tragem o concluzie importantă :

TEOREMĂ. *O funcție f cu valori în $\mathbb{R}_n$ are limită după o direcție $\mathcal{S}$ dacă și numai dacă fiecare funcție numerică $f_1, \ldots, f_n$ are limită după direcția $\mathcal{S}$.*

4.75. Formulăm, pentru spațiul $\mathbb{R}_n$, criteriul lui Cauchy (4.19) care este valabil, deoarece $\mathbb{R}_n$ este spațiu complet (3.72 c).

TEOREMĂ (criteriul lui Cauchy pentru $\mathbb{R}_n$). *Pentru ca o funcție f cu valori în $\mathbb{R}_n$ să aibă limită după direcția $\mathcal{S}$, este necesar și suficient ca pentru orice $\varepsilon > 0$ să existe o mulțime $A \in \mathcal{S}$, astfel încît oricare ar fi două puncte x și y din A să avem :*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon. \tag{1}$$

EXERCIȚII

1. Demonstrați că dacă un șir $x_n \in \mathbb{R}$ este convergent, atunci șirul $|x_n|$ este de asemenea. Reciproca este adevărată?

2. Pentru două șiruri reale oarecare a_n și b_n avem

$$\underline{\lim}\ a_n + \underline{\lim}\ b_n \leqslant \underline{\lim}\ (a_n + b_n) \leqslant \underline{\lim}\ a_n + \overline{\lim}\ b_n,$$

$$\underline{\lim}\ a_n + \overline{\lim}\ b_n \geqslant \underline{\lim}\ (a_n + b_n) \geqslant \underline{\lim}\ a_n + \underline{\lim}\ b_n.$$

3. Dacă un șir a_n converge, atunci orice permutare a sa $a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nk}, \ldots$ converge către aceeași limită. Rezultă convergența unui șir, din convergența unei permutări a termenilor săi?

4. Dacă un șir a_n converge, atunci, pentru orice șir b_n, avem :

$$\overline{\lim}\ (a_n + b_n) = \overline{\lim}\ a_n + \overline{\lim}\ b_n.$$

5. Dacă, pentru un șir a_n și pentru orice șir b_n, avem :

$$\overline{\lim}\ (a_n + b_n) = \overline{\lim}\ a_n + \overline{\lim}\ b_n,$$

atunci șirul a_n converge.

6. Dacă $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = \frac{1}{2}(a + b), \ldots, x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2}), \ldots$ ... Găsiți $\lim x_n$.

7. Fie $a > 0$, $x_0 > 0$ și

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a_n}{x_n}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Demonstrați că $\lim x_n = \sqrt{a}$.

8. (*Media aritmetico-geometrică a lui Gauss*). Fie $a > 0$, $b > 0$; punem $x_1 = a$, $y_1 = b$, ..., $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$, $y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$, ...; demonstrați că numerele x_n și y_n au o limită comună.

9. Dacă $\max\{p_1, \ldots, p_m\} = p_1$ $(p_1 > 0, \ldots, p_m > 0)$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{m} p_k^n} = p_1.$$

10. O dreaptă $y = kx + b$ se numește *asimptota* curbei $y = f(x)$ pentru $x \to +\infty$, dacă

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0.$$

Demonstrați că $y = f(x)$ are o asimptotă pentru $x \to +\infty$, dacă și numai dacă limitele

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - x \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \right]$$

există simultan.

11. Fie f o funcție definită pe un spațiu metric M cu valori într-un spațiu metric P. Spunem că un punct $p \in P$ este limita „tare" a funcției f după direcția $x \to a \in M$ dacă, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un $\delta > 0$ astfel încît, oricare ar fi $x \in M$, cu $\rho(x, a) < \delta$ (fără a fi exceptat punctul $x = a$), inegalitatea $\rho(f(x), p) < \varepsilon$ să fie satisfăcută. Limita „tare" nu se încadrează direct în schema 4.12 a limitei după o direcție. Arătați că pentru ca un punct $p \in P$ să fie limita „tare" a funcției f pentru $x \to a$, este necesar și suficient ca p să fie limita funcției f după direcția $x \to a$ și, în plus, $f(a) = p$.

12. Fie $y(x)$ o funcție definită pe o mulțime X pe care este dată o direcție $\mathcal{S} = \{A_\alpha\}$ și cu valori într-un spațiu metric Y; fie $z(y)$ o funcție definită pe Y cu valori într-un spațiu metric Z. Funcția compusă $z(x) = z[y(x)]$ este definită pe X și ia valori în Z. Presupunem că limitele

$$p = \lim_{\mathcal{S}} y(x) \in Y, \qquad q = \lim_{y\to p} z(y) \in Z$$

există.

Se poate spune că $\lim z(x)$ există de asemenea? Dacă da, este egală cu q?

13. În ipoteza exercițiului 12, demonstrați propozițiile următoare:

a) Dacă există o mulțime $A \in \mathcal{S}$ pe care $y(x)$ nu ia valoarea p, atunci $z(x)$ are limita q.

b) Dacă există o mulțime $A \in \mathcal{S}$ pe care $y(x)$ este identic egală cu p, atunci $z(x)$ are limita $z(p)$.

c) Dacă, pe orice mulțime $A \in \mathcal{S}$, funcția $y(x)$ ia valoarea p alături de alte valori diferite de p, atunci funcția $z(x)$ are limită dacă și numai dacă

$q = z(p)$ (adică q este limita „tare" a funcției z pentru $y \to p$) și în acest caz:

$$\lim_{S} z(x) = q.$$

NOTĂ ISTORICĂ

Prima definiție corectă a limitei unei funcții numerice a fost dată de Cauchy în *Curs de analiză pentru Școala Politehnică* (1821). Cauchy a stabilit teoremele fundamentale asupra existenței limitelor de diverse tipuri, în particular al limitelor funcțiilor și șirurilor monotone. De asemenea, el a introdus noțiunile de limită superioară și inferioară. Noțiunile cele mai generale de limită sînt propuse de Șatunovski (1923), Moore și Smith (1923). Convergența „după o direcție" este un caz special al noțiunii de convergență „după un filtru", datorată lui H. Cartan (1937) [5].

Capitolul 5

FUNCȚII CONTINUE

> Scopul meu principal a fost de a concilia rigoarea, din care mi-am făcut o lege în cursul meu de analiză, cu simplitatea care rezultă din considerarea directă a cantităților infinit mici.
>
> **August Cauchy (1823)**

§ 5.1. Funcții continue pe un spațiu metric

5.11. Fie f o funcție dată pe un spațiu metric M cu valori într-un spațiu metric P. Fie $a \in M$ un punct fixat care nu este izolat (4.15 a). Considerăm direcția $x \to a$ (4.15 a) formată din sferele $U_r(a) = \{x \mid \rho(x, a) \leqslant r\}$ din care este eliminat centrul a.

a. DEFINIȚIE. Funcția f se numește *continuă în punctul* $x = a$ (punctul a este atunci numit *punct de continuitate al funcției* f) dacă

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Altfel spus, funcția f este continuă pentru $x = a$ dacă și numai dacă, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un $\delta > 0$ astfel încît de îndată ce $\rho(x, a) < \delta$ să rezulte

$$\rho(f(x), f(a)) < \varepsilon. \tag{1}$$

Pentru f numerică, inegalitatea (1) ia, în mod natural, forma :

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

b. Din 4.66 rezultă o altă definiție a continuității : funcția f este continuă pentru $x = a$ dacă pentru orice șir $x_n \to a$ (în M) rezultă $f(x_n) \to f(a)$ (în P).

c. Orice punct izolat $a \in M$ este, prin definiție, un punct de continuitate al funcției f.

d. DEFINIȚIE. Orice punct x_0 care nu este punct de continuitate al funcției f se numește *punct de discontinuitate.*

e. DEFINIȚIE. O funcție continuă în orice punct al spațiului M se numește *continuă pe* M.

f. Definiția continuității funcției f într-un punct a, depinde, în mod natural, de metricile date pe spațiile M și P. Această definiție putînd fi formulată în termeni de șiruri convergente b), proprietatea unei funcții de a fi continuă într-un punct a, sau pe toată mulțimea M, se păstrează înlocuind metricile spațiilor M și P prin metrici homeomorfe.

5.12. a. O funcție constantă

$$f(x) = y_0,$$

y_0 fiind un punct fixat în spațiul P (4.21) este un exemplu evident de funcție continuă definită pe M cu valori în P.

b. Pentru a da un alt exemplu, considerăm distanța $\rho(x, a)$ la un punct fixat a. Aceasta este o funcție numerică pe spațiul metric M. Continuitatea sa în orice punct $x = x_0$ al spațiului M, rezultă din 3.32 b.

5.13. Următoarele propoziții relative la funcții numerice permit construirea unor clase largi de funcții continue.

a. *Dacă două funcții numerice f și g sînt continue în $x = x_0$, atunci $h = f + g$ este de asemenea continuă pentru $x = x_0$.*

Aceasta este o consecință a lui 4.36 a.

b. *Dacă f și g sînt continue în $x = x_0$, atunci $p = f \cdot g$ este de asemenea continuă pentru $x = x_0$.*

Aceasta este o consecință a lui 4.36 b.

c. *Dacă f și g sînt continue pentru $x = x_0$ și $g(x_0) \neq 0$, atunci $q = \frac{f}{g}$ este de asemenea continuă în $x = x_0$.*

Aceasta este o consecință a lui 4.36 c.

d. Funcția numerică $y = x$ definită pe dreapta numerică $\mathbb{R}$ este, evident, continuă pe $\mathbb{R}$. Din propozițiile a, b și c rezultă că *orice funcție polinomială* $x \mapsto a_0 +$

$+ a_1x + \ldots + a_nx^n$ *este funcție continuă pe* $\mathbb{R}$ *și că orice funcție rațională* $r(x) = \dfrac{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m}$ *este continuă pe* $\mathbb{R}$ *cu excepția punctelor unde numitorul se anulează.*

c. Funcția numerică $y = \xi_k$ (cea de a k-a coordonată a vectorului $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ este evident o funcție continuă pe spațiul n-dimensional $\mathbb{R}_n$ cu valori în $\mathbb{R}$. Din propozițiile a-c rezultă că *orice polinom în raport cu coordonatele vectorului* x *este continuu pe* $\mathbb{R}_n$ *și orice funcție rațională de coordonatele vectorului* x *este continuă pe* $\mathbb{R}_n$, *cu excepția punctelor unde se anulează numitorul său.*

5.14. Fie f o funcție continuă definită pe spațiul metric M, cu valori într-un spațiu metric P. Fie, de asemenea, $G \subset P$ o mulțime și $H = \{x \in M \mid f(x) \in G\}$.

a. Dacă G este deschis, H este de asemenea.

Într-adevăr, fie $x_0 \in H$, $f(x_0) \in G$ și fie $V = \{y \in P \mid \rho(y, f(x_0)) < \varepsilon\}$ o sferă de centru $f(x_0)$, situată în domeniul G. Găsim un $\delta > 0$ astfel încît $\rho(x, x_0) < \delta$ să implice $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Atunci sfera $U = \{x \mid \rho(x, x_0) < \delta\}$ este în H.

b. *Dacă* G *este închis,* H *este de asemenea.*

Într-adevăr, mulțimea $\{x \mid f(x) \in P \setminus G\}$, care este deschisă în virtutea punctului a, este complementara mulțimii $\{x \mid f(x) \in G\}$ în M.

c. *Consecință.* Dacă f este o funcție numerică continuă, atunci, pentru orice $c \in \overline{\mathbb{R}}$ real, mulțimile

$$\{x \in M \mid f(x) < c\},$$

$$\{x \in M \mid f(x) > c\}$$

sînt deschise, iar mulțimile

$$\{x \mid f(x) \leqslant c\},$$

$$\{x \mid f(x) \geqslant c\},$$

$$\{x \mid f(x) = c\}$$

închise.

d. Dacă $f_1, \ldots, f_m$ sînt funcţii numerice continue, atunci oricare ar fi $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m$ reale (în $\overline{\mathbb{R}}$), mulţimea

$$\{x \mid a_1 < f_1(x) < b_1, \ldots, a_m < f_m(x) < b_m\} \qquad (1)$$

este deschisă, iar mulţimea

$$\{x \mid a_1 \leqslant f_1(x) \leqslant b_1, \ldots, a_m \leqslant f_m(x) \leqslant b_m\} \qquad (2)$$

închisă.

Aceasta rezultă din punctul c ţinînd cont de teoremele asupra intersecţiei de mulţimi deschise (3.22) şi închise (3.54).

e. Avînd în vedere propoziţia din punctul d, configuraţiile din geometria elementară descrise de sistemele de inegalităţi (1) sau (2) sînt, respectiv, deschise sau închise. Astfel, într-un spaţiu n-dimensional, o mulţime de forma

$$\{x \mid a_1 < x_1 < b_1, \ldots, a_n < x_n < b_n\}$$

este deschisă, iar o mulţime de forma

$$\{x \mid a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_n, \ldots, a_n \leqslant x_n \leqslant b_n\}$$

este închisă; prima este numită *paralelipiped deschis*, a doua *paralelipiped închis*.

În planul x_1, x_2, un poligon descris de m inegalităţi de forma $a_j x_1 + b_j x_2 < c_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ este o mulţime deschisă numită *m-gon deschis*; dacă înlocuim, în inegalităţile de mai sus simbolul $<$ prin $\leqslant$ se obţine un *m-gon închis*. În spaţiul n-dimensional, se definesc într-un mod analog poliedre deschise şi închise cu ajutorul unor inegalităţi definite prin funcţii liniare de coordonate.

Mulţimile menţionate mai sus care sînt închise şi în acelaşi timp mărginite sînt compacte în virtutea 3.96 e.

5.15. *Continuitatea unei funcţii compuse.*

a. Fie M, N, P spaţii metrice înzestrate cu distanţele ρ_M, ρ_N, ρ_P respectiv. Fie $y = f(x)$, $z = \varphi(y)$ două funcţii ale căror domenii de definiţie şi domenii de valori sînt respectiv M, N şi N, P. Funcţia compusă $z = \varphi[f(x)] = h(x)$ este definită în M şi ia valori în P.

TEOREMĂ. *Dacă* $y = f(x)$ *este continuă pentru* $x = x_0$ *şi* $z = \varphi(y)$ *este continuă pentru* $y = y_0 = f(x_0)$, *atunci funcţia* $z = h(x)$ *este continuă pentru* $x = x_0$.

Demonstraţie. Fie un $\varepsilon > 0$. Plecînd de la condiţia $\lim_{y \to y_0} \varphi(y) = \varphi(y_0)$, găsim un număr $\tau > 0$, astfel încît de îndată ce $\rho_N(y, y_0) < \tau$ să avem: $\rho_P(\varphi(y), \varphi(y_0)) < \varepsilon$. Apoi, din condiţia $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ şi cu τ găsit, alegem un $\delta > 0$ astfel încît $\rho_M(x, x_0) < \delta$ să implice $\rho_N(y, y_0) = \rho_N(f(x), f(x_0)) < \tau$. Atunci, pentru $\rho_M(x, x_0) < \delta$, avem

$$\rho_P(h(x), h(x_0)) = \rho_P(\varphi(x)), \varphi(f(x_0)) = \rho_P(\varphi(y), \varphi(y_0)) < \varepsilon,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

b. Dacă f este o funcţie continuă definită pe un spaţiu metric M, cu valori într-un spaţiu metric N şi dacă $b \in N$ este un punct fixat, atunci funcţia numerică h, definită prin

$$h(x) = \rho(f(x), b),$$

este o funcţie continuă de x.

Este o consecinţă a lui 5.12 b.

Dacă, în particular, o funcţie numerică f (cu valori în $\mathbb{R}$) este continuă pe un spaţiu metric M, atunci funcţia $|f(x)| = \rho(f(x), 0)$ este de asemenea continuă.

5.16. *Funcţii continue pe un compact.* Funcţiile continui pe un spaţiu metric compact M (3.91 a) au anumite proprietăţi specifice pe care le studiem aici şi în 5.17.

a. TEOREMĂ. *Mulţimea tuturor valorilor unei funcţii continue definite pe un compact* M *este compactă.*

Demonstraţie. Fie $f(x_1), \ldots, f(x_n), \ldots$ un şir oarecare de valori ale unei funcţii continue f definită pe un compact M. Extragem din şirul de puncte $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ un subşir convergent $x_{n_k} (k = 1, 2, \ldots)$; de exemplu, $x_{n_k} \to a$. Funcţia f fiind continuă în $x = a$, avem $f(x_{n_k}) \to f(a)$. Astfel, din şirul $f(x_n)$ s-a extras un subşir convergent, ceea ce trebuia demonstrat.

b. CONSECINŢĂ (teorema lui Weierstrass). *O funcţie numerică continuă (cu valori în* $\mathbb{R}$*) definită pe un compact* M *este mărginită şi îşi atinge marginile pe* M, *adică,*

dacă $\alpha = \inf f(x)$, $\beta = \sup f(x)$, *există punctele* $q \in M$, $p \in M$, *astfel încît* $\alpha = f(q)$, $\beta = f(p)$.

Demonstrația este imediată, dacă se ține cont de 5.16 a și de proprietățile unei mulțimi compacte pe dreapta numerică (3.96 f).

c. În ipoteza din punctul b, alegem pentru compactul M intervalul $a \leqslant x \leqslant b$ al dreptei numerice, și fie $f(a) = f(b)$. Atunci, putem afirma că cel puțin unul din punctele p, q ce apar în teorema lui Weierstrass se află în intervalul (a, b). Într-adevăr, dacă funcția f este constantă și egală cu $f(a)$, se poate alege pentru $p = q$ orice punct al intervalului (a, b). Presupunem că f nu este constantă și că anumite valori ale ei pot fi mai mari, de exemplu, decît $f(a)$. Atunci $\beta = \sup f(x) > f(a)$. Conform teoremei lui Weierstrass există un punct $p \in [a, b]$ pentru care $f(p) = \beta$. Dar $f(a) = f(b) < \beta$, deci $p \in (a, b)$. Dacă f ia valori mai mici decît $f(a)$, se face un raționament analog pentru punctul q în care $\inf f(x)$ este atins.

5.17. *Continuitate uniformă.*

a. DEFINIȚIE. O funcție f definită pe un spațiu metric M, cu valori în spațiul metric P se numește *uniform continuă* pe M, dacă $(\forall)\varepsilon > 0$, există un $\delta > 0$, astfel încît dacă $\rho(x_1, x_2) < \delta$, atunci $\rho[f(x_1), f(x_2)] < \varepsilon$ oricare ar fi punctele x_1, x_2 din M.

Este evident că orice funcție uniform continuă este continuă în orice punct al spațiului.

Dar, în cazul general, continuitatea unei funcții f într-un spațiu M, nu implică uniform continuitatea sa. De exemplu, funcția $y = x^2$ este continuă pe semiaxa $0 \leqslant x < \infty$ (5.13 d) fără a fi uniform continuă pe ea, deoarece

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$$

și condiția $|x_1 - x_2| < \delta$ nu implică în mod sigur că $|x_1^2 - x_2^2|$ este mărginită de o constantă.

b. În cazul cînd U este un compact metric, are loc teorema următoare:

TEOREMĂ (Heine). *O funcție continuă f definită pe un compact metric K, cu valori într-un spațiu metric P, este uniform continuă pe K.*

Demonstrație. Presupunem că funcția f nu este uniform continuă pe K. Atunci, pentru un $\varepsilon > 0$ și pentru orice $\delta > 0$, există două puncte x', x'' în K pentru care $\rho(x', x'') < \delta$, dar $\rho[f(x'), f(x'')] \geqslant \varepsilon$. Dăm numărului δ valorile succesive : $\delta = 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ Pentru orice $\delta = \frac{1}{n}$, găsim perechi de puncte corespunzătoare x_n' și x_n'' astfel încît $\rho(x_n', x_n'') < \delta = \frac{1}{n}$ dar

$$\rho[f(x_n'), f(x_n'')] \geqslant \varepsilon. \tag{1}$$

Deoarece K este un compact, se poate extrage din șirul x_n' un subșir convergent $x_{n_1}', x_{n_2}', \ldots, x_{n_k}', \ldots \to x_0 \in K$. Cum $\rho(x_{n_k}', x_{n_k}'') < \frac{1}{n_k}$, avem

$$\rho(x_{n_k}'', x_0) \leqslant \rho(x_{n_k}'', x_{n_k}') + \rho(x_{n_k}', x_0) \to 0,$$

adică $x_{n_1}'', x_{n_2}'', \ldots, x_{n_k}'', \ldots \to x_0$. Funcția f este definită și continuă în $x = x_0$; fiind dat ε, găsim $\delta_0 > 0$ astfel încît :

$$\rho[f(x), f(x_0)] < \frac{\varepsilon}{2}$$

de îndată ce $\rho(x, x_0) < \delta_0$. Deoarece $x_{n_k}' \to x_0$, $x_{n_k}'' \to x_0$, ultima inegalitate este satisfăcută pentru orice puncte x_{n_k}', x_{n_k}'' începînd de la un anumit rang. Deci, pentru acele puncte, avem

$$\rho[f(x_{n_k}'), f(x_0)] < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \rho[f(x_{n_k}''), f(x_0)] < \frac{\varepsilon}{2},$$

de unde

$$\rho[f(x_{n_k}'), f(x_{n_k}'')] < \varepsilon,$$

ceea ce contrazice (1). Teorema este demonstrată.

c. *Oscilația unei funcții.* Fie din nou f o funcție definită pe un spațiu metric M cu valori într-un spațiu metric P. Construim funcția numerică

$$\omega_f(\delta) = \sup_{\rho(x_1, x_2) \leqslant \delta} \rho(f(x_1), f(x_2)).$$

Ea are ca argument un număr pozitiv δ. Dacă funcția f este uniform continuă pe M, atunci $\omega_f(\delta)$ este finită pentru orice δ suficient de mic și, conform definiției continuității uniforme, rezultă

$$\lim_{\delta \to 0} \omega_f(\delta) = 0. \tag{2}$$

În particular, dacă M este compact, acest lucru este adevărat totdeauna, conform teoremei lui Heine.

Reciproc, dacă $\omega_f(\delta)$ este finită pentru orice $\delta > 0$ suficient de mic și dacă egalitatea (2) este satisfăcută, atunci funcția f este uniform continuă pe spațiul M.

ω_f se numește *oscilația* funcției f pe spațiul M.

d. Pentru funcțiile numerice f (care iau valori pe dreapta numerică $\mathbb{R}_1$ înzestrată cu metrica uzuală $\rho(f, g) = |f - g|$), funcția $\omega_f(\delta)$ are următoarele proprietăți:

1) $\omega_{f+g}(\delta) \leqslant \omega_f(\delta) + \omega_g(\delta)$;

2) $\omega_{Af}(\delta) = A\omega_f(\delta)$ ($A > 0$ constantă);

3) $\omega_{fg}(\delta) \leqslant \sup |f(x)| \cdot \omega_g(\delta) + \omega_f(\delta) \sup |g(x)|$.

Primele două proprietăți rezultă direct din definiție. Pentru a stabili pe cea de a treia, folosim inegalitatea:

$$|f(x_1)g(x_1) - f(x_2)g(x_2)| =$$

$$= |f(x_1)g(x_1) - f(x_1)g(x_2) + f(x_1)g(x_2) - f(x_2)g(x_2)| \leqslant$$

$$\leqslant |f(x_1)|\,|g(x_1) - g(x_2)| + |f(x_1) - f(x_2)|\,|g(x_2)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup |f(x)| \cdot |g(x_1) - g(x_2)| + |f(x_1) - f(x_2)| \cdot \sup |g(x)|.$$

5.18. *Funcții continue de două variabile.* În analiză întîlnim adesea funcții continue de două variabile (sau mai multe). Fie M_1 și M_2 două spații metrice și ρ_1, ρ_2 metricile respective. O funcție $f(x_1, x_2)$ avînd ca argumente perechile (x_1, x_2) cu $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$ și care ia valori în spațiul metric P, se numește *continuă în raport cu ansamblul variabilelor* x_1, x_2 în punctul (x_1^0, x_2^0) dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un $\delta > 0$ astfel încît $\rho[f(x_1, x_2), f(x_1^0, x_2^0)] < \varepsilon$ de îndată ce $\rho_1(x_1, x_1^0) < \delta$, $\rho_2(x_2, x_2^0) < \delta$. Este ușor de văzut că în fond această definiție nu este nouă și coincide cu definiția continuității funcției $f(x_1, x_2)$ ca funcție de o variabilă $x = (x_1, x_2)$ care este un punct al mulțimii $M = M_1 \times M_2$ — produsul spațiilor metrice $M_1 \times M_2$. Amintim (3.16) că, în produsul cartezian M, metrica este definită după regula: dacă $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, se pune $\rho(x, y) = \max [\rho_1(x_1, y_1), \rho_2(x_2, y_2)]$. Se poate considera funcția $f(x_1, x_2)$ de două variabile ca funcție $f(x)$ de variabila $x = (x_1, x_2)$; continuitatea sa în punctul $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ înseamnă că pentru orice $\varepsilon > 0$, există un $\delta > 0$, astfel încît de îndată ce $\rho(x, x^0) = \max[\rho_1(x_1, x_1^0), \rho_2(x_2, x_2^0)] < \delta$ să avem $|f(x) - f(x^0)| < \varepsilon$. Inegalitatea $\rho(x, x^0) < \delta$ fiind echivalentă cu două inegalități $\rho_1(x_1, x_1^0) < \delta$ și $\rho_2(x_2, x_2^0) < \delta$, cele două definiții date continuității sînt echivalente.

În (3.16) am pus în evidență alte două metrici pe produsul $M = M_1 \times M_2$. Deoarece ele sînt homeomorfe cu metrica utilizată mai sus (3.34 e), nu este nevoie să le mai descriem aici; din 5.11 f, rezultă că mulțimea funcțiilor continue (cu valori într-un spațiu fixat P) este aceeași pentru fiecare din cele trei metrici.

§ 5.2. Funcții numerice continue pe dreapta numerică

5.21. a. În paragrafele 5.2—5.7, considerăm funcții $f(x)$ de variabilă x ce parcurge o mulțime $E \subset \overline{\mathbb{R}}$, care este înzestrată cu metrica r a spațiului $\overline{\mathbb{R}}$ (3.35 e). Presupunem de asemenea că și valorile funcției f sînt luate în spațiul $\overline{\mathbb{R}}$. De altfel, dacă x_0 este finit, atunci, metrica r fiind homeomorfă cu metrica uzuală $\rho(x, y) = |x - y|$ pe mulțimi mărginite, se poate întrebuința metrica uzuală (3.13 a) dacă este în discuție continuitatea funcției f pentru $x = x_0$; similar se procedează dacă $f(x_0)$ este finit.

b. Considerăm din acest punct de vedere

$$f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}$$

definită pentru $x \in \mathbb{R}$, cu excepția punctelor unde numitorul se anulează. Dacă f se prelungește în punctele $+\infty$, $-\infty$, prin

$$f(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} f(x), \quad f(\infty) = \lim_{x \to \infty} f(x)$$

(existența acestor limite în $\overline{\mathbb{R}}$ a fost demonstrată în 4.39 d), atunci se obține o funcție cu valori în $\overline{\mathbb{R}}$ care este de asemenea continuă în punctele $\pm\infty$.

c. LEMĂ. *Dacă o funcție numerică cu valori în* $\overline{\mathbb{R}}$ *este continuă pentru* $x = a \in \overline{\mathbb{R}}$, *atunci oricare ar fi* $\varepsilon > 0$, *există o sferă* V_δ *centrată în* a, *adică o mulțime de forma*

$$|x - a| < \delta, \text{ dacă } a \text{ este finit},$$

$$x > \frac{1}{\delta}, \text{ dacă } a = +\infty,$$

$$x < -\frac{1}{\delta}, \text{ dacă } a = -\infty,$$

în punctele căreia sînt verificate inegalitățile

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon, \text{ dacă } f(a) \text{ este finit},$$

$$f(x) > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ dacă } f(a) = +\infty,$$

$$f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}, \text{ dacă } f(a) = -\infty.$$

În particular, sfera V_δ poate fi aleasă în așa fel încît în orice punct al său, valoarea funcției f să fie de același semn cu $f(a)$, dacă $f(a) \neq 0$.

Aceasta rezultă din 4.34. a, b, din definiţia metricii în $\overline{\mathbb{R}}$ (în particular, 3.35 f) şi din definiţia continuităţii.

5.22. TEOREMĂ (Bolzano). *Dacă o funcţie numerică f cu valori în $\overline{\mathbb{R}}$ este continuă pe un interval $[a, b] \subset \overline{\mathbb{R}}$ şi ia valori de semne contrare la extremităţile intervalului, atunci există în interiorul intervalului un punct c pentru care $f(c) = 0$.*

Demonstraţie. Fie, pentru a fixa ideile, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Conform 5.21 c, inegalitatea $f(x) < 0$ rămîne valabilă pentru orice x suficient de apropiat de a şi inegalitatea $f(x) > 0$ este valabilă pentru orice x suficient de apropiat de b. Punem

$$c = \sup \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\}.$$

Datorită celor spuse anterior, punctul c nu coincide nici, cu a, nici cu b. Conform definiţiei marginii superioare, avem $f(x') \geqslant 0$ pentru $x' > c$ şi, pentru orice $\delta > 0$, există un $x'' > c - \delta$ astfel încît $f(x'') < 0$. Aşadar, în orice vecinătate a punctului c, există puncte x' şi x'' astfel încît $f(x') \geqslant 0$, $f(x'') < 0$. Dar conform 5.21 c, aceasta este imposibil dacă $f(c) \neq 0$. Deci $f(c) = 0$, ceea ce trebuia demonstrat.

5.23. *Consecinţă. Dacă o funcţie f este continuă pe un interval $[a, b]$, $A = f(a) \neq f(b) = B$ şi dacă un număr C este cuprins între numerele A şi B, atunci există un punct $c \in [a, b]$, astfel încît $f(c) = C$.*

Într-adevăr, funcţia f fiind continuă, $f(x) - C$ este de asemenea continuă şi verifică ipoteza teoremei lui Bolzano. Aplicînd teorema, se obţine rezultatul cerut (corolarul 5.23 se mai enunţă astfel : orice funcţie continuă pe un interval are proprietatea lui Darboux).

5.24. *Continuitatea la stînga şi la dreapta.* Avînd în vedere aplicaţiile ulterioare, considerăm anumite tipuri de direcţii în domeniul $\overline{\mathbb{R}}$ al numerelor reale finite. Conform definiţiei 4.15 b, direcţia $x \to a$ ($\neq \pm \infty$) este mulţimea tuturor intervalelor $(a - h, a + h)$, $0 < h < h_0$, din care este scos punctul a. Definim direcţia $x \nearrow a$ ca fiind mulţimea tuturor intervalelor $(a - h, a)$ şi direcţia $x \searrow a$ ca mulţimea tuturor intervalelor $(a, a + h)$ $(0 < h < h_0)$.

Dacă o funcţie f este definită în intervalul $(a - h_0, a)$, se pune problema existenţei limitei $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x)$ pe care o vom nota (dacă ea există) prin $f(a - 0)$. Dacă o funcţie f este definită pe intervalul $(a, a + h_0)$ se pune problema existenţei limitei $\lim\limits_{x \searrow a} f(x)$ pe care o vom nota cu $f(a + 0)$. Dacă o funcţie f este definită în intervalul $(a - h_0, a + h_0)$ (cu excepţia eventual a punctului a), se pune problema existenţei limitei $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. Fiind dat că, pentru orice h, $0 < h < h_0$:

$$(a - h, a) \subset (a - h, a + h) - \{a\},$$

$$(a, a + h) \subset (a - h, a + h) - \{a\},$$

$$(a - h, a + h) - \{a\} = (a - h, a) \cup (a, a + h),$$

se poate aplica rezultatul 4.16 punînd

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq a\}, \quad G = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\},$$

$$H = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}.$$

Aplicate în cazul discutat, aceste rezultate conduc la următoarea concluzie : existenţa limitei $\lim\limits_{x \to a} f(x) = p$ antrenează existenţa limitelor $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = \lim\limits_{x \searrow a} f(x) = p$ şi, reciproc, existenţa şi egalitatea limitelor $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = \lim\limits_{x \searrow a} f(x) = p$ antrenează existenţa limitei $\lim\limits_{x \to a} f(x) = p$.

Presupunem că funcţia f este definită şi în punctul $x = a$. Egalitatea $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ defineşte continuitatea lui f pentru a. Egalitatea $f(a) = \lim\limits_{x \nearrow a} f(x)$ se exprimă spunînd că funcţia f este *continuă la stînga în punctul* a. Egalitatea $f(a) = \lim\limits_{x \searrow a} f(x)$ se exprimă spunînd că funcţia f este *continuă la dreapta în punctul* a. O funcţie f continuă în punctul a la stînga şi la dreapta este continuă în a.

§ 5.3. Funcţii monotone

5.31. Fie f o funcţie cu valori în $\overline{\mathbb{R}}$ definită pe o mulţime $E \subset \overline{\mathbb{R}}$. Dacă $x \in E$, $y \in E$, $x < y$ implică una din cele pa-

tru inegalităţi :

(a) $f(x) < f(y)$,

(b) $f(x) \leqslant f(y)$,

(c) $f(x) > f(y)$,

(d) $f(x) \geqslant f(y)$,

atunci funcţia f este, respectiv, (a) *crescătoare pe* E; (b) *nedescrescătoare pe* E; (c) *descrescătoare pe* E; (d) *necrescătoare pe* E. În fiecare din cele patru cazuri, funcţia f este numită *monotonă* pe E.

5.32. O funcţie crescătoare (resp. descrescătoare) nu ia o valoare C decît pentru o singură valoare x. O funcţie necrescătoare (resp. nedescrescătoare) poate lua această valoare în mai multe puncte.

Rezultatele 5.33—5.36 sînt formulate şi demonstrate pentru funcţii nedescrescătoare; lăsăm cititorului grija de a stabili enunţuri analoage pentru funcţii necrescătoare.

5.33. Presupunem că $x_0 \in E$ nu este extremitatea stîngă a intervalului $E = [a, b]$ pe care este definită o funcţie nedescrescătoare f. Funcţia f este nedescrescătoare după direcţia E $(x \nearrow x_0)$ în sensul 4.51; deoarece ea este majorată după această direcţie (de exemplu, de valoarea $f(x_0)$), atunci, conform teoremei 4.53, există

$$f(x_0 - 0) = \lim_{E(x \nearrow x_0)} f(x) = \sup \{f(x) \mid x < x_0,\ x \in E\}.$$

într-un mod analog, considerînd direcţia $E(x \searrow x_0)$ şi aplicînd teorema 4.54 ajungem la existenţa limitei

$$f(x_0 + 0) = \lim_{E(x \searrow x_0)} f(x) = \inf \{f(x) \mid x > x_0,\ x \in E\}$$

în orice punct x_0 distinct de extremitatea dreaptă a intervalului $[a, b]$. Pentru punctele a şi b, punem prin definiţie :

$$f(a - 0) = f(a), \quad f(b + 0) = f(b).$$

5.34. Deoarece $f(x'') \leqslant f(x_0) \leqslant f(x')$ oricare ar fi $x'' \leqslant x_0$ și $x' \geqslant x_0$, avem conform 1.62, $f(x_0 - 0) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0 + 0)$. Dacă $f(x_0 - 0) = f(x_0)$, funcția f este continuă la stînga în $x = x_0$; dacă $f(x_0) = f(x_0 + 0)$, ea este continuă la dreapta. Egalitatea $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, la fel ca și egalitatea $f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0)$ care rezultă din prima, reprezintă o condiție necesară și suficientă a continuității unei funcții nedescrescătoare f în $x = x_0$.

5.35. Discutăm cazul $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$. Un astfel de punct x_0 este un punct de discontinuitate al funcției f. Valorile funcției f la stînga punctului x_0 nu depășesc $f(x_0 - 0)$; cele la dreapta punctului x_0 sînt cel puțin egale cu $f(x_0 + 0)$; valoarea $f(x_0)$ aparține intervalului

$$I = [f(x_0 - 0),\ f(x_0 + 0)].$$

Dar aceasta spune că nici un număr din intervalul I, eventual cu o singură excepție, nu este valoare a funcției f. Rezultă de aici o condiție suficientă, foarte utilizată, de continuitate a unei funcții nedescrescătoare.

5.36. Dacă o funcție f nedescrescătoare pe un interval $[a, b]$ ia pentru $x \in [a, b]$ orice valoare din intervalul $[f(a), f(b)]$, atunci f este continuă pe $[a, b]$.

Într-adevăr, în ipoteza formulată, inegalitatea $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$ nu este posibilă pentru nici un punct $x_0 \in [a, b]$. Deci, în virtutea lui 5.34, funcția f este continuă în orice punct $x_0 \in [a, b]$.

Condiția enunțată este de asemenea necesară (5.23).

5.37. *Funcția inversă.*

DEFINIȚIE. Fie o funcție $y = f(x)$ definită pe o mulțime E și luînd valori într-o mulțime F și fie φ o funcție definită pe F cu valori în E. Funcția φ este numită *inversa* funcției f dacă $\varphi[f(x)] = x$ pentru orice $x \in E$ și $f[\varphi(y)] = y$ pentru orice $y \in F$.

5.38. TEOREMĂ. *Presupunem că o funcție numerică* $y = f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ *este definită, continuă și crescătoare pe un interval* $[a, b] \subset \overline{\mathbb{R}}$. *Atunci, pe intervalul* $[f(a), f(b)]$, *există*

o funcție $\varphi(y)$, inversă a funcției $f(x)$, care este de asemenea continuă și crescătoare.

Demonstrație. Pentru $y = f(a) = A$, punem $\varphi(A) = a$; pentru $y = f(b) = B$, punem $\varphi(B) = b$; pentru orice $y = C \in (f(a), f(b))$, punem $\varphi(y)$ egală cu valoarea (unică) c, pentru care

$$f(c) = C.$$

Prin urmare, funcția $\varphi(y)$ este definită pe $[A, B]$ în așa fel încît, oricare ar fi $x \in [a, b]$, $y \in [A, B]$, să avem :

$$\varphi[f(x)] = x, \quad f[\varphi(y)] = y.$$

Este evident că $y_1 < y_2$ implică $x_1 < x_2$, deci $\varphi(y_1) < \varphi(y_2)$, deci funcția φ este crescătoare. Continuitatea sa rezultă din faptul că ea ia orice valoare din intervalul $a \leqslant x \leqslant b$ (5. 36). Teorema este demonstrată.

b. Examinăm acum cazul cînd funcția f este dată nu pe un interval închis, ci pe un interval deschis și vom demonstra că acest caz se reduce la cel precedent. Fie o funcție $y = f(x)$ definită, continuă și crescătoare pe un interval $(a, b) \subset \overline{\mathbb{R}}$. Punem $A = f(a) = \lim\limits_{x \searrow a} f(x)$, $B = f(b) = \lim\limits_{x \nearrow b} f(x)$ (5.33); funcția f este atunci definită pe intervalul $[a, b]$ unde ea este de asemenea continuă și crescătoare. Aplicînd teorema demonstrată mai înainte, obținem : *există o funcție $\varphi(y)$ definită, continuă și crescătoare pe intervalul $[A, B] \subset \overline{\mathbb{R}}$ care este inversa funcției $f(x)$*. Considerînd $f(x)$ numai pe intervalul (a, b) ajungem la următorul rezultat :

TEOREMĂ. *O funcție $y = f(x)$ definită, continuă și crescătoare pe intervalul $(a, b) \subset \overline{\mathbb{R}}$ admite funcția inversă $\varphi(y)$ definită, continuă și crescătoare pe intervalul $(A, B) \subset \overline{\mathbb{R}}$, unde*

$$A = \lim_{x \searrow a} f(x), \quad B = \lim_{x \nearrow b} f(x).$$

5.39. *Graficul funcției inverse.* Fiind dat graficul unei funcții numerice $y = f(x)$ pe intervalul $[a, b]$, graficul funcției inverse trebuie, natural, să fie construit pe inter-

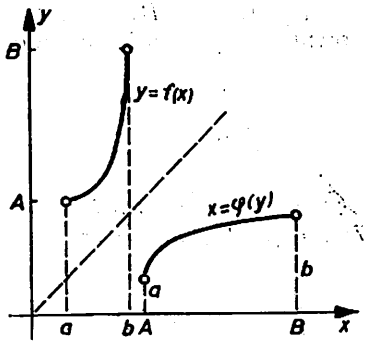


Fig. 5.1.

valul $[A, B]$, unde $A = f(a)$, $B = f(b)$. Dacă luăm aceste intervale pe aceeași axă, atunci graficul funcției inverse $x = \varphi(y)$ va fi simetric cu cel al funcției $y = f(x)$ în raport cu bisectoarea primului cadran: într-adevăr, un punct $(x, y = f(x))$ este simetricul punctului $(y, x = \varphi(y))$ în raport cu bisectoarea amintită (fig. 5.1).

§ 5.4. Logaritmul

5.41. TEOREMĂ. *Pentru* $x > 0$, *există o funcție unică* $y = f(x)$ *satisfăcînd condițiile*:

1) $f(xy) = f(x) + f(y)$ *oricare ar fi* x, y *pozitivi*;

2) $f(a) = 1$ *pentru un* $a > 1$ *dat;*

3) f *este o funcție crescătoare: dacă* $x < y$, *atunci* $f(x) < f(y)$.

Demonstrație. (vezi [12]). Mai întîi, presupunînd că funcția f există, să o explicităm. Din 1) rezultă că $f(1) = 2f(1)$, de unde $f(1) = 0$. De asemenea, din 1) și 2) rezultă că $f(a^n) = nf(a) = n$ pentru orice n natural. Conform 1.72, pentru orice $n \geqslant 1$, se poate determina un m, astfel încît $a^m \leqslant x^n < a^{m+1}$. Cum $f(x)$ este crescătoare, rezultă din inegalitatea $a^m \leqslant x^n < a^{m+1}$ că $f(a^m) = m \leqslant f(x^n) = nf(x) < f(a^{m+1}) = m + 1$; astfel, pentru orice $n \geqslant 1$,

se poate găsi un m astfel încît

$$\frac{m}{n} \leqslant f(x) < \frac{m+1}{n}.$$

Aceasta spune că numărul $f(x)$ este definit în mod unic, ca punct comun tuturor intervalelor $\left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right]$ de lungime arbitrar de mică. Acum, vom utiliza aceste considerații pentru a construi funcția $f(x)$. Punem $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, ..., $n_k = 2^k$ și pentru un k dat, găsim un m_k astfel încît să avem :

$$a^{m_k} \leqslant x^{n_k} < a^{m_k+1}.$$

Acesta determină segmentul $\left[\frac{m_k}{n_k}, \frac{m_k+1}{n_k}\right]$. Arătăm că intervalul următor $\left[\frac{m_{k+1}}{n_{k+1}}, \frac{m_{k+1}+1}{n_{k+1}}\right]$ este inclus în cel precedent. Într-adevăr, rezultă din inegalitatea

$$a^{m_k} \leqslant x^{n_k} < a^{m_k+1}$$

că

$$a^{2m_k} \leqslant x^{2n_k} = x^{n_{k+1}} < a^{2(m_k+1)},$$

de unde $m_{k+1} \geqslant 2m_k$, $m_{k+1} + 1 \leqslant 2(m_k + 1)$,

$$\frac{m_k}{n_k} = \frac{2m_k}{2n_k} \leqslant \frac{m_{k+1}}{n_{k+1}} < \frac{m_{k+1}+1}{n_{k+1}} \leqslant \frac{2(m_k+1)}{2n_k} = \frac{m_k+1}{n_k}.$$

Astfel, intervalele $\left[\frac{m_k}{n_k}, \frac{m_k+1}{n_k}\right]$ formează un șir de intervale închise, incluse și, conform principiului lui Cantor (1.81), ele au un punct comun; conform 1.82, el este unic deoarece lungimea intervalelor tinde la zero pentru $k \to \infty$. Alegem pentru valoarea $f(x)$ numărul ce corespunde acestui punct comun.

Arătăm acum că funcția f astfel construită satisface condițiile 1) —3). Fie x și y, pentru un k dat, găsim m_k și p_k astfel încît

$$a^{m_k} \leqslant x^{n_k} < a^{m_k+1}, \quad a^{p_k} \leqslant y^{n_k} < a^{p_k+1},$$

în sensul că

$$\frac{m_k}{n_k} \leqslant f(x) \leqslant \frac{m_k+1}{n_k}, \quad \frac{p_k}{n_k} \leqslant f(y) \leqslant \frac{p_k+1}{n_k}. \qquad (1)$$

De aici rezultă

$$a^{m_k+p_k} \leqslant (xy)^{n_k} < a^{m_k+p_k+2},$$

adică

$$\frac{m_k+p_k}{n_k} \leqslant f(xy) \leqslant \frac{m_k+p_k+2}{n_k}.$$

Dar din (1) rezultă că

$$\frac{m_k+p_k}{n_k} \leqslant f(x)+f(y) \leqslant \frac{m_k+p_k+2}{n_k}.$$

Astfel,

$$|f(x)+f(y)-f(xy)| \leqslant \frac{2}{n_k};$$

n_k fiind arbitrar, aplicăm 1.57 și găsim egalitatea 1).

pentru $x=a$, obținem egalitatea evidentă $f(a)=1$. Pentru $x>1$, există un n astfel încît $a \leqslant x^n$, deci, conform definiției funcției $f(x)$, avem $f(x) \geqslant \frac{1}{n}$. În particular, pentru orice $x>1$, avem $f(x)>0$. În consecință, $f(xy)=f(x)+f(y)>f(x)$ pentru orice $y>1$ și funcția f este crescătoare; teorema este demonstrată.

5.42. Funcția f care satisface condițiile 1—3 din (5.41) și a cărei existență și unicitate o vom demonstra, se numește *logaritmul lui x în baza a* și se notează prin $\log_a x$. Formulele 1—3 din 5.41 pentru $a>1$ pot fi acum scrise astfel:

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y; \qquad (1)$$

$$\log_a a = 1; \qquad (2)$$

dacă $x<y$, atunci $\log_a x < \log_a y$. (3)

Apoi, (1) implică următoarele formule:

$$\log_a x^n = n \log_a x \text{ pentru orice } n \text{ natural}; \tag{4}$$

$\log_a 1 = \log_a 1^2 = 2 \log_a 1$, de unde

$$\log_a 1 = 0; \tag{5}$$

$$\log_a \left(x \cdot \frac{1}{x} \right) = \log_a 1 = \log_a x + \log_a \frac{1}{x} = 0,$$

de unde

$$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x;$$

aşadar,

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y. \tag{6}$$

De aceea, formula (4) este valabilă pentru orice n întreg.

5.43. Arătăm că logaritmul este o funcţie continuă de x. Pentru $\varepsilon > 0$ dat, găsim $n > \frac{1}{\varepsilon}$ şi punem $h = \sqrt[n]{a}$. Deoarece $h^n = a$, atunci $n \log_a h = \log_a h^n = \log_a a = 1$, adică $\log_a h = \frac{1}{n}$, $\log_a \frac{1}{h} = -\frac{1}{n}$. Deci, în intervalul $\frac{1}{h} \leqslant x \leqslant h$ avem inegalitatea

$$-\varepsilon < -\frac{1}{n} \leqslant \log_a x \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

ceea ce demonstrează continuitatea funcţiei $\log_a x$ pentru $x = 1$.

Pentru un y_0 oarecare şi pentru $y = xy_0$, $\frac{1}{h} < x < h$, avem $\log_a y = \log_a x + \log_a y_0$, deci

$$|\log_a y - \log_a y_0| = |\log_a x| \leqslant \varepsilon.$$

Intervalul $\left(\frac{1}{h}y_0,\ hy_0\right)$ conținînd un interval $(y_0 - \delta,$ $y_0 + \delta)$, funcția $\log_a x$ este continuă în punctul $x = y_0$.

5.44. Stabilim legătura care există între logaritmii în două baze diferite a și b. Considerăm funcția

$$f(x) = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

Evident, ea satisface condițiile 1) și 3) (5.41) care apar în definiția logaritmului și în plus are loc egalitatea:

$$f(b) = \frac{\log_a b}{\log_a b} = 1.$$

În virtutea unicității logaritmului, avem $f(x) = \log_b x$. Deci, oricare ar fi $a > 1$, $b > 1$, $x > 0$, avem relația

$$\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x. \tag{1}$$

5.45. Semnalăm relațiile limită

$$\lim_{x \to \infty} \log_a x = \infty, \quad \lim_{x \searrow 0} \log_a x = -\infty.$$

Prima, rezultă, în virtutea teoremei 4.55, din faptul că pentru $x \to \infty$ funcția $\log_a x$ crește și nu este mărginită (deoarece, de exemplu, $\log_a (a^n) = n$ pentru orice n). A doua, se reduce la prima conform egalității:

$$\log_a \left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = \log_a x + \log_a \frac{1}{x} = \log_a 1 = 0.$$

Relațiile de mai sus permit să completăm definiția logaritmului prin condițiile $\log_a 0 = -\infty$, $\log_a \infty = \infty$, deci $\log_a x$ este o funcție cu valori în $\overline{\mathbb{R}}$, continuă pentru $0 \leqslant x \leqslant \infty$.

§ 5. Exponențiala

5.51. Funcția continuă crescătoare $y = \log_a x\ (a > 1)$ admite, conform teoremei funcției inverse (5.38), o funcție inversă care se numește *funcția exponențială* sau mai scurt

exponențiala și care este notată prin $y = a^x$. O exponențială este definită pentru orice x real, iar valorile ei sînt numere pozitive. Astfel:

$$a^{\log_a x} = x, \quad \log_a (a)^x = x. \tag{1}$$

Pe de altă parte, pentru orice n natural avem:

$$\log_a (\underbrace{a \ldots a}_{n \text{ ori}}) = \log_a a + \ldots + \log_a a = n.$$

Ultima egalitate arată că simbolul a^x este compatibil cu notația anterioară $a^n = a \ldots a$ pentru n natural.

Dacă $x = 1/n$, obținem $\log_a a^{1/n} = 1/n$, de unde

$$n \log_a a^{1/n} = \log_a (a^{1/n})^n = 1, \quad (a^{1/n})^n = a,$$

adică $a^{1/n}$ este rădăcina de ordinul n a lui a (1.63).

5.52. Ca și funcția $y = \log_a x$, funcția inversă $y = a^x$ este de asemenea crescătoare și continuă pentru orice x. Avem următoarele egalități

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \tag{1}$$

$$(a^x)^z = a^{xz} \tag{2}$$

oricare ar fi x, y, z reali. Într-adevăr, fie $x = \log_a \xi$, $y = \log_a \eta$; avem

$$a^{x+y} = a^{\log_a \xi + \log_a \eta} = a^{\log_a \xi \eta} = \xi\eta = a^x \cdot a^y;$$

relația (2) se demonstrează analog.

Înlocuind x prin b^x în 5.44 (1) se obține

$$\log_a (b^x) = \log_a b \cdot \log_b b^x = x \log_a b. \tag{3}$$

5.53. Definițiile logaritmului și exponențialei pot fi extinse la cazul unei baze $b \in (0, 1)$. Anume, punînd $b = \frac{1}{a}$, deci $a > 1$, avem prin definiție (ținînd cont de formula 5.44 (1)):

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} = -\log_a x = -\log_{1/b} x.$$

Deci, funcția $\log_b x$ descrește cînd x crește; proprietățile analoage lui 5.41 1) și 2) rămîn valabile. Apoi,

$$b^x = 1/a^x = a^{-x};$$

deci $b^{\log_b x} = a^{-\log_b x} = a^{\log_a x} = x$ și

$$\log_b(b^x) = -\log_a(a^{-x}) = x,$$

deci formulele 5.51(1) și deci 5.52(1) și (2) care decurg din ele rămîn valabile.

5.54. Exponențiala este strîns legată de *funcția putere* cu un exponent real oarecare. Funcția putere este definită pentru $x > 0$ conform 5.51, unde se înlocuiește a prin x și x prin a: deci

$$y = x^a.$$

Această funcție se exprimă printr-o funcție exponențială și o funcție logaritmică, după formula:

$$y = (b^{\log_b x})^a = b^{a \log_b x} \tag{1}$$

pentru orice $b < 1$, de unde rezultă continuitatea sa conform teoremei 5.15. Aceeași formulă, dacă înlocuim x prin pq $(p, q > 0)$ și aplicăm 5.42 (1) și 5.52(1), conduce la egalitatea:

$$(pq)^a = p^a \cdot q^a. \tag{2}$$

5.55. *Relații limită pentru logaritm și exponențială.* Au loc relațiile următoare:

$$\lim_{x \to \infty} b^x = \begin{cases} \infty, \text{ dacă } b > 1, \\ 0, \text{ dacă } b < 1; \end{cases} \tag{1}$$

$$\lim_{x \to \infty} a^x = \begin{cases} 0, \text{ dacă } a > 1, \\ \infty, \text{ dacă } a < 1; \end{cases} \tag{2}$$

$$\lim_{x \to \infty} \log_a x = \begin{cases} \infty, \text{ dacă } a > 1, \\ -\infty, \text{ dacă } a < 1; \end{cases} \tag{3}$$

$$\lim_{x \searrow 0} \log_a x = \begin{cases} -\infty, \text{ dacă } a > 1, \\ +\infty, \text{ dacă } a < 1; \end{cases} \tag{4}$$

$$\lim_{x\to\infty} x^b = \begin{cases} \infty, \text{ dacă } b>0, \\ 0, \text{ dacă } b<0 ; \end{cases} \tag{5}$$

$$\lim_{x\searrow 0} x^b = \begin{cases} 0, \text{ dacă } b>0, \\ \infty, \text{ dacă } b<0. \end{cases} \tag{6}$$

Demonstrație. Prima relație (1) are loc deoarece b^x, pentru $b>1$ și $x\to\infty$ crește și nu este mărginită (valorile ei acoperă tot domeniul de definiție al funcției $y=\log_a x$, adică toată dreapta numerică), a doua se deduce din prima înlocuind b cu $\frac{1}{b}$. Relațiile (2) se obțin din (1) înlocuind x prin $-x$. Prima relație (3) este stabilită în 5.45 ; a doua se obține în virtutea definiției lui $\log_a x$ pentru $a<1$. Înlocuind în (3) x cu $\frac{1}{x}$, avem relația (4). Pentru a deduce (5) și (6), trecem la logaritmi și folosim (1) — (4).

Relațiile obținute permit să construim graficele logaritmului, exponențialei și al funcției putere de bază oarecare (fig. 5.2 — 5.4).

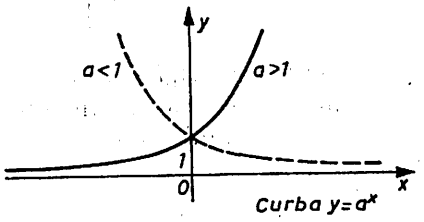


Fig. 5.2.

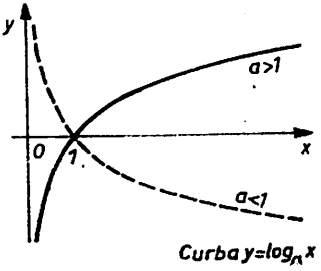


Fig. 5.3.

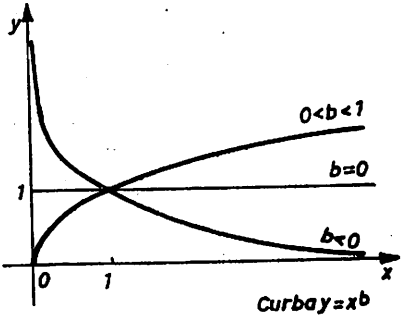


Fig. 5.4.

Funcția a^x cu $a > 1$, care este definită pentru $x \in \mathbb{R}$, poate fi definită și în punctele $\pm\infty$ punînd :

$$a^{-\infty} = 0, \qquad a^{+\infty} = \infty,$$

după care, ea este continuă pe $\overline{\mathbb{R}}$ (cu valori în $\overline{\mathbb{R}}$). Dacă $a < 1$, ultima afirmație este adevărată dacă punem :

$$a^{-\infty} = \infty, \qquad a^{+\infty} = 0.$$

5.56. Înainte de a trece la alte relații limită, vom demonstra o lemă.

LEMĂ. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n^r} = \infty$ *pentru orice* $a > 1$ *și orice* r *real.*

Într-adevăr, fie un număr b din intervalul $(1, a)$. Conform proprietății 5.54 (2), avem egalitatea :

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)^r} : \frac{a^n}{n^r} = \frac{a}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^r}. \tag{1}$$

Membrul al doilea al lui (1) tinde spre a pentru $n \to \infty$, în virtutea continuității funcției x^r în punctul $x = 1$, și de aceea începînd cu un anumit număr $n = N$, devine mai mare ca b. Atunci

$$\frac{a^{N+1}}{(N+1)^r} \geqslant \frac{a^N}{N^r} \cdot b,$$

$$\frac{a^{N+2}}{(N+2)^r} \geqslant \frac{a^{N+1}}{(N+1)^r} \cdot b \geqslant \frac{a^N}{N^r} \cdot b^2,$$

. . . . . .

$$\frac{a^{N+k}}{(N+k)^r} \geqslant \frac{a^N}{N^r} \cdot b^k,$$

și egalitatea

$$\lim_{k\to\infty} b^k = \infty$$

(care rezultă din 5.55(1)), demonstrează lema.

5.57. Lema 5.56 fiind demonstrată, indicăm cîteva relații pentru logaritm și exponențială.

TEOREMĂ. *Au loc următoarele relații*:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^r} = \infty ; \tag{1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{x^p} = 0 ; \tag{2}$$

$$\lim_{x\searrow 0} x^p \log_a x = 0 ; \tag{3}$$

$$\lim_{x\searrow 0} x^{(x^p)} = 1 ; \tag{4}$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x^p} = 1. \tag{5}$$

(Aici $a>1$, r este un număr real oarecare și p un număr pozitiv oarecare.)

Demonstrație. Dacă se găsește, pentru un $x>0$ dat, un n astfel încît $n \leqslant x < n+1$, atunci

$$\frac{a^x}{x^r} \geqslant \frac{a^n}{(n+1)^r} = \frac{1}{a}\,\frac{a^{n+1}}{(n+1)^r},$$

de unde rezultă (1), în virtutea lemei 5.56. Relația (2) se obține din (1) înlocuind x prin $\log_a x$ și ridicînd la puterea $p = \frac{1}{r}$. Înlocuind x prin $\frac{1}{x}$ în (2), se găsește (3). În sfîrșit, (4) rezultă din (3), renunțînd la logaritmi, iar (5) din (4), înlocuind x prin $\frac{1}{x}$. Astfel, exponențiala $y = a^x$, $a>1$ crește, pentru $x \to \infty$, mai repede decît orice putere x^r. Funcția logaritmică

$$y = \log_b x \quad (b>1),$$

din contră, crește, pentru $x \to \infty$, mai lent ca puterea x^β $(\beta>0)$.

5.58. Ținînd cont de legătura care există între limita unei funcții $f(x)$ pentru $x \to \infty$ și limita unui șir $f(n)$ pentru $n \to \infty$ (4.65), putem găsi următoarele limite de șiruri :

$$\lim_{n\to\infty} b^n = \begin{cases} \infty, \text{ dacă } b > 1, \\ 0, \text{ dacă } b < 1 \end{cases} \tag{1}$$

(aceasta rezultă din 5.55(1)) ;

$$\lim_{n\to\infty} \log_a n = \begin{cases} \infty, \text{ dacă } a > 1, \\ -\infty, \text{ dacă } a < 1 \end{cases} \tag{2}$$

(se deduce din 5.55(3)) ;

$$\lim_{n\to\infty} n^b = \begin{cases} \infty, \text{ dacă } b > 0, \\ 0, \text{ dacă } b < 0 \end{cases} \tag{3}$$

(rezultă din 5.55(5)) ;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^r} = \infty \quad (a > 1, -\infty < r < \infty) \tag{4}$$

(rezultă din 5.57(1)) ;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n^p} = 0 \quad (a > 1, p > 0) \tag{5}$$

(se deduce din 5.57(2)) ;

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \tag{6}$$

(rezultă din 5.57(5) pentru $p = 1$).

5.59. *Funcția exponențială și numărul* e. Conform 4.63 d,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} = 2{,}71828 \ldots \tag{1}$$

a. Considerăm funcția $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ definită pentru $x \neq 0$. Se găsește astfel că :

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}. \tag{2}$$

Subliniem că aceasta nu rezultă direct din relația (1), (4.65), ci trebuie să utilizăm particularitățile funcției f. Pentru un $x > 1$ dat, găsim un $n = n(x)$ natural, astfel încît $n \leqslant x < n + 1$; dacă $x \to \infty$ atunci și $n \to \infty$. Avem:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \geqslant \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}}.$$

Membrii secunzi ai acestor două inegalități au aceeași limită e pentru $n \to \infty$. Pentru un $\varepsilon > 0$ dat, găsim un N astfel încît, pentru orice $n > N$, diferența între fiecare din membrii săi și numărul e să fie inferioară lui ε. Atunci, pentru $x > N + 1$, mărimea intermediară $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ va diferi de e printr-un număr inferior lui ε. Astfel (2) este stabilit.

b. Vom mai arăta că:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{3}$$

Într-adevăr, pentru $y \to \infty$, avem:

$$\left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \frac{1}{\left(\frac{y-1}{y}\right)^y} = \left(\frac{y}{y-1}\right)^y =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right) \to e,$$

de unde, înlocuind y prin $-x$ și aplicînd 5.59 a și 4.17 c, obținem rezultatul căutat.

c. În particular, din punctul b decurge

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

rezultat ce se putea obține direct din definiția lui e (1).

d. TEOREMĂ.

$$\lim_{z\to 0} \frac{\log_a (1+z)}{z} = \log_a e. \tag{4}$$

Demonstrație. Avem $\frac{\log_a(1+z)}{z} = \log_a(1+z)^{\frac{1}{z}}$; punem $z = \frac{1}{x}$ și, bazîndu-ne pe rezultatele din punctele a, b și pe continuitatea logaritmului, ajungem la rezultatul căutat.

Formula (4) ia o formă particulară simplă dacă alegem ca bază a, numărul e. Logaritmii în baza e sînt numiți *logaritmi naturali* (sau *neperieni*) și sînt notați :

$$\log_e x = \log \text{ nat } x = \ln x.$$

În cazul logaritmilor naturali, formula (4) se reprezintă sub forma :

$$\lim_{z\to 0} \frac{\ln(1+z)}{z} = 1. \tag{5}$$

Folosind unitatea asimptotică E (4.39), acest rezultat ia forma următoare :

$$\ln(1+z) = z \cdot E \quad (E \to 1 \text{ pentru } z \to 0). \tag{6}$$

d. TEOREMĂ.

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \frac{1}{\log_a e}. \tag{7}$$

Demonstrație. Punem $a^h - 1 = \frac{1}{x}$; atunci $a^h = 1 + \frac{1}{x}$, $h = \log_a\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ și

$$\frac{a^h - 1}{h} = \frac{\frac{1}{x}}{\log_a\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\log_a\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x},$$

de unde, în virtutea punctelor a şi b, a continuităţii logaritmului şi a corespondenţei între direcţiile $h \to 0$ şi $x \to +\infty$, decurge rezultatul căutat (4.17 a). Folosind logaritmii naturali, rezultă relaţia mai simplă :

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1. \tag{8}$$

Aceeaşi formulă, cu unitatea asimptotică este :

$$e^h = 1 + Eh, \; E \to 1 \text{ pentru } h \to 0. \tag{9}$$

f. Să observăm, pentru teorema următoare, că deşi numărul e nu figurează în enunţul său, va fi dificil să o demonstrăm fără a folosi acest număr, cît şi limitele care sînt legate de el.

TEOREMĂ. *Pentru orice p real,*

$$\lim_{z \to 0} \frac{(1 + z)^p - 1}{z} = p. \tag{10}$$

Demonstraţie. Aplicînd (6) şi (9) se găseşte

$$\ln (1 + z) = zE_1, \; 1 + z = e^{zE_1};$$

$$(1 + z)^p = e^{pzE_1} = 1 + pzE_1E_2 = 1 + pzE, \tag{11}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Relaţia (11) arată, printre altele, că rezultatul 4.39 b demonstrat pentru p natural este valabil pentru orice p real.

g. Merită o atenţie specială relaţia (11) pentru $p = -1$:

$$\frac{1}{1 + z} = 1 - zE. \tag{12}$$

Iată o relaţie mai generală şi destul de utilizată : pentru $\alpha \neq \beta$

$$\frac{1 + \alpha zE_1}{1 + \beta zE_2} = 1 + (\alpha - \beta)zE \quad (E_1, E_2, E \to 1 \text{ pentru } z \to 0). \tag{13}$$

Ea se deduce din (12) cu ajutorul următoarelor transformări simple :

$$\frac{1 + \alpha z E_1}{1 + \beta z E_2} = (1 + \alpha z E_1)(1 - \beta z E_2 E_3) =$$

$$= 1 + \alpha z E_1 - \beta z E_2 E_3 - \alpha\beta z^2 E_1 E_2 E_3 =$$

$$= 1 + z(\alpha E_1 - \beta E_2 E_3 - \alpha\beta z E_1 E_2 E_3);$$

ultima expresie dintre paranteze avînd, evident, limita $\alpha - \beta$, se obține (13).

§ 5.6. Funcții trigonometrice

5.61. Definițiile funcțiilor trigonometrice folosite în geometrie nu sînt bazate pe axiomele numerelor reale și nu vom insista asupra acestor definiții. În trigonometrie, se deduc relațiile :

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \tag{1}$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x; \tag{2}$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y; \tag{3}$$

$$0 < \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x} \tag{4}$$

pentru orice $x > 0$ suficient de mic, de exemplu, pentru $0 < x < \varepsilon_0$, cu ε_0 convenabil.

Definim $\sin x$ și $\cos x$ ca funcții date pentru orice x reali și verificînd relațiile (1) — (4). Apoi, în capitolul 8, dăm o demonstrație a existenței și a unicității acestor funcții ; considerațiile care urmează sînt, desigur, condiționate de existența funcțiilor $\sin x$ și $\cos x$ verificînd (1)— — (4).

5.62. Punînd în 5.61 (1) — (3) $x = y = 0$, avem următoarele egalități :

$$\sin^2 0 + \cos^2 0 = 1; \tag{1}$$

$$\sin 0 = 2 \sin 0 \cdot \cos 0; \tag{2}$$

$$\cos 0 = \cos^2 0 - \sin^2 0. \tag{3}$$

Din (2) rezultă : sau $\sin 0 = 0$, sau $\cos 0 = \frac{1}{2}$.

Dar (1) și (3) implică

$$1 + \cos 0 = 2 \cos^2 0, \qquad (4)$$

de unde se vede că egalitatea $\cos 0 = \frac{1}{2}$ este imposibilă. Deci $\sin 0 = 0$ și din (1) decurge că $\cos 0 = \pm 1$. Egalitatea (4) permite să alegem din valorile lui $\cos 0$, ca singura posibilă $\cos 0 = 1$. Deci

$$\sin 0 = 0, \quad \cos 0 = 1. \qquad (5)$$

5.63. Înlocuind în 5.61 (2), (3) y prin $-x$ și aplicînd 5.62 (5), avem :

$$0 = \sin x \cos(-x) + \sin(-x) \cos x,$$

$$1 = \cos x \cos(-x) - \sin x \sin(-x).$$

Rezolvarea acestui sistem liniar în raport cu $\sin(-x)$ și $\cos(-x)$ dă :

$$\sin(-x) = -\sin x, \ \cos(-x) = \cos x. \qquad (1)$$

Scăzînd din egalitatea 5.61(2) aceeași inegalitate unde y este înlocuit cu $-y$ și aplicînd (1) găsim :

$$\sin(x + y) - \sin(x - y) = 2 \sin y \cos x.$$

Același procedeu aplicat egalității 5.61(3) conduce la

$$\cos(x + y) - \cos(x - y) = -2 \sin x \sin y.$$

Înlocuind în formulele obținute $x + y$ prin α și $x - y$ prin β, adică $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $y = \frac{\alpha - \beta}{2}$ aceste formule se scriu

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}; \qquad (2)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}. \qquad (3)$$

5.64. a. Din 5.61 (1) rezultă că, pentru orice x,

$$|\sin x| \leqslant 1, \quad |\cos x| \leqslant 1.$$

b. Aplicînd a şi 5.63 (2), (3), vom demonstra continuitatea funcţiilor $\sin x$ şi $\cos x$. Presupunem că $x > y$ şi că diferenţa $x - y$ este suficient de mică. Atunci

$$|\sin x - \sin y| = 2 \sin \frac{x-y}{2} \left| \cos \frac{x+y}{2} \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sin \frac{x-y}{2} < 2 \cdot \frac{x-y}{2} = x - y,$$

de unde rezultă continuitatea funcţiei $\sin x$. Într-un mod analog,

$$|\cos x - \cos y| = 2 \left| \sin \frac{x+y}{2} \right| \sin \frac{x-y}{2} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sin \frac{x-y}{2} \leqslant x - y,$$

de unde rezultă continuitatea funcţiei $\cos x$.

c. Conform relaţiei 5.61 (4) şi ţinînd cont de teorema 4.34 h, avem :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \tag{1}$$

deoarece 5.61 (4) implică, pentru $0 < x < \varepsilon_0$, cu ε_0 convenabil,

$$\frac{1}{\cos x} < \frac{\sin x}{x} < 1$$

şi termenii extremi ai acestei inegalităţi tind la 1 pentru $x \searrow 0$. În plus, ţinînd cont de 5.63(1), avem

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{(-x) \searrow 0} \frac{\sin(-x)}{-x} = 1. \tag{2}$$

Reunind formulele (1) și (2) se obține

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{3}$$

5.65. a. Să arătăm acum că funcția $y=\cos x$ se anulează pentru anumiți $x>0$. Punem $\beta=\inf\limits_{x>0}\{\cos x\}$. Dacă $\beta>0$, atunci din 5.63 (2), rezultă că pentru un x suficient de mic și pentru orice $m=1,2,\ldots$

$$\sin(m+1)x-\sin mx\geqslant 2\beta\sin\frac{x}{2}>0;$$

deci valorile lui $\sin mx$ cresc oricît de mult odată cu m, ceea ce contrazice 5.64 a. Deci $\beta=0$. Arătăm că există un punct x_0 astfel încît $\cos x_0=0$. Presupunem că $\cos x>0$ pentru orice $x\geqslant 0$. Rezultă atunci din 5.63 (2) că funcția $\sin x$ crește, deci (conform 5.61 (1)) $\cos x$ descrește. Fiind dat $\inf\limits_{x>0}\{\cos x\}=0$, există un punct z_0 astfel încît $\cos x<\frac{5}{13}$ pentru $x>z_0$ și, în consecință, $\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}>\frac{12}{13}$. Pentru $y=x>z_0$, formula 5.61 (2) dă

$$\frac{12}{13}<\sin 2x=2\sin x\cos x<2\cdot 1\cdot\frac{5}{13}=\frac{10}{13},$$

ceea ce este imposibil. Deci există puncte unde $\cos x$ se anulează.

b. Punem

$$\frac{\pi}{2}=\inf\{x>0\mid\cos x=0\}. \tag{1}$$

Numărul $\pi/180$ se numește un *grad;* astfel $\pi/2$ valorează 90 de grade (90°). Funcția $\cos x$ fiind continuă, $\cos\pi/2=0$, $\sin\pi/2=1$. Pe intervalul $[0,\pi/2]$ funcția $\sin x$ crește și

cos x descrește. În plus, formulele 5.61 (2), (3) dau :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cos x+\cos\frac{\pi}{2}\sin x=\cos x, \quad (2)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos x-\sin\frac{\pi}{2}\sin x=-\sin x, \quad (3)$$

de unde

$$\sin(x+\pi)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x, \quad (4)$$

$$\cos(x+\pi)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x. \quad (5)$$

c. În plus.

$$\sin(x+2\pi)=-\sin(x+\pi)=\sin x, \quad (6)$$

$$\cos(x+2\pi)=-\cos(x+\pi)=\cos x. \quad (7)$$

O funcție $y=f(x)$ ce satisface, pentru un $T>0$ și pentru orice x, ecuația $f(x+T)=f(x)$ se numește *periodică* și numărul T se numește *perioada* sa. Vom vedea că funcțiile sin x și cos x sînt funcții periodice de perioadă 2π. Pentru o perioadă 2π, semnele acestor funcții determinate după formulele (2) — (5) variază în felul următor :

	$0<x<\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}<x<\pi$	$\pi<x<\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$	
semnul lui sin x	+	+	−	−	(8)
semnul lui cos x	+	−	−	+	

Vedem că dacă $\sin x\neq 0$ și $\cos x\neq 0$ pentru un x dat, atunci semnele lui sin x și cos x determină în mod univoc o pătrime a intervalului $0<x<2\pi$ care conține x.

Graficele funcțiilor sin x și cos x sînt reprezentate în fig. 5.5 (pentru moment, nu sîntem în măsură să demon-

străm că sensul convexității curbelor este acela care se vede pe grafice, aceasta o vom face în 7.55). Numărul π este 3,14159 ... (exerc. 15, cap. 9).

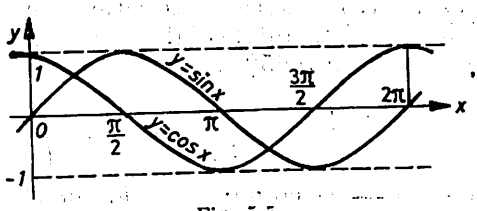


Fig. 5.5.

5.66. LEMĂ. *Dacă, pentru anumiți x și u, egalitățile*

$$\left.\begin{aligned} \sin(x+u) &= \sin u, \\ \cos(x+u) &= \cos u, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

au loc, atunci $x = 2k\pi$, unde k este număr întreg.

Demonstrație. Rezolvînd sistemul de ecuații:

$$\sin(x+u) = \sin x \cos u + \cos x \sin u = \sin u,$$

$$\cos(x+u) = \cos x \cos u - \sin x \sin u = \cos u$$

în raport cu $\cos x$ și $\sin x$, găsim:

$$\cos x = 1, \sin x = 0. \qquad (2)$$

În intervalul $0 \leqslant x < 2\pi$, conform 5.65, ecuațiile (2) nu sînt satisfăcute decît pentru $x = 0$. Deoarece funcțiile $\cos x$ și $\sin x$ au perioada 2π, ecuațiile (2) sînt satisfăcute pentru $x = 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) și nu sînt satisfăcute de nici o altă valoare x. Lema este demonstrată.

5.67. Am văzut că funcția $\sin x$ crește pe intervalul $[0, \pi/2]$; în virtutea egalității $\sin(-x) = -\sin x$, ea crește și pe intervalul $[-\pi/2, \pi/2]$ variind între -1 și $+1$. Conform teoremei funcției inverse (5.38), funcția sa inversă este definită pe intervalul $[-1, 1]$ și se notează $\arcsin x$; această funcție este crescătoare, continuă și ia valorile

în intervalul $[-\pi/2, \pi/2]$. Funcția $\cos x = \sin(x + \pi/2)$ crește pe intervalul $[-\pi, 0]$ variind între $-1, +1$; deci funcția sa inversă pe care o notăm cu $\arccos x$ este definită pe intervalul $[-1, 1]$. Această funcție este crescătoare, continuă și ia valori în intervalul $[-\pi, 0]$.

Deoarece, conform 5.65(2),

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x,$$

notăm prin u valoarea comună a celor două cantități și

$$x = \arccos u, \quad x + \frac{\pi}{2} = \arcsin u;$$

așadar, pentru orice $u \in [-1, 1]$,

$$\arccos u + \frac{\pi}{2} = \arcsin u. \tag{1}$$

Se poate defini o altă funcție $\arccos u$, plecînd de la ramura descrescătoare a funcției $\cos x$ pe intervalul $[0, \pi]$. Funcția inversă este și ea descrescătoare pe intervalul $[-1, 1]$ și variază de la π la 0. În loc de formula $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos u$, ce leagă funcțiile $\sin x$ și $\cos x$ pe intervalele unde se construiește funcția inversă, trebuie de această dată să utilizăm formula $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$, de unde, în loc de formula (1), se obține:

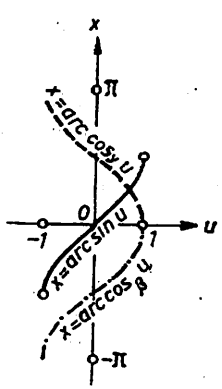


Fig. 5.6

$$\arccos u = \frac{\pi}{2} - \arcsin u. \tag{2}$$

Pentru a evita orice confuzie se poate nota funcția inversă crescătoare prin $\arccos_c u$ și funcția inversă descrescătoare prin $\arccos_d u$. Graficele funcțiilor $\arcsin u$, $\arccos_c u$, $\arccos_d u$ sînt reprezentate în fig. 5.6.

Există și alte funcții pe $[-1, 1]$ pe care le putem numi funcții inverse ale lui $\sin x$ sau $\cos x$, dar de obicei nu se iau în considerație.

5.68. Punem acum :

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Această funcţie este definită peste tot, cu excepţia punctelor unde $\cos x = 0$; adică a punctelor $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ În plus,

$$\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = +\infty, \quad \lim_{x \searrow -\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

Din egalităţile 5.65 (4), (5) rezultă că $\operatorname{tg} x$ are perioada π. Comportarea funcţiilor $\sin x$, $\cos x$ pe intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ arată că $\operatorname{tg} x$ creşte în acest interval luînd valori în toată dreapta numerică. Conform teoremei funcţiei inverse, există funcţia inversă $\operatorname{arctg} x$, definită pe toată dreapta numerică, crescătoare, continuă şi luînd valori în intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Graficul său este reprezentat în fig. 5.7.

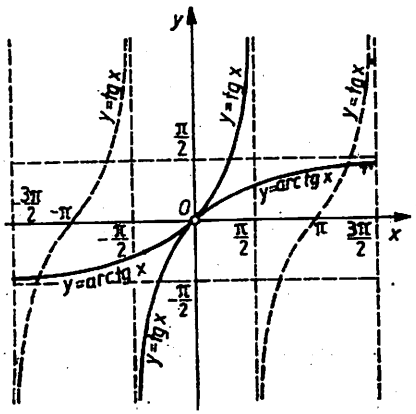


Fig. 5.7

Lăsăm cititorului studiul celorlalte funcţii trigonometrice

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

şi al inverselor lor.

§ 5.7. Aplicații ale funcțiilor trigonometrice

5.71. *Coordonate polare în plan.* Pentru orice punct (x, y) din planul real $\mathbb{R}_2$, cu $x^2 + y^2 \neq 0$, are loc egalitatea

$$\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} = 1.$$

Definim numărul θ din intervalul $0 \leqslant \theta < 2\pi$ satisfăcînd condițiile

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{1}$$

θ căutat există și este unic. Pentru $x > 0, y > 0$, aceasta rezultă din formula 5.61 (1), din continuitatea și monotonia funcțiilor $\cos \theta$ și $\sin \theta$ pentru $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ și din consecința teoremei lui Bolzano 5.23, în celelalte cazuri, din formulele 5.65 (2) — (5) și din regula semnelor 5.65 (8). Numărul θ este numit *unghiul polar* al punctului (x, y). El este 0 pentru punctele cu $x > 0$, $y = 0$; $\frac{\pi}{2} = 90°$ pentru punctele cu $x = 0$, $y > 0$; $\pi = 180°$ pentru punctele cu $x < 0$, $y = 0$ și $\frac{3\pi}{2} = 270°$ pentru punctele cu $x = 0$, $y < 0$. De altfel, este mai comod, folosind periodicitatea funcțiilor $\sin \theta$ și $\cos \theta$, să subînțelegem prin θ nu numai soluția sistemului (1) în $[0, 2\pi]$, dar și orice număr real ce diferă de această soluție printr-un multiplu de 2π. Numărul

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2}$$

se numește *rază polară* a punctului (x, y). Formulele (1) pot fi puse sub forma:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta. \tag{3}$$

Numerele r și θ sînt numite *coordonatele polare* ale punctului (x, y); ele sînt definite peste tot, cu excepția punctului $x = 0, y = 0$, unde $r = 0$ și valoarea θ nu are sens. Curba

$r = \text{const}$ este un cerc

$$x^2 + y^2 = r^2;$$

curba $\theta = \text{const}$ este o semidreaptă

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \theta.$$

5.72. *Reprezentarea trigonometrică a numerelor complexe.* Fie un număr complex $z = x + \mathrm{i}\, y \neq 0$ (§2.7). Folosind egalităţile 5.71 (3) se poate pune numărul sub forma

$$z = r(\cos \theta + \mathrm{i} \sin \theta), \qquad (1)$$

θ şi r fiind definiţi prin formulele 5.71 (1), (2). În această notaţie r este numit *modulul* şi θ *argumentul* numărului complex z (să nu se confunde cu argumentul unei funcţii (2.81)). Se notează $r = |z|$, $\theta = \arg z$.

Dacă

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i} \sin \theta_1),$$

$$z_2 = r_2(\cos \theta_2 + \mathrm{i} \sin \theta_2),$$

atunci, înmulţind aceste egalităţi şi aplicînd 5.61 (2), (3) se obţine :

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + \mathrm{i}(\cos\theta_1 \sin \theta_2 +$$

$$+ \sin \theta_1 \cos \theta_2)] = r_1 r_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i} \sin(\theta_1 + \theta_2)]. \qquad (2)$$

Deci înmulţind două numere complexe, modulele lor se înmulţesc şi argumentele lor se adună.

5.73. În particular, pentru orice $z \neq 0$, din 5.72 (2) rezultă că, oricare ar fi $m = 1, 2, \ldots$ natural,

$$z^m = r^m(\cos m\theta + \mathrm{i} \sin m\, \theta). \qquad (1)$$

Folosindu-ne de formula (1), să rezolvăm ecuaţia

$$z^m = w, \qquad (2)$$

unde w este un număr complex dat. Pentru $w = 0$, ecuația nu are, evident, decît soluția unică $z = 0$. Presupunem deci că $w \neq 0$,

$$w = R(\cos \omega + i \sin \omega).$$

Căutăm z sub forma 5.72(1), unde r și θ trebuie determinați. Egalitatea (1) conduce la ecuația :

$$r^m(\cos m\theta + i \sin m\theta) = R(\cos \omega + i \sin \omega),$$

de unde

$$r^m \cos m\theta = R \cos \omega, \quad r^m \sin m\theta = R \sin \omega. \qquad (3)$$

Ridicînd aceste ecuații la pătrat și adunîndu-le, găsim

$$r^{2m} = R^2;$$

această ecuație are, în domeniul numerelor pozitive, unica soluție

$$r = \sqrt[m]{R}.$$

Împărțind acum egalitățile (3) prin $r^m = R$, avem

$$\cos m\theta = \cos \omega, \quad \sin m\theta = \sin \omega.$$

În virtutea lui 5.66, unde punem $u = \omega$, $x + u = m\theta$, adică $x = m\theta - \omega$, avem $m\theta - \omega = 2k\pi$, deci ;

$$\theta = \frac{\omega}{m} + \frac{2k\pi}{m} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Pentru $k = 0, 1, \ldots, m - 1$ se găsesc m soluții diferite ale ecuației (2) :

$$z_k = \sqrt[m]{R}\left[\cos\left(\frac{\omega}{m} + \frac{2k\pi}{m}\right) + i \sin\left(\frac{\omega}{m} + \frac{2k\pi}{m}\right)\right]. \qquad (4)$$

Alte valori ale lui k dau valori ale lui θ diferind de cele găsite deja cu un multiplu de 2π. Acestea nu dau nici o rădăcină nouă a ecuației (2).

Rădăcinile găsite (4) sînt situate în vîrfurile unui poligon regulat cu m laturi cu centrul în originea coordonatelor (fig. 5.8).

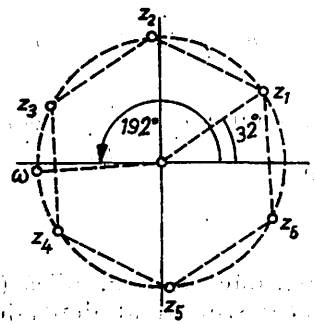


Fig. 5.8.

5.74. *Unghiul a doi vectori într-un spațiu n-dimensional.* Fiind dați doi vectori

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_n,$$

$$y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}_n,$$

formăm produsul lor scalar (2.68(1))

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Ținînd cont de inegalitatea Cauchy 2.68 (3):

$$|(x, y)| \leqslant |x| \cdot |y|,$$

putem găsi pentru $x \neq 0$, $y \neq 0$ un număr ω, $0 \leqslant \omega \leqslant \pi$, prin condiția

$$\cos \omega = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}.$$

Numărul ω se numește *unghiul* vectorilor x și y și se notează $\widehat{(x, y)}$. Dacă $\omega = 0$, adică

$$(x, y) = |x| \cdot |y|,$$

atunci vectorii x și y sînt liniar dependenți. Într-adevăr, ecuația

$$0 = (x - \lambda y,\ x - \lambda y) = (x, x) - 2\lambda(x, y) + \lambda^2(y, y) =$$

$$= |x|^2 - 2\lambda\,|x| \cdot |y| + \lambda^2 |y|^2 = (|x| - \lambda|y|)^2$$

admite în acest caz soluția $\lambda = \dfrac{|x|}{|y|}$; deci cu această valoare a lui λ, avem:

$$x = \lambda y.$$

Într-un mod analog, dacă $\omega = \pi$, adică $(x, y) = -|x| \cdot |y|$, vectorii x și y sînt liniar dependenți; factorul de proporționalitate este de această dată negativ.

Dacă $\omega = \pi/2$, deci $(x, y) = 0$, vectorii x și y sînt numiți *ortogonali*. Această ultimă definiție se extinde, natural, la cazul cînd unul din vectorii x, y (sau amîndoi) este nul; vectorul nul este ortogonal pe orice vector x.

Să aplicăm această definiție la doi vectori din plan. Fie $x \in \mathbb{R}_2$ un vector de coordonate polare $\{\rho, \varphi\}$ și y un vector de coordonate polare $\{r, \psi\}$. În coordonate rectangulare acești vectori sînt $x = (x_1, x_2)$ și $y = (y_1, y_2)$ și avem atunci:

$$x_1 = \rho\cos\varphi,\ x_2 = \rho\sin\varphi,\ y_1 = r\cos\psi,\ y_2 = r\sin\psi.$$

Deci, conform definiției generale,

$$\cos\widehat{(x, y)} = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} = \frac{\rho r(\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi)}{\rho r} =$$

$$= \cos(\varphi - \psi).$$

Rezultă de aici cu unghiul $\widehat{(x, y)}$ al celor doi vectori x și y este acela dintre numerele $\varphi - \psi + 2k\pi$ și $\psi - \varphi + 2k\pi$ care este cuprins între 0 și π.

5.75. *Rotații.* **a.** În planul $\mathbb{R}_2$, se numește *rotație de unghi* θ, o transformare care conservă originea coordonatelor și transformă orice vector $x \neq 0$ de coordonate polare ρ, φ în vectorul x' de coordonate polare ρ, $\varphi + \theta$.

Să exprimăm rotația în coordonate carteziene. Fie, în coordonate carteziene, $x = (x_1, x_2)$, $x' = (x_1', x_2')$. Avem

$$x_1' = \rho \cos(\varphi + \theta) = \rho (\cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta) =$$

$$= x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta,$$

$$x_2' = \rho \sin (\varphi + \theta) = \rho (\sin \varphi \cos \theta + \cos \varphi \sin \theta) =$$

$$= x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta ;$$

care reprezintă formulele căutate ale rotației în coordonate carteziene. Prin definiție, rotația conservă lungimea oricărui vector. Să arătăm că rotația conservă de asemenea unghiul a doi vectori. Dacă φ și ψ sînt unghiurile polare a doi vectori x și y nenuli, atunci unghiurile polare ale vectorilor x' și y' obținuți după rotație sînt respectiv $\varphi + \theta$ și $\psi + \theta$. Unghiul ω format de vectorii x și y se determină plecînd de la ecuația $\cos \omega = \cos (\varphi - \psi)$, unghiul ω' format de vectorii x' și y' plecînd de la ecuația $\cos \omega' = \cos [(\varphi + \theta) - (\psi + \theta)]$; deoarece ω și ω' sînt ambele cuprinse între 0 și π, atunci $\omega = \omega'$, ceea ce trebuia demonstrat. Determinantul coeficienților transformării liniare construite este evident egal cu 1.

b. Să generalizăm definiția unei rotații în cazul unui spațiu euclidian n-dimensional. Se numește *rotație* (sau *transformare ortogonală*), o transformare liniară $x' = u(x)$, sau, în coordonate

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= u_{11} x_1 + \ldots + u_{1n} x_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' &= u_{n1} x_1 + \ldots + u_{nn} x_n, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

care conservă lungimile vectorilor, a unghiurilor dintre ei și pentru care $\det \| u_{jk} \| = 1$.

Să găsim condiția pe care trebuie să o impunem coeficienților u_{jk} pentru ca proprietățile formulate să fie satisfăcute. Fie $e_j = (0, \ldots, \underset{j}{1}, \ldots, 0)$, $(j = 1, \ldots, n)$ și $e_j' = u(e_j)$. Vectorii $e_1', \ldots, e_n'$ trebuie să fie ortogonali și

normaţi (3.14 a), la fel ca şi vectorii $e_1, \ldots, e_n$. Rezultă din (1) că $e'_j = (u_{1j}, \ldots, u_{nj})$, deci avem

$$(e'_i, e'_j) = \sum_{k=1}^{n} u_{ki}u_{kj} = \begin{cases} 1 \text{ pentru } i = j. \\ 0 \text{ pentru } i \neq j. \end{cases} \tag{2}$$

Condiţiile (2) sînt în acelaşi timp suficiente pentru ca transformarea (1) să fie o rotaţie. Într-adevăr, să presupunem că $x' = u(x)$, $y' = u(y)$ sînt determinaţi de formulele (1); atunci

$$(x', y') = \sum_{1}^{n} x'_k y'_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} u_{ki} x_i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} u_{kj} y_j \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} u_{ki}u_{kj} \right) x_i y_j = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = (x, y),$$

de unde rezultă că lungimile vectorilor şi unghiurile pe care le fac se conservă. Se poate arăta că, pentru $n = 2$, definiţia dată coincide cu definiţia a (exerc. 19).

5.76. *Coordonate polare în spaţiu.* Să calculăm unghiul α_j care este format de vectorul $x = (x_1, \ldots, x_n)$ şi un vector al bazei canonice $e_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ într-un spaţiu euclidian n-dimensional $\mathbb{R}_n$. Conform formulei generale 5.74,

$$\cos \alpha_j = \cos \widehat{(x, e_j)} = \frac{(x, e_j)}{|x| \cdot |e_j|} = \frac{x_j}{|x|}.$$

În consecinţă, coordonatele carteziene ale vectorului x pot fi puse sub forma :

$$x_j = |x| \cos \widehat{(x, e_j)}, \; x = |x| \left(\cos \widehat{(x, e_1)}, \ldots, \cos \widehat{(x, e_n)} \right). \tag{1}$$

Unghiurile $\alpha_j = \widehat{(x, e_j)}$ şi numărul $|x|$ sînt numite *coordonatele polare* ale vectorului x. Există următoarea relaţie între numerele $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$:

$$\sum_{j=1}^{n} \cos^2 \alpha_j = \sum \frac{x_j^2}{|x|^2} = 1.$$

Unghiul vectorilor x și y se exprimă prin unghiurile polare $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ și $\beta_1, \ldots, \beta_n$ după formula:

$$\cos \widehat{(x, y)} = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} = \cos\alpha_1 \cos\beta_1 + \ldots + \cos\alpha_n \cos\beta_n.$$

Dacă $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ este un vector unitar, $|\omega| = 1$, atunci valorile ω_j, după cum se vede din (1), sînt cosinușii unghiurilor formate de vectorul ω și fiecare din vectorii bazei canonice $\omega_j = \cos \widehat{(\omega, e_j)}$.

În particular, coeficienții u_{jk} ai rotației 5.75 (1), fiind coordonatele vectorilor unitari e'_j, au o interpretare geometrică directă: u_{ij} este cosinusul unghiului pe care vectorul e'_j îl formează cu vectorul e_i.

§ 5.8. Funcții vectoriale continue de o variabilă vectorială

5.81. Considerăm o funcție $y = f(x)$ care are ca domeniu de definiție o mulțime G dintr-un spațiu euclidian n-dimensional $\mathcal{E}_n$ (notat și $\mathbb{R}_n$) și ca domeniu de valori un spațiu euclidian m-dimensional $\mathcal{E}_m$. O astfel de funcție este numită aplicație a mulțimii $G \subset \mathcal{E}_n$ în $\mathcal{E}_m$. Deoarece $\mathcal{E}_n$ și $\mathcal{E}_m$ sînt spații metrice (3.14), rezultatele din § 5.1 sînt utilizabile pentru astfel de funcții. Conform definiției generale 5.11, o aplicație $y = f(x)$ este continuă pentru $x = a \in G$ dacă $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ sau, altfel spus, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există un $\delta > 0$ astfel încît $|x - a| < \delta$ să implice

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Natural, simbolul „$||$" exprimă distanța în spațiile $\mathcal{E}_n$ și $\mathcal{E}_m$.

5.82. Dacă se exprimă funcția $y = f(x)$ în coordonate, se obține următorul sistem de egalități:

$$y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x),$$

$$\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots$$

$$y_m = f_m(x_1, \ldots, x_n) = f_m(x),$$

în care apar m funcții numerice de variabilă $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Din 4.74 rezultă că relația:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

este echivalentă cu m relații pentru funcțiile numerice

$$\lim_{x \to a} f_1(x) = f_1(a),$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$\lim_{x \to a} f_m(x) = f_m(a).$$

Aplicația $y = f(x)$ este deci continuă pentru $x = a$ dacă și numai dacă toate funcțiile numerice $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ sînt continue pentru $x = a$.

5.83. Anumite teoreme din § 5.1 asupra funcțiilor continue numerice rămîn valabile pentru aplicații continue. Anume:

a. Dacă f și g sînt două funcții vectoriale (aplicații) continue pentru $x = x_0 \in G$, atunci funcția $f + g$ este și ea continuă pentru $x = x_0$.

b. Dacă α este o funcție numerică definită în G și continuă pentru $x = x_0$ și g o aplicație a lui G în $\mathbb{R}_m$ continuă pentru $x = x_0$, atunci $\alpha \cdot g$ este o aplicație a lui G în $\mathbb{R}_m$ continuă și ea pentru $x = x_0$.

c. Dacă f este o aplicație continuă într-un punct $x = x_0$, atunci $|f|$ este o funcție numerică continuă pentru $x = x_0$.

5.84. Fie $w = f(z)$ o funcție definită pe o mulțime G în planul euclidian $\mathcal{E}_2$ și al cărei domeniu de valori este de asemenea în planul $\mathcal{E}_2$. Atunci $z = (x, y)$, $w = (u, v)$ pot fi considerați ca numere complexe. Funcția $w = f(z)$ se numește *funcție complexă de variabilă complexă*. Conform cu 5.81, funcția $w = f(z)$ este continuă într-un punct (neizolat) $z = a \in G$ dacă $\lim_{z \to a} f(z) = f(a)$ sau, altfel spus, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există un $\delta > 0$, astfel încît $|z - a| < \delta$ să implice

$$|f(z) - f(a)| < \varepsilon.$$

Conform 5.82, pentru ca funcția $w = f(z) = u(z) + iv(z)$ să fie continuă pentru $z = a$ este necesar și suficient ca cele

două funcții cu valori reale $u(z)$ și $v(z)$ să fie continue pentru $z = a$.

Conform 5.83 a, b, dacă două funcții complexe f și g sînt continue pentru $z = a$, suma $f + g$ și produsul lui f printr-o funcție reală continuă sînt de asemenea continue pentru $z = a$. Plecînd de la operațiile cunoscute asupra numerelor complexe putem adăuga acestor proprietăți următoarele:

a. Dacă f și g sînt două funcții complexe continue pentru $z = a$, atunci produsul $f \cdot g$ este de asemenea continuu pentru $z = a$.

b. Dacă f este o funcție complexă, continuă pentru $z = a$, astfel încît $f(a) \neq 0$, atunci $\frac{1}{f}$ este continuă de asemenea pentru $z = a$.

c. Dacă f și g sînt două funcții complexe continue pentru $z = a$ și dacă $g(a) \neq 0$, atunci $\frac{f}{g}$ este continuă pentru $z = a$.

Aceste afirmații rezultă din proprietățile corespunzătoare ale limitelor (4.73 e).

5.85. Funcția $w = z$ este, evident, continuă pentru orice $z = x + iy$. În virtutea lui 5.84, orice polinom $w = P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ cu coeficienți complecși $a_0, \ldots, a_n$ este o funcție continuă de z și orice funcție rațională

$$w = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_0 z^n + \ldots + a_n}{b_0 z^m + \ldots + b_m}$$

este continuă peste tot, cu excepția valorilor lui z, pentru care $Q(z) = 0$.

5.86. *Teorema de existență a rădăcinii.* Un număr z_0 care satisface ecuația $P(z_0) = 0$ se numește *rădăcină* a polinomului $P(z)$. În domeniul real, există polinoame care nu au nici o rădăcină (exemplu: $P(x) = x^2 + 1$). Teorema fundamentală a algebrei afirmă că *în domeniul complex orice polinom care nu este constant are cel puțin o rădăcină.* Vom demonstra această teoremă.

a. LEMĂ. *Fie un polinom $P(z)$. Pentru orice A pozitiv, există un R astfel încît pentru orice $|z| \geq R$, să avem inegalitatea $|P(z)| \geq A$.*

Demonstrație. Avem pentru $a_0 \neq 0$ și $z \neq 0$:

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots a_n =$$

$$= a_0 z^n \left[1 + \frac{a_1}{a_0 z} + \ldots + \frac{a_n}{a_0 z^n} \right].$$

Limita expresiei dintre paranteze, pentru $z \to \infty$, fiind egală cu 1 (4.73 f), există un număr R_1 astfel încît, pentru $|z| \geqslant R_1$,

$$\left| 1 + \frac{a_1}{a_0 z} + \ldots + \frac{a_n}{a_0 z^n} \right| \geqslant \frac{1}{2}$$

și, prin urmare,

$$|P(z)| = |a_0| \cdot |z|^n \left| 1 + \frac{a_1}{a_0 z} + \ldots + \frac{a_n}{a_0 z^n} \right| \geqslant \frac{1}{2} |a_0| \, |z|^n.$$

Dacă punem acum $|z| \geqslant R > R_1$, atunci inegalitatea

$$|P(z)| \geqslant \frac{1}{2} |a_0| \, |z|^n \geqslant \frac{1}{2} |a_0| R^n > A$$

este satisfăcută pentru $R > \sqrt[n]{2 \frac{A}{|a_0|}}$, ceea ce demonstrează lema.

b. LEMĂ. *Fie $P(z)$ un polinom de grad $n \geqslant 1$. Dacă $P(z_0) \neq 0$ și dacă este dat un număr $\delta_0 > 0$, atunci există un punct z_1, $|z_1 - z_0| \leqslant \delta_0$, astfel încît $|P(z_1)| < P(z_0)|$.*

Demonstrație. Să considerăm la început cazul cînd $z_0 = 0$, $P(0) = 1$. Fie a_k primul dintre coeficienții $a_{n-1}, \ldots$ $\ldots, a_0$ care nu este nul. Atunci

$$P(z) = 1 + a_k z^k + \ldots + a_0 z^n = 1 + a_k z^k [1 + H(z)],$$

unde

$$H(z) = \frac{a_{k-1}}{a_k} z + \ldots + \frac{a_0}{a_k} z^{n-k}.$$

Deoarece, evident, $H(0) = 0$, atunci, în virtutea continuității polinomului $H(z)$, există un disc $|z| \leqslant \delta \leqslant \delta_0$, $\delta^k |a_k| <$

<1, în care este satisfăcută inegalitatea

$$|H(z)| \leqslant \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Determinăm z_1 din ecuația

$$z_1^k = -\delta^k \frac{|a_k|}{a_k},$$

care are soluție (5.73). Evident, $|z_1| = \delta$. Atunci :

$$|P(z_1)| = |1 + a_k z_1^k + a_k z_1^k H(z_1)| =$$

$$= |1 - \delta^k |a_k| - \delta^k |a_k| H(z_1)| \leqslant 1 - \delta^k |a_k| +$$

$$+ \delta^k |a_k| \cdot |H(z_1)| \leqslant 1 - \delta^k |a_k| + \frac{1}{2}\delta^k |a_k| = 1 -$$

$$- \delta^k |a_k| < 1,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

În cazul general, cu ajutorul relației

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k [(z - z_0) + z_0]^{n-k},$$

vom dezvolta polinomul $P(z)$ după puterile crescătoare ale lui $(z - z_0)$:

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k (z - z_0)^{n-k}, \quad P(z_0) = b_0 \neq 0.$$

Înlocuind aici $z - z_0$ prin ζ, se obține

$$P(z) = b_0 P_0(\zeta),$$

unde

$$P_0(\zeta) = 1 + \frac{b_1}{b_0}\zeta + \ldots + \frac{b_n}{b_0}\zeta^n.$$

Deoarece $|P(z)| = |b_0| \cdot |P_0(\zeta)|$, problema se reduce la cea precedentă.

c. Sîntem acum în măsură să demonstrăm teorema fundamentală.

TEOREMĂ. *Orice polinom* $P(z) = a_0 z^n + \ldots + a_n (n \geqslant 1,\ a_0 \neq 0)$ *are în planul complex cel puțin o rădăcină.*

Demonstrație. Funcția $|P(z)|$ este nenegativă și punem

$$\alpha = \inf_{z \in \mathbb{C}} \{|P(z)|\}.$$

Apoi, aplicînd lema, se găsește R astfel încît, pentru $|z| \geqslant R$, să avem inegalitatea

$$|P(z)| \geqslant \alpha + 1.$$

Deci, valorile lui $P(z)$ în exteriorul discului $|z| \leqslant R$ nu au nici o importanță pentru calculul lui α. Putem nota

$$\alpha = \inf_{|z| < R} \{|P|z|\}.$$

Dar discul $V = \{|z| \leqslant R\}$, spre deosebire de întregul plan $\mathbb{C}$, este mulțime compactă (3.96 e). Conform teoremei 5.16 b, funcția continuă $|P(z)|$ atinge, într-un punct $z_0 \in V$, marginea sa inferioară :

$$|P(z_0)| = \alpha.$$

Dacă $\alpha = 0$, atunci $P(z_0) = 0$. Arătăm că presupunerea $P(z_0) \neq 0$ conduce la o contradicție.

Punctul z_0 aparține interiorului discului V deoarece pe frontiera discului, adică pentru $|z| = R$, este adevărată inegalitatea $|P(z)| \geqslant \alpha + 1$. Astfel, există un disc $|z - z_0| \leqslant \delta_0$ complet inclus în discul V. Conform lemei din punctul b, se poate găsi în acest disc un punct z_1 astfel încît $|P(z_1)| < |P(z_0)|$. Dar aceasta înseamnă că $\alpha = |P(z_0)|$ nu este marginea inferioară a funcției $|P(z)|$ în discul V. Contradicția obținută arată că $P(z_0) = 0$ și teorema este demonstrată.

5.87. Se știe din algebră [24] că, pentru orice două polinoame $P(z)$ și $Q(z) \neq 0$, se pot găsi alte două polinoame $S(z)$ și $R(z)$ astfel încît

$$P(z) = Q(z)\, S(z) + R(z), \qquad (1)$$

unde $R(z) \equiv 0$, sau gradul lui $R(z)$ (*restul*) este strict mai mic decît al polinomului $Q(z)$; $P(z)$ este numit atunci *deîm-*

părțit, $Q(z)$ *împărțitorul*, $S(z)$ *cîtul*. Suma gradelor împărțitorului și cîtului dau gradul deîmpărțitului. Aici z este pur și simplu un simbol, nu un număr, și polinomul $P(z)$ este o expresie formală definită prin mulțimea coeficienților $a_0, \ldots, a_n$, cu regulile naturale de adunare și înmulțire. Înlocuind în inegalitatea (1) pe z cu un număr complex oarecare, această egalitate devine o egalitate între numerele complexe obținute.

Fie, în particular, $Q(z) = z - z_1$. Atunci $R(z)$ este de grad zero, deci o constantă. Dacă, în plus, z_1 este o rădăcină a polinomului $P(z)$, atunci constanta $R(z)$ este nulă; într-adevăr,

$$R(z) = R(z_1) = P(z_1) - S(z_1)(z_1 - z_1) = 0.$$

Descompunerea (1) ia forma :

$$P(z) = S(z)(z - z_1),$$

unde polinomul $S(z)$ are gradul $n - 1$.

Repetînd acest procedeu pentru polinomul $S(z) = S_1(z)$ se obține

$$S(z) = S_1(z) = S_2(z)(z - z_2),$$

z_2 fiind o rădăcină a polinomului $S_1(z)$, deci și a polinomului $P(z)$; gradul polinomului $S_2(z)$ este $n - 2$. Continuînd în același mod, se poate coborî gradul cîturilor succesiv pînă la zero, și vom avea descompunerea

$$P(z) = S_0(z - z_1) \ldots (z - z_n),$$

unde S_0 este o constantă și $z_1, \ldots, z_n$ rădăcinile polinomului $P(z)$. Ele nu sînt neapărat distincte două cîte două; reunind parantezele care conțin aceleași rădăcini se ajunge la forma definitivă a descompunerii polinomului în factori

$$P(z) = S_0(z - z_1)^{r_1} \ldots (z - z_k)^{r_k}, \tag{2}$$

numerele $z_1, \ldots, z_k$ fiind deja diferite între ele. Exponenții $r_1, \ldots, r_k$ sînt numiți *multiplicitățile* rădăcinilor corespunzătoare. Înmulțind parantezele, se poate vedea că numărul S_0 este egal cu coeficientul termenului de grad maxim al polinomului $P(z)$.

5.88. a. *Descompunerea funcțiilor raționale în fracții simple.* Pentru două polinoame date $P_1(z)$ și $P_2(z)$ (cu coeficienți complecși, de exemplu), se poate construi cel mai mare divizor comun al lor $D(z)$, adică un polinom de grad cît mai mare posibil, care divide fiecare din polinoamele $P_1(z)$ și $P_2(z)$ [24]. Se demonstrează că există reprezentarea

$$D(z) = P_1(z)S_1(z) + P_2(z)S_2(z),$$

unde $S_1(z)$ și $S_2(z)$ sînt polinoame în z.

Este evident că orice rădăcină a polinomului $D(z)$ este și rădăcină a fiecăruia din polinoamele $P_1(z)$ și $P_2(z)$. Deci, dacă $P_1(z)$ și $P_2(z)$ nu au nici o rădăcină comună, cel mai mare divizor comun al lor este o constantă pe care o putem lua egală cu 1.

b. Considerăm o funcție rațională

$$\frac{Q(z)}{P_1(z)P_2(z)},$$

$P_1(z)$ și $P_2(z)$ neavînd nici o rădăcină comună. Conform celor spuse anterior, există polinoamele $S_1(z)$ și $S_2(z)$ astfel încît

$$P_1(z)\,S_1(z) + P_2(z)\,S_2(z) = 1$$

și, în consecință,

$$Q(z) = Q(z)P_1(z)\,S_1(z) + Q(z)\,P_2(z)S_2(z).$$

Împărțind cei doi membri ai acestei egalități prin $P_1(z)P_2(z)$, avem

$$\frac{Q(z)}{P_1(z)P_2(z)} = \frac{Q(z)S_1(z)}{P_2(z)} + \frac{Q(z)S_2(z)}{P_1(z)}.$$

Putem continua această operație descompunînd $P_1(z)$ și $P_2(z)$ în produs de factori fără rădăcini comune. Folosind pentru polinomul $P(z)$ reprezentarea 5.87(2), se poate construi astfel descompunerea unei funcții raționale $\frac{Q(z)}{P(z)}$ în suma

$$\frac{Q(z)}{P(z)} = \frac{Q(z)}{S_0(z - z_1)^{r_1} \ldots (z - z_k)^{r_k}} = \sum_{j=1}^{k} \frac{Q_j(z)}{(z - z_j)^{r_j}} \quad (1)$$

Punînd fiecare numărător $Q_j(z)$ în ordinea puterilor crescătoare ale lui $z - z_j$, se poate trece apoi de la descompunerea (1) la

$$\frac{Q(z)}{P(z)} = T(z) + \sum_{j=1}^{k} \left\{ \sum_{m=1}^{r_j} \frac{A_{jm}}{(z - z_j)^m} \right\}, \qquad (2)$$

unde $T(z)$ este un polinom şi A_{jm} numere. Formula (2) dă descompunerea unei funcţii raţionale $\frac{Q(z)}{P(z)}$ în părţi întregi şi fracţii simple [unicitatea unei astfel de descompuneri este de asemenea demonstrată în algebră; vezi [24]. Teorema unicităţii stă la baza metodei coeficienţilor nedeterminaţi care permite descompunerea (2). Se poate găsi această metodă în [13]].

5.89. *Polinoame cu coeficienţi reali.*

a. Dacă $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$ este un polinom cu coeficienţi reali şi $\bar{z}_0$, conjugatul unui număr complex z_0, atunci conform 2.73,

$$\overline{P(z_0)} = \overline{a_n z_0^n + \ldots + a_0} = \overline{a_n} \overline{z_0^n} + \ldots + a_0 = P(\bar{z}_0). \qquad (1)$$

În particular, dacă z_0 este o rădăcină a polinomului $P(z)$, adică $P(z_0) = 0$, atunci egalitatea (1) arată că de asemenea $P(\bar{z}_0) = 0$, adică $\bar{z}_0$ este şi el o rădăcină a polinomului $P(z)$.

b. Fie $z_0 = x_0 + \mathrm{i} y_0$, $\bar{z}_0 = x_0 - \mathrm{i} y_0$; atunci $(z - z_0) \times (z - \bar{z}_0) = (z - x_0 - \mathrm{i} y_0)(z - x_0 + \mathrm{i} y_0) = (z - x_0)^2 + y_0^2$. Împărţind polinomul $P(z)$ prin trinomul cu coeficienţi reali $(z - x_0)^2 + y_0^2$, se obţine

$$P(z) = [(z - x_0)^2 + y_0^2] P_1(z),$$

unde $P_1(z)$ este încă un polinom cu coeficienţi reali. Aceasta permite să punem descompunerea 5.87(2) sub o formă reală reunind factorii cu rădăcini complex conjugate; în loc de 5.87(2), avem atunci descompunerea în produs de factori cu coeficienţi reali

$$P(z) = s_0 [(z - x_1)^2 + y_1^2]^{r_1} \ldots [(z - x_k)^2 + y_k^2]^{r_k} \times (z - x_{k+1})^{r_{k+1}} \ldots (z - x_p)^{r_p}, \qquad (2)$$

unde $x_1 \pm i\,y_1, \ldots, x_k \pm i\,y_k$ sînt rădăcini nereale ale polinomului $P(z)$ și $x_{k+1}, \ldots, x_p$ sînt rădăcini reale cu multiplicitățile respectiv $r_1, \ldots, r_p$. În particular, rădăcinile nereale $x_j + i\,y_j$ și $x_j - i\,y_j$ au aceeași multiplicitate.

c. În mod analog, descompunerea 5.88(2) în fracții simple pentru două polinoame $Q(z)$ și $P(z)$ cu coeficienți reali poate fi pusă sub forma

$$\frac{Q(z)}{P(z)} = T(z) + \sum_{j=1}^{k} \left\{ \sum_{m=1}^{r_j} \frac{A_{jm} + zB_{jm}}{[(z - x_j)^2 + y_j^2]^m} \right\} + \\ + \sum_{j=k+1}^{p} \left\{ \sum_{m=1}^{r_j} \frac{A_{jm}}{(z - x_j)^m} \right\}.$$

§ 5.9. Șiruri de funcții

5.91. Considerăm mai întîi un șir de funcții

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots \qquad (1)$$

date pe o mulțime oarecare E, cu valori într-un spațiu metric M. Spunem că șirul (1) *converge pe mulțimea* E dacă orice șir de forma

$$f_1(x_0), f_2(x_0), \ldots, f_n(x_0), \ldots \qquad (x_0 \in E)$$

are limită în M. Această limită care depinde, natural, de punctul x_0 va fi notată prin $f(x_0)$; astfel vom avea o funcție $f(x)$ numită *limita șirului de funcții* $f_n(x)$:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x). \qquad (2)$$

Așadar, egalitatea (2) spune că pentru orice $\varepsilon > 0$ și pentru orice $x_0 \in E$ există un număr N (care depinde de ε și de punctul x_0), astfel încît pentru orice $n > N$ să avem

$$\rho[f(x_0), f_n(x_0)] \leqslant \varepsilon. \qquad (3)$$

5.92. *Exemple.*

a. Şirul de funcţii numerice

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \cdot f(x)$$

converge către zero în domeniul de definiţie al funcţiei $f(x)$.

b. Şirul de funcţii numerice $f_n(x) = x^n$ converge în intervalul $-1 < x \leqslant 1$. Limita sa $f(x)$ este o funcţie care este egală cu 0 pentru $x < 1$ şi 1 pentru $x = 1$.

c. Şirul de funcţii

$$f_n(x) = \begin{cases} n \sin nx & \text{pentru } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{n}, \\ 0 & \text{pentru } \dfrac{\pi}{n} \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

converge în orice punct $x \in [0, \pi]$ spre 0. Să subliniem, în acest exemplu, că abaterea maximă dintre $f_n(x)$ şi limita $f(x)$, $\sup\limits_{x \in [0,\pi]} |f_n(x) - f(x)|$, care este egală cu n, nu converge către 0, şi chiar creşte indefinit.

5.93. În general, funcţia limită a unui şir f_n poate să nu aibă proprietăţile funcţiilor f_n. Astfel, în exemplul 5.92 b, funcţiile f_n sînt continue pe $[0, 1]$, în timp ce funcţia limită este discontinuă. Pentru ca să se poată spune ceva determinat asupra funcţiei limită, trebuie, în mod obişnuit, să impunem condiţii modului de convergenţă.

Una din cele mai importante condiţii de acest gen este formulată în definiţia următoare.

DEFINIŢIE. Un şir de funcţii 5.91(1) este numit *uniform convergent* către funcţia limită pe E dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, se poate găsi un număr N astfel încît, oricare ar fi punctul $x_0 \in E$, inegalitatea

$$\rho[f(x_0), f_n(x_0)] \leqslant \varepsilon \qquad (1)$$

să aibă loc pentru $n > N$.

Această definiţie diferă de 5.91 : aici numărul N corespunde tuturor punctelor $x_0 \in E$, în timp ce în definiţia 5.91, numărul N depinde de alegerea punctului x_0. Deci, inegalitatea (1) poate fi înlocuită de inegalitatea

$$\sup_{x \in E} \rho[f(x), f_n(x)] \leqslant \varepsilon \qquad (2)$$

pentru orice $n \geqslant N = N(\varepsilon)$.

În exemplul 5.92 a convergenţa şirului f_n către limită sa este uniformă, în timp ce în exemplele 5.92, b, c, nu.

Utilitatea definiţiei introduse este confirmată de teoremele care urmează.

5.94. TEOREMĂ. *Dacă fiecare din funcţiile f_n este mărginită, adică există un punct $p \in M$ şi o constantă $C_n > 0$ astfel încît să avem*

$$\rho[f_n(x), p] \leqslant C_n \quad (n = 1, 2, \ldots, \text{şi } (\forall)\, x \in E)$$

şi dacă şirul f_n converge uniform pe E, atunci funcţia limită f este de asemenea mărginită.

Demonstraţie. Pentru un $\varepsilon > 0$ dat, de exemplu pentru $\varepsilon = 1$, găsim un număr N astfel încît să avem, pentru $n \geqslant N$ şi pentru orice $x \in E$,

$$\rho[f_n(x), f(x)] \leqslant \varepsilon = 1.$$

De unde, pentru orice $x \in E$,

$$\rho[f(x), p] \leqslant \rho[f(x), f_N(x)] + \rho[f_N(x), p] \leqslant 1 + C_N$$

şi rezultă că funcţia f este mărginită.

5.95. TEOREMĂ. *Presupunem că E este un spaţiu metric şi că orice funcţie a şirului f_n este continuă într-un punct $x_0 \in E$. Atunci, dacă şirul f_n este uniform convergent, funcţia limită f_n este continuă de asemenea în punctul x_0.*

Demonstraţie. Pentru un $\varepsilon > 0$ dat, găsim un număr N astfel încît, pentru orice $n \geqslant N$ şi orice $x \in E$, să avem :

$$\rho[f_n(x),\ f(x)] < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1}$$

Funcţia f_N fiind continuă pentru $x = x_0$, există un $\delta > 0$ astfel încît, pentru orice x din sfera $V = \{\rho(x, x_0) < \delta\}$ să avem inegalitatea :

$$\rho[f_N(x), f_N(x_0)] < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2}$$

Să rescriem inegalităţile (1) pentru punctele $x \in V$ şi x_0 şi pentru $n = N$:

$$\rho[f_N(x_0),\ f(x_0)] < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{3}$$

$$\rho[f_N(x),\ f(x)] < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4}$$

Din (2) — (4) rezultă că pentru $x \in V$

$$\rho[f(x), f(x_0)] < \varepsilon,$$

ceea ce exprimă continuitatea funcţiei f pentru $x = x_0$.

5.96. Ca o consecinţă, rezultă:

TEOREMĂ. *Limita unui şir uniform convergent f_n de funcţii continue pe un spaţiu metric E este o funcţie continuă pe E.*

5.97. Dacă spaţiul metric M este un spaţiu real m-dimensional $\mathbb{R}_m$, astfel încît funcţiile f_n sînt funcţii cu valori vectoriale, inegalităţile 5.93 (1) şi 5.93 (2) iau respectiv forma:

$$|f(x_0) - f_n(x_0)| \leqslant \varepsilon \tag{1}$$

pentru orice $x_0 \in E$ şi pentru $n \geqslant N(\varepsilon, x_0)$;

$$\sup_{x \in E} |f(x_0) - f_n(x_0)| \leqslant \varepsilon \tag{2}$$

pentru $n \geqslant N(\varepsilon)$.

5.98. În acelaşi caz ($M = \mathbb{R}_m$) are loc un criteriu de convergenţă uniformă analog criteriului lui Cauchy 4.75.

Criteriul de convergenţă uniformă al lui Cauchy. Pentru ca un şir de funcţii $f_n(x)$ definite pe o mulţime E şi cu valori într-un spaţiu $\mathbb{R}_m$ să fie uniform convergent pe mulţimea E, este necesar şi suficient ca, pentru orice $\varepsilon > 0$, să existe un număr N astfel încît pentru orice $n \geqslant N$, $p \geqslant N$

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f_p(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Demonstraţie. Presupunem că funcţiile f_n converg uniform pe E spre funcţia f. Atunci, pentru $\varepsilon > 0$ dat, alegem

un număr N astfel încît, pentru orice $n \geqslant N$ şi orice $x \in E$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

În particular, pentru un $p \geqslant N$ şi pentru orice $x \in E$,

$$|f_p(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Deci, pentru orice $x \in E$ şi pentru n şi p aleşi ca mai sus,

$$|f_n(x) - f_p(x)| \leqslant \varepsilon.$$

În consecinţă,

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f_p(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Invers, să presupunem că este îndeplinită condiţia Cauchy. În particular, şirul de vectori $f_1(x_0), \ldots, f_n(x_0), \ldots$ cu $x_0 \in E$ fixat, verifică atunci criteriul lui Cauchy în $\mathbb{R}_m$ (4.75). Deci, în virtutea teoremei 4.75, şirul $f_n(x_0)$ converge în $\mathbb{R}_m$ spre un vector pe care îl notăm cu $f(x_0)$. Cu toţi $x = x_0 \in E$ posibili, se obţine o funcţie $f(x)$ cu valori în $\mathbb{R}_m$. Arătăm că $f_n(x)$ converge către $f(x)$ uniform.

Trecem la limită pentru $p \to \infty$ în inegalitatea :

$$|f_n(x) - f_p(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Distanţa fiind continuă (5.12 b), pentru toţi $x \in E$ şi $n \geqslant N$, avem

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon,$$

ceea ce exprimă convergenţa uniformă a lui f_n către f. Teorema este demonstrată.

Observaţie. În enunţul teoremei, se poate înlocui spaţiul $\mathbb{R}_m$ prin orice spaţiu metric complet. Vom reveni la aceste probleme în capitolul 12.

EXERCIŢII

1. Fie dată o funcţie numerică f definită într-o vecinătate a unui punct x_0. Presupunem că pentru orice $\delta > 0$, există un $\varepsilon > 0$ astfel încît $|x - x_0| < \delta$ să implice $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. Este funcţia f continuă pentru $x = x_0$?

2. Presupunem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\delta > 0$ astfel încît $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ implică $|x - x_0| < \delta$. Este funcția f continuă în $x = x_0$?

3. Să se demonstreze continuitatea funcției $y = |x|$.

4. Discutați continuitatea funcțiilor $y = (x)$ (partea fracționară a lui x) și $y = [x]$ (partea întreagă a lui x) (1.71).

5. Să se demonstreze că funcția lui Riemann

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, \text{ dacă } x = \dfrac{m}{n} \text{ este fracție ireductibilă,} \\ 0, \text{ dacă } x \text{ este irațional} \end{cases}$$

este continuă în orice punct irațional și discontinuă în orice punct rațional al axei.

6. Dacă două funcții numerice f și g sînt continue, atunci funcțiile

$$\max \{f(x), g(x)\}, \quad \min \{f(x), g(x)\}$$

sînt de asemenea.

7. Dacă o funcție numerică f este continuă pentru $x \in [a, b]$ și dacă $x_1, \ldots, x_n$ sînt puncte arbitrare ale acestui interval, atunci există un punct $x_0 \in [a, b]$, astfel încît

$$f(x_0) = \frac{1}{n}[f(x_1) + \ldots + f(x_n)].$$

8. Dacă o funcție monotonă, mărginită f este continuă pe un interval (a, b), finit sau infinit, atunci ea este uniform continuă pe (a, b).

9. O funcție monotonă f, definită pe $(-\infty, \infty)$ și care satisface ecuația funcțională $f(x + y) = f(x) + f(y)$, este de forma

$$f(x) = ax.$$

10. Indicați, pe $(-\infty, \infty)$, intervalele de convergență uniformă pentru șirul de funcții

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + x^n}.$$

11. Să se demonstreze că relația 5.61 (4) nu este o consecință a relațiilor 5.61(1)—(3) și relația 5.61(1) nu este o consecință a relațiilor 5.61(2)—(4).

12. O funcție f este definită pentru $-\infty < x < \infty$ și oricare ar fi două puncte $x_1 < x_2$ și $c \in (f(x_1), f(x_2))$, există un punct $x_c \in (x_1, x_2)$ în care $f(x_c) \neq c$. Rezultă funcția $f(x)$ continuă?

13. Verificați tabela de valori:

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

14. Fie o funcție reală f definită pe un interval $[a, b]$. Să se arate că mulțimea punctelor $c \in [a, b]$, pentru care $\lim_{x \to c} f(x)$ există și este diferită de $f(c)$, este cel mult numărabilă.

15. Fie $t = 0, t_1 t_2 \ldots t_n \ldots$ reprezentarea zecimală (1.77) a unui număr real t, $0 \leqslant t < 1$. Fie, apoi, $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ un subșir fixat al șirului numerelor naturale. Să se studieze continuitatea funcției

$$x : [0,1) \to \mathbb{R} \text{ definite prin } x(t) = 0, t_{n_1} t_{n_2} \ldots t_{n_k} \ldots$$

16. Demonstrați că mulțimea M a punctelor din plan care sînt situate pe cercul unitate Γ centrat în originea coordonatelor și care au unghiurile polare $1, 2, \ldots, n, \ldots$ este peste tot densă pe Γ.

17. Pentru ca o funcție f definită și continuă pe o submulțime P densă a unui compact M să admită o prelungire continuă pe tot M (adică să existe o funcție F definită și continuă pe M și coincizînd cu f pe P) este necesar și suficient ca f să fie uniform continuă pe P.

18. Demonstrați că o funcție reală f, definită și nedescrescătoare în intervalul (a, b), poate avea cel mult o mulțime numărabilă de puncte de discontinuitate.

19. Să se arate că o rotație în spațiul n-dimensional (definită conform 5.76 b) este în cazul $n = 2$ o rotație plană de un anumit unghi (5.76 a).

20. Dacă, în definiția unei rotații în spațiul n-dimensional (5.76 b), se omite condiția $\det \| u_{jk} \| = 1$, atunci transformarea liniară obținută, dacă ea nu este rotație, este o „rotație cu reflexie", adică rezultatul aplicării unei reflexii ($\xi_1' = \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}' = \xi_{n-1}, \xi_n' = -\xi_n$) urmată de o rotație.

NOTĂ ISTORICĂ

Prima definiție corectă a continuității pentru funcții de o variabilă reală a fost dată de Bolzano (1817) și Cauchy (1821). Aplicînd criteriul lui Cauchy, ei au obținut teorema „asupra valorilor intermediare" (5.22). Teorema 5.16 b care spune că o funcție continuă este mărginită și își atinge marginile sale pe un compact a fost găsită (pentru un interval închis și mărginit) de Weierstrass în jurul lui 1860. Lui Heine (1870) îi datorăm

definiția continuității uniforme și teorema corespunzătoare asupra funcțiilor continue (5.17 b) (pentru un interval închis și mărginit).

Funcția exponențială de exponent rațional este cunoscută de mult timp (Stifel, 1544); în această epocă îndepărtată, s-a observat deja că unui produs de puteri îi corespunde suma exponenților și că această proprietate poate fi utilizată în calcule. Primele tabele de logaritmi au fost alcătuite de Neper (1617) și Bürgi (1620). Definiția completă a funcției exponențiale și a celei logaritmice, ca și demonstrația continuității acestor funcții, au fost date la mijlocul secolului al XIX-lea, după apariția teoriei suficient de elaborate a numerelor reale.

Funcțiile trigonometrice, definite ca segmente orientate legate de cercul trigonometric, au fost cunoscute din antichitate (prima tabelă a sinusului a fost alcătuită de Ptolemeu în secolul al II-lea). Matematicienii indieni cunoșteau formula 5.61(1) (Aryabhata, secolul al V-lea). Fomulele 5.61 (2) și (3) au fost obținute de matematicianul german Regiomontanus (secolul al XV-lea). Euler (secolul al XVIII-lea) a introdus notațiile moderne ale funcțiilor trigonometrice.

Există o altă construcție axiomatică a teoriei funcțiilor trigonometrice care nu presupune existența soluțiilor anumitor ecuații funcționale și care pleacă de la considerații privind teoria grupurilor continue [5].

Problema existenței unei rădăcini complexe pentru orice polinom cu coeficienți complecși a fost pusă încă în secolul al XVII-lea; secolul următor a dat acesteia diferite soluții, dintre care nici una nu a putut fi riguroasă, în lipsa unei teorii dezvoltate a numerelor reale și a continuității. Prima demonstrație riguroasă, care precizează rolul continuității, a fost dată de Gauss (1799); anumite insuficiențe ale demonstrației lui Gauss au fost acoperite prin lucrările lui Bolzano (1817), Cauchy (1821) și în formă definitivă de Dedekind-Cantor-Weierstrass (1874).

Noțiunea de convergență uniformă a unui șir de funcții și rolul ei în păstrarea continuității au fost stabilite de Stokes și Seidel (1847—1848), apoi de Cauchy (1853); o teoremă analoagă, pentru un caz particular, fusese deja dată de Abel (1826).

Capitolul 6

SERII

Punînd în diferite feluri parantezele în expresia 1—1+1—1+..., eu pot, după voie, să obțin 0 sau 1. Dar atunci ideea creării *ex nihilo* devine perfect posibilă.

Guido Grandi (1703)

În ceea ce mă privește, mărturisesc că toate raționamentele și calculele bazate pe serii neconvergente mi s-au părut totdeauna aproape suspecte.

Jean d'Alembert (1748)

§ 6.1. Serii numerice. Serii cu termeni pozitivi

6.11.a. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — un șir de numere reale. Formăm sumele parțiale

$$s_1 = a_1,$$
$$s_2 = a_1 + a_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

DEFINIȚIE. Dacă șirul de numere $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ converge către o limită finită s, spunem că seria numerică

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

converge și că *suma* sa este numărul $s = \lim s_n$. Dacă șirul de numere $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ diverge, spunem că seria (1) *diverge* și nu îi asociem nici o sumă.

Numerele $a_1, a_2, \ldots$ sînt numite *termenii* seriei (1). Orice sumă finită $a_{m+1} + \ldots + a_n$ este un *segment* al seriei (1).

Dacă toate numerele $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ sînt pozitive (nenegative), $a_1 > 0, \ldots, a_n > 0, \ldots$ seria (1) se numește *cu termeni pozitivi* (*nenegativi*).

b. *Exemplu.* Fie seria numerică

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots, \qquad (2)$$

unde x este un număr fixat. Sumele parţiale ale acestei serii sînt calculate după formula sumei unei progresii geometrice

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1 - x^n}{1 - x}.$$

Dacă $|x| < 1$, atunci $x^n \to 0$ pentru $n \to \infty$, de unde rezultă convergenţa lui s_n către limita

$$s = \frac{1}{1 - x}. \tag{3}$$

Deci, pentru $|x| < 1$, seria (2) converge şi valoarea sumei sale este (3).

Dacă $x = 1$, atunci, evident,

$$s_n = 1 + \ldots + 1 = n$$

şi seria (2) este deci divergentă. Pentru $x = -1$, avem

$$s_1 = 1,\ s_2 = 0,\ s_3 = 1,\ s_4 = 0, \ldots,$$

adică deşi este mărginit, şirul s_n nu are limită şi seria (2) diverge. În sfîrşit, pentru $|x| > 1$, cantitatea $|s_n|$ creşte indefinit cu n, deci seria (2) este de asemenea divergentă.

În concluzie : *seria* (2) *converge pentru* $|x| < 1$ *şi are suma* (3) *şi diverge pentru* $|x| \geqslant 1$.

c. *Criteriul lui Cauchy pentru serii.* Aplicînd criteriul lui Cauchy (3.72) şirului sumelor parţiale $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ şi ţinînd cont de faptul că pentru $m < n$ avem $s_n - s_m = a_{m+1} + \ldots + a_n$, obţinem criteriul lui Cauchy pentru serii :

Seria (1) *converge dacă şi numai dacă, pentru orice* $\varepsilon > 0$, *există un număr* N *astfel încît oricare ar fi* $m \geqslant N$, $n > m$,

$$|a_{m+1} + \ldots + a_n| < \varepsilon.$$

d. În particular, dacă seria (1) converge, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există un N astfel încît

$$|a_n| < \varepsilon,$$

de îndată ce $n \geqslant N$, adică $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Deci, *pentru o serie convergentă* $a_1 + \ldots + a_n + \ldots$, *şirul termenilor* $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ *tinde la zero*. Relaţia $a_n \to 0$ reprezintă deci o condiţie necesară de convergenţă a seriei $a_1 + \ldots + a_n + \ldots$. Există serii $a_1 + \ldots + a_n + \ldots$ divergente, pentru care $a_n \to 0$ (exemplu 6.15 b), deci condiţia $a_n \to 0$ nu este o condiţie suficientă de convergenţă a unei serii.

e. O altă condiţie necesară de convergenţă a unei serii decurge din 3.33 b : *orice şir convergent este mărginit*. Deci pentru orice serie convergentă $a_1 + \ldots + a_n + \ldots$ *şirul sumelor parţiale este mărginit*. Fiind o condiţie necesară de convergenţă, această condiţie nu este totuşi şi suficientă. Astfel, sumele parţiale ale seriei $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ sînt mărginite, fără ca ea să fie convergentă.

6.12. Vom considera în paragrafele următoare (6.13 — 6.17) serii cu termeni nenegativi. Pentru o astfel de serie, sumele $s_1, s_2, \ldots$ formează un şir nedescrescător. Deci, dacă sumele parţiale $s_1, s_2, \ldots$ ale unei serii cu termeni nenegativi sînt mărginite (pentru $n \to \infty$), atunci seria este convergentă. Vedem că, pentru o serie cu termeni nenegativi, condiţia necesară 6.11 e este şi suficientă.

6.13 a. Proprietatea anterioară stă la baza criteriului de comparaţie :

Dacă o serie cu termeni nenegativi $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *converge, atunci converge şi orice altă serie cu termeni nenegativi*

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots,$$

dacă există o constantă c *şi un număr* N *astfel încît pentru* $n \geqslant N$ *să avem inegalităţile* $b_n \leqslant c \cdot a_n$.

Într-adevăr, fie $s = a_1 + a_2 + \ldots$ şi $\sigma_n = b_1 + \ldots + b_n$; avem pentru $n > N$

$$\sigma_n = b_1 + \ldots + b_n \leqslant b_1 + \ldots + b_N + c(a_{N+1} + \ldots + a_n) \leqslant b_1 + \ldots + b_N + cs.$$

b. *Exemplu.* Dacă termenii unei serii cu termeni nenegativi $b_1 + b_2 + \ldots$ verifică inegalitatea

$$b_n \leqslant c\theta^n \quad (n = N, N+1, \ldots),$$

unde $c > 0$ și $0 \leqslant \theta < 1$, atunci seria $b_1 + b_2 + \dots$ este convergentă.

Într-adevăr, se poate aplica criteriul de comparație și 6.11 b punînd $a_n = \theta^n$.

6.14. *Criteriul lui d'Alembert. Dacă o serie cu termeni pozitivi*

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots \tag{1}$$

verifică inegalitatea

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1, \tag{2}$$

atunci seria (1) *converge. Dacă*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1, \tag{3}$$

seria (1) *diverge.*

Demonstrație. Fiind dat (2), avem pentru un $\theta < 1$ și plecînd de la un număr N,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \theta \quad (n \geqslant N).$$

Deci

$$a_{N+1} \leqslant \theta a_N,\ a_{N+2} \leqslant \theta a_{N+1} \leqslant \theta^2 a_N,\ \dots,\ a_{N+k} \leqslant \theta^k a_N,\ \dots$$

și convergența seriei (1) decurge din 6.13.

Fiind dat (3), avem, începînd cu un număr N,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad (n = N,\ N+1,\ \dots);$$

deci $a_{N+1} > a_N$, $a_{N+2} > a_{N+1}$, ..., deci termenii seriei nu tind la zero; în consecință, seria (1) diverge în virtutea lui 6.11 d.

Exemplu. Seria

$$1 + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots$$

converge deoarece

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2n+1} \to \frac{1}{2}.$$

b. *Criteriul lui Cauchy. Dacă o serie cu termeni pozitivi*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{4}$$

verifică inegalitatea

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} < 1, \tag{5}$$

atunci seria (4) *converge. Dacă*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} > 1, \tag{6}$$

seria (4) *diverge.*

Demonstrație. Dacă inegalitatea (5) este îndeplinită, inegalitatea

$$\sqrt[n]{a_n} < \theta$$

are loc pentru un $\theta < 1$, și începînd cu un număr N, de unde, pentru $n \geqslant N$,

$$a_n < \theta^n,$$

și seria (4) converge conform 6.13. Dacă este îndeplinită inegalitatea (6), inegalitatea

$$\sqrt[n]{a_n} > 1$$

are loc pentru $n > N$, oricare ar fi N. Rezultă de aici că

$$a_n > 1;$$

deci termenii seriei (4) nu tind la zero și seria diverge conform 6.11 d.

Exemplu. Seria

$$\frac{2}{1} + \left(\frac{3}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \left(\frac{5}{7}\right)^4 + \ldots$$

converge deoarece

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{n+1}{2n-1} \to \frac{1}{2}.$$

6.15. Indicăm încă un criteriu util de convergență, datorat lui Cauchy (numit *criteriul de condensare*).

Dacă $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant \ldots \geqslant 0$, *atunci seria* $\sum_1^\infty a_n$ *converge sau diverge în același timp cu seria*

$$\sum_1^\infty 2^k a_{2^k}. \tag{1}$$

Într-adevăr, considerăm suma $\sum_1^m a_j$ și fie un număr k, astfel încît $2^k > m$. Atunci

$$a_1 + \ldots + a_m \leqslant a_1 + \ldots + a_{2^k-1} = a_1 + (a_2 + a_3) + \ldots$$

$$\ldots + (a_{2^{k-1}} + \ldots + a_{2^k-1}) \leqslant a_1 + 2a_2 + \ldots + 2^{k-1}a_{2^{k-1}}.$$

Dacă seria $\sum_1^\infty 2^k a_{2^k}$ converge, membrul drept nu depășește suma acestei serii. Deci, sumele parțiale $a_1 + \ldots + a_m$ sînt mărginite și $\sum_1^\infty a_n$ converge. Pe de altă parte, dacă k este ales astfel încît $2^k < m$, avem

$$a_1 + \ldots + a_m \geqslant a_1 + \ldots + a_{2^k} = a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \ldots$$

$$\ldots + (a_{2^{k-1}+1} + \ldots + a_{2^k}) \geqslant \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + \ldots$$

$$\ldots + 2^{k-1}a_{2^k} = \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^k a_{2^k})$$

și din divergența seriei $\sum_1^\infty 2^k a_{2^k}$ rezultă divergența seriei $\sum_1^\infty a_k$.

Exemple. a. Seria $\sum_1^\infty \frac{1}{n^p}$ converge pentru $p>1$ şi diverge pentru $0 \leqslant p \leqslant 1$.

Într-adevăr, dacă $p \geqslant 0$ termenii seriei nu cresc şi putem aplica criteriul lui Cauchy. Seria (1) este atunci de forma

$$\sum_1^\infty \frac{2^n}{2^{np}} = \sum_1^\infty 2^{n(1-p)} = \sum_1^\infty \alpha^n, \text{ unde } \alpha = 2^{1-p},$$

şi rezultatul căutat decurge din exemplul 6.13 b observînd că pentru $p>1$ avem $2^{1-p}<1$ şi pentru $p \leqslant 1$ avem $2^{1-p} \geqslant 1$.

Remarcăm că

$$\frac{1}{(n+1)^p} : \frac{1}{n^p} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^p} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p} \to 1 \quad (n \to \infty),$$

deci criteriul lui d'Alembert nu se poate aplica pentru cazul considerat.

b. În particular, seria $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ diverge. Fiecare termen al seriei, începînd cu al doilea, este media armonică a celor doi termeni vecini. (Un număr a se numeşte media armonică a două numere b şi c dacă $\frac{1}{a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$); de aceea seria $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ se numeşte *seria armonică.*

c. Seria $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \log_a^p n}$ converge pentru $p>1$ şi diverge pentru $0 \leqslant p \leqslant 1$ (dacă $a>1$). În acest caz, de asemenea, observînd nedescreşterea logaritmului (5.42), se poate aplica acelaşi criteriu Cauchy. Seria (1) are atunci forma

$$\sum \frac{2^n}{2^n (\log_a 2^n)^p} = \sum \frac{1}{(n \log_a 2)^p} = \frac{1}{(\log_a 2)^p} \sum \frac{1}{n^p},$$

şi ajungem la exemplul din punctul a.

6.16. Convergenţa sau divergenţa a numeroase serii, pentru care nu putem aplica criteriile lui d'Alembert 6.14a

și Cauchy 6.14 b, pot fi stabilite comparînd seriile respective cu seria 6.15 a sau c.

Observăm în prealabil că putem compara nu numai termenii seriilor, dar și raporturile termenilor alăturați.

LEMĂ. *Fiind date două serii cu termenii pozitivi* $\sum_1^\infty u_n$ *și* $\sum_1^\infty v_n$, *dacă inegalitatea*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}, \tag{1}$$

are loc pentru toate valorile lui n suficient de mari și dacă seria $\sum_1^\infty v_n$ *converge, atunci și seria* $\sum_1^\infty u_n$ *converge.*

Demonstrație. Presupunem că inegalitatea (1) este verificată pentru $n = N, N+1, N+2, \ldots$ Înmulțind membru cu membru inegalitățile (1), scrise pentru $n = N, N+1, \ldots, N+p$, se găsește

$$\frac{u_{N+p}}{u_N} \leqslant \frac{v_{N+p}}{v_N},$$

sau

$$u_{N+p} \leqslant \frac{u_N}{v_N} v_{N+p}; \tag{2}$$

inegalitatea (2) fiind valabilă pentru toți $p = 1, 2, \ldots$, convergența seriei $\sum_1^\infty u_n$ rezultă din 6.13.

6.17a. TEOREMĂ (criteriul lui Raabe). Dacă *pentru o serie cu termeni pozitivi* $\sum_1^\infty u_n$ *raportul a doi termeni consecutivi poate fi pus sub forma*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha E}{n} \quad (E \to 1 \text{ pentru } n \to \infty; \text{ vezi } 4.39),$$

atunci seria $\sum_1^\infty u_n$ *converge pentru* $\alpha > 1$ *și diverge pentru* $\alpha < 1$.

Demonstrație. Punem $v_n = \frac{1}{n^p}$; atunci, conform 5.597,g,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n^p}{(n+1)^p} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p} = \frac{1}{1+\frac{pE}{n}} = 1 - \frac{pE}{n}.$$

Dacă $\alpha > 1$, alegem un $p \in (1, \alpha)$ și, pentru n suficient de mare, avem:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha E}{n} < 1 - \frac{pE}{n} = \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Seria $\sum_1^\infty v_n$ fiind convergentă (6.15 a), convergența seriei $\sum_1^\infty u_n$ rezultă din 6.16. Dacă $\alpha < 1$, alegem un $p \in (\alpha, 1)$; pentru n suficient de mare, avem

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \frac{pE}{n} < 1 - \frac{\alpha E}{n} = \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Dacă seria $\sum_1^\infty u_n$ converge, seria $\sum_1^\infty v_n$ va converge și ea, conform 6.16. Dar seria $\sum_1^\infty v_n$ diverge $(p < 1)$, deci seria $\sum_1^\infty u_n$ diverge.

b. *Exemplu.* Considerăm seria (γ și δ sînt numere diferite de $0, -1, -2, \ldots, -n, \ldots$)

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}{\delta(\delta+1)\ldots(\delta+n-1)}. \qquad (1)$$

În acest caz, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\gamma+n}{\delta+n} = \frac{1+\frac{\gamma}{n}}{1+\frac{\delta}{n}} = 1 - \frac{\delta-\gamma}{n}E.$

Conform punctului a seria (1) converge dacă $\delta - \gamma > 1$ și diverge dacă $\delta - \gamma < 1$.

§6.2. Serii cu termeni reali de semne oarecare

6.21. Pentru o serie

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

cu termeni oarecare, considerăm seria cu termeni nenegativi

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots \qquad (2)$$

TEOREMĂ. *Dacă seria* (2) *converge, seria* (1) *converge de asemenea.*

Demonstrație. Pentru un $\varepsilon > 0$ dat, găsim un număr N, astfel încît să avem

$$|a_{m+1}| + \ldots + |a_n| < \varepsilon$$

pentru $n > m \geqslant N$; m și n fiind aleși, avem

$$|a_{m+1} + \ldots + a_n| \leqslant |a_{m+1}| + \ldots + |a_n| < \varepsilon,$$

deci condiția Cauchy 6.11 c este îndeplinită pentru seria (1), ceea ce demonstrează teorema.

6.22. Seria (1), pentru care seria (2) converge, se numește *absolut convergentă.*

Se poate întîmpla ca seria (1) să fie convergentă în timp ce seria (2) să fie divergentă (vom da un exemplu mai departe); o astfel de serie (1) se numește *semiconvergentă.*

6.23. *Criteriul lui Leibniz. Dacă* $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots$ *și* $a_n \to 0$, *atunci seria alternată*

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$$

converge.

Demonstrație. Avem

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} \leqslant s_{2n-1},$$

$$s_{2n+2} = s_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geqslant s_{2n},$$

deci şirul $s_2, s_4, \ldots$ nu descreşte, iar şirul $s_1, s_3, \ldots$ nu creşte. Pentru orice k şi pentru $n \geqslant k$,

$$s_2 \leqslant s_4 \leqslant \ldots \leqslant s_{2n} \leqslant s_{2n} + a_{2n+1} = s_{2n+1} \leqslant \ldots \leqslant s_{2k+1},$$

deci şirul $s_2, s_4, \ldots$ este majorat de un termen oarecare s_{2k+1}; în consecinţă, există $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n}$ şi $\xi \leqslant s_{2k+1}$ pentru orice k. Dar în acest caz ξ este un minorant pentru toţi s_{2k+1} deci există $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1}$ şi

$$\xi = \lim_{n\to\infty} s_{2n} \leqslant \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \eta.$$

Apoi, avem $0 \leqslant \eta - \xi \leqslant s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1}$; deoarece prin ipoteză $a_{2n+1} \to 0$, atunci $\xi = \eta = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ (4.64), ceea ce trebuia demonstrat.

6.24. *Exemple.*

a. Seria

$$1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \ldots \quad (\alpha > 0),$$

converge conform criteriului lui Leibniz. Dacă $\alpha > 1$, ea este absolut convergentă (6.15 a). Dacă $0 < \alpha \leqslant 1$, ea este numai semiconvergentă, deoarece seria valorilor absolute

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \ldots$$

diverge (6.15 a).

b. În particular, seria alternată

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

converge. În cele ce urmează (9.74) vom indica şi suma acesteia; anume $\ln 2$.

c. Fie seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n, \quad u_n = \frac{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}{\delta(\delta+1)\ldots(\delta+n-1)},$$
$$\delta \neq 0, \quad -1, \quad -2, \ldots$$

Această serie converge absolut pentru $\delta > \gamma + 1$ (6.17 b). Să arătăm că ea este semiconvergentă pentru $\delta > \gamma$. Deoarece

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\delta - \gamma}{n} E$$

(6.17 b), dacă $\delta > \gamma$, avem $u_{n+1} < u_n$ pentru n suficient de mare. Pentru a aplica criteriul lui Leibniz, rămîne să stabilim că $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Ținînd cont de 5.59 d și g, avem :

$$\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln\left(1 - \frac{\delta - \gamma}{n} E\right) = -\frac{\delta - \gamma}{n} E' \ (E' \to 1$$

pentru $n \to \infty$);

$$\ln \frac{u_{n+1}}{u_1} = \ln \frac{u_2}{u_1} + \ldots + \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = -(\delta - \gamma) \sum_{k=1}^{n} \frac{E'_k}{k},$$

de unde, fiind cunoscută divergența seriei armonice (6.15 b), $\ln u_{n+1} \to -\infty$, deci $u_{n+1} \to 0$, ceea ce trebuia demonstrat.

§ 6.3. Operații cu serii

6.31. DEFINIȚII. Fie două serii numerice

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \tag{2}$$

a. Seria

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) + \ldots \tag{3}$$

se numește *suma seriilor* (1) *și* (2).

b. Dacă α este un număr, atunci seria

$$\alpha a_1 + \alpha a_2 + \ldots + \alpha a_n + \ldots \tag{4}$$

se numește *produsul seriei* (1) *prin numărul* α.

c. Seria

$$a_1 b_1 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \ldots \tag{5}$$

se numește *produsul seriilor* (1) *și* (2).

Toate aceste definiţii sînt formale dacă nu se fac nici un fel de ipoteze asupra convergenţei. În teorema următoare se dau proprietăţi de calcul cu aceste serii.

6.32. TEOREMĂ.

a. *Dacă seriile* (1) *şi* (2) *converg şi* $\sum_1^\infty a_k = A$, $\sum_1^\infty b_k = B$, *atunci seria* (3) *converge şi ea şi* $\sum_1^\infty (a_k + b_k) = A + B$.

b. *Dacă seria* (1) *converge şi* $\sum_1^\infty a_k = A$, *atunci seria* (4) *converge şi* $\sum_1^\infty \alpha a_k = \alpha A$.

c. *Dacă seriile* (1) *şi* (2) *converg,* $\sum_1^\infty a_k = A$, $\sum_1^\infty b_k = B$ *şi cel puţin una din serii converge absolut, atunci seria* (5) *converge şi are suma egală cu* $A \cdot B$.

Demonstraţie. a) Dacă $A_n = \sum_1^n a_k$, $B_n = \sum_1^n b_k$, atunci $\sum_1^n (a_k + b_k) = A_n + B_n$ are ca limită $A + B$.

b) Dacă $A_n = \sum_1^n a_k$, atunci $\sum_1^n \alpha a_k = \alpha A_n$ are αA ca limită.

c) Punem $A_n = \sum_1^n a_k$, $B_n = \sum_1^n b_k$, $c_n = \sum_1^n a_k b_{n-k+1}$, $C_n = \sum_1^n c_k$. Presupunem că seria $\sum_1^\infty b_k$ converge absolut, adică $D = \sum_1^\infty |b_k| < \infty$. Numerele A_n sînt mărginite, deoarece şirul $A_1, A_2, \ldots$ converge; fie $M = \sup |A_n|$. Numerele $|A_n - A_m| \leqslant |A_n| + |A_m|$ sînt mărginite de numărul $2M$. Pentru orice $\varepsilon > 0$ dat, găsim un număr N astfel încît, pentru $n > m \geqslant N$, $\left|\sum_{k=m}^n a_k\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2D}$ şi $\sum_{k=N}^\infty |b_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{4M}$. Atunci, pentru $n \geqslant 2N$,

$$|A_nB_n - C_n| = |(a_2 + \ldots + a_n)b_n + (a_3 + \ldots$$

$$\ldots + a_n)b_{n-1} + \ldots + a_nb_2| \leqslant |a_2 + \ldots + a_n| \cdot |b_n| +$$

$$+ |a_3 + \ldots + a_n| \cdot |b_{n-1}| + \ldots + |a_n| \cdot |b_2| \leqslant$$

$$\leqslant 2M[|b_n| + \ldots + |b_{N+1}|] + \frac{\varepsilon}{2D}(|b_2| + \ldots + |b_N|) \leqslant$$

$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = \lim\limits_{n\to\infty} A_nB_n = A \cdot B$ și teorema este demonstrată.

Dacă cele două serii (1), (2) sînt semiconvergente, teorema e nu este valabilă (vezi exerc. 5).

6.33. *Gruparea termenilor unei serii.* Fie o serie

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

Fixăm în plus un șir crescător $m_1 < m_2 < \ldots$ de numere naturale. Punem

$$\alpha_1 = a_1 + \ldots + a_{m_1},$$

$$\alpha_2 = a_{m_1+1} + \ldots + a_{m_2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_n = a_{m_{n-1}+1} + \ldots + a_{m_n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

DEFINIȚIE. Spunem că seria

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots \qquad (2)$$

este obținută prin *gruparea seriei* (1).

TEOREMĂ. *Dacă seria* (1) *converge, seria* (2) *converge și are aceeași sumă.*

Într-adevăr, pentru orice n,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = a_1 + \ldots + a_{m_n},$$

și, cînd $n \to \infty$, al doilea membru are ca limită suma seriei (1).

6.34. Problema condițiilor în care convergența seriei (2) implică pe cea a seriei (1) pare mai interesantă. În cazul general, această implicație nu are loc; astfel, seria $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ diverge, în timp ce seria $(1-1)+(1-1)+\ldots$ obținută prin grupare converge (către suma 0). Teoremele a și b dau condiții, în care convergența seriei (1) este o consecință a convergenței seriei (2).

a. TEOREMĂ. *Dacă seria* (1) *este cu termeni pozitivi și seria* (2) *converge, atunci seria* (1) *converge de asemenea.*

Într-adevăr, pentru orice n,

$$a_1 + \ldots + a_n \leqslant a_1 + \ldots + a_n + \ldots + a_{m_n} = \alpha_1 + \ldots$$

$$\ldots + \alpha_n \leqslant \sum_1^\infty \alpha_k,$$

deci sumele parțiale ale seriei (1) sînt majorate; nu rămîne decît să aplicăm 6.12.

b. TEOREMĂ. *Dacă* $a_n \to 0$ *și numărul elementelor fiecărei grupe este mărginit de aceeași constantă* (adică $m_n - m_{n-1} \leqslant M$, pentru orice n), *atunci convergența seriei* (2) *implică pe cea a seriei* (1).

Într-adevăr, pentru un n dat, găsim m_k și m_{k+1} astfel încît să avem

$$m_k \leqslant n \leqslant m_{k+1}.$$

Atunci, dacă $s_n = a_1 + \ldots + a_n$, $\sigma_k = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$, avem

$$|s_n - \sigma_k| = |a_{m_k+1} + \ldots + a_n| \leqslant M \cdot \max_{j > m_k} |a_j| \to 0,$$

pentru $k \to \infty$; rezultă de aici că numerele s_n au aceeași limită ca și σ_k.

6.35. *Permutarea termenilor unei serii.* Fie o serie

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

DEFINIȚIE. Dacă $m_1, m_2, \ldots$ este o permutare a mulțimii numerelor naturale, atunci seria

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots, \tag{2}$$

unde $b_n = a_{m_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ este numită *permutarea seriei* (1).

TEOREMĂ. *Dacă seria* (1) *converge și* $a_n \geqslant 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *atunci seria* (2) *converge către aceeași sumă.*

Demonstrație. Pentru orice sumă parțială

$$\sigma_n = b_1 + \ldots + b_n \tag{3}$$

a seriei (2) există o sumă parțială,

$$s_{m(n)} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{m(n)}, \tag{4}$$

a seriei (1) conținînd toți termenii sumei parțiale (3). Atunci, există o sumă parțială

$$\sigma_{N(n)} = b_1 + \ldots + b_n + \ldots + b_{N(n)},$$

a seriei (2) care conține toți termenii sumei parțiale (4). Deoarece $a_n \geqslant 0$, pentru orice n, avem

$$\sigma_n \leqslant s_{m(n)} \leqslant \sigma_{N(n)}. \tag{5}$$

Prima din aceste inegalități are consecința

$$\sigma_n \leqslant s_{m(n)} \leqslant s,$$

deci seria (2) converge; notăm suma sa prin σ. Este evident că $m(n)$ și $N(n)$ sînt cel puțin egale cu n, deci cresc indefinit odată cu n. Trecînd la limită în (5), pentru $n \to \infty$, obținem

$$\sigma \leqslant s \leqslant \sigma,$$

de unde $\sigma = s$, teorema fiind demonstrată.

6.36. TEOREMĂ (Dirichlet). *Dacă seria* 6.35 (1) *converge absolut, seria* 6.35 (2) *converge absolut spre aceeași sumă.*

Demonstrație. Convergența absolută a seriei (2) rezultă din 6.35. Pentru un $\varepsilon > 0$ dat, găsim un număr N astfel încît $|s_N - s| < \frac{\varepsilon}{2}$ și inegalitatea $\sum_{m}^{n} |a_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ să aibă loc pentru $m \geqslant N$. Fie p_0 un număr, astfel încît orice sumă parțială σ_p a seriei (2) cu $p \geqslant p_0$ să cuprindă primii N termeni ai seriei (1). Atunci pentru orice $p \geqslant p_0$, diferența $\sigma_p - s_N$ nu conține decît termenii seriei (1) cu indici superiori lui N; deci $|s_N - \sigma_p| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, de unde

$$|s - \sigma_p| \leqslant |s - s_N| + |s_N - \sigma_p| \leqslant \varepsilon.$$

Aceasta spune că $\sigma_p \to s$, ceea ce trebuia demonstrat.

6.37. Cazul seriilor semiconvergente este complet diferit.

TEOREMĂ (Riemann). *Fiind date o serie* 6.35(1) *semiconvergentă și două numere oarecare* $\alpha \leqslant \beta$ (*pe dreapta reală închei ată* $\overline{\mathbb{R}}$), *există o permutare* 6.35(2) *a seriei* 6.35(1) *astfel încît*

$$\underline{\lim}\, \sigma_n = \alpha, \quad \overline{\lim}\, \sigma_n = \beta.$$

Demonstrație. Seria 6.35(1) fiind convergentă, termenii săi tind la zero. Deci, nu există decît un număr finit de numere n pentru care $|a_n|$ să depășească un număr pozitiv dat ε. Aceasta permite să alegem, în orice mulțime de termeni ai seriei 6.35 (1), cel mai mare (sau cel mai mare în modul). Separînd în această serie termenii pozitivi de cei negativi și alegînd succesiv termenii cei mai mari (sau cei mai mari în modul) sîntem în măsură să formăm două serii : una

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots \qquad (1)$$

compusă din termenii pozitivi ai seriei 6.35 (1) aranjați în ordine descrescătoare, adică $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots$, și alta

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n + \ldots \qquad (2)$$

compusă din valorile absolute ale tuturor termenilor negativi ai seriei 6.35 (1) aranjați și ei în ordine descrescătoare, adică $q_1 \geqslant q_2 \geqslant \ldots$

Cele două serii sînt divergente. Într-adevăr, dacă cele două serii (1) și (2) converg spre sumele respective s și σ,

atunci seria 6.35 (1) converge absolut, deoarece orice sumă finită $|a_1| + \ldots + |a_n|$ nu depășește suma $s + \sigma$.

Considerăm cazul cînd una din seriile (1), (2) converge și alta nu. Presupunem, de exemplu, că seria (2) converge și seria (1) diverge. Sumele parțiale s_n ale seriei 6.35(1) conțin, pe măsură ce n crește, un număr din ce în ce mai mare de termeni ai seriilor (1) și (2); termenii seriei (1) dau o sumă arbitrar de mare, în timp ce ai seriei (2) nu pot da decît o sumă mărginită. Astfel, $s_n \to \infty$ și seria 6.35 (1) nu poate fi convergentă. O situație analoagă, cu condiția să schimbăm semnul, are loc dacă seria (1) converge și seria (2) diverge. Deci cele două serii (1) și (2) diverg.

Acum, vom construi cu termenii seriei (1) și (2) o nouă serie după regula următoare (pentru cazul cînd α și β sînt finite). Sumele parțiale s_n^+ ale seriei (1) cresc indefinit; găsim un număr n_1 în așa fel ca să avem

$$p_1 + \ldots + p_{n_1-1} \leqslant \beta < p_1 + \ldots + p_{n_1}$$

(dacă avem deja $p_1 > \beta$, punem $n_1 = 1$). Apoi, găsim un număr m_1 astfel ca să avem

$$p_1 + \ldots + p_{n_1} - q_1 - \ldots - q_{m_1} < \alpha \leqslant p_1 + \ldots + p_{n_1} - q_1 - \ldots q_{m_1-1}.$$

Găsim apoi un număr n_2 astfel încît

$$p_1 + \ldots + p_{n_1} - q_1 - \ldots - q_{m_1} + p_{n_1+1} + \ldots + p_{n_2-1} \leqslant \beta < p_1 + \ldots + p_{n_1} - q_1 - \ldots - q_{m_1} + p_{n_1+1} + \ldots + p_{n_2};$$

după aceea un număr m_2 astfel ca

$$p_1 + \ldots + p_{n_1} - q_1 - \ldots - q_{m_1} + p_{n_1+1} + \ldots$$

$$\ldots + p_{n_2} - q_{m_1+1} - \ldots - q_{m_2} < \alpha \leqslant p_1 + \ldots + p_{n_1} -$$

$$- q_1 - \ldots - q_{m_1} + p_{n_1+1} + \ldots + p_{n_2} - q_{m_1+1} - \ldots - q_{m_2-1}.$$

Continuăm construcția la infinit. Ajungem la o serie

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots, \qquad (3)$$

care reprezintă o permutare a seriei 6.35(1). Arătăm că seria (3) satisface condiția cerută.

a. Punctele α și β sînt valori de aderență ale șirului sumelor parțiale ale seriei (3).

Într-adevăr, sumele parțiale ale seriei (3) ce conțin termenii de indici n_1, $n_1 + m_1 + n_2$, ..., $n_1 + m_1 + n_2 + \ldots + m_{k-1} + n_k$, ... diferă de β cu cel mult p_{n_1}, p_{n_2}, ..., p_{n_k}, ... respectiv și aceste ultime cantități tind la 0; în mod analog, sumele parțiale ale seriei (3) cu indici $n_1 + m_1$, $n_1 + m_1 + n_2 + m_2$, ..., $n_1 + m_1 + n_2 + m_2 + \ldots + n_k + m_k$, ... diferă de α cu cel mult $q_{m_1}, q_{m_2}, \ldots, q_{m_k}$ respectiv; aceste cantități tind și ele la zero.

b. Nici o valoare de aderență a șirului de sume parțiale ale seriei (3) nu aparține exteriorului intervalului $[\alpha, \beta]$.

Într-adevăr, dacă, de exemplu, $\gamma > \beta$ și $\gamma - \beta = h > 0$, găsim un număr n_k astfel încît $p_{n_k} < \frac{h}{2}$; atunci toate sumele parțiale ale seriei (3) cu indici mai mari decît $n_1 + m_1 + \ldots + m_{k-1} + n_k$, nu depășesc $\beta + p_{n_k} < \beta + \frac{h}{2}$ și diferă de γ cu cel puțin $\frac{h}{2}$. Evident, propozițiile a și b demonstrează teorema în cazul α și β finiți. Cînd unul din numerele α și β (sau amîndouă) sînt infinite, construcția trebuie puțin modificată; propunem cititorului să o facă.

În particular, punînd $\alpha = \beta = p$, seria (3) converge atunci spre numărul p. Vedem că permutînd termenii unei serii semiconvergente într-un mod convenabil o putem face să conveargă spre o sumă dată anterior.

§ 6.4. Serii de vectori

6.41. Definiția convergenței unei serii de vectori ai spațiului $\mathbb{R}_n$ este complet analoagă cu definiția 6.11 a convergenței unei serii numerice, anume:

Fie $a_1, \ldots, a_m, \ldots$ un șir de vectori ai spațiului $\mathbb{R}_n$. Formăm sumele parțiale

$$s_1 = a_1 \in \mathbb{R}_n,$$
$$s_2 = a_1 + a_2 \in \mathbb{R}_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$s_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_m \in \mathbb{R}_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dacă şirul $s_1, \ldots, s_m, \ldots$ de sume parţiale converge în spaţiul $\mathbb{R}_n$, spunem că seria vectorială

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m + \ldots \tag{1}$$

converge şi are ca sumă vectorul $s = \lim_{n\to\infty} s_n$. Dacă, din contră, şirul de vectori $s_1, \ldots, s_m, \ldots$ diverge, spunem că seria (1) *diverge*.

6.42. Deoarece convergenţa în spaţiul $\mathbb{R}_n$ se reduce la convergenţa fiecărei coordonate (3.32 f), se poate spune că seria de vectori

$$a_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1n}), \quad a_2 = (a_{21}, \ldots, a_{2n}), \ldots$$
$$\ldots a_m = (a_{m1}, \ldots, a_{mn}), \ldots$$

converge dacă şi numai dacă toate seriile numerice

$$a_{11} + a_{21} + \ldots + a_{m1} + \ldots,$$
$$a_{12} + a_{22} + \ldots + a_{m2} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{1n} + a_{2n} + \ldots + a_{mn} + \ldots$$

converg; în plus, suma seriei $\sum a_m$ este vectorul $p=(p_1, \ldots, p_n)$ ale cărui componente p_k sînt sumele seriilor numerice corespunzătoare $\sum_{m=1}^{\infty} a_{mk}$.

6.43. Criteriul lui Cauchy, fiind valabil pentru funcţii vectoriale, în particular pentru şiruri vectoriale (4.75), el este de asemenea valabil pentru serii vectoriale:

Criteriul lui Cauchy pentru o serie vectorială. *O serie vectorială* $a_1 + a_2 + \ldots + a_m + \ldots$ $(a_m \in \mathbb{R}_n)$ *converge dacă şi numai dacă, pentru orice* $\varepsilon > 0$, *există un număr* N *astfel încît*

$$|a_{m+1} + \ldots + a_n| < \varepsilon,$$

de îndată ce $n > m \geqslant N$.

6.44. În particular, pentru orice serie vectorială convergentă $\sum_1^\infty a_n$ avem $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

6.45. Aplicînd criteriul lui Cauchy în același mod ca în 6.21, obținem următoarea condiție suficientă de convergență :

Dacă seria numerică

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_m| + \ldots \qquad (1)$$

converge, atunci seria vectorială

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m + \ldots \qquad (2)$$

converge de asemenea.

O serie (2) pentru care seria numerică (1) converge, este numită *absolut convergentă*. Dacă seria (1) diverge și seria (2) converge, ultima se numește *serie semiconvergentă de vectori*.

6.46. Rezultatele 6.32 a și 6.32 b privind adunarea seriilor și înmulțirea unei serii cu un număr rămîn valabile pentru serii vectoriale. Propoziția 6.32 c, în cazul general, nu are sens, înmulțirea vectorilor nefiind definită. Se păstrează rezultatele 6.33 și 5.34 b asupra grupării termenilor unei serii, ca și 6.36 (permutarea termenilor unei serii). Enunțurile teoremelor inverse, înțelegînd aici reciproca teoremei lui Riemann, iau forme destul de originale ; ele sînt date în exercițiile 17—22.

Seriile cu termeni complecși considerate ca serii vectoriale în $\mathbb{R}_n$, $n = 2$, se înscriu în schema de mai sus. Pentru ele, în afara rezultatelor generale semnalate anterior, se conservă teorema asupra înmulțirii seriilor (6.32 c) :

Dacă două serii cu termeni complecși :

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m + \ldots, \qquad (1)$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_m + \ldots \qquad (2)$$

converg și dacă cel puțin una din ele converge absolut, atunci seria

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \ldots \qquad (3)$$

converge de asemenea și suma sa este egală cu produsul sumelor seriilor (1) *și* (2).

Demonstrația reproduce pe cea a teoremei 6.32 c.

6.47. Pentru serii vectoriale semiconvergente, putem folosi criteriul lui Abel-Dirichlet care este bazat pe o transformare specială de sume vectoriale finite, numite *transformarea Abel.*

a. Fie numerele $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ și vectorii $b_1, \ldots, b_m$. Punem

$$\alpha'_1 = \alpha_2 - \alpha_1, \ \alpha'_2 = \alpha_3 - \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha'_{m-1} = \alpha_m - \alpha_{m-1},$$

$$B_1 = b_1, \ B_2 = b_1 + b_2, \ \ldots, \ B_m = b_1 + \ldots + b_m.$$

TEOREMĂ (transformarea Abel). *Oricare ar fi numerele* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ *și vectorii* $b_1, \ldots, b_m$, *are loc următoarea egalitate:*

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k b_k = \alpha_m B_m - \sum_{k=1}^{m-1} \alpha'_k B_k \qquad (m = 2, 3, \ldots). \tag{1}$$

Demonstrație. Aplicăm metoda inducției Pentru $m = 2$, egalitatea (1) este, evident, satisfăcută :

$$\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 = \alpha_2(b_1 + b_2) - (\alpha_2 - \alpha_1)b_1.$$

Presupunem că ea este satisfăcută pentru un număr m; arătăm că ea este valabilă și pentru $m + 1$. În ipoteza inducției, avem

$$\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k b_k = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k b_k + \alpha_{m+1} b_{m+1} = \alpha_m B_m - \\ - \sum_{k=1}^{m-1} \alpha'_k B_k + \alpha_{m+1} b_{m+1}.$$

Vom demonstra egalitatea următoare :

$$\alpha_m B_m - \sum_{k=1}^{m-1} \alpha'_k B_k + \alpha_{m+1} b_{m+1} = \alpha_{m+1} B_{m+1} - \\ - \sum_{k=1}^{m-1} \alpha'_k B_k - \alpha'_m B_m. \tag{2}$$

Reducînd în (2) termenii $\sum_{k=1}^{m-1} \alpha'_k B_k$, se obține

$$\alpha_m B_m + \alpha_{m+1} b_{m+1} = \alpha_{m+1} B_{m+1} - \alpha'_m B_m = \alpha_{m+1} B_{m+1} - (\alpha_{m+1} - \alpha_m) B_m.$$

Reducînd, mai întîi $\alpha_m B_m$ și împărțind apoi cu α_{m+1} (dacă $\alpha_{m+1} \neq 0$), obținem egalitatea $b_{m+1} = B_{m+1} - B_m$, care este evidentă. Efectuînd transformarea în ordine inversă, obținem (2).

b. Să semnalăm o inegalitate ce rezultă din (1): dacă $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_m \geqslant 0$ și $|B_k| \leqslant C (k = 1, 2, \ldots, n)$, atunci

$$\left| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k b_k \right| \leqslant 2C\alpha_1. \tag{3}$$

Într-adevăr, în ipoteza formulată, avem $|\alpha_m B_m| \leqslant \alpha_m C \leqslant \alpha_1 C$, $\alpha'_k \leqslant 0$ și

$$\left| \sum_{1}^{m-1} \alpha'_k B_k \right| = \left| \sum_{1}^{m-1} (-\alpha'_k) B_k \right| \leqslant C \sum_{1}^{m-1} (-\alpha'_k) =$$

$$= C[(\alpha_1 - \alpha_2) + \ldots + (\alpha_{m-1} - \alpha_m)] = C(\alpha_1 - \alpha_m) \leqslant C\alpha_1;$$

deci (3) rezultă din (1).

c. *Criteriul lui Abel-Dirichlet pentru serii vectoriale. Seria*

$$\sum_{1}^{\infty} \alpha_m b_m \tag{4}$$

converge dacă $\alpha_m \searrow 0$ *și vectorii* $B_m = b_1 + \ldots + b_m$ *sînt mărginiți*, $|B_m| \leqslant C$.

Demonstrație. Aplicăm evaluarea (3) unui segment din seria (4). Avem

$$\left| \sum_{k=p}^{q} \alpha_k b_k \right| \leqslant 2C_1 \alpha_p,$$

unde

$$C_1 = \sup_{p<r<q} |b_p + \ldots + b_r| = \sup_{p<r<q} |(b_1 + \ldots + b_r) - (b_1 + \ldots + b_{p-1})| = \sup_{p<r<q} |B_r - B_{p-1}| \leqslant 2C.$$

Cantitatea obținută tinde spre zero pentru $p \to \infty$ și oricare ar fi $q > p$. Putem aplica deci criteriul lui Cauchy 6.43 seriei (4), deci seria converge.

d. Criteriul lui Leibniz 6.23 este un caz particular al criteriului lui Abel-Dirichlet. Acesta se obține luînd $n = 1$ și punînd $B_1 = 1$, $B_2 = -1$, $B_3 = 1$, $B_4 = -1$, . . . Dar chiar în cazul $n = 1$, criteriul lui Abel-Dirichlet este mai larg aplicabil decît cel al lui Leibniz.

Considerăm două serii reale ($n = 1$)

$$\sum_0^\infty \alpha_m \sin m\theta, \tag{5}$$

$$\sum_0^\infty \alpha_m \cos m\theta \tag{6}$$

și seria de numere complexe

$$\sum_{m=0}^\infty \alpha_m(\cos m\theta + i \sin m\theta). \tag{7}$$

Să găsim valorile lui θ pentru care seriile date converg. Punem $z = \cos\theta + i\sin\theta$; atunci $|z| = 1$ și

$$z^m = \cos m\theta + i \sin m\theta.$$

Apoi,

$$\sum_{k=0}^m (\cos k\theta + i \sin k\theta) = \sum_{k=0}^m z^k = \frac{1 - z^{m+1}}{1 - z},$$

$$\left| \sum_{k=0}^m (\cos k\theta + i \sin k\theta) \right| \leqslant \frac{2}{|1-z|} = \frac{2}{|1 - \cos\theta - i\sin\theta|} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}} = \sqrt{\frac{2}{1-\cos\theta}}. \tag{8}$$

Se vede că

$$\left| \sum_{k=0}^m (\cos k\theta + i \sin k\theta) \right|$$

este mărginită pentru $m \to \infty$ dacă $\theta \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ Presupunem acum că numerele α_m tind la zero descrescînd. Putem atunci să aplicăm seriei (7) criteriul lui Abel-

Dirichlet; de aici tragem concluzia că seria (7) converge cînd $\alpha_m \searrow 0$ şi $\theta \neq 0, \pm 2\pi, \ldots$. În aceleaşi condiţii, seriile (5) şi (6) converg, de asemenea, deoarece ele reprezintă părţile reală şi imaginară ale seriei (7). Seria (5) converge şi ca pentru $\theta = 0, \pm 2\pi, \ldots$ deoarece aceste valori θ anulează toţi termenii ei. Inegalitatea (8) implică inegalităţi analoage în domeniul real:

$$\left|\sum_{k=0}^{m} \cos k\theta\right| \leqslant \sqrt{\frac{2}{1-\cos\theta}},$$

$$\left|\sum_{k=0}^{m} \sin k\theta\right| \leqslant \sqrt{\frac{2}{1-\cos\theta}}. \qquad (9)$$

Aceste evaluări sînt adesea folosite atunci cînd se aplică criteriul lui Abel-Dirichlet.

f. În cazul particular cînd $\alpha_m = r^m (-1 < r < 1)$ sînt uşor de găsit sumele seriilor (5) — (7). Anume, sumînd progresia geometrică, avem

$$\sum_{0}^{\infty} r^m e^{im\theta} = \frac{1}{1 - re^{i\theta}}.$$

Separînd părţile reale şi imaginare, găsim

$$\frac{1}{1-re^{i\theta}} = \frac{1-re^{-i\theta}}{(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})} = \frac{1-r\cos\theta+ir\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2},$$

de unde

$$\sum_{0}^{\infty} r^m \cos m\theta = \operatorname{Re}\sum_{0}^{\infty} r^m e^{im\theta} = \frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2},$$

$$\sum_{0}^{\infty} r^m \sin m\theta = \operatorname{Im}\sum_{0}^{\infty} r^m e^{im\theta} = \frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}.$$

6.48. *Serii bilaterale.*

a. Fie un şir bilateral, „infinit în ambele sensuri", de vectori $\ldots, a_{-n}, \ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$. Definim suma „seriei bilaterale"

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_k \qquad (1)$$

ca limita sumelor parțiale

$$\sum_{-m}^{n} a_k$$

cînd m, n tind către infinit independent unul față de altul, cu condiția ca limita să existe. Altfel spus, *seria* (1) *converge și are suma* s, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr N astfel încît, oricare ar fi m, $n > N$, să avem inegalitatea

$$\left| s - \sum_{-m}^{n} a_k \right| < \varepsilon. \tag{2}$$

b. Următoarea teoremă reduce convergența unei serii bilaterale la cea a unei serii unilaterale.

TEOREMĂ. *Seria* (1) *converge dacă și numai dacă cele două serii «unilaterale»*

$$\sum_{0}^{\infty} a_k \text{ și } \sum_{1}^{\infty} a_{-k} \tag{3}$$

converg; dacă ultimele două serii converg și

$$\sum_{0}^{\infty} a_k = A, \quad \sum_{1}^{\infty} a_{-k} = B,$$

atunci suma S *a seriei* (1) *este* $A + B$.

Demonstrație. Presupunem că seria (3) converge. Pentru orice $\varepsilon > 0$, putem găsi un număr N astfel încît dacă $n > N$, $m > N$, atunci

$$\left| A - \sum_{0}^{n} a_k \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left| B - \sum_{1}^{m} a_{-k} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De aici,

$$\left| (A + B) - \sum_{-m}^{n} a_k \right| = \left| \left(A - \sum_{0}^{n} a_k \right) + \left(B - \sum_{1}^{m} a_{-k} \right) \right| < \varepsilon;$$

aceasta spune că seria (1) converge și are $A + B$ ca sumă.

Reciproc, dacă seria (1) converge, atunci din inegalitatea (2) rezultă că, pentru orice $p > N$, $q > 0$,

$$\left| \sum_{p}^{p+q} a_k \right| = \left| \left(s - \sum_{-m}^{p-1} a_k \right) - \left(s - \sum_{-m}^{p+q} a_k \right) \right| < 2\varepsilon,$$

ceea ce implică, în virtutea criteriului lui Cauchy 6.43, convergența seriei $\sum_0^\infty a_k$. Convergența seriei $\sum_1^\infty a_{-k}$ se demonstrează în mod analog, ceea ce încheie demonstrația teoremei.

c. Exemplu. Seria bilaterală

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

converge pentru orice $t \in \mathbb{R}_1$ dacă $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$; ea converge peste tot cu excepția, eventual, a punctelor $t = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ dacă $c_n \searrow 0$, $c_{-n} \searrow 0$ $(n \to +\infty)$ (vezi 6.47 d).

6.49 a. *Sumarea simetrică a seriilor bilaterale.* O serie vectorială bilaterală

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_k \tag{1}$$

se numește *simetric sumabilă*, dacă există limita pentru $n \to \infty$ a sumelor parțiale simetrice

$$s_n = \sum_{-n}^{n} a_k, \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \tag{2}$$

în acest caz, limita s a sumelor (2) se numește *suma simetrică* a seriei (1).

Dacă seria (1) converge în sensul 6.48, atunci, evident, ea este simetric sumabilă și suma sa simetrică coincide cu suma obișnuită. Dar nu orice serie simetric sumabilă este convergentă în sensul 6.48. De exemplu, seria bilaterală a numerelor a_k egale cu 1 pentru $k > 0$, 0 pentru $k = 0$ și -1 pentru $k < 0$, este simetric sumabilă (și suma sa este egală cu zero) fără să fie convergentă în sensul 6.48.

b. Sumabilitatea simetrică a sumelor bilaterale se reduce și ea la convergența obișnuită.

TEOREMĂ. *Seria bilaterală* (1) *este simetric sumabilă dacă și numai dacă seria unilaterală*

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + a_{-k}) \tag{3}$$

converge; seria (3) *fiind convergentă. suma sa coincide cu suma simetrică a seriei* (1).

Demonstrație. Teorema rezultă din coincidența evidentă a sumei parțiale a n-a a seriei (3) cu suma parțială simetrică a n-a (2), a seriei (1).

Sumarea simetrică este utilizată, de exemplu, în teoria seriilor trigonometrice de forma

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

(partea a III-a, cap. 14).

c. *Exemplu.* Seria bilaterală

$$\ldots - \frac{e^{-int}}{n} - \ldots - \frac{e^{-2it}}{2} - \frac{e^{-it}}{1} + \frac{e^{it}}{1} + \frac{e^{2it}}{2} + \ldots + \frac{e^{nit}}{n} + \ldots$$

converge pentru toți $t \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ (6.48 c), dar nu converge pentru $t = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ deoarece, pentru aceste ultime valori ale lui t, ipoteza teoremei 6.48 b nu este satisfăcută. De asemenea, ea este simetric sumabilă pentru toate valorile $t \in \mathbb{R}_1$, deoarece seria

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{k} = 2i \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k}$$

este peste tot convergentă (6.47 d).

§ 6.5. Serii de funcții

6.51. Am întîlnit deja serii de funcții (§ 6.4, de exemplu). Dăm acum cîteva definiții și teoreme generale în legătură cu convergența unor astfel de serii. Fie o serie

$$a_1(x) + a_2(x) + \ldots + a_n(x) + \ldots \qquad (1)$$

de funcții definite pe o mulțime oarecare E cu valori în $\mathbb{R}_m$. Conform cu 5.91 și 5.93, formulăm definițiile convergenței și convergenței uniforme pentru seria (1).

a. DEFINIȚIE. Dacă șirul sumelor parțiale ale seriei (1)

$$s_1(x) = a_1(x),$$

$$s_2(x) = a_1(x) + a_2(x),$$

. . . . . .

$$s_n(x) = a_1(x) + \ldots + a_n(x),$$

. . . . . .

converge pe o mulțime E, spunem că seria (1) *converge pe mulțimea* E și numim *suma* seriei (1), limita funcțiilor $s_n(x)$.

b. DEFINIȚIE. Dacă șirul $s_n(x)$ converge uniform pe mulțimea E, spunem că seria (1) *converge uniform pe mulțimea* E.

6.52. Criteriul lui Cauchy 5.98 este formulat în felul următor pentru o serie de funcții vectoriale :

Pentru ca seria 6.51 (1) să fie uniform convergentă pe mulțimea E, este necesar și suficient ca, pentru orice $\varepsilon > 0$, să existe un număr N astfel încît oricare ar fi $n \geqslant N$, $p > n$, $x \in E$, să avem

$$|a_{n+1}(x) + \ldots + a_p(x)| \leqslant \varepsilon.$$

6.53. Dăm o condiție suficientă simplă de convergență uniformă a seriei 6.51(1) :

Criteriul lui Weierstrass. Dacă

$$\sup_{x \in E} |a_n(x)| = \alpha_n$$

și seria $\sum_1^\infty \alpha_n$ *converge, atunci seria* (1) *converge uniform.*

Această propoziție rezultă din 6.52, conform inegalității

$$|a_{n+1}(x) + \ldots + a_p(x)| \leqslant \alpha_{n+1} + \ldots + \alpha_p$$

și criteriului lui Cauchy pentru o serie numerică (6.11 c).

6.54. Teoremele următoare sînt consecințe imediate ale teoremelor 5.94 — 5.95.

a. TEOREMĂ. *Dacă seria* 6.51(1) *este formată din funcţii mărginite cu valori în* $\mathbb{R}_m$ *şi dacă ea converge uniform pe* E, *atunci suma sa* $s(x)$ *este mărginită pe* E.

b. TEOREMĂ. *Dacă seria* 6.51 (1) *este formată din funcţii continue pe un spaţiu metric* E, *cu valori în* $\mathbb{R}_m$, *şi dacă ea converge uniform pe* E, *atunci suma seriei* (1) *este de asemenea o funcţie continuă pe spaţiul* E, *cu valori în* $\mathbb{R}_m$.

§ 6.6. Serii de puteri

6.61. În domeniul complex, seriile de puteri prezintă un interes deosebit.

DEFINIŢIE. O serie de forma

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots + a_n(z - z_0)^n + \ldots, \tag{1}$$

unde $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$ şi coeficienţii $a_0, a_1, \ldots$ sînt numere complexe, se numeşte *serie de puteri* (sau *serie întreagă*).

6.62. Este util să determinăm domeniul de convergenţă al acestei serii, adică mulţimea valorilor lui z pentru care seria 6.61 (1) converge. În acest sens are loc următoarea teoremă :

TEOREMĂ (Cauchy-Hadamard). *Punem*

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|},$$

unde limita superioară este considerată pe dreapta numerică încheiată. Seria 6.61(1) *converge, şi chiar absolut, în orice punct* z *cu* $|z - z_0| < R$ *şi diverge în orice punct* z *cu* $|z - z_0| > R$.

Observaţie. Dacă $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, punem $R = 0$. Dacă $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, punem $R = \infty$, şi atunci teorema afirmă că seria 6.61(1) converge pentru orice $z \in \mathbb{C}$.

Demonstrație. Considerăm cazul $R \neq 0$, finit. Fie

$$|z - z_0| < \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Această inegalitate poate fi pusă sub forma

$$|z - z_0| \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n||z - z_0|^n} < 1,$$

de unde, în virtutea criteriului lui Cauchy 6.14 b și 6.45, rezultă convergența seriei 6.61 (1).

În cazul cînd

$$|z - z_0| > \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

avem analog

$$|z - z_0| \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} > 1,$$

și, conform aceluiași criteriu 6.14 b și 6.44, seria 6.61(1) diverge.

Lăsăm cititorului grija de a examina cazul $R = 0$ și $R = \infty$.

6.63. Teorema 6.62 arată că domeniul $G \subset \mathbb{R}_1$ de convergență al seriei de puteri 6.61(1) este discul de rază R, și de aceea numărul R se numește *raza de convergență* a seriei 6.61(1). Mai precis, domeniul G conține toate punctele interioare ale discului (z pentru care $|z - z_0| < R$) și nu conține nici un punct exterior (pentru care $|z - z_0| > R$). În ceea ce privește punctele circumferinței însăși, $|z - z_0| = R$, se pot prezenta diverse situații.

Exemple. a. Seria $\sum_1^\infty \frac{z^n}{n^n}$ converge pentru toate valorile z, deoarece

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

b. Seria $\sum_1^\infty n^n z^n$ nu converge decît pentru $z = 0$, deoarece

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

c. Pentru orice α fixat, seria $\sum_1^\infty n^\alpha z^n$ are raza de convergenţă egală cu 1, deoarece în virtutea lui 5.58(6)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}\right)^\alpha = 1.$$

Dar, pentru $\alpha \geqslant 0$, seria nu converge în nici un punct al circumferinţei $|z| = 1$, deoarece termenii săi nu tind la zero. Pentru $\alpha < -1$, seria converge, chiar absolut, în orice punct al cercului $|z| = 1$ (6.15 a). Dacă $-1 \leqslant \alpha < 0$, seria diverge pentru $z = 1$ şi converge pentru toţi $z \neq 1$, $|z| = 1$ (conform 6.47 d).

6.64. Fie o serie de puteri 6.61(1), avînd raza de convergenţă R. Punem următoarea problemă: această serie de puteri converge uniform în discul $|z - z_0| < R$? În cazul general răspunsul este negativ; astfel, dacă seria

$$1 + z + z^2 + \ldots$$

ar converge uniform în discul său de convergenţă $|z| < 1$, atunci suma sa ar fi mărginită (6.54 a); dar suma sa este egală cu $\frac{1}{1-z}$ (6.11 b) şi nu este mărginită în discul $|z| < 1$.

Are loc totuşi următoarea teoremă:

a. *Seria* 6.61(1) *converge uniform în orice disc* $|z - z_0| \leqslant R_1 < R$. Într-adevăr, pentru $|z - z_0| \leqslant R_1$, avem inegalitatea următoare:

$$|a_n(z - z_0)^n| \leqslant |a_n| R_1^n,$$

și seria numerelor $|a_n|R_1^n$ converge (am văzut aceasta, din demonstrația teoremei Cauchy-Hadamard 6.62). Deci se poate aplica criteriul lui Weierstrass 6.52 în cercul $|z| \leqslant R_1$, ceea ce conduce la rezultatul căutat.

b. O consecință a punctului a și 6.54 a, b :

Suma $s(z)$ a seriei 6.61(1) *este o funcție mărginită și continuă în orice disc* $|z - z_0| \leqslant R_1$.

Funcția $s(z)$ este deci continuă în orice disc $|z - z_0| < R$, fiecare punct al acestui disc aparținînd unui disc mai mic $|z - z_0| \leqslant R_1$. Dar ea nu este mărginită în mod sigur în tot discul $|z - z_0| < R$, după cum am văzut mai înainte.

6.65. Știm că o serie de puteri poate converge sau diverge pe frontiera discului său de convergență. Dar dacă ea converge într-un punct z_1 al frontierei, atunci în domeniul ei de convergență uniformă poate fi inclus întreg segmentul unind centrul discului cu punctul z_1. Pentru a demonstra acest fapt, este suficient să considerăm cazul $z_0 = 0$, $z_1 = t_1 > 0$.

TEOREMA LUI ABEL. *Dacă o serie de puteri* $\sum_0^\infty a_n t^n$ *converge într-un punct* $t_1 > 0$, *atunci ea converge uniform pentru intervalul* $0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Demonstrație. Pentru un $\varepsilon > 0$ dat, am găsit un N astfel încît inegalitatea $\left| \sum_{p+1}^{q} a_n t^n \right| < \varepsilon$ să aibă loc pentru orice t, cu $|t| \leqslant t_1$, de îndată ce $p \geqslant N$, $q \geqslant N$. Efectuăm transformarea lui Abel 6.47(1) punînd $\alpha_k = \left(\frac{t}{t_1}\right)^k$, $b_k = a_k t_1^k$ ($k = p+1, \ldots, q$; $p < q$ fiind pentru un moment arbitrar) :

$$\sum_{p+1}^{q} a_n t^n = \sum_{p+1}^{q} a_n t_1^n \left(\frac{t}{t_1}\right)^n =$$

$$= \left(\frac{t}{t_1}\right)^q \sum_{p+1}^{q} a_n t_1^n - \sum_{p+1}^{q} \left[\left(\frac{t}{t_1}\right)^{n+1} - \left(\frac{t}{t_1}\right)^n\right] \sum_{k=p+1}^{n} a_k t_1^k.$$

Alegem N astfel încît să avem $\left|\sum_{p+1}^{n} a_k t_1^k\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ de îndată ce $p \geqslant N$, $n \geqslant N$; avem atunci

$$\left|\sum_{p+1}^{q} a_n t^n\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{t}{t_1}\right)^q + \frac{\varepsilon}{2}\max \sum_{p+1}^{q-1}\left|\left(\frac{t}{t_1}\right)^{n+1} - \left(\frac{t}{t_1}\right)^n\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\cdot 1 + \frac{\varepsilon}{2}\max\left[\left(\frac{t}{t_1}\right)^{p+1} - \left(\frac{t}{t_1}\right)^{q+1}\right] \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

6.66. *Exemple.*

a. Seria

$$1 + \frac{z}{1^\alpha} + \frac{z^2}{2^\alpha} + \ldots + \frac{z^n}{n^\alpha} + \ldots \quad (0 < \alpha \leqslant 1)$$

converge pentru toţi z, $|z| = 1$, $z \neq 1$ (6.47 d). Conform teoremei lui Abel 6.65 ea converge uniform pe orice rază a discului $|z| \leqslant 1$ unind 0 şi z_0 unde $|z_0| < 1$, $z_0 \neq 1$.

b. Seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)} z^{n-1}$$

(α, β diferiţi de 0, -1, -2, ...) converge pentru $z = 1$ dacă $\beta > \alpha + 1$ (6.17 b), deci pentru $|z| < 1$, şi converge uniform pe intervalul $0 \leqslant x \leqslant 1$. Dacă $\beta > \alpha$, această serie converge pentru $z = -1$ (6.24 c), deci converge uniform pe intervalul $-1 \leqslant x \leqslant 0$.

6.67. Să reţinem următoarea consecinţă a teoremei lui Abel:

TEOREMĂ. *Presupunem că funcţia f este continuă pentru $0 \leqslant x \leqslant x_1$ şi egalitatea*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

are loc pentru $0 \leqslant x < x_1$. Atunci, dacă seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n \qquad (1)$$

converge, avem

$$f(x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n.$$

Demonstrație. Pentru orice $x \in [0, x_1]$, punem

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s(x). \qquad (2)$$

Seria (1) fiind convergentă, seria (2) converge uniform pe $[0, x_1]$, conform teoremei lui Abel. Deci în virtutea lui 6.65 b, funcția $s(x)$ este continuă pe $[0, x_1]$. Funcția $f(x)$ este prin ipoteză și ea continuă pe $[0, x_1]$ și deoarece $f(x) = s(x)$ pentru $0 \leqslant x < x_1$, avem

$$f(x_1) = \lim_{x \to x_1} f(x) = \lim_{x \to x_1} s(x) = s(x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

EXERCIȚII

1. Fie $a_n > 0$ $(n = 1,2, \ldots)$ și $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{\beta_n}{n^2}$, unde numerele $|\beta_n|$ sînt mărginite și $|\beta_n| \leqslant C$. Să se demonstreze că seria $\sum_1^{\infty} a_n$ diverge (Gauss).

2. Seria hipergeometrică a lui Gauss (α, β, γ sînt diferite de $0, -1, -2, \ldots$)

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} x^n$$

converge absolut pentru $|x| < 1$, diverge pentru $|x| > 1$; dacă $x = 1$, ea converge (absolut) pentru $\gamma > \alpha + \beta$, diverge pentru $\gamma \leqslant \alpha + \beta$; dacă $x = -1$, ea este absolut convergentă pentru $\gamma > \alpha + \beta$, semiconvergentă pentru $-1 < \gamma - (\alpha + \beta) \leqslant 0$, divergentă pentru $\gamma - (\alpha + \beta) \leqslant -1$.

3. Dacă $a_n \geqslant a_{n+1} > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ și seria $\sum_1^{\infty} a_n$ converge, atunci a_n este un infinit mic în raport cu $\dfrac{1}{n}$.

Observație. Nu există nici o funcție $\varphi(n)$ care să tindă la zero mai repede decît $\dfrac{1}{n}$ și cu care să-l putem înlocui pe $\dfrac{1}{n}$ în enunț (A. Němirovski).

4. Fie $\sum_1^\infty a_n$ o serie convergentă ($a_n > 0$); să se demonstreze că există un şir $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots$, $\lim b_n = \infty$ astfel încît seria $\sum_1^\infty a_n b_n$ să fie şi ea convergentă.

5. Arătaţi că produsul seriei convergente

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$$

cu ea însăşi este o serie divergentă.

6. Demonstraţi că pentru seria Leibniz 6.23, diferenţa dintre suma seriei şi suma primilor n termeni ai săi, nu depăşeşte în valoare absolută modulul termenului al $(n+1)$-lea.

7. Să se demonstreze că raza de convergenţă a seriei de puteri $\sum_0^\infty a_n(z-z_1)^n$, pentru care există $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$, există şi este $\frac{1}{r}$.

8. Dacă $a_n \geqslant 0$ pentru orice $n = 1,2, \ldots$ şi $f(t) = \sum_0^\infty a_n t^n \leqslant C$ pentru $0 \leqslant t < 1$, atunci, pentru $t \to 1$, limita funcţiei $f(t)$ există şi este egală cu $\sum_0^\infty a_n$.

9. Presupunem că numerele $a_{nk} \geqslant 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots, k = 1, 2, \ldots)$ şi b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ verifică următoarele condiţii:

1) $a_{nk} \leqslant b_n$ oricare ar fi $k = 1, 2, \ldots$ şi $n = 1, 2, \ldots$,

2) $\sum_{n=1}^\infty b_n < \infty$,

3) $\lim_{k\to\infty} a_{nk} = a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Punem $\sum_{n=1}^\infty a_{nk} = s_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ şi $\sum_{k=1}^\infty a_k = s$. Demonstraţi că $s = \lim_{k\to\infty} s_k$.

10. *Produse infinite.* Fie $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ un şir de numere complexe. Se spune că produsul infinit

$$\prod_{k=1}^\infty z_k = z_1 z_2 \ldots z_k \ldots$$

converge dacă şirul numeric $P_n = \prod_{k=1}^n z_k$ $(n = 1, 2, \ldots)$ converge către o limită finită $P \neq 0$; numărul P este numit valoarea produsului $\prod_1^\infty z_k$.

Să se demonstreze că din convergența produsului infinit rezultă relația $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

11. (Continuare) Fie $x_1 > 0,\ x_2 > 0, \ldots, x_n > 0, \ldots$; pentru ca produsul $\prod_{k=1}^{\infty} x_k$ să fie convergent, este necesar și suficient ca seria $\sum_{k=1}^{\infty} \log_b x_k$ (în bază $b > 1$ oarecare) să fie convergentă.

12. (Continuare). Punem $x_k = 1 + \omega_k$. Dacă toți ω_k au același semn, produsul $\prod_{k=1}^{\infty}(1+\omega_k)$ converge dacă și numai dacă seria $\sum_{k=1}^{\infty} \omega_k$ converge. (Dacă ω_k sînt de semne diferite, rezultatul nu mai este adevărat; conform exerc. 15, cap. 8).

13. Să se demonstreze că egalitatea:

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8) \ldots (1 + x^{2^{n-1}}) \ldots = \frac{1}{1 - x}$$

are loc pentru $|x| < 1$.

14. Să se demonstreze identitatea lui Euler:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^x}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

$x > 1$, $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ este șirul tuturor numerelor prime).

15. Demonstrați că seria $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k}$ (p_k sînt numere prime) diverge.

16. Fie $\{q_k\}$ șirul tuturor numerelor naturale a căror reprezentare zecimală (1.77) nu conține cifra 9. Seria $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{q_k}$ este convergentă sau divergentă?

17. Se consideră seria

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_m + \ldots \qquad (1)$$

a vectorilor spațiului euclidian $\mathbb{R}_n$. Un vector $p \in \mathbb{R}_n$ se numește vectorul de convergență absolută al seriei (1) dacă seria $\sum_{1}^{\infty} (p, u_m)$ converge absolut. Demonstrați că seria (1) converge absolut dacă și numai dacă orice vector $p \in \mathbb{R}_n$ este un vector de convergență absolută al acestei serii.

18. (Continuare). Un vector $q \in \mathbb{R}_n$ se numește vector de divergență absolută al seriei (1) dacă vectorii seriei (1) care aparțin unui unghi solid oarecare ce conține vectorul q formează o serie absolut divergentă. Demonstrați că seria (1) diverge absolut dacă și numai dacă ea are cel puțin un vector de divergență absolută.

19. (Continuare). Fie $k_1 < k_2 < \ldots$ un șir de numere naturale și fie $j_1 < j_2 < \ldots$ șirul numerelor naturale care nu figurează în primul șir.

Seriile $u_{k_1} + u_{k_2} + \ldots$ și $u_{j_1} + u_{j_2} + \ldots$ sînt numite părți complementare ale seriei (1). Demonstrați că dacă una din părțile complementare ale unei serii convergente, converge, atunci același lucru se întîmplă și cu partea cealaltă și că orice permutare a termenilor seriei (1) care conservă ordinea de succesiune a termenilor în fiecare parte, conservă suma seriei.

20. (Continuare). Dacă seria (1) este semiconvergentă și q este un vector de divergență absolută al seriei (1), atunci există o parte $u_{k_1} + \ldots$ a seriei (1) cu proprietatea că proiecțiile termenilor pe vectorul q formează o serie absolut divergentă și complementele ortogonale, o serie absolut convergentă.

21. (Continuare). Dacă orice vector $e \neq 0$ este un vector de divergență absolută al seriei (1), atunci orice vector $f \in \mathbb{R}_n$ este suma unei serii obținute permutînd termenii seriei (1).

22. (Continuare — teorema lui Steinitz). Pentru orice serie semiconvergentă (1), mulțimea sumelor tuturor seriilor obținute din (1), permutînd termenii săi, este o varietate liniară în $\mathbb{R}_n$ care este ortogonală subspațiului A al tuturor vectorilor de convergență absolută și trecînd prin suma proiecțiilor termenilor seriei (1) pe A (această sumă este definită într-un mod univoc).

NOTĂ ISTORICĂ

Însumarea progresiilor geometrice infinite cu rație mai mică în modul decît 1 se efectua deja în antichitate (Arhimede). Divergența seriei armonice a fost stabilită de învățatul italian Mengoli în 1650. Seriile de puteri au apărut la Newton (1665), care credea că este posibil să reprezentăm orice funcție printr-o serie de puteri. Seriile apar constant în calculele savanților din secolul al XVIII-lea, dar neacordîndu-se totdeauna atenția necesară problemelor convergenței (ceea ce a dat prilej de mai multe ori la speculații neștiințifice. (Astfel, în 1703, monahul italian Grandi pretinde că a „demonstrat" existența lui Dumnezeu, jonglînd cu seria $1 - 1 + 1 - \ldots$).

O teorie riguroasă a seriilor a început cu lucrările lui Gauss (1812), lui Bolzano (1817) și, în sfîrșit, Cauchy (1821) care dă, pentru prima oară, definiția valabilă și astăzi, a sumei unei serii convergente și stabilește teoremele de bază.

Dintre toate succesele teoretice ale cunoașterii, fără îndoială, nici unul nu trece drept un triumf atît de înalt al spiritului uman ca inventarea calculului infinitezimal.

F. Engels

PARTEA A DOUA

CALCUL DIFERENȚIAL ȘI INTEGRAL

Capitolul 7

DERIVATA

Pentru a găsi maximul sau minimul unei mărimi $f(x)$, trebuie să formăm expresia $f(x+h)-f(x)$, unde h este un număr nedeterminat. Apoi, după ce am eliminat fracțiile, radicalii și am redus termenii asemenea, trebuie să împărțim expresia obținută cu acest h nedeterminat. Punînd, apoi, $h=0$ în termenii ce rămîn, avem o ecuație ce conține x, ale cărei rădăcini sînt abscise ale punctelor maxim și minim ale lui f.

P. Fermat (1629)

Sîntem acum în măsură să trecem la una din noțiunile fundamentale ale analizei matematice, aceea de derivată.

§ 7.1. Definiția derivatei

7.11. Fie o funcție reală (finită) $y=f(x)$ definită într-un interval (a, b). Fie $x_0 \in (a, b)$; scriem raportul

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad (x_0+h \in (a, b)). \tag{1}$$

Cînd acest raport are o limită (finită) pentru $h \to 0$, spunem că funcția f *este derivabilă pentru* $x=x_0$ și punem

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) = [f(x)]'_{x=x_0}. \tag{2}$$

Numărul $f'(x_0)$ se numește *derivata funcției* f *pentru* $x=x_0$.

Geometric, raportul (1) reprezintă coeficientul unghiular al dreptei care taie graficul funcției $y=f(x)$ în punctele de abscisă x_0 și x_0+h (fig. 7.1).

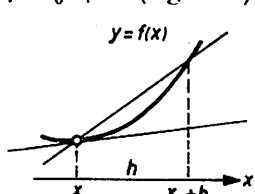


Fig. 7.1

Expresia (2) este coeficientul unghiular al unei drepte ce trece prin punctul $(x_0, f(x_0))$ pe care o vom numi *tangenta* la graficul funcției $f(x)$ în punctul de abscisă x_0.

7.12. Dacă funcția f are derivată pentru $x = x_0$, atunci raportul (1) este mărginit, cînd $h \to 0$, de o constantă c; de unde, oricare ar fi $|h|$ suficient de mic,

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| \leqslant c|h|;$$

în consecință, *funcția f este continuă pentru* $x = x_0$.

7.13. *Reguli fundamentale de calcul al derivatei. Fie f și g două funcții definite în intervalul* (a, b) *și derivabile pentru* $x = x_0$. *Atunci funcțiile* $f + g$, αf (α *fiind un număr real oarecare*), $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, *sînt derivabile pentru* $x = x_0$ (*ultima în cazul cînd* $g(x_0) \neq 0$), *fiind valabile următoarele egalități:*

$$(f(x) + g(x))'_{x=x_0} = f'(x_0) + g'(x_0); \tag{1}$$

$$(\alpha f(x))'_{x=x_0} = \alpha f'(x_0); \tag{2}$$

$$(f(x) \cdot g(x))'_{x=x_0} = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0) g'(x_0); \tag{3}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'_{x=x_0} = \frac{g(x_0) f'(x_0) - g'(x_0) f(x_0)}{g^2(x_0)}. \tag{4}$$

Demonstrație. (1) Avem:

$$\frac{(f(x_0 + h) + g(x_0 + h)) - (f(x_0) + g(x_0))}{h} =$$

$$= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h},$$

și relația rezultă din 4.36 a.

(2) Avem

$$\frac{\alpha f(x_0 + h) - \alpha f(x_0)}{h} = \alpha \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

și relația rezultă din 4.36 b.

(3) Avem

$$\frac{f(x_0+h)\,g(x_0+h)-f(x_0)\,g(x_0)}{h}=$$

$$=\frac{f(x_0+h)\,g(x_0+h)-f(x_0)\,g(x_0+h)}{h}+$$

$$+\frac{f(x_0)\,g(x_0+h)-f(x_0)\,g(x_0)}{h}=g(x_0+h)\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+$$

$$+f(x_0)\,\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h},$$

şi aplicăm 4.36 b şi 4.36 a, ţinînd cont de 7—12.

Avînd în vedere (3), demonstraţia lui (4) se reduce la cazul $f(x)=1$ pentru orice x. În acest caz, avem

$$\frac{1}{g(x_0+h)}-\frac{1}{g(x_0)}=-\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{g(x_0)\,g(x_0+h)},$$

şi relaţia rezultă din 4.36 e, ţinînd cont de 7.12.

7.14. *Exemple.*

a. O constantă $f(x)=c$ are, evident, derivata 0.

b. Funcţia $f(x)=x$ are derivata egală cu 1.

c. Ţinînd cont de 7.13, vedem că orice polinom

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

la fel ca şi orice funcţie raţională

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}$$

are derivată în orice punct x_0, cu $Q(x_0)\neq 0$.

Derivatele funcţiilor raţionale pot fi calculate ţinînd cont de formulele 7.13 (1)—(4) şi de formula

$$(x^n)'=nx^{n-1}, \qquad (1)$$

care se stabileşte prin recurenţă, plecînd de la 7.13 (3).

d. Derivata unui produs de n factori este calculată după formula:

$$[f_1(x) \dots f_n(x)]' = f_1'(x) f_2(x) \dots f_n(x) + f_1(x) f_2'(x) \dots$$

$$\dots f_n(x) + \dots + f_1(x) f_2(x) \dots f_n'(x);$$

aceasta se demonstrează prin recurență bazîndu-ne pe formula 7.13(3).

e. Să găsim derivata unui determinant format cu funcții derivabile

$$W(x) = \begin{vmatrix} u_{11}(x) & u_{12}(x) & \dots & u_{1n}(x) \\ u_{21}(x) & u_{22}(x) & \dots & u_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1}(x) & u_{n2}(x) & \dots & u_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

Prin definiție, determinantul $W(x)$ este suma algebrică de $n!$ termeni precedați fiecare de un anumit semn și reprezentînd un produs de n factori obținuți luînd un element și unul singur din fiecare coloană și din fiecare linie. Derivînd fiecare termen după regula din punctul d și însumînd apoi termenii în care a fost derivat factorul provenind din prima coloană, apoi termenii din care a fost derivat factorul din a doua coloană etc. se a junge la formula

$$W'(x) = \begin{vmatrix} u_{11}'(x) & u_{12}(x) & \dots & u_{1n}(x) \\ u_{21}'(x) & u_{22}(x) & \dots & u_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1}'(x) & u_{n2}(x) & \dots & u_{nn}(x) \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} u_{11}(x) & u_{12}'(x) & \dots & u_{1n}(x) \\ u_{21}(x) & u_{22}'(x) & \dots & u_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1}(x) & u_{n2}'(x) & \dots & u_{nn}(x) \end{vmatrix} + \dots$$

$$\ldots + \begin{vmatrix} u_{11}(x) & u_{12}(x) & \ldots & u'_{1n}(x) \\ u_{21}(x) & u_{22}(x) & \ldots & u'_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n1}(x) & u_{n2}(x) & \ldots & u'_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

7.15. a. *Derivata unei funcții compuse. Dacă funcția* $y = f(x)$ *este derivabilă pentru* $x = x_0$ *și funcția* $z = g(y)$ *este definită într-un interval conținînd punctul* $y_0 = f(x_0)$ *și derivabilă pentru* $y = y_0$, *atunci funcția compusă* $z = g[f(x)]$ *este derivabilă pentru* $x = x_0$ *și în plus*:

$$z'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0). \tag{1}$$

Demonstrație. După definiția derivatei,

$$y - y_0 = f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\,[f'(x_0) + \varepsilon(x)],$$

$$\varepsilon(x) \to 0 \text{ pentru } x \to x_0,$$

$$g(y) - g(y_0) = (y - y_0)\,[g'(y_0) + \delta(y)],$$

$$\delta(y) \to 0 \text{ pentru } y \to y_0.$$

Deci

$$z(x) - z(x_0) = g[f(x)] - g[f(x_0)] = g(y) - g(y_0) =$$

$$= (y - y_0)\,[g'(y_0) + \delta(y)] =$$

$$= (x - x_0)\,[f'(x_0) + \varepsilon(x)]\,[g'(y_0) + \delta(y)].$$

Cînd $x \to x_0$, avem $\varepsilon(x) \to 0$ (am văzut aceasta mai înainte). În plus, în virtutea continuității funcției f în punctul x_0, avem și $y \to y_0$, deci $\delta(y) \to 0$. Trecînd la limită în egalitatea

$$\frac{z(x) - z(x_0)}{x - x_0} = [f'(x_0) + \varepsilon(x)]\,[g'(y_0) + \delta(y)],$$

se obține rezultatul, folosind 4.36 b.

b. *Exemplu.* Derivata funcției

$$(1 + x^2)^{99}$$

poate fi găsită după regulile 7.14, după ce am dezvoltat binomul după formula lui Newton. În același timp, este mai simplu să reprezentăm funcția dată, ca funcție compusă :

$$y = u^{99}, \quad u = 1 + x^2.$$

Atunci

$$y'(u) = 99u^{98}, \; u'(x) = 2x$$

și, conform (1),

$$y'(x) = 99u^{98} \cdot 2x = 99(1 + x^2)^{98} \cdot 2x.$$

7.16. *Derivata unei funcții inverse. Fie $y = f(x)$ o funcție continuă și crescătoare într-un interval (a, b) și fie $x = \varphi(y)$ funcția sa inversă definită într-o vecinătate a unui punct $y = y_0 = f(x_0)$, $x_0 \in (a, b)$. Atunci, dacă funcția $y = f(x)$ este derivabilă pentru $x = x_0$ și $f'(x_0) \neq 0$, funcția $x = \varphi(y)$ este derivabilă pentru $y = y_0$ și*

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Demonstrație. Considerăm raportul

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0}. \tag{1}$$

Din definiția funcției inverse,

$$\varphi(y) = x, \; \varphi(y_0) = x_0, \; y = f(x), \; y_0 = f(x_0),$$

raportul (1) poate fi pus sub forma

$$\frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}.$$

O funcție și inversa sa fiind continue amîndouă (5.38), din $y \to y_0$ rezultă că $x \to x_0$ și, $f(x)$ fiind derivabilă pentru $x = x_0$ prin ipoteză, avem

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} \to \frac{1}{f'(x_0)},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

7.17. *Derivata logaritmului și a unor funcții asociate.*
a. Fie $y = \log_a x$. Dacă $x_0 > 0$, avem

$$\frac{\log_a(x_0 + h) - \log_a x_0}{h} = \log_a \left(\frac{x_0 + h}{x_0}\right)^{\frac{1}{h}} =$$

$$= \log_a \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{\frac{1}{h}} = \frac{1}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x_0}\right) =$$

$$= \frac{1}{x_0} \cdot \frac{x_0}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x_0}\right) \xrightarrow[(h \to 0)]{} \frac{\log_a e}{x_0}$$

în virtutea lui 5.59 d. Deci

$$(\log_a x)'_{x=x_0} = \frac{\log_a e}{x_0}.$$

Această formulă ia o formă particulară simplă pentru $a = e$, cînd este vorba de logaritmul natural (5.59 d):

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \qquad (1)$$

b. Să găsim derivata funcției $y = \ln(-x)$ definită pentru $x < 0$. Conform regulei de derivare a unei funcții compuse 7.15 a, obținem

$$[\ln(-x)]' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = -\frac{1}{x}(-1) = \frac{1}{x}. \qquad (2)$$

Reunind formulele (1) și (2) într-una singură, valabilă pentru toți $x \neq 0$ se obține:

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}. \qquad (3)$$

c. Exponențiala $x = a^y$ este inversa funcției $y = \log_a x$; deci, conform 7.16, avem :

$$(a^y)_{y=y_0} = \frac{1}{\log_a' x_0} = \frac{x_0}{\log_a e} = \frac{a^{y_0}}{\log_a e} =$$

$$= a^{y_0} \log_e a = a^{y_0} \ln a.$$

Înlocuind y_0 prin x, $-\infty < x < \infty$, se obține

$$(a^x)' = a^x \ln a. \tag{4}$$

Această formulă devine mai simplă pentru $a = e$:

$$(e^x)' = e^x. \tag{5}$$

d. *Derivata funcției putere de exponent oarecare.* Funcția

$$y = x^\alpha$$

definită pentru $x > 0$ (5.54) poate fi pusă sub forma

$$y = e^{\alpha \ln x}.$$

De aici rezultă că ea are derivată pe care o putem găsi folosind regula 7.15 și ținînd cont de rezultatele a — c. Avem

$$y'(x) = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}. \tag{6}$$

În cazul α natural, se obține formula 7.14 (1), așa cum era de așteptat.

e. Aceeași idee ne poate ajuta să găsim derivata unei funcții mai complicate :

$$y = f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)},$$

pe care o lăsăm în seama cititorului.

7.18. *Derivata funcţiilor trigonometrice şi a inverselor lor.*

a. Pentru funcţia $y = \sin x$, avem, conform 5.63 :

$$\sin(x + h) - \sin x = 2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right),$$

de unde

$$\frac{\sin(x + h) - \sin x}{h} = \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Din 5.64 c şi din continuitatea funcţiei $\cos x$, se găseşte

$$(\sin x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x + h) - \sin x}{h} = \cos x. \qquad (1)$$

b. Apoi, aplicînd formulele 5.65 (2), (3) se obţine

$$(\cos x)' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right]' = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x. \qquad (2)$$

c. În sfîrşit, conform regulei 7.13 (4), pentru $x \neq \frac{2k + 1}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \qquad (3)$$

d. Dacă $x = \arcsin t$, $t = \sin x$, atunci, conform regulei 7.16, pentru $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ şi $-1 < t < 1$

$$(\arcsin t)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{+\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{+\sqrt{1 - t^2}}. \qquad (4)$$

e. Într-un mod analog, pentru $-\pi < x < 0$ și $-1 < t < 1$, avem

$$(\arccos t)' = \frac{1}{(\cos x)'} = -\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2 x}} =$$

$$= +\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}. \qquad (5)$$

Se putea obține expresia (5) plecînd de la (4) și folosind egalitatea 5.67(1)

$$\arccos t + \frac{\pi}{2} = \arcsin t.$$

Mai exact, egalitatea (5) este valabilă pentru funcția crescătoare $\arccos t$ pe care am notat-o, în 5.67, prin $\arccos_c t$. În ceea ce privește funcția descrescătoare $\arccos_d t$, egalitatea (5) trebuie înlocuită prin

$$(\arccos_d t)' = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

f. În sfîrșit, pentru $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $-\infty < t < \infty$,

$$(\operatorname{arctg} t)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} x)'} = \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}. \qquad (6)$$

Lăsăm cititorului grija de a găsi derivatele celorlalte funcții trigonometrice și ale inverselor lor.

7.19. *Derivate la stînga și la dreapta.*

a. Fie o funcție f definită într-un interval $x_0 \leqslant x < b$. Spunem că ea *are derivată la dreapta pentru* $x = x_0$, dacă există (finită)

$$f'_d(x_0) = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Mărimea $f'_d(x_0)$ este notată de asemenea prin $f'(x_0 + 0)$.

b. Într-un mod analog, spunem că o funcție f definită pe un interval $a < x \leqslant x_0$ *are, pentru* $x = x_0$, *derivată la stînga*, dacă există

$$f'_s(x_0) = \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Mărimea $f'_s(x_0)$ este de asemenea notată prin $f'(x_0 - 0)$.

c. Dacă o funcție f este definită într-un interval (a, b) conținînd punctul x_0, se poate vorbi de existența derivatelor sale la stînga și la dreapta în punctul x_0. Cînd derivata $f'(x_0)$ există, atunci, există bineînțeles derivatele $f'_d(x_0)$ și $f'_s(x_0)$ și, în plus, $f'_d(x_0) = f'_s(x_0) = f'(x_0)$. Dar se poate întîmpla ca să existe $f'_d(x_0)$ și $f'_s(x_0)$ dar nu și $f'(x_0)$ (fig. 7.2).

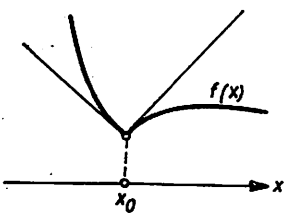


Fig. 7.2

Dacă există $f'_d(x_0)$ și $f'_s(x_0)$ și are loc egalitatea $f'_d(x_0) = f'_s(x_0)$, atunci $f'(x_0)$ există, de asemenea, ceea ce este ușor de verificat (vezi 4.16c).

d. Semidreapta definită de ecuația

$$y = f(x_0) + f'_d(x_0)(x - x_0) \qquad (x \geqslant x_0)$$

se numește *semitangenta la dreapta* la curba $y = f(x)$ pentru $x = x_0$. În mod analog, semidreapta definită de ecuația

$$y = f(x_0) + f'_s(x_0)(x - x_0) \qquad (x \leqslant x_0)$$

se numește *semitangenta la stînga* la curba $y = f(x)$ pentru $x = x_0$.

e. Propoziția următoare generalizează teorema 7.16 în cazul derivatelor la stînga și la dreapta.

Fie $y = f(x)$ o funcție continuă și crescătoare în intervalul (a, b) și $x = \varphi(y)$ funcția sa inversă. Dacă funcția $y = f(x)$ are pentru $x = x_0$ derivată la dreapta $f'(x_0 + 0) \neq 0$, atunci funcția $\varphi(y)$ are pentru $y_0 = f(x_0)$ derivată la dreapta $\varphi'(y_0 + 0)$ și, în plus,

$$\varphi'(y_0 + 0) = \frac{1}{f'(x_0 + 0)}.$$

Demonstrația este analoagă cu cea din 7.16, considerînd numai valorile $x \geqslant x_0$ și $y \geqslant y_0$.

§ 7.2. Altă definiție a derivatei

7.21. Vom analiza acum proprietățile generale ale funcțiilor derivabile. Mai întîi, considerăm o altă metodă de a introduce noțiunea de derivată, care este importantă pentru cele ce urmează. Construim funcțiile liniare $Ax + B$, care au pentru $x = x_0$ aceeași valoare ca o funcție dată $y = f(x)$; putem să le descriem prin ecuația

$$y_A = A(x - x_0) + f(x_0) = A \cdot h + f(x_0), \quad (h = x - x_0). \tag{1}$$

Două funcții de acest fel $y_A = A(x - x_0) + f(x_0)$ și $y_B = B(x - x_0) + f(x_0)$ diferă printr-o mărime proporțională cu $x - x_0$:

$$y_A - y_B = (A - B)(x - x_0) = (A - B)h.$$

Alegem, dintre funcțiile (1), una care diferă de funcția $y = f(x)$ printr-un infinit mic în raport cu $h = x - x_0$ (4.38), adică astfel încît

$$y - y_A = \varepsilon(h) \cdot h, \tag{2}$$

unde $\varepsilon(h)$ tinde la 0 cînd $h \to 0$.

Presupunem că am găsit un astfel de A. Atunci din (2) rezultă că

$$\frac{f(x) - Ah - f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - A = \varepsilon(h) \to 0,$$

deci raportul

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

cînd $h \to 0$, are limită şi aceasta este egală cu A. Deci, dacă funcţia liniară căutată există, atunci funcţia f este derivabilă pentru $x = x_0$ şi coeficientul căutat A este egal cu $f'(x_0)$.

7.22. Reciproc, dacă funcţia f este derivabilă pentru $x = x_0$, avem

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = \varepsilon(h) \to 0,$$

de unde

$$f(x_0 + h) - [f'(x_0)h + f(x_0)] = \varepsilon(h) \cdot h, \qquad (1)$$

deci funcţia liniară

$$Y = f'(x_0)h + f(x_0)$$

de variabilă $h = x - x_0$ satisface condiţia impusă : abaterea sa de la funcţia f este un infinit mic în raport cu $h = x - x_0$.

Dreapta din planul (x, y) definită de ecuaţia

$$Y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

este, conform definiţiei 7.11, tangentă la curba $y = f(x)$ în $x = x_0$. Oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un $\delta > 0$ astfel încît dacă $|h| < \delta$ să avem $|\varepsilon(h)| < \varepsilon$; deci, pentru aceşti h, avem

$$-\varepsilon h \leqslant f(x) - f'(x_0)h - f(x_0) \leqslant \varepsilon h,$$

sau

$$f(x_0) + [f'(x_0) - \varepsilon]h \leqslant f(x) \leqslant f(x_0) + [f'(x_0) + \varepsilon]h. \qquad (2)$$

Iată interpretarea geometrică a inegalităţii (2) : graficul unei funcţii derivabile într-un punct $x = x_0$ este cuprins, pentru x suficient de aproape de x_0, între două drepte, fie-

care formînd cu tangenta un unghi oricît de mic dorim (fig. 7.3).

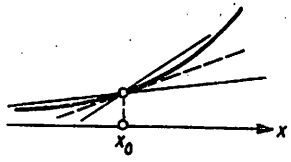


Fig. 7.3

7.23. Avem drept consecință :

a. *Dacă* $f'(x_0) > 0$, *există un* $\delta > 0$ *astfel încît, pentru* $0 < h < \delta$,

$$f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h). \tag{1}$$

b. *Dacă* $f'(x_0) < 0$, *atunci pentru* $0 < h < \delta$,

$$f(x_0 - h) > f(x_0) > f(x_0 + h). \tag{2}$$

7.24. Această proprietate stă la baza unei reguli de calcul a punctelor de extrem local.

DEFINIȚIE. Spunem că funcția f *are un maxim local într-un punct* $c \in (a, b)$, dacă există un $h > 0$ astfel încît pentru toți $x \in (c - h, c + h)$,

$$f(x) \leqslant f(c)$$

(fig. 7.4). Într-un mod analog, spunem că funcția f *are un minim local în punctul* $c \in (a, b)$, dacă există un $h > 0$ astfel

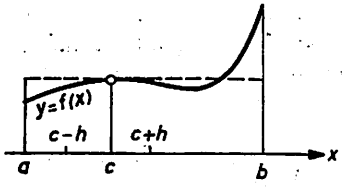


Fig. 7.4.

încît pentru orice $x \in (c - h, c + h)$,

$$f(x) \geqslant f(c)$$

(fig. 7.5). Punctele de minim sau maxim local sînt numite *puncte de extrem local*. Dacă funcţia f este derivabilă pentru $x = c$ şi $f'(c) \neq 0$, atunci inegalităţile 7.23(1) şi (2) arată că punctul c nu poate fi un punct de extrem local. Rezultă de aici că în orice punct de extrem local al unei funcţii derivabile $f(x)$ are loc egalitatea

$$f'(c) = 0. \tag{1}$$

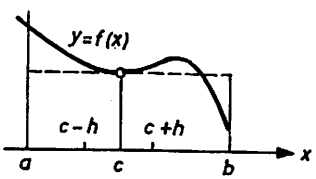


Fig. 7.5

Deci, pentru a găsi punctele de extrem local ale unei funcţii (peste tot) derivabile, trebuie să analizăm ecuaţia (1). Punctele căutate sînt printre rădăcinile sale. Dar se poate întîmpla ca $f'(c) = 0$ fără să avem extrem local. Aceasta are loc, de exemplu, pentru funcţia $f(x) = x^3$ cu $c = 0$. O analiză mai detailată a extremelor este făcută mai tîrziu (§ 7.5 şi § 8.4).

§ 7.3. Diferenţiala

7.31. Din egalitatea 7.22(1) se vede că variaţia funcţiei $f(x)$, cînd variabila independentă x variază de la $x = x_0$ la $x = x_0 + h$, este compusă din două părţi : prima $f'(x_0)h$, este liniară în raport cu variaţia h a variabilei x, iar a doua, $\varepsilon(h) \cdot h$, este un infinit mic în raport cu h. Geometric, prima parte reprezintă variaţia măsurată pînă la tangentă iar a doua, variaţia de la tangentă pînă la valoarea $f(x_0 + h)$ (fig. 7.6). Termenul $f'(x_0)h$ se numeşte *partea liniară*

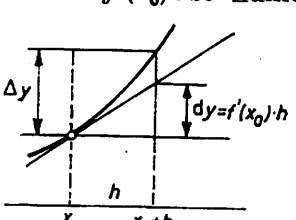


Fig. 7.6

principală a variației funcției. Deci, existența derivatei implică posibilitatea de a pune în evidență o parte liniară principală a variației. Invers, raționamentul făcut arată că posibilitatea punerii în evidență a părții liniare principale a variației funcției garantează existența derivatei.

7.32. *Diferențiala.* Presupunem că funcția f este derivabilă în $x = x_0$. Cantitatea $h = x - x_0$ este notată prin $\mathrm{d}x$, iar $f'(x_0)h = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$ cu $\mathrm{d}y(x_0)$ sau $\mathrm{d}y$; $\mathrm{d}y$ se numește *diferențiala funcției f în punctul $x = x_0$* pentru diferențiala $\mathrm{d}x$ a variabilei independente. Astfel, $\mathrm{d}y$ este o funcție liniară de $\mathrm{d}x$.

Fiind dați $\mathrm{d}x$ și $\mathrm{d}y$, $f'(x_0)$ se poate pune sub forma raportului de diferențiale:

$$f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

7.33. Regulile de calcul a derivatelor, pe care le-am descris în § 7.1, conduc la regulile corespunzătoare de calcul al diferențialelor. Anume, înmulțind prin $\mathrm{d}x$ formulele 7.13(1) — (4), găsim

$$\mathrm{d}[f + g] = \mathrm{d}f + \mathrm{d}g; \tag{1}$$

$$\mathrm{d}(\alpha f) = \alpha\,\mathrm{d}f; \tag{2}$$

$$\mathrm{d}[f \cdot g] = f \cdot \mathrm{d}g + \mathrm{d}f \cdot g; \tag{3}$$

$$\mathrm{d}\left[\frac{f}{g}\right] = \frac{g \cdot \mathrm{d}f - \mathrm{d}g \cdot f}{g^2(x_0)}; \tag{4}$$

ultima egalitate are loc, ca și în 7.13(4), cu condiția ca $g(x_0) \neq 0$.

7.34. *Diferențiala unei funcții compuse.* După ce am înmulțit formula 7.15(1) prin $\mathrm{d}x$, avem

$$\mathrm{d}z = g'(y_0)\,y'(x_0)\,\mathrm{d}x = g'(y_0)\,\mathrm{d}y.$$

Dacă însă y este o variabilă independentă și nu o funcție de x atunci, prin definiție, diferențiala funcției z va fi de aceeași formă;

$$\mathrm{d}z = g'(y_0)\,\mathrm{d}y.$$

Deci diferențiala unei funcții are aceeași formă, indiferent dacă argumentul funcției este o variabilă independentă sau o funcție de un alt argument.

Se va utiliza acest fapt pentru a deriva funcțiile compuse. De exemplu, derivata lui $(x^2 + 1)^{99}$ (7.15 b) poate fi găsită cu ajutorul diferențialelor:

$$d(x^2 + 1)^{99} = 99\,(x^2 + 1)^{98}\,d(x^2 + 1) = 99(x^2 + 1)^{98}2x\,dx,$$

de unde

$$((x^2 + 1)^{99})' = \frac{d(x^2+1)^{99}}{dx} = 99(x^2 + 1)^{98} \cdot 2x.$$

§ 7.4. Teoremele creșterilor finite

7.41. TEOREMA (lui Rolle). *Dacă o funcție cu valori reale f este continuă pe un interval $[a, b]$ (care poate fi înlocuit cu un interval nemărginit)* astfel încît $f(a) = f(b)$ *și dacă ea este derivabilă în orice punct al intervalului deschis (a, b), atunci există un punct $c \in (a, b)$, pentru care $f'(c) = 0$.*

Demonstrație. În virtutea lui 5.16 c, există un punct $c \in (a, b)$ în care egalitatea $f(c) = \sup\{f(x)\}$ (sau $f(c) = \inf\{f(x)\}$) este satisfăcută. Deci c este un punct de extrem local al funcției f. Conform 7.24, avem $f'(c) = 0$, ceea ce trebuia demonstrat.

7.42. *Consecință.* Dacă o funcție f este continuă pe un interval $[a, b]$ și derivabilă în intervalul (a, b) și dacă inegalitatea $f'(x) \neq 0$ are loc peste tot în (a, b), atunci $f(b) \neq f(a)$.

Aceasta se demonstrează prin reducere la absurd, aplicînd 7.41.

7.43. TEOREMA (lui Cauchy). *Dacă două funcții (cu valori reale) f și g sînt continue pe un interval $a \leqslant x \leqslant b$ (care poate fi eventual nemărginit) și derivabile în orice punct interior al acestui interval, astfel încît $g'(x)$ nu se anulează, atunci există un punct $c \in (a, b)$ pentru care*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{1}$$

Demonstrație. Să observăm că $g(b) \neq g(a)$ în virtutea lui 7.42. Funcția $\varphi(x) = f(x) - Ag(x)$, cu o constantă A

oarecare, este continuă pe intervalul $[a, b]$ și derivabilă în orice punct interior, deoarece funcțiile f și g sînt astfel. Alegem un A astfel încît funcția $\varphi(x)$ să verifice ipoteza $\varphi(b) = \varphi(a)$ a teoremei lui Rolle. Avem atunci ecuația

$$f(a) - Ag(a) = f(b) - Ag(b),$$

de unde

$$A = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Să aplicăm teorema lui Rolle: există un punct $c \in (a, b)$ în care

$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0,$$

de unde rezultă (1).

7.44. CONSECINȚĂ (teorema lui Lagrange). *Dacă o funcție f este continuă pe intervalul $[a, b]$ și derivabilă în orice punct interior, atunci există un punct $c \in (a, b)$ astfel încît*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{1}$$

Pentru a demonstra relația, trebuie să punem $g(x) = x$ în 7.43. Formula (1) are atunci forma

$$f(b) = f(a) + f'(c)\,(b - a); \tag{2}$$

aceasta este formula creșterilor finite. Geometric, c este un punct al segmentului $[a, b]$ astfel încît tangenta la curba $y = f(x)$ în punctul $(c, f(c))$ este paralelă cu coarda ce unește punctele $(a, f(a))$ și $(b, f(b))$ (fig. 7.7).

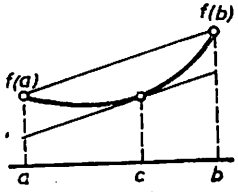


Fig. 7.7

7.45 CONSECINȚE.

a. *Dacă* $f'(x) > 0$ *peste tot în* (a, b), *atunci funcția* f *este crescătoare pe* $[a, b]$.

b. *Dacă* $f'(x) < 0$ *peste tot în* (a, b), *atunci funcția* f *este descrescătoare pe* $[a, b]$.

c. *Dacă* $f'(x) = 0$ *pentru orice* x, *atunci* f *este constantă.*

Pentru a începe demonstrația, înlocuim în 7.44(1), a prin x', b prin x'', unde $[x', x''] \subset [a, b]$.

Apoi,

(a) dacă $f'(x) > 0$, avem

$$f(x'') = f(x') + (x'' - x')f'(c) > f(x');$$

(b) dacă $f'(x) < 0$, atunci

$$f(x'') = f(x') + (x'' - x')f'(c) < f(x');$$

(c) în fine, dacă $f'(x) = 0$, atunci

$$f(x'') = f(x') + (x'' - x')f'(c) = f(x'),$$

ceea ce demonstrează propoziția.

d. *Exemplu.* Fie $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$. În intervalele $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ funcția $\cos x$ este pozitivă (5.65) și ajungem la concluzia că funcția $\sin x$ crește în aceste intervale; în intervalele $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ funcția $\cos x$ este negativă, deci funcția $\sin x$ descrește. Într-un mod analog, dacă punem $f(x) = \cos x$, $f'(x) = -\sin x$, rezultă că funcția $\cos x$ crește în intervalele $(2k - 1)\pi < x < 2k\pi$ și descrește în intervalele $2k\pi < x (2k + 1)\pi$ (De fapt, am ajuns la concluzii asemănătoare în 5.65, dar raționamentele prezente sînt mai directe).

§ 7.5. Poziția unei curbe în raport cu tangenta sa

7.51. Presupunem că o funcție $y = f(x)$ este continuă în intervalul (a, b) conținînd punctul x_0 și că f este derivabilă în x_0. Considerăm aici poziția relativă a graficului

funcției $y = f(x)$ și a tangentei sale în punctul $x = x_0$:

$$Y(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Introducem următoarele definiții. Un punct x_0 se numește *punct de convexitate în sus* al funcției f dacă, în vecinătatea lui x_0 (cu excepția acestui punct) are loc inegalitatea $f(x) < Y(x)$ sau, altfel spus, dacă graficul funcției f, în vecinătatea punctului x_0, se află dedesubtul tangentei în punctul $x = x_0$. Într-un mod analog, un punct x_0 se numește *punct de convexitate în jos al funcției* f dacă, în vecinătatea lui x_0, are loc inegalitatea $f(x) > Y(x)$ sau, ceea ce este același lucru, dacă graficul funcției se află deasupra tangentei. Dacă orice punct $x \in (a, b)$ este punct de convexitate în sus (resp. în jos) pentru funcția $y = f(x)$, atunci funcția f se numește *convexă în sus* (*în jos*) *în intervalul* (a, b). Un punct x_0 se numește *punct de inflexiune* al funcției $f(x)$ dacă curba $y = f(x)$ este așezată, pentru $x < x_0$, de o parte a tangentei dusă la curbă în

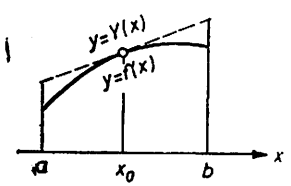


Fig. 7.8

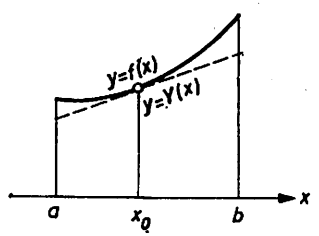


Fig. 7.9

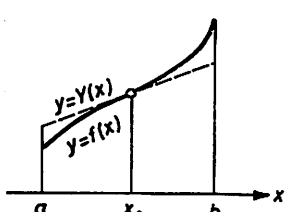


Fig. 7.10

punctul x_0, iar pentru $x > x_0$, de cealaltă parte. Figurile 7.8—7.10 ilustrează cazurile menționate.

În cele ce urmează se dau condiții suficiente (analitice) în care au loc astfel de situații.

7.52.a. Dacă inegalitatea $f'(\eta) \leqslant f'(x_0)$ are loc pentru toţi $\eta \in (x_0, b)$, atunci curba $y = f(x)$ este, pentru $x > x_0$, dedesubtul tangentei în punctul $x = x_0$.

b. Dacă inegalitatea $f'(\eta) > f'(x_0)$ are loc pentru toţi $\eta \in (x_0, b)$, atunci curba $y = f(x)$ este, pentru $x > x_0$, deasupra acestei tangente.

Într-adevăr, în prima ipoteză avem pentru $x > x_0$, conform formulei lui Lagrange,

$$f(x) = f(x_0) + f'(\eta)(x - x_0) < f(x_0) +$$

$$+ f'(x_0)(x - x_0) = Y(x),$$

ceea ce trebuia demonstrat; pentru a doua ipoteză, raţionamentul este analog.

75.3. La fel, dacă inegalitatea $f'(\xi) > f'(x_0)$ are loc pentru toţi $\xi \in (a, x_0)$, atunci curba $y = f(x)$ este, pentru $x < x_0$, dedesubtul tangentei în punctul $x = x_0$; dacă inegalitatea $f'(\xi) < f'(x_0)$ are loc pentru toţi $\xi \in (a, x_0)$, atunci curba $y = f(x)$ este, pentru $x < x_0$, deasupra acestei tangente.

Pentru a demonstra aceasta se aplică, la fel ca şi în 7.52, formula lui Lagrange pentru intervalul $[x, x_0]$.

7.54. Combinînd cazurile descrise în 7.52 şi 7.53 se ajunge la rezultatele următoare:

Dacă pentru toţi $\xi \in (a, x_0)$ *şi* $\eta \in (x_0, b)$ *au loc inegalităţile*

$$f'(\xi) > f'(x_0) > f'(\eta),$$

atunci x_0 *este un punct de convexitate în sus pentru funcţia* f; *dacă pentru orice* $\xi \in (a, x_0)$ *şi* $\eta \in (x_0, b)$ *au loc inegalităţile*

$$f'(\xi) < f'(x_0) < f'(\eta),$$

atunci x_0 *este un punct de convexitate în jos pentru funcţia* f. *În sfîrşit, pentru toţi* $\xi \in (a, x_0)$ *şi* $\eta \in (x_0, b)$ *au loc inegalităţile*

$$f'(\xi) > f'(x_0), \quad f'(\eta) > f'(x_0),$$

sau inegalitățile

$$f'(\xi) < f'(x_0), \quad f'(\eta) < f'(x_0)$$

atunci x_0 este un punct de inflexiune al funcției f.

7.55. Următoarea concluzie este imediată:

Dacă funcția $f'(x)$ crește pentru $a < x < b$, atunci funcția f este convexă în jos în intervalul (a, b); dacă $f'(x)$ descrește pentru $a < x < b$, funcția f este convexă în sus în intervalul (a, b).

Exemplu. Fie $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$. Funcția $\cos x$ fiind crescătoare în intervalele $(2k-1)\pi < x < 2k\pi$ (7.45), funcția $\sin x$ este aici convexă în jos; funcția $\cos x$ fiind descrescătoare în intervalele $2k\pi < x < (2k+1)\pi$, funcția $\sin x$ este aici convexă în sus. Într-un mod analog, funcția $\cos x$ este convexă în jos în intervalele $\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi < x < \left(2k + \frac{3}{2}\right)\pi$ și convexă în sus în intervalele $\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi < x < \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi$. (Aceasta explică forma graficelor funcțiilor $\sin x$ și $\cos x$ pe care le-am dat în 5.65.)

În 8.32—8.33 vom formula condiții analitice de determinare a punctelor de convexitate și inflexiune care vor fi bazate pe proprietățile derivatelor de ordin superior ale funcției f.

7.56. Dacă $f'(x_0) = 0$, atunci $Y(x) = f(x_0)$ și tangenta în $x = x_0$ este orizontală. Dacă, în plus, punctul x_0 este un punct de convexitate în jos, deci curba $f(x)$ este dedesubtul tangentei, atunci $f(x) > f(x_0)$ în vecinătatea punctului x_0, deci x_0 este punct de minim local al funcției $f(x)$. Analog, dacă $f'(x_0) = 0$ și punctul x_0 este un punct de convexitate în sus, atunci el este un punct de maxim local. Din 7.54 găsim condițiile suficiente de existență a unui minim sau maxim:

TEOREMĂ. *Fie $f'(x_0) = 0$. Dacă, în plus, au loc inegalitățile*

$$f'(\xi) < 0, \quad f'(\eta) > 0,$$

pentru orice $\xi \in (a, x_0)$ *şi* $\eta \in (x_0, b)$, *atunci* x_0 *este un punct de minim local al funcţiei* f. *Iar dacă pentru orice* $\xi \in (a, x_0)$ *şi* $\eta \in (x_0, b)$ *are loc inegalitatea*

$$f'(\xi) > 0, \quad f'(\eta) < 0,$$

atunci x_0 *este un punct de maxim local al funcţiei* f.

7.57. Fie, ca în 7.56, $f'(x_0) = 0$ şi presupunem că inegalităţile $f'(\xi) < 0$, $f'(\eta) < 0$ au loc pentru toţi $\xi \in (a, x_0)$ şi $\eta \in (x_0, b)$. Atunci, conform 7.53, punctul x_0 este un punct de inflexiune al curbei $y = f(x)$ care trece, în punctul x_0, de o parte a tangentei în cealaltă, astfel încît punctul x_0 nu este nici punct de minim nici punct de maxim. O situaţie analoagă are loc dacă pentru toţi $\xi \in (a, x_0)$ şi $\eta \in (x_0, b)$ au loc inegalităţile

$$f'(\xi) > 0, \quad f'(\eta) > 0.$$

§ 7.6. Regulile lui l'Hôpital

Aceste teoreme sînt des folosite pentru a calcula limite.

7.61. *Prima regulă a lui l'Hôpital.* Fie f şi g funcţii continue cu valori reale definite pe un segment $[a,b]$ (care poate fi înlocuit cu un interval nemărginit) şi derivabile în intervalul (a, b) şi fie $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (a, b)$. Fie, în sfîrşit :

$$g(a) = f(a) = 0.$$

Se spune că raportul $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ reprezintă, pentru $x \searrow a$, o *nedeterminare de forma* $\dfrac{0}{0}$.

TEOREMĂ. *Dacă, în condiţiile formulate mai sus,*

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \quad (A \in \overline{\mathbb{R}}),$$

atunci

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Demonstrație. Presupunem la început că $-\infty < A < \infty$. Pentru orice $\varepsilon > 0$ alegem un x_0 astfel încît în intervalul (a, x_0) să aibă loc inegalitatea

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \varepsilon. \tag{1}$$

Să aplicăm teorema Cauchy 7.43 în intervalul $[a, x_0]$, unde $a < x < x_0$; în virtutea acestei teoreme, există un punct $c \in (a, x_0)$ astfel încît

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0) - f(a)}{g(x_0) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

de unde, pentru toți x, $a < x < x_0$,

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| = \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - A \right| < \varepsilon.$$

Aceasta spune că $A = \lim\limits_{x \searrow a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

În cazul cînd A este infinit, inegalitatea (1) este înlocuită prin $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} > \dfrac{1}{\varepsilon}$ sau $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} < -\dfrac{1}{\varepsilon}$ după semnul lui A; pentru rest, demonstrația nu diferă.

7.62. *A doua regulă a lui l'Hôpital.* Fie f și g funcții continue și derivabile într-un interval (a, b) (intervalul poate fi și nemărginit), $g'(x)$ neanulîndu-se în (a,b). Dacă $g(a) = f(a) = \infty$, se spune atunci că raportul $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ reprezintă, pentru $x \searrow a$, o *nedeterminare de forma* $\dfrac{\infty}{\infty}$.

TEOREMĂ. *Dacă, în condițiile formulate mai sus,*

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \quad (A \in \overline{\mathbb{R}}),$$

atunci

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Demonstrație. Presupunem mai întîi A finit. Oricare ar fi $\varepsilon > 0$ dat, alegem un x_0 astfel încît în intervalul (a, x_0) să aibă loc inegalitatea

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \varepsilon. \tag{1}$$

Definim funcția $D(x, x_0)$ prin condiția

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} D(x, x_0).$$

Avem

$$D(x, x_0) = \frac{\dfrac{g(x) - g(x_0)}{g(x)}}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{f(x)}} = \frac{1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_0)}{g(x)}} \to 1 \tag{2}$$

pentru $x \searrow a$. Aplicînd teorema lui Cauchy intervalului $[x, x_0]$ pentru un punct $c \in [x, x_0]$ rezultă că

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot D(x, x_0) = \frac{f'(c)}{g'(c)} + \frac{f'(c)}{g'(c)} [D(x, x_0) - 1].$$

De unde, pentru acei x cu $|D(x, x_0) - 1| < \varepsilon$, găsim

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| \leqslant \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - A \right| + \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} \right| |D(x, x_0) - 1| \leqslant \varepsilon +$$

$$+ (|A| + \varepsilon)\varepsilon. \tag{3}$$

Cum ε este arbitrar de mic, $\lim\limits_{x \searrow a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$, ceea ce trebuia demonstrat.

În cazul cînd $A = \infty$, inegalitatea (1) este înlocuită cu $\frac{f'(x)}{g'(x)} > \frac{1}{\varepsilon}$ și inegalitatea (3) prin

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geqslant \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \frac{1}{2},$$

ceea ce are loc pentru x suficient de apropiat de A, în virtutea lui (2). În cazul cînd $A = -\infty$, raționamentul este analog.

EXERCIȚII

1. Presupunem că o funcție f este definită pentru $a \leqslant x \leqslant b$ și că oricare ar fi x_1 și x_2 în $[a, b]$ ea satisface inegalitatea

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant C\,|x_1 - x_2|^{1+\alpha},\ \alpha > 0.$$

Demonstrați că f este constantă.

2. Presupunem că o funcție f este definită și derivabilă pentru $x > c$ și că $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. Atunci, pentru orice $h > 0$,

$$\lim_{x\to\infty} [f(x + h) - f(x)] = 0.$$

3. Să se arate că o funcție $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabilă, cu derivata continuă, este uniform derivabilă pe $[a, b]$ în sensul că pentru orice $\varepsilon > 0$, există un $\delta > 0$ astfel încît $|x_1 - x_2| < \delta$, $x_1, x_2 \in [a, b]$, să implice inegalitatea

$$\left| f'(x_1) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| < \varepsilon.$$

4. Să se arate că funcția $y = x^2 \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ și $y(0) = 0$ este derivabilă peste tot pe $[0, 1]$, dar derivata sa nu este continuă.

5. Să se arate că dacă f este derivabilă pe $[a, b]$, atunci derivata ei ia orice valoare cuprinsă între $f'(a)$ și $f'(b)$ (**teorema lui Darboux**).

6. Dacă o funcție f este convexă în jos pe (a, b) (7.51), atunci pentru orice $x \in (a, b)$, are loc inegalitatea

$$f(x) \leqslant Y(x) = \frac{f(b)(x - a) + f(b)(b - x)}{b - a},$$

adică graficul funcției f nu are puncte deasupra coardei care unește punctele de abscisă a și b.

7. Rezultatul din exercițiul 6 conduce la o definiție mai generală decît cea din 7.51 a convexității unei funcții și care nu utilizează deriva-

bilitatea : o funcție $y = f(x)$ se numește *convexă (în jos)* pe $[a, b]$ dacă, pe orice interval $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$, graficul său nu are nici un punct deasupra coardei ce unește punctele de abscise α și β, adică, pentru orice $x \in (\alpha, \beta)$,

$$f(x) \leqslant \frac{f(\beta)(x-\alpha) + f(\alpha)(\beta - x)}{\beta - \alpha}.$$

Demonstrați că, oricare ar fi punctele $x_1, \ldots, x_p$ din intervalul $[a, b]$ și numerele $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ astfel încît $0 \leqslant \lambda_j \leqslant 1$ $(j = 1, \ldots, p)$ și $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1$, avem

$$f\left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j x_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{p} \lambda_j f(x_j).$$

8. (Continuare. În exercițiile 8—13 este folosită definiția convexității care a fost introdusă în exercițiul 7.) Arătați că o funcție f este convexă pe un interval $[a, b]$ dacă și numai dacă panta coardei,

$$p(\alpha, x) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha},$$

este pentru $x > \alpha \geqslant a$ o funcție nedescrescătoare de x oricare ar fi α fixat.

9. (Continuare.) O funcție f convexă pe un interval $[a, b]$ este continuă în orice punct $x \in (a, b)$ și are derivatele finite la stînga și la dreapta și, în plus,

$$f'_s(x) \leqslant f'_d(x).$$

10. (Continuare.) Dacă f este convexă pe $[a, b]$, atunci funcțiile f'_s și f'_d nu sînt descrescătoare și oricare ar fi α și β, $a < \alpha < \beta < b$,

$$f'_d(\alpha) \leqslant \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \leqslant f'_s(\beta).$$

11. (Continuare.) Orice funcție f convexă pe $[a, b]$ are derivată peste tot pe $[a, b]$, cu excepția unei mulțimi numărabile de puncte.

12. Presupunem că f este derivabilă pe $[a, b]$ și că pentru două puncte oarecare α, β, unde $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$, există un singur punct γ astfel încît

$$f'(\gamma) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Să se arate că sau f sau $-f$ este convexă pe $[a, b]$.

13. Dacă o funcție $y = f(x)$ este convexă în jos într-o vecinătate a unui punct $x_0 \in (a, b)$, atunci graficul său nu are puncte dedesubtul semi-

tangentelor în punctul x_0, adică

$$f(x) \geqslant (x - x_0) f'_d(x_0) + f(x_0) \quad (x > x_0),$$

$$f(x) \geqslant (x - x_0) f'_s(x_0) + f(x_0) \quad (x < x_0).$$

14. O curbă $y = f(x)$, cu $f\colon [a, \infty) \to \mathbb{R}$ derivabilă, are asimptotă $y = kx + b$ (exerc. 10, cap. 4) dacă și numai dacă limitele

$$k = \lim_{x \to \infty} f'(x), \qquad b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - xf'(x)]$$

există.

15. Dacă o funcție f este definită în intervalul $[a, b]$ și dacă în intervalul (a, b) există derivata f', care are limita p pentru $x \searrow a$, atunci acest număr p este derivata la dreapta a funcției f pentru $x = a$.

16. Dacă o funcție $f(t)$ crește pentru $0 \leqslant t \leqslant b$ și are o derivată descrescătoare $f'(t)$ pentru $0 < t \leqslant b$ (derivata putînd crește indefinit cînd $t \to 0$), atunci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} f'\left(\frac{b}{n}\right) < \infty.$$

17. (Exemplul lui Van der Vaerden.) Se consideră

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} x & \text{pentru } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ 1 - x & \text{pentru } \dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

și prelungim apoi această funcție cu perioada 1 pe toată axa reală. Considerăm apoi

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{4^n} \varphi_0(4^n x).$$

Funcția φ_n are perioada 4^{-n} și derivata (peste tot cu excepția punctelor unghiulare de abscisă $\dfrac{p}{2^n}$) egală cu $+1$ sau -1. Fie, în sfîrșit,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x).$$

Arătați că f este continuă, dar nu este derivabilă în nici un punct.

NOTA ISTORICĂ

Calculul diferențial, ca și calculul integral, a apărut în secolul al XVII-lea; considerat la început sub aspectul lui geometric și cinematic doar în cazuri particulare, de către Fermat, Toricelli, Barrow, el este formulat într-un mod general, la sfîrșitul secolului, de către Newton și Leibniz (Prima publicație a lui Leibniz asupra acestor probleme, precede, în 1684, pe cea a lui Newton din 1687. Corespondența lor ne relevă totuși că metodele noi de calcul le erau familiare cu mult înainte). Leibniz introduce simbolul de diferențială și notația $\frac{dy}{dx}$ pentru derivată. Newton, apoi Leibniz și elevii săi, frații Jacques și Jean Bernoulli în primul rînd, aplică metodele calculului diferențial la numeroase probleme de geometrie, mecanică și fizică. Pentru aplicațiile fizice, interpretarea vitezei unei mișcări ca derivata spațiului parcurs în raport cu timpul, joacă un rol de prim rang.

„Teorema lui Rolle" a fost enunțată de M. Rolle în 1690 pentru polinoame; „teorema lui Lagrange" a fost dată de Lagrange în 1798; enunțurile moderne ale acestor teoreme nu apar decît în *Cursul* lui Cauchy (1821).

Primul tratat de calcul diferențial a fost scris „în 1691 și 1692 de către Jean Bernoulli ca manual pentru un marchiz care s-a arătat un bun elev" (Bourbaki). Este vorba de Guillaume-François de l'Hôpital, marchiz de Sainte-Mesme, care a publicat manualul menționat în 1696, ceea ce l-a făcut cunoscut în lumea științelor. Probabil, ar fi mai corect din punct de vedere istoric să numim regulile lui Bernoulli, în loc de „regulile lui l'Hôpital". Definiția riguroasă a derivatei bazată pe cea de limită, apare la Cauchy (ceva mai înainte l'Huillier (1786) a obținut o astfel de definiție, dar lucrarea acestuia nu a cunoscut dezvoltări deși a fost încoronată de Premiul Academiei de Științe din Berlin); începînd din această epocă, „existența derivatei, care pînă atunci se accepta pe încredere, devine o chestiune de studiu prin mijloace obișnuite ale analizei" (Bourbaki). Exemple de funcții continue fără derivată sînt indicate de Bolzano în 1830 (lucrarea nu a fost publicată decît în 1930), apoi de Weierstrass (1860, publicarea avînd loc în 1872). În ceea ce privește fundamentele analizei, cursul lui Weierstrass ținut la Universitatea din Berlin constituie etapa următoare după cea a lucrării lui Cauchy.

Capitolul 8

DERIVATE DE ORDIN SUPERIOR

Dacă prima derivată ne permite să descriem la un moment dat, caracterul unei mișcări, derivata a doua ne ajută să pătrundem cauzele ei ascunse.

W. Thomson, P.G. Tait, *Introducere în filozofia naturală* (1867).

§ 8.1. Definiții și exemple

8.11. Dacă o funcție numerică $y = f(x)$ admite derivată $y' = f'(x)$ într-un interval (a, b) și dacă funcția $f'(x)$ este la rîndul ei derivabilă pe (a, b), atunci notăm derivata funcției $f'(x)$ prin $y'' = f''(x)$ și o numim *derivata a doua* a funcției $f(x)$. În continuare, obținem pe intervalul (a, b) funcțiile :

$$f(x), f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x), \ldots$$

astfel că, pentru orice $n \geqslant 1$, $f^{(n)}(x)$ este derivata lui $f^{(n-1)}(x)$. Funcția $f^{(n)}$ se numește *derivata a n-a* sau *derivata de ordinul n* a lui f ; dacă funcția $f^{(n)}$ există, atunci funcția f se numește *de n ori derivabilă pe* (a, b). Dacă funcția f' există și este continuă, atunci funcția f se numește *continuă, cu derivata continuă* (sau *netedă*). Însăși funcția f este considerată propria sa derivată, de ordin 0 :

$$f = f^{(0)}.$$

8.12. *Operații cu derivate de ordin superior.* Presupunem că două funcții f și g sînt de n ori derivabile într-un interval (a, b) ; au loc următoarele formule :

$$(f(x) + g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x) ; \qquad (1)$$

$$(\alpha f(x))^{(n)} = \alpha f^{(n)}(x) \ (\alpha \text{ un număr real oarecare}) ; \qquad (2)$$

$$(f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \text{ (formula lui Leibniz)} \qquad (3)$$

unde $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ sînt coeficienții binomiali.

Egalitățile (1) și (2) se demonstrează derivînd succesiv egalitățile 7.13 (1), (2). Demonstrăm (3) prin recurență. Dacă (3) este adevărată pentru un n, atunci, derivînd încă o dată găsim :

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k [f^{(k)} g^{(n-k+1)} + f^{(k+1)} g^{(n-k)}] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)} + \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} f^{(k)} g^{(n-k+1)} =$$

$$= fg^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) f^{(k)} g^{(n-k+1)} + f^{(n+1)} g =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

bazîndu-ne pe formula $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$. Se vede că de îndată ce formula (3) este adevărată pentru un indice n, ea este adevărată pentru indicele $n+1$; deoarece ea este adevărată pentru $n=1$, ea este stabilită deci pentru orice n.

8.13. Următoarea tabelă de derivate de ordin superior pentru cîteva funcții, cele mai des întîlnite, va fi utilizată sistematic :

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	...	$f^{(n)}(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$	$\alpha(\alpha-1)\times$ $\times(\alpha-2)x^{\alpha-3}$	...	$\alpha(\alpha-1)\ldots\times$ $\times(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$
e^{ax}	ae^{ax}	a^2e^{ax}	a^3e^{ax}	...	a^ne^{ax}
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{2}{x^3}$	...	$(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$
$\sin bx$	$b\cos bx$	$-b^2\sin bx$	$-b^3\cos bx$	...	$b^n\sin\left(bx+n\frac{\pi}{2}\right)$
$\cos bx$	$-b\sin bx$	$-b^2\cos bx$	$+b^3\sin bx$	...	$b^n\cos\left(bx+n\frac{\pi}{2}\right)$

8.14. *Derivatele unui polinom și dezvoltarea sa după puterile lui $x-a$.* Prin derivarea unui polinom se micșorează

gradul acestuia cu o unitate. Dacă un polinom este de grad n, atunci, după n derivări succesive, se obține o constantă; deci derivatele sale de ordin $n+1$, $n+2$, ... se anulează identic.

Orice polinom P de gradul n poate fi ordonat după puterile crescătoare ale lui $(x-a)$, a fiind un număr oarecare, prin substituția $x=(x-a)+a$; anume, dacă

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

atunci avem

$$P(x)=P[(x-a)+a]=\sum_{k=0}^{n} a_k[(x-a)+a]^k,$$

care se pune sub forma:

$$P(x)=b_0+b_1(x-a)+b_2(x-a)^2+\ldots+b_n(x-a)^n. \qquad (1)$$

Coeficienții $b_0, b_1, \ldots, b_n$ se exprimă în funcție de derivatele polinomului $P(x)$ în punctul a. Punînd $x=a$ în (1) se găsește

$$P(a)=b_0.$$

Derivînd (1) în raport cu x, se găsește

$$P'(x)=b_1+2b_2(x-a)+3b_3(x-a)^2+\ldots+$$

$$+nb_n(x-a)^{n-1}. \qquad (2)$$

Punînd apoi $x=a$, se obține

$$P'(a)=b_1.$$

Derivînd (2) se obține

$$P''(x)=2b_2+2\cdot 3b_3(x-a)+\ldots+n(n-1)\,b_n(x-a)^{n-2}. \qquad (3)$$

Înlocuind apoi $x=a$, se găsește

$$P''(a)=2b_2.$$

Continuînd, se obține, pentru orice $k=0,1,\ldots,n$,

$$P^{(k)}(a)=1\cdot 2\cdot\ldots k\cdot b_k. \qquad (4$$

Astfel, pentru $k = 0, 1, \ldots, n$, avem

$$b_k = \frac{1}{k!} P^{(k)}(a)$$

(considerînd prin convenţie $0! = 1$) şi dezvoltarea (1) se pune sub forma

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k. \tag{5}$$

§ 8.2. Formula lui Taylor

8.21. *Dacă o funcţie f este continuă pe un interval compact $[a, b]$, de $n+1$ ori derivabilă în intervalul (a, b) şi, în plus, derivatele sale de ordin mai mic sau egal cu n au valori limită $f^{(k)}(a)$, $(k = 0, 1, \ldots, n)$ (de exemplu, valorile limită $f^{(k)}(a)$ introduse aici sînt derivatele la dreapta corespunzătoare* (exerc. 15, cap. 7), *atunci există un punct $c \in (a, b)$ astfel încît*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b - a)^{n+1}. \tag{1}$$

Aceasta este *formula lui Taylor.*

Pentru $n = 0$ această formulă devine formula lui Lagrange 7.44 (2). Pentru un polinom de gradul n avem $f^{(n+1)}(x) = 0$ şi regăsim formula 8.14(5).

LEMĂ. *Fie două funcţii F şi G continue pe un interval $[a, b]$ şi de $(n + 1)$ ori derivabile în intervalul (a, b). Presupunem că $G^{(k)}(x)$ nu se anulează în (a, b) şi $F^{(k)}(x)$, $G^{(k)}(x)$ au fiecare limita 0 cînd $x \to a$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Atunci, există un punct $c \in (a, b)$ pentru care*

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{F^{(n+1)}(c)}{G^{(n+1)}(c)}.$$

Într-adevăr, conform teoremei lui Cauchy 7.43, există un punct $c_1 \in (a, b)$ pentru care

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F(b)}{G(b)} = \frac{F'(c_1)}{G'(c_1)}.$$

Aplicînd teorema lui Cauchy încă o dată în intervalul (a, c_1), se stabilește existența unui punct $c_2 \in (a, c_1)$ pentru care

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{F'(c_1)}{G'(c_1)} = \frac{F'(c_1) - F'(a)}{G'(c_1) - G'(a)} = \frac{F''(c_2)}{G''(c_2)}.$$

Continuînd, se găsește după n pași un punct $c \in (a, c_n)$ pentru care

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{F^{(n)}(c_n)}{G^{(n)}(c_n)} = \frac{F^{(n)}(c_n) - F^{(n)}(a)}{G^{(n)}(c_n) - G^{(n)}(a)} = \frac{F^{(n+1)}(c)}{G^{(n+1)}(c)},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Demonstrația formulei lui Taylor. Punem în lemă

$$F(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!},$$

$$G(x) = (x-a)^{n+1}.$$

Funcția F, la fel ca și f, are derivate de ordin mai mic sau egal cu $n+1$. Funcția G are derivate de orice ordin și derivatele sale de ordin mai mic sau egal cu n sînt pozitive pentru $x \geqslant a$. În plus, conform 8.14(4),

$$\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k\right]_{x=a}^{(m)} = f^{(m)}(a),$$

adică, $F^{(m)}(a) = f^{(m)}(a) - f^{(m)}(a) = 0$ pentru $m = 0, 1, \ldots, n$. Conform formulei $G^{(m)}(a) = 0$ pentru $m = 0, 1, \ldots, n$. Deci ipoteza lemei este îndeplinită și în plus

$$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x),$$

$$G^{(n+1)}(x) = (n+1)!.$$

Aplicînd lema, rezultă că există un punct $c \in (a, b)$ astfel încît

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{f(b) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!}}{(b-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$

ceea ce conduce la formula căutată (1).

8.22. *Observație.* Am considerat cazul $a < b$. În cazul $b < a$ demonstrația se face exact în același mod, astfel încît poziția punctului $b \neq a$ este fără importanță ; în cele două cazuri, punctul c se află între a și b.

8.23. Formula 8.21(1) este adesea scrisă astfel :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} + f^{(n+1)}(c) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (1)$$

$$(c \in (a, x)).$$

Polinomul de gradul n reprezentat de primii termeni din membrul secund, se numește *polinomul Taylor*. Expresia

$$R_n(x, a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \qquad (2)$$

se numește *restul formulei lui Taylor* (*sub formă Lagrange*). Dacă $f^{(n+1)}$ este mărginită în vecinătatea punctului a, atunci restul R_n este un infinit mic de ordin superior în raport cu $(x-a)^n$ pentru $x \to a$ (4.38) ; conform cu notația adoptată în 4.38, punem

$$R_n = o((x-a)^n).$$

În particular, este ușor de probat că, pentru $x < 0$ sau $x > 0$, au loc dezvoltările :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) ; \qquad (3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) ; \qquad (4)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) ;$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n);$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\ldots n}x^n + \rho(x^n). \qquad (7)$$

8.24. Formula lui Taylor permite reprezentarea unei funcţii f (care poate fi destul de complicată) printr-o funcţie relativ simplă, anume printr-un polinom 8.23 (2)), eroarea avînd în anumite cazuri o estimare simplă şi putînd fi făcută suficient de mică. Dacă se ştie că

$$\sup_{a \leqslant x \leqslant a+h} |f^{(n)}(x)| \leqslant M_n(h) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

atunci se obţine următoarea estimare pentru restul 8.23(2) :

$$|R_n| \leqslant \frac{M_{n+1}(h)}{(n+1)!}\, h^{n+1}. \qquad (1)$$

Notăm membrul secund prin $\omega = \omega(n, h)$. Se pot formula trei probleme naturale legate de determinarea fiecăreia din cantităţile ω, n, h în funcţie de celelalte două :

a) Pentru n şi h date să se găsească $\omega(n, h)$; în alţi termeni, să se găsească un majorant pentru eroarea comisă prin înlocuirea funcţiei f în intervalul $(a\,,\ a + h)$ prin polinomul său Taylor de grad n.

b) Pentru n şi ω date, să se afle h ; în alţi termeni, să se găsească un interval $(a, a + h)$ în care eroarea comisă înlocuind funcţia f prin polinomul său Taylor de grad n să nu depăşească valoarea dată ω.

c) Pentru h şi ω date, să se găsească n ; cu alte cuvinte, să se afle gradul polinomului Taylor dacă eroarea comisă prin înlocuirea funcţiei f în intervalul dat $(a, a + h)$, prin acest polinom, nu depăşeşte valoarea dată ω.

În cazuri concrete, toate aceste probleme se rezolvă într-un mod mai mult sau mai puţin elementar (vezi exerc.10).

Se pot formula aceleaşi probleme pentru un interval $(a - h, a)$, metodele de rezolvare fiind aceleaşi.

§ 8.3. Analiza comportării unei funcții în vecinătatea unui punct dat

8.31. În § 7.5 am discutat poziția unei curbe $y = f(x)$ în raport cu tangenta sa în $x = x_0$. Aparatul analitic îl constituiau valorile lui $f'(x)$ pentru $x \neq x_0$. Să revenim la aceeași problemă, utilizînd, în loc de mulțimea valorilor lui $f'(x)$, o singură valoare, anume a lui f'' în $x = x_0$.

TEOREMĂ. *Fie o funcție $y = f(x)$ pe un interval (a, b) conținînd punctul x_0, avînd prima derivată $f'(x)$ în orice punct $x \in (a, b)$ și derivata secundă $f''(x_0)$. Dacă $f''(x_0) > 0$, atunci x_0 este un punct de convexitate în jos pentru funcția $f(x)$; dacă $f''(x_0) < 0$, atunci x_0 este un punct de convexitate în sus pentru această funcție.*

Demonstrație. Fie $f''(x_0) > 0$; aplicînd rezultatul 7.23 a funcției $f'(x)$, există un $\delta > 0$ astfel încît pentru $0 < h < \delta$, avem :

$$f'(x_0 - h) < f'(x_0) < f'(x_0 + h).$$

Aceasta permite să aplicăm rezultatul 7.54 intervalului $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ceea ce încheie demonstrația. Cazul $f''(x_0) < 0$ se tratează într-un mod analog.

8.32. Rezultatul obținut are drept consecință obținerea unor noi condiții suficiente de existență a unui minim sau maxim :

a. *Dacă, în condițiile teoremei* 8.31, *avem $f'(x_0) = 0$ și $f''(x_0) > 0$, atunci punctul x_0 este un punct de minim local pentru funcția f.*

b. *Dacă în condițiile teoremei* 8.31, *avem $f'(x_0) = 0$ și $f''(x_0) < 0$, atunci punctul x_0 este un punct de maxim local pentru funcția f.*

Cele două propoziții rezultă din 8.31 și 7.56.

8.33. Dacă se cunosc valorile lui f'' nu numai în punctul x_0, dar și într-o vecinătate a acestui punct, ce informații suplimentare se pot obține asupra proprietăților funcției f? Anume, știind $f''(x)$ putem descrie poziția curbei $y = f(x)$ în vecinătatea punctului x_0 în raport cu „parabola osculatoare"

$$Y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2, \quad (1)$$

a. TEOREMĂ. *Dacă pentru toți* $\eta \in (x_0, b)$ *avem inegalitatea* $f''(x) > f''(x_0)$, *atunci curba* $y = f(x)$ *pentru* $x > x_0$ *este deasupra parabolei osculatoare* (1). *Dacă, pentru toți* $\eta \in (x_0, b)$ *are loc inegalitatea* $f''(x) < f''(x_0)$, *atunci curba* $y = f(x)$ *pentru* $x > x_0$ *este dedesubtul parabolei* (1).

Demonstrație. În prima ipoteză avem, pentru $x > x_0$, conform formulei lui Taylor cu $n = 2$,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(c)(x - x_0)^2 >$$

$$> f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 = Y(x).$$

În ipoteza secundă se raționează în același mod.

b. Într-un mod asemănător, dacă pentru orice $\xi \in (a, x_0)$ are loc inegalitatea $f''(\xi) > f''(x_0)$, atunci curba $y = f(x)$ pentru $x < x_0$ este deasupra parabolei (1); dacă pentru orice $\xi \in (a, x_0)$ are loc inegalitatea $f''(\xi) < f''(x_0)$, atunci curba $y = f(x)$ pentru $x < x_0$ este dedesubtul parabolei (1).

8.34. Să studiem, în condițiile 8.33, cazul cînd $f''(x_0) = 0$. Atunci parabola osculatoare 8.33(1) degenerează în dreapta tangentă la curba $y = f(x)$ pentru $x = x_0$:

$$Y(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Combinînd rezultatele 8.33, ajungem la următoarele concluzii:

TEOREMĂ. *Dacă în condițiile* 8.33 *avem* $f''(x_0) = 0$ *și pentru orice* $x \neq x_0$ *are loc inegalitatea* $f''(x) > f''(x_0)$, *atunci punctul* x_0 *este un punct de convexitate în jos pentru funcția* $f(x)$. *Dacă este satisfăcută inegalitatea* $f''(x) < f''(x_0)$ *pentru toți* $x \neq x_0$, *atunci punctul* x_0 *este un punct de convexitate în sus pentru funcția* $f(x)$.

Dacă pentru orice $\xi \in (a, x_0)$ *și* $\eta \in (x_0, b)$ *au loc inegalitățile*

$$f''(\xi) < 0 < f''(\eta)$$

sau inegalitățile

$$f''(\xi) > 0 > f''(\eta),$$

atunci punctul x_0 *este un punct de inflexiune pentru funcția* f.

Subliniem că ultimele două condiții sînt condiții suficiente pentru ca punctul x_0 să fie un punct de inflexiune.

8.35. Așa cum am procedat mai sus cu f', tot astfel în loc de a se utiliza mulțimea valorilor lui f'' în vecinătatea lui x_0, putem utiliza doar valoarea lui f''' în punctul x_0. Presupunem că funcția f are derivate f' și f'' în intervalul (a, b) care conține x_0 și derivata $f'''(x_0)$.

TEOREMĂ. *Dacă* $f'''(x_0) > 0$, *atunci curba* $y = f(x)$ *este deasupra parabolei* 8.33(1) *pentru* $x > x_0$ *și dedesubt pentru* $x < x_0$. *Dacă* $f'''(x_0) < 0$, *curba este, din contră, deasupra parabolei* 8.33(1) *pentru* $x < x_0$ *și dedesubt pentru* $x > x_0$.

Demonstrație. Fie $f'''(x_0) > 0$. Aplicînd rezultatul 7.23 a, funcției $f''(x)$ se vede că există un $\delta > 0$ astfel încît inegalitatea

$$f''(x_0 - h) < f''(x_0) < f''(x_0 + h)$$

să aibă loc pentru $0 < h < \delta$. Putem acum să aplicăm teoremele 8.33 a, b intervalului $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, ceea ce ne conduce la rezultatul căutat.

8.36. În cazul cînd $f''(x_0) = 0$, se obține: dacă $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$, atunci x_0 este un *punct de inflexiune* al funcției $f(x)$.

În cazul cînd $f'''(x_0) = 0$, situația rămîne nedeterminată (dacă nu vrem să utilizăm decît valorile funcției și a derivatelor într-un singur punct x_0). Putem să folosim valorile derivatelor următoare (vezi exerc. 11).

8.37. Este util un alt mod de prezentare a formulei lui Taylor care folosește simbolul E (4.39), atunci cînd se studiază comportarea unei funcții în vecinătatea unui punct dat. Presupunem că o funcție f are derivate succesive, pînă la ordinul $(n + 1)$ inclusiv, în vecinătatea unui punct a, astfel încît $f^{(n)}(a) \neq 0$ și $f^{(n+1)}(x)$ să fie mărginită. Atunci formula lui Taylor 8.23(1) poate fi pusă sub forma:

$$f(a + h) = f(a) + h f'(a) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) E, \qquad (1)$$

unde, ca mai sus, E este o cantitate ce tinde la 1 (pentru $h \to 0$). În cazul discutat avem, evident :

$$\frac{}{} = E = 1 + \frac{h}{n+1} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{f^{(n)}(a)}.$$

Menționăm, în particular, formulele care rezultă din (1) (pentru valorile lui n date mai jos) și din 8.13 (sau 8.23 (3) — (7)) :

$$e^x = 1 + xE \qquad (n = 1); \qquad (2)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} E \qquad (n = 2); \qquad (3)$$

$$\sin x = xE \qquad (n = 1); \qquad (4)$$

$$\ln (1 + x) = xE \qquad (n = 1); \qquad (5)$$

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x E \qquad (n = 1); \qquad (6)$$

ultima formulă, am obținut-o încă din 5.59 f.

Formule mai exacte, care rezultă din (1) și din 8.23(3) — — (7), sînt :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} E \qquad (n=2); \qquad (2')$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} E \qquad (n=4); \qquad (3')$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} E \qquad (n=3); \qquad (4')$$

$$\ln (1 + x) = x + \frac{x^2}{2} E \qquad (n=2); \qquad (5')$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{1 \cdot 2} x^2 E \qquad (n=2); \qquad (6')$$

8.38. *Exemple.*
a. Calculați

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x}{\sin x}.$$

Soluție. Aplicînd formulele 8.37(2) — (4) găsim

$$\frac{e^x - \cos x}{\sin x} = \frac{(1 + xE) - \left(1 - \frac{x^2}{2}E\right)}{xE} = \frac{E + \frac{x}{2}E}{E} \to 1.$$

(Se putea tot la fel de bine să aplicăm regula lui l'Hôpital 7.61).

b. Calculați

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - \sqrt{1 - x^2 + x^3}}{\ln(1 + x^2)}.$$

Soluție. Folosind formulele 8.37(2), (5), (6) rezultă

$$\frac{e^{x^2} - \sqrt{1 - x^2 + x^3}}{\ln(1 + x^2)} = \frac{1 + x^2E - \left(1 - \frac{x^2 - x^3}{2}E\right)}{x^2E} =$$

$$= \frac{\frac{3}{2}E - \frac{x}{2}E}{E} \to \frac{3}{2}.$$

Aici, aplicarea regulii lui l'Hôpital ar conduce la calcule complicate.

c. Care este poziția curbei :

$$y = f(x) = \frac{x - \sin x}{x^3}$$

în vecinătatea punctului $x = 0$?

Soluție. Conform formulei 8.37(4′),

$$y = \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{6}E\right)}{x^3} = \frac{1}{6}E,$$

astfel încît $\lim_{x \to 0} y = \frac{1}{6}$. Un răspuns mai precis cere aplicarea unei formule mai exacte pentru $\sin x$, anume

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}E$$

(care rezultă din 8.23(5)). Atunci avem

$$y = \frac{1}{6} - \frac{x^2}{120} E,$$

astfel încît funcţia $y = f(x)$ are un maxim local în punctul $x = 0$.

§ 8.4. Diferenţiale de ordin superior

8.41. Presupunem că o funcţie $y = f(x)$ este definită într-un interval (a, b) şi are derivate succesive, inclusiv *a* n-a, în acest interval. Se numeşte *diferenţială de ordinul n a funcţiei* f, o funcţie de două variabile independente x şi dx care este definită prin egalitatea:

$$\mathrm{d}^n y = \mathrm{d}^n f(x) = f^{(n)}(x)\,(\mathrm{d}x)^n.$$

Dacă $\mathrm{d}x$ este considerat constant, atunci, evident, $\mathrm{d}^n y = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1} y)$. Folosind $\mathrm{d}^n y$, derivata de ordin n poate fi pusă sub forma unui raport:

$$f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n y}{(\mathrm{d}x)^n}.$$

În particular, pentru $y = f(x) = x$, avem

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}x,\ \mathrm{d}^2 y = \mathrm{d}^3 y = \ldots = 0.$$

8.42. Să explicităm diferenţiala secundă a unei funcţii compuse $y = f[\varphi(x)]$. Conform definiţiei 8.41, avem

$$\mathrm{d}^2 y = \{f[\varphi(x)]\}''(\mathrm{d}x)^2 = [f'[\varphi]\cdot\varphi'(x)]'(\mathrm{d}x)^2 =$$

$$= f''[\varphi(x)]\cdot[\varphi'(x)\mathrm{d}x]^2 + f'(\varphi)\cdot\varphi''(x)(\mathrm{d}x)^2 = \qquad (1)$$

$$= f''[\varphi(x)]\cdot(\mathrm{d}\varphi)^2 + f'(\varphi)\,\varphi''(x)\,(\mathrm{d}x)^2.$$

Dacă φ este o variabilă independentă, avem

$$\mathrm{d}^2 y = f''[\varphi]\,(\mathrm{d}\varphi)^2.$$

Vedem că spre deosebire de prima diferenţială, diferenţiala a doua (şi următoarele) îşi schimbă forma atunci cînd variabila independentă devine dependentă, adică funcţie de o

nouă variabilă independentă. Din contră, în cazul cînd variabila independentă nu suferă decît o transformare liniară, diferenţiala a doua şi următoarele nu îşi schimbă forma. În acest caz, $\varphi(x) = Ax + B$ (A, B sînt constante), deci $\varphi''(x) = 0$ şi al doilea termen din (1) dispare. Efectuînd diferenţierile următoare, se obţin succesiv

$$\mathrm{d}^3y = f'''[\varphi(x)]\,[\varphi'(x)\mathrm{d}x]^3 = f'''[\varphi(x)]\,(\mathrm{d}\varphi)^3,$$

. . . . . .

$$\mathrm{d}^n y = f^{(n)}[\varphi(x)]\,[\varphi'(x)\mathrm{d}x]^n = f^{(n)}[\varphi(x)]\,(\mathrm{d}\varphi)^n,$$

deoarece termenii ce conţin derivatele superioare ale lui φ se anulează.

8.43. Cu ajutorul diferenţialelor, formula lui Taylor 8.21(1) capătă următoarea formă : ($a = x$, $b - a = \mathrm{d}x$) :

$$f(x + \mathrm{d}x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,\mathrm{d}^k f(a) + \frac{1}{(n+1)!}\,\mathrm{d}^{n+1} f(\varrho).$$

§ 8.5. Serii Taylor

8.51. Considerăm o funcţie $y = f(x)$ care are, într-un interval (a, b), derivate de orice ordin $n = 0, 1, 2, \ldots$ Astfel de funcţii se vor numi *indefinit derivabile* (sau *de clasă* C^∞). Alegem un punct $x_0 \in (a, b)$ şi scriem formula lui Taylor :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n + R_n(x, x_0).$$

Presupunem că pentru un x dat valoarea restului tinde la 0 cînd n creşte spre $+\infty$. Aceasta spune că seria infinită

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n \qquad (1)$$

converge și are ca sumă numărul $f(x)$. Deci valoarea funcției f pentru un x dat este suma seriei de puteri ale lui $x - x_0$:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

Independent de convergența și de suma ei, seria (1) pentru o funcție indefinit derivabilă f se numește *seria Taylor relativ la funcția f*. Să vedem pentru ce funcții f și în ce domenii seria Taylor converge și are ca sumă valoarea funcției f însăși; în alți termeni, pentru ce funcții și în ce domenii restul formulei Taylor tinde la 0.

8.52. LEMĂ. *Dacă într-un interval (a, b) și pentru anumiți $B>0$ și $C>0$ este satisfăcută inegalitatea*

$$\frac{1}{B^n\cdot n!}\sup_{x\in(a,\,b)}|f^{(n)}(x)|\leqslant C\quad(n=0,1,2,\ldots)\qquad(1)$$

(adică, șirul numeric din primul membru este mărginit), *atunci restul formulei lui Taylor tinde la 0 în orice punct $x\in(a,b)$ pentru care $|x-x_0|<\frac{1}{B}$.*

Demonstrație. Explicităm restul:

$$R_n(x, x_0)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)\ (c \text{ între } x \text{ și } x_0).$$

Conform formulei (1), avem:

$$|R_n(x, x_0)|\leqslant\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}CB^{n+1}(n+1)!=C(B|x-x_0|)^{n+1},$$

care tinde la 0, cînd $n\to\infty$, de îndată ce $|x-x_0|<\frac{1}{B}$.

8.53. Considerăm cîteva exemple:

a. Pentru un polinom $y=f(x)$ de grad m, inegalitatea 8.52(1) este imediată, deoarece $f^{(m+1)}(x)$ și toate derivatele următoare sînt nule. Deci, orice polinom se dezvoltă în serie Taylor; în plus, această serie se reduce la o sumă finită, după cum am văzut în 8.14.

b. Fie $f(x) = e^x$. Avem $f^{(n)}(x) = e^x$ şi

$$\sup_{|x| \leqslant b} e^x = e^b$$

în intervalul $[-b, b]$. În consecinţă, expresia :

$$\frac{\sup |f^{(n)}(x)|}{n!\, B^n} \leqslant \frac{e^b}{n!\, B^n}$$

tinde la 0 cînd n creşte, deci rămîne mărginită pentru $n \to \infty$ oricare ar fi b fixat. Aşadar, seria Taylor a funcţiei e^x converge către e^x pe orice interval $[-b, b]$; cu alte cuvinte, ea converge către e^x pentru orice x real. Deci, pentru orice x, avem :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (1)$$

c. Fie $f(x) = \sin x$. Avem $|f^{(n)}(x)| \leqslant 1$ şi

$$\frac{\sup |f^{(n)}(x)|}{B^n \cdot n!} \leqslant \frac{1}{B^n \cdot n!}$$

pe tot intervalul $[-b, b]$. Acest şir este mărginit oricare ar fi b. Deci funcţia $\sin x$ se dezvoltă şi ea în serie Taylor, care converge pe toată axa reală :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \qquad (2)$$

d. Analog, funcţia $\cos x$ se dezvoltă în serie Taylor, care converge pe toată axa reală :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \qquad (3)$$

8.54. Notăm că existenţa dezvoltărilor 8.53(2) şi (3) demonstrează unicitatea funcţiilor $\sin x$ şi $\cos x$ pe care le-am definit în 5.61 ca soluţii ale unor anumite ecuaţii funcţionale. Pentru a completa teoria lor trebuie ca plecînd de la dezvoltările 8.53(2), (3) să arătăm că ecuaţiile şi inegalităţile menţionate în 5.61 sînt satisfăcute ; vom face aceasta în 8.68.

8.55. *Prelungire analitică.* Presupunem că o funcţie f, indefinit derivabilă într-un interval (a, b), se dezvoltă în serie Taylor:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \quad c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}. \tag{1}$$

Considerăm această serie în domeniul complex, înlocuind variabila reală x prin variabila complexă $z = x + iy$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - x_0)^k. \tag{2}$$

Domeniul de convergenţă al acestei serii este un cerc de rază R centrat în punctul x_0 (6.52). În orice caz, numărul R este astfel încît tot intervalul (a, b) în care seria (1) converge este inclus în cercul $|z - x_0| < R$, deoarece se ştie că o serie de puteri diverge în orice punct exterior cercului său de convergenţă. În orice punct $z \in (a, b)$, suma seriei (2) este $f(x)$ prin ipoteză. Suma seriei (2) considerată în alte puncte ale cercului de convergenţă este o funcţie de z; noi o vom numi *prelungirea analitică a funcţiei* $f(x)$ în domeniul complex şi o vom nota prin $f(z)$. În particular, dacă seria (1) converge pentru orice x real, atunci seria (2) converge pentru orice z complex, prelungirea analitică a funcţiei $f(x)$ fiind astfel definită în tot planul complex.

§ 8.6. Exponenţiala şi funcţiile trigonometrice în domeniul complex

Aplicăm rezultatele de ordin general 8.55 la exponenţială şi la funcţiile trigonometrice.

8.61. Seria Taylor a funcţiei e^x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

converge pentru orice x real; deci seria

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \tag{1}$$

converge pentru orice z complex, definind exponenţiala e^z în tot planul variabilei z.

8.62. Într-un mod analog, seria Taylor a funcției sin x

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

ca și cea a funcției cos x

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

converge pentru orice x real; în consecință, pentru orice z complex, sînt definite funcțiile

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots, \tag{1}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots, \tag{2}$$

care sînt prelungirile analitice ale funcțiilor trigonometrice sin x și cos x.

Din formulele (1) și (2) se observă, că în planul complex (ca și pe axa reală), au loc egalitățile:

$$\sin(-z) = -\sin z, \tag{3}$$

$$\cos(-z) = \cos z, \tag{4}$$

care exprimă respectiv imparitatea funcției sin z și paritatea funcției cos z în planul complex.

8.63. O relație remarcabilă care există între exponențială și funcțiile trigonometrice în domeniul complex, rezultă din dezvoltările 8.61(1) și 8.62(1) și (2). Anume, înlocuind în 8.61(1) z prin iz, rezultă, pentru orice z,

$$e^{iz} = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots =$$

$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right) =$$

$$= \cos z + i \sin z. \tag{1}$$

Astfel, exponențiala este o combinație liniară de $\sin z$ și $\cos z$. Înlocuind în (1) z prin $(-z)$, se obține (ținînd cont de 8.62 (3) și (4)) :

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z. \tag{2}$$

Din (1) și (2) rezultă :

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \tag{3}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \tag{4}$$

de altfel, aceste formule ar fi putut fi obținute direct din 8.61(1) și 8.62(1), (2). Formulele (1)—(4) se numesc *formulele lui Euler*.

Pentru z real, egal cu θ, avem din (1) :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta. \tag{5}$$

Se vede că modulul numărului complex $e^{i\theta}$, cu θ real, este egal cu unitatea. Pentru orice număr complex $z \neq 0$, are loc, în 5.72, reprezentarea trigonometrică

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$

unde θ este argumentul și r modulul lui z. Egalitatea (5) permite să punem același număr z sub „formă exponențială"

$$z = r\, e^{i\theta}. \tag{6}$$

8.64. Alte proprietăți ale exponențialei sînt bazate pe următorul fapt :

LEMĂ. *Oricare ar fi z_1 și z_2 complexe, avem egalitatea*

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}.$$

Într-adevăr,

$$e^{z_1} = 1 + z_1 + \frac{z_1^2}{2!} + \dots$$

$$e^{z_2} = 1 + z_2 + \frac{z_2}{2!} + \dots$$

Cele două serii fiind absolut convergente, se poate aplica teorema de înmulțire (6.46) care dă

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = 1 + (z_1 + z_2) + \left(\frac{z_1^2}{2!} + z_1 z_2 + \frac{z_2^2}{2!}\right) +$$

$$+ \left(\frac{z_1^3}{3!} + \frac{z_1^2 z_2}{2!\cdot 1} + \frac{z_1 z_2^2}{1 \cdot 2!} + \frac{z_2^3}{3!}\right) + \ldots = 1 + (z_1 + z_2) +$$

$$+ \frac{(z_1 + z_2)^2}{2!} + \frac{(z_1 + z_2)^3}{3!} + \ldots = e^{z_1 + z_2},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

8.65. În particular, pentru x și y reali și pentru $z = x + iy$, avem

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) =$$

$$= e^x \cos y + i\, e^x \sin y, \qquad (1)$$

formulă care explicitează părțile reale și imaginare ale funcției e^z.

Relația (1) pune în evidență o particularitate interesantă a funcției e^z în planul complex, anume periodicitatea ei. În general, o funcție $f(z)$ se numește *funcție periodică de perioadă (complexă)* T, $T \neq 0$, dacă relația

$$f(z + T) = f(z)$$

este satisfăcută pentru orice z din domeniul de definiție al funcției $f(z)$.

În particular, pentru $f(z) = e^z$ și $T = 2\pi i$, avem conform (1):

$$e^{z+2\pi i} = e^{x+iy+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^x[\cos(y + 2\pi) +$$

$$+ i \sin(y + 2\pi)] = e^x[\cos y + i \sin y] = e^z, \qquad (2)$$

astfel că funcția $f(z) = e^z$ este periodică de perioadă pur imaginară $T = 2\pi i$. Deci pentru $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$e^{z+2\pi k i} = e^z.$$

În schimb, funcţiile e^{iz} şi e^{-iz} au ca perioadă, în planul complex, numărul real $T = 2\pi$. De exemplu, pentru $f(z) = e^{iz}$, din (2) deducem înlocuind z prin iz :

$$f(z + 2\pi) = e^{i(z+2\pi)} = e^{iz+2\pi i} = e^{iz} = f(z).$$

În virtutea formulelor 8.63(3), (4), funcţiile $\sin z$ şi $\cos z$ considerate în tot planul complex sînt periodice de perioadă reală 2π, la fel ca e^{iz} şi e^{-iz}.

Punînd $z = i\pi$ în (1) se ajunge la o formulă foarte interesantă :

$$e^{i\pi} = -1.$$

(„Se spune că această formulă remarcabilă a lui Euler simbolizează unitatea matematicilor : — 1 reprezintă aritmetica, i algebra, π geometria şi e analiza" **(A. Krylov).**)

8.66. Pe de altă parte, înmulţind membru cu membru relaţiile 8.63 (1) şi (2) şi aplicînd lema 8.64 se găseşte

$$e^{iz} \cdot e^{-iz} = e^0 = 1 = (\cos z + i \sin z)(\cos z - i \sin z) =$$
$$= \cos^2 z + \sin^2 z. \qquad (1)$$

Astfel, funcţiile $\cos z$ şi $\sin z$ satisfac şi în planul complex prima din ecuaţiile funcţionale care ne-au servit pentru a defini aceste funcţii (5.61(1)). În acelaşi timp, concluzia pe care am tras-o din ecuaţia (1) în domeniul real şi care spune că funcţiile $\sin z$ şi $\cos z$ sînt mărginite în modul de numărul 1 nu mai rezultă deoarece valorile acestor funcţii sînt numere complexe. Mai mult, relaţiile 8.63(3), (4) unde se înlocuieşte z prin iy, arată că funcţiile $\cos(iy)$ şi $i \sin(iy)$ (argumentul lor este pur imaginar dacă y este un număr real) sînt nemărginite pentru $y \to \pm\infty$.

8.67. Fie z_1 şi z_2 numere complexe oarecare. Înlocuind în dezvoltările 8.63(1) şi (2) z prin z_1 şi prin z_2 şi înmulţindu-le se găseşte :

$$e^{i(z_1+z_2)} = \cos(z_1 + z_2) + i \sin(z_1 + z_2) = e^{iz_1} \cdot e^{iz_2} = (\cos z_1 +$$
$$+ i \sin z_1)(\cos z_2 + i \sin z_2) = (\cos z_1 \cos z_2 -$$
$$- \sin z_1 \sin z_2) + i(\cos z_1 \sin z_2 + \sin z_1 \cos z_2)$$

și analog

$$e^{-i(z_1+z_2)} = \cos(z_1+z_2) - i\sin(z_1+z_2) = e^{-iz_1}\cdot e^{-iz_2} =$$

$$= (\cos z_1 - i\sin z_1)(\cos z_2 - i\sin z_2) =$$

$$= (\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2) - i(\cos z_1 \sin z_2 + \sin z_1 \cos z_2).$$

Adunînd și scăzînd dezvoltările obținute, rezultă relațiile

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \qquad (1)$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \qquad (2)$$

care prelungesc ecuațiile funcționale 5.61(2) și (3) în planul complex.

8.68. În particular, dacă se consideră seriile 8.62(1) și (2) ca definiții ale funcțiilor $\sin x$ și $\cos x$, se vede că ecuațiile funcționale 5.61(2) și (3) sînt satisfăcute. Să arătăm că pentru x pozitiv suficient de mic are loc inegalitatea 5.61(4)

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}. \qquad (1)$$

Plecînd de la 8.62 (1) ajungem la concluzia că

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6}E = x\left(1 - \frac{x^2}{6}E\right), \qquad (2)$$

unde E tinde la 1 pentru $x \to 0$. Deci pentru x suficient de mic avem $E > \frac{1}{2}$ și expresia dintre paranteze din (2) este mai mică decît 1, de unde rezultă prima inegalitate (1).

Apoi, dezvoltarea 8.62(2) implică reprezentarea

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}E, \qquad (3)$$

unde $E \to 1$ cînd $x \to 0$. În consecință (ținînd cont de 8.37(6)),

$$\frac{\sin x}{\cos x} = x\left(1 - \frac{x^2}{6}E\right)\left(1 - \frac{x^2}{2}E\right)^{-1} =$$

$$= x\left(1 - \frac{x^2}{6}E\right)\left(1 + \frac{x^2}{2}E\right) = x\left(1 + \frac{x^2}{3}E\right); \quad (4)$$

aici avem $E > \frac{1}{2}$ pentru x suficient de mic și expresia dintre paranteze devine mai mare decît 1, ceea ce demonstrează afirmația noastră.

Așadar, funcțiile ce verifică relațiile 5.61(1) — (4) pot fi definite prin sumele de serii 8.62(1) și (2). Unicitatea soluțiilor acestor ecuații a fost deja stabilită (8.54).

§ 8.7. Funcții hiperbolice

8.71. Definim două funcții de variabilă complexă

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \ldots, \quad (1)$$

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots \quad (2)$$

Seriile converg pentru orice z complex. Prima din funcțiile definite anterior se numește *cosinus hiperbolic*, a doua *sinus hiperbolic*. Ele sînt notate prin ch și sh.

8.72. Plecînd de la dezvoltarea 8.61(1)

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$$

și de la relația care se obține din ea înlocuind pe z prin $-z$:

$$e^{-z} = 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \ldots$$

se pot exprima exponențialele e^z și e^{-z} prin funcțiile introduse, ch și sh:

$$e^z = \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z,$$

$$e^{-z} = \operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z.$$

Rezolvînd ecuaţiile obţinute în raport cu ch z şi sh z, rezultă

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \tag{1}$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}). \tag{2}$$

În particular, pentru x real, avem

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \tag{3}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}). \tag{4}$$

Graficele acestor funcţii sînt date în fig. 8.1.

8.73. În domeniul complex, funcţiile hiperbolice sînt legate într-un mod direct de funcţiile trigonometrice. Anume, înlocuind în 8.72 (1) şi (2) pe z prin iz, obţinem

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \operatorname{ch} iz, \tag{1}$$

$$i \sin z = \frac{1}{2}(e^{iz} - e^{-iz}) = \operatorname{sh} iz. \tag{2}$$

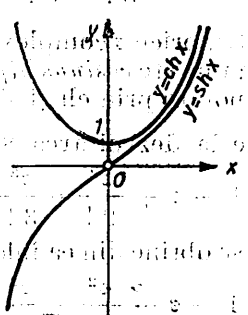


Fig. 8.1

Înlocuind încă o dată iz prin z, obţinem

$$\operatorname{ch} z = \cos(-iz) = \cos iz, \tag{3}$$

$$\operatorname{sh} z = i \sin(-iz) = -i \sin iz. \tag{4}$$

Astfel funcţiile trigonometrice se obţin din funcţiile hiperbolice înlocuind variabila z prin iz (cu factorul i în faţa lui sin z). Geometric, înmulţirea argumentului cu i, corespunde unei rotaţii cu 90° în plan (5.72). Semnalăm special formulele (x şi y sînt reale)

$$\sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy =$$

$$= \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y, \qquad (5)$$

$$\cos(x + iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy =$$

$$= \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y. \qquad (6)$$

Aceste formule se deduc din (1) şi (2) şi din 8.67 (1) şi (2).

8.74. Au loc şi relaţiile

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = \cos^2(iz) + \sin^2(iz) = 1; \qquad (1)$$

$$\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \cos i(z_1 + z_2) = \cos iz_1 \cos iz_2 -$$

$$- \sin iz_1 \sin iz_2 = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2; \qquad (2)$$

$$\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = - i \sin i(z_1 + z_2) = - i[\sin iz_1 \cos iz_2 +$$

$$+ \cos iz_1 \sin iz_2] = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2. \qquad (3)$$

În particular,

$$\operatorname{ch} 2z = \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z, \qquad (4)$$

$$\operatorname{sh} 2z = 2 \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z. \qquad (5)$$

Apoi, pentru x şi y reali,

$$\operatorname{sh}(x + iy) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} iy + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} iy = \operatorname{sh} x \cos y +$$

$$+ i \operatorname{ch} x \sin y, \qquad (6)$$

$$\operatorname{ch}(x + iy) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} iy + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} iy =$$

$$= \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y. \qquad (7)$$

8.75. Semnalăm, în sfîrșit, formulele de derivare pentru x reali:

$$(\operatorname{ch} x)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \operatorname{sh} x,$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x.$$

Vedem că sub anumite aspecte funcțiile hiperbolice sînt mai simple decît funcțiile trigonometrice. Denumirea de „funcții hiperbolice" este în legătură cu faptul că acea curbă din planul (x, y) a cărei reprezentare parametrică este

$$x = \operatorname{ch} t, \quad y = \operatorname{sh} t$$

este hiperbola $x^2 - y^2 = 1$. Pentru funcțiile trigonometrice, curba corespunzătoare

$$x = \cos t, \quad y = \sin t$$

este cercul $x^2 + y^2 = 1$ și de aceea funcțiile trigonometrice mai sînt numite *funcții circulare*.

EXERCIȚII

1. Să se arate că funcția e^{-1/x^2} (prelungită cu valoarea 0 pentru $x=0$) are pe intervalul $[-a, a]$ derivate de orice ordin, dar nu poate fi reprezentată printr-o serie Taylor după puterile lui x.

2. Să se arate că funcția $y = x^{2n} \sin \frac{1}{x}$, prelungită cu valoarea 0 în $x=0$, are pentru $x=0$ derivate succesive, inclusiv a n-a, dar $y^{(n+1)}(0)$ nu există.

3. Să se demonstreze că dacă toate rădăcinile unui polinom $P(x)$ sînt reale, atunci la fel sînt toate rădăcinile polinoamelor $P'(x)$, $P''(x)$, ..., $P^{(n-1)}(x)$.

4. Presupunem că f este mărginită și are derivatele f' și f'' continue și mărginite pe $(-\infty, \infty)$. Fie $M_j = \sup_{-\infty<x<\infty} |f^{j}(x)|$, $(j = 0, 1, 2)$. Să se arate că

$$M_2^2 \leq 2M_0M_1.$$

5. Să se arate că derivata secundă $f''(x)$ (dacă ea există) poate fi obținută printr-un proces de trecere la limită, plecînd de la valorile funcției $f(x)$ în trei puncte vecine, anume

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)}{h^2}.$$

Scrieți o formulă analoagă pentru $f^{(n)}(x)$.

6. Dacă o funcție f convexă în jos (exerc. 7, cap. 7) are derivată secundă în punctul $x = x_0$, atunci $f''(x_0) \geqslant 0$.

7. Dacă inegalitatea $f''(x) > 0$ este satisfăcută peste tot în $[a, b]$, atunci curba $y = f(x)$ este convexă în jos pe $[a, b]$.

8. Demonstrați că funcția $w = \sin z$ nu are alte rădăcini în planul complex decît rădăcinile $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$

9. Demonstrați că funcția $w = \sin z$ este minorată în modul de o constantă pozitivă pe mulțimea punctelor tuturor cercurilor

$$|z| = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

10. (a) Să se evalueze eroarea făcută înlocuind funcția e^x în intervalul $[0, 1]$ prin polinomul său Taylor de gradul zece. (b) În ce interval $[0, h]$, polinomul Taylor de gradul 10 pentru funcția e^x dă valoarea acestei funcții cu aproximare de 10^{-7}? (c) Care trebuie să fie gradul polinomului Taylor al funcției e^x care permite calculul ei pe intervalul $[0, 1]$ cu aproximare de 10^{-7}?

11. Într-un interval (a, b) ce conține punctul x_0, funcția f are derivate succesive, pînă la ordinul n inclusiv, și în punctul x_0 derivata de ordinul $n + 1$. Presupunem că $f'(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = 0$, $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$. Descrieți poziția curbei $y = f(x)$ în raport cu tangenta sa în punctul x_0 în fiecare din ipotezele:

(a) $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, n par;

(b) $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, n impar;

(c) $f^{(n+1)}(x_0) < 0$, n par;

(d) $f^{(n+1)}(x_0) < 0$, n impar.

12. Dacă o funcție f admite, în vecinătatea unui punct a, reprezentarea

$$f(a + h) = f(a) + Ah + o(h),$$

atunci $f'(a)$ există și este egală cu A (7.21). Presupunem că funcția f admite în vecinătatea punctului a reprezentarea

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}Bh^2 + o(h^2).$$

Există $f''(a)$?

13. Să se verifice inegalitatea

$$e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n \cdot n!}.$$

14. Plecînd de la exercițiul precedent și de la faptul că $n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ este număr întreg, demonstrați că e este irațional.

15. Rezultatul din exerc. 12, cap. 6 nu mai este valabil fără ipoteza că toți ω_k au același semn. Arătați că pentru $\omega_k = (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}}$ produsul $\prod_{k=1}^{\infty}(1+\omega_k)$ diverge, în timp ce seria $\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k$ converge. Arătați că pentru $\omega_k = e^{(-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}}} - 1$ avem situația inversă.

16. Să se arate că pentru $-2\pi < x < 2\pi$, $n = 1,2, \ldots, x \neq 0$, au loc inegalitățile

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots - \frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!} < \cos x <$$

$$< 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{x^{4n}}{(4n)!}.$$

17. Folosind inegalitățile din exercițiul 16 pentru $n = 1$, stabiliți următoarele evaluări pentru numărul π:

$$3{,}11 < \pi < 3{,}18.$$

NOTĂ ISTORICĂ

Derivatele de ordin superior au apărut în același timp cu întreg aparatul calculului diferențial și au fost aplicate sistematic de Newton și Leibniz spre sfîrșitul secolului al XVII-lea la probleme de geometrie, mecanică și fizică. În ceea ce privește aplicațiile la probleme de mecanică, interpretarea accelerației unei mișcări, ca derivata secundă a spațiului parcurs, în raport cu timpul, este esențială; legea fundamentală a mecanicii (a doua lege a lui Newton) pune în legătură forța care acționează asupra unui corp cu accelerația și masa corpului.

Seriile asociate funcțiilor elementare au fost studiate de către Newton și James Gregory încă din 1660. În secolul următor, Euler le prelungește în domeniul complex. Lucrarea lui Taylor în care își face apariția „seria Taylor" datează din 1715; de altfel, Newton și Leibniz realizaseră deja construcții echivalente. De-a lungul întregului secol al XVIII-lea matematicienii afirmă sau subînțeleg că „orice funcție" se dezvoltă în seria sa Taylor; Cauchy (1823) a stabilit primul condiții riguroase de convergență a unei serii Taylor spre funcția dată și a făcut o distincție netă între convergența acestei serii și convergența sa spre funcția dată.

Capitolul 9

INTEGRALA RIEMANN

> Aria unei curbe este o cantitate care se generează fără încetare şi se măreşte cu o fluxiune continuu, proporţională cu ordonata curbei.
>
> **Isaac Newton (1671)**

> Aria care se află dedesubtul unei curbe este măsurată prin ordonata cuadraticei care este curba al cărei coeficient unghiular este ordonata curbei date.
>
> **Leibniz (1693)**

§ 9.1. Definiţia integralei şi teoreme de existenţă

La fel ca şi derivata, integrala este una din cele mai importante noţiuni ale analizei matematice clasice.

9.11. *Partiţie cu puncte marcate.* Dacă pe intervalul $a \leqslant x \leqslant b$, avem un sistem de puncte $x_0, x_1, \ldots, x_n$, astfel încît

$$a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n = b,$$

atunci se spune că este definită o *partiţie* a intervalului $[a, b]$ în intervale $[x_k, x_{k+1}]$; punctele $x_0, x_1, \ldots, x_n$ se numesc *puncte de diviziune* ale intervalului $[a, b]$. Dacă, în plus, se alege în orice interval $[x_k, x_{k+1}]$, cîte un punct ξ_k,

$$x_k \leqslant \xi_k \leqslant x_{k+1} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

atunci se spune că este dată o *partiţie cu puncte marcate* $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$. O partiţie este notată prin litera Π sau, sub o formă mai dezvoltată,

$$\Pi = [a = x_0 \leqslant \xi_0 \leqslant x_1 \leqslant \xi_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{n-1} \leqslant \xi_{n-1} \leqslant x_n = b]. \tag{1}$$

Notăm diferenţa $x_{k+1} - x_k$ prin Δx_k. Numărul $d(\Pi) = \max \Delta x_k$ se numeşte *norma* partiţiei Π.

9.12. *Sumă integrală.* Fie o funcție $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ definită pe un interval $[a, b]$. Fiind dată o partiție, se poate forma „suma integrală", adică numărul

$$S_\Pi(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

9.13. *Integrala.* Un număr I se numește *integrala (lui Riemann)* a unei funcții f pe intervalul închis $[a, b]$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există un $\delta > 0$ astfel încît oricare ar fi partiția Π cu $d(\Pi) < \delta$, să aibă loc inegalitatea

$$|I - S_\Pi(f)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Această definiție poate fi considerată în sensul definiției generale a limitei, care a fost dată în 4.12. Anume, considerăm mulțimea E avînd ca elemente partițiile Π cu puncte marcate. Pentru un $\rho > 0$ dat, notăm prin E_ρ submulțimea lui E formată din toate partițiile Π pentru care $d(\Pi) < \rho$. Este evident că două mulțimi oarecare E_{ρ_1} și E_{ρ_2} sînt incluse una în alta și că intersecția tuturor E_ρ este vidă. Mulțimile E_ρ definesc deci o direcție $\mathcal{S}$ pe mulțimea E, pe care o putem folosi pentru construirea limitei unei funcții date pe E. Anume, definiția 4.12 aplicată în cazul de față este formulată astfel:

Un număr I este limita funcției $S(\Pi)$, dată pe mulțimea partițiilor Π cu puncte marcate, după direcția $\mathcal{S}$, dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un $\delta > 0$ astfel încît $d(\Pi) < \delta$ să implice inegalitatea

$$|I - S(\Pi)| < \varepsilon. \tag{2}$$

O limită după direcția $\mathcal{S}$ pe mulțimea tuturor partițiilor cu puncte marcate va fi numită *limita pentru o rafinare nelimitată a partiției.*

Vedem acum că dacă funcția $S(\Pi)$ este construită din funcția $f(x)$ în modul indicat în 9.12, atunci *existența limitei $S(\Pi)$ după $\mathcal{S}$, adică pentru o rafinare nelimitată a partiției Π, este echivalentă cu existența integralei funcției f.* Integrala se notează prin simbolul

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{3}$$

care reamintește suma integrală inițială. Totuși, dacă simbolul sumei integrale conține o indicație asupra operațiilor pe care trebuie să le efectuăm pentru a o găsi, cel al integralei reprezintă, pentru moment, un tot „indivizibil", în sensul că nu este vorba să înmulțim $f(x)$ prin dx și apoi să „integrăm". Motivul pentru care se adoptă acest simbol (și nu $\int_a^b f(x)\,dx$, de exemplu) va fi pus în evidență în cele ce urmează („Vă avertizez să aveți grijă să nu omiteți dx, greșeală comisă des, și care vă împiedică să mergeți mai departe, deoarece prin aceasta vă lipsiți de indivizibile cum este aici dx, generalitatea lor ... născînd nenumărate transfigurări și echipolențe ale figurilor" — **Leibniz**, 1686) Dar, este evident că modul de notare a variabilei independente nu are nici o importanță pentru valoarea integralei, adică

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(\xi)\,d\xi = \int_a^b f(t)\,dt = \dots$$

Numerele a și b se numesc *limitele de integrare*; a este limita inferioară și b limita superioară.

Pentru o funcție f, integrala nu există în mod obligatoriu. Vom demonstra mai departe (9.14 și 9.16) că orice funcție continuă și anumite funcții discontinue, dar suficient de simple, au integrale; din contră, funcțiile „puternic discontinue" (ca de exemplu funcția lui Dirichlet (9.17)) nu au integrală. O funcție f definită pe $[a, b]$ și cu valori reale, a cărei integrală pe $[a, b]$ există, se numește *integrabilă pe* $[a, b]$.

9.14. Vom demonstra acum existența integralei unei funcții $y = f(x)$ continue pe un interval închis $[a, b]$.

a. Notăm prin $\omega_f(\delta)$ oscilația funcției f pe intervalul $[a, b]$:

$$\omega_f(\delta) = \sup_{|x'-x''|<\delta} |f(x') - f(x'')|.$$

Amintim (5.17 c) că pentru o funcție f continuă pe un interval $[a, b]$ avem totdeauna $\lim_{\delta \to 0} \omega_f(\delta) = 0$.

b. Spunem că o partiție $\Pi' = [a = x'_0 \leqslant \xi'_0 \leqslant x'_1 \leqslant \xi'_1 \leqslant \ldots \leqslant x'_p = b]$ este mai fină în raport cu o partiție $\Pi = [a = x_0 \leqslant \xi_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n = b]$, dacă fiecare din punctele $x_0, \ldots, x_n$ figurează printre punctele $x'_0, \ldots, x'_p$ (adică mulțimea $x'_1, \ldots, x'_p$ se obține completînd mulțimea $x_0, \ldots, x_n$ prin cîteva noi puncte de diviziune); nu se impune nici o condiție punctelor marcate ξ_k, ξ'_k. Stabilim acum două leme simple.

c. LEMĂ. *Dacă o partiție* Π *satisface condiția* $d(\Pi) \leqslant \delta$, *atunci pentru orice partiție mai fină* Π', *avem*:

$$|S_{\Pi'}(f) - S_{\Pi}(f)| \leqslant \omega_f(\delta)\,(b-a). \qquad (1)$$

Demonstrație. Trecînd de la Π la Π', orice interval $[x_k, x_{k+1}]$ se îmbogățește cu noi puncte de diviziune și puncte marcate; schimbînd puțin notația, putem să le scriem după cum urmează.

$$x_k = x_{k0} \leqslant \xi_{k0} \leqslant x_{k1} \leqslant \xi_{k1} \leqslant x_{k2} \leqslant \ldots \leqslant \xi_{k,m_k-1} \leqslant$$

$$\leqslant x_{km_k} = x_{k+1}.$$

Partea din suma integrală $S_{\Pi'}$ care corespunde intervalului $[x_k, x_{k+1}]$ are forma $\sum_{j=0}^{m_k-1} f(\xi_{kj})\Delta x_{kj} (\Delta x_{kj} = x_{k,j+1} - x_{kj})$.

$$- x_{kj}).$$

Termenul $f(\xi_k)\Delta x_k$ al sumei integrale S_{Π} poate fi pus și el sub forma sumei $\sum_{j=0}^{m_k-1} f(\xi_k)\,\Delta x_{kj}$.

Avem

$$\sum_{j=0}^{m_k-1} f(\xi_{kj})\Delta x_{kj} - \sum_{j=0}^{m_k-1} f(\xi_k)\Delta x_{kj} = \sum_{j=0}^{m_k-1} [f(\xi_{kj}) - f(\xi_k)]\Delta x_{kj},$$

și deoarece $d(\Pi) < \delta$,

$$\left| \sum_{j=0}^{m_k-1} f(\xi_{kj})\Delta x_{kj} - \sum_{j=0}^{m_k-1} f(\xi_k)\Delta x_{kj} \right| \leqslant \sum_{j=0}^{m_k-1} |f(\xi_{kj}) - f(\xi_k)|\,\Delta x_{kj} \leqslant$$

$$\leqslant \omega_f(\delta)\,\Delta x_k.$$

Sumînd după indicele k, se obține

$$\left| \sum_k \sum_j f(\xi_{kj})\Delta x_{kj} - \sum_k f(\xi_k)\Delta x_k \right| \leqslant \omega_f(\delta)(b-a),$$

și lema este demonstrată.

d. LEMĂ. *Pentru două partiții (arbitrare)* Π_1 *și* Π_2 *cu* $d(\Pi_1) < \delta$, $d(\Pi_2) < \delta$, *avem* :

$$|S_{\Pi_1}(f) - S_{\Pi_2}(f)| \leqslant 2\omega_f(\delta)(b-a). \tag{2}$$

Pentru a o demonstra, construim o nouă partiție Π_3 care are ca puncte de diviziune toate punctele diviziunii Π_1 și Π_2, punctele marcate fiind alese într-un mod oarecare. Partiția Π_3 este mai fină decît Π_1 și decît Π_2. Conform lemei c, avem :

$$|S_{\Pi_1}(f) - S_{\Pi_3}(f)| \leqslant \omega_f(\delta)(b-a),$$
$$|S_{\Pi_2}(f) - S_{\Pi_3}(f)| \leqslant \omega_f(\delta)(b-a),$$

de unde rezultă (2).

e. Sîntem acum în măsură să demonstrăm teorema fundamentală.

TEOREMĂ. *Orice funcție* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, *continuă pe intervalul închis* $[a, b]$ *este integrabilă pe acest interval.*

Demonstrație. Datorită criteriului lui Cauchy de existență a limitei după o direcție dată (4.19), este suficient de demonstrat că pentru orice $\varepsilon > 0$, există un $\delta > 0$ astfel încît

$$|S_{\Pi_1}(f) - S_{\Pi_2}(f)| \leqslant \varepsilon,$$

dacă $d(\Pi_1) \leqslant \delta$, $d(\Pi_2) \leqslant \delta$.

Funcția f fiind continuă pe $[a, b]$, se poate găsi, pentru orice $\varepsilon > 0$, un $\delta > 0$ astfel încît $\omega_f(\delta) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Atunci, oricare ar fi două partiții Π_1 și Π_2 cu $d(\Pi) \leqslant \delta$, conform lemei d are loc inegalitatea

$$\left| S_{\Pi_1}(f) - S_{\Pi_2}(f) \right| \leqslant 2 \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) = \varepsilon.$$

Criteriul lui Cauchy este deci satisfăcut și teorema asupra existenței integralei unei funcții continue este demonstrată.

9.15. Ne vom întîlni cu integrale din funcții dintr-o clasă mai largă. Pentru început, dăm cîteva proprietăți generale ale integralei în ipoteza că aceasta există, fără a ne folosi de proprietățile particulare ale funcțiilor care se integrează.

a. *Dacă o funcție f este integrabilă pe un interval $[a, b]$ și k este o constantă, atunci funcția kf este integrabilă pe $[a, b]$* și

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Într-adevăr, pentru orice partiție, Π,

$$S_\Pi(kf) = \sum_{j=0}^{n-1} kf(\xi_j)\,\Delta x_j = k\sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\,\Delta x_j = kS_\Pi(f);$$

membrul al doilea avînd o limită pentru o rafinare nemărginită a partiției Π, care este $k\int_a^b f(x)\,dx$; de aici rezultă că și primul membru are aceeași limită, ceea ce stabilește egalitatea (1).

b. *Dacă două funcții f și g sînt integrabile pe intervalul $[a, b]$, atunci funcția $f + g$ este și ea integrabilă pe $[a, b]$* și

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx. \tag{2}$$

Într-adevăr, pentru orice Π, avem:

$$S_\Pi(f+g) = \sum_{k=0}^{n-1} [f(\xi_k) + g(\xi_k)]\,\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} g(\xi_k)\,\Delta x_k = S_\Pi(f) + S_\Pi(g);$$

trecînd la limită pentru o rafinare nemărginită a diviziunii Π, se stabilește existența integralei funcției $f + g$ și astfel și egalitatea (2).

c. *Orice funcție integrabilă f este mărginită.*

Presupunem că o funcție f nu este mărginită pe $[a, b]$. Considerăm o partiție oarecare $\Pi = \{a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_{n-1} \leqslant x_n = b\}$. În cel puțin unul din intervalele $[x_j, x_{j+1}]$, funcția nu este mărginită. Atunci fixînd punctele marcate în toate celelalte intervale și făcînd să varieze ξ_j în intervalul unde f nu este mărginită, se pot obține valori ale sumei integrale oricît de mari dorim (în modul). Sumele 9.12 nu pot avea deci limită finită.

d. *Integrarea inegalităților. Dacă două funcții f și g integrabile pe $[a, b]$ verifică inegalitatea $f(x) \leqslant g(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$, atunci*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

Într-adevăr, sumele integrale $S_\Pi(f)$ și $S_\Pi(g)$ pentru aceeași partiție Π, cu aceleași punete marcate ξ_j, satisfac inegalitatea

$$S_\Pi(f) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\,\Delta x_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} g(\xi_j)\,\Delta x_j = S_\Pi(g),$$

de unde se obține (3) trecînd la limită pentru $\mathrm{d}(\Pi) \to 0$.

e. *În particular, dacă o funcție f integrabilă pe un interval $[a, b]$ este majorată acolo de un număr M, atunci*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M\,\mathrm{d}x = M(b - a). \tag{4}$$

f. *Într-un mod analog, dacă o funcție f integrabilă pe un interval $[a, b]$ este acolo minorată de un număr m, atunci*

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

g. *În particular, dacă funcția f este nenegativă, se poate pune $m = 0$ și integrala este și ea nenegativă.*

h. *Pentru o funcție f mărginită,*

$$m \leqslant f(x) \leqslant M,$$

se obține o dublă estimare a integralei

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \qquad (6)$$

Mărimea

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

se numește *media (integrală) a funcției f*. Din (6) rezultă următoarea dublă inegalitate pentru medie („teorema mediei"):

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M. \qquad (7)$$

Dacă funcția f este continuă pe $[a, b]$, atunci alegînd pentru m și M marginile sale inferioară și respectiv superioară și aplicînd teorema lui Bolzano 5.22, ajungem la concluzia că există un punct $\xi \in [a, b]$ astfel încît

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi).$$

Numărul $f(\xi)$ este *valoarea medie* a funcției f pe intervalul $[a, b]$.

i. *Dacă funcțiile f și $|f|$ sînt integrabile* [Integrabilitatea funcției f implică, în realitate, cea a funcției $|f|$, (vezi exerc. 7)], *atunci integrînd inegalitatea*

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|,$$

se găsește

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

de unde

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

j. *Dacă o funcție f este integrabilă pe fiecare din intervalele $[a, c]$ și $[c, b]$, atunci ea este integrabilă de asemenea pe $[a, b]$ și*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{8}$$

Pentru a demonstra aceasta, alegem o partiție oarecare a intervalului $[a, b]$:

$$\Pi = [a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_m \leqslant c \leqslant x_{m+1} \leqslant \ldots \leqslant x_n = b].$$

Suma integrală corespunzătoare, cu punctele marcate ξ_k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ se transformă în modul următor:

$$S_\Pi(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=0}^{m-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k + f(\xi_m)\Delta x_m +$$

$$+ \sum_{k=m+1}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=0}^{m-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k + f(c)\,(c - x_m) +$$

$$+ f(c)\,(x_{m+1} - c) + \sum_{k=m+1}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k + [f(\xi_m) - f(c)]\Delta x_m =$$

$$= S_{\Pi_1}(f) + S_{\Pi_2}(f) + [f(\xi_m) - f(c)]\Delta x_m, \tag{9}$$

Π_1 și Π_2 fiind partițiile intervalelor $[a, c]$ și respectiv $[c, b]$. Atunci, pentru o rafinare nelimitată a partiției Π, partițiile Π_1 și Π_2 sînt de asemenea rafinate nelimitat și ultimul termen în (9) tinde spre zero (deoarece funcția integrabilă f este mărginită conform c și lungimea intervalului Δx_m tinde către zero). Al doilea membru din (9) tinde deci către limita

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Primul membru din (9), la rîndul său, are ca limită

$f(x)\,dx$, de unde rezultă (8).

k. Invers, *dacă o funcţie f este integrabilă pe $[a, b]$, atunci ea este integrabilă pe fiecare din intervalele $[a, c]$ şi $[c, b]$, unde $a < c < b$.*

Limităm demonstraţia la segmentul $[a, c]$; celălalt caz se demonstrează în mod analog. Orice partiţie

$$\Pi = [a = x_0 \leqslant \xi_0 \leqslant x_1 \leqslant \xi_1 \leqslant \ldots \leqslant x_m = c]$$

a intervalului $[a, c]$ poate fi completată în aşa fel încît să obţinem o partiţie $\bar{\Pi}$ a intervalului $[a, b]$:

$$\bar{\Pi} = [a = x_0 \leqslant \xi_0 \leqslant x_1 \leqslant \xi_1 \leqslant \ldots \leqslant x_m \leqslant \xi_m \leqslant x_{m+1} \leqslant \ldots \ldots \leqslant x_n = b].$$

Pentru a doua partiţie

$$\Pi' = [a = x'_0 \leqslant \xi'_0 \leqslant x'_1 \leqslant \xi'_1 \leqslant \ldots \leqslant x'_p = c]$$

folosim aceeaşi completare

$$\bar{\Pi}' = [a = x'_0 \leqslant \xi'_0 \leqslant x'_1 \leqslant \ldots \leqslant x'_p \leqslant \xi_m \leqslant x_{m+1} \leqslant \ldots \ldots \leqslant x_n = b].$$

Deoarece f este integrabilă pe $[a, b]$, se poate găsi, pentru orice $\varepsilon > 0$ dat, un $\delta > 0$ astfel încît

$$|S_{\bar{\Pi}}(f) - S_{\bar{\Pi}'}(f)| < \varepsilon,$$

de îndată ce $d(\bar{\Pi}) < \delta$, $d(\bar{\Pi}') < \delta$. Dar, în cazul de faţă este, clar că avem:

$$S_{\bar{\Pi}}(f) - S_{\bar{\Pi}'}(f) = S_{\bar{\Pi}}(f) - S_{\bar{\Pi}'}(f),$$

deci oricare ar fi Π şi Π' cu $d(\Pi) < \delta$, $d(\Pi') < \delta$, avem

$$|S_{\Pi}(f) - S_{\Pi'}(f)| < \varepsilon.$$

De aici rezultă că este satisfăcut criteriul lui Cauchy pentru sumele integrale ale funcției f pe intervalul $[a, c]$, relativ la direcția $d(\Pi) \to 0$. De unde rezultă integrabilitatea funcției f pe intervalul $[a, c]$.

l. Aplicînd de mai multe ori propoziția k și ținînd cont de punctul j, ajungem la următorul rezultat:

Dacă o funcție f este integrabilă pe un interval $[a, b]$ și dacă $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = b$, atunci f este integrabilă pe fiecare din intervalele $[c_{k-1}, c_k]$ și

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{c_0}^{c_1} f(x)\,dx + \ldots + \int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x)\,dx.$$

m. Considerăm acum o estimare utilă a diferenței dintre o integrală și suma ei integrală.

Dacă o funcție f este integrabilă pe $[a, b]$ și $d(\Pi) \leqslant \delta$, atunci

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - S_\Pi(f) \right| \leqslant \omega_f(\delta) \cdot (b - a).$$

Această inegalitate se deduce din inegalitatea 9.14 (1) prin trecere la limită pentru $d(\Pi') \to 0$.

9.16. Acum, vom proba existența integralei pentru anumite funcții discontinue. Clasa funcțiilor discontinue pe care o vom considera nu este vastă, dar ea este suficientă pentru toate aplicațiile viitoare.

a. *Presupunem că o funcție $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ este nulă pentru $a < x < b$ și ia valori oarecare $h(a)$ și $h(b)$. Arătăm că h este integrabilă pe $[a, b]$ și că*

$$\int_a^b h(x)\,dx = 0. \qquad (1)$$

Într-adevăr, suma integrală a funcției h pentru orice Π se reduce la forma

$$h(\xi_0)\,\Delta x_0 + h(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1},$$

unde $h(\xi_0)$ este 0 sau $h(a)$ și $h(\xi_{n-1})$ este 0 sau $h(b)$. Cînd $d(\Pi) \to 0$ această expresie tinde, evident, către zero, ceea ce trebuia demonstrat.

b. *Fie o funcție f continuă pentru $a \leqslant x \leqslant b$. Presupunem că $f_1(x)$ coincide cu $f(x)$ pentru $a < x < b$ și ia valori oarecare $f_1(a)$ și $f_1(b)$. Atunci funcția $f_1(x)$ este integrabilă pe $[a, b]$ și*

$$\int_a^b f_1(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

Într-adevăr, funcția $h(x) = f_1(x) - f(x)$ verifică condițiile a; ea este deci integrabilă și are loc egalitatea (1). În consecință, în virtutea lui 9.15 b, funcția $f_1(x) = f(x) + h(x)$ este și ea integrabilă și are loc relația (2) conform 9.15 b și (1), ceea ce trebuia demonstrat.

c. O funcție f este numită *continuă pe porțiuni pe un interval* $[a, b]$ dacă există o partiție

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

astfel încît f să fie continuă în orice interval deschis $x_k < x < x_{k+1}$ și să aibă limite finite $f(x_0 + 0)$, $f(x_1 - 0)$, $f(x_1 + 0)$, $f(x_2 - 0)$, $\ldots$, $f(x_n - 0)$ (valorile ei în punctele x_k fiind oarecare). Să arătăm că *orice funcție f continuă pe porțiuni pe un interval $[a, b]$ este integrabilă pe acest interval.*

Notăm prin $f_k(x)$ funcția care este definită pe intervalul închis $x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}$, coincide în interiorul său cu funcția f și ia la extremități valorile respectiv $f(x_k + 0)$ și $f(x_{k+1} - 0)$. Funcția f_k este continuă pe $[x_k, x_{k+1}]$; în virtutea punctului b, funcția f este integrabilă pe $[x_k, x_{k+1}]$ și, în plus:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_k(x)\,dx.$$

Aplicînd 9.15 j, se vede că funcția f este integrabilă pe întreg intervalul $[a, b]$, ceea ce trebuia demonstrat.

Conform 9.15 l, avem de asemenea

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_k(x)\,dx,$$

deci calculul integralei unei funcţii continue pe porţiuni, se reduce la calculul integralelor unor funcţii continue.

d. În particular, orice *funcţie în scară*

$$h(x) = \begin{cases} h_0 = \text{const pentru } a = x_0 < x < x_1, \\ h_1 = \text{const pentru } x_1 < x < x_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ h_{n-1} = \text{const pentru } x_{n-1} < x < x_n = b. \end{cases}$$

este integrabilă şi integrala ei este

$$\int_a^b h(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} h(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} h_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} dx = \sum_{k=0}^{n-1} h_k(x_{k+1} - x_k).$$

De aici rezultă, printre altele, că suma integrală $S_\Pi(f)$ (9.12) a oricărei funcţii f este integrala unei funcţii în scară $h_\Pi(x)$, anume a celei care ia, în intervalul $x_k < x < x_{k+1}$, valoarea constantă $h_k = f(\xi_k)$.

e. TEOREMĂ. *Presupunem că* $g \geqslant 0$ *este o funcţie continuă pe porţiuni şi că*

$$\int_a^b g(x)\,dx = 0. \tag{3}$$

Atunci g *nu poate fi nenulă decît pe o mulţime finită de puncte.*

Demonstraţie. Fie la început g continuă; arătăm că, în acest caz, (3) implică $g = 0$. Într-adevăr, dacă $g \neq 0$, atunci există un punct c, $a \leqslant c \leqslant b$, astfel încît $g(c) > 0$ şi în consecinţă, în virtutea continuităţii funcţiei g, există un întreg interval $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ în care $g(x) \geqslant g_0 > 0$. Avem

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_\alpha^\beta g(x)\,dx + \int_{x \notin (\alpha,\beta)} g(x)\,dx \geqslant \int_\alpha^\beta g(x)\,dx \geqslant$$

$$\geqslant (\beta - \alpha) g_0 > 0,$$

ceea ce contrazice (3). Astfel (3) implică $g = 0$.

Fie acum g o funcție continuă pe porțiuni și $c_0 = a < c_1 < \ldots < c_p = b$ punctele sale de discontinuitate. Atunci, conform punctului c, avem :

$$\int_a^b g(x)\,dx = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{c_k}^{c_{k+1}} g(x)\,dx = 0,$$

de unde, fiecare termen fiind nenegativ,

$$\int_{c_k}^{c_{k+1}} g(x)\,dx = 0 \quad (k=0, \ldots, p-1).$$

Funcția g este continuă în interiorul unui interval $[c_k, c_{k+1}]$, deci $g(x) = 0$ în orice punct x interior al acestui interval. Inegalitatea $g(x) > 0$ nu este posibilă decît în punctele $c_0, \ldots, c_p$ al căror număr este finit. Teorema este demonstrată.

9.17. Am stabilit integrabilitatea unei funcții continue pe porțiuni ; o astfel de funcție nu are decît un număr finit de puncte de discontinuitate. [Se poate demonstra că orice funcție mărginită, cu puncte de discontinuitate în număr finit, este integrabilă. Vezi exercițiul 9.] Ce se poate spune despre integrabilitatea unei funcții avînd un număr infinit de puncte de discontinuitate ? Să considerăm funcția lui Dirichlet $\chi(x)$ care este egală cu 0 în orice punct irațional și 1 în orice punct rațional al intervalului $[0, 1]$. Pentru orice diviziune Π, dacă punctele ξ_k sînt raționale, se va obține suma integrală $\sum \chi(\xi_k)\Delta x_k$ care este 1 ; și dacă punctele ξ_k sînt iraționale (pentru același Π), suma integrală $\sum \chi(\xi_k)\Delta x_k$ va fi 0. Deci pentru funcția lui Dirichlet nu există limita sumelor integrale pentru o rafinare nelimitată a lui $[0, 1]$ și ea nu este deci integrabilă.

Astfel, frontiera care separă funcțiile integrabile și neintegrabile trece în parte prin domeniul funcțiilor ale căror puncte de discontinuitate sînt în număr infinit. Există o teoremă care spune că o funcție f este integrabilă în sens Riemann dacă și numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, mulțimea tuturor punctelor de discontinuitate poate fi acoperită de o familie finită sau numărabilă de intervale avînd suma lungimilor strict mai mică decît ε (exerc. 9). Totuși, pentru a integra funcțiile discontinue, este mai bine să utilizăm o altă schemă de integrare, mai generală decît cea a lui Riemann, anume a integralei Lebesgue [41].

9.18. *Integrala definită de la b la a, unde* $a \leqslant b$. Fie f integrabilă pe $a \leqslant x \leqslant b$. Se pune, prin definiție,

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Pentru orice $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$ are loc formula

$$\int_\alpha^\gamma f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\gamma f(x)\,dx \tag{2}$$

poziția relativă a punctelor α, β, γ pe intervalul $[a, b]$ fiind oarecare. Într-adevăr, pentru $\alpha < \beta < \gamma$, formula a fost demonstrată deja în 9.15 j. Considerăm o altă poziție a punctelor α, β, γ, de exemplu $\gamma < \beta < \alpha$. Atunci, se știe că

$$\int_\gamma^\alpha f(x)\,dx = \int_\gamma^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\alpha f(x)\,dx.$$

Apoi, aplicînd (1), se găsește

$$\int_\alpha^\gamma f(x)\,dx = -\int_\gamma^\alpha f(x)\,dx = -\int_\gamma^\beta f(x)\,dx - \int_\beta^\alpha f(x)\,dx =$$

$$= \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\gamma f(x)\,dx,$$

ceea ce trebuia; pentru oricare altă poziție a lui α, β, γ, raționamentul este analog.

Remarcăm acum o relație care decurge imediat din (1):

$$\frac{1}{a-b}\int_b^a f(x)\,dx = -\frac{1}{a-b}\int_a^b f(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{3}$$

Aplicînd membrului secund din (3) estimaţia 9.15(7) avem :

$$\inf f(x) = m \leqslant \frac{1}{b-a} \int_b^a f(x)\,dx \leqslant M = \sup f(x),$$

astfel că, pentru estimarea mediei nu are importanţă dacă $a < b$ sau $b < a$.

§ 9.2. La ce foloseşte integrala?

Dăm în 9.21 şi 9.28 două exemple geometrice de aplicare a noţiunii de integrală în analiza matematică ; o analiză detaliată se va face în § 9.6.

9.21. *Aria trapezului curbiliniu.* Noţiunea de arie pentru figuri geometrice simple, de exemplu, limitate de segmente de dreaptă, este cunoscută din geometria elementară. Dar ce este „aria" unei figuri limitate de alte curbe decît segmente de dreaptă ? Geometria elementară nu ne spune nimic. [Aria unui cerc nu intră în discuţie deoarece ea este calculată prin mijloace neelementare (folosirea limitelor)].

Este natural să plecăm de la ipoteza axiomatică următoare : *aria unei figuri* Φ *este un număr care nu este mai mare decît aria* S *a oricărei figuri elementare (de exemplu, reuniune de poligoane) ce conţine pe* Φ *şi nici mai mică decît aria* s *a oricărei figuri elementare conţinute în* Φ (fig. 9.1).

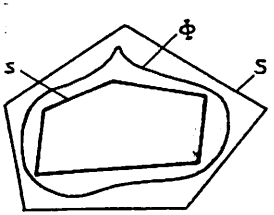


Fig. 9.1.

Deoarece $s \leqslant S$ (conform teoremelor din geometria elementară), avem (1.62 b) :

$$\sup s \leqslant \inf S,$$

unde marginea superioară în primul membru se obţine par-

curgînd toate figurile elementare incluse în Φ și marginea inferioară a celui secund parcurgînd toate figurile elementare ce conțin pe Φ. Dacă $\sup s = \inf S$, atunci singura valoare posibilă a ariei figurii Φ este valoarea comună a lui $\sup s$ și $\inf S$. Să aplicăm aceste considerații de ordin general în cazul unui trapez curbiliniu, adică a unei figuri Φ care este delimitată în jos de un segment $[a, b]$ al axei x-ilor, în sus de graficul unei funcții continue $y = f(x) \geqslant 0$, la stînga și la dreapta de ordonatele acestui grafic pentru $x = a$ și respectiv $x = b$. Considerăm o partiție $\Pi = [a = x_0 \leqslant \xi_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n = b]$ și alegem punctul $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ astfel ca funcția f să ia acolo valoarea maximă (pe $[x_k, x_{k+1}]$) pe care o vom nota cu M_k. Suma integrală corespunzătoare

$$\bar{S}_\Pi(f) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k$$

poate fi interpretată ca aria figurii elementare formate de dreptunghiurile exînscrise și conținînd figura Φ (fig. 9.2). Dacă se alege punctul $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ astfel încît funcția f să ia acolo valoarea sa minimă (pe $[x_k, x_{k+1}]$) pe care o vom nota cu m_k, atunci suma integrală corespunzătoare

$$\underline{S}_\Pi(f) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k$$

poate fi interpretată ca aria unei figuri elementare formată

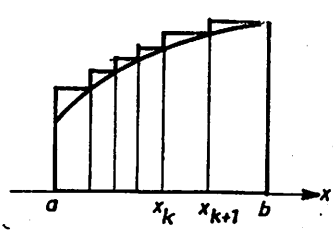


Fig. 9.2.

de dreptunghiuri înscrise și conținute în figură (fig. 9.3). Deci orice număr S care ar fi candidat pentru „aria figurii Φ" va trebui, conform ipotezei, să satisfacă inegalitatea:

$$\underline{S}_\Pi(f) \leqslant S \leqslant \bar{S}_\Pi(f).$$

Dar pe de altă parte, dacă funcția f are integrală (ceea ce este demonstrat, pentru o funcție continuă, în 9.14), atunci, pentru o rafinare nelimitată Π, sumele $\underline{S}_\Pi(f)$ și $\overline{S}_\Pi(f)$ au o limită comună I; astfel, ajungem la singura definiție posibilă a ariei figurii Φ:

$$S = I = \int_a f(x)\,dx.$$

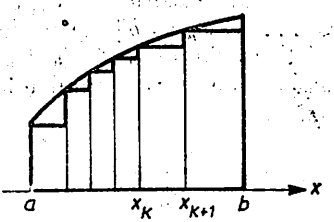


Fig. 9.3

9.22. Pentru a termina construcția, va trebui să stabilim că definiția noastră a ariei unui trapez curbiliniu satisface ipoteza axiomatică formulată mai sus pentru orice figură elementară și nu numai pentru cele ce apar în definiție. O putem face, dar demonstrația este laborioasă și, în plus, raționamentul nu este decît un caz particular al construcțiilor generale din teoria măsurii ariilor și volumelor. Deoarece nu avem nevoie de ea în cartea de față, ne vom mărgini la o observație asupra acestei teorii, trimițînd cititorul pentru detalii, la literatură (vezi, de exemplu: [20] și [40]).

9.23. Pentru a începe, să dăm definiția integralei Riemann pe un compact metric. Fie K un compact (3.91). Numim *celule* anumite submulțimi ale compactului K; presupunem că sînt valabile următoarele proprietăți:

1) compactul K însuși și submulțimea sa vidă sînt celule;

2) intersecția a două celule este o celulă;

3) dacă o celulă A este conținută într-o celulă B, atunci B poate fi reprezentată ca o reuniune de celule disjuncte și a lui A;

4) pentru orice $\delta > 0$, există o partiție a compactului K într-un număr finit de celule disjuncte două cîte două, ale căror diametre (3.12 a) nu depășesc δ.

Presupunem apoi că oricărei celule îi corespunde un număr nenegativ mQ, numit măsura celulei Q, astfel încît de fiecare dată cînd o celulă Q este reuniunea celulelor disjuncte $Q_1, \ldots, Q_n$ este îndeplinită condiția de aditivitate:

$$mQ = mQ_1 + \ldots + mQ_n. \tag{1}$$

În cele ce urmează, un compact înzestrat cu un sistem de celule și cu o măsură, se va numi *compact încărcat*. Pe un compact încărcat se poate stabili o schemă de integrare analoagă cu schema integralei lui Riemann pe un interval închis, schemă ce a fost descrisă în § 9.1.

Fie o funcție f definită pe un compact încărcat K. Considerăm o partiție Π a compactului K într-un număr finit de celule disjuncte $Q_1, \ldots, Q_p$. Notăm prin $d(\Pi)$ cel mai mare din diametrele celulelor $Q_1, \ldots, Q_p$. Alegem, în fiecare celulă Q_j, un punct oarecare ξ_j și scriem suma integrală

$$S_\Pi(f) = \sum_{j=1}^{p} f(\xi_j)\, mQ_j. \tag{2}$$

Un număr I_f se numește *integrala lui Riemann a funcției* f pe compactul încărcat K dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un $\delta > 0$ astfel încît, oricare ar fi o partiție Π cu $d(\Pi) < \delta$, să avem inegalitatea

$$|I_f - S_\Pi(f)| < \varepsilon.$$

Cu alte cuvinte, integrala Riemann a funcției f este limita sumelor integrale (2) pentru o rafinare nelimitată a partiției Π. Această definiție intră în schema generală a limitei după o direcție așa cum a fost în cazul unui interval închis (9.13). Se poate demonstra ca și în 9.14 pentru cazul unui interval închis că orice funcție continuă este integrabilă pe un compact încărcat K.

9.24. *Exemple.*

a. Fie K un interval $[a, b]$ înzestrat cu metrica uzuală. Numim celulă, orice interval $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, $\alpha < x \leqslant \beta$, $\alpha \leqslant x < \beta$, $\alpha < x < \beta$, unde $\alpha \leqslant \beta$; lungimea fiecărui interval va fi măsura celulei corespunzătoare. Se ajunge atunci la definiția uzuală a integralei Riemann pe interval închis (9.13).

b. Fie K un pavaj (paralelipiped) în spațiul n-dimensional definit de inegalitățile

$$a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, \ldots, a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$$

și înzestrat cu metrica uzuală a spațiului euclidian (3.14). Numim celule ale subpavajului Q al pavajului K, definite prin inegalitățile $\alpha_1 \leqslant x_1 \leqslant \beta_1, \ldots, \alpha_n \leqslant x_n \leqslant \beta_n$, sau prin inegalitățile care se obțin înlocuind oricare $\leqslant$ prin $<$. Numim măsura pavajului Q, volumul său, adică numărul $\prod_{k=0}^{n}(\beta_k - \alpha_k)$. Este ușor de văzut că toate condițiile impuse unui sistem de celule și măsurile lor sînt satisfăcute. Integrala astfel obținută se numește *integrala Riemann pe un pavaj K n-dimensional.*

9.25. Spunem că o parte Z a unui compact încărcat K are măsură (jordaniană) nulă dacă, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, ea poate fi acoperită de un număr finit de celule $Q_1, \ldots, Q_s$ cu $\sum_{j=1}^{s} mQ_j < \varepsilon$ și dacă, în plus, orice punct $x \in Z$ este un punct interior (3.21) al mulțimii $\bigcup_{j=1}^{s} Q_j$. Are loc următoarea teoremă (care este o generalizare a teoremei asupra integrabilității unei funcții continue pe porțiuni 9.16) : orice funcție f mărginită pe un compact încărcat K și continuă peste tot cu excepția unei mulțimi de măsură nulă este integrabilă.

9.26. Oricărei mulțimi $E \subset K$ îi facem să corespundă funcția sa caracteristică χ_E care este egală cu 1 pe E și 0 în afară. Spunem că mulțimea E *are un volum* (*măsură*) dacă funcția χ_E este integrabilă, în care caz numărul $mE = I_{\chi_E}$ se va numi *volumul* (*măsura Jordan*) a mulțimii E. Pentru orice mulțime de măsură nulă, volumul ei este nul. Din proprietățile fundamentale ale integralei, rezultă că $E_1 \subset E_2$ implică $mE_1 \leqslant mE_2$ (dacă aceste volume există) și că fiind dată o partiție a unei mulțimi E, avînd volum, în mulțimile partiției $E_1, \ldots, E_s$ avînd de asemenea volum și fiind disjuncte, $mE = mE_1 + \ldots + mE_s$ (aditivitatea volumului).

Care sînt deci mulțimile $E \subset K$ care au volum? Problema existenței volumului unei mulțimi E este clarificată studiind proprietățile frontierei sale. Se numește *frontiera*

unei mulțimi E, mulțimea punctelor $x \in K$ care sînt puncte limită pentru E și pentru complementară simultan (adică acele puncte cu proprietatea că orice vecinătate a lor conține puncte din E și din $K \setminus E$). Are loc teorema următoare : o mulțime $E \subset K$ are volum dacă și numai dacă măsura frontierei sale este nulă. În cele ce urmează, astfel de mulțimi se vor numi mulțimi *jordaniene*. În particular, pentru orice celulă jordaniană, volumul său este măsura inițială.

Pentru mulțimi jordaniene, proprietatea de aditivitate a volumului poate fi întărită în modul următor : dacă o mulțime jordaniană E este reuniunea unui număr finit de mulțimi jordaniene $E_1, \ldots, E_s$ care sînt două cîte două fără puncte interioare comune, atunci $\mathrm{m}E = \mathrm{m}E_1 + \ldots + \mathrm{m}E_s$.

9.27. Pentru un pavaj n-dimensional (9.24 b) se poate indica o clasă simplă dar suficient de largă de submulțimi jordaniene. Anume, orice mulțime mărginită a cărei frontieră este o reuniune finită de suprafețe de ecuații de forma :

$$x_j = \varphi_j(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n),$$

unde φ_j este o funcție continuă (de punctul $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$) ce parcurge un domeniu în spațiul $(n-1)$-dimensional), este jordaniană. În particular, orice poliedru (mulțime limitată de un număr finit de plane) este o mulțime jordaniană.

După cum am spus deja în 3.16 c, două mulțimi G și F în spațiul euclidian n-dimensional $\mathbb{R}_n$ sînt numite *geometric egale* (*congruente*), dacă există o transformare izometrică a spațiului $\mathbb{R}_n$ în el însuși, care transformă mulțimea F în mulțimea G. Se poate demonstra că *mulțimile jordaniene geometric egale au volume egale.* Aceasta are loc, în particular, cînd G se obține din F printr-o translație (3.16 b), o simetrie în raport cu un plan oarecare (3.16 a), o rotație (5.75). Apoi, *dacă o mulțime jordaniană G se obține dintr-o mulțime jordaniană F printr-o omotetie de raport λ după o direcție* (2.67), *atunci* $\mathrm{m}G = \lambda\, \mathrm{m}F$. Dacă o mulțime jordaniană G se obține dintr-o mulțime jordaniană F printr-o omotetie de raport λ_1 în lungul axei x_1, o omotetie de raport λ_2 în lungul axei $x_2, \ldots$, o omotetie de raport λ_n în lungul axei x_n, atunci $\mathrm{m}G = \lambda_1 \ldots \lambda_n \cdot \mathrm{m}F$. În sfîrșit, *dacă G se obține din F printr-o omotetie după toate direcțiile de același raport λ, atunci* $\mathrm{m}G = \lambda^n\, \mathrm{m}F$.

În plan ($n = 2$), figura descrisă în 9.21, adică trapezul curbiliniu limitat de curbele $x = a$, $x = b$, $y = f(x) \geqslant 0$, este o mulțime jordaniană, cu condiția ca funcția f să fie continuă și, conform teoremei generale 9.26, ea are un volum (pe care trebuie, în mod natural, să îl numim *arie*, pentru $n = 2$). În virtutea proprietăților volumului semnalate în 9.26, el este cuprins între volumele figurilor elementare descrise în 9.21, deci este egal cu expresia ce a fost dată acolo, adică cu integrala Riemann a funcției f pe intervalul $[a, b]$.

Acestea fiind zise, aria unei figuri compuse dintr-un număr finit de trapeze curbilinii (sau de figuri geometric egale cu astfel de trapeze) (fig. 9.4) poate și ea de asemenea să fie exprimată prin integrale Riemann.

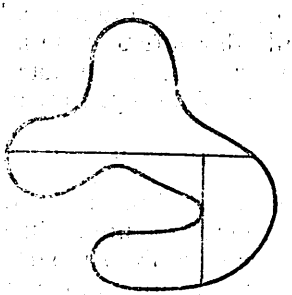


Fig. 9.4.

Astfel, teoria măsurii ariilor în plan se reduce într-o mare măsură la calculul integralelor Riemann. Totuși, această teorie nu poate răspunde la toate întrebările naturale; în particular, ea nu garantează existența volumului decît pentru reuniuni finite de mulțimi ce au volum. O teorie mai generală, cea a lui Lebesgue, care admite și reuniuni numărabile, este mai complicată [40].

9.28. *Lungimea unui arc de curbă.* Din geometria elementară se cunoaște noțiunea de lungime a unui segment de dreaptă și a unei linii poligonale compusă din segmente. Lungimea unui arc de cerc este acolo definită ca limita lungimilor liniilor poligonale înscrise și circumscrise. Fără a insista asupra preciziei acestei definiții, vom formula o definiție analoagă pentru un arc de curbă L oarecare pe care îl presupunem dat de o funcție $y = f(x)$ pe un interval $[a, b]$. Fie o partiție $\Pi = [a = x_0 \leqslant \xi_0 \leqslant x_1 \leqslant \xi_1 \leqslant$

$\leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{n-1} \leqslant \xi_{n-1} \leqslant x_n = b]$ ale cărei puncte marcate $\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}$ nu sînt fixate pentru moment. Construim o linie poligonală L_Π cu vîrfurile $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$, unde $y_k = f(x_k)$. Această linie este înscrisă în curba L (fig. 9.5). Lungimea $s(L_\Pi)$ a liniei L_Π poate fi găsită după formula ($\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$)

$$s(L_\Pi) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}.$$

Presupunem că funcția f are derivata f'.

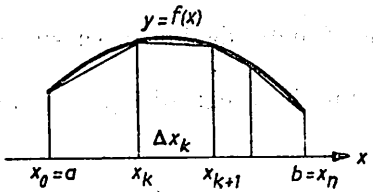


Fig. 9.5.

Aplicînd atunci teorema lui Lagrange 7.44, se poate alege un punct $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$ astfel încît să avem :

$$\sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\, \Delta x_k = \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2}\, \Delta x_k.$$

Expresia lungimii lui L_Π se pune atunci sub forma

$$s(L_\Pi) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2}\, \Delta x_k. \qquad (1)$$

Aceasta este suma integrală pentru funcția $g(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$, construită pentru partiția Π cu punctele marcate $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$. Dacă funcția g este integrabilă, sumele (1) tind, pentru o rafinare nelimitată a partiției Π, către limita :

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx;$$

se ajunge astfel la următoarea definiție a lungimii $s(L)$ a arcului L :

$$s(L) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

9.29. Din punct de vedere al calculului numeric, definiția directă dată 9.13 nu este singurul mod de calcul al integralei și există mijloace mai eficiente care vor fi expuse în paragrafele 9.4 și 9.5.

Paragraful următor 9.3 are un caracter preliminar; rezultatele care se obțin aici sînt, de altfel, importante prin ele însele.

§ 9.3. Integrala ca funcție de limita sa superioară

9.31. Fie f o funcție integrabilă pe un interval $[a, b]$. Integrala

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

(am notat variabila sub semnul integrală prin t pentru a evita confuzia cu limita superioară x) este o funcție de numărul x, iar aceasta poate lua orice valoare între a și b. Datorită majorării

$$|F(x') - F(x'')| = \left|\int_{x'}^{x''} f(t)\, dt\right| \leqslant \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \cdot (x'' - x')$$

funcția $F(x)$ este continuă.

Vom încerca să găsim derivata acestei funcții într-un punct oarecare $x = c$. Conform proprietății 9.18(2), avem

$$\frac{F(c+h) - F(c)}{h} = \frac{1}{h}\left\{\int_a^{c+h} f(t)\, dt - \int_a^c f(t)\, dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(t)\, dt. \qquad (1)$$

Valoarea obținută este media funcției f pe intervalul $[c, c+h]$ (dacă $h<0$, se pune prin convenție $[c, c+h]=\{x \mid c+h \leqslant x \leqslant c\}$. Punem $m_h=\inf_{x\in[c,c+h]} f(x)$, $M_h=\sup_{x\in[c,c+h]} f(x)$; atunci, conform inegalității 9.15(7) (vezi, de asemenea, 9.18(3)), avem:

$$m_h \leqslant \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(t)\,dt = \frac{F(c+h)-F(c)}{h} \leqslant M_h.$$

Dacă funcția f este continuă la dreapta în $x=0$, atunci, pentru $h \searrow 0$, au loc relațiile $m_h \to f(c)$ și $M_h \to f(c)$. Astfel, limita expresiei (1) există și este egală cu $f(c)$. Aceasta spune că funcția $F(x)$ are în punctul $x=c$ derivată la dreapta egală cu $f(c)$. În mod analog, dacă f este continuă la stînga în $x=c$, expresia (1) are limita $f(c)$ pentru $h \nearrow 0$. În particular, în orice punct $x=c$ de continuitate al funcției f, funcția F are derivată, care este egală cu $f(c)$. Pentru $x=a$ și $x=b$, funcția $F(x)$, presupunînd mereu continuitatea la dreapta, respectiv la stînga a funcției f în aceste puncte, are derivată la stînga în $x=b$ și derivată la dreapta în $x=a$, care sînt egale respectiv cu $f(b)$ și $f(a)$.

9.32. *Calculul integralelor cu ajutorul primitivelor.* Fie $y=f(x)$ o funcție continuă pe porțiuni pe intervalul $[a, b]$. Orice funcție G continuă, definită pe intervalul $[a, b]$ și avînd, în orice punct de continuitate x al funcției f, derivată care este egală cu $f(x)$, se numește *primitivă* a lui f pe $[a, b]$. Astfel, funcția x^n este o primitivă a funcției nx^{n-1}. Pentru orice funcție f continuă pe porțiuni, am construit o primitivă în 9.31:

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt.$$

Dacă $G(x)$ este o primitivă a lui f, orice funcție $G_1(x)=G(x)+C$ este și ea o primitivă; de aici rezultă că funcția f are o infinitate de primitive care nu diferă una de alta decît printr-o constantă. Reciproc, orice primitivă H a funcției f are forma $G+C$, unde G este o primitivă

fixată. Într-adevăr, în orice punct x de continuitate al funcției f, avem $(H(x) - G(x))' = f(x) - f(x) = 0$. Deci, $H - G$ este o constantă pe orice interval de continuitate al lui f (7.45 c); $H - G$ fiind continuă pe orice $[a, b]$ la fel ca și H și G, rezultă $H - G$ constantă pe $[a, b]$.

Faptul semnalat stă la baza unei metode de calcul a integralelor cu ajutorul primitivelor. Presupunem că știm o primitivă G a funcției f; atunci orice altă primitivă, în particular F, diferă de G printr-o constantă, adică

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = G(x) + C. \tag{2}$$

Pentru a găsi constanta C, punem $x = a$; atunci, evident, $F(a) = 0$, deci $C = -G(a)$. Punînd $x = b$ în (2) se găsește

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a). \tag{3}$$

Astfel, *pentru a calcula integrala unei funcții* f (continuă pe porțiuni) *pe un interval* $[a, b]$ *trebuie să găsim o primitivă oarecare* G *a funcției* f *și să formăm diferența* $G(b) - G(a)$.

Formula (3), *datorată lui Newton și Leibniz*, este una din cele mai importante formule ale analizei, care leagă calculul diferențial de calculul integral.

Mulțimea tuturor funcțiilor primitive ale lui f formează *integrala nedefinită* a funcției f și este notată prin

$$\int f(x)\,dx$$

(fără indicarea limitelor); din contră integrala 9.13 se numește *integrală definită*.

Egalitatea (3) este scrisă și astfel

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(x)\Big|_{x=a}^{x=} = G(x)\Big|_a^b;$$

notația din membrul al doilea și al treilea arată că trebuie să punem $x = b$, apoi $x = a$ în G și să scădem numărul al doilea din primul.

Astfel,

$$\int_0^b nx^{n-1}\,dx = x^n\Big|_0^b = b^n.$$

Acest rezultat admite următoarea interpretare geometrică : aria figurii limitată de arcul AC al parabolei de grad $(n-1)$, $y = x^{n-1}$, segmentul AB al axei, de abscise $0 \leqslant x \leqslant b$ și ordonata BC în punctul $x = b$, este $\frac{1}{n}$ din aria dreptunghiului $ABCD$ (fig. 9.6).

9.33. d *și* $\int$ *ca operații inverse.* Fie f o funcție continuă pe un interval $[a, b]$ și F una din primitivele sale, adică $F' = f$. Considerăm expresiile $d\int f(x)\,dx$ și $\int dF(x)$.

Conform definiției integralei nedefinite, avem

$$d\int f(x)\,dx = d\,[F(x) + C] = F'(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

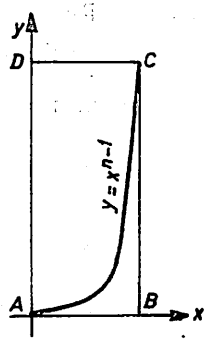


Fig. 9.6.

Astfel, în combinația d $\int$ simbolurile d și $\int$ se reduc. Dar, conform definiției diferențialei și integralei nedefinite, avem

$$\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = F(x) + C.$$

Astfel, în combinația $\int \mathrm{d}$, simbolurile $\int$ și d se reduc, dar trebuie să adăugăm o constantă la F.

9.34. *Proprietățile principale ale integralei nedefinite.* Aplicînd operația $\int$ la regulile cunoscute ale derivării 7.33—7.34 și folosind rezultatul 9.33, se pot obține regulile corespunzătoare pentru integrala nedefinită. Este vorba de următoarele reguli de derivare:

$$\mathrm{d}(ku) = k\,\mathrm{d}u \quad (k - \text{constantă}); \tag{1}$$

$$\mathrm{d}(u + v) = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v; \tag{2}$$

$$\mathrm{d}(uv) = u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u. \tag{3}$$

Dacă $u = u(t)$, atunci

$$\mathrm{d}F(u) = F'(u)\,\mathrm{d}u = F'(u)\,u'(t)\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

(derivarea unei funcții compuse).

9.35. Aplicînd operația $\int$ egalității 9.34(1) citită de la dreapta la stînga, se găsește, pentru $k \neq 0$:

$$\int k\,\mathrm{d}u = \int \mathrm{d}(ku) = ku + C = k(u + C_1) = k\int \mathrm{d}u \tag{1}$$

(deci „un factor constant poate fi scos în fața integralei nedefinite").

9.36. Aplicînd operația $\int$ egalității 9.34 (2) se obține:

$$\int(\mathrm{d}u + \mathrm{d}v) = \int \mathrm{d}(u + v) = u + v + C = \int \mathrm{d}u + \int \mathrm{d}v \tag{1}$$

(„integrala nedefinită a sumei este egală cu suma integralelor nedefinite").

9.37. Aplicînd operația $\int$ relației 9.34(3) și folosind

9.36(1), se obține:

$$\int(u\,dv + v\,du) = \int u\,dv + \int v\,du = \int d(uv) = u \cdot v + C.$$

Pusă sub forma

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du, \tag{1}$$

(C este inclus în a doua integrală), această egalitate se numește *formula de integrare prin părți*. Ea permite calculul integralei nedefinite $\int u\,dv$, dacă este cunoscută $\int v\,du$.

9.38. Formula 9.34 (4) va fi utilizată în modul următor. Fie $u = u(t)$ o funcție cu derivata continuă, definită pe un interval $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ cu valori într-un interval $A \leqslant u \leqslant B$; fie apoi $f(u)$ o funcție continuă, definită pe $A \leqslant u \leqslant B$. Considerăm următoarele două integrale nedefinite:

$$F(u) = \int f(u)\,du \text{ și } G(t) = \int f(u(t))\,u'(t)\,dt.$$

Prima este o funcție de u definită pe $[A, B]$, a doua o funcție de t definită pe $[\alpha, \beta]$. Vom arăta că pentru $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ are loc egalitatea

$$F[u(t)] = G(t) + C. \tag{1}$$

Este suficient să arătăm că diferențialele primului și celui de al doilea membru sînt identice. Conform formulei 9.34(4), avem:

$$dF[u(t)] = F'(u)\,u'(t)\,dt = f(u(t)) \cdot u'(t)\,dt,$$

și conform definiției integralei nedefinite:

$$dG(t) = f(u(t)) \cdot u'(t)\,dt.$$

De aici rezultă egalitatea (1) care permite să formulăm regula de integrare prin schimbare de variabilă: *într-o integrală nedefinită* $\int f(u)\,du$ *se poate înlocui* u *printr-o*

funcție de t înlocuind în același timp du prin $u'(t)\,dt$, *conform regulei de transformare a diferențialelor*. Cu alte cuvinte, *proprietatea de invarianță a unei diferențiale se extinde la diferențialele care se găsesc sub semnul de integrală nedefinită*.

În cele ce urmează, vom aplica aceste reguli la numeroase exemple.

9.39. În încheierea acestui paragraf, vom demonstra o propoziție simplă dar importantă, care este reciproca teoremei 9.31.

O funcție F se numește *netedă pe porțiuni* pe un interval $[a, b]$ dacă ea este continuă pe $[a, b]$ și are, peste tot cu excepția unui număr finit de puncte, derivată care este continuă pe porțiuni pe $[a, b]$. De fapt, în 9.31 am stabilit că integrala

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

a unei funcții f continuă pe porțiuni este o funcție netedă pe porțiuni. Reciproc, fie G o funcție netedă pe porțiuni și f derivata sa continuă pe porțiuni. Deoarece G este o primitivă a lui f (9.32), are loc egalitatea 9.32 (2):

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt + G(a).$$

Deci, orice funcție G netedă pe porțiuni este, pînă la o constantă aditivă, integrala unei funcții continue pe porțiuni, cu x limita superioară.

§ 9.4. Calculul integralelor nedefinite

9.41. *Integrarea polinoamelor.*

a. Aplicînd operația $\int$ formulei

$$d(x^n) = nx^{n-1}\,dx \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

se obține, după ce înlocuim $n-1$ prin m și împărțind prin $n=m+1$:

$$\int x^m \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \quad (m=0, 1, 2, \ldots),$$

unde C este o constantă arbitrară.

De aici, după regulile 9.35—9.36, rezultă că pentru orice polinom $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, avem

$$\int P(x) \, dx = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \ldots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C. \qquad (1)$$

b. În anumite cazuri este mai economic să se folosească alte reguli. De exemplu, pentru a calcula integrala

$$\int x(x^2+1)^{500} \, dx$$

nu este comod să dezvoltăm binomul $(x^2+1)^{500}$ după formula lui Newton și să aplicăm apoi formula generală (1); este mai bine să facem substituția $u = x^2 + 1$ și să folosim regula 9.38 care permite un calcul imediat:

$$\int x(x^2+1)^{500} \, dx = \int u^{500} \frac{1}{2} \, du =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{501}}{501} + C = \frac{1}{1002}(x^2+1)^{501} + C.$$

În cazul integralei

$$\int x^3(x^2+1)^{500} \, dx$$

se impune folosirea regulei de integrare prin părți 9.37. Se pune $u = x^2$, $dv = x(x^2+1)^{500} \, dx$; atunci, la fel ca în exemplul precedent, $v = \frac{1}{1002}(x^2+1)^{501}$, $du = 2x \, dx$

şi, prin urmare,

$$\int x^3(x^2+1)^{500}\,dx = uv - \int v\,du =$$

$$= \frac{x^2}{1002}(x^2+1)^{501} - \int \frac{(x^2+1)^{501}\cdot 2x\,dx}{1002} =$$

$$= \frac{x^2(x^2+1)^{501}}{1002} - \frac{(x^2+1)^{502}}{1002\cdot 502} + C.$$

9.42. *Integrarea funcţiilor raţionale.* Se cere să se integreze funcţia de forma $f(x)=\frac{R(x)}{Q(x)}$, $R(x)$ şi $Q(x)$ fiind polinoame cu coeficienţi reali.

a. Dacă gradul numărătorului este cel puţin egal cu cel al numitorului, atunci efectuînd împărţirea, se poate pune $f(x)$ sub forma:

$$f(x) = P(x) + \frac{S(x)}{Q(x)},$$

unde gradul lui S este inferior celui lui Q. Ştim deja (9.41) cum să integrăm polinomul $P(x)$, ne ocupăm deci de fracţia raţională $\frac{S(x)}{Q(x)}$, unde $\operatorname{gr} S < \operatorname{gr} Q$.

b. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_k$ rădăcinile reale ale polinomului $Q(x)$, $z_1, \bar{z}_1, \ldots, z_m, \bar{z}_m$ rădăcinile complexe nereale (în plus, pentru orice rădăcină $z = \alpha + i\beta$, numărul complex conjugat $\bar{z} = \alpha - i\beta$ este, conform 5.89 a, de asemenea rădăcină de aceeaşi multiplicitate).

În virtutea lui 5.89 c, funcţia raţională $\frac{S(x)}{Q(x)}$ poate fi descompusă în fracţii raţionale simple:

$$\frac{S(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x-x_1} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1r_1}}{(x-x_1)^{r_1}} +$$

$$+ \frac{A_{21}}{x-x_2} + \ldots + \frac{B_{11}+C_{11}x}{(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{B_{1q_1}+C_{1q_1}x}{[(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2]^{q_1}} + \ldots + \frac{B_{m1}+C_{m1}x}{(x-\alpha_m)^2+\beta_m^2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{B_{mq_m}+C_{mq_m}x}{[(x-\alpha_m)^2+\beta_m^2]^{q_m}}$$

și problema se reduce la integrarea acestor fracții raționale simple.

c. Pentru $p \neq 1$, integrala

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x - x_j)^p}$$

poate fi aflată plecînd de la egalitatea :

$$\mathrm{d}(x - x_j)^{1-p} = (1 - p)(x - x_j)^{-p}\,\mathrm{d}x :$$

integrînd cei doi membri, se obține

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x - x_j)^p} = \frac{1}{1 - p}(x - x_j)^{1-p} + C =$$

$$= \frac{1}{(1 - p)(x - x_j)^{p-1}} + C. \qquad (1)$$

d. Pentru $p = 1$, folosim egalitatea 7.17(3) care, după înmulțire cu $\mathrm{d}x$, dă

$$\mathrm{d}(\ln |x - x_j|) = \frac{\mathrm{d}x}{x - x_j};$$

de unde

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x - x_j} = \ln |x - x_j| + C. \qquad (2)$$

Observăm că formulele (1), (2) au loc în intervalul $[a, b]$ care nu conține punctul x_j (altfel, funcția de sub ntegrală nu va fi continuă pe porțiuni și 9.32 nu s-ar aplica).

e. Integrala

$$\int \frac{Ax + B}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^m}\,\mathrm{d}x$$

se reduce, prin substituția $x - \alpha = \beta u$, la o formă mai simplă :

$$\int \frac{Cu + D}{(u^2 + 1)^m}\,\mathrm{d}u$$

Dacă $D = 0$, punînd $u^2 + 1 = v$, sîntem conduşi la rezultatul final :

$$\int \frac{Cu}{(u^2+1)^m}\,du = \frac{C}{2}\int \frac{dv}{v^m} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{C}{2(1-m)v^{m-1}} + C_1 = \dfrac{C}{2(1-m)(u^2+1)^{m-1}} + C_1, & m > 1; \\ \dfrac{C}{2}\ln|v| + C_1 = \dfrac{C}{2}\ln(u^2+1) + C_1, & m = 1. \end{cases}$$

f. Rămîne integrala

$$I_m = \int \frac{du}{(u^2+1)^m}. \qquad (3)$$

Dacă $m = 1$, atunci

$$\int \frac{du}{u^2+1} = \operatorname{arctg} u,$$

care decurge din formula de derivare 7.18 f. Fie $m > 1$. Aplicăm lui (3), formula de integrare prin părţi, punînd $\frac{1}{(u^2+1)^m} = v$, şi deci $dv = -\frac{2mu\,du}{(u^2+1)^{m+1}}$. Obţinem

$$I_m = \int \frac{du}{(u^2+1)^m} = \frac{u}{(u^2+1)^m} + 2m\int \frac{u \cdot u\,du}{(u^2+1)^{m+1}} =$$

$$= \frac{u}{(u^2+1)^m} + 2m\left\{\int \frac{(u^2+1)\,du}{(u^2+1)^{m+1}} - \int \frac{du}{(u^2+1)^{m+1}}\right\} =$$

$$= \frac{u}{(u^2+1)^m} + 2m\,(I_m - I_{m+1}),$$

de unde

$$I_{m+1} = \frac{1}{2m}\cdot\frac{u}{(u^2+1)^m} + \frac{2m-1}{2m}\,I_m.$$

Această formulă exprimă I_{m+1} în funcţie de I_m şi o funcţie raţională. Folosind-o pentru $m = 1$, se găseşte $I_2 = \int \frac{du}{(u^2+1)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{u}{(u^2+1)^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} u + C$. Punînd $m = 2$, se găseşte valoarea lui I_3 etc.

În concluzie, *orice funcție rațională are o integrală nedefinită care se exprimă prin funcții raționale, logaritmi și arctangente.*

În practică, există numeroase procedee auxiliare de integrare a funcțiilor raționale, pe care nu le expunem și trimitem de exemplu la [13].

9.43. *Integrale care se reduc la integrale din funcții raționale.* Anumite tipuri de integrale se reduc la integrale din funcții raționale (sau, cum se mai spune, se raționalizează) prin anumite substituții standard. În cele ce urmează, R desemnează o funcție rațională de una sau două variabile.

a. Integrala

$$\int R(e^x)\,dx$$

devine rațională prin substituția $e^x = u$, $x = \ln u$, $dx = \dfrac{du}{u}$.

. Integrala

$$\int R(\operatorname{tg} x)\,dx$$

devine rațională prin substituția $\operatorname{tg} x = u$, $x = \operatorname{arctg} u$, $dx = \dfrac{du}{1+x^2}$. În particular,

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\,;\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x\,;$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x\,;$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x = 2\operatorname{tg} x \cos^2 x,$$

sînt funcții raționale de $\operatorname{tg} x$. În consecință, integrala

$$\int R(\sin 2x, \cos 2x)\,dx$$

devine rațională și ea prin substituția $\operatorname{tg} x = u$.

Se observă că sin x, cos x nu sînt funcţii raţionale de tg x (într-adevăr, tg x are π ca perioadă, iar sin x şi cos x sînt periodice de perioadă 2π). Dar ele sînt raţionale în $u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}};$$

deci ţinînd cont că $\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}u}{1 + u^2}$, integrala

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$$

devine raţională cu ajutorul substituţiei $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = u$.

9.44. *Integrale din funcţii iraţionale.* Considerăm integrala

$$\int R(x, y)\,\mathrm{d}x,$$

unde y este o funcţie de x. Dacă x şi y se pot exprima raţional în aceeaşi variabilă t, adică $x = x(t)$, $y = y(t)$ atunci raţionalizarea integralei (1) este imediată :

$$\int R(x, y)\,\mathrm{d}x = \int R(x(t), y(t))x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

a. Fie, de exemplu, $y = \sqrt{ax + b}$; se poate atunci alege substituţia $ax + b = t^2$, $x = \frac{1}{a}(t^2 - b)$, $y = t$:

$$\int R(x, \sqrt{ax + b})\,\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{1}{a}(t^2 - b), t\right)\frac{2t\,\mathrm{d}t}{a}.$$

b. În cazul cînd $y = \sqrt{\frac{ax + b}{cx + d}}$, se aplică acelaşi

procedeu :

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^2,\ y = t,\ x = \frac{t^2 d - b}{a - ct^2}.$$

c. Dar pentru $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, substituția $ax^2 + bx + c = t^2$ nu mai este convenabilă, deoarece în acest mod x nu este funcție rațională de t. Aici vom proceda astfel. Separînd sub radical un pătrat perfect $(x - \alpha)^2$ și înlocuind $(x - \alpha)$ prin βu cu β convenabil ales, se pune rădăcina pătrată sub una din următoarele forme :

$$y_1 = \sqrt{1 - u^2},\ y_2 = \sqrt{1 + u^2},\ y_3 = \sqrt{u^2 - 1}.$$

d. În primul caz, substituția $u = \sin \varphi$ (sau $u = \cos \varphi$) reduce integrala (1) la o formă deja studiată (9.43) :

$$\int R(u, \sqrt{1 - u^2})\, du = \int R(\sin \varphi, \cos \varphi) \cos \varphi\, d\varphi.$$

Exemple:

$$\frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \int \frac{\cos \varphi\, d\varphi}{\cos \varphi} = \int d\varphi = \varphi = \arcsin u + C \quad (2)$$

(substituția $u = \sin \varphi$) ;

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = -\int \frac{\sin \theta\, d\theta}{-\sin \theta} = \int d\theta = \theta = \arccos u + C$$

(substituția $u = \cos \theta$).

[În acest caz, domeniul de definiție al funcției $\cos \theta$ este intervalul $[-\pi, 0]$. Avem $+\sqrt{1 - u^2} = -\sin \theta$ și folosim funcția inversă crescătoare $\arccos_c u$ (5.67). Cu funcția descrescătoare $\arccos_d u$ se ajunge la formula

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = -\arccos_d u + C].$$

Faptul că rezultatele obținute prin substituțiile diferite se deosebesc între ele nu trebuie să ne îngrijoreze : conform teoriei generale, rezultatul este definit pînă la o constantă aditivă și vedem, într-adevăr, că

$$\arccos u + \frac{\pi}{2} = \arcsin u$$

conform 5.67 (1).

e. Pentru $y_2 = \sqrt{1 + u^2}$, substituția hiperbolică $u = \text{sh}\,\theta$, $1 + u^2 = 1 + \text{sh}^2\,\theta = \text{ch}^2\,\theta$ joacă un rol analog, adică

$$\int R(u, \sqrt{1+u^2})\,du = \int R(\text{sh}\,\theta, \text{ch}\,\theta)\,\text{ch}\,\theta\,d\theta.$$

Exemplu :

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{\text{ch}\,\theta\,d\theta}{\text{ch}\,\theta} = \int d\theta = \theta = \text{argsh}\,u + C. \tag{4}$$

(substituția $u = \text{sh}\,\theta$).

Funcția argsh u (fig. 9.7) este inversa lui sh θ. Această funcție se poate exprima prin funcții pe care le-am studiat, rezolvînd ecuația

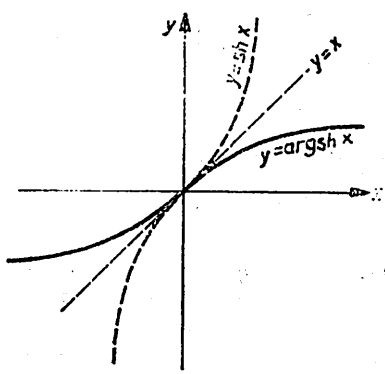


Fig. 9.7

$$u = \text{sh}\,\theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{\theta} - \frac{1}{e^{\theta}}\right),$$

în raport cu θ. Avem atunci $e^{\theta} = u + \sqrt{1 + u^2}$ (semnul $-$ nu se consideră deoarece $e^{\theta} > 0$), de unde

$$\theta = \text{argsh}\,u = \ln(u + \sqrt{1 + u^2}).$$

f. În sfîrșit, pentru $y_3 = \sqrt{u^2 - 1}$, vom recurge la substituția hiperbolică $u = \operatorname{ch} \theta$, $u^2 - 1 = \operatorname{ch}^2 \theta - 1 = \operatorname{sh}^2 \theta$, adică

$$\int R(u, \sqrt{u^2 - 1})\, du = \int R(\operatorname{ch} \theta, \operatorname{sh} \theta) \operatorname{sh} \theta\, d\theta.$$

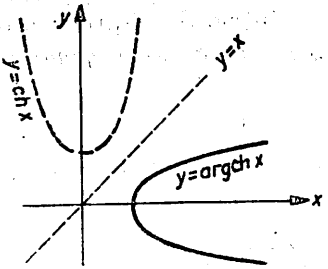


Fig. 9.8

Exemple:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \int \frac{\operatorname{sh} \theta\, d\theta}{\operatorname{sh} \theta} = \int d\theta = \theta = \operatorname{argch} u = C \qquad (5)$$

(substituția $u = \operatorname{ch} \theta$).

Funcția argch u (fig. 9.8) este inversa lui ch θ. O putem explicita într-un mod analog rezolvînd ecuația

$$u = \operatorname{ch} \theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{\theta} + \frac{1}{e^{\theta}}\right)$$

în raport cu θ. Avem $e^{\theta} = u \pm \sqrt{u^2 - 1}$ (convin ambele semne), de unde

$$\theta = \operatorname{argch} u = \ln (u \pm \sqrt{u^2 - 1}).$$

Graficele funcțiilor $u = \operatorname{argsh} \theta$, $u = \operatorname{argch} \theta$ se obțin în mod obișnuit, adică sînt simetricele graficelor funcțiilor $u = \operatorname{sh} \theta$ și $u = \operatorname{ch} \theta$ respectiv, în raport cu bisectoarea întîi (5.39).

9.45. *Integrale eliptice.* În cazul cînd un polinom $P(x)$ este de grad $n > 2$, integrala

$$\int R(x, \sqrt{P(x)})\, dx, \qquad (1)$$

nu se exprimă în general prin funcţii elementare (adică cele care se obţin aplicînd argumentului x operaţiile algebrice (adunare, scădere, înmulţire, împărţire) în număr finit, cît şi funcţiile logaritmice, trigonometrice şi inversele lor). (Aceasta este teorema Abel-Liuoville; o demonstraţie a ei se găseşte în [8] sau [9]). Pentru $n = 3$ şi $n = 4$, integrala (1) este numită *eliptică*, pentru $n > 4$ *hiperelip-tică*. Există două integrale eliptice importante (*prima şi a doua formă normală a lui Legendre*):

$$\left.\begin{aligned} F(k, \varphi) &= \int_0^{\sin\varphi} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \underset{(t=\sin\theta)}{=} \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}, \\ E(k, \varphi) &= \int_0^{\sin\varphi} \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\, dt \underset{(t=\sin\theta)}{=} \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\, d\theta, \end{aligned}\right\}$$

$$0 \leqslant k \leqslant 1.$$

Pentru $k = 0$ cele două integrale reprezintă aceeaşi funcţie:

$$F(0, \varphi) = \int_0^{\varphi} d\theta = \varphi, \quad E(0, \varphi) = \int_0^{\varphi} d\varphi = \varphi.$$

Pentru $k = 1$ cele două integrale se exprimă prin funcţii elementare:

$$F(1, \varphi) = \int_0^{\sin\varphi} \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t}\Big|_0^{\sin\varphi} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi};$$

$$E(1, \varphi) = \int_0^{\sin\varphi} dt = t\Big|_0^{\sin\varphi} = \sin\varphi.$$

Tabelele cu funcţiile $F(k, \varphi)$ şi $E(k, \varphi)$ sînt cu dublă intrare (pentru valorile variabilei φ şi ale parametrului $k = \sin\alpha$). Dăm mai jos o tabelă prescurtată a valorilor

acestor funcţii :

φ \ α	$E(k,\varphi)$					$F(k,\varphi)$			
	90°	60°	45°	30°	0°	30°	45°	60°	90°
0°	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30°	0,50	0,51	0,51	0,52	0,52 = $\frac{\pi}{6}$	0,53	0,54	0,54	0,55
45°	0,71	0,73	0,75	0,77	0,78 = $\frac{\pi}{4}$	0,80	0,82	0,85	0,88
60°	0,87	0,92	0,96	1,01	1,05 = $\frac{\pi}{3}$	1,09	1,14	1,21	1,32
90°	1	1,21	1,35	1,48	1,57 = $\frac{\pi}{2}$	1,69	1,85	2,16	

Graficele din fig. 9.9 arată variaţia funcţiilor $F(k, \varphi)$ şi $E(k, \varphi)$ pentru diferite valori ale lui k.

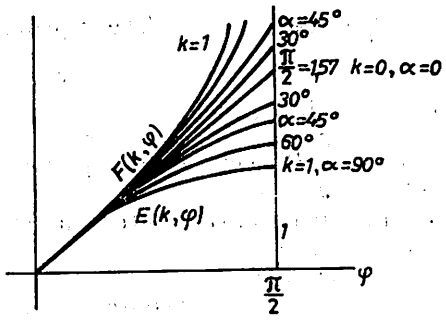


Fig. 9.9

Funcţiile eliptice apar în calculul lungimii unui arc de elipsă (9.63 c), de unde rezultă şi denumirea lor. Ele găsesc aplicaţii în numeroase probleme de analiză şi sînt studiate tot atît de mult ca şi funcţiile trigonometrice circulare.

Se poate arăta că integrala eliptică generală

$$\int R(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + ex + f})\, dx$$

se reduce prin transformări elementare la prima și a doua formă normală Legendre, la funcții elementare și, eventual, la „forma normală de a treia speță" cu doi parametri h și k:

$$\int \frac{d\varphi}{(1 + \sin^2 \varphi)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

(conform [13]).

9.46. *Alte tipuri de integrale.*

a. Fie un polinom $P(x)$. Integrala

$$\int P(x)\, e^x\, dx$$

este o combinație liniară de integrale de forma

$$I_m = \int x^m e^x\, dx.$$

Integrala I_m se reduce prin integrare prin părți ($u = x^m$, $e^x\, dx = dv$; $du = mx^{m-1}\, dx$, $v = e^x$) la forma

$$I_m = e^x x^m - m \int x^{m-1} e^x\, dx = e^x x^m - m I_{m-1}$$

și deoarece $I_0 = \int e^x\, dx = e^x + C$, se exprimă prin funcții elementare.

b. La fel pentru integralele

$$\int P(x) \ln x\, dx, \quad \int P(x) \cos x\, dx, \quad \int P(x) \sin x\, dx.$$

c. Din contră, următoarele integrale nu se exprimă prin funcții elementare:

$$\int \frac{e^x}{x}\, dx \underset{(e^x = u)}{=} \int \frac{du}{\ln u} \quad (\textit{logaritmul integral});$$

$$\int \frac{\sin x}{x}\, dx \quad (\textit{sinus integral});$$

$$\int \frac{\cos x}{x}\, dx \quad (\textit{cosinus integral}).$$

Demonstrațiile ultimelor propoziții se găsesc în [19].

§ 9.5. Calculul integralelor definite

9.51. *Integrarea prin părți pentru integrale definite.*
a. Fie u și v două funcții netede pe porțiuni. Deoarece uv este o primitivă a derivatei sale $uv' + vu'$, avem, conform formulei Newton-Leibniz 9.32 (2),

$$\int_a^b (uv' + vu')\,dx = \int_a^b (u\,dv + v\,du) = uv\Big|_{x=a}^{b},$$

sau

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_{x=a}^{b} - \int_a^b v\,du.$$

Această formulă este *regula de integrare prin părți* pentru o integrală definită.

b. *Exemplu.* Să calculăm integrala $I_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m x\,dx$.

Integrînd prin părți, găsim

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{m-1} x\,d(-\cos x) = -\sin^{m-1} x \cos x\Big|_0^{\pi/2} +$$

$$+ (m-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x \cdot \cos^2 x\,dx.$$

Termenul integrat se anulează; se obține deci

$$I_m = (m-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x(1 - \sin^2 x)\,dx = (m-1)I_{m-2} -$$

$$-(m-1)I_m,$$

de unde

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}.$$

Deoarece $I_0 = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$, avem pentru $m = 2n$:

$$I_{2n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, \mathrm{d}x = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}. \qquad (1)$$

Deoarece $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \, \mathrm{d}x = 1$, avem pentru $m = 2n+1$:

$$I_{2n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, \mathrm{d}x = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{1} \cdot 1 =$$

$$= \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}. \qquad (2)$$

9.52.a. *Formula lui Taylor cu rest sub formă integrală.* Considerăm mai întîi integrala

$$\int f(x) \, (b-x)^n \, \mathrm{d}x.$$

Considerînd funcţia f netedă pe porţiuni, aplicăm integrarea prin părţi:

$$\int_a^b f(x) \, (b-x)^n \, \mathrm{d}x = -f(x) \, \frac{(b-x)^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b + \int_a^b f'(x) \, \frac{(b-x)^{n+1}}{n+1} \, \mathrm{d}x =$$

$$= f(a) \, \frac{(b-a)^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1} \int_a^b f'(x)(b-x)^{n+1} \, \mathrm{d}x. \qquad (1)$$

Folosind egalitatea (1) pentru funcția $f(x)$ care are pe intervalul $[a, b]$ derivatele continue, incluzînd și pe cea de a n-a, și cea de a $(n+1)$-a continuă pe porțiuni, obținem succesiv

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx = f'(a)(b-a) +$$

$$+\int_a^b f''(x)(b-x)\,dx = f'(a)(b-a) + \frac{1}{2}f''(a)(b-a)^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b f'''(x)(b-x)^2\,dx = \ldots = f'(a)(b-a) +$$

$$+\frac{1}{2}f''(a)(b-a)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(b-a)^n +$$

$$+\frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n\,dx.$$

Din formula lui Taylor, rezultă

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{1\cdot 2}(b-a)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + R_n, \tag{2}$$

unde

$$R_n = \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n\,dx \tag{3}$$

este *restul sub formă integrală Cauchy.*

b. Plecînd de la inegalitățile:

$$R_n \leqslant \frac{1}{n!}\max f^{(n+1)}(x)\cdot\int_a^b (b-x)^n\,dx =$$

$$= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\max f^{(n+1)}(x),$$

$$R_n \geqslant \frac{1}{n!} \min f^{(n+1)}(x) \cdot \int_a^b (b+x)^n \, dx =$$

$$= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \min_I f^{(n+1)}(x)$$

putem pune de asemenea restul sub formă Lagrange (8.23(2))

$$R_n = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

presupunînd că funcţia $f^{(n+1)}$ este continuă şi că ia într-un punct c, conform (5.23), orice valoare cuprinsă între valorile ei maximă şi minimă.

c. Ca aplicaţie, considerăm problema convergenţei seriei Taylor (8.51) a funcţiei

$$f(x) = (1+x)^\alpha. \tag{4}$$

În cazul de faţă formula Taylor (2) are forma (pentru $a = 0$, $b = x$):

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!} \int_0^x (1+t)^{\alpha-n-1}(x-t)^n \, dt.$$

Dacă $|x| < 1$ şi t este cuprins între 0 şi x, avem

$$t \leqslant \frac{t}{x}, \; 1 - \frac{t}{x} = \frac{x-t}{x} \leqslant 1 - t.$$

Deoarece x şi $x - t$ au acelaşi semn,

$$\left| \frac{x-t}{x} \right| = \frac{x-t}{x} \leqslant 1 - t,$$

deci

$$\frac{|x-t|}{1-t} \leqslant |x|.$$

De aici rezultă

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^n}(1+t)^{\alpha-1}\,dt\right| \leqslant |x|^n \int_0^x (1+t)^{\alpha-1}\,dt = C|x|^n,$$

unde $C = C(x, \alpha)$. În consecință,

$$|R_n| \leqslant C\,\frac{|\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)|}{n!}\,|x|^n.$$

Notăm membrul al doilea prin ω_n. Avem

$$\frac{\omega_{n+1}}{\omega_n} = \frac{|\alpha-n-1|}{n+1}\,|x|, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\omega_{n+1}}{\omega_n} = |x|;$$

deci, dacă $|x| < 1$, ω_n tinde la 0. Astfel, restul (3) tinde la 0 dacă $|x| < 1$. În consecință, pentru $-1 < x < 1$, are loc următoarea dezvoltare:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\ldots n}x^n + \ldots \quad (5)$$

Dacă α nu este număr natural (membrul secund nu este un polinom), atunci seria din dreapta diverge pentru $|x| > 1$, (raportul dintre un termen oarecare și cel precedent este superior lui 1), deci raza de convergență a seriei (5) este egală cu 1.

Înlocuind în (5) variabila reală x prin $z = x + iy$ se obține prelungirea analitică a funcției (4) în cercul $|z| < 1$:

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}z^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\ldots n}z^n + \ldots \quad (6)$$

De exemplu, pentru $\alpha = -1$, se ajunge la formula cunoscută de sumare a unei progresii geometrice convergente (6.11 b):

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 + \ldots + (-1)^n z^n + \ldots$$

d. Se poate pune seria (6) sub forma

$$(1+z)^{\alpha}=1+(-\alpha)(-z)+\frac{(-\alpha)(1-\alpha)}{1\cdot 2}(-z)^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{(-\alpha)(1-\alpha)\ldots(n-1-\alpha)}{1\cdot 2\ldots n}(-z)^n+\ldots$$

Aplicînd rezultatele 6.66 b se obţine : dacă $1>-\alpha+1$, adică $\alpha>0$, atunci seria (6) converge pentru $-z=1$, adică pentru $z=-1$. În virtutea lui 6.67, se obţine o relaţie interesantă :

$$1-\alpha+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}-\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots=0\,; \quad (7)$$

după cum am văzut, ea este valabilă pentru toţi $\alpha>0$.

Dacă $1>-\alpha$, adică $\alpha>-1$, atunci seria (6) converge pentru $-z=-1$, adică pentru $z=1$; în acest caz, 6.67 conduce la egalitatea

$$1+\alpha+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots=2^{\alpha}, \quad (8)$$

care este valabilă pentru $\alpha>-1$.

Egalităţile (7) şi (8) extind proprietăţi cunoscute ale numerelor $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ pentru k şi n naturali, la exponenţi neîntregi :

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=2^n,$$

$$C_n^0-C_n^1+C_n^2-\ldots+(-1)^n C_n^n=0.$$

9.53. Pentru $a>b$, formula Leibniz-Newton 9.32 (3) :

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(a)-F(b) \quad (F'(x)=f(x)),$$

rămîne valabilă.

Într-adevăr, conform 9.18, avem

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx = -[F(b) - F(a)] = F(a) - F(b).$$

9.54. *Integrare prin schimbare de variabile în integrale definite.* Fie dată integrala $\int_a^b f(u)\,du$, f fiind o funcție continuă pe intervalul $[a, b]$. Fie $u(t)$ o funcție definită și cu derivata continuă pe un interval $[\alpha, \beta]$, astfel încît $u(\alpha) = a$, $u(\beta) = b$. O schimbare formală de variabilă $u = u(t)$ conduce la egalitatea

$$\int_{u=a}^{b} f(u)\,du = \int_{t=\alpha}^{\beta} f[u(t)]\,u'(t)\,dt. \qquad (1)$$

De aceea Leibniz atrage atenția împotriva înlăturării lui dx în notația integralei (adnotația de la p. 315).

Se pune problema în ce condiții este adevărată această egalitate. Creșterea funcției $u(t)$ pe intervalul $[\alpha, \beta]$ este o condiție naturală. Dar formula (1) are loc într-un caz mai general cînd funcția $u(t)$ nu este monotonă și chiar în cazul cînd valorile lui $u(t)$ pot ieși din intervalul $[a, b]$ pe care funcția f este definită, cu condiția ca funcția f să admită o prelungire continuă pe un segment mai mare $[A, B] \supset [a, b]$ în care funcția u ia valori pentru $t \in [\alpha, \beta]$. Anume, are loc următoarea teoremă:

TEOREMĂ. *Dacă funcția $u(t)$ definită și cu derivata continuă pe $[\alpha, \beta]$ ia valori în intervalul $[A, B] \supset [a, b]$ și dacă funcția f este continuă pe $[A, B]$, atunci are loc formula* (1).

Demonstrație. Fie $F(u)$ o primitivă a funcției $f(u)$ pe $[A, B]$ și $G(t)$ o primitivă a lui $f(u(t))\,u'(t)$ pe $[\alpha, \beta]$. Conform 9.38, avem

$$F(u(t)) = G(t) + C.$$

Deci

$$\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = F(b) - F(a) = F(u(\beta)) - F(u(\alpha)) =$$

$$= G(\beta) - G(\alpha) = \int_\alpha f(u(t))\,u'(t)\,\mathrm{d}t$$

și teorema este demonstrată. Egalitatea (1) exprimă *regula de schimbare de variabilă într-o integrală definită*; subliniem că limitele de integrare se schimbă o dată cu funcția de sub semnul integrală. Formula Newton-Leibniz fiind de asemenea valabilă pentru $\alpha \gtrless \beta$ (9.53), nu este exclus cazul $\alpha > \beta$. Aplicînd regula de schimbare de variabilă, nu are importanță în ce ordine sînt așezate limitele de integrare.

9.55. *Consecințe imediate și exemple.*

a. *Integrala unei funcții translatate.* Fie $f(x)$ o funcție definită pe intervalul $[a, b]$; atunci, „translatata" sa $f(x - h)$ este definită pe intervalul $[a + h, b + h]$ și avem

$$\int_{a+h}^{b+h} f(x-h)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pentru a o demonstra, este suficient să efectuăm substituția $x - h = u$.

b. Arătăm că integrala dintr-o funcție periodică $f(u)$ are aceeași valoare pe orice interval a cărui lungime este egală cu perioada T a funcției $f(u)$. Într-adevăr, găsim un număr mT (m întreg) cuprins între a și $a + T$; notăm

$$\int_a^{a+T} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^{mT} f(u)\,\mathrm{d}u + \int_{mT}^{a+T} f(u)\,\mathrm{d}u;$$

în prima integrală facem substituția $u - (m-1)\,T = t$, în a doua, $u - mT = t$; știind că $f(u) = f(u + mT) =$

$= f(u + (m-1)T)$ în virtutea periodicității funcției $f(u)$, avem

$$\int_a^{a+T} f(u)\,du = \int_{a-(m-1)T}^{T} f(t)\,dt + \int_0^{a-(m-1)T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

c. *Exemplu.* Să arătăm că, oricare ar fi un $\gamma > 0$ și un k natural, avem egalitatea

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2\gamma} kx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2\gamma} kx\,dx. \qquad (1)$$

Într-adevăr, folosind egalitatea $\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ și substituția $\frac{\pi}{2} - kx = ku$, găsim

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2\gamma} kx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2\gamma}\left(\frac{\pi}{2} - kx\right)dx = \int_{-\frac{\pi}{2k}+\pi}^{\frac{\pi}{2k}-\pi} \cos^{2\gamma} u\,du;$$

aplicînd propoziția b, obținem (1).

În cazul cînd 2γ este egal cu un întreg m, valoarea integralei (1) a fost găsită în 9.51 b. Dacă $\gamma = 1$, din egalitatea

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 kx + \cos^2 kx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot dx = 2\pi,$$

se deduce imediat valoarea integralelor

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\,dx = \pi.$$

d. Integrala unei funcții „reflectate". Are loc relația

$$\int_0^b f(x)\,dx = \int_0^b f(b-x)\,dx.$$

Într-adevăr, substituția $u = b - x$ are ca rezultat

$$\int_0^b f(b-x)\,dx = -\int_b^0 f(u)\,du = \int_0^b f(u)\,du = \int_0^b f(x)\,dx.$$

9.56. Pentru a încheia aceste considerații, studiem o noțiune generală importantă.

Integrala Stieltjes. Fie f și g două funcții într-un interval $[a, b]$. Considerăm o partiție $\Pi = \{a = x_0 < \ldots < x_n = b\}$ a intervalului $[a, b]$ cu puncte marcate $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$; apoi, ca de obicei, punem $d(\Pi) = \max (x_{j+1} - x_j)$. Se numește *suma integrală Stieltjes*, numărul

$$S_\Pi(f, g) = \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\,[g(x_{j+1}) - g(x_j)]. \qquad (1)$$

Un număr I se numește *integrala Stieltjes a unei funcții f în raport cu funcția g* pe intervalul $[a, b]$ dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un $\delta > 0$ astfel încît inegalitatea $|I - S_\Pi(f, g)| < \varepsilon$ să aibă loc pentru orice Π, cu $d(\Pi) < \delta$.

Altfel spus, integrala Stieltjes este limita sumelor integrale (1) pentru o rafinare nelimitată a partiției Π. Integrala Stieltjes este notată prin simbolul

$$\int_a^b f(x)\,dg(x). \qquad (2)$$

De exemplu, avem întotdeauna

$$\int_a^b dg(x) = g(b) - g(a).$$

Vom trece peste studiul general al integralei Stieltjes [41] și vom demonstra numai teorema de existență a acestei integrale în cel mai simplu caz, cînd f este continuă pe $[a, b]$ și g are derivata continuă. Vom vedea că integrala Stieltjes se reduce atunci la o integrală uzuală.

Funcția g fiind derivabilă, creșterea sa pe $[x_j, x_{j+1}]$ poate fi exprimată cu ajutorul teoremei lui Lagrange 7.44 :

$$\Delta g(x_j) = g(x_{j+1}) - g(x_j) = g'(c_j)\,\Delta x_j, \quad c_j \in (x_j, x_{j+1}).$$

În consecință

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\,\Delta g(x_j) = \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\,g'(c_j)\,\Delta x_j =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} f(c_j)\,g'(c_j)\,\Delta x_j + \sum_{j=0}^{n-1} [f(\xi_j) - f(c_j)]\,g'(c_j)\,\Delta x_j = \quad (3)$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} f(c_j)\,g'(c_j)\,\Delta x_j + \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j\,g'(c_j)\,\Delta x_j,$$

unde nici unul din numerele $|\varepsilon_j|$, pentru o partiție II suficient de fină, nu depășește $\varepsilon > 0$ dat. Atunci

$$\left| \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j g'(c_j)\,\Delta x_j \right| \leqslant \varepsilon \cdot \max_{a \leqslant x \leqslant b} |g'(x)|\,(b - a),$$

în așa fel că al doilea termen din ultimul membru al relației (3) tinde către zero pentru o rafinare nelimitată a partiției II. Primul termen din (3) este o sumă integrală pentru funcția $f(x)g'(x)$ și la limită va fi egal cu

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx. \quad (4)$$

Se vede că, în ipotezele formulate mai sus (f continuă, g cu derivata continuă), integrala Stieltjes există și este egală cu integrala uzuală (4).

Se poate obține o formulă analoagă cu (4), presupunînd că f este continuă pe porțiuni (g' fiind continuă) sau g' continuă pe porțiuni (f fiind continuă). Dacă funcțiile f și g' sînt ambele continue pe porțiuni, atunci, integrala Stieltjes încetează să existe de îndată ce punctele de discontinuitate ale lui f și g' se confundă.

În cazul general se stabilesc ușor următoarele proprietăți ale integralei Stieltjes, prin analogie cu proprietățile corespunzătoare ale integralei Riemann (α, β sînt numere):

$$\int_a^b [\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)]\,dg(x) =$$

$$= \alpha_1 \int_a^b f_1(x)\,dg(x) + \alpha_2 \int_a^b f_2(x)\,dg(x); \quad (5)$$

$$\int_a^b f(x)\, d[\beta_1 g_1(x) + \beta_2 g_2(x)] =$$

$$= \beta_1 \int_a^b f(x)\, dg_1(x) + \beta_2 \int_a^b f(x)\, dg_2(x); \quad (6)$$

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \int_a^c f(x)\, dg(x) + \int_c^b f(x)\, dg(x); \quad (7)$$

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\, df(x), \quad (8)$$

există, dacă integralele din membrul secund există.

§ 9.6. Aplicațiile integralei

9.61. *Calculul ariilor.* Am văzut în 9.21 modul cum calculul ariilor figurilor destul de simple în plan se reduce la calculul integralelor definite. Pentru un trapez curbiliniu limitat de un segment $[a, b]$ al axei Ox, o curbă continuă $y = f(x) \geqslant 0$ și ordonatele $x = a$, $x = b$, aria sa se exprimă prin integrala (fig. 9.10)

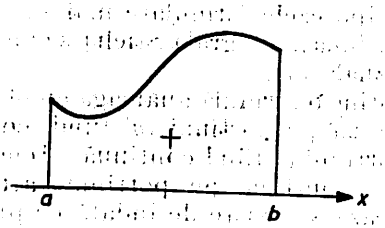


Fig. 9.10

$$I = \int_a^b \quad . \quad (1)$$

Dacă o figură Φ nu este un trapez curbiliniu, dar poate fi reprezentată printr-o reuniune de trapeze curbilinii fără

puncte interioare comune, atunci aria sa este suma ariilor trapezelor. În general, aria unei figuri reprezentînd reu-

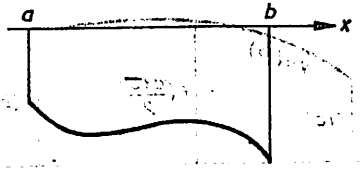


Fig. 9.11.

niunea unor figuri simple (jordaniene) fără puncte interioare comune este egală cu suma ariilor acestor figuri simple.

Revenim la definiția ariei sub forma de integrală (1). Ea este valabilă dacă $f(x) \geqslant 0$. Dar dacă $f(x) \leqslant 0$ (fig. 9.11), atunci $I \leqslant 0$ și I dă aria (limitată de un segment de axă, două ordonate și o curbă) precedată de semnul —. Dacă $f(x)$ își schimbă semnul în $[a, b]$, atunci integrala I repre-

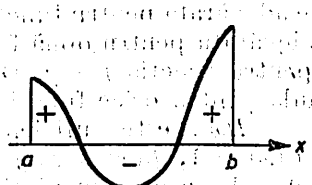


Fig. 9.12.

zintă suma algebrică a ariilor (precedat de semnul + pentru porțiunile de axă cu $f(x) \geqslant 0$ și semnul — pentru porțiunile cu $f(x) \leqslant 0$) (fig. 9.12).

Exemple.

a. Din 9.32 rezultă că aria limitată de curba $y = x^2$ și segmentul $0 \leqslant x \leqslant b$ al axei este o treime din aria dreptunghiului corespunzător (regula lui Arhimede). Acum, deducem formula mai generală a lui Kepler (*Nova Stereometria doliorum vinariorum*, 1615):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]\frac{b-a}{6}; \qquad (2)$$

aceasta din urmă fiind valabilă dacă f este un polinom cel mult de gradul trei (fig. 9.13). Alegînd pentru originea

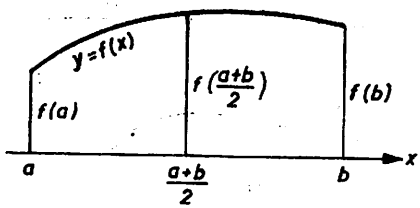


Fig. 9.13.

coordonatelor, mijlocul segmentului $[a, b]$, o putem pune sub forma

$$\int_{-c}^{c} f(x)\,dx = [f(-c) + 4f(0) + f(c)]\,\frac{c}{3}. \qquad (3)$$

Notăm acum că dacă formula (3) este adevărată pentru o funcție f, ea este adevărată pentru funcția kf, pentru orice k; dacă ea este adevărată pentru două funcții f și g, ea rămîne adevărată pentru funcția $f + g$. Deci, pentru a stabili această formulă pentru orice funcție de forma $f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$, este suficient să o verificăm pentru funcțiile $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^3$. Pentru $f_0(x) = 1$, ea este imediată. Pentru funcțiile $f_1(x)$ și $f_3(x)$ care sînt impare, cei doi membri ai egalității (3) se anulează, astfel că formula este de asemenea adevărată. În sfîrșit, pentru funcția $f_2(x)$, formula (3) se reduce la regula lui Arhimede; ea este deci stabilită pentru orice polinom de grad cel mult egal cu 3.

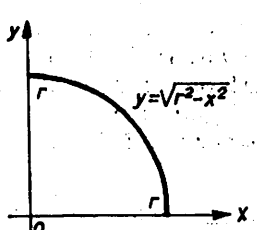


Fig. 9.14.

b. *Aria cercului* $x^2 + y^2 = r^2$. Din motive de simetrie putem scrie (fig. 9.14)

$$S = 4\int_0^r y\,dx = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx.$$

Punînd $x = r\cos\theta$, $dx = -r\sin\theta\,d\theta$, se găseşte :

$$S = -4r^2\int_{\pi/2}^{0} \sin^2\theta\,d\theta = 4r^2\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\,d\theta =$$

$$= 4r^2\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta = 2r^2\int_0^{\pi/2} d\theta - 2r^2\int_0^{\pi/2} \cos 2\theta\,d\theta =$$

$$= \pi r^2 - r^2\sin 2\theta\,\Big|_0^{\pi/2} = \pi r^2.$$

Deci numărul $\frac{\pi}{2}$ pe care l-am introdus mai sus, ca prima rădăcină pozitivă a funcţiei $y = \cos x$ (5.65), găseşte o nouă interpretare ca jumătatea ariei cercului de rază 1.

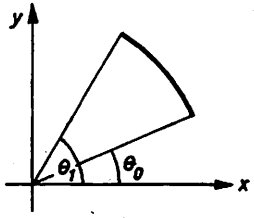


Fig. 9.15.

c. Pentru *aria sectorului de cerc* $x^2 + y^2 \leqslant r^2$ (sau sub formă parametrică $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$) *limitat de două raze* $\theta = \theta_0$, $\theta = \theta_1$, $0 \leqslant \theta_0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$ (fig. 9.15), avem

$$S(\theta_0, \theta_1) = S(0, \theta_1) - S(0, \theta_0),$$

astfel încît este suficient să calculăm $S(0, \theta_0)$ pentru orice $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (fig. 9.16). Avem

$$S(0, \theta_0) = \int_0^{r\cos\theta_0} x \operatorname{tg}\theta_0 \, dx + \int_{r\cos\theta_0}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^{r\cos\theta_0} \cdot \operatorname{tg}\theta_0 + r^2 \int_0^{\theta_0} \sin^2\theta \, d\theta =$$

$$= \frac{r^2\cos^2\theta_0}{2} \operatorname{tg}\theta_0 + r^2 \int_0^{\theta_0} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta =$$

$$= \frac{r^2}{2}\cos^2\theta_0 \operatorname{tg}\theta_0 + \frac{r^2}{2}\theta_0 - \frac{r^2 \sin 2\theta}{4}\Big|_0^{\theta_0} = \frac{r^2}{2}\theta_0.$$

Astfel, se obține

$$S(\theta_0, \theta_1) = \frac{r^2}{2}(\theta_1 - \theta_0). \qquad (4)$$

Se verifică ușor că această formulă rămîne valabilă pentru orice sector cu deschiderea $0 \leqslant \theta_1 - \theta_0 < 2\pi$.

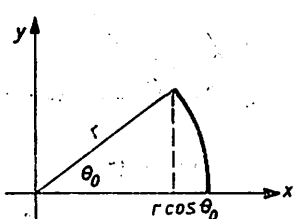


Fig. 9.16.

d. După o dilatare de raport k după axa y, aria S a trapezului curbiliniu (fig. 9.17) devine de k ori mai mare.

Aceasta rezultă din egalitatea

$$S_k = \int_a^b k f(x)\, \mathrm{d}x = k \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$$

(dacă nu se ţine cont de consideraţiile generale 9.27).

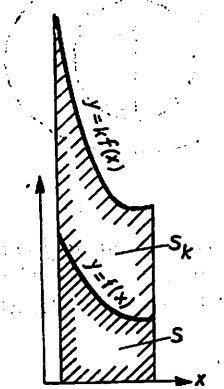


Fig. 9.17.

e. După o dilatare de raport k după axa Ox, aria S a unui trapez curbiliniu devine de k ori mai mare (fig. 9.18).

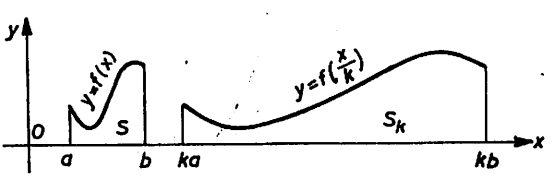


Fig. 9.18.

Pentru a demonstra aceasta, facem substituţia $x_1 = kx$:

$$S_k = \int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x_1}{k}\right) \mathrm{d}x_1 = k \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x.$$

f. *Aria unei elipse.* Elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ se obţine

din cercul $x^2 + y^2 = 1$, după o dilatare de raport a în lungul axei Ox şi o dilatare de raport b în lungul axei Oy (fig. 9.19). Cum aria cercului de rază 1 este π, aplicînd rezultatele exemplelor de la punctele d şi e, se găseşte $S_{\text{elipsă}} = \pi ab$.

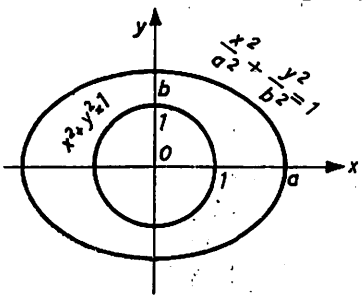


Fig. 9.19

g. *Interpretarea geometrică a funcţiilor hiperbolice inverse.* Considerăm hiperbola $x^2 - y^2 = 1$ şi calculăm aria sectorului ABC (fig. 9.20). Această arie este dată de integrala

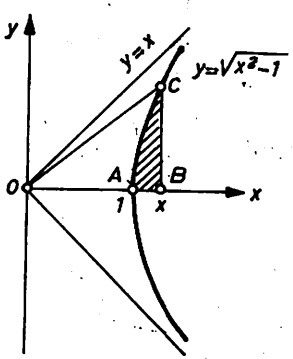


Fig. 9.20

$$I = \int_1^x \sqrt{u^2 - 1}\, du,$$

pe care o calculăm prin substituţia $u = \operatorname{ch} t$:

$$\int_1^x \sqrt{u^2 - 1}\, du = \int_0^{\operatorname{arg ch} x} \operatorname{sh}^2 t\, dt.$$

Deoarece $\operatorname{ch} 2t = \operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t$ și $1 = \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t$, avem $\operatorname{sh}^2 t = \dfrac{\operatorname{ch} 2t - 1}{2}$, de unde

$$I = \int_0^{\operatorname{argch} x} \frac{\operatorname{ch} 2t - 1}{2}\, dt = \left[\frac{1}{4}\operatorname{sh} 2t - \frac{t}{2}\right]\Bigg|_{t=0}^{\operatorname{argch} x}.$$

Notăm că $\operatorname{sh} 2t = 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t$; deci $\operatorname{sh} 2t = 2\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1}\ \operatorname{ch} t$ și, în consecință,

$$I = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 - 1} - \operatorname{argch} x\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\, x\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2}\operatorname{argch} x.$$

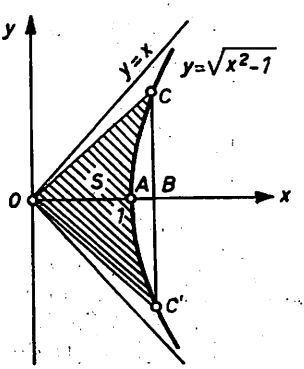


Fig. 9.21

Primul termen reprezintă aria triunghiului OBC; astfel $\dfrac{1}{2}\operatorname{argch} x$ este aria sectorului OAC, deci $S = \operatorname{argch} x$ este aria sectorului $OC'AC$ (fig. 9.21). Inversînd această formulă se obține o reprezentare parametrică a hiperbolei

$$x = \operatorname{ch} S,\ y = \sqrt{x^2 - 1} = \operatorname{sh} S.$$

De fapt, am văzut că o curbă cu ecuațiile parametrice $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$ este o hiperbolă, dar acum am descoperit semnificația geometrică a parametrului t care nu este altceva decît aria sectorului de tipul $OC'AC$ determinat într-un punct curent al hiperbolei.

Este util să comparăm această reprezentare cu reprezentarea parametrică a cercului

$$x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta.$$

Aici θ este unghiul polar AOC, dar această cantitate reprezintă aria sectorului $OC'AC$ (fig. 9.22). Astfel, pentru cerc și pentru hiperbolă, aria sectorului poate juca rol de parametru principal.

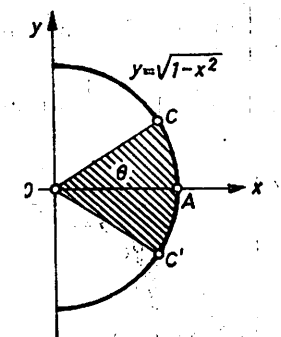


Fig. 9.22

h. *Inegalitatea lui Young.* Fie $y = f(x)$ $(0 \leqslant x < \infty)$ o funcție crescătoare și continuă, astfel încît $f(0) = 0$, $f(\infty) = \infty$. Dacă $x = g(y)$ este funcția inversă (5.38) care, în acest caz, este și ea continuă și crește de la $x = 0$ la $x = \infty$. Punem pentru $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$:

$$F(x) = \int_0^x f(\xi)\, d\xi, \quad G(y) = \int_0^y g(\eta)\, d\eta.$$

Oricare ar fi $x > 0$, $y > 0$, are loc următoarea inegalitate, numită *inegalitatea lui Young* :

$$xy \leqslant F(x) + G(y). \tag{5}$$

Ea este imediată dacă se pleacă de la considerații geometrice (fig. 9.23), cititorul va face, fără îndoială, o demonstrație analitică. Notăm că inegalitatea (5) devine egalitate numai în cazul cînd $y = x$.

Inegalitatea lui Young servește ca punct de plecare pentru alte numeroase inegalități importante ale analizei. Semnalăm aici cîteva cazuri particulare: punînd $f(x) = x^{p-1}$, $g(y) = y^{\frac{1}{p-1}}$ se obține inegalitatea

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right); \tag{6}$$

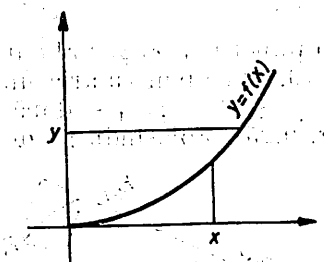


Fig. 9.23

dacă se pune $y = \ln(x+1)$, $x = e^v - 1$ se obține inegalitatea

$$xy \leqslant (x+1)\ln(x+1) - x + e^v - y - 1. \tag{7}$$

Cele două inegalități (6) și (7) sînt adevărate oricare ar fi $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

9.62. *Aria în coordonate polare.* Considerăm o curbă în coordonate polare (fig. 9.24) $r = r(\varphi)$ și calculăm aria sectorului OAB limitat de două raze $\varphi = \alpha$ și $\varphi = \beta$ și arcul de curbă $r = r(\varphi)$ pe care ele îl interceptează. Sectorul OAB este o mulțime jordaniană și, conform teoriei

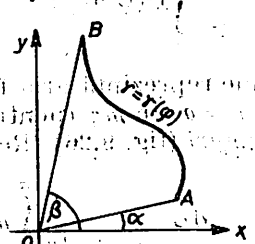


Fig. 9.24

generale (9.27), aria sa este cuprinsă între aria oricărei mulțimi jordaniene ce conține sectorul OAB și cea a oricărei mulțimi jordaniene conținută în acest sector. Fie

$$\Pi = \{\alpha = \varphi_0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \ldots \leqslant \varphi_n = \beta\}$$

o partiție a intervalului $[\alpha, \beta]$ de variație a coordonatei φ și fie, ca de obicei, $\Delta_k\varphi = \varphi_{k+1} - \varphi_k$,

$$m_k = \min_{\varphi_k \leqslant \varphi \leqslant \varphi_{k+1}} r(\varphi), \quad M_k = \max_{\varphi_k \leqslant \varphi \leqslant \varphi_{k+1}} r(\varphi).$$

Notăm prin P_k un punct $(\varphi_k, r(\varphi_k))$ al curbei $r = r(\varphi)$. Se cunoaște expresia (9.61(4)) pentru aria unui sector limitat de două raze $\theta = \varphi_k$ și $\theta = \varphi_{k+1}$ și două arce de cerc de raze m_k și M_k (fig. 9.25). Folosindu-ne de aceste expresii,

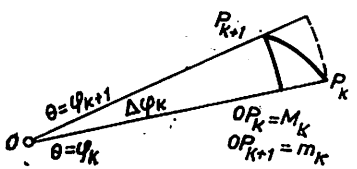


Fig. 9.25

se observă că mărimea S pe care trebuie să o determinăm verifică inegalitățile :

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} m_k^2\,\Delta\varphi_k \leqslant S \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} M_k^2\,\Delta\varphi_k.$$

Dar, dacă funcția $r = r(\varphi)$ este continuă, atunci, pentru o rafinare nelimitată a partiției Π, cele două sume tind către aceeași limită

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi;$$

astfel, această mărime reprezintă aria figurii OAB.

Exemplu. Curba $r = a \sin m\varphi$ (pentru m impar) se numește *rozetă cu m ramuri* (fig. 9.26). Relația

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/m} a^2 \sin^2 m\,\varphi\,d\varphi \underset{m\varphi=\psi}{=} \frac{1}{2m}\int_0^{\pi} a^2 \sin^2\psi\,d\psi$$

arată că aria unei bucle a rozetei cu m ramuri este $\frac{1}{m}$ din aria unei „rozete cu o ramură" $r = a \sin \varphi$ (care nu este, de altfel, altceva decît un cerc de diametru a).

9.63. *Lungimea unui arc.* Definind lungimea unui arc, ca limita lungimii liniilor poligonale înscrise, am obținut (9.28) pentru lungimea arcului de curbă $y = f(x)$ limitat de două puncte $x = a$ și $x = b$ următoarea expresie :

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx, \qquad (1)$$

(în ipoteza că există integrala).

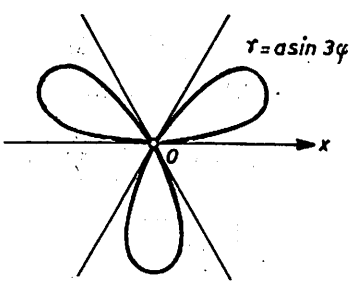


Fig. 9.26

În cazul general, o curbă γ se poate descrie prin ecuațiile sale parametrice care reprezintă coordonatele curente ale unui punct al curbei, ca funcție de un parametru t. Astfel, vom avea două ecuații în plan : $x = x(t)$, $y = y(t)$ și trei în spațiul tridimensional : $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$; în spațiul n-dimensional vom avea n ecuații :

$$x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ \ldots,\ x_n = x_n(t). \qquad (2)$$

Presupunem că funcțiile $x_j(t)$ sînt definite pe un interval $a \leqslant t \leqslant b$ și au acolo derivate continui pe porțiuni. Curba γ este atunci numită *netedă pe porțiuni*.

Fie $\Pi = \{ a = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = b \}$ o partiție a intervalului $[a,b]$. Fiecărui punct t_i îi corespunde un punct M_i al curbei γ avînd coordonatele $x_1(t_i), \ldots, x_n(t_i)$. Unind punc-

tele M_i prin segmente, se obține o linie poligonală $M_0M_1 \ldots M_p$ a cărei lungime este dată de formula

$$s_P = \sum_{i=0}^{p-1} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} [x_j(t_{i+1}) - x_j(t_i)]^2}.$$

Funcțiile $x_j(t)$ fiind netede pe porțiuni avem

$$x_j(t_{i+1}) - x_j(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} x_j'(t)\, dt.$$

Punem această integrală sub forma $x_j'(t_i)\Delta t_i + \varepsilon_{ij}\Delta t_i$. Dacă t_i este un punct de discontinuitate al funcției $x_j'(t)$, se subînțelege prin $x_j'(t_i)$ cantitatea $x_j'(t_i + 0)$. Rezultă de aici

$$\| x_j(t_{i+1}) - x_j(t_i)| - |x_j'(t_i)|\,\Delta t_i| \leqslant |\varepsilon_{ij}|\,\Delta t_i.$$

În virtutea inegalității 3.14(8), avem

$$\left| \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j(t_{i+1}) - x_j(t_i)|^2} - \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j'(t_i)|^2}\,\Delta t_i \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\varepsilon_{ij}|^2}\,\Delta t_i$$

și, apoi

$$\left| \sum_{i=0}^{p-1} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j(t_{i+1}) - x_j(t_i)|^2} - \sum_{i=0}^{p-1} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j'(t_i)|^2}\,\Delta t_i \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{p-1} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\varepsilon_{ij}|^2}\,\Delta t_i. \qquad (3)$$

Cantitatea ε_{ij} admite majorarea

$$|\varepsilon_{ij}| = \left| \frac{1}{\Delta t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [x_j'(t) - x_j'(t_i)]\, dt \right| \leqslant \max_{t_i < t < t_{i+1}} |x_j'(t) - x_j'(t_i)|. \qquad (4)$$

Împărțim suma din membrul secund (3) în două părți: prima, ce conține termenii corespunzînd intervalelor de continuitate ale tuturor $x_j'(t)$, a doua termenii corespunzători

intervalelor ce conţin puncte de discontinuitate pentru cel puţin una din funcţiile $x_j'(t)$. Deoarece funcţiile $x_j'(t)$ sînt uniform continue în intervalele lor de continuitate, dacă (t_i, t_{i+1}) este un interval de continuitate pentru funcţia $x_j'(t)$, avem $\max |x_j'(t) - x_j'(t_i)| \leqslant \omega(\mathrm{d}(\Pi))$, unde $\omega(u)$ este infinit mic în raport cu u, $\mathrm{d}(\Pi)$ fiind, ca de obicei, $\max \Delta t_i$. Dacă funcţia $x_j'(t)$ are o discontinuitate în intervalul Δt_i, atunci membrul secund al lui (4) admite majorarea

$$\max | x_j'(t) - x_j'(t_i) | \cdot \Delta t_i \leqslant M \cdot \Delta t_i,$$

unde M este o constantă. Deci, membrul secund (3) va avea ca majorant

$$\omega(\mathrm{d}(\Pi))\,(b - a) + M \sum{}' \Delta t_i,$$

unde Σ' se referă la intervalele ce conţin puncte de discontinuitate pentru cel puţin o funcţie $x_j'(t)$. Numărul acestor puncte fiind fix, suma Σ' tinde la zero împreună cu $\mathrm{d}(\Pi)$; simultan şi $\omega(\mathrm{d}(\Pi))$. Pe de altă parte, funcţia

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n} | x_j'(t) |^2}$$

este continuă pe porţiuni şi ea şi expresia

$$\sum_{i=0}^{p-1} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} | x_j'(t_i) |^2}\, \Delta t_i$$

este suma sa integrală, care tinde către

$$s = \int_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^{n} | x_j'(t) |^2}\, \mathrm{d}t, \tag{5}$$

cînd $\mathrm{d}(\Pi) \to 0$. Din (3), rezultă imediat că L_p tinde către integrala (5) cînd $\mathrm{d}(\Pi) \to 0$.

Aşadar, *lungimea arcului din curba* (2) *determinat de valorile* $t = a$ *şi* $t = b$ *există şi se exprimă prin integrala* (5), *această lungime fiind definită ca limita liniilor poligonale înscrise, iar funcţiile* $x_j(t)$ *fiind netede pe porţiuni.*

Pentru $n = 2$, avem formula ($x_1 = x$, $x_2 = y$):

$$s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, \mathrm{d}t. \tag{6}$$

Dacă se alege ca parametru coordonata x, se regăsește formula (1).

Exemple.

a. Lungimea arcului lănțișorului $y = \operatorname{ch} x$ determinat de punctele $x = 0$ și $x = b$ (fig. 9.27) este egală cu

$$s = \int_0^b \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}\, dx = \int_0^b \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} b.$$

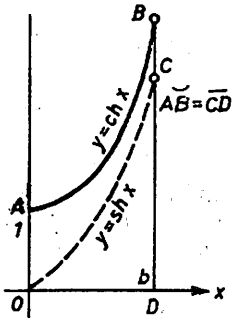


Fig. 9.27

b. Lungimea arcului de cerc $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ interceptat de două raze $\theta = \theta_1$ și $\theta = \theta_2$, $0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 \leqslant 2\pi$, este egală cu

$$s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta}\, d\theta = r(\theta_2 - \theta_1),$$

conform (6). În particular, cînd $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 2\pi$, se vede că lungimea cercului de rază r este $2\pi r$. Numărul π primește deci o interpretare nouă: el reprezintă raportul dintre lungimea cercului și diametrul său.

c. Lungimea arcului de elipsă

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad b > a,$$

cu excentricitatea $\varepsilon = \dfrac{c}{b} = \dfrac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$, pentru intervalul $0 \leqslant t \leqslant T$, este

$$s = \int_0^T \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt = \int_0^T \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 (1 - \sin^2 t)}\, dt =$$

$$= \int_0^T \sqrt{b^2 - (b^2 - a^2)\sin^2 t}\, dt = b\int_0^T \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t}\, dt =$$

$$= bE(\varepsilon, T),$$

unde $E(\varepsilon, T)$ este funcția eliptică a lui Legendre (9.45).

d. Lungimea sinusoidei $y = \sin x$, pentru $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, se exprimă și ea printr-o integrală eliptică

$$s = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2 - \sin^2 x}\, dx =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 x}\, dx = \sqrt{2}\, E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Aceasta nu este de mirare căci elipsa pe care o obținem tăind un cilindru circular drept cu un plan înclinat devine sinusoidă, desfășurînd acest cilindru în plan.

e. Spre deosebire de arie, lungimea unei curbe nu se transformă, în general, într-un mod atît de simplu, în urma unei dilatări în lungul unei axe; chiar pentru o linie poligonală, lungimea fiecărui segment se multiplică atunci cu coeficientul său propriu, care depinde de unghiul format de acest segment cu axa de dilatație.

Din contră, dacă dilatarea de un anumit raport k se efectuează după toate axele concomitent (adică este vorba de o omotetie), atunci lungimea oricări segment, al oricărei linii poligonale, deci al oricărei curbe netede pe porțiuni se multiplică cu k.

f. Notăm prin s_0 lungimea coardei γ_0 ce unește două puncte $A = M_0$ și $B = M_p$ ale unei curbe γ netede pe porțiuni. Deoarece, în virtutea inegalității triunghiului, orice linie poligonală $M_0M_1 \ldots M_p$ are lungimea $s_p \geqslant s_0$, la fel va fi și lungimea s a curbei γ

$$s \geqslant s_0.$$

Astfel,

$$\frac{s}{s_0} \geqslant 1.$$

Pe de altă parte, dacă coarda γ_0 se reduce la punctul M_0, astfel încît punctul B tinde către punctul A, atunci raportul

$$\frac{s}{s_0} = \frac{\int_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^n [x_j'(t)]^2}\, dt}{\sqrt{\sum_{j=1}^n [x_j(b) - x_j(a)]^2}} = \frac{(b-a)\sqrt{\sum_{j=1}^n [x_j'(\xi)]^2}}{(b-a)\sqrt{\sum_{j=1}^n [x_j'(\xi_j)]^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n [x_j'(\xi)]^2}{\sum_{j=1}^n [x_j'(\xi_j)]^2}}$$

are limita 1, dacă $\sum_{j=1}^n [x_j'(a)]^2 \neq 0$.

Ajungem astfel la un rezultat important:

Lungimea unei curbe γ netedă pe porțiuni este un infinit mic echivalent cu lungimea coardei care subîntinde curba, atunci cînd creșterea parametrului tinde către zero.

g. *Lungimea unui arc ca funcție de parametru și ca parametru.* Fie o curbă L dată de ecuațiile sale parametrice

$$x_1 = x_1(\tau), \ldots, x_n = x_n(\tau), \quad a \leqslant \tau \leqslant b,$$

unde $x_j(\tau)$ sînt funcții netede pe porțiuni. Lungimea curbei L cuprinsă între $\tau = a$ și $\tau = t$ este o funcție netedă pe porțiuni, anume

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{\sum_{j=1}^n [x_j'(\tau)]^2}\, d\tau,$$

de parametru t. Derivata sa în t, în afara punctelor de discontinuitate ale lui $x_j'(t)$, are forma

$$s'(t) = \sqrt{\sum_{j=1}^n [x_j'(t)]^2} \tag{7}$$

și este continuă și nenegativă, astfel încît $s(t)$ nu descreşte. Dacă $x_1'(t), \ldots, x_n'(t)$ nu se anulează simultan în nici un punct (pentru un punct de discontinuitate presupunem că $x_j'(t+0)$ şi $x_j'(t-0)$ nu se anulează simultan), atunci, pentru fiecare interval de continuitate al tuturor funcţiilor $x_j(t)$, se poate aplica teorema asupra funcţiei inverse: există funcţia inversă $t = t(s)$ continuă, crescătoare şi avînd o derivată care, conform formulei 7.16(2), este continuă pe porţiuni la fel ca $s'(t)$. Acestea fiind spuse, toate funcţiile $x_j(t)$ pot fi puse sub formă de funcţii de s, continue şi avînd derivate continue pe porţiuni. În particular, dacă t este lungimea arcului, atunci din (7) rezultă că

$$\sum_{j=1}^{n} [x_j'(s)]^2 = 1. \qquad (8)$$

Un punct în care funcţiile $x_j'(t)$ se anulează se numeşte *punct singular*; vedem că reprezentarea parametrică, cu lungimea arcului ca parametru, nu este posibilă decît pe o porţiune a curbei fără puncte singulare.

9.64. *Aria unei suprafeţe de rotaţie.* Fie o curbă $L = \{y = f(x) \geqslant 0,\ x \in [a, b]\}$. Rotind-o în jurul axei Ox ea generează o suprafaţă S, a cărei arie vrem să o determinăm (fig. 9.28).

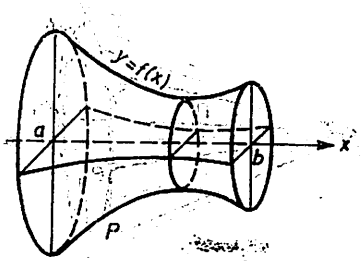


Fig. 9.28

Presupunem la început că funcţia f este de gradul întîi, $f(x) = kx + b_1$; suprafaţa S se numeşte atunci *con* (fig. 9.29); dreapta $y = kx + b_1$ este generatoarea conului, punctul A de intersecţie al generatoarei cu axa, *vîrful* său, circumferinţa γ descrisă de punctul B după rotaţia sa, *circumferinţa directoare*. Aria conului este definită în modul următor. Alegem, pe circumferinţa γ, punctele $B_1, \ldots, B_m$

și le unim succesiv unul cu altul și fiecare cu vîrful A; se obține o linie poligonală închisă $\{B_1, \ldots, B_m B_1\} = \lambda$ și un sistem $B_1AB_2, \ldots, B_mAB_1$ de triunghiuri isoscele formînd o *piramidă înscrisă* Π (fig. 9.30). Aria laterală a

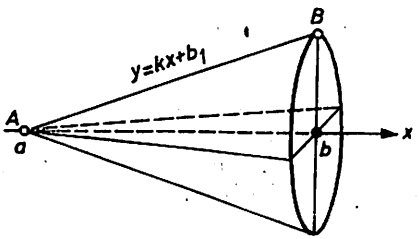


Fig. 9.29

piramidei este definită ca suma $S(\Pi)$ a ariilor triunghiurilor care o formează. Punem $\overline{B_kB_{k+1}} = 2\delta_k$ $(k = 1, \ldots, m)$ și $d(\Pi) = \max\limits_k \delta_k$. Considerăm un șir oarecare de piramide înscrise $\Pi_1, \ldots, \Pi_n, \ldots$ cu $d(\Pi_n) \to 0$. Va rezulta că numerele $S(\Pi_n)$ tind către 0, limită care nu depinde de alegerea acestor piramide; această limită este prin definiție aria conului S.

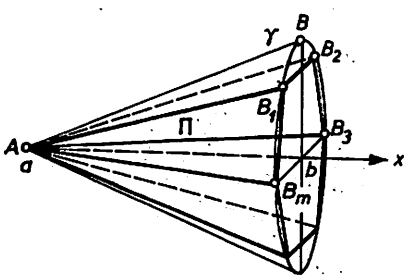


Fig. 9.30

Pentru a demonstra existența limitei șirului $S(\Pi_n)$, explicităm numerele $S(\Pi)$. Dacă l este lungimea generatoarei conului (cu vîrful în punctul B), înălțimea triunghiului B_kAB_{k+1} este

$$\sqrt{l^2 - \delta_k^2} = l\sqrt{1 - \left(\frac{\delta_k}{l}\right)^2} = l\left(1 - \frac{\delta_k^2 E}{2l^2}\right) = l - \frac{\delta_k^2 E}{2l},$$

unde E are limita 1, cînd $\delta_k \to 0$ (5.59 f). Aria triunghiului B_kAB_{k+1} este egală cu $\delta_k\sqrt{l^2 - \delta_k^2} = \delta_k l - \frac{\delta_k^3 E}{2l}$ iar cea a piramidei înscrise cu

$$S(\Pi) = \sum_k \left(\delta_k l - \frac{\delta_k^3 E}{2l}\right) = \frac{1}{2}\, l\, \beta(\Pi) - \frac{1}{2l} \sum_k \delta_k^3 E, \tag{1}$$

unde $\beta(\Pi)$ este lungimea liniei poligonale λ. Pentru $d(\Pi) \to 0$, mărimea $\beta(\Pi)$ tinde către lungimea circumferinţei γ (9.63 b), care este $2\pi R$, deoarece primul termen din dreapta în (1) are limita $\pi l R$. Dacă fiecare $\delta_k < \varepsilon$, atunci al doilea termen din dreapta în (1) este majorat de $\frac{1}{2l} \cdot 2\varepsilon^2\ \beta(\Pi)$ (pentru δ_k suficient de mici); de aici rezultă că acest termen tinde către 0 pentru $d(\Pi) \to 0$. Astfel, şirul numeric $S(\Pi_n)$ tinde către $\pi l R$ care este, după cum am văzut, aria conului.

Aria trunchiului de con (fig. 9.31), generat de rotaţia în jurul axei Ox a unui segment din dreapta $y = kx + b$, este definită ca diferenţa dintre ariile celor două conuri de generatoare L_1 şi L_2 şi cu razele bazelor respectiv R_1 şi R_2. Se ajunge la mărimea

$$\pi(L_1R_1 - L_2R_2) = \pi\,(L_1 - L_2)\,(R_1 + R_2),$$

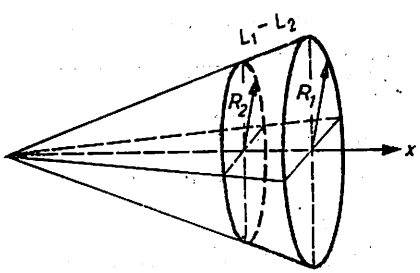


Fig. 9.31

deoarece $L_1R_2 = L_2R_1$ adică $\frac{L_1}{L_2} = \frac{R_1}{R_2}$. Aceasta rezultă imediat din motive de asemănare. Numărul $L_1 - L_2$ este, evident, mărimea segmentului de generatoare a conului.

Trecem la cazul general și în loc de $y = y(x)$, să considerăm o curbă sub forma parametrică

$$L = \{x = x(t),\ y = y(t) \geqslant 0,\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta,\ x(\alpha) = a,\ x(\beta) = b\}.$$

Definim aria suprafeței generate prin rotația în jurul axei Ox a acestei curbe, ca limita ariilor de suprafețe generate prin rotația în jurul axei Ox a liniilor poligonale înscrise în curba L. Fie o partiție $\Pi = \{\alpha = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n = \beta\}$ a intervalului $[\alpha, \beta]$ și L_n linia poligonală de vîrfuri $(x(t_0), y(t_0)), \ldots, (x(t_n), y(t_n))$; lungimea laturei a k-a a acestei linii este $\Delta l_k = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}$, unde $\Delta x_k = x(t_{k+1}) - x(t_k)$, $\Delta y_k = y(t_{k+1}) - y(t_k)$. Rotind-o în jurul axei Ox, latura a k-a, generează trunchiul de con a cărui arie este $\pi(y_k + y_{k+1})\,\Delta l_k$; sumînd după toate laturile liniei, se obține expresia ariei generate prin rotația liniei poligonale:

$$P_n = \pi \sum_{k=0}^{n-1} (y_k + y_{k+1})\,\Delta l_k.$$

Presupunem acum că funcțiile $x(t)$ și $y(t)$ au derivatele continue $x'(t)$ și $y'(t)$. Putem atunci transforma expresiile Δx_k^2 și Δy_k^2 cu ajutorul formulei Lagrange 7.44, ajungînd la

$$P_n = \pi \sum_{k=0}^{n-1} [y(t_k) + y(t_{k+1})] \sqrt{[x'(\xi_k)]^2 + [y'(\eta_k)]^2}\ \Delta t_k,$$

punctele ξ_k și η_k aflîndu-se în intervalul (t_k, t_{k+1}). Alături de expresia P_n considerăm cantitatea

$$P_n^* = 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} y(t_k) \sqrt{[x'(t_k)]^2 + [y'(t_k)]^2}\ \Delta t_k.$$

P_n^* este o sumă integrală pentru funcția continuă $2\pi y(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$ și tinde, cînd $d(\Pi) \to 0$, către numărul

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt. \qquad (2)$$

Să arătăm că P_n are aceeași limită după aceeași direcție. Este suficient să verificăm că

$$\lim_{d(\Pi)\to 0} [P_n^* - P_n] = 0.$$

Într-adevăr, pentru $\varepsilon > 0$ dat, se poate găsi un $\delta > 0$ astfel încît $|t' - t| < \delta$ să implice inegalitățile $|x'(t') - x'(t)| < \varepsilon$, $|y'(t') - y'(t)| < \varepsilon$, $|y(t') - y(t)| < \varepsilon$. Dacă $d(\Pi) < \delta$, atunci, în particular,

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \theta_1 \varepsilon, \qquad |\theta_1| < 1,$$
$$x'(\xi_k) = x'(t_k) + \theta_2 \varepsilon, \qquad |\theta_2| < 1,$$
$$y'(\eta_k) = y'(t_k) + \theta_3 \varepsilon, \qquad |\theta_3| < 1,$$

adică

$$[y(t_k) + y(t_{k+1})] \sqrt{[x'(\xi_k)]^2 + [y'(\eta_k)]^2} =$$
$$= (2y(t_k) + \theta_1 \varepsilon) \sqrt{(x'(t_k) + \theta_2 \varepsilon)^2 + (y'(t_k) + \theta_3 \varepsilon)^2} =$$
$$= (2y(t_k) + \theta_1 \varepsilon) \sqrt{[x'(t_k)]^2 + [y'(t_k)]^2 + \varepsilon \theta_4},$$

unde $|\theta_4| \leqslant 2 \max [|x'(t)| + |y'(t)| + \varepsilon]$. Oricare ar fi $a, b > 0$, au loc inegalitățile

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} \leqslant \sqrt{a + b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

(prima este evidentă, a doua este tocmai inegalitatea triunghiului în $\mathbb{R}_2$ pentru vectorii $(\sqrt{a}, 0)$ și $(0, \sqrt{b})$). De aici rezultă că

$$\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \theta_5 \sqrt{b}, \quad |\theta_5| \leqslant 1.$$

În cazul de față, putem nota

$$\sqrt{[x'(t_k)]^2 + [y'(t_k)]^2 + \varepsilon \theta_4} =$$
$$= \sqrt{[x'(t_k)]^2 + [y'(t_k)]^2} + \theta_5 \sqrt{\varepsilon \theta_4},$$

unde $|\theta_5| \leqslant 1$. Deci

$$P_n - P_n^* = -2\pi \sum_{k=0}^{n-1} y(t_k) \sqrt{[x'(t_k)]^2 + [y'(t_k)]^2} +$$
$$+ \pi \sum_{k=0}^{n-1} (2y(t_k) + \theta_1 \varepsilon) \left[\sqrt{[x'(t_k)]^2 + [y'(t_k)]^2} + \theta_5 \sqrt{\varepsilon \theta_4} \right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \{\pi\theta_1 \varepsilon \sqrt{[x'(t_k)]^2 + [y'(t_k)]^2} +$$

$$+ 2\pi y(t_k)\ \theta_5 \sqrt{\varepsilon\theta_4} + \pi\theta_1\theta_5\varepsilon\sqrt{\varepsilon\theta_4}\};$$

este evident că această cantitate tinde la zero odată cu ε, ceea ce trebuie demonstrat.

În final, formula (2) dă expresia ariei căutate în ipoteza existenței și continuității lui $y'(t)$ și $x'(t)$. Pentru un grafic cu reprezentarea parametrică $x = t$, $y = y(t)$, formula se pune sub forma

$$S = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx.$$

Exemple.

a. *Sfera de rază R.* Sfera despre care este vorba este suprafața generată de semicercul $x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, rotită în jurul axei Ox (fig. 9.32). Deci, conform formulei (2), avem

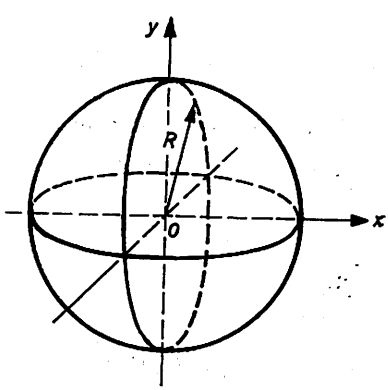


Fig. 9.32

$$S = 2\pi \int_0^{\pi} R\sin\theta \sqrt{R^2\sin^2\theta + R^2\cos^2\theta}\, d\theta =$$

$$= 2\pi R^2 \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = 4\pi R^2.$$

d. *Catenoid* este suprafaţa generată de rotaţia în jurul axei Ox a unui lănţişor (fig. 9.33). Avem $y = \operatorname{ch} x$, $y' = \operatorname{sh} x$, $\sqrt{1 + y'^2} = \operatorname{ch} x$,

$$S = 2\pi \int_{-a}^{+a} \operatorname{ch}^2 x \, dx = 2\pi \int_{-a}^{+a} \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2} \, dx =$$

$$= \pi \left[\frac{\operatorname{sh} 2x}{2} + x \right] \Big|_{-a}^{+a} = \pi (\operatorname{sh} 2a + 2a) \cdot$$

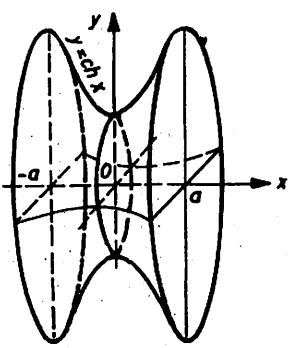


Fig. 9.33

9.65. *Schema generală de aplicare a integralei.* Presupunem că avem de calculat o anumită mărime v. Presupunem că ea reprezintă una din valorile unei funcţii $v(x)$ de o variabilă x ce parcurge un interval $[a, b]$, de exemplu, $v = v(b)$. Dacă se poate separa partea liniară principală

$$dv = f(x)\,dx \tag{1}$$

a creşterii Δv a funcţiei v, pentru creşterea variabilei independente de la x la $x + dx$, atunci problema se reduce în principiu la calculul integralei

$$v(b) = v(a) + \int_a^b f(x)\,dx \tag{2}$$

pentru $v(a)$ cunoscut.

Într-adevăr, coeficientul $f(x)$ din partea liniară principală a creşterii este derivata funcţiei $v(x)$ şi problema constă în a găsi o primitivă, ceea ce se face cu ajutorul integralei (2).

În anumite cazuri, unde este dificil să construim egalitatea (1), dar se poate stabili o inegalitate de forma

$$dv \leqslant f(x)\,dx,$$

integrarea acesteia dă o estimare a cantităţii $v(b)$

$$v(b) \leqslant v(a) + \int_a^b f(x)\,dx.$$

Să notăm că scriind expresia lui dv (contrar celei a lui Δv) se pot neglija infiniţii mici de ordin superior în raport cu dx. Aceste consideraţii simplifică adesea problema.

Iată cîteva exemple simple.

a. *Ce lucru mecanic trebuie să efectuăm pentru a ridica o masă de* 1 kg *ce se găseşte pe suprafaţa Pămîntului, pînă la limita gravitaţiei terestre?*

Notăm prin $W(h)$ lucrul mecanic efectuat pentru a ridica 1 kg la altitudinea h. Forţa de atracţie a Pămîntului $F = F(h)$ asupra masei de 1 kg la altitudinea h m deasupra nivelului mării este egală, conform legii lui Newton, cu $C \cdot \frac{1}{(h+R)^2}$, unde R este raza Pămîntului. Se determină constanta C punînd condiţia că la nivelul mării forţa de atracţie asupra acestei mase este egală cu 1 kgf ($= 9{,}8$ Kg m/s^2). Deci $C = R^2$, $F(h) = \frac{R^2}{(h+R)^2}$ Kg. Presupunem că masa este ridicată la altitudinea $(h+\Delta h)$ m. Admiţînd că forţa $F(h)$ este constantă pe acest interval, se obţine pentru lucrul mecanic

$$dW = F\,dh = \frac{R^2}{(h+R)^2}\,dh \text{ Kgm}.$$

În realitate forţa F nu este constantă pe intervalul $[h, h+\Delta h]$, dar dacă am ţine cont de aceasta nu am

adăuga la expresia lui dW decît infiniți mici de ordin superior ($\sim \Delta F \cdot \Delta h$). Dar, noi nu avem nevoie decît de infiniți mici de primul ordin în raport cu dh.

Acum, aplicarea formulei (1) dă valoarea lucrului mecanic pe care trebuie să-l efectuăm pentru a ridica 1 Kg la înălțimea H:

$$W = \int_{h=0}^{H} \frac{R^2}{(h+R)^2}\,dh = \frac{R^2}{h+R}\Big|_{H}^{0} =$$

$$= R - \frac{R^2}{H+R} < R = 6{,}4 \cdot 10^6 \text{ Kgm}.$$

Pentru H foarte mare, putem neglija cantitatea $\frac{R^2}{H+R}$

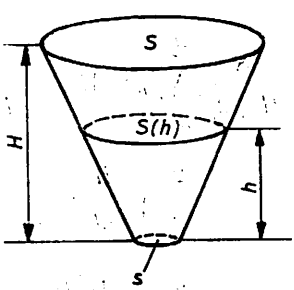


Fig. 9.34

(în acest caz se spune „în afara limitelor de gravitație terestră" deoarece ascensiunea nu cere practic un plus de lucru mecanic pentru a învinge forța de atracție a Pămîntului). Răspunsul este deci $W \simeq 6{,}4 \cdot 10^6$ Kgm.

b. *O pîlnie de secțiune superioară S, de secțiune inferioară s și de înălțime H este umplută cu apă* (fig. 9.34); *se știe că viteza de scurgere a unei coloane de apă de înălțime h este*

$$v(h) = \sqrt{2gh} \quad (g = 9{,}81 \text{ m/s}^2).$$

În cît timp se va goli pîlnia?

Notăm prin $S(h)$ secțiunea pîlniei de înălțime $h = h(t)$ și prin $v = v(t)$ volumul de apă din pîlnie la momentul t. Apa care se scurge prin orificiul inferior în intervalul de timp $[t, t + \Delta t]$ este $v \cdot s\,dt = \sqrt{2gh} \cdot s\,dt$ cm³ de

apă (viteza de scurgere este presupusă constantă în acest timp, eroarea care se face este un infinit mic de ordin superior pe care îl neglijăm). Aceeași cantitate dv se obține admițînd că volumul de apă care se scurge este egal cu volumul cilindrului de înălțime dh și baza $S(h)$ (în realitate acest volum este cel al unui trunchi de con, dar diferența este un infinit mic de ordin superior în raport cu dh). Se ajunge la egalitatea

$$S(h)\,dh = \sqrt{2gh}\cdot s\,dt,$$

de unde

$$s\cdot dt = \frac{S(h)}{\sqrt{2gh}}\,dh = \frac{h^2}{H^2}\,S\,\frac{dh}{\sqrt{2gh}} = \frac{S}{H^2}\sqrt{\frac{h^3}{2g}}\,dh.$$

Integrînd în raport cu t între 0 și T și ținînd cont de 9.54, avem

$$s\int_0^T dt = sT = \frac{S}{H^2\sqrt{2g}}\int_0^H \sqrt{h^3}\,dh = \frac{S}{H^2\sqrt{2g}}\,\frac{h^{5/2}}{5/2}\Big|_0^H =$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{\frac{H}{2g}}\,S,$$

de unde

$$T = \frac{2}{5}\,\frac{S}{s}\sqrt{\frac{H}{2g}}.$$

e. *Estimarea ariei unei ρ-vecinătăți a unei curbe plane.* Locul geometric $V_\rho(L)$ al punctelor tuturor cercurilor de rază ρ al căror centru aparține unei curbe L se numește *ρ-vecinătate a curbei* L (fig. 9.35). Presupunem că această

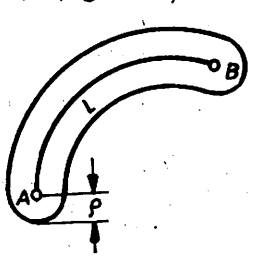


Fig. 9.35

curbă L este netedă pe porțiuni; se poate demonstra că mulțimea $V_\rho(L)$ are atunci arie. Vom arăta că *pentru aria* $S_\rho(L)$ *a mulțimii* $V_\rho(L)$ *există estimarea*

$$S_\rho(L) \leqslant 2\pi\,\rho\,s(L) + \pi\rho^2, \qquad (2)$$

unde $s(L)$ *este lungimea curbei* L.

Alegem ca parametru, pe curba L, lungimea arcului s începînd de la punctul $A(s = 0)$ pînă la punctul $B(s = s_0)$ (9.63 g). Notăm prin $S_\rho(L_\sigma)$ aria ρ-vecinătății părții de pe

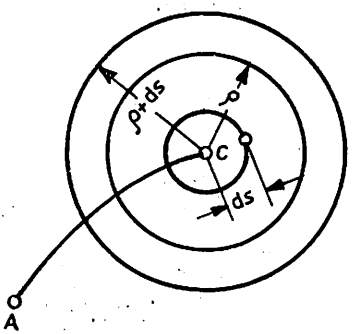


Fig. 9.36

curba L corespunzătoare intervalului $0 \leqslant s \leqslant \sigma$ de variație a parametrului s. Fie Q_ρ cercul de rază ρ centrat în $C(s = \sigma)$. Pozițiile posibile ale punctelor $C' \in L$ care corespund valorilor parametrului s din intervalul $\sigma \leqslant s \leqslant \sigma + ds$ aparțin cercului de rază ds și de centru C (fig. 9.36). Pozițiile posibile ale punctelor cercurilor de rază ρ și de centru C' aparțin cercului $Q_{\rho+ds}$ de rază $\rho + ds$ și de centru C. În consecință, creșterea totală a lui $S_\rho(L_s)$, cînd parametrul s variază între σ și $\sigma + ds$, nu depășește diferența ariilor cercurilor $Q_{\rho+ds}$ și Q_ρ, cu alte cuvinte, mărimea

$$\pi(\rho + ds)^2 - \pi\rho^2 = 2\pi\rho ds + \pi(ds)^2.$$

Pentru partea liniară principală a acestei creșteri se obține estimarea

$$dS_\rho(L_s) \leqslant 2\pi\rho ds.$$

Integrînd în raport cu s de la 0 la s_0, se găsește

$$S_\rho(L) - S_\rho(L_0) \leqslant 2\pi\,\rho\,s(L). \qquad (3)$$

Deoarece $S_\rho(L_0) = \pi\rho^2$, din (3) rezultă (2).

d. *Volumul unui corp cu baze paralele.* Din teoria generală a calculului volumelor rezultă că volumul cilindrului drept de bază jordaniană S și de înălțime H este egal cu SH (fig. 9.37). Fie un corp oarecare a cărui secțiune la înălțimea h este jordaniană și a cărei arie este $S(h)$ (fig. 9.38).

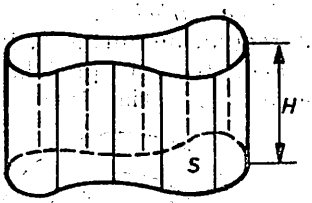


Fig. 9.37

Presupunem că frontiera secțiunii V_h variază continuu cu h; aceasta înseamnă că, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un $\delta > 0$ astfel încît dacă $|h - h'| < \delta$, proiecția frontierei

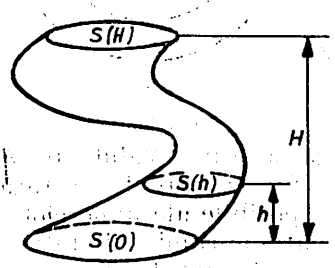


Fig. 9.38

lui $V_{h'}$, pe planul bazei aparține ε-vecinătății proiecției frontierei lui V_h pe același plan (punctul c). Diferența ariilor secțiunilor V_h și $V_{h'}$, nu depășește deci aria vecinătății menționate și admite ca majorant — conform punctului c, numărul $C \varepsilon L$, unde L este un majorant al lungimilor contururilor tuturor secțiunilor orizontale.

Notăm prin $v(h)$ volumul corpului limitat sus de secțiunea V_h. Trecînd de la h la $h + \mathrm{d}h$, partea liniară principală a creșterii lui $v(h)$ se pune sub forma $S(h)\,\mathrm{d}h$ ca și cum corpul ar fi un cilindru în intervalul $[h, h + \mathrm{d}h]$; creșterea reală diferă de această cantitate printr-un infinit mic de ordin superior în raport cu $\mathrm{d}h$. Deci

$$\mathrm{d}v = S(h)\,\mathrm{d}h;$$

integrînd se obţine

$$v = \int_0^H S(h)\,\mathrm{d}h. \tag{4}$$

e. *Volumul unui con K de înălţime H şi cu baza superioară S* (fig. 9.39). Din raţiuni de asemănare, aria secţiunii la distanţa h de vîrf este $S(h)=S\cdot\left(\frac{h}{H}\right)^2$,

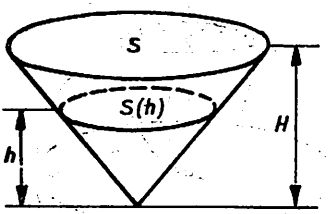


Fig. 9.39

de unde

$$v(K) = \int_0^H S\frac{h^2}{H^2}\,\mathrm{d}h = \frac{S}{H^2}\frac{1}{3}\,H^3 = \frac{1}{3}SH.$$

f. *Volumul unei sfere de rază R.* Aria secţiunii la distanţă h de centru este $\pi(R^2 - h^2)$ (fig. 9.40). De aici

$$v = 2\int_0^R \pi\,(R^2 - h^2)\,\mathrm{d}h = 2\pi\left[R^2 h - \frac{h^3}{3}\right]\Bigg|_0^R =$$

$$= 2\pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

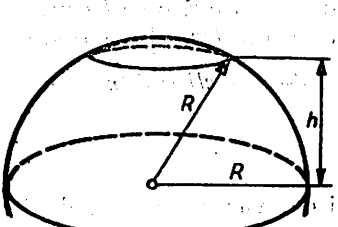


Fig. 9.40

g. *Pentru un corp de rotație, formula* (4) *poate fi pusă sub forma*

$$v = \pi \int_0^H r^2(h)\, \mathrm{d}h, \tag{5}$$

$r(h)$ fiind raza secțiunii la distanță h.

h. *Volumul părții comune unei sfere de rază R și unui paraboloid al cărui vîrf coincide cu centrul sferei* (fig. 9.41). Ecuația paraboloidului este $2az = x^2 + y^2$; de aici re-

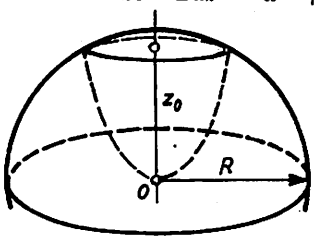


Fig. 9.41

zultă că aria secțiunii paraboloidului cu un plan la distanță h (de centrul sferei) este $\pi \cdot 2ah$. Aria secțiunii sferei la distanța h este $\pi(R^2 - h^2)$. Suprafețele sferei și paraboloidului se intersectează la distanța z_0 determinată de ecuația $2az_0 = R^2 - z_0^2$; deci $z_0 = -a + \sqrt{a^2 + R^2}$ și

$$v = \int_0^{z_0} \pi \cdot 2ah\, \mathrm{d}h + \int_{z_0}^{R} \pi(R^2 - h^2)\, \mathrm{d}h.$$

Cititorul va calcula fără dificultate integralele obținute.

i. În urma unei dilatări de raport k după o axă, volumul unui corp se multiplică cu k (demonstrație analoagă celei de la 9.61 d-e pentru cazul plan). De aici rezultă, de exemplu, că volumul unui elipsoid se deduce prin dilatare de raport a după axa Ox, o dilatare de raport b după axa Oy și o dilatare de raport c după axa Oz, dintr-o sferă de rază 1 cu volumul $\frac{4\pi}{3}$, deci *volumul elipsoidului de semiaxe a, b, c va fi* $\frac{4\pi}{3}abc$.

§ 9.7. Integrarea și derivarea unui șir de funcții

9.71. Fie un șir $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ de funcții integrabile pe intervalul $a \leqslant x \leqslant b$, care este convergent

peste tot către o funcție $f(x)$ pe $[a, b]$. Se pun întrebările:

(a) *Funcția f este și ea integrabilă?*

(b) *Dacă răspunsul la prima întrebare este afirmativ, este valabilă relația*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\ ? \qquad (1)$$

În cazul general, răspunsurile la cele două întrebări sînt negative.

(a) Presupunem că $f_n(x) = 1$ dacă $x = \frac{p}{q}$, unde $q \leqslant n$ și $x \in [0, 1]$ și 0 în caz contrar. Astfel, funcția $f_n(x)$ este nenulă numai într-un număr finit de puncte, deci (9.16 c) ea este integrabilă (integrala sa este nulă). Șirul $f_n(x)$ are în orice punct al intervalului $[0, 1]$, pentru

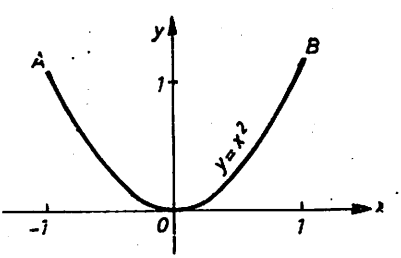


Fig. 9.42

$n \to \infty$, limita $f(x)$ egală cu unitatea în fiecare punct rațional și nulă în fiecare punct irațional. Funcția f nu este integrabilă (9.17).

(b) Presupunem că $f_n(x) = n \sin nx$ pentru $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{n}$ și 0 pentru $\frac{\pi}{n} \leqslant x \leqslant \pi$. Șirul $f_n(x)$ tinde către 0 în orice punct $x \in [0, \pi]$. Funcția limită este, evident, integrabilă și integrala sa pe intervalul $[0, \pi]$ este nulă. Totuși

$$\int_0^{\pi} f_n(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/n} n \sin nx\ \mathrm{d}x = 2,$$

și egalitatea (1) este falsă.

9.72. Ne putem aștepta ca răspunsurile la 9.71 (a), (b) să fie pozitive dacă convergența șirului $f_n(x)$ satisface cîteva condiții suplimentare. Convergența uniformă a șirului $f_n(x)$ către limita $f(x)$ pe care am definit-o în 5.93 reprezintă o astfel de condiție suplimentară suficientă. Să ne amintim definiția corespunzătoare adaptată pentru cazul nostru: șirul $f_1(x), f_2(x), \ldots$ converge uniform pe $[a, b]$ către funcția $f(x)$ dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un N astfel încît, oricare ar fi $x \in [a, b]$ și $n \geqslant N$, avem $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

TEOREMĂ. *Dacă un șir de funcții integrabile* $f_1(x), f_2(x), \ldots$, *converge uniform pe* $[a, b]$ *către o funcție* $f(x)$, *atunci* f *este integrabilă și are loc relația*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(\xi)\, d\xi = \int_a^x f(\xi)\, d\xi$$

uniform pe $[a, b]$. *În particular*,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(\xi)\, d\xi = \int_a^b f(\xi)\, d\xi.$$

Demonstrație. Oricare ar fi partițiile Π și Π' ale intervalului $[a, b]$ și pentru orice $n = 1, 2, \ldots$, avem:

$$S_\Pi(f) = S_\Pi(f_n) + S_\Pi(f - f_n); \tag{1}$$

$$S_{\Pi'}(f) = S_{\Pi'}(f_n) + S_{\Pi'}(f - f_n). \tag{2}$$

Pentru un $\varepsilon > 0$ dat, alegem un număr n astfel încît să avem

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

peste tot pe $[a, b]$. Atunci avem evident

$$|S_\Pi(f - f_n)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}, \quad |S_{\Pi'}(f - f_n)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

Funcţia f_n fiind integrabilă pe $[a, b]$, deci şi pe $[a, x]$ (9.15 k), există un $\delta > 0$ astfel încît oricare ar fi două partiţii Π şi Π' cu $d(\Pi) < \delta$, $d(\Pi') < \delta$, să avem

$$|S_\Pi(f_n) - S_{\Pi'}(f_n)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Atunci din (1) şi (2) rezultă

$$|S_\Pi(f) - S_{\Pi'}(f)| \leqslant |S_\Pi(f_n) - S_{\Pi'}(f_n)| + |S_\Pi(f - f_n)| +$$

$$+ |S_{\Pi'}(f - f_n)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}(b-a) +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{4(b-a)}(b-a) = \varepsilon.$$

Aceasta înseamnă că sumele integrale ale funcţiei f satisfac criteriul lui Cauchy; ţinînd cont de teorema 4.19 aplicată direcţiei $d(\Pi) \to 0$, rezultă existenţa integralei.

Pentru a demonstra partea a doua a teoremei, observăm că

$$\left|\int_a^x f(\xi)\,d\xi - \int_a^x f_n(\xi)\,d\xi\right| = \left|\int_a^x [f(\xi) - f_n(\xi)]\,d\xi\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^x |f(\xi) - f_n(\xi)|\,d\xi \leqslant \varepsilon(x-a) \leqslant \varepsilon(b-a) \qquad (3)$$

oricare ar fi numărul n ce satisface relaţia

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon \qquad (4)$$

pentru orice x. Deoarece şirul $f_n(x)$ converge uniform către $f(x)$, egalitatea (4) are loc pentru orice n începînd de la un anumit N, ε fiind fixat; de aici decurge rezultatul cerut.

9.73. Teorema 9.72 demonstrată pentru un şir de funcţii se extinde imediat la cazul unei serii de funcţii.

TEOREMĂ. *Dacă o serie de funcţii integrabile*

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x) + \ldots \qquad (1)$$

converge uniform pe $[a, b]$ *către suma sa* $S(x)$, *atunci* $S(x)$ *este integrabilă şi relaţia*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^x \varphi_k(\xi)\, d\xi = \int_a^x S(\xi)\, d\xi \tag{2}$$

are loc uniform pe $[a, b]$. *În particular*,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b \varphi_k(\xi)\, d\xi = \int_a^b S(\xi)\, d\xi. \tag{3}$$

Demonstraţia rezultă imediat din convergenţa uniformă a sumelor parţiale ale seriei (1) către $S(x)$ şi din teorema 9.72.

9.74. *Exemple.* Seriile

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, \tag{1}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots, \tag{2}$$

converg uniform pe orice interval $[-b, b]$, $0 < b < 1$. Integrîndu-le termen cu termen de la 0 la t se obţin încă două serii

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots, \tag{3}$$

$$\operatorname{arctg} t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \dots, \tag{4}$$

uniform convergente pe $[-b, b]$, $0 < b < 1$. Dacă ştim că seriile din membrul al doilea (3), (4) converg de asemenea pentru $t = 1$ şi că funcţiile din membrul întîi sînt continue pentru $0 \leqslant t \leqslant 1$, avem, ţinînd cont de 6.67 şi 5.68 :

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots, \tag{5}$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots \tag{6}$$

9.75. Putem folosi teorema 9.73 pentru a dezvolta diferite funcţii neelementare în serii de puteri. De exemplu, integrarea dezvoltării

$$\frac{\sin t}{t} = 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{t^6}{7!} + \dots,$$

convergente uniform pe orice interval $[-T, T]$, dă dezvoltarea sinusului integral:

$$\mathrm{Si}\, t = \int_0^t \frac{\sin \xi}{\xi}\, d\xi = t - \frac{t^3}{3 \cdot 3!} + \frac{t^5}{5 \cdot 5!} - \frac{t^7}{7 \cdot 7!} + \dots,$$

convergentă uniform şi ea pe orice interval $[-T, T]$.

9.76. Formulăm cîteva întrebări analoage cu 9.71(a), (b) relativ la derivare. Fie un şir de funcţii derivabile pe un interval $a \leqslant x \leqslant b$:

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots,$$

acest şir fiind convergent peste tot pe $[a, b]$ către o funcţie $f(x)$. Se pun întrebările

(a) *Funcţia f este derivabilă?*

(b) *Dacă răspunsul la punctul (a) este afirmativ, are loc sau nu relaţia*

$$f'(x) = \lim_{n \to \infty} f_n'(x)\,? \tag{1}$$

Răspunsul la aceste două întrebări este negativ în cazul general, chiar dacă convergenţa şirului $f_n(x)$ este uniformă:

(a) Şirul de funcţii derivabile pe $[-1, 1]$:

$$f_n(x) = |x|^{1+\frac{1}{n}}$$

converge uniform pe $[-1, 1]$ către funcţia $f(x) = |x|$, care nu este derivabilă pentru $x = 0$.

(b) Şirul

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sin nx$$

converge uniform pe $[0, \pi]$ către 0. Funcția limită este, evident, derivabilă. Dar relația (1) nu are loc : șirul $f_n(x) = \cos nx$ nu converge în nici un punct cu excepția lui $x = 0$.

9.77. Situația se schimbă, dacă presupunem convergența uniformă a derivatelor. Anume, are loc următorul rezultat.

TEOREMĂ. *Dacă un șir $x_n(t)$ de funcții netede pe porțiuni* (9.39) *converge cel puțin într-un punct t_0 al unui interval $[a, b]$ și șirul $x_n'(t)$ converge uniform pe $[a,b]$ către o funcție continuă pe porțiuni $g(t)$, atunci șirul $x_n(t)$ converge uniform pe $[a, b]$ către o funcție netedă pe porțiuni $x(t)$ care are derivata $x'(t) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n'(t) = g(t)$ în orice punct de continuitate al funcției $g(t)$.*

Demonstrație. Pentru o funcție x_n, conform 9.32, avem :

$$x_n(t) - x_n(t_0) = \int_{t_0}^{t} x_n'(\xi)\, d\xi \qquad (1)$$

și funcțiile $x_n(t) - x_n(t_0)$ converg uniform pe intervalul $[a, b]$ conform teoremei 9.72 ; dar numerele $x_n(t_0)$ converg către o limită, deci șirul $x_n(t)$ converge uniform. Notăm limita sa prin $x(t)$. Trecînd la limită în egalitatea (1) și folosind încă o dată teorema 9.72 se obține

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} g(\xi)\, d\xi.$$

Funcția $g(t)$ fiind continuă pe porțiuni, funcția $x(t)$ este derivabilă peste tot cu excepția punctelor de discontinuitate ale lui $g(t)$ (9.31) ; în plus, $x'(t) = g(t) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n'(t)$ în orice punct de continuitate al lui $g(t)$, ceea ce trebuia demonstrat.

9.78. Enunțăm o teoremă analoagă pentru serii.

TEOREMĂ. *Dacă o serie $u_1(x) + u_2(x) + \ldots$ de funcții netede pe porțiuni converge în cel puțin un punct al intervalului $[a, b]$ și dacă seria derivatelor $u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots$ converge uniform pe $[a, b]$ către o funcție $s(x)$ continuă pe*

porțiuni, atunci seria funcțiilor $u_n(x)$ converge uniform pe $[a, b]$ către o funcție $g(x)$ netedă pe porțiuni, a cărei derivată $g'(x)$ este egală cu $s(x)$ în orice punct de continuitate al funcției $s(x)$.

Demonstrația se reduce la aplicarea teoremei 9.77 șirului de sume parțiale ale seriei în discuție.

§ 9.8. Integrarea și derivarea în raport cu un parametru

9.81. Fie $f(x, t)$ o funcție numerică de o variabilă x ce parcurge un interval $\Delta = \{a \leqslant x \leqslant b\}$ și o variabilă t ce parcurge un spațiu metric M. Presupunem că această funcție este uniform continuă în raport cu mulțimea variabilelor x, t sau, ceea ce revine la același lucru, uniform continuă pe spațiul metric $Q = \Delta \times M$ (5.18 și 5.17a).

TEOREMĂ. *În condițiile formulate mai sus, funcția*

$$\Phi(t) = \int_a^b f(x, t)\,\mathrm{d}x \quad (t \in M)$$

este uniform continuă pe spațiul M.

Demonstrație. Notăm prin

$$\omega_f(\delta) = \sup_{\substack{|x'-x''|\leqslant\delta \\ \rho(t',t'')<\delta}} |f(x', t') - f(x'', t'')|$$

oscilația funcției $f(x, t)$ pe spațiul Q (5.17 c). Pentru un $\varepsilon > 0$ dat, există un $\delta_0 > 0$ astfel încît dacă $\delta < \delta_0$ să avem $\omega_f(\delta) < \varepsilon$. Fie $\rho(t', t'') \leqslant \delta \leqslant \delta_0$; atunci

$$|\Phi(t') - \Phi(t'')| = \left|\int_a^b [f(x, t') - f(x, t'')]\mathrm{d}x\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b |f(x, t') - f(x, t'')|\,\mathrm{d}x \leqslant \omega_f(\delta)\,(b - a),$$

de unde

$$\omega_\Phi(\delta) = \sup_{\rho(t',t'')<\delta} |\Phi(t') - \Phi(t'')| \leqslant \omega_f(\delta)\,(b - a) < \varepsilon\,(b - a),$$

ceea ce demonstrează continuitatea uniformă a funcției $\Phi(t)$ pe M.

9.82. *Fie $f(x, t)$ o funcție reală defintă și continuă pe un dreptunghi $Q = \{a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant t \leqslant d\}$. Atunci*

$$\int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,t)\, \mathrm{d}t \right\} \mathrm{d}x = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, t)\, \mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}t. \tag{1}$$

Demonstrație. Punem

$$\Phi(t) = \int_a^b f(x, t)\, \mathrm{d}x \quad (c \leqslant t \leqslant d),$$

$$F(x) = \int_c^d f(x, t)\, \mathrm{d}t \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

În virtutea lui 9.81, funcțiile $\Phi(t)$ și $F(x)$ sînt continue. Amintim apoi că diferența dintre integrala unei funcții continue $G(t)$ pe intervalul $[c, d]$ și suma sa integrală construită pentru o partiție Π cu $\mathrm{d}(\Pi) \leqslant \delta$ are estimarea (9.15 m)

$$\left| \int_c^d G(t)\, \mathrm{d}t - \sum_{j=0}^{m-1} G(\xi_j) \Delta t_j \right| \leqslant \omega_G(\delta)\,(d - c). \tag{2}$$

În particular, pentru o partiție Π a intervalului $[c, d]$ cu $\mathrm{d}(\Pi) < \delta$ avem

$$\left| \int_c^d f(x, t)\, \mathrm{d}t - \sum_{j=0}^{m-1} f(x, t_j)\ \Delta t_j \right| \leqslant \omega_f(\delta)\,(d - c).$$

Integrînd această inegalitate în raport cu x, obținem (9.15 h)

$$\left| \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, t)\, \mathrm{d}t \right\} \mathrm{d}x - \int_a^b \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} f(x, t_j)\, \Delta t_j \right\} \mathrm{d}x \right| \leqslant$$

$$\leqslant \omega_f(\delta)\,(d - c)\,(b - a). \tag{3}$$

Dar în virtutea aceleiași estimări (2) aplicată funcției $\Phi(t)$, avem

$$\left|\int_c^d \Phi(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{j=0}^{m-1} \Phi(t_j)\,\Delta t_j\right| =$$

$$= \left|\int_c^d \left\{\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}t - \sum_{j=0}^{m-1}\left\{\int_a^b f(x,t_j)\,\mathrm{d}x\right\}\Delta t_j\right| \leqslant$$

$$\leqslant \omega_\Phi(\delta)\,(d-c) \leqslant \omega_f(\delta)\,(b-a)\,(d-c). \qquad (4)$$

Deoarece

$$\int_a^b \left\{\sum_{j=0}^{m-1} f(x,t_j)\,\Delta t_j\right\}\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{m-1}\left\{\int_a^b f(x,t_j)\,\mathrm{d}x\right\}\Delta t_j,$$

din (3) și (4) rezultă că

$$\left|\int_a^b\left\{\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}x - \int_c^d\left\{\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\omega_f(\delta)(b-a)(d-c),$$

și cum membrul al doilea poate fi făcut oricît de mic dorim, egalitatea (1) este adevărată, ceea ce trebuia demonstrat.

9.83. *Exemplu.* Punem, în teorema 9.82, $f(x,t) = x^t$, $x \in [0,1]$, $t \in [\alpha,\beta]$ $(\alpha \geqslant 0,\ \beta > 0)$; obținem

$$\int_0^1\left\{\int_\alpha^\beta x^t\,\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta\left\{\int_0^1 x^t\,\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}t.$$

Calculînd integralele dintre acolade, găsim valoarea integralei definite

$$\int_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{1+\beta}{1+\alpha}.$$

Ar fi fost dificil să calculăm integrala prin mijloacele uzuale descrise în §§ 9.4-9.5, integrala nedefinită a lui $\dfrac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x}$ neexprimîndu-se prin funcții elementare.

9.84. TEOREMĂ. *Dacă o funcție $f(x, t)$ este definită pentru $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant t \leqslant d$ și are derivata continuă în raport cu t într-o vecinătate a unui punct $t_0 \in (c, d)$:*

$$f'_t(x, t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t}, \qquad |t - t_0| < \delta,$$

atunci este satisfăcută egalitatea

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b f(x, t)\,\mathrm{d}x\right]_{t=t_0} = \int_a^b f'_t(x, t_0)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

pentru orice $t_0 \in [c, d]$.

Demonstrație. Funcția $f'_t(x, t)$ fiind continuă în dreptunghiul $a \leqslant x \leqslant b$, $t_0 - \delta \leqslant t \leqslant t_0 + \delta$, putem să-i aplicăm teorema 9.82; folosind formula Newton-Leibniz (9.32) se obține apoi

$$\int_{t_0}^{t}\left\{\int_a^b f'_t(x, t)\,\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}t = \int_a^b\left\{\int_{t_0}^{t} f'_t(x, t)\,\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b f(x, t)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x, t_0)\,\mathrm{d}x,$$

pentru orice $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Primul membru are derivata în t egală cu funcția de sub semnul integrală (9.31). Așadar și al doilea membru al egalității are aceeași derivată. Dar, al doilea termen al membrului secund nu depinde de t, deci derivata sa în t este nulă. Egalînd derivatele celor doi membri și punînd $t = t_0$ se obține (1). Teorema este demonstrată.

9.85. *Exemplu.* Integrala

$$I(t) = \int_0^{\pi/2} \ln(t^2 - \sin^2 x)\,\mathrm{d}x \quad (t > 1)$$

nu poate fi calculată prin metodele din § 9.4. Totuși, conform teoremei 9.84 a cărei ipoteză este evident satisfăcută,

avem

$$I'(t) = \int_0^{\pi/2} \frac{2t\,dx}{t^2 - \sin^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{t^2 - 1}}$$

(atunci putem deja găsi o primitivă cu ajutorul lui 9.43 b). Integrînd această egalitate în raport cu t se regăseşte valoarea integralei $I(t)$:

$$I(t) = \int \frac{\pi}{\sqrt{t^2 - 1}}\,dt = \pi \ln (t + \sqrt{t^2 - 1}) + C.$$

Pentru a determina valoarea lui C, se trece la limită pentru $t \to \infty$ sau $\tau = \frac{1}{t} \to 0$ în egalitatea

$$C = \int_0^{\pi/2} \ln (t^2 - \sin^2 x)\,dx - \pi \ln (t + \sqrt{t^2 - 1}) =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \ln\left(1 - \frac{\sin^2 x}{t^2}\right) dx - \pi \ln \frac{t + \sqrt{t^2 - 1}}{t},$$

adevărată pentru toţi $t > 1$. Să observăm că funcţia

$$\ln (1 - \tau^2 \sin^2 x)$$

este definită şi continuă în dreptunghiul $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0 < 1$, deci funcţia

$$\Phi(\tau) = \int_0^{\pi/2} \ln (1 - \tau^2 \sin^2 x)\,dx$$

este continuă pentru $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$ în virtutea lui 9.81. Prin urmare

$$0 = \Phi(0) = \lim_{\tau \to 0} \Phi(\tau) = \lim_{\tau \to 0} \int_0^{\pi/2} \ln (1 - \tau^2 \sin^2 x)\,dx.$$

Pe de altă parte,

$$\lim_{t\to\infty} \pi \ln \frac{t+\sqrt{t^2-1}}{t} = \pi \lim_{\tau\to 0} \ln(1+\sqrt{1-\tau^2}) = \pi \ln 2.$$

În final, avem $C = -\pi \ln 2$ și

$$I(t) = \pi \ln \frac{t+\sqrt{t^2-1}}{2}.$$

9.86. Iată un caz puțin mai delicat unde nu numai funcția de integrat dar și limitele de integrare depind de parametrul t.

a. TEOREMĂ. *Fie $f(x, t)$ o funcție continuă pentru $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant t \leqslant d$ a cărei derivată $f'_t(x, t)$ există și este continuă pentru $a \leqslant x \leqslant b$, $|t - t_0| \leqslant \delta$. Dacă o funcție $\varphi(t)$ este definită, continuă și derivabilă pentru $|t - t_0| < \delta$, cu valori într-un interval $a \leqslant x \leqslant b$,* funcția

$$\Phi(t) = \int_a^{\varphi(t)} f(x, t)\, dx$$

este derivabilă pentru $t = t_0$ și

$$\Phi'(t_0) = \int_a^{\varphi(t_0)} f'_t(x, t_0)\, dx + f(\varphi(t_0), t_0) \cdot \varphi'(t_0). \qquad (1)$$

Demonstrație. Punem $\Phi(t) = \Phi_1(t) + \Phi_2(t)$, unde

$$\Phi_1(t) = \int_a^{\varphi(t_0)} f(x, t)\, dx, \quad \Phi_2(t) = \int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t)} f(x, t)\, dx.$$

Funcția $\Phi_1(t)$, conform teoremei 9.84, are pentru $t = t_0$ derivata

$$\Phi'_1(t_0) = \int_a^{\varphi(t_0)} f'_t(x, t_0)\, dx. \qquad (2)$$

Să găsim derivata lui $\Phi_2(t)$. Avem în virtutea teoremei mediei 9.15 h,

$$\frac{\Phi_2(t_0+\Delta t)-\Phi_2(t_0)}{\Delta t}=\frac{1}{\Delta t}\int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t_0+\Delta t)} f(x,t_0+\Delta t)\,dx=$$

$$=\frac{\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0)}{\Delta t}f(\theta,t_0+\Delta t)$$

numărul θ este cuprins între $\varphi(t_0)$ și $\varphi(t_0+\Delta t)$. În virtutea ipotezelor relativ la funcțiile $f(x,t)$ și $\varphi(t)$, expresia obținută tinde, pentru $\Delta t\to 0$, către limita

$$\Phi_2'(t_0)=\varphi'(t_0)\cdot f(\varphi(t_0),t_0). \tag{3}$$

În final, (1) rezultă din (2) și (3) și teorema este demonstrată.

b. Fie, în particular, $c=a$, $d=b$, $\varphi(t)=t$. Avem formula

$$\frac{d}{dt}\int_a^t f(x,t)\,dx\Big|_{t=t_0}=\int_a^{t_0} f_t'(x,t_0)\,dx+f(t_0,t_0), \tag{4}$$

adevărată în ipoteza că $f(x,t)$ este continuă pentru $a\leqslant x\leqslant b$, $a\leqslant t\leqslant b$ și că $f_t'(x,t)$ există și este continuă în vecinătatea punctului $t=t_0$.

9.87. *Exemplu.* Să găsim derivata în raport cu x a funcției

$$I_n(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-u)^{n-1}f(u)\,du\quad (n=1,2,\ldots), \tag{1}$$

unde $f(x)$ este o funcție continuă pentru $a\leqslant x\leqslant b$.

Conform formulei 9.86 (4), unde t este înlocuit prin x și x prin u, avem

$$I_n'(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (n-1)\,(x-u)^{n-2}f(u)\,du+$$

$$+\frac{(x-x)^{n-1}}{(n-1)!}f(x)=I_{n-1}(x).$$

În plus, avem, evident, $I_n(a) = 0$, deoarece

$$I_n(x) = \int_a^x I'_n(\xi)\, d\xi = \int_a^x I_{n-1}(\xi)\, d\xi.$$

Să observăm de asemenea că $I'_1(x) = \int_a^x f(u)\, du$.

De aici rezultă că $I_n(x)$ este rezultatul a n integrări succesive ale funcției $f(x)$ de la a la x, altfel spus, al operației inverse celei de n derivări succesive. Formula (1) pune rezultatul acestei operații sub forma unei integrale simple cu parametru.

§ 9.9. Integrale curbilinii

9.91. *Integrala curbilinie Stieltjes.* Considerăm în spațiul n-dimensional $\mathbb{R}_n$ o curbă L a cărei reprezentare parametrică este $x_j = x_j(t)$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$, unde funcțiile $x_j(t)$ sînt definite și continue pe un interval $[a, b]$ și avînd acolo derivate continue (sau continue pe porțiuni). Curba parcursă în sensul lui t crescător de la a la b este numită *drum*. Conform 9.63 g, dacă $\sum_1^n [x'_j(t+0)]^2$ și $\sum_1^n [x'_j(t-0)]^2$ nu se anulează, putem alege ca parametru pe drumul L lungimea arcului s, socotită începînd de la un punct fixat A.

Considerăm o porțiune a drumului L între punctul $A(s = 0)$ și un punct $B(s = S)$. Notăm prin Π diviziunea arcului $\widehat{AB}$ prin punctele succesive $A = M_0, M_1, \ldots, M_p = B$. Valorile corespunzătoare ale parametrului s, anume

$$s(A) = 0 \leqslant s(M_1) = s_1 \leqslant \ldots \leqslant s(B) = s_p = S,$$

formează o diviziune a intervalului $[0, S]$ al axei reale. Punem, ca de obicei,

$$d(\Pi) = \max (s_{j+1} - s_j) = \max \Delta s_j \quad (j = 1, \ldots, p-1).$$

Fie $f(M)$ și $g(M)$ două funcții reale date pe drumul $\widehat{AB}$.

Formăm suma

$$\sum_{j=0}^{p-1} f(M_j')\,[g(M_{j+1}) - g(M_j)], \tag{1}$$

unde fiecare punct M_j' aparține arcului $\overset{\frown}{M_j M_{j+1}}$ deoarece $s(M_j') = s_j' \in [s_j, s_{j+1}]$. Limita sumei (1) pentru $d(\Pi) \to 0$, dacă ea există, este numită *integrala curbilinie Stieltjes a funcției $f(M)$ în raport cu funcția $g(M)$, luată în lungul arcului $\overset{\frown}{AB}$* și notată prin

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(M)\, dg(M). \tag{2}$$

De exemplu, avem

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} dg(M) = g(B) - g(A).$$

Dacă funcția $g(M)$ este constantă pe arcul $\overset{\frown}{AB}$, atunci, evident,

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(M)\, dg(M) = 0.$$

Dacă una din integralele de mai jos există, atunci cealaltă există de asemenea și are loc egalitatea

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(M)\, dg(M) = -\int_{\overset{\frown}{BA}} f(M)\, dg(M).$$

Dacă drumul $\overset{\frown}{AB}$ este dat de ecuațiile sale parametrice $x_k = x_k(t)$, $(k = 1, \ldots, n)$, $a \leqslant t \leqslant b$, se poate spune că $f(M)$ și $g(M)$ sînt funcții de parametrul t : $f = f(t)$, $g = g(t)$; atunci suma integrală (1) se pune sub forma

$$\sum_{j=0}^{p-1} f(t_j')\,[g(t_{j+1}) - g(t_j)], \quad t_j \leqslant t_j' \leqslant t_{j+1}. \tag{3}$$

Dacă se face o rafinare nelimitată a diviziunii drumului $\overset{\frown}{AB}$, la fel se întîmplă cu diviziunea corespunzătoare a intervalului $[a, b]$ de variație a lui t, deoarece t este o

funcție derivabilă de argument lungimea arcului s; avem deci, conform formulei lui Lagrange,

$$\Delta t_j = t'(\xi_j)\,\Delta s_j, \quad s_j \leqslant \xi_j \leqslant s_{j+1}.$$

Invers, pentru aceleași motive, unei rafinări nelimitate a unei diviziuni a intervalului $[a, b]$ îi corespunde o rafinare nelimitată a diviziunii drumului $\widehat{AB}$. Deci convergența sumei (1) către limita sa este echivalentă cu convergența sumei (3) și problema existenței integralei curbilinii Stieltjes (2) se reduce la problema existenței integralei uzuale Stieltjes (9.56):

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}g(t), \tag{4}$$

care, pentru o funcție netedă $g(t)$, este tocmai integrala Riemann 9.56(4).

În consecință, sînt adevărate următoarele formule, analoage lui 9.56(5) — (8):

$$\int_{\widehat{AB}} [\alpha_1 f_1(M) + \alpha_2 f_2(M)]\,\mathrm{d}g(M) =$$

$$= \alpha_1 \int_{\widehat{AB}} f_1(M)\ \mathrm{d}g(M) + \alpha_2 \int_{\widehat{AB}} f_2(M)\,\mathrm{d}g(M); \tag{5}$$

$$\int_{\widehat{AB}} f(M)\,\mathrm{d}\,[\beta_1 g_1(M) + \beta_2 g_2(M)] =$$

$$= \beta_1 \int_{\widehat{AB}} f(M)\,\mathrm{d}g_1(M) + \beta_2 \int_{\widehat{AB}} f(M)\,\mathrm{d}g_2(M); \tag{6}$$

$$\int_{\widehat{AB}} f(M)\,\mathrm{d}g(M) =$$

$$= \int_{\widehat{AC}} f(M)\,\mathrm{d}g(M) + \int_{\widehat{CB}} f(M)\mathrm{d}g(M) \quad (\widehat{AB} \ni C); \tag{7}$$

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(M)\,\mathrm{d}g(M) = f(M)\,g(M)\Big|_A^B - \int_{\overset{\frown}{AB}} g(M)\,\mathrm{d}f(M), \quad (8)$$

de îndată ce integralele din membrii secunzi există.

Întîlnim adeseori sume de integrale curbilinii luate în lungul aceluiași drum

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f_1(M)\,\mathrm{d}g_1(M) + \ldots + \int_{\overset{\frown}{AB}} f_p(M)\,\mathrm{d}g_p(M);$$

notația sa mai scurtă este

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f_1(M)\,\mathrm{d}g_1(M) + \ldots + f_p(M)\,\mathrm{d}g_p(M) =$$

$$= \int_{\overset{\frown}{AB}} f_1\,\mathrm{d}g_1 + \ldots + f_p\,\mathrm{d}g_p$$

(fără paranteze). Presupunînd că funcțiile $f_j(t)$ sînt continue și funcțiile $g_j(t)$ sînt netede pe porțiuni, suma este calculată după regula 9.56(4):

$$\int_{t=a}^{b} [f_1(t)\,g_1'(t) + \ldots + f_p(t)\,g_p'(t)]\,\mathrm{d}t. \quad (9)$$

9.92. *Exemple.* Să calculăm integralele curbilinii

$$I_1 = \int_{\overset{\frown}{AB}} (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x, \quad I_2 = \int_{\overset{\frown}{AB}} (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y,$$

$\overset{\frown}{AB}$ fiind arcul de parabolă $y = x^2$ între punctele $A = (-1, 1)$ și $B = (1, 1)$ (fig. 9.42). În primul caz se poate alege x ca parametru și avem

$$I_1 = \int_{-1}^{1} (x^2 - x^4)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}.$$

În al doilea caz este imposibil de ales y ca parametru deoarece unei singure valori pentru y corespund două puncte pe arc. Din această cauză tot x va fi parametru; vom avea, conform 9.56 (4):

$$I_2 = \int_{-1}^{1} (x^2 - x^4)\, 2x\, \mathrm{d}x = \left[\frac{2x^4}{4} - \frac{2x^6}{6}\right]\Bigg|_{-1}^{1} = 0.$$

9.93. *Integrala în lungul unui contur închis.* Dacă extremitatea B a unui drum $\overset{\frown}{AB}$ se confundă cu originea A, drumul $\overset{\frown}{AB}$ se numește *contur închis.* Integrala în lungul unui contur închis L este adesea notată prin

$$\oint_L f\, \mathrm{d}g. \tag{1}$$

Valoarea integralei (1) nu depinde de alegerea lui A deoarece, pentru orice altă origine A', avem

$$\int_{\overset{\frown}{AA'A}} f\, \mathrm{d}g = \int_{\overset{\frown}{AA'}} f\, \mathrm{d}g + \int_{\overset{\frown}{A'A}} f\, \mathrm{d}g = \int_{\overset{\frown}{A'A}} f\, \mathrm{d}g + \int_{\overset{\frown}{AA'}} f\, \mathrm{d}g = \int_{\overset{\frown}{A'AA'}} f\, \mathrm{d}g,$$

conform 9.91 (7).

Totuși, integrala (1) *depinde de sensul* parcurgerii conturului; într-adevăr, inversînd sensul parcurgerii, toate diferențele $g(M_{j+1}) - g(M_j)$ își schimbă semnul, deci integrala (1) își schimbă semnul ea însăși. Sensul parcurgerii este cîteodată indicat de o săgeată

$$\oint_L f\, \mathrm{d}g = -\oint_L f\, \mathrm{d}g. \tag{2}$$

Această indicație nu este utilă decît în cazul plan ($n=2$).

9.94. *Calculul ariei unei figuri plane cu ajutorul integralei curbilinii.* Fie o figură plană (fig. 9.43) limitată de curbele $y = \varphi_1(x)$ și $y = \varphi_2(x)$. Aria sa este

$$S = \int_a^b \varphi_1(x)\, \mathrm{d}x - \int_a^b \varphi_2(x)\, \mathrm{d}x. \tag{1}$$

Observăm că, prin definiție, cele două integrale pot fi considerate ca integrale curbilinii, deoarece

$$S = \int_{L_1} y\,dx - \int_{L_2} y\,dx.$$

Putem atunci nota

$$S = \int_{L_1} y\,dx + \int_{-L_2} y\,dx \quad (-L_2 \text{ are aceeași urmă cu } L_2,$$

parcursă de la B la A), și putem adăuga integralele (nule) luate în lungul segmentelor sale verticale (dacă există unul sau două); suma tuturor acestor integrale reprezintă

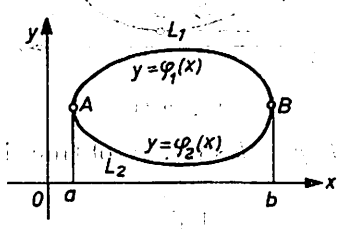


Fig. 9.43

integrala luată în lungul conturului închis:

$$S = \oint_L y\,dx = -\oint_L y\,dx. \qquad (2)$$

Astfel, aria unei figuri se exprimă printr-o integrală curbilinie luată în lungul conturului ei L.

Se poate stabili o formulă mai simetrică. Anume, schimbînd rolul coordonatelor x și y, se găsește (fig. 9.44):

$$S = \int_c^d \psi_1(y)\,dy - \int_c^d \psi_2(y)\,dy = \int_{L_3} x\,dy - \int_{L_4} x\,dy =$$

$$= \int_{L_3}^{c} x\,dy + \int_{-L_4} x\,dy = \oint_L x\,dy. \qquad (3)$$

Adunarea lui (3) cu (2) și înmulțirea cu $\frac{1}{2}$ dă

$$S = \frac{1}{2}\oint_L x\,dy - y\,dx. \tag{4}$$

Parametrul fiind convenabil ales, formula (4) poate să se dovedească mai comodă decît (1). De exemplu, pentru o

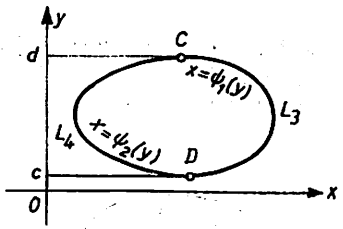


Fig. 9.44

elipsă $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, se obține direct

$$S = \frac{1}{2}\oint_L x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_{t=0}^{2\pi} ab\,[\cos^2 t + \sin^2 t]\,dt = \pi ab.$$

Este bine de comparat formula (4) cu formula

$$\int_A^B x\,dy + y\,dx = \int_A^B d(xy) = xy\Big|_A^B = x(B)y(B) - x(A)y(A);$$

pentru un contur închis Γ, avem

$$\oint_\Gamma x\,dy + y\,dx = 0.$$

Într-un mod analog, pentru orice contur închis Γ și pentru două funcții continue f și φ, avem

$$\oint_\Gamma f(x)\,dx = 0; \qquad \oint_\Gamma \varphi(y)\,dy = 0.$$

9.95. *Aproximarea unei integrale luate în lungul unei curbe printr-o integrală luată în lungul unei linii poligonale.* Ne mărginim la integrale curbilinii de forma

$$\int_L f_1(M)\,dx_1 + \ldots + f_n(M)\,dx_n. \qquad (1)$$

Presupunînd că L este un drum în spațiu n-dimensional, a cărui reprezentare parametrică este $x_j = x_j(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, $j = 1, \ldots, n$, funcțiile $x_j'(t)$ fiind continue și astfel încît $\sum_{j=1}^{n} [x_j'(t)]^2 > 0$. (De altfel, putem presupune că funcțiile respective sînt continue pe porțiuni; atunci se împarte drumul L într-un număr finit de arce pe care $x_j'(t)$ sînt continue.)

Integralele de forma (1) admit următoarea estimație cu ajutorul lungimii $s(L)$ a drumului L:

$$\left| \int_L f_1(M)\,dx_1 + \ldots + f_n(M)\,dx_n \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{M \in L} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} f_k^2(M)} \cdot s(L). \qquad (2)$$

Într-adevăr, dacă se consideră o sumă integrală formată pentru o diviziune Π, se obține aplicînd inegalitatea 2.68(4):

$$\left| \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=1}^{n} f_j(M_k)\,\Delta_j x_k \right| \leqslant \sum_{j=0}^{p-1} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} f_j^2(M_k)} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\Delta_j x_k)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{M} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} f_k^2(M)} \cdot \sum_{j=0}^{p-1} \Delta h_j,$$

unde Δh_j este lungimea coardei $M_j M_{j+1}$. Suma lungimilor acestor coarde fiind lungimea liniei poligonale $M_0 M_1 \ldots M_p$, ea nu depășește lungimea $s(L)$ a însuși arcului L. Trecînd la limită se obține (2).

Presupunem apoi că funcțiile $f_1(M), \ldots, f_n(M)$ sînt definite și continue nu numai pe curba L, dar și într-o vecinătate a lui L care conține toate liniile poligonale de

laturi suficient de mici, înscrise în L. Fie o diviziune $\Pi = \{a = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_p = b\}$ a intervalului $[a, b]$ de variație a parametrului t și L_Π o linie poligonală de vîrfuri succesive $A = M_0, M_1, \ldots, M_p = B$ pe curba L corespunzătoare valorilor $t_0, t_1, \ldots, t_p$ ale parametrului t. Avem

$$\lim_{d(\Pi)\to 0} \int_{L_\Pi} f_1(M)\, dx_1 + \ldots + f_n(M)\, dx_n =$$

$$= \int_L f_1(M)\, dx_1 + \ldots + f_n(M)\, dx_n. \tag{3}$$

De aici rezultă că, integralele în lungul tuturor liniilor poligonale dintr-un domeniu din spațiul $\mathbb{R}_n$ fiind cunoscute, se pot calcula integralele în lungul oricărei curbe conținute în acest domeniu.

Este suficient să demonstrăm relația (3) pentru $n = 1$:

$$\lim_{d(\Pi)\to 0} \int_{L_\Pi} f_1(M)\, dx_1 = \int_L f_1(M)\, dx_1. \tag{4}$$

Făcînd demonstrația, omitem indicele k. Fie un $\varepsilon > 0$, alegem un $\delta > 0$ astfel încît

$$\left| \int_L f(M)\, dx - \sum_{j=0}^{p-1} f(M_j)\Delta x_j \right| < \varepsilon \tag{5}$$

pentru $d(\Pi) < \delta$ și $\rho(M, M') < \delta$ să implice $|f(M) - f(M')| < \varepsilon$.

Considerăm la început o singură latură a liniei poligonale L_Π, de exemplu $M_j M_{j+1}$. Avem, folosind estimarea (2) :

$$\int_{M_j M_{j+1}} f(M_j)\, dx = f(M_j) \int_{M_j M_{j+1}} dx = f(M_j)\, \Delta x_j$$

și

$$\left| \int_{M_j M_{j+1}} f(M)\, dx - f(M_j)\Delta x_j \right| = \left| \int_{M_j M_{j+1}} f(M)\, dx - \right.$$

$$\left. - \int_{M_j M_{j+1}} f(M_j)\, dx \right| = \left| \int_{M_j M_{j+1}} [f(M) - f(M_j)]\, dx \right| \leqslant \varepsilon s(M_j M_{j+1}).$$

Sumînd după toate laturile, se obține

$$\left| \int_{L_\Pi} f(M)\,dx - \sum_{j=0}^{p-1} f(M_j)\,\Delta x_j \right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \sum_{j=0}^{p-1} s(M_j M_{j+1}) = \varepsilon s(L_\Pi). \qquad (6)$$

Lungimile $s(L_\Pi)$ ale liniilor poligonale L_Π fiind mărginite (ele au ca limită lungimea arcului L), inegalitățile (5) și (6) implică (4). Prin urmare, relația (3) este stabilită.

EXERCIȚII

1. Dacă $f(x)$ este o funcție periodică pe $(-\infty, \infty)$, atunci funcția

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi$$

se poate descompune în suma dintre o funcție periodică și o funcție de gradul întîi.

2. Dacă f și $\varphi \geqslant 0$ sînt mărginite și integrabile pe $[a, b]$ și dacă φ nu descrește, atunci există un punct $\xi \in [a, b]$ astfel încît

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(b-0)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Dacă $\varphi(x) \geqslant 0$ nu crește, atunci există un punct $\eta \in [a, b]$ astfel încît

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(a+0)\int_0^\eta f(x)\,dx.$$

3. Dacă f și φ sînt mărginite și integrabile pe $[a, b]$ și dacă φ este monotonă, atunci există un punct $\xi \in [a, b]$ astfel încît

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(a+0)\int_a^\xi f(x)\,dx + \varphi(b-0)\int_\xi^b f(x)\,dx$$

(„a doua teoremă a mediei").

4. Să se demonstreze formula de integrare succesivă (multiplă) prin părți

$$\int_a^b uv^{(n+1)}(x)\,dx = \left[uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + \ldots + (-1)^{(n)} u^{(n)} v\right]\Big|_a^b + \\ + (-1)^{n+1}\int_a^b u^{(n+1)}\, v\, dx$$

în ipoteze convenabile asupra derivabilității funcțiilor u și v.

5. Pentru o funcție mărginită f și pentru un interval $[\alpha, \beta]$ punem

$$\omega[f; \alpha, \beta] = \sup_{x', x'' \in [\alpha,\beta]} |f(x') - f(x'')|.$$

Demonstrați că funcția f este integrabilă pe $[a, b]$ dacă și numai dacă

$$\lim_{d(\Pi)\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} \omega\,[f;\ x_j,\ x_{j+1}] \cdot (x_{j+1} - x_j) = 0,$$

unde $\Pi = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$, $d(\Pi) = \max_j (x_{j+1} - x_j)$ (*criteriul lui Riemann*).

6. Să se demonstreze că o funcție monotonă și mărginită este integrabilă.

7. Dacă o funcție f este integrabilă, atunci la fel este și funcția $|f|$.

8. Se numește *oscilația* unei funcții f într-un punct c, numărul

$$\omega[f; c] = \inf_{\alpha,\beta} \omega[f; \alpha, \beta], \qquad \alpha < c < \beta.$$

Să se demonstreze că pentru ca o funcție mărginită f să fie integrabilă pe $[a, b]$, este necesar și suficient ca, pentru orice $\varepsilon > 0$ și $\delta > 0$, mulțimea punctelor $c \in [a, b]$ cu $\omega[f; c] \geqslant \varepsilon$ să aparțină unui număr finit de intervale pentru care suma lungimilor să fie $\leqslant \delta$ (*criteriul lui Du Bois-Reymond*).

9. Să se demonstreze că pentru ca o funcție mărginită f să fie integrabilă pe $[a, b]$, este necesar și suficient ca pentru orice $\delta > 0$, mulțimea punctelor de discontinuitate ale lui f să fie inclusă într-o familie finită sau numărabilă de intervale pentru care suma lungimilor să fie $\leqslant \delta$ (*criteriul lui Lebesgue*).

10. Fie f o funcție integrabilă. Demonstrați că funcția $\dfrac{1}{f}$ este și ea integrabilă dacă ea este mărginită.

11. Integrînd inegalitatea dublă $\sin^{2n+1} x \leqslant \sin^{2n} x \leqslant \sin^{2n-1} x$ pe intervalul $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ și folosind formulele 9.51(1), (2), să se stabilească

formula lui Wallis (1656)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4 \ldots 2n\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)(2n+1)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{4n^2}}.$$

12. Fie f o funcție continuă pe un interval $[A, B]$ care conține două puncte a și b (dispuse arbitrar). Fie, apoi, $\Pi = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ o mulțime de puncte ale intervalului $[A, B]$ (dispuse arbitrar). Formăm o „sumă integrală generalizată"

$$s_\Pi(f) = \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j), \tag{1}$$

unde ξ_j este un punct oarecare între x_j și x_{j+1}. Să se demonstreze că, pentru $\sum_{j=0}^{n-1} |x_{j+1} - x_j| < C$ și $d(\Pi) = \max |x_{j+1} - x_j| \to 0$, suma (1) tinde către o limită și că

$$\lim_{d(\Pi)\to 0} s_\Pi(f) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

13. Dacă, în exercițiul 12, se suprimă ipoteza $\sum_{j=0}^{n-1} |x_{j+1} - x_j| < C$ sau nu se presupune continuitatea pe porțiuni a funcției f, atunci mărimea (1) poate să nu aibă limită.

14. (*Definiția axiomatică a integralei*). Presupunem că oricărei funcții continue pe porțiuni pe un interval $[a, b]$ și oricărui interval $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ facem să-i corespundă un număr $I_\alpha^\beta(f)$ ce satisface următoarele condiții:

1) $I_\alpha^\beta(kf) = k\, I_\alpha^\beta(f)$ pentru orice constantă k;

2) $I_\alpha^\beta(f) + I_\alpha^\beta(g) = I_\alpha^\beta(f+g)$ oricare ar fi funcțiile f și g continue pe porțiuni;

3) $I_\alpha^\beta(1) = \beta - \alpha$;

4) $I_\alpha^\beta(f) = I_\alpha^\nu(f) + I_\nu^\beta(f)$ pentru orice $\alpha < \nu < \beta$;

5) $|I_\alpha^\beta(f)| \leqslant C \sup |f(x)|$ cu C constantă fixă.

Atunci oricare ar fi o funcție f continuă pe porțiuni, avem

$$I_\alpha^\beta(f) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx. \tag{3}$$

15. Convergența seriei 9.74(6) fiind prea lentă, ea este puțin convenabilă calculului numărului π. Să se arate că următoarea dezvoltare, care reprezintă un mijloc mai eficient de calcul al lui π, este adevărată

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \ldots\right) = 0{,}523599\ldots$$

NOTĂ ISTORICĂ

Problemele geometrice care, în notațiile moderne, conduc la $\int_a^b x\,dx$ sau $\int_a^b x^2\,dx$, au fost considerate de Arhimede încă din antichitate. Calculul integral în sensul actual, cu aplicațiile sale geometrice, mecanice și fizice, este opera secolului al XVII-lea și este datorat în esență lui Newton și Leibniz. Newton numește fluxiune — derivata și fluentă — primitiva. Simbolurile d și $\int$, ca și regulile de calcul ale integralelor nedefinite, aparțin lui Leibniz. Integralele curbilinii apar pentru prima dată la Clairaut (1743).

Definiția riguroasă a integralei ca limita sumelor integrale este dată de Cauchy (1821), după care punerea problemei existenței integralei funcțiilor de o clasă sau alta devine, în sfîrșit, posibilă. Cauchy propune o demonstrație a existenței integralei unei funcții continue care s-a dovedit totuși incorectă, în lipsa noțiunii de continuitate uniformă. Prima demonstrație corectă a existenței integralei unei funcții continue este dată de Darboux în 1875. Anumite condiții necesare și suficiente de integrabilitate a unei funcții (discontinue) sînt date succesiv de Riemann, Du Bois-Reymond și Lebesgue în a doua jumătate a secolului al XIX-lea. În 1894 Stieltjes introduce o nouă noțiune de integrală, în legătură cu anumite probleme speciale; în secolul al XX-lea această noțiune este aplicată des în probleme de ordin general. În 1902, Lebesgue formulează o noțiune de integrală mai generală decît precedentele; în matematica modernă ea joacă un rol decisiv: în primul rînd mulțimea funcțiilor integrabile în sens Lebesgue poate fi considerată ca spațiu normat complet (vezi, partea III-a, cap. 12) și în al doilea rînd, această noțiune face posibilă descrierea clasei tuturor primitivelor după proprietățile lor intrinseci (vezi [41]).

Capitolul 10

FUNCȚII ANALITICE

> Astfel, noi comparăm o funcție analitică cu un organism a cărui proprietate caracteristică este de a reacționa în bloc la orice acțiune asupra unei părți oarecare a sa.
>
> **G. Pólya, G. Szegö**
> *Probleme și teoreme de analiză* (1924).

§ 10.1. Definiții și exemple

10.11. În capitolul de față, vom studia funcțiile f definite pe o mulțime E a planului $\mathbb{C}_z$ al variabilei complexe z și cu valori în planul $\mathbb{C}_w$ al variabilei complexe w.

Definim derivata, în raport cu o mulțime $E \subset \mathbb{C}_z$, a unei funcții f într-un punct neizolat $z_0 \in E$.

a. DEFINIȚIE. Un număr A se numește *derivata în raport cu o mulțime* $E \subset \mathbb{C}_z$ a unei funcții $w = f(z)$ într-un punct neizolat $z_0 \in E$ dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$ dat, există un $\delta > 0$ astfel încît relațiile $|z - z_0| < \delta$, $z \in E$, $z \neq z_0$ să implice inegalitatea $\left| A - \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < \varepsilon$. Numărul A poate fi notat prin $f'_E(z_0)$. El este, evident, limita raportului

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{1}$$

după direcția $z \xrightarrow{E} z_0$ care este definită de familia intersecțiilor mulțimii E cu toate discurile $|z - z_0| \leqslant \rho$ din care este eliminat centrul z_0. Această definiție o amintește pe cea a derivatei unei funcții reale într-un domeniu real (7.11), care este de fapt un caz particular al acesteia: pentru a obține 7.11, trebuie să alegem pentru E un interval al axei reale ce conține punctul $z_0 = x_0$ ($x_0 \in \mathbb{R}$). Totuși, alături de o analogie aparentă a derivatelor în domenii reale și complexe, există și anumite deosebiri esențiale care vor fi precizate în cele ce urmează.

b. Dacă F este o parte a mulțimii E și z_0 un punct neizolat al mulțimii F (deci și al mulțimii E), atunci existența derivatei $f'_E(z)$ implică existența derivatei $f'_F(z)$ și are loc egalitatea

$$f'_F(z) = f'_E(z).$$

Deci, derivabilitatea în raport cu cea mai mare din cele două mulțimi, implică derivabilitatea în raport cu cea mai mică. Reciproca este în mod evident falsă, după cum vom vedea pe exemple simple.

c. Dacă o funcție $w = f(z)$ este derivabilă într-un punct $z_0 \in E$ în raport cu o mulțime E, atunci raportul (1) este majorat, pentru $z \to z_0$, de o constantă C; deci pentru $z \in E$ și $|z - z_0|$ suficient de mic, avem

$$|f(z) - f(z_0)| < C|z - z_0|$$

și, în consecință, funcția $f(z)$ este continuă pe E în punctul $z = z_0$.

d. DEFINIȚIE. O funcție $w = f(z)$ având derivată în raport cu o mulțime E în orice punct al lui E se numește *derivabilă în* E.

e. DEFINIȚIE. Conform definiției 3.21, o mulțime G din planul $\mathbb{C}_z$ care, o dată cu fiecare punct al său z_0, conține un disc $|z - z_0| < r$ (r poate depinde de z_0) se numește *mulțime deschisă*.

O mulțime deschisă G se numește *conexă* dacă este posibil să unim două puncte oarecare z_0 și z_1 printr-o curbă netedă pe porțiuni, conținută în întregime în G.

f. DEFINIȚIE. Dacă G este o mulțime deschisă în $\mathbb{C}_z$, atunci o funcție $f(z)$ derivabilă în G se numește *analitică în* G (se spune de asemenea că f este *olomorfă* sau *regulată*). Derivata sa în raport cu G este notată prin $f'(z)$ (fără a indica mulțimea G). În orice punct $z_0 \in G$, această funcție este derivabilă în raport cu orice mulțime E pentru care z_0 este un punct neizolat și avem

$$f'_E(z_0) = f'(z_0).$$

9. DEFINIȚIE. O funcție $f(z)$ se numește *analitică într-un punct* z_0 dacă există un domeniu $G \ni z_0$ în care funcția $f(z)$ este definită și analitică.

10.12. *Exemple.*

a. Funcția $f(z) = z$ este analitică peste tot în planul $\mathbb{C}_z$ deoarece avem

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{z-z_0}{z-z_0} = 1,$$

și $f'(z) = 1$ pentru orice z_0.

b. Funcția $f(z) = \bar{z} = x - iy$ este derivabilă în orice punct z_0 în raport cu orice semidreaptă ce pornește din z_0 deoarece

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{\overline{z-z_0}}{z-z_0} = -2\arg(z-z_0),$$

deci

$$f'_E(z_0) = -2\arg(z-z_0).$$

Din contră, aceeași relație arată că $f(z) = \bar{z}$ nu este derivabilă în raport cu o mulțime E ce conține două semidrepte diferite ce pornesc din punctul z_0. Cu atît mai mult, $\bar{z}$ nu este o funcție analitică în z în nici un punct $z_0 \in \mathbb{C}_z$.

10.13. *Proprietăți generale ale derivatei.* Raționînd ca în 7.13 și 7.15 se obțin următoarele reguli de operații asupra funcțiilor derivabile în raport cu o mulțime E într-un punct z_0.

a. *Dacă două funcții f și g sînt derivabile pentru $z = z_0$ în raport cu mulțimea E, atunci funcțiile αf (α un număr complex oarecare), $f+g$, fg, $\frac{f}{g}$ sînt la fel (în ultimul caz, se presupune că $g(z_0) \neq 0$). Sînt atunci valabile următoarele formule (în punctul curent):*

$$(\alpha f(z))'_E = \alpha f'_E(z); \tag{1}$$

$$(f(z)+g(z))'_E = f'_E(z) + g'_E(z); \tag{2}$$

$$(f(z)\,g(z))'_E = f'_E(z)\,g(z) + f(z)\,g'_E(z); \tag{3}$$

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)'_E = \frac{f'_E(z)\,g(z) - f(z)\,g'_E(z)}{g^2(z)}. \tag{4}$$

b. *Dacă o funcție* $w = f(z)$ *este derivabilă în raport cu mulțimea* E *pentru* $z = z_0$ *și o funcție* $p = \varphi(w)$ *este definită într-o mulțime* F *ce conține toate punctele* $w = f(z)$, *pentru* $z \in E$ *suficient de apropiate de* z_0 *și derivabilă în raport cu* F *pentru* $w = w_0 = f(z_0)$, *atunci funcția compusă* $p(z) = \varphi(f(z))$ *este derivabilă în raport cu* E *pentru* $z = z_0$ *și avem:*

$$p'_E(z_0) = \varphi'_F(w_0) \cdot f'_E(z_0).$$

c. Din (1), (3) și 10.12 rezultă că *orice polinom* $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ *este funcție analitică având ca derivată*

$$P'(z) = (a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n)' =$$

$$= n a_0 z^{n-1} + (n-1)\, a_1 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1}.$$

d. Rezultă, apoi, din (4) că *orice funcție rațională, adică orice raport* $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ *a două polinoame* P *și* Q, *este analitică peste tot cu excepția rădăcinilor numitorului* Q.

10.14. *Derivate de ordin superior.* Derivatele de ordin superior ale unei funcții f în raport cu o mulțime E sînt definite prin recurență, la fel ca în cazul unei variabile reale:

$$f_E^{(n+1)}(z) = [f_E^{(n)}(z)]'_E \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

dacă derivatele în cauză există. O funcție f care are derivate succesive, inclusiv pe a n-a, în raport cu o mulțime E se numește *de n ori derivabilă în raport cu mulțimea E.*

Pentru două funcții f și g de n ori derivabile în raport cu o mulțime E, avem formulele:

$$[\alpha f(z)]_E^{(n)} = \alpha f_E^{(n)}(z) \quad (\alpha \text{ — un număr complex oarecare}); \quad (1)$$

$$[f(z) + g(z)]_E^{(n)} = f_E^{(n)}(z) + g_E^{(n)}(z); \quad (2)$$

$$[f(z) \cdot g(z)]_E^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} f_E^{(k)}(z)\, g_E^{(n-k)}(z). \quad (3)$$

Aceste formule se demonstrează în același mod ca și cele din 8.12 pentru cazul unei variabile reale.

10.15. *Diferențiala.*

a. Ca și în cazul unei variabile reale (7.31), creșterea unei funcții $w = f(z)$ derivabilă în raport cu o mulțime E într-un punct z_0 poate fi pusă sub forma:

$$f(z) - f(z_0) = f'_E(z_0)(z - z_0) + \varepsilon(z, z_0)(z - z_0),$$

unde $\varepsilon(z, z_0)$ tinde către zero cînd $z \to z_0$. Primul termen reprezintă *partea liniară principală a creșterii*. Cantitatea $z - z_0$ este notată prin $d_E z$ sau mai scurt prin dz, $f'_E(z_0)(z - z_0)$ prin dw sau $dw(z_0)$. Deci derivata $f'_E(z_0)$ se poate nota astfel

$$f'_E(z_0) = \frac{dw}{d_E z} = \frac{dw}{dz}.$$

b. La fel ca în 7.33—7.34 se stabilesc următoarele formule:

Oricare ar fi funcția $w = f(z)$ derivabilă în raport cu o mulțime E și o constantă complexă α, avem

$$d(\alpha w) = \alpha dw; \tag{1}$$

Oricare ar fi funcțiile w_1 și w_2 derivabile în raport cu o mulțime E, avem:

$$d(w_1 + w_2) = dw_1 + dw_2, \tag{2}$$

$$d(w_1 w_2) = w_1\, dw_2 + dw_1 \cdot w_2, \tag{3}$$

$$d\left(\frac{w_1}{w_2}\right) = \frac{w_2\, dw_1 - w_1\, dw_2}{w_2^2} \quad (\text{pentru } w_2(z_0) \neq 0). \tag{4}$$

c. Dacă $w = f(z)$ este derivabilă în raport cu E pentru $z = z_0$ și dacă o funcție $p = \varphi(w)$ este definită pe o mulțime F ce conține toate punctele $w = f(z)$ și este derivabilă în raport cu F pentru $w = w_0 = f(z_0)$, atunci $dp = \varphi'(w)dw = \varphi'(w)w'(z)dz$, astfel că diferențiala unei

funcţii nu-şi schimbă forma cînd variabila independentă devine funcţie de o altă variabilă independentă.

10.16. *Condiţiile Cauchy-Riemann.* Vom da mai întîi definiţia derivatelor parţiale.

O funcţie $F(x, y)$ fiind definită într-un domeniu G al planului variabilelor reale x, y, numărul

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h, y_0)-F(x_0, y_0)}{h},$$

dacă există, este numit *derivata parţială a funcţiei* $F(x, y)$ *în raport cu variabila* x *în punctul* $(x_0, y_0)\in G$. Analog, numărul

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0, y_0+h)-F(x_0, y_0)}{h}$$

este *derivata parţială a funcţiei* $F(x, y)$ *în raport cu variabila* y *în punctul* $(x_0, y_0)\in G$. Primul din aceste numere este notat cu $\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}$, al doilea prin $\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}$ sau, mai scurt, prin $F_x = F_x(x_0, y_0)$ şi $F_y = F_y(x_0, y_0)$.

Fie $w = f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ o funcţie derivabilă pentru $z = z_0 = x_0 + iy_0$ în raport cu o mulţime E care conţine punctul z_0 şi anumite segmente conţinînd acest punct şi paralele cu axele de coordonate.

Punem $z = z_0 + h\in E$, h fiind real. Atunci $z = z_0 + h = (x_0 + h, y_0)$ şi avem

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{u(z_0+h)-u(z_0)}{h}+i\,\frac{v(z_0+h)-v(z_0)}{h}. \tag{1}$$

Existenţa limitei raportului (1) implică existenţa limitelor

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(x_0+h, y_0)-u(x_0, y_0)}{h}=\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x},$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{v(x_0+h, y_0)-v(x_0, y_0)}{h}=\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}$$

și egalitatea

$$f'_E(z_0) = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}. \tag{2}$$

Punem $z = z_0 + ih \in E$, h fiind real. Atunci $z = z_0 + i h = (x_0, y_0 + h)$ și avem

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{u(z_0 + i h) - u(z_0)}{i h} +$$

$$+ i \frac{v(z_0 + ih) - v(z_0)}{i h} = \frac{u(x_0, y_0 + h) - u(x_0, y_0)}{i h} +$$

$$+ \frac{v(x_0, y_0 + h) - v(x_0, y_0)}{h}.$$

Existența derivatei $f'_E(z_0)$ implică existența limitelor

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + h) - u(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y},$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{v(x_0, y_0 + h) - v(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}$$

și egalitatea

$$f'_E(z_0) = - i \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} + \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}. \tag{3}$$

Comparînd (2) și (3) se vede că în orice punct z_0, unde există $f'_E(z_0)$, avem relațiile:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \dfrac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}; \\ \dfrac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} = - \dfrac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} \end{cases} \tag{4}$$

numite *condițiile Cauchy-Riemann.*

10.17. În particular, *dacă o funcție $f(z)$ este analitică în vecinătatea unui punct z_0, atunci condițiile Cauchy-*

-Riemann sînt satisfăcute în orice punct al acestei vecinătăţi. Invers, *dacă condiţiile Cauchy-Riemann sînt satisfăcute într-o vecinătate a punctului z_0 şi dacă funcţiile* $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ *sînt continue, atunci funcţia* $f(z)$ *este analitică în această vecinătate.* Într-adevăr, fie $h = p + iq$ atît de mic încît $z_0 + h$ să aparţină vecinătăţii menţionate. Formăm diferenţa

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = [u(x + p, y + q) + iv(x + p, y + q)] -$$
$$- [u(x, y) + iv(x, y)] = [u(x + p, y + q) -$$
$$- u(x, y)] + i[v(x + p, y + q) - v(x, y)]. \qquad (1)$$

Transformăm expresiile din paranteze. Avem

$$u(x + p, y + q) - u(x, y) = [u(x + p, y + q) -$$
$$- u(x, y + q)] + [u(x, y + q) - u(x, y)].$$

Aplicăm formula lui Lagrange 7.44 primei diferenţe considerate ca funcţie de x:

$$u(x + p, y + q) - u(x, y + q) = u_x(x + \theta_1 p, y + q)\, p,$$

unde u_x este derivata în raport cu x şi θ_1 un număr între 0 şi 1. Într-un mod analog, aplicînd formula lui Lagrange celei de a doua diferenţe, ca funcţie de y, avem

$$u(x, y + q) - u(x, y) = u_y(x, y + \theta_2 q)\, q.$$

Efectuînd transformările analoage celeilalte paranteze din (1) se ajunge la relaţia

$$f(z + h) - f(z) = [u_x(x + \theta_1 p, y + q)\, p + u_y(x, y + \theta_2 q)\, q] +$$
$$+ i[v_x(x + \theta_3 p, y + q)\, p + v_y(x, y + \theta_4 q)\, q].$$

Folosind condiţiile Cauchy-Riemann, se pune această diferenţă sub forma

$$f(z+h)-f(z)=[u_x(x+\theta_1 p, y+q)p+u_y(x, y+\theta_2 q)q]+$$

$$+i[u_x(x, y+\theta_4 q)q-u_y(x+\theta_3 p, y+q)p].$$

În virtutea ipotezei de continuitate a funcţiilor u_x şi u_y, avem apoi

$$f(z+h)-f(z)=u_x(x, y)(p+iq)-iu_y(x, y)(p+iq)+$$

$$+\varepsilon_1(p, q)p+\varepsilon_2(p, q)q,$$

unde $\varepsilon_1(p, q)$ şi $\varepsilon_2(p, q)$ tind la 0, odată cu p şi q. În consecinţă,

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=u_x(x, y)-iu_y(x, y)+$$

$$+\frac{\varepsilon_1(p, q)p+\varepsilon_2(p, q)q}{p+iq}. \qquad (2)$$

Estimăm ultimul termen. Avem $\left|\frac{p}{p+iq}\right|\leqslant 1$, $\left|\frac{q}{p+iq}\right|\leqslant 1$, de unde

$$\left|\frac{\varepsilon_1(p, q)p+\varepsilon_2(p, q)q}{p+iq}\right|\leqslant|\varepsilon_1(p, q)|+|\varepsilon_2(p, q)|.$$

Ultima cantitate tinzînd către 0 cu p şi q, expresia (2) are limita u_x-iu_y cînd $h\to 0$. Aceasta spune că derivata funcţiei $f(z)$, pentru $z=z_0$, există şi este egală cu $u_x(z_0)-iu_y(z_0)$. Afirmaţia este demonstrată.

Dacă introducem noţiunea de funcţie diferenţiabilă de două variabile, se pot formula condiţiile Cauchy-Riemann sub forma unui criteriu necesar şi suficient de analiticitate (conform exerciţiului 6).

10.18. În continuare (10.34), vom arăta că *orice funcţie analitică f este indefinit derivabilă.* Considerăm acum

ce consecinţe decurg de aici, pentru părţile reală şi imaginară ale funcţiei, din existenţa derivatei de ordinul al doilea.

Aceleaşi raţionamente ca şi în 10.16, ne conduc la următoarele relaţii :

$$f''(z) = (f'(z))' = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{i}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{i}}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \mathrm{i}\,\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Egalînd părţile reale şi imaginare, găsim

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Ecuaţia

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

se numeşte *ecuaţia lui Laplace*; o funcţie reală continuă care o satisface într-un domeniu G se numeşte *funcţie armonică în G*. Vedem deci că *părţile reală şi imaginară ale unei funcţii analitice într-un domeniu G sînt funcţii armonice în G.*

Invers, *orice funcţie $u(x, y)$ armonică într-un domeniu G (în anumite condiţii asupra lui G) este partea reală a unei funcţii analitice $f(z)$* (şi, bineînţeles, partea imaginară a unei funcţii analitice $\mathrm{i}f(z)$). Vom vedea aceasta în partea a treia (14.49 c).

Două funcţii armonice $u(x, y)$ şi $v(x, y)$ ce reprezintă respectiv părţile reală şi imaginară ale unei funcţii analitice $f(z)$, adică legate prin condiţiile lui Cauchy-Riemann, sînt numite funcţii *armonic conjugate*.

§ 10.2. Integrale curbilinii ale funcţiilor complexe

10.21. Considerăm aici integrale curbilinii luate în lungul drumurilor netede pe porţiuni (9.91) în domeniul complex.

În 9.91 am definit integrala curbilinie Stieltjes

$$\int_L f(M)\,\mathrm{d}g(M),$$

unde $f[M(t)]$ este o funcție continuă pe porțiuni, $g[M(t)]$ este o funcție continuu derivabilă, ambele fiind reale. Această integrală se reduce la integrala definită uzuală

$$\int_a^b f[M(t)]\,\mathrm{d}g[M(t)] = \int_a^b f[M(t)]\frac{\mathrm{d}g[M(t)]}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t,$$

unde $[a, b]$ este intervalul de variație al parametrului t care corespunde drumului L. Vom extinde definiția la cazul cînd funcțiile $f(M)$ și $g(M)$ iau valori complexe.

Dacă funcția $f(M)$ ia valori complexe, $f(M) = f_1(M) + \mathrm{i}f_2(M)$, unde $f_1(M)$ și $f_2(M)$ sînt reale, atunci integrala curbilinie Stieltjes este definită de formula

$$\int_L f(M)\,\mathrm{d}g(M) = \int_L f(M)\,\mathrm{d}g(M) + \mathrm{i}\int_L f_2(M)\,\mathrm{d}g(M)$$

(funcția $g(M)$ este reală). Într-un mod analog, dacă $f(M)$ este reală și $g(M)$ complexă, deoarece $g(M) = g_1(M) + \mathrm{i}g_2(M)$, punem

$$\int_L f(M)\,\mathrm{d}g(M) = \int_L f(M)\,\mathrm{d}g_1(M) + \mathrm{i}\int_L f(M)\,\mathrm{d}g_2(M).$$

Cînd cele două funcții $f(M) = f_1(M) + \mathrm{i}f_2(M)$ și $g(M) = g_1(M) + \mathrm{i}g_2(M)$ iau valori complexe, sîntem conduși, natural, la definiția

$$\int_L f(M)\,\mathrm{d}g(M) = \int_L f_1(M)\,\mathrm{d}g_1(M) - f_2(M)\,\mathrm{d}g_2(M) +$$

$$+ \mathrm{i}\int_L f_1(M)\,\mathrm{d}g_2(M) + f_2(M)\,\mathrm{d}g_1(M).$$

În cazul plan ($n = 2$), pentru $g(x, y) = z = x + iy$ și $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, se obține formula

$$\int_L f(x, y)\, dz = \int_L u\, dx - v\, dy + i \int_L u\, dy + v\, dx. \quad (1)$$

În acest caz este posibil să dăm o definiție directă a integralei complexe (1), anume

$$\int_L f(x, y)\, dz = \lim_{d(\Pi)\to 0} \sum_{j=0}^{m-1} f(x_j, y_j)\, \Delta z_j, \quad (2)$$

unde Π este o diviziune a drumului L, $z_j = (x_j, y_j)$ al j-lea punct al diviziunii și $\Delta z_j = z_{j+1} - z_j$. Într-adevăr, avem

$$\sum_{j=0}^{m-1} f(x_j, y_j)\, \Delta z_j = \sum_{j=0}^{m-1} u(x_j, y_j)\, \Delta x_j - \sum_{j=0}^{m-1} v(x_j, y_j)\, \Delta y_j +$$

$$+ i \sum_{j=0}^{m-1} u(x_j, y_j)\, \Delta y_j + i \sum_{j=0}^{m-1} v(x_j, y_j)\, \Delta x_j,$$

și această expresie tinde exact către (1) cînd $d(\Pi) \to 0$. Din reprezentarea (2) se deduc ușor proprietățile de bază ale integralei; relația

$$\int_L [\alpha_1 f_1(x, y) + \alpha_2 f_2(x, y)]\, dz =$$

$$= \alpha_1 \int_L f_1(x, y)\, dz + \alpha_2 \int_L f_2(x, y)\, dz \quad (3)$$

oricare ar fi două funcții integrabile $f_1(x, y)$ și $f_2(x, y)$ și două constante complexe α_1 și α_2; relația

$$\int_L f(x, y)\, dz = \int_{L_1} f(x, y)\, dz + \int_{L_2} f(x, y)\, dz, \quad (4)$$

unde L este un drum neted pe porțiuni, format prin juxtapunerea arcelor L_1 și L_2 cu același sens de parcurgere;

majorarea

$$\left|\int_L f(x, y)\, dz\right| \leqslant \int_L |f(x, y)|\, ds \leqslant \sup_{z \in L} |f(x, y)| \cdot s(L), \quad (5)$$

unde $s(L)$ este lungimea drumului L.

Uneori, pentru a preciza proprietatea drumului de integrare, se întrebuințează simbolurile speciale

$$\oint_L, \oint_L, \oint_L, \int_{\nearrow L}, \int_{\swarrow L}, \int_{\curvearrowleft L}, \text{ etc.}$$

Primul simbol arată că integrala se face în lungul unui drum închis; al doilea și al treilea precizează sensul de parcurgere; al patrulea și al cincilea arată că integrarea se efectuează în lungul unei drepte și arată sensul de parcurgere. În general sensul unui simbol este în funcție de context sau de o figură.

10.22. Considerăm un șir de funcții $f_n(z)$ definite pe un drum neted pe porțiuni $L \subset \mathbb{C}_z$. Presupunem că funcțiile $f_n(z)$ converg acolo uniform către o funcție $f(z)$. Dacă funcțiile $f_n(z)$ sînt continui pe L, atunci la fel va fi și funcția limită $f(z)$ (5.96).

a. În ipoteza formulată mai sus, avem

$$\int_L f(z)\, dz = \lim_{n \to \infty} \int_L f_n(z)\, dz.$$

Într-adevăr, din 10.21 (5), rezultă că

$$\left|\int_L [f(z) - f_n(z)]\, dz\right| \leqslant \max_L |f(z) - f_n(z)| \cdot s(L),$$

ceea ce conduce la rezultatul căutat.

b. Dacă în plus funcțiile $f_n(z)$ și $f(z)$ depind de un parametru λ care parcurge o mulțime Λ, astfel încît să putem nota $f_n(z) = f_n(z, \lambda)$, $f(z) = f(z, \lambda)$ și dacă convergența lui $f_n(z, \lambda)$ către $f(z, \lambda)$ este uniformă în raport cu λ, adică

$$\sup_{z, \lambda} |f_n(z, \lambda) - f(z, \lambda)| \to 0,$$

atunci funcţiile

$$F_n(\lambda) = \int_L f_n(z, \lambda)\, dz$$

converg şi ele către funcţia

$$F(\lambda) = \int_L f(z, \lambda)\, dz$$

uniform în raport cu $\lambda \in \Lambda$.

Aceasta este o consecinţă a estimării 10.21(5):

$$\left| \int_L [f(z, \lambda) - f_n(z, \lambda)]\, dz \right| \leqslant \sup_{z, \lambda} |f_n(z, \lambda) - f(z, \lambda)| \cdot s(L).$$

10.23. *Teorema mediei. Dacă $f(z)$ este continuă pe porţiuni pe un drum neted $L = \{z \mid z = z(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ şi dacă $z'(t_0) \neq 0$, funcţia $f(z)$ fiind continuă în $z_0 = z(t_0)$, atunci*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{1}{z - z_0} \int_{L(z, z_0)} f(z)\, dz = f(z_0),$$

unde $L(z, z_0)$ este o parte a drumului L între punctele z şi z_0.

Demonstraţie. În cazul în care $f(z) = f(z_0) =$ constant, concluzia teoremei rezultă imediat din definiţia integralei. Putem să ne limităm deci la cazul cînd $f(z_0) = 0$ (în caz contrar, se scade constanta $f(z_0)$ din funcţia $f(z)$). Pentru un $\varepsilon > 0$ dat, se găseşte un $\delta > 0$ astfel încît $z \in L$, $|z - z_0| < \delta$ să implice $|f(z)| < \varepsilon$. Atunci conform 10.21(5), avem

$$\left| \int_{L(z, z_0)} f(z)\, dz \right| \leqslant \varepsilon \cdot s(L(z, z_0)).$$

Deci

$$\frac{\left| \int_{L(z, z_0)} f(z)\, dz \right|}{|z - z_0|} \leqslant \varepsilon \frac{s(L(z, z_0))}{|z - z_0|}. \qquad (1)$$

Dar, drumul L fiind neted, raportul dintre lungimea unei părți de drum și a coardei care o subîntinde converge către 1, pentru $z \to z_0$ (9.63 f). Deci, pentru $|z - z_0|$ suficient de mici, majorarea (1) poate fi înlocuită prin

$$\frac{1}{z - z_0} \left| \int_{L(z, z_0)} f(z)\, dz \right| \leqslant 2\varepsilon,$$

de unde rezultă teorema.

10.24. Fie $f(z, \zeta)$ o funcție de două variabile complexe; variabila $z = x + i\,y$ parcurge un drum L neted pe porțiuni în planul variabilei z și variabila $\zeta = \xi + i\,\eta$ un drum Λ neted pe porțiuni în planul lui ζ. Presupunem că funcția $f(z, \zeta)$ este continuă în raport cu mulțimea variabilelor, adică, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un $\delta > 0$ astfel încît relațiile $|z - z'| \leqslant \delta$, $|\zeta - \zeta'| \leqslant \delta$, $z, z' \in L$, $\zeta, \zeta' \in \Lambda$ să implice $|f(z', \zeta') - f(z, \zeta)| < \varepsilon$. Atunci *fiecare din integralele*

$$I(\zeta) = \int_L f(z, \zeta)\, dz, \quad J(z) = \int_\Lambda f(z, \zeta)\, d\zeta \tag{1}$$

reprezintă o funcție continuă în variabila corespunzătoare și, în plus,

$$\int_L \left\{ \int_\Lambda f(z, \zeta)\, d\zeta \right\} dz = \int_\Lambda \left\{ \int_L f(z, \zeta)\, dz \right\} d\zeta. \tag{2}$$

În 9.82 am demonstrat teorema analoagă pentru funcții reale. Dar, am văzut mai sus că o integrală luată în lungul unui drum complex este o combinație liniară de integrale în raport cu o variabilă reală. Afirmația noastră rezultă deci direct din teorema 9.82.

10.25.a. Fie $w = f(z)$ o funcție derivabilă în raport cu o mulțime E ce conține un drum L neted pe porțiuni a cărui origine este z_0 și extremitatea z_1. Atunci, este adevărată *formula Newton-Leibniz*

$$\int_L f'(z)\, dz = f(z_1) - f(z_0).$$

Într-adevăr, fie $z = z(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ o reprezentare parametrică a drumului L, cu funcția $z(t)$ netedă pe porțiuni și fie $F(t) = f(z(t))$. Atunci, conform teoremei asupra derivatei unei funcții compuse 10.13 b, avem

$$f'_L(z)\,dz(t) = dF(t),$$

de unde

$$\int_L f'_L(z)\,dz = \int_{t_0}^{t_1} dF(t) = F(t_1) - F(t_0) = f(z_1) - f(z_0),$$

ceea ce trebuia demonstrat.

b. În particular, *dacă* $w = f(z)$ *este o funcție analitică într-un domeniu* G, *avem*

$$\int_L f'(z)\,dz = f(z_1) - f(z_0)$$

pentru orice drum neted pe porțiuni care unește punctele z_1 *și* z_0 (*și care este inclus în întregime în* G). De aici rezultă că integrala lui $f'(z)$ luată în lungul oricărui contur închis neted pe porțiuni $L \subset G$ este egală cu zero.

c. Astfel, integrala în lungul unui contur închis L a unui polinom oarecare

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$$

este nulă, deoarece polinomul $P(z)$ este derivata polinomului

$$P_1(z) = a_0 z + a_1 \frac{z^2}{2} + \ldots + a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}.$$

10.26. Proprietatea 10.25a admite reciprocă. *Fie* $\varphi(z)$ *o funcție dată într-un domeniu* G (10.11e) *și astfel încît integrala sa în lungul oricărui drum* L, *închis neted pe porțiuni în* G *să fie nulă*:

$$\oint_L \varphi(z)\,dz = 0.$$

Există atunci o funcție $f(z)$ analitică în domeniul G astfel încît $f'(z) = \varphi(z)$, $\forall z \in G$.

Pentru a demonstra aceasta, fixăm în domeniul G un punct oarecare z_0 și considerăm un alt punct arbitrar z, astfel încît un drum neted pe porțiuni $L_z \subset G$ să unească z_0 și z. Punem

$$f(z) = \int_{L_z} \varphi(\zeta)\, d\zeta.$$

Valoarea lui $f(z)$ nu depinde de alegerea drumului plecînd de la z_0 la z. Într-adevăr, dacă există două drumuri z_0pz și z_0qz, se poate forma cu ele un drum închis zqz_0pz (fig. 10.1),

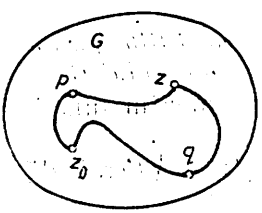


Fig. 10.1

integrala în lungul acestui contur fiind nulă prin ipoteză; în consecință, avem

$$\int_{z_0pz} \varphi(\zeta)\, d\zeta = \int_{z_0qz} \varphi(\zeta)\, d\zeta - \int_{zqz_0pz} \varphi(\zeta)\, d\zeta = \int_{z_0qz} \varphi(\zeta)\, d\zeta.$$

Vom demonstra că $f(z)$ este o funcție analitică.

Pentru un z dat, alegem un număr $\rho > 0$ astfel încît cercul de rază ρ, centrat în z, să aparțină domeniului G. Fie apoi un număr complex h, $|h| < \rho$. Deoarece drumul care merge de la z_0 la $z + h$ poate fi ales arbitrar, îl construim adăugînd drumului deja fixat de la z_0 la z segmentul de pe dreapta ce trece prin z și $z + h$. Avem atunci

$$f(z + h) - f(z) = \int_{z_0}^{z+h} \varphi(\zeta)\, d\zeta - \int_{z_0}^{z} \varphi(\zeta)\, d\zeta = \int_{z}^{z+h} \varphi(\zeta)\, d\zeta$$

și

$$\frac{f(z + h) - f(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{z}^{z+h} \varphi(\zeta)\, d\zeta.$$

Această cantitatea tinde către $\varphi(z)$, cînd $h \to 0$, în virtutea lui 10.23, de unde analiticitatea lui $f(z)$.

10.27. Fie $f(z, \zeta)$ o funcție de două variabile complexe : variabila $z = x + iy$ parcurge un domeniu G în planul z, variabila ζ un drum neted pe porțiuni Λ. Se presupune că funcția $f(z, \zeta)$ este analitică în G pentru orice $\zeta \in \Lambda$ și că funcția $f(z,\zeta)$ la fel ca și derivata sa $f'_z(z, \zeta)$ sînt continue în raport cu mulțimea variabilelor $z \in G$, $\zeta \in \Lambda$. Considerăm funcția

$$\Phi(z) = \int_{\Lambda} f(z, \zeta)\, d\zeta.$$

TEOREMĂ. *În condițiile formulate mai sus, funcția* $\Phi(z)$ *este analitică în domeniul* G.

Demonstrație. Considerăm funcția

$$\varphi(z) = \int_{\Lambda} f'_z(z, \zeta)\, d\zeta.$$

Afirmăm că, pentru orice contur închis $L \subset G$, avem

$$\int_L \varphi(z)\, dz = 0.$$

Într-adevăr, conform 10.24 și 10.25 b, avem

$$\int_L \varphi(z)\, dz = \int_L \left\{ \int_{\Lambda} f'_z(z, \zeta)\, d\zeta \right\} dz = \int_{\Lambda} \left\{ \int_L f'_z(z, \zeta)\, dz \right\} d\zeta = 0.$$

În virtutea lui 10.26, există o funcție $\Phi_0(z)$ analitică în domeniul G pentru care $\varphi(z)$ este derivata sa și, în plus, totdeauna avem, conform 10.24,

$$\Phi_0(z) = \int_{z_0}^{z} \varphi(\alpha)\, d\alpha = \int_{z_0}^{z} \left\{ \int_{\Lambda} f'_z(\alpha, \zeta)\, d\zeta \right\} d\alpha =$$

$$= \int_{\Lambda} \left\{ \int_{z_0}^{z} f'_z(\alpha, \zeta)\, d\alpha \right\} d\zeta = \int_{\Lambda} f(z, \zeta)\, d\zeta - \int_{\Lambda} f(z_0, \zeta)\, d\zeta.$$

Diferența dintre $\Phi_0(z)$ și $\Phi(z)$ fiind constantă, vedem că $\Phi(z)$, la fel ca și $\Phi_0(z)$, este o funcție analitică în domeniul G.

10.28. Considerăm o funcție de forma

$$F(z) = \int_{\Lambda} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \qquad (1)$$

unde $f(\zeta)$ este continuă pe un drum neted pe porțiuni Λ și punctul z este exterior drumului. Astfel, funcția $F(z)$ este definită în domeniul G care este complementarul conturului Λ în raport cu tot planul $\mathbb{C}_z$. Notăm prin G_ρ mulțimea punctelor domeniului G pentru care $\sup|z-\zeta| > \rho$. Oricare ar fi punctul $z \in G$, el aparține unui G_ρ cu ρ suficient de mic. Observăm acum că funcția

$$f(z, \zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

este analitică în z în domeniul G și, în plus, are în G derivate de orice ordin :

$$f_z^{(n)}(z, \zeta) = \frac{n!\, f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}.$$

Este evident că aceste derivate sînt continue în raport cu mulțimea variabilelor $\zeta \in \Lambda$, $z \in G_\rho$, pentru orice ρ, și analitică în z în domeniul G. Aplicînd teorema 10.27 se obține următorul rezultat.

TEOREMĂ. *Funcția $F(z)$ definită prin expresia* (1) *este analitică în domeniul G și, în plus, are acolo derivate de orice ordin care sînt și ele analitice. Avem*

$$F^{(n)}(z) = n! \int_{\Lambda} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}$$

O integrală de forma (1) este numită *integrală de tip Cauchy.*

§ 10.3. Teorema lui Cauchy și consecințele ei

În acest paragraf se reunesc rezultatele fundamentale ale teoriei funcțiilor analitice (care sînt descoperite în cea mai mare parte de către Cauchy).

10.31. Un domeniu G (10.11 e) se numeşte *simplu conex* dacă orice poligon al cărui contur este inclus în G, poate fi pus sub forma unei reuniuni finite de triunghiuri al căror interior se găsesc în G. De exemplu, un disc deschis, ca şi orice domeniu convex (care conţine, împreună cu două puncte oarecare ale sale, segmentul care le uneş-

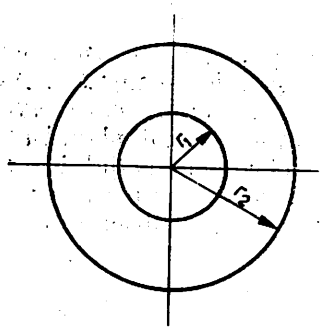


Fig. 10.2

te) sînt simplu conexe, în timp ce o coroană circulară $r_1 < |z| < r_2$ nu este (fig. 10.2).

10.32. TEOREMA LUI CAUCHY. *Pentru o funcţie $f(z)$, analitică într-un domeniu simplu conex V, avem*

$$\oint_L f(z)\,dz = 0,$$

unde L este un contur oarecare închis conţinut în întregime în domeniul V.

Demonstraţie. Am văzut în 9.95 că integrala luată în lungul unei curbe este limita integralelor luate în lungul liniilor poligonale; este suficient deci să demonstrăm teorema lui Cauchy pentru un poligon. Domeniul V fiind simplu conex, putem să împărţim poligonul L în triunghiuri $T_1, \ldots, T_m$ fără a ieşi din domeniu; vom avea (fig. 10.3)

$$\oint_L f(z)\,dz = \oint_{T_1} f(z)\,dz + \ldots + \oint_{T_m} f(z)\,dz.$$

(integralele pe segmentele din interiorul poligonului se reduc două câte două, aceste segmente fiind parcurse de două ori în sensuri inverse); este suficient deci să demonstrăm teorema lui Cauchy pentru un triunghi.

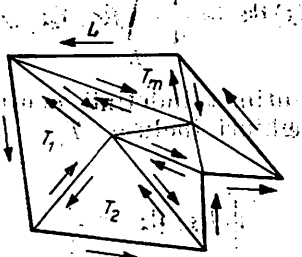


Fig. 10.3

Considerăm un triunghi oarecare T în domeniul V și notăm prin ρ perimetrul său, prin c valoarea absolută a integralei

$$\oint_T f(z)\,dz.$$

Împărțim triunghiul T în patru triunghiuri egale T_1, T_2, T_3, T_4 unind mijloacele laturilor prin segmente de dreaptă (fig. 10.4). Vom avea atunci

$$\oint_T f(z)\,dz = \oint_{T_1} f(z)\,dz + \oint_{T_2} f(z)\,dz + \oint_{T_3} f(z)\,dz + \oint_{T_4} f(z)\,dz,$$

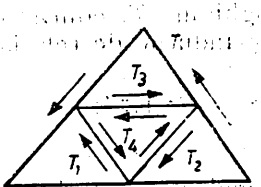


Fig. 10.4

deci, pentru cel puțin un triunghi, de exemplu pentru T_i, avem inegalitatea

$$\left|\oint_{T_i} f(z)\,dz\right| \geq \frac{c}{4}.$$

Împărțim triunghiul T_i încă o dată în patru triunghiuri egale $T_{i1}, \ldots, T_{i4}$ și alegem unul, de exemplu, T_{ij}, pentru care

$$\left|\oint_{T_{ij}} f(z)\,dz\right| \geqslant \frac{1}{4}\left|\oint_{T_i} f(z)\,dz\right| \geqslant \frac{c}{4^2}.$$

Dacă vom continua indefinit acest proces, ajungem la șirul de triunghiuri incluse $T_1 = T_i$, $T_2 = T_{ij}, \ldots$, astfel încît

$$\left|\oint_{T_n} f(z)\,dz\right| \geqslant \frac{c}{4^n}. \tag{1}$$

Fiecare triunghi T_n (considerat cu interiorul său) este o mulțime compactă în planul $\mathbb{C}_z = \mathbb{R}_2$ (5.14e); în virtutea lui 3.98, există în plan un punct z_0 comun tuturor triunghiurilor.

Funcția $f(z)$ este derivabilă în acest punct, ca de altfel peste tot în domeniul V; definiția derivatei ne spune că, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un $\delta > 0$ astfel încît dacă $|z - z_0| < \delta$, atunci

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + R_1(z, z_0), \tag{2}$$

unde $|R_1(z, z_0)| < \varepsilon|z - z_0|$ (10.15). Restul R_1 este o funcție cel puțin continuă (în z) deoarece ceilalți termeni ai egalității (2) sînt astfel. Estimăm acum integrala lui $f(z)$ în lungul triunghiului T_n conținut în cercul de rază δ centrat în z_0. Servindu-ne de relația (2), avem

$$\oint_{T_n} f(z)\,dz = \oint_{T_n} f(z_0)\,dz + f'(z_0)\oint_{T_n}(z - z_0)\,dz + \oint_{T_n} R_1(z, z_0)\,dz.$$

Primii doi termeni din membrul secund sînt nuli conform 10.25c. Perimetrul triunghiului T_n fiind $\frac{p}{2^n}$, aplicînd estimația (2) restului R_1, avem

$$\left|\oint_{T_n} f(z)\,dz\right| = \left|\oint_{T_n} R_1(z, z_0)\,dz\right| \leqslant \varepsilon\frac{p}{2^n}\cdot\frac{p}{2^n}.$$

Comparînd această inegalitate și (1) se vede că

$$\frac{c'}{4^n} \leqslant \varepsilon \frac{\rho^2}{4^n}, \quad c \leqslant \varepsilon \rho^2.$$

Numărul ε fiind arbitrar de mic, avem $c = 0$, și teorema lui Cauchy este demonstrată.

10.33. *Formula lui Cauchy.*

a. Un disc $|z - a| < R$ din care se scoate punctul $z = a$ este un domeniu care nu este simplu conex. Funcția $\dfrac{1}{(z-a)^m}$ $(m \geqslant 1)$ este analitică în acest domeniu (și neanalitică în întreg discul $|z - a| < R$). Să calculăm integrala

$$\oint_L \frac{dz}{(z-a)^m},$$

unde L este cercul de rază $r < R$ centrat în a. Alegem ca parametru unghiul polar φ; atunci $z - a = r \cdot e^{i\varphi}$, $(z-a)^m = r^m e^{im\varphi}$, $dz = ire^{i\varphi} d\varphi$ și avem

$$\oint_L \frac{dz}{(z-a)^m} = i r^{1-m} \int_{\varphi=0}^{2\pi} e^{i(1-m)\varphi} d\varphi =$$

$$= \begin{cases} i r^{1-m} \dfrac{e^{i(1-m)\varphi}}{i(1-m)} \Big|_{\varphi=0}^{2\pi} = 0 \ (m \neq 1), & (1) \\ i \displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i \qquad (m = 1). & (2) \end{cases}$$

Pentru $m = 1$, integrala este $2\pi i \neq 0$, ceea ce arată, printre altele, că ipoteza de simplu conexitate din teorema lui Cauchy este esențială.

b. Semnalăm încă o proprietate importantă a integralelor pe contururi închise într-un domeniu care nu este simplu conex. Dacă într-un domeniu V (pe care îl presupunem că nu este simplu conex) este definită o funcție analitică $f(z)$ și dacă sînt alese într-un mod indicat în

fig. 10.5 două contururi L_1 și L_2 închise netede pe porțiuni (aceste contururi și o linie T netedă pe porțiuni, care le unește, formează frontiera unui domeniu simplu conex), atunci avem

$$\oint_{L_1} f(z)\,dz = \oint_{L_2} f(z)\,dz. \tag{3}$$

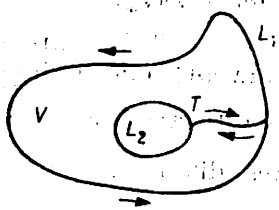


Fig. 10.5

Într-adevăr, fiind dat domeniul simplu conex menționat, vom stabili sensul de parcurgere al frontierei după cum urmează : conturul L_1 este parcurs în sensul pozitiv (contrar acelor unui ceasornic), conturul L_2 în sensul negativ (cel al acelor unui ceasornic) și linia T care le unește este parcursă de două ori în sensuri inverse (fig. 10.5). Conform teoremei lui Cauchy 10.32, avem

$$0 = \oint_L f(z)\,dz = \oint_{L_1} f(z)\,dz + \int_T^{\nearrow} f(z)\,dz + \int_T^{\nearrow} f(z)\,dz + \oint_{L_2} f(z)\,dz,$$

de unde rezultă (3) dacă ne amintim că o integrală curbilinie își schimbă semnul cînd se inversează sensul de parcurgere al drumului de integrare (9.51).

Cazul din fig. 10.5 nu este cel mai general. Totuși, este suficient pentru necesitățile noastre ulterioare.

c. Vom aplica proprietatea de mai sus la calculul integralei

$$I = \oint_L \frac{f(z)\,dz}{z - a}$$

în lungul unei curbe închise L ce înconjoară punctul a în sens pozitiv. Funcția $f(z)$ este presupusă analitică într-un

domeniu simplu conex V ce conține punctul a și conturul L. Funcția $\frac{f(z)}{z-a}$ are, în cazul general, o singularitate pentru $z = a$ (adică poate să nu aibă acolo derivată), deci integrala I poate fi nenulă. Totuși, funcția $\frac{f(z)}{z-a}$ fiind analitică în exteriorul lui a, la fel ca $f(z)$, este posibil, după cum am văzut mai sus, să înlocuim conturul L printr-un cerc de rază ε mică, centrat în a, fără a schimba valoarea integralei I. Punem

$$f(z) = f(a) + R(z).$$

Funcția $\frac{R(z)}{z-a}$ este continuă, ca și $f(z)$, pentru $z \neq a$; ea tinde către $f'(a)$ cînd $z \to a$; ea este deci mărginită într-o vecinătate a punctului a; fie, de exemplu, $\left|\frac{R(z)}{z-a}\right| \leqslant M$. Avem atunci

$$\oint_L \frac{f(z)\,dz}{z-a} = \oint_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)\,dz}{z-a} = f(a) \oint_{|z-a|=\varepsilon} \frac{dz}{z-a} + \oint_{|z-a|=\varepsilon} \frac{R(z)\,dz}{z-a}. \tag{4}$$

Primul termen din ultimul membru este $2\pi i f(a)$ conform 10.33 (2). Pentru al doilea termen, se obține în virtutea lui 10.21(5):

$$\left| \oint_{|z-a|=\varepsilon} \frac{R(z)}{z-a}\,dz \right| \leqslant M \cdot 2\pi\varepsilon;$$

astfel, al doilea termen tinde către 0 cînd $\varepsilon \to 0$. Cum ceilalți doi membri din (4) nu depind de ε, se obține la limită

$$I = \oint \frac{f(z)\,dz}{z-a} = 2\pi i \cdot f(a),$$

sau

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)\,dz}{z-a}. \tag{5}$$

Formula lui Cauchy (5) este una din cele mai importante formule ale teoriei funcțiilor analitice: *ea exprimă valorile unei funcții analitice în interiorul unui contur închis L în funcție numai de valorile ei pe acest contur.*

10.34. TEOREMĂ. *O funcție $w = f(z)$ analitică într-un domeniu G are, în acest domeniu, derivate de orice ordin care sînt și ele analitice. În plus, avem*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}, \qquad (1)$$

unde integrala este luată în lungul unei curbe L oarecare închise care înconjură punctul z în sens pozitiv și este conținută în domeniul G.

Într-adevăr, formula lui Cauchy 10.33(5) arată că $f(z)$ este reprezentabilă, în G, printr-o integrală de tip Cauchy; rămîne să aplicăm teorema 10.28.

10.35.a. TEOREMĂ. *Orice funcție $w = f(z)$ analitică în interiorul unui disc $V = \{z : |z - z_0| \leqslant r\}$, se dezvoltă în serie de puteri*

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n (z - z_0)^n, \qquad (1)$$

care converge în interiorul discului V.

Demonstrație. Plecăm de la formula lui Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Lambda \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z},$$

care este valabilă pentru orice contur $\Lambda = \{\zeta : |\zeta - z_0| = r - \delta\}$ și orice punct z interior lui Λ. În aceste condiții, avem:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n.$$

Seria obținută converge uniform pe Λ în raport cu ζ, conform estimării

$$\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| = \frac{|z - z_0|}{r - \delta} < 1$$

și criteriului lui Weierstrass 6.53. Conform teoremei 10.22 b, avem

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Lambda} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n d\zeta =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Lambda} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}},$$

ceea ce dă dezvoltarea căutată, ca și expresia coeficientului a_n:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Lambda} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \quad n \geqslant 0. \tag{2}$$

b. În virtutea lui 10.34, avem

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}. \tag{3}$$

Aceasta permite să întărim teorema de la punctul a prin următorul rezultat.

TEOREMĂ. *Orice funcție* $w = f(z)$ *analitică în discul* $V = \{z \mid |z - z_0| < r\}$ *se dezvoltă în acest disc în serie de puteri*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)\, (z - z_0)^n. \tag{4}$$

Seria (4) se numește *seria Taylor pentru funcția analitică* $f(z)$ *în discul* V *în jurul punctului* z_0.

COROLAR. *Dacă o funcție* $f(z)$ *este analitică într-un disc* $V = \{z \mid |z - z_0| < r\}$ *și dacă* $f^{(n)}(z_0) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, *atunci* $f(z) = 0$ *în discul* V.

10.36.a. Spunem că un șir (o serie) de funcții $f_n(z)$ definite într-un domeniu G *converge uniform în interiorul* lui G, dacă convergența acestui șir (serii) este uniformă pe orice compact Q inclus în G.

Notăm că un compact Q inclus în G poate fi inclus în interiorul unui contur închis neted pe porțiuni care să fie și el inclus în G. Într-adevăr, orice punct $z_0 \in Q$ poate fi

acoperit de un disc deschis $V = \{z \mid |z - z_0| < \rho\}$ conținut, împreună cu frontiera sa, în G. În virtutea lui 3.97, putem alege din acoperirea obținută pentru compactul Q, o acoperire finită $V_1, \ldots, V_m$. Frontiera domeniului $V = V_1 \cup \ldots \cup V_m$ reprezintă un contur închis neted pe porțiuni care este format dintr-un număr finit de arce de cerc; prin construcție, el este inclus în domeniul $G \setminus Q$ și înconjură pe Q, ceea ce trebuia demonstrat.

b. TEOREMĂ. *Dacă un șir $f_1, f_2, \ldots$ de funcții analitice într-un domeniu G converge uniform în interiorul lui G către o funcție f, atunci f este și ea analitică în G. Șirul $f_1', f_2', \ldots$ al derivatelor de ordin oarecare converge uniform în interiorul lui G către derivata corespunzătoare $f^{(n)}$ a funcției f.*

Demonstrație. Avem, conform formulei lui Cauchy 10.33,

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Lambda \frac{f_n(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}$$

pentru orice curbă închisă $\Lambda \subset G$ ce înconjură un punct dat $z \in G$. Trecînd la limită pentru $n \to \infty$ și folosind teorema 10.22, găsim

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Lambda \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z},$$

adică funcția $f(z)$ este reprezentată printr-o integrală de tip Cauchy și, prin urmare, este analitică în G.

Pentru a demonstra partea a doua a teoremei, considerăm reprezentările 10.34 pentru funcțiile $f^{(m)}(z)$ și $f_n^{(m)}(z)$:

$$f^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i} \oint_\Lambda \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{m+1}}, \quad f_n^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i} \oint_\Lambda \frac{f_n(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{m+1}},$$

unde integralele sînt luate în lungul unei curbe închise netede pe porțiuni $L \subset G$ care înconjură compactul dat $Q \subset G$ în sens pozitiv. Deoarece funcția $\frac{1}{(\zeta - z)^{m+1}}$, pentru $\zeta \in L$, $z \in Q$, este majorată în modul de cantitatea $\frac{1}{d^{m+1}}$, unde $d = \inf |\zeta - z|$ și deoarece șirul $f_n(\zeta)$ con-

verge uniform pe conturul L către $f(\zeta)$, şirul $\dfrac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{m+1}}$ converge către $\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{m+1}}$ uniform în raport cu parametrul $z \in Q$ pe conturul L. Putem deci aplica 10.22 b şi teorema este demonstrată.

10.37.a. Vom stabili reciproca teoremei 10.35 :

TEOREMA. *Suma unei serii de puteri*

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n(z - z_0)^n \qquad (1)$$

este o funcţie analitică în interiorul cercului $G = \{z \mid |z - z_0| < r\}$ *de convergenţă al seriei şi peste tot în interiorul lui* G *este adevărată următoarea formulă*

$$f'(z) = a_1 + 2a_2(z - z_0) + 3a_3(z - z_0)^2 + \ldots$$

Demonstraţie. Conform teoremei 6.64.a, seria (1) converge uniform în orice disc G' inclus în discul de convergenţă G şi având acelaşi centru.

Pe de altă parte, orice compact $Q \subset G$ este conţinut într-un astfel de disc G'. Într-adevăr, dacă presupunem contrariul, putem găsi în compactul Q un şir de puncte $z_1, z_2, z_3, \ldots$ cu $|z_n - z_0| \to r$ şi compactul Q conţine o valoare oarecare de aderenţă z_ω a acestui şir. Dar pentru z_ω avem $|z_\omega - z_0| = r$, ceea ce contrazice condiţia $Q \subset G$.

Se poate deci aplica teorema 10.36 b. Funcţia $(z - z_0)^n$ fiind analitică, seria (1) reprezintă, conform 10.36 b, o funcţie analitică în interiorul lui G.

A doua parte a teoremei rezultă din a doua parte a lui 10.36 b.

b. În particular, avem

$$(e^z)' = \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots\right)' = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots = e^z, \qquad (2)$$

$$(\sin z)' = \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right)' =$$

$$= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots = \cos z, \qquad (3)$$

$$(\cos z)' = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots\right)' =$$

$$= -z + \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \ldots = -\sin z, \qquad (4)$$

$$(\operatorname{sh} z') = \left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots\right)' =$$

$$= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots = \operatorname{ch} z, \qquad (5)$$

$$(\operatorname{ch} z') = \left(1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots\right)' =$$

$$= z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots = \operatorname{sh} z. \qquad (6)$$

De altfel, am putea obține formulele (3 — (6) plecînd de la formula (2) și folosind exprimările cunoscute ale funcțiilor trigonometrice și hiperbolice cu ajutorul funcției exponențiale (8.63 și 8.72).

c. Raza de convergență a seriei (1) este legată într-un mod natural de analiticitatea funcției $f(z)$. Anume, *discul de convergență al seriei* (1) *este cel mai mare disc centrat în* z_0 *în care funcția* $f(z)$ *este analitică*, deoarece funcția $f(z)$ este reprezentată prin seria sa Taylor în orice disc unde ea este analitică (10.35).

Astfel, raza de convergență a seriei

$$f(z) = \frac{1}{1 + z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \ldots \qquad (7)$$

este egală cu 1 și singularitățile funcției $f(z)$ cele mai apropiate de punctul $z_0 = 0$ se găsesc în $z = \pm i$, la distanța 1 de punctul z_0. Rămînînd în domeniul real, este dificil de explicat, plecînd de la proprietățile funcției $f(x)$, cauzele divergenței seriei (7) pentru $z = \pm i$.

d. Un punct $z = a$ se numește *zero* (sau *rădăcină*) a unei funcții $w = f(z)$ analitice într-un domeniu $G \ni a$ dacă $f(a) = 0$. Mai precis, acest punct este numit *zero* (*rădăcină*) *de multiplicitate* k dacă $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(k-1)}(a) = 0$, $f^{(k)}(a) \neq 0$. Astfel, în vecinătatea zeroului său de multipli-

citate k o funcție analitică $f(z)$ este dezvoltabilă în serie Taylor care începe cu $(z-a)^k$:

$$f(z)=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k+\frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(z-a)^{k+1}+\dots$$

Putem de asemenea nota

$$f(z)=(z-a)^k\,g(z),$$

unde

$$g(z)=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}+\frac{f^{(k+1}(a)}{(k+1)!}(z-a)+\dots$$

este analitică (ca suma unei serii convergente de puteri) în vecinătatea punctului a, deci și în întreg domeniul G (ca raportul a două funcții analitice $f(z)$ și $(z-a)^k$). În plus, avem $g(a)=\dfrac{1}{k!}f^{(k)}(a)\neq 0$.

10.38. O funcție analitică în tot planul complex $\mathbb{C}$ se numește *funcție analitică întreagă*. Conform 10.35, orice funcție întreagă $f(z)$ se dezvoltă într-o serie Taylor

$$f(z)=\sum_0^\infty a_n z^n \qquad (z_0=0), \tag{1}$$

care converge în tot planul.

TEOREMA (*Liouville*). *O funcție analitică întreagă $f(z)$, care este mărginită în modul în tot planul $\mathbb{C}$, este o constantă.*

Demonstrație. Presupunem că există un $A>0$, astfel încît

$$|f(z)|\leqslant A,$$

pentru orice $z\in\mathbb{C}$. Considerăm expresia 10.35 (2) a coeficienților seriei alegînd pentru conturul Λ cercul de rază R centrat în originea coordonatelor:

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Lambda\frac{f(\zeta)\,d\xi}{\xi^{n+1}}. \tag{2}$$

Ținînd cont de 10.21(5), avem

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{A}{R^{n+1}} \cdot 2\pi R = \frac{A}{R^n}.$$

Numărul R, în această inegalitate, fiind arbitrar de mare, se obține

$$a_n = 0 \text{ pentru } n = 1, 2, \ldots,$$

deci

$$f(z) = a_0 = \text{const},$$

ceea ce trebuie demonstrat.

10.39.a. TEOREMĂ (*a identității pentru funcții analitice*). *Dacă o funcție* $\varphi(z)$ *analitică într-o mulțime deschisă conexă* G *este nulă într-un șir de puncte* $z_1, z_2, \ldots$ *care converge către un punct* $z_0 \in G$, *atunci* $\varphi(z) = 0$ *pentru orice* $z \in G$.

Demonstrație. În virtutea teoremei 10.35, funcția $\varphi(z)$ în orice disc $V = \{z : |z - z_0| < r\} \subset G$ este suma unei serii de puteri

$$\varphi(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots \qquad (1)$$

Să arătăm că $\varphi(z) = 0$ în discul V. Este suficient să probăm că toate numerele $c_0, c_1, c_2, \ldots$ sînt nule. Alături de seria (1), considerăm seriile de puteri

$$\varphi_1(z) = c_1 + c_2(z - z_0) + c_3(z - z_0)^2 + \ldots,$$

$$\varphi_2(z) = c_2 + c_3(z - z_0) + c_4(z - z_0)^2 + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Fiecare din seriile următoare se obține din cea precedentă din care se elimină termenul său constant și care se împarte apoi cu $(z - z_0)$. În consecință, toate seriile converg în același disc, la fel ca seria (1), și funcțiile $\varphi_m(z)$ sînt continue conform 6.64 b în punctul $z = z_0$. Avem, apoi, prin

inducție:

$$\varphi(z_n) = 0, \qquad c_0 = \varphi(z_0) = \lim_{n\to\infty} \varphi(z_n) = 0;$$

$$\varphi_1(z_n) = \frac{\varphi(z_n) - \varphi(z_0)}{z_n - z_0} = 0, \qquad c_1 = \varphi_1(z_0) = \lim_{n\to\infty} \varphi_1(z_n) = 0;$$

. . . . . .

$$\varphi_m(z_n) = \frac{\varphi_{m-1}(z_n) - \varphi_{m-1}(z_0)}{z_n - z_0} = 0, \quad c_m = \varphi_m(z_0) = \lim_{n\to\infty} \varphi_m(z_n) = 0;$$

. . . . . .

În final, toți c_i sînt nuli.

Am demonstrat că $\varphi(z) = 0$ într-un anume disc V centrat în z_0. Fie acum z_1 un punct oarecare al mulțimii G. Deoarece G este conexă, există un drum neted pe porțiuni $L \subset G$ care unește punctele z_0 și z_1.

Punem $d = \inf \rho(z)$, unde $\rho(z)$ este raza celui mai mare disc posibil centrat într-un punct $z \in L$, care este inclus în G; numărul d este pozitiv în virtutea compacității lui L. Am văzut mai sus că $\varphi(z) = 0$ în discul V_0 de rază d centrat în z_0. Deplasînd centrul discului de rază d în lungul lui L, se vede că $\varphi(z) = 0$ în disc, pentru orice poziție a centrului său pe curba L. Ajungînd în punctul z_1, se obține $\varphi(z_1) = 0$. Teorema este demonstrată.

b. TEOREMĂ. *Dacă două funcții $f(z)$ și $g(z)$, analitice într-o mulțime deschisă conexă G, coincid în punctele unui șir $z_1, \ldots, z_n, \ldots$, convergent în G, atunci $f(z) = g(z)$ pentru orice $z \in G$.*

Demonstrație. Punem $f(z) - g(z) = \varphi(z)$; funcția $\varphi(z)$ este analitică în G deoarece $f(z)$ și $g(z)$ satisfac ipoteza din teorema de la punctul a. Aplicînd-o se vede că $\varphi(z) = 0$ în domeniul G, deci $f(z) = g(z)$ peste tot în G. Teorema este demonstrată.

c. Proprietatea de la punctul b stă la baza ideii de prelungire analitică a unei funcții. Fie $f_1(z)$ o funcție analitică într-un domeniu G_1 și $f_2(z)$ o funcție analitică într-un domeniu G_2, a cărui intersecție cu G_1, notată G_0, este nevidă și conexă. Presupunem că în G_0 există un șir de puncte $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ convergent către un punct din G_0 și astfel încît $f_1(z_n) = f_2(z_n)$ $(n = 1,2, \ldots)$. Atunci, după cum am văzut mai sus, funcțiile $f_1(z)$ și $f_2(z)$ se confundă în tot domeniul G_0, funcția $f(z)$, care este egală cu $f_1(z)$

în G_1 și $f_2(z)$ în G_2, este definită în mod unic în domeniul $G = G_1 \cup G_2$ și este analitică în domeniul G. Se spune atunci că funcția $f(z)$ este *o prelungire analitică a funcției* $f_1(z)$ de la G_1 la G. Rezultă deci că *nu poate exista decît o singură prelungire analitică a lui* $f_1(z)$ *din domeniul* G_1 *în domeniul* G.

d. *Exemplu.* Funcția $f_1(z) = \sum_0^\infty z^n$ este definită (ca suma seriei) și analitică în cercul $|z|<1$. Funcția $f(z)= \dfrac{1}{1-z}$ care este definită peste tot cu excepția lui $z = 1$ reprezintă prelungirea analitică a funcției $f_1(z)$ în tot planul $\mathbb{C}$ mai puțin punctul $z = 1$.

e. TEOREMĂ. *Dacă toate derivatele* $f^{(k)}(a)$ *ale unei funcții* $f(z)$ *analitice într-un domeniu conex* $G \ni a$ *se anulează în punctul* a $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, *atunci* $f(z) = 0$ *în* G.

Demonstrație. Fie un disc $V = \{z \mid |z - a| < r\}$ conținut în întregime în domeniul G. Conform teoremei 10.35 c, funcția $f(z)$ este nulă în tot discul și îi aplicăm teorema 10.39 a.

f. *Exemplu : funcții analitice reale.* O funcție $f(z)$ analitică într-o mulțime deschisă și conexă G, care conține puncte ale axei reale, se numește *funcție analitică reală* dacă toate valorile sale pe axa reală sînt reale.

Deoarece valorile pe care derivata unei funcții analitice $f(z)$ le ia pe axa reală pot fi calculate cu ajutorul valorilor luate de funcția $f(z)$ pe axa reală, se vede că derivata $'(z)$ a unei funcții analitice reale este o funcție analitică reală. De asemenea, toate celelalte derivate $f''(z), f'''(z), \ldots$ sînt și ele funcții analitice reale. Dezvoltarea Taylor a funcției $f(z)$ în vecinătatea unui punct real z_0,

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n(z - z_0)^n$$

are coeficienții reali $a_n = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$. Avem deci, în discul de convergență al acestei serii,

$$\overline{f(\bar{z})} = \overline{\sum_0^\infty a_n(\bar{z} - z_0)^n} = \sum_0^\infty a_n(z - z_0)^n = f(z).$$

TEOREMĂ. *O funcție analitică reală* $f(z)$ *satisface condiția*

$$\overline{f(\bar{z})} = f(z)$$

în orice punct $z \in G$, *astfel încît* $\bar{z} \in G$.

Demonstrație. Punctele care aparțin lui G împreună cu conjugatele lor complexe formează un domeniu simetric în raport cu axa reală. Este suficient deci să discutăm cazul cînd G este simetric în raport cu axa reală. Notăm prin G^+ partea lui G conținută în semiplanul superior, G^- partea conținută în semiplanul inferior. Definim, în domeniul G^+, o nouă funcție

$$f_1(z) = \overline{f(\bar{z})},$$

folosind valorile lui $f(z)$ pentru $z \in G^-$. Pentru orice $z_0 \in G^+$, dezvoltarea Taylor

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n(z - z_0)^n$$

dă dezvoltarea funcției $f_1(z)$ în serie de puteri

$$f_1(z) = \overline{f(\bar{z})} = \overline{\sum_0^\infty a_n(\bar{z} - \bar{z}_0)^n} = \sum_0^\infty \bar{a}_n(z - z_0)^n,$$

de unde rezultă că funcția $f_1(z)$ este analitică în G^+. Dar în vecinătatea axei reale funcția $f_1(z)$ coincide, după cum am văzut, cu $f(z)$. Aplicînd teorema de la punctul b, se vede că $f_1(z) = f(z)$ peste tot în G^+. Înlocuind G^+ cu G^- și invers, se obține că identitatea $\overline{f(\bar{z})} = f(z)$ are loc peste tot în G^-. Pe axa reală avem evident $\overline{f(\bar{z})} = f(z)$. Deci, $\overline{f(\bar{z})} = f(z)$ peste tot în G, ceea ce trebuia de demonstrat.

§ 10.4. Reziduuri și puncte singulare izolate

10.41. *Reziduuri.* Dacă o funcție $f(z)$ este analitică într-un domeniu G conținînd un contur L închis neted pe porțiuni, atunci, conform teoremei lui Cauchy 10.32, avem

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L f(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Adesea avem de a face cu o integrală de forma

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L f(\zeta)\,d\zeta, \tag{1}$$

funcţia $f(z)$ avînd puncte singulare în interiorul domeniului mărginit a cărui frontieră este L. O astfel de integrală, în general, nu este nulă. Integrala Cauchy 10.33(5) este un astfel de exemplu:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \varphi(z), \tag{2}$$

unde $\varphi(z)$ este analitică în domeniul simplu conex G care conţine drumul L. Considerăm cazul cînd funcţia $f(z)$ din (1) are, în domeniul G conţinînd conturul L, un singur punct singular $z = a$ (singular în sensul că fie funcţia $f(z)$ nu este definită, fie este definită dar nu este derivabilă). Valoarea integralei (1) nu depinde, în acest caz, de alegerea conturului L (cu condiţia ca el să înconjure punctul a o dată în sens pozitiv). Această valoare este numită *reziduul funcţiei $f(z)$ în punctul $z = a$* şi este notat după cum urmează: Rez $[f(z)]_{z=a}$.

10.42. Iată cîteva exemple.

a. Integrala

$$I = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{g(\zeta)}{P(\zeta)}\,d\zeta,$$

unde $P(z)$ este un polinom pentru care $z = a$ este o rădăcină simplă ($P(a) = 0$, $P'(a) \neq 0$) şi care nu are alte rădăcini în domeniul G, iar $g(z)$ este o funcţie analitică în G. Se poate scrie

$$P(z) = b_1(z - a) + b_2(z - a)^2 + \ldots = (z - a)\,P_1(z),$$

unde $P_1(z) = b_1 + b_2(z - a) + \ldots$ este un polinom care ia valoarea $b_1 = P'(a) \neq 0$ pentru $z = a$ şi care nu are rădăcini în G. Conform formulei lui Cauchy 10.41 (2),

avem

$$I = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{g(\zeta)}{P(\zeta)}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{g(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - a)P_1(\zeta)} =$$

$$= \frac{g(a)}{P_1(a)} = \frac{g(a)}{P'(a)}$$

și reziduul funcției $f(z) = \dfrac{g(z)}{P(z)}$ pentru $z = a$ este găsit:

$$\text{Rez}\,[f(z)]_{z=a} = I = \frac{g(a)}{P'(a)}. \qquad (1)$$

b. Integrala

$$I = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{g(\zeta)}{P(\zeta)}\,d\zeta,$$

unde polinomul $P(z)$, contrar celui din exemplul precedent, are în $z = a$ o rădăcină de multiplicitate m, adică

$$P(z) = b_m(z - a)^m + b_{m+1}(z - a)^{m+1} + \ldots, \quad b_m \neq 0.$$

Avem

$$P(z) = (z - a)^m \cdot P_m(z),$$

unde

$$P_m(z) = b_m + b_{m+1}(z - a) + \ldots, \quad P_m(a) = b_m = \frac{P^{(m)}(a)}{m!} = 0.$$

Dezvoltăm funcția $\dfrac{g(z)}{P_m(z)}$ în serie Taylor după puterile lui $(z - a)$:

$$\frac{g(z)}{P_m(z)} = c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \ldots$$

Atunci

$$\frac{g(z)}{P(z)} = \frac{g(z)}{(z - a)^m P_m(z)} = \frac{c_0}{(z - a)^m} +$$

$$+ \frac{c_1}{(z - a)^{m-1}} + \ldots + \frac{c_{m-1}}{z - a} + c_m + c_{m+1}(z - a) + \ldots$$

După integrare în lungul lui L nu va rămîne decît termenul conținînd coeficientul c_{m-1} (10.33a). Conform 10.35b, el va fi

$$I = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{g(\zeta)\,d\zeta}{P(\zeta)} = c_{m-1} = \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{g(z)}{P_m(z)}\right)^{(m-1)}_{z=a} =$$

$$= \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{g(z)(z-a)^m}{P(z)}\right)^{(m-1)}_{z=a}.$$

În final,

$$\operatorname{Rez}\left[\frac{g(z)}{P(z)}\right]_{z=a} = \frac{1}{(m-1)!}\left[\frac{g(z)\,(z-a)^m}{P(z)}\right]^{(m-1)}_{z=a}. \qquad (2)$$

10.43. Dacă trebuie să calculăm integrala 10.41(1) în lungul unei curbe închise ce înconjură nu un singur punct, ci mai multe puncte singulare $a_1, \ldots, a_m$ ale funcției $f(z)$, putem să folosim relația

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L f(\zeta)\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1} f(\zeta)\,d\zeta + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_m} f(\zeta)\,d\zeta = \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Rez}\,[f(z)]_{z=a_j}, \qquad (1)$$

unde $L_1, \ldots, L_m$ sînt curbe închise netede pe porțiuni, fiecare dintre ele înconjurînd un singur punct singular. Demonstrația acestei egalități (numită *teorema fundamentală a reziduurilor*) rezultă evident din teorema lui Cauchy (vezi fig. 10.6 care arată drumul inițial L, drumurile

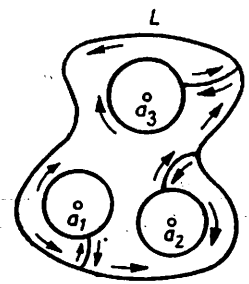


Fig. 10.6

$L_1, \ldots, L_m$ și drumurile auxiliare parcurse fiecare de două ori în sensuri opuse).

Exemplu. Calculăm integrala

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 2pz + 1}, \quad p > 1.$$

Produsul a două rădăcini ale numitorului este egal cu 1. Una din ele, z_1, se află în interiorul, alta, z_2, în exteriorul cercului unitate (fig. 10.7). În formula rădăcinilor trinomului de gradul al doilea

$$z_{1,2} = p \pm \sqrt{p^2 - 1}$$

pentru $p > 1$, semnul minus corespunde rădăcinii z_1,

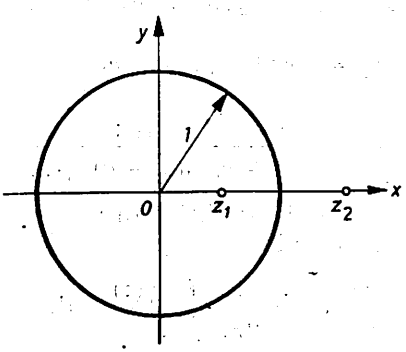


Fig. 10.7

semnul plus lui z_2. În z_1 numitorul are o rădăcină simplă și avem, conform formulei 10.42(1):

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 2pz + 1} = 2\pi i \left.\frac{1}{2(z-p)}\right|_{z=z_1} = \frac{i\pi}{\sqrt{p^2-1}}.$$

10.44. *Reziduul logaritmic.* Fie o integrală de forma:

$$N = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz, \qquad (1)$$

unde funcția $f(z)$ este analitică într-un domeniu G ce conține conturul închis L și care nu se anulează pe acest con-

tur. Dacă ea nu se anulează nici în interiorul conturului L, atunci integrala (1) este nulă conform teoremei Cauchy 10.32. Dacă funcția $f(z)$ are zerouri în interiorul lui L, atunci, conform teoremei de unicitate 10.39 a, ele sînt în număr finit; să le notăm prin $z_1, z_2, \ldots, z_m$ și multiplicitățile lor respectiv prin $k_1, k_2, \ldots, k_m$. Conform cu 10.43, integrala N este suma integralelor analoage

$$N = \sum_{j=1}^{m} N_j, \qquad N_j = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_j} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz,$$

unde fiecare contur L_j nu conține în interiorul său decît un singur zero z_j de multiplicitate k_j. Pentru a scurta notația, punem $z_j = a$, $k_j = k$. În vecinătatea punctului a avem

$$f(z) = c_k(z-a)^k + c_{k+1}(z-a)^{k+1} + \ldots, \quad c_k \neq 0,$$

$$f'(z) = kc_k(z-a)^{k-1} + (k+1)c_{k+1}(z-a)^k + \ldots,$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-a} \cdot \frac{kc_k + (k+1)c_{k+1}(z-a) + \ldots}{c_k + c_{k+1}(z-a) + \ldots} = \frac{\varphi(z)}{z-a},$$

unde $\varphi(z)$ este o funcție analitică în vecinătatea punctului $z = a$ care ia în a valoarea $\varphi(a) = k$. Deci

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{L_j} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_j} \frac{\varphi(z)}{z-a}\, dz = \varphi(a) = k.$$

În final,

$$N = \sum_{j=1}^{m} N_j = \sum_{j=1}^{m} k_j,$$

adică *integrala N este un întreg pozitiv egal cu suma multiplicităților tuturor rădăcinilor funcției $f(z)$ care sînt în interiorul conturului L.*

Integrala N se numește *reziduul logaritmic* al funcției $f(z)$ în raport cu conturul L. Originea acestui termen va fi clarificată în cele ce urmează (10.57).

10.45. Considerațiile care urmează sînt consacrate „analizei calitative" a comportamentului unei funcții în

vecinătatea unui punct singular izolat. Ca instrument servește dezvoltarea în serie a funcției considerate, numită serie Laurent, după puterile pozitive și negative ale lui $z - a$.

Fie $w = f(z)$ o funcție analitică într-o coroană circulară $Q = \{r_0 < |z - a| < R_0\}$, unde $0 \leqslant r_0 < R_0 \leqslant \infty$ (fig. 10.8). Alegem numerele r și R astfel încît să avem

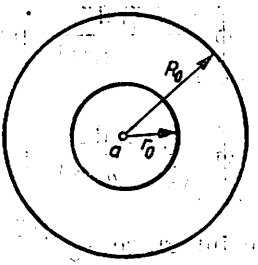


Fig. 10.8

$r_0 < r < R < R_0$. Atunci, dacă aplicăm teorema lui Cauchy domeniului simplu pe care îl obținem tăind coroana după o rază ce nu trece prin z, vom avea, pentru $r < |z - a| < R$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=R} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=r} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}.$$

Pentru prima integrală se utilizează dezvoltarea:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{(\zeta - a)\left[1 - \dfrac{z - a}{\zeta - a}\right]} =$$

$$= \frac{1}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - a}{\zeta - a}\right)^n.$$

Pentru a doua, dezvoltarea

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = -\frac{1}{z - a} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\zeta - a}{z - a}} =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - a)^n}{(z - a)^{n+1}}.$$

Conform criteriului lui Weierstrass (cf. 10.35 a), cele două dezvoltări converg uniform pe conturile corespunzătoare de integrare. Deci, aplicînd 10.22 a, avem

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-a)^n, \qquad (1)$$

unde

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\oint_{|z-a|=R} \dfrac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} & \text{pentru } n \geqslant 0, \\ \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\oint_{|z-a|=r} \dfrac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} & \text{pentru } n < 0. \end{cases}$$

De altfel, funcția de integrare $\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}$ fiind analitică în coroana Q, putem să o integrăm în lungul oricărei circumferințe $|z-a| = \rho$, $\rho \in (r_0, R_0)$ și la fel în lungul oricărei curbe închise netede pe porțiuni care înconjură punctul a o dată în sens pozitiv fără a ieși din coroana Q.

În particular, dacă $r_0 = 0$, atunci *coeficientul* c_{-1} *este chiar reziduul funcției* $f(z)$ *în punctul* $z = a$ (10.41).

Notația prescurtată a sumei (1) este

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n. \qquad (2)$$

Putem considera această expresie ca limita sumei $\sum_{n=p}^{q} c_n(z-a)^n$ cînd $p \to -\infty$, $q \to \infty$, independent unul de altul, adică la fel ca suma unei serii bilaterale (6.48 a) ; aceasta rezultă din convergența a două serii din membrul secund al lui (1) și din teorema 6.48 b.

Seria (1) sau (2) se numește *serie Laurent pentru funcția* $w = f(z)$ *în coroana* Q. Conform teoremei 10.22 b, ea converge uniform pentru $r \leqslant |z-a| \leqslant R$. Ea este definită într-un mod univoc pentru orice funcție $f(z)$, deoarece, oricare ar fi $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $r_0 < \rho < R_0$, din (1) rezultă că

$$\int_{|z-a|=\rho} f(z)(z-a)^{-m}\,dz = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \int_{|z-a|=\rho} (z-a)^{-m+n}\,dz = 2\pi i\, c_{m-1}.$$

Termenul $f^+(z) = \sum_{0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ este numit *partea regulată* (sau *tayloriană*) a seriei Laurent, termenul $f^-(z) = \sum_{-1}^{-\infty} c_n(z-a)^n$ — *partea principală*. Numerele c_n se numesc *coeficienții Laurent*.

Partea regulată este o serie după puterile pozitive ale lui $z-a$ care converge pentru $|z-a| = R$, deci la fel în orice disc $|z-a| \leqslant R_0$ (6.62), aici incluzînd partea interioară $|z-a| \leqslant r_0$ care nu este conținută în coroana Q.

Partea principală este o serie după puterile negative ale lui $z-a$ care converge pentru $|z-a| = r$. Dacă punem $z-a = \frac{1}{\zeta}$, se obține o serie după puterile pozitive ale lui ζ care converge pentru $|\zeta| = \frac{1}{r}$, deci și pentru $|\zeta| \leqslant \frac{1}{r}$ (6.62); în consecință, partea principală a seriei Laurent converge pentru toți $|z-a| > r_0$ incluzînd partea exterioară $|z-z_0| \geqslant R_0$, care nu este conținută în coroana Q.

10.46. *Puncte singulare izolate.* Fie $w = f(z)$ o funcție analitică într-un disc $|z-a| < R_0$ cu excepția punctului din centrul, a. În domeniul $0 < |z-a| < R_0$, funcția $f(z)$ se dezvoltă în serie Laurent

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n. \qquad (1)$$

Structura acestei serii determină natura punctului singular izolat a.

a. Dacă toți coeficienții seriei Laurent c_n, cu $n < 0$ sînt nuli, punctul a se numește *punct singular aparent* al funcției $f(z)$. Funcția $f(z)$ se dezvoltă atunci, în domeniul $0 < |z-a| < R_0$, în seria

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

a cărei sumă este o funcție analitică în întreg discul $|z-a| < R_0$, incluzînd acolo și punctul $z = a$, și ia

valoarea c_0 pentru $z = a$. Deci, dacă se completează definiţia funcţiei $f(z)$ punînd $f(a) = c_0$, se ajunge la o funcţie analitică în discul $|z - a| < R_0$ fără nici o singularitate în punctul $z = a$. Aceasta explică termenul „punct singular aparent".

b. Dacă toţi coeficienţii seriei Laurent c_n, cu $n < -m$ şi $m > 0$, sînt nuli şi dacă $c_{-m} \neq 0$, atunci punctul a este numit *pol de ordin m al funcţiei* $f(z)$.

c. Dacă există coeficienţi ai seriei Laurent c_n nenuli, cu n negativi şi arbitrar de mari în modul, atunci punctul a este numit *punct singular esenţial* al funcţiei $f(z)$.

d. Din raţiuni de generalitate, completăm planele complexe ale variabilelor z şi w cu punctele improprii $z = \infty$ şi $w = \infty$ respectiv („puncte la infinit"). Notăm prin simbolul $z \to \infty$ direcţia în planul lui z format din mulţimile $A_r = \{z \mid |z| > r\}$, unde r parcurge toate numerele pozitive (sau, cel puţin, toate numerele mai mari ca r_0); simbolul $w \to \infty$ are un sens analog (4.73 f). Punctele z şi w, distincte de $z = \infty$ şi $w = \infty$ pe care le-am definit, sînt numite *puncte finite*. Fie o direcţie $\mathcal{S}$ în planul z; spunem că pentru o funcţie dată $w = f(z)$ are loc relaţia $\lim_{\mathcal{S}} f(z) = \infty$, dacă oricare ar fi numărul r, există o mulţime $A_r \in \mathcal{S}$ în punctele căreia are loc relaţia

$$|f(z)| > r.$$

În acest mod, se atribuie un sens precis expresiilor

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty, \quad \lim_{z \to \infty} f(z) = b, \quad \lim_{z \to \infty} f(z) = \infty,$$

a şi b fiind puncte la distanţă finită. De exemplu, avem

$$\lim_{z \to a} \frac{1}{(z - a)^m} = \infty;$$

$$\lim_{z \to a} \varphi(z) f(z) = \infty, \text{ dacă } \lim_{z \to a} \varphi(z) = b \neq 0, \lim_{z \to a} f(z) = \infty;$$

$$\lim_{z \to a} \varphi(z) = \infty, \text{ dacă şi numai dacă } \lim_{z \to a} \frac{1}{\varphi(z)} = 0.$$

Într-un mod analog cu 4.55, spunem că punctul $w = \infty$ este o valoare de aderenţă a funcţiei f după direcţia $\mathcal{S}$,

dacă pentru orice r există în fiecare din mulțimile $A_r \in \mathcal{S}$ un punct z_r, astfel încît:

$$|f(z_r)| > r.$$

Dacă o funcție f nu este mărginită după direcția $\mathcal{S}$, ea are punctul $w = \infty$ ca valoare de aderență.

c. Considerăm cazul cînd o funcție f este definită și analitică într-un domeniu $G = \{z \mid |z| > R\}$. În virtutea teoremei generale 10.45, ea se dezvoltă în domeniul G în serie Laurent

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n. \tag{2}$$

Prin transformarea $z = \frac{1}{\zeta}$ domeniul G este transformat în domeniul $H = \left\{\zeta \mid 0 < |\zeta| \leqslant \frac{1}{R}\right\}$ și funcția $f(z)$, în funcția

$$\varphi(\zeta) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \zeta^{-n}.$$

Spunem că funcția $f(z)$ are în punctul $z = \infty$, *un punct singular aparent*, *un pol sau un punct singular esențial*, dacă funcția $\varphi(\zeta)$ are în $\zeta = 0$ un punct singular de același tip. Altfel spus, punctul $z = \infty$ este un punct singular aparent pentru funcția $f(z)$, dacă dezvoltarea (2) nu conține nici o putere cu exponent pozitiv; el este *un pol de ordin m* în cazul cînd coeficienții $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$ din dezvoltarea (2) sînt nuli, în timp ce $a_m \neq 0$; el este *un punct singular esențial* dacă dezvoltarea (2) conține puteri cu exponent arbitrar de mari.

Mai departe vom studia comportamentul funcției f în vecinătatea unui punct singular, în fiecare din cele trei cazuri semnalate.

10.47. Dacă, în dezvoltarea 10.46(1), avem $c_n = 0$ pentru $n < -m$ $(m > 0)$, deoarece

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z - a)^n,$$

atunci punem

$$\varphi(z) = (z - a)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - a) + \dots$$

Funcţia $\varphi(z)$ are $z = a$ punct singular aparent şi, în condiţia suplimentară $\varphi(a) = c_{-m}$, devine analitică în discul $|z - a| < R_0$ şi nenulă în $z = a$. De aici rezultă că

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - a)^m}.$$

Fiind dat $\varphi(a) \neq 0$, funcţia $f(z)$ tinde la infinit pentru $z \to a$ (10.46 d).

Funcţiile de sub integrală din exemplele 10.42. a,b, pentru care trebuie să calculăm reziduurile, sînt de acest tip.

10.48. Presupunem acum că a este un punct singular esenţial al funcţiei $f(z)$.

Arătăm la început că funcţia f nu este mărginită în vecinătatea punctului $z = a$. Dacă f era mărginită în vecinătatea lui $z = a$, la fel va fi şi partea sa principală f^-, deoarece partea regulată f^+ este acolo mărginită. Seria

$$f^-(z) = \sum_{-1}^{-\infty} c_n(z - a)^n$$

converge pentru orice $z \neq a$ (10.45). Deci înlocuind $z = a$ cu $\frac{1}{\zeta}$, se obţine o serie

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n,$$

care converge în tot planul ζ. Dacă funcţia f^- ar fi mărginită pentru $0 < |z - a| \leqslant \varepsilon$, funcţia $\varphi(\zeta)$ ar fi la fel pentru $|\zeta| \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$. Dar, funcţia $\varphi(\zeta)$ este mărginită pentru $|\zeta| < \frac{1}{\varepsilon}$ (deoarece ea este continuă), deci $\varphi(\zeta)$ ar fi mărginită în tot planul ζ. Conform teoremei lui Liouville (10.38), $\varphi(\zeta)$ ar fi constantă, deci fiind dat $\varphi(0) = 0$, am avea $\varphi(\zeta) \equiv 0$, de unde $c_n = 0$ pentru orice $n < 0$, ceea ce

contrazice ipoteza. Deci $f(z)$ nu este mărginită pentru $z \to a$, adică punctul ∞ este o valoare de aderenţă a funcţiei f pentru $z \to a$. Fie acum A un număr complex oarecare. Dacă funcţia f ia o valoare A în orice vecinătate a punctului a, atunci A este o valoare de aderenţă a lui f pentru $z \to a$. Dacă, din contră, există o vecinătate a punctului a în care funcţia f nu ia valoarea A, atunci funcţia $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z) - A}$ nu are, în această vecinătate, alte puncte singulare în afara lui a. Dacă punctul a este un pol sau un punct singular esenţial al funcţiei $\varphi(z)$, atunci, după cum am văzut mai înainte, există un şir $z_n \to a$ pentru care $\varphi(z_n) \to \infty$, deci şi $f(z_n) \to A$, astfel că A este o valoare de aderenţă a funcţiei $f(z)$ pentru $z \to a$. Considerăm, în sfîrşit, cazul cînd punctul $z = a$ este un punct singular aparent pentru funcţia $\varphi(z)$. Atunci, există, după cum am văzut mai sus, limita finită

$$b = \lim_{z \to a} \varphi(z).$$

Deoarece există un şir $z_n \to a$ pentru care $f(z_n) \to \infty$, atunci

$$b = \lim_{z \to a} \varphi(z) = \lim_{z \to a} \frac{1}{f(z_n) - A} = 0.$$

Putem pune

$$\varphi(z) = (z - a)^m \psi(z),$$

unde $\psi(a) \neq 0$, $m \geqslant 1$. Funcţia $\dfrac{1}{\psi(z)}$ este analitică în vecinătatea punctului a şi admite dezvoltarea Taylor

$$\frac{1}{\psi(z)} = b_0 + b_1(z - a) + \ldots, \text{ unde } b_0 = \frac{1}{\psi(a)}.$$

În acest fel,

$$f(z) = A + \frac{1}{\varphi(z)} = A + \frac{1}{(z - a)^m \psi(z)} =$$

$$= A + (z - a)^{-m} [b_0 + b_1(z - a) + \ldots],$$

și se vede că partea principală a seriei Taylor pentru funcția $f(z)$ nu are decît un număr finit de termeni, ceea ce contrazice ipoteza.

În concluzie, pentru un punct singular esențial a, orice număr A din planul extins z este o valoare de aderență a funcției $f(z)$ cînd $z \to a$. (Există o teoremă mai exactă a lui Picard care afirmă că, în orice vecinătate a unui punct singular esențial, funcția f ia orice valoare cu excepția eventual a uneia, de o infinitate de ori.)

10.49. Pe de altă parte, comportarea funcției f în vecinătatea unui punct singular izolat poate fi descrisă independent de cea precedentă prin următoarele caracterizări care se exclud reciproc:

(1) funcția f este mărginită într-o vecinătate a punctului a;

(2) funcția f are limita ∞ cînd $z \to a$;

(3) funcția f are, pentru $z \to a$, cel puțin două valori de aderență dintre care una este ∞.

Rezultatele din 10.46-10.48 sînt:

un punct singular aparent este un punct de tipul (1);

un pol este un punct de tipul (2);

un punct singular esențial este un punct de tipul (3).

Clasificarea 10.46, la fel ca și clasificarea (1)-(3) de mai sus, fiind completă, se pot formula propozițiile reciproce:

un punct de tipul (1) este un punct singular aparent;

un punct de tipul (2) este un pol:

un punct de tipul (3) este un punct singular esențial.

Subliniem că aceste propoziții nu sînt banale. De exemplu, prima spune că o funcție analitică și mărginită în vecinătatea unui punct a are limită finită pentru $z \to a$; ea este bazată pe rezultatele analizei comportării unei funcții în vecinătatea unui pol și a unui punct singular esențial, făcută în 10.47-10.48.

După cum am văzut în 10.46 e, toate concluziile obținute se extind în cazul cînd ∞ este un punct singular izolat. În particular, dacă funcția $f(z)$ este analitică pentru orice z astfel încît $|z| > a$, ajungem la următoarele propoziții: dacă, în ipoteza formulată, funcția $w = f(z)$ are o singură valoare de aderență $w = \infty$ pentru $z \to \infty$,

atunci $f(z)$ este un polinom; orice funcție întreagă care nu este un polinom admite orice număr $w \in G$ ca valoare de aderență a sa, cînd $z \to \infty$.

§ 10.5. Aplicații ale planului complex în el însuși. Funcții elementare

10.51. *Aplicație conformă.* Fie o funcție de gradul întîi

$$w = b(z - z_0) + w_0 = f(z), \tag{1}$$

unde b ($b \neq 0$), z_0, w_0 sînt numere complexe. Este evident că $f(z_0) = w_0$. Apoi, are loc relația $w - w_0 = b(z - z_0)$, de unde

$$|w - w_0| = |b| \cdot |z - z_0|, \tag{2}$$

$$\arg (w - w_0) = \arg b + \arg (z - z_0) \tag{3}$$

(modulo 2π). Relațiile (2), (3) scot în relief natura geometrică a aplicației $w = f(z)$: imaginea în planul w a oricărui disc $|z - z_0| \leqslant \rho$ se obține astfel : se dilată prin omotetie de raport $|b|$ și de centru z_0, apoi se rotește în jurul lui z_0, cu unghiul $\arg b$ și, în sfîrșit, se translatează cu centrul în punctul w_0.

Fie acum $w = f(z)$ o funcție analitică într-o vecinătate $|z - z_0| \leqslant \rho$ a unui punct z_0 și astfel încît $f'(z_0) = b \neq 0$, $f(z_0) = w_0$. Conform definiției derivatei, avem

$$w = w_0 + b(z - z_0) + \varepsilon(z, z_0)(z - z_0), \tag{4}$$

unde $\varepsilon(z, z_0) \to 0$ pentru $z \to z_0$.

Egalitatea (4) arată că aplicația $w = f(z)$ se aproximează printr-o funcție de gradul întîi ca în formula (1), astfel încît, cu aproximația indicată, ea se reduce la o rotație de unghi $\arg b$ în jurul centrului z_0, urmată de o omotetie de raport $|b|$ și de o rotație în w_0. O aplicație de acest tip se numește *conformă în punctul* z_0 (cu caracteristicile $k = |b|$, $\theta = \arg b$). Astfel, *o funcție analitică* $w = f(z)$ *realizează o aplicație conformă în orice punct* z_0 *cu* $f'(z_0) \neq 0$. În particular, printr-o transformare conformă,

două curbe ce formează un unghi α în punctul z_0 se transformă tot în două curbe ce formează același unghi α în punctul w_0.

10.52. TEOREMĂ. *Fie $w = f(z)$ o funcție analitică. Dacă $f'(z_0) \neq 0$, există o vecinătate a punctului z_0 care se aplică în mod bijectiv pe o vecinătate a punctului $w_0 = f(z_0)$.*

Afirmația este imediată pentru funcția 10.51(1), unde se poate rezolva direct ecuația în raport cu z, dar cazul general cere demonstrație. Fie G o vecinătate a punctului z_0 în care funcția $f(z) - w_0$ nu se anulează decît o dată, în $z = z_0$; zerourile funcției analitice $f(z) - w_0$ fiind izolate (10.39 a), există o astfel de vecinătate. Putem presupune că frontiera domeniului G este un contur L. Atunci, în virtutea lui 10.44, avem

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f'(\zeta)\, d\zeta}{f(\zeta) - w_0} = 1,$$

singurul zero al funcției $f(z) - w_0$ fiind de multiplicitate 1.

Funcția de w

$$N(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f'(\zeta)\, d\zeta}{f(\zeta) - w}$$

este definită pentru $w = w_0$ (acolo ea are valoarea 1) și de asemenea pentru alte valori ale lui w apropiate de w_0, de exemplu, pentru $|w - w_0| < \varepsilon$, deoarece numitorul este nenul nu numai pentru $w = w_0$, dar și pentru valori suficient de apropiate de w. Această funcție este continuă conform teoremei 10.24. Cum aceste valori sînt întregi (10.44), această funcție este egală cu 1 pentru toți w apropiați de w_0. Aceasta înseamnă, în virtutea lui 10.44, că funcția $f(z) - w$ se anulează o singură dată în interiorul conturului L, adică, oricare ar fi w_1, $|w_1 - w_0| < \varepsilon$, există în G un singur punct z_1 cu $f(z_1) = w_1$. Teorema este demonstrată.

10.53. *Funcție inversă.* În ipoteza 10.52, aplicația $w = f(z)$ fiind bijectivă, există o funcție inversă $z = \varphi(w)$ care realizează aplicația unei vecinătăți a punctului w_0 într-o vecinătate a lui z_0. Să arătăm că funcția $z = \varphi(w)$

este analitică. Pentru aceasta, considerăm raportul

$$\frac{\varphi(w) - \varphi(w_0)}{w - w_0} = \frac{\Delta z}{\Delta w}. \tag{1}$$

Dacă $w \to w_0$, avem $z \to z_0$; dacă funcția $\varphi(w)$ ar avea o altă valoare de aderență z_1 pentru $w \to w_0$, am avea $f(z_0) = w_0 = f(z_1)$, ceea ce este imposibil după cum am văzut mai sus. Există deci limita raportului (1) care este

$$\lim_{w \to w_0} \frac{\Delta z}{\Delta w} = \frac{1}{\lim\limits_{z \to z_0} \frac{\Delta w}{\Delta z}} = \frac{1}{f'(z_0)}, \tag{2}$$

ceea ce demonstrează derivabilitatea funcției $\varphi(w)$ pentru $w = w_0$.

10.54. *Funcții univalente (injective).* O funcție $w = f(z)$ definită și analitică într-un domeniu G al planului z este *univalentă* (sau injectivă) în G, dacă ea stabilește o corespondență bijectivă între G și un domeniu H al planului w. Vom vedea (10.59 b) că $f'(z) \neq 0$, $\forall z$, pentru orice funcție injectivă. Conform 10.52, orice funcție $w = f(z)$ analitică, este injectivă într-o vecinătate a punctului z_0, dacă $f'(z_0) \neq 0$.

10.55. *Funcția omografică.* Funcția de gradul întîi

$$w = b(z - z_0) + w_0, \tag{1}$$

considerată în 10.51 este, evident, injectivă în tot planul z.

Funcția $w = \frac{1}{z}$ realizează o aplicație bijectivă și conformă (în punctele finite) ale planului extins z pe planul extins w; punctele $z = 0$ și $z = \infty$ au ca imagine $w = \infty$ și respectiv $w = 0$. Se poate spune că funcția (1) aplică și ea planul extins z pe planul extins w făcînd să corespundă punctului $z = \infty$, punctul $w = \infty$.

O *funcție omografică* de formă generală

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{unde } bc \neq ad,\ c \neq 0,$$

poate fi considerată ca fiind compunerea unei funcții de gradul întîi, a funcției $\frac{1}{z}$ și de asemenea a unei funcții de gradul întîi; aceasta rezultă din reprezentarea

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)}.$$

În consecință, funcția omografică aplică, într-un mod biunivoc, planul extins z pe planul extins w făcînd să corespundă punctele $z = -\frac{d}{c}$ și $z = \infty$, punctele $w = \infty$ și respectiv $w = \frac{a}{c}$.

10.56. *Funcția putere* $w = z^n$, $n > 1$ *și inversa ei.* Aici avem, cel puțin pentru $|\arg z| < \frac{\pi}{n}$,

$$|w| = |z|^n, \quad \arg w = n \arg z. \tag{1}$$

Se vede că funcția $w = z^n$ realizează o aplicație bijectivă a interiorului unghiului $-\alpha < \arg z < \alpha \leqslant \frac{\pi}{n}$ pe interiorul unghiului

$$-n\alpha < \arg w < n\alpha$$

al planului w. Cel mai mare unghi $-\alpha < \arg z < \alpha$, în care funcția $w = z^n$ rămîne injectivă este de mărime $\frac{2\pi}{n}$; el se reprezintă pe tot planul w mai puțin semiaxa reală negativă.

Funcția inversă, pe care o vom nota, natural, prin $z = \sqrt[n]{w}$ realizează o aplicație bijectivă a domeniului menționat al planului w pe interiorul unghiului $-\frac{\pi}{n} < \arg z < \frac{\pi}{n}$ al planului z.

În punctul $z = 0$, funcția $w = z^n$ este definită și analitică, dar aplicația nu este conformă în acest punct;

într-adevăr, derivata funcției z^n, cu $n > 1$ este nulă pentru $z = 0$.

10.57. *Funcția exponențială* $w = e^z$ *și inversa ei.* Aici avem

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

În particular, $|e^z| = e^x$, $\arg e^z = y + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Orice dreaptă orizontală $y = y_0$ a planului z se transformă în curba parametrică $u = e^x \cos y_0$, $v = e^x \sin y_0$ a planului w; ea este o semidreaptă ce pleacă din originea coordonatelor și făcînd un unghi y_0 cu semiaxa pozitivă w. Banda definită de inegalitățile $-\alpha < y < \alpha < \pi$ în planul z se transformă biunivoc prin funcția $w = e^z$ pe unghiul

$$-\alpha < \arg w < \alpha.$$

Banda cea mai mare $-\alpha \leqslant y \leqslant \alpha$, în care funcția $w = e^z$ rămîne injectivă, are $2\alpha = 2\pi$ ca lățime (deoarece $\alpha = \pi$); funcția $w = e^z$ realizează o aplicație bijectivă a acestei benzi pe domeniul w care se obține eliminînd din planul w semiaxa reală negativă. În acest domeniu w este definită și este analitică, funcția inversă notată, natural, prin $z = \ln w$. Pentru w reali pozitivi, această funcție coincide cu funcția binecunoscută $\ln w$ pe care am definit-o în 5.41. Apoi, din relația $|e^z| = e^x$, rezultă că $x = \ln |e^z|$; deoarece are loc relația $y = \arg e^z$, rezultă că

$$\ln w = z = x + iy = \ln e^z + i \arg e^z = \ln |w| + i \arg w,$$

ceea ce permite să separăm părțile reale și imaginare ale funcției $\ln w$. Inversînd egalitatea $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$, se obține proprietatea corespunzătoare a logaritmului:

$$\ln (w_1 \cdot w_2) = \ln w_1 + \ln w_2.$$

Să găsim derivata logaritmului. Deoarece $(e^z)' = e^z$ (10.37), conform formulei 10.53(2), avem

$$(\ln w)' = \frac{1}{(e^z)'} = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{w}.$$

Ţinînd cont de teorema 10.25, de aici rezultă că funcţia $z = \ln w$ poate fi pusă, în domeniul w, sub formă integrală

$$\ln w = \ln w_0 + \int_{w_0}^{w} \frac{d\omega}{\omega},$$

unde drumul de integrare este o curbă oarecare netedă pe porţiuni care uneşte punctele w_0 şi w din domeniul w. Dacă $w_0 = 1$, atunci $\ln w_0 = 0$ şi avem

$$\ln w = \int_{1}^{w} \frac{d\omega}{\omega}.$$

Derivata funcţiei compuse $\ln w(z)$ este $\frac{w'(z)}{w(z)}$, ceea ce explică termenul de „reziduu logaritmic" din 10.44. Funcţia $\ln w$ este acum definită pentru toţi w cu excepţia valorilor reale negative; numerele reale negative nu au încă logaritmi. Mai tîrziu, vom indica întreg domeniul de definiţie al logaritmului, care cuprinde şi numerele negative.

10.58. *Funcţia putere generală $w = z^\lambda$, unde λ este un număr real pozitiv.* Această funcţie este definită prin formula

$$w = e^{\lambda \ln z}$$

cu condiţia ca z să nu fie număr real negativ. Funcţia $\ln z$ aplică un unghi $-\alpha < \arg z < \alpha < \min\left(\pi, \frac{\pi}{\lambda}\right)$ pe banda $-\alpha < \operatorname{Im} \ln z < \alpha$; înmulţirea cu λ transformă această bandă, în bandă $-\alpha\lambda < \operatorname{Im} \lambda \ln z < \alpha\lambda$; în sfîrşit, funcţia exponenţială o aplică pe aceasta pe unghiul

$$-\alpha\lambda < \arg w < \alpha\lambda$$

în planul w. Cel mai mare unghi $-\alpha < \arg z < \alpha$, în care funcţia $w = z^\lambda$ rămîne injectivă este $2\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\alpha = \frac{\pi}{\lambda}\right)$

(pentru $\lambda \geqslant 1$) şi se aplică prin această funcţie pe tot planul w mai puţin semiaxa reală negativă.

Aplicînd regulile obişnuite, se găseşte derivata funcţiei $w = z^{\lambda}$:

$$(e^{\lambda \ln z})' = e^{\lambda \ln z} \cdot (\lambda \ln z)' = \frac{\lambda}{z} e^{\lambda \ln z} = \lambda z^{\lambda - 1}.$$

10.59. *Funcţii multiforme şi suprafeţe riemanniene.*

a. Considerăm funcţia

$$w = (z - z_0)^n, \quad n > 1,$$

într-o vecinătate $|z - z_0| < \rho$ a punctului z_0. Fiind injectivă numai în unghiul $-\frac{\pi}{n} < \arg(z - z_0) < \frac{\pi}{n}$, această funcţie nu mai rămîne astfel în toată vecinătatea lui z_0, cu toate că acolo ea este analitică. Cercul $L = \{|z - z_0| = \rho\}$ se aplică pe cercul $\Lambda = \{|w| = \rho^n\}$ din planul w, dar în timp ce variabila z parcurge L o singură dată, $w = z^n$ parcurge cercul corespunzător Λ de n ori.

b. O situaţie analoagă are loc pentru o vecinătate a unui punct z_0 care este un zero de ordin de multiplicitate n pentru o funcţie analitică

$$w = f(z) = c_n(z - z_0)^n + c_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \ldots,$$

$$c_n \neq 0, \quad n > 1.$$

Într-adevăr, dacă G este o vecinătate a punctului z_0 în care funcţiile $f(z)$ şi $f'(z)$ nu au alte zerouri decît z_0 şi dacă $L \subset G$ este o curbă închisă ce înconjură punctul z_0, atunci, conform 10.44, reziduul logaritmic al funcţiei $f(z)$ în raport cu conturul L este egal cu n:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \, d\zeta = n.$$

Din motive de continuitate, avem, de asemenea, la fel ca în 10.52 :

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)-w}\,d\zeta = n,$$

dacă $|w|$ este suficient de mic. Din 10.44 rezultă, ținînd cont de multiplicități, că funcția f ia valoarea w în vecinătatea G de n ori. Dar funcția f' nu are decît o rădăcină z_0 în vecinătatea G. Deci funcția f ia efectiv orice valoare $w \neq 0$ în n puncte distincte. În cazuri asemănătoare, pentru a restabili bijectivitatea aplicației, se introduce noțiunea de *suprafață riemanniană*. Fără a formula aici definiția generală, ne mărginim a da două exemple caracteristice.

e. Pentru funcția $w = (z - z_0)^n$, suprafața riemanniană este construită, după cum urmează. Se consideră n exemplare (foi) din planul w tăiate după semiaxa reală negativă. Se identifică punctul $w = 0$, apoi se lipesc foile (adică se efectuează anumite identificări) în felul următor : marginea superioară a tăieturii din prima foaie este lipită cu marginea inferioară a tăieturii celei de a doua, marginea superioară a tăieturii celei de a doua, cu marginea inferioară

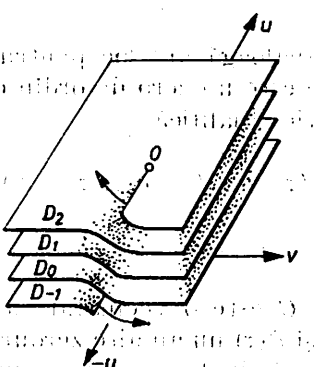


Fig. 10.9

a tăieturii celei de a treia etc., în sfîrșit, marginea superioară a tăieturii celei de a n-a foi este lipită cu marginea inferioară a tăieturii primei foi (fig. 10.9). (În realitate, este imposibil să realizăm o astfel de lipitură în spațiul tridimen-

sional, fără a avea autointersecții, dar nu aceasta este esențial.) Făcînd acest lucru, sistemul inițial de coordonate este conservat pe fiecare foaie. Putem acum considera aplicația $w = z^n$ ca o aplicație bijectivă a planului extins z pe suprafața riemanniană construită. Anume, facem să corespundă punctului $z = \rho > 0$, punctul $w = \rho^n$ din prima foaie. Deoarece z parcurge cercul $|z| = \rho$ în sens pozitiv, $w = z^n$ parcurge o curbă pe prima foaie a suprafeței riemanniene totdeauna în sens pozitiv și, în momentul cînd punctul z ajunge la frontiera domeniului în care $w = z^n$ este injectivă (10.56), adică $\arg z$ ia valoarea $\frac{\pi}{n}$, punctul corespunzător w va avea π ca argument, deci se va găsi pe semidreapta în lungul căreia sînt lipite primele două foi. Dacă punctul z își urmează drumul său în același sens, punctul w trece pe a doua foaie apoi pe a treia etc. și, în sfîrșit, dacă punctul z face un tur complet, w revine la poziția sa inițială pe prima foaie. Am obținut deci aplicația bijectivă căutată, a planului z pe suprafața riemanniană pe care am construit-o în locul planului w. Pe suprafața riemanniană se poate deja defini funcția inversă a lui $w = z^n$, notată cu $z = \sqrt[n]{w}$; ea aplică într-un mod biunivoc suprafața riemanniană pe planul z.

Tuturor celor n puncte diferite de aceeași coordonată complexă $w \neq 0$ pe suprafața riemanniană le corespunde unul din cele n puncte diferite $z_0, \ldots, z_{n-1}$ ale planului z; acestea din urmă au același modul $\sqrt[n]{|w|}$ și argumentele lor sînt date de egalitatea

$$\arg z_k = \frac{1}{n}(\arg w + 2k\pi), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

În particular, pentru $n = 2$ și $w = -1$, avem

$$z_{1,2} = \sqrt{-1} = \mathrm{i} \sin \frac{(2k+1)\pi}{2} = \pm \mathrm{i},$$

conform regulei fundamentale a algebrei numerelor complexe.

d. Pentru a construi suprafața riemanniană care stabilește o corespondență biunivocă pentru funcția $w = e^z$,

trebuie să considerăm un număr infinit (numărabil) de exemplare de plan w, numerotate cu toate numerele întregi de la $-\infty$ la $+\infty$ și să lipim aceste foi în punctul $z = 0$ și după tăieturile în lungul semiaxei reale negative : se lipește marginea superioară a tăieturii celei de a k-a foi, cu marginea inferioară a tăieturii celei de a $(k+1)$-a foi (fig. 10.10). Domeniul semnalat în 10.57 în care funcția

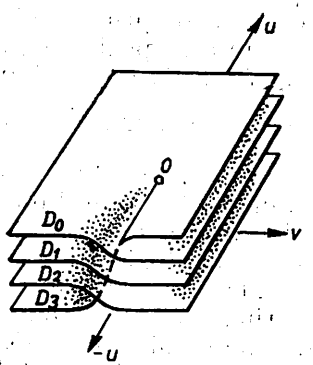


Fig. 10.10

$w = e^z$ este injectivă, adică banda $-\pi < y < \pi$, se aplică într-un mod biunivoc pe foaia cu numărul 0 mai puțin semiaxa reală negativă. Dacă punctul z se deplasează în lungul verticalei $x = x_0$ de la punctul $y = 0$ la $y = \pi$, atunci punctul w parcurge pe foaia numărul zero, semicercul de rază e^{x_0} pînă la marginea superioară a tăieturii. Dacă punctul z urmează deplasarea în sus trecînd prin $y = \pi$, punctul w traversează tăietura, ajunge la a doua foaie și descrie pe ea cercul de aceeași rază ; dacă punctul z trece prin $y = 3\pi$, punctul w traversează încă o dată tăietura și se află pe a treia foaie etc.

Funcția inversă $z = \ln w$ realizează o aplicație bijectivă a suprafeței riemanniene construite pe planul extins z. Valorilor lui w de pe cea de a n-a foaie îi corespund valorile lui z în banda $(2n-1)\pi < y < (2n+1)\pi$. Deoarece, funcția inversă a lui $w = e^z$ este o funcție cu o infinitate de determinări, ea este notată prin Ln W ; toate valorile sale pentru un același w sînt date de formula

$$\operatorname{Ln} w = \ln |w| + i \arg w,$$

unde se ține cont de toate valorile posibile ale lui arg w.

În particular, dacă w este un număr real negativ $w = -p$, $p > 0$, avem

$$\operatorname{Ln}(-p) = \ln|p| + (2k+1)\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

și nu există nici o rațiune de a privilegia una din aceste valori în lipsa unui criteriu exterior.

e. Suprafețele riemanniene pentru alte funcții analitice sînt construite într-un mod analog. În cazul general, pentru o aplicație $w = f(z)$, se construiesc suprafețele riemanniene pentru variabila z și pentru funcția w.

Pentru a construi suprafața riemanniană a variabilei z, se iau un număr suficient de foi identice care corespund domeniului de definiție al funcției f, se fac acolo tăieturi ce împart acest domeniu în părți, pe fiecare, funcția f fiind injectivă; trebuie apoi să lipim marginile acestor tăieturi (conform exemplelor c și d) pentru a garanta bijectivitatea aplicației oricărei suprafețe riemanniene a variabilei z pe întreaga suprafață riemanniană a variabilei w.

Dacă, înconjurînd un punct din planul z după un cerc de rază arbitrar de mică, valorile funcției f trec pe o altă foaie, atunci acest punct este numit *punct de ramificare* (*critic*) al funcției f. Punctele de ramificare joacă un rol special în structura unei suprafețe riemanniene. Pentru orice punct z_0 care nu este un punct de ramificare al funcției f, există o vecinătate a acestui punct în care funcția f se reduce la o familie de funcții analitice injective; un punct de ramificare nu are vecinătăți cu această proprietate.

În exemplele c și d punctele de ramificare erau 0 și ∞.

Structura suprafețelor riemanniene pentru funcții diferite este studiată mai detaliat în [3]. Pentru studiul actual teoriei generale a suprafețelor riemanniene vezi [22].

EXERCIȚII

1. Să se arate că dacă raza de convergență a seriei $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ este 1 și dacă toate a_n sînt pozitive, atunci $z = 1$ este un punct singular.

2. Să se demonstreze că dacă seria $\sum_0^\infty a_n z^n$ are raza de convergență egală cu 1 și singurul punct singular pe cercul $|z| = 1$ este un pol m, atunci $|a_n| \leqslant An^{m-1}$, unde A este o constantă.

3. (*Principiul maximului*). Fie $f(z)$ o funcție analitică în domeniul G având frontiera un contur Γ și fie

$$M = \sup_{z \in \Gamma} |f(z)|.$$

Atunci $|f(z)| \leqslant M$ în domeniul G. Dacă $|f(z_0)| = M$ într-un punct interior $z_0 \in G$, atunci $f(z)$ este constantă în domeniul G.

4. Dacă o funcție $f(z)$ este analitică în interiorul discului $|z| \leqslant R$ și satisface acolo inegalitatea $|f(z)| \leqslant M$ și dacă $f(0) = 0$, atunci

$$|f(z)| < \frac{M}{R} |z|$$

(H. Schwarz).

5. Dacă o funcție f este analitică în discul $|z| < R$, atunci funcția ln $M(\rho)$, unde $M(\rho) = \max_{|z|=\rho} |f(z)|$, este o funcție convexă de ln ρ **(J. Hadamard).**

6. O funcție reală $u(x, y)$ se numește *diferențiabilă* într-un punct (x_0, y_0) dacă există numerele A_u și B_u astfel încît, într-o vecinătate a punctului x_0, y_0, avem reprezentarea

$$u(x_0 + h,\ y_0 + k) = u(x_0, y_0) + A_u h + B_u k + \varepsilon(h, k),$$

unde $\dfrac{\varepsilon(h, k)}{|h| + |k|} \to 0$ pentru $h \to 0$, $k \to 0$. Să se demonstreze că funcția complexă $w = u(x, y) + i\, v(x, y)$ are derivata $w'(z_0)$, dacă și numai dacă $u(x, y)$ și $v(x, y)$ sînt diferențiabile în punctul $z_0 = (x_0, y_0)$ și avem $A_u = B_v$, $A_v = -B_u$.

7. Să se demonstreze că o funcție omografică $w = \dfrac{az + b}{cz + d}$ transformă familia tuturor cercurilor (se înțeleg aici și dreptele pe care le putem considera ca cercuri cu centrul la infinit) în ea însăși.

8. Creșterea unei funcții $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ poate fi evaluată prin funcțiile

$$M(\rho) = \max_{|z|=\rho} |f(z)|,$$

$$M_1(\rho) = \sum_0^\infty |a_n|\, |z|^n.$$

Evident, $M(\rho) \leqslant M_1(\rho)$. Dar $M_1(\rho)$ nu crește mai repede decît $M(\rho)$: pentru orice $\delta > 0$, avem

$$M_1(r) \leqslant \frac{r + \delta}{\delta} M(r + \delta).$$

9. Presupunem că o funcție f este analitică într-un domeniu G cu frontiera un contur L, cu excepția eventual a unui număr finit de poli și că f nu se anulează pe L. Cînd z parcurge L în sens pozitiv, punctul $w = f(z)$ descrie o curbă închisă. Numărul ocolurilor complete pe care le face w pe această curbă (în jurul punctului $w = 0$) este egal cu numărul de zerouri ale funcției f în domeniul G din care se scade numărul polilor (*principiul argumentului*).

10. Se știe că un șir de funcții analitice $f_n(z)$ $(n = 1,2, \ldots)$ converge uniform către o funcție $f(z) \not\equiv 0$ în interiorul unui domeniu G (10. 36 a). Fie Z mulțimea tuturor zerourilor ale tuturor funcțiilor $f_n(z)$ din domeniul G. Atunci mulțimea zerourilor funcției f (orice zero de multiplicitate m este considerat de m ori) din G coincide cu mulțimea punctelor limită ale lui Z situate în interiorul lui G.

11. Dacă seria $\sum_0^\infty g^{(n)}(z)$ converge pentru cel puțin un punct z de analiticitate ale funcției $g(z)$, atunci $g(z)$ este o funcție întreagă și seria menționată converge pentru orice z, uniform în orice disc (**G. Pólya**).

12. Pentru funcțiile $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, $w = \cos z$ și inversele lor $z = w \pm \sqrt{w^2 - 1}$, $z = \operatorname{Arccos} w$, să se găsească domeniile în care ele sînt injective, să se construiască suprafețele riemanniene și să se indice punctele lor de ramificare.

13. Să se demonstreze egalitatea

$$i \operatorname{Arccos} w = \operatorname{Ln}(w \pm \sqrt{w^2 - 1}).$$

14. Dacă funcțiile $f_1(z), \ldots, f_n(z)$ sînt analitice într-un domeniu G, atunci funcția $|f_1(z)| + \ldots + |f_n(z)|$ nu își atinge maximul său în interiorul lui G.

15. Fie o funcție analitică f definită în tot planul z care aplică tot planul în semiplanul superior. Să se demonstreze că f este o constantă.

16. Să se deducă teorema asupra existenței unei rădăcini a unui polinom algebric $P(z)$ (5.86) aplicînd teorema lui Liouville 10.38.

17. Să se deducă teorema 5.86 pornind de la teorema asupra reziduului logaritmic (10.44).

18. Să se deducă teorema 5.86 aplicînd principiul maximului (exercițiul 3).

19. O funcție analitică f este definită în tot planul, cu excepția punctelor $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, unde ea are poli simpli cu reziduurile respectiv $b_1, \ldots, b_n, \ldots$ Presupunem că mulțimea $\{z \mid |f(z)| \leqslant C\}$, pentru un anumit C, conține o familie de discuri Γ_n de centru $z = 0$ și de raze $R_n \to \infty$. Să se demonstreze că

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left\{\frac{1}{z - z_n} + \frac{1}{z_n}\right\}$$

(descompunerea lui f în elemente simple).

20. Presupunem că o funcție g este analitică în tot planul și are zerouri simple în punctele $z_1, z_2, \ldots$ Presupunem în plus că funcția $f(z) =$

$= \dfrac{g'(z)}{g(z)}$ satisface ipotezele din exercițiul 19. Să se arate că

$$g(z) = g(0)\, e^{\frac{g'(0)}{g(0)}z} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{\frac{z}{z_n}} \right\}.$$

21. Să se stabilească următoarele descompuneri

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right),$$

$$\cos z = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2}\right)$$

22. Presupunem că o funcție f este analitică în domeniul $G = \left\{ z \mid -\alpha \leqslant \arg z \leqslant \alpha < \dfrac{\pi}{2} \right\}$ și verifică următoarele condiții:

$$|f(z)| < A\, e^{B|z|} \text{ în domeniul } G;$$

$$|f(z)| \leqslant 1 \text{ pe semidreptele } \arg z = \pm\alpha.$$

Atunci $|f(x)| \leqslant 1$ în tot domeniul G **(Phragmén-Lindelöf).**

23. Presupunem că o funcție f este analitică în semiplanul superior G și verifică condițiile:

$$|f(x)| \leqslant c \quad (-\infty < x < \infty)$$

și oricare ar fi $\varepsilon > 0$,

$$|f(z)| \leqslant A_\varepsilon\, e^{\varepsilon|z|} \text{ pentru toți } z \in G.$$

Atunci $|f(z)| \leqslant c$ pentru toți $z \in G$.

24. Fie f o funcție analitică întreagă verificînd condițiile

$$|f(x)| \leqslant c, \quad \inf |f(x)| = 0 \quad (-\infty < x < \infty)$$

și pentru orice $\varepsilon > 0$,

$$|f(z)| \leqslant A_\varepsilon\, e^{\varepsilon|z|} \text{ pentru toți } z \in G.$$

Să se arate că $f \equiv 0$.

NOTĂ ISTORICĂ

La sfîrșitul secolului al XVII-lea și începutul secolului al XVIII-lea, se cunoșteau deja multe fapte privind proprietățile funcțiilor elementare în care variabila reală este înlocuită cu variabila imaginară (complexă). Cu excepția reprezentării geometrice a unui număr complex (care a fost indicată de Gauss abia în 1799), matematicienii epocii, raționînd prin analogie,

au ajuns adesea la rezultate paradoxale. Astfel, Leibniz și J. Bernoulli polemizau asupra chestiunii dacă logaritmii numerelor negative sînt imaginari sau reali și aceasta fără a avea vreo definiție a logaritmului în domeniul complex (o astfel de definiție ce ia în considerație multiformitatea logaritmului a fost dată de Euler abia în 1749). Condițiile „Cauchy-Riemann", pentru funcții reprezentate de serii de puteri, au fost descoperite anterior de d'Alembert (1752) și Euler (1777). Termenul de „funcție analitică" este introdus de Lagrange în cartea sa *Teoria funcțiilor analitice, conținînd principiile calculului diferențial eliberat de orice considerare de infiniți mici, de limite sau de fluxuri și redus la analiza algebrică a cantităților finite* (1797), unde se subînțelege prin funcție analitică suma unei serii de puteri. De altfel Lagrange nici nu pune problema convergenței seriilor sale (altfel, el ar fi fost obligat să revină la noțiunea de limită pe care a evitat-o). Lucrările lui Cauchy (începînd cu 1814), conținînd mai multe teoreme fundamentale ale teoriei funcțiilor analitice, sînt bazate pe aceeași definiție. dar autorul folosește cu deplină claritate sensul convergenței seriilor și semnificația geometrică a variabilei complexe; de asemenea, Cauchy consideră, pentru prima dată, integrala curbilinie în raport cu o variabilă complexă, a cărei definiție o reduce la definiția integralei uzuale în raport cu o variabilă reală, separînd părțile reală și imaginară. El indică metoda de calcul a integralelor din funcții analitice în lungul contururilor închise cu ajutorul reziduurilor. Pe de altă parte, Cauchy a descoperit relația dintre analiticitatea unei funcții și derivabilitatea sa în raport cu o variabilă complexă și numește monogeneitate această ultimă proprietate. Analiza punctelor singulare ale unei funcții uniforme cu ajutorul seriei sale Laurent (1843) a fost realizată simultan de matematicianul rus Sokotski și matematicianul italian Casorati (1868), iar ceva mai tîrziu, de către Weierstrass (1876).

Capitolul 11

INTEGRALE IMPROPRII

Calculul integral nu ar însemna foarte mult dacă, în loc de a fi căutată sub formă finită, primitiva ar necesita totdeauna o trecere la limită; nu ar fi fost atunci nici un progres... Meritul imens al lui Newton și Leibniz este de a face posibilă reprezentarea explicită a rezultatului unei operații care este, în fond, nerealizabilă... 250 de ani au trecut de atunci și nu puțini oameni puternici au refăcut calea lui Newton și Leibniz. Nimeni nu a putut continua opera fondatorilor analizei infinitezimale, nici să indice o altă metodă pentru a pune sub formă finită rezultatul sumării de infiniți mici... Numai Cauchy, cel mai mare analist al secolului al XIX-lea, a avut meritul de a da un procedeu original, pe care l-a numit calculul reziduurilor, de care putem să ne servim pentru a pune sub formă finită rezultatul sumării unui număr infinit de mare de termeni infiniți mici, și aceasta într-un număr de cazuri unde metoda dată de primitivele lui Newton și Leibniz este mai puțin eficientă.

N. N. Luzin

Isaac Newton, matematician și naturalist (1943)

§ 11.1. Integrale improprii de prima speță

11.11. Fie $y = f(x)$ o funcție definită pentru $a \leqslant x \leqslant b < \infty$ și luînd valori complexe. Definiția integralei unei funcții cu valori complexe este cunoscută din 10.21; anume, dacă $f(x) = u(x) + i\,v(x)$, unde $u(x)$ și $v(x)$ sînt reale, se pune prin definiție

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,dx + i\int_a^b v(x)\,dx.$$

Integrabilitatea funcției f pe intervalul $[a, b]$ este deci echivalentă cu integrabilitatea, pe acest interval, a două funcții u și v.

Presupunem că o funcție f este integrabilă (de exemplu, continuă pe porțiuni) pe orice interval finit $a \leqslant x \leqslant b <$

$< \infty$, a fiind fixat, b arbitrar. Vrem să atribuim un *sens* « *integralei improprii de prima speță* »

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx. \tag{1}$$

Considerăm funcția complexă de variabilă $X \geqslant a$

$$I(X) = \int_a^X f(x)\,dx. \tag{2}$$

DEFINIȚIE. Dacă, pentru $X \to \infty$, funcția $I(X)$ tinde către o limită finită $I \in \mathbb{C}$, se spune că *integrala improprie* (1) *converge* și se pune, prin definiție,

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{X\to\infty} I(X) = \lim_{X\to\infty} \int_a^X f(x)\,dx = I. \tag{3}$$

Dacă, pentru $X \to \infty$, funcția $I(X)$ nu are limită finită, se spune că *integrala* (1) *diverge* și nu i se atribuie nici o valoare.

Exemple. a. Integrala improprie $\int_1^{\infty} x^{\alpha}\,dx$.

Am văzut că

$$\int_1^X x^{\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{X^{\alpha+1}-1}{\alpha+1} & \text{pentru } \alpha \neq -1, \\ \ln X & \text{pentru } \alpha = -1, \end{cases}$$

deci integrala converge dacă $\alpha < -1$ și diverge dacă $\alpha \geqslant -1$.

b. Integrala improprie $\int_0^{\infty} \cos x\,dx$.

Deoarece

$$\int_0^X \cos x \, dx = \sin X$$

nu are limită pentru $X \to \infty$, integrala diverge.

c. Integrala improprie $\int_0^X e^{ix} \, dx$.

Deoarece

$$\int_0^X e^{ix} \, dx = \frac{e^{iX} - 1}{i}$$

nu are limită pentru $X \to \infty$, integrala diverge.

11.12. *Criteriul lui Cauchy și condiții echivalente de convergență.* Următoarele propoziții sînt echivalente :

a. *Există un I astfel încît, pentru orice $\varepsilon > 0$, se poate găsi un $X_0 > a$ astfel ca, oricare ar fi $X \geqslant X_0$, să avem*

$$|I - I(X)| = |I - \int_0^X f(x) \, dx| < \varepsilon.$$

b. *Pentru orice șir $X_n \to \infty$, șirul de numere $I(X_n)$ tinde către o limită (finită).*

c. *Pentru orice șir $X_n \to \infty$, seria*

$$\sum_n [I(X_{n+1}) - I(X_n)] = \sum_n \int_{X_n}^{X_{n+1}} f(x) \, dx$$

converge.

d. *Oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un $X > a$ astfel încît pentru $X' \geqslant X$, $X'' \geqslant X$, să avem*

$$|I(X') - I(X'')| = |\int_{X'}^{X''} f(x) \, dx| < \varepsilon$$

(criteriul lui Cauchy).

Afirmația din punctul a reprezintă definiția limitei funcției $I(X)$ la infinit. Afirmația din punctul d este criteriul lui Cauchy de existență a acestei limite, iar afirmația din punctul b este condiția echivalentă cu ea în termeni de șiruri (4.66). În fine, afirmația de la punctul c exprimă relația uzuală între convergența unei serii și cea a unui șir de sume parțiale. Așadar, afirmațiile din punctele a — d sînt deci echivalente.

Este esențial faptul că în punctul b este vorba de *orice* șir $X_n \to \infty$. Dacă se știe că, pentru *un anumit* șir $X_n \to \infty$, numerele $I(X_n)$ tind către o limită, aceasta încă nu înseamnă că integrala (1) converge. De exemplu,

$$\int_0^{2n\pi} \cos x \, dx = 0,$$

dar integrala 11.11 b diverge.

11.13. *Cazul integrantului pozitiv.*

a. Fie o integrală improprie

$$\int_a^{\infty} f(x) \, dx, \tag{1}$$

unde funcția f nu este negativă. Atunci primitiva $I(X) = \int_a^X f(x) \, dx$ nu descrește; dacă $I(X)$ nu este mărginită pe (a, ∞), atunci limita sa pentru $X \to \infty$ este $+\infty$ și spunem că integrala (1) diverge spre $+\infty$; dacă $I(X)$ este mărginită pe (a, ∞), atunci $\sup I(X) = \lim_{X \to \infty} I(X)$ (4.53) și integrala (1) converge. ⊦

b. Criteriul de comparație este formulat în modul următor: *dacă două funcții f_1 și f_2 date pe (a, ∞) sînt nenegative, integrabile pe orice interval finit și astfel încît $f_1(x) \leqslant c \cdot f_2(x)$ pentru orice $x \geqslant X_0$, atunci convergența integralei lui f_2 implică convergența integralei lui f_1 și divergența integralei lui f_1 implică divergența integralei lui f_2.*

Toate aceste concluzii rezultă din relaţiile

$$I_1(X) - I_1(X_0) = \int_{X_0}^{X} f_1(x)\,dx \leqslant c\int_{X_0}^{X} f_2(x)\,dx = c(I_2(X) - I_2(X_0)),$$

care au loc pentru orice $X > X_0$, la fel ca şi convergenţa unei integrale cu primitiva $I(X)$ mărginită (a).

c. *Exemplu.* Integrala unei funcţii raţionale

$$\int_a^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \quad (a > 0), \tag{2}$$

unde $P(x)$ şi $Q(x) \neq 0$ sînt polinoame (cu coeficienţi complecşi) de grad p şi q respectiv, converge pentru $q \geqslant p + 2$ şi diverge pentru $q \leqslant p + 1$.

Într-adevăr, dacă $q \geqslant p + 2$, atunci $\left|\frac{P(x)}{Q(x)}\right| \leqslant \frac{c}{x^2}$ şi integrala (2) converge deoarece se poate alege pentru comparaţie funcţia $\frac{1}{x^2}$ (11.11 a). Fie acum $q \leqslant p+1$. Atunci funcţia raţională $x\,\frac{P(x)}{Q(x)}$ are partea întreagă nenulă; se poate pune

$$x\frac{P(x)}{Q(x)} = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

unde $m \geqslant 0$, $a_0 \neq 0$ şi gradul lui P_1 este mai mic decît cel al lui Q_1. De aici rezultă

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = a_0x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} + \frac{a_m}{x} + \frac{1}{x}\frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

$$\int_a^X \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{a_0}{m}(X^m - a^m) + \ldots + a_{m-1}(X - a) + a_m \ln\frac{X}{a} + \int_a^X \frac{1}{x}\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\,dx.$$

Ultimul termen, după cum am văzut mai sus, are limită finită (gradul numitorului depăşeşte cu cel puţin două unităţi pe cel al numărătorului), suma celorlalţi termeni nu are limită, modulul său tinzînd către infinit. În consecinţă, integrala (2) diverge.

d. *Exemple.* Pentru un polinom $P(x) = a_0x^m + \ldots + a^m$ cu coeficienţi reali şi cu $a_0 > 0$, dacă x sînt mari, are loc estimaţia :

$$\frac{c_1}{x^{m/p}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[p]{a_0x^m + \ldots + a_m}} \leqslant \frac{c_2}{x^{m/p}},$$

deci integrala

$$\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}x}{a\sqrt[p]{P(x)}}$$

converge pentru $\frac{m}{p} > 1$ şi diverge pentru $\frac{m}{p} \leqslant 1$.

11.14. *Criteriul integral de convergenţă a unei serii numerice.* Fie $a_1 + a_2 + \ldots$ o serie cu termeni pozitivi necrescători, adică $a_{n+1} \leqslant a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ şi fie $y = (a)x$ o funcţie pozitivă necrescătoare şi astfel încît $a(n) = a_n$. Figura 11.1 arată că

$$a_2 + \ldots + a_n \leqslant \int_1^n a(x)\,\mathrm{d}x \leqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1}. \quad (1)$$

Din (1) rezultă : *dacă integrala* $\int_1^\infty a(x)\,\mathrm{d}x$ *converge, la fel va fi şi seria* $\sum_1^\infty a_n$ *şi dacă integrala* $\int_1^\infty a(x)\,\mathrm{d}x$ *diverge, la fel va fi şi seria* $\sum_1^\infty a_n$. Acesta este criteriul integral al lui Cauchy de convergenţă a unei serii numerice.

Exemple. **a.** Se știe că $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ converge pentru $\alpha > 1$ și diverge pentru $\alpha \leqslant 1$ (11.11 a). Se regăsește deci rezultatul pentru convergența seriei $\sum_1^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ pentru $\alpha > 1$ și divergența sa pentru $\alpha \leqslant 1$ (6.15 a).

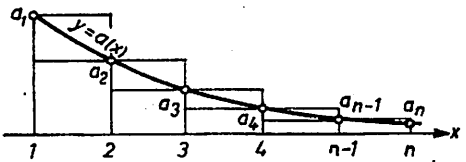


Fig. 11.1

b. Relația

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x \ln^\alpha x} = \int_{\ln a}^\infty \frac{du}{u^\alpha} \quad (u = \ln x,\ a > 1)$$

arată că integrala improprie $\int_a^\infty \frac{dx}{x \ln^\alpha x}$ converge pentru $\alpha > 1$ și diverge pentru $\alpha \leqslant 1$. Seria $\sum_1^\infty \frac{1}{n \ln^\alpha n}$ converge deci pentru $\alpha > 1$ și diverge pentru $\alpha \leqslant 1$ (6.15 c).

c. Plecînd de la considerații geometrice de același tip ca mai înainte, se pot obține diferite estimări ale resturilor seriilor convergente și pentru sumele parțiale, atît ale seriilor convergente cît și ale seriilor divergente. De exemplu, avem direct din fig. 11.2 :

$$\sum_{k=n}^\infty \frac{1}{k^\lambda} \leqslant \int_{n-1}^\infty \frac{dx}{x^\lambda} = \frac{1}{\lambda - 1}\left[\frac{1}{(n-1)^{\lambda-1}} - 1\right] \qquad (\lambda > 1).$$

Din figura 11.1, avem, punînd $a(x) = \frac{1}{x}$:

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leqslant \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

În același mod, din fig. 11.3 rezultă inegalitatea

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{ a_k - \int_k^{k+1} a(x)\,\mathrm{d}x \right\} \leqslant a_1,$$

primul membru fiind crescător cu n. Notînd limita sa cu C și sumînd, se obține relația

$$\sum_{n=1}^{n} a_k = \int_1^{n+1} a(x)\,\mathrm{d}x + C - \gamma_n, \qquad \gamma_n \searrow 0. \tag{2}$$

Pentru seria $a_k = \dfrac{1}{k}$, constanta C a fost calculată pentru prima oară de către Euler (1734): $C = 0{,}5772\ldots$ *Constanta lui Euler* se întîlnește des în analiză. Egalitatea (2) ia forma:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln(n+1) + 0{,}5772\ldots - \gamma_n,$$

$$\gamma_n \searrow 0.$$

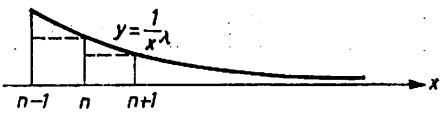


Fig. 11.2

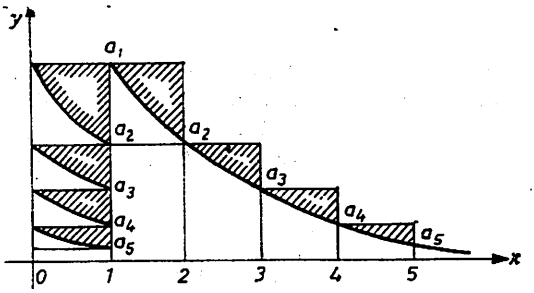


Fig. 11.3

11.15. *Convergența absolută și semiconvergența integralelor improprii.*

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx, \tag{1}$$

f fiind o funcție cu valori complexe continuă pe porțiuni. Dacă integrala

$$\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx, \tag{2}$$

converge, atunci integrala (1) converge, de asemenea, deoarece, oricare ar fi X' și X'', avem conform 10.21 (5),

$$\left|\int_{X'}^{X''} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_{X'}^{X''} |f(x)|\,dx$$

și putem aplica criteriul lui Cauchy. În acest caz, integrala (1) se numește *absolut convergentă* și funcția f *absolut integrabilă pe* (a, ∞) Totuși, integrala (1) poate fi convergentă fără ca integrala (2) să fie convergentă ; în acest caz, integrala (1) este numită *semiconvergentă*. Există criterii de convergență aplicabile la integrale semiconvergente.

11.16. *Criteriul lui Leibniz.* Fie o integrală improprie

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx,$$

funcția f fiind reală. Presupunem că șirul $a_1 < a_2 < \ldots$ $\ldots < a_n < \ldots$ al tuturor zerourilor (rădăcinilor) funcției $f(x)$ pe (a, ∞) sînt astfel încît $a_n \to \infty$, $f(x) > 0$ pentru $a_{2n-1} < x < a_{2n}$ și $f(x) < 0$ pentru $a_{2n} < x < a_{2n+1}$ (fig. 11.4). Numerele

$$b_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx \tag{1}$$

formează un şir alternat. Dacă ele satisfac ipoteza din criteriul lui Leibniz pentru o serie numerică (6.23), adică dacă $|b_n| \searrow 0$ şi $|b_n| \geqslant |b_{n+1}|$ pentru toţi $n = N, N+1, N+2, \ldots$, atunci integrala (1) converge.

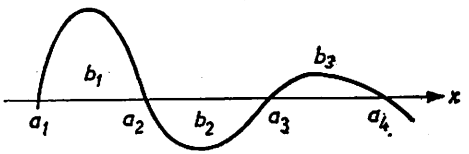


Fig. 11.4

Pentru a demonstra propoziţia, alegem pentru un X dat, un n astfel încît $a_n \leqslant X \leqslant a_{n+1}$. Atunci

$$\int_a^X f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{a_1} f(x)\,\mathrm{d}x + [b_1 + \ldots + b_{n-1}] + \int_{a_n}^X f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Primul termen al membrului al doilea este constant. Suma dintre paranteze are limită, cînd $n \to \infty$, în virtutea criteriului lui Leibniz pentru serii. Ultimul termen nu depăşeşte în modul cantitatea

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}} |f(x)|\,\mathrm{d}x = |b_n|,$$

deci, prin ipoteză, tinde la zero pentru $n \to \infty$. În consecinţă, limita primului membru există, ceea ce trebuia demonstrat.

Exemple. a. Considerăm integrala

$$\int_a^\infty g(x) \sin x\,\mathrm{d}x, \tag{2}$$

unde $g(x) > 0$ şi $g(x) \searrow 0$ pentru $x \to \infty$. Rădăcinile succesive ale funcţiei $g(x) \sin x$, pentru $x > a$, sînt $x = k\pi$, $(k+1)\pi$, ... Avem, evident,

$$g(x)|\sin x| \geqslant g(x+\pi)|\sin(x+\pi)|,$$

de unde

$$|b_m| = \int_{m\pi}^{(m+1)\pi} g(x)|\sin x|\,dx \geqslant \int_{m\pi}^{(m+1)\pi} g(x+\pi)|\sin(x+\pi)|\,dx =$$

$$= \int_{(m+1)\pi}^{(m+2)\pi} g(x)|\sin x|\,dx = |b_{m+1}|;$$

apoi

$$|b_m| = \int_{m\pi}^{(m+1)\pi} g(x)\,|\sin x|\,dx \leqslant \pi g(m\pi) \to 0 \text{ pentru } m \to \infty.$$

Ipoteza criteriului lui Leibniz este deci satisfăcută, prin urmare integrala (2) converge.

Dacă $\int_a^\infty g(x)\,dx < \infty$, atunci integrala (2) converge absolut. Să arătăm că dacă $\int_a^\infty g(x)\,dx = \infty$, atunci integrala

$$\int_a^\infty g(x)\,|\sin x|\,dx \tag{3}$$

diverge. În intervalul $(m-1)\pi + \frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant m\pi - \frac{\pi}{6}$ de lungime $\frac{2}{3}\pi$ avem inegalităţile $|\sin x| \geqslant \frac{1}{2}$, $g(x) \geqslant g(m\pi)$; în consecinţă,

$$\int_{(m-1)\pi}^{m\pi} g(x)\,|\sin x|\,dx \geqslant \int_{(m-1)\pi+\frac{\pi}{6}}^{m\pi-\frac{\pi}{6}} g(x)|\sin x|\,dx \geqslant g(m\pi)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\pi.$$

Dar integrala

$$\int_a^\infty g(x\pi)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{a\pi}^\infty g(u)\,du \qquad (u = \pi x),$$

fiind divergentă, seria cu termeni $g(m\pi)$ diverge. Deci, conform 11.12 *c*, integrala (3) diverge și ea.

b. Integrala

$$\int_a^\infty \sin(x^\gamma)\,dx,\ \gamma > 0, \tag{4}$$

se reduce prin substituția $x^\gamma = u$ la integrala

$$\frac{1}{\gamma}\int_b^\infty \sin u \cdot u^{\frac{1}{\gamma}-1}\,du,$$

care converge, după cum am văzut, pentru $\frac{1}{\gamma} - 1 < 0$, adică pentru $\gamma > 1$ (se poate de asemenea aplica criteriul lui Leibniz direct integralei (4)).

Să notăm că în integrala convergentă (4), funcția $\sin(x^\gamma)$ nu tinde la zero pentru $x \to \infty$, ceea ce ne aşteptam, ţinînd cont de analogia formală cu seriile. În realitate, analogul teoremei „termenul general al unei serii numerice convergente tinde la zero", nu este propoziția „integrantul unei integrale improprii convergente tinde la zero pentru $x \to \infty$" (care este falsă, după cum am văzut mai sus), ci propoziția „fiind dată o integrală improprie convergentă, integrala luată pe un interval de lungime fixă tinde către zero cînd intervalul se depărtează la infinit". În alți termeni, pentru orice $h > 0$, avem

$$\lim_{x\to\infty}\int_x^{x+h} f(u)\,du = 0;$$

aceasta rezultă imediat din criteriul lui Cauchy 11.12 d.

11.17.a. *Criteriul lui Abel-Dirichlet.* Fie integrala impropie

$$\int_a^\infty g(x) \cdot s(x)\, dx. \tag{1}$$

Dacă funcţia (complexă) $g(x)$ are o derivată continuă pe porţiuni, absolut integrabilă pe (a, ∞) şi tinde către 0 pentru $x \to \infty$ şi dacă $s(x)$ are o primitivă mărginită $G(x)$, $|G(x)| \leqslant C$, atunci integrala (1) converge.

Integrînd prin părţi, avem

$$\int_p^q g(x)\, s(x)\, dx = g(x)\, G(x)\Big|_q^p - \int_p^q G(x)\, g'(x)\, dx \quad (p < q).$$

Primul termen din dreapta admite majorarea

$$|g(q)\, G(q) - g(p)\, G(p)| \leqslant 2C \max \{|g(p)|, |g(q)|\},$$

deci tinde la zero pentru $p, q \to \infty$. Termenul integral admite următoarea majorare:

$$\left|\int_p^q G(x) g'(x)\, dx\right| \leqslant C \int_p^q |g'(x)|\, dx,$$

de unde rezultă că el tinde de asemenea către zero pentru $p \to \infty$, $q \to \infty$. Astfel, integrala (1) satisface condiţia Cauchy 11.12 d, deci converge.

b. *Exemplu.* Considerăm integrala

$$\int_a^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}\, e^{i\alpha x}\, dx \quad (\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0), \tag{2}$$

unde P şi Q sînt polinoame în x (cu coeficienţi complecşi) astfel încît gradul polinomului Q depăşeşte cu cel puţin o unitate gradul lui P şi Q nu are zerouri în intervalul (a, ∞). Punem $g(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $s(x) = e^{i\alpha x}$. Atunci $g'(x) =$

$= \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}$ este o funcţie raţională pentru care gradul numitorului depăşeşte cu cel puţin două unităţi gradul numărătorului. De aceea integrala din $g'(x)$ este absolut convergentă (11.13 c). Funcţia $s(x) = e^{i\alpha x}$ are primitiva mărginită $\frac{e^{i\alpha x}}{i\alpha}$. Ipoteza criteriului din punctul a este deci satisfăcută şi integrala (2) converge.

c. Dacă funcţia g este reală, se poate modifica ipoteza criteriului din punctul a; anume este suficient să presupunem că $g(x)$ tinde monoton la zero şi are derivata continuă pe porţiuni. Într-adevăr, în ipoteza formulată, funcţia g' nu îşi schimbă semnul şi expresia

$$\int_a^X |g'(x)|\,dx = \left|\int_a^X g'(x)\,dx\right| = |g(X) - g(a)|$$

are limită finită pentru $X \to \infty$, deoarece $|g'|$ este integrabilă.

Condiţiile impuse funcţiei s rămîn aceleaşi.

11.18. *Integrarea prin părţi şi prin substituţie într-o integrală improprie.* În realitate, am utilizat de multe ori procedeele menţionate în cazuri concrete; acum vom face cîteva observaţii de ordin general. Este suficient să probăm că este posibil să efectuăm operaţiile de care este vorba pentru un interval finit (a, X) şi să trecem apoi la limită pentru $X \to \infty$. Astfel, dacă integrarea prin părţi pe intervalul (a, X) dă

$$\int_a^X f(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,G(x)\Big|_a^X - \int_a^X f'(x)\,G(x)\,dx,$$

putem scrie

$$\int_a^\infty f(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,G(x)\Big|_a^\infty - \int_a^\infty f'(x)\,G(x)\,dx$$

în ipoteza că cel puțin două limite din trei există (atunci există evident și a treia). Primul termen din dreapta este definit în felul următor :

$$f(x)\,G(x)\Big|_a^{\infty} = \lim_{X\to\infty} f(x)\,G(x)\Big|_a^{X} = \lim_{X\to\infty}\,[f(X)G(X) - f(a)G(a)].$$

Analog, dacă, după substituția $x = x(u)$, ajungem la egalitatea

$$\int_a^X f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^U f(x(u))u'(x)\,\mathrm{d}x$$

și dacă, în plus, $X \to \infty$ implică $U \to B(\leqslant \infty)$ și reciproc, atunci are loc egalitatea

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^B f(x(u))u'(x)\,\mathrm{d}x,$$

cu condiția ca cel puțin una din integralele scrise să existe (atunci a doua există de asemenea).

§ 11.2. Integrale improprii de speța a doua și a treia

11.12. *Integrale imporprii de speța a doua.*

a. Fie f o funcție cu valori complexe dată pe un interval $[a, b]$ și integrabilă pe orice interval de forma $[a + \varepsilon, b]$, dar nu obligatoriu integrabilă pe tot intervalul $[a, b]$ (ea poate, de exemplu, să nu fie mărginită pe $[a, b]$). Vrem să atribuim un sens « *integralei improprii de speța a doua* »

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Pentru aceasta, considerăm funcția de ε :

$$I(\varepsilon) = \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dacă această funcție are limită finită pe care o notăm cu I, cînd $\varepsilon \to 0$, atunci se spune că *integrala improprie de speța a doua* (1) *converge*, și îi atribuim valoarea

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} I(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx.$$

Dacă funcția $I(\varepsilon)$ nu are limită cînd $\varepsilon \to 0$, se spune că *integrala improprie* (1) *diverge* și nu îi atribuim nici o valoare.

b. Dacă integrala definită în sens uzual

$$I = \int_{a}^{b} f(x)\, dx \tag{2}$$

există (adică funcția f este integrabilă Riemann pe $[a, b]$), atunci ea există și în sensul noii definiții și are aceeași valoare I. Într-adevăr, dacă integrala (2) există în sensul uzual, atunci funcția f este mărginită odată cu partea reală și partea imaginară (9.15 c); fie, de exemplu, $|f(x)| < C$ pentru orice $x \in [a, b]$. Pentru orice $\varepsilon > 0$, avem

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \int_{a}^{a+\varepsilon} f(x)\, dx + \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx, \tag{3}$$

și

$$\left| \int_{a}^{a+\varepsilon} f(x)\, dx \right| \leqslant C\varepsilon.$$

De aici rezultă că limita celei de a doua integrale din membrul secund al lui (3) există pentru $\varepsilon \to 0$ și este egală cu integrala din primul membru, ceea ce trebuie demonstrat.

c. Definiția este asemănătoare cu definiția integralei improprii de prima speță (adică cu limita superioară infinită). Într-adevăr, integrala de speța a doua se reduce direct la integrala de speța întîi prin substituția $x - a = \frac{1}{u}$. Prin urmare, toată teoria integralelor improprii

de speţa a doua poate fi dedusă din cea a integralelor de prima speţă. Se pot construi de asemenea aceste teorii paralel. Lăsăm cititorului sarcina de a formula, pentru integrala de speţa a doua, criteriul lui Cauchy, criteriul comparaţiei, definiţia şi teorema de convergenţă absolută, criteriile lui Leibniz şi Abel-Dirichlet. Semnalăm numai anumite particularităţi ale integralelor de speţa a doua, care sînt esenţiale în aplicaţii.

11.22.a. Pentru a putea folosi criteriul comparaţiei, trebuie să avem la dispoziţie o colecţie cuprinzătoare de integrale model. În ceea ce priveşte integralele de speţa a doua, integralele de acest tip cele mai utilizate sînt

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^\lambda}. \tag{1}$$

Avem

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^\lambda} \begin{cases} \dfrac{1}{1-\lambda}\left[\dfrac{1}{(b-a)^{\lambda-1}} - \dfrac{1}{\varepsilon^{\lambda-1}}\right] & (\lambda \neq 1), \\ \ln\dfrac{b-a}{\varepsilon} & (\lambda = 1); \end{cases}$$

integrala de forma (1) converge deci pentru $\lambda < 1$ şi diverge pentru $\lambda \geqslant 1$.

b. Aplicînd criteriul de comparaţie se obţine: *dacă pentru* $x \in (a, b)$ *avem*

$$\frac{c_1}{(x-a)^\lambda} \leqslant f(x) \leqslant \frac{c_2}{(x-a)^\lambda},$$

atunci integrala 11.21(1) *converge pentru* $\lambda < 1$ *şi diverge pentru* $\lambda \geqslant 1$.

c. Considerăm, în particular, integrala

$$\int_0^b |\ln x|^\nu \, \mathrm{d}x. \tag{2}$$

Pentru x mic, avem $|\ln x| \leqslant c|x|^{-\alpha}$ oricare ar fi $\alpha > 0$ (5.57(3)). Putem pune $\alpha = \frac{\gamma}{2}$; comparînd apoi integrala (2) cu integrala

$$\int_0^b x^{-\frac{1}{2}}\,dx,$$

care converge în virtutea punctului a, se vede că integrala (2) converge pentru orice γ.

11.23. *Integrale improprii de speța a treia.* Fie f o funcție cu valori complexe dată pe un interval (a, b) finit sau nu (adică sînt admisibile valorile $a = -\infty$ și $b = +\infty$). Spunem că c este un punct singular al funcției f în următoarele cazuri:

a) punctul $c = -\infty$ sau $c = +\infty$ este singular dacă el reprezintă o extremitate a intervalului (a, b);

b) un punct c din interiorul intervalului (a, b) este singular dacă funcția f nu este integrabilă în sens obișnuit în nici o vecinătate a acestui punct; extremitatea c este un punct singular dacă f nu este integrabilă în nici o intersecție a intervalului (a, b) cu o vecinătate a lui c.

Presupunem că funcția f are cel mult un număr finit de puncte singulare și că, în afara acestor puncte, ea este continuă sau continuă pe porțiuni. Vrem să atribuim un sens «*integralei improprii de speța a treia*»

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Fixînd, între două puncte singulare succesive oarecare c_i, c_{i+1}, un punct p_i care nu este singular, ajungem la o mulțime de intervale de forma (c_i, p_i) și (p_i, c_{i+1}) avînd fiecare un singur punct singular la o extremitate. Definim la început integralele funcției f pe aceste intervale, ca integrale improprii de prima sau a doua speță:

$$\int_{c_i}^{p_i} f(x)\,dx = \lim_{X \to c_i} \int_X^{p_i} f(x)\,dx, \qquad \int_{p_i}^{c_i+1} f(x)\,dx = \lim_{X \to c_i+1} \int_{p_i}^{X} f(x),\ dx.$$

Nu se atribuie un sens integralei (1) decît dacă toate integralele improprii astfel obținute converg ; anume se pune :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum \left\{ \int_{c_i}^{p_i} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{p_i}^{c_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \right\}. \qquad (2)$$

Trebuie să arătăm că rezultatul nu depinde de alegerea punctelor p_i. Să facem aceasta pentru unul din intervalele $[c_i, c_{i+1}]$. Fie $c_i < p_i < q_i < c_{i+1}$. Atunci avem

$$\int_{c_i}^{p_i} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{p_i}^{c_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{X \to c_i} \int_X^{p_i} + \lim_{Y \to c_{i+1}} \int_{p_i}^{Y} =$$

$$= \lim_{X \to c_i} \int_X^{p_i} + \lim_{Y \to c_{i+1}} \left\{ \int_{p_i}^{q_i} + \int_{q_i}^{Y} \right\} = \lim_{X \to c_i} \int_X^{p_i} + \int_{p_i}^{q_i} + \lim_{Y \to c_{i+1}} \int_{q_i}^{Y} =$$

$$= \lim_{X \to c_i} \left\{ \int_X^{p_i} + \int_{p_i}^{q_i} \right\} + \lim_{Y \to c_{i+1}} \int_{q_i}^{Y} = \lim_{X \to c_i} \int_X^{q_i} + \lim_{Y \to c_{i+1}} \int_{q_i}^{Y} =$$

$$= \int_{c_i}^{q_i} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{q_i}^{c_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

ceea ce trebuia demonstrat. (În afara calculelor intermediare, nu s-au explicat expresiile de integrat.)

11.24. *Exemplu.* Să considerăm integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{|x - c_1|^{\alpha_1} \ldots |x - c_n|^{\alpha_n}}, \quad -\infty < c_1 < \ldots < c_n < \infty. \qquad (1)$$

Punctele singulare sînt $-\infty, c_1, \ldots, c_n, \infty$.

Integralele $\int_{c_i}^{p_i}$ și $\int_{p_{i+1}}^{c_i}$ converg, dacă și numai dacă $\alpha_i < 1$ (ceilalți factori fiind mărginiți în vecinătatea punctului c_i).

Integralele $\int_{-\infty}^{v_0}$ și $\int_{v_n}^{\infty}$ converg, dacă și numai dacă $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n > 1$. Deci integrala (1) există, dacă și numai dacă

$$\alpha_1 < 1, \ldots, \alpha_n < 1, \quad \alpha_1 + \ldots + \alpha_n > 1.$$

Observăm că integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{|x - c|^{\alpha}},$$

care se obține din (1), cînd $n = 1$, nu converge pentru nici o valoare a lui α. Analog,

$$\int_{-\infty}^{c} \frac{dx}{(c - x)^{\alpha}}, \qquad \int_{c}^{\infty} \frac{dx}{(x - c)^{\alpha}}$$

pentru orice α, ambele integrale diverg.

§ 11.3. Calculul integralelor improprii cu ajutorul reziduurilor

11.31. *Integrala unei funcții raționale.* Considerăm integrala improprie a unei funcții raționale, adică a raportului a două polinoame $P(x)$ și $Q(x)$ (cu coeficienți complecși)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx. \tag{1}$$

Ea converge dacă numărătorul nu are rădăcini reale și gradul numitorului depășește cel puțin cu două unități pe cel al numărătorului (11.13 c).

Cum să calculăm valoarea acestei integrale?

Bineînțeles, se poate calcula integrala nedefinită a funcției raționale $\frac{P(x)}{Q(x)}$ după regulile 9.42 și apoi se înlocuiesc limitele $-\infty$ și $+\infty$. Dar se va vedea că e mai bine, totuși, să aplicăm metode legate de natura analitică a funcțiilor $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Funcția $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ de variabilă complexă z este analitică peste tot în planul z, cu excepția unui număr finit de puncte, care sînt rădăcinile numitorului. Considerăm în semiplanul superior conturul închis neted pe porțiuni L format din segmentul $[-R, R]$ al axei reale și al semicercului

$$C_R^+ = \{z = Re^{i\varphi}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\},$$

R fiind atît de mare încît să nu existe rădăcini ale numitorului din semiplanul superior situate în exteriorul semicercului construit. În interiorul său există un anumit număr de rădăcini ale numitorului, de exemplu, $a_1, \ldots, a_q$ (fig. 11.5). În virtutea formulei 10.43 (1), avem

$$\int_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx + \int_{C_R^+} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Rez}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}\right]_{z=a_j}. \qquad (2)$$

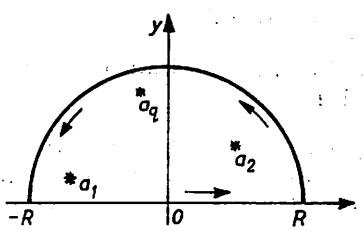


Fig. 11.5

Facem pe R să tindă la ∞. Datorită condiției impuse gradelor polinoamelor $P(z)$ și $Q(z)$, avem $\left|\dfrac{P(z)}{Q(z)}\right| \leqslant \dfrac{A}{R^2}$ pe semicercul C_R^+, A fiind o constantă; deci

$$\left|\int_{C_R^+} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz\right| \leqslant \frac{A}{R^2}\,\pi R = \frac{\pi A}{R}.$$

De aici rezultă că integrala

$$\int_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \qquad (3)$$

are pe (2) ca limită cînd $R \to \infty$. Integrala (1) fiind convergentă, ea trebuie să fie egală cu limita integralei (3). În definitiv, avem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Rez}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}\right]_{z=a_j}. \tag{4}$$

a. Dacă rădăcinile $a_1, \ldots, a_q$ sînt simple, atunci, conform formulei 10.42(1), avem

$$\operatorname{Rez}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}\right]_{z=a_j} = \frac{P(a_j)}{Q'(a_j)},$$

deci

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{b} \frac{P(a_j)}{Q'(a_j)}. \tag{5}$$

Exemplu : $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = 2\pi i \left.\frac{1}{2z}\right|_{z=i} = \pi.$

b. Dacă rădăcinile $a_1, \ldots, a_q$ sînt multiple, anume rădăcina a_j este de multiplicitate k_j, atunci trebuie să aplicăm formula mai generală 10.42 (2) în loc de 10.42 (1) :

$$\operatorname{Rez}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}\right]_{z=a_j} = \frac{1}{(k_j-1)!}\left[(z-a_j)^{k_j}\frac{P(z)}{Q(z)}\right]^{k_j-1}_{z=a_j}$$

deci

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{(k_j-1)!}\left[(z-a_j)^{k_j}\frac{P(z)}{Q(z)}\right]^{k_j-1}_{z=a_j}. \tag{6}$$

Exemplu :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = 2\pi i \left[(z-i)^2 \frac{1}{(z^2+1)^2}\right]'_{z=i} =$$

$$= 2\pi i \left[\frac{1}{(z+i)^2}\right]'_{z=i} = \left.\frac{-4\pi i}{(z+i)^3}\right|_{z=i} = -4\pi i \frac{1}{8i^3} = \frac{\pi}{2}.$$

c. *Observație.* Integrala $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ se poate exprima deci ca fiind suma, înmulțită cu $2\pi i$, a reziduurilor funcției $\frac{P(z)}{Q(z)}$ în polii din semiplanul superior, considerînd conturul L format din segmentul $[-R, R]$, și semicercul $C_R^+ = \{z = Re^{i\varphi},\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\}$. Se poate face același lucru cu conturul L^- compus din segmentul $[R, -R]$ (parcurs de la dreapta la stînga) și din semicercul $C_R^- = \{z = Re^{i\varphi},\ \pi \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$ din semiplanul inferior; avem

$$2\pi i \sum_{k=1}^{r} \operatorname{Rez}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}\right]_{z=b_k} = \int_{L^-} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = \int_{R}^{-R} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx + \int_{C_R^-} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz,$$

$b_1, \ldots, b_r$ fiind rădăcinile polinomului $Q(z)$ aparținînd semiplanului inferior.

Trecînd la limită pentru $R \to \infty$ se găsește

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = -2\pi i \sum_{k=1}^{r} \operatorname{Rez}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}\right]_{z=b_k}. \tag{7}$$

Rezultatele obținute aici și în (4) au forme diferite. În realitate ele se confundă deoarece suma, înmulțită cu $2\pi i$, a reziduurilor funcției $\frac{P(z)}{Q(z)}$ în toate rădăcinile lui $Q(z)$ este nulă.

Aceasta se poate vedea direct. Se știe că suma reziduurilor menționată coincide cu integrala

$$2\pi i \oint_{|z|=R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz \tag{8}$$

luată în lungul cercului de rază R suficient de mare, încît ea să conțină toate rădăcinile lui $Q(z)$ în interiorul său.

Această integrală nu depinde de R și admite estimarea

$$\left| \oint_{|z|=R} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz \right| \leqslant \max_{|z|=R} \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \cdot 2\pi R \leqslant \frac{A}{R^2} \cdot 2\pi R \to 0.$$

Integrala (8) este deci nulă, de unde

$$\sum_{j=1}^{q} \operatorname{Rez} \left[\frac{P(z)}{Q(z)} \right]_{z=a_j} + \sum_{k=1}^{r} \operatorname{Rez} \left[\frac{P(z)}{Q(z)} \right]_{z=b_k} = 0.$$

11.32.a. *Integrala Fourier.* Considerăm integralele de forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\sigma x}\, dx, \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \sigma x\, dx, \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \sigma x\, dx, \tag{3}$$

care conțin un parametru σ; ele se numesc *integralele Fourier.*

Dacă este îndeplinită condiția

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty,$$

atunci toate cele trei integrale ale lui Fourier converg absolut. Dacă, pentru $|x| \to \infty$, funcția $f(x)$ este reală și tinde monoton la zero, atunci integralele (2) și (3) converg pentru $\sigma \neq 0$ (conform 11.16 a), dar, în general, nu absolut. Dacă, în plus, $f(-x) = f(x)$ (funcția f este pară), atunci integrala (3) este nulă și dacă $f(-x) = -f(x)$ (f este impară), integrala (2) este nulă. În plus, are loc relația evidentă

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\sigma x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \sigma x\, dx + i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \sigma x\, dx,$$

deoarece, în cazul cînd f este reală, integralele (2) și (3) reprezintă părțile reale și respectiv imaginare ale integralei (1).

b. Teoria generală a integralelor Fourier va fi expusă în capitolul 15 (Partea a III-a). Ne vom mărgini la calculul integralelor Fourier pentru anumite clase de funcții și aici metodele de integrare în lungul unui contur sînt foarte utile.

Fie $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ o funcție rațională și presupunem că gradul polinomului $Q(x)$ depășește cel puțin cu o unitate gradul polinomului $P(x)$ și că numitorul nu se anulează pentru nici un x real. În acest caz, integralele (1)-(3) converg (11.17 b): le vom calcula.

Considerăm rădăcinile $a_1, \ldots, a_m$ ale polinomului $Q(x)$ în semiplanul superior. Construim conturul închis L^+ format din segmentul $[-R, R]$ al axei reale și semicercul $C_R^+ = \{z = Re^{i\varphi},\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\}$. Atunci, conform 10.43(1), avem

$$\oint_{L^+} \frac{P(z)}{Q(z)}\, e^{i\sigma z}\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)}\, e^{i\sigma x}\, dx + \int_{C_R^+} \frac{P(z)}{Q(z)}\, e^{i\sigma z}\, dz =$$

$$= 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Rez} \left[\frac{P(z)}{Q(z)}\, e^{i\sigma z}\right]_{z=a_j}. \qquad (4)$$

Arătăm că pentru $\sigma > 0$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R^+} \frac{P(z)}{Q(z)}\, e^{i\sigma z}\, dz = 0. \qquad (5)$$

Dacă $y \geqslant 0$, $\sigma \geqslant 0$, atunci $|e^{i\sigma z}| = |e^{i\sigma x - \sigma y}| = e^{-\sigma y} \leqslant 1$. În consecință, dacă gradul polinomului $Q(z)$ depășește cel puțin cu două unități pe cel al lui $P(z)$, demonstrația relației (5) se face exact la fel ca pentru 11.31.

c. Dacă gradul polinomului $Q(z)$ nu depășește decît cu o unitate pe cel al lui $P(z)$, raționamentul 11.31 nu convine. În acest caz, vom stabili următoarea

LEMĂ. *Dacă* $\sigma > 0$, *atunci are loc inegalitatea*

$$\int_0^{\pi} e^{-R\sigma \sin \varphi}\, d\varphi \leqslant \frac{c}{R\sigma} \quad (c - \textit{constantă}).$$

Demonstrație. Deoarece $\sin(\pi - \varphi) = \sin \varphi$, este suficient să considerăm integrala

$$\int_0^{\pi/2} e^{-R\sigma \sin \varphi}\, d\varphi,$$

care este jumătatea celei precedente. Pentru $R \geqslant 1$, avem

$$\int_0^{\pi/2} e^{-R\sigma \sin \varphi}\, d\varphi = \int_0^{\pi/6} e^{-R\sigma \sin \varphi}\, d\varphi + \int_{\pi/6}^{\pi/2} e^{-R\sigma \sin \varphi}\, d\varphi <$$

$$< \int_0^{\pi/6} \frac{\cos \varphi}{\cos \frac{\pi}{6}}\, e^{-R\sigma \sin \varphi}\, d\varphi + \int_{\pi/6}^{\pi/2} e^{-R\sigma \sin \sigma}\, d\varphi <$$

$$< \frac{e^{-R\sigma \sin \varphi}}{R\sigma \cos \frac{\pi}{6}}\Bigg|_{\varphi=\frac{\pi}{6}}^{0} + \frac{\pi}{3} e^{-\frac{R\sigma}{2}} < \frac{1}{R\sigma \cos \frac{\pi}{6}} +$$

$$+ \frac{\pi}{3} e^{-\frac{R\sigma}{2}} = \frac{1}{R\sigma}\left(\frac{1}{\cos \frac{\pi}{6}} + \frac{\pi}{3} R\sigma e^{-\frac{R\sigma}{2}} \right) \leqslant \frac{c}{R\sigma},$$

funcția ue^{-u} fiind mărginită pentru $u > 0$. Lema este demonstrată.

d. COROLAR (lema lui Jordan). *Dacă o funcție* f *este definită și analitică în semiplanul* $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ *pentru* $|z| \geqslant p$ *și dacă, în plus,*

$$\lim_{R \to \infty} \sup_{|z|=R} |f(z)| = 0,$$

atunci, pentru $\sigma > 0$, *avem*

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R^+} f(z) e^{i\sigma z}\, dz = 0.$$

Demonstrație. Aplicînd lema *c* se găsește

$$\left|\int_{C_R^+} f(z)\, e^{i\sigma z}\, dz\right| = \left|\int_0^{\pi} f(z)\, e^{i\sigma x}\, e^{-\sigma y}\, Re^{i\varphi}\, d\varphi\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{z\in C_R^+} |f(z)| \cdot R \cdot \int_0^{\pi} e^{-R\sigma \sin\varphi}\, d\varphi \leqslant \frac{c}{\sigma} \sup_{z\in C_R^+} |f(z)| \to 0$$

pentru $R \to \infty$, ceea ce trebuia demonstrat.

e. Continuăm calculul integralei (1) pentru $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$. Deoarece această funcție, pentru $|z|$ suficient de mari, satisface inegalitatea

$$|f(z)| = \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \geqslant \frac{c}{|z|},$$

egalitatea (5) rezultă din lema lui Jordan. Trecînd în (4) la limită cînd $R \to \infty$ se obține integrala Fourier pentru funcția f cu $\sigma > 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, e^{i\sigma x}\, dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Rez}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}\, e^{i\sigma z}\right]_{z=a_j}.$$

f. Dacă $\sigma < 0$, raționamentul precedent nu mai este valabil, deoarece funcția $e^{i\sigma z}$ crește indefinit împreună cu R pe cercul C_R^+. În acest caz, facem construcția analoagă nu în semiplanul superior, ci în semiplanul inferior. Notăm prin C_R^- semicercul $\{z = Re^{i\sigma},\ \pi \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$ de rază suficient de mare încît toate rădăcinile $b_1, \ldots, b_r$ ale polinomului $Q(z)$ din semiplanul inferior se găsesc în interiorul său; atunci

$$\oint_{L^-} \frac{P(z)}{Q(z)}\, e^{i\sigma z}\, dz = \int_{+R}^{-R} \frac{P(x)}{Q(x)}\, e^{i\sigma x}\, dx + \int_{C_R^-} \frac{P(z)}{Q(z)}\, e^{i\sigma z}\, dz =$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{r} \operatorname{Rez}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}\, e^{i\sigma z}\right]_{z=b_k}.$$

Integrala luată în lungul lui C_R^- admite estimarea

$$\int_{C_R^-} \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \, e^{i\sigma z} \, dz \right| = \left| \int_{\pi}^{2\pi} \frac{P(z)}{Q(z)} \, e^{i\sigma x} \, e^{-\sigma y} \, Re^{i\sigma} \, d\varphi \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{z \in C_R^-} \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \cdot R \int_0^{\pi} e^{R\sigma \sin \varphi} \, d\varphi$$

și, în virtutea lemei, tinde la zero pentru $R \to \infty$, de unde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \, e^{i\sigma x} \, dx = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)} \, e^{i\sigma x} \, dx =$$

$$= -2\pi i \sum \operatorname{Rez} \left[\frac{P(z)}{Q(z)} \, e^{i\sigma z} \right]_{z=b_k},$$

ceea ce reprezintă valoarea integralei Fourier pentru funcția $\frac{P(x)}{Q(x)}$ pentru $\sigma < 0$.

g. Pentru $\sigma = 0$, integrala Fourier (1) devine integrala funcției raționale $\frac{P(x)}{Q(x)}$ și dacă diferența dintre gradele numitorului și numărătorului este unu, ea nu există.

h. *Exemplu* (integrala Laplace) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i\sigma x}}{x^2+1} \, dx = \begin{cases} 2\pi i \operatorname{Rez} \left[\frac{ze^{i\sigma z}}{z^2+1} \right]_{z=i} = i\pi e^{-\sigma} \; (\sigma > 0), \\ -2\pi i \operatorname{Rez} \left[\frac{ze^{i\sigma z}}{z^2+1} \right]_{z=-i} = -i\pi e^{\sigma} \; (\sigma < 0). \end{cases}$$

Remarcăm că integrala nedefinită pentru funcția $\frac{xe^{i\sigma x}}{x^2+1}$ nu se exprimă prin funcții elementare.

11.33. *Integrale speciale Fourier.* Se poate întîmpla ca una din integralele Fourier 11.32 (2) și (3) să existe, cu toate că funcția f are singularități chiar pe axa Ox, dacă aceste singularități sînt compensate prin zerouri corespunzătoare

ale funcţiilor $\sin \sigma x$ sau $\cos \sigma x$. Considerăm, de exemplu, integrala folosită în fizica matematică

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \sigma x}{x} \, dx$$

(convergenţa să rezultă din criteriul Leibniz 11.16). În cazul de faţă, integrala Fourier $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\sigma x}}{x} \, dx$ nu există.

Considerăm conturul L format succesiv din segmentul $[-R, -\varepsilon]$ al axei reale, semicercul mic

$$C_\varepsilon = \{z = \varepsilon e^{i\varphi},\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\},$$

segmentul $[\varepsilon, R]$ al axei reale şi semicercul mare

$$\Gamma_R = \{z = Re^{i\varphi},\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\}$$

(fig. 11.6). Funcţia $e^{i\sigma z}/z$ neavînd nici o singularitate în

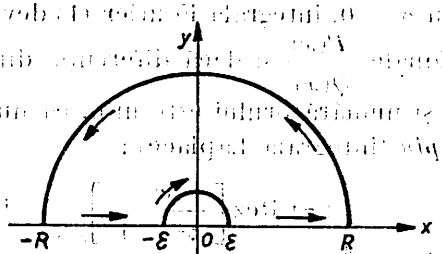


Fig. 11.6

interiorul conturului L, şi nici pe contur, rezultă

$$\oint_L \frac{e^{i\sigma z}}{z} \, dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{i\sigma x}}{x} \, dx + \int_{C_\varepsilon} \frac{e^{i\sigma z}}{z} \, dz + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{i\sigma x}}{x} \, dx +$$

$$+ \int_{\Gamma_R} \frac{e^{i\sigma z}}{z} \, dz = 0.$$

Aplicînd lema lui Jordan avem, pentru $\sigma > 0$,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{i\sigma z}}{z}\, dz = 0$$

Apoi,

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{i\sigma x}}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{i\sigma x}}{x}\, dx = \left[\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\cos \sigma x}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\cos \sigma x}{x}\, dx\right] +$$

$$+ i\left[\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\sin \sigma x}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin \sigma x}{x}\, dx\right] =$$

$$= i\left[\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\sin \sigma x}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin \sigma x}{x}\, dx\right],$$

deoarece integralele din funcția $\frac{\cos \sigma x}{x}$ pe intervalele $[-R, -\varepsilon]$ și $[\varepsilon, R]$ se reduc, în virtutea imparității funcției. În sfîrșit,

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{e^{i\sigma z}}{z}\, dz = \int_{C_\varepsilon} \frac{dz}{z} + \int_{C_\varepsilon} \frac{e^{i\sigma z} - 1}{z}\, dz = \int_{\varphi=\pi}^{0} \frac{i\varepsilon e^{i\varphi}\, d\varphi}{\varepsilon e^{i\varphi}} + R_\varepsilon =$$

$$= -i\pi + R_\varepsilon,$$

unde

$$|R_\varepsilon| = \left|\int_{C_\varepsilon} \frac{e^{i\sigma z} - 1}{z}\, dz\right| \leqslant \max_{z \in C_\varepsilon} \left|\frac{e^{i\sigma z} - 1}{z}\right| \varepsilon\pi \leqslant M\varepsilon,$$

deoarece funcția $\frac{e^{i\sigma z} - 1}{z}$ este continuă, deci mărginită în vecinătatea lui $z = 0$. Cînd ε tinde la 0 și R la ∞, se obține

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \sigma x}{x}\, dx = \pi. \qquad (1)$$

Dacă $\sigma < 0$, atunci $\sin \sigma x = -\sin(-\sigma)x$, unde $-\sigma > 0$; în consecință,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \sigma x}{x}\, dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(-\sigma)x}{x}\, dx = -\pi.$$

Rezultă de aici că (Euler, 1781)

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin \sigma x}{x}\, dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ dacă } \sigma > 0, \\ -\frac{\pi}{2} \text{ dacă } \sigma < 0. \end{cases} \tag{2}$$

O metodă analoagă permite să calculăm integralele mai complicate

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

unde $Q(x) \neq 0$ (vezi exercițiul 5).

§ 11.4. Integrale improprii cu parametri

11.41. Integrala Fourier este un exemplu de integrală improprie cu parametru. Considerăm o integrală improprie arbitrară, de exemplu, de prima speță, care depinde de un parametru real σ:

$$I(\sigma) = \int_{a}^{\infty} y(t, \sigma)\, dt. \tag{1}$$

Presupunem că ea converge pentru orice valoare a lui σ, din intervalul $\alpha \leqslant \sigma \leqslant \beta$; ne interesează proprietățile lui $I(\sigma)$ ca funcție de σ. Anume, vrem să găsim răspunsuri la următoarele întrebări:

(a) *Dacă funcția $y(t, \sigma)$ este continuă în raport cu σ, este sau nu continuă funcția $I(\sigma)$?*

(b) *Are loc formula de integrare în raport cu parametrul*

$$\int_\alpha^\beta \left\{ \int_a^\infty y(t, \sigma)\, \mathrm{d}t \right\} \mathrm{d}\sigma = \int_a^\infty \left\{ \int_\alpha^\beta y(t, \sigma)\, \mathrm{d}\sigma \right\} \mathrm{d}t?$$

(c) *Funcția $y(t, \sigma)$ fiind derivabilă în raport cu σ, este sau nu valabilă formula de derivare*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} \int_a^\infty y(t, \sigma)\, \mathrm{d}t = \int_a^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} y(t, \sigma)\, \mathrm{d}t?$$

Ca exemplu, considerăm integrala

$$I(\sigma) = \int_0^\infty \frac{\sin t\sigma}{t}\, \mathrm{d}t,$$

care este convergentă pentru orice σ și a fost calculată în 11.33 ; s-a văzut că

$$I(\sigma) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \text{ pentru } \sigma > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2} \text{ pentru } \sigma < 0. \end{cases}$$

În plus, este evident că $I(0) = 0$.

În acest fel, deși $\dfrac{\sin \sigma t}{t}$ este continuă în raport cu parametrul σ, rezultatul integrării, $I(\sigma)$, are o discontinuitate în $\sigma = 0$. În consecință, răspunsul la întrebarea (a) este, în general, negativ. Apoi, în exemplul de față, avem $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} \dfrac{\sin t\sigma}{t} = \cos t\sigma$ și formula de derivare (c) nu are loc căci integrala din membrul secund este divergentă. Cu toate că formula de integrare (b) este valabilă pentru exemplul nostru, înțelegem că aceasta este datorită unor proprietăți speciale ale funcției $\dfrac{\sin t\sigma}{t}$. Un exemplu de răspuns negativ

la întrebarea (b) este dat de exercițiul 6. Pentru ca răspunsul la întrebările (a) și (c) să fie pozitiv trebuie să impunem condiții suplimentare caracterului de convergență a integralei improprii (1).

Aici vom face construcțiile necesare numai pentru integralele de prima speță, dar toate definițiile și teoremele pot fi extinse la integralele de speța a doua și a treia, ceea ce cititorul va verifica ușor.

11.42. DEFINIȚIE. O integrală improprie cu parametru

$$I(\sigma) = \int_a^\infty y(t, \sigma)\, dt, \tag{1}$$

care converge pentru orice valoare a lui σ aparținînd unei mulțimi S se numește *uniform convergentă pe* S (sau în raport cu $\sigma \in S$), dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un N astfel încît, pentru orice $p \geqslant N$ și pentru orice $\sigma \in S$, să avem

$$\left| \int_p^\infty y(t, \sigma)\, dt \right| < \varepsilon.$$

Alegem arbitrar numerele $h_n \nearrow \infty$ și formăm șirul de funcții

$$I_n(\sigma) = \int_a^{a+h_n} y(t, \sigma)\, dt \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Dacă integrala (1) converge uniform pe mulțimea S, atunci șirul (2) converge uniform pe aceeași mulțime către limita sa care este integrala (1).

11.43. TEOREMĂ. *Dacă S este un spațiu metric, funcția $y(t, \sigma)$ este uniform continuă pe orice produs $S \times [a, a + h]$, $0 < h < \infty$ și integrala* 11.42 (1) *converge uniform pe S, atunci funcția $I(\sigma)$ este continuă pe mulțimea S.*

Demonstrație. Conform teoremei 9.81 funcțiile $I_n(\sigma)$ sînt continue pentru $\sigma \in S$. Conform teoremei 5.96, funcția $I(\sigma)$ este de asemenea continuă pentru $\sigma \in S$, ca limită a unui șir uniform convergent de funcții continue. Teorema este demonstrată.

11.44. TEOREMĂ. *Dacă o funcție $y(t, \sigma)$ este continuă în raport cu ansamblul variabilelor (t, σ) pe orice dreptunghi*

$$S = \{(t, \sigma) \mid a \leqslant t \leqslant a + h, 0 < h < \infty ; \alpha \leqslant \sigma \leqslant \beta\}$$

și dacă integrala 11.42 (1) *converge pentru $\alpha \leqslant \sigma \leqslant \beta$ uniform în raport cu σ, atunci funcția*

$$Y(t) = \int_{\alpha}^{\beta} y(t, \sigma)\, \mathrm{d}\sigma$$

are integrala improprie convergentă pe intervalul $a \leqslant t < \infty$ și în plus

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \int_{a}^{\infty} y(t, \sigma)\, \mathrm{d}t \right\} \mathrm{d}\sigma = \int_{a}^{\infty} \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} y(t, \sigma)\, \mathrm{d}\sigma \right\} \mathrm{d}t. \qquad (1)$$

Demonstrație. Conform teoremei 9.72, convergența uniformă a funcțiilor continue (11.43) $I_n(\sigma)$ către $I(\sigma)$ implică

$$\int_{\alpha}^{\beta} I(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma = \lim_{n \to \infty} \int_{\alpha}^{\beta} I_n(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma. \qquad (2)$$

Dar, conform teoremei 9.82, are loc relația

$$\int_{\alpha}^{\beta} I_n(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma = \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \int_{a}^{a+h_n} y(t, \sigma)\, \mathrm{d}t \right\} \mathrm{d}\sigma =$$

$$= \int_{a}^{a+h_n} \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} y(t, \sigma)\, \mathrm{d}\sigma \right\} \mathrm{d}t.$$

Egalitatea (2) ia deci forma

$$\int_{a}^{\beta} I(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma = \lim_{n \to \infty} \int_{a}^{a+h_n} \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} y(t, \sigma)\, \mathrm{d}\sigma \right\} \mathrm{d}t. \qquad (3)$$

Existența limitei membrului secund pentru $h_n \nearrow \infty$ semnifică existența integralei improprii $\int_a^\infty \left\{ \int_\alpha^\beta y(t, \sigma)\, \mathrm{d}\sigma \right\} \mathrm{d}t$ (11.12 b). În consecință, (1) rezultă din (3). Teorema este demonstrată.

11.45. TEOREMĂ. *Dacă derivata parțială* $y'_\sigma(t, \sigma)$ *este continuă în raport cu ansamblul variabilelor* (t, σ) *în orice dreptunghi* $\alpha \leqslant \sigma \leqslant \beta$, $a \leqslant t \leqslant a + h$, $0 < h < \infty$, *integrala* $\int_a^\infty y'_\sigma\ (t, \sigma)\, \mathrm{d}t$ *converge pentru* $\alpha \leqslant \sigma \leqslant \beta$ *uniform în raport cu* σ *și dacă integrala* $\int_a^\infty y(t, \alpha)\, \mathrm{d}t$ *converge, atunci funcția*

$$I(\sigma) = \int_a^\infty y(t, \sigma)\, \mathrm{d}t$$

există pentru $\alpha \leqslant \sigma \leqslant \beta$, *este derivabilă în raport cu* σ *și, în plus,*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} \int_a^\infty y(t, \sigma)\, \mathrm{d}t = \int_a^\infty y'_\sigma(t, \sigma)\, \mathrm{d}t. \qquad (1)$$

Demonstrație. În virtutea teoremei 9.84,

$$I'_n(\sigma) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} \int_a^{a+h_n} y(t, \sigma)\, \mathrm{d}t = \int_a^{a+h_n} y'_\sigma(t, \sigma)\, \mathrm{d}t.$$

Prin ipoteză, șirul de funcții $I'_n(\sigma)$ converge uniform pe intervalul $\alpha \leqslant \sigma \leqslant \beta$ și șirul de funcții $I_n(\sigma)$ converge în punctul $\sigma = \alpha$. Conform teoremei 9.77, șirul $I_n(\sigma)$ converge uniform pe intervalul $\alpha \leqslant \sigma \leqslant \beta$, limita sa $I(\sigma)$ este o funcție derivabilă pentru $\sigma \in [\alpha, \beta]$ și are loc relația

$$I'(\sigma) = \lim_{n \to \infty} I'_n(\sigma).$$

Am demonstrat deci existența și derivabilitatea în raport cu σ a integralei

$$I(\sigma) = \int_a^\infty y(t, \sigma)\, \mathrm{d}\sigma = \lim_{n\to\infty} I_n(\sigma),$$

deci și egalitatea (1).

b. Pentru funcțiile analitice enunțul teoremei din punctul a se modifică.

Presupunem că funcția $y(t, s)$ este definită pentru $t \in (a, \infty)$ și $s \in G$, unde G este un domeniu în planul $s = \sigma + i\tau$; presupunem apoi că $y(t, s)$ este analitică în raport cu $s \in G$, pentru orice t și continuă în raport cu ansamblul (t, s) în orice „cilindru" de forma $a \leqslant t \leqslant a + h$, $\{s \mid |s - s_0| \leqslant \rho\} \subset G (0 < h < \infty)$. Spunem că integrala

$$\int_a^\infty y(t, s)\, \mathrm{d}t, \qquad s \in G, \tag{2}$$

converge uniform în interiorul lui G, dacă ea converge pentru orice $s \in G$ și dacă, pentru orice compact $Q \subset G$ și pentru orice $\varepsilon > 0$, există un $N = N(\varepsilon, Q)$ astfel încît

$$\left| \int_N^\infty y(t, s)\, \mathrm{d}t \right| < \varepsilon$$

oricare ar fi $s \in Q$.

TEOREMĂ. *Dacă integrala* (2) *converge uniform în interiorul lui G, atunci funcția*

$$I(s) = \int_a^\infty y(t, s)\, \mathrm{d}t$$

este analitică în G și

$$I'(s) = \int_a^\infty y'_s(t, s)\, \mathrm{d}t.$$

Demonstrație. Conform teoremei 10.27, funcția

$$I_n(s) = \int_a^{b_n} y(t, s)\, dt$$

este analitică în raport cu s și, în plus, $I_n'(s) = \int_a^{b_n} y_s'(t, s)\, dt$.

Apoi, funcția $I_n(s)$ converge uniform în interiorul lui G către funcția $I(s)$ cînd $n \to \infty$, deci în virtutea teoremei 10.36, funcția $I(s)$ este analitică în G. Conform aceleiași teoreme 10.36, funcțiile $I_n'(s)$ converg către funcția $I'(s)$ în domeniul G, de unde

$$I'(s) = \lim_{n\to\infty} \int_a^{b_n} y_s'(t, s)\, dt = \int_a^{\infty} y_s'(t, s)\, dt,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

11.46. *Criteriul lui Cauchy de convergență uniformă a integralelor. O integrală improprie*

$$\int_a^{\infty} y(t, \sigma)\, dt \tag{1}$$

cu parametrul σ parcurgînd o mulțime S, converge uniform pe S dacă și numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr N astfel încît oricare ar fi $p \geqslant N$, $q \geqslant N$, $\sigma \in S$, să avem

$$\left| \int_p^q y(t, \sigma)\, dt \right| \leqslant \varepsilon. \tag{2}$$

Demonstrație. Presupunem că integrala (1) converge uniform pe S. Pentru un $\varepsilon > 0$ dat, găsim un număr N astfel încît să avem

$$\left| \int_p^{\infty} y(t, \sigma)\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3}$$

pentru orice $p \geqslant N$ și pentru orice $\sigma \in S$. Fie apoi $q \geqslant N$ astfel încît

$$\left| \int_q^\infty y(t, \sigma)\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Relația (2) rezultă din (3) și (4), ceea ce demonstrează necesitatea condiției lui Cauchy. Invers, dacă inegalitatea (2) are loc, atunci integrala (1) converge pentru orice $\sigma \in S$ în virtutea lui 11.12 d. Trecînd la limită pentru orice $q \to \infty$ în relația (2) se obține

$$\left| \int_p^\infty y(t, \sigma)\, dt \right| \leqslant \varepsilon$$

pentru toți $p \geqslant N$ și $\sigma \in S$, ceea ce arată convergența uniformă a integralei (1) pe mulțimea S. Teorema este demonstrată.

11.47. a. La rîndul său, criteriul lui Cauchy se află la baza obținerii unor criterii particulare de convergență uniformă dintre care criteriul majorant este cel mai simplu.

Fie f o funcție nenegativă a cărei integrală converge

$$\int_a^\infty f(t)\, dt. \tag{1}$$

Vom spune că f este o majorantă integrabilă pentru orice funcție $y(t)$ astfel încît $|y(t)| \leqslant f(t)$.

TEOREMĂ. *Dacă funcția $y(t, \sigma)$, pentru orice $\sigma \in S$ are un același majorant integrabil $f(t)$, atunci integrala*

$$\int_a^\infty y(t, \sigma)\, dt$$

converge uniform pe S.

Propoziția rezultă din inegalitatea

$$\left| \int_p^q y(t, \sigma)\, dt \right| \leqslant \int_p^q |y(t, \sigma)|\, dt \leqslant \int_p^q f(t)\, dt$$

și aplicînd criteriul lui Cauchy 11.46.

b. *Exemplu.* Să arătăm că integrala improprie

$$\int_0^\infty \frac{\cos \sigma t - \cos \beta t}{t^2}\, dt \quad (0 \leqslant \sigma \leqslant 1,\ 0 \leqslant \beta \leqslant 1) \qquad (2)$$

converge uniform în raport cu parametrul σ în intervalul $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$. Să stabilim în prealabil inegalităţile

$$\left|\frac{\cos \sigma t - \cos \beta t}{t^2}\right| \leqslant \begin{cases} \dfrac{2}{t^2} \text{ pentru } t \geqslant 1, \\ 2 \text{ pentru } t \leqslant 1 \end{cases}$$

pentru orice σ şi β din intervalul $[0, 1]$.

Prima inegalitate este imediată. Pentru a demonstra-o pe a doua folosim relaţia ce rezultă din formula lui Taylor 8.23(4):

$$\cos \alpha t = 1 - \frac{\alpha^2 t^2}{2} + t^4 G(\alpha, t),$$

unde

$$|G(\alpha,t)| = \left|\frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!}\, t^2 + \ldots\right| \leqslant \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \ldots < \frac{1}{2},$$

pentru $|\alpha| \leqslant 1,\ |t| \leqslant 1$.

De aici dacă $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, rezultă că

$$\left|\frac{\cos \sigma t - \cos \beta t}{t^2}\right| = \left|\frac{\beta^2 - \sigma^2}{2} + t^2 (G(\sigma,t) - G(\beta, t))\right| <$$

$$< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} < 2,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

În consecinţă, funcţia

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{t^2} \text{ pentru } t \geqslant 1, \\ 2 \text{ pentru } 0 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

este o majorantă integrabilă a tuturor funcțiilor $\frac{\cos \sigma t - \cos \beta t}{t^2}$, $\sigma, \beta \in [0, 1]$. Deci integrala (2) converge uniform în raport cu σ pentru $\sigma \in [0, 1]$ și reprezintă o funcție continuă de σ în acest interval. Expresia explicită a acestei funcții va fi dată de 11.49b.

11.48. *Convoluția a două funcții.* Se numește *convoluția* a două funcții complexe g și f definite pentru $-\infty < t < \infty$, integrala de speța a treia

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma)\, g(t - \sigma)\, \mathrm{d}\sigma. \tag{1}$$

Condițiile de existență pentru această funcție sînt formulate mai jos.

TEOREMĂ. *Dacă f și g sînt continue, mărginite și absolut integrabile pe axa $-\infty < t < \infty$, atunci $h(t)$ există pentru orice t, este continuă, mărginită și absolut integrabilă pe axa $-\infty < t < \infty$ și, în plus,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, \mathrm{d}t.$$

Demonstrație. Dacă $|g(t)| \leqslant C$, funcția de sub integrală admite majorarea $|f(\sigma) g(t - \sigma)| \leqslant C |f(t)|$, de unde rezultă convergența uniformă a integralei (1) în raport cu parametrul $\sigma \in (-\infty, \infty)$. Apoi, funcția $h(t)$ (1) este mărginită, deoarece

$$|h(t)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(\sigma)|\, |g(t - \sigma)|\, \mathrm{d}\sigma \leqslant C \int_{-\infty}^{\infty} |f(\sigma)|\, \mathrm{d}\sigma.$$

Să arătăm că funcția de sub semnul integrală din (1) este continuă în raport cu ansamblul variabilelor în orice dreptunghi mărginit $a \leqslant t \leqslant b$, $\alpha \leqslant \sigma \leqslant \beta$. Fie $|g(t)| \leqslant C$ și $|f(t)| \leqslant C$. Pentru un $\varepsilon > 0$ dat, găsim un $\delta > 0$ astfel încît $|\sigma' - \sigma''| < \delta$, $\sigma', \sigma'' \in [\alpha, \beta]$ să implice $|f(\sigma') - f(\sigma'')| < \varepsilon$ și $|t' - t''| < 2\delta$, $t', t'' \in [a - \beta, b - \alpha]$ să

implice $|g(t') - g(t'')| < \varepsilon$; deoarece $|\sigma' - \sigma''| < \delta$, $|t' - t''| < \delta$, avem atunci

$$|(t' - \sigma') - (t'' - \sigma'')| < 2\delta$$

şi, pentru $\sigma', \sigma'' \in [\alpha, \beta]$, $t', t'' \in [a, b]$, are loc relaţia

$$|f(\sigma')g(t' - \sigma') - f(\sigma'')g(t'' - \sigma'')| \leqslant$$

$$\leqslant |f(\sigma') - f(\sigma'')|\,|g(t' - \sigma')| +$$

$$+ |f(\sigma'')|\,|g(t' - \sigma') - g(t'' - \sigma'')| \leqslant C\varepsilon + C\varepsilon = 2C\varepsilon,$$

ceea ce înseamnă că funcţia $f(\sigma)g(t - \sigma)$ este continuă în raport cu ansamblul argumentelor din dreptunghiul menţionat. În virtutea teoremei 11.43, funcţia $h(t)$ este continuă în t.

Acum verificăm integrabilitatea absolută a lui $h(t)$. Să observăm la început că funcţiile $|f(\sigma)|$ şi $|g(t)|$ satisfac aceleaşi condiţii ca şi $f(\sigma)$ şi $g(t)$; deci integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\sigma)|\,|g(t - \sigma)|\,\mathrm{d}\sigma$$

converge uniform şi ea în raport cu t, funcţia de sub semnul integrală fiind continuă în raport cu ansamblul variabilelor t şi σ în orice dreptunghi $a \leqslant t \leqslant b$, $\alpha \leqslant \sigma \leqslant \beta$. Aplicînd acestei integrale teorema 11.44 se găseşte

$$\int_{-\tau}^{\tau} |h(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{-\tau}^{\tau} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(\sigma)|\,|g(t - \sigma)|\,\mathrm{d}\sigma \right\} \mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |f(\sigma)| \left\{ \int_{-\tau}^{\tau} |g(t - \sigma)|\,\mathrm{d}t \right\} \mathrm{d}\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} |f(\sigma)| \left\{ \int_{-\tau-\sigma}^{\tau-\sigma} |g(t)|\,\mathrm{d}t \right\} \mathrm{d}\sigma \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\sigma)| \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\,\mathrm{d}t \right\} \mathrm{d}\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\,\mathrm{d}t \int_{-\infty}^{\infty} |f(\sigma)|\,\mathrm{d}\sigma,$$

de unde rezultă existența integralei $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt$. În sfîrșit, tot conform teoremei 11.44, avem

$$\int_{-\tau}^{\tau} h(t)\,dt = \int_{-\tau}^{\tau} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) g(t-\sigma)\,d\sigma \right\} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) \left\{ \int_{-\tau}^{\tau} g(t-\sigma)\,dt \right\} d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) \left\{ \int_{-\tau-\sigma}^{\tau-\sigma} g(t)\,dt \right\} d\sigma =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt - \int_{|t+\sigma|>\tau} g(t)\,dt \right] d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma)\,d\sigma -$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) \left\{ \int_{|t+\sigma|>\tau} g(t)\,dt \right\} d\sigma.$$

Demonstrăm că ultima integrală tinde la 0 pentru $\tau \to \infty$, ceea ce va proba ultima concluzie a teoremei. Pentru un $\varepsilon > 0$ dat, găsim un ρ astfel încît să avem

$$\int_{|\sigma|\geqslant\rho} |f(\sigma)|\,d\sigma < \varepsilon,$$

și un τ astfel încît

$$\int_{|t|>\tau-\rho} |g(t)|\,dt < \varepsilon.$$

Acestea fiind satisfăcute, avem

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) \left\{ \int_{|t-\sigma|>\tau} g(t)\,dt \right\} d\sigma \right| \leqslant \left| \int_{|\sigma|\geqslant\rho} f(\sigma) \left\{ \int_{|t-\sigma|>\tau} g(t)\,dt \right\} d\sigma \right| +$$

$$+ \left| \int_{|\sigma|<\rho} f(\sigma) \left\{ \int_{|t-\sigma|>\tau} g(t)\,dt \right\} d\sigma \right| \leqslant \int_{|\sigma|\geqslant\rho} |f(\sigma)| \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\,dt \right\} d\sigma +$$

$$+\int_{|\sigma|<\rho}|f(\sigma)|\left\{\int_{|t|>\tau-\rho}|g(t)|\,\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}\sigma\leqslant\varepsilon\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|\,\mathrm{d}t+\right.$$

$$\left.+\int_{-\infty}^{\infty}|f(\sigma)|\,\mathrm{d}\sigma\right\},$$

de unde concluzia căutată. Teorema este demonstrată.

Operația de convoluție a două funcții f și g este notată prin simbolul $*$. Am demonstrat deci că

$$\int_{-\infty}^{\infty}[f(t)*g(t)]\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\mathrm{d}t\cdot\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Observație. Dacă într-o integrală uzuală, pe interval compact,

$$h_\tau(t)=\int_{t-\tau}^{t+\tau}f(\sigma)g(t-\sigma)\mathrm{d}\sigma$$

se face substituția $t-\sigma=\eta$, $\sigma=t-\eta$, se obține

$$h_\tau(t)=\int_{t-\tau}^{t+\tau}f(t-\eta)g(\eta)\,\mathrm{d}\eta.$$

Trecînd la limită pentru $\tau\to\infty$ se găsește

$$f(t)*g(t)=h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\sigma)g(t-\sigma)\,\mathrm{d}\sigma=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-\eta)\,g(\eta)\,\mathrm{d}\eta=g(t)*f(t),$$

deci convoluția este simetrică (comutativă) în raport cu funcțiile f și g.

11.49. *Criteriul lui Abel-Dirichlet de convergență uniformă a integralelor.*

a. Se aplică la anumite cazuri cînd criteriul 11.47 a nu poate fi aplicat. Fie integrala

$$\int_a^\infty u(t)\, v(t, \sigma)\, dt, \quad \sigma \in S. \tag{1}$$

Dacă funcția (complexă) $u(t)$ are derivata continuă, pe porțiuni, absolut integrabilă, tinde la zero pentru $t \to \infty$ și dacă $\left|\int_a^T v(t, \sigma)\, dt\right| \leqslant C$, unde C nu depinde de T, nici de $\sigma \in S$, atunci integrala (1) converge uniform pe S.

Trecînd la demonstrație, punem $V(t, \sigma) = \int_a^T v(\theta, \sigma)\, d\theta$ și integrăm prin părți

$$\int_T^{T'} u(t)v(t, \sigma)\, dt = u(t)V(t, \sigma)\Big|_T^{T'} - \int_T^{T'} u'(t)V(t, \sigma)\, dt.$$

Aici avem, ca în 11.17 a:

$$|u(T')V(T', \sigma) - u(T)V(T, \sigma)| \leqslant 2C \max\{u(T), u(T')\};$$

$$\left|\int_T^{T'} u(t)v(t, \sigma)\, dt\right| \leqslant 2C\, u(T) + C\int_T^{T'} u'(t)\, dt = 3Cu(T).$$

Conform ipotezelor teoremei, mărimile obținute tind la 0 pentru $T \to \infty$, ceea ce trebuia demonstrat.

b. *Exemplu.* Am calculat integrala $\int_0^\infty \frac{\sin t\sigma}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$ ($\sigma > 0$) în 11.33. Să arătăm că ea converge uniform în orice interval $0 < \alpha \leqslant \sigma \leqslant \beta$. Într-adevăr, cînd $t \to \infty$, funcția

$\frac{1}{t}$ tinde la 0, are derivata continuă integrabilă $-1/t^2$, și avem

$$\left|\int_a^T \sin t\sigma \, dt\right| = \left|\frac{\cos T\sigma - \cos a\sigma}{\sigma}\right| \leqslant \frac{2}{\sigma} \leqslant \frac{2}{\alpha},$$

așadar îi putem aplica criteriul Abel-Dirichlet. Integrînd în raport cu parametrul $\sigma \in [\alpha, \beta]$ și folosind 11.44 se obține valoarea integralei considerată în 11.47 :

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha t - \cos \beta t}{t^2} \, dt = \int_0^\infty \left\{ \int_\alpha^\beta \frac{\sin t\sigma}{t} \, d\sigma \right\} dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta \left\{ \int_0^\infty \frac{\sin t\sigma}{t} \, dt \right\} d\sigma = \frac{\pi}{2}(\beta - \alpha). \qquad (2)$$

Convergența uniformă a acestei integrale pentru $\alpha \in [0,1]$ fiind demonstrată, se poate trece la limită în (2) pentru $\alpha \to 0$. Se va găsi valoarea unei noi integrale improprii :

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos \beta t}{t^2} \, dt = 2\int_0^\infty \frac{\sin^2 \frac{\beta t}{2}}{t^2} \, dt = \frac{\pi\beta}{2}. \qquad (3)$$

§ 11.5. Funcțiile Gamma și Beta ale lui Euler

11.51. *Funcția lui Euler, Gamma* Γ, este definită de formula

$$\Gamma(\tau) = \int_0^\infty t^{\tau-1} e^{-t} \, dt. \qquad (1)$$

Această integrală improprie de speța a treia reprezintă suma integralei de prima speță

$$\int_1^1 t^{\tau-1} e^{-t} \, dt.$$

și a integralei de speța a doua

$$\int_0^1 t^{\tau-1}e^{-t}\,dt;$$

prima converge pentru orice τ real, a doua pentru orice $\tau > 0$. Prin urmare, $\Gamma(\tau)$ este definită prin egalitatea (1), pentru orice $\tau > 0$. Dacă $\beta \geqslant \tau \geqslant \alpha > 0$, funcția $t^{\tau-1}e^{-t}$ admite majoranta integrabilă $\max\{t^{\alpha-1}e^{-t}, t^{\beta-1}e^{-t}\}$. Deci, integrala (1) converge uniform pe orice interval $[\alpha, \beta]$ și reprezintă, conform teoremei 11.43, o funcție continuă de τ. Astfel, $\Gamma(\tau)$ este o funcție continuă de τ pe $(0,\infty)$. Derivata în raport cu τ a funcției de sub integrală are forma $t^{\tau-1}\cdot \ln t \cdot e^{-t}$ și are ca majorantă integrabilă $t^{\alpha-1}\cdot \ln t \cdot e^{-t}$ pe orice interval $0 < \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$; deoarece funcția $t^{\tau-1}\cdot \ln t \cdot e^{-t}$ este continuă în raport cu $t \in [0, \infty)$, pentru orice $\tau > 0$, și în raport cu t și τ în orice dreptunghi $0 \leqslant t \leqslant b$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$. Funcția $\Gamma(\tau)$ are deci, conform teoremei 11.45a, derivata

$$\Gamma'(\tau) = \int_0^\infty t^{\tau-1}\cdot \ln t \cdot e^{-t}\,dt \quad (\tau > 0),$$

care este continuă, din aceleași rațiuni ca și funcția Γ însăși. Putem continua derivarea aplicînd de fiecare dată teorema 11.45 a; în consecință, Γ are derivate de orice ordin.

11.52. Integrînd 11.51(1) prin părți, se obține

$$\Gamma(\tau) = \int_0^\infty t^{\tau-1}e^{-t}\,dt = \frac{t^\tau}{\tau}e^{-t}\Big|_{t=0}^{\infty} + \frac{1}{\tau}\int_0^\infty t^\tau e^{-t}dt,$$

sau

$$\Gamma(\tau+1) = \tau\Gamma(\tau). \tag{1}$$

Egalitatea (1) reprezintă *relația de recurență pentru funcția Gamma*. Aplicînd-o de mai multe ori se vede că:

$$\Gamma(\tau+n) = (\tau+n-1)(\tau+n-2)\ldots(\tau+1)\tau\Gamma(\tau); \tag{2}$$

în consecință, dacă se cunosc valorile funcției Gamma într-un interval de lungime 1, atunci se pot găsi valorile sale în orice alte puncte ale semiaxei $\tau > 0$. Deoarece

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1,$$

se obține

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\ldots 1 = n!$$

De aici rezultă că funcția Gamma reprezintă o prelungire a funcției $n!$ definită pentru valorile naturale ale lui n, la mulțimea tuturor numerelor reale pozitive. Apoi, continuitatea lui $\Gamma(\tau)$ pentru $\tau = 1$ și relația (1) are drept consecință :

$$\Gamma(\tau) = \frac{\Gamma(\tau+1)}{\tau} \to \infty, \text{ pentru } \tau \to 0$$

11.53. *Funcția Beta și relația sa cu funcția Gamma.* Integrala

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx, \qquad (1)$$

funcție de doi parametri p și q, se numește *funcția Beta a lui Euler*. Ea există pentru orice valori pozitive ale lui p și q : atît ca integrală proprie dacă $p, q \geqslant 1$, cît și ca integrală improprie pentru orice alte valori ale lui p și q. Substituția $x = \frac{\theta}{1+\theta}$ transformă integrala (1) în

$$B(p, q) = \int_0^\infty \frac{\theta^{p-1}\, d\theta}{(1+\theta)^{p+q}}. \qquad (2)$$

Să arătăm că funcția Beta se poate exprima prin funcția Gamma. Făcînd în expresia funcției Gamma

$$\Gamma(\tau) = \int_0^\infty t^{\tau-1} e^{-t}\, dt$$

substituția $t = \theta y$, se obține

$$\frac{\Gamma(\tau)}{\theta^{\tau}} = \int_0^{\infty} y^{\tau-1} e^{-\theta y}\, dy.$$

Înlocuind aici τ prin $p + q$ și θ prin $1 + \theta$:

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+\theta)^{p+q}} = \int_0^{\infty} y^{p+q-1} e^{-y} e^{-\theta y}\, dy.$$

Înmulțind cei doi membri ai acestei egalități prin θ^{p-1} și integrînd de la 0 la n:

$$\Gamma(p+q) \int_0^n \frac{\theta^{p-1}\, d\theta}{(1+\theta)^{p+q}} = \int_0^n \left\{ \int_0^{\infty} \theta^{p-1} y^{p+q-1} e^{-y} e^{-\theta y}\, dy \right\} d\theta. \tag{3}$$

Cînd $n \to \infty$, primul membru tinde către $\Gamma(p+q)\, B(p,q)$.

Funcția de sub integrală din membrul al doilea are ca majorantă integrabilă $n^{p-1} y^{p+q-1} e^{-y}$, deci, conform teoremei 11.44, putem permuta ordinea de integrare:

$$\int_0^n \left\{ \int_0^{\infty} \theta^{p-1} y^{p+q-1} e^{-y} e^{-\theta y}\, dy \right\} d\theta =$$

$$= \int_0^{\infty} y^{p+q-1} e^{-y} \left\{ \int_0^n \theta^{p-1} e^{-\theta y}\, d\theta \right\} dy =$$

$$= \int_0^{\infty} y^{p+q-1} e^{-y} \left\{ \frac{1}{y^p} \int_0^{ny} t^{p-1} e^{-t}\, dt \right\} dy = \int_0^{\infty} y^{q-1} e^{-y} F_n(y)\, dy,$$

unde funcția

$$F_n(y) = \int_0^{ny} t^{p-1} e^{-t}\, dt$$

pentru $n \to \infty$, tinde către funcţia $F(y)$ care este 0 pentru $y = 0$ şi $\Gamma(p)$ pentru $y > 0$. Această convergenţă nu este uniformă pe intervalul $0 \leqslant y \leqslant b$ (ceea ce rezultă deja din discontinuitatea funcţiei limită). Din contră, convergenţa $F_n(y) \to F(y)$ este uniformă pe orice interval $h \leqslant y \leqslant b$ cu $h > 0$, deoarece

$$0 < \Gamma(p) - \int_0^{ny} t^{p-1} e^{-t}\, dt \leqslant \Gamma(p) - \int_0^{nh} t^{p-1} e^{-t}\, dt.$$

În plus, deoarece funcţia $F_n(y)$ tinde crescător către $F(y)$, familia funcţiilor $y^{q-1}e^{-y}F_n(y)$ admite $y^{q-1}e^{-y}\Gamma(p)$ ca majorantă integrabilă; deci, conform teoremei 11.43, avem

$$\lim_{n\to\infty} \int_h^\infty y^{q-1} e^{-y} F_n(y)\, dy = \Gamma(p) \int_h^\infty y^{q-1} e^{-y}\, dy.$$

Dar, pentru $h > 0$,

$$0 \leqslant \int_0^h y^{q-1} e^{-y} F_n(y)\, dy \leqslant \Gamma(p) \int_0^h y^{q-1}\, dy = \Gamma(p) \frac{h^q}{q}. \qquad (4)$$

Fiind dat un $\varepsilon > 0$, găsim un $h > 0$ astfel încît să avem

$$\Gamma(p) \frac{h^q}{q} < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (5)$$

Apoi, h fiind ales, găsim un N astfel încît

$$0 < \Gamma(p) \int_h^\infty y^{q-1} e^{-y}\, dy - \int_h^\infty y^{q-1} e^{-y} F_n(y)\, dy < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (6)$$

pentru $n > N$. În sfîrşit, pentru h ales

$$0 < \Gamma(p)\,\Gamma(q) - \Gamma(p) \int_h^\infty y^{q-1} e^{-y}\, dy = \Gamma(p) \int_0^h y^{q-1} e^{-y}\, dy <$$

$$< \Gamma(p) \frac{h^q}{q} < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (7)$$

Din inegalităţile (4), (5), (6), (7) rezultă că

$$0 < \Gamma(p)\,\Gamma(q) - \int_0^\infty y^{q-1}e^{-y}F_n(y)\,dy < \varepsilon,$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty y^{q-1}e^{-y}F_n(y)\,dy = \Gamma(p)\,\Gamma(q).$$

Trecînd acum la limită în (3), se obţine

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \qquad (8)$$

Aceasta este expresia căutată a funcţiei Beta prin funcţia Gamma.

11.54. La rîndul lor mai multe integrale trigonometrice se exprimă prin funcţia Beta. Astfel, efectuînd substituţia $\sin^2\theta = x$ în integrala

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^{p-1}\theta\cos^{q-1}\theta\,d\theta$$

avem

$$I = \int_0^1 x^{(p-1)/2}(1-x)^{(q-1)/2}\,\frac{dx}{2\sqrt{x(1-x)}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{p}{2}-1}(1-x)^{\frac{q}{2}-1}\,dx = \frac{1}{2}B\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right).$$

11.55. *Formula complementelor.* Punînd $q = 1 - p$, se deduce din formula 11.53(8):

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = B(p, 1-p) = \int_0^\infty \frac{\theta^{p-1}\,d\theta}{1+\theta}. \qquad (1)$$

Pentru ca să calculăm această integrală, considerăm funcția analitică

$$w(z) = \frac{z^{p-1}}{1+z}$$

în planul variabilei complexe z, tăiat în lungul semiaxei reale pozitive. Funcția este definită în mod unic dacă pe marginea superioară a tăieturii se pune

$$w(x + \mathrm{i}\,0) = \frac{x^{p-1}}{1+x}, \tag{2}$$

unde x^{p-1} este considerată în sensul lui 5.54. Pe marginea inferioară a tăieturii, avem, după ce am înconjurat originea coordonatelor în sens pozitiv, $z = x - \mathrm{i}\,0 = xe^{2\pi i}$,

$$w(x - \mathrm{i}\,0) = \frac{x^{p-1}}{1+x}\, e^{2i\pi(p-1)}. \tag{3}$$

Considerăm conturul închis L (fig. 11.7) format din segmentul $[0, R]$ $(R > 1)$ al axei x-ilor pe marginea superioară a tăieturii, din cercul C_R de rază R centrat în origi-

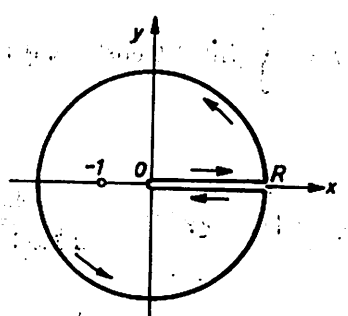


Fig. 11.7

nea coordonatelor și din segmentul $[R, 0]$ pe marginea inferioară a tăieturii. În interiorul conturului L nu există decît un punct singular al funcției $w(z)$, care este pol de primul ordin, anume $z = -1$. Conform 10.42 a, avem

$$\int_L w(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot\operatorname{Rez} w(z)\Big|_{z=-1} = 2\pi i e^{i\pi(p-1)}. \tag{4}$$

Pe de altă parte,

$$\int_L w(z)\,dz = \int_0^R w(x + i\,0)\,dx + \int_{C_R} w(z)\,dz + \int_R^0 w(x - i\,0)\,dx. \tag{5}$$

Pentru $|z| = R$, avem $|w(z)| \leqslant \dfrac{R^{p-1}}{R-1} \leqslant cR^{p-2}$, de unde, pentru $p < 1$,

$$\left| \int_{C_R} w(z)\,dz \right| \leqslant cR^{p-2}\,2\pi R = 2\pi c\,R^{p-1} \to 0. \tag{6}$$

Trecînd la limită pentru $R \to \infty$ în (5) și ținînd cont de (2)—(5), se găsește

$$2\pi i e^{i\pi(p-1)} = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx \cdot (1 - e^{2\pi i(p-1)}),$$

deci

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = 2\pi i \frac{e^{i\pi(p-1)}}{1 - e^{2\pi i(p-1)}} = \frac{2\pi i}{e^{-i\pi(p-1)} - e^{i\pi(p-1)}} =$$

$$= -\frac{\pi}{\sin \pi(p-1)} = \frac{\pi}{\sin \pi p}.$$

În final, se obține

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}. \tag{7}$$

Aceasta este formula complementelor. În particular, punînd aici $p = \dfrac{1}{2}$, avem

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{8}$$

Folosind relaţia de recurenţă, se obţine

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi},\ \ldots,\ \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

Graficul funcţiei Gamma pentru $0<p\leqslant 5$ este reprezentat în fig. 11.8.

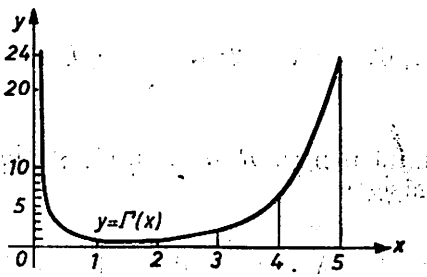


Fig. 11.8

11.56. Cu ajutorul funcţiei Gamma se pot calcula integrale esenţiale pentru teoria probabilităţilor:

$$I_m=\int_0^\infty x^m e^{-ax^2}\,dx\quad (a>0,\quad m>-1). \tag{1}$$

Anume, substituţia $ax^2=t$, $x=\sqrt{\frac{t}{a}}$, $dx=\frac{1}{2}\frac{dt}{\sqrt{at}}$, pune integralele I_m sub forma

$$I_m=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{a^{(m+1)/2}}\int_0^\infty t^{(m-1)/2}e^{-t}\,dt=\frac{1}{2a^{(m+1)/2}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right).$$

În particular, pentru $a=1$, avem

$$I_0=\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}. \tag{2}$$

11.57. *Expresia asimptotică a funcției Gamma.* Pentru valori mari ale lui τ, funcția Gamma

$$\Gamma(\tau) = \int_0^\infty t^{\tau-1} e^{-t}\, dt$$

admite o reprezentare asimptotică simplă.

a. LEMĂ. *Presupunem că o funcție* $f \geqslant 0$ *definită pentru* $x > 0$, *care este* 0 *pentru* $x = 1$, *descrește pentru* $0 < x < 1$ *și crește pentru* $x > 1$, *admite reprezentarea*

$$f(x) = a(x-1)^2 + (x-1)^{2+2\delta}\psi(x),$$

$$\delta > 0, \quad |\psi(x)| \leqslant M, \quad a > 0,$$

în vecinătatea punctului $x = 1$ *și satisface condiția*

$$|f(x)| \geqslant bx, \quad b > 0 \tag{1}$$

pentru $x \geqslant c > 1$. *Atunci*

$$I(s) = \int_0^\infty e^{-sf(x)}\, dx \tag{2}$$

este un infinit mic echivalent cu $\sqrt{\frac{\pi}{sa}}$ *cînd* $s \to \infty$.

Demonstrație. Convergența integralei (2) pentru $s > 0$ rezultă din estimarea (1). Pentru $0 < \varepsilon < 1$, avem

$$I(s) = \left\{ \int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^{c} + \int_c^\infty \right\} e^{-sf(x)}\, dx.$$

Apoi, dacă ε este suficient de mic, avem prin ipoteză

$$\int_0^{1-\varepsilon} e^{-sf(x)}\, dx < e^{-sf(1-\varepsilon)} < e^{-s\frac{a}{2}\varepsilon^2}, \tag{3}$$

$$\int_{1+\varepsilon}^{c} e^{-sf(x)}\,dx < (c-1)e^{-sf(1+\varepsilon)} < (c-1)\,e^{-s\frac{a}{2}\varepsilon^2}, \quad (4)$$

$$\int_{c}^{\infty} e^{-sf(x)}\,dx < \int_{c}^{\infty} e^{-sbx}\,dx = \frac{e^{-sbc}}{sb}. \quad (5)$$

Trecînd la calculul integralei de la $1-\varepsilon$ la $1+\varepsilon$, se vede că în acest interval

$$|e^{-s(x-1)^{2+2\delta}\psi(x)} - 1| =$$

$$= |s(x-1)^{2+2\delta}\psi(x) + \frac{1}{2}s^2(x-1)^{2(2+2\delta)}\psi^2(x) + \ldots| \leqslant$$

$$\leqslant Ms\varepsilon^{2+2\delta} + \frac{1}{2}M^2s^2\varepsilon^{2(2+2\delta)} + \ldots \leqslant 2Ms\varepsilon^{2+2\delta},$$

de îndată ce

$$Ms\varepsilon^{2+2\delta} \leqslant \frac{1}{2}. \quad (6)$$

Numărul ε este, pentru moment, arbitrar; dacă $s \to \infty$, punem

$$\varepsilon = s^{-\frac{1}{2+\delta}}.$$

Atunci

$$s\varepsilon^{2+2\delta} = s^{1-\frac{2+2\delta}{2+\delta}} = s^{-\frac{\delta}{2+\delta}} \to 0 \quad (s \to \infty)$$

şi condiţia (6) este satisfăcută. Pe de altă parte, conform alegerii lui ε, avem

$$s\varepsilon^2 = s^{1-\frac{2}{2+\delta}} = s^{\frac{\delta}{2+\delta}} \to \infty \quad (s \to \infty).$$

Acum, pentru $s \to \infty$ şi oricare ar fi $x \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ avem prin construcţie

$$|e^{-s(x-1)^{2+2\delta}\psi(x)} - 1| \leqslant 2Ms\varepsilon^{2+2\delta} \to 0,$$

astfel că

$$e^{-s(x-1)^2+2\delta\psi(x)} = 1 + o(1),$$

unde $o(1) \to 0$ cînd $s \to \infty$. Prin urmare,

$$\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} e^{-sf(x)}\,dx = \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} e^{-sa(x-1)^2}(1 + o(1))\,dx =$$

$$= [1 + o(1)]\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} e^{-sa(x-1)^2}\,dx = [1 + o(1)]\frac{1}{\sqrt{sa}}\int_{-\varepsilon\sqrt{sa}}^{\varepsilon\sqrt{sa}} e^{-u^2}\,du.$$

Ţinînd cont că $\varepsilon\sqrt{s} \to \infty$, atunci ultima integrală tinde către limita

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi},$$

pentru $s \to \infty$ (11.56), astfel că

$$\int_{-\varepsilon\sqrt{sa}}^{\varepsilon\sqrt{sa}} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}(1 + o(1)),$$

unde $o(1) \to 0$ pentru $s \to \infty$. Deci

$$\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} e^{-sf(x)}\,dx = (1 + o(1))\sqrt{\frac{\pi}{sa}}.$$

În ceea ce priveşte ceilalţi termeni (3), (4), (5), ei tind toţi, dat fiind că $s\varepsilon^2 = s^{\delta/(2+\delta)}$, către 0 pentru $s \to \infty$, după legea exponenţială. În final,

$$I(s) = \int_0^{\infty} e^{-sf(x)}dx = (1+o(1))\sqrt{\frac{\pi}{sa}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{sa}}[1+o(1))].$$

b. Punem acum expresia funcției Gamma sub o formă căreia putem să-i aplicăm lema. Cu substituția $t = sx$, avem

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty t^s e^{-t}\,dt = s^{s+1}\int_0^\infty x^s e^{-sx}\,dx = s^{s+1}\int_0^\infty e^{-sx+s\ln x}\,dx =$$

$$= s^{s+1}e^{-s}\int_0^\infty e^{-s(x-\ln x-1)}\,dx = s^{s+1}e^{-s}\int_0^\infty e^{-sf(x)}\,dx,$$

unde

$$f(x) = x - \ln x - 1.$$

Este ușor de văzut că funcția f verifică ipoteza lemei. În plus, $f(1) = f'(1) = 0$, $f''(1) = 1$, $f'''(1) = -2$; în vecinătatea punctului $x = 1$

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{2}f''(1) - \frac{E}{3}(x-1)^3, \quad \lim_{x\to 1} E = 1,$$

astfel că valoarea constantei a este $\frac{1}{2}$. Aplicînd lema, se găsește

$$\Gamma(s+1) = s^{s+1}e^{-s}\sqrt{\frac{2\pi}{s}}\,[1 + o(1)] \approx s^{s+\frac{1}{2}}e^{-s}\sqrt{2\pi},$$

ceea ce reprezintă expresia asimptotică pe care am căutat-o.

În particular, dacă $s = n$ este un număr natural, atunci $\Gamma(n+1) = n!$ și se obține

$$n! \approx n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\sqrt{2\pi}$$

(*formula lui Stirling*, 1730).

11.58. *Funcția Gamma în domeniul complex.* Formula

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt = \int_0^\infty e^{(z-1)\ln t}e^{-t}\,dt \qquad (1)$$

care definește funcția Gamma, este valabilă nu numai pentru valori reale $z > 0$, dar și pentru anumite valori z complexe. Anume, dacă $z = x + iy$, $x > 0$, atunci integrala (1) converge, deoarece funcția de sub integrală

$$e^{(x+iy-1)\ln t}e^{-t} = e^{(x-1)\ln t}e^{-t}e^{iy\ln t} = t^{x-1}e^{-t}e^{iy\ln t}$$

nu diferă de funcția $t^{x-1}e^{-t}$ decît prin factorul $e^{iy\ln t}$ de modul 1. În consecință, formula (1) permite să definim direct $\Gamma(z)$ pentru toate valorile $z = x + iy$, cu $x > 0$, adică în orice semiplan (deschis) la dreapta G al planului z. Integrala (1) converge uniform în interiorul lui G deoarece, pentru orice compact $Q \subset G$, mărimea $d = \inf_{z \in G} x$ este pozitivă și are o majorantă integrabilă $t^{d-1}e^{-t}$. Conform 11.45 b, funcția $\Gamma(z)$ este analitică în domeniul G.

Să vedem dacă este posibil să prelungim analitic funcția $\Gamma(z)$ în semiplanul din stînga. Utilizăm egalitatea

$$\Gamma(z + n) = z(z + 1) \dots (z + n - 1)\Gamma(z). \qquad (2)$$

Ea este stabilită pentru valori reale ale lui z. Dar cei doi membri ai egalității fiind funcții analitice de z în domeniul G, faptul că ei sînt identici pe axa reală implică identitatea lor în întreg semiplanul G, în virtutea teoremei de unicitate 10.39 b. Punînd (2) sub forma

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z + n)}{z(z + 1) \dots (z + n - 1)}, \qquad (3)$$

atragem atenția că al doilea membru este definit și analitic pentru orice z, cu $\operatorname{Re} z > -n$, exceptînd valorile $z = 0, -1, \dots, -n + 1$. Considerăm acum formula (3) ca definiția funcției Gamma. Ea dă o prelungire analitică a acesteia din urmă în domeniul $G_n = \{z \mid \operatorname{Re} z > -n\}$. Formal, avem definiții diferite pentru n diferiți, dar, ținînd cont de unicitatea prelungirii analitice (10.39 c), toate definițiile dau aceeași valoare a funcției $\Gamma(z)$, oricare ar fi z. Deoarece n este arbitrar de mare, funcția $\Gamma(z)$ este definită astfel în tot planul z, cu excepția singularităților izolate în punctele $z = 0, -1, \dots, -n + 1, \dots$

Din formula (3) rezultă că toate aceste singularități sînt poli de primul ordin. Calculînd reziduul funcției $\Gamma(z)$ în polul $z = -n+1$ cu ajutorul formulei 10.42(1), avem

$$\operatorname{Rez}\Gamma(z)\big|_{z=-n+1} = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\dots(z+n-2)}\Bigg|_{z=-n+1} =$$

$$= \frac{\Gamma(1)}{(-1)(-2)\dots(-n+1)} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

EXERCIȚII

1. Să se demonstreze formula lui Dirichlet

$$\int_0^1 \left\{ \iint_{y=0}^{1-x} x^{\lambda-1} y^{\mu-1} (1-x-y)^{\nu-1} f(x,y)\,dy \right\} dx =$$

$$= \int_0^1 \left\{ \iint_{x=0}^{1-y} x^{\lambda-1} y^{\mu-1} (1-x-y)^{\nu-1} f(x,y)\,dx \right\} dy,$$

unde $0 < \lambda \leqslant 1$, $0 < \mu \leqslant 1$, $0 < \nu \leqslant 1$, $f(x,y)$ este continuă pentru $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

2. Să se demonstreze *formula lui Frullani*

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f(0)\cdot \ln\frac{b}{a},$$

unde $a > 0$, $b > 0$, dacă $f(x)$ este continuă pentru $0 \leqslant x < \infty$ și integrala $\int_1^\infty \frac{f(x)}{x}\,dx$ converge.

3. Folosind integrarea în planul complex, să se găsească

$$I(p) = \int_0^\infty e^{-px^2}\,dx,$$

unde $\operatorname{Re} p \geqslant 0$.

4. Să se calculeze integralele lui Fresnel

$$F_1 = \int_0^\infty \sin(x^2)\,dx, \quad F_2 = \int_0^\infty \cos(x^2)\,dx.$$

5. Să se calculeze integrala specială a lui Fourier

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

unde P și Q sînt polinoame, gradul lui P nu depășește pe al lui Q și Q nu se anulează pentru nici un x real.

6. Să se arate că

$$\int_0^1 \left\{ \int_1^{\infty} \frac{y-x}{(x+y)^3}\, dx \right\} dy = -\frac{1}{2}, \quad \int_1^{\infty} \left\{ \int_0^1 \frac{y-x}{(x+y)^3}\, dy \right\} dx = -1.$$

Rezultatul este în contradicție cu teorema 11.44?

7. Notăm prin L drumul în planul variabilei complexe s, format din intervalul $[\varepsilon, +\infty)$ al axei reale parcurs de la dreapta la stînga, cercul $|s| = \varepsilon$ parcurs în sens pozitiv și intervalul $[\varepsilon, +\infty)$ al axei reale parcurs de la stînga la dreapta. Să se demonstreze formula

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{2\pi i z} - 1} \int_L e^{-s} s^{z-1}\, ds,$$

care dă o reprezentare a funcției Gamma pentru orice z complex, cu excepția polilor săi.

NOTĂ ISTORICĂ

În secolele al XVII-lea și al XVIII-lea au fost calculate mai multe integrale improprii concrete, înainte ca definiția corectă a convergenței unei integrale improprii să fi fost dată de Cauchy (1821), care totodată a indicat metoda de calcul a integralelor improprii cu ajutorul prelungirii analitice și a teoremei reziduurilor. Integralele absolut convergente au fost puse în evidență de către Dirichlet (1854) iar cele uniform convergente de către Valée de Poussin (1892). Funcțiile Gamma și Beta au fost introduse și studiate de către Euler în anii 1730.

Astfel, cu aceste corective indispensabile, se poate înțelege mai bine viața internă a matematicii, ceea ce constituie deopotrivă unitatea și diversitatea acesteia; la fel ca un mare oraș, ale cărui cartiere nu încetează să progreseze într-un mod oarecum haotic, pe terenul înconjurător, în timp ce centrul se reconstruiește periodic, de fiecare dată după un plan mai clar și o ordonare mai maiestuoasă, lăsînd la o parte cartierele mai vechi și labirintul străzilor, pentru a lansa spre periferie străzi mereu mai directe, mai largi și mai comode...

N. Bourbaki, *Arhitectura matematicii* (1938).

PARTEA A TREIA
CAPITOLE ALESE DE ANALIZĂ MODERNĂ

Capitolul 12

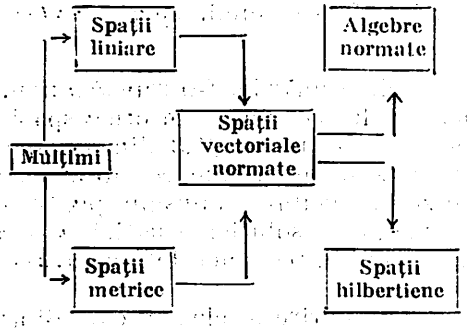
STRUCTURI FUNDAMENTALE ALE ANALIZEI

Hilbert. El este într-adevăr? Bineînțeles că îmi aduc aminte, cîtva timp în urmă era elevul meu. Apoi, el a devenit poet; evident, nu avea destulă fantezie pentru a se ocupa de matematici.

Noi am vorbit deja de structuri matematice (§2.5). Să spunem cîteva cuvinte, de data aceasta despre structurile care apar în analiză. Obiectele analizei matematice sînt numere, funcții și operații asupra acestora. Dintr-un unghi de vedere general, legăturile între aceste obiecte sînt descrise în teoria mulțimilor. Într-adevăr, numerele și funcțiile formează cele mai diferite mulțimi; relațiile de incluziune, operațiile de reuniune, intersecție, trecere la complementară permit descrierea anumitor proprietăți generale ale acestor mulțimi. Ajungem la structuri fundamentale ale analizei impunînd mulțimilor condiții suplimentare puse sub forma unui sistem de axiome corespunzătoare anumitor proprietăți sau operații utilizate în analiza matematică clasică. Apar astfel următoarele structuri matematice: spațiu vectorial, unde se axiomatizează operațiile liniare de adunare a elementelor și de înmulțire a unui element cu un număr; spațiu metric, unde, cu ajutorul noțiunii de distanță, se axiomatizează operația de trecere la limită; spațiu vectorial normat (Banach), unde se consideră operațiile liniare ca și trecerea la limită; algebra normată, unde se adaugă operațiilor menționate, o operație internă de înmulțire; spațiul hilbertian, unde se axiomatizează noțiunea de produs scalar, ceea ce permite să se opereze nu numai cu lungimi de vectori, dar și cu unghiurile pe care aceștia le formează; în fine, în cazul finit-dimensional se ajunge la spații vectoriale afine (adică nemetrice), normate și hilbertiene (sau euclidiene) de dimensiune finită. Plecînd de la structurile fundamentale menționate, există numeroase structuri intermediare de care nu vorbim, pentru moment, cu toate

că ele sînt foarte importante (spații topologice, spații semiordonate etc.).

Iată schema structurilor fundamentale pe care le vom studia mai în detaliu:



Fiecare săgeată este o deducție, adică o trecere de la o noțiune generală la o noțiune particulară.

§ 12.1. Spații vectoriale

12.11. Axiomatica spațiului vectorial se construiește plecînd de la proprietățile spațiului real n-dimensional $\mathbb{R}_n$ (2.61), dar fără să se utilizeze scrierea în coordonate și înlocuind corpul $\mathbb{R}$ al numerelor reale printr-un corp oarecare K (1.22). Anume, un spațiu vectorial $\mathcal{X}$ peste corpul K este o mulțime de elemente $x, y, \ldots$, numite *vectori*, pentru care s-au stabilit operații de adunare și de înmulțire cu numere (ale corpului K) astfel încît să fie satisfăcute următoarele axiome:

a) $x + y = y + x$ oricare ar fi x și y din $\mathcal{X}$.

b) $(x + y) + z = x + (y + z)$ oricare ar fi x, y, z din $\mathcal{X}$.

c) Există în $\mathcal{X}$ un vector notat cu 0 (*vectorul nul*) astfel încît $x + 0 = x$ pentru orice $x \in \mathcal{X}$.

d) Pentru orice $x \in \mathcal{X}$ există un element $y \in \mathcal{X}$, numit *opusul* lui x, astfel încît $x + y = 0$.

e) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ oricare ar fi $x, y \in \mathcal{X}$ și $\alpha \in K$.

f) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ oricare ar fi $x \in \mathcal{X}$ și oricare ar fi α și β din K.

g) $1 \cdot x = x$ pentru orice $x \in \mathcal{X}$.

h) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ oricare ar fi $x \in \mathcal{X}$ și α și β din K.

În cazul cînd corpul K este corpul $\mathbb{R}$ al numerelor reale, spațiul $\mathcal{X}$ este numit *spațiul vectorial real* și este notat cu $\mathcal{R}$. În cazul cînd corpul K este corpul $\mathbb{C}$ al numerelor complexe, spațiul $\mathcal{X}$ este numit *spațiu vectorial complex* și notat cu $\mathcal{C}$.

12.12. Axiomele adunării a-f-d repetă axiomele din 1.21 pentru numere reale. De aceea, în orice spațiu vectorial, corolariile care au decurs în §1.3 din axiomele adunării numerelor reale sînt de asemenea adevărate; anume: unicitatea lui zero, unicitatea opusului pentru orice $x \in \mathcal{X}$, existența și unicitatea soluției ecuației $a + x = b$, ceea ce garantează posibilitatea unei definiții corecte a operației de scădere.

Operația de înmulțire a elementelor dintr-un spațiu vectorial nu este definită și asemănarea axiomelor, e-h cu anumite axiome ale înmulțirii numerelor reale, citate în 1.22, este doar aparentă. De aceea, numai unele din teoremele din §1.4 sînt adevărate pentru spații vectoriale. Rămîn adevărate, fără ca demonstrația să se schimbe, următoarele propoziții:

a) (analog cu 1.47a). *Pentru orice $x \in \mathcal{X}$ are loc egalitatea* $0 \cdot x = 0$ (aici 0 în membrul al doilea este vectorul nul, iar primul număr este 0 al corpului K).

b) (analog cu 1.47b). *Dacă $\alpha x = 0$, atunci sau $\alpha = 0$, sau $x = 0$.*

Într-adevăr, dacă $\alpha \neq 0$, avem conform 12.11 g, h:

$$x = \frac{1}{\alpha}\alpha x = \frac{1}{\alpha} \cdot 0 = 0.$$

c) (analog cu 1.49). *Pentru orice $x \in \mathcal{X}$, are loc egalitatea* $-x = (-1)x$.

12.13. *Exemple de spații vectoriale.* Semnalăm patru tipuri de spații peste corpul $\mathbb{R}$ al numerelor reale:

a) Numerele reale însăși, cu operațiile obișnuite.

b) Spațiul real $\mathbb{R}_n$ de dimensiune n (§2.6).

c) Spațiul $\mathbb{R}(E)$ al tuturor funcțiilor (cu valori reale) definite pe o mulțime E, cu operațiile obișnuite (pentru funcții numerice) de adunare și înmulțire cu numere reale (4.31b).

d) Spaţiul $\mathcal{A}(E)$ al tuturor funcţiilor cu valori vectoriale într-un spaţiu real $\mathcal{A}$ cu operaţiile de adunare şi înmulţire cu numere reale definite într-un mod natural pentru funcţii cu valori vectoriale:

$$(x+y)(t) = x(t) + y(t), \quad (\alpha x)(t) = \alpha x(t).$$

Fiecare din aceste exemple, cu excepţia primului, este o generalizare a celui precedent.

Înlocuind în aceste exemple corpul numerelor reale printr-un corp oarecare K, se obţin patru exemple de spaţii peste corpul K:

e) Corpul K însuşi.

f) Spaţiul n-dimensional K_n peste corpul K, format din toate sistemele $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ compuse fiecare din n elemente ale corpului K, cu operaţiile de adunare şi înmulţire între numere, introduse după regulile:

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n),$$

g) Spaţiul $K(E)$ al tuturor funcţiilor cu valori în corpul K definite pe mulţimea E, cu operaţiile obişnuite (pentru funcţii) de adunare şi de înmulţire cu un număr.

h) Spaţiul $\mathcal{K}(E)$ al tuturor funcţiilor cu valori vectoriale (într-un spaţiu $\mathcal{K}$) definite pe mulţimea E şi înzestrate cu operaţiile naturale (pentru funcţii vectoriale) de adunare şi înmulţire cu un număr.

Următorul exemplu nu figurează pe lista de mai sus, dar este de o importanţă primordială în analiză:

i) Spaţiul $\mathbb{R}^e(M)$ al tuturor funcţiilor reale continue definite pe un spaţiu metric M (indicele superior vrea să spună „continuu" (*stetig*, în germană)).

Acest exemplu nu poate fi generalizat în cazul funcţiilor cu valori într-un corp oarecare K, deoarece pentru astfel de funcţii noţiunea de continuitate nu este în general definită (continuitatea unei funcţii presupune o metrică în spaţiul unde ia valori funcţia; dar în corpul arbitrar K nu a fost introdusă nici o metrică).

Pentru moment, nu se poate extinde exemplul i) decît în cazul funcţiilor cu valori în spaţiul real n-dimensional $\mathbb{R}_n$, unde există operaţiile liniare şi noţiunea de continuitate (5.81).

j) Spaţiul $\mathbb{R}_n^s(M)$ al tuturor funcţiilor continue definite pe un spaţiu metric M, cu valori în spaţiul real $\mathbb{R}_n$ de dimensiune n.

k) Un caz particular al exemplului j, care merită să fie semnalat, este spaţiul $\mathbb{C}^s(M)$ al tuturor funcţiilor continue pe un spaţiu metric M, cu valori complexe.

O restricţie folositoare a exemplului i va fi considerat în 12.23 b.

12.14.a. Vectorii $x_1, \ldots, x_n$ ai unui spaţiu vectorial $\mathfrak{X}$ vor fi numiţi *liniar dependenţi* dacă există în corpul K constantele $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, care nu sînt toate nule şi pentru care

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0. \tag{1}$$

Dar dacă egalitatea (1) implică $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, atunci vectorii $x_1, \ldots, x_n$ se numesc *liniar independenţi*.

b. Un spaţiu vectorial $\mathfrak{X}$ se numeşte *n-dimensional* (sau *de dimensiune n*) dacă există n vectori liniar independenţi, dar orice $n+1$ vectori sînt liniar dependenţi. Dacă, într-un spaţiu $\mathfrak{X}$, pentru orice $n = 1,2, \ldots$ există n vectori liniar independenţi, atunci spaţiul $\mathfrak{X}$ se numeşte *de dimensiune infinită*.

c. Se numeşte *bază* a unui spaţiu n-dimensional $\mathfrak{X}$, orice mulţime de vectori ai săi liniar independenţi. Dacă $f_1, \ldots, f_n$ este o bază şi x un vector oarecare al spaţiului $\mathfrak{X}$, atunci cei $n+1$ vectori $x, f_1, \ldots, f_n$ sînt liniar dependenţi şi există deci numerele $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ale lui K, nu toate nule, astfel încît

$$\alpha_0 x + \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n = 0.$$

În plus, $\alpha_0 \neq 0$, altfel vectorii $f_1, \ldots, f_n$ ar fi liniar independenţi. Împărţind prin α_0 şi punînd $\beta_j = -\alpha_j/\alpha_0$ $(j = 1, \ldots, n)$, se obţine o descompunere a vectorului x după baza $f_1, \ldots, f_n$:

$$x = \beta_1 f_1 + \ldots + \beta_n f_n.$$

O astfel de descompunere *este unică*. (altfel vectorii $f_1, \ldots, f_n$ sînt liniar dependenţi).

d. Spaţiul real n-dimensional (2.61) este un spaţiu vectorial n-dimensional în sensul definiţiei date. Anume vectorii

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1),$$

sînt evident liniar independenţi. Dar orice $n+1$ vectori

$$y_1 = (x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}),$$

$$y_{n+1} = (x_1^{(n+1)}, \ldots, x_n^{(n+1)})$$

sînt liniar dependenţi, după cum am văzut în 2.64.

În acelaşi mod, spaţiul K_n(12.13 f) este de dimensiune n în sensul definiţiei amintite.

e) Fie Ω o mulţime infinită pe dreapta numerică $-\infty < x < \infty$. Notăm prin $P(\Omega)$ spaţiul vectorial al tuturor polinoamelor $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ (de orice grad) definite pe Ω, cu coeficienţi într-un corp oarecare K şi cu operaţiile obişnuite; spaţiul $P(\Omega)$ este un spaţiu vectorial peste corpul K. Să arătăm că pentru orice n funcţiile $1, x, \ldots, x^n$ sînt liniar independente. Presupunem că pe Ω este satisfăcută egalitatea

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n = 0.$$

Înlocuind succesiv pe x cu valorile (diferite) $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (din Ω) se obţine sistemul de ecuaţii în raport cu $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 x_0 + \ldots + \alpha_n x_0^n &= 0, \\ \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_1^n &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \alpha_0 + \alpha_1 x_n + \ldots + \alpha_n x_n^n &= 0 \end{aligned}\right\}$$

al cărui determinant nu este nul (determinantul lui Vendermonde); de unde $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, ceea ce trebuia demonstrat.

Conform definiţiei date în punctul b, spaţiul $P(\Omega)$ este de *dimensiune infinită*.

f. Să arătăm că *spațiul* $\mathbb{R}^s(M)$ ($\mathbb{C}^s(M)$) *al tuturor funcțiilor reale (complexe) continue pe un spațiu infinit* M *este de dimensiune infinită.*

Pentru orice $n = 1,2, \ldots$ indicăm n funcții liniar independente în spațiul $\mathbb{R}^s(M)$. Fie $t_1, \ldots, t_n$ puncte diferite ale spațiului M și $d = \min \rho(t_j, t_k)$. Considerăm o funcție continuă $y = \varphi(x)$ de argument real care este 1 pentru $x = 0$ și 0 pentru $|x| \geqslant d$. Funcția $\rho(t_j, t)$ este continuă în raport cu t (5.12b), deci $x_j(t) = \varphi[\rho(t_j, t)]$ este de asemenea continuă în raport cu t (5.15). Prin construcție, funcția $x_j(t)$ este 1 pentru $t = t_j$ și 0 pentru $t = t_k$, $k \neq j$. Presupunem că există relația

$$\alpha_1 x_1(t) + \ldots + \alpha_n x_n(t) = 0 \text{ pe } M.$$

Punînd acolo $t = t_j$ se obține $\alpha_j = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$, de unde independența liniară a funcțiilor $x_j(t)$.

g. O submulțime $E \subset \mathfrak{X}$ se numește *subspațiu* al unui spațiu $\mathfrak{X}$ dacă $x \in E$, $y \in E$ implică $x + y \in E$, $\alpha x \in E$ pentru orice număr $\alpha \in K$.

În orice spațiu vectorial $\mathfrak{X}$ există două subspații *improprii* : primul este format dintr-un singur element 0 și numit *subspațiul nul*, al doilea identic cu tot spațiul $\mathfrak{X}$. Toate celelalte subspații ale lui $\mathfrak{X}$ sînt numite *subspații proprii*.

h. *Sume directe.* Se spune că un spațiu $\mathfrak{X}$ este *suma directă* a subspațiilor $L_1, \ldots, L_n$, dacă, pentru orice $x \in \mathfrak{X}$, există o descompunere

$$x = x_1 + \ldots + x_n, \quad x_1 \in L_1, \ldots, x_n \in L_n,$$

și această descompunere este unică, adică din ipoteza

$$x = x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_n,$$

$$x_j \in L_j, \ y_j \in L_j, \ 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{2}$$

rezultă $x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$.

Condiția (2) de unicitate a descompunerii oricărui element x poate fi înlocuită cu condiția mai simplă de unici-

tate a descompunerii lui zero : dacă există o descompunere

$$0 = x_1 + \ldots + x_n, \quad x_1 \in L_1, \ldots, x_n \in L_n, \tag{3}$$

atunci $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Astfel, spațiul $\mathbb{R}_n$ este suma directă a n subspații 1-dimensionale generate de n vectori liniar independenți oarecare. De altfel, spațiul $\mathbb{R}_n$ se poate pune sub forma sumei directe de subspații, nu 1-dimensionale, și aceasta în diverse moduri. În general, pentru orice subspațiu $L \subset \mathbb{R}_n$, există un alt subspațiu $M \subset \mathbb{R}_n$ astfel încît suma directă a lui M cu L să fie egală cu tot spațiul $\mathbb{R}_n$.

Dacă un subspațiu vectorial $\mathcal{R}$ se reprezintă sub formă de sumă directă de subspații $L_1, \ldots, L_m$, atunci orice pereche a acestora din urmă nu are decît un singur vector comun, anume vectorul nul [40 ; 2.45].

1. *Spațiu cît.* Două elemente $x \in \mathcal{R}$, $y \in \mathcal{R}$ se numesc *echivalente în raport cu subspațiul* $L \subset \mathcal{R}$, dacă $x - y \in L$. Relația de echivalență este notată prin $x \overset{L}{\sim} y$ sau, prescurtat, $x \sim y$.

Mulțimea X a tuturor elementelor y echivalente cu un element dat x este numită *clasă de echivalență după subspațiul* L sau, pe scurt, *clasă*. Clasa X conține elementul x însuși ; orice două elemente oarecare ale unei aceleiași clase sînt echivalente ; în sfîrșit, dacă $z \notin X$, atunci z nu este echivalent cu nici un element $y \in X$. În consecință, două clase sau nu au nici un element comun sau coincid.

Întreg spațiul $\mathcal{R}$ se reprezintă ca reuniunea claselor două cîte două disjuncte $X, Y, \ldots$. Mulțimea acestor clase este notată prin $\mathcal{R}/L$. În mulțimea $\mathcal{R}/L$ se definesc operații liniare în modul următor. Fie X și Y clase, α și β numere ; vrem să definim clasa $Z = \alpha X + \beta Y$. Pentru a face aceasta, alegem în mod arbitrar elementele $x \in X$ și $y \in Y$; clasa Z care conține elementul $z = \alpha x + \beta y$ se notează prin $\alpha X + \beta Y$. Se demonstrează că ea este definită într-un mod unic și că operațiile astfel introduse satisfac axiomele 12.11. Elementul 0 al spațiului $\mathcal{R}/L$ este clasa care conține elementul 0 al spațiului $\mathcal{R}$ și coincide cu subspațiul L. Opusul clasei X este clasa formată din elementele opuse celei din clasa X. Demonstrațiile tuturor acestor propoziții sînt date în [41 ; 2.48].

Spaţiul $\mathfrak{X}/L$ astfel construit este numit *spaţiul cît al spaţiului* $\mathfrak{X}$ *prin subspaţiul* L.

j. *Morfisme de spaţii vectoriale.* Fie $\mathfrak{X}$ şi $\mathfrak{Y}$ două spaţii vectoriale peste acelaşi corp K. O aplicaţie $y = \omega(x)$ a spaţiului $\mathfrak{X}$ în spaţiul Y este numit *morfism* (*homomorfism* sau *operator liniar*) al spaţiului $\mathfrak{X}$ în spaţiul $\mathfrak{Y}$, dacă pentru două elemente oarecare x_1, x_2 ale spaţiului X şi pentru două numere oarecare α_1, α_2 din K este verificată egalitatea

$$\omega(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 \omega(x_1) + \alpha_2 \omega(x_2).$$

Dacă un morfism ω este o aplicaţie a spaţiului $\mathfrak{X}$ pe tot spaţiul $\mathfrak{Y}$, el se numeşte *epimorfism*. Dacă un morfism ω este o aplicaţie injectivă, adică $x_1 \neq x_2$ implică $\omega(x_1) \neq \omega(x_2)$, atunci el se numeşte *monomorfism*. Un morfism ω, care este în acelaşi timp epimorfism şi monomorfism (adică o aplicaţie injectivă a spaţiului $\mathfrak{X}$ pe tot spaţiul $\mathfrak{Y}$ care conservă operaţiile liniare), se numeşte *izomorfism* (în conformitate cu definiţia generală a izomorfismului de structuri 2.52). Un morfism este adesea notat astfel:

$$\omega : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}.$$

Dacă $\mathfrak{X}$ este un subspaţiu al unui spaţiu $\mathfrak{Y}$, atunci aplicaţia ω, care face să corespundă fiecărui element $x \in \mathfrak{X}$ acelaşi element privit ca element în $\mathfrak{Y}$, este un monomorfism $\omega : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, numit *morfismul de incluziune* şi aplicaţia ω', care asociază fiecărui element $x \in \mathfrak{Y}$ clasa $U \in \mathfrak{Y}/\mathfrak{X}$ ce conţine acest element x, este un epimorfism $\omega' : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Y}/\mathfrak{X}$.

TEOREMĂ. *Orice spaţiu abstract* n*-dimensional* $\mathfrak{X}_n$ *peste un corp* K *este izomorf cu spaţiul* n*-dimensional* K_n.

Demonstraţie. Fie $f_1, \ldots, f_n$ un sistem de n vectori liniar independenţi ai spaţiului $\mathfrak{X}_n$. Pentru orice $x \in \mathfrak{X}_n$, există şi este unică o reprezentare $x = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n$ (vezi punctul c). Facem să corespundă vectorului x, vectorul $y = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K_n$. Obţinem o aplicaţie bijectivă $\omega : \mathfrak{X}_n \to K_n$, care, după cum este uşor de verificat, conservă operaţiile liniare, adică este un izomorfism.

Exemplu. $\mathbb{R}_n/\mathbb{R}_m$ $(n > m)$ este izomorf cu $\mathbb{R}_{n-m}$.

k. *Produse carteziene.* Dacă $\mathfrak{X}$ şi $\mathfrak{Y}$ sînt două spaţii vectoriale, se poate forma produsul lor cartezian $P(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$

(2.82) format din toate perechile ordonate posibile (x, y), $x \in \mathfrak{X}$, $y \in \mathfrak{Y}$. În produsul cartezian, se introduc operațiile liniare „pe coordonate" :

$$\alpha_1(x_1, y_1) + \alpha_2(x_2, y_2) = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2).$$

Se verifică ușor că axiomele 12.11 sînt îndeplinite. Este evident că spațiul $P(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ conține două subspații

$$\mathfrak{X}^* = \{(x, y) \mid y = 0\}, \quad \mathfrak{Y}^* = \{(x, y) \mid x = 0\},$$

care sînt izomorfe (vezi punctul *j*) respectiv cu spațiile $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$. În plus, pentru orice element $(x, y) \in P(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, avem

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y).$$

Ultima descompunere a elementului (x, y) în doi termeni aparținînd respectiv lui $\mathfrak{X}^*$ și $\mathfrak{Y}^*$ este unică în virtutea definiției adunării în $P(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ și a egalității elementelor lui $P(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$. Astfel, produsul cartezian a două spații $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ este *suma directă* a subspațiilor sale $\mathfrak{X}^*$ și $\mathfrak{Y}^*$ izomorfe respectiv cu $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$.

12.15. *Operatori liniari.*

a. În analiză morfismele de spații vectoriale sînt adesea numite *operatori liniari*. Astfel, *un operator liniar al unui spațiu vectorial $\mathfrak{X}$ în spațiul vectorial $\mathfrak{Y}$ este o aplicație* $A : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ verificînd condiția

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2$$

pentru toți x_1 și x_2 din $\mathfrak{X}$ și toți α_1 și α_2 din K. Dacă $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$, se spune că operatorul liniar A este un *operator în* $\mathfrak{X}$.

b. Operatorul care face să corespundă oricărui vector $x \in \mathfrak{X}$ vectorul nul al spațiului $\mathfrak{Y}$ este, evident, un operator liniar al lui $\mathfrak{X}$ în $\mathfrak{Y}$; el se numește *operatorul nul*.

c. Operatorul care asociază oricărui vector $x \in \mathfrak{X}$ același vector x este un operator liniar în $\mathfrak{X}$; acest operator este numit *operatorul unitate* și este notat cu E.

d. Dacă spațiul $\mathfrak{Y}$ este unidimensional, orice operator A este numit *funcțională liniară*. Acest termen este folo-

sit mai ales în cazul cînd $\mathfrak{X}$ este un spațiu de dimensiune infinită; în cazul finit-dimensional, se va spune mai ales „funcție liniară".

e. Dacă se consideră doi operatori liniari A_1 și A_2 ai unui spațiu $\mathfrak{X}$ într-un spațiu $\mathfrak{Y}$, se pot defini *suma* lor $A_1 + A_2$ și *produsul* operatorului A_1 printr-un număr α după regulile:

$$(A_1 + A_2)x = A_1x + A_2x;$$

$$(\alpha A_1)x = \alpha(A_1x);$$

în cele două cazuri se obțin totdeauna operatori liniari ai lui $\mathfrak{X}$ în $\mathfrak{Y}$.

f. Este ușor de verificat că operațiile de adunare și de înmulțire a operatorilor cu numere verifică axiomele 12.11, care sînt satisfăcute de operațiile dintr-un spațiu vectorial. Astfel, *mulțimea* $L(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ *a tuturor operatorilor liniari ai unui spațiu vectorial* $\mathfrak{X}$ *într-un spațiu vectorial* $\mathfrak{Y}$ *formează ea însăși un spațiu vectorial.* Spațiul $L(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ are ca zero operatorul nul (vezi punctul b).

g. *Înmulțirea (compunerea) operatorilor.* Dacă B este un operator liniar al unui spațiu $\mathfrak{X}$ într-un spațiu $\mathfrak{Y}$ și A un operator liniar al spațiului $\mathfrak{Y}$ într-un spațiu $\mathfrak{Z}$ (toate spațiile fiind definite peste același corp K), atunci operatorul $P = A \cdot B$ sau, mai scurt, AB este definit ca operator al lui $\mathfrak{X}$ în $\mathfrak{Z}$, după formula

$$Px = (AB)x = A(Bx)$$

(adică, la început operatorul B acționează asupra vectorului $x \in \mathfrak{X}$, apoi operatorul A acționează asupra rezultatului Bx care aparține spațiului $\mathfrak{Y}$). Operatorul obținut $P = AB$ este un operator liniar al lui $\mathfrak{X}$ în $\mathfrak{Z}$. Au loc următoarele egalități:

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B);$$

$$A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2;$$

$$(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B;$$

$$A(BC) = (AB)C;$$

care exprimă legile de asociativitate și distributivitate pentru înmulțirea operatorilor. În aceste egalități $\alpha \in K$ este un număr arbitrar; A, A_1, A_2 sînt operatori ai spațiului $\mathfrak{Y}$ în spațiul $\mathfrak{Z}$; B, B_1, B_2 operatori ai spațiului $\mathfrak{X}$ în spațiul $\mathfrak{Y}$; C este un operator al unui spațiu $\mathfrak{W}$ în spațiul $\mathfrak{X}$; cei doi membri ai primelor trei egalități sînt operatori ai lui $\mathfrak{X}$ în $\mathfrak{Z}$, cei din ultima egalitate, operatori ai lui $\mathfrak{W}$ în $\mathfrak{Z}$. Dacă $E_{\mathfrak{X}}$ (resp. $E_{\mathfrak{Y}}$) este operatorul unitate în spațiul $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{Y}$), atunci, pentru orice operator B al lui $\mathfrak{X}$ în $\mathfrak{Y}$, au loc egalitățile

$$E_{\mathfrak{Y}}B = BE_{\mathfrak{X}} = B.$$

Operatorii în $\mathfrak{X}$ pot fi înmulțiți unul cu altul în orice ordine; în ambele cazuri posibile rezultatul este un operator în $\mathfrak{X}$. Dar această înmulțire nu este în general comutativă, deoarece, pentru anumite perechi A, B de operatori, avem $AB \neq BA$. În cazul unui operator A în $\mathfrak{X}$ se pot defini totdeauna puterile cu exponenți naturali:

$$A^0 = E_{\mathfrak{X}},\ A^1 = A,\ A^2 = A \cdot A, \ldots, A^{k+1} = A^k \cdot A, \ldots$$

h. Pentru fiecare polinom $p(\lambda)$ cu coeficienți în corpul K

$$p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k \tag{1}$$

și pentru orice operator A în spațiul $\mathfrak{X}$ se poate considera „polinomul de operatorul A",

$$p(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k, \tag{2}$$

care este de asemenea un operator liniar în spațiul $\mathfrak{X}$; suma și produsul a două polinoame de forma (2) corespund sumei și produsului polinoamelor corespunzătoare formei (1).

i. Fie A un operator al unui spațiu $\mathfrak{Y}$ în spațiul $\mathfrak{X}$ și B un operator al lui $\mathfrak{X}$ în $\mathfrak{Y}$. Atunci, dacă $AB = E_{\mathfrak{X}}$, operatorul A se numește *un invers la stînga* al operatorului B și operatorul B *un invers la dreapta* al operatorului A. Dacă operatorul B acționează în $\mathfrak{X}$, el poate avea printre operatorii în $\mathfrak{X}$ un invers la stînga și unul la dreapta. Dacă un

astfel de operator are un invers la stînga A și un invers la dreapta C, atunci acești inverși coincid:

$$A = AE_{\mathfrak{X}} = A(BC) = (AB)C = E_{\mathfrak{X}}C = C.$$

De aici rezultă că operatorul B are cel mult un invers la stînga și la dreapta, numit operatorul invers al lui B și notat B^{-1}.

În spațiile de dimensiune infinită există operatori ce admit inverși la stînga (chiar o mulțime infinită de inverși la stînga diferiți) și nu admit nici un invers la dreapta, sau invers.

j. Fie un operator A într-un spațiu $\mathfrak{X}$. Un subspațiu $\mathfrak{X}' \subset \mathfrak{X}$ se numește *invariant relativ la operatorul* A dacă $x \in \mathfrak{X}'$ implică $Ax \in \mathfrak{X}'$.

k. Un vector $f \in \mathfrak{X}$ nenul este numit *vectorul propriu al unui operator* A în spațiul $\mathfrak{X}$, dacă există $\lambda \in K$ astfel încît

$$Af = \lambda f \quad (\lambda \in K);$$

numărul λ este numit *valoare proprie* a operatorului A asociată vectorului propriu f. Este evident că un vector propriu f generează subspațiul invariant unidimensional format din toți vectorii αf, $\alpha \in K$.

Orice combinație liniară de vectori proprii ai operatorului A asociați unei aceleiași valori proprii λ este, evident, și el vector propriu al operatorului A pentru aceeași valoare proprie λ. De aici rezultă că mulțimea tuturor vectorilor proprii ai operatorului A pentru o valoare proprie dată λ este un subspațiu în spațiul $\mathfrak{X}$; el este numit *subspațiul propriu al operatorului* A *asociat valorii proprii* λ (S-a adăugat și vectorul nul).

l. *Vectorii proprii* $f_1, \ldots, f_n$ *ai operatorului* A *asociați respectiv valorilor proprii diferite* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *sînt liniar independenți.* Într-adevăr, dacă vom considera o relație de forma $\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n = 0$, cu $\alpha_i \in K$ și aplicăm operatorul A, apoi eliminăm unul din vectori, se poate trece la o relație liniară a unui număr mai mic de vectori proprii, ceea ce permite aplicarea raționamentului prin inducție.

12.16. *Exemple de operatori liniari în spații concrete.*

a. Fie $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|$ o matrice $m \times n$ (adică o matrice cu m linii și n coloane) formate din elemente ale unui corp K. Alegem o bază $e_1, \ldots, e_n$ într-un spațiu n-dimensional $\mathcal{X}_n$ și o bază $f_1, \ldots, f_m$ într-un spațiu m-dimensional $\mathcal{X}_m$. Oricărui vector $x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \in \mathcal{X}_n$ îi facem să corespundă un vector $y = \sum_{j=1}^{m} \eta_j f_j \in \mathcal{X}_m$ după legea

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \xi_k, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Se obține astfel un operator liniar al spațiului $\mathcal{X}_n$ în spațiul $\mathcal{X}_m$.

b. În cazul continuu, operatorul

$$y(s) = \mathrm{A}x(s) = \int_a^t \mathrm{A}(s, t)\, x(t)\, \mathrm{d}t \tag{1}$$

este analog celui din exemplul a. Aici $x(t)$ este un element al spațiului $\mathbb{R}^s(a, b)$; $\mathrm{A}(s, t)$ — o funcție reală de două variabile, definită pentru valorile $a \leqslant t \leqslant b$, $c \leqslant s \leqslant d$; $y(s)$ este o funcție definită pe segmentul $c \leqslant s \leqslant d$. Se verifică ușor că funcția $y(s)$ este continuă pe $[c, d]$ de îndată ce funcția $\mathrm{A}(s, t)$ este continuă pe dreptunghiul $a \leqslant t \leqslant b$, $c \leqslant s \leqslant d$. În acest caz, operatorul A este un operator liniar al spațiului $\mathbb{R}^s(a, b)$ în spațiul $\mathbb{R}^s(c, d)$.

Operatorul A definit prin (1) este numit *operator integral Fredholm*. Operatorii Fredholm sînt analizați mai detailat în 12.88.

c. Un caz special al operatorului din punctul b este reprezentat prin operatorul de integrare

$$\mathrm{I}x(t) = \int_a^t x(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

în spațiul $\mathbb{R}^s(a, b)$.

d. Expresia

$$F(x) = \int_a^b f(\tau)\, x(\tau)\, \mathrm{d}\tau,$$

cu funcția f (continuă) fixată, este un exemplu de funcțională liniară definită în spațiul $\mathbb{R}^2(a, b)$.

12.17. *Operatori liniari în spații de dimensiune finită.*

a. Dăm forma generală a unui operator liniar A al unui spațiu n-dimensional $\mathcal{X}_n$ într-un spațiu m-dimensional $\mathcal{X}_m$. Fie $e_1, \ldots, e_n$ o bază în spațiul $\mathcal{X}_n$ și $f_1, \ldots, f_m$ o bază în spațiul $\mathcal{X}_m$. Aplicînd operatorul A vectorilor $e_1, \ldots, e_n$ rezultă relațiile

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{A}e_1 &= a_{11}f_1 + \ldots + a_{m1}f_m, \\ \mathrm{A}e_2 &= a_{12}f_1 + \ldots + a_{m2}f_m \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{A}e_n &= a_{1n}f_1 + \ldots + a_{mn}f_m, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

a_{ij} fiind elemente din corpul K.

Astfel, bazele $\{e\}$ și $\{f\}$ în spațiile $\mathcal{X}_n$ și $\mathcal{X}_m$ fiind fixate, operatorului A îi corespunde matricea $m \times n$,

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Aici coloana j este formată din coordonatele vectorului $\mathrm{A}e_j$ în baza $f_1, \ldots, f_m$.

Fie acum $x = \sum_1^n \xi_k e_k$ un vector oarecare din $\mathcal{X}_n$ și fie

$$\mathrm{A}x = \sum_1^m \eta_j f_j \in \mathcal{X}_m.$$

Avem

$$\sum_1^m \eta_j f_j = Ax = \sum_1^n \xi_k A e_k = \sum_{k=1}^n \xi_k \sum_{j=1}^m a_{jk} f_j =$$

$$= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n a_{jk} \xi_k \right) f_j,$$

de unde

$$\eta_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} \xi_k \quad (j = 1, \ldots, m). \tag{2}$$

În acest mod, în exemplul 12.16a a fost indicată de fapt forma generală a unui operator al spațiului $\mathcal{R}_n$ în $\mathcal{R}_m$.

Dacă operatorul liniar A acționează de la $\mathcal{R}_n$ în $\mathcal{R}_n$ (pe scurt, în $\mathcal{R}_n$), atunci $m = n$ și matricea **A** este pătratică.

Dacă operatorul liniar A aplică $\mathcal{R}_n$ în $\mathcal{R}_1$ (spațiu unidimensional), atunci $m = 1$ și matricea **A** este de forma

$$\mathbf{A} = \|a_1 \; a_2 \ldots a_n\|.$$

În acest caz operatorul A acționează după formula

$$Ax = \sum_{k=1}^n a_k \xi_k$$

(unicul vector al unei baze a spațiului $\mathcal{R}_1$ nefiind explicitat) și reprezintă o funcție liniară.

b. Operațiilor cu operatori liniari definiți în 12.15 e-f le corespund operații analoage asupra matricilor. Fie $e_1, \ldots, e_n$ o bază în spațiul $\mathcal{X}$ și $f_1, \ldots, f_m$ o bază în spațiul $\mathcal{Y}$. Operatorilor A_1 și A_2 care aplică $\mathcal{X}$ în $\mathcal{Y}$ le corespund, în aceste baze, matricile $\mathbf{A}_1 = \|a_{ij}^{(1)}\|$ și $\mathbf{A}_2 = \|a_{ij}^{(2)}\|$ astfel încît

$$A_1 e_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}^{(1)} f_i, \qquad A_2 e_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}^{(2)} f_i \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Atunci, pentru orice α_1, α_2 din K, avem

$$(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) e_j = \sum_{i=1}^m (\alpha_1 a_{ij}^{(1)} + \alpha_2 a_{ij}^{(2)}) f_i,$$

adică matricea $\| \alpha_1 a_{ij}^{(1)} + \alpha_2 a_{ij}^{(2)} \|$ corespunde operatorului $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$. Astfel, matricile asociate sumei operatorilor și produsului unui operator cu un număr, se obțin adunînd „element cu element" matricile operatorilor și înmulțind matricea operatorului cu acest număr.

c. De aici rezultă, în particular, că spațiul vectorial $L(\mathfrak{R}_n, \mathfrak{R}_m)$ al tuturor operatorilor liniari ai unui spațiu n-dimensional $\mathfrak{R}_n$ într-un spațiu m-dimensional $\mathfrak{R}_m$ este izomorf cu spațiul nm-dimensional $\mathfrak{R}_{mn}$.

d. Construim matricea asociată produsului a doi operatori. Alegem o bază $e_1, \ldots, e_n$ în spațiul $\mathfrak{X}$, o bază $f_1, \ldots, f_m$ în spațiul $\mathfrak{Y}$ și o bază $g_1, \ldots, g_q$ în spațiul $\mathfrak{Z}$. Presupunem că un operator B al lui $\mathfrak{X}$ în $\mathfrak{Y}$ are matricea $m \times n$, $\mathbf{B} = \| b_{jk} \|$, adică

$$Be_k = \sum_{j=1}^{m} b_{jk} f_j \quad (k = 1, \ldots, n),$$

și că un operator A al lui $\mathfrak{Y}$ în $\mathfrak{Z}$ are matricea $q \times m$, $\mathbf{A} = \| a_{ij} \|$, adică

$$Af_j = \sum_{i=1}^{q} a_{ij} g_i \quad (j = 1, \ldots, m).$$

Pentru produsul $P = AB$ se obține

$$ABe_k = A(Be_k) = A\left(\sum_{j=1}^{m} b_{jk} f_j \right) = \sum_{j=1}^{m} b_{jk} Af_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{q} b_{jk} a_{ij} g_i = \sum_{i=1}^{q} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk} \right) g_i.$$

În consecință, elementele p_{ik} ale matricii $\mathbf{P}$ a operatorului $P = AB$ sînt de forma

$$p_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk} \quad (i = 1, \ldots, q;\ k = 1, \ldots, n). \qquad (3)$$

Matricea $\mathbf{P} = \| p_{ik} \|$, obținută plecînd de la matricile $\mathbf{A} = \| a_{ij} \|$ și $\mathbf{B} = \| b_{jk} \|$ după formula (3), este numită *produsul* primei matrici cu a doua.

Putem deci înmulți o $q \times m$ matrice cu o $m \times n$ matrice și vom avea ca rezultat o $q \times n$ matrice.

Dacă $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = \mathfrak{Z}$, atunci **A** și **B** sînt $n \times n$ matrici pătratice și produsul **AB** este de asemenea $n \times n$ matrice.

e. Fie un operator A care acționează într-un spațiu n-dimensional $\mathfrak{R}_n$. Dacă se cunoaște matricea $\|a_{jk}\|$ a operatorului A în raport cu o bază $\{e\} = (e_1, \ldots, e_n)$ se pot găsi valorile proprii ale operatorului A (12.15k) sub forma rădăcinilor caracteristice, adică soluțiile ecuației

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Dacă λ_0 este o soluție a ecuației (4), atunci se pot găsi coordonatele unui vector propriu asociat $f = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$ care sînt soluțiile următorului sistem de ecuații liniare omogene:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_0)\,\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1n}\xi_n = 0, \\ a_{21}\xi_1 + (a_{22} - \lambda_0)\xi_2 + \ldots + a_{2n}\xi_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda_0)\xi_n = 0. \end{cases} \tag{5}$$

f. Vom arăta structura unui operator liniar oarecare într-un spațiu complex sau real K_n (vezi [40], cap. 6).

Pentru orice operator liniar A într-un spațiu complex $\mathbb{C}_n$, acest spațiu admite o descompunere în sumă directă de subspații invariante, în fiecare dintre ele matricea operatorului A, pentru o bază aleasă convenabil, avînd forma

$$\begin{Vmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{Vmatrix} \tag{6}$$

(„celulă jordan"). Baza spațiului $\mathbb{C}_n$ obținută reunind bazele subspațiilor invariante menționate este numită *bază jordaniană* a operatorului A și matricea operatorului A în raport cu această bază (o matrice cvasidiagonală cu celule diagonale de forma (6)) se numește *matricea jordaniană* a operatorului A. Numerele λ și dimensiunile celulelor jordaniene (6) sînt invarianți ai operatorului A (adică nu depind de alegerea bazei jordaniene); numerele λ sînt soluțiile ecuației (4) și dimensiunile celulelor jordaniene pot fi găsite cu ajutorul divizorilor elementari ai operatorului A.

Orice operator liniar A într-un spațiu real $\mathbb{R}_n$ admite o descompunere în sumă directă de subspații invariante, în fiecare din ele matricea operatorului A pentru o bază convenabil aleasă avînd fie forma (6), fie forma

$$\begin{Vmatrix} \sigma & \tau & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\tau & \sigma & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & \tau & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau & \sigma & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma & \tau \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\tau & \sigma \end{Vmatrix} \quad (7)$$

(„celulă jordan reală"). Baza spațiului $\mathbb{R}_n$ obținută reunind bazele subspațiilor invariante menționate este numită *bază jordaniană reală* a operatorului A, iar matricea operatorului A în raport cu această bază (o matrice cvasidiagonală cu celule diagonale de forma (6) și (7)) se numește *matricea jordaniană reală* a operatorului A. Numerele λ, σ, τ sînt luate astfel încît dimensiunile celulelor jordaniene (6) și (7) nu depind de alegerea bazei jordaniene reale; numerele λ și $\sigma + i\tau$ sînt soluțiile ecuației (4), iar dimensiunile celulelor jordaniene (6) și (7) se determină cu ajutorul divizorilor elementari reali ai operatorului A.

În particular, dacă toate soluțiile ecuației (4) sînt simple, matricea jordaniană a operatorului A într-un spațiu complex $\mathbb{C}_n$ ia forma (elementele neexplicitate

fiind nule) :

$$\left\| \begin{matrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{matrix} \right\|. \tag{8}$$

În cazul unui spațiu real ecuația (4) admite odată cu orice rădăcină a sa $\lambda = \sigma + i\tau$ nereală, de asemenea rădăcina conjugată $\bar{\lambda} = \sigma - i\tau$. Dacă toate rădăcinile sînt simple și dacă notăm rădăcinile nereale ale lui (4) prin $\sigma_1 \pm i\tau_1, \ldots, \sigma_k \pm i\tau_k$ și rădăcinile reale prin $\lambda_{2k+1}, \ldots, \lambda_n$, atunci matricea jordan reală a operatorului A ia forma

$$\left\| \begin{matrix} \sigma_1 & \tau_1 & & & & \\ -\tau_1 & \sigma_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \sigma_k & \tau_k & \\ & & & -\tau_k & \sigma_k & \\ & & & & & \lambda_{2k+1} \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & \lambda_n \end{matrix} \right\|. \tag{9}$$

Într-un spațiu complex matricea Jordan a oricărui operator ce are o matrice hermitică ($\bar{a}_{jk} = a_{kj}$; $j, k = 1, \ldots, n$) în raport cu o bază are și ea formă diagonală; în acest caz, numerele corespunzătoare λ_j sînt reale. Orice operator avînd matricea, într-o anumită bază, simetrică ($a_{jk} = a_{kj}$; $j, k = 1, \ldots, n$), are o formă Jordan reală diagonală. Dacă într-o bază a unui spațiu real matricea unui operator A este antisimetrică ($a_{jk} = -a_{kj}$; $j, k = 1, \ldots, n$), atunci matricea Jordan reală a operatorului A ia forma (9), toate numerele $\sigma_1, \ldots, \sigma_k, \lambda_{2k+1}, \ldots, \lambda_n$ fiind nule.

12.18. *Algebre.*

a. Un spațiu vectorial $\mathfrak{U}$ peste un corp K este numit *algebră* (mai precis, *algebră peste* K), dacă pentru elementele $x, y, \ldots$ ale lui $\mathfrak{U}$ este definită o operație de înmulțire, notată prin $x \cdot y$ (sau xy), astfel încît să fie satisfăcute

următoarele condiții :

(1) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$ pentru orice x și y din $\mathfrak{U}$ și orice $\alpha \in K$;

(2) $(xy)z = x(yz)$ oricare ar fi x, y, z din $\mathfrak{U}$;

(3) $(x + y)z = xz + yz$ oricare ar fi x, y, z din $\mathfrak{U}$;

(4) $x(y + z) = xy + xz$ oricare ar fi x, y, z din $\mathfrak{U}$.

Condițiile (1) și (2) sînt numite legi de asociativitate, condițiile (3) și (4), legi de distributivitate.

b. În general, înmulțirea nu este comutativă, adică egalitatea $xy = yx$ poate fi falsă pentru anumite perechi x, y din $\mathfrak{U}$. Dacă egalitatea $xy = yx$ este adevărată oricare ar fi x și y din $\mathfrak{U}$, algebra $\mathfrak{U}$ este numită *comutativă*.

c. Un element $e \in \mathfrak{U}$ se numește *unitatea* algebrei $\mathfrak{U}$, dacă pentru orice $x \in \mathfrak{U}$ au loc egalitățile $ex = xe = x$. Un element $y \in \mathfrak{U}$ este numit *invers* al elementului x dacă sînt verificate egalitățile $xy = yx = e$.

d. Un subspațiu $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{U}$ este numit *subalgebră a algebrei* $\mathfrak{U}$, dacă $x \in \mathfrak{V}$, $y \in \mathfrak{V}$ implică $xy \in \mathfrak{V}$.

e. O subalgebră $J \subset \mathfrak{U}$ se numește *ideal la stînga* al algebrei $\mathfrak{U}$, dacă din $x \in \mathfrak{U}$, $y \in J$ rezultă $xy \in J$ și *ideal la dreapta*, dacă din $y \in J$, $z \in \mathfrak{V}$ rezultă $yz \in J$. Un ideal, care este simultan ideal la stînga și ideal la dreapta, este numit *ideal bilateral* sau, mai scurt, *ideal*. Într-o algebră comutativă nu există, evident, distincție între un ideal, un ideal la stînga și un ideal la dreapta.

În orice algebră $\mathfrak{U}$, există două ideale evidente: unul compus numai din elementul nul, numit *idealul nul*, și altul care este identic cu toată algebra $\mathfrak{U}$. Toate celelalte ideale sînt numite *ideale proprii*.

f. În spațiul cît $\mathfrak{U}/J$ al unei algebre $\mathfrak{U}$ prin idealul său J se pot defini pentru clasele $X, Y, \ldots$ nu numai operațiile liniare (ca în 12.14i), dar și o înmulțire. Anume, fiind date două clase X, Y și elementele $x \in X$, $y \in Y$, alese arbitrar, se definește produsul XY ca fiind clasa ce conține produsul xy. Se demonstrează că această definiție este corectă (anume, clasa XY nu depinde de alegerea elementelor $x \in X$, $y \in Y$) și că spațiul $\mathfrak{U}/J$, cu operația de înmulțire introdusă, devine și el o algebră. Această algebră se numește *algebra cît* a algebrei $\mathfrak{U}$ prin idealul său

bilateral J. Ea este comutativă de îndată ce algebra $\mathfrak{U}$ este astfel.

g. *Morfisme de algebre.* Fie $\mathfrak{U}$ și $\mathfrak{V}$ două algebre peste același corp K. O aplicație $\omega : \mathfrak{U} \to \mathfrak{V}$ se numește *morfism (homomorfism) al algebrei $\mathfrak{U}$ în algebra $\mathfrak{V}$*, dacă ea este un morfism al spațiului vectorial $\mathfrak{U}$ în spațiul vectorial $\mathfrak{V}$ (12.14j) și dacă oricare două elemente x_1, x_2 ale algebrei $\mathfrak{U}$ satisfac relația $\omega(x_1 x_2) = \omega(x_1) \cdot \omega(x_2)$.

Un morfism ω se numește *izomorfism (epimorfism, monomorfism)* al algebrei $\mathfrak{U}$ în algebra $\mathfrak{V}$ dacă el este un izomorfism (resp. epimorfism, monomorfism) al spațiului $\mathfrak{U}$ în spațiul $\mathfrak{V}$.

Astfel, aplicația $\omega : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}/J$, care fiecărui element $x \in \mathfrak{U}$ îi face să corespundă clasa $X \in \mathfrak{U}/J$ care îl conține, este un epimorfism al algebrei $\mathfrak{U}$ pe algebra $\mathfrak{U}/J$.

h. Pentru orice morfism $\omega : \mathfrak{U} \to \mathfrak{V}$, mulțimea acelor elemente $x \in \mathfrak{U}$ pentru care $\omega(x) = 0$ formează un ideal bilateral J în algebra $\mathfrak{U}$. Fiind dat ω, definim morfismul $\tilde{\omega}$ al algebrei $\mathfrak{U}/J$ în algebra $\mathfrak{V}$ asociind unei clase $X \in \mathfrak{U}/J$ elementul $\omega(x) \in \mathfrak{V}$, unde x este un element oarecare al clasei X. Acest morfism $\tilde{\omega}$ este un monomorfism. Dacă morfismul ω este un epimorfism al algebrei $\mathfrak{U}$ în algebra $\mathfrak{V}$, atunci $\tilde{\omega}$ este un izomorfism (vezi [40], § 6.2).

12.19. *Exemple de algebre și de morfisme ale lor.*

a. Mulțimea P a tuturor polinoamelor (de orice grad) în λ,

$$p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k,$$

cu coeficienți dintr-un corp K, cu operațiile de adunare și de înmulțire obișnuite pentru polinoame este, evident, o algebră.

Această algebră este comutativă și are element unitate.

b. Mulțimea $\mathfrak{U}(G)$ a tuturor funcțiilor analitice $f(\lambda)$, definite într-un domeniu G al planului complex, formează o algebră complexă, cu operațiile de adunare și înmulțire obișnuite pentru funcții (4.72). Această algebră este de asemenea comutativă și are element unitate.

În algebra $\mathfrak{U}(G)$ există un operator, care face să corespundă oricărei funcții $f(\lambda) \in \mathfrak{U}(G)$ derivata sa $f'(\lambda)$. El este evident liniar. Observăm că pentru acest operator

este valabilă formula lui Leibniz:

$$(f(\lambda)g(\lambda))^{(m)} = \sum_{j=0}^{m} \frac{m!}{j!\,(m-j)!} f^{(j)}(\lambda)\, g^{(m-j)}(\lambda). \quad (1)$$

c. Numim *spectru* o mulțime finită de numere $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ (ale unui corp K) astfel încît oricărui λ_k i se asociază un număr natural $r_k (k = 1, \ldots, m)$ numit *multiplicitatea* sa. Numim *jet* (sau *corpus*) și îl notăm prin f, orice mulțime de $r = r_1 + r_2 + \ldots + r_m$ numere ale corpului K, notate prin $f_{(j)}(\lambda_k)$ $(j = 0, \ldots, r_k - 1,\ k = 1, \ldots, m)$. În sfîrșit, notăm prin $\mathcal{F}(S)$ mulțimea tuturor jeturilor pe un spectru dat S.

Introducem în $\mathcal{F}(S)$ operațiile de adunare și de înmulțire după regulile:

$$(f + g)_{(j)}(\lambda_k) = f_{(j)}(\lambda_k) + g_{(j)}(\lambda_k),$$

$$(\alpha f)_{(j)}(\lambda_k) = \alpha f_{(j)}(\lambda_k),$$

$$(fg)_{(j)}(\lambda_k) = \sum_{i=1}^{j} \frac{j!}{i!\,(j-i)!} f_{(i)}(\lambda_k)\, g_{(j-i)}(\lambda_k)$$

$$(j = 0, \ldots, r_k - 1,\ k = 1, \ldots, m).$$

Pentru $j = 0$, ultima formulă trebuie înlocuită prin următoarea:

$$(fg)_{(0)}(\lambda_k) = f_{(0)}(\lambda_k)\, g_{(0)}(\lambda_k).$$

Mulțimea $\mathcal{F}(S)$ devine atunci o algebră de dimensiune r peste K.

d. Fie A un operator liniar al unui spațiu complex n-dimensional $\mathbb{C}_n$. Mulțimea tuturor polinoamelor $p(A)$ de operator A (12.15h), cu operațiile naturale de adunare și de înmulțire a operatorilor, reprezintă o algebră complexă pe care o vom nota prin $\mathcal{Q}(A)$. Se arată că această algebră este izomorfă cu algebra jeturilor $\mathcal{F}(S_A)$ (exemplul din punctul c), S_A fiind spectrul operatorului A, adică mulțimea tuturor valorilor proprii (distincte) $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ale operatorului A, astfel încît oricărei valori proprii λ_k i se asociază ca multiplicitate numărul natural r_k egal cu cea mai mare dimensiune a celulelor Jordan ale operatorului

A (12.17f) care au numerele λ_k pe diagonală. Acest izomorfism se obține în felul următor: oricărui jet

$$f = \{f_{(j)}(\lambda_k), j = 0, \ldots, r_k - 1,\ k = 1, \ldots, m\},$$

definit pe S_A, îi facem să corespundă operatorul $f(A)$ a cărui matrice în raport cu baza jordaniană a operatorului A are aceeași structură cvasidiagonală ca matricea operatorului A însuși, oricare celulă $p \times p$ cvasidiagonală a operatorului A

$$\left\| \begin{matrix} \lambda_k & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_k \end{matrix} \right\| (p \leqslant r_k) \qquad (2)$$

fiind înlocuită prin celula de aceeași dimensiune

$$\left\| \begin{matrix} f_{(0)}(\lambda_k) & f_{(1)}(\lambda_k) & \frac{1}{2!} f_{(2)}(\lambda_k) & \ldots & \frac{1}{(p-1)!} f_{(p-1)}(\lambda_k) \\ 0 & f_{(0)}(\lambda_k) & f_{(1)}(\lambda_k) & \ldots & \frac{1}{(p-2)!} f_{(p-2)}(\lambda_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & f_0(\lambda_k) \end{matrix} \right\| \qquad (3)$$

Mai precis, acest operator $f(A)$ are forma $p(A)$, unde polinomul $p(\lambda)$ satisface condițiile

$$p^{(j)}(\lambda_k) = f_{(j)}(\lambda_k) \quad (j = 0, \ldots, r_k - 1,\ k = 1, \ldots, m),$$

unde $p^{(j)}(\lambda)$ este derivata de ordin j a polinomului $p(\lambda)$.

Vezi demonstrația în ([40], § 6.84).

e. Fie din nou un operator liniar A într-un spațiu complex n-dimensional $\mathbb{C}_n$ și fie $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ valorile sale proprii pe care le presupunem că aparțin toate unui domeniu G al planului complex. Considerăm aplicația ω a algebrei $\mathcal{U}(G)$ a funcțiilor analitice în cea a jeturilor $\mathcal{F}(S_A)$, care face să corespundă oricărei funcții $f(\lambda) \in \mathcal{U}(G)$, jetul nu-

merelor $f_{(j)}(\lambda_k) = f^{(j)}(\lambda_k)$ $(j = 0, \ldots, r_k - 1,\ k = 1, \ldots, m)$, unde $f^{(j)}(\lambda)$ este derivata de ordinul j a lui $f(\lambda)$. Conform formulei lui Leibniz (1), aplicația ω este un morfism al algebrei $\mathcal{U}(G)$ în algebra $\mathcal{F}(S_A)$; acest morfism este chiar un epimorfism, deoarece, pentru orice jet $\{f_{(j)}(\lambda_k)\}$, se poate găsi o funcție $f(\lambda)$ din algebra $\mathcal{U}(G)$ (chiar un polinom) pentru care $f^{(j)}(\lambda_k) = f_{(j)}(\lambda_k)$ $(j = 0, \ldots, r_k - 1,\ k = 1, \ldots, m)$.

Algebra $\mathcal{F}(S_A)$ fiind izomorfă la rîndul său cu algebra $\mathfrak{L}(A)$ a operatorilor liniari (exemplul d), există un epimorfism al algebrei $\mathcal{U}(G)$ pe algebra $\mathfrak{L}(A)$; ținînd cont de exemplul d, acest epimorfism se realizează în felul următor: oricărei funcții $f(\lambda) \in \mathcal{U}(G)$ îi facem să corespundă operatorul liniar $f(A)$ a cărui matrice într-o bază jordaniană a operatorului A are aceeași structură cvasidiagonală ca și matricea operatorului A însuși, orice celulă cvasidiagonală (2) fiind înlocuită prin celule de aceeași dimensiune:

$$\begin{Vmatrix} f(\lambda_k) & f'(\lambda_k) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_k) & \ldots & \frac{1}{(p-1)!}f^{(p-1)}(\lambda_k) \\ 0 & f(\lambda_k) & f'(\lambda_k) & \ldots & \frac{1}{(p-2)!}f^{(p-2)}(\lambda_k) \\ 0 & 0 & f(\lambda_k) & \ldots & \frac{1}{(p-3)!}f^{(p-3)}(\lambda_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & f(\lambda_k) \end{Vmatrix}$$

Astfel, operatorii $e^{\lambda A}$, $\sin \lambda A$ etc. au totdeauna sens. Aplicația $\tilde{\omega}: f(\lambda) \to f(A)$ fiind morfism, egalitatea $f(\lambda) \cdot g(\lambda) = h(\lambda)$, unde $f(\lambda)$, $g(\lambda)$, $h(\lambda)$ aparțin lui $\mathcal{U}(G)$, implică $f(A) \cdot g(A) = h(A)$. De exemplu, are loc totdeauna egalitatea:

$$e^{(\alpha+\beta)A} = e^{\alpha A} \cdot e^{\beta A}.$$

f. Un spectru S cu $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ complexe (exemplul c) se numește *simetric* dacă, odată cu orice $\lambda_k = \sigma_k + i\tau_k$ nereal, S conține numărul conjugat $\bar{\lambda}_k = \sigma_k - i\tau_k$ de aceeași multiplicitate r_k. Un jet $f = \{f_{(j)}(\lambda_k)\}$ pe un spec-

tru simetric S se numește *simetric*, dacă toate numerele $f_{(j)}(\lambda_k)$ sînt conjugatele complexe ale numerelor corespunzătoare $f_{(j)}(\overline{\lambda}_k)$. Mulțimea tuturor jeturilor simetrice pe un spectru simetric S este (cu operațiile indicate în punctul c) o algebră reală, pe care o notăm cu $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(S)$.

g. Fie A un operator liniar într-un spațiu real n-dimensional $\mathbb{R}_n$. Mulțimea tuturor polinoamelor reale de operatorul A formează o algebră reală, pe care o vom nota prin $\mathcal{Q}_{\mathbb{R}}(A)$. Această algebră este izomorfă cu algebra jeturilor simetrice (f) pe spectrul operatorului A (considerat în extinderea complexă (vezi [40], §6.61) a spațiului real $\mathbb{R}_n$); acest spectru este totdeauna simetric. Izomorfismul se realizează în modul următor. Oricărui jet simetric

$$f = \{f_{(j)}(\lambda_k),\ j = 0, \ldots, r_k - 1,\ k = 1, \ldots, m\},$$

definit pe S_A, îi facem să corespundă operatorul $f(A)$ a cărui matrice în raport cu baza jordaniană reală a operatorului A are aceeași structură cvasidiagonală ca și matricea jordan reală a operatorului A, fiecare celulă cvasidiagonală a operatorului A de forma (2) (cu λ_k real) fiind înlocuită printr-o celulă de forma (3) și orice celulă cvasidiagonală de forma

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{A}_k & \mathbf{E} & 0 \ldots 0 \\ 0 & \mathbf{A}_k & \mathbf{E} \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots \mathbf{A}_k \end{Vmatrix}, \tag{4}$$

unde blocurile $\mathbf{A}_k$, $\mathbf{E}$, 0 au forma

$$\mathbf{A}_k = \begin{Vmatrix} \sigma_k & \tau_k \\ -\tau_k & \sigma_k \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

este înlocuită printr-o celulă de aceeași dimensiune

$$\begin{Vmatrix} f_{(0)}(\mathbf{A}_k) & f_{(1)}(\mathbf{A}_k) & \frac{1}{2!} f_{(2)}(\mathbf{A}_k) & \ldots & \frac{1}{(p-1)!} f_{(p-1)}(\mathbf{A}_k) \\ 0 & f_{(0)}(\mathbf{A}_k) & f_{(1)}(\mathbf{A}_k) & \ldots & \frac{1}{(p-2)!} f_{(p-2)}(\mathbf{A}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & f_{(0)}(\mathbf{A}_k) \end{Vmatrix}, \tag{5}$$

unde

$$f_{(j)}(\mathbf{A}_k) = \begin{Vmatrix} \operatorname{Re} f_{(j)}(\lambda_k) & \operatorname{Im} f_{(j)}(\lambda_k) \\ -\operatorname{Im} f_{(j)}(\lambda_k) & \operatorname{Re} f_{(j)}(\lambda_k) \end{Vmatrix}.$$

Se poate arăta că operatorul $f(\mathrm{A})$ are forma $(p(\mathrm{A})$, polinomul $p(\lambda)$ având coeficienţi reali şi verificînd condiţiile

$$p^{(j)}(\lambda_k) = f_{(j)}(\lambda_k) \quad (j = 1, \ldots, r_{k-1},\ k = 1, \ldots m).$$

Vezi demonstraţia în ([40, *f*, 6.88).

h. Fie din nou un operator liniar A într-un spaţiu real n-dimensional $\mathbb{R}_n$ şi presupunem că toate valorile proprii ale operatorului A, considerat în extinderea complexă $\mathbb{C}_n$ a spaţiului $\mathbb{R}_n$, aparţin unui domeniu G simetric în raport cu axa reală. Morfismul ω descris în exemplul din punctul e asociază fiecărei funcţii analitice reale $f(\lambda) \in \mathcal{U}(G)$ un jet simetric $f_{(j)}(\lambda_k) = f^{(j)}(\lambda_k)$ $(j=0, \ldots, r_k - 1,\ k=1, \ldots, m)$.

Algebra $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(S_A)$ a tuturor jeturilor simetrice fiind izomorfă cu algebra $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}(\mathrm{A})$ a tuturor polinoamelor reale de operatorul A, există un epimorfism al algebrei $\mathcal{U}_{\mathbb{R}}(G)$ a tuturor funcţiilor analitice reale în algebra $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}(S_A)$: ţinînd cont de exemplul g, acest epimorfism se realizează astfel: oricărei funcţii $f(\lambda) \in \mathcal{U}_{\mathbb{R}}(G)$ îi facem să corespundă operatorul liniar $f(\mathrm{A})$, a cărui matrice în baza jordaniană reală a operatorului A are aceeaşi structură cvasidiagonală ca şi matricea jordaniană reală a operatorului A, fiecare celulă cvasidiagonală de forma (2) (cu λ_k real) fiind înlocuită printr-o celulă de forma (3) şi orice celulă de forma (4) printr-o celulă de forma (5), unde

$$f_{(j)}(A_k) = \begin{Vmatrix} \operatorname{Re} f^{(j)}(\lambda_k) & \operatorname{Im} f^{(j)}(\lambda_k) \\ -\operatorname{Im} f^{(j)}(\lambda_k) & \operatorname{Re} f^{(j)}(\lambda_k) \end{Vmatrix}.$$

i. Spaţiul vectorial al tuturor operatorilor liniari, definiţi într-un spaţiu vectorial $\mathcal{X}$, formează o algebră notată $L(\mathcal{X})$ (cu operaţiile de adunare şi înmulţire obişnuite pentru operatori), care, în general, nu este comutativă.

§ 12.2. Spaţii metrice

12.21. Începînd din capitolul 3, spaţiile metrice joacă un rol important în expunerea de faţă. Reamintim axiomele spaţiului metric. O mulţime M se numeşte *spaţiu metric*

dacă pentru orice pereche x, y de puncte ale sale, este definit un număr $\rho_M(x, y)$ sau, mai scurt, $\rho(x, y)$, numit *distanța dintre* x și y și satisfăcînd următoarele condiții :

a. $\rho(x, y) > 0$, dacă $x \neq y$ și $\rho(x, x) = 0$ pentru orice $x \in M$.

b. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ pentru orice x, y din M.

c. $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ pentru orice x, y, z din M (*axioma triunghiului*).

Un șir $x_1, x_2, \ldots$ de puncte dintr-un spațiu metric M este numit *convergent* către un punct $x \in M$, dacă $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$.

12.22. În capitolele precedente s-au considerat ca exemple de spații metrice, mulțimi pe dreaptă, în plan, în spațiul obișnuit (euclidian) cu metrica uzuală. Dar trebuie subliniat că diverse mulțimi de funcții pot fi și ele transformate în spații metrice, înzestrîndu-le cu o metrică (adică cu o funcție $\rho(x, y)$) convenabilă.

Alegerea metricii pentru un spațiu de funcții depinde de cerințele problemei considerate. Dacă este dată o distanță, este clar că două elemente sînt apropiate, dacă distanța dintre ele este mică. În majoritatea cazurilor întîlnite în analiză sîntem forțați să procedăm invers : din ipotezele problemei vedem care sînt elementele pe care este natural să le considerăm apropiate, aceasta determinînd modul în care vom introduce metrica.

De exemplu, adesea este natural să considerăm ca apropiate două funcții continue $x(t)$ și $y(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ pentru care mărimea $\max_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t) - y(t)|$ este mică. Putem deci să o alegem ca distanță între funcțiile $x(t)$ și $y(t)$; axiomele a — c sînt, evident, satisfăcute și, în consecință, orice mulțime M de funcții continue pe intervalul $[a, b]$, cu distanța

$$\rho(x, y) = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t) - y(t)| \qquad (1)$$

este un spațiu metric.

În anumite cazuri (de exemplu, în calculul variațional), unde este vorba de funcții derivabile pînă la un ordin m, este natural să considerăm ca apropiate două elemente $x(t)$ și $y(t)$ pentru care sînt apropiate nu numai valorile funcți-

ilor dar și ale derivatelor pînă la ordinul m, oricare ar fi t. Aceasta conduce la distanța

$$\rho(x, y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \{|x(t) - y(t)|, \ |x'(t) - y'(t)|, \ \ldots$$

$$\ldots, |x^{(m)}(t) - y^{(m)}(t)|\}. \qquad (2)$$

Dacă se consideră o mulțime de funcții $x(t)$ de m ori continuu derivabile, atunci, înzestrînd-o cu metrica (2), se ajunge evident la un spațiu metric.

În alte cazuri (de exemplu, în teoria ecuațiilor integrale) este natural să considerăm funcțiile $x(t)$ și $y(t)$ ca apropiate între ele dacă ele sînt astfel în sens integral, adică dacă este mică mărimea

$$\int_a^b |x(t) - y(t)| \, dt.$$

În mod natural, se poate introduce o distanță prin formula

$$\rho(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| \, dt. \qquad (3)$$

Este evident că și în acest caz sînt satisfăcute axiomele unui spațiu metric.

Uneori este nevoie să definim apropierea funcțiilor nu cu ajutorul integralei din diferența acestor funcții, ci dintr-o putere, de exemplu, puterea p, a acestei diferențe; distanța corespunzătoare poate fi dată de formula:

$$\rho(x, y) = \sqrt[p]{\int_a^b |x(t) - y(t)|^p \, dt}. \qquad (4)$$

Pentru $p \geqslant 1$ această definiție verifică și ea axiomele unui spațiu metric. Pentru axioma c verificarea este totuși destul de complicată (cu excepția cazurilor simple $p = 1$ și $p = 2$); nu insistăm asupra acestor lucruri (vezi exerc. 15).

12.23. *Spațiul funcțiilor continue pe un spațiu metric.*

a. Spațiul metric al tuturor funcțiilor reale continue pe intervalul $a \leqslant t \leqslant b$, cu distanța definită de formula 12.22(1), este notat prin $\mathbb{R}^s[a, b]$ (ca în 12.13 i, unde el era spațiu vectorial).

b. Este posibil să înlocuim în această definiție intervalul $[a, b]$ printr-un alt spațiu metric oarecare? Pe un spațiu metric oarecare M funcțiile continue nu sînt în mod necesar mărginite, deci formula 12.22(1) pentru distanța într-un astfel de spațiu de funcții nu este convenabilă. Dar putem considera spațiul funcțiilor continue și mărginite și atunci formula 12.22(1) păstrează un sens, înlocuind max prin sup. Astfel, definim $\mathbb{R}^s(M)$ ca spațiul tuturor funcțiilor reale continue și mărginite pe un spațiu metric M, cu distanța

$$\rho(x, y) = \sup_{t \in M} |x(t) - y(t)| \tag{1}$$

între funcțiile $x(t)$ și $y(t)$.

c. Înlocuind aici la rîndul ei dreapta reală (ca domeniu al valorilor funcțiilor considerate) printr-un spațiu metric oarecare P, se ajunge la spațiul $P^s(M)$ al tuturor funcțiilor continue și mărginite pe un spațiu metric M cu valori într-un spațiu metric P, cu distanța

$$\rho(x, y) = \sup_{t \in M} \rho\{x(t), y(t)\}. \tag{2}$$

între funcțiile $x(t)$ și $y(t)$.

Vom studia în acest paragraf anumite noțiuni generale ale teoriei spațiilor metrice relativ la spațiul $P^s(M)$ și la cazurile sale particulare.

d. Din definiția (2) rezultă că în spațiul $P^s(M)$ convergența unui șir de funcții $x_n(t)$ către o limită $x(t)$ este echivalentă cu *convergența uniformă* pe M (5.93) a șirului de funcții $x_n(t)$ către funcția limită $x(t)$.

e. Am făcut convenția că o mulțime E dintr-un spațiu metric P este numită *densă peste tot* în raport cu o mulțime $F \subset P$, dacă orice punct $x \in F$ aparține lui E sau este un punct limită al ei (3.61). Dacă, în plus, $E \subset F$, se spune că E este densă peste tot în F. Spunem că un spațiu metric P este *separabil*, dacă există o mulțime numărabilă $E \subset P$, densă peste tot în P. Vom arăta că spațiul $\mathbb{R}^s[a, b]$ este separabil.

O mulțime E numărabilă și densă peste tot în $\mathbb{R}^s[a, b]$ poate fi formată, de exemplu, din toate funcțiile poligonale cu vîrfurile în punctele (a, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_{n-1}, y_{n-1}), (b, y_n), unde $x_j \in (a, b)$, numerele x_j și y_j fiind raționale. Faptul că această mulțime este numărabilă rezultă din 2.35. Vom arăta că mulțimea E este densă în $\mathbb{R}^s[a, b]$. Fie $f \in \mathbb{R}^s[a, b]$ o funcție oarecare și $\varepsilon > 0$. Vom găsi un $\delta > 0$ astfel încît $|x' - x''| < \delta$ să implice $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon/5$. Fie $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ o partiție a intervalului $[a, b]$ prin puncte raționale $x_j (j = 1, \ldots, n-1)$ și $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j < \delta$. Presupunem apoi că numerele raționale $y_0, y_1, \ldots, y_n$ sînt astfel încît $|y_j - f(x_j)| < \varepsilon/5$, $j = 0, 1 \ldots, n$. Considerăm o funcție poligonală $y(x)$ cu vîrfurile succesive (x_j, y_j). Atunci $\rho(y, f) < \varepsilon$. Într-adevăr, pentru orice $x \in [a, b]$, se poate găsi un $x_j (j = 1, \ldots, n-1)$ astfel încît $|x - x_j| < \delta$. Atunci $|f(x) - f(x_j)| < \varepsilon/5$ și $|f(x_{j\pm1}) - f(x_j)| < \varepsilon/5$. De aici rezultă că

$$|y_j - y_{j\pm1}| \leqslant |y_j - f(x_j)| + |f(x_j) - f(x_{j\pm1})| + |f(x_{j\pm1}) - y_{j\pm1}| < \frac{3}{5}\varepsilon.$$

Deci pentru $x \in (x_{j-1}, x_{j+1})$ avem $|y(x) - y_j| < 3\varepsilon/5$. În final,

$$|y(x) - f(x)| \leqslant |y(x) - y_j| + |y_j - f(x_j)| + |f(x_j) - f(x)| < \frac{3}{5}\varepsilon + \frac{1}{5}\varepsilon + \frac{1}{5}\varepsilon = \varepsilon,$$

$$\rho(y, f) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |y(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

ceea ce trebuia arătat.

Se poate demonstra că spațiul $\mathbb{R}^s[0, \infty)$ al tuturor funcțiilor mărginite și continue pe semidreapta $0 \leqslant x < \infty$ nu are nici o parte numărabilă densă peste tot (vezi exerc. 2)

î. Un spațiu metric P se numește *complet* (3.71d) dacă este satisfăcut criteriul lui Cauchy : orice șir Cauchy din P are limită în P.

TEOREMĂ. *Spațiul $P^s(M)$ al tuturor funcțiilor continue și mărginite pe un spațiu metric M, cu valori într-un spațiu metric complet P* (vezi punctul c) *este un spațiu complet.*

Demonstrație. Notăm prin ρ distanța în spațiul P și prin

$$\tilde{\rho}(x, y) = \sup_t \rho\{x(t), y(t)\}$$

distanța în spațiul $P^s(M)$.

Fie $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), \ldots$ un șir Cauchy de funcții, elemente ale spațiului $P^s(M)$: pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr N astfel încît, pentru $n \geqslant N$, $m \geqslant N$, să aibă loc inegalitatea

$$\tilde{\rho}(x_n, x_m) = \sup_t \rho\{x_n(t), x_m(t)\} \leqslant \varepsilon. \tag{3}$$

Rezultă de aici că orice șir $x_n(t_0) \in P$, care se obține fixînd $t = t_0$, este un șir Cauchy ; spațiul P fiind complet, există valoarea

$$x(t_0) = \lim_{n\to\infty} x_n(t_0) \in P.$$

Atunci cînd $t = t_0$ parcurge tot M, obținem funcția limită

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t).$$

În inegalitatea

$$\rho\{x_n(t), x_m(t)\} \leqslant \varepsilon,$$

care are loc pentru orice t și $n, m \geqslant N$, trecem la limită cînd $m \to \infty$, păstrînd n fixat ; ajungem, în virtutea lui 5.12 b, la

$$\rho\{x_n(t), x(t)\} \leqslant \varepsilon \tag{4}$$

pentru orice t și pentru $n \geqslant N$. Aceasta spune că șirul funcțiilor $x_n(t)$ converge către limita $x(t)$ uniform pe M. Conform teoremelor 5.94 și 5.95, funcția $x(t)$ este mărginită și continuă, deci este un element al spațiului $P^s(M)$. Inegalitatea (4) poate fi pusă sub forma

$$\tilde{\rho}(x_n, x) \leqslant \varepsilon,$$

ceea ce spune că $x = x(t)$ este limita șirului elementelor x_n. Teorema este demonstrată.

12.24. *Teorema lui Arzelà.* Un spaţiu metric P a fost numit *compact* (3.91a) dacă din orice şir de puncte $x_1, x_2, \ldots$ din P se poate extrage un subşir $x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots$ convergent şi *precompact* (3.93 a) dacă din orice şir $x_1, x_2, \ldots$ se poate extrage un subşir Cauchy $x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots$

a. Fie Q un spaţiu metric compact, P un spaţiu metric oarecare şi $P^s(Q)$ spaţiul metric al tuturor funcţiilor continue $x = x(t)$, definite pe Q şi luînd valori în P, metrizat după formula 12.23(2)

$$\rho(x, y) = \sup_t \rho\{x(t), y(t)\}.$$

Spaţiul $P^s(Q)$, în general, nu este compact. În ce condiţii o submulţime $E \subset P^s(Q)$ este un compact?

Pentru a răspunde la această întrebare introducem următoarele definiţii:

DEFINIŢIA 1. O mulţime E de funcţii $x(t) \in P^s(Q)$ se numeşte *cu valori uniform compacte* (*precompacte*) dacă există o mulţime compactă (precompactă) $P_0 \subset P$, care conţine toate valorile funcţiilor $x(t)$ pentru $t \in Q$, $x \in E$.

DEFINIŢIA 2. O mulţime E de funcţii $x(t) \in P^s(Q)$ este numită *echicontinuă* dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un $\delta > 0$ astfel încît $\rho(t', t'') < \delta$ să implice

$$\rho\{x(t'), x(t'')\} < \varepsilon$$

oricare ar fi funcţia $x(t) \in E$.

TEOREMĂ (*Arzelà*). *Pentru ca o mulţime* $E \subset P^s(Q)$ *să fie precompactă, este necesar şi suficient ca ea să fie cu valori uniform precompacte şi echicontinue.*

Demonstraţie. Presupunem că $E \subset P^s(Q)$ este precompactă. Atunci, în virtutea criteriului lui Hausdorff 3.93c, pentru orice $\varepsilon > 0$ dat, există în E o $\varepsilon/3$-reţea finită, adică o mulţime finită $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ de funcţii astfel încît pentru orice funcţie $x(t) \in E$ să se poată găsi un număr k, $1 \leqslant k \leqslant m$, pentru care

$$\rho[x(t), x_k(t)] \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Vom găsi apoi, pentru acelaşi ε, un $\delta > 0$ astfel încît să fie satisfăcute inegalităţile

$$\rho[x_k(t'), x_k(t'')] < \frac{\varepsilon}{3} \quad (k = 1, \ldots, m).$$

pentru $\rho(t', t'') < \delta$. Atunci, pentru aceiași t' și t'', orice $x(t) \in E$ și pentru $x_k(t)$ corespunzător avem

$$\rho[x(t'), x(t'')] \leqslant \rho[x(t'), x_k(t')] + \rho[x_k(t'), x_k(t'')] +$$

$$+ \rho[x_k(t''), x(t'')] < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

adică familia E este echicontinuă.

Mulțimea P_k a tuturor valorilor funcției $x_k(t)$, care este continuă pe compactul Q, este compactă oricare ar fi $k = 1, \ldots, m$ (5.16a). Reuniunea R a mulțimilor compacte $P_1, \ldots, P_m$ este evident și ea compactă. Inegalitatea (1) arată că mulțimea R este o $\varepsilon/3$-rețea a mulțimii $P_0 \subset P$ a tuturor valorilor pe Q ale tuturor funcțiilor $x(t) \in E$. Mulțimea P_0 fiind precompactă, în virtutea lui 3.95, E este cu valori uniform precompacte.

Așadar, condițiile teoremei lui Arzelà sînt necesare pentru precompacitatea lui E. Să demonstrăm suficiența lor.

Spațiul $P^s(Q)$ este scufundat izometric în spațiul $P(Q)$ al tuturor funcțiilor $x(t)$ mărginite (continue sau nu) pe Q, înzestrat cu distanța

$$\rho(x, y) = \sup_t \rho\{x(t), y(t)\}.$$

În virtutea criteriului lui Hausdorff (3.93c), teorema va fi demonstrată dacă, plecînd de la ipoteze, vom construi în spațiul $P(Q)$ pentru orice $\varepsilon > 0$ o ε-rețea finită pentru mulțimea E. Presupunem că $E \subset P^s(Q)$ este cu valori uniform precompacte și echicontinuă.

Pentru un $\varepsilon > 0$ dat, găsim un $\delta > 0$ plecînd de la condiția de echicontinuitate a familiei E. Acoperim apoi compactul Q cu un număr finit de sfere de diametru δ. Eliminînd punctele superflue, se poate obține o acoperire a compactului Q cu un număr finit de mulțimi de diametru $\leqslant \delta$, două cîte două disjuncte. Le notăm prin $Q_1, \ldots, Q_m$. Fie, apoi $p_1 \ldots, p_k$ o $\varepsilon/2$-rețea finită în P pentru precompactul P_0, ce conține toate valorile funcțiilor $x(t)$, cu $t \in Q$, $x \in E$. Să considerăm mulțimea G a tuturor funcțiilor $x(t) \in P(Q)$ care iau pe $Q_1, \ldots, Q_m$ valori constante dintre $p_1, \ldots, p_k$. Aceste funcții sînt, evident, în număr finit (cel mult egal cu k^m) și afirmăm că ele formează o ε-rețea pentru mulți-

mea E. Într-adevăr, fie $x_0(t)$ o funcție oarecare din familia E. Variația acestei funcții pe mulțimea Q_j de diametru $\leqslant \delta$ nu depășește $\varepsilon/2$ și există un punct p_j al mulțimii $p_1, \ldots$ $\ldots, p_m$ a cărui distanță la valorile $x_0(t)$, pentru $t \in Q_j$, este cel mult ε. Funcția $x(t) \in P(Q)$ care ia pe fiecare Q_j valoarea corespunzătoare p_j aparține lui G și evident, în spațiul $P^s(Q)$ avem :

$$\rho(x_0, x) = \sup_t [x_0(t), x(t)] \leqslant \varepsilon.$$

Teorema este demonstrată.

b. Dacă P este un spațiu complet, la fel va fi și $P^s(M)$ (12.23). Într-un spațiu complet, închiderea oricărei mulțimi precompacte este compactă (3.96 b). Prin urmare, părțile compacte ale lui $P^s(M)$ sînt caracterizate, în cazul de față, după cum urmează : ele sînt submulțimile închise ale lui $P^s(M)$, cu valori uniform compacte și echicontinue.

c. În cazul cînd P este spațiul euclidian n-dimensional $\mathbb{R}^n$, clasa mulțimilor precompacte coincide cu clasa mulțimilor mărginite (3.93b și 3.94). Faptul că o familie E de funcții $x(t) \in \mathbb{R}_n^s(M)$ este cu valori uniform precompacte înseamnă, în cazul de față, că există o constantă B astfel încît $\sup |x(t)| \leqslant B$, oricare ar fi $t \in M$ și $x(t) \in E$. O astfel de familie de funcții se numește *uniform mărginită*. Așadar, în cazul cînd $P = \mathbb{R}_n$, teorema lui Arzelà, ia următoarea formă :

O mulțime E de funcții $x(t) \in \mathbb{R}_n^s(M)$ este precompactă dacă și numai dacă ea este uniform mărginită și echicontinuă.

d. Pentru funcțiile numerice pe un interval închis al dreptei numerice putem semnala o condiție simplă suficientă de precompacitate :

TEOREMĂ. *Dacă pentru o mulțime E de funcții numerice $x(t)$, continue și derivabile pe un interval $a \leqslant t \leqslant b$, există două constante a_0, a_1 astfel încît oricare ar fi $x(t) \in E$ să avem inegalitățile*

$$|x(t)| \leqslant a_0, \quad |x'(t)| \leqslant a_1,$$

atunci mulțimea E este precompactă în spațiul $\mathbb{R}_{[a,b]}^s$.

Demonstrație. Aplicînd formula lui Lagrange 7.44 are loc inegalitatea

$$|x(t') - x(t'')| \leqslant \sup |x'(t)| \cdot |t'' - t'| \leqslant a_1 |t'' - t'|,$$

care arată că familia E este echicontinuă. Aplicarea teoremei de la punctul c încheie demonstrația, ținînd cont că familia în cauză este uniform mărginită prin ipoteză.

12.25. *Spațiul funcțiilor de m ori continuu derivabile (de clasă* C^m*).*

a. Spațiul metric al tuturor funcțiilor reale $x(t)$ continue și de m ori continuu derivabile pe un interval $a \leqslant t \leqslant b$ cu metrica definită de formula 12.22(2),

$$\rho(x, y) =$$

$$= \max_{a \leqslant t \leqslant b} \{|x(t) - y(t)|, |x'(t) - y'(t)|, \ldots, |x^{(m)}(t) - y^{(m)}(t)|\},$$

este notat prin $D_m(a, b)$ (sau $C^m(a, b)$); în particular $D_0(a, b) = \mathbb{R}^s(a, b)$. În spațiul $D_m(a, b)$ convergența unui șir $x_n(t)$ către limita sa $x(t)$ este echivalentă cu convergența uniformă a $m + 1$ șiruri:

$$x_n(t) \to x(t), \; x_n'(t) \to x'(t), \; \ldots, \; x_n^{(m)}(t) \to x^{(m)}(t).$$

b. Vom arăta că *spațiul* $D_m(a, b)$ *este complet.* Fie $x_1(t), x_2(t), \ldots$ un șir Cauchy de funcții din spațiul $D_m(a, b)$. Din inegalitatea

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} |x_n^{(k)}(t) - x_p^{(k)}(t)| \leqslant \rho(x_n, x_p)$$

rezultă că fiecare din șirurile $\{x_n(t)\}, \{x_n'(t)\}, \ldots, \{x_n^{(m)}(t)\}$ este Cauchy în raport cu metrica spațiului $\mathbb{R}^s(a, b)$. Spațiul $\mathbb{R}^s(a, b)$ fiind complet (12.23f), orice șir $x_n^{(k)}(t)$ converge uniform pentru $n \to \infty$ către o funcție continuă $y_k(t)$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$. Conform teoremei 9.77 asupra derivării șirurilor de funcții, avem

$$y_1(t) = \lim_{n \to \infty} x_n'(t) = (\lim_{n \to \infty} x_n(t))' = y_0'(t),$$

$$y_2(t) = y_1'(t) = y_0''(t), \; \ldots, \; y_m(t) = y_0^{(m)}(t).$$

Deci, funcția $y_0(t)$ aparține spațiului $D_m(a, b)$. Ținînd cont din nou de convergența uniformă a fiecărui șir $x_n^{(k)}(t)$ către $y_k(t) = y_0^{(k)}(t)$, pentru $n \to \infty$, funcția $y_0(t)$ este limita

şirului $x_n(t)$ în raport cu metrica spaţiului $D_m(a, b)$, ceea ce trebuia demonstrat.

c. Arătăm că spaţiul $D_m(a, b)$ este dens peste tot în $\mathbb{R}^s(a, b)$ (bineînţeles în raport cu metrica lui $\mathbb{R}^s(a, b)$). Proprietatea de a fi peste tot densă fiind tranzitivă (3.62), este suficient să arătăm că $D_m(a, b)$ este densă peste tot în raport cu mulţimea L a tuturor funcţiilor poligonale (am văzut în 12.23 e că L este densă peste tot în $\mathbb{R}^s(a, b)$). Orice funcţie poligonală $y(x)$ poate fi făcută „netedă" înlocuind-o, în vecinătatea fiecărui vîrf, printr-o funcţie $q(x)$, avînd derivate continue pînă la ordinul m, ale căror valori în punctele de contact cu segmentele liniei poligonale coincid cu valorile corespunzătoare ale derivatelor

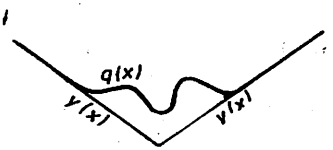


Fig. 12.1

funcţiei $y(x)$ (fig. 12.1). O astfel de funcţie $q(x)$ poate fi construită, de exemplu, sub forma unui polinom de grad $2m$ (vezi 12.19d). Efectuînd o omotetie avînd centrul în vîrful unghiului şi de raport suficient de mic, se poate ajunge la faptul că distanţa între $q(x)$ şi $y(x)$ este oricît de mică dorim în metrica $\mathbb{R}^s(a, b)$.

12.26. *Spaţiul funcţiilor continue cu metrică integrală.*

a. Notăm prin $L^s(a, b)$ spaţiul metric al tuturor funcţiilor reale $x(t)$ continue pe un interval închis $[a, b]$ cu metrica 12.22(3):

$$\rho(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt. \qquad (1)$$

Spaţiul format din aceleaşi funcţii cu metrica 12.22(4)

$$\rho(x, y) = \sqrt[p]{\int_a^b |x(t) - y(t)|^p\, dt} \qquad (p > 1), \qquad (2)$$

va fi notat prin $L_p^s(a, b)$.

Am considerat, de asemenea, pe spaţiul funcţiilor continue metrica

$$\rho(x, y) = \max_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)|. \qquad (3)$$

Metricile (1) — (3) generează tipuri de convergenţă esenţialmente diferite. Astfel, şirul de funcţii $x_n(t)$ din fig. 12.2 nu converge către zero în spaţiul $\mathbb{R}^s(0, 1)$, dar

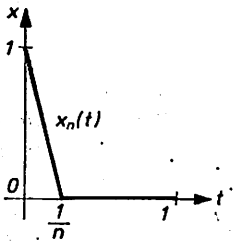


Fig. 12.2

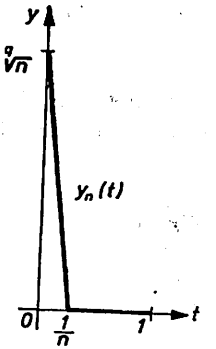


Fig. 12.3

în acelaşi timp converge către zero în fiecare din spaţiile $L_p^s(0, 1)$ deoarece

$$\int_0^1 x_n^p(t)\, dt = \int_0^{1/n} x_n^p(t)\, dt \le \frac{1}{n}.$$

Şirul de funcţii $y_n(t)$ din fig. 12.3 converge către zero în fiecare spaţiu $L_p^s(0, 1)$ cu $p < q$ şi nu converge în $L_q^s(0, 1)$ deoarece

$$\int_0^1 y_n^p(t)\, dt = \frac{1}{p+1} \frac{1}{n} n^{\frac{p}{q}} =$$

$$= \frac{1}{p+1} n^{\frac{p}{q}-1} \begin{cases} \to 0 & \text{pentru } p < q, \\ = \dfrac{1}{p+1} & \text{pentru } p = q. \end{cases}$$

b. *Spațiul* $L_p^s(a, b)$ *nu este complet pentru nici un* $p \geqslant 1$. Pentru a demonstra aceasta, considerăm un șir de funcții continue $y_\nu(x)$ cuprinse între 0 și 1 și convergent, cînd $\nu \to \infty$, către 0, uniform pe fiecare interval $(a, c - \varepsilon)$ și către 1 pe fiecare interval $(c + \varepsilon, b)$ (c este un punct fixat între a și b). Un astfel de șir satisface criteriul lui Cauchy în spațiul $L_p^s(a, b)$. Într-adevăr, avem

$$\int_a^b |y_\nu(x) - y_\mu(x)|^p \, dx = \int_a^{c-\varepsilon} + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} + \int_{c+\varepsilon}^{b} \leqslant \varepsilon] + 2\varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon$$

pentru ν și μ suficient de mari. Să arătăm că șirul $y_\nu(x)$ nu converge, în metrica lui $L_p^s(a, b)$, către nici o funcție continuă.

Pentru aceasta, vom face următoarea observație. Dacă un șir de funcții $f_\nu(x)$ ($\nu = 1,2, \ldots$) converge în raport cu metrica din $L_p^s(a, b)$ către o funcție continuă $f(x)$ pe un interval $\Delta = \{a \leqslant x \leqslant b\}$ și converge uniform pe un interval $\delta = \{c \leqslant x \leqslant d\}$, interior lui Δ, către o funcție $\varphi(x)$, atunci are loc identitatea $\varphi(x) \equiv f(x)$ în intervalul δ. Într-adevăr, în spațiul $L_p^s(c, d)$, au loc relațiile

$$\rho^p(f_\nu, f) = \int_c^d |f_\nu(x) - f(x)|^p \, dx \leqslant \int_a^b |f_\nu(x) - f(x)|^p \, dx \to 0,$$

$$\rho^p(f_\nu, \varphi) = \int_c^d |f_\nu(x) - \varphi(x)|^p \, dx \leqslant \max_{x \in \delta} |f_\nu(x) - \varphi(x)|^p (d - c) \to 0.$$

În virtutea unicității limitei (3.33a), avem $f(x) \equiv \varphi(x)$ ceea ce trebuia arătat.

Ipoteza că șirul $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), \ldots$ construit mai sus converge în raport cu metrica din $L_p^s(a, b)$ către o funcție continuă $f(x)$ conduce, conform celor demonstrate, la egalitățile $f(x) = 0$ pentru $a \leqslant x < c$ și $f(x) = 1$ pentru $c < x \leqslant b$. Dar atunci funcția $f(x)$ nu poate fi continuă pe intervalul $a \leqslant x \leqslant b$ oricare ar fi valoarea $f(c)$.

c. În virtutea teoremei generale 3.81, spațiul $L_p^s(a, b)$ admite completatul $\bar{L}_p^s(a, b)$. Este natural atunci să punem următoarea întrebare: *este posibil să atribuim ele-*

mentelor spațiului $\overline{L}_p^s(a, b)$, *definite conform teoremei* 3.81 *a într-un mod abstract, un sens concret, interpretîndu-le, de exemplu, ca funcții?* Răspunsul este afirmativ, cu toate că problema este destul de delicată (vezi, de exemplu, [5]).

§ 12.3. Spații vectoriale normate

12.31. Vrem să înzestrăm un spațiu vectorial $\mathcal{R}$ cu o metrică; făcînd aceasta este natural să admitem că metrica și operațiile liniare sînt legate prin aceea că translația de același vector a două puncte conservă distanța dintre ele. Este deci suficient să definim distanța între un punct (vector) și un alt punct fix, zero, de exemplu. În consecință, este suficient să facem să corespundă fiecărui punct $x \in \mathcal{R}$ un număr, distanța de la x la 0; acest număr este numit *norma* vectorului x.

Un spațiu vectorial real $\mathcal{R}$ se numește *spațiu real normat*, dacă, oricărui vector $x \in \mathcal{R}$, îi facem să corespundă un număr $|x|$ (notat cîteodată $\|x\|$ sau chiar $|||x|||$) numit *norma vectorului* x și satisfăcînd condițiile:

a. $|x| > 0$, dacă $x \neq 0$, $|0| = 0$.

b. $|\alpha x| = |\alpha|\,|x|$ pentru orice $x \in \mathcal{R}$ și orice număr real α.

c. $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ oricare ar fi x și y din $\mathcal{R}$ (*axioma triunghiului*).

Prin definiție, punem $\rho(x, y) = |x - y|$. Este ușor de probat că sînt satisfăcute axiomele spațiului metric (verificarea este lăsată în seama cititorului); rezultă de aici că un spațiu normat este metric. Astfel, într-un spațiu normat se pot măsura distanțele între vectori și se poate trece la limită. Un spațiu complet normat este numit *spațiu Banach*. Un spațiu vectorial care nu este înzestrat cu o normă (sau cu o metrică) va fi numit *afin*.

12.32.a. Spațiul $\mathbb{R}^s(M)$ al tuturor funcțiilor reale $x(t)$ continue și mărginite pe un spațiu metric M, pe care l-am considerat ca exemplu de spațiu vectorial (12.13i) și de spațiu metric (12.23b), este în același timp o sursă importantă de spații normate. O normă în $\mathbb{R}^s(M)$ este dată de formula

$$\|x\| = \sup_t |x(t)|. \qquad (1)$$

Notăm aici norma unei funcții $x(t)$ nu prin $|x|$, ci prin $\|x\|$ pentru a scoate în relief diferența dintre norma funcției $x(t)$ ca element al spațiului $\mathbb{R}^s(M)$ și valoarea sa absolută depinzînd de punctul t. Axiomele 12.31a-c ale normei sînt în acest caz aproape evidente. În particular, axioma triunghiului se verifică astfel:

$$|x(t) + y(t)| \leqslant |x(t)| + |y(t)| \leqslant \sup_t |x(t)| +$$

$$+ \sup_t |y(t)| = \|x\| + \|y\|;$$

trecînd la maxim în primul membru, se obține inegalitatea cerută $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

b. Generalizăm acum exemplul din punctul a înlocuind corpul $\mathbb{R}$ al numerelor reale printr-un spațiu real normat oarecare $\mathfrak{A}$. Astfel, elementele noului spațiu $\mathfrak{A}^s(M)$ vor fi funcții continue și mărginite $x(t)$ definite pe spațiul metric M cu valori în spațiul normat $\mathfrak{A}$.

Este necesar să verificăm că operațiile liniare asupra unor astfel de funcții conduc la funcții de același fel. Dacă funcțiile $x(t)$ și $y(t)$ cu valori în $\mathfrak{A}$ sînt mărginite și dacă

$$X = \sup_t |x(t)|, \quad Y = \sup_t |y(t)|,$$

atunci funcția $z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t)$ este de asemenea mărginită, pentru orice α și β, deoarece

$$|\alpha x(t) + \beta y(t)| \leqslant |\alpha||x(t)| + |\beta||y(t)| \leqslant |\alpha| X + |\beta| Y$$

oricare ar fi t. Să arătăm că funcția $z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t)$ este continuă în orice $t = t_0$, la fel ca funcțiile $x(t)$ și $y(t)$. Putem presupune că $\alpha \neq 0$ și $\beta \neq 0$. Fixăm un număr $\varepsilon > 0$ și alegem un $\delta > 0$ astfel încît inegalitatea $\rho(t, t_0) < \delta$ să implice

$$|x(t) - x(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2\alpha}, \quad |y(t) - y(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2\beta}.$$

Avem atunci

$$|z(t) - z(t_0)| \leqslant |\alpha||x(t) - x(t_0)| + |\beta||y(t) - y(t_0)| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ceea ce arată continuitatea funcției $z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t)$ în $t = t_0$.

În spațiul $\mathcal{R}^s(M)$ se introduce norma prin formula (1), unde, bineînțeles, $|x(t)|$ este norma în spațiul $\mathcal{R}$.

Deci spațiul $\mathcal{R}^s(M)$ al tuturor funcțiilor $x(t)$ continue și mărginite pe spațiul metric M, cu valori în spațiul normat $\mathcal{R}$, este construit.

Observăm că spațiul $\mathcal{R}^s(M)$ este complet, de îndată ce spațiul $\mathcal{R}$ este astfel (12.23f).

12.33. *Alte exemple de spații normate.*

a. Spațiul metric $D_m(a, b)$ (12.25) poate deveni normat introducînd norma

$$\|x\| = \max\{|x(t)|, |x'(t)|, \ldots, |x^{(m)}(t)|\}. \tag{1}$$

Axiomele 12.31a-c ale normei se verifică ușor.

b. Spațiile metrice $L_p^s(a, b)$ (12.26) pot fi normate introducînd normele

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\int_a^b |x(t)|^p \, dt} \qquad (p \geqslant 1). \tag{2}$$

Axiomele 12.31a-c ale normei se verifică ușor pentru $p = 1$; în cazul general ($p > 1$) verificarea axiomei triunghiului cere anumite precauții (vezi exerc. 15).

c. Spațiile normate $L_p^s(a, b)$ și $\mathbb{R}^s(a, b)$ admit spații analoage interesante, de dimensiune finită. Fie $\mathbb{R}_n$ spațiul n-dimensional al vectorilor $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Introducem următoarele norme

$$|x|_1 = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|, \tag{3}$$

$$|x|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p}, \quad (p > 1) \tag{4}$$

$$|x|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\xi_k|. \tag{5}$$

Este evident că norma euclidiană

$$|x| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2} \tag{6}$$

pe care o cunoaștem din § 3.14 este un caz particular al normei $|x|_p$ pentru $p = 2$. Normele (3) și (4) sînt analoage normelor integrale din spațiile $L_1^s(a, b)$ și $L_p^s(a, b)$. Norma (5) este analoagă normei 12.32 (1) din spațiul $\mathbb{R}^s(a, b)$; notația $|x|_\infty$ este justificată prin relația limită

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\xi_k| = \lim_{p \to \infty} \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p}$$

(vezi exerc. 9, cap. 4).

În cazul (6) am verificat deja axiomele normei în § 3.14. În cazurile (3) și (5) aceasta se face fără dificultate. În cazul (4) verificarea nu este prea simplă (vezi exerc. 17).

Spre deosebire de normele dintr-un spațiu funcțional, din punct de vedere al convergenței pe care ele o generează, normele (3)—(6) sînt echivalente: pentru $m \to \infty$, convergența unui șir de vectori $x_m = (\xi_1^{(m)}, \ldots, \xi_n^{(m)})$ către un vector $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, pentru oricare din normele (3)—(5), înseamnă convergența a n șiruri numerice $\xi_1^{(m)} \to \xi_1 \ldots, \xi_n^{(m)} \to \xi_n$. Studiul normelor în spații de dimensiune finită va fi continuat în 12.36.

d. Înlocuind în exemplele precedente n prin ∞ se ajunge la o serie interesantă de spații de dimensiune infinită. Anume, notăm prin l_p $(1 \leqslant p < \infty)$ mulțimea tuturor șirurilor numerice $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ pentru care $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty$. Folosind inegalitatea triunghiului pentru norma $|x|_p$ din spațiul $\mathbb{R}_n$ și punînd $x = \{\xi_k\} \in l_p$, $y =$

$= \{\eta_k\} \in l_p$, putem scrie

$$\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |\xi_k + \eta_k|^p} \leqslant \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p} + \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^p} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p} + \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p} = \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Trecînd la limită, pentru $n \to \infty$, în primul membru se obține convergența seriei $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^p$ și inegalitatea

$$\|x + y\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^p} \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Este evident că $\alpha x = \{\alpha \xi_k\}$ aparține mulțimii l_p, cu $x = \{\xi_k\}$, pentru orice α real și că $\|\alpha x\|_p = |\alpha| \, \|x\|_p$. Astfel, *mulțimea l_p, pentru orice $p \geqslant 1$, este un spațiu vectorial normat.* Se poate arăta că spațiul l_p este complet oricare ar fi $p \geqslant 1$ (exerc. 18).

12.34. Toate definițiile și toate teoremele în legătură cu spațiile vectoriale-afine (fără a lua în considerare prezența metricii) și cu spațiile metrice (fără considerarea structurii de spațiu vectorial) se extind în mod natural la spații vectoriale normate. Astfel, într-un spațiu vectorial normat se pot considera noțiunile de mulțime echilibrată și mulțime convexă, care sînt proprii teoriei spațiilor afine.

a. O mulțime E dintr-un spațiu vectorial $\mathfrak{X}$ se numește *echilibrată* (sau *central simetrică*), dacă odată cu orice punct al său x ea conține punctul $-x$.

b. O mulțime E dintr-un spațiu vectorial $\mathfrak{X}$ se numește *convexă*, dacă odată cu două puncte oarecare x, y ale sale ea conține toate punctele

$$z = \alpha x + \beta y, \quad \alpha \geqslant 0, \quad \beta \geqslant 0, \quad \alpha + \beta = 1,$$

sau, geometric, întreg segmentul de extremități x și y.

c. Teorema următoare utilizează, atît structura de spațiu vectorial cît și norma, astfel încît cadrul ei îl constituie spațiul vectorial normat.

TEOREMĂ. *O bilă* $S = \{x \mid |x| \leqslant \rho\}$ *dintr-un spaţiu vectorial normat* $\mathfrak{R}$ *este o mulţime echilibrată convexă închisă.*

Demonstraţie. Dacă $|x| \leqslant \rho$, atunci $|-x| = |x| \leqslant \rho$, ceea ce demonstrează că bila este echilibrată. Faptul că ea este închisă, rezultă din 3.51b. Convexitatea decurge din axioma triunghiului: dacă $|x| \leqslant \rho$, $|y| \leqslant \rho$, atunci pentru $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$, avem

$$|\alpha x + \beta y| \leqslant \alpha|x| + \beta|y| \leqslant (\alpha + \beta)\rho = \rho,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

d. Proprietatea de convexitate a bilei unitate este atît de importantă încît ea poate înlocui inegalitatea triunghiului. Anume, presupunem că într-un spaţiu vectorial X s-a introdus o funcţie numerică $|x|$ verificînd primele două axiome ale normei şi, în loc de a treia, următoarea axiomă:

Bila $\{x \in X \mid |x| \leqslant 1\}$ *este o mulţime convexă.*

Vom arăta că această axiomă şi axiomele 12.31 a,b implică inegalitatea triunghiului 12.31 c. Oricare ar fi doi vectori $x \neq 0$, $y \neq 0$, vectorii $\frac{x}{|x|}$ şi $\frac{y}{|y|}$ aparţin bilei unitate; în virtutea noii axiome, vectorul $\frac{\alpha x}{|x|} + \frac{\beta y}{|y|}$ aparţine de asemenea bilei, oricare ar fi $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ şi $\alpha + \beta = 1$:

$$\left| \alpha \frac{x}{|x|} + \beta \frac{y}{|y|} \right| \leqslant 1.$$

Punem aici $\alpha = \frac{|x|}{|x| + |y|}$, $\beta = \frac{|y|}{|x| + |y|}$; înmulţind inegalitatea cu $|x| + |y|$, se obţine

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|,$$

ceea ce trebuia arătat. Dacă unul din vectorii x, y este nul, inegalitatea triunghiului este imediată.

12.35. *Norme echivalente.*

a. Două norme $|x|_1$ și $|x|_2$ în același spațiu vectorial X se numesc *echivalente* (sau *homeomorfe*) dacă metricile pe care ele le generează sînt homeomorfe (3.34); altfel spus, dacă convergența $x_n \to x$ după una din norme este echivalentă cu convergența $x_n \to x$ după cealaltă normă. În consecință, orice mulțime închisă (deschisă) din X în raport cu una din aceste norme este închisă (deschisă) în raport cu cealaltă.

b. Să vedem ce proprietăți geometrice ale bilelor

$$S_1(\rho) = \{x \in X \mid |x|_1 \leqslant \rho\},$$

$$S_2(\rho) = \{x \in X \mid |x|_2 \leqslant \rho\},$$

corespund echivalenței normelor $|x|_1$ și $|x|_2$. Fiecare din aceste bile, după cum am văzut, este echilibrată, convexă și închisă în raport cu norma corespunzătoare.

LEMĂ. *Dacă normele* $|x|_1$ *și* $|x|_2$ *sînt echivalente, atunci există o constantă* $c_1 > 0$ *astfel încît orice bilă* $S_1(\rho)$ *să conțină bila* $S_2(c_1\rho)$ *și o constantă* $c_2 > 0$ *astfel încît orice bilă* $S_2(\rho)$ *să conțină bila* $S_1(c_2\rho)$. *Reciproc, dacă există două constante* c_1 *și* c_2 *avînd proprietățile menționate, atunci normele* $|x|_1$ *și* $|x|_2$ *sînt echivalente.*

Demonstrație. Fie c_1 și c_2 două constante avînd proprietățile menționate. Presupunem că $|x - x_n|_1 = \varepsilon_n \to 0$. Bila $S_2(\varepsilon_n/c_2)$ conține elementul $x - x_n$, astfel încît $|x - x_n|_2 \leqslant \varepsilon_n/c_2$. Aceasta înseamnă că $|x - x_n|_2 \to 0$. Într-un mod analog, din $|x - x_n|_2 \to 0$ rezultă că $|x - x_n|_1 \to 0$.

Invers, presupunem că normele $|x|_1$ și $|x|_2$ sînt echivalente, dar că nu ar exista o constantă c_1 ca mai sus. Atunci, pentru orice $n = 1,2, \ldots$, găsim două bile $S_1(\rho_n)$, $S_2(\rho_n/n)$, din care prima nu o conține pe a doua, adică există un punct x_n astfel încît $|x_n|_1 > \rho_n$, $|x_n|_2 < \rho_n/n$. Fie $y_n = x_n/\rho_n$; avem $|y_n|_1 > 1$, $|y_n|_2 < 1/n$ astfel încît șirul y_n tinde la 0 în a doua normă și nu tinde la 0 în prima normă. Aceasta contrazice presupunerea de echivalență a normelor, de unde rezultă existența unei constante c_1. Analog, există constanta c_2, ceea ce trebuia demonstrat.

c. *Consecință. Două norme* $|x|_1$ *și* $|x|_2$ *sînt echivalente, dacă și numai dacă există două constante pozitive* c_1 *și* c_2

38 c—129

astfel încît să fie satisfăcută dubla inegalitate

$$c_1|x|_1 \leqslant |x|_2 \leqslant \frac{|x|_1}{c_2}$$

pentru orice $x \in X$.

Într-adevăr, dacă inegalităţile sînt satisfăcute, din $|x - x_n|_1 \to 0$ rezultă că $|x - x_n|_2 \leqslant \frac{1}{c_2}|x - x_n|_1 \to 0$, şi invers, astfel încît normele $|x|_1$ şi $|x|_2$ sînt echivalente. Presupunem acum că normele $|x|_1$ şi $|x|_2$ sînt echivalente. Atunci, conform lemei din punctul b, există o constantă c_2 astfel încît orice bilă $S_2(\rho)$ conţine bila $S_1(c_2\rho)$. Fie $|x|_1 = a$, adică $x \in S_1(a)$. Bila $S_2(a/c_2)$ conţine bila $S_1(a)$, deci $|x|_2 \leqslant a/c_2 = |x|_1/c_2$. A doua inegalitate se stabileşte în mod analog.

d. În prezent sîntem în măsură să descriem geometric orice normă $|x|_2$ echivalentă cu o normă dată $|x|_1$.

TEOREMĂ. *Presupunem că într-un spaţiu normat* $\mathfrak{X}$, *cu norma* $|x|_1$, *este dată o mulţime echilibrată convexă închisă* S, *care conţine o bilă* $S_1(\rho)$ *ce este ea însăşi conţinută într-o bilă* $S_1(r)$. *Atunci, există o normă* $|x|_2$ *echivalentă cu norma* $|x|_1$ *şi astfel încît* $S_2(1) = S$.

Demonstraţie. Alegem un vector oarecare $x \neq 0$ şi considerăm semidreapta x/t, $0 < t < \infty$. Prin ipoteză, punctele semidreptei cu t suficient de mari aparţin mulţimii S, punctele cu t suficient de mici nu aparţin lui S. Punem $|x|_2 = \inf\left\{t \mid \frac{x}{t} \in S\right\}$ şi $|0|_2 = 0$. Să verificăm că norma astfel construită satisface axiomele 12.31 a—c şi condiţia impusă $\{x : |x|_2 \leqslant 1\} = S$.

Pentru $x \neq 0$, avem $0 < |x|_2 < \infty$ şi prima axiomă este verificată. Apoi, pentru $\alpha > 0$, avem

$$|\alpha x|_2 = \inf\left\{t \mid \frac{\alpha x}{t} \in S\right\} = \inf\left\{\alpha\frac{t}{\alpha} \mid \frac{\alpha x}{t} \in S\right\} =$$

$$= \alpha \inf\left\{\tau \mid \frac{x}{\tau} \in S\right\} = \alpha|x|_2.$$

Mulţimea S fiind echilibrată rezultă imediat că $|-x|_2 = |x|_2$; de unde $|\alpha x|_2 = |\alpha|\,|x|_2$ pentru orice α real.

Verificăm acum că $S = \{x \mid |x|_2 \leqslant 1\}$. Dacă $x \in S$, atunci, evident, are loc relația $|x|_2 = \inf \left\{ t \mid \frac{x}{t} \in S \right\} \leqslant 1$. Convexitatea lui S implică pe cea a mulțimii S_x a punctelor semidreptei x/t, care aparțin lui S; apoi, mulțimea S_x conține toate punctele lui x/t, cu $t > \inf \left\{ \tau \mid \frac{x}{\tau} \in S \right\}$; deoarece S este închisă, punctul x/t, cu $t = \inf \left\{ \tau \mid \frac{x}{\tau} \in S \right\}$, aparține de asemenea lui S. În consecință, dacă $|x|_2 = \inf \left\{ \tau \mid \frac{x}{\tau} \in S \right\} \leqslant 1$, atunci $x = x/1$ aparține lui S, ceea ce trebuia demonstrat.

Verificăm inegalitatea triunghiului pentru norma $|x|_2$. Ea rezultă din 12.34 d, deoarece bila $\{x \mid |x|_2 \leqslant 1\}$ este identică, după cum am văzut, cu mulțimea S, aceasta din urmă fiind convexă. Rămîne să demonstrăm că norma $|x|_2$ este echivalentă cu $|x|_1$. Aceasta rezultă din lema din punctul b. Într-adevăr, din incluziunea $S_1(\rho) \subset S = S_2(1) \subset S_1(r)$ rezultă incluziunea $S_1(\rho p) \subset S_2(p) \subset S_1(rp)$ pentru orice $p > 0$, ipoteza lemei din punctul b fiind deci satisfăcută pentru $c_1 = 1/r$ și $c_2 = \rho$; aplicînd lema, rezultă că normele $|x|_2$ și $|x|_1$ sînt echivalente.

e. *Norme în spații de dimensiune finită.* Vom arăta că într-un spațiu vectorial $\mathbb{R}_n$ de dimensiune finită, toate normele sînt echivalente.

Relația de echivalență a normelor este, evident, tranzitivă. Este deci suficient de arătat că orice normă $|x|_1$ este echivalentă cu norma euclidiană $|x|_2 = \sqrt{\sum_1^n \xi_j^2}$, unde $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sînt coordonatele vectorului x în baza $e_1, \ldots, e_n$. Punem $c_1 = \sum_1^n |e_k|_1$; pentru orice $x \in \mathbb{R}_n$, are loc inegalitatea

$$|x|_1 = \left| \sum_1^n \xi_k e_k \right|_1 \leqslant \sum_1^n |\xi_k| |e_k|_1 \leqslant |x|_2 \sum_1^n |e_k|_1 \leqslant c_1 |x|_2. \quad (1)$$

Vom arăta că există de asemenea o constantă c_2, astfel încît pentru orice $x \in \mathbb{R}_n$ să fie satisfăcută inegalitatea

$$|x|_1 \geqslant c_2 |x|_2. \tag{2}$$

Presupunem contrariul: există un şir de vectori $x_m (m = 1, 2, \ldots)$ astfel încît $|x_m|_1 < \frac{1}{m} |x_m|_2$. Punem $y_m = \frac{x_m}{|x_m|_2} = (\eta_1^{(m)}, \ldots, \eta_n^{(m)})$. Avem $|y_m|_2^2 = \sum_1^n (\eta_k^{(m)})^2 = 1$; de unde $|\eta_k^{(m)}| \leqslant 1$ pentru orice k şi m. Deoarece bilele euclidiene închise sînt compacte (3.96 e), şirul $y_m (m = 1, 2, \ldots)$ conţine un subşir convergent; renunţînd la o parte din vectori, prin renumerotare se poate spune că întreg şirul $y_m = (\eta_1^{(m)}, \ldots, \eta_n^{(m)})$ converge către un vector $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$. Atunci, conform 3.32f, avem

$$\eta_1 = \lim_{m \to \infty} \eta_1^{(m)}, \ldots, \eta_n = \lim_{m \to \infty} \eta_n^{(m)}. \tag{3}$$

Trecînd la limita pentru $m \to \infty$ în egalitatea $\sum_1^n (\eta_k^{(m)})^2 = 1$, se obţine $|y|_2^2 = \sum_1^n \eta_k^2 = 1$, adică $y \neq 0$. Folosind (1) observăm că $|y - y_m|_1 \leqslant c_1 |y - y_m|_2 \to 0$, adică $y_m \to y$ în norma $|x|_1$. Dar $|y_m|_1 = \frac{|x_m|_1}{|x_m|_2} \to 0$, adică $y_m \to 0$. Relaţiile obţinute contrazic unicitatea limitei (3.33a). Inegalitatea (2) este deci stabilită.

Aplicînd consecinţa c, afirmaţia este deci demonstrată.

În particular, spaţiul $\mathbb{R}_n$ fiind complet în raport cu norma euclidiană $|x|_2$ (3.72 c), este la fel în raport cu orice altă normă $|x|_1$.

f. Obţinem următoarea consecinţă:

În spaţiul $\mathcal{R}_n$ de dimensiune finită convergenţa în raport cu orice normă este echivalentă cu convergenţa pe componente.

Bilele unitate pentru normele $|x|_\infty$, $|x|_1$, $|x|_p$ considerate ca exemple în 12.32, pentru $n = 2$, sînt ilustrate în fig. 12.4 — 12.8. Pentru cazul $p < 1$ vezi exerciţiul 20.

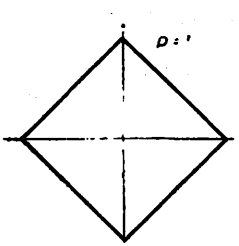


Fig. 12.4

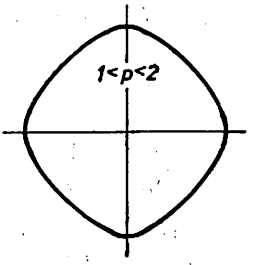


Fig. 12.5

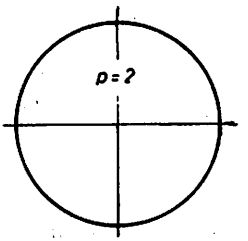


Fig. 12.6

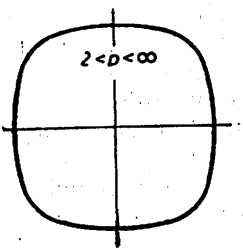


Fig. 12.7

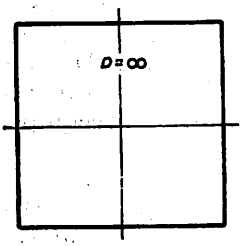


Fig. 12.8

12.36. În spaţiul euclidian n-dimensional bila $|x| \leqslant 1$ este compactă (3.96e). În orice alt spaţiu normat n-dimensional bila $\|x\| < 1$ este de asemenea compactă deoarece orice normă este echivalentă cu norma euclidiană, conform 12.35 e. Există spaţii normate de dimensiune infinită în care bila unitate $\|x\| \leqslant 1$ să fie compactă? Se dovedeşte că nu, şi compacitatea bilei este o proprietate caracteristică a spaţiilor de dimensiune finită.

a. LEMĂ. *Fie E un subspaţiu închis al unui spaţiu vectorial normat $\mathcal{R}$ şi astfel încît $E \neq \mathcal{R}$. Există un vector $y \in \mathcal{R}$ astfel încît $|y| = 1$ şi $|y - x| \geqslant 1/2$ pentru orice $x \in E$.*

Demonstraţie. Alegem un $y_0 \in \mathcal{R} - E$; fie $d = \inf |y_0 - x|$ pentru orice $x \in E$. Dacă am avea $\inf |y_0 - x| = 0$, ar exista un şir $x_n \in E$ tinzînd către y_0; E fiind închisă, am avea atunci $y_0 = \lim x_n \in E$, în contradicţie cu ipoteza. Deci $d > 0$ şi putem găsi un vector $x_0 \in E$ astfel încît $|y_0 - x_0| < 2d$. Punem $y = \dfrac{y_0 - x_0}{|y_0 - x_0|}$. Avem $|y| = 1$;

în plus, $x_0 + x|y_0 - x_0| \in E$ pentru orice $x \in E$ şi

$$|y - x| = \left|\frac{y_0 - x_0}{|y_0 - x_0|} - x\right| = \left|\frac{y_0 - x_0 - x|y_0 - x_0|}{|y_0 - x_0|}\right| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{d}{2d} = \frac{1}{2},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

b. TEOREMĂ (*F. Riesz*). *Bila unitate a unui spaţiu vectorial normat $\mathcal{R}$ de dimensiune infinită nu este o mulţime precompactă.*

Demonstraţie. Vom construi, în bila unitate a spaţiului $\mathcal{R}$, un şir $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ de vectori distanţaţi unul faţă de celălalt cu $> 1/2$. Deoarece un astfel de şir nu admite, evident, nici un subşir Cauchy, bila $S = \{x \mid |x| \leqslant 1\}$ nu este o mulţime precompactă. Pentru x_1 alegem un vector arbitrar $x_1 \in S$, $|x|_1 = 1$. Multiplii săi λx_1 formează un subspaţiu închis $E_1 \subset \mathcal{R}$. Conform lemei a, există un vector $x_2 \in S$, $|x_2| = 1$, astfel încît $|x_2 - x| > 1/2$ pentru orice $x \in E_1$; în particular, $|x_2 - x_1| > 1/2$. Combinaţiile liniare $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ formează un subspaţiu închis $E_2 \subset \mathcal{R}$. Conform lemei a, există un vector $x_3 \in S$, $|x_3| = 1$, astfel încît $|x_3 - x| > 1/2$ pentru orice $x \in E_2$; în particular, $|x_3 - x_1| > 1/2$, $|x_3 - x_2| > 1/2$. Continuînd, construim un şir ascendent $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ de subspaţii de dimensiune finită, fiecare fiind o parte proprie a lui $\mathcal{R}$ ($\mathcal{R}$ fiind infinit-dimensional), precum şi un şir $x_1, x_2, \ldots$ de vectori cu distanţele relative $|x_m - x_n| > 1/2$. Am văzut deja că aceasta rezolvă problema.

12.37. *Serii de vectori într-un spaţiu normat.* Într-un spaţiu metric se pot considera şiruri convergente, dar noţiunea de serie convergentă nu are sens. Într-un spaţiu vectorial normat are sens şi noţiunea de serie convergentă de vectori.

a. Fie o serie de elemente dintr-un spaţiu normat $\mathcal{R}$:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots \qquad (1)$$

Seria (1) se numeşte *convergentă în $\mathcal{R}$* dacă şirul $s_1 = x_1$, $s_2 = x_1 + x_2, \ldots$ al sumelor sale parţiale converge în $\mathcal{R}$: în acest caz, limita $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ a sumelor parţiale este,

prin definiție, *suma* seriei(1). Dacă șirul sumelor parțiale s_n nu este convergent, seria (1) se numește *divergentă* în $\mathcal{R}$ și nu i se atribuie nici o sumă.

Pentru convergența seriei (1) *este necesar, iar dacă spațiul* $\mathcal{R}$ *este complet este și suficient, să fie satisfăcut criteriul lui Cauchy : pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există un număr* N *astfel încît să fie satisfăcută inegalitatea*

$$|s_n - s_m| = |x_{m+1} + \ldots + x_n| < \varepsilon, \qquad (2)$$

oricare ar fi $m > N$, $n > m$.

b. Dacă seria numerică a normelor vectorilor x_n converge, atunci, în cazul spațiului $\mathcal{R}$ complet, seria (1) converge și ea, deoarece

$$|x_{m+1} + \ldots + x_n| \leqslant |x_{m+1}| + \ldots + |x_n|.$$

și putem folosi criteriul lui Cauchy.

c. Criteriul lui Weierstrass. *Seria* (1) *converge dacă au loc majorările* $|x_n| \leqslant \alpha_n$ *pentru norme, pentru toate valorile lui* n *(începînd de la un număr oarecare) și seria* $\sum_1^\infty \alpha_n$ *converge.*

Într-adevăr, în ipoteza formulată, seria $\sum_1^\infty |x_n|$ converge împreună cu seria $\sum_1^\infty \alpha_n$, conform criteriului comparației.

d. Criteriul lui Cauchy. *Seria* (1) *converge dacă* $\overline{\lim}\sqrt[n]{|x_n|} < 1$ *și divergentă dacă* $\overline{\lim}\sqrt[n]{|x_n|} > 1$.

Demonstrația se face la fel ca în 6.14 b pentru o serie numerică.

e. Criteriul Abel-Dirichlet. *Seria*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + \ldots, \qquad (3)$$

unde $x_1, x_2, \ldots$ *sînt vectori din spațiul* $\mathcal{R}$ *și* $a_1, a_2, \ldots$ *numere reale, converge în* $\mathcal{R}$ *dacă numerele* a_n *tind la zero descrescînd monoton și toate sumele* $s_n = x_1 + \ldots + x_n$ *sînt majorate în normă de aceeași constantă.*

Demonstrația este analoagă cu cea din 6.47 înlocuind modulele cu normele.

f. *Exemplu.* Considerăm seriile

$$\sum_0^\infty a_n \cos nt, \tag{4}$$

$$\sum_1^\infty b_n \sin nt \tag{5}$$

în spațiul $\mathbb{R}^s(a, b)$. Amintim că $\mathbb{R}^s(a, b)$ este un spațiu complet (12.23 f) și convergența în norma spațiului $\mathbb{R}^s(a, b)$ este convergența uniformă pe intervalul $[a, b]$. Normele funcțiilor $\cos nt$ și $\sin nt$ în spațiul $\mathbb{R}^s(a, b)$ sînt cel mult egale cu unitatea. Deci, dacă $\sum |a_n| < \infty$ sau $\sum |b_n| < \infty$, seria (4) sau, respectiv, (5) converge în spațiul $\mathbb{R}^s(a, b)$ (conform criteriului lui Weierstrass), cu alte cuvinte converge uniform pe $[a, b]$ oricare ar fi a și b.

În cazul divergenței seriei formate cu a_n sau cu b_n și a condiției $a_n \searrow 0$ (sau $b_n \searrow 0$), putem folosi criteriul lui Abel-Dirichlet. Pentru sumele de sinusi sau de cosinusi, au loc simultan (6.47(9)) majorările:

$$\left| \sum_{m=0}^{n} \begin{matrix} \cos mt \\ \sin mt \end{matrix} \right| \leqslant \sqrt{\frac{2}{1 - \cos t}}. \tag{6}$$

Dacă t variază în intervalul $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, unde $\varepsilon > 0$, atunci membrul secund al inegalității (6) este mărginit și putem trece la maximum în primul membru:

$$\max \left| \sum_0^n \begin{matrix} \cos mt \\ \sin mt \end{matrix} \right| = \left\| \sum_0^n \begin{matrix} \cos mt \\ \sin mt \end{matrix} \right\| \leqslant \sqrt{\frac{2}{1 - \cos \varepsilon}}.$$

Aceasta asigură aplicabilitatea criteriului Abel-Dirichlet în spațiul $\mathbb{R}^s(\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$. Astfel, seriile (4) și (5), în ipoteza $a_n \searrow 0$, $b_n \searrow 0$, converg uniform pe orice interval $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$. Aceste serii pot să nu conveargă uniform pe intervalul $[0, 2\pi]$ (cu toate că seria sinusilor converge în fiecare punct al său!). Mai departe (în 14.47) vom vedea că au loc egalitățile:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n} \sin nt = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t = 0 \text{ și } t = 2\pi, \\ \dfrac{\pi - t}{2} & \text{pentru } 0 < t < 2\pi, \end{cases} \tag{7}$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos nt = -\ln 2 \left| \sin \frac{t}{2} \right| \quad (0 < t < 2\pi). \qquad (8)$$

Dacă seria (7) ar converge uniform pe $[0, 2\pi]$, adică în raport cu norma spațiului $\mathbb{R}^e(0, 2\pi)$, suma sa $s(t)$ ar aparține acestui spațiu, deci ar fi o funcție continuă pe $[0, 2\pi]$. Dar din (7) se vede că funcția $s(t)$ este discontinuă în punctele 0 și 2π, deci nu are loc convergența uniformă a seriei (7) pe intervalul $[0, 2\pi]$.

Suma seriei (8) nu este mărginită pe $[0, 2\pi]$, deci aceasta nu este uniform convergentă pe $[0, 2\pi]$.

Seriile (7) și (8) nu converg uniform nici în intervalul deschis $(0, 2\pi)$.

12.38. *Completatul unui spațiu normat.* Ca orice spațiu metric, un spațiu normat $\mathcal{R}$ poate fi complet sau nu. În ultimul caz, spațiul $\mathcal{R}$ poate fi completat, scufundîndu-l într-un spațiu metric complet mai mare $\overline{\mathcal{R}}$ (§3.8). În plus, completatul unui spațiu normat este un spațiu nu numai metric, dar și normat : introducem în completatul spațiului operațiile liniare și verificăm axiomele spațiului normat.

Orice element X al completatului unui spațiu metric $\mathcal{R}$ era definit ca simbolul corespunzător unei clase de șiruri Cauchy cofinale ale spațiului $\mathcal{R}$. Fie acum $\mathcal{R}$ un spațiu normat. Atunci, adunînd termen cu termen două șiruri Cauchy $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ și $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ obținem un șir

$$x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n, \ldots,$$

care este încă șir Cauchy, deoarece

$$\|(x_n + y_n) - (x_m + y_m)\| \leqslant \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\|.$$

Dacă înlocuim aici șirul $\{x_n\}$ printr-un șir cofinal $\{x'_n\}$ și șirul $\{y_n\}$ printr-un șir cofinal $\{y'_n\}$, se ajunge la șirul sumelor $\{x'_n + y'_n\}$ care este cofinal împreună cu șirul $\{x_n + y_n\}$ deoarece

$$\|(x'_n + y'_n) - (x_n + y_n)\| \leqslant \|x'_n - x_n\| + \|y'_n - y_n\|.$$

Acest fapt permite să definim adunarea elementelor spațiului $\overline{\mathcal{R}}$. Alegem într-o clasă X un șir Cauchy $\{x_n\}$ și

într-o clasă Y un șir Cauchy $\{y_n\}$: numim *suma* lui X cu Y clasa care conține șirul Cauchy $\{x_n + y_n\}$.

Raționamentele precedente confirmă că definiția este corectă și că, în particular, rezultatul adunării nu depinde de alegerea șirurilor $\{x_n\}$ și $\{y_n\}$ din clasele respective.

Într-un mod analog, *produsul* unei clase X cu un număr λ este definit după cum urmează: alegem un șir Cauchy $\{x_n\}$ în clasa X și numim λX clasa ce conține șirul Cauchy $\{\lambda x_n\}$. Lăsăm cititorului grija de a verifica dacă această definiție este corectă.

Se verifică ușor axiomele 12.11 ale spațiului vectorial; în virtutea definiției însăși, operațiile liniare asupra claselor se reduc la operațiile corespunzătoare asupra elementelor spațiului inițial. În particular, clasa 0 este compusă din toate șirurile convergente către zero din spațiul $\mathfrak{R}$.

Ne rămîne să introducem o normă în spațiul $\mathfrak{R}$ și să verificăm axiomele 12.31 a—c. Norma unei clase X este definită de formula

$$\|X\| = \rho(X, 0),$$

unde ρ este distanța în spațiul metric completat $\mathfrak{R}$ (3.82(1)). Cu alte cuvinte, $\|X\| = \lim \rho(x_n, 0)$, unde x_n este un șir Cauchy al clasei X. Dacă $\|X\| = 0$, atunci $\lim \|x_n\| = 0$, adică șirul $\{x_n\}$ este cofinal cu șirul $\{0, 0, \ldots\}$ ce definește clasa 0; deci $X = 0$ și axioma 12.31a este verificată. Fixînd în două clase X, Y două șiruri Cauchy $\{x_n\}$, respectiv $\{y_n\}$, alegem în clasa $X + Y$ șirul Cauchy $\{x_n + y_n\}$. Știind că $\|x_n + y_n\| \leqslant \|x_n\| + \|y_n\|$, de aici rezultă că

$$\|X + Y\| = \lim \|x_n + y_n\| \leqslant \lim \|x_n\| + \lim \|y_n\| \leqslant$$
$$\leqslant \|X\| + \|Y\|,$$

deci axioma 12.31 c este verificată. În mod analog, avem

$$\|\lambda X\| = \lim \|\lambda x_n\| = |\lambda| \lim \|x_n\| = |\lambda| \, \|X\|,$$

deci axioma 12.31 b este de asemenea verificată. Astfel afirmația noastră este demonstrată.

12.39. *Spații vectoriale normate complexe.*

a. În 12.31 — 12.38 au fost considerate spații normate reale. Totuși nu este greu să introducem noțiunea de spa-

ţiu normat peste corpul numerelor complexe. [Este imposibil să extindem definiţia la cazul spaţiului vectorial peste un corp oarecare K, deoarece pentru elementele α ale unui corp oarecare K nu este definită valoarea absolută $|\alpha|$]. Anume, un spaţiu vectorial complex $\mathcal{C}$ este numit *spaţiu normat complex*, dacă oricărui vector $x \in \mathcal{C}$ îi facem să corespundă un număr nenegativ $|x|$, *norma* vectorului x, care verifică următoarele condiţii :

1) $|x| > 0$, dacă $x \neq 0$, $|0| = 0$;

2) $|\alpha x| = |\alpha|\,|x|$ pentru orice $x \in \mathcal{C}$ şi orice α complex ;

3) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ oricare ar fi x şi y din $\mathcal{C}$ (*axioma triunghiului*).

Deoarece într-un spaţiu complex este admisă înmulţirea cu toate numerele complexe, orice spaţiu normat complex este în acelaşi timp un spaţiu normat real. În consecinţă, proprietăţile spaţiilor normate reale pot fi extinse direct, sau sub formă uşor modificată, la spaţii normate complexe. În particular, un spaţiu normat complex, la fel ca cel real, este un spaţiu metric cu distanţa definită de formula $\rho(x, y) = |x - y|$.

b. Spaţiul tuturor funcţiilor $x(t)$ cu valori complexe, mărginite şi continue pe un spaţiu metric M, cu norma

$$\|x\| = \sup_t |x(t)|$$

este un spaţiu normat complex pe care îl notăm cu $\mathcal{C}^s(M)$. Acest spaţiu este complet (12.23f).

c. Spaţiul funcţiilor $x(t)$ complexe continue pe un interval $[a, b]$, înzestrat cu norma

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\int_a^b |x(t)|^p \, dt},$$

este un spaţiu normat complex ; el este notat prin $CL_s^p(a, b)$ (sau, pur şi simplu cu $L_p^s(a, b)$, ca spaţiul analog al funcţiilor reale, dacă este exclusă vreo confuzie).

d. Spaţiul tuturor funcţiilor $x(t)$ continue şi mărginite pe un spaţiu metric M, cu valori într-un spaţiu normat

complex $\mathcal{C}$, înzestrat cu norma

$$\|x\| = \sup_t |x(t)|$$

(unde $|x(t)|$ este norma spațiului $\mathcal{C}$), este un spațiu normat complex; el este notat prin $\mathcal{C}^s(M)$. El este complet dacă $\mathcal{C}$ este complet (12.23 f).

e. Este suficientă o mică schimbare pentru ca exemplele de spații normate reale de dimensiune finită semnalate în 12.33 c să devină exemple analoage de spații normate complexe de dimensiune finită: nu avem decît să înlocuim vectorul real $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ prin vectorul complex (adică să considerăm coordonatele $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ca numere complexe) și să scriem, în formulele 12.33 (6) și (4), $\|\xi_k\|^2$ și $|\xi_k^2|$ în loc de ξ_k^2 și ξ_k^2. Se obțin, în același mod, analoagele complexe ale spațiilor l_p de dimensiune infinită (12.33d).

f. O mulțime E într-un spațiu normat complex $\mathcal{C}$ se numește *absolut convexă*, dacă odată cu două puncte oarecare x, y ea conține orice punct de forma $\alpha x + \beta y$, unde numerele complexe α și β sînt astfel încît $|\alpha| + |\beta| \leqslant 1$. Orice bilă $\{x \in \mathcal{C} \| x - x_0| \leqslant \rho\}$ dintr-un spațiu normat complex este o mulțime absolut convexă.

g. Condițiile de echivalență a normelor dintr-un spațiu normat real (12.35 a—f) rămîn valabile pentru norme dintr-un spațiu complex. În particular, într-un spațiu complex de dimensiune finită orice două norme sînt echivalente și convergența în raport cu orice normă revine la convergența pe coordonate (componente). Toate spațiile normate complexe de dimensiune finită sînt complete, așa cum este cazul pentru spații reale.

h. O dată demonstrată pentru spații reale, teorema lui Riesz asupra non-compacității bilelor într-un spațiu normat de dimensiune infinită (12.36b) este de asemenea stabilită pentru spații complexe.

i. Teoria convergenței seriilor de vectori dintr-un spațiu normat, expusă în 12.37 în cazul real, se extinde fără nici o modificare la cazul complex.

Dăm aici un exemplu specific. Fie o serie de puteri

$$\sum_0^\infty a_k(z - z_0)^k,$$

unde z şi z_0 sînt numere complexe şi coeficienţii a_k, elemente dintr-un spaţiu normat complex şi complet $\mathcal{C}$. Această serie *converge în interiorul discului de rază*

$$r = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|a_n\|}}$$

centrat în punctul z_0 şi diverge în exteriorul acestui disc. Se demonstrează la fel ca formula Cauchy-Hadamard din 6.62, aplicînd criteriul lui Cauchy 12.37 d.

j. Completatul $\overline{\mathcal{C}}$ al unui spaţiu normat complex $\mathcal{C}$ este construit la fel ca şi în cazul real (12.38) şi reprezintă un spaţiu normat complex şi complet.

§ 12.4. Spaţii hilbertiene

12.41. Într-un spaţiu vectorial normat se pot măsura distanţele, dar nu unghiurile, ceea ce restrînge posibilitatea de interpretare geometrică. Într-un spaţiu hilbertian este dat, prin definiţie, un produs scalar de vectori prin care putem exprima lungimile vectorilor, ca şi unghiurile pe care le formează. Iată definiţia riguroasă : un spaţiu vectorial real H se numeşte *spaţiu hilbertian* (sau după unii autori, *prehilbertian* — *N.T.*), dacă pentru doi vectori oarecare x şi y al lui H este definit un număr real (x, y), numit *produsul scalar al vectorilor* x şi y, care satisface următoarele condiţii :

a. $(x, x) > 0$ dacă $x \neq 0$; $(0, 0) = 0$;

b. $(y, x) = (x, y)$ oricare ar fi x şi y din H ;

c. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ oricare ar fi x şi y din H şi numărul real α ;

d. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ oricare ar fi x, y, z din H.

Axiomele b—d au drept consecinţă formula generală care se demonstrează prin recurenţă

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j, \sum_{k=1}^{n} \beta_k y_k\right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \alpha_j \beta_k (x_j, y_k). \qquad (1)$$

Axiomatica expusă se raportează la spaţiile hilbertiene reale ; axiomatica spaţiilor hilbertiene complexe va fi dată mai jos (12.44).

12.42. *Exemple.*

a. Spațiul euclidian n-dimensional $\mathbb{R}_n$ pe care l-am introdus în 2.68 cu produsul scalar definit de formula

$$(x, y) = \sum_1^n \xi_k \eta_k, \tag{1}$$

unde $x = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, $y = \{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ satisface toate condițiile formulate mai sus.

b. Spațiul n-dimensional $\mathbb{R}_n$ poate fi înzestrat cu un produs scalar diferit de (1). Este ușor să caracterizăm toate produsele scalare posibile din $\mathbb{R}_n$. Dacă (x, y) este un produs scalar în $\mathbb{R}_n$ și dacă $x = \sum \xi_k e_k$, $y = \sum \eta_k e_k$ sînt dezvoltările vectorilor x și y într-o bază $e_1, \ldots, e_n$ (2.75), atunci conform formulei 12.41(1) avem

$$(x, y) = (\sum_k \xi_k e_k, \sum_j \eta_j e_j) = \sum \xi_k \eta_j (e_k, e_j).$$

Astfel, este suficient să cunoaștem valorile produsului scalar pentru vectorii bazei (e_k, e_j) : produsul scalar a doi vectori oarecare x, y va fi determinat într-un mod univoc de numerele $\omega_{jk} = (e_j, e_k)$. Numerele ω_{jk} trebuie să verifice condiția de simetrie $\omega_{jk} = (e_j, e_k) = (e_k, e_j) = \omega_{kj}$ și inegalitatea

$$(x, x) = \sum \xi_j \xi_k \omega_{jk} > 0$$

pentru orice $x \neq 0$; aceasta înseamnă că matricea $\|\omega_{jk}\|$ trebuie să fie simetrică și pozitiv definită. Se demonstrează în algebră (de exemplu, [40]) că inegalitățile următoare reprezintă o condiție necesară și suficientă pentru ca o matrice simetrică $\|\omega_{jk}\|$ să fie pozitiv definită

$$\omega_{11} > 0, \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \begin{vmatrix} \omega_{11} & \ldots & \omega_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_{n1} & \ldots & \omega_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Invers, orice matrice simetrică pozitiv definită $\|\omega_{jk}\|$ definește, prin formula

$$(x, y) = \sum \xi_j \eta_k \omega_{jk},$$

un produs scalar în spațiul $\mathbb{R}_n$ fiind satisfăcute axiomele 12.41 a—d. Demonstrația se face cu ușurință.

c. În spațiul $\mathbb{R}^s(a, b)$ al funcțiilor reale continue vom introduce un produs scalar, de exemplu, după urmă-

toarea formulă care reprezintă un analog continuu al formulei (1):

$$(x(t), y(t)) = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt. \qquad (2)$$

Pentru această definiție verificarea axiomelor unui spațiu hilbertian este imediată ținînd cont de proprietățile obișnuite ale integralei (Există și alte moduri de a înzestra spațiul $\mathbb{R}^e(a, b)$ cu un produs scalar).

d. Considerăm spațiul vectorial l_2(12.33 d) format din toate șirurile numerice $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ astfel încît $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 < \infty$. Definim produsul scalar (x, y) a doi vectori $x = \{\xi_n\} \in l_2$ și $y = \{\eta_n\} \in l_2$ prin formula

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n. \qquad (3)$$

Convergența, chiar absolută, a seriei din membrul secund rezultă din inegalitatea $|ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, care este adevărată pentru orice pereche de numere reale a și b. Axiomele 12.41 a—d sînt aici imediate.

Astfel, spațiul l_2 devine spațiu hilbertian. Norma generată de produsul scalar (3) coincide cu norma din l_2 introdusă în 12.33d.

12.43. *Geometria spațiului hilbertian.*

a. Încă în 2.68 s-a dedus inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski

$$|(x, y)| \leqslant + \sqrt{(x, x)(y, y)} \qquad (1)$$

pentru doi vectori oarecare x și y ai unui spațiu hilbertian H (deoarece, de fapt, nu am utilizat acolo decît axiomele unui spațiu hilbertian).

Înzestrăm spațiul hilbertian H cu norma

$$\|x\| = + \sqrt{(x, x)}. \qquad (2)$$

Axiomele 12.31 ale unui spaţiu normat se verifică uşor: axioma 12.31a rezultă din axiomele 12.41a, 12 - 31b şi 12.41c. În ceea ce priveşte axioma triunghiului 12. 31c, deducerea ei din axiomele unui spaţiu hilbertian, se realizează, de fapt, în 2.68 utilizînd inegalitatea (1).

Astfel, toate noţiunile şi proprietăţile legate de existenţa unei norme sînt valabile pentru un spaţiu hilbertian. Totuşi, acesta fiind un caz special de spaţiu normat, este de aşteptat ca norma într-un spaţiu hilbertian să aibă cîteva proprietăţi specifice. Una din proprietăţile de acest gen este dată de următoarea lemă:

LEMA PARALELOGRAMULUI: *Oricare ar fi doi vectori x şi y ai unui spaţiu hilbertian H are loc egalitatea*

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2; \qquad (3)$$

("suma pătratelor diagonalelor unui paralelogram este egală cu suma pătratelor laturilor sale").

Demonstraţia se reduce la o transformare simplă:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=(x+y,x+y)+(x-$$

$$-y,x-y)=2(x,x)+2(y,y)=2\|x\|^2+2\|y\|^2.$$

Se poate demonstra că dacă norma dintr-un spaţiu normat satisface condiţia (3), ea este generată de un produs scalar (exerc. 4).

Ce formă are sfera $\{\|x\|=1\}$ din $\mathbb{R}_n$ în cazul cînd norma $\|x\|$ este obţinută, plecînd de la un produs scalar (x,y), după formula $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ (vezi 2.68a)?

Pentru acest caz, avem

$$(x,x)=\Big(\sum_j \xi_j e_j,\ \sum_k \xi_k e_k\Big)=\sum_j\sum_k \xi_j\xi_k(e_j,e_k)=1,$$

adică sfera $\|x\|=1$ este o suprafaţă cu centru, de gradul al doilea; cum ea este mărginită, reprezintă un elipsoid.

b. Fie $x_n\to x$ şi $y_n\to y$ două şiruri convergente de vectori ai unui spaţiu hilbertian H. Să arătăm că

$$(x_n,y_n)\to(x,y).$$

Într-adevăr, avem

$$(x,y)-(x_n,y_n)=(x,y-y_n)+(x-x_n,y_n),$$

și conform ineglității (1)

$$|(x, y) - (x_n, y_n)| \leqslant \|x\| \|y - y_n\| + \|x - x_n\| \|y_n\|;$$

al doilea membru tinde către 0 pentru $n \to \infty$, deoarece $\|y - y_n\| \to 0$, $\|x - x_n\| \to 0$ și șirul convergent y_n este mărginit (3.33b).

c. Într-un spațiu hilbertian se pot măsura nu numai lungimile vectorilor (norme), dar și unghiurile pe care ei le formează. Unghiul a doi vectori nenuli x și y este definit prin formula

$$\cos \widehat{(x, y)} = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|};$$

inegalitatea (1) asigură existența acestui unghi (în intervalul $[0, \pi)$].

d. Doi vectori x și y dintr-un spațiu hilbertian H se numesc *ortogonali* dacă $(x, y) = 0$. Cînd $x \neq 0$ și $y \neq 0$, această definiție spune că unghiul vectorilor x și y este $\frac{\pi}{2}$. Vectorul nul este ortogonal pe orice vector.

În spațiul euclidian $\mathbb{R}_n$ cu produsul scalar 12.42(1), condiția de ortogonalitate a doi vectori

$$x = (\xi_1, \ldots, \xi_n), \quad y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$$

are forma

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k = 0.$$

În spațiul funcțional $\mathbb{R}^s(a, b)$ cu produsul scalar 12.42 (2), condiția de ortogonalitate a doi vectori $x = x(t)$ și $y = y(t)$ are forma

$$\int_a^b x(t)\, y(t)\, dt = 0.$$

e. Dacă un vector x este ortogonal pe vectorii $y_1, \ldots, y_m$, el este ortogonal pe orice combinație liniară

$\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_m y_m$. Într-adevăr,

$$(x, \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_m y_m) = \alpha_1 (x, y_1) + \ldots + \alpha_m (x, y_m) = 0.$$

De aici rezultă că mulțimea tuturor vectorilor ortogonali pe un vector x (sau pe orice vector al unei mulțimi fixate $X \subset H$) formează un subspațiu în H; el se numește *suplementul ortogonal* al vectorului x (resp. al mulțimii X).

f. *Teorema lui Pitagora și generalizarea ei.* Presupunem că doi vectori x și y sînt ortogonali; atunci prin analogie cu geometria elementară putem numi vectorul $x + y$ ipotenuza triunghiului dreptunghic construit cu vectorii x și y. Formînd produsul scalar al vectorului $x + y$ cu el însuși și folosind ortogonalitatea lui x și y se obține

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Am demonstrat astfel pentru un spațiu hilbertian general teorema lui Pitagora: *pătratul ipotenuzei este egal cu suma pătratelor laturilor.* Este ușor să generalizăm această teoremă în cazul unui număr oarecare de termeni. Anume, fie $x_1, \ldots, x_k$ vectori doi cîte doi ortogonali și $y = x_1 + \ldots + x_k$; atunci avem

$$\|y\|^2 = (x_1 + \ldots + x_k, x_1 + \ldots + x_k) = \|x_1\|^2 + \ldots + \|x_k\|^2.$$

g. *Ortogonalizare.* Pentru a obține un sistem de vectori ortogonali, se utilizează adesea ortogonalizarea unui sistem dat neortogonal. Să prezentăm metoda. Fie un sistem de vectori $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ai unui spațiu hilbertian H în care orice subsistem finit $x_1, \ldots, x_n$ este liniar independent. Folosind formulele

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1, \\ y_2 &= a_{21} x_1 + x_2, \\ y_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + x_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{n,n-1} x_{n-1} + x_n, \end{aligned} \tag{4}$$

cu coeficienţi a_{jk} aleşi convenabil, se poate obţine un sistem $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ de vectori nenuli şi doi cîte doi ortogonali. Formulele (4) cu coeficienţii a_{jk} aleşi convenabil sînt numite *formule de ortogonalizare*.

Existenţa unei soluţii pentru acest sistem, ce satisface condiţiile cerute de ortogonalitate, se demonstrează uşor prin recurenţă. Într-adevăr, presupunem că am construit vectorii $y_1, \ldots, y_{n-1}$ nenuli şi ortogonali doi cîte doi, care verifică primele $n-1$ ecuaţii ale sistemului (4) şi să arătăm că este posibil să găsim un vector y_n ce verifică a n-a ecuaţie şi este ortogonal pe vectorii $y_1, \ldots, y_{n-1}$. Căutăm vectorul y_n ca o combinaţie liniară de vectorii $x_1, \ldots, x_n$ de următoarea formă :

$$y_n = b_{n1}y_1 + \ldots + b_{n,n-1}y_{n-1} + x_n, \qquad (5)$$

unde $y_1, \ldots, y_{n-1}$ sînt vectorii găsiţi deja, $b_{n1}, \ldots, b_{n,n-1}$ coeficienţii ce trebuie determinaţi. Înmulţind scalar ecuaţia (5) cu $y_k (k < n)$ şi utilizînd ortogonalitatea presupusă a lui y_k pe $y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_{n-1}$, obţinem

$$(y_n, y_k) = b_{nk}(y_k, y_k) + (x_n, y_k).$$

Egalînd membrul secund cu zero, ajungem la o ecuaţie în raport cu coeficientul b_{nk}, care se poate rezolva deoarece $(y_k, y_k) \neq 0$ prin ipoteza de recurenţă. Deoarece toţi coeficienţii $b_{n1}, \ldots, b_{n,n-1}$ sînt astfel găsiţi, egalitatea (5) determină vectorul y_n. Prin construcţie, el va fi ortogonal pe fiecare din vectorii $y_1, \ldots, y_{n-1}$; rămîne să demonstrăm că $y_n \neq 0$. Pentru aceasta, introducem în a n-a ecuaţie din (4) expresiile lui $y_1, \ldots, y_{n-1}$ obţinute din primele $n-1$ ecuaţii; vom avea o expresie liniară a lui y_n prin $x_1, \ldots, x_n$, unde coeficientul lui x_n va fi 1. Dacă y_n ar fi nul, am avea dependenţă liniară între $x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$, care însă nu are loc conform presupunerii de recurenţă. Deci $y_n \neq 0$ şi metoda de ortogonalizare este stabilită complet.

Se poate „perfecţiona" sistemul ortogonal obţinut $y_1, \ldots, y_n, \ldots$ împărţind fiecare vector y_n prin lungimea sa; vom avea sistemul de vectori $e_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$ care va fi nu numai ortogonal, dar şi normat, în sensul că fie-

care vector e_n va avea norma 1. Pe scurt, un sistem de vectori ortogonal și normat se numește *ortonormat*.

h. *Izomorfism de două spații euclidiene n-dimensionale.* Conform definiției generale a izomorfismului de structuri matematice (2.52), două spații hilbertiene H' și H'' se numesc *izomorfe* dacă sînt izomorfe atît ca spații vectoriale (12.14i) și dacă, în plus, corespondențele

$$x' \leftrightarrow x'', \quad y' \quad y''(x', y' \in H', x'', \quad y'' \in H'') \text{ implică}$$

$$(x', y') = (x'', y'').$$

Vom demonstra că două spații hilbertiene oarecare de aceeași dimensiune finită n sînt izomorfe.

Pentru a face aceasta, construim în spațiul n-dimensional dat H o bază ortonormată $e_1, \ldots, e_n$, ortogonalizînd un sistem liniar independent oarecare de n vectori după metoda din punctul g. Calculăm produsul scalar a doi vectori $x = \sum_1^n \xi_k e_k$ și $y = \sum_1^n \eta_m e_m$. Vectorii $e_1, \ldots, e_n$ fiind ortonormați, avem

$$(x, y) = \left(\sum_1^n \xi_k e_k, \sum_1^n \eta_m e_m\right) = \sum_1^n \sum_1^n \xi_k \eta_m (e_k, e_m) = \sum_1^n \xi_k \eta_k. \tag{6}$$

Astfel, un spațiu hilbertian n-dimensional oarecare H_n poate fi reprezentat ca un spațiu de coordonate (făcînd să corespundă oricărui vector $x = \sum_1^n \xi_k e_k$ mulțimea $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ a coordonatelor sale) cu produsul scalar definit de (6). Dar, aceasta spune că spațiul H_n este izomorf cu spațiul $\mathbb{R}_n$ (12.42a). Două spații hilbertiene n-dimensionale oarecare H_n' și H_n'' sînt izomorfe, deoarece fiecare din ele este izomorf cu un același spațiu $\mathbb{R}_n$.

Rezultatul demonstrat este foarte important. Într-adevăr, chiar pentru un spațiu hilbertian de dimensiune infinită, atunci cînd se lucrează într-un subspațiu de dimensiune finită, în particular într-un subspațiu bidimensional sau tridimensional, putem să ne bazăm pe propozițiile cunoscute ale geometriei euclidiene uzuale.

12.44. Deoarece analistul are adesea nevoie de funcții cu valori complexe, este nevoie de o generalizare într-un mod convenabil a noțiunii de spațiu hilbertian. În cazul cînd spațiul vectorial este complex, valorile produsului scalar pe care le vom introduce pot fi complexe. Dar nu mai este posibil să păstrăm condițiile 12.41 a-c deoarece expresia (ix, ix) trebuie să fie pozitivă conform a, în timp ce, conform *b* și *c*, avem

$$(ix, ix) = i(x, ix) = i(ix, x) = i^2(x, x) < 0.$$

Pentru un spațiu complex acceptăm următoarea definiție.

Un spațiu vectorial complex (adică un spațiu vectorial cu înmulțirea cu constante numere complexe) se numește *spațiu hilbertian*, dacă pentru orice doi vectori x și y din H este definit un număr complex (x, y), numit *produsul scalar al lui* x *și* y, satisfăcînd următoarele condiții:

a. $(x, x) > 0$ dacă $x \neq 0$; $(0, 0) = 0$;

b. $(y, x) = \overline{(x, y)}$ (numărul complex conjugat) oricare ar fi x și y din H;

c. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ oricare ar fi x și y din H și α complex;

d. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ oricare ar fi x, y, z din H.

Din punctele *b* și *c* rezultă:

e. $(x, \alpha y) = \overline{(\alpha y, x)} = \overline{\alpha}\overline{(y, x)} = \overline{\alpha}(x, y)$.

Plecînd de la b-e se găsește ușor formula generală

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j, \sum_{k=1}^{n} \beta_k y_k\right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \alpha_j \overline{\beta}_k (x_j, y_k). \qquad (1)$$

12.45. *Exemple.*

a. Cel mai simplu exemplu de spațiu hilbertian complex este cel al spațiului complex n-dimensional $\mathbb{C}_n$. El este format din mulțimile ordonate de n numere complexe $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ cu operațiile liniare obișnuite (pe coordonate) și produsul scalar definit după cum urmează: dacă $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, atunci $(x, y) = \xi_1\overline{\eta}_1 + \ldots + \xi_n\overline{\eta}_n$ unde η_k este numărul complex conjugat lui η_k. Axiomele 12.44 a-d sînt imediate.

Spațiul $\mathbb{C}_n$ poate fi de asemenea înzestrat cu alte produse scalare [40].

b. Un alt exemplu de spațiu hilbertian complex este dat de spațiul $\mathbb{C}^c[a, b]$ al funcțiilor $x(t)$ cu valori complexe, continue pe un interval $a \leqslant t \leqslant b$, cu produsul scalar definit de formula

$$(x(t),\ y(t)) = \int_a^b x(t)\,\overline{y(t)}\,dt.$$

Proprietățile 12.44 a-d rezultă ușor din proprietățile obișnuite ale integralei.

c. Spațiul real l_2 (12.42 d) are ca analog complex spațiul tuturor șirurilor numerice complexe $x = \{\xi_n\}$, astfel încît $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 < \infty$. Aici produsul scalar este dat de formula

$$(x, y) = (\{\xi_n\}, \{\eta_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \overline{\eta}_n.$$

Axiomele 12.44 se verifică fără dificultate.

12.46. a. Fie H un spațiu hilbertian complex. Punem, ca în cazul real,

$$\|x\| = +\sqrt{(x, x)}. \tag{1}$$

Vom demonstra inegalitatea Cauchy-Buniacovski-Schwarz

$$|(x, y)| \leqslant \|x\|\,\|y\|. \tag{2}$$

Pentru orice α complex, are loc inegalitatea

$$(\alpha x - y,\ \alpha x - y) \geqslant 0.$$

Efectuînd operațiile din primul membru, se obține

$$\alpha\overline{\alpha}(x,\ x) - \alpha(x, y) - \overline{\alpha}\overline{(x, y)} + (y, y) \geqslant 0.$$

Punem $\alpha = te^{-i\arg(x, y)}$ (t real); atunci $\alpha(x, y) = t|(x, y)|$ și inegalitatea ia forma

$$t^2(x, x) - 2t|(x, y)| + (y, y) \geqslant 0.$$

Deoarece trinomul real din stînga nu poate avea rădăcini reale distincte (altfel el nu ar avea semn constant), coeficienții săi vor satisface inegalitatea $|(x, y)|^2 \leqslant (x, x) \times (y, y)$, ceea ce trebuia demonstrat.

b. La fel ca și în cazul real, inegalitatea (2) implică inegalitatea triunghiului.

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

pentru norma (1).

c. În mod similar cazului real, doi vectori x, y ai unui spațiu hilbertian complex H se numesc *ortogonali* dacă $(x, y) = 0$. Un sistem $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ de vectori, pentru care orice parte finită este liniar independentă, poate fi ortogonalizat ca în 12.43 g, adică putem construi conform formulelor 12.43 g (4) un sistem de vectori nenuli, ortogonali doi cîte doi. În particular, orice spațiu hilbertian complex n-dimensional H_n are o bază ortonormată $e_1, \ldots, e_n$. Produsul scalar al vectorilor $x = \sum_1^n \xi_k e_k$ și $y = \sum_1^n \eta_m e_m$ se obține după formula

$$(x, y) = \left(\sum_1^n \xi_k e_k, \sum_1^n \eta_m e_m\right) = \sum_1^n \xi_k \overline{\eta}_m (e_k, e_m) = \sum_1^n \xi_k \overline{\eta}_k. \tag{3}$$

În particular, din formula (3) rezultă că, la fel ca și în cazul real, spațiul n-dimensional H_n este izomorf cu spațiul $\mathbb{C}_n$ (12.45a) și că, în consecință, *orice două spații hilbertiene complexe n-dimensionale sînt izomorfe.*

12.47. *Completatul unui spațiu hilbertian.* Ca orice spațiu normat, un spațiu hilbertian H (real sau complex) poate fi complet sau nu. Astfel, spațiile hilbertiene de dimensiune finită, reale sau complexe (12. 42 a, b, 12.45a) sînt complete (12.35e, 12.39g), spațiile de funcții cu produsul scalar integral (12.42c, 12.45b) nu sînt complete (vezi 12.26b). Spațiile l_2, real și complex (12.45c), sînt complete (exerc. 18). Dacă un spațiu hilbertian H nu este complet, el se poate completa scufundîndu-l într-un spațiu normat mai larg, așa cum am făcut-o în 12.38. Vom arăta că prin completarea unui spațiu hilbertian se ob-

ține nu numai un spațiu normat, dar chiar un spațiu hilbertian. Pentru aceasta, trebuie să definim în completat, o operație de produs scalar astfel încît axiomele 12.41 a-d (în cazul real) sau 12.44 a-d (în cazul complex) să fie satisfăcute.

Fiecare element X al completatului unui spațiu normat $\mathcal{R}$ era definit ca simbol corespunzător unei clase de șiruri Cauchy cofinale ale spațiului $\mathcal{R}$. Fie X și Y două elemente oarecare ale completatului $\bar{H}$ al unui spațiu hilbertian H, $\{x_n\}$ și $\{y_n\}$ două șiruri Cauchy ce aparțin claselor respective. Vom arăta că numerele (x_n, y_n) au limită pentru $n \to \infty$. Avem

$$|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)| = |(x_n - x_m, y_n) + (x_m, y_n - y_m)| \leqslant$$

$$\leqslant \|x_n - x_m\| \, \|y_n\| + \|x_m\| \, \|y_n - y_m\|.$$

Șirurile Cauchy $\{x_n\}$ și $\{y_n\}$ fiind mărginite (3.71c), cantitatea obținută tinde către zero pentru $m \to \infty$, $n \to \infty$, astfel că șirul numeric (x_n, y_n) verifică criteriul lui Cauchy. De aici rezultă că el are o limită. Aceasta nu depinde de alegerea șirului $\{x_n\}$ din clasa X și a șirului $\{y_n\}$ din clasa Y; dacă $\{x_n'\}$ și $\{y_n'\}$ sînt alte două șiruri din aceste clase, atunci

$$|(x_n', y_n') - (x_n, y_n)| = |(x_n' - x_n, y_n') - (x_n, y_n' - y_n)| \leqslant$$

$$\leqslant \|x_n' - x_n\| \, \|y_n'\| + \|x_n\| \, \|y_n' - y_n\| \to 0,$$

pentru $n \to \infty$, deoarece șirurile numerice (x_n', y_n') și (x_n, y_n) au o limită comună. Punem acum

$$(X, Y) = \lim_{n \to \infty} (x_n, y_n).$$

Am văzut că numărul (X, Y) este bine determinat de clasele X și Y fără să depindă de alegerea șirurilor $\{x_n\}$ și $\{y_n\}$ din aceste clase. În particular, numărul $\sqrt{(X, X)} = \lim_{n \to \infty} \sqrt{(x_n, x_n)} = \lim_{n \to \infty} \|x_n\|$ coincide cu norma clasei X în spațiul normat $\bar{H}$. Axioma 12.41 a este deci satisfăcută în spațiul $\bar{H}$. Axiomele 12.41 b-d (sau 12.44 b-d în cazul complex) sînt verificate prin trecere la limită în axiomele respective pentru spațiul H. De exemplu, în cazul real,

avem

$$(Y, X) = \lim_{n\to\infty} (y_n, x_n) = \lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (X, Y),$$

celelalte axiome fiind verificate într-un mod analog.

12.48. *Spațiu prehilbertian.*

a. Se poate ca pentru un spațiu vectorial L, pe care îl presupunem real pentru a fixa ideile, să introducem o funcție (x, y) cu proprietatea că sînt verificate axiomele 12.41b-d iar axioma 12.41a nu: există elemente $z \neq 0$ astfel încît $(z, z) = 0$. Uneori un astfel de spațiu L se numește *spațiu prehilbertian.* (În terminologia actuală, spațiile prehilbertiene sînt spații Hilbert în sensul 12.41 și se numesc spații Hilbert, spațiile prehilbertiene complete.) Se poate trece de la spațiul L la un spațiu cît L/E (12.14i) pe care îl putem deja considera ca spațiu hilbertian.

b. Alegem ca mulțime E, mulțimea tuturor elementelor z astfel încît $(z, z) = 0$. Dacă $(z, z) = 0$ și $y \in L$ este oarecare, atunci în virtutea inegalității Cauchy-Buniacovski a cărei deducție nu se bazează decît pe axiomele 12.41b-d, avem

$$|(z, y)| \leqslant \sqrt{(z, z)}\sqrt{(y, y)} = 0, \tag{1}$$

deci $(z, y) = 0$ pentru orice $y \in L$.

Vom arăta că E este un subspațiu în L. Dacă $z_1 \in E$, $z_2 \in E$, atunci conform (1),

$$(z_1 + z_2, z_1 + z_2) = (z_1, z_1) + 2(z_1, z_2) + (z_2, z_2) = 0,$$

deci $z_1 + z_2 \in E$. Este de asemenea evident că $(z_1, z_1) = 0$ implică

$$(\alpha z_1, \alpha z_1) = \alpha^2 (z_1, z_1) = 0,$$

deci $\alpha z_1 \in E$ dacă $z_1 \in E$. În consecință, mulțimea E este un subspațiu în L.

Formăm spațiul cît $H = L/E$ și îl înzestrăm cu produsul scalar

$$(X, Y) = (x, y), \tag{2}$$

unde $x \in X$, $y \in Y$ sînt aleși arbitrar. Vom arăta înainte de toate că definiția dată pentru produsul scalar nu depin-

de de alegerea elementelor x și y din clasele lor. Fie $x_1 \sim x$, $y_1 \sim y$, deci $x_1 = x + z$, $y_1 = y + u$, $z \in E$, $u \in E$. Atunci, conform (1), avem

$$(x_1, y_1) = (x, y) + (z, y) + (x, u) + (z, u) = (x, y),$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Verificăm axiomele 12.41a-d pentru spațiul H. Dacă $(X, X) = 0$, atunci $(x, x) = 0$ pentru orice $x \in X$, deci X coincide cu clasa E care servește ca zero în spațiul L/E (12.14i), deci axioma 12.41a este verificată. În ceea ce privește celelalte axiome, ele rezultă din axiomele respective ale spațiului L și din definiția (2). Astfel, spațiul $H = L/E$ este deja un spațiu hilbertian.

c. Se poate realiza o construcție complet analoagă pentru un spațiu prehilbertian complex L: dacă E este mulțimea tuturor $z \in L$ cu proprietatea că $(z, z) = 0$, atunci $L/E = H$ este un spațiu hilbertian complex.

d. Ca exemplu, considerăm spațiul vectorial real $G(a, b)$ al tuturor funcțiilor continue pe porțiuni pe un interval $[a, b]$ cu produsul scalar

$$(x(t), y(t)) = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt.$$

Aici axiomele 12.41b-d sînt verificate și axioma 12.41a nu, deoarece pentru o funcție $z(t) \in G$, care este nulă peste tot cu excepția unui număr finit de puncte, are loc relația

$$(z(t), z(t)) = \int_a^b z^2(t)\, dt = 0, \tag{3}$$

conform 9.16c, cu toate că $z(t)$ nu este vectorul nul al spațiului G. În consecință, G nu este un spațiu hilbertian, dar este un spațiu prehilbertian. Putem ajunge la un spațiu hilbertian trecînd de la spațiul G la spațiul său cît G/E, unde E este mulțimea tuturor funcțiilor $z \in G$ care verifică egalitatea (3): acestea sînt funcțiile care nu diferă de zero decît într-un număr finit de puncte (9.16d). Spațiul cît G/E este format din clasele de funcții $x(t) \in G$;

două funcții aparțin unei aceleiași clase dacă ele nu sînt distincte decît într-un număr finit de puncte.

e. Trecerea de la spațiul prehilbertian complex $G[a, b]$ al tuturor funcțiilor complexe continue pe porțiuni pe intervalul $[a, b]$, cu

$$(x(t), y(t)) = \int_a^b x(t)\,\overline{y(t)}\,dt$$

pentru produsul scalar, la spațiul cît hilbertian complex G/E, prin subspațiul E al funcțiilor complexe ce nu diferă de zero decît într-un număr finit de puncte, se efectuează într-un mod analog.

Vom continua studiul spațiilor hilbertiene, din punct de vedere al aplicațiilor în analiză, în capitolul 14.

§ 12.5. Aproximări în spațiul funcțiilor continue pe un compact

12.51. Spațiul $\mathbb{R}'(Q)$ (resp. $\mathbb{C}'(Q)$) al tuturor funcțiilor reale (resp. complexe) continue pe un compact Q este un spațiu vectorial (12.13i-k) normat (12.32a, 12.39d) și complet (12.23f). Vom considera diferite familii liniare $B(Q)$ de funcții reale (resp. complexe) continue pe compactul Q. Se pune întrebarea care sînt condițiile care trebuie impuse familiei $B(Q)$ pentru ca închiderea sa în raport cu convergența uniformă pe compactul Q, adică în raport cu norma spațiului $\mathbb{R}'(Q)$ (resp. $\mathbb{C}'(Q)$), să conțină toate funcțiile continue pe Q?

a. Spunem că o familie $B(Q)$ de funcții separă două puncte z și y ale mulțimii Q dacă există în $B(Q)$ o funcție φ astfel încît $\varphi(z) \neq \varphi(y)$ (funcție separatoare pentru punctele z și y). Afirmația că $B(Q)$ nu separă punctele z și y înseamnă că $f(z) = f(y)$ pentru toate funcțiile $f \in B(Q)$. În acest caz, deoarece ultima egalitate se păstrează prin trecere la închiderea familiei $B(Q)$ în raport cu convergența uniformă, închiderea familiei $B(Q)$ nu poate conține toate funcțiile continue; de exemplu, ea nu conține funcția $\rho(x, y)$ care este nulă pentru $x = y$ și nenulă pentru $x = z$. Deci, dacă vrem ca închiderea unei familii $B(Q)$ să conțină toate funcțiile continue pe compactul

Q, trebuie să presupunem că ea separă oricare două puncte ale compactului Q.

b. Un spațiu vectorial $B(Q)$, conținînd funcții reale definite pe mulțimea Q, se numește *rețea liniară*, dacă de îndată ce $f \in B(Q)$ rezultă $|f| \in B(Q)$.

Oricare ar fi două numere reale α și β, au loc relațiile :

$$\max\{\alpha, \beta\} + \min\{\alpha, \beta\} = \alpha + \beta;$$

$$\max\{\alpha, \beta\} - \min\{\alpha, \beta\} = |\alpha - \beta|.$$

În consecință, oricare ar fi două funcții reale f și g

$$\max\{f(x), g(x)\} + \min\{f(x), g(x)\} = f(x) + g(x),$$

$$\max\{f(x), g(x)\} - \min\{f(x), g(x)\} = |f(x) - g(x)|.$$

Rezolvînd aceste ecuații în raport cu $\max\{f(x), g(x)\}$ și $\min\{f(x), g(x)\}$, rezultă că odată cu două funcții f și g, o rețea liniară conține funcțiile $\max\{f(x), g(x)\}$ și $\min\{f(x), g(x)\}$. Apoi, raționînd prin recurență, ajungem ușor la concluzia că dacă o rețea liniară conține funcțiile $f_1, \ldots, f_n$, ea conține de asemenea funcțiile $\max\{f_1, \ldots, f_n\}$ și $\min\{f_1, \ldots, f_n\}$.

c. TEOREMĂ. *O rețea liniară $B(Q)$ pe un compact Q, care separă două puncte oarecare din Q și conține funcția $e = 1$, este densă în spațiul $\mathbb{R}^s(Q)$ al tuturor funcțiilor continue pe Q.*

Demonstrație. O rețea liniară $B(Q)$, ce conține 1 și separă două puncte z și y, conține orice funcție ce ia în punctele z și y orice valori prescrise; se poate găsi o astfel de funcție de forma $a\varphi + b \cdot 1$, unde φ este o funcție din $B(Q)$ ce separă punctele z și y, iar a, b sînt constante.

Fie un $\varepsilon > 0$ dat și o funcție continuă f. Oricare ar fi două puncte z și y (nu neapărat distincte) se poate găsi, după cum am arătat mai sus, o funcție $\varphi_{zy} \in B(Q)$ pentru care $\varphi_{zy}(z) = f(z)$, $\varphi_{zy}(y) = f(y)$. Fie

$$U_{zy} = \{x \in Q \mid \varphi_{zy}(x) < f(x) + \varepsilon\}.$$

Mulțimea U_{zy} este deschisă și conține punctele z și y. Fixăm z; atunci mulțimile deschise U_{zy} considerate

pentru toţi $y \in Q$ formează o acoperire a compactului Q. Conform lemei 3.97 se poate extrage din ea o acoperire finită $U_{zy_1}, \ldots, U_{zy_m}$. Considerăm funcţia

$$\varphi_z(x) = \min \{\varphi_{zy_1}(x), \ldots, \varphi_{zy_m}(x)\},$$

ce aparţine reţelei liniare $B(Q)$. Deoarece, pentru orice $x \in Q$ şi pentru z fixat, este adevărată cel puţin una din inegalităţile ce definesc domeniile U_{zy_k}, are loc relaţia $\varphi_z(x) = \min_k \varphi_{zy_k} < f(x) + \varepsilon$, pentru orice $x \in Q$. În acelaşi timp, avem $\varphi_z(z) = \min_k \varphi_{zy_k}(z) = f(z)$.

Punem

$$V_z = \{x \in Q \mid \varphi_z(x) > f(x) - \varepsilon\}.$$

Mulţimea V_z este deschisă şi conţine punctul z. Mulţimile V_z pentru toţi $z \in Q$ formează o acoperire a compactului Q. Conform lemei 3.97, din ea se poate extrage o acoperire finită

$$V_{z_1}, \ldots, V_{z_n}.$$

Punem acum

$$\varphi(x) = \max \{\varphi_{z_1}(x), \ldots, \varphi_{z_n}(x)\};$$

această funcţie aparţine reţelei liniare $B(Q)$ şi avem, prin construcţie,

$$\varphi(x) = \max_j \varphi_{z_j}(x) < f(x) + \varepsilon.$$

Dar în orice punct $x \in Q$ este adevărată cel puţin una din inegalităţile ce definesc domeniul V_{z_j}, deci

$$\varphi(x) = \max \varphi_{z_j}(x) > f(x) - \varepsilon.$$

În final, pentru orice $x \in Q$, avem

$$f(x) - \varepsilon < \varphi(x) < f(x) + \varepsilon.$$

ceea ce demonstrează teorema.

(Teorema nu mai este adevărată dacă renunţăm la ipoteza $e = 1 \in B(Q)$: fiind date două puncte z şi y, re-

țeaua liniară a tuturor funcțiilor continue f, ce verifică relația $f(z) = 2f(y)$, nu este densă peste tot în spațiul $\mathbb{R}^r(Q)$).

12.52. *Teorema lui Stone.*

a. Conform definiției generale a unei algebre (12.18a), un spațiu vectorial $B(Q)$ de funcții (reale) pe un compact Q se numește *algebră*, dacă de îndată ce $f, g \in B(Q)$ rezultă $fg \in B(Q)$.

b. LEMĂ. *O algebră reală $B(Q)$, care conține unitatea și este închisă în raport cu convergența uniformă, este o rețea liniară.*

Demonstrație. Vom demonstra că funcția $|f|$ aparține algebrei $B(Q)$ de îndată ce f aparține lui $B(Q)$. Fără să micșorăm generalitatea, putem pune $\max|f(x)| = 1$.

Considerăm seria Taylor

$$(1-\xi)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\xi + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\xi^2}{1\cdot 2} - \ldots$$

$$\ldots + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}(-\xi)^n + \ldots$$

Am văzut în 9.52d $\left(\text{pentru } \alpha = \frac{1}{2}\right)$ și în 6.65 că ea converge uniform pentru $0 \leqslant \xi \leqslant 1$.

Inegalitatea $0 \leqslant f^2(x) \leqslant 1$ fiind verificată pe compactul Q are loc, după cum am văzut mai sus, relația

$$|f(x)| = \sqrt{1-(1-f^2(x))} = 1 - \frac{1}{2}(1-f^2(x)) -$$

$$-\frac{1}{8}(1-f^2(x))^2 + \ldots$$

seria din dreapta fiind uniform convergentă pe Q. Deoarece algebra $B(Q)$ este închisă în raport cu convergența uniformă, $|f| \in B(Q)$, ceea ce trebuia demonstrat.

c. TEOREMA LUI STONE (pentru o algebră reală). *O algebră $B(Q)$ formată din funcții reale, ce separă orice două puncte ale compactului Q și conține unitatea e, este densă în spațiul $\mathbb{R}^s(Q)$.*

Demonstrație. Notăm cu $\overline{B(Q)}$ închiderea algebrei $B(Q)$ în raport cu convergența uniformă. Evident, familia $\overline{B(Q)}$ este algebră: dacă $f_n \to f$ (uniform pe Q) și dacă $g_n \to g$ (uniform pe Q), atunci $f_n g_n \to fg$ (uniform pe Q); deci din $f \in \overline{B(Q)}$, $g \in \overline{B(Q)}$ rezultă $fg \in \overline{B(Q)}$.

Algebra $\overline{B(Q)}$ este o rețea liniară (lema din punctul b) și este densă în spațiul $\mathbb{R}^s(Q)$ (teorema 12.51 c). Deoarece algebra $\overline{B(Q)}$ este închisă, $\overline{B(Q)} = \mathbb{R}^s(Q)$, ceea ce trebuia demonstrat.

12.53.a. S-ar putea crede că o algebră formată din funcții cu valori complexe, cu proprietatea că ea separă orice două puncte ale compactului Q și conține unitatea, este densă în spațiul $\mathbb{C}^s(Q)$ al tuturor funcțiilor complexe continue pe Q. Totuși, sub această formă, teorema se dovedește a fi falsă (vezi exerc. 5).

b. Totuși, într-o ipoteză suplimentară, teorema lui Stone se extinde la algebre de funcții cu valori complexe. O algebră complexă $B(Q)$ se numește *simetrică*, dacă odată cu orice funcție $\varphi = u + iv$ ea conține și funcția conjugată $\overline{\varphi} = u - iv$.

TEOREMA LUI STONE (pentru o algebră complexă). *O algebră $B(Q)$ formată din funcții cu valori complexe, ce separă două puncte oarecare ale compactului Q, ce conține unitatea și este simetrică, este densă în spațiul $\mathbb{C}^s(Q)$.*

Demonstrație. Prin ipoteză, algebra $B(Q)$ conține odată cu o funcție $\varphi = u + iv$ funcțiile reale $u(x) = \frac{1}{2}[\varphi(x) + \overline{\varphi}(x)]$ și $v(x) = \frac{1}{2i}[\varphi(x) - \overline{\varphi}(x)]$. Notăm cu $B_{\mathbb{R}}(Q)$ subalgebra funcțiilor reale $h \in B(Q)$. Această subalgebră separă orice două puncte y și z ale compactului Q (dacă $\varphi(y) \neq \varphi(z)$, atunci sau $u(y) \neq u(z)$ sau $v(y) \neq v(z)$) și conține unitatea. Conform teoremei lui Stone 12.52 c, avem $\overline{B_{\mathbb{R}}(Q)} = \overline{\mathbb{R}^s(Q)}$, de unde $\overline{B(Q)} = \mathbb{C}^s(Q)$.

12.54. *Consecințe ale teoremei lui Stone.*

a. Presupunem că mulțimea compactă Q este o parte închisă mărginită a lui $\mathbb{R}_n$ și că algebra $B(Q)$ este formată din toate polinoamele reale $p(x_1, \ldots, x_n)$. Toate ipotezele teoremei lui Stone 12.52 c sînt evident verificate. Aplicînd-o, ajungem la următoarea teoremă:

TEOREMĂ (*Weierstrass*). *Orice funcție reală f continuă pe o mulțime închisă mărginită $Q \subset \mathbb{R}_n$ este limita uniformă pe Q a unui șir de polinoame în $x_1, \ldots, x_n$.*

b. Pentru algebra $B(Q)$ a polinoamelor $p(x_1, \ldots, x_n)$ cu valori complexe, ipotezele teoremei lui Stone 12.53 b sînt verificate; în concluzie, orice funcție cu valori complexe f, continuă pe o mulțime închisă mărginită $Q \subset \mathbb{R}_n$ este limita uniformă pe Q a unui șir de polinoame (cu valori complexe) în $x_1, \ldots, x_n$.

c. În particular, orice funcție (reală sau complexă) continuă pe un interval închis $a \leqslant x \leqslant b$ este limita uniformă a unui șir de polinoame (resp. reale sau complexe) în x.

d. Presupunem acum că mulțimea compactă Q este cercul $x^2 + y^2 = 1$ în planul xOy. Poziția unui punct pe acest cerc este determinată de unghiul polar φ. Alegem ca algebră $B(Q)$, mulțimea polinoamelor trigonometrice cu coeficienți reali

$$p(\varphi) = \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi). \qquad (1)$$

Formulele de înmulțire pentru funcțiile trigonometrice (5.63) pe care le putem pune sub forma

$$2 \cos k\varphi \cos m\varphi = \cos (k - m)\varphi + \cos (k + m)\varphi,$$

$$2 \cos k\varphi \sin m\varphi = \sin (m - k)\varphi + \sin (m + k)\varphi,$$

$$2 \sin k\varphi \sin m\varphi = \cos (k - m)\varphi - \cos (k + m)\varphi,$$

implică faptul că mulțimea funcțiilor (1) conține odată cu două funcții oarecare și produsul lor, deci este efectiv o algebră. Orice două puncte φ_1 și φ_2 sînt separate printr-o funcție din algebra $B(Q)$, anume prin $\sin\varphi$ sau $\cos\varphi$.

Aplicînd teorema lui Stone 12.52c, obținem o nouă variantă a teoremei a :

TEOREMĂ (Weierstrass). *Orice funcție reală $f(\varphi)$ continuă pe cercul Q este limita uniformă a unui șir de polinoame trigonometrice* (1) *cu coeficienți reali.*

e. Alegem pe dreapta reală o funcție reală g continuă și periodică de perioadă 2π; evident, ei i se poate asocia o funcție continuă pe cercul Q, punînd $f(\varphi) = g(\varphi + 2k\pi)$, cu $k \in \mathbb{Z}$. Invers, oricărei funcții $f(\varphi)$ continuă pe cercul Q, i se poate asocia prin formula $g(t + 2k\pi) = f(t)$ o funcție g continuă pe toată dreapta reală. Deci teorema d se mai poate formula după cum urmează.

TEOREMĂ. *Orice funcție reală continuă pe $\mathbb{R}$ și periodică, de perioadă 2π, este limita uniformă (pe întreg $\mathbb{R}$) a unui șir de polinoame trigonometrice.*

f. Versiunea complexă a teoremelor din punctele a și e este, dintr-un anumit punct de vedere, mai simplă. Plecînd de la formulele lui Euler 8.63

$$\cos k\varphi = \frac{1}{2}(e^{ik\varphi} + e^{-ik\varphi}),$$

$$\sin k\varphi = \frac{1}{2i}(e^{ik\varphi} - e^{-ik\varphi}),$$

putem înlocui polinoamele trigonometrice (1) prin polinoamele

$$q(\varphi) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\varphi}. \tag{2}$$

Din regulile de înmulțire pentru funcția exponențială rezultă că polinoamele (2) formează o algebră. Simetria acestei algebre rezultă din egalitatea $\overline{\sum c_k e^{ik\varphi}} = \sum \overline{c_k} e^{-ik\varphi}$. Două puncte oarecare φ_1, φ_2 ale cercului Q sînt separate prin funcția $e^{i\varphi}$. Teorema 12.53b conduce la următorul rezultat :

TEOREMĂ. *Orice funcție cu valori complexe, continuă pe cercul Q (sau ceea ce revine la același lucru, orice funcție continuă, de perioadă 2π, pe axa $-\infty < t < \infty$) este limita uniformă a unui șir de polinoame trigonometrice complexe de forma* (2).

12.55. *Şiruri delta-reprezentative.* Teorema lui Stone, care stabileşte posibilitatea de a aproxima orice funcţie continuă prin funcţii dintr-o algebră $B(Q)$, nu indică totuşi nici o regulă de construcţie a funcţiilor aproximante. Indicăm aici cîteva metode concrete de aproximare.

Deoarece în cele ce urmează vom utiliza integrarea, presupunem că mulţimea compactă Q este un interval închis al dreptei numerice sau cercul de rază 1 (intervalul $[-\pi, \pi]$ cu extremităţi identificate).

a. Notăm cu $U_\rho(y)$ intervalul deschis de lungime 2ρ centrat în punctul y ($y \in Q$, $\rho > 0$). Presupunem că pentru orice $y \in Q$ există un şir de funcţii nenegative $D_n(x; y)$ ($n = 1,2,3, \ldots$) cu proprietăţile

$$1) \quad \int_{U_\rho(y)} D_n(x; y)\, dx \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 1 \qquad (\forall)\rho > 0,$$

$$2) \quad \int_{Q - U_\rho(y)} D_n(x; y)\, dx \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0 \qquad (\forall)\rho > 0.$$

Un astfel de şir $D_n(x, y)$ se numeşte *delta-reprezentativ* (pentru punctul y) (Originea acestui termen va fi explicată mai tîrziu.)

b. TEOREMĂ. *Fie $D_n(x, y)$ un şir delta-reprezentativ pentru un punct y; dacă $f : Q \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe porţiuni şi continuă în punctul y, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \int_Q D_n(x; y) f(x)\, dx = f(y).$$

Demonstraţie. Fie $M = \sup_{x\in Q} |f(x)|$. Pentru un $\varepsilon > 0$ dat, alegem un $\delta > 0$ astfel încît $\rho(x, y) \leqslant \delta$ să implice $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. De asemenea, avem

$$\left| \int_Q D_n(x; y) f(x) dx - f(y) \right| =$$

$$= \left| \int_Q D_n(x; y)[f(x) - f(y)]\, dx + f(y) \left[\int_Q D_n(x; y)\, dx - 1 \right] \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{U_\delta(y)} D_n(x;y)\,|f(x)-f(y)|\,dx + \int_{Q-U_\delta(y)} D_n(x;y)\,|f(x)-$$

$$-f(y)|\,dx + |f(y)|\left|\int_Q D_n(x;y)\,dx - 1\right| \leqslant \varepsilon \int_{U_\delta(y)} D_n(x;y)\,dx +$$

$$+ 2M \int_{Q-U_\delta(y)} D_n(x;y)\,dx + M\left|\int_Q D_n(x;y)\,dx - 1\right|.$$

În virtutea proprietăţilor 1) şi 2) ale unui şir delta-reprezentativ, mărimea obţinută este inferioară lui 2ε pentru n suficient de mare, ceea ce trebuia demonstrat.

c. Să menţionăm acum că dacă funcţia $D_n(x;y)$ este continuă în raport cu mulţimea variabilelor $x \in Q$, $y \in Q$ şi dacă $f(x)$ este totdeauna continuă pe porţiuni, atunci

$$f_n(x) = \int_Q D_n(x;y)\,f(y)\,dy \tag{2}$$

este o funcţie continuă pe Q. Într-adevăr,

$$|f_n(x') - f_n(x'')| = \left|\int_Q [D_n(x';y) - D_n(x'';y)]\,f(y)\,dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant M\int_Q |D_n(x';y) - D_n(x'';y)|\,dy, \tag{3}$$

şi dacă găsim pentru un $\varepsilon > 0$ dat un $\delta > 0$ astfel încît inegalitatea $|x' - x''| < \delta$ să implice

$$|D_n(x';y) - D_n(x'';y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi M},$$

pentru orice $y \in Q$, atunci conform (2) avem:

$$|f_n(x') - f_n(x'')| \leqslant \varepsilon,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

d. Să completăm teorema cu următoarea observație asupra convergenței uniforme. Înainte de orice, este clar că dacă proprietățile 1) și 2) sînt verificate pentru orice punct y al unei submulțimi $E \subset Q$ și dacă funcția f este continuă în orice punct $y \in E$, atunci rezultatul din punctul b este adevărat pentru orice punct $y \in E$.

Spunem că relațiile 1) și 2) *au loc uniform pe o mulțime* $E \subset Q$ dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un N astfel încît diferențele dintre primul și al doilea membru al relațiilor 1) și 2) respectiv, nu depășesc în modul numărul ε, oricare ar fi $n \geqslant N$ și $y \in E$.

Spunem că o funcție f este *uniform continuă pe* E *în raport cu* Q, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, se poate găsi un $\delta > 0$ astfel încît $|x - y| \leqslant \delta$, $x \in Q$, $y \in E$ să implice $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.

Atunci, din majorările (3) rezultă imediat următoarea propoziție.

TEOREMĂ. *Dacă relațiile* 1) *și* 2) *sînt verificate uniform pe o mulțime* E, *pentru orice* $\rho > 0$, *și dacă funcția* f *este uniform continuă pe* E *în raport cu* Q, *atunci funcțiile* f_n *date de* (2) *converg uniform pe* E *către funcția* f *cînd* $n \to \infty$.

e. Pentru aplicarea teoremei din punctul d este util următorul criteriu de continuitate uniformă a unei funcții f pe o mulțime E în raport cu Q :

LEMĂ. *Pe orice mulțime închisă* $E \subset Q$ *de puncte de continuitate a unei funcții* f, *această funcție* f *este uniform continuă în raport cu* Q.

Demonstrație. Conform teoremei lui Heine (5.17 b) funcția f este uniform continuă pe E și, pentru orice $\varepsilon > 0$, se poate găsi un $\delta_0 > 0$ astfel încît $|y - z| < \delta_0$, $y \in E$, $z \in E$ să implice $|f(y) - f(z)| < \varepsilon/2$. Mai departe, alegem pentru orice punct $y \in E$ un interval $|x - y| < \delta(y) \leqslant \delta_0/2$ în care să aibă loc inegalitatea $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$; apoi, aplicînd 3.97, extragem, din acoperirea obținută pentru mulțimea E o acoperire finită $|x - y_1| < \delta_1 \ldots, |x - y_n| < \delta_n$. Fie $\delta = \min(\delta_1, \ldots, \delta_n)$. Atunci, oricare ar fi $x \in Q$, $y \in E$, $|x - y| < \delta$, se găsește un punct y_k, cu $|x - y_k| < \delta_k$, și se obține

$$|y_k - y| < |y_k - x| + |x - y| < \delta_k + \delta \leqslant \frac{\delta_0}{2} + \frac{\delta_0}{2} = \delta_0$$

şi

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(y_k)| + |f(y_k) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

f. Iată aici o variantă întărită a teoremei din punctul b : *dacă* $D_n(x; y)$ *este un şir delta-reprezentativ pentru un punct* y *şi* $f(x)$ *este continuă pentru* $x = y$, *atunci pentru orice şir* $y_n \to y$, *avem*

$$\lim_{n \to \infty} \int_Q D_n(x; y_n) f(x)\, dx = f(y).$$

Demonstraţia se obţine prin acelaşi raţionament, cu un plus de precizie a estimaţiei.

g. Să considerăm cazul cînd parametrul discret n este înlocuit printr-un parametru continuu t. Fie $D(t, x, y)$ o funcţie nenegativă de trei variabile, x şi y parcurgînd compactul Q, iar t un interval $0 < t \leqslant b$; presupunem că pentru $\rho > 0$ sînt satisfăcute condiţiile :

1) $$\lim_{t \to 0} \int_{|x-y| < \rho} D(t, x, y)\, dx = 1 ;$$

2) $$\lim_{t \to 0} \int_{|x-y| > \rho} D(t, x, y)\, dx = 0.$$

Atunci, dacă pentru orice t se dă o mărime $y(t)$, care tinde către o limită y cînd $t \to 0$, vom avea

$$\lim_{t \to 0} \int_Q D(t, x, y(t)) f(x)\, dx = f(y).$$

Această egalitate se demonstrează în acelaşi mod ca şi teorema din punctul b (ţinînd cont de observaţia din punctul f). Se poate spune că funcţia

$$F(t, y) = \int_Q D(t, x, y) f(x)\, dx \quad (0 < t \leqslant b,\ y \in Q),$$

prelungită pentru $t = 0$ punînd

$$F(0, y) = f(y),$$

este continuă în domeniul închis $0 \leqslant t \leqslant b$, $y \in Q$.

h. Putem renunța la condiția că $D_n(x; y)$ (sau $D(t, x, y)$ în punctul g) este nenegativă, înlocuind-o prin condiția

$$\int_Q |D_n(x; y)| \, dx \leqslant c \quad \left(\text{sau} \int_Q |D(t, x, y)| \, dx \leqslant c\right) \quad (4)$$

unde c nu depinde de n. Condiția (4) este deja esențială; fără ea teorema nu este valabilă, ceea ce vom vedea în capitolul 14.

i. *Observație.* Termenul de „șir delta-reprezentativ" are ca origine „funcția delta" a lui Dirac. P. Dirac în cartea sa *Principiile mecanicii cuantice* (1930) a definit „funcția delta" $\delta(x)$ ca funcție pe axa $-\infty < x < \infty$, care este nulă peste tot, cu excepția punctului $x = 0$ și care are proprietatea

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \, dx = 1. \quad (5)$$

Apoi el a „demonstrat" teorema: oricare ar fi funcția f, continuă pentru $x = \xi$, are loc egalitatea

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \xi) f(\xi) \, d\xi = f(x). \quad (6)$$

(„Demonstrația" este simplă: funcția $\delta(x - \xi)$ este nulă pentru $\xi \neq x$, valorile lui $f(\xi)$ pentru $\xi \neq x$ nu au deci importanță; înlocuind $f(\xi)$ prin constanta $f(x)$ și aplicînd (5) se ajunge la (6)). În analiza clasică nu există nici o funcție care să aibă proprietățile formulate mai sus de către Dirac, și conținutul real al teoremei sale corespunde în esență teoremei din punctul b. Ceva mai tîrziu, în lucrările lui S. Sobolev (1935) și L. Schwartz (1947) funcția delta este definită ca obiect matematic, dar nu ca funcție în sens uzual, ci ca funcție generalizată (distri-

buție) (vezi, de exemplu, [43]). Funcția delta a lui Dirac reprezintă un exemplu caracteristic de intuiție matematică infailibilă a unui fizician care a depășit nivelul matematic al timpului său.

12.56. *Utilizarea șirurilor delta-reprezentative pentru construcția funcțiilor aproximante.*

a. Vrem să aproximăm o funcție $f(y)$ dată printr-o funcție $f_n(y)$ dintr-o algebră $B(Q)$. Problema va fi rezolvată dacă vom fi în măsură să găsim un șir delta-reprezentativ $D_n(x; y)$ astfel încît

$$f_n(y) = \int_Q D_n(x; y) f(x)\, dx \in B(Q).$$

b. Fie $Q = [0, 1]$ și fie $B(Q)$ algebra tuturor polinoamelor definite pe $[0, 1]$. Punem, pentru $n = 1,2, \ldots,$

$$D_n(x; y) = C_n[1 - (x - y)^2]^n,$$

unde

$$C_n = \frac{1}{\int_{-1}^{1} (1 - t^2)^n\, dt}, \tag{1}$$

și arătăm că, pentru orice $y \in (0, 1)$, $D_n(x; y)$, este un șir delta-reprezentativ. Deoarece funcția

$$f_n(y) = C_n \int_0^1 [1 - (x - y)^2]^n f(x)\, dx, \tag{2}$$

este un polinom în y de grad $\leqslant 2n$ (ceea ce este evident), obținem o expresie pentru polinoamele concrete ce aproximează funcția $f(y)$.

c. LEMĂ. *Pentru orice* $\rho \in (0, 1)$, *avem*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\int_\rho^1 (1 - t^2)^n\, dt}{\int_0^1 (1 - t^2)^n\, dt} = 0.$$

Demonstrația rezultă din estimările imediate

$$\int_{\rho}^{1}(1-t^2)^n\,dt<(1-\rho^2)^n(1-\rho)<(1-\rho^2)^n,$$

$$\int_{0}^{1}(1-t^2)^n\,dt>\int_{0}^{1}(1-t)^n\,dt=\frac{1}{n+1}$$

și din relația (5.58(4) și 4.37 a)

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)(1-\rho^2)^n=0.$$

Ca o consecință, rezultă : pentru orice $\rho\in(0,1)$ avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{0}^{\rho}(1-t^2)^n\,dt}{\int_{0}^{1}(1-t^2)^n\,dt}=1.$$

d. Verificăm acum proprietățile unui șir delta-reprezentativ (12.55 a și d) pentru funcția $D_n(x;y)$.

În virtutea lemei, avem pentru orice $\rho\in(0,1)$:

$$\int_{\substack{|x-y|\geq\rho\\0\leq x\leq 1}}D_n(x;y)\,dx=C_n\int_{\substack{|x-y|\geq\rho\\0\leq x\leq 1}}[1-(x-y)^2]^n\,dx=$$

$$=C_n\int_{\substack{|t|\geq\rho\\-y\leq t\leq 1-y}}(1-t^2)^n\,dt=2C_n\int_{\rho}^{1}(1-t^2)^n\,dt=$$

$$=\frac{\int_{\rho}^{1}(1-t^2)^n\,dt}{\int_{0}^{1}(1-t^2)^n\,dt}\to 0\quad(n\to\infty),$$

ceea ce demonstrează că proprietatea 2) este satisfăcută uniform pe mulțimea $0 \leqslant y \leqslant 1$. Apoi, pentru $y \in [\rho_0, 1 - \rho_0]$, $0 < \rho < \rho_0$, au loc relațiile

$$\int\limits_{\substack{|x-y| \leqslant \rho \\ 0 \leqslant x \leqslant 1}} D_n(x; y)\, dx = C_n \int\limits_{\substack{|x-y| \leqslant \rho \\ 0 \leqslant x \leqslant 1}} [1 - (x-y)^2]^n\, dx =$$

$$= C_n \int\limits_{-\rho}^{\rho} (1 - t^2)^n\, dt = \frac{\int\limits_0^{\rho} (1 - t^2)^n\, dt}{\int\limits_0^1 (1 - t^2)^n\, dt} \to 1 \quad (n \to \infty),$$

ceea ce demonstrează că proprietatea 1) este satisfăcută uniform pe mulțimea $\rho_0 \leqslant y \leqslant 1 - \rho_0$. În virtutea teoremei 12.55b și 12.55d, polinoamele (2) formează un șir care converge, pentru orice $y \in (0, 1)$, uniform pe orice interval $[\rho_0, 1 - \rho_0]$, $\rho_0 > 0$, către o funcție $f(y)$ continuă pe (0,1).

Printre altele, se obține o demonstrație directă a teoremei lui Weierstrass pentru intervalul $[\rho_0, 1 - \rho_0]$. Printr-o dilatare a acestui interval, extindem demonstrația pe tot intervalul $[a, b]$.

12.57.a. Se poate realiza o construcție analoagă care conduce la polinoame aproximante trigonometrice. Fie φ unghiul polar ce determină poziția unui punct pe cercul $Q = \{x^2 + y^2 = 1\}$ și $B(Q)$ algebra tuturor polinoamelor trigonometrice reale. Punem

$$D_n(\varphi; \psi) = C_n \cos^{2n} \frac{\varphi - \psi}{2},$$

$$C_n = \frac{1}{\int\limits_0^{2\pi} \cos^{2n} t\, dt} \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

şi arătăm că $D_n(\varphi\,;\,\psi)$ este un şir delta-reprezentativ pentru orice ψ. Deoarece funcţia

$$f_n(\psi) = C_n \int_0^{2\pi} \cos^{2n} \frac{\varphi - \psi}{2} f(\varphi)\, \mathrm{d}\varphi \qquad (2)$$

este un polinom trigonometric în ψ (de grad $\leqslant 2n$), se obţin polinoame trigonometrice concrete care aproximează f.

b. LEMĂ. *Pentru orice* $\rho \in (0, \pi/2)$ *avem*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_\rho^{\pi/2} \cos^{2n} t\, \mathrm{d}t}{\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t\, \mathrm{d}t} = 0.$$

Demonstraţie. Funcţia $\cos t$ fiind descrescătoare pentru $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$, avem

$$\int_0^{2/\pi} \cos^{2n} t\, \mathrm{d}t \leqslant \left(\frac{\pi}{2} - \rho\right) \cos^{2n}\rho \leqslant \frac{\pi}{2} \cos^{2n}\rho\,;$$

deoarece aceeaşi funcţie este convexă pe intervalul în discuţie, avem $\cos t \geqslant 1 - 2t/\pi$ şi

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t\, \mathrm{d}t \geqslant \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{2t}{\pi}\right)^{2n} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2\,(2n+1)}.$$

În consecinţă, ţinînd cont de 5.56, putem scrie

$$\frac{\int_\rho^{\pi/2} \cos^{2n} t\, \mathrm{d}t}{\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t\, \mathrm{d}t} \leqslant \frac{2(2n+1)}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \cos^{2n}\rho \to 0$$

pentru $n \to \infty$. Se obține deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^{\rho} \cos^{2n} t\, dt}{\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t\, dt} = 1$$

pentru orice $\rho \in (0, \pi/2)$.

c. Ținînd cont de lema din punctul b, pentru orice $\rho \in (0, \rho_0)$, $\rho_0 > 0$, avem

$$\int_{|\varphi-\psi|>\rho} D_n(\varphi;\psi)\, d\varphi = C_n \int_{|\varphi-\psi|>\rho} \cos^{2n} \frac{\varphi-\psi}{2}\, d\varphi =$$

$$= 2C_n \int_{\frac{\pi}{2}>|t|>\frac{\rho}{2}} \cos^{2n} t\, dt = \frac{\int_{\rho/2}^{\pi/2} \cos^{2n} t\, dt}{\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t\, dt} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

ceea ce demonstrează proprietatea 2) a unui șir delta-reprezentativ (12.55a). Apoi, pentru orice $\rho \in (0, \rho_0)$, $\rho_0 > 0$, avem

$$\int_{|\varphi-\psi|<\rho} D_n(\varphi;\psi)\, d\varphi = C_n \int_{|\varphi-\psi|<\rho} \cos^{2n} \frac{\varphi-\psi}{2}\, d\varphi =$$

$$= 2C_n \int_{-\rho/2}^{\rho/2} \cos^{2n} t\, dt = \frac{\int_0^{\rho/2} \cos^{2n} t\, dt}{\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t\, dt} \to 1 \quad (n \to \infty),$$

ceea ce demonstrează proprietatea 1). În virtutea teoremei 12.55d, polinoamele trigonometrice (2) formează un șir convergent uniform către o funcție $f(\varphi)$ pe orice mul-

ţime $E \subset Q$ pe care ea este uniform continuă în raport cu Q, în particular (12.55e), pe orice mulţime închisă pe care ea este continuă.

d. *Observaţie.* În cele două cazuri considerate se poate estima gradul polinomului (algebric sau trigonometric) care realizează aproximarea unei funcţii f cu o aproximare de ε dat, conform formulei (2) sau 12.56(2). Cu toate că polinoamele (2) sau (12.56(2) au o structură foarte simplă, ele nu sînt în general cele mai bune dintre toate polinoamele de un grad dat. Se demonstrează că există, printre polinoamele de grad n, unul care diferă de o funcţie dată şi continuă pe un interval $[a, b]$ prin cel mult $12\omega\left(\frac{b-a}{n}\right)$. Aici

$$\omega(\delta) = \max_{|x-y|\leq\delta} |f(x) - f(y)|$$

reprezintă oscilaţia funcţiei f pe intervalul $[a, b]$ (5.17c). Pentru polinoamele trigonometrice estimarea precedentă pe cercul Q este înlocuită prin $12\omega(1/n)$ (teorema lui D. Jackson; vezi [22]).

§12.6 Derivarea şi integrarea funcţiilor cu valori într-un spaţiu normat

12.61. *Derivata.*

a. Fie o funcţie $x(t)$ definită pe un interval $a \leqslant t \leqslant b$, cu valori într-un spaţiu vectorial normat X, real sau complex. Se spune că funcţia $x(t)$ este *derivabilă într-un punct* $t_0 \in [a, b]$ dacă există în spaţiul X limita

$$x'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \tag{1}$$

numită *derivata* funcţiei x în punctul $t = t_0$.

b. Funcţia x se numeşte *derivabilă pe tot intervalul* $[a, b]$ dacă derivata sa există în orice punct al acestui interval; derivata x' este atunci o funcţie definită pe intervalul $[a, b]$, cu valori în X.

c. Din definiţia (1) rezultă că dacă o funcţie $x(t)$ este derivabilă într-un punct t_0, atunci

$x(t) - x(t_0) = x'(t_0)(t - t_0) + \varepsilon(t, t_0)(t - t_0)$, unde $\varepsilon(t, t_0)$ tinde la zero în spaţiul X cînd $t \to t_0$.

d. În particular, din ipoteza de derivabilitate a lui $x(t)$ în punctul t_0 rezultă continuitatea sa în acest punct. O funcție derivabilă pe un segment este continuă pe acest segment. Se verifică ușor (ca și în cazul numeric) regulile principale ale derivării.

e. Dacă $x(t) = x_0$ este un element constant al spațiului X, atunci $x'(t) = 0$.

f. Dacă x și y sînt funcții derivabile cu valori în X, atunci la fel va fi și $x + y$ și are loc relația

$$[x(t) + y(t)]' = x'(t) + y'(t) \quad (\forall)\, t \in [a, b].$$

g. Dacă x este o funcție derivabilă cu valori în X și γ este o funcție numerică derivabilă, atunci produsul γx este o funcție derivabilă cu valori în X și are loc relația

$$[\gamma(t)x(t)]' = \gamma'(t)x(t) + \gamma(t)x'(t) \quad (\forall)t \in [a, b]. \qquad (2)$$

În particular,

$$[\alpha x(t)]' = \alpha x'(t)$$

pentru orice constantă α.

h. Dacă $x(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ este o funcție derivabilă de argument t cu valori în spațiul X și $t = t(\tau)$ este o funcție numerică derivabilă cu valori în intervalul $[a, b]$, atunci $y(\tau) = x(t(\tau))$ este o funcție derivabilă de τ și are loc relația

$$y'(\tau) = x'_t(t)\, t'(\tau).$$

i. Introducem noțiunea de diferențială a unei funcții $x(t)$ cu valori într-un spațiu normat. Vectorul $dx = x'(c)\, dt$, unde $dt = \Delta t$ este o creștere arbitrară a parametrului t, se numește *diferențiala* unei funcții vectoriale $x(t)$ pentru $t = c$. Astfel, diferențiala unei funcții este partea liniară principală a creșterii, corespunzînd unei creșteri a variabilei t.

Teorema asupra invarianței diferențialei unei funcții compuse rămîne valabilă: diferențiala funcției $x(t)$ are aceeași formă, fie că t este variabilă independentă, fie că este o funcție de o altă variabilă independentă τ (în acest ultim caz dt este partea liniară principală a creșterii funcției $t(\tau)$). Într-adevăr, dacă $g(\tau) = x[t(\tau)]$ și dacă $d_t x$ este diferențiala funcției x în raport cu variabila τ, atunci

conform g, avem

$$d_\tau x = g'(\tau)\, d\tau = x'(c)t'(\tau)\, d\tau = x'(c)\, dt = dx,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

j. În cele ce urmează (punctul *k*), vom stabili reciproca punctului e : *o funcție a cărei derivată este identic nulă este constantă.* Pentru o mai mare generalitate, vom demonstra această teoremă în ipoteza că funcția $x(t)$ este derivabilă pe porțiuni. Precizăm acum definițiile. O funcție $x(t)$ cu valori în spațiul X se numește *continuă pe porțiuni în intervalul închis* $a \leqslant t \leqslant b$, dacă există o partiție $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ astfel încît $x(t)$ să fie continuă în fiecare interval (t_k, t_{k+1}) și să aibă limitele $x(t_k+0)$ și $x(t_{k+1}-0)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$; ca de obicei, chiar în punctele t_k funcția $x(t)$ poate fi definită oricum sau poate să nu fie definită. Funcția $x(t)$ se numește *netedă pe porțiuni pe* $[a, b]$ dacă ea este continuă pe $[a, b]$, are derivată $x'(t)$ peste tot în $[a, b]$, cu excepția unui număr finit de puncte și această derivată este continuă pe porțiuni.

k. TEOREMĂ (reciproca proprietății e). *Dacă* $x(t)$, $t \in [a, b]$ *este o funcție netedă pe porțiuni cu valori într-un spațiu normat* X *și dacă derivata* $x'(t)$ *este nulă peste tot, acolo unde ea există, atunci,* $(\forall)\, t \in [a, b]$, $x(t) = x_0$ *(un element al spațiului* X*).*

Demonstrație. Presupunem la început că $x'(t) = 0$ peste tot în interiorul intervalului $[a, b]$. Fixăm un punct $c \in (a, b)$ și un număr $\varepsilon > 0$. Deoarece $x'(c) = 0$, există o vecinătate a unui punct c în care avem inegalitatea

$$|x(t) - x(c)| \leqslant \varepsilon\, |t - c|. \tag{3}$$

Notăm prin $T_\varepsilon(c)$ mulțimea formată din toate elementele $t > b$ și din acei $t \in [c, b]$ pentru care nu are loc inegalitatea (3). Fie $t_0 = \inf T_\varepsilon(c)$ și presupunem că $t_0 < b$. Deoarece $x(t)$ este continuă, inegalitatea (3) care este adevărată în vecinătatea punctului t_0 se păstrează și în punctul t_0. Deoarece $x'(t_0) = 0$, există o vecinătate a punctului t_0 în care are loc inegalitatea :

$$|x(t) - x(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2}\, |t - t_0|. \tag{4}$$

Alegem un $t > t_0$ pentru care inegalitatea (4) este adevărată. Din (3) și (4) rezultă că

$$|x(t) - x(c)| \leqslant |x(t) - x(t_0)| + |x(t_0) - x(c)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2}(t - t_0) + \varepsilon(t_0 - c) = \varepsilon\left(\frac{t - t_0}{2} + t_0 - c\right) <$$

$$< \varepsilon(t - c),$$

deoarece punctul t nu aparține mulțimii $T_\varepsilon(c)$. Dar acesta contrazice egalitatea $t_0 = \inf T_\varepsilon(c)$. În concluzie, are loc relația

$$|x(t) - x(c)| \leqslant \varepsilon(t - c)$$

pentru orice $t \in [c, b]$.

Deoarece ε este arbitrar, avem

$$x(t) - x(c) = 0$$

pentru orice $t \in [c, b]$, deci $x(t) = x(c)$.

Vedem deci că funcția $x(t)$ este constantă pe intervalul (c, b). Deoarece punctul c poate fi ales oricît de aproape de punctul a, funcția $x(t)$ este constantă pe tot intervalul $[a, b]$.

Considerăm acum cazul general: există pe intervalul $[a, b]$ un număr finit de puncte, $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = b$, în care funcția $x(t)$ nu are derivată; dar în fiecare interval (c_j, c_{j+1}) $(j = 0, \ldots, n - 1)$ mărimea $x'(t)$ există și este nulă. Raționamentul de mai sus arată că funcția $x(t)$ este constantă pe fiecare interval (c_j, c_{j+1}) $(j = 0, \ldots, n - 1)$. Funcția $x(t)$ fiind continuă pe intervalul $[a, b]$, valorile sale în intervale vecine (c_j, c_{j+1}) și (c_{j-1}, c_j) coincid; de aici rezultă că $x(t)$ este constantă pe tot intervalul $[a, b]$. Teorema este demonstrată.

12.62. *Integrala.*

a. Fie $x(t)$ o funcție dată pe un interval închis $[a, b]$ cu valori într-un spațiu Banach X (real sau complex). Fiind dată o partiție

$$\Pi = \{a = t_0 \leqslant \xi_0 \leqslant t_1 \leqslant \xi_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_{n-1} \leqslant \xi_{n-1} \leqslant t_n = b\}$$

a intervalului $[a, b]$, cu punctele marcate $\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}$ și de normă $d(\Pi) = \max \Delta t_i$ se poate forma suma integrală Riemann

$$s_\Pi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x(\xi_k)\, \Delta t_k. \tag{1}$$

Bineînțeles, această sumă este un element al spațiului X. Afirmăm că funcția $x(t)$ este continuă pe porțiuni, sumele (1) tind, pentru o rafinare nelimitată a partiției Π, adică pentru $d(\Pi) \to 0$, către o limită în X; o vom numi *integrala funcției* $x(t)$ *pe intervalul* $[a, b]$ și o vom nota

$$\int_a^b x(t)\, dt.$$

b. Demonstrația existenței integralei unei funcții continue pe porțiuni cu valori în X repetă demonstrația analoagă pentru o funcție numerică (9.14—9.16). Vom indica părțile sale principale. Funcția

$$\omega_x(\delta) = \sup_{\substack{|t'-t''|<\delta \\ t', t \in [a, b]}} \|x(t') - x(t'')\|$$

se numește *oscilația* funcției $x(t)$ pe intervalul $[a, b]$; dacă $x(t)$ este continuă, $\omega_x(\delta)$ tinde către zero pentru $\delta \to 0$. La fel ca în 9.14 c-d, au loc următoarele estimări pentru sumele integrale ale unei funcții oarecare $x(t)$: dacă o partiție Π' se obține dintr-o altă partiție Π adăugîndu-i noi puncte de diviziune, atunci

$$\|s_\Pi(x) - s_{\Pi'}(x)\| \leqslant \omega_x(\delta)\ (b - a); \tag{2}$$

pentru $d(\Pi) \leqslant \delta$; dacă Π și Π' sînt două partiții oarecare cu $d(\Pi) \leqslant \delta$, $d(\Pi') \leqslant \delta$, atunci

$$\|s_\Pi(x) - s_{\Pi'}(x)\| < 2\omega_x(\delta)\ (b - a). \tag{3}$$

Fiind stabilite estimările (2) și (3), nu ne mai rămîne decît să aplicăm (pentru $x(t)$ continuă) relația $\lim_{\delta \to 0} \omega_x(\delta) = 0$ și completitudinea spațiului X. Trecerea la o funcție continuă pe porțiuni se realizează la fel ca în 9.16.

c. Analog cu 9.15c, se poate demonstra că orice funcție $x(t)$ integrabilă pe $[a, b]$ este mărginită (în normă), adică

$$\|x(t)\| \leqslant c, \ (\forall)t \in [a, b].$$

Pentru funcții integrabile se verifică ușor următoarele proprietăți principale ale integralei:

1) $\int_a^b \alpha x(t)\,\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t$ (α — număr);

2) $\int_a^b [x(t) + y(t)]\,\mathrm{d}t = \int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b y(t)\,\mathrm{d}t$;

3) $\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c x(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c x(t)\,\mathrm{d}t \quad (a < b < c)$;

4) $\left\| \int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant \max_{a<t<b} \|x(t)\|\,(b - a)$;

5) $\left\| \int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant \int_a^b \|x(t)\|\,\mathrm{d}t.$

Toate acestea se obțin prin trecerea la limită, pornind de la proprietățile corespunzătoare pentru sume integrale.

d. *Valoarea medie a unei funcții.* La fel ca pentru funcțiile numerice (9.15 h), pentru o funcție $x(t)$ continuă pe porțiuni, cu valori într-un spațiu Banach X, mărimea

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t,$$

se numește *valoarea medie* a funcției $x(t)$ pe intervalul $[a, b]$. Valoarea medie a unei funcții $x(t)$ reală este cuprinsă între valorile ei cea mai mică și cea mai mare pe $[a, b]$ și este egală cu o valoare $x(t_0)$ dacă $x(t)$ este continuă.

Pentru o funcție cu valori într-un spațiu Banach, chiar pentru o funcție cu valori complexe, valoarea medie poate să nu fie atinsă, adică să fie distinctă de valorile funcției în orice punct al intervalului $[a, b]$. De exemplu,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ie^{it}\,dt = e^{it}\Big|_0^{2\pi} = 0,$$

cu toate că funcția ie^{it} nu se anulează nicăieri în intervalul de integrare.

e. Fie o mulțime E într-un spațiu vectorial L; numim *acoperire convexă* a mulțimii E, mulțimea $V(E)$ a tuturor vectorilor de forma

$$y = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k \quad \left(x_k \in E,\ \alpha_k \geqslant 0,\ \sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1,\ m = 1,2,\ldots\right) \tag{4}$$

Mulțimea $V(E)$ este convexă (1.34b): într-adevăr, dacă

$$\alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0,\ \alpha + \beta = 1,$$

$$x_k \in E,\ y_k \in E,$$

$$x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k \in V(E), \quad y = \sum_{r=1}^{n} \beta_r y_r \in V(E),$$

atunci vectorul

$$\alpha x + \beta y = \alpha \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k + \beta \sum_{r=1}^{n} \beta_r y_r = \sum_{k=1}^{m} \alpha \cdot \alpha_k x_k + \sum_{r=1}^{n} \beta \cdot \beta_r y_r$$

aparține lui $V(E)$, deoarece $\alpha\alpha_k \geqslant 0$, $\beta\beta_k \geqslant 0$ și

$$\sum_{1}^{m} \alpha \cdot \alpha_k + \sum_{1}^{n} \beta \cdot \beta_r = \alpha \sum_{1}^{m} \alpha_k + \beta \sum_{1}^{n} \beta_r = \alpha + \beta = 1.$$

Pe de altă parte, orice mulțime convexă P ce conține o mulțime dată E, conține de asemenea toți vectorii de forma (4). Pentru $m = 2$, aceasta rezultă chiar din definiția unei mulțimi convexe. Vom raționa prin inducție: presupunem că această afirmație este adevărată pentru orice $m - 1$ vectori și să arătăm că atunci ea este adevărată pentru m vectori oarecare $x_1, \ldots, x_m \in E$. Are loc

relaţia

$$z = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x_m =$$

$$= \frac{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{m-1} x_{m-1}}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_{m-1}} (\alpha_1 + \ldots + \alpha_{m-1}) + \alpha_m x_m =$$

$$= (\alpha_1 + \ldots + \alpha_{m-1}) z_1 + \alpha_m x_m.$$

Vectorul z_1 aparţine mulţimii P conform ipotezei d e inducţie; vectorul z aparţine mulţimii P, ca punct al segmentului ce uneşte z_1 şi x_m. Se poate deci spune că mulţimea $V(E)$ pe care am construit-o este cea mai mică mulţime convexă ce conţine E. Dacă E este ea însăşi convexă, atunci, evident, $V(E) = E$.

f. Într-un spaţiu Banach X nu orice mulţime convexă este închisă (de exemplu, un interval al dreptei reale). Fiind dată o mulţime $E \subset X$, se poate forma acoperirea sa convexă $V(E)$, apoi închiderea sa $\overline{V(E)}$; aceasta din urmă se numeşte *acoperirea convexă închisă a mulţimii* E. Mulţimea $\overline{V(E)}$ este de asemenea convexă; în general, închiderea unei mulţimi convexe este o mulţime convexă, deoarece din ipoteza

$$x = \lim x_n, \quad y = \lim y_n, \quad x_n \in V, \quad y_n \in V,$$

rezultă că

$$\alpha x + \beta y = \lim (\alpha x_n + \beta y_n) \in \overline{V}.$$

Mulţimea $\overline{V(E)}$ este cea mai mică mulţime convexă închisă ce conţine o mulţime dată E.

g. TEOREMĂ. *Media* (punctul d) *a unei funcţii* $x(t)$ *continuă pe porţiuni, cu valori într-un spaţiu Banach* X, *aparţine acoperirii convexe a mulţimii valorilor funcţiei* $x(t)$ *pe intervalul* $[a, b]$.

Demonstraţia rezultă din definiţia medicei

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b x(t)\, dt = \frac{1}{b-a} \lim_{d(\Pi) \to 0} \sum_{k=1}^{n} x(\xi_k)\, \Delta t_k,$$

deoarece suma integrală din dreapta aparţine acoperirii convexe a valorilor funcţiei $\left(\text{întrucît } \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^{n} \Delta t_k = 1\right)$.

În exemplul din punctul d media funcției ie^{it} pe $[0, 2\pi]$, care este egală cu 0, aparține acoperirii convexe a tuturor valorilor funcției ie^{it} pe $[0, 2\pi]$: aceste valori se află pe cercul de rază 1, acoperirea lor convexă este întreg discul limitat de acest cerc.

h. *Integrale improprii.* Teoria integralelor improprii funcții cu valori într-un spațiu Banach poate fi construită prin analogie cu cazul funcțiilor numerice (capitolul 11). Vom indica etapele principale. Fie $x(t)$ o funcție cu valori într-un spațiu Banach X, definită pe semidreapta $a \leqslant t < \infty$ și integrabilă (de exemplu, continuă pe porțiuni) pe orice interval $a \leqslant t \leqslant b$. Integrala improprie de prima speță

$$\int_a^\infty x(t)\,dt \tag{5}$$

este definită ca limita (în norma spațiului X) integralei

$$\int_a^b x(t)\,dt \tag{6}$$

pentru $b \to \infty$, cu condiția ca limita să existe.

În particular, dacă integrala improprie uzuală

$$\int_a^\infty \|x(t)\|\,dt \tag{7}$$

există, va exista și integrala improprie (5), care se numește atunci *absolut convergentă*; în plus, are loc și următoarea estimare :

$$\left\|\int_a^\infty x(t)\,dt\right\| \leqslant \int_a^\infty \|x(t)\|\,dt. \tag{8}$$

Existența integralei (5) în ipoteza existenței integralei (7), rezultă din criteriul lui Cauchy : *pentru ca integrala* (5) *să existe, este necesar și suficient ca, pentru orice* $\varepsilon > 0$,

să existe un N astfel încît să aibă loc inegalitatea

$$\left\| \int_p^q x(t)\,\mathrm{d}t \right\| < \varepsilon$$

oricare ar fi $p \geqslant N$, $q \geqslant N$.

Definiţia integralelor improprii de speţa a doua şi a treia se generalizează în mod analog.

12.63. *Integrala şi primitiva.*

a. Fie $x(t)$ o funcţie continuă pe porţiuni pe un interval $[a, b]$ cu valori într-un spaţiu Banach X; să arătăm că funcţia

$$F(t) = \int_a^t x(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{1}$$

are ca derivată, în orice punct $t = t_0$ de continuitate al funcţiei $x(t)$, valoarea $x(t_0)$.

Conform regulilor de integrare 12.62 c, avem

$$\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t x(\xi)\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t x(t_0)\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t [x(\xi) - x(t_0)]\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= x(t_0) + \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t [x(\xi) - x(t_0)]\,\mathrm{d}\xi.$$

Apoi, datorită continuităţii lui $x(t)$ în punctul t_0, are loc relaţia

$$\left| \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t [x(\xi) - x(t_0)]\,\mathrm{d}\xi \right| \leqslant \max_{\xi \in [t_0, t]} \|x(\xi) - x(t_0)\| \to 0:$$

făcînd $t \to t_0$, obţinem rezultatul căutat.

b. Funcția $G(t)$ cu valori într-un spațiu Banach X se numește *primitivă* a funcției $x(t)$ continuă pe porțiuni dacă $G'(t) = x(t)$ în orice punct de continuitate a lui $x(t)$. Dacă există două primitive $G(t)$ și $F(t)$ ale funcției $x(t)$, atunci

$$[G(t) - F(t)]' = G'(t) - F'(t) = x(t) - x(t) = 0,$$

și în virtutea teoremei 12.61*k* funcția $G(t) - F(t)$ este constantă. Așadar, diferența a două primitive este un element constant al spațiului X. Deoarece funcția (1) este, după cum am văzut, una din primitive, orice primitivă are forma

$$G(t) = \int_a^t x(\xi)\, d\xi + x_0,$$

x_0 fiind un element fixat al spațiului X. În particular, pentru orice primitivă are loc formula

$$G(b) - G(a) = \int_a^b x(\xi)\, d\xi,$$

care generalizează formula Newton-Leibniz.

c. Invers, fie $G(t)$ o funcție derivabilă de variabilă $t \in [a, b]$ având derivata continuă pe porțiuni; atunci, pentru orice t, are loc egalitatea

$$G(t) = G(a) + \int_a^t G'(\xi)\, d\xi. \qquad (2)$$

Într-adevăr, notăm în mod provizoriu prin $G^*(t)$ membrul secund al lui (2). Această funcție, conform punctului a, are ca derivată funcția $G'(t)$ în orice punct de continuitate al acesteia din urmă. Funcția $G(t)$ are aceeași proprietate; deci, cele două funcții fiind continue, avem $G^*(t) - G(t) = c_0 = \text{const}$, conform punctului b. Dar $G^*(a) = G(a)$, de unde $c_0 = 0$ și este stabilită formula (2).

d. Pentru funcții numerice derivabile are loc formula lui Lagrange (7.44)

$$G(b) - G(a) = (b - a)Q,$$

unde Q este un număr cuprins între cea mai mare și cea mai mică valoare a funcției $G'(t)$ pe $[a, b]$, altfel spus, valoarea funcției $G'(t)$ într-un punct $t = t_0$. Pentru o funcție $G(t)$ derivabilă cu valori într-un spațiu Banach X, această formulă rămîne valabilă numai că de această dată punctul Q aparține acoperirii convexe închise a mulțimii valorilor lui $G'(t)$ pe $[a, b]$. Acest fapt rezultă direct din 12.62 g și din formula (2).

e. Formula lui Newton-Leibniz are drept consecință, la fel ca în 9.51 a, formula de integrare prin părți :

$$\int_a^b u(t)\,\mathrm{d}v(t) = u(t)\,v(t)\Big|_a^b - \int_a^b v(t)\,\mathrm{d}u(t).$$

Aici una din funcțiile $u(t)$, $v(t)$ este numerică, cealaltă vectorială (cu valori în spațiul X), ambele fiind netede pe porțiuni.

f. Analog cu 9.54 se obține formula de integrare prin substituție

$$\int_{\tau=\alpha}^{\beta} x(t(\tau))\,t'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{t=a}^{b} x(t)\,\mathrm{d}t$$

în aceleași ipoteze asupra funcțiilor $x(t)$ și $t(\tau)$ și numerelor α, β, a, b.

12.64. *Derivate de ordin superior, diferențiale de ordin superior, formula lui Taylor.*

a. Derivatele de ordin superior ale unei funcții $x(t)$ cu valori într-un spațiu X sînt definite, ca și în cazul unei funcții numerice, prin recurență. Derivata de ordin n este, prin definiție, prima derivată a derivatei de ordin $n-1$ dacă cea din urmă este o funcție derivabilă pentru $a \leqslant t \leqslant b$. Toate derivatele astfel obținute sînt de asemenea funcții vectoriale cu valori în același spațiu X.

Derivatele de ordin superior ale unei funcții vectoriale sînt notate la fel ca și cele ale unei funcții numerice :

$$(x'(t))' = x''(t), (x''(t))' = x'''(t), \ldots, (x^{(n)}(t))' = x^{(n+1)}(t).$$

b. Diferențialele de ordin superior sînt definite și ele prin recurență :

$$d^2x(t) = d[dx(t)] = d[x'(t)\,dt] = x''(t)\,dt^2,$$

. . . . . .

$$d^{n+1}x(t) = d[d^n x(t)] = d[x^{(n)}(t)dt^n] = x^{(n+1)}(t)\,dt^{n+1}.$$

Spre deosebire de prima diferențială, diferențialele de ordin superior își schimbă forma cînd se trece la o nouă variabilă independentă (cu excepția schimbării liniare de variabilă).

c. Dacă toate derivatele funcției $x(t)$, pînă la ordinul $(n+1)$ inclusiv, există pentru $a \leqslant t \leqslant b$, atunci are loc formula lui Taylor

$$\Delta x(a) = x(b) - x(a) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} dx(a) + \dfrac{1}{2}d^2x(a) + \ldots + \dfrac{1}{n!}d^n x(a), \\ \\ x'(a)(b-a) + \dfrac{(b-a)^2}{2}x''(a) + \ldots + \dfrac{(b-a)^n}{n!}x^{(n)}(a) \end{array} \right\} + Q_n,$$

cu restul pe care îl putem pune sub forma

$$Q_n = \frac{1}{n!}\int_a^b x^{(n+1)}(t)\,(b-t)^n\,dt.$$

Deducerea formulei lui Taylor se face prin aceeași metodă ca în 9.52 a, utilizînd formula de integrare prin părți 12.63c. Plecînd de la expresia restului se stabilesc estimările

$$\|Q_n\| \leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} \|x^{(n+1)}(t)\| \frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n\,dt =$$

$$= \max_{a \leqslant t \leqslant b} \|x^{(n+1)}(t)\| \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

12.65. *Șiruri și serii de funcții cu valori în X.*

a. Fie $x_1(t), \ldots, x_n(t), \ldots$ un șir de funcții de o variabilă $t \in [a, b]$, cu valori într-un spațiu Banach X. Prin defi-

niţie, o funcţie $x(t)$ este limita şirului $x_n(t)$ pentru $n \to \infty$ dacă este îndeplinită relaţia

$$\lim_{n\to\infty} \|x(t) - x_n(t)\| = 0$$

pentru orice $t \in [a, b]$. Şirul $x_n(t)$ se numeşte *uniform convergent către limita* $x(t)$ dacă

$$\lim_{n\to\infty} \sup_t \|x(t) - x_n(t)\| = 0,$$

altfel spus, dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr N astfel încît dacă $n \geqslant N$ să aibă loc relaţia $\|x(t) - x_n(t)\| \leqslant \varepsilon$ oricare ar fi $t \in [a, b]$. Am văzut în 5.96 că limita unui şir uniform convergent de funcţii continue este de asemenea o funcţie continuă. Au loc teoreme analoage teoremelor 9.72 şi 9.77, care au fost demonstrate pentru funcţii cu valori numerice, anume :

b. TEOREMĂ. *Dacă un şir* $x_n(t)$ *de funcţii integrabile converge uniform pe* $[a, b]$ *către o funcţie* $x(t)$, *atunci ea este de asemenea integrabilă şi are loc relaţia*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^\tau x_n(t)\,dt = \int_a^\tau x(t)\,dt$$

uniform în raport cu $\tau \in [a, b]$. *În particular,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b x_n(t)\,dt = \int_a^b x(t)\,dt.$$

c. TEOREMĂ. *Dacă un şir* $x_n(t)$ *de funcţii netede pe porţiuni converge cel puţin într-un punct* $t_0 \in [a, b]$ *şi şirul* $x_n'(t)$ *al derivatelor converge uniform pe* $[a, b]$ *către o funcţie* $g(t)$ *continuă pe porţiuni, atunci şirul* $x_n'(t)$ *converge uniform pe* $[a, b]$ *către o funcţie* $x(t)$ *netedă pe porţiuni şi* $x'(t) = \lim_{n\to\infty} x_n'(t) = g(t)$ *în punctele de continuitate ale lui* $g(t)$.

Demonstraţiile teoremelor sînt analoage cu cele ale teoremelor 9.72 şi 9.77.

d. O serie

$$x_1(t) + x_2(t) + \ldots + x_n(t) + \ldots \qquad (1)$$

de funcţii cu valori în spaţiul X se numeşte *convergentă pe intervalul* $[a, b]$ dacă şirul sumelor parţiale

$$s_1(t) = x_1(t), \ldots, s_n(t) = x_1(t) + \ldots + x_n(t), \ldots$$

converge în orice $t \in [a, b]$; limita şirului $s_n(t)$ se numeşte *suma* seriei (1). Seria (1) se numeşte *uniform convergentă pe* $[a, b]$ dacă şirul sumelor parţiale $s_n(t)$ converge uniform. Teoremele din punctele b şi c au drept consecinţă anumite condiţii suficiente de integrabilitate termen cu termen şi de derivabilitate a sumei unei serii de funcţii; enunţurile acestor condiţii sînt lăsate în seama cititorului.

12.66. *Funcţii analitice.* Fie $x(\zeta)$ o funcţie cu valori într-un spaţiu complex normat X definită într-un domeniu G al planului complex $\zeta = \xi + i\eta$. Această funcţie se numeşte *derivabilă într-un punct* $\zeta_0 \in G$, dacă există în spaţiul X un element

$$x'(\zeta_0) = \lim_{h \to 0} \frac{x(\zeta_0 + h) - x(\zeta_0)}{h}$$

numit *derivata* funcţiei $x(\zeta)$ în raport cu variabila complexă ζ în punctul ζ_0. Funcţia $x(\zeta)$ se numeşte *analitică în domeniul* G dacă ea este derivabilă în raport cu ζ în orice punct $\zeta_0 \in G$.

Pentru funcţiile analitice cu valori în spaţiul X, proprietăţile din teoria uzuală elementară a funcţiilor analitice (capitolul 10) rămîn valabile. Definiţia integralei în lungul unei curbe din planul complex, care este necesară pentru fundamentarea teoriei, este formulată în mod obişnuit în felul următor. Fie L un drum neted pe porţiuni în domeniul G: $\zeta = \zeta(t)$, unde t parcurge intervalul $a \leqslant t \leqslant b$. Fie apoi $\Pi = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ o partiţie a intervalului $[a, b]$, $\zeta_j = \zeta(t_j)$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$ puncte corespunzătoare pe drumul L şi $\Delta\zeta_j = \zeta_{j+1} - \zeta_j$; punem

$$\int_L x(\zeta)\, d\zeta = \lim_{d(\Pi) \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} x(\zeta_j)\, \Delta\zeta_j.$$

Existenţa acestei integrale pentru orice funcţie continuă pe porţiuni cu valori într-un spaţiu normat complet X se demonstrează la fel ca pentru o funcţie numerică (10.21).

Se demonstrează, de asemenea, pentru o funcție analitică $x(\zeta)$, teorema lui Cauchy : dacă o funcție $x(\zeta)$ este analitică într-un domeniu simplu conex G, atunci, pentru orice contur închis L inclus în domeniul G, avem

$$\oint_L x(\zeta)\,d\zeta = 0.$$

Pornind de la teorema lui Cauchy se stabilește într-un mod simplu formula lui Cauchy

$$x(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{x(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - \zeta_0} \quad (\zeta_0 \text{ în interiorul lui } L),$$

apoi alte propoziții din § 10.3. În particular, o funcție analitică $x(\zeta)$ are, în domeniul G, derivate de orice ordin și în orice disc $Q = \{|\zeta - \zeta_0| < \rho\}$, inclus în domeniul G, se dezvoltă în serie Taylor

$$x(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(\zeta - \zeta_0)^m, \tag{1}$$

unde $a_m = \dfrac{1}{m!}\,x^{(m)}(\zeta_0)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$.

Raza de convergență a acestei serii este egală cu distanța de la punctul ζ_0 la singularitatea cea mai apropiată a funcției $x(\zeta)$ (adică la punctul în care funcția $x(\zeta)$ încetează să mai fie derivabilă) și poate fi găsită cu ajutorul formulei Cauchy-Hadamard (12.39i)

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{\|a_m\|}.$$

Derivatele succesive ale funcției $x(\zeta)$ se obțin derivînd termen cu termen seria (1) :

$$x'(\zeta) = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m(\zeta - \zeta_0)^{m-1},$$

. . . . . .

$$x^{(k)}(\zeta) = \sum_{m=k}^{\infty} m(m-1)\ldots(m-k+1)\,a_m(\zeta - \zeta_0)^{m-k},$$

. . . . . .

§ 12.7. Operatori liniari continui

12.71. Am dat definiția unui operator liniar în 12.15. Reamintim că o aplicație A a unui spațiu vectorial $\mathfrak{X}$ într-un spațiu vectorial $\mathfrak{Y}$ (peste un același corp K) se numește *operator liniar*, dacă este satisfăcută condiția

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2$$

pentru orice x_1 și x_2 din spațiul $\mathfrak{X}$, oricare ar fi numerele α_1, α_2 din corpul K. Dacă spațiul $\mathfrak{Y}$ este unidimensional, mai precis, $\mathfrak{Y} = K$, operatorul A se numește *funcțională liniară.*

Aici vom considera operatori liniari ai unui spațiu normat $\mathfrak{X}$ în $\mathfrak{Y}$ ambele spații fiind presupuse reale.

a. Conform definiției generale a unei funcții continue 5.11 a, un operator liniar A dintr-un spațiu normat $\mathfrak{X}$ într-un spațiu normat $\mathfrak{Y}$ se numește *continuu pentru* $x = x_0 \in \mathfrak{X}$, dacă, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un $\delta > 0$ astfel încît $|x - x_0| \leqslant \delta$ să implice $|Ax - Ax_0| \leqslant \varepsilon$. Ca de obicei, există o definiție echivalentă : operatorul A este continuu pentru $x = x_0$ dacă $Ax_n \to Ax_0$ (în $\mathfrak{Y}$) de îndată ce $x_n \to x_0$ (în $\mathfrak{X}$).

b. Un operator liniar A al unui spațiu $\mathfrak{X}$ într-un spațiu $\mathfrak{Y}$ se numește *mărginit* dacă el este mărginit pe bila unitate a spațiului $\mathfrak{X}$, adică există o constantă $c > 0$ astfel încît $|x| \leqslant 1$ să implice $|Ax| \leqslant c$. În acest caz, mărimea

$$\|A\| = \sup_{|x| \leqslant 1} |Ax|$$

se numește *norma operatorului* A. Pentru orice vector $x \in \mathfrak{X}$ are loc relația $\left|\frac{x}{|x|}\right| = 1$, de unde $\left|A\frac{x}{|x|}\right| \leqslant \|A\|$ și, în consecință,

$$|Ax| \leqslant \|A\|\,|x|. \tag{1}$$

c. *Dacă un operator* A *este mărginit, el este continuu în orice punct* x_0 *al spațiului* $\mathfrak{X}$.

Demonstrație. Fie A un operator mărginit și $\|A\|$ norma sa. Atunci avem

$$|Ax - Ax_0| = |A(x - x_0)| \leqslant \|A\| |x - x_0| < \varepsilon$$

pentru un $\varepsilon > 0$ dat și pentru $|x - x_0| < \varepsilon / \|A\|$.

d. *Dacă un operator liniar* A *este continuu pentru cel puțin un punct* $x = x_0$, *atunci el este mărginit.*

Demonstrație. Din ipoteză, există $\delta > 0$ astfel încît din $|x - x_0| \leqslant \delta$ să rezulte $|Ax - Ax_0| \leqslant 1$. Fie $|z| \leqslant 1$ și $x = x_0 + \delta z$. Atunci au loc relațiile

$$|x - x_0| = \delta |z| \leqslant \delta,$$

$$|Ax - Ax_0| = |A(x - x_0)| = \delta |Az| \leqslant 1,$$

$$|Az| \leqslant \frac{1}{\delta},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

e. Ca o consecință, avem : un *operator liniar care este continuu cel puțin într-un punct al spațiului* $\mathfrak{X}$ *este continuu în fiecare punct al său.*

Următoarele trei teoreme sînt de asemenea adevărate pentru un operator continuu A al unui spațiu Banach $\mathfrak{X}$ într-un spațiu Banach $\mathfrak{Y}$:

f. *Dacă o serie* $\sum_1^\infty x_n = s$ *converge într-un spațiu* $\mathfrak{X}$, *atunci*

$$\sum_1^\infty Ax_n = As.$$

g. *Dacă* $x(t)$ *este o funcție continuă pe porțiuni pe un interval* $a \leqslant t \leqslant b$, *cu valori într-un spațiu* $\mathfrak{X}$, *atunci are loc relația*

$$A\left\{\int_a^b x(t)\,dt\right\} = \int_a^b [Ax(t)]\,dt.$$

h. *Dacă* $x(t)$ *este o funcție derivabilă pentru* $t = t_0$, *cu valori în spațiul* $\mathfrak{X}$, *atunci avem*

$$A[x'(t_0)] = (Ax)'(t_0).$$

Demonstrația celor trei teoreme de mai sus urmează aceeași cale. Suma unei serii, integrala și derivata sînt rezultatele anumitor operații liniare și de trecere la limită, iar un operator liniar continuu comută cu operațiile liniare ca și cu operația de trecere la limită.

i. Dacă trei operatori A, A_1, A_2 ai unui spațiu vectorial normat $\mathfrak{X}$ într-un spațiu vectorial normat $\mathfrak{Y}$ sînt mărginiți, atunci la fel vor fi și operatorii $A_1 + A_2$ și αA (12.15 e) pentru orice α real, deoarece pentru $|x| \leqslant 1$ avem

$$|(A_1 + A_2)x| = |A_1 x + A_2 x| \leqslant |A_1 x| + |A_2 x| \leqslant \|A_1\| + \|A_2\|,$$

$$|\alpha A x| = |\alpha|\,|Ax| \leqslant |\alpha|\,\|A\|.$$

În plus, formulele scrise arată că

$$\|A_1 + A_2\| = \sup_{|x|\leqslant 1} |(A_1 + A_2)x| \leqslant \|A_1\| + \|A_2\|,$$

$$\|\alpha A\| = \sup_{|x|\leqslant 1} |\alpha A x| = |\alpha| \sup_{|x|\leqslant 1} |Ax| = |\alpha|\,\|A\|.$$

Putem deci spune că spațiul $L(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ al operatorilor liniari mărginiți de la $\mathfrak{X}$ la $\mathfrak{Y}$ este un spațiu normat cu norma 12.71b:

$$\|A\| = \sup_{|x|\leqslant 1} |Ax|.$$

j. Fie B un operator liniar mărginit de la un spațiu normat $\mathfrak{X}$ într-un spațiu normat $\mathfrak{Y}$ și A un operator liniar mărginit de la $\mathfrak{Y}$ în spațiul normat $\mathfrak{Z}$. Atunci este definit operatorul liniar $P = AB$ (notat uneori $B \circ A$) de la $\mathfrak{X}$ la $\mathfrak{Z}$ (12.15 g). Să arătăm că operatorul P este mărginit. Într-adevăr, pentru orice $x \in \mathfrak{X}$, avem

$$|ABx| \leqslant \|A\|\,|Bx| \leqslant \|A\|\,\|B\|\,|x|,$$

de unde se vede că $P = AB$ este un operator mărginit și că

$$\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|. \tag{2}$$

k. În particular, pentru un operator A în $\mathfrak{X}$, avem

$$\|A^2\| = \|AA\| \leqslant \|A\|^2$$

și, de asemenea,

$$\begin{cases} \|A^3\| = \|A^2A\| \leqslant \|A^2\| \, \|A\| \leqslant \|A\|^3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \|A^n\| \leqslant \|A^{n-1}A\| \leqslant \|A^{n-1}\| \, \|A\| = \|A\|^n. \end{cases} \tag{3}$$

1. Ca exemplu, să găsim norma unui operator liniar de un tip special definit în spațiul $\mathbb{R}^s[a, b]$ al funcțiilor reale continue pe intervalul $a \leqslant t \leqslant b$. Fie $D(t, \lambda)$, o funcție reală continuă de $t \in [a, b]$, pentru orice valoare a parametrului λ aparținînd unei mulțimi Λ, și presupunem că mărimea

$$D = \sup_{\lambda} \int_a^b |D(t, \lambda)| \, dt$$

este finită. Pentru $x(t) \in \mathbb{R}^s[a, b]$ punem

$$y(\lambda) = A[x] = \int_a^b D(t, \lambda) \, x(t) \, dt. \tag{4}$$

Operatorul A transformă orice funcție $x(t)$ într-o funcție $y(\lambda)$ definită pe mulțimea Λ. Funcția $y(\lambda)$ este mărginită, deoarece

$$|A(x)| = |y(\lambda)| = \left| \int_a^b D(t, \lambda) \, x(t) \, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)| \cdot \int_a^b |D(t, \lambda)| \, dt \leqslant D \|x\|. \tag{5}$$

Astfel formula (4) definește un operator din spațiul $\mathbb{R}^s[a, b]$ în spațiul $\mathbb{R}(\Lambda)$ al funcțiilor reale mărginite $y(\lambda)$. Acest din urmă spațiu este înzestrat cu norma naturală

$$\|y\| = \sup_{\lambda \in \Lambda} |y(\lambda)|.$$

Operatorul A este evident liniar; din inegalitatea (5) rezultă că el este mărginit și că norma sa nu depășește mărimea D. Să arătăm că $\|A\| = D$.

Considerăm funcţia $x_n(t, \lambda) = u_n[D(t, \lambda)]$, unde $u_n(\tau)$ este o funcţie continuă, care este egală cu -1 pentru $\tau \leqslant -1/n$, $+1$ pentru $\tau \geqslant 1/n$ şi care este liniară în intervalul $[-1/n, 1/n]$ (fig. 12.9). Funcţia $x_n(t, \lambda)$ este de asemenea continuă în t; produsul $D(t, \lambda)\, x_n(t, \lambda)$ este o funcţie

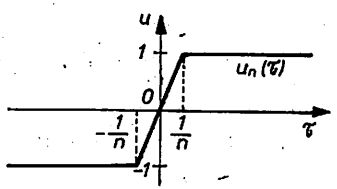


Fig. 12.9

nenegativă care este egală cu $|D(t, \lambda)|$ pentru $|D(t, \lambda)| \geqslant 1/n$ şi nu depăşeşte $|D(t, \lambda)|$ în celelalte puncte. Pentru un $\lambda \in \Lambda$ fixat, funcţia $x_n(t, \lambda)$ este un element al spaţiului $\mathbb{R}^s(a, b)$. În plus,

$$A[x_n(t, \lambda)] \geqslant \int\limits_{|D(t,\lambda)| \geqslant 1/n} |D(t, \lambda)|\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_a^b |D(t, \lambda)|\, dt - \frac{1}{n}(b - a).$$

Deoarece $\| x_n(r, \lambda) \| \leqslant 1$, avem

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax(t)\| \geqslant \sup_{n,\lambda} |A[x_n(t, \lambda)]| = \sup_{\lambda} \int_a^b |D(t, \lambda)|\, dt.$$

Ţinînd cont de inegalitatea (5), obţinem

$$\|A\| = \sup_{\lambda \in \Lambda} \int_a^b |D(t, \lambda)|\, dt.$$

ceea ce trebuia demonstrat.

i. Fie $D(t)$ o funcţie continuă de $t \in [a, b]$; atunci formula

$$F[x] = \int_a^b D(t)\, x(t)\, dt \qquad (6)$$

definește o funcțională liniară în spațiul $\mathbb{R}^r(a, b)$, pe care putem să o considerăm ca un caz particular al operatorului descris în punctul 1, mulțimea valorilor parametrului λ fiind formată dintr-un singur punct. Aplicînd rezultatul din punctul 1 se obține : norma funcționalei (6) este

$$\|F\| = \int_a^b |D(t)|\, dt.$$

12.72. *Teorema aplicației deschise.*

a. Fie $y = f(x)$ o funcție definită pe o mulțime X cu valori în mulțimea Y. Mulțimea punctelor $f(x)$, cînd x parcurge o submulțime $Q \subset X$, formează *imaginea* submulțimii Q prin f și se notează $f(Q)$. Mulțimea tuturor punctelor $x \in X$ pentru care $f(x)$ aparține unei submulțimi $F \subset Y$, se numește *preimaginea* (sau imaginea inversă) a submulțimii F prin f și se notează $f^{-1}(F)$.

Dacă X și Y sînt spații metrice și $f : X \to Y$ o funcție continuă, atunci *preimaginea $f^{-1}(G)$ a oricărei submulțimi deschise $G \subset Y$ este o submulțime deschisă* în X (5.14a).

În același timp, imaginea $f(G)$ a unei mulțimi deschise $G \subset X$ nu este în mod obligatoriu o mulțime deschisă în Y. De exemplu, dacă $X = Y = \mathbb{R}$ și funcția f este constantă, atunci imaginea oricărei mulțimi deschise (și în general a oricărei mulțimi $G \subset X$) se reduce la un singur punct, care nu este o mulțime deschisă în Y. Chiar dacă f ar fi surjectivă, imaginea unei mulțimi deschise nu este neapărat deschisă ; ca exemplu să considerăm funcția continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ce este egală cu $(x - 1)^3$ pentru $x \geqslant 1$, $(x + 1)^3$ pentru $x \leqslant -1$ și 0 pentru $|x| < 1$; această funcție, care aplică toată axa X pe axa Y, transformă mulțimea deschisă $\{|x| < 1\}$ într-un singur punct $y = 0$.

Presupunem că funcția continuă $f : X \to Y$ este injectivă. Alegem pentru X spațiul $D_1(a, b)$ al funcțiilor $x(t)$ continuu derivabile pe intervalul $[a, b]$ (12.25) înzestrat cu metrica naturală și pentru Y submulțimea spațiului $\mathbb{R}^r(a, b)$ a tuturor funcțiilor continue pe $[a, b]$ (de asemenea cu metrica sa naturală) care este formată din funcții continuu derivabile ; putem considera această submulțime ca spațiu metric. Considerăm aplicația f care face să corespundă oricărei funcții $x = x(t) \in D_1(a, b)$ aceeași funcție $y = y(t) = x(t) \in \mathbb{R}^r(a, b)$. Această aplicație este continuă

deoarece convergența $x_n(t) \to x(t)$ din $D_1(a, b)$ implică, bineînțeles, convergența $y_n(t) = x_n(t) \to y(t) = x(t)$ în $\mathbb{R}^e(a, b)$. Aplicația f este evident injectivă. Totuși, imaginea unei mulțimi deschise din X, de exemplu bila unitate deschisă V din $D_1(a, b)$, nu este deschisă în Y, deoarece orice vecinătate a unui punct $y_0(t) \in f(V)$, definită de inecuația $\max |y(t) - y_0(t)| < \varepsilon$, conține funcții cu derivata oricît de mare.

b. Este clar acum că ipotezele următoarei teoreme sînt esențiale:

TEOREMA (lui Banach a aplicației deschise). *Fie* $A : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ *un operator liniar, continuu și bijectiv de la spațiul normat complet* $\mathfrak{X}$ *pe un spațiu normat complet* $\mathfrak{Y}$. *Atunci operatorul* A *transformă orice mulțime deschisă* $G \subset X$ *într-o mulțime deschisă* $f(G) \subset Y$.

Demonstrație. Notăm prin V_r bila $\{x| \ |x| < r\}$. Vom demonstra la început că închiderea mulțimii $A(V_1)$ în $\mathfrak{Y}$ conține o bilă în spațiul $\mathfrak{Y}$.

Prin ipoteză, avem $\mathfrak{Y} = A(\mathfrak{X}) = A\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(V_n)$. În plus, $\mathfrak{Y} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A(V_n)}$. În virtutea teoremei lui Baire (3.75 a), există un număr $n = N$ astfel încît mulțimea $\overline{A(V_N)}$ să conțină o bilă $\{y| \ |y - y_0| < \varepsilon\}$. Deoarece mulțimea $\overline{A(V_N)}$ este evident echilibrată, ea conține de asemenea bila $\{y| \ |y + y_0| < \varepsilon\}$. În plus, mulțimea $\overline{A(V_N)}$ este convexă (deoarece un operator liniar transformă o mulțime convexă într-o mulțime convexă și închiderea unei mulțimi convexe este convexă conform 12.62 f) și conține deci bila $W_\varepsilon = \{y| \ |y| < \varepsilon\}$, inclusă în acoperirea convexă a celor două bile menționate.

Din motive de omotetie, este clar că oricare ar fi $\rho > 0$ are loc incluziunea $W_\rho \subset \overline{A(V_{N\rho/\varepsilon})}$. În particular, are loc relația $W_{\varepsilon/N} \subset \overline{A(V_1)}$, ceea ce trebuia demonstrat.

Să arătăm acum că mulțimea $A(V_1)$ însăși (și nu numai închiderea ei) conține bila $W_{\varepsilon/(2N)}$. Fie $y \in W_{\varepsilon/(2N)}$. Deoarece am demonstrat că $W_{\varepsilon/(2N)} \subset \overline{A(V_{1/2})}$ putem să alegem un punct $y_1 \in A(V_{1/2})$ oricît de apropiat dorim de punctul y. De exemplu, putem să facem acest lucru astfel încît $|y - y_1| < \varepsilon/(4N)$. Deoarece $W_{\varepsilon/(4N)} \subset \overline{A(V_{1/4})}$, putem găsi

de asemenea un punct $y_2 \in A(V_{1/4})$ astfel încît $|y - y_1 - y_2| < \varepsilon/(8N)$. Continuînd procedeul, se construieşte pentru orice $n = 1, 2, \ldots$ cîte un punct $y_n \in A(V_{1/2^n})$ astfel încît $|y - y_1 - y_2 - \ldots - y_n| < \varepsilon/(2^{n+1}N)$. Prin construcţie, avem $y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n$. Pe de altă parte, $y_n = Ax_n$, unde $x_n \in V_{1/2^n}$, deci $|x_n| < 1/2^n$. Spaţiul $\mathfrak{X}$ fiind complet, seria $x_1 + x_2 + \ldots$ este convergentă (12.37 b); fie $x = \sum_{n=1}^{\infty} x$. Deoarece operatorul A este continuu, $Ax = A\left(\sum_1^{\infty} x_n\right) = \sum_1^{\infty} Ax_n = \sum_1^{\infty} y_n = y$. În plus, $|x| \leqslant \sum_1^{\infty} |x_n| < \sum_1^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$. În consecinţă, bila $W_{\varepsilon/(2N)}$ este conţinută în imaginea bilei V_1, ceea ce trebuia demonstrat.

De asemenea, din motive de omotetie, are loc relaţia $W_\rho \subset A(V_{\varepsilon\rho/(2N)})$ pentru orice $\rho > 0$. În particular, din $|x - x_0| < \delta$, rezultă că $|Ax - Ax_0| = |A(x - x_0)| < \delta\varepsilon/(2N)$, deoarece imaginea $A(U)$ a bilei $U = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$ conţine bila $\{y \mid |y - Ax_0| < \delta\varepsilon/(2N)\}$. De aici rezultă că imaginea oricărei mulţimi deschise $G \subset \mathfrak{X}$ este o mulţime deschisă în $\mathfrak{Y}$ şi teorema este complet demonstrată.

e. COROLAR. *Dacă* A *este un izomorfism liniar continuu* (12.14 j) *de la spaţiul normat complet* $\mathfrak{X}$ *pe un spaţiu normat complet* $\mathfrak{Y}$, *atunci aplicaţia inversă* A^{-1} *este şi ea continuă.*

Demonstraţie. În acest caz operatorul invers A^{-1} este definit într-un mod univoc şi este evident liniar la fel ca A. În virtutea teoremei din punctul b, imaginea inversă prin operatorul A^{-1} a oricărei mulţimi deschise $G \subset \mathfrak{X}$ este o mulţime deschisă $A^{-1}G \subset Y$. În particular, imaginea inversă a bilei $\{x \mid |x| < \varepsilon\}$ conţine o bilă $\{y \mid |y| < \delta\}$, ceea ce duce la concluzia că aplicaţia A^{-1} este continuă.

d. COROLAR. *Dacă spaţiul vectorial* $\mathfrak{L}$ *este complet în raport cu două norme* $|x|_1$ *şi* $|x|_2$, *atunci din existenţa unei constante* c_1, *astfel încît* $|x|_2 \geqslant c_1 |x|_1$ *pentru orice* $x \in \mathfrak{L}$, *rezultă existenţa unei constante* c_2, *astfel încît* $|x|_1 \geqslant c_2 |x|_2$ *pentru orice* $x \in \mathfrak{L}$; *normele* $|x|_1$ şi $|x|_2$ *sînt deci echivalente* (12.35).

Demonstraţie. Considerăm aplicaţia identică A a spaţiului normat $\mathfrak{X}$, care se obţine înzestrînd pe $\mathfrak{L}$ cu norma

$|x|_2$, pe spațiul normat $\mathfrak{Y}$, care se obține înzestrînd tot pe $\mathfrak{L}$ cu norma $|x|_1$. Datorită inegalității $|x|_2 \geqslant c_1|x|_1$ această aplicație este continuă. Prin ipoteză și conform c, aplicația inversă este continuă de asemenea, de unde rezultatul căutat (12.71 d).

e. Presupunem că un spațiu complet $\mathfrak{X}$ se reprezintă ca sumă directă a două subspații închise $\mathfrak{X}_1$ și $\mathfrak{X}_2$, astfel încît pentru orice vector $x \in X$ să aibă loc reprezentarea unică

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in X_1, \quad x_2 \in X_2.$$

Operatorul P_1, care face să corespundă fiecărui vector componenta sa x_1, se numește *proiector* (sau *operator de proiecție*) *pe subspațiul* $\mathfrak{X}_1$; analog operatorul P_2, ce face să corespundă fiecărui vector x componenta sa x_2, se numește *proiector* (sau *operator de proiecție*) *pe subspațiul* $\mathfrak{X}_2$. Acești operatori sînt evident liniari, dar nu este deloc evident că ei sînt continui. Vom vedea că operatorii P_1 și P_2 sînt continui, presupunînd că spațiul $\mathfrak{X}$ este complet, subspațiile $\mathfrak{X}_1$ și $\mathfrak{X}_2$ închise și utilizînd teorema aplicației deschise.

Alături de norma inițială $|x| = |x|_1$, vom introduce în spațiul $\mathfrak{X}$, norma

$$|x|_2 = |x_1|_1 + |x_2|_1.$$

Evident, $|x|_2$ verifică axiomele normei. Avem de asemenea $|x|_1 \leqslant |x_1|_1 + |x_2|_1 = |x|_2$. Vom arăta că spațiul $\mathfrak{X}$ este complet în raport cu norma $|x|_2$. Fie $\{x^{(n)}\}$ un șir Cauchy în raport cu norma $|x|_2$; din inegalitatea $|x^{(n)} - x^{(m)}|_2 = |x_1^{(n)} - x_1^{(m)}|_1 + |x_2^{(n)} - x_2^{(m)}|_1$ rezultă că șirurile $\{x_1^{(n)}\}$ și $\{x_2^{(n)}\}$ sînt șiruri Cauchy în raport cu norma $|x|_1$. Spațiul $\mathfrak{X}$ fiind complet, există limitele $x_1 = \lim\limits_{n\to\infty} x_1^{(n)}$, $x_2 = \lim\limits_{n\to\infty} x_2^{(n)}$; subspațiile $\mathfrak{X}_1$ și $\mathfrak{X}_2$ fiind închise, avem $x_1 \in \mathfrak{X}_1$, $x_2 \in \mathfrak{X}_2$. Punem $x = x_1 + x_2$. Are loc relația $|x - x^{(n)}|_2 = |x_1 - x_1^{(n)}|_1 + |x_2 - x_2^{(n)}|_1 \to 0$, deoarece x este limita șirului $\{x^{(n)}\}$ pentru norma $|x|_2$, ceea ce demonstrează că $\mathfrak{X}$ este complet în raport cu norma $|x|_2$. Aplicînd rezultatele din punctul d se vede că normele $|x|_1$ și $|x|_2$ sînt echivalente; în particular există o constantă c astfel încît să aibă loc inegalitatea

$$|x|_2 = |x_1|_1 + |x_2|_1 \leqslant c|x|_1 = c|x|$$

pentru orice $x \in \mathfrak{X}$; dar atunci avem de asemenea

$$|P_1 x| = |x_1|_1 \leqslant c\,|x|, \quad |P_2 x| = |x_2|_1 \leqslant c\,|x|,$$

ceea ce demonstrează continuitatea operatorilor P_1 şi P_2.

f. Fie de asemenea $\mathfrak{X}$ un spaţiu complet, sumă directă a două subspaţii închise $\mathfrak{X}_1$ şi $\mathfrak{X}_2$ şi P_1 şi P_2 proiectorii corespunzători. Fie A_1 un operator liniar continuu în $\mathfrak{X}_1$ şi A_2 un operator liniar continuu în $\mathfrak{X}_2$. Definim în spaţiul $\mathfrak{X}$ operatorul A prin formula

$$Ax = A(x_1 + x_2) = A_1 x_1 + A_2 x_2.$$

Operatorul A este evident liniar.

Operatorul A este continuu în spaţiul $\mathfrak{X}$.

Într-adevăr,

$$Ax = A_1 x_1 + A_2 x_2 = A_1 P_1 x + A_2 P_2 x,$$

şi operatorii P_1 şi P_2 fiind mărginiţi în spaţiul $\mathfrak{X}$, conform punctului e, avem

$$|Ax| \leqslant \|A_1\| \cdot \|P_1\| \cdot |x| + \|A_2\| \cdot \|P_2\| \cdot |x| = c\,|x|,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

12.73. *Convergenţa unui şir de operatori liniari.*

a. În 12.71 b am introdus norma

$$\|A\| = \sup_{|x| \leqslant 1} |Ax|$$

în spaţiul $L(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ al operatorilor liniari continui din spaţiul $\mathfrak{X}$ într-un spaţiu normat $\mathfrak{Y}$.

Un şir de operatori $A_1, A_2, \ldots$ converge pentru această normă către un operator A dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr N astfel încît să fie satisfăcută inegalitatea

$$\sup_{|x| \leqslant 1} |Ax - A_n x| \leqslant \varepsilon$$

pentru orice $n \geqslant N$.

b. Să arătăm că spațiul $L(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ este complet de îndată ce $\mathfrak{Y}$ este complet. Fie $A_1, A_2, \ldots$ un șir Cauchy de operatori liniari continui ai lui $\mathfrak{X}$ în $\mathfrak{Y}$, adică oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un număr N astfel încît să aibă loc inegalitatea

$$\|A_n - A_m\| \leqslant \varepsilon \qquad (1)$$

pentru $n, m \geqslant N$. Oricare ar fi $x \in \mathfrak{X}$ conform 12.71 (1) are loc

$$|A_n x - A_m x| \leqslant |A_n - A_m\| \, |x| \leqslant \varepsilon \, |x|,$$

deoarece vectorii $A_n x \in \mathfrak{Y}$ formează un șir Cauchy în spațiul $\mathfrak{Y}$. Spațiul $\mathfrak{Y}$ fiind complet, există un vector $y \in \mathfrak{Y}$ astfel încît $y = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$; punem $y = Ax$ și vom arăta că A este un operator liniar mărginit care este limita (în spațiul $L(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$) a șirului A_n. Egalitatea

$$A(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} A_n(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} (\alpha A_n x + \beta A_n y) =$$

$$= \alpha \lim_{n\to\infty} A_n x + \beta \lim_{n\to\infty} A_n y = \alpha A x + \beta A y$$

arată că A este liniar. Apoi, pentru $|x| \leqslant 1$, avem

$$|Ax - A_m x| = |(A - A_m)x| = \lim_{n\to\infty} |(A_n - A_m)x| \leqslant \varepsilon, \quad (2)$$

în virtutea lui (1), pentru $m \geqslant N$; de aici rezultă că $A - A_m$, deci și A, este un operator mărginit. În sfîrșit, inegalitatea (2) arată că pentru $m \geqslant N$ are loc inegalitatea

$$\|A - A_m\| \leqslant \varepsilon,$$

adică $A = \lim\limits_{m\to\infty} A_m$ pentru norma spațiului $L(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$.

Dacă $\mathfrak{Y} = \mathfrak{R}_1$, spațiul $L(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = L(\mathfrak{X}, \mathfrak{R}_1)$ este complet. Acest spațiu (al tuturor funcționalelor liniare continue pe spațiul $\mathfrak{X}$) este numit *spațiul dual* (sau *dualul*) *lui* $\mathfrak{X}$ și este notat prin $\mathfrak{X}^*$.

c. În particular, spațiul $L(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$ al operatorilor liniari mărginiți într-un spațiu Banach $\mathfrak{X}$ este complet. În cele ce urmează, îl vom nota cu $L(\mathfrak{X})$.

d. Se poate întîmpla ca operatorii $A, A_1, A_2, \ldots$ să aibă proprietatea $A_n x \to Ax$ pentru orice $x \in \mathfrak{X}$, dar $\| A_n - A \|$ să nu tindă la zero (un exemplu va fi dat în 12.75 g). Va fi util următorul rezultat.

LEMĂ. *Dacă normele operatorilor* $A_1, A_2, \ldots$ *sînt majorate de o aceeași constantă* c *și relația limită* $Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x$ *este adevărată pentru toate elementele* x *ale unei mulțimi* Q, *densă peste tot în* $\mathfrak{X}$, *atunci* $Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x$ *oricare ar fi* $x \in \mathfrak{X}$.

Demonstrație. Fie $x = \lim_{k\to\infty} x_k$, unde $x_k \in Q$. Pentru un $\varepsilon > 0$ dat, găsim un număr k astfel încît să avem $|x - x_k| < \varepsilon/(3c)$, apoi un număr N astfel încît inegalitatea $|Ax_k - A_n x_k| < \varepsilon/3$ să aibă loc pentru $n \geqslant N$. Atunci, pentru $n \geqslant N$, vom avea

$$|Ax - A_n x| \leqslant |Ax - Ax_k| + |Ax_k - A_n x_k| +$$

$$+ |A_n x_k - A_n x| \leqslant \|A\| |x - x_k| + \frac{\varepsilon}{3} + \|A_n\| |x_k - x| \leqslant$$

$$\leqslant c\frac{\varepsilon}{3c} + \frac{\varepsilon}{3} + c\frac{\varepsilon}{3c} = \varepsilon,$$

ceea ce spune că $Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x$.

Un șir de operatori $A_1, A_2, \ldots$ care au proprietatea $A_n x \to Ax$ pentru orice $x \in \mathfrak{X}$, va fi numit *convergent tare* către operatorul A, iar acest ultim operator va fi numit *limita tare a* șirului A_n.

12.74. *Principiul mărginirii uniforme.*

a. TEOREMA (lui Banach-Steinhauss). *Dacă normele unui șir de operatori liniari continui* $A_1, A_2, \ldots$, *de la un spațiu Banach* $\mathfrak{X}$ *într-un spațiu normat* $\mathfrak{Y}$, *formează un șir nemărginit al normelor*

$$\sup_n \|A_n\| = \infty,$$

atunci în orice bilă $U_\rho(x_0) = \{x \in \mathfrak{X} \mid |x - x_0| < \rho\}$ *există un punct* x *astfel încît*

$$\sup_n |A_n(x)| = \infty.$$

Demonstrație. Șirul de funcții $A_1(x), A_2(x), \ldots$ fiecare fiind mărginită în bila $|x| \leqslant 1$, nu este uniform mărginit în această bilă. Din motive de omotetie el nu este uniform mărginit pe nici o bilă $|x| \leqslant r$. Mai mult, el nu este mărginit pe nici o bilă de forma $U_r(x_0) = \{x \mid |x - x_0| \leqslant r\}$. deoarece, dacă vectorii $A_n(x)$ și $A_n(x_0)$ ar fi fost mărginiți pentru $x \in U_r(x_0)$, la fel ar fi fost și vectorii $A_n(x - x_0) = A_n(x) - A_n(x_0)$, ceea ce este imposibil deoarece $x - x_0$ parcurge bila de rază r și de centru 0. Să alegem deci în bila $U_\rho(x_0)$ un element x_1, $|x_1 - x_0| < \rho$, pentru care valoarea unui operator oarecare A_n (să-l notăm pentru moment prin A_1) depășește în normă unitatea :

$$|A_1(x_1)| > 1.$$

Operatorul A_1 fiind continuu, există o bilă $U_{\rho_1}(x_1)$ conținută în întregime în bila inițială $U_\rho(x_0)$ și în care este satisfăcută inegalitatea

$$|A_1(x)| > 1.$$

Găsim în interiorul acestei bile un element x_2 și un operator $A_2(x)$ astfel încît să avem $|A_2(x)| > 2$, apoi o altă bilă $U_{\rho_2}(x_2)$, conținută în cea precedentă, cu proprietatea că în fiecare punct al ei are loc relația :

$$|A_2(x)| > 2 \quad \left(\rho_2 < \frac{1}{2}\,\rho_1\right).$$

Continuînd, ajungem la un șir de bile incluse una în alta, de raze $\rho_1, \rho_2, \ldots$ tinzînd către zero. Pentru punctul x comun tuturor acestor bile (care există în virtutea completitudinii spațiului $\mathfrak{X}$ și lemei 3.74 d) au loc inegalitățile

$$|A_1(x)| > 1, |A_2(x)| > 2, \ldots, |A_n(x)| > n \ldots,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

b. COROLAR. *Dacă* $A_1, A_2, \ldots$ *este un șir de operatori liniari continui ai unui spațiu Banach* $\mathfrak{X}$ *într-un spațiu normat* $\mathfrak{Y}$ *și dacă, pentru orice vector* $x \in \mathfrak{X}$, *șirul vectorilor* $A_1x, A_2x, \ldots$ *este mărginit, atunci normele operatorilor* $A_1, A_2, \ldots$ *sînt majorate de aceeași constantă.*

c. COROLAR. *Dacă un șir* $A_1, A_2, \ldots$ *de operatori liniari continui, de la un spațiu Banach* $\mathfrak{X}$ *într-un spațiu Banach* $\mathfrak{Y}$, *are proprietatea că pentru orice* $x \in \mathfrak{X}$, *vectorii* $y_n = A_n x$ *au o limită* $y \in \mathfrak{Y}$, *atunci aplicația* $A : \{x \to \lim A_n x\}$ *este un operator liniar continuu din* $\mathfrak{X}$ *în* $\mathfrak{Y}$.

Demonstrație. Fie x_1 și x_2 doi vectori oarecare ai spațiului $\mathfrak{X}$, α_1 și α_2 constante arbitrare. Trecînd la limită pentru $n \to \infty$ în egalitatea $A_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A_n x_1 + \alpha_2 A_n x_2$ se obține $A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2$, deci aplicația A este liniară. Șirul de vectori $A_n x$ fiind convergent, deci mărginit pentru orice $x \in \mathfrak{X}$, conform punctului b, rezultă că normele operatorilor A_n sînt mărginite, $\| A_n \| \leqslant C$. În consecință, avem $| A_n x | \leqslant \| A_n \| \leqslant C$ pentru orice x, $| x | \leqslant 1$, deci $| Ax | = \lim_{n \to \infty} | A_n x | \leqslant C$; astfel operatorul A este mărginit în bila unitate, deci continuu, ceea ce trebuia demonstrat.

În plus, șirul de operatori A_n converge tare către operatorul A (12.73 d).

d. Raționamentul precedent ne dă următoarea evaluare pentru norma operatorului A

$$\| A \| \leqslant \sup_n \| A_n \|.$$

Aceasta poate fi îmbunătățită : fie $c = \underline{\lim} \| A_n \|$ și presupunem că, pentru un $\varepsilon > 0$ dat, alegem un subșir $A_{n_k} (k = 1, 2, \ldots)$ pentru care $\| A_{n_k} \| \leqslant c + \varepsilon$. Deoarece, evident, $Ax = \lim_{k \to \infty} A_{n_k} x$, pentru orice $x \in \mathfrak{X}$, are loc relația

$$\| A \| \leqslant \sup \| A_{n_k} \| \leqslant c + \varepsilon,$$

conform celor anterioare; deoarece ε este arbitrar, avem

$$\| A \| \leqslant \underline{\lim} \| A_n \|.$$

În anumite cazuri concrete putem pune simbolul $<$ în această inegalitate (vom vedea un exemplu în 12.75 g).

e. LEMĂ. *Presupunem că un șir de operatori* A_n *converge tare către un operator* A *și că un șir de vectori* x_n *converge (în normă) către un vector* x. *Atunci* $Ax = \lim_{n \to \infty} A_n x_n$.

Demonstrație. În virtutea principiului mărginirii uniforme, normele operatorilor A sînt mărginite de o constantă C. Deci

$$| Ax - A_n x_n | \leqslant | Ax - A_n x | + | A_n x - A_n x_n | \leqslant$$
$$\leqslant | (A - A_n) x | + C | x - x_n |.$$

Cei doi termeni din membrul secund converg către zero pentru $n \to \infty$, ceea ce demonstrează lema.

f. În punctele a — e se poate înlocui șirul de operatori A_n printr-o funcție $A(t)$ cu valori operatori, definită pe o mulțime $T = \{t\}$, și convergența pentru $n \to \infty$ prin convergența după o direcție $\mathcal{F}$, definită pe mulțimea T (4.12).

În paragrafele următoare vom indica unele aplicații importante ale principiului mărginirii uniforme.

12.75. *Spațiul șirurilor mărginite și subspațiile sale.*

a. Notăm prin $\mathfrak{X}$ spațiul vectorial al tuturor șirurilor reale mărginite $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ cu operațiile uzuale (pe coordonate) și cu norma definită de formula

$$\|x\| = \sup_n |\xi_n|.$$

Axiomele spațiului vectorial normat sînt evident verificate. În plus, spațiul $\mathfrak{X}$ este complet; se poate demonstra aceasta direct sau aplicînd teorema asupra completitudinii spațiului $\mathbb{R}^r(M)$ al tuturor funcțiilor reale mărginite și continue pe un spațiu metric M (12.23 f); în cazul de față, spațiul metric este mulțimea numerelor naturale înzestrată cu metrica uzuală a dreptei numerice.

b. Fie un șir de numere reale $f_1, f_2, \ldots$, $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| < \infty$. Atunci, pentru orice $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots) \in \mathfrak{X}$, expresia

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \xi_n \tag{1}$$

este definită și are loc inegalitatea

$$|f(x)| \leqslant \sup_n |\xi_n| \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|. \tag{2}$$

Expresia (1) este evident o funcțională liniară pe spațiul $\mathfrak{X}$. Inegalitatea (2) arată că această funcțională este mărginită pe bila unitate a spațiului $\mathfrak{X}$ și este deci continuă; în plus, norma sa admite majorarea

$$\|f\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|. \tag{3}$$

Considerăm valoarea funcționalei f pentru vectorul $x_0 = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$, unde $\xi_k = \operatorname{sgn} f_k (k = 1, 2, \ldots)$. Observăm că vectorul x_0 aparține bilei unitate a spațiului $\mathfrak{X}$.

Are loc relaţia

$$f(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \operatorname{sgn} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|,$$

de unde

$$\|f\| = \sup_{|x|\leq 1} |f(x)| \geqslant |f(x_0)| = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|. \tag{4}$$

Comparînd inegalităţile (3) şi (4) vedem că

$$\|f\| = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|. \tag{5}$$

Funcţionalele de forma (1) nu epuizează mulţimea tuturor funcţionalelor liniare continue pe un spaţiu $\mathfrak{X}$. Totuşi, pentru anumite subspaţii ale spaţiului $\mathfrak{X}$, formula (1) dă forma generală a funcţionalei liniare continue. Unul din subspaţiile de acest gen este considerat în continuare.

c. Notăm cu $\mathfrak{X}_0$ mulţimea tuturor elementelor $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in \mathfrak{X}$ pentru care $\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$. Evident, $\mathfrak{X}_0$ este un subspaţiu al spaţiului $\mathfrak{X}$. Verificăm că acest subspaţiu este închis. Fie

$$x_m = \{\xi_n^{(m)}\} \in \mathfrak{X}_0 \ (m = 1, 2, \ldots) \text{ şi } x = \{\xi_n\} = \lim_{m\to\infty} x_m.$$

Pentru un $\varepsilon > 0$ dat, găsim un număr m astfel încît $\|x_m - x\| = \sup_n |\xi_n^{(m)} - \xi_n| < \varepsilon/2$. Apoi, găsim un număr p astfel încît pentru $n \geqslant p$ să avem $|\xi_n^{(m)}| < \varepsilon/2$. Apoi, pentru orice $n \geqslant p$, are loc de asemenea $|\xi_n| \leqslant |\xi_n - \xi_n^{(m)}| + |\xi_n^{(m)}| < \varepsilon$, ceea ce înseamnă că $\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$.

Mulţimea $\mathfrak{X}_0$ fiind închisă în spaţiul complet $\mathfrak{X}$, spaţiul normat $\mathfrak{X}_0$ este complet.

d. Punem acum $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ unde 1 ocupă locul al n-lea. Pentru orice $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in \mathfrak{X}_0$, avem $\|x - \sum_{n=1}^{m} \xi_n e_n\| = \|(\xi_1, \ldots, \xi_m, \xi_{m+1}, \ldots) - (\xi_1, \ldots, \xi_m, 0, \ldots)\| = \|(0, \ldots, 0, \xi_{m+1}, \xi_{m+2}, \ldots)\|$ şi dacă pentru un $\varepsilon > 0$ dat, numărul N este ales astfel încît să avem $|\xi_m| < \varepsilon$ pentru $m > N$, obţinem $\|x - \sum_{1}^{m} \xi_n e_n\| < \varepsilon$; astfel

$$x = \sum_{1}^{\infty} \xi_n e_n,$$

seria fiind convergentă în raport cu norma spațiului $\mathfrak{X}_0$. În particular, vedem că mulțimea $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$, pentru care toate coordonatele ξ_n, începînd cu unul oarecare, sînt nule, este o mulțime densă în $\mathfrak{X}_0$.

e. Presupunem că un șir $\{f_k\}$ este astfel încît seria $\sum_1^\infty f_k\xi_k$ converge oricare ar fi $x = \{\xi_n\} \in \mathfrak{X}_0$. Atunci seria $\sum_1^\infty |f_k|$ converge și ea. Într-adevăr, considerăm funcționalele liniare

$$\varphi_n(x) = \sum_1^n f_k\xi_k \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Prin ipoteză, valorile acestor funcționale au limită pentru $n \to \infty$, oricare ar fi $x \in \mathfrak{X}_0$. Atunci, conform 12.74 b, normele funcționalelor φ_n sînt majorate de o aceeași constantă C. Aplicînd (5) are loc, pentru orice n, inegalitatea

$$\|\varphi_n\| = \sum_1^n |f_k| \leqslant C,$$

de unde convergența seriei $\sum_1^\infty |f_k|$.

f. Să arătăm acum că expresia (1) este forma generală a unei funcționale liniare continue pe spațiul $\mathfrak{X}_0$. Fie $f(x)$ o funcțională liniară continuă pe spațiul $\mathfrak{X}_0$. Punem $f(e_k) = f_k$ și formăm șirul funcționalelor liniare continue $\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k\xi_k$ $(n=1, 2, \ldots)$. Deoarece egalitatea $x = \sum_{k=1}^\infty \xi_k e_k$ are loc pentru orice $x \in \mathfrak{X}_0$ și funcționala f este continuă, avem

$$f(x) = f(\sum_{k=1}^\infty \xi_k e_k) = \sum_{k=1}^\infty \xi_k f(e_k) = \sum_{k=1}^\infty \xi_k f_k$$

pentru orice $x \in \mathfrak{X}_0$. Vedem că funcționala f acționează conform formulei (1), seria $\sum_1^\infty |f_k|$ fiind convergentă în virtutea punctului e. Propoziția este demonstrată.

Să arătăm de asemenea că norma $\|f\|_0$ a funcționalei f în spațiul $\mathfrak{X}_0$ este egală cu norma sa $\|f\| = \sum_1^\infty |f_k|$ în întreg $\mathfrak{X}$. Într-adevăr, este evident că $\|f\|_0 \leqslant \|f\|$. Pe de altă parte, aplicînd funcționala f vectorului $x_n = \{\operatorname{sgn} f_1, \ldots$

$\ldots, \operatorname{sgn} f_n, 0, 0, \ldots\} \in \mathfrak{X}_0$, are loc relaţia $f(x_n) = \sum_1^n f_k \operatorname{sgn} f_k =$

$= \sum_1^n |f_k|$, de unde $\|f\| \geqslant \sum_1^n |f_k|$ pentru orice $n = 1, 2, \ldots$

deci $\|f\|_0 \geqslant \sum_1^\infty |f_k|$. În consecinţă, $\|f\|_0 = \sum_1^\infty |f_k| = \|f\|$,

ceea ce trebuia demonstrat.

g. Considerăm în particular funcţionala $g_k(x) = \xi_k$ (care face să-i corespundă fiecărui vector x cea de a k-a coordonată). Ea se deduce din (1) punînd $f_k = 1$, $f_m = 0$ pentru $m \neq k$. Norma acestei funcţionale este 1, oricare ar fi $k = 1, 2, \ldots$. În plus, pentru orice $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in \mathfrak{X}_0$ avem

$$\lim_{k \to \infty} g_k(x) = \lim_{k \to \infty} \xi_k = 0.$$

Astfel, şirul funcţionalelor g_k converge tare către zero pentru $k \to \infty$ (12.73 d) cu toate că normele lor nu sînt convergente către zero.

h. Notăm prin $\mathfrak{X}_1$ mulţimea tuturor elementelor $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in \mathfrak{X}$ ce admit o limită finită pentru şirul ξ_n cînd $n \to \infty$. Mulţimea $\mathfrak{X}_1$ formează, evident, un subspaţiu al spaţiului $\mathfrak{X}$ şi conţine subspaţiul $\mathfrak{X}_0$ şi spaţiul unidimensional $\{\lambda e\}$ al elementelor de forma $\lambda e = \{\lambda, \lambda, \lambda, \ldots\}$; este evident că $\mathfrak{X}_1$ este suma directă a celor două subspaţii menţionate. Subspaţiul $\mathfrak{X}_1$ este închis în spaţiul $\mathfrak{X}$; aceasta o putem demonstra direct sau aplicînd teorema 12.23 f şi observînd că $\mathfrak{X}_1$ poate fi considerat ca spaţiul tuturor funcţiilor mărginite şi continue pe spaţiul metric format din numerele naturale $1, 2, \ldots$ şi simbolul ∞, cu o metrică în care numerele $1, 2, \ldots$ sînt izolate şi $\infty = \lim_{n \to \infty} n$ (vezi 3.35 f).

i. În subspaţiul $\mathfrak{X}_1$ există deja o funcţională liniară, continuă, care nu este de forma (1), anume

$$L(x) = \lim_{n \to \infty} \xi_n.$$

Dacă am putea să o punem sub forma (1) cu anumite numere $f_1, f_2, \ldots$, adică

$$L(x) = \sum_{k=1}^\infty f_k \xi_k = \lim_{n \to \infty} \xi_n,$$

atunci, punînd $x = e_m$, s-ar obţine $L(e_m) = f_m = 0$ $(m = 1, 2, \ldots)$;

dar în acest caz, pentru $x=e=(1,1,\dots)$ am avea $L(e)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot 1 = 0$, în contradicție cu $L(e) = \lim 1 = 1$.

Astfel, funcționala $L(x)$ nu este o funcțională de tipul (1). Dar ea este limita tare (12.73d) a funcționalelor de forma (1) pe spațiul $\mathfrak{X}$: evident avem pentru orice $x \in \mathfrak{X}_1$,

$$L(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x).$$

12.76. *Însumarea șirurilor mărginite.*

a. Știm că există șiruri mărginite de numere reale dar care nu sînt convergente. Ne propunem să extindem noțiunea de limită a unui șir convergent la șiruri de numere reale care diverg în sensul uzual al cuvîntului. Altfel spus, este vorba să facem să corespundă oricărui șir $x = \{a_n\}$ al unui subspațiu închis $\mathfrak{X}^* \subset \mathfrak{X}$, ce conține subspațiul $\mathfrak{X}_1$ al șirurilor convergente, un număr $\operatorname{Lim} a_n$, numit *limită generalizată* și verificînd următoarele condiții naturale:

1) $\operatorname{Lim}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \operatorname{Lim} a_n + \beta \operatorname{Lim} b_n$, oricare ar fi șirurile $\{a_n\}$ și $\{b_n\}$ din $\mathfrak{X}^*$ și numerele reale α și β;

2) $\operatorname{Lim} a_n = \lim a_n$ pentru orice șir convergent a_n;

3) $\operatorname{Lim} a_n$ este o funcțională mărginită și continuă pe $\mathfrak{X}^*$.

b. Ca exemplu, considerăm limita în sensul lui Cesàro. Prin definiție, *limita unui șir* $\{a_n\}$ *în sensul lui Cesàro*, notată prin C-lim a_n, este egală cu limita obișnuită (dacă aceasta din urmă există) a șirului de medii aritmetice a mărimilor a_n:

$$\text{C-lim } a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$$

Se poate arăta că limita în sensul lui Cesàro satisface condițiile 1) — 3) pe domeniul său de existență; nu insistăm asupra acestora, deoarece, ceva mai tîrziu, vom demonstra o teoremă mai generală. Să notăm că limita în sens Cesàro poate exista în anumite cazuri cînd limita obișnuită nu există. De exemplu, este evident că

$$\text{C- lim } (0, 1, 0, 1\dots) = \frac{1}{2}.$$

c. Funcționalele de forma 12.75(1) nu convin pentru construcția unei limite generalizate, deoarece chiar limita obișnuită $\lim \zeta_n$ pe subspațiul $\mathfrak{X}_1$ nu poate fi pusă sub această formă (12.75 i). Limita obișnuită este, după cum am

văzut în 12.75 i, limita tare a funcţionalelor speciale de forma 12.75(1); trebuie deci să studiem posibilitatea de a obţine o limită generalizată ca limita tare a funcţionalelor 12.75 (1). Pentru a avea un şir de funcţionale de această formă, trebuie să ne dăm o matrice infinită $T = \| t_{km} \|$; $k, m = 1, 2, \ldots$, ale cărei linii definesc funcţionalele

$$T_k(x) = \sum_{m=1}^{\infty} t_{km} \xi_m.$$

Dacă există limita obişnuită a şirului de numere $T_k(x)$, pentru $k \to \infty$, o vom numi T-limita şirului $\{\xi_n\}$ şi o notăm

$$T(x) = \lim_{k \to \infty} T_k(x) = T\text{-}\lim_{n \to \infty} \xi_n.$$

Cum trebuie să fie matricea T pentru ca domeniul de definiţie al funcţionalei $T(x)$ să conţină toate şirurile convergente şi pentru ca să fie satisfăcute condiţiile 1) —3) ce caracterizează o limită generalizată? Răspunsul este dat de următoarea teoremă.

TEOREMĂ (a lui Toeplitz). *Funcţionala $T(x)$ este o limită generalizată, dacă şi numai dacă sînt satisfăcute următoarele condiţii:*

$$\sum_{m=1}^{\infty} | t_{km} | \leqslant c, \text{ unde } c \text{ nu depinde de } k; \tag{1}$$

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{m=1}^{\infty} t_{km} = 1; \tag{2}$$

$$\lim_{m \to \infty} t_{km} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Demonstraţie. Să probăm necesitatea condiţiilor (1) — — (3). Dacă funcţionala $T(x)$ este definită, la fel vor fi şi toate funcţionalele $T_k(x)$ pentru orice şir $x = \{\xi_n\}$ convergent către zero. De aici rezultă în virtutea lui 12.75 e că fiecare serie $\sum_{m=1}^{\infty} | t_{km} |$ converge. Apoi, conform teoremei lui Banach-Steinhaus 12.74 b, din convergenţa şirului $T_k(x)$ pentru orice $x \in \mathfrak{X}_0$, rezultă că normele funcţionalelor T_k sînt mărginite; scriind aceste norme ca în 12.75b, vedem că este verificată condiţia (1). Aplicînd T-limita şirului

$x = (1, 1, \ldots)$ vedem că este verificată și condiția (2). Aplicînd T-limita vectorului e_k (12.75d) stabilim și condiția (3).

Demonstrăm acum suficiența condițiilor (1)— (3) pentru ca funcționala $T(x)$ să fie o limită generalizată.

Dacă valorile $T(x) = \lim_{k\to\infty} T_k(x)$ și $T(y) = \lim_{k\to\infty} T_k(y)$ sînt definite pentru anumite șiruri $x = \{\xi_n\}$ și $y = \{\eta_n\}$, atunci numărul $T(\alpha x + \beta y) = \lim T_k(\alpha x + \beta y) = \alpha \lim T_k(x) + \beta \lim T_k(y)$ este definit oricare ar fi constantele α și β; astfel, domeniul de definiție $\mathfrak{X}_T$ al funcționalei $T(x)$ este un spațiu vectorial, însăși funcționala fiind liniară pe acest domeniu. Pentru șirul $e = (1, 1, 1, \ldots)$, avem

$$T_k(e) = \sum_{m=1}^{\infty} t_{km}, \quad T(e) = \lim_{k\to\infty} T_k(e) = \lim_{k\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} t_{km} = 1,$$

în virtutea condiției (2). În consecință, pentru ca să fie verificată egalitatea (2), ce figurează în definiția unei limite generalizate, este suficient să ne mărginim la elementele $x \in \mathfrak{X}_0$. În virtutea condiției (1), funcționalele T_k din spațiul $\mathfrak{X}_0$ sînt mărginite în normă de constanta c. Apoi, pentru elementele $x = (\xi_1, \ldots. \xi_n, 0, 0, \ldots)$, avem $\lim T_k(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{1}^{n} t_{km}\xi_m = 0$, conform condiției (3). Aceste elemente formînd o mulțime densă peste tot în $\mathfrak{X}_0$ (12.75 d) rezultatul căutat decurge din lema 12.73 d. În sfîrșit, faptul că funcționala $T(x)$ este mărginită pe subspațiul $\mathfrak{X}_T$ rezultă din 12.74 c, iar 12.74d dă majorarea în normă

$$\|T\| \leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} \|T_k\| = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sum_{n=1}^{\infty} |t_{kn}|.$$

Deoarece $Te = 1$, avem o minorare în normă

$$\|T\| \geqslant 1.$$

Rămîne să arătăm că subspațiul $\mathfrak{X}_T$ este închis în spațiul $\mathfrak{X}$. Considerăm închiderea $\overline{\mathfrak{X}}_T$ a subspațiului $\mathfrak{X}_T$. Mulțimea $\mathfrak{X}_T$ este densă peste tot în $\overline{\mathfrak{X}}_T$, funcționalele $T_k(x)$ sînt convergente în orice punct $x \in \overline{\mathfrak{X}}_T$, normele lor fiind mărginite; ținînd cont de 12.73 d, de aici rezultă că func-

ționalele $T_k(x)$ converg de asemenea pe $\overline{\mathfrak{x}}_T$. Vedem că domeniul de convergență $\mathfrak{x}_T$ al șirului T_k conține închiderea sa $\overline{\mathfrak{x}}_T$; deci $\overline{\mathfrak{x}}_T = \mathfrak{x}_T$ și teorema este complet demonstrată.

12.77. *Exemple.*

a. Limitei în sens uzual $\lim \xi_n$ (care nu este definită decît pe $\mathfrak{x}_1$) îi corespunde matricea

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix}.$$

b. Limita în sens Cesàro (12.76b) este dată de matricea

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1/2 & 1/2 & 0 & \dots \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix},$$

pentru care ipotezele teoremei lui Toeplitz sînt satisfăcute; limita în sens Cesàro are deci toate proprietățile unei limite generalizate.

c. Ca un al treilea exemplu, dăm o întreagă clasă de matrici care le conține pe cele două precedente drept cazuri particulare. Fie $p_0 > 0$, $p_1 \geqslant 0$, $p_2 \geqslant 0$, ... un șir și $P_n = \sum_0^n p_k (n = 0, 1, 2, \dots)$; atunci matricea

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ p_1/P_1 & p_0/P_1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ p_2/P_2 & p_1/P_2 & p_0/P_2 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_n/P_n & p_{n-1}/P_n & p_{n-2}/P_n & \dots & p_0/P_n & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix}$$

definește o metodă de sumare datorată lui Voronoi. Condițiile (1) și (2) ale teoremei lui Toeplitz sînt îndeplinite în mod evident. Condiția (3), pentru $m = 1$, este echivalentă

cu condiția $p_n/P_n \to 0$; dar deoarece

$$\frac{p_{n-m}}{P_n} \leqslant \frac{p_{n-m}}{P_{n-m}},$$

din condiția $p_n/P_n \to 0$, rezultă (3), pentru orice m. În consecință, condiția $p_n/P_n \to 0$ este necesară și suficientă pentru ca matricea lui Voronoi să fie o matrice Toeplitz. Dacă $p_0 = 1$, $p_1 = p_2 = \ldots = 0$, se ajunge la sumare obișnuită; dacă $p_0 = p_1 = p_2 = 1$ se regăsește sumarea în sens Cesàro.

12.78. Dăm cîteva proprietăți ale T-limitelor.

a. Pentru anumite T-limite spațiul $\mathfrak{X}_T$ se poate confunda cu spațiul $\mathfrak{X}_1$, cum este cazul pentru limita uzuală $\lim \xi_n$. Ne punem problema cum să separăm aceste cazuri „puțin interesante" ale limitei generalizate. Există o teoremă a lui A. Brudno [7], conform căreia $\mathfrak{X}_T = \mathfrak{X}_1$, dacă și numai dacă există o constantă δ_0 astfel încît, pentru orice $x = \{\xi_n\} \in \mathfrak{X}$, să aibă loc inegalitatea

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\, T_n(x)\,| \geqslant \delta_0 \overline{\lim_{n\to\infty}} |\, \xi_n\,|.$$

Totuși, această condiție este destul de dificil de verificat. Mai există o condiție de egalitate $\mathfrak{X}_T = \mathfrak{X}_1$ în termeni de numerele t_{kn} însele, dar ea nu este decît suficientă (Agnew) [1]: $\mathfrak{X}_T = \mathfrak{X}_1$ dacă are loc inegalitatea

$$\underline{\lim_{n}} \sum_{n} [t_{nn} - \sum_{k\neq n} |\, t_{kn}\,|\,] > 0.$$

b. Pe de altă parte, se poate construi o matrice T pentru care $\mathfrak{X}_T = \mathfrak{X}$? Aceasta se va dovedi imposibil (vezi exerc. 8). Totuși, din anumite considerente de ordin general rezultă că există o limită generalizată Lim ξ_n, definită pe tot spațiul $\mathfrak{X}$ și astfel încît $\operatorname{Lim}_{n\to\infty} \xi_n = \operatorname{Lim}_{n\to\infty} \xi_{n+1}$ [3]; totuși, o astfel de limită generalizată nu poate fi dată printr-o formulă explicită.

c. Pentru anumite matrici T, mărimea $T(x)$ poate ieși din intervalul $\Delta(x) = [\underline{\lim}\, \xi_n; \overline{\lim}\, \xi_n]$, care conține toate valorile de aderență ale șirului ξ_n. Aceasta are loc, de exem-

plu, pentru matricea

$$\left\| \begin{matrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix} \right\|$$

și pentru elementul $x = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$. Este natural să punem următoarea întrebare : ce condiții să impunem matricii T pentru ca toate valorile de aderență ale șirului $T_1(x), T_2(x), \dots$ (pentru orice $x \in \mathfrak{X}$) să aparțină intervalului $\Delta(x)$? Răspunsul este dat de următoarea teoremă a lui Robinson (vezi exerc. 9) : proprietatea cerută are loc, dacă și numai dacă $\lim_{n\to\infty} \| T_n \| = 1$.

§ 12.8. Algebre normate

12.81. a. Un spațiu normat $\mathfrak{U}$, care este în același timp o algebră (12.18 a), se numește *algebră normată*, dacă $x_n \to x$ (în raport cu norma din $\mathfrak{U}$) implică $x_n y \to xy$ și $y x_n \to yx$, pentru orice $y \in \mathfrak{U}$.

b. Astfel, mulțimea $L(\mathfrak{X})$ a tuturor operatorilor mărginiți ce acționează într-un spațiu Banach $\mathfrak{X}$ este un spațiu normat complet (12.73 b) și în același timp o algebră (12.19 i, 12.71 j). În această algebră norma satisface inegalitatea 12.71(2)

$$\| AB \| \leqslant \| A \| \| B \|, \tag{1}$$

de unde rezultă că $L(\mathfrak{X})$ este o algebră normată : anume, dacă $A_n \to A$ și dacă B este un operator oarecare din $L(\mathfrak{X})$, atunci avem

$$\| A_n B - AB \| = \| (A_n - A) B \| \leqslant \| A_n - A \| \| B \| \to 0,$$

deci $A_n B \to AB$.

c. Se poate întîmpla ca o inegalitate de tipul (1) să fie adevărată pentru orice algebră normată completă după o anumită modificare (vom vedea aceasta în 12.88). De aceea putem să înlocuim condiția de continuitate a înmulțirii sub forma „$x_n \to x$ implică $x_n y \to xy$ și $y x_n \to yx$ pen-

tru orice y'' printr-o condiţie mai puternică, anume:

$$|xy| \leqslant |x|\,|y| \tag{2}$$

oricare ar fi x şi y din $\mathfrak{A}$.

d. În ce urmează presupunem, în afară de axioma (2), că algebra normată considerată are un element unitate e (12.18c) şi că $|e| = 1$. (Ultima presupunere este satisfăcută automat în algebra operatorilor liniari ce acţionează într-un spaţiu normat $\mathfrak{X}$, unde unitatea este operatorul identic.)

12.82.a. Unitatea unei algebre normate, ca şi a oricărei algebre, este un element inversabil, căci $ee = e$. Să arătăm că într-o algebră normată completă $\mathfrak{A}$, întreaga bilă $\{x \mid |e - x| < 1\}$ este formată din elemente inversabile.

Pentru a demonstra aceasta considerăm seria

$$y = e + (e - x) + (e - x)^2 + \dots \tag{1}$$

Conform condiţiei (2), avem $|(e - x)^n| \leqslant |e - x|^n$, deci seria converge în virtutea criteriului lui Weierstrass 12.37 c. Înmulţind-o cu $x = e - (e - x)$, are loc relaţia

$$y[e - (e - x)] = [e + (e - x) + (e - x)^2 + \dots] -$$

$$- [(e - x) + (e - x)^2 + \dots] = e.$$

În consecinţă, suma seriei (1) este chiar elementul invers al lui x.

b. Din estimarea

$$|e - y| = |(e - x) + (e - x)^2 + \dots| \leqslant \frac{|e - x|}{1 - |e - x|}$$

rezultă că $x \to e$ implică $y \to e$. Putem spune că operatorul (neliniar) de înmulţire cu $y = x^{-1}$ este continuu pentru $x = e$.

12.83. a. Notăm prin O mulţimea tuturor elementelor inversabile ale unei algebre normate complete $\mathfrak{A}$. Să arătăm că O este o mulţime deschisă în $\mathfrak{A}$ şi operatorul x^{-1} este continuu pe tot O.

Deoarece $xx^{-1} = e$, atunci conform lui (2) pentru orice h astfel încît $|h| < 1/|x^{-1}|$ avem $|(x+h)x^{-1} - e| = |hx^{-1}| \leqslant |h|\,|x^{-1}| < 1$, astfel că în virtutea lui 12.82 a elementul $(x+h)x^{-1}$ este inversabil, adică există un element $z(h)$ astfel încît $(x+h)x^{-1}z(h) = e$. Dar atunci $x+h$ este de asemenea inversabil: inversul său este evident elementul $x^{-1}z(h)$. Dacă $h \to 0$, atunci $(x+h)x^{-1} \to xx^{-1} = e$, deci $z(h) \to e$ în virtutea lui 12.82b; de aici decurge că $(x+h)^{-1} = x^{-1}z(h) \to x^{-1}$, ceea ce demonstrează continuitatea operatorului x^{-1} pe mulțimea O.

b. Am văzut că un element inversabil x aparține mulțimii O odată cu o bilă de rază $r \geqslant 1/|x^{-1}|$. Aceasta înseamnă că $|x^{-1}| \geqslant 1/r$: așadar, cînd x se apropie de frontiera mulțimii O, avem, bineînțeles, $r \to 0$ și norma elementului x^{-1} crește indefinit.

12.84. Un element z neinversabil, care se află pe frontiera domeniului O, este un „divizor generalizat al lui zero"; aceasta înseamnă că există un șir de elemente $y_1\, y_2, \ldots$ astfel încît $|y_n| \geqslant c > 0$, dar $zy_n \to 0$. Anume, să punem $y_n = x_n^{-1}/|x_n^{-1}|$, unde $x_n \in O$ și $x_n \to z$. Atunci $|zy_n| \leqslant |(z - x_n)y_n| + |x_n y_n| \leqslant |z - x_n| + 1/|x_n^{-1}| \to 0$ (12.83b) ceea ce trebuia demonstrat.

În general, orice divizor generalizat al lui zero nu este inversabil, deoarece, pentru un z inversabil, $zy_n \to 0$ implică $z^{-1}zy_n = y_n \to 0$. Dar un element neinversabil, care nu este limită de elemente inversabile, poate să nu fie un divizor generalizat al lui zero (exerc. 10).

12.85.a. O algebră complexă normată și completă $\mathcal{U}$, va fi numită de aici încolo *algebră Gelfand*.

Oricare ar fi un element x al unei algebre Gelfand, expresia $e - \lambda x$ este un element inversabil pentru orice λ complex suficient de mic; de exemplu, dacă $x \neq 0$ și $|\lambda| < 1/|x|$, $e - \lambda x$ este inversabil și, mai mult, conform 12.82a,

$$(e - \lambda x)^{-1} = e + \lambda x + \lambda^2 x^2 + \ldots \qquad (1)$$

Raza de convergență a serieĭ (1) este (12.66)

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|x^n|}}; \qquad (2)$$

în cazul cînd $\rho = \infty$, seria converge în tot planul λ.

Elementul $x - \mu e$ este inversabil pentru orice $|\mu|$ suficient de mare, de exemplu, pentru $|y| > |x|$; aceasta rezultă direct din formula $x - \mu e = -\mu(e - \mu^{-1}x)$. Mulțimea tuturor μ, pentru care elementul $x - \mu e$ nu este inversabil, se numește *spectrul elementului* x. Pe complementara spectrului este definită funcția $(x - \mu e)^{-1}$. Conform 12.83a, această complementară este o mulțime G deschisă în planul μ, spectrul fiind închis. Apoi, din 12.83 a rezultă că $(x - \mu e)^{-1}$ este o funcție continuă de μ (cu valori în $\mathfrak{A}$) în domeniul G. Mai mult, să arătăm că ea este o funcție analitică (12.66) pe G. Are loc egalitatea

$$\left[\frac{(x - (\mu + h)e)^{-1} - (x - \mu e)^{-1}}{h}\right](x - (\mu + h)e)(x - \mu e) =$$

$$= \frac{(x - \mu e) - (x - (\mu + h)e)}{h} = e, \qquad (3)$$

care arată că elementul situat între parantezele mari este inversabil; inversul său $(x - (\mu + h)e)(x - \mu e)$ are limita $(x - \mu e)^2$ cînd $h \to 0$, de unde existența limitei

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x - (\mu + h)e)^{-1} - (x - \mu e)^{-1}}{h} = [(x - \mu e)^2]^{-1}. \qquad (4)$$

Aceasta spune că $(x - \mu e)^{-1}$ este o funcție analitică în domeniul G, ceea ce trebuia demonstrat.

b. TEOREMĂ. *Spectrul oricărui element x al unei algebre Gelfand $\mathfrak{A}$ nu este vid.*

Demonstrație. Fie Γ un cerc în planul μ, de centru 0 și de rază $r > |x|$. Considerăm integrala

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (x - \mu e)^{-1} \, d\mu \qquad (5)$$

(care există în virtutea continuității funcției $(x - \mu e)^{-1}$ pe curba Γ). O calculăm efectuînd substituția $\mu^{-1} = \lambda$ și utilizînd dezvoltarea (1) și formulele 10.33 a. Avem

$$I = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\mu| = r} \mu^{-1}(e - \mu^{-1}x)^{-1} \, d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=1/r} (e - \lambda x)^{-1} \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=1/r} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m x^m \frac{d\lambda}{\lambda} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} x^m \oint_{|\lambda|=1/r} \lambda^{m-1} d\lambda = -e.$$

Dar dacă spectrul elementului x ar fi fost vid, funcția $(x - \mu e)^{-1}$ ar fi analitică în tot planul μ și integrala (5) ar fi nulă conform teoremei lui Cauchy. Teorema este demonstrată.

c. COROLAR (teorema lui Gelfand-Mazur). *Dacă o algebră Gelfand $\mathfrak{A}$ este un corp, adică orice element al său x nenul admite invers, atunci algebra $\mathfrak{A}$ este izomorfă cu corpul numerelor complexe.*

Într-adevăr, fie x un element oarecare al algebrei $\mathfrak{A}$ și μ un element al spectrului său, astfel încît elementul $x - \mu e$ să nu aibă invers. Dar, prin ipoteză, singurul element care nu are invers este 0; deci $x - \mu e = 0$, $x = \mu e$, ceea ce trebuia demonstrat.

12.86.a. Considerăm cazul cînd algebra $\mathfrak{A}$ este algebra $U(\mathbb{C}_n)$ a tuturor operatorilor liniari ai unui spațiu finit dimensional $\mathbb{C}_n$, normat cu o normă oarecare (am văzut în 12.35 e că toate normele din $\mathbb{C}_n$ sînt echivalente între ele). Orice operator liniar A este în acest caz continuu, deoarece coordonatele vectorului Ax sînt funcții liniare, deci continue de coordonatele vectorului x. Astfel, algebra $U(\mathbb{C}_n)$ coincide cu algebra $L(\mathbb{C}_n)$ a tuturor operatorilor mărginiți în spațiu, $\mathbb{C}_n$.

Spectrul elementului A, în sensul definiției 12.85a, este în acest caz mulțimea tuturor valorilor proprii ale operatorului A : într-adevăr, operatorul $A - \mu E$ nu este inversabil, dacă și numai dacă $\det\|A - \mu E\| = 0$; dar aceasta este ecuația ce definește valorile proprii ale operatorului A. Vedem că definiția spectrului din 12.85 a este echivalentă, pentru cazul de față, cu definiția spectrului operatorului A dată în 12.19 d. Spectrul unui operator A din 12.19d, cu multiplicitățile sale, ne-a permis să reprezentăm izomorf algebra tuturor operatorilor P(A) pe algebra jeturilor pe spectrul operatorului A; el a permis, de asemenea, să construim un epimorfosm al algebrei $U(G)$ a funcțiilor analitice într-un domeniu G conținînd spectrul pe algebra P(A).

b. Se pot defini și morfisme analoage în cazul general al unei algebre oarecare Gelfand. Fie $S = S_x$ spectrul unui element $x \in \mathfrak{A}$; știm că S este o mulțime nevidă închisă și mărginită în planul complex. Fie $U(S)$ algebra tuturor funcțiilor analitice $f(\lambda)$ pe mulțimea S (fiecare din ele este analitică într-un domeniu ce conține mulțimea S).

TEOREMĂ. *Există un morfism al algebrei* $U(S)$ *în algebra* $\mathfrak{A}$ *care transformă funcția* $f(\lambda) = 1$ *în* e, *funcția* $f(\lambda) = \lambda$ *în elementul* x *și orice șir de funcții* $f_n(\lambda)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *care converge uniform către funcția* $f(\lambda)$ *pe un domeniu* $H \supset S$ *într-un șir de elemente* $f_n \in \mathfrak{A}$ *convergent în normă către elementul* f *care corespunde funcției* $f(\lambda)$.

Demonstrație. Morfismul căutat este dat de formula

$$f = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\lambda e - x)^{-1} f(\lambda)\, d\lambda, \qquad (1)$$

unde Γ este un contur închis ce se află în domeniul de analiticitate al funcției $f(\lambda)$ și înconjurînd (o dată) mulțimea S. În virtutea teoremei lui Cauchy, integrala (1) nu depinde de alegerea acestui contur. Faptul că funcția $f(\lambda) = 1$ devine, prin aplicația (1), elementul e este probată în 12.85.b; se demonstrează într-un mod analog că funcția $f(\lambda) = \lambda$ devine elementul x. Este evident că formula (1) definește o aplicație liniară a lui $U(S)$ în $\mathfrak{A}$; trebuie să arătăm că produsul a două funcții $f(\lambda)$ și $g(\lambda)$ se transformă în produsul elementelor corespondente f și g.

Plecăm de la egalitatea

$$(\lambda e - x)^{-1}(\mu e - x)^{-1} = \frac{(\lambda e - x)^{-1} - (\mu e - x)^{-1}}{\mu - \lambda}, \qquad (2)$$

care se deduce din 12.85(3) înlocuind $\mu + h$ prin λ. Considerăm două curbe închise Γ_f și Γ_g, înconjurînd mulțimea S în domeniul de analiticitate comun funcțiilor $f(\lambda)$ și $g(\lambda)$, astfel încît curba Γ_g să înconjoare curba Γ_f fără să aibă puncte comune cu ea. Integrînd egalitatea (2) înmulțită în prealabil cu $f(\lambda)\, g(\mu)/(2\pi i)^2$, la început, în lungul curbei Γ_f, apoi în lungul Γ_g și permutînd ordinea de integrare conform 10.24, avem

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_f} (\lambda e - x)^{-1} f(\lambda)\, d\lambda \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_g} (\mu e - x)^{-1} g(\mu)\, d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_f} (\lambda e - x)^{-1} f(\lambda) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_g} \frac{g(\mu)\, d\mu}{\mu - \lambda} \right\} d\lambda +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_g} (\mu e - x)^{-1} g(\mu) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_f} \frac{f(\lambda)\, d\lambda}{\lambda - \mu} \right\} d\mu.$$

Deoarece λ este un punct interior domeniului limitat de curba Γ_g, prima integrală din acolade are valoarea $g(\lambda)$; deoarece μ este în exteriorul domeniului limitat de curba Γ_f, a doua integrală dintre acolade este nulă. În final, are loc egalitatea

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_f} (\lambda e - x)^{-1} f(\lambda)\, d\lambda \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_g} (\mu e - x)^{-1} g(\mu)\, d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_f} (\lambda e - x)^{-1} f(\lambda) g(\lambda)\, d\lambda,$$

care arată că formula (1) face să corespundă produsului a două funcții $f(\lambda)$ și $g(\lambda)$, produsul elementelor corespunzătoare f și g.

Rămîne de demonstrat ultima afirmație a teoremei. Presupunem că un șir de funcții $f_n(\lambda)$ converge uniform către o funcție $f(\lambda)$, într-un domeniu G ce conține mulțimea S. Alegem un contur închis Γ în domeniul G; avem estimarea

$$\|f - f_n\| = \left\| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\lambda e - x)^{-1} [f(\lambda) - f_n(\lambda)]\, d\lambda \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\lambda \in \Gamma} |f(\lambda) - f_n(\lambda)| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \|(\lambda e - x)^{-1}\| \, |d\lambda|,$$

de unde $\lim_{n \to \infty} \|f - f_n\| = 0$. Teorema este demonstrată.

Remarcăm că aplicația (1) nu este în general monomorfism și poate transforma o funcție $f(\lambda) \neq 0$ în elementul nul al algebrei $\mathfrak{A}$.

c. În particular, pentru orice element $x \in \mathfrak{A}$, sînt definite funcțiile e^{ix}, $\cos tx$, $\sin tx$; proprietățile unui morfism

implică egalitatea

$$e^{(t_1+t_2)x} = e^{t_1 x} e^{t_2 x} \quad (t_1, t_2 \in \mathbb{C}).$$

Din ultima afirmație a teoremei rezultă că aceste funcții pot fi de asemenea definite cu ajutorul seriilor de puteri

$$e^{tx} = \sum_0^\infty \frac{t^n x^n}{n!},$$

$$\cos tx = 1 - \frac{t^2}{2!}x^2 + \frac{t^4}{4!}x^4 - \ldots,$$

$$\sin tx = tx - \frac{t^3}{3!}x^3 + \frac{t^5}{5!}x^5 - \ldots$$

12.87. Putem să caracterizăm spectrul oricărui element de forma $f(x)$:

TEOREMĂ. *Dacă $f(\lambda)$ este o funcție analitică pe spectrul S_x al unui element $x \in \mathfrak{A}$, atunci spectrul $S_{f(x)}$ al elementului $f(x)$* (12.86b) *coincide cu mulțimea valorilor $f(\lambda)$ pentru $\lambda \in S_x$.*

Demonstrație. Fie $\lambda_0 \in S_x$, $\mu_0 = f(\lambda_0)$. Funcția analitică $f(\lambda) - \mu_0$ se anulează pentru $\lambda = \lambda_0$, deci admite reprezentarea

$$f(\lambda) - \mu_0 = (\lambda - \lambda_0) g(\lambda),$$

unde $g(\lambda)$ este o funcție analitică în același domeniu ca și $f(\lambda)$. În virtutea proprietăților unui morfism f, are loc relația

$$f(x) - \mu_0 e = (x - \lambda_0 e)\, g(x).$$

Dacă însă elementul $f(x) - \mu_0 e$ este inversabil, $x - \lambda_0 e$ este de asemenea inversabil (cu $g(x)(f(x) - \mu_0 e)^{-1}$ ca invers), ceea ce contrazice ipoteza. De aici $\mu_0 \in S_{f(x)}$. Invers, fie $\mu_0 \in S_{f(x)}$; afirmăm că există $\lambda_0 \in S_x$ astfel încît $f(\lambda_0) = \mu_0$. Într-adevăr, dacă funcția $f(\lambda) - \mu_0$ nu s-ar anula pe S_x, atunci funcția $g(\lambda) = 1/[f(\lambda) - \mu_0]$ ar fi analitică pe mulțimea S_x și elementul corespunzător $g(x) \in \mathfrak{A}$ ar fi inversul lui $f(x) - \mu_0 e$, ceea ce contrazice ipoteza $\mu_0 \in \mathfrak{A}$ ar fi inversul lui $f(x) - \mu_0 e$, ceea ce contrazice ipoteza $\mu_0 \in S_{f(x)}$. Teorema este demonstrată.

12.83. Revenim la problema schimbării normei unei algebre $\mathfrak{U}$ printr-o înmulțire la stînga continuă (adică astfel încît $x_n \to x$ să implice $x_n y \to xy$ și $yx_n \to yx$) avînd ca scop să verifice condiția 12.81(2).

TEOREMA. *Pentru orice algebră normată completă* $\mathfrak{U}$ *avînd unitate, cu norma* $|x|_1$, *există o normă echivalentă* $|x|_2$ *pentru care* $|e|_2 = 1$, $|xy|_2 \leqslant |x|_2 \, |y|_2$, *oricare ar fi* x *și* y *din* $\mathfrak{U}$.

Demonstrație. Orice element x al algebrei $\mathfrak{U}$ generează operatorul A_x de multiplicare cu x după formula: $A_x y = xy$. Din ipoteză și din proprietățile unei algebre rezultă că A_x este un operator liniar continuu. În algebra $L(\mathfrak{U})$ a tuturor operatorilor liniari continui ce acționează în $\mathfrak{U}$, operatorii de forma A_x formează o subalgebră $\mathfrak{V}$ în care operatorul unitar $E = A_e$ este unitatea.

Folosind asociativitatea înmulțirii, rezultă $A_x(yz) = x(yz) = (xy)z = (A_x y)z$. Este ușor de văzut că această proprietate caracterizează operatorii subalgebrei $\mathfrak{V}$. Într-adevăr, dacă un operator A are proprietatea că oricare ar fi y și z din $\mathfrak{U}$, avem $A(yz) = Ay \cdot z$, atunci punînd $Ae = x$, rezultă $Ay = A(ey) = (Ae)y = xy$, adică A este un operator de multiplicare prin x.

Avînd stabilită această proprietate, să arătăm că subalgebra $\mathfrak{V}$ este închisă în algebra $L(\mathfrak{U})$. Presupunem că operatorii $A_1, A_2, \ldots$ din $\mathfrak{V}$ converg (în raport cu norma din $L(\mathfrak{U})$) către un operator A. Atunci $A_n x$ converge către Ax pentru orice $x \in \mathfrak{U}$. Înmulțirea fiind continuă, avem $A(xy) = \lim A_n(xy) = \lim (A_n x \cdot y) = \lim A_n x \cdot y = Ax \cdot y$, de unde, conform celor precedente, $A \in \mathfrak{V}$.

Deoarece algebra $L(\mathfrak{U})$ este completă (12.73 b), subalgebra $\mathfrak{V} \subset L(\mathfrak{U})$ inclusă în $L(\mathfrak{U})$ este completă și ea, ca spațiu vectorial normat, cu norma din $L(\mathfrak{U})$. Acum avem două norme în algebra $\mathfrak{U}$: $|x|_1$ și

$$|x|_2 = \|A_x\| = \sup_{|y|_1 \leqslant 1} |A_x y|_1 = \sup_{|y|_1 \leqslant 1} |xy|_1,$$

algebra $\mathfrak{U}$ fiind completă în raport cu fiecare din ele. Apoi, are loc relația

$$|e|_2 = \|A_e\| = \|E\| = 1, \quad |x|_2 = \sup_{|y|_1 \leqslant 1} |xy|_1 \geqslant$$

$$\geqslant \left| x \frac{e}{|e|_1} \right|_1 = \frac{|x|_1}{|e|_1},$$

de unde

$$|x|_2 \geqslant c_1 |x|_1, \quad c_1 = \frac{1}{|e|_1}.$$

Conform 12.72d, normele $|x|_1$ şi $|x|_2$ sînt echivalente, ceea ce trebuia demonstrat.

§ 12.9. Proprietăţi spectrale ale operatorilor liniari

12.91. Un operator liniar mărginit A ce acţionează într-un spaţiu Banach $\mathfrak{X}$ aparţine algebrei $L(\mathfrak{X})$ a tuturor operatorilor liniari mărginiţi acţionînd în spaţiul $\mathfrak{X}$. Fiind un element al acestei algebre, el are un spectru S_A(12.85 a), care este mulţimea numerelor complexe λ pentru care $A - \lambda E$ are operator invers mărginit. În cazul dimensiunii finite ($X = \mathbb{C}_n$) spectrul operatorului A se reduce, după cum am văzut în 12.86a, la un număr finit, de exemplu m, de puncte distincte care sînt valorile proprii ale operatorului A. Ştim că spaţiul $\mathbb{C}_n$ se poate atunci descompune în sumă directă de m subspaţii invariante, în fiecare din ele operatorul A avînd un spectru redus la un punct şi astfel avem o descriere completă (12.17f). În cazul dimensiunii infinite, spectrul operatorului A este o mulţime compactă nevidă din plan, inclusă în discul $|\lambda| \leqslant \|A\|$ sau, mai exact, în discul $|\lambda| \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|A^n\|}$ (12.85a); în cazul general nu putem adăuga nimic (vezi exerc. 11, unde se construieşte un operator avînd ca spectru o mulţime compactă arbitrar dată din plan).

12.92.a. În cazul dimensiunii infinite, un număr λ aparţinînd spectrului unui operator A nu este numaidecît o valoare proprie a operatorului A. Se poate chiar spune că, în acest caz, devine naturală nu noţiunea de valoare proprie, ci aceea de valoare proprie generalizată : numim astfel un număr λ care admite un şir de vectori $x_1, x_2, \ldots$, astfel încît $|x_n| \geqslant c > 0$ şi $Ax_n - \lambda x_n \to 0$. Orice valoare proprie a unui operator este evident o valoare proprie generalizată. Orice valoare proprie generalizată a unui operator A aparţine spectrului său ; într-adevăr, dacă avem $Ax_n - \lambda x_n \to 0$ pentru un şir x_n şi operatorul $A - \lambda E$ admite un invers mărginit, atunci $x_n = (A - \lambda E)^{-1}(A - \lambda E)\, x_n \to 0$.

b. Arătăm acum că orice punct din frontiera spectrului unui operator A este o valoare proprie generalizată. Fie λ un punct din frontiera spectrului; deoarece $A - \lambda E$ este limita operatorilor inversabili $A - \mu E$, unde $\mu \notin S_A$, operatorul $A - \lambda E$ este un divizor generalizat al lui zero în virtutea lui 12.84, deci există un şir de operatori P_n astfel încît $\|P_n\| \geqslant c > 0$, dar $(A - \lambda E)P_n \to 0$ în algebra $L(\mathfrak{X})$. Pentru orice operator P_n, alegem un vector y_n astfel încît $|y_n| = 1$, $|P_n y_n| \geqslant c/2$. Punînd $x_n = P_n y_n$, avem $|x_n| \geqslant c/2$, $|(A - \lambda E)x_n| = |(A - \lambda E)P_n y_n| \leqslant \|(A - \lambda E)P_n\| \cdot |y_n| \to 0$, ceea ce trebuia demonstrat.

Punctele interioare ale spectrului unui operator A nu sînt în mod necesar valori proprii generalizate (exerc. 10).

12.93. Următoarea teoremă simplifică uneori studiul unui operator:

TEOREMĂ. *Presupunem că spectrul S_A al operatorului A este reuniunea a două mulţimi închise disjuncte S_1 şi S_2. Atunci spaţiul $\mathfrak{X}$ se poate descompune în sumă directă de două subspaţii închise $\mathfrak{X}_1$ şi $\mathfrak{X}_2$, care sînt invariante relativ la A, astfel încît spectrul lui A considerat pe subspaţiul $\mathfrak{X}_1$ este mulţimea S_1 şi cel considerat pe $\mathfrak{X}_2$ este S_2.*

Demonstraţie. Vom folosi morfismul algebrei $\mathcal{U}(S_A)$ al funcţiilor $f(\lambda)$ analitice pe S_A în algebra $L(\mathfrak{X})$, stabilit în 12.86b. Acest morfism este realizat prin formula 12.86(1)

$$f = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma (\lambda E - A)^{-1} f(\lambda)\, d\lambda,$$

unde Γ este o curbă închisă ce înconjoară mulţimea S_A în domeniul de analiticitate al funcţiei $f(\lambda)$. În cazul cînd mulţimea S_A este reuniune de părţi închise disjuncte două cîte două, curba Γ se descompune în mod similar în părţi închise. În cazul de faţă, mulţimea S_A este reuniunea a două mulţimi închise S_1 şi S_2 fără puncte comune şi curba Γ poate fi descompusă în două curbe închise Γ_1 şi Γ_2, prima înconjurînd mulţimea S_1, a doua mulţimea S_2.

Funcţia $e_1(\lambda)$, care este egală cu 1 pe mulţimea S_1 şi 0 pe mulţimea S_2, aparţine mulţimii $U(S_A)$; algebra $U(S_A)$ conţine de asemenea funcţia $e_2(\lambda)$, care este egală cu 0 pe mulţimea S_1 şi cu 1 pe S_2. Aceste funcţii au următoarele

proprietăți evidente:

$$e_1(\lambda) + e_2(\lambda) = 1 \text{ (pe } S_A\text{)}, \quad e_1^2(\lambda) = e_1(\lambda), \quad e_2^2(\lambda) = e_2(\lambda),$$

$$e_1(\lambda)\, e_2(\lambda) = e_2(\lambda) e_1(\lambda) = 0.$$

Notăm prin E_1 și E_2 operatorii liniari ce corespund respectiv funcțiilor $e_1(\lambda)$ și $e_2(\lambda)$. Ținînd cont de proprietățile unui morfism, avem

$$E_1 + E_2 = E, \quad E_1^2 = E_1, \quad E_2^2 = E_2, \quad E_1E_2 = E_2E_1 = 0.$$

Fie $\mathfrak{X}_1$ mulțimea soluțiilor (în spațiul $\mathfrak{X}$) ale ecuației $E_1x = x$ și $\mathfrak{X}_2$ mulțimea soluțiilor ecuației $E_2x = x$. În particular, orice vector de forma $x = E_1y$, pentru un $y \in \mathfrak{X}$ oarecare, este soluția ecuației $E_1x = x$ deoarece $E_1(E_1y) = E_1^2y = E_1y$. Evident, $\mathfrak{X}_1$ și $\mathfrak{X}_2$ sînt subspații în spațiul $\mathfrak{X}$ și sînt închise, în virtutea continuității operatorilor E_1 și E_2. Dacă $z \in \mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_2$, atunci $z = E_1z = E_2z$; dar $E_1z = E_1(E_1z) = E_1(E_2z) = 0$, de unde $z = E_1z = 0$. Astfel, intersecția subspațiilor $\mathfrak{X}_1$ și $\mathfrak{X}_2$ nu conține decît vectorul nul. Aplicînd operatorul $E = E_1 + E_2$ unui vector y oarecare, se găsește $y = E_1y + E_2y$, primul termen aparținînd lui $\mathfrak{X}_1$, al doilea lui $\mathfrak{X}_2$. Spațiul $\mathfrak{X}$ este deci descompus în suma directă a subspațiilor $\mathfrak{X}_1$ și $\mathfrak{X}_2$.

Fie $x \in \mathfrak{X}_1$. Atunci avem $Ax = A(E_1x) = E_1(Ax)$, deci Ax aparține de asemenea subspațiului $\mathfrak{X}_1$; în consecință $\mathfrak{X}_1$ este invariant relativ la operatorul A. Într-un mod analog și $\mathfrak{X}_2$ este invariant relativ la A.

Rămîne să demonstrăm concluzia teoremei. Punem $A_1 = AE_1$; A_1 coincide cu A pe subspațiul $\mathfrak{X}_1$ și este nul pe $\mathfrak{X}_2$. Pe de altă parte, putem scrie

$$A_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \lambda e_1(\lambda)\, (\lambda E - A)^{-1}\, d\lambda.$$

Aici putem să înlocuim curba Γ prin Γ_1 deoarece funcția $e_1(\lambda)$ este nulă pe curba Γ_2. Deci, putem înlocui funcția $e_1(\lambda)$ prin 1; în final, vom avea

$$A_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \lambda (\lambda E - A)^{-1}\, d\lambda.$$

Apoi, oricare ar fi μ:

$$A_1 - \mu E_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} (\lambda - \mu)(\lambda E - A)^{-1} \, d\lambda.$$

Presupunem că μ este exterior curbei Γ_1; construim operatorul

$$Q_\mu = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{(\lambda E - A)^{-1} \, d\lambda}{\lambda - \mu}.$$

Același raționament ca în 12.86b implică

$$(A_1 - \mu E_1) Q_\mu = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} (\lambda - \mu) \frac{(\lambda E - A)^{-1} \, d\lambda}{\lambda - \mu} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} (\lambda E - A)^{-1} \, d\lambda = E_1.$$

Deci operatorul $A - \mu E$ este inversabil în subspațiul $\mathfrak{X}_1$. În consecință, spectrul operatorului A în subspațiul $\mathfrak{X}_1$ nu poate conține decît puncte ale mulțimii S_1. Analog, spectrul lui A în $\mathfrak{X}_2$ nu poate conține decît puncte din S_2. Arătăm că spectrul lui A în $\mathfrak{X}_1$ conține toate punctele mulțimii S_1. Fie $\lambda_0 \in S_1$. Am văzut că operatorul $A - \lambda_0 E$ este inversabil în subspațiul $\mathfrak{X}_2$, deci există un operator Q_2 astfel încît $(A - \lambda_0 E) Q_2 y = y$ pentru orice $y \in \mathfrak{X}_2$; dacă operatorul $A - \lambda_0 E$ ar fi inversabil în subspațiul $\mathfrak{X}_1$, ar exista un operator Q_1 astfel încît $(A - \lambda_0 E) Q_1 x = x$ pentru orice $x \in \mathfrak{X}_1$. Se construiește atunci un operator Q, care coincide cu Q_1 în $\mathfrak{X}_1$ și cu Q_2 în $\mathfrak{X}_2$ și prelungit liniar pe tot $\mathfrak{X}$. În virtutea lui 12.72 f, el ar fi un operator liniar mărginit în spațiul $\mathfrak{X}$. Evident, el ar fi în același timp inversul lui $A - \lambda_0 E$. Dar aceasta este imposibil deoarece $\lambda_0 \in S_A$. Teorema este demonstrată.

12.94. *Operatori compacți.* În mulțimea operatorilor care acționează într-un spațiu normat, se poate pune în evidență o clasă importantă de operatori ale căror proprietăți sînt cele mai apropiate de cele ale operatorilor în spații de dimensiune finită.

a. DEFINIȚIE. Un operator liniar A ce acționează într-un spațiu normat $\mathfrak{X}$, se numește *compact* (sau echiva-

lent, *complet continuu*), dacă el transformă orice mulțime mărginită $Q \subset \mathfrak{X}$ într-o mulțime precompactă (3.93a).

b. Într-un spațiu de dimensiune finită, orice operator liniar este compact.

c. Operatorul Fredholm (12.98) este un exemplu de operator compact în spațiul $\mathbf{C}'(a, b)$.

d. Operatorul identic E într-un spațiu de dimensiune infinită nu este compact, deoarece el transformă bila unitate în ea însăși, adică într-o mulțime care nu este precompactă (12.36 b).

12.95. *Operații cu operatori compacți.*

a. Suma $A_1 + A_2$ a doi operatori compacți A_1 și A_2 este un operator compact. Într-adevăr, fie $Q \subset \mathfrak{X}$ o mulțime mărginită și $\{x_n\}$ un șir de puncte din Q. Operatorul A_1 fiind compact, se poate extrage din șirul $\{x_n\}$ un subșir $\{x_n'\}$, astfel încît $\{A_1 x_n'\}$ să fie un șir Cauchy, apoi se poate extrage un subșir mai „rar" $\{x_n''\}$, astfel încît $\{A_2 x_n''\}$ să fie un șir Cauchy; atunci $\{(A_1 + A_2)x_n''\}$ este, evident, un șir Cauchy, ceea ce trebuia demonstrat.

b. Produsul unui operator compact A cu un operator oarecare mărginit B (ordinea operatorilor nu are nici o importanță) este un operator compact.

Într-adevăr, fie $Q \subset \mathfrak{X}$ o mulțime mărginită; atunci BQ este de asemenea mărginită, deci ABQ este precompactă; astfel operatorul AB este compact. Pe de altă parte, operatorul B transformă orice șir Cauchy într-un șir Cauchy și, prin urmare, mulțimea precompactă AQ într-o mulțime precompactă; operatorul BA este deci și el compact.

c. În particular, dacă operatorul compact A este inversabil, spațiul $\mathfrak{X}$ este de dimensiune finită.

Într-adevăr, operatorul $E = AA^{-1}$ este compact conform punctului b și se poate aplica 12.94 d.

d. Dacă pentru orice $n = 1, 2, \ldots$ avem un operator compact A_n și dacă un operator A are proprietatea că $\lim_{n\to\infty} \| A - A_n \| = 0$, atunci A este un operator compact.

Într-adevăr, pentru un $\varepsilon > 0$ dat, mulțimea $A_n Q$ (unde Q este o mulțime mărginită oarecare inclusă în bila $|x| \leqslant r$ și $\|A - A_n\| < \varepsilon$) este o mulțime precompactă care reprezintă o εr-rețea pentru mulțimea AQ. De aici rezultă că AQ este precompactă (3.95) și operatorul A este compact.

12.96. *Spectrul unui operator compact.*

a. LEMĂ. *Pentru un operator compact într-un spațiu Banach $\mathfrak{X}$, orice valoare proprie generalizată nenulă este o valoare proprie în sens uzual.*

Demonstrație. Fie λ o valoare proprie generalizată a operatorului compact A, astfel încît există un șir de vectori $x_1, x_2, \ldots, |x_n| \geqslant C > 0$, astfel încît $(A - \lambda E)x_n = q_n \to 0$. În virtutea precompacității mulțimii $\{Ax_n\}$, există un șir de numere $n_1, n_2, \ldots$ astfel încît vectorii Ax_{n_k} să aibă limită în spațiul $\mathfrak{X}$; punem $z = \lim\limits_{k\to\infty} Ax_{n_k}$. Atunci șirul $\lambda x_{n_k} = Ax_{n_k} - q_{n_k}$ tinde și el către z; în particular, $|z| = \lim |\lambda x_{n_k}| \geqslant |\lambda| C > 0$. Apoi, deoarece $\lambda \neq 0$, avem $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = z/\lambda$, $z = \lim Ax_{n_k} = (1/\lambda)Az$; se ajunge la egalitatea $Az = \lambda z$, care demonstrează lema.

b. LEMĂ. *În exteriorul oricărui disc $|\lambda| \leqslant c$, $c > 0$, un operator compact A poate avea doar un număr finit de valori proprii distincte.*

Demonstrație. Fie $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ valori proprii distincte ale operatorului A, cu $|\lambda_n| \geqslant c$. Fie $e_1, e_2, \ldots$ vectori proprii corespunzători: $Ae_n = \lambda_n e_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Vectorii proprii asociați valorilor proprii distincte sînt liniar independenți (12.15e); acoperirea liniară L_{n-1} a vectorilor $e_1, \ldots, e_{n-1}$ este deci un subspațiu propriu al acoperirii liniare L_n a vectorilor $e_1, \ldots, e_n$. Conform lemei 12.36 a, există un vector $h_n \in L_n$, astfel încît $|h_n| = 1$ și $|h_n - x| > 1/2$ pentru orice $x \in L_{n-1}$. Putem nota $h_n = x_0 + \alpha e_n$, unde $x_0 \in L_{n-1}$. Atunci are loc relația

$$Ah_n = A(x_0 + \alpha e_n) = Ax_0 + \alpha\lambda_n e_n = Ax_0 + \lambda_n(h_n - x_0) = (Ax_0 - \lambda_n x_0) + \lambda_n h_n.$$

Știind că $Ah_{n-1} + \lambda_n x_0 - Ax_0 \in L_{n-1}$, de aici decurge că

$$|Ah_n - Ah_{n-1}| = |(Ax_0 - \lambda_n x_0 - Ah_{n-1}) + \lambda_n h_n| = |\lambda_n| \left|h_n - \frac{1}{|\lambda_n|}(Ah_{n-1} + \lambda_n x_0 - Ax_0)\right| \geqslant |\lambda_n| \cdot \frac{1}{2},$$

și se vede că este imposibil să extragem un subșir convergent din șirul Ah_n. Aceasta contrazice compacitatea operatorului A. Lema este demonstrată.

c. LEMĂ. *În exteriorul oricărui disc* $|\lambda| \leqslant c$, $c > 0$, *un operator compact* A *într-un spațiu Banach* $\mathfrak{X}$ *poate avea doar un număr finit de puncte ale spectrului, aceste puncte fiind valorile proprii ale operatorului* A.

Demonstrație. Orice punct frontieră al spectrului operatorului A este o valoare proprie generalizată (12.92b), deci conform lemei din punctul a, o valoare proprie uzuală ; în consecință, rezultă din lema din punctul b că în exteriorul discului $|\lambda| \leqslant c$, operatorul compact A are doar un număr finit de puncte pe frontiera spectrului. Notăm aceste puncte prin $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$; conform punctului a, acestea sînt valori proprii ale operatorului A. Afirmăm că ele epuizează toate punctele spectrului A ce se află în exteriorul discului $|\lambda| \leqslant c$. Dacă în spectru s-ar găsi încă un punct λ_0, $|\lambda_0| \geqslant c$, prin el am duce o dreaptă spre infinit care nu are puncte comune cu discul $|\lambda| \leqslant c$ și nu trece prin punctele $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$; ultimul punct al spectrului pe această dreaptă ar aparține frontierei spectrului fără a coincide cu nici unul din punctele $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Contradicția obținută, demonstrează lema.

d. Deoarece exteriorul oricărui disc $|\lambda| \leqslant c$ nu conține, conform lemei din punctul c, decît un număr finit de puncte ale spectrului unui operator compact, se pot numerota toate punctele spectrului în ordinea descrescîndă a modulelor lor. Vedem că spectrul unui operator compact într-un spațiu Banach reprezintă o mulțime cel mult numărabilă de valori proprii izolate cu 0 ca unic punct limită. Punctul 0, pentru un operator compact într-un spațiu de dimensiune infinită, este totdeauna un punct al spectrului (12.95 c) (dar nu în mod obligatoriu valoare proprie) ; celelalte puncte ale spectrului formează o mulține numărabilă sau finită, sau redusă la mulțimea nulă. În acest ultim caz, are loc egalitatea $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|A^n\|} = 0$ (12.85 a) și operatorul A este nilpotent generalizat. Analogul unui astfel de operator într-un spațiu de dimensiune finită este un operator nilpotent pentru care există m natural astfel încît $A^m = 0$. Într-un spațiu de dimensiune finită structura unui operator nilpotent poate fi complet caracterizată (într-o anumită bază, el este dat de o matrice jordaniană ale cărei toate elemente diagonale sînt nule). În cazul dimensiunii finite, structura unui operator nilpotent generalizat este mai complicată [6].

12.97. *Descompunerea spectrală a unui operator compact.*

a. Fie $\lambda \neq 0$ un punct al spectrului S_A al unui operator compact A; deoarece el este izolat în virtutea lui 12.96c, putem aplica teorema 12.93. Spațiul $\mathfrak{X}$ se poate atunci descompune în sumă directă de două subspații închise P_λ și Q_λ invariante prin operatorul A, astfel încît, în primul din ele, operatorul A are numărul λ ca unic punct al spectrului și, în al doilea, spectrul său se obține prin eliminarea punctului λ din S_A. În fiecare din subspațiile P_λ, Q_λ operatorul A rămîne, bineînțeles, compact, punctul 0 nu mai aparține spectrului său din P_λ, el rămîne inversabil în P_λ. Aceasta spune că subspațiul P_λ este de dimensiune finită (12.95c). În consecință, orice punct $\lambda \neq 0$ al spectrului operatorului A definește un subspațiu invariant de dimensiune finită; în acest subspațiu, structura operatorului A se descrie prin mijloacele cunoscute.

b. Din punctul a se deduce o proprietate importantă a unui operator compact,

Alternativa Fredholm. Pentru un μ complex dat se prezintă două posibilități: sau ecuația $(E - \mu A)x = y$ *are soluție unică în raport cu* x *pentru orice* $y \in \mathfrak{X}$, *sau ecuația omogenă* $(E - \mu A)\, x_0 = 0$ *admite o soluție nenulă.*

Demonstrație. Este evident că pentru $\mu = 0$ se realizează prima posibilitate. Fie deci $\mu \neq 0$ și $\lambda = 1/\mu$; ecuația $(E - \mu A)x = y$ este atunci echivalentă cu ecuația $(A - \lambda E)x = -\lambda y$. Dacă λ nu aparține spectrului operatorului A, atunci $A - \lambda E$ este inversabil și are loc prima alternativă; dacă λ aparține spectrului lui A, atunci λ este o valoare proprie a lui A, deoarece $\lambda \neq 0$ (12.95c) și are loc al doilea caz.

Astfel, alternativa lui Fredholm este echivalentă cu faptul că pentru operatorul A orice număr $\lambda \in S_A$ nenul este o valoare proprie. Am văzut că aceasta este proprietate a operatorilor compacți; dar există o clasă mai largă de operatori ce au această proprietate (de exemplu, operatorii având una din puteri, operator compact: vezi exerc.13).

12.98. *Operatorul integral al lui Fredholm.* Fie $q(s, t)$ o funcție complexă continuă de două variabile reale s și t, parcurgînd același interval $[a, b]$. Integrala

$$y(t) = \int_a^b q(s, t)\, x(s)\, ds, \qquad (1)$$

pentru orice funcţie $x(t)$ continuă pe $[a, b]$, este o funcţie definită de asemenea pe $[a, b]$ şi continuă în virtutea lui 9.81. Este evident că formula (1) defineşte un operator liniar $y = Ax$ ce acţionează în spaţiul $\mathbb{C}^s[a, b]$ al tuturor funcţiilor complexe continue pe $[a, b]$, cu norma $\| x\| = \sup | x(t)|$ (12.39 b); el se numeşte *operatorul lui Fredholm*. Din inegalitatea

$$| y(t)| \leqslant \sup |x(s)| \int_a^b | q(s, t)| \, ds$$

rezultă că operatorul A este mărginit şi că norma sa nu depăşeşte numărul

$$\sup_t \int_a^b | q(s, t)| \, ds.$$

Arătăm că operatorul A este compact. Presupunem că funcţia $x(t)$ parcurge o mulţime mărginită $Q \in \mathbb{C}^s[a, b]$; de exemplu, $\| x\| = \sup | x(t)| \leqslant r$.

Atunci pentru $| t' - t''| \leqslant \delta$ avem

$$| y(t') - y(t'')| \leqslant \sup | x(t)| \int_a^b | q(s, t') - q(s, t'')| \, ds \leqslant$$

$$\leqslant \sup | x(t)| \, \omega_q(\delta) \, (b - a),$$

unde

$$\omega_q(\delta) = \sup_{|t'-t''|<\delta} | q(s, t') - q(s, t'')|.$$

De aici se deduce următoarea estimare pentru oscilaţia $\omega_y(\delta)$ a funcţiei $y(t)$:

$$\omega_y(\delta) = \sup_{|t'-t''|<\delta} | y(t') - y(t'')| \leqslant r\omega_q(\delta)(b - a),$$

această estimare nedepinzînd de alegerea funcţiei $x(t) \in Q$; deoarece funcţia $q(s, t)$ este continuă, avem $\lim_{\delta \to 0} \omega_q(\delta) = 0$, deci, de asemenea, $\lim_{\delta \to 0} \omega_y(\delta) = 0$. Atunci, mulţimea $AQ \in \in \mathbb{C}^s(a, b)$ este uniform mărginită şi echicontinuă; conform

teoremei lui Arzelà (12.24c) mulțimea AQ este precompactă pentru orice $Q \in \mathbb{C}^s(a, b)$ mărginită ; operatorul A este deci compact, ceea ce trebuia demonstrat.

În consecință, toate propozițiile 12.96 — 12.97 sînt adevărate pentru un operator Fredholm. În particular, are loc alternativa Fredholm (12.97b), care, în cazul de față, ia următoarea formă :

Pentru un μ complex dat, se pot prezenta două posibilități : sau ecuația

$$x(t) - \mu \int_a^b q(s, t)\, x(s)\, ds = y(t)$$

are o soluție unică în raport cu $x(t)$ pentru orice funcție $y(t) \in \mathbb{C}^s(s, b)$, sau ecuația omogenă

$$x_0(t) - \mu \int_a^b q(s, t) x_0(s)\, ds = 0$$

admite o soluție nenulă.

12.99. *Operatorul integral al lui Volterra.* Fie din nou $q(s, t)$ o funcție continuă de variabilele s și t care parcurg intervalul $[a, b]$. Integrala

$$z(t) = [Vx](t) = \int_a^t q(s, t)\, x(s)\, ds \qquad (1)$$

diferă de integrala 12.98(1) prin faptul că limita constantă b este înlocuită prin limita variabilă t. La fel ca în 12.98(1), funcția $y(t)$ este definită și continuă în $[a, b]$ (9.86a). Operatorul liniar V, dat prin formula (1), se numește *operatorul lui Volterra*. Operatorul lui Volterra, la fel ca și operatorul Fredholm, este compact ; aceasta se demonstrează prin aceeași metodă. Dar spre deosebire de operatorul Fredholm, spectrul operatorului lui Volterra nu poate avea puncte nenule (adică, după cum am văzut, valori proprii). Presupunem contrariul : pentru un $\lambda \neq 0$, există o funcție $x_0(t) \in$

$\in \mathbb{C}^c(a, b)$ astfel încît

$$\mathrm{V}x_0(t) = \int_a^t q(s, t)\, x_0(s)\, \mathrm{d}s = \lambda x_0(t). \qquad (2)$$

Punînd $t = a$ se găsește $\lambda x_0(a) = 0$, deci $x_0(a) = 0$. Fără a restrînge din generalitate, se poate admite că funcția $x_0(s)$ nu se anulează identic în nici o vecinătate a punctului a din intervalul $[a, b]$, altfel deplasăm limita inferioară, fără a modifica valoarea integralei, spre punctul cel mai la stînga al intervalului $[a, b]$ care are proprietatea menționată. În consecință, funcția $m(\delta) = \sup_{a \leqslant t \leqslant a+\delta} |x(t)|$ este nenulă pentru $\delta > 0$ și tinde la 0 pentru $\delta \to 0$. Pentru orice $\delta > 0$, se poate indica un punct $t_\delta \in [a, a + \delta]$, astfel încît $|x_0(t_\delta)| = m(\delta)$. Acum din (2) se obține următoarea estimație

$$|\lambda x_0(t_\delta)| = |\lambda|\, m(\delta) \leqslant \max_{a \leqslant s \leqslant a+\delta} |x_0(s)| \cdot \int_a^{t_\delta} |q(s, t)|\, \mathrm{d}s \leqslant$$

$$\leqslant c\delta m(\delta),$$

unde

$$c = \sup_{t,s} |q(s, t)|.$$

Împărțind prin $m(\delta)$ are loc relația

$$|\lambda| \leqslant c\delta$$

pentru $\delta > 0$. Această inegalitate contrazice presupunerea $\lambda \neq 0$. Proprietatea este deci demonstrată.

Aplicînd 12.97b și 12.66 rezultă că pentru orice $y(t)$ există o soluție unică a ecuației lui Volterra

$$[\mathrm{E} - \mu\mathrm{V}]\, x(t) = x(t) - \mu \int_a^t q(s, t)\, x(s)\, \mathrm{d}s = y(t),$$

care este reprezentată printr-o serie

$$x(t) = (\mathrm{E} - \mu\mathrm{V})^{-1} y(t) =$$

$$= y(t) + \mu\mathrm{V}y(t) + \mu^2\mathrm{V}^2 y(t) + \ldots + \mu^n\mathrm{V}^n y(t) + \ldots$$

Se poate demonstra că operatorul V^n, pentru orice n, este de asemenea operator Volterra avînd nucleul $q_n(s, t)$, care se poate calcula prin recurență după formulele

$$q_1(s, t) = q(s, t),$$

$$q_n(s, t) = \int_s^t q_{n-1}(s, \sigma) q_1(\sigma, t)\, d\sigma$$

(vezi, de exemplu, [17]; în această carte se vor găsi exemple de aplicație a ecuațiilor integrale la problemele fizicii matematice).

EXERCIȚII

1. Se consideră următoarele trei spații de funcții definite pe dreapta reală:

a) spațiul tuturor funcțiilor continue și mărginite $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

b) spațiul tuturor funcțiilor continue care au proprietatea $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$;

c) spațiul tuturor funcțiilor continue din care fiecare este nulă în exteriorul unui interval.

Se înzestrează aceste spații cu metrica

$$\rho(f, g) = \sup |f(x) - g(x)|.$$

Aceste spații sînt sau nu complete?

2. Să se indice în spațiul $\mathbb{R}^s(0, \infty)$ (al tuturor funcțiilor continue și mărginite pe semidreapta $0 < x < \infty$, cu $\| x(t) \| = \sup_t |x(t)|$ ca normă) o mulțime de funcții $\{x_\alpha(t)\}$ avînd puterea continuului și astfel încît $\| x_\alpha(t) \| = 1$, $\| x_\alpha(t) - x_\beta(t) \| \geqslant 1$ pentru $\alpha \neq \beta$.

Observație. De aici rezultă că nu există în spațiul $\mathbb{R}^s(0, \infty)$ nici o mulțime numărabilă, densă peste tot.

3. Să se verifice că funcționala

$$F(y) = \int_0^{1/2} y(x)\, dx - \int_{1/2}^1 y(x)\, dx$$

este continuă în spațiul $\mathbb{R}^s(0, 1)$; să se arate că marginea superioară a valorilor sale pe bila unitate închisă în spațiul $\mathbb{R}^s(0, 1)$ este 1, această limită nefiind atinsă pe nici un element al bilei unitate.

4. Se admite că lema asupra paralelogramului (12.43a) este adevărată pentru orice doi vectori x, y ai unui anumit spațiu normat $\mathfrak{X}$. Să se demonstreze că norma în $\mathfrak{X}$ este generată de produsul scalar

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\| x + y \|^2 - \| x - y \|^2).$$

5. Fie P algebra tuturor polinoamelor $p(z)$ cu coeficienți complecși în discul $Q = \{z \mid |z| \leqslant 1\}$, cu norma $\|p(z)\| = \max |p(z)|$. Această alge-

bră conține 1 și separă orice două puncte ale compactului Q, dar teorema lui Stone 12.52 c nu este adevărată pentru ea, algebra P nefiind densă în algebra $\mathfrak{C}^s(Q)$ a tuturor funcțiilor complexe continue în discul Q.

6. Într-o algebră normată $\mathbb{R}^s(Q)$ (Q este un spațiu metric) mulțimea $I(F)$ a tuturor funcțiilor $f \in \mathbb{R}^s(Q)$, care se anulează identic pe o mulțime închisă $F \subset Q$, este un ideal închis în $\mathbb{R}^s(Q)$. Să se arate că dacă Q este un compact, atunci orice ideal închis $I \subset \mathbb{R}^s(Q)$ coincide cu idealul $I(F)$ pentru un anumit $F \subset Q$.

7. Presupunem că o familie echicontinuă $E \subset P^s(Q)$ de funcții (P este un spațiu metric, Q un compact) este astfel încît pentru orice $t \in Q$, valorile funcțiilor $x(t) \in E$ aparțin unui precompact $P_t \subset P$. Să se demonstreze că există un precompact $P_0 \subset P$, care conține valorile tuturor funcțiilor $x(t) \in E$ în toate punctele $t \in Q$.

8. Se dă o matrice $T = \|t_{km}\|$ ce verifică ipoteza teoremei lui Toeplitz 12.76c. Să se construiască un șir ξ_n format din 1 și -1, care nu admite T-limită.

9. Să se demonstreze că intervalul $[\underline{\lim}\ T_n(x), \overline{\lim}\ T_n(x)]$ (12.76) este conținut în intervalul $[\underline{\lim}\ x, \overline{\lim}\ x]$, dacă și numai dacă $\lim_{n\to\infty} \|T_n\| = 1$.

10. Fie $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^s(Q)$ algebra tuturor funcțiilor complexe $f(z)$ continue pe cercul $|z| = 1$ (cu norma uzuală) și fie $\mathfrak{S}$ algebra funcțiilor $\varphi(z)$ analitice în discul $|z| < 1$ și continue în discul $|z| \leqslant 1$, cu aceeași normă $\|\varphi\| = \sup |\varphi(z)|$. Să se arate că:

a) Aplicația care face să corespundă fiecărei funcții $\varphi(z) \in \mathfrak{S}$, funcția limită $\varphi(e^{it}) \in \mathfrak{C}$ este un monomorfism al lui $\mathfrak{S}$ în $\mathfrak{C}$; în consecință, se poate spune că algebra $\mathfrak{S}$ este o subalgebră a algebrei $\mathfrak{C}$.

b) $\mathfrak{S}$ este o subalgebră închisă în $\mathfrak{C}$.

c) Spectrul operatorului A de înmulțire prin z în spațiul $\mathfrak{C}$ este cercul $|z| = 1$; spectrul aceluiași operator în spațiul $\mathfrak{S}$ este discul $|z| \leqslant 1$; în plus, valorile $|z| = 1$, și numai ele, sînt valori proprii generalizate ale operatorului A în $\mathfrak{S}$.

d) Elementul z este inversabil în algebra $\mathfrak{C}$, neinversabil în algebra $\mathfrak{S}$ și nu este un divizor generalizat al lui zero în $\mathfrak{S}$.

11. Fie Q o mulțime compactă în planul z și fie $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^s(Q)$ mulțimea tuturor funcțiilor complexe continue pe mulțimea Q. Să se arate că operatorul de înmulțire prin z are ca spectru mulțimea Q.

12. Se știe că, pentru un operator A într-un spațiu Banach $\mathfrak{X}$ și pentru un polinom $p(\lambda)$, operatorul $p(A)$ este compact. Să se demonstreze că toate punctele spectrului operatorului A (cu excepția posibilă a rădăcinilor polinomului $p(\lambda)$) sînt valori proprii ale sale.

13. Să se arate că alternativa Fredholm are loc pentru un operator A avînd una din puteri compacte.

14. Fie $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$ și $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pentru două funcții oarecare $x(t)$ și $y(t)$, continue pe porțiuni pe un interval $a \leqslant t \leqslant b$, să se demonstreze inegalitatea lui Hölder:

$$\left| \int_a^b x(t)y(t)\,dt \right| \leqslant \sqrt[p]{\int_a^b |x(t)|^p\,dt} \cdot \sqrt[q]{\int_a^b |y(t)|^q\,dt}.$$

15. Pentru aceleași funcții $x(t)$ și $y(t)$, să se demonstreze inegalitatea

$$\sqrt[p]{\int_a^b |x(t)+y(t)|^p\,dt} \leqslant \sqrt[p]{\int_a^b |x(t)|^p\,dt} + \sqrt[p]{\int_a^b |y(t)|^p\,dt}$$

pentru $p \geqslant 1$.

16. Fie $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$ și $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Pentru doi vectori oarecare $x=\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ și $y=\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$, să se demonstreze inegalitatea lui Hölder:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k\right| \leqslant \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p} \cdot \sqrt[q]{\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q}$$

17. Pentru aceiași vectori $x=\{\xi_k\}$ și $y=\{\eta_k\}$, să se demonstreze inegalitatea triunghiului

$$\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |\xi_k+\eta_k|^p} \leqslant \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p} + \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^p},$$

pentru $p \geqslant 1$.

18. Să se demonstreze că spațiul normat l_p (12.33d) este complet oricare ar fi $p \geqslant 1$.

19. Fie un șir de funcții $x_n(t)$ $(n=1,2,\ldots)$ definite și infinit derivabile pe un interval $a \leqslant t \leqslant b$. Presupunem că există un șir de constante A_k $(k=0,1,2,\ldots)$ astfel încît

$$|x_n^{(k)}(t)| \leqslant A_k \quad (n=1,2,\ldots;\ k=0,1,2,\ldots).$$

Să se extragă un subșir $x_{n_m}(t)$ $(m=1,2,\ldots)$ care, ca și fiecare șir al derivatelor $x_{n_m}^{(k)}(t)$ de orice ordin, să conveargă uniform pe intervalul $a \leqslant t \leqslant b$ cînd $m \to \infty$.

20. Să se arate că dacă $p<1$ numărul $\|x\|_p$ (12.33c) nu verifică axioma triunghiului 12.31c.

21. Există o variantă a teoremei lui Arzelà 12.24 care nu cere continuitatea funcțiilor $x(t)$, nici compacitatea (nici chiar metrizabilitatea) mulțimii Q pe care sînt definite. Anume, fie $P(Q)$ o familie de funcții mărginite $x(t)$ definite pe o mulțime oarecare Q, cu valori într-un spațiu metric P, această familie fiind metrizată după formula $\rho(x,y) = \sup \rho(x(t), y(t))$. O mulțime $E \subset P(Q)$ este precompactă, dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o partiție a mulțimii Q în număr finit de submulțimi $Q_1, \ldots, Q_n$, pe fiecare din ele variația oricărei funcții din E nu depășește ε.

NOTĂ ISTORICĂ

Structurile fundamentale ale analizei au fost puse în evidență la sfîrșitul secolului al XIX-lea și începutul secolului al XX-lea, cînd analiza a acumulat un număr important de fapte și s-a pus în mod necesar problema

organizării lor interne. Noţiunile de dependenţă liniară a vectorilor şi de dimensiune (posibil egală cu orice număr natural n) au apărut la Grassmann (1846), dar spaţiile vectoriale abstracte au fost introduse pentru prima oară de Peano (1888).

Teoria spaţiilor de funcţii continue s-a dezvoltat în Italia între anii 1870—80 (Volterra, Ascoli, Arzelà, Dini). Teorema asupra condiţiilor de compacitate a unei mulţimi de funcţii continue, care este numită de obicei teorema lui Arzelà, a fost demonstrată pentru prima oară de Ascoli în 1883. Teorema lui Weierstrass asupra aproximării funcţiilor continue prin polinoame a fost dată în anul 1870; generalizarea ei (12.52—12.53) a fost dată de către M. Stone în 1936.

Etapa următoare a fost introducerea spaţiilor hilbertiene. Ea a fost deschisă prin construcţia teoriei ecuaţiilor integrale liniare de către Volterra (1887) şi Fredholm (1900). Hilbert a descoperit în 1906 o analogie remarcabilă între problema valorilor proprii ale operatorilor integrali şi cea a reducerii unei forme pătratice finit dimensionale la forma canonică, rezolvarea problemei pentru operatorii integrali fiind legată de compacitatea lor. În 1907, E. Schmidt a dat o nouă formă teoriei lui Hilbert scriind operatorii integrali cu ajutorul matricilor infinite ce acţionează într-un „spaţiu hilbertian" de şiruri de pătrat sumabil (l_2). O teorie axiomatică a spaţiilor Hilbert bazată pe noţiunea de produs scalar a fost construită în jurul anilor 1930 de către M. Stone şi J. von Neumann.

O altă construcţie a teoriei operatorilor compacţi, în esenţă valabilă pentru orice spaţiu normat complet (iniţial dată pe spaţiul funcţiilor continue), a fost realizată de către F. Riesz în 1918. Definiţia abstractă a spaţiilor vectoriale normate a apărut puţin mai tîrziu, în 1920—22, în lucrările lui Banach, Hahn şi Wiener. În anii '20, şcoala lui Banach a descoperit principiile fundamentale ale analizei funcţionale liniare, inclusiv teorema asupra aplicaţiei deschise şi cea a mărginirii uniforme (12.74). Rezultatele obţinute de această şcoală şi un număr mare de aplicaţii sînt expuse în [3]. Totuşi, problema fundamentală a reprezentării canonice a unui operator liniar oarecare, analoagă cu cea a reprezentării jordaniene a unui operator liniar de dimensiune finită, îşi aşteaptă încă rezolvarea. În acest sens, există multe rezultate interesante şi tari relativ la operatorii într-un spaţiu hilbertian. Hilbert a obţinut încă din 1906—1911 un analog al reprezentării diagonale pentru operatorii simetrici (şi hermitici) nu neapărat compacţi. Trecerea la operatorii nesimetrici s-a produs lent; primele rezultate esenţiale (legate îndeosebi de numele lui Livşiţ şi Keldîş) au apărut la sfîrşitul anilor '40. Pentru o epocă ceva mai recentă a teoriei vezi monografiile [16] şi [17].

Teoria algebrelor normate, din care nu am dat decît primele noţiuni, a fost construită de către Gelfand în anii 1937—1938; [14] şi [31] prezintă o expunere a acestora, cu exemple variate de aplicaţii în analiză.

Iniţierea studiului sumabilităţii şirurilor divergente este datorată lui Euler (*Calcul diferenţial*, 1755). Nu era vorba încă, la acea epocă, de o teorie riguroasă; în plus, utilizarea în mod necritic a seriilor divergente a scăzut mult prestigiul lor. Reforma lui Cauchy (1821) a îndepărtat pentru mult timp din analiză şirurile şi seriile divergente. Teoria modernă a sumării şirurilor s-a constituit la confluenţa secolelor al XIX-lea şi al XX-lea (Cesàro, 1880; Voronoi, 1902; Toeplitz, 1911); asupra stadiului ei mai recent, trimitem la [10].

Capitolul 13

ECUAȚII DIFERENȚIALE

Unei minți inteligente care, la un moment dat, ar cunoaște toate forțele care animă natura, ar putea prelucra rapid aceste date și ar fi în stare să exprime printr-o singură ecuație atît mișcarea celor mai mari corpuri din univers cît și a celor mai mici particule, nimic nu i-ar fi necunoscut; dintr-o singură privire ea ar putea ști atît viitorul cît și trecutul. O reprezentare asupra posibilităților unei astfel de inteligențe ne-o dă perfecțiunea pe care a atins-o în prezent astronomia.

Pierre-Simon Laplace, *Eseu filozofic asupra teoriei probabilităților* (1795)

Napoleon: Conte, cu am citit cu mare interes cartea Dumneavoastră. Totuși de ce nu amintiți nimic despre Creator?

Laplace: Sire, nu am avut nevoie de această ipoteză.

§ 13.1. Definiții și exemple

13.11.a. Dacă o ecuație în raport cu o funcție necunoscută $u = u(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, conține derivate (de ordin întîi sau superior) ale acestei funcții, ea se numește *ecuație diferențială*. Funcția $u(t)$ poate fi căutată, după condițiile problemei considerate, fie printre funcțiile numerice, fie printre funcțiile vectoriale cu valori într-un spațiu n-dimensional, fie în sfîrșit printre funcțiile vectoriale cu valori într-un spațiu vectorial normat.

Orice funcție $u(t)$, ce verifică o ecuație diferențială dată, este pentru ea *o soluție* sau o soluție particulară. Mulțimea tuturor soluțiilor se numește *soluție generală*.

b. Astfel, cea mai simplă ecuație diferențială

$$u'(t) = 0, \quad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{1}$$

are $u(t) = C$ (constant) ca soluție generală; aceasta este o constantă numerică dacă se știe că $u(t)$ ia valori numerice (7.45c), o constantă vectorială, un element constant

dintr-un spațiu normat $\mathfrak{B}$, dacă $u(t)$ ia valori în spațiul $\mathfrak{B}$ (12.61k). Soluția generală a ecuației diferențiale

$$u'(t) = g(t), \tag{2}$$

unde $g(t)$ este o funcție dată (numerică sau vectorială), poate fi pusă sub formă integrală

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} g(\tau)\mathrm{d}\tau + \text{constantă}$$

cu condiția ca $g(t)$ să fie continuă pe porțiuni (9.32 și 12.63c). Exemplul ecuațiilor (1) și (2) arată că soluția lor nu este unică, deci pentru a fixa o soluție trebuie să-i impunem condiții suplimentare. În mod obișnuit o astfel de condiție suplimentară constă din a da valoarea funcției necunoscute $u(t)$ pentru o anumită valoare $t = t_0 \in [a, b]$. Odată $u(t_0)$ dat, soluția ecuației (1) sau (2) este determinată în mod unic.

c. O ecuație mai generală are forma

$$u'(t) = \Phi(t, u(t)), \tag{3}$$

unde $\Phi(t, z)$ este o funcție de două argumente, cu valori în același spațiu normat $\mathfrak{B}$ care conține valorile lui $u(t)$. Aici problema este existența unei soluții $u(t)$ și unicitatea pentru un $u(t_0)$ dat.

d. Este util să dăm lui (3) un sens „cinematic" în spațiul $\mathfrak{B}$. Fie un punct mobil în spațiul $\mathfrak{B}$ a cărui poziție în fiecare moment t este $u = u(t)$. Cînd t variază, punctul parcurge în $\mathfrak{B}$ o curbă $u = u(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$. Funcția vectorială $u(t)$ reprezintă legea de mișcare a punctului mobil în lungul acestei curbe. Atunci vectorul $u'(t)$ poate fi interpretat ca vectorul viteză al punctului (limita raportului dintre spațiul parcurs Δu și durata parcurgerii Δt). Membrul drept al ecuației (3) face să corespundă vectorului $z \in \mathfrak{B}$, pentru orice $t \in [a, b]$ fixat, vectorul $\Phi(t, z)$. Soluția $u(t)$ se interpretează ca legea de mișcare a unui punct mobil în spațiul $\mathfrak{B}$ cînd viteza mișcării, în orice moment și pentru orice poziție $u \in \mathfrak{B}$, coincide cu vectorul $\Phi(t, u)$. Astfel, la orice moment t, funcția $\Phi(t, u)$

definește un cîmp de vectori astfel încît fiecare din ei determină viteza mișcării mobilului în punctul corespunzător u al spațiului $\mathfrak{B}$. Soluțiile ecuației (3) reprezintă traiectoriile posibile ale punctului mobil și în acest caz sînt numite *curbe integrale* ale acestei ecuații.

În spațiul $\mathbb{R}_1 \times \mathfrak{B}$ ecuației (3) i se poate atribui un sens pur geometric. Oricărei funcții $u = u(t)$ îi corespunde o curbă în spațiul $\mathbb{R}_1 \times \mathfrak{B}$ ($t \in \mathbb{R}_1$, $u \in \mathfrak{B}$). Diferențiala $u'(t)\,dt$ este partea liniară principală a creșterii funcției $u(t)$, cînd variabila independentă variază de la t la $t + dt$. Prin urmare, în cazul real ($\mathfrak{B} = \mathbb{R}_1$), derivata $u'(t)$ este interpretată ca fiind coeficientul unghiular al tangentei. În cazul general, pentru $\mathfrak{B}$ oarecare, derivata are un sens analog: dreapta $u - u_0 = u'(t_0)(t - t_0)$ este tangenta la curba $u = u(t)$, pentru $t = t_0$, și mărimea $u'(t_0)$ poate fi numită *coeficientul său unghiular*. Funcția $\Phi(t, z)$ determină în orice punct (t_0, z_0) al spațiului $\mathbb{R}_1 \times \mathfrak{B}$ o dreaptă

$$u - z_0 = \Phi(t_0, z_0)\,(t - t_0) \tag{4}$$

și ecuația (3) cere ca, pentru orice $t_0 \in [a, b_0]$, curba $u = u(t)$ să aibă o tangentă care să coincidă cu dreapta (4) determinată de punctul $[t_0, u(t_0)]$.

e. Ca exemplu, considerăm în spațiul $\mathfrak{B} = \mathbb{R}_2$, ecuația

$$u'(t) = v(u),$$

unde $v(u)$ este pentru orice $u \in \mathbb{R}_2$, vectorul care se obține prin rotirea vectorului u cu un unghi drept în sens pozitiv. Din punct de vedere cinematic, punctul mobil trebuie să se deplaseze în planul $\mathbb{R}_2$ astfel încît vectorul său viteză să se confunde cu vectorul $v(u)$ în orice punct u. Este evident că fiecare soluție reprezintă o mișcare în lungul unui cerc cu centrul în originea coordonatelor, cu o viteză egală numeric cu raza cercului (fig. 13.1).

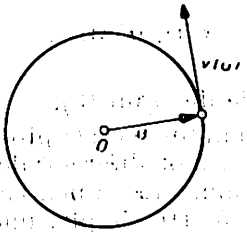


Fig. 13.1

Din punct de vedere geometric, se caută curbe în spațiul tridimensional $\mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}_2$, a cărei tangentă în orice punct este dată de ecuația

$$u - z_0 = v(z_0)\,(t - t_0).$$

Curbele căutate au formă de elice ce înconjoară axa t (fig. 13.2).

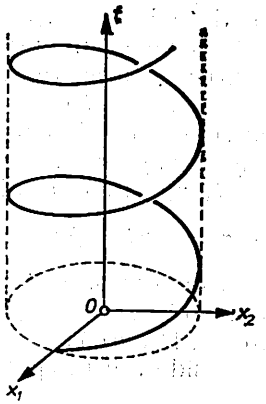


Fig. 13.2

f. Vom vedea mai tîrziu că un sistem de ecuații de forma

$$\begin{cases} u_1'(t) = \Phi_1(t, u_1(t), \ldots, u_n(t)), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n'(t) = \Phi_n(t, u_1(t), \ldots, u_n(t)), \end{cases} \tag{5}$$

ca și o ecuație de ordinul n

$$u^{(n)} = \Phi(t, u(t), u'(t), \ldots, u^{(n-1)}(t)), \tag{6}$$

se reduc la o ecuație de tipul (3).

g. Ne vom ocupa în tot acest capitol de problemele existenței soluțiilor ecuațiilor diferențiale și unicitatea lor în anumite condiții suplimentare; pentru moment, vom considera cîteva cazuri foarte simple, unde soluția se obține sub formă explicită.

13.12. Fie o ecuație de forma

$$u'(t) = A(t)\,u(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b). \tag{1}$$

O astfel de ecuație se numește *ecuație liniară omogenă*. Presupunem la început că funcția căutată $u(t)$ este o funcție numerică și coeficientul $A(t)$ este o funcție numerică continuă dată. Funcția $u(t) = 0$ este o soluție evidentă a ecuației (1), dar ea nu satisface, pentru $u_0 \neq 0$, condiția inițială. Să căutăm alte soluții. Dacă $u(t)$ este o soluție neidentic nulă, atunci există un interval în care $u(t) \neq 0$, de exemplu $u(t) > 0$. Împărțind (1) prin $u(t)$, se obține

$$\frac{u'(t)}{u(t)} = [\ln u(t)]' = A(t),$$

de unde

$$\ln u(t) = \int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau + C.$$

Punînd $t = t_0$ avem $C = \ln u_0$; în final, găsim

$$u(t) = e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau}\, u_0. \tag{2}$$

Verificarea directă arată că (2) este într-adevăr soluția ecuației (1), care nu mai depinde de semnul lui $u(t)$. Să observăm că soluția (2) este definită pentru orice $t \in [a, b]$ (și nenulă peste tot dacă $u_0 \neq 0$). Deci pentru condiția inițială $u(t_0) = u_0$, ecuația (1) are soluția (2). Dacă $A(t) = A$ este o constantă, atunci soluția (2) ia o formă mai simplă

$$u(t) = e^{(t-t_0)A}\, u_0. \tag{3}$$

13.13. Revenim la ecuația

$$u'(t) = A(t)\,u(t) \qquad (a \leqslant t \leqslant b); \tag{1}$$

presupunem de această dată că $u(t)$ este o funcție vectorială cu valori în spațiul Banach $\mathfrak{B}$; coeficientul $A(t)$ este presupus un operator liniar continuu care aplică, pentru orice $t \in [a, b]$, spațiul $\mathfrak{B}$ în el însuși și depinde continuu de

parametrul t. Aici raţionamentele 13.12 nu mai sînt valabile, deoarece împărţirea prin $u(t)$ nu mai are sens. Se poate atribui totuşi un sens riguros rezultatelor definitive 13.12 (2) sau (3).

Presupunem la început că operatorul $A(t) = A$ nu depinde de t; cazul general va fi studiat 13.19.

Considerăm $e^{(t-t_0)A}$ ca funcţie de operatorul A în sensul lui 12.86c.:

$$e^{(t-t_0)A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n A^n}{n!}. \tag{2}$$

Această funcţie este definită pentru toţi t reali şi ia valori în spaţiul $L(\mathfrak{B})$ al operatorilor liniari mărginiţi din $\mathfrak{B}$. Seria (2) poate fi derivată termen cu termen în raport cu t (12.66), ceea ce dă

$$\frac{d}{dt} e^{(t-t_0)A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(t-t_0)^{n-1} A^n}{n!} = Ae^{(t-t_0)A}.$$

În concluzie $u(t) = e^{(t-t_0)A} u(t_0)$ este într-adevăr o soluţie a ecuaţiei (1). Pentru $t = t_0$, această soluţie dă evident vectorul $u = u(t_0)$. Astfel, pentru un $u(t_0)$ dat, avem o soluţie a ecuaţiei omogene (1), care este de forma

$$u(t) = e^{(t-t_0)A} u(t_0). \tag{3}$$

Pentru a demonstra unicitatea soluţiei obţinute, demonstrăm la început următorul rezultat.

LEMĂ. *Dacă $B(t)$ este o funcţie cu valori operatori, derivabilă tare (în sensul că pentru toţi $x \in \mathfrak{X}$ are loc relaţia limită $B'(t)x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{B(t+\Delta t) - B(t)}{\Delta t} x$) şi dacă $x(t)$ este o funcţie vectorială derivabilă, atunci funcţia vectorială $y(t) = B(t)\,x(t)$ este şi ea derivabilă şi avem*

$$y'(t) = B(t)x'(t) + B'(t)\,x(t).$$

Demonstraţie. Are loc relaţia

$$\frac{B(t+\Delta t)\,x(t+\Delta t) - B(t)\,x(t)}{\Delta t} =$$

$$= B(t+\Delta t)\,\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} + \frac{B(t+\Delta t) - B(t)}{\Delta t}\,x(t).$$

Primul termen din dreapta tinde către limita $B(t)x'(t)$ cînd $\Delta t \to 0$ (12.74 e — f), al doilea tinde către $B'(t)\,x(t)$, prin ipoteză, de unde rezultă lema.

Acum vom demonstra că (3) este soluția unică a ecuației (1) cu valoarea $u(t_0)$ dată. Fie $u(t)$ o soluție oarecare a ecuației (1) cu $u(t_0)$ dat. Introducem o nouă funcție necunoscută $v(t)$ după formula $u(t) = e^{(t-t_0)A}v(t)$, sau, ceea ce revine la același lucru, $v(t) = e^{-(t-t_0)A}u(t)$. Introducîndu-l pe $u(t)$ în ecuația (1) și utilizînd lema, se găsește

$$u'(t) = Ae^{(t-t_0)A}v(t) + e^{(t-t_0)A}v'(t) = Ae^{(t-t_0)A}v(t),$$

de unde

$$e^{(t-t_0)A}v'(t) = 0\,;$$

înmulțind prin $e^{-(t-t_0)A}$ se obține $v'(t) = 0$. De aici rezultă că

$$v(t) = v(t_0) = u(t_0),$$

deci soluția $u(t)$ are forma (3), ceea ce trebuia demonstrat.

13.14. Studiem acum soluția 13.13 (3) în cazul spațiului n-dimensional $\mathbb{R}_n$. Pentru simplificare, punem $t_0 = 0$. Alegem în spațiul $\mathbb{R}_n$ o bază $e_1, \ldots, e_n$. Dezvoltăm funcția vectorială $u(t)$ după această bază ; fie

$$u(t) = \sum_{k=1}^{n} u_k(t)\,e_k.$$

Atunci

$$u'(t) = \sum_{k=1}^{n} u_k'(t)\,e_k$$

și ecuația vectorială 13.12(1) se pune sub forma unui sistem de ecuații scalare

$$\left.\begin{aligned} \frac{du_1(t)}{dt} &= a_{11}u_1(t) + \ldots + a_{1n}u_n(t), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{du_n(t)}{dt} &= a_{n1}u_1(t) + \ldots + a_{nn}u_n(t) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

cu o matrice reală constantă $A = \|a_{jk}\|$. Soluția este rezultatul aplicării operatorului e^{tA} vectorului inițial $u_0 = u(0)$.

Soluția căutată poate fi pusă sub formă explicită suficient de simplă dacă se aleg vectorii inițiali u_0, vectorii unei baze jordaniene a matricii A(12.17f). Pentru astfel de vectori, introducem următoarele notații :

a) Vectorul bazei, asociat unei celule jordaniene cu un singur element λ_j, va fi notat prin f_j.

b) Vectorii bazei, asociați unei celule jordaniene $m \times m$

$$\begin{Vmatrix} \lambda_j & 1 & & & \\ & \lambda_j & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_j & 1 \\ & & & & \lambda_j \end{Vmatrix} \tag{2}$$

(λ_j fiind real), vor fi notați prin $f_j^1, \ldots f_j^m$. Vectorii din bază asociați unei celule 2×2

$$\begin{Vmatrix} \sigma_j & -\tau_j \\ \tau_j & \sigma_j \end{Vmatrix}, \quad \lambda_j = \sigma_j + i\,\tau_j, \tag{3}$$

vor fi notați prin h_j, g_j ; în sfîrșit, vectorii din bază asociați unei $2m \times 2m$-celule

$$\begin{Vmatrix} \sigma_j & -\tau_j & 1 & 0 & \ldots \\ \tau_j & \sigma_j & 0 & 1 & \ldots \\ & & \sigma_j & -\tau_j & \ldots \\ & & \tau_j & \sigma_j & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Vmatrix}, \tag{4}$$

vor fi notați prin $h_j^1, g_j^1, \ldots, h_j^m, g_j^m$. Să amintim că în toate cazurile considerate numerele λ_j sînt rădăcinile ecuației caracteristice

$$\begin{Vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{Vmatrix} = 0 ;$$

numerele σ_j și τ_j sînt respectiv părțile reală și imaginară ale rădăcinilor complexe ale acestei ecuații (12.17j).

Orice celulă a matricii jordaniene definește un subspațiu invariant al operatorului A (de dimensiune 1, m, 2, $2m$ respectiv). Operatorul e^{tA} aplicat unui vector al acestui subspațiu dă un alt vector al aceluiași subspațiu. Soluțiile corespunzătoare vectorilor inițiali f_j, f_j^s, h_j, g_j, h_j^s, $g_j^s (s = 1, \ldots, m)$ vor fi notați respectiv $f_j(t)$, $f_j^s(t)$, $h_j(t)$, $g_j(t)$, $h(t_j^s)$, $g_j^s(t)$. În spațiul invariant unidimensional generat de vectorul f_j, operatorul A se reduce la înmulțirea prin λ_j și operatorul e^{tA} la înmulțirea prin $e^{t\lambda_j}$. De aici

$$f_j(t) = e^{t\lambda_j} f_j. \tag{5}$$

Pentru spațiul invariant m-dimensional corespunzător celulei jordaniene (2), avem (12.19e)

$$e^{tA} = \begin{Vmatrix} e^{\lambda_j t} & te^{\lambda_j t} & \frac{t^2}{2} e^{\lambda_j t} & \ldots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{\lambda_j t} \\ 0 & e^{\lambda_j t} & te^{\lambda_j t} & \ldots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} e^{\lambda_j t} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_j t} \end{Vmatrix}$$

În consecință,

$$\begin{aligned} f_j^1(t) &= e^{tA} f_j^1 = e^{\lambda_j t} f_j^1, \\ f_j^2(t) &= e^{tA} f_j^2 = e^{\lambda_j t}(t f_j^1 + f_j^2), \\ &\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ f_j^m(t) &= e^{tA} f_j^m = e^{\lambda_j t}\left(\frac{t^{m-1}}{(m-1)!} f_j^1 + \right. \\ &\left. + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} f_j^2 + \ldots + f_j^m\right). \end{aligned} \tag{6}$$

c) Pentru o celulă jordaniană 2×2 (3), avem (12.19h)

$$e^{tA} = e^{\alpha t} \begin{Vmatrix} \cos t\tau & -\sin t\tau \\ \sin t\tau & \cos t\tau \end{Vmatrix},$$

în consecință,

$$\left.\begin{aligned} h_j(t) &= e^{\alpha t}[\cos t\tau \cdot h_j + \sin t\tau \cdot g_j], \\ g_j(t) &= e^{\alpha t}[-\sin t\tau \cdot h_j + \cos t\tau \cdot g_j]. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

d. Pentru o celulă jordaniană $2m \times 2m$ (4), avem (12.19h)

$$e^{tA} =$$

$$= e^{\sigma t}\begin{Vmatrix} \cos t\tau & -\sin t\tau & t\cos t\tau & -t\sin t\tau & \dots & & \\ \sin t\tau & \cos t\tau & t\sin t\tau & t\cos t\tau & \dots & & \\ & & \cos t\tau & -\sin t\tau & \dots & & \\ & & \sin t\tau & \cos t\tau & \dots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & \dots\cos t\tau & -\sin t\tau \\ & & & & & \dots\sin t\tau & \cos t\tau \end{Vmatrix}$$

astfel încît

$$\left.\begin{aligned} h_j^1(t) &= e^{\sigma t}[\cos\tau t\cdot h_j^1 + \sin\tau t\cdot g_j^1],\\ g_j^1(t) &= e^{\sigma t}[-\sin\tau t\cdot h_j^1 + \cos\tau t\cdot g_j^1],\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ h_j^m(t) &= e^{\sigma t}\left[\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}(\cos\tau t\cdot h_j^1+\sin\tau t\cdot g_j^1)+\dots\right.\\ &\qquad \left.\dots+\cos\tau t\cdot h_j^m+\sin\tau t\cdot g_j^m\right],\\ g_j^m(t) &= e^{\sigma t}\left[\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}(-\sin\tau t\cdot h_j^1+\cos\tau t\cdot g_j^1)+\dots\right.\\ &\qquad \left.\dots+(-\sin\tau t\cdot h_j^m+\cos\tau t\cdot g_j^m)\right]. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

13.15. Am construit n soluţii particulare diferite ale ecuaţiei 13.12 (1) în spaţiul $\mathbb{R}_n$, care corespund la n vectori ai unei baze jordaniene a matricii A luaţi ca vectori iniţiali. În baza de plecare $e_1, \dots, e_n$ în raport cu care ecuaţia 13.12(1) are forma sistemului 13.14(1), fiecare din cele n soluţii este reprezentată cu ajutorul a n funcţii scalare (coordonatele).

Fie, de exemplu,

$$f_j(t) = \sum_{k=1}^{n} u_{jk}(t)e_k, \quad h_j(t) = \sum_{k=1}^{n} v_{jk}(t)e_k, \quad g_j(t) = \sum_{k=1}^{n} w_{jk}(t)e_k,$$

$$f_j^s(t) = \sum_{k=1}^{n} u_{jk}^s(t)\, e_k, \quad h_j^s(t) = \sum_{k=1}^{n} v_{jk}^s(t)e_k, \quad g_j^s(t) = \sum_{k=1}^{n} w_{jk}^s(t)e_k$$

apoi

$$f_j = \sum u_{jk}e_k, \quad h_j = \sum v_{jk}e_k, \quad g_j = \sum w_{jk}\, e_k,$$
$$f_j^s = \sum u_{jk}^s e_k, \quad h_j^s = \sum v_{jk}^s e_k, \quad g_j^s = \sum w_{jk}^s e_k.$$

Au loc relaţiile

$$f_j(t) = e^{\lambda_j t} f_j = e^{\lambda_j t} \sum u_{jk}e_k = \sum u_{jk}(t)e_k.$$

de unde

$$u_{jk}(t) = e^{\lambda_j t} u_{jk}. \tag{1}$$

Într-un mod analog, obţinem

$$u_{jk}^s(t) = e^{\lambda_j t}\left[\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}\, u_{jk}^1 + \ldots + u_{jk}^s\right], \tag{2}$$

$$\begin{cases} v_{jk}(t) = e^{\sigma_j t}[\cos \tau_j t \cdot v_{jk} + \sin \tau_j t \cdot w_{jk}], \\ w_{jk}(t) = e^{\sigma_j t}[-\sin \tau_j t \cdot v_{jk} + \cos \tau_j t \cdot w_{jk}], \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{jk}^s(t) = e^{\sigma_j t}\left[\dfrac{t^{s-1}}{(s-1)!}(\cos \tau_j t \cdot v_{jk}^1 + \sin \tau_j t \cdot w_{jk}^1) + \ldots\right. \\ \qquad \left. \ldots + (\cos \tau_j t \cdot v_{jk}^s + \sin \tau_j t \cdot w_{jk}^s)\right], \\ w_{jk}^s(t) = e^{\sigma_j t}\left[\dfrac{t^{s-1}}{(s-1)!}(-\sin \tau_j t \cdot v_{jk}^1 + \cos \tau_j t \cdot w_{jk}^1) + \ldots\right. \\ \qquad \left. + \ldots + (-\sin \tau_j t \cdot v_{jk}^s + \cos \tau_j t \cdot w_{jk}^s)\right], \end{cases} \tag{4}$$

13.16. Formulele 13.14(5)—(8) pot fi aplicate la studiul curbelor integrale $u = u(t)$ şi a comportării lor asimptotice pentru $t \to \infty$. Este comod să utilizăm interpretarea cinematică 13.11d.

a) Pentru un vector inițial de tipul f_j (13.14a), soluția $f_j(t)$ este sau un vector constant f_j dacă $\lambda_j = 0$, sau un vector ce se depărtează de 0 după legea exponențială (pentru $t \to \infty$) în lungul axei f_j cînd $\lambda_j > 0$, sau, în fine, un vector ce se apropie de origine după aceeași lege în lungul aceleiași axe cînd $\lambda_j < 0$.

b) Presupunem că vectorul inițial u_0 este un vector de tipul f_j^k, adică unul dintre vectorii bazei unui subspațiu invariant m-dimensional asociat unei celule jordaniene (13.14(2). Dacă se folosește formula corespunzătoare grupei 13.14(6), se obține soluția

$$f_j^k(t) = e^{t\lambda_j}\left[\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}f_j^1 + \frac{t^{k-2}}{(k-2)!}f_j^2 + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \frac{t}{1!}f_j^{k-1} + f_j^k\right].$$

Vedem că raza vectoare a curbei integrale corespunzătoare, care coincide la momentul inițial cu vectorul f_j^k va avea în timp componentele nenule după vectorii $f_j^{k-1}, \dots, f_j^1$ deoarece, pentru t mare, componenta după vectorul f_j^1 devine dominantă. Dacă $\lambda_j \geqslant 0$, $k > 1$, atunci curba se depărtează de originea coordonatelor pentru $t \to \infty$ și tangenta sa (se poate vedea aceasta derivînd) devine la limită, paralelă cu vectorul f_j^1. Pentru $\lambda_j = 0$, viteza punctului mobil ce se depărtează de originea coordonatelor, variază cu puterea, iar pentru $\lambda_j > 0$, după legea exponențială. Dacă $\lambda_j < 0$, atunci, pentru $t \to \infty$, curba se apropie de origine; componenta după f_j^1 fiind dominantă, curba intră, cînd $t \to \infty$, într-un con oricît de îngust dorim, cu vîrful în origine și axa în lungul lui f_j^1; aceasta înseamnă că pentru $t \to \infty$, curba în origine este tangentă la vectorul f_j^1.

c) Presupunem că vectorul inițial $u(t_0)$ este un vector h_j sau g_j într-un subspațiu invariant bidimensional H_2, corespunzător unei celule jordaniene 2×2, considerată în 13.14 c). Atunci formulele 13.14(7) arată că soluția $u(t)$ descrie în planul H_2:

o elipsă centrală în originea coordonatelor dacă $\sigma_j = 0$;
o spirală ce se depărtează de origine dacă $\sigma_j > 0$;

o spirală care se apropie de origine și tinde către origine cînd $t \to \infty$, dacă $\sigma_j < 0$.

d) Presupunem că vectorul inițial $u(t_0)$ este un vector h_j^k sau g_j^k într-un subspațiu invariant $2m$-dimensional H_{2m} asociat unei celule jordaniene de dimensiune $2m \times 2m$ indicată în 13.14 d). Atunci soluția $u(t)$ descrie în spațiul H_{2m} una din următoarele curbe:

dacă $\sigma_j \geqslant 0$, o spirală ce se depărtează de origine, a cărei tangentă tinde să devină paralelă pentru $t \to \infty$, la planul primei perechi de vectori ai bazei h_j^1, g_j^1;

dacă $\sigma_j < 0$, o spirală ce se apropie de origine și tinde, pentru $t \to \infty$, să intre în origine tangentă la planul determinat de prima pereche de vectori din bază.

e) În cazul general cînd vectorul $u(t_0)$ are componente nenule după mai mulți vectori din baza jordaniană, mișcarea corespunzătoare este suma geometrică a mișcărilor de tipul considerat.

13.17. O ecuație scalară liniară de ordinul n

$$y^{(n)}(t) = a_1(t)\, y(t) + \ldots + a_n(t)\, y^{(n-1)}(t) \qquad (1)$$

poate fi pusă sub forma unui sistem de ordinul întîi, punînd

$$y(t) = u_1(t),\ y'(t) = u_2(t),\ \ldots,\ y^{(n-1)}(t) = u_n(t). \qquad (2)$$

Cu această substituție, avem

$$\left.\begin{aligned} u_1'(t) &= u_2(t), \\ u_2'(t) &= u_3(t), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n'(t) &= a_1(t)u_1(t) + a_2(t)\, u_2(t) + \ldots + a_n(t)\, u_n(t). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Invers, orice soluție $(u_1(t), \ldots u_n(t))$ a sistemului (3) permite să determinăm după formulele (2) o funcție $y(t) = u_1(t)$ și derivatele sale; ultima ecuație (3) arată că funcția $y(t)$ verifică ecuația (1).

Presupunînd că $a_1(t) = a_1, \ldots, a_n(t) = a_n$ constante, să aplicăm rezultatele 13.14. Matricea operatorului A are o formă particulară

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \ldots a_{n-1} & a_n \end{Vmatrix},$$

Fie $f = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$ un vector propriu al operatorului A, care corespunde unei valori proprii λ. Avem $Af = \lambda f$, sau, în coordonatele $\xi_1, \ldots, \xi_n$,

$$\xi_2 = \lambda \xi_1,$$
$$\xi_3 = \lambda \xi_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3 + \ldots + a_n \xi_n = \lambda \xi_n.$$

Punînd $\xi_1 = 1$ găsim succesiv

$$\xi_1 = 1, \quad \xi_2 = \lambda, \quad \xi_3 = \lambda^2, \ldots, \quad \xi_n = \lambda^{n-1}, \tag{4}$$
$$a_1 + a_2 \lambda + \ldots + a_n \lambda^{n-1} = \lambda^n.$$

Ecuaţia (4) se numeşte *ecuaţia caracteristică* a ecuaţiei (1). Ea se deduce din aceasta, înlocuind $y^{(k)}$ prin $\lambda^k (k = 0, 1, \ldots, n)$.

Astfel, valorile proprii ale matricii A sînt rădăcinile ecuaţiei caracteristice (4). Un vector propriu asociat unei valori proprii λ este coliniar cu vectorul $(1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{n-1})$, deci definit într-un mod univoc (pînă la coliniaritate). În consecinţă, în cazul cînd λ este o rădăcină de multiplicitate m, apare o celulă jordaniană reală sau complexă cu m linii şi m coloane. (În alţi termeni, exponenţii puterilor divizorilor elementari sînt în acest caz egali cu multiplicităţile rădăcinilor, şi polinomul minimal al matricii A coincide cu polinomul său caracteristic [40; cap. 6].

Conform cu 13.14, se pot scrie n soluţii particulare distincte ale sistemului (3), care corespund la n vectori ai unei baze jordaniene luaţi ca vectori iniţiali. Ne mărginim să explicităm numai prima componentă a acestor soluţii, ţinînd cont că, în virtutea formulelor (2), este esenţială tocmai prima componentă $u_1(t) = y(t)$:

$$u_{j1}(t) = u_{j1} e^{\lambda_j t} \tag{5}$$

pentru orice rădăcină reală simplă λ_j;

$$u_j^s(t) = e^{\lambda_j t} \left[\frac{t^{s-1}}{(s-1)!} u_j^1 + \ldots + u_j^s \right], s = 1, \ldots, m \tag{6}$$

pentru orice rădăcină reală λ_j de multiplicitate m ;

$$\left.\begin{aligned} v_j(t) &= e^{\sigma_j t}[v_{j1}\cos\tau_j t + w_{j1}\sin\tau_j t], \\ w_j(t) &= e^{\sigma_j t}[-v_{j1}\sin\tau_j t + w_{j1}\cos\tau_j t] \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

pentru orice rădăcină simplă complexă $\lambda_j = \sigma_j + i\tau_j$;

$$\left.\begin{aligned} v_j^s(t) &= e^{\sigma_j t}\left[\frac{t^{s_j-1}}{(s_j-1)!}(v_j^1\cos\tau_j t + w_j^1\sin\tau_j t) + \dots\right. \\ &\left.\dots + (v_j^s\cos\tau_j t + w_j^s\sin\tau_j t)\right],\ s_j = 1,\dots m_j, \\ w_j^s(t) &= e^{\sigma_j t}\left[\frac{t^{s_j-1}}{(s_j-1)!}(-v_j^1\sin\tau_j t + w_j^1\cos\tau_j t) + \dots\right. \\ &\left.\dots + (-v_j^s\sin\tau_j t + w_j^s\cos\tau_j t)\right],\ s_j = 1,\dots,m_j \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

pentru orice rădăcină complexă $\lambda_j = \sigma_j + i\tau_j$ de multiplicitate m_j.

13.18. Înlocuind soluţiile obţinute, prin anumite combinaţii liniare ale lor, sîntem în măsură să punem în evidenţă următoarele n soluţii :

a) Pentru orice rădăcină reală simplă λ_j, avem soluţia $e^{\lambda_j t}$:

b) Pentru orice rădăcină reală multiplă de ordin m, λ_j, avem m soluţii

$$e^{\lambda_j t},\ te^{\lambda_j t},\ \dots,\ t^{m-1}e^{\lambda_j t}.$$

c) Pentru orice pereche de rădăcini complexe $\lambda_j = \sigma_j \pm i\tau_j$, $\tau_j \neq 0$, avem două soluţii

$$e^{\sigma_j t}\cos\tau_j t,\quad e^{\sigma_j t}\sin\tau_j t.$$

d) Pentru orice pereche de rădăcini complexe multiple de ordin m, $\lambda_j = \sigma_j \pm i\tau_j$, $\tau_j \neq 0$, avem $2m$ soluţii

$$e^{\sigma_j t}\cos\tau_j t,\ e^{\sigma_j t}\sin\tau_j t,\ te^{\sigma_j t}\cos\tau_j t,\ te^{\sigma_j t}\sin\tau_j t,\ \dots$$

$$\dots,\ t^{m-1}e^{\sigma_j t}\cos\tau_j t,\ t^{m-1}e^{\sigma_j t}\sin\tau_j t.$$

13.19. Considerăm acum cazul general în care operatorul $A(t)$ din ecuația

$$u'(t) = A(t)\,u(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{1}$$

depinde efectiv de parametrul t; în cazul unidimensional are loc formula 13.12(2):

$$u(t) = e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau}\, u_0. \tag{2}$$

Se poate considera operatorul $W(t) = \int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau$ și apoi expresia

$$e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau}\, u(t_0) = e^{W(t)} u(t_0).$$

Dar, în general, ea nu mai este soluție a ecuației (1). Într-adevăr, dacă încercăm să derivăm expresia $e^{W(t)}$ în raport cu t, ne lovim de următoarea dificultate: nu mai este posibil să folosim egalitatea

$$e^{W(t)+hA(t;\,t+h)} = e^{W(t)}\, e^{hA(t;\,t+h)},$$

pentru a transforma diferența

$$e^{W(t+h)} - e^{W(t)} = e^{W(t)+hA(t;\,t+h)} - e^{W(t)}$$

unde $\tilde{A}(t; t+h)$ este valoarea medie a operatorului $A(\tau)$ pentru $\tau \in (t; t+h)$, deoarece relația $e^{A+B} = e^A e^B$, adevărată pentru operatori A, B care comută, în general, nu mai este adevărată pentru operatori care nu comută. Deci derivata lui $e^{W(t)}$ nu este în general egală cu $e^{W(t)}W'(t)$.

În același timp, într-un anume sens, expresia (2) poate fi considerată ca soluție a ecuației (1).

Introducem noțiunea de integrală multiplicativă.

Fie $\Pi = \{a = t_0 \leqslant \xi_0 \leqslant t_1 \leqslant \xi_1 \ldots \leqslant t_n = t\}$ o partiție a intervalului $a \leqslant \tau \leqslant t$, cu puncte marcate $\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}$.

Formăm operatorul

$$e^{A(\xi_{n-1})\Delta t_{n-1}} e^{A(\xi_{n-2})\Delta t_{n-2}} \dots e^{A(\xi_0)\Delta t_0}. \tag{3}$$

Dacă operatorii $A(\xi)$ pentru ξ diferiți, ar comuta, atunci operatorul anterior ar putea fi scris sub forma

$$e^{A(\xi_0)\Delta t_0 + \dots + A(\xi_{n-1})\Delta t_{n-1}}.$$

Pentru $d(\Pi) = \max \Delta t_k \to 0$, ultima expresie tinde către limita $e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau}$. Dar noi am văzut că acest operator pentru $(A\xi)$ necomutanți între ei nu reprezintă soluție a ecuației (1). Se vede că, pentru $A(\xi)$ necomutanți, o soluție poate fi reprezentată prin operatorul care se obține din (3) cînd $d(\Pi) \to 0$ (vezi exerc. 16). Acest operator limită este notat prin

$$e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau} \tag{4}$$

și se numește *integrală multiplicativă*.

Se poate scrie, pînă la infiniți mai mici de ordin superior,

$$e^{A(\xi_j)\Delta t_j} \approx I + A(\xi_j)\, \Delta t_j.$$

Se poate demonstra (vezi exerc. 14) că se obține aceeași limită (4), dacă se pleacă de la produsele

$$[I + A(\xi_{n-1})\Delta\xi_{n-1}]\, [I + A(\xi_{n-2})\, \Delta\xi_{n-2}] \dots [I + \\ + A(\xi_0)\, \Delta\xi_0)].$$

Din această cauză integrala multiplicativă este cîteodată notată prin

$$\prod_{t_0}^{t} [I + A(t)]\, dt.$$

Integralele multiplicative pot fi utilizate pentru estimarea soluțiilor. Totuși, cîmpul lor de aplicație, în raport cu teo-

rema generală de existență, nu este important; de aceea nu dăm aici demonstrațiile propozițiilor enunțate.

§ 13.2. Teorema de punct fix

În acest capitol considerăm teoremele fundamentale asupra existenței și unicității soluțiilor ecuațiilor diferențiale ordinare. Toate aceste teoreme se bazează pe un principiu geometric important al analizei, care se numește *principiu de punct fix.*

13.21. Fie M o mulțime și A o aplicație a acestei mulțimi în ea însăși, adică o lege după care facem să corespundă oricărui punct $x \in M$, un punct $y = A(x)$ din M.

DEFINIȚIE. Orice punct $x \in M$ pe care aplicația A îl transformă în el însuși, adică $A(x) = x$, se numește *punct fix* al aplicației A.

Astfel, cînd se vorbește de aplicarea unui disc din planul M în el însuși printr-o rotație de 90° în jurul centrului singurul punct fix este centrul cercului. Dacă aplicația cercului este omotetia de centru O și de raport 2 : 1, urmată de o translație pînă la contactul cu cercul inițial (fig. 13.3),

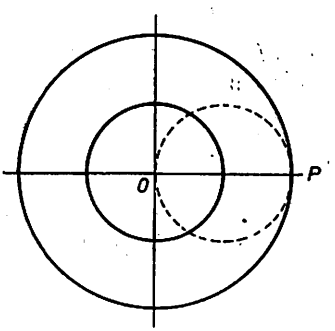


Fig. 13.3

atunci punctul de contact P este un punct fix (cu toate că el nu este punct fix nici pentru omotetia nici pentru translația în cauză ; nu calea ci rezultatul este cel care contează). Iar dacă se consideră aplicarea unui cerc (circumferință) în el însuși printr-o rotație de 90°, ea nu are punct fix.

Avem interesul să stabilim condițiile generale (suficiente) de existență a punctelor fixe. Expunem aici una din cele

mai simple teoreme, care asigură, în anumite condiţii impuse mulţimii M şi aplicaţiei A, existenţa şi unicitatea punctului fix.

13.22. Presupunem că (M, ρ) este un spaţiu metric.

DEFINIŢIE. O aplicaţie A a spaţiului metric M în el însuşi se numeşte *contracţie*, dacă există o constantă θ, $0 \leqslant \theta < 1$, astfel încît pentru orice două puncte y, z ale spaţiului M, să avem inegalitatea

$$\rho(A(y), A(z)) \leqslant \theta \rho(y, z).$$

TEOREMA (principiul punctului fix al lui Picard-Banach). *Orice contracţie A a unui spaţiu metric complet M, în el însuşi, admite un punct fix şi numai unul.*

Demonstraţie. Plecînd de la un punct arbitrar ales $x_0 \in M$, construim şirul de puncte

$$x_1 = A(x_0), x_2 = A(x_1) = A^2(x_0), \ldots, x_n = A(x_{n-1}) = A^n(x_0), \ldots$$

Acest şir este şir Cauchy în M.

Într-adevăr, pentru orice $n \geqslant 1$, avem

$$\rho(x_n, x_{n+1}) = \rho(A^n(x_0), A^{n+1}(x_0)) \leqslant \theta \rho(A^{n-1}(x_0), A^n(x_0)) \leqslant \theta^n \rho(x_0, x_1),$$

deci

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \leqslant \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leqslant [\theta^n + \theta^{n+1} + \ldots + \theta^{n+p-1}] \rho(x_0, x_1) \leqslant \theta^n (1 + \theta + \theta^2 + \ldots) \rho(x_0, x_1) = \frac{\theta^n}{1 - \theta} \rho(x_0, x_1); \quad (1)$$

această cantitate devine arbitrar de mică pentru n suficient de mare. M fiind complet, există limita

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n \in M.$$

Să arătăm că x este punct fix. Avem pentru $n \geqslant 1$,

$$\rho(A(x), x_n) = \rho(A(x), A(x_{n-1})) \leqslant \theta\rho(x, x_{n-1}) \to 0,$$

de unde

$$A(x) = \lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

adică x este punct fix.

Presupunem că mai există un alt punct fix y, adică avem $A(x) = x$ și $A(y) = y$. Atunci

$$\rho(x, y) = \rho(Ax), A(y)) \leqslant \theta\rho(x, y).$$

Dacă $\rho(x, y) \neq 0$, putem împărți egalitatea prin $\rho(x, y)$ ajungînd la contradicția $1 \leqslant \theta < 1$. Prin urmare, $\rho(x, y) = 0$, deci $x = y$ și nu există nici un alt punct fix în afara lui x. Teorema este demonstrată.

13.23. *Puncte fixe a două contracții.* Două aplicații $A(y)$ și $B(y)$ ale unui spațiu metric M în el însuși, se numesc ε-*apropiate*, dacă pentru orice $y \in M$ avem

$$\rho(A(y), B(y)) \leqslant \varepsilon.$$

LEMĂ. *Fie $A(y)$ și $B(y)$ două contracții într-un spațiu metric complet M, astfel încît*

$$\rho(A(y), A(z)) \leqslant \theta_A \rho(y, z), \ \rho(B(y), B(z)) \leqslant \theta_B \rho(y, z),$$

unde $\theta_A < 1$, $\theta_B < 1$ și fie $\theta = \max(\theta_A, \theta_B)$. Dacă aplicațiile A și B sînt ε-apropiate, distanța dintre punctele lor fixe este cel mult $\varepsilon/(1 - \theta)$.

Demonstrație. Fie y_0 un punct fix al aplicației A. Punctul fix z_0 al aplicației B poate fi obținut, conform construcției 13.22, ca limita șirului y_0, $B(y_0)$, $B^2(y_0)$, ... În virtutea inegalității 13.22(1),

$$\rho(y_0, B^n(y_0)) \leqslant \frac{1}{1-\theta}\rho(y_0, B(y_0)) =$$

$$= \frac{1}{1-\theta}\rho(A(y_0), B(y_0)) \leqslant \frac{\varepsilon}{1-\theta};$$

trecînd la limită pentru $n \to \infty$, se obține

$$\rho(y_0, z_0) \leqslant \frac{\varepsilon}{1-\theta},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

§ 13.3. Existența și unicitatea soluției unei ecuații diferențiale într-un spațiu normat

13.31. Fie $\mathfrak{B}$ un spațiu Banach și $\Phi(t, x)$ o aplicație a spațiului $\mathfrak{B}$ în el însuși, care depinde de un parametru real t, $a \leqslant t \leqslant b$. Fie $u(t)$ o funcție vectorială derivabilă definită pe același interval $a \leqslant t \leqslant b$, cu valori în spațiul $\mathfrak{B}$. Știm că derivata $u'(t)$ este încă o funcție vectorială definită pe același interval $a \leqslant t \leqslant b$, cu valori în același spațiu $\mathfrak{B}$. Dacă se înlocuiește variabila $x \in \mathfrak{B}$, în funcția $\Phi(t, x)$, cu funcția vectorială $u(t)$, se obține o nouă funcție vectorială $\Phi[t, u(t)]$, cu valori în spațiul $\mathfrak{B}$, definită pentru $t \in [a, b]$.

Vrem să rezolvăm ecuația diferențială

$$u'(t) = \Phi[t, u(t)] \tag{1}$$

cu condiția inițială

$$u(t_0) = u_0, \; a < t_0 < b, \; u_0 \in \mathfrak{B}. \tag{2}$$

În ipoteza naturală de continuitate, care va fi precizată în cele ce urmează, determinarea soluției ecuației (1) cu condiția inițială (2) este echivalentă cu determinarea unei soluții a ecuației integrale

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi[\tau, u(\tau)] \, d\tau, \tag{3}$$

deoarece (3) se deduce din (1) și (2) integrînd de la t_0 la t, (2) se deduce din (3) prin substituția $t = t_0$ și (1) se obține din (3) derivînd în raport cu t. Astfel, problema este redusă la căutarea punctului fix al aplicației

$$A[x(t)] = u_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi[\tau, x(\tau)] \, d\tau, \tag{4}$$

în spațiul funcțiilor vectoriale $x(t)$.

13.32. Desigur, vom aplica principiul punctului fix al lui Picard-Banach. Pentru a face aceasta, trebuie să avem un spaţiu metric complet M şi o contracţie A ce satisface condiţiile problemei noastre.

Alegem pentru M spaţiul tuturor funcţiilor vectoriale continue $x(t)$, cu valori în $\mathfrak{B}$, care sînt definite într-un interval $[t_0 - h, t_0 + h]$; valoarea h va fi indicată mai jos. Definim în spaţiul M următoarea metrică

$$\rho[x_1, (t)\ x_2(t)_0] = \max_{|t-t_0|<h} \| x_1(t) - cx_2(t) \|.$$

Spaţiul metric M astfel obţinut este complet (12.23f).

13.33. Aplicaţia A a spaţiului M în el însuşi trebuie să fie dată prin formula 13.31 (4). Să precizăm condiţiile ce trebuie impuse funcţiei $\Phi(t, x)$ pentru ca definiţia aplicaţiei A să fie corectă. Anume, presupunem că aplicaţia $\Phi(t, x)$ este continuă în raport cu ansamblul variabilelor t şi x; aceasta înseamnă că oricare ar fi t_1, x_1 şi $\varepsilon > 0$, există un $\delta = \delta(t_1, x_1, \varepsilon)$ astfel încît $\| \Phi(t_1, x_1) - \Phi(t_2, x_2) \| < \varepsilon$ de îndată ce $\| x_1 - x_2 \| < \delta$ şi $| t_1 - t_2 | < \delta$. În această ipoteză, funcţia vectorială $\Phi(t, x(t))$ este continuă în t, oricare ar fi funcţia continuă $x(t)$. Într-adevăr, pentru t_1 şi $\varepsilon > 0$ daţi, punem $x(t_1) = x_1$ şi găsim un $\delta > 0$, astfel încît să avem $\| \Phi(t_1, x_1) - \Phi(t_2, x_2) \| < \varepsilon$ de îndată ce $\| x_1 - x_2 \| < \delta$, $| t_1 - t_2 | < \delta$. Apoi, găsim un $\delta_1 > 0$ astfel încît $| t_1 - t_2 | < \delta_1$ să implice inegalitatea $\| x(t_1) - x(t_2) \| < \delta$. Atunci, pentru $| t_1 - t_2 | < \min(\delta, \delta_1)$, are loc $\| \Phi(t_1, x(t_1)) - \Phi(t_2, x(t_2)) \| < \varepsilon$.

13.34. Mai departe, pentru ca ipoteza teoremei de punct fix să fie îndeplinită (A să fie o contracţie), presupunem că funcţia $\Phi(t, x)$ satisface condiţia Lipschitz : există o constantă C astfel încît

$$\| \Phi(t, x_1) - \Phi(t, x_2) \| \leqslant C \| x_1 - x_2 \| \qquad (1)$$

pentru orice două elemente x_1 şi x_2 ale spaţiului $\mathfrak{B}$.

Să arătăm că în condiţiile formulate, aplicaţia 13.31(4) este o contracţie pentru un h suficient de mic. Într-adevăr, oricare ar fi două puncte ale spaţiului M, adică două funcţii vectoriale $x(t)$ şi $y(t)$, definite pe $[t_0 - h, t_0 + h]$ şi continue,

avem

$$\rho(A[x(t)],\ A[y(t)]) = \max_{|t-t_0|\leqslant h} \|A[x(t)] - A[y(t)]\| =$$

$$= \max \left\| \int_{t_0}^{t} \{\Phi(\tau,\ x(\tau)) - \Phi(\tau,\ y(\tau))\}\ \mathrm{d}\tau \right\| \leqslant$$

$$\leqslant h \max_{|t-t_0|\leqslant h} \|\Phi(t,\ x(t)) - \Phi(t,\ y(t))\| \leqslant$$

$$\leqslant Ch \max_{|t-t_0|\leqslant h} \|\ x(t) - y(t)\| = \mathrm{Ch}\ \ \rho(x,\ y) \qquad (2)$$

şi pentru ca aplicaţia să fie contracţie, este suficient să alegem $h < 1/C$.

13.35. Putem acum să aplicăm principiul punctului fix pentru a demonstra existenţa şi unicitatea soluţiei ecuaţiei 13.21(1) cu condiţia iniţială 13.31(2). Pentru moment, această soluţie nu este definită decît pe $[t_0 - h,\ t_0 + h]$, dar se poate, aplicînd succesiv rezultatul stabilit, să o prelungim pe tot intervalul $[a,\ b]$. Anume, fixăm valoarea $h = 2/(3C)$ şi aplicăm teorema demonstrată aceleiaşi ecuaţii diferenţiale 13.31(1), dar cu condiţia iniţială

$$t_1 = t_0 + h,\quad u^*(t_1) = u(t_1),$$

unde $u(t_1)$ este valoarea, pentru $t = t_1$, a soluţiei construite deja, definită pe $[t_0 - h,\ t_0 + h]$. Ajungem la o nouă soluţie $u^*(t)$ definită pe intervalul $[t_1, -h,\ t_1 + h]$. Dar în virtutea unicităţii soluţiei, demonstrate anterior, funcţiile $u^*(t)$ şi $u(t)$ coincid pe partea comună a domeniilor lor de definiţie şi avem deci o soluţie a ecuaţiei 13.31 (3) definită pe intervalul $[t_0 - h,\ t_0 + h]$. Continuînd ajungem după un număr finit de paşi, la o soluţie definită pe tot intervalul $[a,\ b]$.

Deci, am demonstrat următoarea:

TEOREMĂ. *Dacă funcţia* $\Phi(t,\ x)$ *este definită pentru* $a \leqslant t \leqslant b$, $x \in \mathfrak{B}$, *continuă în raport cu ansamblul acestor variabile şi satisface pe orice interval* $a \leqslant t \leqslant b$ *condiţia lui Lipschitz* 13.34(1), *atunci ecuaţia* 13.31(1) *cu condiţia* 13.31(2) *are o soluţie* $u = u(t)$ *definită pe întreg intervalul*

$[a, b]$, *care este unică în clasa tuturor funcțiilor vectoriale derivabile* $x(t)$, $t \in [a, b]$, *cu valori în spațiul* $\mathfrak{B}$.

13.36. Considerăm cazul cînd funcția vectorială $\Phi(t, x)$, pentru orice $t \in [a, b]$, aplică un subspațiu închis fixat $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}$ în el însuși. În aceste condiții, dacă se alege un vector inițial u_0 în același spațiu $\mathfrak{B}_1$, atunci soluția corespunzătoare $u(t)$ va aparține subspațiului $\mathfrak{B}_1$ pentru orice $t \in [a, b]$. Într-adevăr, în această situație putem considera de la început subspațiul $\mathfrak{B}_1$ în loc de spațiul $\mathfrak{B}$. Ajungem la o soluție în subspațiul $\mathfrak{B}_1$; ținînd cont de teorema de unicitate, nu există în spațiul $\mathfrak{B}$ nici o altă soluție a ecuației 13.31(1) care să verifice condiția $u(t_0) = u_0 \in \mathfrak{B}_1$.

13.37. *Soluția ca funcție continuă de vectorul inițial.* Aici soluția ecuației 13.31(1) cu condiția inițială 13.31 (2) este notată prin $u(t : t_0, u_0)$. Este o funcție care face să corespundă unui vector $u_0 \in \mathfrak{B}$ vectorul $u(t; t_0, u_0)$ care depinde de t_0 și t, priviți ca parametri numerici. Să arătăm că în ipoteza teoremei 13.35, pentru t_0 și t fixați, vectorul $u(t; t_0, u_0)$ este o funcție continuă de u_0.

Considerăm aplicațiile

$$A[x(t)] = u_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi[\tau, x(\tau)]\, d\tau,$$

$$B[x(t)] = u_1 + \int_{t_0}^{t} \Phi[\tau, x(\tau)]\, d\tau,$$

ale căror puncte fixe sînt soluțile ecuației 13.31(1) cu condițiile inițiale u_0 și u_1. În spațiul M funcțiile vectoriale $x(t)$, definite și continue pe $[t_0 - h, t_0 + h]$, unde $h < 1/C$, sînt contracții cu aceeași valoare $\theta = Ch < 1$. Dacă $|u_0 - u_1| < \varepsilon$, aceste aplicații sînt ε-apropiate (13.23), deci distanța între punctele lor fixe nu depășește $\varepsilon/(1 - \theta)$. Altfel spus,

$$\max_{|t-t_0| \leqslant h} |u(t; t_0, u_0) - u(t; t_0, u_1)| < \frac{\varepsilon}{1 - \theta},$$

Astfel, dacă diferența a două soluții pentru $t = t_0$ este mai mică decît ε, ea este mai mică decît $\varepsilon/(1 - \theta)$ în intervalul $|t - t_0| \leqslant h$. Deplasînd punctul inițial t_0 în $t_1 = t_0 + h$

obținem, ca în 13.35, posibilitatea de a prelungi soluția în intervalul $t_0 \leqslant t_0 + h \leqslant t_0 + 2h$; repetînd procedeul rezultă că în acest interval soluția nu se poate îndepărta cu mai mult de $\varepsilon/(1-\theta)^2$. Continuînd, ajungem la estimația

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} |u(t; t_0, u_0) - u(t; t_0, u_1)| < \frac{\varepsilon}{(1-\theta)^m},$$

unde $m = \left[\frac{b-a}{h}\right] + 1$; proprietatea este deci demonstrată.

13.38. *Operatorul rezolvant.* Fie $u_0 \in \mathfrak{B}$ un vector oarecare și $u(t)$ soluția ecuației 13.31(1) cu condiția inițială $u(t_0) = u_0$. Pentru un $t \in [a, b]$ fixat, vectorul $u = u(t)$ este bine determinat. El depinde de u_0 ca și de t_0 și t. Notăm acest lucru astfel

$$(u(t) = \Omega_{t_0}^{t}(u_0).$$

Aici $\Omega_{t_0}^{t}$ este o aplicație a spațiului $\mathfrak{B}$ în el însuși, pe care o vom numi *operatorul rezolvant al ecuației* 13.31 (1).

Astfel, pentru ecuația liniară omogenă

$$u'(t) = Au(t)$$

operatorul rezolvant este de forma (13.13)

$$\Omega_{t_0}^{t} = e^{(t-t_0)A}.$$

a. În virtutea lui 13.37, operatorul $\Omega_{t_0}^{t}$ este continuu: dacă un șir $u_0^{(1)}, u_0^{(2)}, \ldots u_0^{(n)}, \ldots$ de vectori din spațiul $\mathfrak{B}$ converge către un vector u_0, atunci șirul corespunzător $u_1^{(n)} = \Omega_{t_0}^{t}(u_0^{(n)})$ converge către vectorul $u_1 = \Omega_{t_0}^{t}(u_0)$.

b. Este evident că $\Omega_{t_0}^{t_0}(u_0) = u_0$, deoarece $\Omega_t^t = E$, este operatorul identic.

c. Să demonstrăm egalitatea

$$\Omega_{t_0}^{t_2} = \Omega_{t_1}^{t_2}\Omega_{t_0}^{t_1}, \tag{1}$$

oricare ar fi t_0, t_1, t_2 din $[a, b]$.

Într-adevăr, fie $u_1 = \Omega_{t_0}^{t_1}(u_0)$ și $u_2 = \Omega_{t_1}^{t_2}(u_1)$. Vectorul u_1 este valoarea soluției pentru $t = t_1$ a soluției $u(t)$ a ecuației 13.31 (1), care ia valoarea u_0 pentru $t = t_0$. Vectorul u_2 este valoarea, pentru $t = t_2$, a soluției care ia valoarea u_1 pentru $t = t_1$. Ținînd cont de unicitate, aceste două soluții coincid, ceea ce demonstrează (1).

d. Punînd în (1), $t_2 = t_0$, avem $E = \Omega_{t_1}^{t_0}\Omega_{t_0}^{t_1}$, de unde inversabilitatea operatorului $\Omega_{t_0}^{t_1}$.

e. Egalitatea $\dfrac{du(t)}{dt} = A(t)\,u(t)$ poate fi pusă sub forma

$$\frac{d(\Omega_{t_0}^{t}(u_0))}{dt} = A(t)[\Omega_{t_0}^{t}(u_0)], \tag{2}$$

sau

$$\frac{d\Omega_{t_0}^{t}}{dt} = A(t)\Omega_{t_0}^{t}, \tag{3}$$

subînțelegînd prin ultima notație că egalitatea (2) are loc pentru un element $u_0 \in \mathfrak{B}$.

13.39. Am presupus că funcția $\Phi(t, x)$ este definită pentru toți $t \in [a, b]$ și $x \in \mathfrak{B}$. Existența și unicitatea soluției ecuației 13.31(1) în vecinătatea unui punct t_0 cu condiția 13.31(2) pot fi demonstrate într-o ipoteză mai slabă, anume: funcția $\Phi(t, x)$ trebuie să fie definită pentru $a \leqslant t \leqslant b$, să fie continuă și să verifice condiția lui Lipschitz numai într-o bilă (adică o sferă plină):

$$V = \{x \in \mathfrak{B} : \|x - u_0\| \leqslant r\}.$$

În acest caz, dacă h este suficient de mic, operatorul A transformă orice funcție continuă $x(t)$ cu valori în bila V, într-o funcție din aceeași bilă. Prin urmare, se poate realiza demonstrarea existenței și unicității soluției, înlocuind spațiul metric M al tuturor funcțiilor $x(t)$ continue pe $[t_0 - h, t_0 + h]$, cu spațiul metric M_V al funcțiilor $x(t)$ cu valori în bila V. Totuși soluția astfel obținută nu va putea fi, în general, prelungită pe orice interval $a \leqslant t \leqslant b$.

O situație analoagă are loc în cazul în care funcția $\Phi(t, x)$ este definită și continuă, pentru $a \leqslant t \leqslant b$, în tot spațiul $\mathfrak{B}$, dar constanta C din condiția Lipschitz depinde de distanțele de la originea coordonatelor la punctele x_1 și x_2, în așa fel încît condiția Lipschitz ia forma

$$\|\Phi(t, x_1) - \Phi(t, x_2)\| \leqslant C(r)\|x_1 - x_2)\|$$

oricare ar fi x_1 și x_2 din bila $\| x\| \leqslant r$. În acest caz, ca mai sus soluția există și este unică într-o vecinătate a punctului $t_0 \in [a, b]$, dar ea nu poate fi în general prelungită pînă la frontiera intervalului $[a, b]$.

Ca exemplu, considerăm ecuația $x'(t) = x^2(t)$ pentru intervalul $-1 \leqslant t \leqslant 1$. Membrul secund este continuu pentru orice $x \in \mathbb{R}_1$; apoi, are loc relația

$$| x_1^2 - x_2^2| = | x_1 + x_2| \, | x_1 - x_2 | \leqslant 2r| x_1 - x_2)|$$

oricare ar fi x_1 și x_2 din intervalul $| x| \leqslant r$. Soluția ecuației date, pentru condiția inițială $x(0) = x_0$, are forma

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0}$$

și nu poate fi prelungită pe orice interval $-1 \leqslant t \leqslant 1$ dacă $| x_0| \geqslant 1$.

§ 13.4. Sisteme de ecuații vectoriale

13.41. Fie de asemenea $\mathfrak{B}$ un spațiu Banach și fie n funcții

$$\Phi_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, \Phi_n(t, x_1, \ldots, x_n),$$

fiecare depinzînd de un parametru real $t \in [a, b]$ și de n variabile $x_1, \ldots, x_n$ ce parcurg $\mathfrak{B}$, fiecare funcție $\Phi_k(t, x_1, \ldots$ $\ldots, x_n)$ luînd valori de asemenea în spațiul $\mathfrak{B}$. Considerăm sistemul de ecuații diferențiale

$$\left.\begin{aligned} u_1'(t) &= \Phi_1(t, u_1, \ldots, u_n), \\ u_2'(t) &= \Phi_2(t, u_1, \ldots, u_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n'(t) &= \Phi_n(t, u_1, \ldots, u_n) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

cu condițiile inițiale

$$u_1(t_0) = p_1 \in \mathfrak{B}, \ldots, u_n(t_0) = p_n \in \mathfrak{B}, \; a \leqslant t_0 \leqslant b. \tag{2}$$

În mod natural, numim *soluție* a sistemului (1) cu condițiile (2), un sistem de funcții vectoriale $u_1(t), \ldots, u_n(t)$, definite pentru $a \leqslant t \leqslant b$, care verifică toate ecuațiile sistemului (1) și condițiile (2).

Prin definiție, o funcție $\Phi_k(t, x_1, \ldots, x_n)$ este *continuă în raport cu ansamblul variabilelor* $t, x_1, \ldots, x_n$ dacă, oricare ar fi $t_0, x_1, \ldots, x_n$ și $\varepsilon > 0$, există un $\delta > 0$ astfel încît relațiile

$$| \bar{t} - t_0 | < \delta, \ \| \bar{x}_1 - x_1 \| < \delta, \ldots, \| \bar{x}_n - x_n \| < \delta$$

să implice inegalitatea

$$\| \Phi_k(\bar{t}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) - \Phi_k(t, x_1, \ldots, x_n) \| < \varepsilon.$$

Prin definiție, funcția $\Phi_k(t, x_1, \ldots, x_n)$ *satisface condiția Lipschitz* : *în raport cu variabilele* $x_1, \ldots, x_n$, dacă există o constantă C astfel încît

$$\| \Phi_k(t, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) - \Phi_k(t, x_1, \ldots, x_n) \| \leqslant C \sum_{j=1}^{n} \| \bar{x}_j - x_j \|$$

oricare ar fi cele $2n$ elemente $x_1, \ldots, x_n, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ ale spațiului $\mathfrak{B}$.

13.42. Are loc următoarea

TEOREMĂ. *Dacă toate funcțiile* $\Phi_k(t, x_1, \ldots, x_n)$ *sînt continue în raport cu ansamblul variabilelor* $t, x_1, \ldots, x_n$ *și satisfac condiția Lipschitz în raport cu variabilele* $x_1, \ldots, x_n$, *atunci sistemul* 13.41(1) *cu condițiile* 13.41(2) *are o soluție* $(u_1(t), \ldots, u_n(t))$ *și una singură în clasa tuturor seturilor* $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$, *pe care le putem construi cu funcțiile vectoriale derivabile cu valori în spațiul* $\mathfrak{B}$.

Demonstrație. Construim un nou spațiu vectorial normat $\mathfrak{B}^n$ format din seturile $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de cîte n elemente ale spațiului $\mathfrak{B}$. Operațiile liniare în spațiul $\mathfrak{B}^n$ se fac pe coordonate : dacă $x = (x_1, \ldots x_n) \in \mathfrak{B}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathfrak{B}^n$, atunci

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$
$$\alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$

Proprietățile operațiilor liniare astfel introduse se stabilesc ușor plecînd de la proprietățile respective ale operațiilor liniare în spațiul $\mathfrak{B}$. Apoi, alegem în $\mathfrak{B}^n$, norma

$$\| x \| = \sum_{j=1}^{n} \| x_j \|. \qquad (1)$$

Proprietăţile normei în spaţiul $\mathfrak{B}'$ se deduc uşor din proprietăţile respective ale normei din spaţiul $\mathfrak{B}$. Convergenţa în normă (1) din spaţiul $\mathfrak{B}^n$ este convergenţa în raport cu fiecare coordonată din spaţiul $\mathfrak{B}$. În sfîrşit, spaţiul $\mathfrak{B}$ fiind complet, se demonstrează uşor aceeaşi proprietate pentru $\mathfrak{B}^n$.

Se poate considera sistemul de funcţii

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \Phi_1(t, x_1, \ldots, x_n), \\ y_2 &= \Phi_2(t, x_1, \ldots, x_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= \Phi_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

ca o singură aplicaţie $y = \Phi(t, x)$ a spaţiului $\mathfrak{B}^n$ în el însuşi. Să arătăm că, în ipotezele formulate mai sus asupra funcţiilor $\Phi_k(t, x_1, \ldots, x_n)$, funcţia $\Phi(t, x)$ este continuă în raport cu ansamblul variabilelor şi satisface condiţia lui Lipschitz în raport cu argumentul x. Pentru t, $x_1, \ldots, x_n$ şi $\varepsilon > 0$ date, găsim un număr δ plecînd de la condiţia de continuitate a tuturor funcţiilor $\Phi_k(t, x_1, \ldots, x_n)$, adică dacă $|\bar{t} - t| < \delta$ şi dacă $\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ este astfel încît

$$|||\overline{x} - x||| = \sum_{j=1}^{n} \|\overline{x}_j - x_j\| < \delta,$$

atunci are loc relaţia

$$\| \Phi_j(\bar{t}, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) - \Phi_j(t, x_1, \ldots, x_n) \| < \frac{\varepsilon}{n}.$$

De aici rezultă că

$$|||\Phi(\bar{t}, \overline{x}) - \Phi(t, x)||| = \sum_{j=1}^{n} \|\Phi_j(\bar{t}, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) - \Phi_j(t, x_1, \ldots, x_n)\| < \varepsilon;$$

în consecinţă, funcţia $\Phi(t, x)$ este continuă în raport cu ansamblul variabilelor. Apoi, din condiţia lui Lipschitz pentru funcţiile $\Phi_k(t, x_1, \ldots, x_n)$ rezultă că

$$|||\Phi(t, \overline{x}) - \Phi(t, x)||| = \sum_{j=1}^{n} \| \Phi_j(t, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) - \Phi_j(t, x_1, \ldots, \ldots, \overline{x}_n)\| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} C \| \overline{x}_k - x_k \| = Cn |||\overline{x} - x|||,$$

adică $\Phi(t, x)$ satisface condiția lui Lipschitz în raport cu variabila x.

Conform teoremei 13.35, ecuația diferențială

$$u'(t) = \Phi(t, x) \tag{3}$$

pentru o funcție vectorială $u(t)$, cu valori în spațiul $\mathfrak{B}^n$, cu condiția inițială

$$u(t_0) = p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathfrak{B}^n \tag{4}$$

are o soluție $u(t)$ definită pentru $t \in [a, b]$, care este unică în clasa tuturor funcțiilor vectoriale derivabile $x(t)$, cu valori în spațiul $\mathfrak{B}^n$. Deoarece, conform definițiilor

$$u(t) = (u_1(t), \ldots u_n(t)), \quad u'(t) = (u_1'(t), \ldots, u_n'(t)),$$

ecuația (3) cu condiția (4) pentru o funcție $u(t)$ este echivalentă cu sistemul 13.41(1) cu condiția 13.41 (2) pentru funcțiile $u_1(t), \ldots, u_n(t)$. Teorema este demonstrată.

13.43. Dacă există un subspațiu închis $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}$, astfel încît oricare ar fi $t \in [a, b]$ și $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{B}_1$, valorile $\Phi_k(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(k = 1, \ldots, n,)$ și vectorii inițiali $p_1, \ldots, p_n$ aparțin lui $\mathfrak{B}_1$, atunci valorile tuturor funcțiilor $u_1(t), \ldots, u_n(t)$, ce reprezintă soluția sistemului 13.41(1) cu condițiile 13.41 (2) aparțin și ele spațiului $\mathfrak{B}_1$ pentru orice $t \in [a, b]$.

Într-adevăr, considerăm în $\mathfrak{B}^n$ subspațiul $\mathfrak{B}_1^n$ al vectorilor $x = (x_1, \ldots, x_n)$ a căror fiecare coordonată aparține subspațiului $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}$. Este ușor să verificăm că $\mathfrak{B}_1^n$ este închis în $\mathfrak{B}^n$. Prin ipoteză, transformarea 13.42(2) aplică $\mathfrak{B}_1^n$ în el însuși. În consecință, ținînd cont de observația 13.39, dacă vectorul $(p_1, \ldots, p_n)$ este din $\mathfrak{B}_1^n$, la fel va fi și soluția $(u_1(t), \ldots, u_n(t))$, pentru orice $t \in [a, b]$, ceea ce trebuia demonstrat.

§ 13.5. Ecuația vectorială de ordin superior

13.51. Considerăm din nou un spațiu Banach $\mathfrak{B}$ și fie $\Phi(t, x_1, \ldots, x_n)$ o funcție de un parametru real t, $a \leqslant t \leqslant b$ și n puncte $x_1, \ldots, x_n$ din spațiul $\mathfrak{B}$, cu valori în același

spaţiu $\mathfrak{B}$. Fie

$$u^{(m)}(t) = \Phi(t, u(t), \ldots, u^{(m-1)}(t)) \tag{1}$$

o ecuaţie diferenţială de ordin m, cu condiţiile iniţiale

$$u(t_0) = p_1 \in \mathfrak{B},\ u'(t)_0 = p_2 \in \mathfrak{B}, \ldots, u^{(m-1)}(t_0) = p_m \in \mathfrak{B}. \tag{2}$$

TEOREMĂ. *Dacă funcţia* $\Phi(t, x_1, \ldots, x_n)$ *este continuă în raport cu ansamblul variabilelor* $t, x_1, \ldots, x_n$ *şi satisface condiţia Lipschitz în raport cu variabilele* $x_1, \ldots, x_n$, *atunci ecuaţia (1) cu condiţiile* (2) *are o soluţie* $u = u(t)$ *şi numai una în clasa tuturor funcţiilor de* m *ori derivabile* $x(t)$ *cu valori în* $\mathfrak{B}$.

Demonstraţie. Alături de ecuaţia (1) şi condiţiile (2), să considerăm sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\left.\begin{aligned} u_1'(t) &= u_2(t), \\ u_2'(t) &= u_3(t), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ u_{m-1}'(t) &= u_m(t), \\ u_m'(t) &= \Phi(t, u_1(t), \ldots, u_m(t)) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

cu condiţiile iniţiale

$$u_1(t_0) = p_1, \ldots, u_m(t_0) = p_m. \tag{4}$$

Sistemul (3) este un caz particular al sistemului 13.41(1) pe care îl obţinem punînd

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(t, x_1, \ldots, x_m) &= x_2, \\ \Phi_2(t, x_1, \ldots, x_m) &= x_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Phi_{m-1}(t, x_1, \ldots, x_m) &= x_m, \\ \Phi_m(t, x_1, \ldots, x_m) &= \Phi(t, x_1, \ldots, x_m). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

În cazul de faţă, toate funcţiile

$$\Phi_k(t, x_1, \ldots, x_m)\ (k = 1, \ldots, m)$$

sînt continue în raport cu ansamblul variabilelor $t, x_1, \ldots$ $\ldots, x_m$ și satisfac condiția Lipschitz în raport cu variabilele $x_1, \ldots, x_m$; aceasta este evident pentru primele $n-1$ funcții Φ_k și, prin ipoteză, pentru ultima.

În consecință, în virtutea teoremei 13.42, sistemul (3) cu condițiile (4) are o soluție $u_1(t), \ldots, u_m(t)$. Punem $u(t) = u_1(t)$. Prima ecuație a sistemului (3) arată că $u'(t) = u_2(t)$, următoarea că $u''(t) = u_2'(t) = u_3(t)$ etc.; ca de a $(m-1)$-a ecuație arată că $u^{(m-1)}(t) = u_{m-1}'(t) = u_m(t)$; în sfîrșit, ultima

$$u^{(m)}(t) = u_m'(t) = \Phi(t, u, u' \ldots, u^{(m-1)}).$$

Astfel, funcția vectorială $u(t)$ verifică ecuația (1). Deoarece condițiile (4) sînt satisfăcute, această funcție satisface condițiile (2). De aici reiese că ecuația (1) cu condițiile (2) are o soluție. Să arătăm că ea este unică. Dacă $\bar{u}(t)$ este o soluție oarecare a ecuației (1) cu condițiile (2), atunci sistemul de funcții

$$\bar{u}_1(t) = \bar{u}(t), \ \bar{u}_2(t) = \bar{u}'(t), \ldots, \bar{u}_m(t) = \bar{u}^{(m-1)}(t)$$

verifică, evident, sistemul (3) cu condițiile (4); deoarece, conform teoremei 13.42, soluția sistemului (3) cu condiția (4) este unică, avem $\bar{u}(t) = \bar{u}_1(t) = u_1(t) = u(t)$, ceea ce trebuia demonstrat.

13.52. Presupunem că există un subspațiu închis $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}$ astfel încît funcția $\Phi(t, x_1, \ldots, x_n)$ ia valori în $\mathfrak{B}_1$ oricare ar fi $t \in [a, b]$ și $x_1 \in \mathfrak{B}_1, \ldots, x_m \in \mathfrak{B}_1$.

Dacă, în plus, vectorii $p_1, \ldots, p_m$, care apar în condițiile inițiale pentru ecuația (1), aparțin și ei subspațiului $\mathfrak{B}_1$, atunci soluția corespunzătoare $u(t)$ aparține de asemenea lui $\mathfrak{B}_1$, pentru orice $t \in [a, b]$.

Într-adevăr, în condițiile formulate, toate funcțiile sistemului 13.51 (5) au valorile în $\mathfrak{B}_1$ dacă $x_1 \in \mathfrak{B}_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{B}_1$. Din $p_1 \in \mathfrak{B}_1, \ldots, p_m \in \mathfrak{B}_1$ rezultă în virtutea observației 12.53 că $u_1(t) \in \mathfrak{B}_1 \ldots u_m(t) \in \mathfrak{B}_1$ pentru orice $t \in [a, b]$. Deoarece $u_1(t) = u(t)$, ajungem la rezultatul cerut.

§ 13.6. Ecuații și sisteme liniare

13.61. Considerăm un operator liniar mărginit $A(t)$ într-un spațiu vectorial normat $\mathfrak{B}$, care depinde de un parametru t, $a \leqslant t \leqslant b$. Spunem că operatorul $A(t)$ depinde con-

tinuu de t, dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un $\delta > 0$, astfel încît $\|A(\bar{t}) - A(t)\| < \varepsilon$ de îndată ce $|\bar{t} - t| < \delta$ (aici $\| \ \|$ este norma unui operator liniar (12.71b)).

O funcție $\Phi(t, x)$ cu valori în spațiul $\mathfrak{B}$ se numește *liniară* (de gradul întîi) în raport cu variabila $x \in \mathfrak{B}$ dacă

$$\Phi(t, x) = A(t)x + b(t), \tag{1}$$

unde $A(t)$ este un operator liniar mărginit care depinde continuu de parametrul t și $b(t)$ o funcție continuă cu valori în spațiul $\mathfrak{B}$.

Să arătăm că o funcție $\Phi(t, x)$ de tipul (1) este continuă în raport cu ansamblul variabilelor t, x.

Operatorul $A(t)$ poate fi considerat ca funcție continuă de t cu valori în spațiul normat $L(\mathfrak{B})$ al tuturor operatorilor liniari mărginiți din $\mathfrak{B}$ (12.73a). O astfel de funcție este mărginită pe intervalul $a \leqslant t \leqslant b$, deci

$$\sup_{a \leqslant t \leqslant b} \|A(t)\| = A < \infty.$$

Pentru $\varepsilon > 0$, t și x dați, găsim un $\delta = \delta(\varepsilon, t, x)$ astfel încît să avem inegalitățile

$$\|x\| \, \|A(\bar{t}) - A(t)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|b(\bar{t}) - b(t)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

pentru $|\bar{t} - t| < \delta$. Atunci, pentru aceiași $\bar{t}$, t și pentru $\|\bar{x} - x\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3A}$, are loc relația

$$\|\Phi(\bar{t}, \bar{x}) - \Phi(t, x)\| = \|A(\bar{t})\bar{x} - A(\bar{t})x + A(\bar{t})x - A(t)x +$$

$$+ b(\bar{t}) - b(t)\| \leqslant \|A(\bar{t})\| \, \|\bar{x} - x\| + \|A(\bar{t}) - A(t)\| \, \|x\| +$$

$$+ \|b(\bar{t}) - b(t)\| \leqslant A \frac{\varepsilon}{3A} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

și continuitatea este stabilită.

Să arătăm acum că o funcție de tipul (1) satisface condiția Lipschitz în raport cu variabila x, cu constanta $C = A = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} \|A(t)\|$.

Într-adevăr, conform definiției normei unui operator, avem

$$\| \Phi(t, \bar{x}) - \Phi(t, x) \| = \| A(t)\bar{x} - A(t)x \| \leqslant \| A(t) \| \, \| \bar{x} - x \| \leqslant$$

$$\leqslant A \| \bar{x} - x \|,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

13.62. Aplicînd teorema 13.35 ajungem la următorul rezultat:

TEOREMĂ. *O ecuație diferențială liniară*

$$u'(t) = A(t)\, u(t) + b(t), \tag{1}$$

unde $A(t)$ *este un operator liniar mărginit în spațiul* $\mathfrak{B}$, *care depinde continuu de parametrul* $t \in [a, b]$ *și* $b(t)$ *este o funcție continuă cu valori în* $\mathfrak{B}$, *cu condiția inițială*

$$u(t_0) = u_0, \tag{2}$$

are o soluție $u = u(t)$ *și una singură care este o funcție derivabilă cu valori în* $\mathfrak{B}$.

13.63. *Sisteme de ecuații liniare.* Fie un sistem de ecuații liniare

$$\left.\begin{aligned} u_1'(t) &= A_{11}(t)\, u_1(t) + \ldots + A_{1n}(t)\, u_n(t) + b_1(t), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n'(t) &= A_{n1}(t)\, u_1(t) + \ldots + A_{nn}(t)\, u_n(t) + b_n(t), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

unde $A_{jk}(t)$ $(j, k = 1, \ldots, n)$ sînt operatori liniari mărginiți în spațiul $\mathfrak{B}$, care depind continuu de parametrul $t \in [a, b]$ și $b_1, \ldots, b_n$ funcții vectoriale continue de t cu valori în $\mathfrak{B}$. La sistemul (1) adăugăm condiția inițială

$$u_1(t_0) = p_1 \in \mathfrak{B}, \ldots, u_n(t_0) = p_n \in \mathfrak{B}, \; a \leqslant t_0 \leqslant b. \tag{2}$$

TEOREMĂ. *Sistemul* (1) *cu condiția inițială* (2) *are o soluție și una singură* $(u_1(t), \ldots, u_n(t))$ *formată din funcții vectoriale de* $t \in [a, b]$ *cu valori în* $\mathfrak{B}$.

Demonstrație. Sistemul (1) este un caz particular al sistemului considerat în 13.41 :

$$u_n'(t) = \Phi_1(t, u_1, \ldots, u_n),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_n'(t) = \Phi_n(t, u_1, \ldots, u_n).$$

Acest caz se obține, punînd

$$\Phi_k(t, x_1, \ldots, x_n) = A_{k1}(t)x_1 + \ldots + A_{kn}(t)\, x_n + b_k(t),$$

$$k = 1, \ldots, n. \qquad (3)$$

Pentru a aplica teorema 13.42, trebuie să verificăm că orice funcție (3) este continuă în raport cu ansamblul variabilelor $t, x_1, \ldots x_n$ și satisface condiția Lipschitz în raport cu argumentele $x_1, \ldots, x_n$. Dar am văzut în 13.61 că fiecare termen $A_{km}(t)\, x_m$ și $b_k(t)$ verifică aceste condiții ; la fel și suma lor (3). Aplicarea teoremei 13.42 încheie demonstrația.

13.64. Dacă pentru orice $t \in [a, b]$ operatorii $A_{jk}(j, k = 1, \ldots, n)$ aplică un subspațiu fixat $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}$ în el însuși și dacă funcțiile $b_j(t)$ pentru $t \in [a, b]$, iau valorile în acest subspațiu $\mathfrak{B}_1$, atunci oricare ar fi vectorii inițiali $p_1, \ldots, p_n$ ai subspațiului $\mathfrak{B}_1$, toate funcțiile $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ formînd soluția sistemului 13.63(1) cu condițiile 13.63(2) își au valorile de asemenea în subspațiul $\mathfrak{B}_1$.

Într-adevăr, în condițiile indicate, funcțiile

$$\Phi_j(t, x_1, \ldots, x_n) = A_{j1}(t)x_1 + \ldots + A_{jn}(t)\, x_n$$

$$j = 1, \ldots, n$$

pentru $x_1 \in \mathfrak{B}_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{B}_1$ iau valori în subspațiul $\mathfrak{B}_1$ și putem să aplicăm 13.43.

13.65. *Ecuația liniară de ordin superior.* Considerăm o ecuație liniară de ordin n

$$u^{(n)}(t) = A_1(t)\, u(t) + \ldots + A_n(t)u^{(n-1)}(t) + b(t) \qquad (1)$$

în raport cu funcţia necunoscută $u(t)$ cu valori în spaţiul $\mathfrak{B}$, cu condiţiile iniţiale

$$u(t_0) = p_1 \in \mathfrak{B}, \ldots, u^{(n-1)}(t_0) = p_n \in \mathfrak{B}. \tag{2}$$

Aici $A_k(t)$ este un operator liniar mărginit în spaţiul $\mathfrak{B}$ pentru orice $t \in [a, b]$ şi $b(t)$ este o funcţie continuă cu valori în acelaşi spaţiu.

TEOREMĂ. *Ecuaţia liniară* (1) *cu condiţiile iniţiale* (2) *are o unică soluţie* $u(t)$ *în clasa tuturor funcţiilor vectoriale de n ori derivabile cu valori în spaţiul* $\mathfrak{B}$.

Demonstraţie. Ecuaţia (1) este un caz particular al ecuaţiei considerate în 13.51 :

$$u^{(n)}(t) = \Phi(t, u, u', \ldots, u^{(n-1)}),$$

luînd

$$\Phi(t, x_1, \ldots, x_n) = A_1(t)x_1 + \ldots + A_n(t)\, x_n + b(t).$$

Am văzut în 13.63 că funcţia Φ este continuă în raport cu ansamblul variabilelor $t, x_1, \ldots, x_n$ şi satisface condiţia lui Lipschitz în raport cu $x_1, \ldots, x_n$. Prin urmare, teorema 13.51 este adevărată. Aplicînd-o se obţine rezultatul căutat.

13.66. Dacă operatorii $A_1(t), \ldots, A_n(t)$, pentru orice $t \in [a, b]$, aplică un subspaţiu fix $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}$ în el însuşi şi dacă funcţia $b(t)$ ia toate valorile în acest subspaţiu, atunci, oricare ar fi vectorii iniţiali $p_1, \ldots, p_n$ din $\mathfrak{B}_1$, soluţia $u(t)$ a ecuaţiei 13.65(1) cu condiţiile 13.65(2) aparţine, pentru orice $t \in [a, b]$, subspaţiului $\mathfrak{B}_1$.

Într-adevăr, în condiţiile indicate, ipoteza din observaţia 13.64 este satisfăcută ; aplicînd-o, obţinem, în particular, că $u_1(t) = u(t)$ aparţine lui $\mathfrak{B}_1$ pentru orice $t \in [a, b]$, ceea ce trebuia arătat.

§.13.7. Operatorul rezolvant al unei ecuaţii liniare omogene

13.71. Ecuaţia 13.62(1) cu $b(t) = 0$:

$$u'(t) = A(t)\, u(t) \tag{1}$$

se numeşte *ecuaţie liniară omogenă.*

Ecuația omogenă are o soluție evidentă $u(t) = 0$. Orice altă soluție a ecuației omogene nu se anulează pentru nici un $t \in [a, b]$, conform teoremei de unicitate 13.62.

Adunînd și înmulțind cu numere, soluții ale ecuației omogene (1), se obțin alte soluții ale aceleiași ecuații. Într-adevăr, dacă $u_1(t)$ și $u_2(t)$ sînt soluții ale ecuației (1), atunci, oricare ar fi numerele α_1 și α_2, au loc relațiile

$$(\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t))' = \alpha_1 u_1'(t) + \alpha_2 u_2'(t) =$$

$$= \alpha_1 A(t) u_1(t) + \alpha_2 (A(t)\, u_2(t) =$$

$$= A(t)[\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)],$$

deci $\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)$ este de asemenea soluție a ecuației (1). Considerăm operatorul rezolvant $\Omega_{t_0}^t$ (13.38) pentru ecuația omogenă (1). Acest operator este liniar, adică, oricare ar fi doi vectori u_1, u_2 și două numere α_1, α_2, avem

$$\Omega_{t_0}^t[\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2] = \alpha_1 \Omega_{t_0}^t(u_1) + \alpha_2 \Omega_{t_0}^t(u_2).$$

Într-adevăr, membrul secund considerat ca funcție de t este o combinație liniară de soluții ale ecuației (1) a cărei valoare pentru $t = t_0$ este $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$. După cum am văzut, aceasta este o soluție a ecuației (1). Primul membru, conform însăși definiției, este soluția ecuației (1), care este egală cu $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ pentru $t = t_0$. În virtutea teoremei de unicitate, aceste soluții coincid pentru orice $t \in [a, b]$, ceea ce trebuia dovedit.

Deci, pentru ecuația liniară omogenă (1), operatorul rezolvant $\Omega_{t_0}^t$ este un operator liniar. Reamintim, folosind 13.38, că el este continuu și inversabil. În cele ce urmează, vom scrie $\Omega_t^s u$ în loc de $\Omega_s^t(u)$.

13.72. Studiem acum structura operatorului rezolvant al ecuației omogene 13.71(1) în spațiul n-dimensional $\mathbb{R}_n$ al vectorilor $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Alegem în spațiul $\mathbb{R}_n$, n vectori oarecare liniar independenți $f_1, \ldots, f_n$. Atunci, ecuației vectoriale 13.71(1) în raport cu funcția vectorială necunoscută $u(t) = \Sigma u_k(t) f_k$,

îi corespunde sistemul de ecuații scalare

$$\left.\begin{aligned} u_1'(t) &= a_{11}(t)u_1(t) + \ldots + a_{1n}(t)u_n(t), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n'(t) &= a_{n1}(t)u_1(t) + \ldots + a_{nn}(t)\,u_n(t) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Operatorului rezolvant $\Omega_{t_0}^t$ putem să facem să-i corespundă, conform regulilor generale 12.17a, matricea a cărei cea de a k-a coloană este formată din coordonatele vectorului $\Omega_{t_0}^t f_k (k = 1, \ldots, n)$. În alți termeni, operatorului rezolvant $\Omega_{t_0}^t$, îi corespunde matricea

$$W_{t_0}^t = \begin{Vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) \ldots f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) \ldots f_{2n}(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) \ldots f_{nn}(t) \end{Vmatrix}, \qquad (2)$$

unde $f_{1k}(t), \ldots, f_{nk}(t)$ sînt coordonatele soluției $f_k(t)$ a cărei valoare pentru $t = t_0$ este vectorul f_k. Matricea (2) se numește *matricea lui Wronski* a sistemului (1) și determinantul său este *determinantul lui Wronski* sau *wronskianul* sistemului (1). Pentru o matrice constantă $A = \|a_{jk}\|$ am scris matricea lui Wronski în 13.15.

Operatorul $\Omega_{t_0}^t$ fiind inversabil, matricea (2) este nesingulară pentru orice $t \in [a, b]$ și determinantul lui Wronski nu se anulează pentru nici un $t \in [a, b]$; astfel, soluțiile $f_1(t), \ldots, f_n(t)$, care sînt liniar independente pentru $t = t_0$, rămîn la fel pentru orice $t \in [a, b]$.

Soluția ecuației 13.71(1) cu vectorul inițial oarecare (pentru $t = t_0$) $u = \sum_{k=1}^{n} u_k f_k$ este construită după formula generală

$$u(t) = \Omega_{t_0}^t u = \Omega_{t_0}^t \sum_{k=1}^{n} u_k f_k = \sum_{k=1}^{n} u_k \Omega_{t_0}^t f_k;$$

prin urmare, orice soluție a sistemului (1) este o combinație liniară de n soluții particulare $f_1(t), \ldots, f_n(t)$.

Vedem că în cazul de față spațiul tuturor soluțiilor sistemului (1) este de dimensiune n și că funcțiile vectoriale $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ constituie o bază pentru acesta. Mulțimea funcțiilor vectoriale $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ se numește *sistem fundamental de soluții al sistemului* (1).

13.73. *Calculul determinantului lui Wronski.* Determinantul lui Wronski

$$[f_1(t), \ldots, f_n(t)] = \begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) \ldots f_{1n}(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) \ldots f_{nn}(t) \end{vmatrix} \quad (1)$$

poate fi numit, prin analogie cu algebra vectorială, „produs mixt" al vectorilor $f_1(t), \ldots, f_n(t)$. El are ca elemente funcțiile derivabile $f_{jk}(t)$, deci este el însuși derivabil. Derivîndu-l, conform regulei 7.14f, se găsește

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f_1(t), \ldots, f_n(t)] = [f_1'(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)] +$$

$$+ [f_1(t), f_2'(t), \ldots, f_n(t)] + \ldots + [f_1(t), \ldots, f_n'(t)] =$$

$$= [A(t)f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)] + [f_1(t), A(t)f_2(t), \ldots$$

$$\ldots, f_n(t)] + \ldots + [f_1(t), f_2(t), \ldots, A(t)f_n(t)].$$

În cel de al k-lea termen al sumei găsite, singura componentă a vectorului $A(t)f_k(t)$ care are importanță este cea după vectorul $f_k(t)$, deoarece orice altă componentă conduce la un determinant ce are două coloane identice, deci nul. Componenta menționată este $a_{kk}(t)f_k(t)$. În final, avem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f_1(t), \ldots, f_n(t)] = (a_{11}(t) + \ldots + a_{nn}(t))[f_1(t), \ldots, f_n(t)]. \quad (2)$$

Mărimea $\mathrm{tr}\, A(t) = a_{11}(t) + \ldots + a_{nn}(t)$ este *urma* matricii $A(t)$. Integrînd ecuația (2) găsim

$$[f_1(t), \ldots, f_n(t)] = [f_1(t_0), \ldots, f_n(t_0)]\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}\, A(\tau)\, \mathrm{d}\tau}. \quad (3)$$

Amintim că mărimea $\mathrm{tr}\, A(t)$ nu depinde de alegerea bazei $f_1, \ldots, f_n$ (vezi, de exemplu, [40; 5.53]).

13.74. *Ecuația de ordinul n.* Am văzut în 13.51 că ecuația

$$y^{(n)}(t) = a_n(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)y(t) + b(t) \quad (1)$$

este echivalentă cu sistemul

$$\left.\begin{aligned} u_1'(t) &= u_2(t), \\ u_2'(t) &= u_3(t), \\ &\cdots\cdots \\ u_n'(t) &= a_1(t)u_1(t) + a_2(t)\,u_2(t) + \ldots + a_n(t)\,u_n(t) + \\ &\qquad + b(t) \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

unde

$$u_1(t) = y(t),\ u_2(t) = y'(t),\ \ldots,\ u_n(t) = y^{(n-1)}(t).$$

Astfel, un vector soluție $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ corespunde unei colecții $y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)$. Conform cu 13.72, orice soluție $w(t)$ a ecuației omogene

$$w^{(n)}(t) = a_n(t)w^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)w_1(t) \tag{3}$$

poate fi pusă, într-un mod univoc, sub forma

$$w(t) = C_1w_1(t) + \ldots + C_nw_n(t),$$

unde $w_1(t), \ldots, w_n(t)$ este soluția corespunzătoare unei matrici nesingulare de date inițiale

$$\begin{Vmatrix} w_1(t_0) & \ldots & w_n(t_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ w_1^{(n-1)}(t_0) & \ldots & w_n^{(n-1)}(t_0) \end{Vmatrix} = W[w_1(t_0), \ldots, w_n(t_0)].$$

Matricea soluțiilor (matricea lui Wronski)

$$\begin{Vmatrix} w_1(t) & \ldots & w_n(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ w_1^{(n-1)}(t) & \ldots & w_n^{(n-1)}(t) \end{Vmatrix} = W[w_1(t), \ldots, w_n(t)]$$

rămîne atunci nesingulară pentru orice $t \in [a, b]$. Determinantul său, conform formulei 13.73(3) și ținînd cont de forma particulară a matricii sistemului (2), este

$$\det W[w_1(t), \ldots, w_n(t)] = \det W[w_1(t_0), \ldots, w_n(t_0)]\,e^{\int_{t_0}^{t} a_n(\tau)\,d\tau}.$$

§ 13.8. Rezolvarea unei ecuații liniare neomogene

13.81. Ecuația

$$u'(t) = A(t)\,u(t) + b(t) \tag{1}$$

cu $b(t) \not\equiv 0$ se numește *ecuație liniară neomogenă*. Diferența $v_1(t) - v_2(t)$ a două soluții $v_1(t)$ și $v_2(t)$ ale unei ecuații neomogene este, evident, o soluție a ecuației omogene corespunzătoare. Prin urmare, fiind dată o soluție particulară $v_1(t)$ a ecuației neomogene (cea, de exemplu, care se anulează pentru $t = t_0$) și cunoscînd operatorul $\Omega_{t_0}^t$, se poate obține orice soluție a ecuației neomogene (cea, de exemplu, care este v_0 pentru $t = t_0$) cu ajutorul formulei

$$v(t) = v_1(t) + \Omega_{t_0}^t v_0.$$

Fiind dat operatorul $\Omega_{t_0}^t$, soluția $v_1(t)$ poate fi construită prin metoda „variației constantei". Anume, căutăm $v_1(t)$ sub forma

$$v_1(t) = \Omega_{t_0}^t C(t), \tag{2}$$

unde $C(t)$ este un vector variabil necunoscut (dacă el nu depinde de t, am avea o soluție a ecuației omogene, ceea ce explică denumirea metodei). Pentru a obține $v_1(t_0) = 0$, vom construi vectorul $C(t)$ astfel încît $C(t_0) = 0$.

În virtutea lui 13.38e și a lemei 13.13, avem

$$v_1'(t) = (\Omega_{t_0}^t)'\ C(t) + \Omega_{t_0}^t C'(t) = A(t)\,\Omega_{t_0}^t C(t) + \Omega_{t_0}^t C'(t). \tag{3}$$

Pe de altă parte,

$$A(t)v_1(t) + b(t) = A(t)\,\Omega_{t_0}^t C(t) + b(t). \tag{4}$$

Egalînd membrii secunzi ai lui (3) și (4), găsim

$$\Omega_{t_0}^t C'(t) = b(t). \tag{5}$$

Aplicînd celor doi membri ai egalității operatorul $\Omega_t^{t_0}$ invers al lui $\Omega_{t_0}^t$ (13.38d), obținem

$$C'(t) = \Omega_t^{t_0} b(t),$$

de unde

$$C(t)=\int_{t_0}^{t}\Omega_\tau^{t_0}b(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,;$$

s-a considerat doar vectorul nul pentru $t = t_0$.

În final, ajungem la formula

$$v(t)=\Omega_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}\Omega_\tau^{t_0}b(\tau)\,\mathrm{d}\tau+\Omega_{t_0}^{t}v_0=\Omega_{t_0}^{t}v_0+\int_{t_0}^{t}\Omega_\tau^{t}b(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \qquad (6)$$

Corectitudinea sa poate fi verificată acum direct folosind regula de derivare 9.86b (care se extinde uşor la funcţii vectoriale).

13.82. Dacă $\mathfrak{B}=\mathbb{R}_1$ şi $A(t)$ este o funcţie numerică, avem (13.12):

$$\Omega_{t_0}^{t}=\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}A(\tau)\,\mathrm{d}\tau}$$

prin urmare

$$v(t)=\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}A(\tau)\,\mathrm{d}\tau}v_0+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\int_{\tau}^{t}A(\theta)\,\mathrm{d}\theta}b(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \qquad (1)$$

În particular, pentru $A(t)$ constantă, $A(t) = A$, avem formula

$$v(t)=\mathrm{e}^{(t-t_0)A}v_0+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{(t-\tau)A}b(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \qquad (2)$$

13.83. Formulele 13.81(6) şi 13.82(1) sînt de asemenea adevărate în cazul general cînd $u(t)$ este o funcţie vectorială cu valori într-un spaţiu normat $\mathfrak{B}$ şi $A(t)$ un operator liniar în $\mathfrak{B}$. Simbolurile ce apar în aceste formule trebuie considerate în sensul 13.13 şi 13.19, respectiv pentru $A(t) = A$ constant şi $A(t)$ variabil.

În particular, dacă operatorul $A(t) = A$ nu depinde de t și dacă funcția $b(t)$ are forma particulară

$$b(t) = \sum_{k=1}^{m} P_k(t)\, e^{Q_k t} b_k,$$

unde $P_k(t)$ este un polinom, Q_k un operator constant care comută cu operatorul A, b_k vectori fixați ai spațiului $\mathfrak{B}$, atunci integrala 13.82(2) poate fi calculată explicit. În cazul de față structura rezultatului poate fi prevăzută, pînă la coeficienți nedeterminați; de aceea se poate căuta soluția prin metoda coeficienților nedeterminați.

13.84. Considerăm cazul spațiului n-dimensional $\mathfrak{B} = \mathbb{R}_n$. Aici operatorul rezolvant $\Omega^t_{t_0}$ este dat de matricea lui Wronski 13.72 :

$$\Omega^t_{t_0} = \begin{Vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \dots & f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \dots & f_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \dots & f_{nn}(t) \end{Vmatrix}.$$

Se caută soluția de forma 13.81(2); în cazul considerat se poate scrie

$$v_{1j}(t) = \sum_{k=1}^{n} f_{jk}(t) C_k(t),$$

unde $C_1(t), \dots, C_n(t)$ sînt funcții care trebuie determinate. Ecuația 13.81(5) ia forma sistemului

$$\sum_{k=1}^{n} f_{jk}(t) C'_k(t) = b_k(t).$$

Rezolvînd în raport cu $C'_k(t)$ și integrînd apoi de la t_0 la t, vom găsi funcțiile căutate $C_k(t)$.

13.85. Considerăm ecuația de ordinul n

$$y^{(n)}(t) = a_n(t) y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t) y(t) + b(t).$$

Operatorul rezolvant al sistemului echivalent

$$\begin{aligned} u'_1(t) &= u_2(t), \\ u'_2(t) &= u_3(t), \\ &\dots\dots\dots\dots \\ u'_n(t) &= a_1(t) u_1(t) + \dots + a_n(t)\, u_n(t), \end{aligned}$$

unde $u_1(t) = y(t)$, $u_2(t) = y'(t)$, ..., $u_n(t) = y^{(n-1)}(t)$, are forma (13.74)

$$\Omega_{t_0}^{t} = \begin{Vmatrix} w_1(t) & \dots & w_n(t) \\ w_1'(t) & \dots & w_n'(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ w_1^{(n-1)}(t) & \dots & w_n^{(n-1)}(t) \end{Vmatrix},$$

$w_1(t), \dots, w_n(t)$ fiind soluțiile asociate unei matrici nesingulare a datelor inițiale. Soluția este căutată sub forma 13.81(2), adică avem (pentru prima linie)

$$v(t) = \sum_{k=1}^{n} w_k(t) C_k(t).$$

Ecuațiile 13.81(5) au în cazul de față următoarea formă :

$$\sum_{k=1}^{n} w_k(t) C_k'(t) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} w_k'(t) C_k'(t) = 0,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\sum_{k=1}^{n} w_k^{(n-1)}(t) C_k'(t) = b(t).$$

Rezolvîndu-le în raport cu $C_k'(t)$ și, integrînd de la t_0 la t, găsim funcțiile $C_k(t)$, deci soluția căutată $v(t)$.

EXERCIȚII

1. Avem două soluții diferite $y = 0$ și $y = x^3$ ale unei aceleiași ecuații diferențiale $\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3}$, cu aceeași condiție inițială $y(0) = 0$. Acest fapt nu contrazice teorema de unicitate 13.35 ?

2. Un punct material P se mișcă fără frecare în lungul unei curbe. Care trebuie să fie curba pentru ca proiecția punctului P : (a) pe o axă orizontală ; (b) pe o axă verticală, să se deplaseze uniform ?

3. Se cunoaște o soluție particulară $u_1(t)$ a unei ecuații liniare de ordinul al doilea, $u''(t) + a(t)u'(t) + b(t)u(t) = 0$. Cum se găsește o altă soluție, liniar independentă de prima ?

4. Conform cu 13.17, o ecuație liniară de ordinul n cu coeficienți constanți este echivalentă cu un sistem de ordinul întîi a cărui matrice are polinomul minimal de gradul n. Arătați că orice sistem de n ecuații de ordinul întîi cu această proprietate este echivalent cu o ecuație de ordinul n.

5. Fie $u'(t) = A(t)u(t)$ o ecuație vectorială ($u(t) \in \mathbb{R}_n$) și $A(t)$ un operator periodic de perioadă T (adică $A(t+T) = A(t)$). Să se arate că $\Omega_0^{t+T} = C\,\Omega_0^t$, unde C este un operator constant.

6. Se dau $n \leqslant N$ funcții vectoriale liniar independente $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ cu valori în spațiul $\mathbb{R}_n$ și derivabile pentru orice $t \in [a, b]$. Să se arate că există o ecuație $u'(t) = A(t)u(t)$ cu un operator continuu $A(t)$ în $\mathbb{R}_N$ avînd aceste funcții vectoriale ca soluții.

7. Fie n funcții scalare liniar independente $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ care sînt de n ori derivabile. Se poate ca determinantul lor Wronski să fie identic nul?

8. Fie n funcții scalare liniar independente $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ care sînt de n ori derivabile și al căror wronskian este nenul. Să se construiască o ecuație de ordinul n cu soluțiile $y_1(t), \ldots, y_n(t)$.

9. Dacă funcțiile $A(t)$ și $b(t)$ au derivate continui pînă la ordinul m inclusiv, atunci orice soluție a ecuației liniare

$$u'(t) = A(t)u(t) + b(t)$$

are derivate continui, pînă la ordinul $m+1$ inclusiv.

10. Dacă $y(0) = 0$ și inegalitatea $y'(t) - ky(t) \leqslant \varphi(t)$ are loc pentru $0 \leqslant t \leqslant T$, atunci inegalitatea

$$y(t) \leqslant \int_0^t e^{-k(t-s)}\varphi(s)\,ds$$

are loc și ea pentru $0 \leqslant t \leqslant T$.

11. (Continuare). Dacă inegalitatea

$$w(t) \leqslant \varphi(t) + k\int_0^t w(s)\,ds$$

are loc pentru $0 \leqslant t \leqslant T$, atunci are loc și inegalitatea

$$w(t) \leqslant \varphi(t) + k\int_0^t \varphi(s)\,e^{k(t-s)}\,ds.$$

12. (Continuare). Se spune că o funcție $y(t) \in X$ pe $[0, T]$ este o soluție ε-aproximativă a ecuației $u'(t) = f(t, u)$ dacă

$$\| y'(t) - f(t, y(t)) \| \leqslant \varepsilon$$

pe $[0, T]$. Arătați că pentru orice soluție $u(t)$ și pentru orice soluție ε-aproximativă, $y(t)$, are loc inegalitatea

$$\|u(t) - y(t)\| \leqslant \|u(0) + v(0)\|\,e^{kt} + \frac{\varepsilon}{k}\,[e^{kt} - 1],$$

unde k este constanta din condiția Lipschitz pentru funcția $f(t, u)$.

13. (Continuare). Considerăm ecuația

$$u'(t) = A(t)u(t),\ u(0) = u_0,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \qquad (1),$$

cu un operator continuu dat $A(t)$. Fie

$$\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T\}.$$

Definim o funcție vectorială continuă $y_\Pi(t)$ astfel:

$y_\Pi(0) = y_0$;

$y_\Pi(t_{k+1}) = y_\Pi(t_k) + A(t_k)y_\Pi(t_k)\Delta t_k\ (k = 0,1,\ldots, n-1)$;

$y_\Pi(t)$ este de gradul întîi pentru $t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Pentru un $\varepsilon > 0$ dat, să se construiască o partiție Π astfel încît funcția $y_\Pi(t)$ să devină o soluție ε-aproximativă a ecuației (1).

14. (Continuare). Să se arate că o soluție a ecuației (1) (exerc. 13) este dată de expresia

$$u(T) = \lim_{d(\Pi)\to 0} y_\Pi(T) = \lim_{d(\Pi)\to 0} \left\{ \prod_{k=n-1}^{0} (E + A(t_k)\Delta t_k) \right\} u_0$$

(ordinea factorilor este esențială!)

15. În condițiile exercițiului 13, să se definească o funcție vectorială nu $z_\Pi(t)$ după regula

$$z_\Pi(0) = y_0;$$

$$z_\Pi(t_{k+1}) = \left\{ \prod_{j=k}^{0} e^{A(t_j)\Delta t_j} \right\} y_0,\ (k = 0,1,\ldots, n-1);$$

$$z_\Pi(t) = e^{A(t_k)(t-t_k)} z_\Pi(t_k),\ (t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}).$$

Pentru un $\varepsilon > 0$ dat, să se construiască o partiție Π astfel încît funcția $z_\Pi(t)$ să devină o soluție ε-aproximativă a ecuației (1).

16. Să se arate că o soluție a ecuației (1) (exerc. 13) este dată de expresia

$$u(T) = \lim_{d(\Pi)\to 0} z_\Pi(T) = \lim_{d(\Pi)\to 0} \left\{ \prod_{j=n-1}^{0} e^{A(t_j)\Delta t_j} \right\} u_0$$

(ordinea factorilor este esențială!).

NOTĂ ISTORICĂ

Anumite ecuații diferențiale au apărut în matematică încă din momentul descoperirii calculului diferențial și integral, adică după lucrările lui Newton și Leibniz. Leibniz a integrat în 1693 ecuația liniară omogenă de ordinul întîi. Soluția unei ecuații liniare, omogene sau nu, de ordinul n cu coeficienți constanți a fost găsită de Euler (1739). Metoda variației

constantei a fost elaborată de Lagrange (1775); de altfel, Euler a rezolvat diverse probleme prin această metodă, începînd din 1739.

În secolul al XVIII-lea teoria ecuațiilor diferențiale a determinat progrese decisive în mecanica clasică și cerească, în teoria marcelor, meteorologie și alte domenii ale fizicii.

Succesul teoriei ecuațiilor diferențiale condiționează concluzia filozofică asupra caracterului ei universal care este denumit „principiul determinismului mecanic" și care este exprimat în motto-ul capitolului de față. Punînd în relief triumful final al rațiunii umane, această concluzie a jucat, în acea epocă, un rol important în eliberarea științei de sub influențele teologice și scolastice.

Totuși, succesele fizicii secolului al XX-lea au dovedit limitele determinismului mecanic, care, păstrînd valoarea sa pentru problemele mecanice, cedează locul său în domeniile superioare ale fizicii, determinismului statistic.

Wronski, matematician și filozof polonez, a introdus determinantul care îi poartă numele în 1812.

Punerea problemei generale a existenței și unicității soluției unei ecuații diferențiale a fost opera secolului al XIX-lea. Prima demonstrație a existenței soluției a fost dată de Cauchy (1844); apoi Lipschitz a simplificat-o în mod esențial și a formulat condiția care îi poartă numele. Metoda aproximațiilor succesive a fost propusă de Picard (1890); această metodă a fost pusă sub formă abstractă pentru un spațiu metric, prin utilizarea explicită a unui operator de contracție, de către Banach în 1922.

Capitolul 14

DEZVOLTĂRI ORTOGONALE

Teorema lui Fourier reprezintă nu numai unul din cele mai frumoase rezultate ale analizei moderne, dar şi un instrument indispensabil pentru studiul aproape al tuturor problemelor fizicii moderne.

W. Thomson, P. G. Tait
Filozofia naturală (1867)

§ 14.1. Dezvoltări ortogonale într-un spaţiu Hilbert

14.11. *Punerea problemei.* În § 12.5 ne-am ocupat de aproximări uniforme în spaţiul $C(Q)$ al tuturor funcţiilor continue, adică de aproximări în raport cu norma

$$\|f\|_C = \max_x |f(x)|. \tag{1}$$

În multe probleme de analiză este important să considerăm aproximări în sensul mediei, adică în raport cu norma

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_Q |f(x)|^p \, dx}, \tag{2}$$

şi în primul rînd aproximările în sensul mediei pătratice, corespunzătoare normei

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_Q |f(x)|^2 \, dx}. \tag{3}$$

În capitolul de faţă vom înţelege prin Q un interval închis al axei reale.

Se pune problema : care sînt condiţiile ce trebuie impuse unui sistem (liniar) dat $B(Q)$ de funcţii $\varphi(x)$ pentru ca, oricare ar fi funcţia $f(x)$ (continuă sau cel puţin continuă pe porţiuni, ceea ce garantează existenţa integralelor necesare), să putem indica un şir $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... de funcţii din $B(Q)$

astfel încît

$$\|f - \varphi_n\|_2 = \sqrt{\int_Q |f(x) - \varphi_n(x)|^2 \, dx} \to 0$$

cînd $n \to \infty$?

Dacă un şir $\varphi_n(x)$ converge uniform către $f(x)$, atunci relaţia (4) este evident adevărată. Dar din relaţia (4) nu rezultă convergenţa uniformă, nici măcar convergenţa simplă. Se poate spune deci că problema aproximărilor în sensul mediei pătratice este „mai slabă" decît cea a aproximărilor uniforme. În plus, construcţia aproximărilor în medie pătratică poate fi pusă sub o formă geometrică datorită faptului că spaţiul corespunzător de funcţii cu norma (3) este un spaţiu hilbertian unde putem să măsurăm nu numai lungimile vectorilor ca într-un spaţiu normat, dar şi să folosim proprietatea de ortogonalitate.

14.12. *Aproximări într-un spaţiu Hilbert.* Fie H un spaţiu Hilbert real sau complex. Fie $B \subset H$ subspaţiul n-dimensional generat de un sistem ortonormat $e_1, \ldots, e_n$ (astfel încît $(e_j, e_k) = 1$ pentru $j = k$ şi $(e_j, e_k) = 0$ pentru $j \neq k$). Se pune următoarea problemă: *pentru un vector* $f \in H$ *dat, să găsim un vector* $y = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \in B$, *astfel încît mărimea* $\|f - y\|$ *să fie cît mai mică posibilă.* Pentru rezolvarea acestei probleme, presupunem că spaţiul H este complex; în cazul real, nu avem decît să simplificăm puţin notaţia. Pentru orice $x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$ avem

$$\|f - x\|^2 = \left(f - \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k, \; f - \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k\right) =$$

$$= (f, f) - \sum_{k=1}^{n} \xi_k \overline{(f, e_k)} - \sum_{k=1}^{n} \overline{\xi}_k (f, e_k) + \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2 =$$

$$= (f, f) + \sum_{k=1}^{n} [|(f, e_k)|^2 - \xi_k \overline{(f, e_k)} -$$

$$- \overline{\xi}_k (f, e_k) + |\xi_k|^2] - \sum_{k=1}^{n} |(f, e_k)|^2 =$$

$$=(f, f) + \sum_{k=1}^{n} [(f, e_k) - \xi_k][\overline{(f, e_k) - \xi_k}] - \sum_{k=1}^{n} |(f, e_k)|^2 =$$

$$=(f, f) + \sum_{k=1}^{n} |(f, e_k) - \xi_k|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(f, e_k)|^2. \qquad (1)$$

Este evident că expresia obţinută este minimă dacă $\xi_k = (f, e_k)$ $(k = 1, \ldots, n)$. Vectorul $y = \sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k$ se numeşte *proiecţia* vectorului f pe subspaţiul B, vectorul $f - y = h$ fiind perpendiculara coborîtă din extremitatea vectorului f pe subspaţiul B; în cazul real, aceste definiţii sînt în concordanţă cu noţiunile geometrice corespunzătoare (fig. 14.1). Se vede din (1) că pătratul lungimii vectorului h este

$$\| h\|^2 = (f, f) - \sum_{k=1}^{n} |(f, e_k)|^2.$$

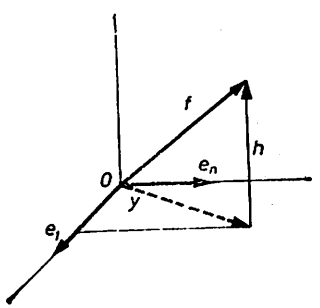


Fig. 14.1

De aici rezultă, în particular, inegalitatea lui Bessel

$$\sum_{k=1}^{n} |(f, e_k)|^2 \leqslant \| f\|^2, \qquad (2)$$

care este valabilă pentru orice vector $f \in H$ şi orice sistem ortonormat $e_1, \ldots, e_n$.

Astfel, cea mai bună aproximație „hilbertiană" a vectorului f, prin vectori ai subspațiului B, este obținută cînd se alege pentru vectorul aproximant y proiecția vectorului f pe subspațiul B.

14.13. Fie acum un sistem ortonormat infinit $e_1, e_2, \ldots$ $\ldots e_n, \ldots$ Se poate efectua construcția descrisă mai sus pentru orice familie finită $e_1, \ldots, e_n$, obținînd cea mai bună aproximație hilbertiană corespunzătoare $y_n = \sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k$. Coeficienții (f, e_k) ai celei mai bune aproximări nu depind de numărul $n \geqslant k$. Însăși distanța h_n de la y_n la f este egală, după cum am văzut, cu

$$\| h_n \| = \sqrt{(f,f) - \sum_{k=1}^{n} |(f, e_k)|^2}. \qquad (1)$$

Se pune întrebarea : se poate face mărimea $\| h_n \|$ oricît de mică dorim, alegînd n suficient de mare? Aceasta nu se poate în cazul general : de exemplu, dacă un sistem $e_1, e_2, \ldots$ „nu este complet", adică dacă există un vector f nenul și ortogonal tuturor vectorilor $e_1, e_2, \ldots$, atunci toate numerele (f, e_k) sînt nule și toate numerele $\| h_n \|$ sînt egale cu $\| f \|$.

14.14. a. Totuși în anumite condiții se poate afirma că numerele $\| h_n \|$ tind la zero cînd $n \to \infty$. Anume, aceasta va avea loc dacă, plecînd de la anumite considerații (de exemplu, din teoreme de tip Stone (12.52) pentru anumite spații funcționale) este cunoscut că se poate alege dintre combinațiile liniare ale vectorilor $e_1, e_2, \ldots$ un șir convergent (în raport cu norma hilbertiană) către vectorul f. Într-adevăr, dacă pentru o combinație liniară $\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$ are loc inegalitatea $\| f - \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \| \leqslant \varepsilon$, atunci pentru cea mai bună aproximare hilbertiană $\sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k$ are loc

$$\| h_n \| = \sqrt{\| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(f, e_k)|^2} = \| f - \sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k \| \leqslant \varepsilon. \qquad (1)$$

b. În ipoteza din punctul a, trecînd la limita pentru $\varepsilon \to 0$, se obţine egalitatea

$$f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (f, e_k)e_k = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k)\, e_k. \tag{2}$$

Seria din ultimul membru se numeşte *seria Fourier a vectorului f după sistemul ortonormat $e_1, e_2, \ldots$* Numerele (f, e_k) se numesc *coeficienţii Fourier ai vectorului f după sistemul e_k*. Aceşti termeni rămîn valabili independent de convergenţa sau divergenţa seriei; în cazul divergenţei considerăm seria Fourier, pentru moment, în mod formal.

c. În cazul convergenţei seriei (2) către vectorul f, trecînd la limită în (1), are loc relaţia

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(f, e_k)|^2. \tag{3}$$

Această egalitate, care reprezintă un analog al teoremei lui Pitagora pentru cazul dimensiunii infinite, se numeşte *egalitatea lui Parseval*. Dacă nu putem spune nimic despre convergenţa seriei Fourier către vectorul f, are loc totdeauna inegalitatea

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f, e_k)|^2 \leqslant \|f\|^2, \tag{4}$$

care se deduce prin trecere la limită în inegalitatea lui Bessel 14.12(2) şi care se numeşte şi ea *inegalitatea lui Bessel*.

d. Să facem, în fine, observaţia că dacă seria Fourier a unui vector f converge către f,

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k)e_k,$$

atunci acest lucru se va întîmpla şi după o permutare oarecare a termenilor, punînd termenul de rang n_k pe locul k $(k = 1, 2, \ldots)$:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_{n_k})e_{n_k}.$$

Într-adevăr, conform (1) avem

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N} (f, e_{n_k})e_{n_k} \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{N} |(f, e_{n_k})|^2$$

ultima cantitate tinzînd către zero cînd $N \to \infty$, conform (3) şi posibilităţii de a permuta termenii într-o serie convergentă cu termeni pozitivi (6.36).

14.15. Seria Fourier apare în mod necesar în probleme de aproximări, deoarece are loc următoarea proprietate :

LEMĂ. *Presupunem că pentru un vector $f \in H$ şi un sistem ortormat $\{e_k\}$ din H are loc dezvoltarea*

$$f = \sum_1^\infty c_k e_k, \tag{1}$$

în sensul că

$$\lim_{p\to\infty} \left\| f - \sum_{k=1}^{n_p} c_k e_k \right\| = 0$$

pentru cel puţin un şir $n_1 < n_2 < \ldots < n_p < \ldots$ Atunci orice coeficient c_m este egal cu coeficientul Fourier corespunzător (f, e_m) $(m = 1, 2, \ldots)$ şi seria (1) converge în normă în sensul uzual.

Demonstraţie. Înmulţind relaţia (1) scalar cu e_m şi folosind continuitatea produsului scalar (12.43 b) şi faptul că sistemul $\{e_k\}$ este ortonormat, se obţine

$$(f, e_m) = \left(\lim_{p\to\infty} \sum_1^{n_p} c_k e_k,\ e_m\right) = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_1^{n_p} c_k e_k,\ e_m\right) = c_m,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

14.16. LEMĂ. *Fie*

$$f = \sum_1^\infty a_k e_k, \quad g = \sum_1^\infty b_k e_k,$$

două dezvoltări (în acelaşi sens ca în 14.15), $\{e_k\}$ fiind un sistem ortonormat, atunci seria $\sum_1^\infty a_k b_k$ converge absolut şi, în plus,

$$\sum_1^\infty a_k b_k = (f, g). \tag{1}$$

Demonstrație. Convergența absolută a seriei din primul membru al relației (1) reiese din inegalitatea

$$|a_k b_k| \leqslant \frac{1}{2}(a_k^2 + b_k^2),$$

în virtutea lui 14.14(4). Apoi, dacă

$$f = \lim_{p\to\infty} \sum_1^{m_p} a_k e_k, \quad g = \lim_{p\to\infty} \sum_1^{n_p} b_k e_k$$

în norma spațiului H și $l_p = \min(m_p, n_p)$; atunci, în virtutea continuității produsului scalar, are loc relația

$$(f, g) = \left(\lim_{p\to\infty} \sum_1^{m_p} a_k e_k, \lim_{p\to\infty} \sum_1^{n_p} b_k e_k\right) = \lim_{p\to\infty} \sum_1^{l_p} a_k b_k = \sum_1^{\infty} a_k b_k.$$

14.17. Vom scrie, pentru a le utiliza mai tîrziu, seria Fourier și egalitatea lui Parseval pentru un sistem ortogonal, dar nu normat, de vectori $g_1, g_2, \ldots$ Dacă pentru orice n, vectorul g_n este nenul, atunci sistemul $e_n = g_n/\|g_n\|$ este ortonormat. Seria Fourier a unui vector f după sistemul e_n poate fi scrisă sub forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k)e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(f, \frac{g_k}{\|g_k\|}\right)\frac{g_k}{\|g_k\|} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, g_k)}{\|g_k\|^2} g_k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k g_k, \tag{1}$$

unde

$$\alpha_k = \frac{(f, g_k)}{\|g_k\|^2}. \tag{2}$$

Seria din ultimul membru al egalității (1) se numește *seria Fourier a vectorului f după sistemul g_n*, numerele α_k sînt *coeficienții Fourier ai vectorului f după sistemul g_n*. Dacă seria (1) converge către f, atunci

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(f, e_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\left(f, \frac{g_k}{\|g_k\|}\right)\right|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|(f, g_k)|^2}{\|g_k\|^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|^2 \alpha_k^2,$$

ceea ce reprezintă egalitatea lui Parseval pentru sistemul g_k. Egalitatea 14.16(1) devine

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k \|g_k\|^2, \qquad (3)$$

presupunînd că

$$f = \sum_{1}^{\infty} \alpha_k g_k, \quad g = \sum_{1}^{\infty} \beta_k g_k.$$

§ 14.2. Serii Fourier clasice

14.21. În spaţiul hilbertian real $H_{\mathbb{R}}[-\pi, \pi]$ (12.48 d) al funcţiilor $f(t)$ continue pe porţiuni pe intervalul $[-\pi, \pi]$ sau, ceea ce revine la acelaşi lucru, pe cercul $Q = \{(x, y) : x = \cos t, \ y = \sin t\}$, considerăm sistemul ortogonal infinit

$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots, \cos nt, \sin nt, \ldots \qquad (1)$$

Ortogonalitatea acestui sistem este imediată, calculînd integralele din funcţiile $\cos kt \cdot \cos mt$, $\cos kt \cdot \sin mt$, $\sin kt \cdot \sin mt$ pe intervalul $[-\pi, \pi]$.

Pentru a norma sistemul să observăm că

$$\|1\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 \, dt = 2\pi$$

şi, conform cu 9.55 c,

$$\|\cos kt\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kt \, dt = \pi,$$

$$\|\sin kt\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kt \, dt = \pi.$$

Prin urmare, fiind dată o funcţie $f(t) \in H_{\mathbb{R}}[-\pi, \pi]$, seria Fourier 14.17(1) se scrie în modul următor :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \cos t \cdot \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\cos\tau\,\mathrm{d}\tau + \\ + \sin t \cdot \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\sin\tau\,\mathrm{d}\tau + \ldots = \\ = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt), \qquad (2)$$

unde

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\cos n\tau\,\mathrm{d}\tau, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\sin n\tau\,\mathrm{d}\tau \ (n = 0, 1, 2, \ldots). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Numerele a_n şi b_n se numesc *coeficienţii Fourier ai funcţiei f în raport cu sistemul* (1) *de funcţii trigonometrice.* Problema convergenţei seriei Fourier (2) va fi discutată mai tîrziu (14.24).

14.22. Trecem acum la o serie trigonometrică Fourier sub formă complexă. Considerăm spaţiul hilbertian complex $H_{\mathbb{C}}[-\pi, \pi]$ al funcţiilor complexe continue pe porţiuni pe intervalul $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$ (12.98e). Aici avem un sistem ortogonal infinit de funcţii

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad (1)$$

Ortogonalitatea decurge din egalitatea evidentă

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt}}\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)t}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)t}}{\mathrm{i}(n-m)}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0 \ (n \neq m).$$

Să calculăm norma funcției e^{int}:

$$\| e^{int} \| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |e^{int}|^2 \, dt} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot dt} = \sqrt{2\pi}.$$

Pentru o funcție dată $f(t) \in H_{\mathbb{C}}[-\pi, \pi]$, seria Fourier 14.17(1) ia forma seriei bilaterale (6.48)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}, \tag{2}$$

unde

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) e^{-in\tau} \, d\tau \tag{3}$$

sînt coeficienții Fourier ai funcției $f(t)$ în raport cu sistemul (1).

14.23. Utilizînd formula lui Euler

$$e^{int} = \cos nt + i \sin nt,$$

se poate pune seria 14.22(2) sub forma 14.21(2) (mai înainte n-am scris seria 14.21(2) decît pentru funcții reale).

Punem

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \, d\tau = \frac{a_0}{2},$$

$$c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int} = (c_n + c_{-n}) \cos nt + i(c_n - c_{-n}) \sin nt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cos n\tau \, d\tau \cdot \cos nt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \sin n\tau \, d\tau \cdot \sin nt =$$

$$= a_n \cos nt + b_n \sin nt.$$

Pentru orice n, suma parțială $\sum_{0}^{n}$ a seriei 14.21 (2) și suma parțială simetrică $\sum_{-n}^{n}$ a lui 14.22(2) coincid. Prin urmare,

convergența seriei 14.21(2) este echivalentă cu sumabilitatea simetrică a seriei 14.22(2). Să subliniem că, am remarcat încă din 6.49, sumabilitatea simetrică a seriei 14.22 (2) poate avea loc pentru orice $t \in \mathbb{R}_1$ fără ca seria să fie convergentă $\left(\text{în sensul existenței } \lim_{n,m\to\infty} \sum_{-m}^{n}\right)$

14.24. TEOREMĂ. *Seria Fourier* 14.22(2) *a oricărei funcții (complexe)* $f(t)$ *continuă pe porțiuni pe compactul* $Q = [-\pi, \pi] = \{x^2 + y^2 = 1\}$ *converge către* $f(t)$ *în norma spațiului* $H_{\mathbb{C}}(Q)$, *oricare ar fi ordinea termenilor săi.*

Demonstrație. Ținînd cont de rezultatul 14.14a, este suficient să arătăm că există un șir $T_n(t)$ de polinoame trigonometrice, care converge către $f(t)$ în norma spațiului $H_{\mathbb{C}}(Q)$.

Considerăm polinoamele trigonometrice

$$T_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(\tau\,;\,t)\, f(\tau)\, \mathrm{d}\tau,$$

unde $D_n(\tau\,;\,t)$ este un șir delta-reprezentativ, dat în 12.57 a. Conform teoremei 12.57c, polinoamele $T_n(t)$ converg către $f(t)$ uniform pe orice mulțime închisă $E \subset Q$ de puncte de continuitate ale funcției $f(t)$. Ele rămîn mărginite în modul pe tot Q, de numărul $M = \sup |f(t)|$. Pentru un $\varepsilon > 0$ dat, mulțimea finită de puncte de discontinuitate ale funcției $f(t)$ poate fi acoperită de o mulțime deschisă U, reuniunea unui număr finit de intervale care au suma lungimilor inferioară lui ε^2. Funcția $f(t)$ este continuă pe mulțimea închisă $Q - U$. Găsim un număr n astfel încît să avem $|f(t) - T_n(t)| < \varepsilon$ pe $Q - U$. Atunci

$$\|f(t) - T_n(t)\|^2 = \int_Q |f(t) - T_n(t)|^2\, \mathrm{d}t =$$

$$= \int_U |f(t) - T_n(t)|^2\, \mathrm{d}t + \int_{Q-U} |f(t) - T_n(t)|^2\, \mathrm{d}t \leqslant 4M^2\varepsilon^2 +$$

$$+ 4\pi^2\varepsilon^2 = 4\varepsilon^2(M^2 + \pi^2),$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty} T_n(t) = f(t)$$

în $H_{\mathbb{C}}(Q)$, ceea ce trebuia demonstrat.

Conform celor arătate mai înainte, are loc un fenomen analog, pentru orice funcţie reală continuă pe porţiuni $f(t)$ şi seria sa Fourier 14.21(2).

14.25. Totodată, obţinem egalitatea lui Parseval pentru orice funcţie $f(t)$ continuă pe porţiuni : în cazul real,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \pi\frac{a_0^2}{2} + \pi\sum_1^\infty (a_k^2 + b_k^2); \tag{1}$$

conform formulelor 14.17 şi 14.21 ; în cazul complex,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = 2\pi\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2, \tag{2}$$

conform formulelor 14.17 şi 14.22.

Fiind date două funcţii continue pe porţiuni $f(t)$ şi $g(t)$, din 14.17(3) vedem că în cazul real cînd

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

$$g(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_1^\infty (c_n \cos nt + d_n \sin nt),$$

are loc egalitatea

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t = \pi\frac{a_0c_0}{2} + \pi\sum_1^\infty (a_nc_n + b_nd_n); \tag{3}$$

şi în cazul complex cînd

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{int},\quad g(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n e^{int},$$

avem

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t = 2\pi\sum_{-\infty}^{\infty} a_n\overline{b_n}. \tag{4}$$

14.26. Teorema 14.24 și egalitățile 14.25(1) — (2) implică, în particular, următoarele rezultate :

a) COROLAR. *Coeficienții Fourier* a_n, b_n *ai unei funcții continue pe porțiuni* $f(t)$ *tind către* 0 *pentru* $n \to \infty$, *coeficienții* c_n *tind către* 0 *pentru* $n \to \pm \infty$.

b) COROLAR. *Dacă toți coeficienții Fourier* 14.21(3) (*sau* 14.22(3)) *ai unei funcții continue pe porțiuni* $f(t)$ *sînt nuli, atunci* $f(t)$ *este nulă peste tot, cu excepția eventual a unui număr finit de puncte* (9.16e).

c) COROLAR. *Două funcții continue pe porțiuni* $f(t)$ *și* $g(t)$, *ai căror coeficienți Fourier* 14.21(3) *sau* 14.22(3) *sînt respectiv egali, sînt identice peste tot, cu excepția eventual a unui număr finit de puncte.*

d) COROLAR. *Sistemul ortogonal* 14.21(1) *al funcțiilor trigonometrice este complet : orice funcție continuă pe porțiuni* $f(t)$, *care este ortogonală tuturor funcțiilor sistemului* 14.21(1), *este un zero al spațiului* $H_{\mathbb{R}}(Q)$, *adică este nulă peste tot, cu excepția eventual a unui număr finit de puncte. Analog este cazul sistemului de funcții* e^{int} (14.22(1)) *în spațiul* $H_{\mathbb{C}}(Q)$.

14.27.a. LEMĂ. *Dacă o serie trigonometrică* $\sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$ *converge uniform pe* $[-\pi, \pi]$ *către o funcție* $s(t)$, *în sensul că pentru anumite șiruri* $m_p \to \infty$, $n_p \to \infty$ *avem*

$$s(t) = \lim_{p \to \infty} \sum_{m_p}^{n_p} c_k e^{ikt}$$

uniform pe $[-\pi, \pi]$, *atunci numerele* c_k *sînt coeficienții Fourier ai funcției* $s(t)$.

Lema este imediată, deoarece funcția $s(t)$ este evident continuă și convergența uniformă atrage convergența în norma din $H_{\mathbb{C}}(Q)$, ceea ce permite să aplicăm 14.15.

b. COROLAR. *Dacă* c_n $(n = 0, \pm 1, \ldots)$ *sînt coeficienții Fouriér ai unei funcții* $f(t)$ *continue pe porțiuni și dacă seria* $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ *converge uniform către o funcție* $s(t)$ *în același sens ca în punctul* a, *atunci* $f(t) = s(t)$ *peste tot, cu excepția eventual a unui număr finit de puncte.*

Într-adevăr, funcția $s(t)$ este evident continuă și numerele c_n sînt, în virtutea punctului a, coeficienții săi Fourier ; dar aceleași numere sînt, prin ipoteză, coeficienții Fourier

ai funcției $f(t)$. Aplicarea corolarului 14.26c conduce la rezultatul căutat.

§ 14.3. Convergența unei serii Fourier într-un punct și pe o mulțime

14.31. *Convergența unei serii Fourier într-un punct.* Am văzut în 14.24 că seria Fourier permite să obținem o aproximare nelimitată a unei funcții date $f(t)$ continue pe porțiuni, în sensul mediei pătratice. Vrem să știm dacă seria Fourier permite să obținem o aproximare nelimitată a valorii funcției $f(t)$ într-un punct dat $t = t_0$, în alți termeni, dacă seria Fourier converge, pentru $t = t_0$, către numărul $f(t_0)$ în sens obișnuit.

Pentru aceasta, considerăm seria Fourier sub forma sa complexă 14.22(2). Fie

$$s_{m,n} = \sum_{k=-m}^{n} c_k e^{ikt}$$

o sumă parțială a seriei Fourier a unei funcții $f(t)$ pentru anumiți $m > 0$, $n > 0$. Are loc relația

$$s_{m,n}(t) = \sum_{-m}^{n} c_k e^{ikt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{-m}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) e^{-ik\tau} d\tau \cdot e^{ikt} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \sum_{-m}^{n} e^{ik(t-\tau)} d\tau.$$

Sumînd progresia geometrică, obținem

$$\sum_{-m}^{n} e^{ik\theta} = \frac{e^{-im\theta} - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{-i\theta}} = \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta} - e^{-i\left(m+\frac{1}{2}\right)\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} =$$

$$= \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta} - e^{-i\left(m+\frac{1}{2}\right)\theta}}{2i \sin\frac{\theta}{2}},$$

deci

$$\frac{1}{4\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\,\frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-\tau)}-e^{-i\left(m+\frac{1}{2}\right)(t-\tau)}}{\sin\frac{t-\tau}{2}}\,d\tau =$$

$$=\frac{1}{4\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+h)\,\frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)h}-e^{-i\left(m+\frac{1}{2}\right)h}}{\sin\frac{h}{2}}\,dh. \qquad (1)$$

Dacă punem $f(t) = 1$ avem, evident, $s_{m,n}(t) = f(t)$ pentru orice $m > 0$ și $n > 0$. În acest caz, formula (1) dă

$$\frac{1}{4\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)h}-e^{-i\left(m+\frac{1}{2}\right)h}}{\sin\frac{h}{2}}\,dh = 1.$$

Acum, diferența $s_{m,n}(t) - f(t)$ ia forma

$$s_{m,n}(t) - f(t) =$$

$$=\frac{1}{4\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(t+h)-f(t)\}\,\frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)h}-e^{-i\left(m+\frac{1}{2}\right)h}}{\sin\frac{h}{2}}\,dh. \qquad (2)$$

Vom stabili condiții în care sumele $s_{m,n}(t)$ converg către $f(t)$ sau, ceea ce revine la același lucru, integrala (2) tinde către zero.

14.32. LEMĂ. *Dacă $\varphi(h)$ este o funcție cu valori complexe, definită pe intervalul $a < x \leqslant b$, mărginită și continuă pe porțiuni pe orice interval $[a + \delta, b]$, $\delta > 0$, absolut integrabilă în sens impropriu pe $[a, b]$, atunci integralele*

$$\int_a^b \varphi(h)\sin \nu h\,dh,\quad \int_a^b \varphi(h)\cos \nu h\,dh,\quad \int_a^b \varphi(h)\,e^{i\nu h}\,dh$$

tind către zero cînd $\nu \to \pm\infty$.

Demonstrație. Ținînd cont de formulele $\sin \nu h = \frac{1}{2i}(e^{i\nu h} - e^{-i\nu h})$, $\cos \nu h = \frac{1}{2}(e^{i\nu h} + e^{-i\nu h})$, este suficient să considerăm ultima integrală. Considerăm mai întîi cazul cînd funcția $\varphi(h)$ este continuă pe intervalul $[a, b]$. Pentru ν fix, nu există pe acest interval decît un număr finit de puncte ale progresiei aritmetice

$$a + k\frac{2\pi}{\nu}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots;$$

le notăm prin $h_0 = a < h_1 < \ldots < h_m$. Presupunem că funcția $g(h)$ are valoarea $\varphi(h_0)$ în intervalul $[h_0, h_1)$, $\varphi(h_1)$ în $[h_1, h_2)$ etc., în sfîrșit, $\varphi(h_m)$ în intervalul $[h_m, b)$. Este evident că

$$|g(h) - \varphi(h)| \leqslant \omega_\varphi\left(\frac{2\pi}{\nu}\right), \tag{1}$$

în toate punctele din $[a, b]$, $\omega_\varphi(\delta)$ fiind oscilația funcției $\varphi(x)$ pe $[a, b]$ (5.17c). Deoarece intervalul $[h_j, h_{j+1}]$ este o perioadă a funcției $e^{i\nu h}$ avem

$$\int_{h_j}^{h_{j+1}} g(h)e^{i\nu h}\,dh = \varphi(h_j)\int_{h_j}^{h_{j+1}} e^{i\nu h}\,dh = 0;$$

deci

$$\left|\int_a^b g(h)e^{i\nu h}\,dh\right| = \left|\int_{h_m}^b g(m)\,e^{i\nu h}\,dh\right| \leqslant M\cdot\frac{2\pi}{\nu}, \tag{2}$$

unde $M = \max |\varphi(h)|$. Din (1) și (2) rezultă că

$$\left|\int_a^b \varphi(h)e^{i\nu h}\,dh\right| \leqslant \int_a^b |\varphi(h) - g(h)|\,dh + \left|\int_a^b g(h)\,e^{i\nu h}\,dh\right| \leqslant$$

$$\leqslant \omega_\varphi\left(\frac{2\pi}{\nu}\right)(b - a) + M\cdot\frac{2\pi}{\nu}. \tag{3}$$

Deoarece, în virtutea continuității lui $\varphi(h)$, mărimea $\omega\left(\frac{2\pi}{\nu}\right)$ tinde către zero cînd $\nu \to \infty$, estimația (3) demonstrează lema în cazul considerat.

Fie acum $\varphi(h)$ o funcție oarecare ce verifică ipoteza lemei. Pentru un $\varepsilon > 0$ dat, găsim un $\delta > 0$ astfel încît să avem

$$\int_a^{a+\delta} |\varphi(h)|\,dh < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4}$$

Pe intervalul $[a+\delta, b]$, funcția $\varphi(h)$ este mărginită în modul de numărul $M = M(\varepsilon)$ și este continuă pe porțiuni. Intervalul $[a+\delta, b]$ se descompune într-un număr finit, fie $N = N(\varepsilon)$, de intervale $[a_1, b_1], \ldots, [a_N, b_N]$ pe fiecare, funcția $\varphi(h)$ fiind continuă. Aplicînd pe fiecare interval estimația (3) și ținînd cont de (4), se găsește

$$\left|\int_a^b \varphi(h)e^{i\nu h}\,dh\right| \leqslant \int_a^{a+\delta} |\varphi(h)|\,dh + \sum_{k=1}^{N} \left|\int_{a_k}^{b_k} \varphi(h)e^{i\nu h}\,dh\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \omega_\varphi\left(\frac{2\pi}{\nu}\right) \sum_{k=1}^{N} (b_k - a_k) + N(\varepsilon)M(\varepsilon)\frac{2\pi}{\nu} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \omega_\varphi\left(\frac{2\pi}{\nu}\right)(b-a) + N(\varepsilon)M(\varepsilon)\frac{2\pi}{\nu}. \tag{5}$$

Rămîne acum să găsim, pentru ε dat, un ν astfel încît mărimile $\omega_\varphi\left(\frac{2\pi}{\nu}\right)(b-a)$ și $N(\varepsilon)\,M(\varepsilon)\,\frac{2\pi}{\nu}$ să devină mai mici decît $\frac{\varepsilon}{3}$. Astfel, lema este complet demonstrată.

14.33. Revenim la egalitatea 14.31(2). Sîntem acum în măsură să demonstrăm următorul rezultat.

TEOREMĂ. *Dacă o funcție $f(t)$ este continuă pe porțiuni pe intervalul $[-\pi, \pi]$ și dacă funcția $\dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ este absolut integrabilă în raport cu h în sens impropriu,*

într-o vecinătate a punctului $h = 0$, *atunci sumele parțiale* $s_{m,n}(t)$ *ale seriei Fourier a funcției* $f(t)$, *converg în punctul* $t = t_0$ *către valoarea* $f(t_0)$ *cînd* $m \to \infty$ *și* $n \to \infty$ (*independent unul de altul*).

Demonstrație. Dacă funcția $\dfrac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$ este absolut integrabilă în sens impropriu într-o vecinătate a punctului $h = 0$, la fel va fi și funcția

$$\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{\sin \dfrac{h}{2}} = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \cdot \frac{h}{\sin \dfrac{h}{2}}.$$

Deci, în virtutea lemei, integrala 14.31(2)

$$\frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{\sin \dfrac{h}{2}} \left\{ e^{i\left(n + \frac{1}{2}\right)h} - e^{-i\left(m + \frac{1}{2}\right)h} \right\} dh =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{0} + \int_{0}^{\pi} \right\}$$

tinde către zero cînd $h \to \infty$. Teorema este demonstrată.

14.34. Condiția de integrabilitate absolută a lui $\dfrac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$ în raport cu h pentru $h \to 0$, se numește *condiția lui Dini pentru* $f(t)$. Ea este satisfăcută, de exemplu, dacă funcția $f(t)$ satisface condiția lui Lipschitz de ordin $\alpha > 0$:

$$| f(t + h) - f(t) | \leqslant C | h |^{\alpha}.$$

În particular, dacă funcția $f(t)$ are în punctul t_0 derivată finită, condiția lui Lipschitz de ordinul întîi este verificată și deci numerele $s_{m,n}(t_0)$ converg către $f(t_0)$.

14.35. *Convergența uniformă a unei serii Fourier pe o mulțime* $E \subset Q$. Analiza demonstrației de mai sus, arată că se poate obține în același mod convergența uniformă a seriei Fourier pe o mulțime $E \subset Q$. Vom spune că o funcție

$f(t)$ îndeplinește condiția lui Dini uniform pe o mulțime $E \subset Q$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ se poate găsi un $\delta > 0$ astfel încît inegalitatea

$$\int_{|h|<\delta} \left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right| dh < \varepsilon$$

să aibă loc simultan pentru toți $t \in E$.

TEOREMĂ. *Dacă o funcție $f(t)$ este mărginită și continuă pe porțiuni pe intervalul* $[-\pi, \pi] = Q$ (*punctele* $-\pi$ și π *fiind ca de obicei identificate*) *și dacă pe mulțimea* $E \subset Q$, *funcția f satisface condiția lui Dini, uniform, atunci seria Fourier a funcției f converge către f uniform pe mulțimea E.*

Demonstrație. Noi am pus deja diferența $s_{m,n}(t) - f(t)$ sub forma

$$s_{m,n}(t) - f(t) =$$

$$= \frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t+h) - f(t)] \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)h} - e^{-i\left(m+\frac{1}{2}\right)h}}{\sin \frac{h}{2}} dh.$$

Se verifică că această diferență tinde uniform la zero pe mulțimea E. Notăm $\varphi(t, h) = \dfrac{f(t+h) - f(t)}{\sin \frac{h}{2}}$. Prin ipoteză, pentru un $\varepsilon > 0$ dat, există un $\delta_0 > 0$, care nu depinde de t, astfel încît

$$\int_{|h|<\delta_0} \left| \frac{f(t+h) - f(t)}{\sin \frac{h}{2}} \right| dh =$$

$$= \int_{|h|<\delta_0} \left| \frac{f(t) + h) - f(t)}{h} \right| \frac{h}{\sin \frac{h}{2}} dh \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

În afara intervalului $|h| \leqslant \delta_0$, funcția $\varphi(t, h)$ este mărginită în modul de numărul $M(\varepsilon) = \dfrac{2M}{\sin \frac{\delta_0}{2}}$, unde

$M = \max |f(t)|$; estimarea dată, nu depinde de t. Mulțimea Z_t a punctelor de discontinuitate a funcției $\varphi(t, h)$ depinde de t; anume, ea se obține translatînd cu $-t$, mulțimea punctelor de discontinuitate ale funcției $f(h)$ (fără să includem eventualul punct de discontinuitate $h = 0$, pe care l-am izolat deja). În consecință, mulțimea Z_t, pentru orice t, poate fi acoperită printr-o translatată convenabilă S_t a unui sistem finit fix de intervale a căror sumă a lungimilor este $\frac{\varepsilon}{3M(\varepsilon)}$. În afara lui S_t rămîne mulțimea G_t, care este reuniunea unui număr fix $N(\varepsilon)$ de intervale pe care funcția $\varphi(t, h)$ este continuă (numărul lor se poate eventual micșora, deoarece anumite intervale se găsesc în interiorul izolat deja $|h| \leqslant \delta_0$).

Fie

$$g(h) = \frac{1}{\sin \frac{h}{2}} \quad (|h| \geqslant \delta_0).$$

Oscilația $\omega_\varphi(\delta)$ a funcției $\varphi(t, h)$ poate fi estimată, conform 5.17d, astfel:

$$\omega_\varphi(\delta) \leqslant \max |f(t+h) - f(t)|\, \omega_g(\delta) + \omega_f(\delta) \max |g(h)| \leqslant$$

$$\leqslant 2M_f\omega_g(\delta) + M_g\omega_f(\delta).$$

Estimația 14.32 (5) dă acum

$$4\pi |s_{m,n}(t) - f(t)| =$$

$$= \left| \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(h, t) \left[e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)h} - e^{-i\left(m+\frac{1}{2}\right)h} \right] dh \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \left[2M_f\omega_g\left(\frac{2\pi}{m+\frac{1}{2}}\right) + M_g\omega_f\left(\frac{2\pi}{m+\frac{1}{2}}\right) \right] 2\pi +$$

$$+ N(\varepsilon)M(\varepsilon)\frac{2\pi}{m+\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon}{3} + \left[2M_f\omega_g\left(\frac{2\pi}{n+\frac{1}{2}}\right) + \right.$$

$$\left. + M_g\omega_f\left(\frac{2\pi}{n+\frac{1}{2}}\right)\right]2\pi + N(\varepsilon)M(\varepsilon)\frac{2\pi}{n+\frac{1}{2}}.$$

Dacă n şi m sînt suficient de mari, ultimul membru devine mai mic decît ε, pentru orice $t \in E$, ceea ce ne trebuia. Teorema este demonstrată.

14.36. COROLAR. *Dacă este satisfăcută condiţia lui Lipschitz de ordin* $\alpha > 0$

$$|f(t+h) - f(t)| \leqslant C|h|^{\alpha}$$

pentru orice punct t *al unei mulţimi* $E \subset Q$ *şi constanta* C *nu depinde de punctul* $t \in E$, *atunci seria Fourier a funcţiei* f *converge uniform către* f *pe* E. În particular, dacă funcţia f are derivata mărginită pe un interval $[c, d] \subset Q$ (resp. derivata la dreapta sau la stînga în punctele c şi d), atunci, oricare ar fi un interval interior $[c+\delta, d-\delta]$, condiţia Lipschitz de ordinul întîi este satisfăcută pe orice $|h| \leqslant \delta$:

$$|f(t+h) - f(t)| \leqslant |h| \sup_{t\in[c,d]} |f'(t)|;$$

în consecinţă, seria Fourier a funcţiei f converge către f pe orice interval $[c+\delta, d-\delta]$.

14.37. În cazul cînd condiţia lui Dini nu este satisfăcută într-un punct, teorema 14.33 nu mai este adevărată şi seria Fourier a funcţiei f poate fi divergentă (vom vedea aceasta în 14.51). Relaţia

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} s_{m,n}(t_0) = f(t_0)$$

nu poate fi verificată decît considerînd o trecere la limită în sens generalizat. Este natural să considerăm, înainte de toate, sumele parţiale simetrice

$$s_{n,n}(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}.$$

Pentru o sumă parțială simetrică $s_{n,n}(t)$ (care se va nota în cele ce urmează pe scurt $s_n(t)$), se obține din 14.31 (1) următoarea expresie :

$$s_n(t) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+h) \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)h} - e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)h}}{\sin\frac{h}{2}} \, dh =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+h) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)h}{\sin\frac{h}{2}} \, dh = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+h) \, D_n(h) \, dh, \tag{1}$$

unde

$$D_n(h) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)h}{\sin\frac{h}{2}}$$

este *nucleul lui Dirichlet*. Dacă funcția $D_n(h)$ ar forma un șir delta-reprezentativ pentru punctul 0, am putea aplica teorema 12.55b și am putea obține direct convergența sumelor simetrice ale seriei Fourier a funcției $f(t)$ către valoarea sa $f(t_0)$ în orice punct t_0 de continuitate al lui $f(t)$. Dar funcția $D_n(h)$ nu formează un șir delta-reprezentativ, ceea ce vom vedea în 14.51. Funcția $D_n(h)$ este evident pară : $D_n(-h) = D_n(h)$; în plus, punînd $f(t) = 1$ în (1), găsim $s_n(t) = 1$ și

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(h) \, dh = 1.$$

Folosind aceste proprietăți vom studia convergența sumelor simetrice ale seriei Fourier a funcției f în punctele sale de discontinuitate de prima speță.

14.38. ***Comportarea seriei Fourier în punctele de discontinuitate de prima speță ale funcției.*** Fie t_0 un punct de dis-

continuitate de prima speță a funcției $f(t)$, adică există valorile

$$f(t_0 + 0) = \lim_{t \searrow t_0} f(t) \text{ și } f(t_0 - 0) = \lim_{t \nearrow t_0} f(t).$$

Presupunem că sînt satisfăcute condițiile unilaterale ale lui Dini, adică integralele

$$\int_{t_0}^{t_0+\delta} \left| \frac{f(t) - f(t_0 + 0)}{t} \right| \mathrm{d}t, \quad \int_{t_0+\delta}^{t} \left| \frac{f(t) - f(t_0 - 0)}{t} \right| \mathrm{d}t$$

converg pentru un $\delta > 0$. Ca și mai înainte, mărimea $s_n(t_0)$ se poate scrie :

$$s_n(t_0) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(t_0 + h)]\, D_n(h)\, \mathrm{d}h.$$

Introducînd valorile limită $f(t_0 + 0)$ și $f(t_0 - 0)$, transformăm expresia obținută

$$s_n(t_0) = \int_{-\pi}^{0} [f(t_0 + h) - f(t_0 - 0)]\, D_n(h)\, \mathrm{d}h + \int_{0}^{\pi} [f(t_0 + h) -$$

$$- f(t_0 + 0)] D_n(h)\, \mathrm{d}h + f(t_0 - 0) \int_{-\pi}^{0} D_n(h)\, \mathrm{d}h +$$

$$+ f(t_0 + 0) \int_{0}^{\pi} D_n(h)\, \mathrm{d}h = I_1 + I_2 + [f(t_0 - 0) +$$

$$+ f(t_0 + 0)] \int_{0}^{\pi} D_n(h)\, \mathrm{d}h,$$

unde am utilizat paritatea nucleului lui Dirichlet $D_n(h)$. În virtutea lemei 14.32, mărimile I_1 și I_2 tind către zero cînd $n \to \infty$. Ultimul termen nu depinde de n și are valoarea $\frac{f(t_0 + 0) + f(t_0 - 0)}{2}$. Astfel, în cazul cînd condițiile unilaterale ale lui Dini sînt satisfăcute într-un punct de

discontinuitate de prima speță, de exemplu dacă există derivatele

$$f'(t_0 + 0) = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0 + 0)}{h},$$

$$f'(t_0 - 0) = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(t_0 - 0) - f(t_0 - h)}{h},$$

sumele parțiale simetrice ale seriei Fourier a funcției f converg către numărul $\frac{1}{2}[f(t_0 + 0) + f(t_0 - 0)]$.

Dacă se pune seria Fourier a funcției $f(t)$ sub forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \tag{1}$$

atunci, după cum am văzut în 14.23, a n-a sumă parțială a acestei serii

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \tag{2}$$

coincide cu cea de a n-a sumă simetrică a seriei Fourier a funcției $f(t)$ sub formă complexă; deci, pentru seria (1), enunțul teoremei asupra convergenței este același pentru punctele de continuitate (unde condiția bilaterală a lui Dini este satisfăcută) și pentru punctele de discontinuitate de prima speță (unde condițiile unilaterale ale lui Dini sînt satisfăcute).

Să observăm, de asemenea, că dacă $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ (14.26a) gruparea termenilor în seria (1) indicată prin paranteze, nu influențează convergența sau divergența acestei serii.

§ 14.4. Calcule cu serii Fourier și aplicații

14.41. *Calculul coeficienților Fourier.* Dăm cîteva proprietăți simple ale coeficienților Fourier, care vor ușura calculul lor.

a. Dacă $f(t)$ este o funcție pară, adică $f(-t) = f(t)$ pentru orice t, atunci are loc relația

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt = 0.$$

și $f(t)$ se dezvoltă într-o serie Fourier după funcțiile cos nt. În plus,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt. \qquad (1)$$

b. Dacă $f(t)$ este o funcție impară, adică $f(-t) = -f(t)$ pentru orice t, atunci are loc relația

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = 0$$

și $f(t)$ se dezvoltă într-o serie Fourier după funcțiile sin nt. În plus,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt. \qquad (2)$$

14.42.a. Fie $f(t)$ o funcție polinomială pe porțiuni, adică intervalul $[-\pi, \pi]$ se descompune într-un număr finit de intervale $[t_j, t_{j+1}]$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$ fără puncte interioare comune, astfel încît pe intervalul $[t_j, t_{j+1}]$ funcția să coincidă cu un polinom $p_j(t) = \sum_{k=0}^{s} p_{jk}t^k$. Atunci are loc relația

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{m-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} p_j(t)e^{-int}\,dt.$$

Transformăm fiecare termen, integrînd prin părți

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} p_j(t)e^{-int}dt = p_j(t)\,\frac{e^{-int}}{-in}\Big|_{t_j}^{t_{j+1}} - \int_{t_j}^{t_{j+1}} p_j'(t)\,\frac{e^{-int}}{-in}\,dt =$$

$$= \frac{1}{in}\left[p_j(t_j)\,e^{-int_j} - p_j(t_{j+1})\,e^{-int_{j+1}}\right] - \frac{i}{n}\int_{t_j}^{t_{j+1}} p_j'(t)\,e^{-int}\,dt.$$

Integrînd de un număr finit de ori, se va obține o expresie fără integrale și coeficienții Fourier vor avea formă de polinom în $\frac{1}{n}$ și e^{int_j}. Calculul analog pentru coeficienții a_n și b_n arată că ei sînt polinoame în $\frac{1}{n}$, $\cos nt_j$ și $\sin nt_j$.

Din teoremele generale din § 14.3 rezultă că seria Fourier a oricărei funcții polinomiale pe porțiuni $f(t)$ converge către $f(t)$ în orice punct de continuitate a lui $f(t)$. Această convergență este uniformă pe orice interval care nu conține nici în interior, nici pe frontiera sa puncte de discontinuitate ale funcției f. În orice punct de discontinuitate t, sumele simetrice ale seriei Fourier converg către valoarea $\frac{1}{2}[f(t+0)+f(t-0)]$.

b. *Exemplu.* Considerăm funcția $f(t)=\frac{\pi-t}{2}$ $(0<t<\pi)$, prelungită impar pe intervalul $-\pi<t<0$, apoi, periodic, de perioadă 2π, pe toată axa $-\infty<t<\infty$

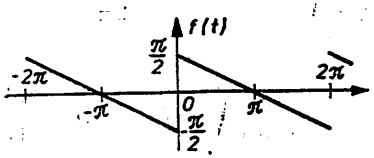


Fig. 14.2

(fig. 14.2). Conform 14.41b, funcția $f(t)$ se dezvoltă în seria sa Fourier după funcțiile $\sin nt$ astfel încît

$$\frac{\pi}{2}b_n=\int_0^{\pi}\frac{\pi-t}{2}\sin nt\,dt=\frac{\pi-t}{2}\frac{\cos nt}{n}\Big|_{\pi}^{0}+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\pi}^{0}\frac{\cos nt}{n}\,dt=\frac{\pi}{2n}.$$

Așadar, pe $(0,2\pi)$, avem

$$\frac{\pi-t}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nt}{n},$$

seria fiind convergentă în orice punct $t \in (0, 2\pi)$ uniform în tot intervalul $[\delta, 2\pi - \delta]$, $\delta > 0$. În punctele $t = 0$ și $t = 2\pi$, suma seriei este nulă, conform 14.38.

c. În anumite cazuri, fiind dați coeficienții a_n și b_n sub formă de polinoame în $1/n$, $\cos nt$, și $\sin nt$, putem să sumăm seria Fourier și să obținem o formulă explicită pentru funcția polinomială pe porțiuni $f(t)$ [8]. Totuși, chiar o serie atît de simplă ca $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n}$, nu este seria Fourier a unei funcții polinomiale pe porțiuni (conform 14.47).

14.43. *Legătura dintre derivabilitatea funcției f și ordinul de descreștere a coeficienților Fourier ai lui f.*

a. Fie f o funcție continuă pe cercul $Q = [-\pi, \pi]$ (deci $f(-\pi) = f(\pi)$) avînd derivata f' continuă pe porțiuni. Fie c_n coeficienții Fourier ai funcției f (în raport cu sistemul e^{int}) și c'_n coeficienții Fourier ai funcției $f'(t)$. Avem

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi} f(t)\,\frac{e^{-int}}{-in}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi in}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-int}dt = \frac{c'_n}{in}. \qquad (1)$$

Termenul fără integrală este aici nul, deoarece $f(-\pi) = f(\pi)$, conform ipotezei de continuitate a funcției f pe tot cercul Q. Numerele c'_n fiind coeficienții Fourier ai unei funcții continue pe porțiuni, tind către zero ; vedem că pentru o funcție $f(t)$ derivabilă, coeficienții săi Fourier tind către zero mai rapid decît $\frac{1}{n}$. În plus, seria numerelor $|c_n|$ converge, ceea ce rezultă din inegalitatea

$$|c_n| = \frac{1}{|n|}|c'_n| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + |c'_n|^2\right)$$

și din convergența seriei de numere $|c'_n|^2$. (Ținînd cont de criteriul lui Weierstrass 6.53, aceasta demonstrează fără să utilizăm teorema 14.36, convergența uniformă a seriei

Fourier pentru o funcție $f(t)$ care satisface condițiile impuse în acest paragraf). Dacă funcția $f(t)$ este continuă, dar nu este presupusă existența derivatei, atunci convergența seriei de numere $|c_n|$ în general nu are loc, ceea ce vom vedea mai tîrziu (14.53).

b. Dacă funcția $f(t)$ este continuă și are derivate continue, pînă la ordinul $(m-1)$ inclusiv și dacă $f^{(m)}(t)$ este continuă pe porțiuni, atunci egalitatea (1) poate fi extinsă, notînd prin $c_n^{(k)}$ coeficienții Fourier ai funcției $f^{(k)}(t)$:

$$c_n = \frac{c_n'}{in} = \frac{c_n''}{(in)^2} = \ldots = \frac{c_n^{(m-1)}}{(in)^{m-1}} =$$

$$= \frac{c_n^{(m)}}{(in)^m} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots) \qquad (2)$$

În acest caz, coeficienții $c_n^{(m-1)}$ formează o serie absolut convergentă (conform punctului a); deci, în plus, față de egalitățile (2), se poate scrie următoarea expresie pentru coeficienții c_n :

$$c_n = \frac{\varepsilon_n}{|n|^{m-1}} \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

unde seria $\sum_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon_n|$ converge.

14.44.a. Propozițiile precedente pot fi inversate, chiar dacă numai parțial. Presupunem coeficienții Fourier c_n (ai unei funcții $f(t)$) de forma

$$c_n = \frac{\theta_n}{|n|^m}, \quad |\theta_n| \leqslant c, \qquad m \geqslant 2,$$

sau

$$c_n = \frac{\varepsilon_n}{|n|^{m-2}}, \quad \sum_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon_n| \leqslant \infty, \qquad m \geqslant 2.$$

Atunci, $f(t)$ are derivatele continui, pînă la ordinul $m-2$ inclusiv. Într-adevăr, în ipoteza formulată, seria Fourier a funcției $f(t)$ este uniform convergentă (conform criteriului lui Weierstrass) la fel ca seriile care se obțin prin

derivări succesive formale pînă la ordinul $m-2$:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int} = s_0(t),$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n (in) e^{int} = s_1(t),$$

. . . . . .

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n (in)^{m-2} e^{int} = s_{m-2}(t).$$

În virtutea lui 14.26c, funcția $f(t)$ coincide cu $s_0(t)$. Conform teoremei 9.78 asupra derivării unui șir de funcții, funcția $s_0(t)$ este derivabilă și derivata sa coincide cu $s_1(t)$; un fapt analog are loc pentru funcția $s_1(t)$ etc; în final, funcția $f(t)$ se dovedește a fi de $m-2$ ori continuu derivabilă.

b. Dacă funcția $f(t)$ are derivate continui de orice ordin $m = 1, 2, \ldots$, atunci coeficienții săi Fourier verifică inegalitățile

$$|c_n| \leqslant \frac{\theta_m}{|n|^m}, \qquad m = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

deci o descreștere mai rapidă decît orice putere a lui $1/n$. Invers, în cazul cînd coeficienții Fourier ai unei funcții $f(t)$ verifică inegalitățile (1) pentru orice $m = 1, 2, \ldots$, atunci, conform celor spuse mai înainte, funcția $f(t)$ este continuă și are derivate de orice ordin, continue. Astfel, clasa funcțiilor infinit derivabile este complet caracterizată de condițiile (1) impuse coeficienților Fourier c_n.

14.45. ***Problema izoperimetrică.*** Această denumire este dată următoarei probleme clasice: dintre toate curbele plane închise netede pe porțiuni, de lungime dată, să se găsească aceea care delimitează o arie maximă. Soluția problemei este cercul; pentru a verifica aceasta, facem, împreună cu Hurwitz, următoarea construcție. Fie $z(s) = x(s) + iy(s)$ reprezentarea parametrică a unei curbe plane netede pe porțiuni L, de parametru, elementul de arc s (9.63g). Presupunem la început că lungimea totală a curbei L este 2π, adică $z(2\pi) = z(0)$. Scriem dezvoltările Fourier ale

funcțiilor $x(s)$ și $y(s)$:

$$x(s) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_n \cos ns + b_n \sin ns), \qquad (1)$$

$$y(s) = \frac{c_0}{2} + \sum_1^\infty (c_n \cos ns + d_n \sin ns); \qquad (2)$$

conform 14.43 a, avem

$$x'(s) = \sum_1^\infty (-na_n \sin ns + nb_n \cos ns),$$

$$y'(s) = \sum_1^\infty (-nc_n \sin ns + nd_n \cos ns).$$

Deoarece $[x'(s)]^2 + [y'(s)]^2 = 1$ (9.63 g), găsim conform 14.25(1) că :

$$2\pi = \int_0^{2\pi} \{[x'(s)]^2 + [y'(s)]^2\}\, ds =$$

$$= \pi \sum_1^\infty n^2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2). \qquad (3)$$

Pe de altă parte, aplicînd formula 9.94(4) pentru aria G interioară unei curbe închise și, ținînd cont de 14.25(3), găsim

$$G = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [xy'(s) - yx'(s)]\, ds = \pi \sum_{n=1}^\infty n(a_n d_n - b_n c_n). \qquad (4)$$

Plecînd de la egalitățile (3) și (4), avem

$$2 - \frac{2G}{\pi} = \sum_1^\infty \{n^2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) - 2n(a_n d_n - b_n c_n)\} =$$

$$= \sum_1^\infty \{(na_n - d_n)^2 + (nb_n + c_n)^2 + (n^2 - 1)(c_n^2 + d_n^2)\} \geqslant 0. \qquad (5)$$

Astfel, aria G interioară unei curbe închise de lungime 2π nu depășește π. Să examinăm cazul de egalitate din (5); pentru orice $n = 1, 2, \ldots$ avem

$$na_n - d_n = 0,\ nb_n + c_n = 0, \quad (n^2 - 1)(c_n^2 + d_n^2) = 0.$$

În particular, dacă $n > 1$, se obține $c_n = d_n = 0$, de unde $a_n = b_n = 0$ pentru aceeași $n > 1$. Punînd $n = 1$ se găsește $a_n = d_n$, $b_n = -c_n$. Din (3) decurge atunci că $a_1^2 + b_1^2 = 1$ și se poate pune $a_1 = \cos\alpha$, $b_1 = \sin\alpha$. Punîndu-le în (1) și (2) se obține în final

$$x(s) = \frac{a_0}{2} + \cos(s - \alpha),$$

$$y(s) = \frac{c_0}{2} + \sin(s - \alpha);$$

această curbă este cercul de rază 1 de centru $(a_0/2,\ c_0/2)$.

Dacă lungimea totală a curbei L este egală cu un număr $l \neq 2\pi$, efectuăm omotetia $x' = 2\pi x/l$, $y' = 2\pi y/l$, care transformă curba L într-o curbă L' de lungime 2π (9.63e), ce delimitează aria $G' = (2\pi/l)^2 G$ (9.61 d, e). Conform rezultatelor anterioare,

$$G' \leqslant \pi, \quad G \leqslant \frac{l^2}{4\pi},$$

și în cazul extrem, cînd L' este cercul de rază 1, curba L este de asemenea un cerc, dar de rază $l/(2\pi)$.

14.46. *Utilizarea variabilei complexe.* Notăm punctele cercului unitate $Q = \{x^2 + y^2 = 1\}$ cu ajutorul variabilei complexe $z = x + iy = e^{it}$, $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$. Punem $f(t) = F(z)$. Seria Fourier a funcției $f(t)$ ia forma

$$f(t) = F(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n. \qquad (1)$$

Am întîlnit în 10.45 o serie de forma (1) după puterile lui z pozitive și negative (seria Laurent). Coeficienții c_n exprimați prin integrale în raport cu t pot fi de asemenea

exprimați prin integrale în raport cu variabila complexă z, dacă se utilizează egalitatea

$$dz = ie^{it}dt = i\,z\,dt.$$

Într-adevăr,

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} F(z)\,z^{-n-1}dz. \qquad (2)$$

Dacă funcția $F(z)$ poate fi prelungită analitic în interiorul cercului unitate, atunci seria Laurent, deci și cea Fourier (1), devine serie Taylor

$$F(z) = \sum_0^\infty c_n z^n.$$

14.47. *Exemplu.* Să calculăm suma seriei $\sum_1^\infty \frac{\cos nt}{n}$. Se poate scrie

$$\sum_1^\infty \frac{\cos nt}{n} + i\sum_1^\infty \frac{\sin nt}{n} = \sum_1^\infty \frac{e^{int}}{n},$$

ceea ce duce la problema calculului sumei $\sum_1^\infty \frac{e^{int}}{n}$ sau a sumei $\sum_1^\infty \frac{z^n}{n}$. Ultima serie se deduce integrînd termen cu termen, de la 0 la z, seria

$$\sum_0^\infty \zeta^n = \frac{1}{1-\zeta}. \qquad (1)$$

Se știe că (10.57)

$$\int_0^z \frac{d\zeta}{1-\zeta} = -\int_1^{1-z} \frac{d\omega}{\omega} = -\ln(1-z),$$

dacă se alege ca drum de integrare în planul ω o curbă ce nu intersectează semiaxa reală negativă, care corespunde, în planul $\zeta(1-\zeta=\omega)$, unei curbe care nu intersectează partea $\zeta \geqslant 1$ a semiaxei reale pozitive. Este suficient să

integrăm în lungul segmentelor de dreaptă $[0, z]$ (ceea ce asigură în particular că funcția $-\ln(1-z)$ este bine definită). Seria (1) converge pentru $|\zeta| < 1$, adică

$$-\ln(1-z) = \sum_1^\infty \frac{z^n}{n} \qquad (2)$$

pentru $|z| < 1$. Dar seria (2) converge de asemenea pentru $|z| = 1$, $z \neq 1$ (6.63 c); deoarece funcția $\ln(1-z)$ rămîne continuă în aceste puncte, egalitatea (2) rămîne adevărată pentru ele, conform teoremei lui Abel 6.67. Pentru orice $w = |w| e^{i \arg w}$ are loc relația (10.57)

$$\ln w = \ln|w| + i \arg w.$$

În particular, dacă $z = e^{it}$, $\operatorname{Im} z > 0$, modulul și argumentul lui $1 - z$ sînt ușor de determinat conform fig. 14.3. Anume,

$$|1 - z| = 2 \sin \frac{t}{2}, \quad \arg(1 - z) = \frac{t - \pi}{2},$$

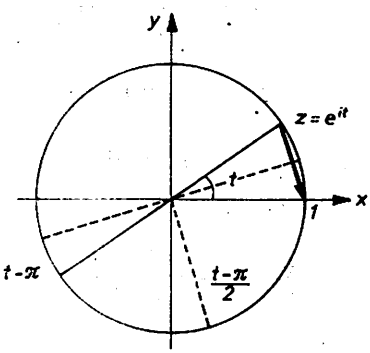


Fig. 14.3

apoi

$$\ln|1 - z| = \ln\left(2 \sin \frac{t}{2}\right),$$

$$\ln(1 - z) = \ln\left(2 \sin \frac{t}{2}\right) + i \frac{t - \pi}{2},$$

de unde, pentru $t \in (0, 2\pi)$,

$$\sum_1^\infty \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z) = -\ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right) + i\,\frac{\pi - t}{2},$$

$$\sum_1^\infty \frac{\cos nt}{n} = -\ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right), \quad \sum_1^\infty \frac{\sin nt}{n} = \frac{\pi - t}{2}.$$

Ultima egalitate este deja cunoscută (14.42b).

14.48. *Problema soluțiilor periodice.* Fie

$$a_0 u^{(m)}(t) + a_1 u^{(m-1)}(t) + \ldots + a_m u(t) = g(t) \qquad (1)$$

o ecuație diferențială liniară cu coeficienți constanți al cărei membru secund $g(t)$ este o funcție periodică de perioadă 2π. Se pune întrebarea dacă această ecuație are o soluție $u(t)$ periodică de perioadă 2π.

Căutăm o astfel de soluție sub formă de serie Fourier

$$u(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} u_k e^{ikt} \qquad (2)$$

cu coeficienți necunoscuți u_k. Presupunem că derivarea de m ori succesiv termen cu termen a seriei (2) este posibilă și notînd $a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \ldots + a_m = p(\lambda)$ avem

$$\sum_{-\infty}^{\infty} u_k p(ik) e^{ikt} = a_0 u^{(m)}(t) + \ldots + a_m u(t). \qquad (3)$$

Pe de altă parte, fie

$$g(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} g_k e^{ikt} \qquad (4)$$

dezvoltarea Fourier a funcției $g(t)$. Comparînd dezvoltările ortogonale (3) și (4), găsim, pentru orice $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm, \ldots,$

$$g_k = p(ik)u_k,$$

de unde, pentru $p(ik) \neq 0$,

$$u_k = \frac{g_k}{p(ik)},$$

deci soluția căutată este

$$u(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{g_k}{p(ik)} e^{ikt}. \qquad (5)$$

Aceste raționamente euristice sugerează următoarele enunțuri:

a. *Presupunem că pentru funcția periodică $g(t)$, coeficienții Fourier formează o serie absolut convergentă (de exemplu, $g(t)$ este netedă pe porțiuni). Dacă $p(ik)$ nu se anulează pentru $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ atunci ecuația (1) are o unică soluție periodică.*

Într-adevăr, în ipoteza formulată, polinomul $p(ik)$ de grad m admite evaluarea

$$|p(0)| \geqslant c, \quad |p(ik)| \geqslant c|k|^m \quad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

De aici rezultă că

$$\left|\frac{g_k}{p(ik)}\right| \leqslant \frac{|g_k|}{c|k|^m}.$$

În virtutea lui 14.44a, funcția $u(t)$, definită prin relația (5), are derivate continue, pînă la ordinul m inclusiv, și aceste derivate pot fi obținute derivînd termen cu termen seria (5). Introducîndu-le în ecuația (1), aceasta din urmă este satisfăcută. Dacă în afară de soluția periodică găsită, mai există încă una, diferența lor $v(t)$ este o soluție periodică a ecuației

$$a_0 v^{(m)}(t) + a_1 v^{(m-1)}(t) + \ldots + a_m v(t) = 0. \qquad (6)$$

Dar noi cunoaștem soluția generală a ecuației (6), care se exprimă prin funcții de forma $e^{\lambda t}$, unde $p(\lambda) = 0$ (13.18). Aceste exponențiale ne conduc la soluții 2π-periodice numai dacă $\lambda = ik$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Deoarece, prin ipoteză, nici una din egalitățile scrise nu are loc, nu există nici o soluție periodică nenulă a ecuației (6). Aceasta demonstrează unicitatea soluției periodice a ecuației (1).

b. Dacă $p(ik) = 0$ pentru anumite numere $k = k_1, \ldots, k_r$ întregi, atunci ecuația (1) are o soluție 2π-periodică, dacă și numai dacă $g_{k_j} = 0$ ($j = 1, \ldots, r$) (ipoteza teoremei precedente asupra convergenței absolute a seriei de numere g_k rămînînd adevărată); această soluție este definită pînă la un termen aditiv $\sum_{j=1}^{r} c_j e^{ik_j t}$, c_j fiind constante arbitrare.

Într-adevăr, dacă $g_{kj} = 0$ $(j = 1, \ldots, r)$, atunci expresia (5), cu constantele arbitrare c_j pentru coeficienții $\frac{g_{kj}}{p(ik_j)}$ (care, în cazul de față, au forma 0/0) reprezintă, la fel ca în punctul a, o soluție periodică a ecuației (1). Dacă, pentru un anumit $k = q$, avem $p(ik) = 0$, $g_q \neq 0$, atunci introducînd expresia în cauză în ecuația (1) și, înmulțind scalar identitatea obținută cu e^{-iqt}, vedem că $p(iq) = g_q = 0$. Aceasta înseamnă că ecuația (1) nu are nici o soluție periodică. Demonstrația ultimei afirmații a teoremei este analoagă cu cea din punctul a.

14.49. Printre numeroasele aplicații ale seriilor Fourier la problemele fizicii matematice prezentăm două ; anume : rezolvarea problemei vibrațiilor unei coarde omogene și cea a problemei echilibrului unei membrane circulare.

a. Presupunem că o coardă este fixată în punctele 0 și π ale axei x și că, în starea de echilibru, ea coincide cu intervalul $[0, \pi]$ (fig. 14.4). Dacă se dă coardei o formă oarecare reprezentată, de exemplu, de o funcție $f(x)$ și dacă îi dăm drumul înapoi, coarda începe să vibreze. Trebuie să găsim funcția $u(t, x)$ ce determină forma coardei la momentul t.

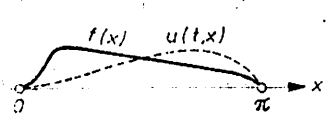


Fig. 14.4

Ecuația pentru funcția $u(t, x)$ este dedusă în fizica matematică ; în anumite condiții simplificatoare ea se scrie sub forma

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

unde a este o constantă. Se cere să rezolvăm ecuația (1) cu condițiile inițiale următoare :

1) $u(0, x) = f(x)$ (este dată forma inițială) ;

2) $\frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = 0$ (viteza inițială este nulă).

Vom rezolva problema cu ajutorul seriilor Fourier. Anume, dezvoltăm funcția $u(t, x)$, definită pentru orice $t \geqslant 0$ fixat pe intervalul $[0, \pi]$ în seria sa Fourier, după funcțiile $\sin nx$:

$$u(t, x) = \sum_1^\infty b_n(t) \sin nx. \tag{2}$$

Trebuie să determinăm coeficienții $b_n(t)$. Condițiile inițiale 1) — 2) sînt satisfăcute dacă alegem coeficienții în așa fel încît :

3) $b_n(0) = b_n$ — este coeficientul Fourier al funcției $f(x)$;

4) $b_n'(0) = 0$.

Acum, trebuie ca funcția (2) să satisfacă ecuația (1). Formal, avem

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = \sum_1^\infty b_n''(t) \sin nx, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = -\sum_1^\infty n^2 b_n(t) \sin nx. \tag{4}$$

Ecuația (1) este verificată dacă, pentru orice $n = 1, 2, \ldots$ $\ldots$, avem

$$b_n''(t) = -a^2 n^2 b_n(t). \tag{5}$$

Soluția ecuației (5) cu condițiile inițiale 3) —4) este

$$b_n(t) = b_n \cos ant, \tag{6}$$

și soluția (2) ia forma definitivă

$$u(t, x) = \sum_1^\infty b_n \cos a\, nt \sin nx. \tag{7}$$

Derivările formale (3) — (4) sînt permise dacă seriile corespunzătoare din membrul al doilea converg uniform. Ținînd cont de (6), este suficient pentru aceasta ca seria

$$\sum_1^\infty b_n n^2 \cos ant \sin nx$$

să conveargă uniform pe intervalul $0 \leqslant x \leqslant \pi$; aceasta se va întîmpla, dacă, la rîndul ei, seria $\sum_1^\infty |b_n| n^2$ converge şi ea. Dar ultima serie converge dacă funcţia $f(x)$ este continuă împreună cu prima şi a doua derivată şi dacă derivata sa de ordinul al treilea este continuă pe porţiuni (14.44a).

De altfel, soluţia (7) se poate pune sub o formă care nu cere derivabilitatea funcţiei $f(x)$. Anume,

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \sum_1^\infty b_n [\sin n(x + at) + \sin n(x - at)] =$$

$$= \frac{1}{2} [f(x + at) + f(x - at)]. \qquad (8)$$

Aici înţelegem prin $f(x + at)$ şi $f(x - at)$, în cazul cînd variabila $x + at$ (sau $x - at$) iese din domeniul de definiţie iniţial $[0, \pi]$ al funcţiei $f(x)$, rezultatul prelungirii impare a lui $f(x)$ pe intervalul $[-\pi, 0]$ urmat de o prelungire periodică, de perioadă 2π, pe toată axa $-\infty < x < \infty$.

Se pune următoarea problemă : în ce sens funcţia (8) verifică ecuaţia (1) cînd funcţia $f(x)$ nu are a doua derivată ? Fizica matematică ajunge fără mari dificultăţi la punerea unor probleme asemănătoare, generalizînd chiar noţiunea de soluţie, dar nu insistăm asupra acestor lucruri [35].

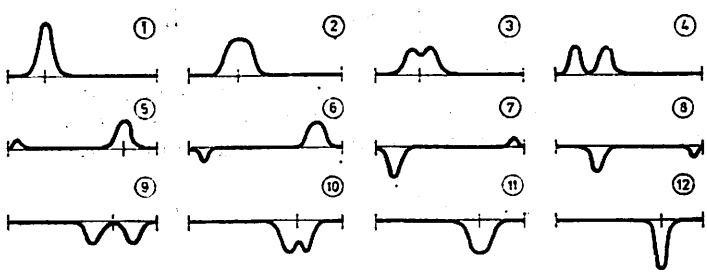


Fig. 14.5

Figura 14.5 arată poziţiile succesive ale coardei vibrante determinate după formula (8), poziţia iniţială fiind prima.

b. ***Echilibrul unei membrane circulare.*** Presupunem că o membrană este dispusă deasupra discului $Q = \{x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ şi fixată de cercul $\Gamma = \{x^2 + y^2 = 1\}$ deasupra

căruia forma sa este dată de o funcţie continuă $z = f(t)$ de unghiul polar t. În starea de echilibru (sub acţiunea forţelor de elasticitate), membrana capătă o formă reprezentată de o funcţie $z = u(x, y)$ (fig. 14.6). Ecuaţia pentru această funcţie este dedusă în fizica matematică; în anumite condiţii simplificatoare, ea este ecuaţia lui Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{9}$$

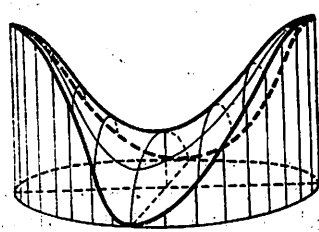


Fig. 14.6

Trebuie să găsim o soluţie $u(x, y)$ a ecuaţiei (9) continuă în tot discul Q (astfel de funcţii se numesc armonice; conform 10.18) şi egală cu funcţia $f(t)$ pe curba Γ.

Pentru aceasta, dezvoltăm funcţia $f(t)$ în seria sa Fourier:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Punem simbolul $\sim$, deoarece seria Fourier a unei funcţii date $f(t)$ poate să nu conveargă către aceasta (după cum vom vedea în 14.51). Notăm în coordonate polare t, r:

$$u(r, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty r^n (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad (r < 1). \tag{10}$$

Funcţia $u(r, t)$ este partea reală a funcţiei analitice

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_n - ib_n) z^n \quad (r = |z| < 1) \tag{11}$$

deci verifică ecuaţia lui Laplace (10.18) în discul Q. Vom arăta că sînt satisfăcute şi celelalte condiţii. Explicitînd coefi-

cienții Fourier, avem

$$u(r,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\,(\cos nt\cos n\tau + \sin nt\sin n\tau)\,r^n\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{1}^{\infty} r^n\cos n(t-\tau)\right\}\mathrm{d}\tau.$$

Aici putem comuta sumarea cu integrarea, deoarece conform criteriului lui Weierstrass 6.53, seria dintre acolade converge uniform în raport cu t pentru $r<1$.

Conform 6.47 f avem

$$\frac{1}{2} + \sum_{1}^{\infty} r^n\cos n\theta = \frac{1 - r\cos\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1 - r^2}{2(1 - 2r\cos\theta + r^2)},$$

de unde

$$u(r,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\,\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t-\tau) + r^2}\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\,P_r(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad (12)$$

unde

$$P_r(t) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2}\quad (r<1);$$

această funcție se numește *nucleul lui Poisson*.

Deoarece numitorul nucleului lui Poisson are forma

$$1 - 2r\cos t + r^2 = (1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{t}{2},$$

nucleul lui Poisson nu este negativ. Să verificăm că el are proprietăţile unei funcţii de t delta-reprezentative pentru $r \to 1$. Punînd în (12) $f(t) = 1$, din (10) deducem că $u(r,t) = 1$, deci

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\tau)\, d\tau = 1.$$

Apoi, pentru orice $\delta > 0$, avem estimaţia

$$\int_{|t|>\delta} P_r(\tau)\, d\tau \leqslant \frac{1-r^2}{2\pi} \int_{|t|>\delta} \frac{d\tau}{(1-r)^2 + 4r \sin^2 \frac{\tau}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1-r^2}{4r \sin^2 \frac{\delta}{2}},$$

care arată că

$$\lim_{r \to 1} \int_{|t|>\delta} P_r(\tau)\, d\tau = 0.$$

Aplicînd teorema 12.55 g funcţiilor delta-reprezentative, vedem că funcţia $u(r, t)$, completată prin valorile $f(t)$ pe curba Γ, este continuă în discul Q, ceea ce trebuie demonstrat.

În teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale se demonstrează unicitatea soluţiei găsite, în clasa tuturor funcţiilor armonice [35].

c. Problema membranei conduce printre altele şi la rezultate pur matematice. Fie $u(r, t)$ o funcţie armonică în interiorul discului $\{r \leqslant 1\}$, luînd pe cercul $r = 1$ valori continue date, $f(t)$. Conform celor demonstrate în punctul b şi, ţinînd cont de observaţia asupra unicităţii, ea se exprimă, pentru $r < 1$, prin integrala Poisson (12). Coeficienţii Fourier a_n şi b_n ai funcţiei $f(t)$ tinzînd la zero pentru $n \to \infty$, seria Taylor (1) are raza de convergenţă cel puţin egală cu 1, deci reprezintă în discul $r < 1$ o funcţie analitică, pentru care funcţia (12) (funcţia armonică dată) este partea reală. Partea imaginară a seriei (11) este şi ea o funcţie armonică $v(r, t)$ conjugată lui $u(r, t)$. Astfel, orice funcţie armonică admite o

funcție armonică conjugată. Forma explicită a funcției $v(r, t)$ se obține înlocuind în formula (12) nucleul Poisson $P_r(t)$ prin funcția sa armonic conjugată. Aceasta din urmă este suma funcțiilor conjugate ale termenilor seriei (10), anume

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{1}^{\infty} r^n \sin nt = \frac{1}{2\pi}\,\frac{r\sin t}{1-2r\cos t+r^2}$$

(6.47 f). În final, obținem următoarea formulă pentru funcția căutată $v(r, t)$

$$v(r,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\,\frac{r\sin\tau}{1-2r\cos(t-\tau)+r^2}\,\mathrm{d}\tau.$$

§ 14.5. Divergența seriilor Fourier și însumire generalizată

14.51. Dacă $f(t)$ este o funcție continuă, atunci problema convergenței sumelor simetrice ale seriei sale Fourier, fără ca ipoteza din condiția Dini să fie satisfăcută, rămîne momentan deschisă. Există funcții continue ale căror sume simetrice ale seriei Fourier diverg (cel puțin în puncte izolate). Aceasta rezultă, în fond, din faptul că nucleele Dirichlet nu formează un șir delta-reprezentativ sau, mai precis, din faptul că

$$\sup_n \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\,\mathrm{d}t = \infty,$$

după cum vom vedea imediat.

Știm că o sumă parțială simetrică $s_n(t)$ a seriei Fourier a unei funcții $f(t)$ poate fi scrisă sub forma (14.37 (1))

$$s_n(f,t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+h)\,D_n(h)\,\mathrm{d}h,$$

unde

$$D_n(h) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)h}{\sin\frac{h}{2}}.$$

Pentru simplitate, presupunem $t = 0$, adică

$$s_n(f, 0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(h)\, D_n(h)\, \mathrm{d}h.$$

Deci este un șir de funcționale liniare pe spațiul Banach $C^s(Q)$ al tuturor funcțiilor complexe continue pe $[-\pi, \pi]$. Vom vedea că normele acestor funcționale, adică numerele

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(h)|\, \mathrm{d}h,$$

(12.71 m) tind către infinit. De aici, conform teoremei Banach-Steinhaus (12.74a), va rezulta că există un element al spațiului $C^s(Q)$, adică o funcție continuă $f_0(t)$ pentru care numerele $s_n(f_0, 0)$ nu sînt mărginite. Dar aceasta înseamnă că seria Fourier a funcției $f_0(t)$ nu este convergentă (chiar cea simetrică) în punctul $t = 0$.

Deci problema se reduce la stabilirea relației

$$\sup_n \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(h)|\, \mathrm{d}h = \infty.$$

Aplicînd inegalitatea $\sin \frac{h}{2} \leqslant \frac{h}{2}$ $(0 \leqslant h \leqslant \pi)$, vom scrie

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(h)|\, \mathrm{d}h = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\left|\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) h\right|}{\sin \frac{h}{2}}\, \mathrm{d}h \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\left|\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) h\right|}{h}\, \mathrm{d}h.$$

Facem substituția $(n + 1/2)h = z$; vom avea

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(h)|\, \mathrm{d}h \geqslant \frac{2}{\pi} \int_{\pi}^{(n+1/2)\pi} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t.$$

Ultima mărime crește infinit pentru $n \to \infty$, în virtutea divergenței integralei improprii a lui $|\sin t|/t$ pe intervalul $(0, \infty)$ (11.16a).

Toate acestea motivează construcția următoare. [În virtutea unei teoreme relativ recente a lui Carleson (1966), punctele de divergență ale seriei Fourier a unei funcții $f(t) \in H(-\pi, \pi)$ reprezintă o excepție : pentru orice $\varepsilon > 0$, toate aceste puncte pot fi acoperite cu o familie numărabilă de intervale cu suma lungimilor mai mică decît ε.]

Să subliniem că o funcție $f_0(t)$ cu seria Fourier divergentă, există în orice bilă $U_\rho(g) = \{f \mid \|f - g\| \leqslant \rho\}$ a spațiului $C^s(Q)$. Pentru orice funcție de acest gen, seria modulelor coeficienților Fourier diverge și ea deoarece convergența acestei serii ar atrage, conform criteriului lui Weierstrass, convergența uniformă a seriei Fourier.

14.52. Se pune problema : putem să înlăturăm acest lucru, utilizînd cîteva metode de sumare a seriilor divergente (12.76)? Considerăm metoda mediilor aritmetice (Cesàro) care constă în a trece de la șirul inițial $s_1, s_2, \ldots, \ldots, s_n, \ldots$ la șirul

$$\sigma_n = \frac{s_1 + \ldots + s_n}{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Aici apare în mod direct un rezultat pozitiv :

TEOREMĂ (L. Fejér, 1905). *Pentru orice funcție $f(t)$ continuă pe cercul $Q = \{-\pi \leqslant t \leqslant \pi\}$, șirul sumelor parțiale simetrice ale seriei Fourier $s_m(t) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikt}$ converge uniform către $f(t)$ pe Q în sensul lui Cesàro, adică are loc relația*

$$C - \lim_{m \to \infty} s_m(t) = \lim_{n \to \infty} \frac{s_0(t) + s_1(t) + \ldots + s_{n-1}(t)}{n} = f(t).$$

Demonstrație. Conform 14.37 avem

$$s_m(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) D_m(t - \tau)\, d\tau ;$$

în consecință,

$$\sigma_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} s_m(t) = \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\sum_{m=0}^{n-1} D_m(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Apoi, avem

$$\sum_{m=0}^{n-1} D_m(h) = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)h}{\sin\frac{h}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)h\sin\frac{h}{2}}{\sin^2\frac{h}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\cos mh - \cos(m+1)h}{2\sin^2\frac{h}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1-\cos nh}{2\sin^2\frac{h}{2}} = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin^2\frac{n}{2}h}{\sin^2\frac{h}{2}}.$$

Prin urmare,

$$\sigma_n(t) = \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\frac{\sin^2 n\frac{t-\tau}{2}}{\sin^2\frac{t-\tau}{2}}\,\mathrm{d}\tau. \qquad (1)$$

Funcția

$$F_n(h) = \frac{1}{2\pi n}\frac{\sin^2\frac{n}{2}h}{\sin^2\frac{h}{2}}$$

se numește *nucleul lui Fejér*. Spre deosebire de nucleul Dirichlet, această funcție este nenegativă. Apoi, dacă $f(t) = 1$, atunci $s_m(t) = 1$ și $\sigma_n(t) = 1$; din (1) rezultă că

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_n(h)\,\mathrm{d}h = 1.$$

Apoi, pentru orice $\delta > 0$, are loc relația

$$\int_{|h|>\delta} F_n(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{|h|>\delta} F_n(h)\,\mathrm{d}h \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi n} \int_{|h|>\delta} \frac{\mathrm{d}h}{\sin^2 \dfrac{h}{2}} = \frac{C(\delta)}{2\pi n} \to 0.$$

Astfel, nucleul lui Fejér are toate proprietățile unui șir delta-reprezentativ (12.55 a). Aplicînd teorema fundamentală 12.55 d asupra șirurilor delta-reprezentative, vedem că $\sigma_n(t) \to f(t)$ uniform în raport cu $t \in Q$, ceea ce trebuia demonstrat.

14.53. Sumarea prin metoda mediilor aritmetice este un caz particular al sumării cu ajutorul unei matrici Toeplitz (12.76 c). Se pune în mod natural întrebarea care sînt condițiile ce trebuie impuse unei matrici Toeplitz $T = \|q_{nm}\|$ pentru ca ea să sumeze seria Fourier a oricărei funcții continue $f(t)$ avînd ca sumă funcția respectivă. Amintim că am aplicat mai înainte matricile Toeplitz la sumarea șirurilor mărginite; dar un șir oarecare de sume parțiale ale seriei Fourier ale unei funcții continue nu este mărginită (14.51); nu considerăm deci decît matrici triunghiulare Toeplitz a căror n-a linie conține cel mult n elemente nenule și permit, prin aceasta să construim, pentru orice șir numeric $c = \{c_0, c_1, c_2, \ldots\}$, funcționalele

$$T_n(c) = \sum_{m=0}^{\infty} q_{nm}c_m = \sum_{m=0}^{n} q_{nm}c_m.$$

Prin definiție, $T - \lim c_n = \lim T_n(c)$ dacă există ultima limită.

Fie deci $T = \|q_{nm}\|$ o matrice triunghiulară Toeplitz şi $Q = \sup_n \sum_{m=1}^{\infty} |q_{nm}|$. Fie

$$s(t) = \{s_m(t)\}, \quad s_m(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\, D_m(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau \quad (m=1,2,\ldots)$$

şirul sumelor parţiale simetrice ale seriei Fourier a unei funcţii $f(t)$; $D_m(t)$ este nucleul Dirichlet

$$D_m(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}.$$

Avem

$$T_n(s) = \sum_{m=0}^{n} q_{nm} s_m(t) = \sum_{m=1}^{n} q_{nm} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\, D_m(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \left\{ \sum_{m=1}^{n} q_{nm} D_m(t-\tau) \right\} \mathrm{d}\tau = \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\, Q_n(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau,$$

unde

$$Q_n(t) = \sum_{m=1}^{n} q_{nm} D_m(t).$$

TEOREMĂ (S. Nikolski, 1948). *Dacă există o constantă* $C > 0$, *astfel încît pentru orice* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *să avem*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |Q_n(t)|\, \mathrm{d}t < C, \tag{1}$$

atunci $\lim T_n(s(t)) = f(t)$ *uniform în raport cu* $t \in [-\pi, \pi]$, *oricare ar fi funcţia continuă* $f(t)$. *În caz contrar, există o funcţie continuă* $f(t)$, *pentru care mărimile* $T_n(s(t))$ *nu au limită, de exemplu, în punctul* $t = 0$.

Demonstraţie. Condiţia (1) fiind satisfăcută, să arătăm că nucleele $Q_n(t)$ formează un şir delta-reprezentativ.

Avem mai întîi

$$\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{m=1}^{n} q_{nm} \int_{-\pi}^{\pi} D_m(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{m=1}^{n} q_{nm} \to 1 \quad (n \to \infty),$$

în virtutea proprietăților nucleului lui Dirichlet și a elementelor matricii Toeplitz. Apoi, pentru $\delta > 0$, avem

$$\left| \int_{|t|\geqslant\delta} Q_n(t)\,\mathrm{d}t \right| = \left| \sum_{m=1}^{n} q_{nm} \int_{|t|\geqslant\delta} D_m(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \sum_{m=1}^{n} |q_{nm}|\, D_{m\delta}$$

unde

$$D_{m\delta} = \left| \int_{|t|\geqslant\delta} D_m(t)\,\mathrm{d}t \right|.$$

Pentru un δ fixat, mărimea $D_{m\delta}$ tinde către zero cînd $m \to \infty$ (14.32), deci este mărginită; punem $D_\delta = \sup_m D_{m\delta}$. Pentru un $\varepsilon > 0$ dat, găsim un număr m_0 astfel încît să avem $D_{m\delta} < \varepsilon/(2Q)$ dacă $m > m_0$. Alegem apoi un număr N astfel încît $|q_{nm}| \leqslant \varepsilon/(2m_0 D_\delta)$ pentru $m \leqslant m_0$, $n > N$; acest lucru se poate face în virtutea proprietăților elementelor matricii Toeplitz. Atunci, pentru $n > N$, avem

$$\left| \int_{|t|\geqslant\delta} Q_n(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \sum_{m=0}^{m_0} |q_{nm}| D_{m\delta} + \sum_{m_0+1}^{n} |q_{nm}| D_{m\delta} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon;$$

de aici rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|t|\geqslant\delta} Q_n(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Fiind dat (1), vedem că $Q_n(t)$ este un șir delta-reprezentativ. Aplicînd teorema fundamentală asupra șirurilor delta-reprezentative 12.55 d, ajungem la convergența uniformă a șirului $T_n(s(t))$ către $f(t)$ și prima parte a teoremei este demonstrată. A doua parte se deduce din teorema lui Banach-Steinhauss în același mod ca în 14.51.

Dacă nucleul $Q_n(t)$ este nenegativ, atunci condiția (1) este îndeplinită. Această rezultă din prima formulă a de-

monstrației noastre. În particular, nucleul lui Fejér (14.52) este chiar de acest tip.

14.54. În 14.49b am aplicat încă o metodă de sumare generalizată. Anume, am văzut că dacă

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

este seria Fourier a unei funcții continue $f(t)$, atunci are loc următoarea formulă:

$$f(t) = \lim_{r \to 1} \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_n \cos nt + b_n \sin nt)\, r^n \right\}.$$

Al doilea membru al acestei egalități poate fi considerat ca un procedeu de sumare generalizată a seriei Fourier. Acest procedeu se aplică și funcțiilor $f(t)$ discontinue, deși în acest caz se obțin rezultate mai puțin consistente. Procedeul anterior se numește *însumarea generalizată în sens Poisson*.

§ 14.6. Alte sisteme ortogonale

14.61. *Ortogonalizare.* Sistemul de funcții trigonometrice reprezintă un exemplu relativ rar de sistem ortogonal gata format, deoarece în cele mai multe cazuri se construiesc sisteme ortogonale plecînd de la sisteme neortogonale prin „procedeul de ortogonalizare" descris în 12.43 g. Îl amintim pe scurt. Fie $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ un sistem de vectori într-un spațiu hilbertian H (real sau complex), finit sau nu și liniar independenți, în sensul că orice subsistem finit $f_1, \ldots, f_n$ este liniar independent în sens algebric obișnuit. Se determină vectorii $g_1, \ldots, g_n, \ldots$ cu ajutorul următoarelor relații

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= f_1, \\ g_2 &= a_{21} f_1 + f_2, \\ g_3 &= a_{31} f_1 + a_{32} f_2 + f_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_n &= a_{n1} f_1 + a_{n2} f_2 + a_{n3} f_3 + \ldots + f_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Se demonstrează că valorile constante a_{jk} din formulele (1) pot fi găsite, și aceasta într-un mod unic, astfel încît vectorii $g_1, g_2, \ldots$ să fie doi cîte doi ortogonali.

14.62. *Polinoamele Legendre.* Considerăm în spațiul hilbertian $H(-1, 1)$ sistemul funcțiilor $f_0 = 1, f_1 = t, \ldots$ $\ldots, f_n = t^n, \ldots$ și îi aplicăm teorema de ortogonalizare. Deoarece funcțiile $1, t, \ldots, t^n, \ldots$ sînt liniar independente, ipoteza teoremei este satisfăcută. Subspațiul $L_n = L(1, t, \ldots, t^n)$ este mulțimea tuturor polinoamelor de grad $k \leqslant n$. Funcția $g_n(t)$ este un polinom de grad n al cărui coeficient principal este 1. Formula explicită pentru polinomul $g_n(t)$ este

$$g_n(t) = C_n[(t^2 - 1)^n]^{(n)} \qquad (1)$$

oricare ar fi n.

Pentru a verifica această, este suficient, ținînd cont de unicitatea menționată în 14.61, să constatăm că polinomul (1), care este evident de gradul n, este ortogonal cu funcțiile $1, t, \ldots, t^{n-1}$.

LEMĂ. *Funcția* $(t^2 - 1)^n$ *este nulă în punctele* 1 *și* -1 *la fel ca și derivatele sale succesive, înțelegînd aici și pe cea de ordin* $(n - 1)$*-a; derivata sa de ordin* n *este nenulă în aceste puncte.*

Demonstrația rezultă din reprezentarea $(t^2 - 1)^n = (t + 1)^n(t - 1)^n$ și din formula lui Leibniz 8.12(3). În particular,

$$[(t^2 - 1)^n]^{n)}|_{t=1} = [(t + 1)^n(t - 1)^n]^{n)}|_{t=1} = 2^n \cdot n! \qquad (2)$$

TEOREMĂ. *Polinomul* (1) *este ortogonal, în spațiul* $H(-1, 1)$, *funcțiilor* $1, t, \ldots, t^{n-1}$.

Demonstrație. Integrînd prin părți, pentru $k < n$ se găsește:

$$(t^k, [(t^2 - 1)^n]^{(n)}) = \int_{-1}^{1} t^k[(t^2 - 1)^n]^{(n)}\, dt =$$

$$= t^k[(t^2 - 1)^n]^{(n-1)}\Big|_{-1}^{1} - k\int_{-1}^{1} t^{k-1}[(t^2 - 1)^n]^{(n-1)}\, dt.$$

Termenul fără integrală se anulează conform lemei. Se integrează prin părți integrala care rămîne și se continuă pînă ce exponentul lui t devine nul:

$$(t^k, [(t^2-1)^n]^{(n)}) = -kt^{k-1}[(t^2-1)^n]^{(n-2)}\Big|_{-1}^{1} + k(k-1)\int_{-1}^{1} t^{k-2}[(t^2-1)^n]^{(n-2)}\,dt = \ldots$$

$$\ldots = \pm k!\int_{-1}^{1}[(t^2-1)^n]^{(n-k)}dt = \pm k![(t^2-1)^n]^{(n-k-1)}\Big|_{-1}^{1} = 0,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Este comod, pentru calcule, să înlocuim funcțiile ortogonale obținute prin funcții proporționale, care sînt egale cu 1 pentru $t = 1$. Pentru aceasta, în (1) punem $C_n = 1/(2^n \cdot n!)$ ținînd cont de (2). Polinoamele care se obțin au forma

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n \cdot n!}[(t^2-1)^n]^{(n)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

și se numesc *polinoame Legendre*.

În particular,

$$P_0(t) = 1,\ P_1(t) = t,\ P_2(t) = \frac{3}{2}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right),$$

$$P_3(t) = \frac{5}{2}\left(t^3 - \frac{3}{5}t\right), \ldots$$

14.63. Ne propunem să găsim norma polinomului Legendre $P_n(t)$. Avem

$$(P_n, P_n) = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}[(t^2-1)^n]^{n}[(t^2-1)^n]^{(n)}dt =$$

$$= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}[(t^2-1)^n]^{(n)}[(t^2-1)^n]^{(n-1)}\Big|_{-1}^{1} -$$

$$- \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}[(t^2-1)^n]^{n+1}[(t^2-1)^n]^{(n-1)}\,dt.$$

Termenul fără integrală se anulează conform lemei. Continuînd integrarea prin părţi pînă cînd ordinul derivatei din al doilea factor de sub semnul integrală devine nul, obţinem

$$(P_n, P_n) = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}[(t^2-1)^n]^{(2n)}(t^2-1)^n\,dt =$$

$$= \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(t-1)^n(t+1)^n\,dt.$$

Integrăm încă o dată prin părţi, coborînd exponentul lui $t-1$:

$$(P_n, P_n) = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left[(t-1)^n\frac{(t+1)^{n+1}}{n+1}\Big|_{-1}^{1} - \right.$$

$$\left. - n\int_{-1}^{1}(t-1)^{n-1}\frac{(t+1)^{n+1}}{n+1}\,dt\right] =$$

. . . . . .

$$= \frac{(-1)^n(2n)!(-1)^n n!}{2^{2n}(n!)^2(n+1)\ldots 2n}\int_{-1}^{1}(t+1)^{2n}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2^{2n}}\frac{(t+1)^{2n+1}}{2n+1}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{2n+1}.$$

În final,

$$\|P_n\| = \sqrt{(P_n, P_n)} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}. \qquad (1)$$

14.64. *Dezvoltări după polinoame Legendre.* Oricărei funcţii $f(t)$, $f(t) \in H(-1, 1)$, putem să-i facem să corespundă seria Fourier-Legendre :

$$f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n P_n(t). \qquad (1)$$

Conform cu 14.17, coeficienții γ_n (*coeficienții Fourier-Legendre*) sînt calculați conform formulelor

$$\gamma_n = \frac{(f, P_n)}{(P_n, P_n)} = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(t) P_n(t)\, dt.$$

La fel ca în 14.24, pentru seriile Fourier clasice se demonstrează că seria Fourier-Legendre (1) converge către $f(t)$ în sensul mediei pătratice:

$$\left\| f(t) - \sum_{k=0}^{n} \gamma_k P_k(t) \right\|^2 = \int_{-1}^{1} \left| f(t) - \sum_{k=0}^{n} \gamma_k P_k(t) \right|^2 dt \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Avem egalitatea lui Parseval

$$\|f\|^2 = \int_{-1}^{1} |f(t)|^2\, dt = \sum_{0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} |\gamma_n|^2.$$

14.65. Vom enunța teoremele asupra convergenței seriei Fourier-Legendre în puncte izolate și asupra convergenței uniforme, analoage cu cele din § 14.3.

O sumă parțială a seriei Fourier-Legendre se pune sub forma

$$s_n(t) = \sum_{0}^{n} \gamma_k P_k(t) = \sum_{0}^{n} \frac{(2k+1) P_k(t)}{2} \int_{-1}^{1} f(\tau)\, P_k(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{-1}^{1} f(\tau) \sum_{0}^{n} (2k+1) \frac{P_k(\tau)\, P_k(t)}{2}\, d\tau.$$

Funcția

$$L_n(t, \tau) = \sum_{0}^{n} \frac{P_k(\tau)\, P_k(t)}{2} (2k+1)$$

se numește *nucleul Fourier-Legendre*. Sumarea poate fi efectuată explicit; rezultatul se numește *identitatea lui Cristoffel-Darboux* (vezi exerc. 11)

$$L_n(t, \tau) = \frac{n+1}{2} \frac{P_{n+1}(\tau) P_n(t) - P_n(\tau)\, P_{n+1}(t)}{t - \tau}.$$

Operînd cu nucleul lui Fourier-Legendre, la fel ca și cu nucleul lui Dirichlet, se poate demonstra următoarea teoremă : dacă o funcție $f(t) \in H(-1, 1)$ este continuă pentru $t = t_0 \in (-1, 1)$ și are derivate finite $f'(t_0 - 0)$ și $f'(t_0 + 0)$, atunci seria Fourier-Legendre 14.64(1) converge în punctul t_0 către valoarea $f(t_0)$. Această convergență este uniformă pe orice mulțime $E \subset [-1 + \delta, 1 - \delta]$, unde $f'(t_0 - 0)$ și $f'(t_0 + 0)$ sînt mărginite. Într-un punct de discontinuitate de prima speță (cu valorile $f'(t_0 - 0)$ și $f'(t_0 + 0)$ finite), seria 14.64(1) converge către $\frac{1}{2}[f(t_0 - 0) + f(t_0 + 0)]$.

În [45] se poate găsi o demonstrație a acestei teoreme.

14.66. Ca exemplu de aplicație a polinoamelor Legendre în fizica matematică rezolvăm următoarea problemă (conform 14.49b). Ne propunem să găsim soluția ecuației Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

în bila $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$, cu condiția ca pe frontiera bilei, adică pentru $r = 1$, funcția u să ia valori date $u = f(\theta)$, care nu depind decît de unghiul θ format de vectorul $\{x, y, z\}$ cu axa z. Pentru a găsi soluția, procedăm astfel : după ce am dezvoltat funcția $f(\theta)$ după polinoame Legendre în $\cos\theta$:

$$f(\theta) = \sum_0^\infty \gamma_n P_n(\cos\theta),$$

se obține funcția căutată $u = u(r, \theta)$ după formula

$$u(r, \theta) = \sum_0^\infty \gamma_n r^n P_n(\cos\theta),$$

(vezi, de exemplu, [23]).

14.67. *Alte exemple de sisteme ortogonale.* În fizica matematică se întîlnesc multe sisteme ortogonale. Vom da pe cele mai folosite. Ele se obțin toate prin același procedeu : pe intervalul $-\infty \leqslant a \leqslant x \leqslant b \leqslant +\infty$ se consideră o

funcție $p(x)$ nenegativă („funcție pondere") care servește pentru a construi spațiul funcțional $H_{p(x)}[a, b]$ cu

$$(f, g)_{p(x)} = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,p(x)\,dx$$

pentru produsul scalar. Apoi, se aplică funcțiilor $1, x, x^2, \ldots$, procedeul de ortogonalizare descris într-un mod general în 14.61.

a. Pentru $a = -1$, $b = 1$, $p(x) = 1$, se obțin evident *polinoamele Legendre*.

b. Pentru $a = -1$, $b = 1$, $p(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$, se ajunge la *polinoamele Cebîșev:*

$$T_n(x) = \cos\,(n \arccos x);$$

aceste polinoame se transformă în funcții de cos-ul dacă se face substituția $x = \cos t$, spațiul $H_{p(x)}(-1, 1)$ fiind izomorf cu spațiul $H_1(0, \pi)$.

c. Pentru $a = 0$, $b = 1$, $p(x) = x^{q-1}(1 - x)^{p-q}$ se obțin *polinoamele Jacobi (polinoame hipergeometrice).*

d. Pentru $a = -\infty$, $b = \infty$, $p(x) = e^{-x^2}$ avem *polinoamele Hermite*

$$H_n(x) = C_n e^{x^2}[e^{-x^2}]^{(n)}.$$

e. Pentru $a = 0$, $b = \infty$, $p(x) = e^{-x}$, avem *polinoamele Laguerre*:

$$L_n(x) = C_n e^{x}[x^n e^{-x}]^{(n)}.$$

Fizica matematică, mai ales în probleme de oscilații, a recurs de asemenea la numeroase sisteme ortogonale de funcții transcendente (vezi [11]). Teoria generală a sistemelor ortogonale de funcții este expusă în [23] și [2].

EXERCIȚII

1. Dezvoltînd în serie Fourier funcția impară care este egală cu $\pi/4$ pentru $0 < x < \pi$, să se obțină egalitățile lui Euler

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4},$$

$$1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} \ldots = \frac{\pi}{4},$$

$$1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \ldots = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

2. Dezvoltînd în serie Fourier funcția pară, care este egală cu x pentru $0 < x < \pi$, să se obțină egalitățile lui Euler

$$+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots=\frac{\pi^2}{6},$$

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\ldots=\frac{\pi^2}{12}.$$

3. S se sumeze seriile Fourier

$$+\frac{\cos x}{1}+\frac{\cos 2x}{2}+\ldots+\frac{\cos nx}{n!}+\ldots,$$

$$\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{\sin nx}{n!}+\ldots$$

4. Dacă sumele parțiale ale unei serii Fourier formează în spațiul $C(-\pi, \pi)$, o mulțime precompactă (3.93a), atunci seria Fourier converge uniform.

5. Să se demonstreze convergența sumelor simetrice ale unei serii Fourier într-un punct în vecinătatea căruia funcția $f(x)$ dezvoltată este monotonă.

6. (Continuare) Să se demonstreze că sumele simetrice ale seriei Fourier a unei funcții $f(t)$ converg uniform pe orice interval interior unui interval pe care funcția $f(t)$ este continuă și monotonă.

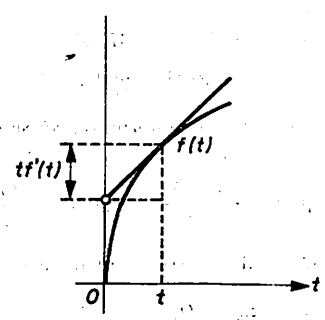


Fig. 14.7

7. Presupunem că o funcție $f(t)$ verifică următoarele condiții:

1) $f(-t) = f(t)$, $f(0) = 0$, $f(\pi - t) = f(t)$, $f(t + 2\pi) = f(t)$;

2) $f(t)$ este continuă;

3) $f'(t)$ este continuă și nedescrescătoare pentru $0 < t \leqslant \pi/2$;

4) $\lim\limits_{t \searrow 0} t\dfrac{f'(t)}{f(t)} = 0$; altfel spus, segmentul determinat de tangenta la curba $y = f(x)$ pe axa ordonatelor este echivalent, pentru $t \searrow 0$, cu ordonata punctului de tangență (fig. 14.7).

Să se arate că în seria Fourier a funcției $f(t)$,

$$\sum_1^\infty b_n \sin nt,$$

coeficienții b_n au forma

$b_n = 0$ pentru n par, $b_n = \dfrac{\theta_n}{n} f\left(\dfrac{\pi}{n}\right) + \varepsilon_n$ pentru n impar, unde

$$\theta_n \to 4/\pi, \quad \sum_1^\infty |\varepsilon_n| < \infty.$$

8. Folosind soluția exercițiului 7, să se dea un exemplu de funcție continuă avînd seria Fourier uniform convergentă pe $[-\pi, \pi]$ și astfel încît seria coeficienților Fourier să nu fie absolut convergentă.

9. Folosind soluția exercițiului 7, să se dea un exemplu de funcție (t) pentru care seria ei Fourier

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

converge uniform pe $[-\pi, \pi]$, în timp ce fiecare din seriile

$$\sum_0^\infty c_n e^{int}, \quad \sum_{-\infty}^0 c_n e^{int}$$

au puncte de divergență.

10. Fie $p(x)$ o funcție pondere (14.67) și

$$Q_n(x) = \alpha_n x^n + \beta_n x^{n-1} + \gamma_{n-2}^{(n)} x^{n-2} + \ldots + \gamma_0^{(n)}$$

șirul corespunzător de polinoame ortonormate. Să se demonstreze formula de recurență

$$xQ_n(x) = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} Q_{n+1}(x) + \frac{\beta_n - \beta_{n+1}}{\alpha_n} Q_n(x) + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} Q_{n-1}(x). \qquad (1)$$

11. (Continuare) Să se demonstreze identitatea Cristoffel-Darboux:

$$\sum_{k=0}^{n} Q_k(x) Q_k(t) = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \frac{Q_n(x)Q_{n+1}(t) - Q_n(t) Q_{n+1}(x)}{t - x}.$$

12. (Continuare) Să se demonstreze că polinomul $Q_n(t)$ $(n > 1)$ are n rădăcini în intervalul $[a, b]$.

NOTĂ ISTORICĂ

În jurul anilor 1750, în legătură cu studiul coardei vibrante, între Euler și d'Alembert a avut loc o dispută avînd ca obiect definiția noțiunii de funcție — pentru d'Alembert aceasta era dată printr-o expresie anali-

tică, în timp ce Euler definea funcția printr-o curbă arbitrar trasată. În această dispută a fost examinată printre altele ideea tînărului D. Bernoulli asupra posibilității de reprezentare a oricărei curbe pe intervalul $[0, 2\pi]$ printr-o serie de sinuși și cosinuși: Euler și d'Alembert au avut fiecare motive pentru a respinge această posibilitate, mai ales că Bernoulli nu putuse stabili reguli pentru determinarea coeficienților seriei. Chestiunea nu a fost tranșată decît în 1805, cînd Fourier a propus formule pentru „coeficienții Fourier" (14.21 a).

Descoperirea lui Fourier a produs un efect extraordinar și, în tot secolul al XIX-lea, a fost considerată una din cele mai remarcabile teoreme ale analizei, cu toate că ea a fost obținută printr-o simplă integrare termen cu termen a unei serii trigonometrice scrisă formal și înmulțită cu o funcție trigonometrică dată. Cu toate definițiile riguroase ale convergenței și ale integralei, Fourier nu a putut demonstra convergența seriei către funcția dezvoltată. Dirichlet a făcut aceasta în anul 1829, bazîndu-se pe definiții riguroase (Cauchy, 1821) pentru funcții monotone pe porțiuni. „Condiția lui Dini" a fost formulată de către Dini în 1880. Primul exemplu de divergență a unei serii Fourier pentru o funcție continuă a fost dat de către Du Bois-Reymond (1876). „Polinoamele Legendre" au fost introduse de Legendre în 1785 pentru a rezolva ecuația Laplace în coordonate sferice. Totuși formula explicită 14.62(3) a fost găsită de Rodrigues de abia în 1815. Dezvoltarea după polinoame Legendre a fost dată de către Neumann (1862) pentru funcții analitice și de către Hobson (1908) în cazul general. Datorită lucrărilor lui Hilbert (1906—1911) a devenit posibilă geometrizarea teoriei dezvoltărilor ortogonale în contextul general al spațiilor Hilbert.

Capitolul 15

TRANSFORMAREA FOURIER

Să renunț la mîncare numai pentru că nu înțeleg în întregime procesul digestiei?

Olivier Heaviside

§ 15.1. Integrala Fourier și inversarea ei

15.11. Cînd vrem să reprezentăm o funcție $\varphi(x)$ periodică de perioadă 2π ca o suprapunere de armonice, facem apel la seria Fourier

$$\varphi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}, \qquad (1)$$

Dacă este vorba de o funcție de perioadă $2\pi l$, seria Fourier corespunzătoare ia forma

$$\varphi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\frac{x}{l}}, \qquad (2)$$

unde coeficienții a_n sînt determinați de formula

$$a_n = \frac{1}{2\pi l} \int_{-\pi l}^{\pi l} \varphi(\xi)\, e^{-in\frac{\xi}{l}}\, d\xi. \qquad (3)$$

Formula (3) se obține înmulțind (2) prin $e^{-in\frac{x}{l}}$ și integrînd apoi în raport cu x de la $-\pi l$ la πl.

Din (2) și (3) rezultă că

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-\pi l}^{\pi l} \varphi(\xi) e^{\frac{in}{l}(x-\xi)}\, d\xi. \qquad (4)$$

Este natural să încercăm să efectuăm în formula (4) trecerea la limită pentru $l \to \infty$, pentru a reprezenta dacă este posibil, orice funcție $\varphi(x)$ definită pe toată axa $-\infty <$

$< x <\infty$ ca suprapunere de armonice. Trecerea formală la limită, conduce la formula:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{i\sigma(x-\xi)}\, d\xi \right\}, \qquad (5)$$

unde simbolul σ desemnează variabila continuă care se obține în locul variabilei discrete $\sigma_n = n/l$. Deci formula căutată pentru dezvoltarea unei funcții $\varphi(x)$ după armonice trebuie să aibă forma

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma) e^{i\sigma x}\, d\sigma, \qquad (6)$$

unde

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-i\sigma\xi}\, d\,\xi. \qquad (7)$$

Am întîlnit formula (7) în capitolul tratînd integrale improprii (11.32); să ne amintim că funcția $\psi(\sigma)$, definită prin formula (7), se numește *transformata Fourier* (sau *integrala Fourier*) *a funcției* $\varphi(x)$. Formula (6) este numită *formula de inversare a transformării Fourier*; se spune de asemenea că ea definește transformarea inversă Fourier. Transformarea inversă (6) nu diferă de fapt de transformarea (7) decît prin semnul exponentului și coeficientul $1/(2\pi)$.

15.12. În loc să fundamentăm legitatea trecerii la limită în formula 15.11(5), vom arăta direct că 15.11(7) implică 15.11(5), dacă se impun anumite condiții funcției $\varphi(x)$.

În primul rînd se presupune că funcția $\varphi(x)$ este continuă pe porțiuni și absolut integrabilă pe toată axa $-\infty < x < \infty$. Aceasta asigură existența integralei 15.11(7) pentru orice valoare a lui σ, $-\infty < \sigma < \infty$.

Iată prima consecință a ipotezei făcute: funcția $\varphi(\sigma)$ este mărginită și continuă pentru orice σ și tinde către zero cînd $|\sigma| \to \infty$. Prima afirmație decurge din estimarea

$$|\psi(\sigma)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\xi)|\, d\,\xi.$$

Integrabilitatea absolută a funcției $\varphi(x)$ implică convergența uniformă în raport cu parametrul $\sigma \in (-\infty, \infty)$ a integralei Fourier 15.11(7), conform criteriului 11.47 a. Ținînd cont de teorema 11.43 și de continuitatea funcției $e^{i\sigma\xi}$, rezultă continuitatea funcției $\psi(\sigma)$. Pentru a demonstra a treia afirmație, găsim, pentru un $\varepsilon > 0$ dat, un număr A, astfel încît

$$\int_{-\infty}^{-A} |\varphi(\xi| \, d\xi + \int_{A}^{\infty} |\varphi(\xi)| \, d\xi < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Acum aplicăm lema 14.32 intervalului $[-A, A]$; vom vedea că există un σ_0 astfel încît, pentru $|\sigma| > \sigma_0$, să avem

$$\left| \int_{-A}^{A} \varphi(\xi) e^{-i\sigma\xi} \, d\xi \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Prin urmare, pentru $|\sigma| > \sigma_0$, are loc relația

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-i\sigma\xi} \, d\xi \right| \leqslant \int_{-\infty}^{-A} |\varphi(\xi)| \, d\xi + \left| \int_{-A}^{A} \varphi(\xi) e^{-i\sigma\xi} \, d\xi \right| +$$

$$+ \int_{A}^{\infty} |\varphi(\xi)| \, d\xi < \varepsilon,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

15.13. Înainte de a demonstra formula 15.11(5), să considerăm o integrală improprie specială de speța a treia :

$$I_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iqt} - e^{-ipt}}{t} \, dt \quad (p, q > 0).$$

Funcția de sub semnul integrală este continuă pe toată dreapta reală (se găsește ușor valoarea limită $i(p + q)$

pentru $t=0$). Convergența integralei I_{pq} rezultă din 11.17 b. Să o calculăm. Avem :

$$I_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\cos qt - \cos pt}{t} + \mathrm{i}\,\frac{\sin qt}{t} + \mathrm{i}\,\frac{\sin pt}{t} \right\} \mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos qt - \cos pt}{t}\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin qt}{t}\,\mathrm{d}t +$$

$$+ \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin pt}{t}\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}. \qquad (1)$$

Prima integrală se anulează din cauza imparității funcției de sub integrală, pentru a doua și a treia am utilizat formula 11.33 (1).

Într-un mod analog, avem

$$\int_{-T}^{T} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}qt} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}pt}}{t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}\int_{-T}^{T} \frac{\sin qt}{t}\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_{-T}^{T} \frac{\sin pt}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Deoarece integrala improprie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha t}{t}\,\mathrm{d}t$$

converge uniform în raport cu parametrul $\alpha \geqslant \alpha_0 > 0$ (11.49b), se poate găsi pentru orice $\varepsilon > 0$ un T_0 astfel încît, oricare ar fi $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$ și $T \geqslant T_0$, să avem

$$\left| \int_{-T}^{T} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}qt} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}pt}}{t}\,dt \right| < \varepsilon. \qquad (2)$$

15.14. Trecînd la demonstrarea formulei 15.11(5), formulăm în mod riguros propoziția pe care o vom demonstra :

TEOREMĂ. *Fie $\varphi(x)$ o funcție continuă pe porțiuni absolut integrabilă pe dreapta $-\infty < x < \infty$ și care verifică pentru un x, condiția lui Dini : există un $\delta > 0$ astfel încît*

$$\int_{|t|<\delta} \left| \frac{\varphi(x+t) - \varphi(x)}{t} \right| \mathrm{d}t < \infty.$$

Atunci are loc relația

$$\varphi(x) = \lim_{\substack{p\to\infty \\ q\to\infty}} \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma=-p}^{q} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, e^{i\sigma(x-\xi)}\, d\xi \right\} d\sigma. \qquad (1)$$

unde limita din membrul al doilea există cînd p și q tind la infinit independent unul de celălalt.

Demonstrație. Pentru $p > 0$, $q > 0$, oarecare, punem

$$\varphi_{p,q}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma=-p}^{q} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, e^{i\sigma(x-\xi)}\, d\xi \right\} d\sigma.$$

Integrala dintre acolade converge uniform, în raport cu σ și putem inversa ordinea de integrare în raport cu σ și ξ conform 11.44 :

$$\varphi_{p,q}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \left\{ \int_{-p}^{q} e^{i\sigma(x-\xi)}\, d\sigma \right\} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, \frac{e^{iq(x-\xi)} - e^{-ip(x-\xi)}}{x-\xi}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)\, \frac{e^{iqt} - e^{-ipt}}{t}\, dt.$$

Ultima transformare se face cu ajutorul substituției $x - \xi = t$. Cu ajutorul lui 15.13(1), diferența $\varphi_{p,q}(x) - \varphi(x)$ poate fi notată astfel

$$\varphi_{p,q}(x) - \varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x+t) - \varphi(x)]\, \frac{e^{iqt} - e^{-ipt}}{t}\, dt. \qquad (2)$$

Împărțim această integrală în două :

$$\frac{}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|\leq T} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|\geq T} \qquad (T \geqslant 1). \qquad (3)$$

Al doilea termen se pune sub forma

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|\geqslant T}\varphi(x+t)\frac{e^{iqt}-e^{-ipt}}{t}\,dt - \\ -\frac{\varphi(x)}{2\pi i}\int_{|t|\geqslant T}\frac{e^{iqt}-e^{-ipt}}{t}\,dt. \qquad (4)$$

Deoarece $\varphi(x+t)$ este absolut integrabilă ca funcție de t, iar factorul $\dfrac{e^{iqt}-e^{-ipt}}{t}$ nu depășește în modul valoarea 2 pentru $|t|\geqslant T\geqslant 1$, vedem că primul termen al diferenței (4) tinde la zero cînd $T\to\infty$, independent de valorile lui p și q superioare, de exemplu, lui 1. Al doilea termen al lui (4) are aceeași proprietate, conform 15.13(2).

Punem primul termen din (3) sub forma

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|<T}\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{t}(e^{iqt}-e^{-ipt})\,dt,$$

funcția $\dfrac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{t}$ fiind absolut integrabilă pe intervalul $|t|\leqslant T$ (condiția lui Dini!) acest termen tinde către zero, conform lemei 14.32, cînd p și q cresc, de unde

$$\lim_{\substack{p\to\infty\\ q\to\infty}}\varphi_{p,q}(x)=\varphi(x), \qquad (5)$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Demonstrația dată stabilește de asemenea convergența uniformă a integralei (1) în raport cu parametrul x, care parcurge o mulțime mărginită E a dreptei $-\infty<x<\infty$, dacă pe această mulțime are loc uniform condiția lui Dini (14.35); se demonstrează ca și teorema pentru serii Fourier.

15.15. Dacă într-un punct x_0 condiția lui Dini nu este satisfăcută, atunci teorema 15.14 nu mai este valabilă și

integrala Fourier pentru funcţia $\varphi(x)$ poate să fie divergentă. La fel ca în cazul seriilor Fourier, relaţia

$$\varphi(x_0) = \lim \varphi_{p,q}(x_0) = \lim_{\substack{p\to\infty \\ q\to\infty}} \frac{1}{2\pi} \int_{-p}^{q} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{i\sigma(x-\xi)}\, d\xi \right\} d\sigma$$

nu poate fi satisfăcută decît în sensul unei limite generalizate. Considerăm pentru început „integrala parţială" simetrică

$$\varphi_{p,p}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-p}^{p} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{i\sigma(x-\xi)}\, d\xi \right\} d\sigma,$$

pe care o vom nota în continuare prin $\varphi_p(x)$. Plecînd de la 15.14(2) avem pentru $\varphi_p(x)$ următoarea reprezentare

$$\varphi_p(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t) \frac{e^{ipt} - e^{-ipt}}{t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t) \frac{\sin pt}{t}\, dt. \qquad (1)$$

Are loc o teoremă a cărei demonstraţie este complet analoagă cu cea a teoremei 14.38 :

TEOREMĂ. *Fie x_0 un punct de discontinuitate de prima speţă a funcţiei, astfel încît să existe limitele $\varphi(x_0 - 0)$ şi $\varphi(x_0 + 0)$. Dacă sînt satisfăcute condiţiile lui Dini unilaterale, adică integralele*

$$\int_{x_0}^{x_0+\delta} \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0 + 0)}{x} \right| dx, \quad \int_{x_0-\delta}^{x_0} \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0 - 0)}{x} \right| dx$$

converg pentru un $\delta > 0$, atunci are loc relaţia

$$\varphi(x_0) = \lim_{p\to\infty} \varphi_p(x_0) = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-p}^{p} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, e^{i\sigma(x-\xi)}\, d\xi \right\} d\sigma.$$

15.16. Studiem acum mediile aritmetice asociate unei integrale Fourier, în analogie cu mediile aritmetice ale unei serii Fourier (tratate în 14.52), fără a presupune satisfăcută condiţia lui Dini. În loc de media aritmetică a sumelor simetrice ale seriei Fourier, considerăm, în mod natural, media integrală a integralelor simetrice $\varphi_\nu(x)$ (15.15)

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{N}\int_0^N \varphi_\nu(x)\,\mathrm{d}\nu. \tag{1}$$

Înlocuind valoarea lui $\varphi_\nu(x)$ din 15.15(1) găsim :

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{\pi N}\int_0^N \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)\,\frac{\sin \nu t}{t}\,\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}\nu =$$

$$= \frac{1}{\pi N}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x+t)}{t}\left\{\int_0^N \sin \nu t\,\mathrm{d}\nu\right\}\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{\pi N}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x+t)}{t}\,\frac{1-\cos Nt}{t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{2}{\pi N}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)\,\frac{\sin^2 \frac{N}{2}}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Expresia

$$F_N(t) = \frac{2}{\pi N}\,\frac{\sin^2 \frac{N}{2}\,t}{t^2} \tag{2}$$

se numeşte *nucleul lui Fejér pentru integrala Fourier*. Nucleul lui Fejér are următoarele proprietăţi :

1) $F_N(t) \geqslant 0$;

2) $\int_{-\infty}^{\infty} F_N(t)\,\mathrm{d}t = 1$;

3) $\int_{|t|>\delta} F_N(t)\,dt \to 0$ pentru $N \to \infty$, oricare ar fi $\delta > 0$.

Inegalitatea (1) este imediată. Egalitatea 2) este stabilită în 11.49b. Relația 3) rezultă din estimarea

$$\int_{|t|>\delta} F_N(t)\,dt \leqslant \frac{2}{\pi N} \int_{|t|>\delta} \frac{}{t^2} = \frac{4}{\pi N \delta}.$$

Egalitatea 2) implică relația

$$\sigma_N(x) - \varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x+t) - \varphi(x)]\, F_N(t)\,dt. \qquad (3)$$

Vom demonstra următorul rezultat.

TEOREMĂ. *Dacă o funcție $\varphi(x)$ este absolut integrabilă și uniform continuă pe o mulțime $E \subset \mathbb{R}$, atunci mediile aritmetice $\sigma_N(x)$ ale integralei sale Fourier converg uniform pe E către $\varphi(x)$.*

Demonstrație. Pentru orice $\varepsilon > 0$ fixat, găsim un $\delta > 0$, astfel încît $|\varphi(x+t) - \varphi(x)| < \varepsilon/2$ de îndată ce $|t| < \delta$, $x \in E$. Aplicînd proprietățile 2) și 3) ale nucleului lui Fejér, au loc relațiile

$$|\sigma_N(x) - \varphi(x)| \leqslant \int_{|t|<\delta} |\varphi(x+t) - \varphi(x)|\, F_N(t)\,dt +$$

$$+ \int_{|t|>\delta} |\varphi(x+t) - \varphi(x)|\, F_N(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\infty}^{\infty} F_N(t)\,dt + 2 \sup_{-\infty<x<\infty} |\varphi(x)| \int_{|t|>\delta} F_N(t)\,dt.$$

Primul termen nu depășește $\varepsilon/2$ pentru orice N, al doilea devine $< \varepsilon/2$ pentru N suficient de mare, de exemplu, pentru $N > N_0$. În final, pentru $N > N_0$, avem

$$|\sigma_N(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

oricare ar fi $x \in E$, ceea ce demonstrează teorema.

15.17. Ca o consecință, rezultă teorema de unicitate a transformatei Fourier.

Dacă transformata Fourier $\psi(\sigma)$ a unei funcții $\varphi(x)$, absolut integrabile și continue pe porțiuni pe axa $-\infty < x < \infty$, este nulă pentru orice σ, atunci $\varphi(x)$ este nulă peste tot, cu excepția eventual a unei mulțimi care nu are nici un punct limită la distanță finită pe axa x.

Într-adevăr, avem $\psi(\sigma) = 0$, $\varphi_N(x) = 0$, $\sigma_N(x) = 0$ pentru orice x, deci $\varphi(x) = \lim_{N\to\infty} \sigma_N(x) = 0$ în interiorul oricărui interval finit de continuitate a lui $\varphi(x)$; faptul că punctele de discontinuitate ale funcției $\varphi(x)$ formează o mulțime cel mult finită pe fiecare interval finit al axei x demonstrează teorema.

§ 15.2. Alte proprietăți ale integralei Fourier

În cele ce urmează notăm cu F operatorul Fourier:

$$F[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\sigma x}\, dx.$$

Inversa integralei Fourier se notează prin F^{-1}:

$$F^{-1}[\psi(\sigma)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma) e^{i\sigma x}\, d\sigma.$$

15.21. *Legătura dintre comportarea unei funcții $\varphi(x)$ pentru $|x| \to \infty$ și derivabilitatea transformatei sale Fourier.* Știm că transformata Fourier $\psi(\sigma)$ a unei funcții $\varphi(x)$ absolut integrabile este o funcție mărginită și continuă de σ, $-\infty < \sigma < \infty$, care tinde către zero pentru $|\sigma| \to \infty$. Presupunem acum că nu numai $\varphi(x)$ dar și $x\varphi(x)$ este absolut integrabilă pe axa $-\infty < x < \infty$. Putem atunci să spunem că funcția $\psi(\sigma)$ este derivabilă. Într-adevăr, derivata formală în raport cu parametrul σ a integralei Fourier

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{-i\sigma x}\, dx = \psi(\sigma)$$

conduce la integrala

$$-\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma x}\,\mathrm{d}x,$$

care este absolut convergentă și uniform convergentă în raport cu σ. În virtutea teoremei 11.45a, funcția $\psi(\sigma)$ este derivabilă și avem

$$\psi'(\sigma) = -\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma x}\,\mathrm{d}x.$$

Se ajunge la formula sugestivă

$$\mathrm{i}\,\mathrm{F}'[\varphi] = \mathrm{F}[x\varphi], \tag{1}$$

care arată că operația de înmulțire cu x este transformată prin operatorul Fourier în operația $\mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}$. Ca transformată a unei funcții absolut integrabile, funcția $\psi'(\sigma)$ este de asemenea continuă, mărginită și tinde la zero, pentru $|\sigma| \to \infty$. Dacă funcțiile $x\varphi(x)$, $x^2\varphi(x)$, ..., $x^m\varphi(x)$ sînt absolut integrabile pe axa x, odată cu funcția $\varphi(x)$, se poate continua derivarea; rezultă că funcția $\psi(\sigma) = \mathrm{F}[\varphi]$ are derivatele succesive, inclusiv pe cea de ordin m, continue, mărginite și tinzînd către zero pentru $|\sigma| \to \infty$; are loc formula

$$\mathrm{i}^k\mathrm{F}^{(k)}[\varphi] = \mathrm{F}[x^k\varphi] \quad (k = 0, 1, \ldots, m). \tag{2}$$

Dacă toate produsele $x^m\varphi(x)$ sînt absolut integrabile ($m = 0, 1, \ldots$), atunci funcția $\mathrm{F}[\varphi] = \psi(\sigma)$ are toate derivatele în σ, fiecare derivată fiind continuă și tinzînd către zero cînd $|\sigma| \to \infty$.

Vedem că pe măsură ce se impun condiții mai tari de descreștere spre infinit a funcției $\varphi(x)$, se obține un grad crescut de netezime pentru funcția $\psi(\sigma)$.

15.22. Să urmărim cum se îmbunătățesc proprietățile de derivabilitate ale funcției $\varphi(\sigma)$, cînd se impun condiții suplimentare privind comportarea funcției $\varphi(x)$ la infinit.

a. Presupunem că produsul $\varphi(x)\mathrm{e}^{b|x|}$, cu o constantă fixă $b > 0$, este integrabil. Atunci putem spune că transfor-

mata Fourier $\psi(\sigma)$ a funcției $\varphi(x)$ este o funcție nu numai infinit derivabilă, dar chiar și analitică. Într-adevăr, integrala Fourier

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\sigma x}\, dx$$

este acum definită nu numai pentru σ reali, dar și pentru anumiți σ complecși: dacă punem $s = \sigma + i\tau$ (σ, τ reali), avem

$$\psi(\sigma + i\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\sigma x} e^{\tau x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-isx}\, dx, \qquad (1)$$

și integrala converge pentru $|\tau| \leqslant b$, adică într-o bandă orizontală a s-planului complex. Funcția de variabila complexă s obținută este analitică în orice punct interior al benzii; într-adevăr, integrala converge uniform într-o vecinătate a punctului s (conținut în întregime în bandă), ceea ce permite să aplicăm teorema 11.45 b. Funcția $\psi(s)$ este mărginită în toată banda, deoarece

$$|\psi(s)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| e^{|\tau||x|}\, dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| e^{b|x|}\, dx.$$

Se poate spune că funcția $\psi(s) = \psi(\sigma + i\tau)$ converge către zero uniform în raport cu τ, $|\tau| \leqslant b$, cînd $\sigma \to \pm\infty$.

Pentru a demonstra aceasta trebuie să precizăm puțin raționamentele din 15.12. Anume, deoarece funcția $\varphi(x)\, e^{b|x|}$ este absolut integrabilă putem alege, pentru un $\varepsilon > 0$ dat, un număr A astfel încît

$$\int_{-\infty}^{-A} |\varphi(x)|\, e^{b|x|}\, dx + \int_{A}^{\infty} |\varphi(x)|\, e^{bx}\, dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Considerăm integrala

$$\int_{-A}^{A} \varphi(x)\, e^{-isx}\, dx = \int_{-A}^{A} \varphi(x)\, e^{\tau x} e^{-i\sigma x}\, dx.$$

Conform inegalității 14.32(5), ea admite majorarea

$$\left| \int_{-A}^{A} \varphi(x)\, e^{-isx}\, dx \right| \leqslant 2A\omega \left[\varphi(x)e^{\tau x}, \frac{2\pi}{|\sigma|} \right] + N_A M_A \frac{2\pi}{|\sigma|}, \quad (2)$$

unde $\omega(\psi, \delta)$ este oscilația funcției $\psi(x)$ pe intervalele sale de continuitate, N_A numărul intervalelor de acest fel pentru funcția $\varphi(x)$ pe $[-A, A]$, $M_A = \sup_{|x|<A} |\varphi(x)|\, e^{\tau x}$.

Primul termen din al doilea membru din (2) nu depășește, pentru $|\tau| \leqslant b$, mărimea (5.17d)

$$2A\omega \left[\varphi(x), \frac{2\pi}{|\sigma|} \right] e^{A} + 2A\,\omega \left[e^{bx}, \frac{2\pi}{|\sigma|} \right] \max_{|x|<A} |\varphi(x)|,$$

care tinde la 0 cînd $|\sigma| \to \infty$, independent de valoarea lui τ, $|\tau| \leqslant b$. De asemenea, evident, același lucru este valabil, pentru al doilea termen din (2). Se poate alege un σ_0 astfel încît, pentru $|\sigma| > \sigma_0$, $|\tau| \leqslant b$, să aibă loc relația

$$\left| \int_{-A}^{A} \varphi(x)\, e^{-isx}\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De aici rezultă pentru $|\sigma| > \sigma_0$, la fel ca în 15.12,

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{-isx}\, dx \right| < \varepsilon,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

b. Presupunem acum că produsul funcției $\varphi(x)$ cu $e^{b|x|}$ este integrabil pentru orice b. Atunci funcția $\psi(s)$ este definită și analitică în toată banda $|\tau| \leqslant b$, adică este o funcție analitică întreagă; după cum am văzut, această funcție întreagă rămîne mărginită și uniform convergentă către zero pentru $\sigma \to \pm\infty$ în toată banda $|\tau| \leqslant b$ (cu majorantul depinzînd de b).

15.23. Se pot considera funcții $\varphi(x)$ care descresc la infinit într-o măsură mai rapidă, anume funcțiile pentru care produsul $\varphi(x)e^{M(x)}$ este integrabil, unde $M(x)$ crește

mai rapid decît orice funcţie liniară. Este comod să punem $M(x)$ sub forma

$$M(x) = \int_0^x \mu(\xi)\mathrm{d}\xi \quad (0 \leqslant x < \infty), \tag{1}$$

unde $\mu(\xi)$ este o funcţie continuă crescătoare cu $\mu(0) = 0$, $\mu(\infty) = \infty$; pentru x negativ, punem $M(x) = M(-x)$.

În cazul de faţă, pentru a descrie proprietăţile transformatei Fourier ale lui $\varphi(x)$, se poate utiliza funcţia $\Omega(\tau)$ dual ă a funcţiei $M(x)$ în sensul lui Young. Anume, se numeşte *duala în sensul lui Young*, a unei funcţii $M(x)$, funcţia $\Omega(\tau)$ definită prin egalităţile

$$\Omega(\tau) = \int_0^\tau \lambda(t)\,\mathrm{d}t \quad (0 \leqslant \tau < \infty), \quad \Omega(-\tau) = \Omega(\tau), \tag{2}$$

unde funcţia $\lambda(t)$ este funcţia inversă lui $\mu(\xi)$. Funcţiile duale în sensul lui Young sînt legate prin inegalitatea lui Young (9.61h):

$$x\tau \leqslant M(x) + \Omega(\tau) \quad (x > 0,\ \tau > 0). \tag{3}$$

TEOREMĂ. *Dacă $\varphi(x)$ este o funcţie continuă pe porţiuni, pentru care integrala*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|\, \mathrm{e}^{M(x)}\,\mathrm{d}x, \tag{4}$$

este convergentă, atunci transformata Fourier $\psi(s)$ a funcţiei $\varphi(x)$ este o funcţie analitică întreagă, ce verifică inegalitatea

$$|\psi(\sigma + \mathrm{i}\,\tau)| \leqslant C\mathrm{e}^{\Omega(\tau)}. \tag{5}$$

Demonstraţie. Faptul că $\psi(s)$ este o funcţie analitică întreagă rezultă din 15.22b. Apoi, are loc relaţia:

$$|\psi(\sigma + \mathrm{i}\,\tau)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\sigma+\mathrm{i}\tau)x}\,\mathrm{d}x \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|\, \mathrm{e}^{M(x)}\, \mathrm{e}^{|\tau||x|}\, \mathrm{e}^{-M(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Aplicînd exponentului inegalitatea lui Young (3), obţinem

$$|x||\tau| - M(x) \leqslant \Omega(\tau),$$

de unde

$$|\psi(\sigma + i\tau)| \leqslant e^{\Omega(\tau)} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|\, e^{M(x)}\, dx = Ce^{\Omega(\tau)},$$

ceea ce demonstrează teorema.

Alegînd, de exemplu, o funcţie care satisface condiţia

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|\, e^{\frac{1}{p}|x|^p}\, dx < \infty \quad (p > 1),$$

se obţine că funcţia corespunzătoare $\psi(s)$ verifică inegalitatea

$$|\psi(\sigma + i\tau)| \leqslant Ce^{\frac{1}{q}|\tau|^q} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right),$$

deoarece $\frac{1}{q} x^q$ este funcţia dual în sensul lui Young a lui $\frac{1}{p} x^p$ (9.61h). Să facem observaţia că numerele p şi q sînt ambele mai mari ca 1, dar variază în sens opus : cînd p creşte, q descreşte şi cînd $p \to \infty$, $q \to 1$.

15.24. Presupunem, în sfîrşit, că produsul lui $\varphi(x)$ cu orice funcţie crescătoare de $|x|$ este o funcţie integrabilă. Este uşor de văzut că funcţiile cu *suport mărginit* $\varphi(x)$ (care se anulează aproape peste tot în exteriorul unui interval $|x| \leqslant a$), şi numai ele, au această proprietate. Presupunem deci că $\varphi(x)$ este nulă pentru $|x| > a$. Atunci transformata Fourier

$$\psi(s) = \int_{-a}^{a} \varphi(x) e^{-isx}\, dx$$

este o funcție de s analitică întreagă, care admite în planul s următoarea majorare :

$$|\psi(\sigma + i\tau)| \leqslant \int_{-a}^{a} |\varphi(x)|\, e^{|\tau||x|}\, dx \leqslant Ce^{a|\tau|}, \qquad (1)$$

unde $C = \int_{-a}^{a} |\varphi(x)|\, dx$. O funcție analitică $\psi(s)$ care verifică inegalitatea (1) se numește *funcție întreagă de tip exponențial finit* $\leqslant a$.

Astfel, cu cît descreșterea lui $\varphi(x)$ spre infinit este mai rapidă, cu atît transformata sa Fourier este mai „netedă". Plecînd de la funcții $\psi(\sigma)$ continue, am trecut prin funcții de mai multe ori derivabile, indefinit derivabile, analitice într-o bandă, în tot planul și am ajuns la funcții analitice de tipul exponențialei finite. Nici o funcție ce tinde către zero în ambele sensuri ale axei reale nu poate fi „mai netedă" (dar știm că transformata Fourier a unei funcții integrabile avea această proprietate) ; se știe că nu există nici o funcție analitică întreagă nenulă de tip exponențial finit care să tindă spre zero pe axa absciselor și să crească în plan mai puțin rapid decît $e^{a|\tau|}$ pentru orice $a > 0$ (vezi exerc. 24, cap. 10).

15.25. Acum, în loc de condiția de descreștere din ce în ce mai rapidă, vom impune funcției $\varphi(x)$ condiții de a deveni din ce în ce mai netedă. Ținînd cont de rezultatele 15.21—15.24, este normal să ne așteptăm ca și transformata Fourier a funcției $\varphi(x)$ să fie atunci supusă la condiții de descreștere din ce în ce mai rapidă.

Presupunem că o funcție absolut integrabilă $\varphi(x)$ este continuă și are derivata continuă pe porțiuni și absolut integrabilă pe axa $-\infty < x < \infty$. De aici rezultă înainte de toate că funcția

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_{0}^{x} \varphi'(\xi)\, d\xi$$

are limită pentru $x \to \infty$; această limită este nulă căci altfel $\varphi(x)$ nu ar fi integrabilă. Același lucru rezultă pentru $x \to -\infty$. Apoi, integrînd prin părți, are loc relația

$$F[\varphi'] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x) e^{-i x \sigma} \, dx = \varphi(x) e^{-i x \sigma} \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i x \sigma} \, dx.$$

Conform celor precedente, primul termen din dreapta este nul; are loc egalitatea

$$F[\varphi'] = i\sigma F[\varphi].$$

În alți termeni, derivarea funcției $\varphi(x)$ corespunde înmulțirii funcției $\psi(\sigma) = F[\varphi]$ cu $i\sigma$. Deoarece $F[\varphi'(x)]$ ca transformată Fourier a unei funcții integrabile, este o funcție de σ, mărginită (și chiar tinzînd către zero pentru $|\sigma| \to \infty$), are loc următoarea majorare pentru $F[\varphi(x)]$:

$$|F[\varphi]| = \frac{|F[\varphi'(x)]|}{|\sigma|} \leqslant \frac{c}{|\sigma|}.$$

Astfel, în cazul de față nu numai că funcția $\psi(\sigma)$ tinde către zero pentru $|\sigma| \to \infty$, dar face aceasta mai rapid decît $1/|\sigma|$. Dacă derivatele succesive, pînă la ordinul m inclusiv, ale funcției $\varphi(x)$ sînt absolut integrabile, atunci, continuînd procedeul, obținem

$$F[\varphi^{(k)}(x)] = (i\sigma)^k F[\varphi] \quad (k = 0, 1, \ldots, m). \tag{1}$$

La fel ca mai înainte, are loc majorarea

$$|F[\varphi]| = \frac{|F[\varphi^{(k)}(x)]|}{|\sigma|^k} \leqslant \frac{\ldots}{|\sigma|^k}. \tag{2}$$

Deci, cu cît funcția $\varphi(x)$ are mai multe derivate integrabile, cu atît descreșterea spre infinit a transformatei sale Fourier către zero este mai rapidă.

În particular, dacă funcția $\varphi(x)$ este suficient de netedă, transformata sa Fourier este de asemenea absolut integrabilă; din (2) este suficientă existența și integrabilitatea absolută a lui φ, φ', și φ''.

Dacă $\varphi^{(k)}(x)$ există și este absolut integrabilă pentru orice $k = 0, 1, 2, \ldots$, atunci funcția $\psi(\sigma)$ descrește, pentru $|\sigma| \to \infty$, mai repede decît orice funcție $1/|\sigma|^k$.

15.26. a. Presupunem acum că funcţia $\varphi(x)$ nu este numai indefinit derivabilă, dar chiar şi analitică într-o bandă $|y| \leqslant b$ a planului variabilei complexe $z = x + \mathrm{i}\,y$. Presupunem în plus că există o funcţie $\Phi(x)$ astfel încît

$$\lim_{|x|\to\infty} \Phi(x) = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)\,\mathrm{d}x < \infty \tag{1}$$

şi că pentru orice y, $|y| \leqslant b$, are loc relaţia

$$|\varphi(x + \mathrm{i}\,y)| \leqslant \Phi(x). \tag{2}$$

Din punctul c vedem că transformata Fourier a funcţiei $\varphi(x)$ este atunci o funcţie exponenţial descrescătoare.

c. Vom stabili în prealabil următoarea lemă relativ la funcţii analitice:

LEMĂ. *Dacă o funcţie $f(z)$ este analitică în banda $|y| < b$ şi satisface în această bandă inegalitatea*

$$|f(x + \mathrm{i}\,y)| \leqslant \Phi(x) \tag{3}$$

(unde $\Phi(x)$ este o funcţie care satisface condiţiile (1)*), atunci integrala*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x + \mathrm{i}\,y)\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

nu depinde de y, $|y| < b$.

Demonstraţie. Existenţa integralei (4) rezultă imediat din continuitatea funcţiei $f(x + \mathrm{i}\,y)$ în raport cu x şi din estimaţiile (1) şi (3). Fie acum $y_1 < y_2$ două numere oarecare din intervalul $(-b, b)$. Considerăm conturul închis, $L = ABCD$, din fig. 15.1. Conform teoremei Cauchy 10.32, avem

$$\int_L f(z)\,\mathrm{d}z = \int_A^B f(z)\,\mathrm{d}z + \int_B^C f(z)\,\mathrm{d}z + \int_C^D f(z)\,\mathrm{d}z + \int_D^A f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \tag{5}$$

Fie $-R$ și R abscisele punctelor A și B. Atunci

$$\left|\int_B^C f(z)\,dz\right| \leqslant \int_{y_1}^{y_2} |f(z)|\,dz \leqslant \int_{y_1}^{y_2} \Phi(R)\,dy = \Phi(R)\,(y_2 - y_1);$$

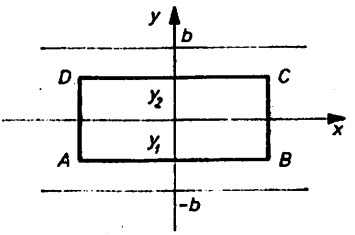


Fig. 15.1

această mărime tinde la 0 pentru $R \to \infty$, la fel ca integrala

$$\int_D^A f(z)\,dz.$$

Cele două integrale care rămîn au, pentru $R \to \infty$, respectiv limitele

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x + iy_1)\,dx \text{ și } -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) + i\,y_2)\,dx.$$

Trecînd în egalitatea (5) la limită, pentru $R \to \infty$, se obține

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x + i\,y_1)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x + i\,y_2)\,dx,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

c. TEOREMĂ. *În ipoteza din punctul* a, *transformata Fourier* $\psi(\sigma)$ *a funcției* $\varphi(x)$ *verifică inegalitatea*

$$|\psi(\sigma)| \leqslant Ce^{-b|\sigma|}.$$

Demonstrație. Aplicăm lema din punctul b funcției analitice

$$f(z) = \varphi(z)e^{-i\sigma z};$$

pentru ea are loc inegalitatea (3), unde înlocuim $\Phi(x)$ prin $\Phi(x)e^{\sigma|b|}$. În virtutea lemei, avem

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{-i\sigma x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + iy)\, e^{-i\sigma(x+iy)}\, dx \quad (6)$$

pentru orice $|y| < b$. Fixînd y, obţinem estimarea

$$|\psi(\sigma)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x + iy)|\, e^{\sigma y}\, dx =$$

$$= e^{\sigma y} \int_{-\infty}^{-\infty} |\varphi(x + iy)|\, dx \leqslant e^{\sigma y} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)\, dx.$$

Trecînd aici la limită pentru $y \to -b \operatorname{sgn} \sigma$, avem

$$|\psi(\sigma)| \leqslant Ce^{-|\sigma|b},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

d. Dacă funcţia $\varphi(x)$ este analitică în tot planul $z = x + iy$ şi dacă se poate indica, pentru orice bandă $|y| < b$, o funcţie $\Phi(x)$ ce satisface condiţiile (1) şi (2) (funcţia $\Phi(x)$ poate să depindă de b), atunci, aplicînd teorema din punctul c, rezultă că transformata Fourier $\psi(\sigma)$ a funcţiei $\varphi(x)$ satisface o inegalitate de forma

$$|\psi(\sigma)| \leqslant C_b e^{-|\sigma|b}$$

pentru orice b.

15.27. Fie acum $\varphi(x)$ o funcţie analitică întreagă care admite în toată banda $|y| \leqslant b$ estimarea

$$|\varphi(x + iy)| \leqslant e^{\Omega(y)} \Phi_b(x)$$

cu

$$\Omega(y) = \int_0^y \lambda(\eta) d\eta \quad (0 \leqslant y < \infty), \quad \Omega(-y) = \Omega(y),$$

unde $\lambda(\eta)$ este o funcţie continuă crescătoare astfel încît $\lambda(0) = 0$, $\lambda(\infty) = \infty$.

Pentru orice b, presupunem că funcţia $\Phi_b(x)$ satisface condiţia 15.26(1) în banda $|y| \leqslant b$.

Fie $M(\sigma)$ duala în sensul lui Young a funcţiei $\Omega(y)$:

$$M(\sigma) = \int_0^{\sigma} \mu(\xi)\, d\xi,$$

unde $\mu(\xi)$ este funcţia inversă a lui $\lambda(\eta)$.

TEOREMĂ. *În aceste condiţii, transformata Fourier* $\psi(\sigma)$ *a funcţiei* $\varphi(x)$ *satisface inegalitatea*

$$|\psi(\sigma)| \leqslant Ce^{-M(\sigma)}.$$

Demonstraţie. Conform 15.26(6), avem

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\sigma x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + iy) e^{-i\sigma(x+iy)}\, dx$$

pentru orice y. De aici rezultă estimarea ($b > |y|$)

$$|\psi(\sigma)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} e^{\Omega(y)} \Phi_b(x) e^{\sigma y}\, dx = C_b e^{\Omega(y)+\sigma y}. \qquad (1)$$

Alegem pentru y semnul astfel încît $\sigma y = -|\sigma|\,|y|$, iar modulul astfel încît inegalitatea lui Young să devină egalitate

$$|\sigma|\,|y| = M(\sigma) + \Omega(y).$$

Atunci, din (1) rezultă că

$$|\psi(\sigma)| \leqslant C_b e^{-M(\sigma)},$$

şi teorema este demonstrată.

15.28. Fie, în sfîrşit, $\varphi(x)$ o funcţie analitică întreagă care satisface inegalitatea

$$|\varphi(x + iy)| \leqslant \Phi(x) e^{a|y|},$$

unde funcţia $\Phi(x)$ satisface condiţia 15.26(1) (şi nu depinde de y).

TEOREMĂ. *În ipoteza formulată, transformata Fourier* $\psi(\sigma)$ *a funcției* $\varphi(x)$ *se anulează pentru* $|\sigma| > a$.

Demonstrație. Conform 15.26(6), avem

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\sigma x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + iy) e^{-i\sigma(x+iy)}\, dx \quad (1)$$

pentru orice y. Fixăm semnul lui y astfel încît să avem $\sigma y = -|\sigma|\,|y|$. Din (1) rezultă atunci

$$|\psi(\sigma)| \leqslant e^{\sigma y} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) e^{a|y|}\, dx \leqslant C e^{(a-|\sigma|)|y|}. \quad (2)$$

Fie $|\sigma| > a$. Dacă în inegalitatea (2) facem y să tindă către ∞, va rezulta $\psi(\sigma) = 0$, ceea ce trebuia demonstrat.

15.29. Teoremele 15.25—15.28 nu sînt reciprocele exacte ale teoremelor 15.21 — 15.24 și cer anumite ipoteze suplimentare (de exemplu, existența unei funcții $\Phi(x)$ ce are proprietățile 15.26(1), (2)). Se pune problema construirii unor clase de funcții $\varphi(x)$ pentru care să putem să caracterizăm complet clasa transformatelor Fourier corespunzătoare $\psi(\sigma)$. Unele din aceste clase pot fi construite cu ajutorul teoremelor 15.21 — 15.28.

a. *Clasa* S. Considerăm mulțimea S a tuturor funcțiilor indefinit derivabile $\varphi(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, fiecare verificînd pentru $k,\ q = 0, 1, 2, \ldots$ o inegalitate de forma

$$|x^k \varphi^{(q)}(x)| \leqslant C_{kq}, \quad (1)$$

unde C_{kq} este o constantă (depinzînd de alegerea funcției $\varphi(x)$).

Fiecare funcție $x^k \varphi^{(q)}(x)$ este nu numai mărginită pe axa x-ilor, dar este și integrabilă pe toată axa, deoarece inegalitatea

$$|x^k \varphi^{(q)}(x)| \leqslant \frac{C_{k+2,q}}{x^2}$$

este adevărată odată cu (1), întrucît

$$|x^k \varphi^{(q)}(x)| \leqslant \min\left\{C_{kq}, \frac{C_{k+2,q}}{x^2}\right\} \leqslant \frac{C^*_{kq}}{1 + x^2},$$

unde C^*_{kq} este o nouă constantă.

Orice funcție $x^k\varphi(x)$ este indefinit derivabilă odată cu $\varphi(x)$ și fiecare din derivatele sale este integrabilă pe axa x deoarece se exprimă liniar prin funcții integrabile $x^j\varphi^{(q-j)}(x)$ conform formulei lui Leibniz 8.12(3).

Funcția $\psi(\sigma) = F[\varphi(x)]$ este indefinit derivabilă conform 15.21. Folosind formulele 15.21(2) și 15.25(1) putem scrie

$$F[(x^k\varphi(x))^{(q)}] = (-i)^q i^k \sigma^k \psi^{(q)}(\sigma);$$

aici, al doilea membru, fiind transformata Fourier a unei funcții integrabile $(x^k\varphi(x))^{(q)}$ este mărginită pentru un k și q oarecare:

$$|\sigma^k\psi^{(q)}(\sigma)| \leqslant B_{kq}.$$

Deci, dacă $\varphi(x) \in S$, atunci $\psi(\sigma) \in S$. Invers, fie $\psi(\sigma) \in S$; să arătăm că această funcție este transformata Fourier a unei funcții $\varphi(x) \in S$. Punem

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma)e^{i\sigma x}\,d\sigma.$$

Funcția $2\pi\varphi(-x)$ este transformata Fourier a funcției $\psi(\sigma)$, deci aparține lui S. Dar atunci, evident, avem de asemenea $\varphi(x) \in S$. Conform formulei de inversare

$$\psi(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\varphi(-x)e^{i\sigma x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)e^{-i\sigma x}\,dx,$$

prin urmare $\psi(\sigma)$ este transformata Fourier a funcției $\varphi(x)$, ceea ce trebuia demonstrat.

Așadar, transformarea Fourier F aplică S pe întreg S.

b. Fie m_{kq} $(k, q = 0, 1, 2, \ldots)$ un șir dublu de numere reale. Prin definiție, clasa $S_{<m_{kq}>}$ este formată din toate funcțiile indefinit derivabile $\varphi(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, fiecare satisfăcînd inegalitățile

$$|x^k\varphi^{(q)}(x)| \leqslant CA^kB^qm_{kq} \quad (k, q = 0, 1, 2, \ldots),$$

unde constantele A, B și C pot depinde de funcția $\varphi(x)$.

În anumite condiții pentru șirul m_{kq} are loc formula

$$F(S_{<m_{kq}>}) = S_{<m_{qk}>} \text{ (vezi [42])}.$$

c. *Clasele W_M și W^Ω.* Fie $M(x)$ și $\Omega(\tau)$ două funcții duale în sensul lui Young, una alteia (15.23). Prin definiție, clasa W_M este formată din toate funcțiile indefinit derivabile $\varphi(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, fiecare satisfăcînd inegalitățile

$$|\varphi^{(q)}(x)| \leqslant C_q e^{-M(x)} \quad (q = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dacă $\psi(s)$ este transformata Fourier a unei funcții $\varphi(x)$, atunci $(i\,s)^q\,\psi(s)$ este transformata Fourier a funcției $\varphi^{(q)}(x)$ (15.25). Conform 15.23, au loc inegalitățile

$$|s^q \psi(\sigma + i\,\tau)| \leqslant C'_q e^{\Omega(\tau)} \quad (q = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (2)$$

Notăm cu W^Ω clasa tuturor funcțiilor analitice întregi $\psi(s)$, care verifică inegalitățile de forma (2). Are loc relația $F(W_M) \subset W^\Omega$. Fie acum $\psi(s)$ o funcție oarecare din W^Ω. Plecînd de la inegalitatea (2) și de la aceeași inegalitate în care înlocuim q prin $q + 2$, obținem

$$|s^q \psi(\sigma + i\,\tau)| \leqslant e^{\Omega(\tau)} \min\left\{C'_q,\ \frac{C'_{q+2}}{|s|^2}\right\} = \Phi_{\tau q}(\sigma) e^{\Omega(\tau)},$$

unde

$$\Omega_{\tau q}(\sigma) = \min\left\{C'_q,\ \frac{C'_{q+2}}{|\sigma + i\,\tau|^2}\right\} \leqslant \frac{C_{\tau q}}{1 + |\sigma|^2}$$

este o funcție integrabilă. Aplicînd teorema 15.27, ajungem la concluzia că

$$|\varphi^{(q)}(x)| \leqslant C''_q e^{-M(x)},$$

adică $F[W^\Omega] = W_M$. În final, imaginea clasei W_M prin transformarea Fourier este clasa W^Ω și imaginea clasei W^Ω este W_M.

§ 15.3. Exemple și aplicații

La început, în 15.31 — 15.32, vom considera cîteva exemple de transformate Fourier.

15.31. Transformata Fourier a unei fracții raționale

$$Q(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n},$$

unde $m < n - 1$, a fost calculată în 11.32 b prin metode de integrare în lungul unui contur. Folosind teorema 15.26c și analiticitatea funcției $Q(z)$ într-o bandă $|y| \leqslant b$ (care nu conține rădăcinile numitorului) se poate afirma că $F[Q(x)]$ descrește exponențial pentru $|\sigma| \to \infty$; de altfel, de aceasta nu vom mai avea nevoie, $F[Q(x)]$ fiind deja calculată într-o formă explicită.

15.32. Să găsim transformata Fourier $\psi(\sigma)$ a unei funcții $\varphi(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0$.

Această funcție se poate prelungi analitic în tot planul $z = x + iy$ cu evaluarea

$$|e^{-az^2}| = |e^{-a(x+iy)^2}| = e^{iy^2} e^{-ax^2};$$

deci, în virtutea lui 15.26b pentru a calcula transformata Fourier se poate trece, în planul z, de la axa x-ilor la o dreaptă oarecare paralelă cu axa x:

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+iy)^2} e^{-i\sigma(x+iy)} \, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+ay^2+\sigma y-2aixy-i\sigma x} \, dx = e^{ay^2+\sigma y} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-ix(2ay+\sigma)} \, dx.$$

Punem $y = -\sigma/(2a)$; atunci $ay^2 + \sigma y = -\sigma^2/(4a)$ și, conform formulei 11.56(2), avem

$$\psi(\sigma) = e^{-\frac{\sigma^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \, dx = e^{-\frac{\sigma^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

În particular, pentru $\varphi(x) = e^{-x^2/2} (a = 1/2)$, se obține $\psi(\sigma) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\sigma^2/2}$.

15.33. *Transformarea Fourier și produsul de convoluție.* În 11.48 am numit produs de convoluție a două funcții $f(x)$ și $g(x)$, definite pentru $-\infty < x < \infty$, funcția

$$h(x) = f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x - \xi) \, d\xi. \qquad (1)$$

Dacă f și g sînt continue, mărginite și absolut integrabile pe $(-\infty, \infty)$, atunci $h(x)$ există pentru orice x și este de asemenea continuă, mărginită și absolut integrabilă pe $(-\infty, \infty)$; în plus are loc relația

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx. \qquad (2)$$

Vom aplica teorema asupra produsului de convoluție, înlocuind $f(x)$ și $g(x)$ prin $f(x)e^{-i\sigma x}$ și $g(x)e^{-i\sigma x}$. Produsul de convoluție al acestor funcții este

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\sigma\xi}\, g(x-\xi)e^{-i\sigma(x-\xi)}\,d\xi = e^{-i\sigma x}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, g(x-\xi)\,d\xi$$

și egalitatea (2) dă

$$F[f*g] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma x}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, g(x-\xi)\,d\xi\right\} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\sigma x}\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i\sigma x}\,dx = F[f]\cdot F[g].$$

Altfel spus, în condițiile impuse mai sus funcțiilor $f(x)$ și $g(x)$, *transformata Fourier a produsului lor de convoluție este produsul transformatelor Fourier.*

15.34. *Rezolvarea ecuației căldurii.* Să găsim soluția $u(x, t)$ a ecuației căldurii $(-\infty < x < \infty, t \geqslant 0)$:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

care să fie o funcție dată $u_0(x)$ pentru $t = 0$. Interpretarea fizică a problemei puse constă în a determina temperatura unui continuu omogen unidimensional (bară infinită) în orice moment $t > 0$, dacă se cunoaște temperatura sa la momentul $t = 0$. Facem următoarele ipoteze:

1) funcțiile $u(x, t)$, $u_x(x, t)$, $u_{xx}(x, t)$ sînt continue și absolut integrabile în x pentru $-\infty < x < \infty$ și pentru orice $t \geqslant 0$ fixat;

2) funcția $u_t(x, t)$ admite în fiecare interval $0 \leqslant t \leqslant T$ un majorant integrabil:

$$|u_t(x, t)| \leqslant \Phi(x), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)\, dx < \infty.$$

Vom aplica ecuației (1) transformarea Fourier, înmulțind-o prin $e^{-i\sigma x}$ și apoi integrînd în raport cu x de la $-\infty$ la $+\infty$. Conform condiției 2), lui 11.45 a și 11.47a, se poate scrie

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, t)e^{-i\sigma x}\, dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)e^{-i\sigma x}\, dx = v_t(\sigma, t),$$

unde

$$v(\sigma, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)e^{-i\sigma x}\, dx$$

este transformata Fourier a soluției căutate $u(x, t)$. Conform condiției 1) și formulei 15.25(1), are loc relația

$$F[u_{xx}(x, t)] = -\sigma^2 F[u] = -\sigma^2 v(\sigma, t).$$

Ajungem la ecuația diferențială ordinară

$$v_t(\sigma, t) = -\sigma^2 v(\sigma, t)$$

pentru care trebuie să găsim o soluție care pentru $t = 0$ să coincidă cu

$$v_0(\sigma) = F[u_0(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)e^{-i\sigma x}\, dx.$$

Soluția căutată are, evident, forma

$$v(\sigma, t) = e^{-\sigma^2 t} v_0(\sigma).$$

Știm că (vezi 15.32, unde punem $a = 1/(4t)$)

$$e^{-\sigma^2 t} = F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}\right].$$

Conform formulei pentru transformata Fourier a unui produs de convoluție (15.33(2)), avem

$$v(\sigma, t) = \mathrm{F}\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right] \mathrm{F}[u_0] = \mathrm{F}\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} * u_0(x)\right],$$

și deoarece $v(\sigma, t) = \mathrm{F}[u(x, t)]$, obținem

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} * u_0(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4t}} u_0(x - \xi)\, d\xi.$$

Formula obținută se numește formula *integrală a lui Poisson*. În teoria ecuațiilor cu derivate parțiale se demonstrează unicitatea soluției de mai sus într-o clasă largă de funcții [35].

§ 15.4. Transformarea Laplace

15.41. Fie $\varphi(x)$ o funcție definită pentru $-\infty < x < \infty$ care este continuă pe porțiuni și care înmulțită cu $e^{-\gamma x}$, cu γ real, devine absolut integrabilă. Atunci transformata Fourier a funcției $\varphi(x)$, care este posibil să nu existe în sensul definiției transformatei Fourier, poate să existe pentru anumite valori complexe ale lui s. În particular,

$$\psi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-isx}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-ix\sigma}\, e^{x\tau}\, dx$$

există pe dreapta $\tau = -\gamma$. Pe această dreaptă, $\psi(s)$ este transformata Fourier a funcției absolut integrabile $\varphi(x)e^{x\tau}$.

Cel mai important caz se realizează în condițiile

$$\left.\begin{aligned} |\varphi(x)| &< Ce^{ax} \quad \text{pentru } x \geqslant 0, \\ \varphi(x) &= 0 \quad \text{pentru } x < 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Aici, transformata Fourier

$$\psi(s) = \int_0^{\infty} \varphi(x) e^{x\tau} e^{-ix\sigma}\, dx = \int_0^{\infty} \varphi(x) e^{-ixs}\, dx \tag{2}$$

există pentru orice $\tau < -\alpha$, adică în semiplanul variabilei complexe $s = \sigma + i\tau$ limitat superior de dreapta $\tau = -\alpha$. În formula (2), facem schimbarea de variabilă i $s = p$. Cînd s parcurge semiplanul Im $s < -\alpha$, p parcurge semiplanul Re $p > \alpha$. Funcţia

$$\Phi(p) = \psi(s) = \int_0^\infty \varphi(x) e^{-px}\, dx$$

este definită şi analitică în semiplanul Re $p > \alpha$; pe orice dreaptă verticală a acestui semiplan, ea tinde la zero, cînd Im $p \to \pm\infty$, această convergenţă fiind uniformă pe orice interval închis finit al valorilor Re p. În plus, în semiplanul Re $p > \alpha$, avem următoarea estimaţie pentru funcţia $\Phi(p)$ $(p = \xi + i\eta)$:

$$|\Phi(p)| \leqslant \int_0^\infty |\varphi(x)|\, e^{-\xi x}\, dx \leqslant C \int_0^\infty e^{(\alpha-\xi)x}\, dx = \frac{C}{\xi - \alpha},$$

de unde rezultă că funcţia $\Phi(p)$ este mărginită în tot semiplanul Re $p \geqslant \beta > \alpha$ şi că ea tinde la zero cînd $\xi \to \infty$.

Funcţia $\Phi(p)$ se numeşte *transformata Laplace* a funcţiei $\varphi(x)$. Observăm că transformarea Laplace nu diferă de transformarea Fourier (considerată în domeniul complex) decît printr-o rotaţie de 90° în planul variabilei complexe.

15.42.a. Următoarea teoremă simplă dă condiţii suficiente (dar care sînt departe de a fi necesare) pentru ca o funcţie $\Phi(p)$ dată să fie transformata Laplace a unei funcţii $\varphi(x)$ care satisface condiţiile 15.41(1).

TEOREMĂ. *Fie $\Phi(p)$ $(p = \xi + i\eta)$ o funcţie ce satisface următoarele condiţii:*

1) *ea este analitică în semiplanul* Re $p > \gamma_0 \geqslant 0$;

2) *există o constantă C şi o funcţie $B(\eta)$ pozitivă, integrabilă pe axa $-\infty < \eta < \infty$, astfel încît pentru toţi $\xi > \gamma_0$ să aibă loc inegalitatea*

$$\left|\Phi(p) - \frac{C}{p}\right| \leqslant B(\eta).$$

Atunci $\Phi(p)$ *este transformata Laplace a unei funcții* $\varphi(x)$ *continue pe porțiuni, care este nulă pentru* $x<0$, *continuă pentru* $x>0$ *și care verifică inegalitatea*

$$|\varphi(x)| < Ce^{\gamma_0 x}$$

pentru $x>0$.

Demonstrație. Funcția C/p este evident transformata Laplace a funcției $\varphi_0(x)$ care este 0 pentru $x<0$ și C pentru $x>0$. Funcția $\varphi_0(x)$ satisface condițiile teoremei. De aceea, putem presupune că însăși funcția $\Phi(p)$ verifică, pentru $\xi>\gamma_0$, inegalitatea

$$|\Phi(p)| \leqslant B(\eta).$$

În acest caz, definim funcția $\varphi(x)$, prin formula

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \Phi(p)e^{px}\,dp \quad (\gamma>\gamma_0). \tag{1}$$

Utilizînd formula Cauchy (în mod analog cu 15.26b) și folosind proprietățile 1), 2) este ușor să verificăm că integrala (1) nu depinde de γ. Pe de altă parte, avem estimarea

$$|\varphi(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(\xi+i\eta)|\,e^{\gamma x}\,d\eta \leqslant \frac{B}{2\pi}e^{\gamma x}.$$

Pentru $x>0$, făcînd γ să tindă către γ_0, are loc relația

$$|\varphi(x)| \leqslant Ce^{\gamma_0 x};$$

pentru $x<0$, făcînd γ să tindă către $+\infty$, avem $\varphi(x)=0$.

Dacă punem formula (1) sub forma

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi+i\eta)e^{(\xi+i\eta)x}\,id\eta =$$

$$= \frac{e^{\xi x}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi+i\eta)e^{i\eta x}\,d\eta,$$

se observă că $2\pi\varphi(-x)e^{\xi x}$ este transformata Fourier, în raport cu variabila η, a funcției absolut integrabile $\Phi(\xi + i\eta)$ (ξ fixat). Conform formulei de inversare, avem

$$\Phi(\xi+i\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}2\pi\varphi(-x)e^{(\xi+i\eta)x}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{-px}\,dx, \tag{2}$$

adică $\Phi(\xi+i\eta)$ este efectiv transformata Laplace a funcției $\varphi(x)$.

Formula (1) joacă un rol important în teoria transformării Laplace; ea se numește *formula de inversare a transformării Laplace.*

b. Este util să studiem care sînt condițiile ce trebuie impuse funcției $\varphi(x)$ pentru ca transformata sa Laplace să verifice ipotezele teoremei din punctul a. Presupunem că $\varphi(x)$ este de $m-1$ ori derivabilă și are derivata de ordinul m continuă pe porțiuni, satisfăcînd condițiile 15.41(1). Atunci, integrînd egalitatea (2) de m ori prin părți pentru $\xi = \operatorname{Re} p \geqslant \gamma > \alpha$, obținem:

$$|\Phi(p)| = \left|\frac{1}{p^m}\int_0^{\infty}\varphi^{(m)}(x)e^{-px}\,dx\right| \leqslant \frac{C}{|p|^m} = \frac{C}{|\xi^2+\eta^2|^{m/2}} \leqslant \frac{C}{(\gamma^2+\eta^2)^{m/2}}. \tag{3}$$

Observăm că ipotezele teoremei din punctul a sînt verificate dacă $m = 2$. Deci, existența derivatei secunde continue pe porțiuni pentru funcția $\varphi(x)$ garantează îndeplinirea ipotezelor teoremei din punctul a.

15.43. Transformata Laplace este des folosită pentru rezolvarea ecuațiilor diferențiale, ordinare sau cu derivate parțiale, care, corespund sistemelor nestaționare; în astfel de probleme, funcția necunoscută $f(t)$ este nulă pentru $t<0$ și pentru $t>0$ trebuie să satisfacă o ecuație și anumite condiții inițiale pentru $t = 0$.

Considerăm la început o ecuație diferențială liniară cu coeficienți constanți

$$a_0y^{(n)}(t)+a_1y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_ny(t)=b(t) \qquad (1$$

completată cu datele inițiale

$$\begin{aligned} y(0) &= y_0, \\ y'(0) &= y_1, \\ &\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(0) &= y_{n-1}, \end{aligned} \tag{2}$$

$b(t)$ verificînd condițiile 15.41(1). Înmulțim ecuația (1) prin e^{-pt} și integrăm în raport cu t între 0 și ∞. Notăm prin

$$Y(p) = \int_0^\infty y(t)e^{-pt}\,dt$$

transformata Laplace a funcției $y(t)$. Atunci, integrînd prin părți, găsim

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty y'(t)e^{-pt}\,dt = y(t)e^{-pt}\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty y(t)e^{-pt}\,dt = \\ &\qquad = -y_0 + pY(p), \\ &\int_0^\infty y''(t)e^{-pt}\,dt = y'(t)e^{-pt}\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty y'(t)e^{-pt}\,dt = \\ &\qquad = -y_1 + p(-y_0 + pY(p)) = \\ &\qquad = -y_1 - py_0 + p^2Y(p), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\int_0^\infty y^{(n)}(t)e^{-pt}\,dt = y^{(n-1)}(t)e^{-pt}\Big|_0^\infty + \\ &+ p\int_0^\infty y^{(n-1)}(t)e^{-pt}\,dt = -y_{n-1} + p(-y_{n-2} - \\ &- py_{n-3} - \dots - p^{n-2}y_0 + p^{n-1}Y(p)) = \\ &= -y_{n-1} - py_{n-2} - \dots - p^{n-1}y_0 + p^n\,Y(p). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Înmulțind fiecare din ecuațiile (3) prin coeficienții a_k corespunzători și adunînd, ajungem la o ecuație de forma

$$R_0(p) + R(p)Y(p) = B(p),$$

unde $R_0(p)$ este un polinom în p de grad cel mult $n-1$, $R(p)$ un polinom în p de grad n, $B(p)$ transformata Laplace a funcției $b(t)$. Pentru funcția necunoscută $Y(p)$, se obține astfel o ecuație pur algebrică.

Rezolvînd-o, găsim

$$Y(p) = \frac{B(p) - R_0(p)}{R(p)}.$$

Funcția $\dfrac{R_0(p)}{R(p)}$ verifică ipoteza teoremei 15.42a; anume, dacă punem

$$C = \lim_{p\to\infty} \frac{pR_0(p)}{R(p)},$$

atunci

$$\frac{R_0(p)}{R(p)} - \frac{C}{p} = \frac{pR_0(p) - CR(p)}{pR(p)}$$

este o funcție rațională în p, gradul $n+1$ al numitorului depășește cu cel puțin două unități pe cel al numărătorului deoarece, conform definiției lui C, termenii de grad n de la numărător se reduc.

Funcția $\dfrac{B(p)}{R(p)}$ poate verifica sau nu teorema 15.42a; aceasta depinde de natura funcției $B(p)$. Dacă gradul polinomului $R(p)$ este mai mare ca 1, conform mărginirii lui $B(p)$, aceasta are loc pentru orice funcție verificînd condiția 15.41(1). Dacă $R(p)$ are gradul 1, atunci inegalitatea 15.42(3) arată că este suficient ca funcția $b(t)$ să aibă derivata continuă pe porțiuni, satisfăcînd împreună cu $b(t)$, condițiile 15.41(1).

Dacă funcția $\dfrac{B(p)}{R(p)}$ satisface de asemenea ipoteza teoremei 15.42a, atunci, aplicînd aceasta, pentru soluția $y(t)$ are loc formula

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{B(p) - R_0(p)}{R(p)} e^{pt}\, dp. \qquad (4)$$

Dacă funcția $B(p)$ se poate prelungi analitic, în tot planul p (cu singularități izolate), atunci pentru calculul integralei (4) se recurge, în general, la integrale de contur și reziduuri, așa cum am făcut la calculul integralei Fourier a funcțiilor raționale. Să observăm că pentru $t > 0$ funcția e^{pt} este mărginită în semiplanul din stînga ($\operatorname{Re} p < \gamma$) și nu este mărginită în semiplanul drept; trebuie deci să construim semicercurile ce fac parte din conturul aflat la stînga dreptei $\operatorname{Re} p = \gamma$ și nu la dreapta. Pentru γ se poate alege orice număr, deoarece toate singularitățile funcției $R(p)$ sînt la stînga dreptei $\operatorname{Re} p = \gamma$.

15.44. *Exemple.* Să considerăm o ecuație de ordinul al doilea

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = b \sin kt, \quad y_0 = 0, \; y_1 = 0$$

ale cărei rădăcini ale ecuației caracteristice (13.17) sînt numerele complex conjugate (nereale) $\lambda = \alpha + i\beta$, $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$, unde $\alpha < 0$.

În electrotehnică o astfel de ecuație descrie oscilațiile forțate într-un circuit conținînd o rezistență, o inductanță și o capacitate și supuse unei f.e.m. de frecvență k. Trecerea la transformata Laplace conduce la ecuația

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) Y(p) = \int_0^\infty b \sin kt \, e^{-pt} \, dt = \frac{bk}{k^2 + p^2}.$$

Rezolvînd-o, se găsește

$$Y(p) = \frac{bk}{(a_0 p^2 + a_1 p + a_2)(k^2 + p^2)}.$$

Conform formulei de inversare,

$$y(t) = \frac{bk}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{pt} \, dp}{(a_0 p^2 + a_1 p + a_2)(k^2 + p^2)}.$$

Punem

$$f(p) = \frac{e^{pt}}{(a_0 p^2 + a_1 p + a_2)(k^2 + p^2)}.$$

Numitorul are patru rădăcini simple în punctele $\pm ik$ și $\alpha \pm i\beta$. Pentru γ se poate alege orice număr pozitiv. Pentru a calcula integrala completăm dreapta $\operatorname{Re} p = \gamma$ printr-o semicircumferință de rază suficient de mare în semiplanul din stînga (fig. 15.2); atunci, conform teoremei reziduurilor 10.43, are loc relația

$$y(t) = bk\{\operatorname{Rez} f(p)|_{p=ik} + \operatorname{Rez} f(p)|_{p=-ik} + \operatorname{Rez} f(p)|_{p=\alpha+i\beta} + \operatorname{Rez} f(p)|_{p=\alpha-i\beta}\}.$$

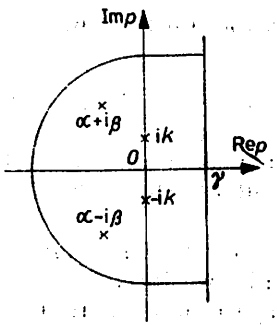


Fig. 15.2

Fiecare reziduu este calculat după formula generală 10.42(1) pentru poli simpli

$$\operatorname{Rez} \frac{A(p)}{B(p)}\bigg|_{p=p_0} = \frac{A(p)}{B'(p_0)}.$$

În final avem

$$y(t) = bk\left[\frac{e^{(\alpha+i\beta)t}}{(\lambda^2 + k^2)2i\,\beta a_0} - \frac{e^{(\alpha-i\beta)t}}{(\overline{\lambda}^2 + k^2)2i\,\beta a_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{ikt}}{(-a_0k^2 + a_1ik + a_2)2ik} - \frac{e^{-ikt}}{(-a_0k^2 - a_1ik + a_2)2ik}\right].$$

Procesul rezultant este suprapunerea unor oscilații periodice a căror frecvență este cea a forței exterioare și a unor oscilații amortizate cu frecvența proprie a sistemului; viteza de amortizare este determinată de mărimea α, adică de abscisa rădăcinilor ecuației caracteristice.

Pentru $\alpha = 0$, $\beta = k$ apare fenomenul de rezonanță. Ecuația inițială ia forma

$$y'' + k^2 y = b \sin kt$$

cu soluția

$$y(t) = \frac{bk}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{pt} dp}{(p^2 - k^2)^2}.$$

Punctele $p = \pm i\, k$ sînt poli de multiplicitate 2 ai funcției de sub integrală. Calculînd reziduul după formula 10.42(2) se găsește

$$y(t) = bk \left[e^{ikt} \left(-\frac{t^2}{4k^2} + \frac{1}{4ik^3} \right) + e^{-ikt} \left(-\frac{1}{4k^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{4ik^3} \right)\right] = \frac{bt}{2k} \cos kt - \frac{b}{2k^2} \sin kt.$$

Se obține o oscilație de amplitudine infinit crescătoare.

15.45. Pentru ecuațiile cu derivate parțiale se aplică aceleași metode.

Dacă se aplică transformarea Laplace, o ecuație diferențială ordinară se transformă într-o ecuație algebrică în raport cu funcția necunoscută, în timp ce o ecuație ce conține derivate nu numai în raport cu t, dar și cu $x, y, \ldots$ nu mai conține derivatele în t, dar păstrează derivatele în $x, y, \ldots$

Ca exemplu, considerăm ecuația căldurii $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ în intervalul finit $0 \leqslant x \leqslant l$ cu condițiile la frontieră și inițiale $u_x(0, t) = 0$, $u(l, t) = u_1$, $u(x, 0) = u_0$. Din punct de vedere fizic, aceste condiții arată că în acest caz căldura nu se scurge prin extremitatea $x = 0$, că la extremitatea $x = l$ se menține temperatura u_1 în raport cu temperatura mediului exterior (pentru $t > 0$) și la momentul inițial temperatura este constantă și egală cu u_0.

Aplicăm transformarea Laplace în t, adică trecem de la funcția $u(x, t)$ la funcția

$$v(x, p) = \int_0^\infty e^{-pt} u(x, t)\, dt.$$

Pentru $v(x, p)$, obținem ecuația

$$\frac{\mathrm{d}^2 v(x, p)}{\mathrm{d}x^2} - pv(x, p) = -u_0$$

cu condițiile

$$v_x(0, p) = 0, \quad v(l, p) = \frac{u_1}{p}.$$

Această ecuație de ordinul al doilea, are soluția

$$v(x, p) = \frac{u_0}{p} + \frac{u_1 - u_0}{p} \frac{\operatorname{ch} x\sqrt{p}}{\operatorname{ch} l\sqrt{p}},$$

de unde

$$u(x, t) = u_0 + \frac{u_1 - u_0}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma - \mathrm{i}\infty}^{\gamma + \mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{pt} \frac{\operatorname{ch} x\sqrt{p}}{\operatorname{ch} l\sqrt{p}} \frac{\mathrm{d}p}{p}. \qquad (1)$$

Funcția de sub semnul integrală este o funcție bine definită de p cu polii $p_0 = 0$ și $p_n = -\frac{\pi^2}{l^2}\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 (n = 1, 2, \ldots)$. Vom arăta că integrala este egală cu suma (infinită) a reziduurilor funcției corespunzătoare în toți acești poli. Pentru aceasta, considerăm în semiplanul din stînga, semicercul Γ_n centrat în originea coordonatelor și de rază $n^2\pi^2/l^2$ (fig. 15.3); el trece printre doi poli alăturați și vom arăta că raportul $\frac{\operatorname{ch} x\sqrt{p}}{\operatorname{ch} l\sqrt{p}}$ este mărginit pe tot semicercul; atunci în virtutea lemei lui Jordan 11.32d, integrala pe Γ_n va tinde către zero pentru $n \to \infty$ și orice integrală (1) se va reduce, ca de obicei, la suma reziduurilor.

În loc să considerăm raportul $\frac{\operatorname{ch} x\sqrt{p}}{\operatorname{ch} l\sqrt{p}}$ pe semicercul Γ_n, unde $|p| = n^2\pi^2/l^2$, se pot înlocui $\sqrt{p}$ prin ζ, p prin ζ^2 și considerăm raportul $\frac{\operatorname{ch} x\zeta}{\operatorname{ch} l\zeta}$ pe sfertul de cerc L_n de rază $n\pi/l$ și cu unghiul polar variind de la $\pi/4$

la $3\pi/4$ (fig. 15.4). Punem $\zeta = \xi + i\tau$ şi avem $\tau > 0$, $|\xi| < \tau$ şi

$$\left|\frac{\operatorname{ch} x\zeta}{\operatorname{ch} l\zeta}\right|^2 = \left|\frac{\operatorname{ch} x(\xi + i\tau)}{\operatorname{ch} l(\xi + i\tau)}\right|^2 =$$

$$= \left|\frac{\operatorname{ch} x\xi \cos x\tau + i \operatorname{sh} x\xi \sin x\tau}{\operatorname{ch} l\xi \cos l\tau + i \operatorname{sh} l\xi \sin l\tau}\right|^2 =$$

$$= \frac{\operatorname{ch}^2 x\xi \cos^2 x\tau + \operatorname{sh}^2 x\xi \sin^2 x\tau}{\operatorname{ch}^2 l\xi \cos^2 l\tau + \operatorname{sh}^2 l\xi \sin^2 l\tau} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\operatorname{ch}^2 l\xi}{\operatorname{ch}^2 l\xi \cos^2 l\tau + \operatorname{sh}^2 l\xi \sin^2 l\tau}. \qquad (2)$$

Dacă $|\xi| < \delta$, atunci $|\tau - n\pi/l| < \varepsilon$ pe cercul L_n pentru n suficient de mare, deci $\cos^2 l\tau\xi < 1 - \eta$, unde ξ, η sînt arbitrar de mici; prin urmare

$$\left|\frac{\operatorname{ch} x\zeta}{\operatorname{ch} l\zeta}\right|^2 \leqslant \frac{\operatorname{ch}^2 l\xi}{(1-\eta)\operatorname{ch}^2 l\xi} = \frac{1}{1-\eta}. \qquad (3)$$

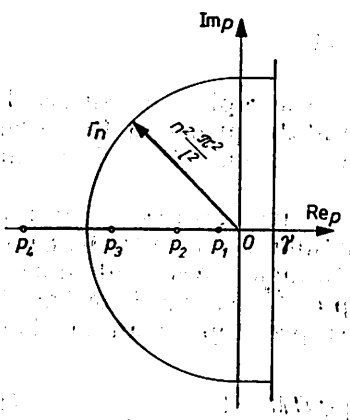


Fig. 15.3

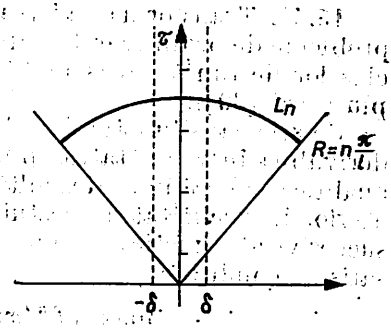


Fig. 15.4

Dacă $|\xi| \geqslant \delta$, atunci vom înlocui în numitorul ultimului membru din (2), $\operatorname{ch}^2 l\xi$ prin $\operatorname{sh}^2 l\xi$ şi vom obţine

$$\left|\frac{\operatorname{ch} x\zeta}{\operatorname{ch} l\zeta}\right|^2 \leqslant \frac{\operatorname{ch}^2 l\xi}{\operatorname{sh}^2 l\xi} = \operatorname{cth}^2 l\xi \leqslant \operatorname{cth}^2 l\delta. \qquad (4)$$

Din (3) și (4) rezultă că pe cercurile menționate, raportul $\left|\frac{\operatorname{ch} x\sqrt{p}}{\operatorname{ch} l\sqrt{p}}\right|$ este mărginit de o constantă fixă. Deci, după cum am mai spus, integrala se reduce la suma reziduurilor. Reziduul în polul $p = 0$ este 1. Reziduul în polul $p_n = -\frac{\pi^2}{l^2}\left(n - \frac{1}{2}\right)^2$ este egal, după cum se calculează simplu, cu

$$\frac{(-1)^n \cdot 4}{\pi(2n-1)} e^{-\frac{\pi^2}{l^2}\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 t} \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}.$$

În finalul calculului, obținem soluția sub forma sumei unei serii :

$$u(x, t) = u_0 + \frac{4}{\pi}(u_1 - u_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} e^{-\frac{\pi^2}{l^2}\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 t} \cdot \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}.$$

§ 15.5. Clase de funcții cvasianalitice

15.51. Transformarea Laplace se aplică cu succes la probleme de ordin teoretic. Rezultatul principal din teoria claselor de funcții cvasianalitice este un astfel de exemplu (vezi [30]).

Se știe că o funcție $f(x)$ de o variabilă reală x, infinit derivabilă în vecinătatea punctului x_0, nu este neapărat analitică, adică nu se dezvoltă în mod necesar într-o serie Taylor în vecinătatea acestui punct. Dar dacă derivatele succesive ale funcției $f(x)$ nu cresc prea repede, anume dacă satisfac condițiile

$$\max_{|x-x_0|<\delta} |f^{(n)}(x)| \leqslant CM^n n!, \tag{1}$$

atunci, după cum am văzut în 8.52, funcția $f(x)$ este analitică în vecinătatea punctului x_0.

Aplicînd formula lui Cauchy 10.34(1) pentru derivatele unei funcții analitice, se poate verifica ușor că, invers, analiticitatea unei funcții $f(x)$ în vecinătatea unui punct x_0

conduce la inegalitățile (1). Fie $m_0, m_1, \ldots, m_n, \ldots$ un șir oarecare de numere pozitive. Introducem clasa $C_{<m_n>}$ de funcții $f(x)$ definite pe axa $-\infty < x < \infty$ și care verifică inegalitățile

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant CM^n m_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

unde constantele C și M pot să depindă de alegerea funcției $f(x)$. Dacă numerele m_n cresc mai rapid decît $n!$, atunci clasa $C_{<m_n>}$ poate să conțină și funcții care nu sînt analitice, dar care să aibă totuși proprietatea de identitate (principiul prelungirii analitice): dacă două funcții f și g conținute în aceeași clasă $C_{<m_n>}$ coincid într-un punct x_0, împreună cu toate derivatele lor, atunci ele sînt identice (A. Denjoy, 1921). Pentru funcțiile analitice, această proprietate este binecunoscută (ea rezultă din 10.39e).

15.52. Clasele $C_{<m_n>}$ în care coincidența a două funcții și, respectiv, a derivatelor lor într-un punct implică identitatea acestor funcții, sînt numite clase cvasianalitice. În anul 1926 T. Carleman a dat o descriere completă a claselor cvasianalitice; în 1930 A. Ostrovski a propus un enunț mai simplu. Pentru a înțelege enunțul teoremei lui Carleman-Ostrovski trebuie să facem cîteva construcții prealabile. Presupunem că șirul m_n crește pentru $n \to \infty$ mai repede ca orice funcție de forma r^n, unde $r > 0$ (puțin mai tîrziu vom arăta că în cazul contrar problema este foarte simplă). Atunci, pentru orice $r > 0$, șirul r^n/m_n tinde către 0 cînd $n \to \infty$, deci este mărginit superior. În cele ce urmează rolul principal îl joacă funcția

$$T(r) = \sup_{n>0} \frac{r^n}{m_n}.$$

Funcția $T(r)$ admite o interpretare geometrică utilă. Să considerăm în semiplanul din dreapta planului xOy șirul de puncte de coordonate $x_n = n$, $y_n = -\ln m_n$ (*punctele lui Valiron*). Deoarece $r^n/m_n \to 0$ pentru $n \to \infty$, are loc relația $n \ln r - \ln m_n \to -\infty$, astfel că, oricare ar fi r și $b > 0$, doar un număr finit de puncte Valiron verifică inegalitatea

$$n \ln r - \ln m_n \geqslant b. \tag{1}$$

Ecuației $x \ln r + y = b$, sau

$$y = -x \ln r + b,$$

îi corespunde în semiplanul din dreapta, al planului xOy, o semidreaptă de coeficient unghiular $-\ln r$ care taie axa y-ilor în punctul b. Inegalitatea (1) arată că deasupra unei astfel de semidrepte nu există decît un număr finit de puncte Valiron. În consecinţă, pentru orice r se poate găsi un

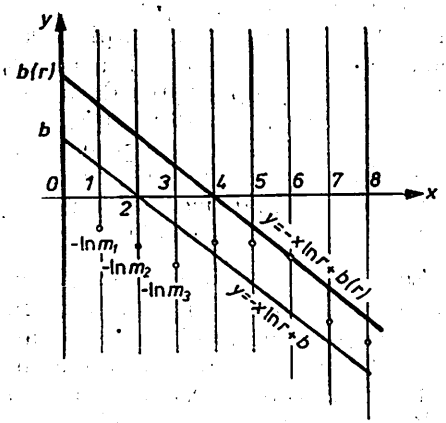


Fig. 15.5

$b = b(r)$ astfel încît nici un punct Valiron să nu se găsească deasupra dreptei $y = -x \ln r + b(r)$, în timp ce chiar pe dreaptă există cel puţin unul (fig. 15.5). O astfel de semidreaptă se va numi *semidreapta Valiron*.

Pentru $b = b(r)$ şi pentru orice n avem, prin construcţie,

$$-n \ln r + b(r) \geqslant -\ln m_n,$$

adică

$$l(r) \geqslant \sup_n \{n \ln r - \ln m_n\} = \sup_n \ln \frac{r^n}{m_n}. \qquad (2)$$

Dar deoarece inegalitatea (2) devine egalitate pentru cel puţin un număr n, avem într-adevăr

$$b(r) = \sup_n \ln \frac{r^n}{m_n},$$

deci

$$b(r) = \ln T(r). \qquad (3)$$

Interpretarea geometrică a funcției $\ln T(r)$ ne va ajuta să-i stabilim anumite proprietăți. Pentru început, din definiția funcției $b(r)$, rezultă că $b(r)$ este o funcție crescătoare de r: dacă, pentru $r_2 > r_1$ avem $b(r_2) < b(r_1)$, atunci toată semidreapta $y = -x \ln r_2 + b(r_2)$ se va afla dedesubtul semidreptei $y = -x \ln r_1 + b(r_1)$, ceea ce contrazice faptul că aceasta are cel puțin un punct al lui Valiron. Apoi, se poate construi totdeauna o semidreaptă a lui Valiron, fiind dată valoarea b ($> \inf b(r)$) și considerînd familia tuturor semidreptelor ce taie axa ordonatelor în punctul b și raționînd ca mai sus. Aceasta înseamnă că funcția crescătoare $b(r) = \ln T(r)$ ia toate valorile ($> \inf b(r)$), deci este continuă (5.36). (S-ar putea de asemenea demonstra că ea este o funcție liniară de $\ln r$ pe porțiuni, dar nu vom utiliza acest fapt.)

Putem acum da teorema lui Carleman în formularea lui Ostrovski:

TEOREMĂ. *Punem*

$$T(r) = \sup_{n>0} \frac{r^n}{m_n}. \tag{4}$$

Atunci, pentru ca $C_{\langle m_n \rangle}$ *să fie cvasianalitică, este necesar și suficient ca*

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2}\, dr = \infty. \tag{5}$$

Fie, de exemplu, $m_n = (n!)^\alpha >$, unde este fixat. Atunci este ușor de văzut, folosind formula lui Stirling 11.57b, că

$$T(r) \sim r^{1-\alpha};$$

integrala (5) converge deci pentru $\alpha > 1$ și diverge pentru $\alpha \leqslant 1$. Din teorema lui Carleman rezultă că $C_{\langle (n!)^\alpha \rangle}$ este cvasianalitică pentru $\alpha \leqslant 1$ (după cum am văzut mai înainte, ea este formată din funcții analitice) și nu este cvasianalitică pentru $\alpha > 1$.

Există clase cvasianalitice care conțin și funcții care nu sînt numai analitice. Se poate proba că funcția $f(x) = \sum_n T^{-1}(n) \cos nx$ aparține clasei $C_{\langle m_n \rangle}$ și nu este analitică dacă $\sqrt[n]{m_n}/n \to \infty$; de aceea, de exemplu, pentru $m_n = n! \ln^n n$,

clasa cvasianalitică $C_{<m_n>}$ conține funcții care nu sînt analitice.

15.53. În cele ce urmează (15.53 — 15.56) vom demonstra teorema Carleman-Ostrovski enunțată în 15.52.

Aici, folosind transformarea Laplace vom reduce problema caracterizării claselor cvasianalitice la o problemă relativ la funcții analitice într-un semiplan.

Presupunem că $C_{<m_n>}$ nu este cvasianalitică. Aceasta înseamnă că există două funcții f și g care coincid, împreună cu derivatele lor respective, în $x = x_0$, fără să coincidă peste tot. Fără a restrînge generalitatea, se poate pune $x_0 = 0$ și $f(x) \neq g(x)$ pentru $x > 0$; aceste condiții pot fi satisfăcute totdeauna, efectuînd o translație și înlocuind x prin $-x$, adică efectuînd operații admisibile în clasa $C_{<m_n>}$. Considerăm apoi funcția $\varphi(x)$, care este nulă pentru $x < 0$ și $f(x) - g(x)$ pentru $x \geq 0$; este evident că ea aparține de asemenea clasei $C_{<m_n>}$. Deoarece această funcție este nulă pentru $x < 0$ și mărginită pentru $x > 0$, ea are transformată Laplace

$$\Phi(p) = \int_0^\infty \varphi(x)\, e^{-px}\, dx, \qquad (1)$$

care este analitică în semiplanul $\operatorname{Re} p > 0$.

Să punem în evidență alte proprietăți ale funcției $\Phi(p)$. Integrînd de n ori prin părți în (1), obținem

$$p^n \Phi(p) = \int_0^\infty \varphi^{(n)}(x) e^{-px}\, dx,$$

de unde estimarea

$$|p^n \Phi(p)| \leqslant CM^n m_n \int_0^\infty e^{-px}\, dx = CM^n m_n \frac{1}{|p|} \leqslant C_\gamma M^n m_n,$$

unde $|p| > \gamma > 0$. Invers, fie $\Phi(p) \not\equiv 0$ o funcție analitică dată, într-un semiplan oarecare $\operatorname{Re} p > \gamma_0 > 0$ și care satisface inegalități de forma

$$|p^n \Phi(p)| \leqslant CM^n m_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Este evident că funcţia $\Phi(p)/p^2$ satisface condiţiile din teorema 15.42a; ca majorant integrabil cerut de condiţia 2), putem alege, de exemplu, $Cm_0 \dfrac{1}{|\gamma_0 + i\eta|^2}$. În virtutea teoremei amintite, funcţia definită de egalitatea ($\gamma > \gamma_0$)

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Phi(p)}{p^2} e^{px}\, dp, \tag{2}$$

este nulă pentru $x < 0$. Deoarece $\Phi(p) \not\equiv 0$, are loc relaţia $\varphi(x) \not\equiv 0$ pentru $x > 0$. În plus, $\varphi(x)$ are derivate de orice ordin şi avem

$$|(\varphi(x)e^{-\gamma_0 x})^{(n)}| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Phi(p)}{p^2} (p-\gamma_0)^n e^{(p-\gamma_0)x}\, dp \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{CM^n m_n}{2\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \left| \frac{p-\gamma_0}{p} \right|^n \left| \frac{dp}{p^2} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{2\pi} M^n m_n \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{|dp|}{|p|^2} = C' M^n m_n.$$

Vedem că $\varphi(x)e^{-\gamma_0 x}$ aparţine clasei $C_{\langle m_n \rangle}$. Deoarece $\varphi(x) = 0$ pentru $x < 0$ şi $\varphi(x) \not\equiv 0$, clasa $C_{\langle m_n \rangle}$ nu este cvasianalitică. Deci problema cvasianaliticităţii unei clase $C_{\langle m_n \rangle}$ date este echivalentă cu problema existenţei unei funcţii $\Phi(p) \not\equiv 0$ analitică în semiplanul $\operatorname{Re} p > \gamma_0$ şi care verifică inegalităţile

$$|p^n \Phi(p)| \leqslant CM^n m_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

(„problema lui Watson").

15.54. Prin inversiunea $p = 2\gamma/s$, semiplanul $\operatorname{Re} p > \gamma$ este transformat în discul $|s - 1| < 1$ şi problema lui Watson este redusă la următoarea problemă: care sînt condiţiile care trebuie impuse unui şir m_n, pentru ca în discul $|s - 1| < 1$ să existe o funcţie analitică $F(s) \not\equiv 0$ verificînd inegalitatea

$$|F(s)| \leqslant CM^n m_n |s|^n ? \tag{1}$$

De exemplu, pentru şirul de numere $n_1, n_2, \ldots$, nu există o astfel de funcţie, dacă $m_n \leqslant C_1 r_0^n$. Într-adevăr, dacă

$$|F(s)| \leqslant CM^n C_1 r_0^n |s|^n = CC_1 (Mr_0 |s|)^n \quad (n = n_1, n_2, \ldots),$$

atunci alegînd $|s| < 1/(Mr_0)$ şi trecînd la limită pentru $n_k \to \infty$, avem $F(s) = 0$, contrar ipotezei. Astfel, cu ipotezele făcute asupra şirului m_n, clasa $C_{\langle m_n \rangle}$ este cvasianalitică. În plus, în cazul de faţă, avem

$$T(r) = \sup_n \frac{r^n}{m_n} = \infty \text{ pentru } r > r_0$$

şi condiţia (1) este evident satisfăcută. După cum am spus în 15.52, în cazul $m_{n_k} \leqslant C_1 r_0^{n_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ problema este foarte simplă.

Revenim la cazul general şi presupunem că există o funcţie $F(s)$ ce satisface condiţiile cerute. Se poate găsi un ρ astfel încît $F(\rho) \neq 0$, $|F(\rho + \rho e^{i\theta})| < 1$ pentru toţi θ reali şi funcţia $F(s)$ să aibă un singur zero pentru $s = 0$ pe cercul $s = \rho + \rho e^{i\theta}$. Toate construcţiile ulterioare sînt realizate în discul $|s - \rho| \leqslant \rho$. În virtutea inegalităţilor (1) avem

$$|F(\rho + \rho e^{i\theta})| \leqslant CM^n m_n \rho^n |1 + e^{i\theta}|^n = CM^n m_n \left|2\rho \cos\frac{\theta}{2}\right|^n.$$

Luînd în membrul drept minimul după n, rezultă

$$|F(\rho + \rho e^{i\theta})| \leqslant \frac{C}{\max\limits_n \dfrac{1}{M^n m_n \left|2\rho \cos\dfrac{\theta}{2}\right|^n}}$$

şi, conform definiţiei funcţiei $T(r)$,

$$|F(\rho + \rho e^{i\theta})| \leqslant \frac{C}{T\left(\dfrac{1}{2M\rho\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right|}\right)},$$

de unde

$$\ln|F(\rho+\rho e^{i\theta})| \leqslant \ln C - \ln T\left(\frac{1}{2M\rho\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|}\right).$$

În teoria funcțiilor analitice există următoarea teoremă (demonstrația va fi dată în 15.56): *fie o funcție* $\Phi(z)$ *analitică în discul* $|z-z_0|<h$, *nenulă pentru* $z=z_0$, *nedepășind în modul unitatea, continuă în discul închis* $|z-z_0|\leqslant h$ *și având un singur zero pe cercul* $|z-z_0|=h$; *atunci integrala*

$$-\int_0^{2\pi}\ln|\Phi(z_0+he^{i\theta})|\,d\theta$$

are o valoare finită.

Aplicînd această teoremă funcției $\Phi(z)=F(z)$, se vede că funcția

$$\ln T\left(\frac{1}{2M\rho\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|}\right) \leqslant \ln C - \ln|F(\rho+\rho e^{i\theta})|$$

are și ea o integrală finită în raport cu θ, de la zero la 2π. Dacă se face substituția

$$2M\rho\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| = \frac{1}{r},$$

se ajunge la convergența integralei

$$\int_a^{\infty}\frac{\ln T(r)}{r^2}\,\frac{1}{\sqrt{M^2\rho^2-\frac{1}{4r^2}}}\,dr,$$

deci și a integralei

$$\int_a^{\infty}\frac{\ln T(r)}{r^2}\,dr. \qquad (2)$$

În final, dacă $C_{\langle m_n \rangle}$ nu ar fi cvasianalitică, atunci integrala (2) ar converge. Aceasta demonstrează suficiența condiției lui Carleman din 15.52.

15.55. Începînd demonstrația necesității condiției lui Carleman, presupunem că integrala 15.54(2) converge. Atunci, la fel va fi și integrala

$$\int_0^{2\pi} \ln T\left(\frac{1}{2M\rho\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|}\right) d\theta;$$

deci se poate construi integrala Poisson

$$G(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln T\left(\frac{1}{2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|}\right)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\theta,$$

care este o funcție armonică în discul $r<1$. Punem $G(s-1) = P(s)$ și notăm prin $Q(s)$ funcția armonic conjugată (14.49c) în discul $|s-1|<1$. Fie apoi

$$F(s) = e^{-\{P(s)+iQ(s)\}}.$$

Atunci funcția $F(s)$ verifică inegalitățile

$$|F(s)| \leqslant m_n |s|^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Într-adevăr, inegalitățile (1) sînt echivalente cu inegalitățile

$$e^{-P(s)} \leqslant m_n |s|^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

sau cu

$$-G(s) = -P(s+1) \leqslant \ln m_n + n\ln(s+1). \tag{2}$$

Cei doi termeni din membrul secund pot fi reprezentați ca integrale Poisson

$$\ln m_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\ln m_n\,(1-r^2)}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\theta,$$

$$n\ln|s+1| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{n\ln|e^{i\theta}+1|\,(1-r^2)}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\theta,$$

după care inegalitatea (2) pe care trebuie să o demonstrăm se scrie astfel

$$\int_0^{2\pi} \ln \left\{ T\left(\frac{1}{2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|} \right) m_n \left| 1 + e^{i\theta} \right|^n \right\} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\, d\theta \geqslant 0. \qquad (3)$$

Dar $|1 + e^{i\theta}| = 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$; deoarece

$$T(r) = \sup_{n>0} \frac{r^n}{m_n},$$

au loc separat pentru fiecare n, inegalităţile

$$T(r) \geqslant \frac{r^n}{m_n}, \quad T(r) m_n r^{-n} \geqslant 1.$$

Ca atare funcţia de sub semnul integrală din (3) este nenegativă. De aici rezultă că inegalitatea (3) este adevărată; în consecinţă, inegalitatea (1) este de asemenea adevărată şi clasa $C_{<m_n>}$ nu este cvasianalitică, conform 15.53. Aceasta încheie demonstraţia teoremei lui Carleman.

15.56. Aici vom demonstra teorema utilizată în 15.54.

TEOREMĂ. *Dacă o funcţie $f(z)$ este analitică într-un disc $|z - z_0| < h$, nu este nulă pentru $z = z_0$, nu depăşeşte în modul numărul 1, este continuă în discul închis $|z - z_0| \leqslant h$ şi are un singur zero z^* pe cercul $|z - z_0| = h$, atunci integrala*

$$-\int_0^{2\pi} \ln |f(z_0 + he^{i\theta})|\, d\theta$$

este finită.

Demonstraţie. Fără a restrînge generalitatea, putem pune $z_0 = 0$, $h = 1$, $z^* = 1$. În discul $|z| \leqslant r < 1$, funcţia $f(z)$ este analitică şi nu poate avea acolo decît un număr finit de zerouri $z_1, \ldots, z_m$; se poate presupune că nu avem

zerouri pe cercul $|z| = r$. Să considerăm conturul închis C din fig. 15.6 care este compus din arcul de cerc $|z| = r$, parcurs în sens pozitiv, din circumferinţele $C_k (k = 1, 2, \ldots, m)$ de rază foarte mică ε, parcurse în sens negativ şi din curbele $L_k = [z_k'', z_k']$, ce unesc arcele menţionate

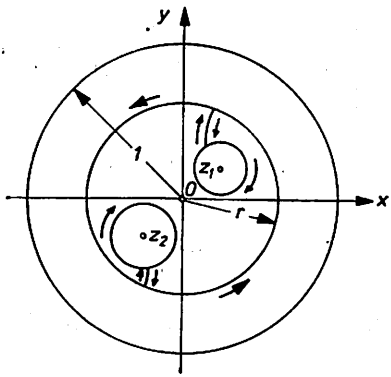


Fig. 15.6

şi parcurse fiecare din ele de două ori în sensuri opuse. Funcţia $\ln f(z)$ este analitică în interiorul conturului C şi valoarea $\ln f(0)$ poate fi reprezentată prin formula Cauchy

$$\ln f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \ln f(z) \frac{dz}{z}. \tag{1}$$

Considerăm partea din conturul C formată din cercul C_j de rază ε şi cu centrul în punctul z_j care este parcurs în sens negativ. Partea din integrala (1) luată în lungul cercului C_j are forma

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} \ln f(z) \frac{i\varepsilon e^{i\theta}\, d\theta}{z_j + \varepsilon e^{i\theta}}. \tag{2}$$

Dacă ordinul de multiplicitate al rădăcinii z_j este k_j, atunci $f(z) = (z - z_j)^{k_j} f_j(z)$, unde $f_j(z_j) \neq 0$ şi avem

$$|\ln f(z)| = |\ln (z - z_j)^{k_j} f_j(z)| = |k_j \ln (z - z_j) + \ln f_j(z)| \leqslant$$

$$\leqslant k_j |\ln |z - z_j| + 2\pi| + |\ln f_j(z)| \leqslant k_j |\ln \varepsilon| + C_1.$$

În virtutea acestei estimații, funcția de sub semnul integrală din (2) devine oricît de mică dorim pentru $\varepsilon \to 0$; în consecință, toate integralele în lungul cercurilor C_j tind către zero cînd $\varepsilon \to 0$.

Înconjurînd punctul z_j în sens negativ, funcția $\ln f(z) = \ln |f(z)| + i \arg f(z)$ se mărește cu $-2\pi k_j i$; în consecință, integrala în lungul părții de contur compusă din segmentul L_j, parcurs de două ori în sensuri opuse, este egală cu

$$k_j \int_{L_j} \frac{dz}{z} = k_j \, [\ln z_j' - \ln z_j''].$$

Pe fiecare parte următoare a cercului $|z| = r$, funcția $\ln f(z)$ crește cu $-2\pi k_j i$, ceea ce adaugă la întreaga integrală (1) mărimea

$$k_j \int_{z_j''}^{z_{j+1}''} i \, d\theta,$$

care este evident pur imaginară. Ținînd cont de aceasta, să separăm partea reală din egalitatea (1) pentru $\varepsilon \to 0$; obținem

$$\ln |f(0)| = \sum_{j=1}^{m} k_j \ln |z_j'| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| \, d\theta,$$

dar, deoarece $|z_j''| < 1$, $\ln |z_j'| < 0$, are loc relația

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| \, d\theta \geqslant \ln |f(0)|,$$

sau, ceea ce revine la același lucru,

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| \, d\theta \leqslant -\ln |f(0)|.$$

Prin ipoteză, pe cercul $|z| = 1$ avem un singur punct $z^* = 1$. Alegem un $\delta > 0$ oarecare; este evident că

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta} \ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta \leqslant -\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta \leqslant$$

$$\leqslant -\ln|f(0)|.$$

Ţinînd δ fix, trecem la limită în această inegalitate, pentru $r \to 1$. Avem

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta} \ln|f(e^{i\theta})|\,d\theta \leqslant -\ln|f(0)|.$$

Această inegalitate este adevărată pentru orice $\delta > 0$. Trecînd la limită pentru $\delta \to 0$, vedem că integrala

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \ln|f(e^{i\theta})|\,d\theta$$

există şi teorema este demonstrată.

EXERCIŢII

1. Să se demonstreze convergenţa integralei Fourier

$$\varphi(x) = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)\,\frac{\sin pt}{t}\,dt$$

într-un punct x, în vecinătatea căruia funcţia $\varphi(x)$ este continuă şi monotonă, ca şi convergenţa uniformă în orice interval închis, inclus într-un interval de monotonie şi continuitate a lui $\varphi(x)$.

2. Să se dea un exemplu de funcţie $\varphi(x)$ continuă ce are integrală Fourier uniform convergentă şi astfel încît funcţia

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,e^{ix\sigma}\,dx$$

să nu fie absolut integrabilă pe $-\infty < \sigma < \infty$.

3. Să se dea exemplu de o funcţie $\varphi(x)$ pentru care integrala Fourier

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)\,\frac{\sin pt}{t}\,dt = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-p}^{p}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\,e^{i\sigma(x-\xi)}\,d\xi$$

converge uniform pe axa $-\infty < x < \infty$, dar fiecare din integralele

$$\lim_{p\to\infty}\int_0^p\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{i\sigma(x-\xi)}\,d\xi\right\},\quad \lim_{p\to\infty}\int_{-p}^0\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{i\sigma(x-\xi)}\,d\xi\right\}$$

să aibă puncte de divergență.

4. Să se demonstreze „egalitatea lui Parseval"

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(\sigma)|^2\,d\sigma = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx,$$

unde $g(\sigma)$ este transformata Fourier a unei funcții $f(x)$ care verifică ipoteza teoremei 15.13 și este de pătrat integrabil pe toată axa $-\infty < x < \infty$ (Plancherel).

5. Să se demonstreze „relația de incertitudine"

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2|f(x)|^2\,dx\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\sigma^2|g(\sigma)|^2\,d\sigma \geqslant \frac{\pi}{2}$$

presupunînd că funcțiile $xf(x)$ și $f'(x)$ verifică ipoteza din exercițiul 4 și că $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx = 1$.

6. Fie $F(p)$ transformata Laplace a unei funcții $f(t)$. Să se găsească transformatele Laplace ale funcțiilor $f_1(t) = e^{at}f(t)$, $f_2(t) = f'(t)$,

$$f_3(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau,\quad f_4(t) = tf(t),\quad f_5(t) = \frac{f(t)}{t}.$$

7. Să se afle transformatele Laplace ale funcțiilor

$$\varphi_1(t) = e^{at};\ \varphi_2(t) = t^{\alpha-1}\ (\alpha > 0);\ \varphi_3(t) = t^{\alpha-1}e^{at};$$

$$\varphi_4(t) = \sin at;\ \varphi_5(t) = \cos at;\ \varphi_6(t) = \frac{\sin at}{t}.$$

8. Să se demonstreze *formula de inversiune a lui Mellin:* dacă

$$F(s) = \int_0^{\infty}f(x)x^{s-1}\,dx,$$

atunci

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) x^{-s} \, ds.$$

NOTĂ ISTORICĂ

Integrala Fourier a apărut pentru prima oară în cartea lui Fourier *Teoria analitică a căldurii* (1822), unde ea a fost aplicată mai multor probleme de fizică matematică. Lucrările lui Fourier, ca și cele ale lui Cauchy, care a folosit integrala lui Fourier pentru a studia propagarea undelor (1842), nu conțin nici o demonstrație a convergenței; demonstrații riguroase, în diverse ipoteze, au apărut pe parcursul întregului secol al XIX-lea și reprezintă modificări de demonstrații corespunzătoare ale convergenței seriilor Fourier. „Transformarea Laplace" a fost dezvoltată de către Laplace în 1812 în *Teoria analitică a probabilităților*; de altfel, Euler a folosit încă din 1737 integralele din $e^{-px} f(x)$ pentru a rezolva ecuații diferențiale ordinare. În perioada în care au activat Euler și Laplace, nu se punea problema să se folosească transformarea Laplace în domeniul complex. Începînd din 1892 au apărut lucrările inginerului englez Heaviside, care, interpretînd funcții de $p = \frac{\partial}{\partial t}$ dincolo de clasa funcțiilor raționale, după regulile introduse chiar de el, a găsit soluțiile anumitor probleme de electrotehnică, ce se reduceau la ecuații cu derivate parțiale. Un anumit timp, „calculul operațional" al lui Heaviside a rămas fără fundament matematic. Începînd din 1910, Bromwich, apoi Carlson, Van der Pol, Doetsch, aplicînd transformarea lui Laplace în domeniul complex, au justificat regulile lui Heaviside. Lucrările lui Denjoy, Carleman, Ostrovski asupra claselor de funcții cvasianalitice au apărut în anii 1920—1930.

Progresul ulterior în teoria transformării Fourier este legat, pe de o parte, de folosirea integralei Lebesgue (și a integralei Lebesgue-Stieltjes) și pe de altă parte de teoria distribuțiilor; în particular, distribuțiile permit să definim transformata Fourier pentru o funcție crescătoare nemărginit (pentru $|x| \to \infty$). La rîndul său, acest fapt s-a dovedit hotărîtor pentru rezolvarea problemelor fundamentale ale teoriei ecuațiilor liniare cu derivate parțiale și cu coeficienți constanți (vezi [15], [42] și [34]).

Capitolul 16

CURBE ÎN SPAȚIU

Matematica pură are ca obiect formele spațiale și raporturile cantitative din lumea reală, deci un material foarte concret. Faptul că acest material apare sub o formă extrem de abstractă, nu poate să ascundă decît aparent originea sa situată în lumea înconjurătoare.

F. Engels

§ 16.1. Definiții de bază

16.11. Prin definiție, o curbă L în spațiul n-dimensional $\mathbb{R}_n$ este locul geometric al punctelor date printr-un sistem de ecuații parametrice

$$x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t) \qquad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{1}$$

sau, ceea ce revine la același lucru, printr-o ecuație vectorială

$$x = x(t) \qquad (a \leqslant t \leqslant b). \tag{2}$$

Vectorul $x(t)$ se numește *raza vectoare* a curbei L.

Funcțiile $x_j(t)$ sînt presupuse continue și verificînd anumite condiții de derivabilitate, care vor fi precizate în cele ce urmează. Pentru ca locul geometric (1) să aibă forma obișnuită a unei curbe, nu este suficient ca funcțiile $x_j(t)$ să fie continue : există sisteme (1), cu membrii secunzi continui, pentru care locul geometric corespunzător este tot spațiul $\mathbb{R}_n$ (vezi exerc. 5). Să observăm de asemenea că o aceeași curbă (adică un același loc geometric) poate fi dat de mai multe sisteme diferite de tipul (1); de exemplu, pentru $-\infty < t < \infty$, sistemele

$$x = r\cos t,\ y = r\sin t$$

și

$$x = r\cos(t^3),\ y = r\sin(t^5)$$

definesc același loc geometric în planul (x, y), adică cercul de rază r cu centrul în originea coordonatelor. Vom vedea în cele ce urmează că alegerea unei reprezentări parametrice convenabile ajută adeseori la explicitarea proprietăților geometrice ale unei curbe date.

16.12. Am studiat un caz mai general cînd în ecuația 16.11(2), $x(t)$ era un punct al spațiului metric, depinzînd de un parametru t. Era vorba de o curbă într-un spațiu metric. În 12.61, pentru cazul cînd valorile funcției $x(t)$ aparțin unui spațiu vectorial normat B, am definit derivata funcției vectoriale $x(t)$ într-un punct $x = c$:

$$x'(c) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(c + \Delta t) - x(c)}{\Delta t}, \qquad (1)$$

dacă limita din membrul al doilea există în sensul metricii spațiului B. Atunci funcția $x(t)$ este derivabilă în punctul $t = c$. Dacă limita (1) există pentru orice $c \in [a, b]$, atunci funcția $x(t)$ este derivabilă pe întreg intervalul $[a, b]$.

Vom studia funcții derivabile cu valori într-un spațiu m-dimensional, dar multe rezultate vor fi valabile pentru un spațiu vectorial normat (de dimensiune arbitrară, eventual infinită).

16.13. Să observăm înainte de toate că, deoarece trecerea la limită într-un spațiu m-dimensional este echivalentă cu trecerea la limită pe fiecare coordonată, derivabilitatea funcției vectoriale $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t))$ în $t = c$, în sensul 16.12(1), este echivalentă cu derivabilitatea a m funcții numerice $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ în $t = c$; în plus, are loc relația

$$x'(c) = (x_1'(c), \ldots, x_m'(c)) \in \mathbb{R}_m. \qquad (1)$$

Să dăm o interpretare geometrică a derivabilității unei funcții vectoriale. Am vorbit despre ea la începutul capitolului 13; aici vom trata problema independent și mai în detaliu.

Definiția derivatei 16.12(1) poate fi pusă sub formă echivalentă

$$\Delta x = x(c + \Delta t) - x(c) = x'(c)\Delta t + \varepsilon(t)\,\Delta t, \qquad (2)$$

unde vectorul $\varepsilon(t)$ tinde la zero pentru $\Delta t \to 0$. Egalitatea (2) arată că variația funcției $x(t)$, cînd t variază de la c la $c + \Delta t$ conține partea liniară principală $x'(c)\Delta t$. Un punct $t = c$ se va numi *ordinar* dacă $x'(c) \neq 0$ și *singular* dacă $x'(c) = 0$ (vezi 9.63 g). Pentru unp unct ordinar, imaginea

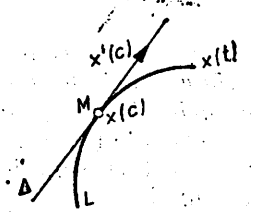


Fig. 16.1

geometrică ce corespunde ecuației liniare $z = x(c) + x'(c) \cdot (t - c)$ este dreapta Λ, ce trece prin punctul $M = x(c)$ pe direcția vectorului $x'(c)$ (fig. 16.1). Astfel, distanța de la un punct al curbei la punctul corespunzător al dreptei Λ (adică luat pentru aceeași valoare a lui t) este un infinit mic de ordin superior în raport cu Δt. Din această cauză dreapta Λ se numește *tangentă la curba L în punctul M*. Așadar, *existența derivatei $x'(c)$, nenulă, este echivalentă cu existența tangentei la curba L în punctul M; vectorul $x'(c)$ este un vector director al acestei tangente.*

16.14. Să studiem ce se întîmplă cu un vector director al unei tangente, cînd se trece pe curba L la un nou parametru τ, astfel încît $t = t(\tau)$ să fie o funcție derivabilă de τ. Fie, în particular, $c = t(\gamma)$ și $t'(\gamma) \neq 0$. Atunci punem $x(t(\tau)) = g(\tau)$ și scriem

$$g'(\tau) = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta \tau} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta t}{\Delta \tau} = x'(t)t'(\tau) \quad (1)$$

conform regulei de derivare a unei funcții compuse (12.61h).

Deci, noul vector director $g'(\tau)|_{\tau=\gamma}$ are aceeași direcție cu vechiul vector $x'(t)$ și se deduce din el prin înmulțire cu $t'(\tau)$. Astfel, lungimea vectorului director al unei tangente nu admite nici o interpretare geometrică directă. După cum am văzut în 13.11d, se poate atribui vectorului $x'(t)$ un sens cinematic; dacă t este timpul, atunci $x'(c)$ este viteza de mișcare a punctului $x = x(t)$ în lungul curbei L la momentul $t = c$.

16.15. Introducem, în sfîrşit, noţiunea de diferenţială a unei funcţii vectoriale $x(t)$. Vectorul $\mathrm{d}x = x'(c)\,\mathrm{d}t$, unde $\mathrm{d}t = \Delta t$ este o creştere arbitrară a parametrului t, se numeşte *diferenţiala* funcţiei vectoriale $x(t)$ pentru $t=c$. Diferenţiala unei funcţii este deci partea liniară principală a creşterii sale, corespunzătoare unei creşteri a variabilei independente t.

Ca şi mai înainte, are loc teorema asupra invarianţei diferenţialei: *diferenţiala unei funcţii are aceeaşi formă indiferent dacă t este variabilă independentă sau o funcţie de o altă variabilă independentă* (în ultimul caz, $\mathrm{d}t$ este partea liniară principală a creşterii funcţiei $t(\tau)$). Într-adevăr, dacă $g(\tau) = x[t(\tau)]$, atunci

$$\mathrm{d}_{(\tau)}x = g'(\gamma)\,\mathrm{d}t = x'(c)t'(\gamma)\,\mathrm{d}\tau = x'(c)\,\mathrm{d}t = d_{(t)}x,$$

aşa cum s-a afirmat.

16.16. *Integrarea unei funcţii vectoriale.* În 12.62 am definit această operaţie pentru funcţii vectoriale cu valori într-un spaţiu normat $\mathfrak{B}$. Se numeşte integrala unei funcţii vectoriale $x(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, cu valori într-un spaţiu vectorial normat complet $\mathfrak{B}$ (de exemplu, spaţiul $\mathbb{R}_m$), mărimea din $\mathfrak{B}$

$$\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\mathrm{d}(\pi)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} x(\xi_k)\,\Delta t_k,$$

$$\Pi = \{a = t_0 \leqslant \xi_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n = b\}, \quad \Delta t_k = t_{k+1} - t_k,$$

unde limita se consideră în raport cu norma spaţiului $\mathfrak{B}$ pentru o rafinare nelimitată a diviziunii Π, adică pentru

$$\mathrm{d}(\Pi) = \max \Delta t_k \to 0.$$

Existenţa integralei a fost demonstrată pentru $x(t)$ continuă pe porţiuni. Proprietăţile principale ale integralei au fost indicate în 12.62 c:

1) $\int_a^b \alpha x(t)\,\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b x(t)\mathrm{d}t$ pentru orice α real;

$$2)\ \int_a^b [x(t)+y(t)]\,dt = \int_a^b x(t)\,dt + \int_a^b y(t)dt;$$

$$3)\ \int_a^c x(t)\,dt + \int_c^b x(t)\,dt = \int_a^b x(t)\,dt\ (a \leqslant c \leqslant b);$$

$$4)\ \left\| \int_a^b x(t)\,dt \right\| \leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b} \|x(t)\|\,(b-a).$$

Le completăm prin formula de integrare prin părți :

$$5)\ \int_a^b u(t)\,dv(t) = u(t)\,v(t)\Big|_a^b - \int_a^b v(t)\,du(t).$$

Aici $u(t)$ este o funcție derivabilă cu valori în spațiul $\mathfrak{B}$, $v(t)$ o funcție numerică derivabilă. Demonstrația formulei 5) este analoagă cu cea pentru funcții numerice (9.51a).

16.17. *Derivate de ordin superior.*

a. Derivatele de ordin superior ale unei funcții vectoriale $x(t)$ au fost definite în 12.64. Derivata de ordin n este, prin definiție, prima derivată a derivatei de ordin $(n-1)$, dacă aceasta din urmă este o funcție derivabilă pentru $a \leqslant t \leqslant b$.

În cele ce urmează existența acestor derivate va fi totdeauna presupusă.

b. Să vedem cum se schimbă funcțiile vectoriale x_t, x_{tt}, ... cînd se înlocuiește variabila independentă t printr-o nouă variabilă independentă τ, $t = t(\tau)$, unde $t(\tau)$ este o funcție de τ suficient de netedă.

Am văzut (16.14) că primele derivate în t și în τ nu diferă decît prin factorul

$$x_\tau = x_t t_\tau.$$

Derivînd această egalitate în τ și aplicînd încă o dată formula de derivare a unei funcții compuse, se găsește

$$x_{\tau\tau} = (x_\tau)_\tau = (x_t t_\tau)_\tau = (x_t)_\tau\ t_\tau + x_t\ t_{\tau\tau} = x_{tt} t_\tau^2 + x_t t_{\tau\tau}.$$

Observăm că vectorul $x_{\tau\tau}$ fără a fi în general coliniar cu vectorul x_{tt}, se află în planul vectorilor x_t și x_{tt}. Astfel, planul determinat de vectorii x_t și x_{tt} nu depinde de alegerea parametrului, cu toate că poziția vectorului x_{tt} în plan se schimbă atunci cînd se trece la un nou parametru.

În cazul general, oricare ar fi n, vectorul $x_\tau^{(n)}$ aparține subspațiului n-dimensional generat de vectorii $x_t, x_{tt}, \ldots, x_t^{(n)}$. Se demonstrează prin recurență : presupunînd relația

$$x_\tau^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} x_t^{(k)} \varphi_k(\tau),$$

se derivează încă o dată în raport cu τ ; se obține

$$x_\tau^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} x_t^{(k+1)} t_\tau \varphi_k(\tau) + \sum_{k=1}^{n} x_t^{(k)} \varphi_k'(\tau),$$

deci $x_\tau^{(n+1)}$ se exprimă liniar în raport cu $x_t, x_{tt}, \ldots, x_t^{(n+1)}$, ceea ce trebuia demonstrat.

Se poate spune că nu vectorii înșiși $x_t, x_{tt}, \ldots, x_t^{(n)}$ au un sens geometric, ci varietățile liniare pe care ei le generează. Aceste varietăți sînt numite subspații osculatoare de dimensiune $1, 2, \ldots, n$ (în cazul cînd $x_t, x_{tt}, \ldots$ sînt liniar independenți).

c. Dacă funcția $x(t)$ este de $n+1$ ori derivabilă pe intervalul $[a, b]$ atunci are loc formula lui Taylor (12.64 c) :

$$\Delta x(t) = x(t + \Delta t) - x(t) =$$

$$= x'(t)\,\Delta t + x''(t)\,\frac{(\Delta t)^2}{2!} + \ldots + x^{(n)}(t)\,\frac{(\Delta t)^n}{n!} + Q_n.$$

Punînd aici $n = 1, 2, \ldots$ și utilizînd estimarea 12.64c pentru Q_n, obținem o serie de formule din ce în ce mai precise :

$$\Delta(x)(t) = x'(t)\,\Delta t + \varepsilon_1(t)\Delta t, \qquad (1)$$

$$\Delta x(t) = x'(t)\Delta t + x''(t)\,\frac{(\Delta t)^2}{2} + \varepsilon_2(t)\,(\Delta t)^2, \qquad (2)$$

$$\Delta x(t) = x'(t)\,\Delta t + x''(t)\,\frac{(\Delta t)^2}{2} + x'''(t)\,\frac{(\Delta t)^3}{6} + \varepsilon_3(t)(\Delta t)^3, \qquad (3)$$

. . . . . .

16.18. *Forma unei curbe în vecinătatea unui punct ordinar sau singular.* Egalitatea 16.17(1) arată că o curbă L de ecuație $x = x(t)$ coincide, pînă la un infinit mic de primul ordin în raport cu Δt, cu tangenta sa, dacă $x'(t) \neq 0$. Egalitatea 16.17(2) arată că această curbă L se găsește, pînă la un infinit mic de ordinul doi, în planul definit de vectorii $x'(t)$ și $x''(t)$; conform definiției 16.17b, acest plan (în cazul cînd $x'(t)$ și $x''(t)$ sînt liniar independenți) se numește *planul osculator al curbei în punctul M*. Dacă ξ, η sînt coordonatele din planul osculator în raport cu baza $x'(t)$, $x''(t)/2$, atunci plecînd de la 16.17(2) obținem reprezentarea parametrică a curbei L pînă la un infinit mic de ordinul doi :

$$\xi = \Delta t, \quad \eta = (\Delta t)^2.$$

În consecință, cu precizia indicată, curba L este o parabolă în planul osculator, de ecuație $\eta = \xi^2$.

Subspațiul definit de vectorii $x'(t)$, $x''(t)/2$, $x'''(t)/6$ (în cazul independenței lor liniare) se numește *subspațiul osculator tridimensional al curbei L în punctul M* (16.17b). Din 16.17(3) se observă că această curbă L se găsește, pînă la un infinit mic de ordinul trei, în subspațiul său osculator

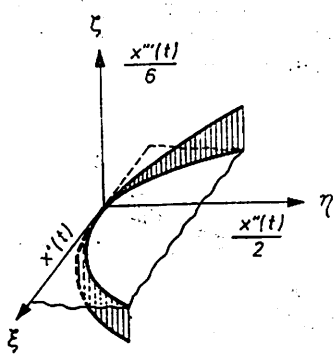


Fig. 16.2

tridimensional. Dacă ξ, η, ζ sînt coordonatele în acest subspațiu în raport cu baza $x'(t)$, $x''(t)/2$, $x'''(t)/6$, atunci din aceeași egalitate 16.17(3) se deduce reprezentarea parametrică a curbei L, pînă la un infinit mic de ordinul trei :

$$\xi = \Delta t, \quad \eta = (\Delta t)^2, \qquad \zeta = (\Delta t)^3.$$

Obținem o curbă strîmbă, ca în fig. 16.2. Proiecția sa pe planul ξ, η este parabola deja considerată $\eta = \xi^2$. Proiecția sa pe planul ξ, ζ este curba de gradul trei $\zeta = \xi^3$ (văzută plecînd de la extremitatea vectorului $\frac{1}{2} x''(t)$). Proiecția sa pe planul η, ζ este parabola semicubică $\zeta = \eta^{3/2}$ (văzută plecînd de la extremitatea vectorului $x'(t)$).

Considerăm acum curba L în vecinătatea punctului singular c, unde $x'(c) = 0$ dar $x''(c) \neq 0$ și $x'''(c) \neq 0$. Formula lui Taylor ne dă

$$\Delta x(c) = \frac{1}{2} x''(c)\, \Delta t^2 + \frac{1}{6} x'''(c)\, \Delta t^3 + \varepsilon_3(t) \Delta t^4.$$

Astfel, pînă la un infinit mic de ordinul trei, curba L se găsește în planul definit de vectorii $x''(c)/2$, $x'''(c)/6$ și are în acest plan ecuația $\zeta = \eta^{3/2}$. Dacă se păstrează infiniții mici de ordinul patru, aceasta va furniza termenul complementar $\frac{1}{24} x^{IV}(c)\, \Delta t^4$ (pentru $x^{IV}(c) \neq 0$) care reflectă abaterea curbei de la planul $x''(c)$, $x''(c)$, în semiplanul indicat de vectorul $x^{IV}(c)$ (fig. 16.3). Cum semnul lui Δt^4 este constant, observăm că ambele ramuri pornesc din vîrf de aceeași parte.

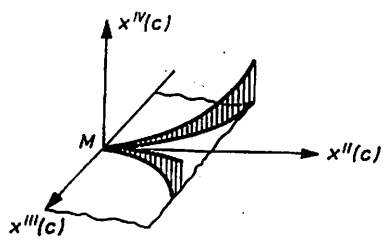


Fig. 16.3

Astfel, în cazul unui punct singular c avem $x'(c) = 0$, $x''(c) \neq 0$, punctul singular M fiind un punct de ramificare.

16.19. *Lungimea unui arc.* Definiția lungimii arcului unei curbe $x(t)$ este dată în 9.63. Vom repeta această definiție și vom deduce formula corespunzătoare relativ la o curbă într-un spațiu vectorial normat oarecare. Lungimea

unui arc de curbă este definită ca limita lungimii liniilor poligonale înscrise cînd lungimea fiecărui segment se micşorează indefinit. Într-un mod mai exact, fie

$$\Pi = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$$

o diviziune a intervalului $[a, b]$ pe care este definită o funcţie vectorială $x(t)$. Fiecărui punct t_i îi corespunde pe curbă un punct $M_i = x(t_i)$. Unind punctele M_i prin segmente de dreaptă, obţinem o linie poligonală L_Π a cărei lungime este $\sum_{i=0}^{n-1} |\Delta x_i|$. Presupunem că funcţia $x(t)$ are derivată continuă pe intervalul $[a, b]$. Atunci

$$\Delta x_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} x'(t)\mathrm{d}t = x'(t_i)\Delta t_i + \varepsilon_i \Delta t_i,$$

unde

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\Delta t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}} [x'(t) - x'(t_i)]\mathrm{d}t, \quad |\varepsilon_i| \leqslant \varepsilon_\pi = \max_{|t-\bar{t}|<d(\Pi)} |x'(t) - x'(\bar{t})|.$$

Ţinînd cont de continuitatea uniformă a funcţiei $x'(t)$, această mărime tinde la zero pentru o rafinare nelimitată a diviziunii Π. Avem deci estimarea

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} |\Delta x_i| - \sum_{i=0}^{n-1} |x'(t_i)|\,\Delta t_i\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |\varepsilon_i|\,\Delta t_i \leqslant \varepsilon_\Pi (b - a).$$

Dar suma $\sum_{i=0}^{n-1} |x'(t_i)|\,\Delta t_i$ tinde, pentru o rafinare nelimitată a diviziunii Π, către limita

$$\int_a^b |x'(t)|\,\mathrm{d}t, \tag{1}$$

deoarece funcţia numerică $|x'(t)|$ este continuă pentru că funcţia vectorială $x'(t)$ este continuă. De aici rezultă că limita lungimii liniilor poligonale înscrise există şi este egală

cu integrala (1). Să notăm că în spaţiul $\mathbb{R}_n$ avem $|x'(t)| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} [x_k'(t)]^2}$, ceea ce corespunde formulei cunoscute, după cum am văzut în 9.63(5). Spre deosebire de această formulă expresia (1) este valabilă în orice spaţiu vectorial normat.

Dacă se înlocuieşte b prin t şi t prin τ, se obţine expresia pentru lungimea arcului unei curbe L relativ la intervalul $[a, t]$ de variaţie a parametrului τ:

$$s(t) = \int_a^t |x'(\tau)| \, d\tau.$$

Vedem că $s(t)$ este o funcţie nedescrescătoare de t, continuă şi derivabilă; în plus, avem

$$s'(t) = |x'(t)|,$$

conform 9.31.

Dacă această curbă L nu are puncte singulare, adică $x'(t)$ nu se anulează în nici un punct, se poate aplica teorema funcţiei inverse; există atunci o funcţie inversă $t = t(s)$ care este continuă, crescătoare şi cu derivata continuă. Din aceste motive funcţia $x(t)$ se poate pune sub forma unei funcţii de s, de asemenea continuă şi cu derivata continuă. Lungimea arcului s se va numi *parametru natural*. Dacă această curbă L este dată de o funcţie $x = x(s)$ cu parametrul natural s, atunci

$$|x'(s)| = s'(s) = 1$$

în virtutea lui (1).

Astfel *în orice punct nesingular al curbei L, vectorul $x'(s)$ are lungimea* 1. (Aceasta este clar din punct de vedere cinematic: dacă parametrul s este în acelaşi timp drumul parcurs şi timpul folosit, atunci viteza mişcării este egală cu unitatea.)

§ 16.2. Curbură. Curburi de ordin superior

16.21. În cele ce urmează ne vom întîlni nu numai cu lungimi de vectori, dar şi cu unghiuri între aceştia. Este deci natural să operăm nu într-un spaţiu vectorial normat oarecare, ci într-un spaţiu hilbertian (12.41).

LEMĂ. *Fie $x(t)$ şi $y(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ două funcţii derivabile cu valori într-un spaţiu hilbertian H; atunci funcţia numerică $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ este şi ea derivabilă şi are loc relaţia*

$$\varphi'(t) = (x'(t), y(t)) + (x(t), y'(t)). \tag{1}$$

Demonstraţie. Avem

$$\Delta\varphi = (x(t+\Delta t), y(t+\Delta t)) - (x(t), y(t)) =$$

$$= (x(t)+x'(t)\,\Delta t + \varepsilon_1\Delta t, (y(t)+y'(t)\,\Delta t+\varepsilon_2\Delta t) - (x(t), y(t)) =$$

$$= [x'(t)\,y(t)) + (x(t), y'(t))]\Delta t + \varepsilon_3\Delta t,$$

unde $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(t, \Delta t) \to 0$ pentru $\Delta t \to 0$. Se poate deci pune în evidenţă partea liniară principală a creşterii $\Delta\varphi$. Explicitînd-o, se ajunge la formula (1).

COROLAR. *Dacă lungimea vectorului $x(t)$ rămîne constantă cînd t variază atunci vectorul $x'(t)$ este ortogonal lui $(x(t)$.*

Într-adevăr, aplicînd funcţiei $x(t)$, $x(t))$ formula de derivare (1), avem

$$0 = (x(t), x(t))' = 2(x(t), x'(t)),$$

ceea ce trebuia demonstrat.

16.22. Considerăm o curbă $L = \{x = x(s)\}$ care are ca parametru lungimea arcului, măsurată plecînd de la un punct fix. După cum am văzut în 16.19, vectorul $e_1(s) = x'(s)$ este unitar.

Dacă vectorii $x'(s)$ şi $x''(s)$ sînt liniar independenţi, există un plan osculator. Vectorul $e_1'(s) = x''(s)$ aparţinînd planului osculator este, după cum am văzut, ortogonal lui $e_1(s)$. El se numeşte *vectorul de curbură* al curbei L în punctul s. Punem

$$e_1'(s) = \chi(s)e_2(s), \tag{1}$$

unde $e_2(s)$ este un vector unitar ortogonal lui $e_1(s)$, coeficientul $\chi(s)$ fiind pozitiv. Avem

$$\chi(s) = |e_1'(s)| = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{e_1(s+\Delta s) - e_1(s)}{\Delta s}\right|. \tag{2}$$

Modulul diferenţei vectorilor unitari $e_1(s+\Delta s)$ şi $e_1(s)$ este o coardă a cercului unitate şi reprezintă un infinit mic echivalent unghiului format de aceşti vectori, adică unghiul

tangentelor la curba L în punctele corespunzătoare respectiv valorilor s şi $s + \Delta s$. Astfel, coeficientul $\chi(s)$ exprimă viteza de rotaţie a tangentei în raport cu variaţia lungimii de arc. Mărimea $\chi(s)$ se numeşte *curbura curbei L în punctul s*.

Să notăm că formula (2) reprezintă o definiţie mai generală ca formula (1), deoarece (2) nu presupune îndeplinită condiţia $e_1'(s) \neq 0$, ci numai ca $e_1'(s)$ să existe. În cazul în care $e_1'(s) = 0$, formula (2) dă, pentru curbura în punctul corespunzător, valoarea nulă.

16.23. Vom deduce formula pentru curbura în cazul în care curba L este dată de ecuaţia $x = x(t)$ cu parametrul t arbitrar. Deoarece $s_t = |x_t| = \sqrt{(x_t, x_t)}$ (16.19), avem

$$s_{tt} = \frac{(x_t, x_{tt})}{\sqrt{(x_t, x_t)}} = \frac{(x_t, x_{tt})}{|x_t|},$$

în virtutea lemei 16.21.

Avem apoi

$$x_s = x_t t_s, \quad x_{ss} = x_{tt} t_s^2 + x_t t_{ss} =$$

$$= \frac{x_{tt}}{s_t^2} + x_t \left(\frac{1}{s_t}\right)_t \frac{1}{s_t} = \frac{x_{tt}}{|x_t|^2} - \frac{x_t s_{tt}}{s_t^2 s_t} =$$

$$= \frac{x_{tt}}{|x_t|^2} - \frac{x_t(x_t, x_{tt})}{|x_t|^4}$$

şi, în final,

$$\chi(s) = |x_{ss}| = \left| \frac{x_{tt}}{|x_t|^2} - \frac{x_t(x_t, x_{tt})}{|x_t|^4} \right|. \qquad (1)$$

Deducerea acestei formule se bazează pe definiţia 16.22(2). Ea este deci adevărată, atît în cazul cînd $\chi(s) \neq 0$ cît şi în cazul cînd $\chi(s) = 0$.

Introducînd valoarea curburii în formula lui Taylor 16.17(2) (cu $e_1'(s) \neq 0$), punem această formulă sub forma

$$\Delta x(s) = x'(s)\Delta s + x''(s)\frac{\Delta s^2}{2} + \varepsilon_2(s)\Delta s^2 = \qquad (2)$$

$$= e_1(s)\Delta s + \frac{1}{2}\chi(s)e_2(s)\Delta s^2 + \varepsilon_2(s)\Delta s^2.$$

16.24. Vom calcula curbura cercului. Ecuaţia cercului este de forma

$$x(t) = \{R \cos t, R \sin t\}.$$

Derivînd, avem

$$x_t = \{ - R \sin t, R \cos t\}, \quad | x_t | = R,$$

$$x_{tt} = \{- R \cos t , - R \sin t\}, \qquad (x_t, x_{tt}) = 0.$$

De aici rezultă

$$\chi(s) = \frac{| x_{tt} |}{| x_t |^2} = \frac{1}{R},$$

deci *curbura cercului este inversul razei sale.*

16.25. Fie acum $L = \{x = x(s)\}$ o curbă strîmbă (adică o curbă în spaţiu). Dacă se consideră în planul osculator diverse cercuri tangente la curba L, atunci distanţa dintre punctele corespondente de pe curba L şi de pe fiecare cerc Q este în general de ordinul doi de mărime în raport cu Δs. Să încercăm, alegînd convenabil raza cercului tangent, să obţinem distanţa nu de ordinul doi, ci de ordinul

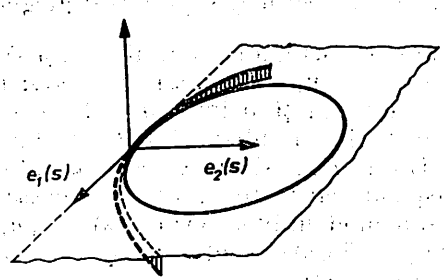


Fig. 16.4

trei de mărime. Fie $z = z(s)$ ecuaţia cercului tangent, cu parametrul natural s şi cu aceeaşi direcţie a vectorului curbură (fig. 16.4). Atunci, conform formulei 16.23(2):

$$\Delta x(s) = e_1(s)\, \Delta s + \frac{1}{2}\, \chi(s) e_2(s) \Delta s^2 + \varepsilon_2 \Delta s^3,$$

$$\Delta z(s) = e_1(s)\, \Delta s + \frac{1}{2R}\, e_2(s)\, \Delta s^2 + \bar{\varepsilon}_2 \Delta s^3,$$

unde ε_2, $\overline{\varepsilon}_2$ sînt infiniți mici pentru $\Delta s \to 0$; problema noastră va fi deci rezolvată dacă se pune $R = \frac{1}{\chi(s)}$. Cercul care se află în planul osculator, tangent curbei L în punctul s, cu același sens al vectorului curbură ca pentru L și de rază $R = \frac{1}{\chi(s)}$, se numește *cerc osculator*, iar centrul său, *centrul de curbură al curbei* L în punctul s. Mărimea $R = \frac{1}{\chi(s)}$ se numește *raza de curbură a curbei* L *în punctul* s. Dacă L este un cerc, raza sa de curbură se confundă conform 16.24 cu raza sa obișnuită.

16.26. *Bază naturală.* Presupunem că pentru un punct dat M al curbei L, vectorii $x'(s)$, $x''(s)$, ..., $x^{(n)}(s)$ există și sînt liniar independenți. Atunci există în acest punct subspațiile osculatoare $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n$ de dimensiuni, respectiv, $1, 2, \ldots, n$. Construim o bază ortogonală și normată a subspațiului E_n. Pentru primii doi vectori alegem vectorii deja construiți $e_1(s) = x'(s)$ și $e_2(s) = \frac{x''(s)}{|x''(s)|}$. Al treilea vector $e_3(s)$ pe care-l alegem în subspațiul E_3 trebuie să fie ortogonal planului E_2 și să aibă aceeași orientare în raport cu acest plan, ca vectorul $x'''(s)$. În mod analog, odată aleși primii $m-1$ vectori $e_1(s)$, ... $e_{m-1}(s)$, construim în subspațiul E_m vectorul $e_m(s)$ ortogonal subspațiului E_{m-1} și cu aceeași orientare în raport cu acest subspațiu ca vectorul $x^{(m)}(s)$. Aceste condiții determină într-un mod univoc baza $e_1(s), \ldots, e_n(s)$ a lui $\mathbb{R}_n$. Prin construcție, fiecare vector $e_m(s)$ este o combinație liniară de vectorii $x'(s), \ldots, x^{(m)}(s)$:

$$e_m(s) = \varphi_1(s)\, x'(s) + \ldots + \varphi_m(s)\, x^{(m)}(s), \qquad (1)$$

cu $\varphi_m(s) > 0$.

Baza $e_1(s), \ldots, e_n(s)$ se numește *baza naturală a curbei* L *în punctul* M. Aceasta își schimbă poziția odată cu punctul M.

16.27. *Formulele lui Frénet.* Stabilim formulele de derivare a vectorilor bazei naturale a unei curbe $L \subset \mathbb{R}_n$ în ra-

port cu parametrul s. Derivînd egalitatea 16.26(1) şi folosind regula 12.61g găsim

$$e'_m(s) = \sum_{j=1}^{m} \varphi'_j(s)x^{(j)}(s) + \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(s)x^{(j+1)}(s), \qquad (1)$$

deci vectorul $e'_m(s)$, pentru $m < n$, aparţine subspaţiului E_{m+1}; prin urmare,

$$e'_m(s) = a_{m1}(s)\, e_1(s) + \ldots + a_{mm}(s)\, e_m(s) + a_{m,m+1}(s) e_{m+1}(s). \qquad (2)$$

Pentru $m = n$ formula (2) este adevărată dacă se înlocuieşte e_{n+1} prin 0. Este uşor de dedus din (1), (2) 16.26(1) că $a_{m,m+1} = \varphi_m(s) > 0$. Ceilalţi coeficienţi din (2) sînt de asemenea uşor de calculat. Pentru început, avem $a_{mm}(s) = 0$, deoarece derivata vectorului unitar $e_m(s)$ este ortogonală pe el (16.21). Apoi, derivînd egalitatea evidentă $(e_j(s), e_m(s)) = 0$ $(j < m)$, se obţine

$$(e'_j(s),\ e_m(s)) + (e_j(s),\ e'_m(s)) = 0,$$

de unde

$$(e'_m(s),\ e_j(s)) = -(e'_j(s),\ e_m(s)); \qquad (3)$$

această expresie este nulă pentru $j < m - 1$ deoarece $e'_j(s) \in E_{j+1}$. Astfel, relaţia (2) ia forma

$$e'_m(s) = a_{m,m-1}(s)\, e_{m-1}(s) + a_{m,m+1}(s)\, e_{m+1}(s). \qquad (4)$$

Pentru $j = m - 1$, din (3) rezultă că

$$a_{m,m-1} = (e'_m(s),\ e_{m-1}(s)) = -(e'_{m-1}(s),\quad e_m(s)) = -a_{m-1,m}.$$

Punem $\chi_1 = \chi_1(s) = (e'_1(s),\ e_2(s)) = a_{12}$; în cele ce urmează această mărime o vom nota cu $\chi(s)$. Apoi, punem $\chi_2 = \chi_2(s) = (e'_2, e_3)$, $\chi_3 = \chi_3(s) = (e'_3, e_4)$ etc. Ajungem la un sistem de formule

$$\left.\begin{aligned}
e'_1(s) &= \chi_1 e_2(s),\\
e'_2(s) &= -\chi_1 e_1(s) + \chi_2 e_3(s\ ,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
e'_{n-1}(s) &= -\chi_{n-2}\, e_{n-2}(s) + \chi_{n-1}\, e_n(s),\\
e'_n(s) &= -\chi_{n-1}\, e_{n-1}(s),
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

care se numesc *formulele lui Frénet în* $\mathbb{R}_n$. Mărimile

$$\chi_2, \ldots, \chi_{n-1}$$

se numesc *curburile* curbei L, respectiv de ordin $2, 3, \ldots$ în punctul M; toate aceste mărimi sînt pozitive prin construcţie. Curbura a doua χ_2 se mai numeşte *torsiunea curbei în punctul M*.

Ne propunem să punem în evidenţă sensul geometric al coeficienţilor $\chi_2, \ldots, \chi_{n-1}$. Egalitatea

$$e'_m(s) = -\chi_{m-1} \cdot e_{m-1}(s) + \chi_m e_{m+1}(s)$$

arată că viteza de rotaţie a vectorului $e_m(s)$ are două componente : prima după vectorul $e_{m-1}(s)$ (ea caracterizează rotaţia subspaţiului E_m în el însuşi), a doua după vectorul $e_{m+1}(s)$ (ea corespunde rotaţiei în direcţia ortogonală lui E_m), coeficientul χ_m este viteza acestei ultime rotaţii (unghiul de rotaţie raportat la arcul parcurs). Astfel, torsiunea este viteza de rotaţie a planului osculator al vectorului e_2 către vectorul e_3.

Mărimea χ_m poate fi deci interpretată ca viteza de rotaţie a subspaţiului E_m în direcţie ortogonală pe el însuşi şi însăşi curbura χ_1 este geometric viteza de rotaţie a tangentei (16.22(2)). Ca şi această ultimă definiţie, definiţia geometrică a lui χ_m este mai generală decît cea bazată pe formulele lui Frénet care cer ca subspaţiul E_{m+1} să fie nedegenerat : ea nu cere decît nedegenerarea spaţiului E_m şi existenţa derivatei $x^{(m+1)}(s)$. Dacă $x^{(m+1)}(s)=0$, spaţiul E_m arc viteza de rotaţie nulă în punctul corespunzător şi definiţia geometrică dă pentru χ_m valoarea nulă.

16.28. *Calculul curburilor superioare.* În algebră se numeşte *produs mixt* a n vectori $a_1, \ldots, a_n$ ai unui spaţiu euclidian, şi se notează $[a_1, \ldots, a_n]$, mărimea egală cu volumul paralelipipedului n-dimensional construit pe aceşti vectori ; dacă vectorii $a_1, \ldots, a_n$ se exprimă prin coordonatele lor într-o bază ortogonală şi normată, atunci mărimea $[a_1, \ldots, a_n]$ este egală cu determinantul de ordin n ale cărui coloane sînt formate din coordonatele vectorului corespunzător [40 ; 8.74].

Să calculăm produsul mixt al vectorilor $x_s, x_{ss}, \ldots, x_s^{(n)}$. Pentru a face aceasta, folosim formulele

$$x_s = x_t t_s,$$

$$x_{ss} = \ldots + x_{tt} t_s^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_s^{(n)} = \ldots\ldots\ldots + x_t^{(n)} t_s^n ,$$

exprimînd derivatele în s prin derivatele în raport cu oricare alt parametru t; puncte-punctele înlocuiesc vectorii care sînt combinații liniare de vectorii deja explicitați în liniile precedente. Conform proprietăților determinanților, avem

$$[x_s, \ldots, x_s^{(n)}] = [x_t, \ldots, x_t^{(n)}]\, t_s^{1+\ldots+n}. \qquad (1)$$

Pe de altă parte, știm că sînt adevărate următoarele formule

$$x_s = e_1,$$

$$x_{ss} = \chi_1 e_2,$$

$$x_{sss} = \ldots + (\chi_1 e_2)_s = \ldots + \chi_1 \chi_2 e_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_s^{(n)} = \ldots + \chi_1 \ldots \chi_{n+1} e_n.$$

unde puncte-punctele înlocuiesc de asemenea combinațiile liniare ale vectorilor explicitați în liniile precedente. Într-un mod analog, avem

$$[x_s, \ldots, x_s^{(n)}] = \chi_1^{n-1} \chi_2^{n-2} \ldots \chi_{n-1} [e_1, \ldots, e_n] =$$

$$= \chi_1^{n-1} \chi_2^{n-2} \ldots \chi_{n-1}. \qquad (2)$$

Comparînd (1) și (2) obținem egalitatea

$$\chi_1^{n-1} \chi_2^{n-2} \ldots \chi_{n-1} = [x_t, \ldots, x_t^{(n)}] t_s^{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{[x_t, \ldots, x_t^{(n)}]}{|x_t|^{\frac{n(n+1)}{2}}}, \qquad (3)$$

care permite să găsim χ_{n-1} cu ajutorul lui $\chi_1, \ldots, \chi_{n-2}$. Pentru $n = 2$, obţinem formula curburii

$$\chi_1 = \frac{[x_t, x_{tt}]}{|x_t|^3}, \tag{4}$$

care pare mai simplă decît cea din 16.23. În realitate, noua formulă (4) nu este mai comodă decît în cazul unei curbe plane, cînd mărimea $[x_t, x_{tt}]$ poate fi pusă sub forma unui singur determinant de ordinul doi. Amintim că, în cazul general, pătratul volumului paralelipipedului m-dimensional construit pe vectorii $x_k = \{x_{k1} \ldots, x_{kn}\}$ $(k = 1, \ldots \ldots m)$ ai unui spaţiu n-dimensional este egal cu suma pătratelor tuturor determinanţilor de ordin m ai matricii coordonatelor vectorilor x_k[40; 8.73].

Pentru $n > 2$, împărţind ambii membri ai formulei (3) cu părţile corespunzătoare ale formulei analoage

$$\chi_1^{n-2} \chi_2^{n-3} \cdots \chi_{n-2} = \frac{[x_t, \ldots, x_t^{(n-1)}]}{|x_t|^{\frac{(n-1)n}{2}}},$$

obţinem

$$\chi_1 \chi_2 \cdots \chi_{n-1} = \frac{[x_t, \ldots x_t^{(n)}]}{[x_t, \ldots, x_t^{(n-1)}]} \frac{1}{|x_t|^n}$$

Apoi, împărţind ambii membri ai acestei formule cu părţile corespunzătoare ale formulei analoage

$$\chi_1 \chi_2 \cdots \chi_{n-2} = \frac{[x_t, \ldots, x_t^{(n-1)}]}{[x_t, \ldots, x_t^{(n-2)}]} \frac{1}{|x_t|^{n-1}},$$

găsim în final

$$\chi_{n-1} = \frac{[x_t, \ldots, x_t^{(n)}]\,[x_t, \ldots x_t^{(n-2)}]}{[x_t, \ldots, x_t^{(n-1)}]^2\,|x_t|}.$$

Geometric, aceasta înseamnă că mărimea curburii χ_{n-1} este egală, pînă la un factor $|x_t|$, cu raportul înălţimii paralelipipedului n-dimensional construit pe vectorii $x_t, \ldots \ldots, x_t^{(n)}$, prin înălţimea paralelipipedului $(n-1)$-dimensional construit pe vectorii $x_t, \ldots, x_t^{(n-1)}$.

Exemplu. Să găsim curbura și torsiunea unei elice în spațiul tridimensional. O elice (fig. 16.5) este definită de ecuațiile

$$x(t) = \{a \cos t,\ a \sin t,\ bt\}.$$

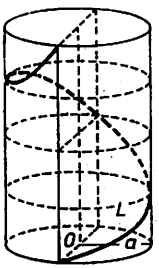


Fig. 16.5

Derivînd se obține

$$x_t = \{-a \sin t,\ a \cos t,\ b\},\ |x_t| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$x_{tt} = \{-a \cos t,\ -a \sin t,\ 0\}\ (x_t, x_{tt}) = 0,$$

$$x_{ttt} = \{a \sin t,\ -a \cos t,\ 0\}\ [x_t, x_{tt}, x_{ttt}] = a^2 b.$$

De aici rezultă, conform formulei (4):

$$\chi_1 = \frac{|x_{tt}|}{|x_t|^2} = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

În sfîrșit, ținînd cont de formula (3), avem

$$\chi_1^2 \chi_2 = \frac{[x_t, x_{tt}, x_{ttt}]}{|x_t|^6} = \frac{a^2 b}{(a^2 + b^2)^3},\ \chi_2 = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

§ 16.3. Degenerarea bazei naturale

16.31. În 16.17 am definit subspațiile osculatoare $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n$ pentru curba $x = x(t)$ în cazul cînd vectorii $x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)$ există și sînt liniar independenți. Vom considera cazul cînd această ultimă condiție nu este satisfăcută.

Dacă vectorii $x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)$ devin liniar dependenţi într-un punct t (vectorii $x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)$ rămînînd însă liniar independenţi), atunci spaţiul E_n nu mai există, deşi spaţiul E_{n-1} continuă să existe. Mărimea $\chi_n(t)$ îşi pierde sensul, ca şi vectorul $e_n(t)$. Putem să încercăm să construim

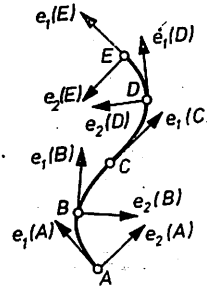


Fig. 16.6

vectorul $e_n(t)$ prin continuitate trecînd la limită pentru $\bar{t} \to t$ în $e_n(\bar{t})$ (cînd $x'(\bar{t}), \ldots, x^{(n)}(\bar{t})$ sînt liniar independenţi), dar se poate întîmpla ca trecerile la limită cînd $\bar{t} \nearrow t$ crescător şi $\bar{t} \searrow t$ descrescător să dea valori diferite. Fie, de exemplu, C un punct de inflexiune al unei curbe plane (fig. 16.6); atunci, trecînd prin acest punct, vectorul $e_2(t)$ îşi schimbă sensul făcînd un salt de 180°. Facem convenţia să completăm definiţia funcţiilor $\chi_1(t), \ldots, \chi_n(t)$ atribuindu-le valoarea nulă în punctele în care ele încetează să existe; aceasta este în conformitate cu consideraţiile din 16.27.

16.32. *Exemplu.* O dreaptă este reprezentată de o ecuaţie de forma

$$x(t) = x_0 + tx_1. \tag{1}$$

Din (1) rezultă că

$$x'(t) = x_1, \; x''(t) = 0, \tag{2}$$

deci planul osculator nu există; în consecinţă, curbura unei drepte este nulă conform convenţiei noastre.

Invers, presupunem că pentru o curbă $x = x(t)$ curbura este identic nulă, adică vectorii $x'(t)$ şi $x''(t)$ sînt liniar dependenţi (şi $x'(t) \neq 0$). Să arătăm că această curbă este o dreaptă. Dependenţa liniară a vectorilor $x'(t)$ şi $x''(t)$ înseamnă că $x''(s) = 0$ deoarece $x''(s)$ se exprimă liniar prin $x'(t)$ şi $x''(t)$ şi este ortogonal cu $x'(t)$. Atunci $x'(s)$

este un vector constant (conform teoremei demonstrate în 12.61k : dacă derivata unei funcții vectoriale este identic nulă, funcția este constantă) și unitar, ca orice vector de forma $x'(s)$. Îl notăm prin x_1, $|x_1| = 1$. Integrînd ecuația $x'(s) = x_1$ și ținînd cont de unicitatea soluției (care rezultă tot din teorema 12.61k), obținem

$$x(s) = x_0 + sx_1,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

16.33. Un caz puțin mai complicat, este acela al unei curbe situate în întregime într-un hiperplan n-dimensional. Acest hiperplan conține toți vectorii $x'(t)$, $x''(t)$, ..., deci vectorii $x'(t), \ldots, x^{(n+1)}(t)$ sînt liniar dependenți. În consecință curbura $\chi_n(t)$ ca și toate curburile următoare sînt nule. Să arătăm că este adevărată și reciproca : dacă cea de a n-a curbură a unei curbe L este identic nulă, atunci întreaga curbă L este conținută într-un hiperplan n-dimensional.

Ipoteza spune că, pentru orice t, $a \leqslant t \leqslant b$, vectorii $x'(t) \ldots x^{(n+1)}(t)$ sînt liniar dependenți :

$$x^{(n+1)}(t) = a_0(t)\, x'(t) + \ldots + a_{n-1}(t)\, x^{(n)}(t). \qquad (1)$$

Vom considera că vectorii $x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)$ rămîn liniar independenți pe întreg intervalul $a \leqslant t \leqslant b$. Putem atunci să arătăm că toți coeficienții $a_k(t)$ din (1) sînt continui, de îndată ce funcția $x^{(n+1)}(t)$ este continuă. Într-adevăr, înmulțind scalar egalitatea (1) prin $x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)$, se obține sistemul de ecuații liniare în raport cu coeficienții :

$$(x^{(n+1)}(t), x'(t)) = a_0(t)(x_t, x_t) + \ldots + a_{n-1}(t)\,(x_t^{(n)}, x_t),$$

$$(x^{(n+1)}(t), x^{(n)}(t)) = a_0(t)(x_t, x_t^{(n)}) + \ldots + a_{n-1}(t)\,(x_t^{(n)}, x_t^{(n)}).$$

Toți coeficienții acestui sistem sînt continui (ca produse scalare de funcții continui) și determinantul său nu este nul, ca fiind determinant Gramm al unui sistem de vectori liniar independenți [40 ; 8.71]. Din formulele lui Cramer pentru soluțiile $a_0(t), \ldots, a_{n-1}(t)$, rezultă că aceste soluții sînt continue pe $[a, b]$.

În virtutea lui 13.65, există o soluție $y(t)$ a ecuației

$$y^{(n)}(t) = a_0(t)y(t) + \ldots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t), \qquad (2)$$

care aparţine, conform 13.66, subspaţiului generat de vectorii $y_0 = y(a), \ldots, y_{n-1} = y^{(n-1)}(a)$. Punem $y_0 = x'(a), \ldots$ $\ldots, y_{n-1} = x^{(n)}(a)$. Deoarece funcţia vectorială $x'(t)$ satisface ecuaţia (2) (care prin substituţia $x'(t) = y(t)$ se transformă în (1)) şi condiţiile iniţiale indicate, vectorul $x'(t)$, rămîne conform 13.66, în subspaţiul generat de vectorii $x'(a), \ldots, x^{(n)}(a)$ pentru orice t. Vectorul

$$x(t) = x(a) + \int_a^t x'(\xi)\, d\xi$$

aparţine, pentru orice $t \in [a, b]$, hiperplanului ce trece prin punctul $x(a)$ şi este paralel cu subspaţiul găsit. Am demonstrat deci următorul rezultat.

TEOREMĂ. *Dacă pentru o curbă* $L = \{x = x(t)\}$ *din spaţiul hilbertian* H *şi pentru orice* $t \in [a, b]$ *vectorii* $x'(t), \ldots$ $\ldots, x^{(n)}(t)$ *sînt liniar independenţi iar vectorii* $x'(t), \ldots, x^{(n+1)}(t)$ *sînt liniar dependenţi, atunci curba* L *aparţine hiperplanului ce trece prin punctul* $x(a)$ *şi este definit de vectorii* $x'(a), \ldots x^{(n)}(a)$.

În particular, dacă torsiunea $\chi_2(t)$ *a curbei* L *este identic nulă şi curba nu se anulează, atunci curba* L *este plană.*

§ 16.4. Ecuaţii naturale

16.41. Fiind dată o curbă L cu parametrul natural s, se pot considera toate curburile ca funcţii de s:

$$\chi_1 = \chi_1(s), \ \chi_2 = \chi_2(s), \ \ldots, 0 \leqslant s \leqslant s_0.$$

Admitem că toate curburile se anulează înţelegînd prin aceasta degenerarea descrisă în 16.31.

Dacă o curbă $\bar{L}$ se obţine din curba L printr-o transformare liniară izometrică a spaţiului H (adică păstrînd toate distanţele), atunci toate funcţiile $\chi_m(s)$, $m = 1, 2, \ldots$ fiind complet determinate de metrică, ele vor rămîne aceleaşi pentru curba $\bar{L}$. Să arătăm că propoziţia inversă rămîne adevărată pentru curbe de dimensiune finită:

TEOREMĂ. *Dacă pentru două curbe* $\bar{L}$ *şi* L *dintr-un spaţiu n-dimensional* $\mathbb{R}_n$ *reprezentate prin funcţii vectoriale de n ori derivabile curburile* $\chi_1(s), \ldots, \chi_{n-1}(s)$ *sînt continue,*

pozitive și se exprimă prin funcții identice de parametrul real s, atunci există o transformare izometrică (o deplasare compusă eventual printr-o simetrie) a spațiului $\mathbb{R}_n$ în el însuși, care transformă curba $\bar{L}$ în curba L.

Demonstrație. Fie $e_1(s), \ldots, e_n(s)$ baza naturală a curbei L și $\bar{e}_1(s) \ldots, \bar{e}_n(s)$ cea a curbei $\bar{L}$. Considerăm o deplasare (urmată eventual de o simetrie) a spațiului $\mathbb{R}_n$, care transformă poziția inițială $\bar{e}(0), \ldots, \bar{e}(0)$ a bazei naturale a lui $\bar{L}$ în poziția inițială $e_1(0), \ldots, e_n(0)$ a bazei naturale a lui L, astfel încît $\bar{e}_1(0)$ să se transforme în $e_1(0), \ldots \bar{e}_n(0)$ să se transforme în $e_n(0)$. Să arătăm că această transformare a spațiului $\mathbb{R}_n$ transformă $\bar{L}$ în L.

Funcțiile $\chi_1(s), \ldots, \chi_{n-1}(s)$ sînt continue prin ipoteză. Există deci, ținînd cont de teorema 13.63, soluția unică a sistemului

$$\left.\begin{aligned} y_1'(s) &= \chi_1(s) y_2(s), \\ y_2'(s) &= -\chi_1(s) y_1(s) + \chi_2(s) y_3(s), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n'(s) &= \chi_{n-1}(s)\, y_{n-1}(s) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

cu condițiile inițiale

$$y_1(0) = e_1(0), \ldots, y_n(0) = e_n(0). \tag{2}$$

Dar conform formulelor lui Frénet 16.27(5), vectorii $e_1(s), \ldots, e_n(s)$ ca și vectorii $\bar{e}_1(s), \ldots, \bar{e}_n(s)$ (după deplasare) satisfac sistemul (1) cu condițiile inițiale (2); în consecință,

$$e_1(s) = \bar{e}_1(s), \ldots, e_n(s) = \bar{e}_n(s)$$

conform teoremei 13.C3.

Notăm prin $x = x(s)$ raza vectoare a curbei L și prin $\bar{x}(s)$ cea a curbei $\bar{L}$ (după deplasare). Deoarece cele două curbe L și $\bar{L}$ au acum ca origine un același punct $x(0)$, are loc relația

$$\bar{x}(s) = x(0) + \int_0^s \bar{e}_1(\xi)\, d\xi = x(0) + \int_0^s e_1(\xi) d\xi = x(s).$$

Astfel curba $\bar{L}$ se confundă cu curba L.

Ecuațiile

$$\chi_1 = \chi_1(s), \ldots, \chi_{n-1} = \chi_{n-1}(s)$$

se numesc *ecuațiile naturale* ale curbei L; am văzut că ele determină curba L în spațiul n-dimensional pînă la o transformare liniară izometrică.

16.42. *Curbe avînd curburile date.*

a. TEOREMĂ. *Fiind date* $n-1$ *funcții continue oarecare* $\varphi_1(s) > 0, \ldots, \varphi_{n-1}(s) > 0$ $(0 \leqslant s \leqslant s_0)$, *se poate construi o funcție vectorială* $x = x(s)$ *cu valori în* $\mathbb{R}_n$, *de* n *ori continue derivabile și astfel încît pentru curba* $L \subset \mathbb{R}_n$ *definită prin ecuația* $x = x(s)$, $\varphi_k(s)$ *reprezintă curburile respective în funcție de lungimea arcului* s:

$$\varphi_1(s) = \chi_1(s), \ldots, \varphi_{n-1}(s) = \chi_{n-1}(s).$$

b. Stabilim la început următoarea lemă generală:

LEMĂ. *Considerăm în* $\mathbb{R}_n$ *ecuația vectorială*

$$\frac{dy(t)}{dt} = A(t)y(t),$$

unde $A(t)$ *este un operator antisimetric (adică toate elementele matricii* $A(t) = \|a_{jk}(t)\|$ *își schimbă semnul prin transpoziție:* $a_{jk}(t) = -a_{kj}(t)$). *Matricea rezolvantă* $\Omega_{t_0}^t$ *este ortogonală (adică matricea transpusă lui* $\Omega_{t_0}^t$ *este identică cu matricea sa inversă).*

Demonstrație. Am văzut în 13.38e că operatorul $\Omega_{t_0}^t$ satisface ecuația

$$\frac{d\Omega_{t_0}^t}{dt} = A(t)\,\Omega_{t_0}^t \tag{1}$$

cu condiția inițială $\Omega_{t_0}^{t_0} = I$. Pe de altă parte, conform 13.38d avem

$$\Omega_{t_0}^t \Omega_t^{t_0} = I;$$

derivînd această egalitate în t, se găsește

$$\frac{d\Omega_{t_0}^t}{dt}\,\Omega_t^{t_0} + \Omega_{t_0}^t \frac{d\Omega_t^{t_0}}{dt} = 0,$$

sau

$$A(t)\Omega_{t_0}^{t}\Omega_{t}^{t_0} + \Omega_{t_0}^{t}\frac{d\Omega_{t}^{t_0}}{dt} = 0,$$

de unde

$$\frac{d\Omega_{t_0}^{t}}{dt} = -\Omega_{t_0}^{t}A(t),$$

Trecînd la operatorii adjuncți rezultă [40 ; 7.64]

$$\frac{d(\Omega_{t}^{t_0})'}{dt} = -A'(t)(\Omega_{t}^{t_0})'$$

Folosim acum condiția $A'(t) = -A(t)$; avem

$$\frac{d(\Omega_{t}^{t_0})'}{dt} = A(t)\,(\Omega_{t}^{t_0})'.$$

Comparînd această ecuație cu (1) și ținînd cont că operatorul $(\Omega_{t}^{t_0})$, verifică aceeași condiție inițială $(\Omega_{t_0}^{t_0})' = I' = I$ ca și $\Omega_{t_0}^{t}$, obținem

$$(\Omega_{t}^{t_0})' = \Omega_{t_0}^{t} \tag{2}$$

în virtutea unicității soluției. Dar $\Omega_{t}^{t_0} = (\Omega_{t_0}^{t})^{-1}$. Egalitatea (2) arată deci că $\Omega_{t_0}^{t}$ este un operator ortogonal, ceea ce trebuia demonstrat.

c. Să considerăm acum sistemul de ecuații vectoriale

$$\begin{aligned} y_1'(s) &= \varphi_1(s)y_2(s), \\ y_2'(s) &= -\varphi_1(s)\,y_1(s) + \varphi_2(s)\,y_3(s), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n'(s) &= -\varphi_{n-1}\,(s)y_{n-1}(s) \end{aligned} \tag{3}$$

cu condițiile inițiale

$$y_1(0) = e_1, \ldots, y_n\gamma(0) = e_n,$$

unde $e_1, \ldots, e_n$ sînt n vectori oarecare ortogonali și normați din spațiul $\mathbb{R}_n$.

Să arătăm că funcțiile vectoriale $y_1(s), \ldots, y_n(s)$, care reprezintă o soluție a sistemului (3) și care există în $\mathbb{R}_n$ conform teoremei 13.63, sînt ortogonale și normate pentru orice $s \in [0, s_0]$.

Conform lemei din punctul b, matricea $\| \omega_{jk}(s) \|$ a operatorului rezolvant Ω_0^s a sistemului (3) este ortogonală deoarece

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_{jk}(s)\omega_{pk}(s) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } j = p, \\ 0 \text{ pentru } j \neq p. \end{cases}$$

Avem

$$y_j(s) = \sum \omega_{jk}(s) e_k \ (i = 1, \ldots, n).$$

Baza $e_1, \ldots, e_n$ fiind ortonormată, au loc relaţiile

$$(y_j(s), y_p(s)) = \sum_k \omega_{jk}(s)\omega_{pk}(s) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } j = p \\ 0 \text{ pentru } j \neq p, \end{cases}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Astfel vectorii $y_j(s)$ se dovedesc a fi ortogonali şi normaţi pentru orice $s \in [0, s_0]$.

d. Continuînd punem

$$x(s) = \int_0^s y_1(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma.$$

Obţinem o curbă L în spaţiul n-dimensional $\mathbb{R}_n$. Deoarece $|x'(s)| = |y'(s)| = 1$, parametrul s este lungimea arcului curbei L. Apoi, pentru orice $m = 1, 2, \ldots, n$, vectorii $y_1(s), \ldots, y_m(s)$ sînt ortogonali şi normaţi, $x^{(m)}(s) = y_1^{(m-1)}(s)$ se exprimă liniar prin $y_1(s), \ldots, y_m(s)$ conform sistemului (3), coeficientul lui $y_m(s)$ fiind pozitiv (egal cu $\varphi_{m-1}(s)$); în consecinţă, vectorii $y_1(s), \ldots, y_n(s)$ sînt, pentru orice s, vectorii bazei naturale ai curbei L. Dar pentru vectorii unei baze naturale au loc formulele lui Frénet 16.27(5):

$$y_1'(s) = \chi_1(s) y_2(s),$$

$$y_2'(s) = \chi_1(s) y_1(s) + \chi_2(s) y_3(s),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_{n-1}'(s) = -\chi_{n-1}(s)\, y_n(s).$$

Comparîndu-le cu ecuaţiile (3), stabilim succesiv inegalităţile

$$\varphi_1(s) = \chi_1(s),\ \varphi_2(s) = \chi_2(s),\ \ldots,\ \varphi_{n-1}(s) = \chi_{n-1}(s).$$

Teorema este demonstrată.

§ 16.5. Elice

16.51. a. DEFINIŢIE. Se numeşte *elice* o curbă care are toate curburile constante.

b. Este evident că o dreaptă satisface această definiţie (toate aceste curburi sînt nule). Într-un plan, un cerc Q de rază R are, după cum am văzut în 16.24, curbura constantă $\chi = 1/R$; toate curburile superioare sînt nule. Astfel, un cerc satisface şi el definiţia unei elice. Să arătăm că nu există alte elice în plan. Dacă L este o curbă plană cu o curbură constantă $\chi > 0$, considerăm şi cercul Q de rază $R = 1/\chi$ care are de asemenea curbura constantă χ. Atunci, conform teoremei 16.41, putem face să coincidă curba L cu cercul Q printr-o deplasare; deci curba L este şi ea un cerc.

c. În spaţiul tridimensional, elicea „clasică" Q

$$x_1 = a\cos t,\quad x_2 = a\sin t,\quad x_3 = bt, \tag{1}$$

după cum am văzut în 16.28, are curbura şi torsiunea constantă care se calculează conform formulelor

$$\chi_1 = \frac{a}{a^2 + b^2},\quad \chi_2 = \frac{b}{a^2 + b^2} \tag{2}$$

În consecinţă, Q este o elice în sensul definiţiei noastre. Să arătăm că nu există alte elici în $\mathbb{R}_3$. Fie L o elice din $\mathbb{R}_3$ astfel încît $\chi_1 > 0$, $\chi_2 > 0$. Plecînd de la (2), să determinăm parametrii a şi b, χ_1 şi χ_2 fiind daţi; este uşor să vedem că

$$a = \frac{\chi_1}{\chi_1^2 + \chi_2^2},\quad b = \frac{\chi_2}{\chi_1^2 + \chi_2^2}.$$

Cu a şi b obţinuţi să construim elicea (1). Curbura sa este χ_1, torsiunea sa χ_2. Ţinînd cont de teorema 16.41, putem face să coincidă curba L cu elicea (1) printr-o deplasare în spaţiul $\mathbb{R}_3$, ceea ce trebuia demonstrat.

16.52. Să găsim elicile dintr-un spațiu n-dimensional. O elice în $\mathbb{R}_n$ este o curbă pentru care $\chi_1(s) = \chi_1, \ldots, \chi_{n-1}(s) = \chi_{n-1}$ sînt constante și nenule. Vectorii $e_1(s), \ldots, e_n(s)$ satisfac sistemul de ecuații ale lui Frénet 16.27(5)

$$\left.\begin{aligned} e_1'(s) &= \chi_1 e_2(s), \\ e_2'(s) &= -\chi_1 e_1(s) + \chi_2 e_3(s), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_{n-1}'(s) &= -\chi_{n-2}\, e_{n-2}(s) + \chi_{n-1} e_n(s), \\ e_n'(s) &= -\chi_{n-1}\, e_{n-1}(s) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

cu matricea coeficienților constantă

$$K = \begin{vmatrix} 0 & \chi_1 & & & & & \\ -\chi_1 & 0 & \chi_2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & -\chi_{n-2} & 0 & \chi_{n-1} \\ & & & & -\chi_{n-1} & 0 \end{vmatrix}.$$

Să calculăm rangul matricii K. Eliminînd linia și coloana ce conțin elementul χ_1 coborînd rangul cu o unitate, apoi încă cu o unitate eliminînd linia și coloana ce conțin elementul $-\chi_1$, ajungem la matricea

$$\begin{vmatrix} 0 & \chi_3 & & & & & \\ -\chi_3 & 0 & \chi_4 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & -\chi_{n-2} & 0 & \chi_{n-1} \\ & & & & -\chi_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

cu aceeași structură cu matricea inițială, dar de rang mai mic cu două unități. Continuînd procedeul, apar două posibilități: dacă $n = 2m$ este par, rangul este n; dacă $n = 2m + 1$ este impar, obținem la sfîrșitul calculelor o matrice unidimensională cu elementul nul, deci rangul matricii inițiale este $2m = n - 1$.

Matricea K este evident antisimetrică; ea își schimbă semnul prin transpunere. Folosim teorema cunoscută asu-

pra structurii unui operator antisimetric [40; 9.46]. Dacă $n = 2m$ este par, există în spațiul $\mathbb{R}_n$ o bază canonică ortonormată $x_1, y_1, \ldots, x_m, y_m$, astfel încît

$$Kx_1 = \tau_1 y_1, \; Kx_2 = \tau_2 y_2, \ldots, Kx_m = \tau_m y_m,$$

$$Ky_1 = -\tau_1 x_1, \; Ky_2 = -\tau_2 x_2, \ldots, Ky_m = -\tau_m x_m.$$

Pentru $n = 2m + 1$, mai există încă un vector al bazei, z_n pentru care

$$Kz_n = 0.$$

Deoarece rangul matricii K este $2m$, toate numerele $\tau_1, \ldots, \tau_m$ sînt în acest caz nenule.

Alături de sistemul vectorial (3), considerăm sistemul scalar

$$\left.\begin{aligned} u_1'(s) &= \chi_1 u_2(s), \\ u_2'(s) &= -\chi_1 u_1(s) + \chi_2 u_3(s), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n'(s) &= -\chi_{n-1} u_{n-1}(s). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

El are n soluții vectoriale liniar independente care sînt, respectiv, coliniare pentru $s = 0$, cu vectorii canonici ai matricii K.

Construim matricea operatorului rezolvant e^{tK}. În virtutea lui 13.14c (și 13.14a), în baza $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_m, y_m (z_n)$ avem:

$$e^{tK} = \begin{Vmatrix} \cos t\tau_1 & -\sin t\tau_1 & \ldots & & \\ \sin t\tau_1 & \cos t\tau_1 & \ldots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \ldots & \cos t\tau_m & -\sin t\tau_m \\ & & \ldots & \sin t\tau_m & \cos t\tau_m \end{Vmatrix}$$

Dacă punem

$$x_j = (x_{j1}, \ldots x_{jn}), \qquad y_j = (y_{j1}, \ldots, y_{jn}),$$

$$x_j(s) = (x_{j1}(s), \ldots, x_{jn}(s)), \; y_j(s) = (y_{j1}(s), \ldots, y_{jn}(s)) \tag{5}$$

$$j = 1, \ldots, n.$$

$$z_n = (z_{n1}, \ldots, z_{nn}),$$

$$z_n(s) = (z_{n1}(s), \ldots, z_{nn}(s)),$$

atunci formulele 13.15c (și 13.15a) dau

$$x_{jk}(s)=\cos \tau_j s \cdot x_{jk} + \sin \tau_j s \cdot y_{jk}, \quad (k=1,\ldots n;\ j=1,\ldots m)$$

$$y_{jk}(s) = -\sin \tau_j s \cdot x_{jk} + \cos \tau_j s \cdot y_{jk},$$

$$z_{nk}(s) = z_{nk} \qquad (n = 2m + 1)$$

Fie acum $e_1(s), \ldots, e_n(s)$ — o soluție a sistemului (3) pe care o putem nota

$$e_j(s) = (e_{j1}(s), \ldots, e_{jn}(s)).$$

Pentru p fixat, funcțiile $e_{jp}(s)$ $(j = 1, \ldots, n)$ verifică sistemul (3). Impunem soluției $\{e_{jp}(s)\}$ condițiile inițiale:

$$e_{11}(0) = x_{11}, \ldots, e_{n1}(0) = x_{1n},$$

$$e_{12}(0) = y_{11}, \ldots, e_{n2}(0) = y_{1n},$$

$$e_{13}(0) = x_{21}, \ldots, e_{n3}(0) = x_{2n},$$

$$e_{14}(0) = y_{21}, \ldots, e_{n4}(0) = y_{2n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$e_{1n}(0) = z_{n1}, \ldots, e_{nn}(0) = z_{nn} \qquad (n = 2m + 1).$$

Vectorii $e_1(0), \ldots, e_n(0)$ sînt normați și ortogonali (ceea ce este necesar pentru a regăsi o curbă după curburile date, 16.42c). Avem în particular:

$$e_1(s) = (e_{11}(s), \ldots, e_{1n}(s)) = (x_{11}(s), y_{11}(s), x_{21}(s), y_{21}(s),$$

$$\ldots, (z_{n1}(s))) = (\cos \tau_1 s \cdot x_{11} + \sin \tau_1 s \cdot y_{11}, -\sin \tau_1 s \cdot$$

$$\cdot x_{11} + \cos \tau_1 s \cdot y_{11}, \ldots (z_{n1})).$$

Mărimea z_{n1} nu este considerată decît pentru $n = 2m + 1$.

Integrînd în raport cu s, se obține (constantele de integrare, care reprezintă translațiile în lungul fiecărei axe, sînt alese nule)

$$r(s) = \left(\frac{\sin \tau_1 s}{\tau_1} x_{11} - \frac{\cos \tau_1 s}{\tau_1} y_{11}, \frac{\cos \tau_1 s}{\tau_1} x_{11} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin \tau_1 s}{\tau_1} y_{11} \ldots (z_{n1} s) \right)$$

Se pot scrie aceste formule, mai scurt:

$$r(s) = (A_1 \cos \tau_1(s - s_1), A_1 \sin \tau_1(s - s_1), A_2 \cos \tau_2(s - s_2), A_2 \sin \tau_2(s - s_2), \ldots, (C_n s)). \quad (6)$$

Pentru n par, $n = 2m$, întreaga curbă L se găsește, evident, pe sfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + \ldots + x_{2m-1}^2 + x_{2m}^2 = A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_m^2;$$

curba este închisă dacă toate mărimile $\tau_1, \ldots, \tau_m$ sînt comensurabile (adică sînt multipli raționali ai uneia din ele) și nu este închisă (și nu are puncte de autointersecție) dacă cel puțin o pereche de mărimi τ_j, τ_k nu este comensurabilă. Pentru $n = 2m + 1$, curba (6) nu este mărginită; ea tinde către infinit în coordonata x_{2m+1} cînd $t \to +\infty$.

16.53. *Elici într-un spațiu de dimensiune infinită.* Să observăm mai întîi următorul fapt. Fie L o curbă în $\mathbb{R}_n$. Presupunem că, oricare ar fi un punct dat A (originea) și un alt punct P pe această curbă, există o deplasare în spațiu (urmată eventual de o simetrie) care transformă curba L în ea însăși, păstrînd sensul de variație al parametrului și făcînd să treacă punctul A în P. Deoarece o deplasare a spațiului păstrează metrica, toate curburile curbei L în punctele A și P sînt respectiv egale (dacă această curbă este suficient de netedă). Deoarece punctul P este arbitrar, toate curburile curbei L sînt constante; în consecință, avem de a face cu o elice. Invers, oricare ar fi două puncte A și P ale unei elice L dată în $\mathbb{R}_n$, există, în virtutea lui 16.41, o deplasare a spațiului $\mathbb{R}_n$ (urmată eventual de o simetrie) care transformă elicea L în ea însăși conservînd sensul de creștere al parametrului și transformînd punctul A în P.

Astfel, sîntem conduși la o nouă definiție a unei elice: este o curbă L care se poate transforma în ea însăși printr-o deplasare în spațiu (compusă eventual cu o simetrie) care conservă sensul de creștere a parametrului și transformă un punct A dat pe L în alt punct P dat de L. Să remarcăm că această definiție nu cere pentru L nici o condiție de netezime. O curbă L ce are proprietatea menționată se va numi *autocongruentă*. Se poate demonstra că, în $\mathbb{R}_n$, clasa elicelor se confundă cu cea a curbelor autocongruente (vezi exerc. 2).

Rezultă că, într-un spațiu de dimensiune infinită, există curbe autocongruente continui, dar fără tangentă. Ne mărginim aici la un singur exemplu de curbă autocongruentă în spațiul hilbertian, care este foarte caracteristic.

Exemplu („spirala lui Wiener"). Considerăm spațiul $H_2(0, \infty)$ format din funcțiile $x(\tau)$ reale continue pe porțiuni pe semidreapta $0 \leqslant \tau < \infty$, fiecare fiind nulă în exteriorul intervalului $[0, a]$ (depinzînd de funcția $x(\tau)$). Înzestrăm acest spațiu cu un produs scalar și o normă. Conform formulelor

$$(x(\tau),\ y(\tau)) = \int_0^\infty x(\tau)\, y(\tau)\, \mathrm{d}\tau,\quad \|x(\tau)\|^2 = \int_0^\infty x^2(\tau)\ \mathrm{d}\tau;$$

integralele au ∞ ca limită superioară, dar de fapt ele sînt luate pe un interval finit. Pentru orice $t \in [0, \infty)$, considerăm un element al spațiului $H_2(0, \infty)$ după regula:

$$Z(t) = z(t, \tau) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } 0 \leqslant \tau \leqslant t, \\ 0 \text{ pentru } \tau > t. \end{cases} \tag{1}$$

Cînd t variază de la 0 la ∞, punctul $Z(t)$ descrie în spațiul $H_2(0, \infty)$ o curbă L, care se numește *spirala lui Wiener*. Această curbă este continuă (chiar uniform) deoarece

$$\| Z(\bar{t}) - Z(t) \|^2 = \left| \int_t^{\bar{t}} 1^2 \cdot \mathrm{d}\tau \right| = |\, t - \bar{t}\,|.$$

Să arătăm că L este autocongruentă. Fie t_0, $0 < t_0 < \infty$. Considerăm transformarea U a spațiului $H_2(0, \infty)$ în el însuși definită prin formula

$$x(\tau) \to Ux(\tau) = z(t_0, \tau) + x(\tau - t_0)$$

(pentru $\tau < t_0$, punem $x(\tau - t_0) = 0$).

Această transformare este izometrică, deoarece

$$\| Ux(\tau) - Uy(\tau) \|^2 = \| x(\tau - t_0) - y(\tau - t_0) \|^2 =$$

$$= \int_{t_0}^\infty [x(\tau - t_0) - y(\tau - t_0)]^2\, \mathrm{d}\tau =$$

$$= \int_0^\infty [x(\tau) - y(\tau)]^2 \mathrm{d}\tau = \| x(\tau) - y(\tau) \|^2.$$

Punctul origine $Z(0)$ al curbei se confundă cu zeroul spațiului $H_2(0, \infty)$. Transformarea U îl transformă în punctul $Z(t_0)$. Orice punct $Z(t)$ al curbei L este transformat prin U în punctul $Z(t + t_0)$ al aceleiași curbe. Curba L este deci autocongruentă.

Să arătăm acum că funcția $Z(t)$ nu are derivată în spațiul $H_2(0, \infty)$. Într-adevăr, vectorul

$$\frac{Z(t+h) - Z(t)}{h} = \frac{z(\tau, t+h) - z(\tau, t)}{h} \qquad (2)$$

corespunde funcției de τ care este 0 pentru $\tau \notin [t, t+h]$ și $1/h$ pentru $\tau \in [t, t+h]$. Norma sa este $1/\sqrt{h}$, astfel că raportul (2) nu are limită cînd $h \to 0$.

Curba L are încă o proprietate interesantă : două coarde oarecare ale ei, corespunzînd la două intervale disjuncte de variație ale parametrului sînt ortogonale între ele. Într-adevăr.

$$(Z(t+h) - Z(t), Z(s+k) - Z(s)) =$$

$$= \int_0^\infty [z(t+h, \tau) - z(t, \tau)]\,[z(s+k, \tau) - z(s, \tau)]\,d\tau = 0,$$

dacă intervalele $(t, t+h)$ și $(s, s+k)$ sînt disjuncte.

Se pot construi analoagele netede ale spiralei lui Wiener dacă se înlocuiește funcția $z(\tau, t)$ din (1) prin translatata (cu o mărime t în lungul axei τ) a unei funcții derivabile fixe $\varphi_0(\tau)$.

Pentru astfel de curbe netede se pot calcula curburile după regulile obișnuite ; bineînțeles, toate curburile sînt constante.

EXERCIȚII

1. Să se demonstreze că locul geometric al centrelor de curbură ale unei elice în $\mathbb{R}_3$ este de asemenea o elice, cu aceeași axă ; locul geometric al centrelor sale de curbură este elicea inițială.

2. Să se demonstreze că orice curbă autocongruentă în $\mathbb{R}_n$ este o elice (fără a presupune condiția de netezime).

3. Se stabilește o corespondență biunivocă între punctele a două curbe din $\mathbb{R}_n$ astfel încît vectorii bazei naturale în punctele corespondente să fie respectiv paraleli. Fie $\chi_j^{(1)}$, $\chi_j^{(2)}$ $(j = 1,2, \ldots, n-1)$ curburile acestor curbe ; să se arate că

$$\frac{\chi_1^{(1)}}{\chi_1^{(2)}} = \frac{\chi_2^{(1)}}{\chi_2^{(2)}} = \ldots = \frac{\chi_{n-1}^{(1)}}{\chi_{n-1}^{(2)}}$$

4. Sfera osculatoare m-dimensională S_m la o curbă strîmbă L este sfera din spațiul $(m+1)$-dimensional, definit prin primii $m+1$ vectori ai bazei naturale și astfel încît distanța de la un punct al curbei L, pînă la această sferă are ordinul de mărime Δs^{m+2}. Să se arate că raza r_m a sferei osculatoare m-dimensionale nu se micșorează odată cu creșterea lui m.

5. (*Curba lui Peano*). Fie $t = 0, t_1 t_2 \ldots t_{2n-1} t_{2n} \ldots$ dezvoltarea ternară formată din cifrele 0 și 2 a unui număr $t \in [0, 1]$. Să se arate că funcțiile $x(t) = 0, t_1 t_3 \ldots t_{2n-1} \ldots$ și $y(t) = 0, t_2 t_4 \ldots t_{2n} \ldots$ sînt definite într-un mod univoc pe mulțimea tuturor t de forma indicată și că ele admit o prelungire continuă pe intervalul $[0, 1]$. Se consideră curba $r(t) = \{x(t), y(t)\}$. Să se arate că ea trece prin toate punctele pătratului $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$.

NOTĂ ISTORICĂ

Ecuațiile fundamentale ale teoriei curbelor pentru spațiul tridimensional au fost date de Serret (1851) și Frénet (1852); Jordan a generalizat aceste ecuații în cazul n-dimensional (1874). Elicile din $\mathbb{R}_n$ au fost descrise de către Forsythe (1930). Elicile autocongruente în spațiul hilbertian joacă un rol important în teoria modernă a probabilităților, unde ele se numesc „procese stochastice cu creșteri staționare" (și descriu anumite fenomene reale, de exemplu, mișcarea browniană, mișcarea turbulentă a fluidelor etc., vezi, de exemplu, [21] și [30]). Mulți mari savanți ai epocii noastre, printre care Wiener, von Neumann, Kolmogorov, M. Krein au studiat diverse proprietăți ale acestor curbe. Kolmogorov a indicat forma canonică a unei curbe autocongruente într-un spațiu hilbertian, Krein a arătat că un „arc elicoidal", adică o parte finită a unei curbe autocongruente, poate fi prelungită în diferite moduri pînă formează o curbă autocongruentă completă și a descris toate prelungirile posibile. Cercetările autorilor citați asupra curbelor autocongruente într-un spațiu hilbertian au fost elaborate în anii 1939—1943.

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

Capitolul 1

1. *Indicație.* Avem

$$|x| = |x - y + y| \leqslant |x - y| + |y|,$$

de unde

$$|x| - |y| \leqslant |x - y|.$$

Înlocuim aici x cu y și y cu x.

2. *Indicație.* Verificați că numărul sup A + sup B are toate proprietățile marginii superioare a mulțimii $A + B$.

3. *Indicație.* Verificați că numărul sup $A \cdot$ sup B are toate proprietățile marginii superioare a mulțimii $A \cdot B$.

4. *Indicație.* Procedați prin analogie cu exerc. 2 și 3.

5. *Indicație.* Mulțimea A este majorată; $\gamma = \sup A$.

Capitolul 2

1. *Indicație.* Aplicați 2.35—2.36.

2. *Indicație.* a) În fiecare din intervalele în discuție se poate alege un punct rațional. b) În fiecare bucă a optului, alegeți un punct de coordonate raționale. c) În exteriorul fiecărui interval $[0,\varepsilon]$ nu există decît un număr finit de puncte din M.

3. *Indicație.* Inversați construcția 2.33.

4. *Indicație.* Frații N formează o mulțime numărabilă.

5. *Indicație.* Fie C o parte numărabilă a lui A și $D = A - C$. Atunci $A = D + C$, $A + B = D + C + B$; utilizați echipotența lui C și $C + B$.

6. *Indicație.* Folosiți-vă de exerc. 5, alegînd ca B mulțimea numerelor raționale și punînd $A = I$. Cazul mulțimii T este analog.

7. *Indicație.* Mulțimea A este reuniunea a două mulțimi: cea a șirurilor ce conțin zerouri în număr finit și cea a șirurilor ce conțin fiecare un număr infinit de zerouri. Prima este numărabilă, a doua de puterea continuului, deoarece ea este în corespondență biunivocă cu mulțimea punctelor unui interval notate în sistemul binar (vezi 1.78, $p = 2$). Aplicați exerc. 5.

8. *Indicație.* Faceți să corespundă fiecărui șir (1), șirul format din zerouri și unități, cu unitățile pe locurile $k_1, k_2, \ldots$. Aplicați exercițiul 7.

9. *Indicație.* Asociați fiecărui șir (2), șirul crescător

$$k_1 = m_1,\ k_2 = m_1 + m_2,\ \ldots,\ k_n = m_1 + \ldots + m_n,\ \ldots$$

10. *Indicație.* Aplicînd exercițiul 9, se poate asocia fiecărui simbol ξ tabloul

$$\xi \sim \begin{cases} m_{11}\, m_{12} \ldots m_{1n} \ldots \\ m_{21}\, m_{22} \ldots m_{2n} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ m_{p1}\, m_{p2} \ldots m_{pn} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

ale cărui elemente sînt numere naturale. Acest tablou poate fi pus sub forma unui șir, ca în 2.33. Apoi se aplică încă o dată exerc. 9.

11. *Indicație.* Simplificați convenabil rezolvarea exerc. 10.

12. *Indicație.* Presupunem că fiecărui $t \in [0, 1]$ i se asociază o funcție $f_t(x) \in E$. Familia $W \subset E$ a funcțiilor $f_t(x)$ nu epuizează E deoarece funcția $\varphi(x)$, a cărei valoare pentru orice x este diferită de valoarea corespunzătoare $f_x(x)$, nu aparține lui W.

13. *Indicație.* Generalizați metoda de rezolvare a exerc. 12, înlocuind $[0, 1]$ prin A și definind fiecare submulțime $B \subset A$ cu ajutorul funcției care este egală cu 1 pe B și 0 în rest.

Capitolul 3

1. *Indicație.* Dacă $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$, atunci $A' = \{0\}$, A'' este vidă. Construiți o iterație.

2. *Indicație.* Orice punct limită al mulțimii A' este la fel și pentru A.

3. *Indicație.* Este suficient să considerăm $n = 1$. Orice punct al mulțimii A care nu este punct limită al ei, poate fi acoperit printr-un interval cu extremități raționale, ce nu conține nici un alt punct al mulțimii A. Aplicați exerc. 1(a), cap. 2.

4. *Indicație.* Un punct care nu este un punct de condensare al mulțimii A, poate fi acoperit cu un interval cu extremități raționale ce conține o mulțime cel mult numărabilă de puncte ale mulțimii A.

5. *Indicație.* Marcați fiecare interval cu extremități raționale care este conținut în intervalele acoperirii și păstrați cîte unul din intervalele acoperirii care conține orice interval marcat.

8. *Indicație.* Puneți $U_1 = \bigcup_{x \in F_1} \left\{y : \rho(x, y) \leqslant \frac{1}{2}\, \rho(x, F_2)\right\}$; definiți U_2 într-un mod analog.

10. *Indicație.* Pentru $n = 3$, construcția se face cu ajutorul unei perechi de cercuri. Spațiul M format din patru puncte x_1, x_2, x_3, x_4, cu distanța

$$\rho(x_1, x_2) = \rho(x_2, x_3) = \rho(x_3, x_4) = \rho(x_4, x_1) = 1,$$

$$\rho(x_1, x_3) = \rho(x_2, x_4) = 2$$

nu mai este izometric cu nici o submulțime a spațiului euclidian $\mathbb{R}_2$.

11. *Indicație.* Considerați sfera $S_n \subset \mathbb{R}_{n+1}$ de rază 2 și de centru $(0, 0, \ldots, 0, 1)$. Aplicați în S_n spațiul $\mathbb{R}_n \subset \mathbb{R}_{n+1}$ format din punctele $(\xi_1, \ldots, \xi_n, 0)$ folosind dreptele trecînd prin punctul $(0, 0, \ldots, 0, 2)$. Faceți să corespundă acest punct punctului $\infty \in \overline{\mathbb{R}_n}$. Alegeți pentru metrica r, metrica uzuală a spațiului $\mathbb{R}_{n+1}$ pentru punctele lui S_n („proiecția stereografică").

12. *Indicație.* Fixînd un punct $a \in M$ găsiți, pentru orice pereche de puncte x, y ale planului euclidian $\mathbb{R}_2$, trei puncte A, X, Y cu aceleași distanțe relative (exerc. 10) Definiți noua distanță $r(x, y)$ cu ajutorul proiecției stereografice a lui $\mathbb{R}_2$, pe sfera S_2 tangentă la $\mathbb{R}_2$ în punctul A.

13. *Răspuns.* Două elemente pentru orice dreaptă trecînd prin rigine.

Capitolul 4

1. *Indicație.* Conform exerc. 1, cap. 1, considerați șirul $x_n = (-1)^n$ $(n = 1,2,\ldots)$.

2. *Indicație.* Limitele $\underline{\lim}$ și $\overline{\lim}$ sînt limitele anumitor șiruri.

3. *Răspuns.* Da.

4. *Indicație.* Dacă $a_{nk} \to \underline{\lim}\ a_n < \overline{\lim}\ a_n$, puneți, de exemplu

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n = n_k,\ k = 1.2, \ldots \\ \underline{\lim}\ a_n - \overline{\lim}\ a_n & \text{dacă } n \neq n_k \end{cases}$$

6. *Răspuns.* $\lim x_n = \left\{\frac{1}{3}\, a + \frac{2}{3}\, b\right.$.

7. *Indicație.* Pentru șirul $\varepsilon_n = \dfrac{x_n}{\sqrt{a}} - 1$, demonstrați egalitatea și estimarea

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n^2}{2(1+\varepsilon_n)} < \frac{\varepsilon_n}{2}.$$

8. *Indicație.* $y_n > y_{n+1} > x_{n+1} > x_n$.

9. *Indicație.* Fie $p_1 = \ldots = p_r > p_{r+1} \geqslant \ldots \geqslant p_m$; atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{p_k}{p_1}\right)^n = 0$ pentru $k > r$.

11. *Indicație.* Folosiți definiția limitei după direcția $x \to a$.

12. Răspunsurile la cele două întrebări sînt, în general, negative.

Exemple: fie $X = \{1,2, \ldots, n, \ldots\}$, $\mathfrak{S} = \{n \to \infty\}$, $Y = \left\{0, 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots\right\}$ $Z = \{0, 1\}$; fie apoi $y_1(2n) = \dfrac{1}{2n}$, $y_1(2n+1) = 0$, $y_2(n) = 0$ $(n = 1,2, \ldots)$, $z(0) = 1$, $z(y) = 0$ pentru $y \neq 0$. Atunci $z(y_1(n))$ nu are limită pentru $n \to \infty$, dar $z(y_2(n))$ are limită, care este 1 și $1 \neq \lim\limits_{y\to 0} z(y)$.

13. *Indicație.* a) și b) sînt imediate, c) rezultă din 4.16 c.

Capitolul 5

1. *Răspuns.* Nu.

2. *Răspuns.* Nu.

3. *Indicație.* Aplicați exerc. 1, cap. 1.

4. *Răspuns.* Cele două funcții sînt discontinue pentru x întregi și continue pentru toți ceilalți x.

7. *Indicație.* $\min\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \leqslant \frac{1}{n}\sum_1^n \xi_k \leqslant \max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$.

8. *Indicație.* Utilizați existența lui $f(a+0)$ și $f(b-0)$.

9. *Indicație.* Puneți $x = \log_e t$ și aplicați 5.41.

10. *Răspuns.* $[-\infty, -1-\delta]$; $[-1+\delta, 1-\delta]$; $[1+\delta, \infty]$; $\delta > 0$ oarecare.

11. *Indicație.* Considerați perechile de funcții $\sin ax$, $\cos ax$, $a^x \sin x$, $a^x \cos x$.

12. *Indicație.* În calitate de exemplu, considerați funcția

$$y = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} & \text{pentru } x \neq 0, \\ 0 & \text{pentru } x = 0. \end{cases}$$

13. *Indicație.* Aplicați formulele 5.61(1)—(3).

14. *Indicație.* Orice punct c astfel încît $|\lim_{t \to c} x(t) - x(c)| \geqslant q > 0$, are o vecinătate pentru care nici un punct nu are aceeași proprietate.

15. *Răspuns.* Funcția $x(t)$ este continuă peste tot cu excepția punctelor pentru care toate cifrele $t_{n_1}, t_{n_2}, \ldots$, începînd de la un anumit rang, sînt egale cu 9.

16. *Indicație.* Dacă arcul $\Delta_0 \subset \Gamma$ nu conține puncte ale mulțimii M, atunci arcele $\Delta_1 = \Delta_0 - 1$, $\Delta_2 = \Delta_0 - 2$ etc., nu conțin nici ele. Arcele Δ_0, $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ de aceeași lungime pe cercul Γ trebuie în mod necesar să se intersecteze. Dacă, de exemplu, arcul Δ_k intersectează arcul Δ_{k+m}, atunci reuniunea arcelor $\Delta_k, \Delta_{k+n}, \Delta_{k+2m}, \ldots$ acoperă tot cercul Γ.

17. *Indicație.* Fie q un punct oarecare al mulțimii $M-P$ și fie $p_1, p_2, \ldots$ un șir de puncte din P tinzînd către q. Arătați, plecînd de la continuitatea uniformă a funcției f pe P, că șirul $f(p_n)$ are o limită care nu depinde de alegerea șirului $p_1, p_2, \ldots$, convergent către punctul q. Punînd $f(q) = \lim_{n \to \infty} (p_n)$ verificați continuitatea acestei funcții pe tot M.

18. *Indicație.* Intervalele $(f(\alpha-0), f(\alpha+0))$ nu se intersectează pentru diverse valori ale lui α.

Capitolul 6

1. *Indicație.* Aplicați 6.16 punînd $v_n = \frac{1}{n \cdot \lg n}$. Utilizați 5.59(6),(11) și (13).

2. *Indicație.* Folosiți criteriile din §6.1 și exerc. 1.

3. *Indicație.* Oricare ar fi n și $m < n$ avem

$$(n-m)a_n \leqslant a_{m+1} + \ldots + a_n \leqslant r_m = \sum_{m+1}^{\infty} a_n,$$

de unde $n \cdot a_n \leqslant \frac{n}{n-m} r_m$.

4. *Una din rezolvări.* Presupunem că am găsit, pentru orice $n = 1,2,\ldots$, un număr $N = N(n)$ astfel încît $\sum_{m=N}^{\infty} a_m < \frac{1}{n^3}$; puneți $b_m = n$ pentru $N(n) \leqslant m < N(n+1)$.

5. *Indicație.* Aplicați inegalitatea $k(n-k) \leqslant n^2$ $(k = 1,2,\ldots,n-1)$.

6. *Indicație.* $s_{2n} \leqslant s \leqslant s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$.

7. *Indicație.* Aplicați criteriul lui d'Alembert 6.14a.

8. *Indicație.* Existența limitei rezultă din faptul că funcția f este nedescrescătoare și mărginită; în plus, $L = \lim_{t\to 1} f(t) \leqslant \sum_{0}^{\infty} a_n$. Pe de altă parte, pentru orice $\varepsilon > 0$, se poate găsi un N astfel încît $\sum_{0}^{N} a_n > \sum_{0}^{\infty} a_n - \varepsilon$, și apoi un t astfel încît $\sum_{0}^{N} a_n t^n > \sum_{0}^{\infty} a_n - \varepsilon$.

9. *Indicație.* Aceeași idee ca în exerc. 8.

10. *Indicație.* $z_n = P_{n+1}/P_n$.

11. *Indicație.* $\log_b p_n = \sum_{k=1}^{n} \log_b x_k$.

12. *Indicație.* Aplicați 5.59 f.

13. *Indicație.* Calculați $(1-x)p_n$.

14. *Indicație.* Dezvoltați $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{px}}$ în progresie geometrică.

15. *Indicație.* Identitatea lui Euler este valabilă de asemenea pentru $x = 1$; în acest caz cei doi membri ai egalității sînt infiniți.

16. *Indicație.* Există $9^m - 9^{m-1}$ numere cuprinse între $10^{m-1} - 1$ și $10^m - 1$ și a căror scriere zecimală nu conține cifra 9. În consecință, suma căutată este mai mică decît $\dfrac{9-1}{1} + \dfrac{9^2-9}{10} + \dfrac{9^3-9^2}{100} + \ldots = 80$.

17. *Indicație.* Lungimea unui vector este cel puțin egală cu lungimea unei proiecții oarecare a sa și cel mult egală cu suma lungimilor tuturor proiecțiilor pe axele de coordonate.

18. *Indicație.* Țineți cont de compacitatea unei sfere în E_n.

19. *Indicație.* Aplicați teorema 6.32a (6.46).

20. *Indicație.* Fie $V_1 \supset V_2 \supset \ldots$ un șir de unghiuri solide conținînd fiecare vectorul q și astfel încît $\sup_{x\in V_m,\,|x|=1} \sin \widehat{(x,e)} = \sigma_m \searrow 0$, deci $\sum_{1}^{\infty} \sigma_m < \infty$. Alegeți succesiv termenii seriei (1) conținuți în V_1, V_2, ... pentru care suma lungimilor este cuprinsă între 1 și 2.

21. *Indicație.* Pentru $n = 1$, propoziția se confundă cu teorema lui Riemann 6.37. Fie $f \in E_n$ un vector oarecare și E_{n-1} complementul său ortogonal. Prin recurență, există o permutare a seriei (1) pentru care suma proiecțiilor pe E_{n-1} este egală cu un vector dat în E_{n-1}. Apoi, trebuie să alegem o parte a seriei pentru care componentele după f formează o serie convergentă către $+\infty$ și complementele ortogonale converg absolut

exerc. 20). Partea din serie care rămîne are componentele după f de sumă $-\infty$. Permutîndu-le, obțineți proiecția dată pe vectorul f. Permutarea nu schimbă suma proiecțiilor ortogonale (exerc. 19).

22. *Indicație.* Aplicați rezultatul exercițiului 21, complementului ortogonal al subspațiului A.

Capitolul 7

1. *Indicație.* $f'(x) = 0$.

2. *Indicație.* Aplicați teorema lui Lagrange 7.44.

3. *Indicație.* Aplicați teorema lui Lagrange 7.44.

4. *Indicație.* Avem $y'(0) = 0$, dar $y'(x)$ nu tinde la 0 pentru $x \to 0$

5. *Indicație.* Este suficient să studiem cazul $f'(a) < 0 < f'(b)$ și să demonstrăm existența unui punct $c \in (a, b)$ cu $f'(c) = 0$. Punctul în care $f(x)$ își atinge valoarea sa minimă este punctul căutat.

6. *Indicație.* Demonstrați prin reducere la absurd, cu ajutorul teoremei 7.44.

7. *Indicație.* Dacă inegalitatea căutată este adevărată pentru două puncte $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\} \in \mathbb{R}_p$ și $\mu = \{\mu_1, \ldots, \mu_p\} \in \mathbb{R}_p$, ea este la fel pentru orice segment care le unește în $\mathbb{R}_p$. Ea este evidentă pentru punctele de forma $\lambda^i = \{0, \ldots, 1, \ldots, 0\}$; se trece acum la un punct oarecare $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$.

8. *Indicație.* Inegalitatea

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leqslant \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \quad (\alpha < x < \beta)$$

este echivalentă cu definiția unei funcții convexe din exerc. 7.

9. *Indicație.* Trecînd la limită în inegalitatea

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leqslant \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \leqslant \frac{f(\beta) - f(x)}{\beta - x} \quad (\alpha < x < \beta)$$

pentru $\beta \searrow x$ se ajunge la existența lui $f'_d(x)$ și la egalitatea $f(x + 0) = f(x)$. Dacă se pune $\alpha \nearrow x$, se obține existența lui $f'_s(x)$ și relația $f(x-0) = f(x)$.

10. *Indicație.* Este o consecință a inegalității din exerc. 9.

11. *Indicație.* Intervalele $(f'_s(x), f'_d(x))$ construite pentru orice pereche de puncte în care $f'(x)$ nu există, nu se intersectează.

12. *Indicație.* Din ipoteză rezultă că singurele puncte comune curbei $y = f(x)$ și unei coarde oarecare a sa sînt extremitățile coardei. Curba se află deci fie deasupra, fie dedesubtul coardei. Prin continuitate, se trece de la coarda avînd extremitățile în a, b la o coardă oarecare.

13. *Indicație.* Dacă pe curba $y = f(x)$ pentru $x > x_0$, există un punct $(x_1, f(x_1))$ dedesubtul tangentei, atunci curba se află dedesubtul coardei ce unește punctele de abscise x_0 și x_1. Aplicați 7.22(2).

14. *Indicație.* Aplicați regula lui l'Hôpital, limitelor din exerc 10, cap. 4.

15. *Indicație.* Aplicați formula lui Lagrange raportului $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

16. *Indicație.* Coeficientul unghiular al tangentei în $x_n = \frac{b}{n}$ nu depășește pe cel al coardei duse prin punctele x_{n+1} și x_n.

17. *Indicație.* Fixînd m pentru un x_0 dat, alegem creșterea $h = \pm \frac{1}{4^m}$. Atunci creșterile tuturor $\varphi_m(x)$ începînd de la a m-a sînt nule. Funcția $\varphi_{m-1}(x)$ are intervalele de lungime $\frac{2}{4^m}$ fără puncte unghiulare; acela dintre ele care conține punctul x_0 conține de asemenea și unul din intervalele $\left(x_0, x_0 + \frac{1}{4^m}\right)$, $\left(x_0, x_0 - \frac{1}{4^m}\right)$. Pe acest interval, toate funcțiile precedente $\varphi_k(x)$, $k < m-1$ nu au puncte unghiulare, creșterile lor sînt egale în modul cu cele ale variabilei independente. În final, avem

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Delta \varphi_k(x)}{\Delta x} = \begin{cases} \text{număr par pentru } m \text{ par,} \\ \text{număr impar pentru } m \text{ impar.} \end{cases}$$

Deci $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ nu are limită pentru $\Delta x \to 0$.

Capitolul 8

1. *Indicație.* Toate derivatele funcției e^{-1/x^2} sînt nule pentru $x = 0$; pentru demonstrație, utilizați exerc. 15, cap. 7.

2. *Indicație.* Găsiți și estimați termenul principal din formula lui Leibniz.

3. *Indicație.* Aplicați de un număr convenabil de ori, teorema lui Rolle.

4. *Indicație.* Considerați un punct x_0 în care $|f'(x_0)| > M_1 - \varepsilon$, țineți cont de faptul că $f(x) - f(x_0) \geqslant f'(x_0)(x - x_0) - M_2 \frac{(x - x_0)^2}{2}$.

5. *Răspuns.*

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - nf(x+h) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} f(x+2h) - \ldots + (-1)^n f(x+nh)}{h^n}.$$

6. *Indicație.* Dacă $f''(x_0) < 0$, curba $y = f(x)$ se află dedesubtul tangentei sale, în vecinătatea punctului $x = x_0$ (8.32). Vezi exerc. 13, cap. 7

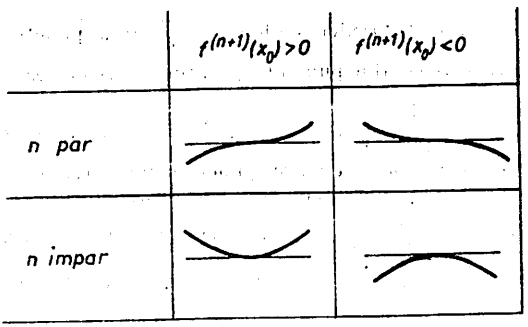
7. *Indicație.* Existența unei coarde din care cel puțin o parte se află dedesubtul curbei, conduce la existența unui punct $(x_0, f(x_0))$ în vecinătatea căruia curba se află dedesubtul tangentei sale; $f''(x_0) > 0$, exclude această posibilitate.

8. *Indicație.* Aplicați formulele 8.73(5); minorați sin z în modul, ținînd cont de faptul că $\operatorname{ch} y > \operatorname{sh} y$.

9. *Indicație.* Pentru $|y| > \varepsilon$, folosiți estimarea ce rezultă din exercițiul 8. Pentru $|y| < \varepsilon$, țineți cont de $|\cos x| > 1 - \delta$.

10. *Răspuns.* (a) $\omega < 10^{-7}$; (b) $h \leqslant 1{,}03$; (c) $n \geqslant 10$. În particular, eroarea comisă înlocuind numărul e prin suma $1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{10!}$ nu depășește 10^{-7}.

11. *Răspuns.*



12. *Răspuns.* Nu. Se poate da un exemplu folosind exerc. 2.

13. *Indicație.* Aplicați inegalitatea

$$\frac{1}{(n+k)!} < \frac{1}{n!\,n^k} \quad (k = 1,2, \ldots).$$

14. *Indicație.* Dacă e este rațional, atunci $n!e$ este un număr întreg pentru un anumit n.

15. *Indicație.* Aplicați formulele 8.37(2′) și (5′).

16. *Indicație.* Într-o vecinătate a lui 0, inegalitatea căutată este satisfăcută. Dacă ea nu este adevărată în tot intervalul $[-2\pi, 2\pi]$, atunci există un punct $x_0 \neq 0$ în care inegalitatea devine egalitate. Aplicați teorema lui Lagrange 7.44 intervalului $[0, x_0]$.

17. *Indicație.* Puneți $x = \pi/2$.

Capitolul 9

1. *Indicație.* Coeficientul unghiular al componentei liniare este

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(\xi)\,d\xi$$

unde T este perioada funcției $f(x)$.

2. *Indicație.* Considerați membrul secund ca funcție (continuă) de ξ, presupunînd mai întîi că f își păstrează semnul.

3. *Indicație.* Dacă, de exemplu, φ descrește, atunci $\varphi(x) - \varphi(a+0)$ descrește de asemenea și este nenegativă.

4. *Indicație.* Se face prin recurență după n. *O altă metodă:* înlocuiți b prin x, derivați în raport cu x și vedeți dacă răspunsurile sînt aceleași. Reveniți la formula inițială integrînd; observați că pentru $x = a$ cei doi membri ai egalității coincid.

5. *Indicație.* Generalizați într-un mod adecvat demonstrația teoremei 9.14 e.

6. *Indicație.* Aplicați criteriul lui Riemann (exerc. 5).

7. Ținînd cont că

$$||f(x')| - |f(x'')|| \leqslant |f(x') - f(x'')|,$$

aplicați criteriul lui Riemann.

8. *Indicație.* Aplicați criteriul lui Riemann.

9. *Indicație.* În criteriul lui Du Bois-Reymond (exerc. 8), puneți $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ și înlocuiți δ prin $\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{4}, \frac{\delta}{8}, \ldots$ respectiv.

10. *Indicație.* Aplicați criteriul lui Lebesgue.

11. *Indicație.* În inegalitatea

$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1} \leqslant \frac{\pi}{2} \leqslant \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n}$$

raportul membrilor extremi tinde către 1.

12. *Indicație.* Pentru un $\varepsilon > 0$ dat, găsim un $\delta(\varepsilon)$ plecînd de la condiția de continuitate uniformă a funcției f pe intervalul $[A, B]$. Pentru $d(\Pi) < \delta$, avem

$$f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j) = \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,dx + \varepsilon_j |x_{j+1} - x_j|,$$

unde $|\varepsilon_j| < \varepsilon$.

13. *Indicație.* Dacă $\sum_{j=0}^{n-1} |x_{j+1} - x_j|$ nu este mărginită, erorile comise, înlocuind $f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j)$ prin integrala corespunzătoare (2) pot fi mărite oricît, sumînd după j. Dacă f are cel puțin un punct de discontinuitate, eroarea nu este mică.

14. *Indicație.* Folosind 1)—4) verificați (3) pentru orice funcție în scară $f(x)$. Aplicînd 5) și aproximînd funcția dată continuă pe porțiuni printr-o funcție în scară, se ajunge la (3).

15. *Indicație.* Înlocuiți $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ în 9.74(4).

Capitolul 10

1. *Indicație.* Fie $z = 1$ un punct de analiticitate al funcției $f(z)$. Avem $f(z) = \sum_0^\infty \frac{f^k(1)}{k!}(z-1)^k$ $(|z-1| < \rho)$, unde, conform exerc. 8, cap. 6,

$$f(1) = \lim_{z \to 1} f(z) = \sum_0^\infty a^k, \ldots, f^{(n)}(1) = \sum_0^\infty k(k-1)\ldots(k-n+1)\,a_k.$$

Conform consecinței teoremei lui Abel (6.67) și exerc. 15, cap. 7, avem :

$$f(e^{i\theta}) = \sum_0^\infty a_k e^{ik\theta}, \ldots, f^{(n)}(e^{i\theta}) = \sum_0^\infty a_k k(k-1)\ldots(k-n+1)\,e^{ik\theta},$$

de unde convergența seriei $\sum \frac{f^{(n)}e^{(i\theta)}}{n!}(z - e^{i\theta})^n$ pentru $|z - e^{i\theta}| < \rho$.

2. *Indicație.* Se pleacă de la egalitatea $\sum_0^\infty a_n z^n - \frac{b}{z - z_0} = \sum_0^\infty b_n z^n$, unde $\overline{\lim} \sqrt[n]{|b_n|} < 1$.

3. *Indicație.* Considerați aplicația $w = f(z)$ în vecinătatea punctului z_0.

4. *Indicație.* Aplicați principiul maximului funcției $\frac{f(z)}{z}$.

5. *Indicație.* Trebuie de demonstrat relația ($r_1 < r_2 < r_3$)

$$\ln M(r_2) \leqslant \frac{\ln r_2 - \ln r_1}{\ln r_3 - \ln r_1} \ln M(r_3) + \frac{\ln r_3 - \ln r_2}{\ln r_3 - \ln r_1} \ln M(r_1).$$

Considerați funcția $z^\alpha f(z)$, unde α este un număr astfel încît $r_1^\alpha M(r_1) = r_3^\alpha M(r_3)$.

6. *Indicație.* Aplicați metoda 10.16.

7. *Indicație.* Verificați pentru fiecare din funcțiile az, $z + b$, $\frac{1}{z}$ și utilizați 10.55.

8. *Indicație.* Estimați expresiile a_n în 10.38(2).

9. *Indicație.* Calculați creșterea argumentului înconjurînd fiecare zerou și fiecare pol cu un disc suficient de mic.

10. *Indicație.* Folosiți 10.44.

11. *Indicație.* Fie $g(z) = \sum_0^\infty \frac{g^{(m)}(a)}{m!}(z - a)^m$; atunci

$$|g^{(m)}(z) + \ldots + g^{(m+n)}(z)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty}{}' (g^{(m)}(a) + \ldots + g^{(m+n+k)}(a)) \frac{(z-a)^k}{k!} \right|.$$

12. *Răspunsuri.* a) Orice foaie a suprafeței riemanniene a funcției $w(z)$ este planul tăiat în lungul liniei ce unește punctele $+1$ și -1 (de exemplu, în lungul segmentului axei reale $[-1, 1]$ sau al complementarei sale în raport cu axa reală: suprafața riemanniană are două foi, care sînt unite după marginile tăieturii: marginea inferioară a primei foi cu marginea superioară a celei de a doua; punctele de ramificare sînt -1 și $+1$ în planul w. În planul z, domeniile unde funcția este injectivă sînt: interiorul discului unitate și exteriorul acestui disc. b) În planul z, domeniile unde funcția este injectivă sînt benzile $k\pi < x < (k + 1)\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); funcția inversă $z = \operatorname{Arccos} w$ are o infinitate de determinări; pentru a construi suprafața riemanniană trebuie să tăiem fiecare foaie a planului w în lungul axei reale de la $-\infty$ la -1 și de la $+1$ la $+\infty$. Marginea superioară a jumătății stîngi a tăieturii foii a k-a este lipită de marginea inferioară a jumătății stîngi a tăieturii celei de a $(k + 1)$ foi, marginea superioară a jumătății drepte a tăieturii celei de a k foi cu marginea inferioară a jumătății drepte a celei de a $(k - 1)$ foi.

13. *Indicație.* Folosiți expresia lui $\cos z$ cu ajutorul exponențialei.

14. *Indicație.* Considerați funcția $c_1 f_1(z) + \ldots + c_n f_n(z)$, unde numerele c_k sînt astfel încît $|c_k| = 1$ și astfel încît în punctul z_0 de maxim al lui $|f_1(z)| + \ldots + |f_n(z)|$ să avem

$$c_1 f_1(z_0) + \ldots + c_n f_n(z_0) = |f_1(z_0)| + \ldots + |f_n(z_0)|.$$

15. *Indicație.* Aplicați 10.49.

16. *Indicație.* Considerați $\dfrac{1}{P(z)}$.

17. *Indicație.* $\dfrac{P'(z)}{P(z)} = \dfrac{n}{z} + \dfrac{g(z)}{z^2}$; unde $g(z)$ este mărginit pentru $z \to \infty$.

Integrați această relație în lungul unui cerc de rază suficient de mare.

18. *Indicație.* Dacă $P(z)$ nu se anulează, atunci $\dfrac{1}{P(z)}$ își atinge maximul său într-un punct finit.

19. *Indicație.*

$$\frac{A}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = f(z) + \sum_k \frac{b_k}{z_k - z},$$

unde sumarea se extinde asupra tuturor polilor lui $f(z)$ din interiorul conturului Γ_n. Pe de altă parte:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi} + \frac{z}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi(\xi - z)} =$$

$$= f(0) + \sum_k \frac{b_k}{z_k} + \frac{z}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi(\xi - z)}$$

ultima integrală tinzînd către zero pentru $n \to 0$.

20. *Indicație.* În ceea ce privește produsele infinite, vedeți exerc. 10, cap. 6. Integrați descompunerea în elemente simple date în exerc. 19 și puneți în evidență acolo logaritmii.

21. *Indicație.* Folosiți exerc. 9, cap. 8. Pentru prima descompunere, din exerc. 20, puneți $g(z) = \dfrac{\sin z}{z}$.

22. *Indicație.* Considerați funcția

$$f(z)e^{-\varepsilon z^{\lambda}}, \quad \lambda < \frac{\pi}{2\alpha},$$

în sectorul $|\arg z| \leqslant \alpha$, $|z| \leqslant r$ și aplicați principiu maximului.

23. *Indicație.* Aplicați exerc. 22 funcției $f(z)e^{i\gamma z}(\gamma > 0)$ în fiecare cadran al semiplanului superior și deduceți estimația

$$|f(z)e^{i\gamma z}| \leqslant \max\{c, m_\gamma\}, \quad m_\gamma = \max_r a_\varepsilon e^{(\varepsilon - \gamma)r}.$$

Dacă $m_\gamma > c$, atunci funcția $|f(z)|$ își atinge maximul său într-un punct al axei imaginare, ceea ce este imposibil pentru $f(z) \not\equiv \text{const}$ (exerc. 3). Deci $m_\gamma \leqslant c$, $|f(z)| \leqslant c|e^{-i\gamma z}|$; treceți la limită pentru $\gamma \to 0$.

24. *Indicație.* Aplicați exerc. 23 și teorema lui Louville.

Capitolul 11

1. *Indicație.* Demonstrați formula pentru triunghiul interior unde funcția de integrat este continuă, apoi treceți la limită.

2. *Indicație.*

$$\int_\alpha^\beta \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \int_\alpha^\beta \frac{f(ax)}{x}\,dx - \int_\alpha^\beta \frac{f(bx)}{x}\,dx =$$

$$= \int_{a\alpha}^{a\beta} \frac{f(x)}{x}\,dx - \int_{a\alpha}^{b\beta} \frac{f(x)}{x}\,dx = \int_{a\alpha}^{b\alpha} \frac{f(x)}{x}\,dx - \int_{a\beta}^{b\beta} \frac{f(x)}{x}\,dx = f(\xi)\ln\frac{b}{a} -$$

$$-f(\eta)\ln\frac{b}{a}, \quad a\alpha < \xi < ba, \quad a\beta < \eta < b\beta.$$

3. *Răspuns.* $I(p) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}$ cu o valoare convenabilă a lui $\sqrt{p}$.

Alegeți drept contur sectorul format dintr-un segment al axei x, dintr-un segment al semidreptei $\varphi = \varphi_0$ și din arcul unui cerc centrat în originea coordonatelor.

4. *Indicație.* Folosiți exerc. 3.

Răspuns. $F_1 = F_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

5. *Răspuns.*

$$I = 2\pi i \sum \operatorname{Rez}\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\frac{\sin x}{x}\right],$$

unde suma este extinsă asupra tuturor rădăcinilor polinomului $Q(x)$ în semiplanul superior.

6. *Răspuns.* Integrala cu limita infinită nu este uniform convergentă în raport cu parametrul y.

7. *Indicație.* Comparați valorile lui s^{z-1} pe intervalul $[\varepsilon, +\infty]$, parcurs în ambele sensuri.

Capitolul 12

1. *Răspuns.* Da, în cazul a) și b), nu în cazul c).

2. *Indicație.* Mulțimea tuturor șirurilor crescătoare de numere naturale are puterea continuului (exerc. 8, cap. 2). Pentru fiecare astfel de șir $n_1 < n_2 < \ldots$, alegeți funcția $x(t) \in \mathbb{R}^1(0, \infty)$ care este egală cu unitatea în punctele $n_1, n_2, \ldots$ și este nulă în celelalte puncte întregi.

3. *Indicație.* Dacă ar exista o funcție extremală, ea ar lua valoarea 1 pentru $0 < x < 1/2$ și -1 pentru $1/2 < x < 1$.

4. *Indicație.* Trebuie să se verifice că (x, y) satisface axiomele produsului scalar 12.41. Pentru axioma 12.41d aplicați lema paralelogramului, paralelogramelor construite pe vectorii $x+z, y$; $x-z, y$; $y+z, x$; $y-z, x$. Pentru axioma 12.41c considerați la început α întregi, apoi fracționari, în fine oarecare trecînd la limită.

5. *Indicație.* Conform teoremei lui Cauchy, avem $\int_{|z|=1} P(z)dz=0$. Această egalitate se păstrează prin trecere la limită.

6. *Indicație.* Puneți $F=\prod_{f\in I}\{x\in Q \mid f(x)=0\}$. Arătați că orice funcție $g\in \mathbb{R}^s(Q)$, care este nulă în vecinătatea mulțimii F, aparține idealului I. Apoi, orice funcție $f\in \mathbb{R}^s(Q)$, care este nulă pe F, este limită de funcții de forma g.

7. *Indicație.* Fie $\delta>0$ un număr care corespunde unui $\varepsilon>0$, conform condiției de echicontinuitate a familiei E; atunci valorile funcțiilor $x(t)\in E$ în punctele δ-rețelei finite a compactului Q formează o 2ε-rețea precompactă pentru mulțimea E.

8. *Indicație.* Fără a restrînge generalitatea, se poate presupune că $\left|\sum_{m=1}^{\infty} t_{km}-1\right|<\delta$ oricare ar fi $k=1,2,\ldots$ Definiți un șir numeric $N_1, N_2, \ldots$ și un alt șir numeric $k_1, k_2, \ldots$ astfel încît să aveți $\sum_{m=N_1}^{\infty}|t_{1m}|<\delta$; $\sum_{m=1}^{N_1}|t_{k_1m}|<\delta$; $\sum_{N_2}^{\infty}|t_{k_1m}|<\delta$; $\sum_{1}^{N_2}|t_{k_2m}|<\delta, \ldots$, puneți $\xi_n=1$ pentru $N_{2p-1}\leqslant n\leqslant N_{2p}$ și -1 pentru $N_{2p}\leqslant n<N_{2p+1}$, $p=1,2,\ldots$

9. *Indicație.* Este suficient să considerăm șirurile $x=\{\xi_n\}$ pentru care $\sup \xi_n=\overline{\lim}\,\xi_n=-\underline{\lim}\,\xi_n=-\inf \xi_n$.

10. *Indicație.* Folosiți teorema de unicitate și principiul maximului pentru funcțiile analitice.

11. *Indicație.* Operatorul de înmulțire cu $z-\lambda$ nu poate avea ca invers decît operatorul de înmulțire cu $1/(z-\lambda)$.

12. *Indicație.* Din 12.87 se poate deduce că spectrul operatorului A este compus numai din valori proprii generalizate. Apoi, din relația $(A-\lambda E)x_n\to 0$, $|x_n|=1$, trebuie să deduceți $(p(A)-p(\lambda)E)x_n\to 0$ și să utilizați compacitatea lui $p(A)$ și condiția $p(\lambda)\neq 0$.

13. *Indicație.* Folosiți exerc. 12.

14. *Indicație.* Este suficient să considerăm cazul

$$\int_a^b |x(t)|^p dt=\int_a^b |y(t)|^q dt=1.$$

Integrați inegalitatea lui Young (9.61h)

$$|x(t)y(t)|\leqslant \frac{1}{p}|x(t)|^p+\frac{1}{q}|y(t)|^q.$$

15. *Indicație.* Integrați inegalitatea

$$|f(x)+g(x)|^p \leqslant (|f(x)|+|g(x)|)^p \leqslant$$

$$\leqslant |f(x)|(|f(x)|+|g(x)|)^{p-1}+|g(x)|(|f(x)+g(x)|)^{p-1}$$

și aplicați inegalitatea lui Hölder în al doilea membru (exerc. 14).

16. *Indicație.* Folosiți metoda din exerc. 14 înlocuind integrarea prin sumare.

17. *Indicație.* Analogie cu exerc. 15.

18. *Indicație.* Dacă $x_n = \{\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nk}, \ldots\} \in l_p$ este un șir Cauchy, atunci pentru orice $k = 1,2, \ldots$, șirul numeric ξ_{nk} $(n = 1,2,\ldots)$ este de asemenea Cauchy; fie $\xi_k = \lim \xi_{nk}$. Pentru orice $\varepsilon > 0$, există un N astfel încît oricare ar fi $n, m \geqslant N$, să aibă loc inegalitatea $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_{nk} - \xi_{mk}| \leqslant \varepsilon$. Înlocuiți aici ∞ prin p, treceți la limită pentru $m \to \infty$, apoi pentru $p \to \infty$.

19. *Indicație.* Aplicînd teorema lui Arzelà (12.24 d) obțineți un subșir uniform convergent; aplicînd teorema lui Arzelà încă o dată, obțineți un șir mai rar cu derivatele uniform convergente etc.; apoi considerați subșirul diagonal.

20. *Indicație.* Mulțimea $\{x \in \mathbb{R}_n \mid \|x\|_p \leqslant 1\}$ nu este convexă.

21. *Indicație.* Pentru mulțimea $E \subset P(Q)$ formată dintr-o singură funcție $x(t)$ se poate pune $Q_k = \{t \in Q \mid k\varepsilon < x(t) \leqslant (k+1)\varepsilon\}$. În cazul general, aplicați criteriul Hausdorff 3.93c.

Capitolul 13

1. *Indicație.* Verificați condiția lui Lipschitz.

2. *Răspuns.* (a) parabolă; (b) parabolă semicubică.

3. *Indicație.* Folosiți expresia wronskianului (13.74).

4. *Indicație.* Într-o bază jordaniană sistemul se descompune în atîtea sisteme independente cîte rădăcini caracteristice sînt. Orice sistem este echivalent cu o ecuație de forma $\left(\frac{d}{dt} - \lambda\right)^m u(t) = 0$. Întreg sistemul este echivalent cu ecuația

$$\prod_k \left(\frac{d}{dt} - \lambda_k\right)^{m_k} u(t) = 0.$$

5. *Indicație.* Operatorii Ω_0^t și Ω_T^{t+T} verifică aceeași ecuație și aceeași condiție inițială.

6. *Indicație.* Definiți operatorul $A(t)$ pe subspațiul X_t, generat de vectorii $u_1(t), \ldots, u_n(t)$, cu condițiile $u_k'(t) = A(t)\,u_k(t)$ $(k = 1, \ldots, n)$ și pe suplementul ortogonal al lui X_t puneți $A(t)$ nul. Verificați continuitatea lui $A(t)$ în raport cu t.

7. *Răspuns.* Este posibil. Ca exemplu, pentru $n = 2$ se pot alege funcțiile

$$y_1(t) = \begin{cases} t^3 & \text{pentru } t > 0 \\ 0 & \text{pentru } t < 0 \end{cases}, \qquad y_2(t) = y_1(-t).$$

8. *Răspuns.* De exemplu,

$$\begin{vmatrix} y^{(n)}(t) & y^{(n-1)}(t) \dots y(t) \\ y_1^{(n)}(t) & y_1^{(n-1)}(t) \dots y_1(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n^{(n)}(t) & y_n^{(n-1)}(t) \dots y_n(t) \end{vmatrix} = 0.$$

9. *Indicație.* Pentru $m = 0$ rezultatul decurge din teorema de existență. Apoi procedați prin recurență.

10. *Indicație.* Substituția $y(t) = e^{kt}z(t)$.

11. *Indicație.* Substituția $y(t) = k\int_0^t w(s)ds$.

12. *Indicație.* O ε-aproape soluție verifică de asemenea inegalitatea

$$\left\| y(t) - y(0) - \int_0^t f(s, y(s))\, ds \right\| \leqslant \varepsilon t.$$

Folosiți soluția exerc. 11.

13. *Indicație.* Pentru $t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}$ au loc relațiile

$$y_\Pi(t) = \left\{ (E + (t - t_k)A(t_k)) \prod_{j=k-1}^{0} (E + A(t_j)\Delta t_j) \right\} y_0,$$

$$y'_\Pi(t) = \left\{ A(t_k) \prod_{j=k-1}^{0} (E + A(t_j)\Delta t_j) \right\} y_0 =$$

$$= A(t_k)[E + (t - t_k)A(t_k)]^{-1} y_\Pi(t) =$$

$$= A(t_k)[E + B_k(t)]y_\Pi(t)A(t)y_\Pi(t) + C_k(t)\, y_\Pi(t),$$

unde operatorii $B_k(t)$ și $C_k(t)$ tind către zero pentru o rafinare nelimitată a diviziunii Π.

14. *Indicație.* Folosiți soluțiile exerc. 13 și 12.

15. *Indicație.* Aplicați metoda exerc. 13.

16. *Indicație.* Folosiți soluțiile exerc. 15 și 12.

Capitolul 14

1. *Indicație.* Înlocuiți în seriile găsite anumite valori numerice ale variabilelor.

2. *Indicație.* La fel.

3. *Răspuns.* (a) $s(x) = e^{\cos x} \cos(x \sin x)$,

(b) $s(x) = e^{\cos x} \sin(x \sin x)$.

4. *Indicație.* Această mulțime precompactă are un singur punct limită.

5. *Indicație.* Aplicați a doua teoremă a mediei (exerc. 3, cap. 9).

6. *Indicație.* Aplicați în mod convenabil soluția exercițiului 5.

7. *Indicație.* Pentru n impar, avem

$$\frac{4}{\pi} b_n = \int_0^{\pi/2} f(t) \sin nt \, dt = \int_0^{\pi/n} f(t) \sin nt \, dt + \int_{\pi/n}^{\pi/2} f(t) \sin nt \, dt$$

și este suficient să demonstrăm că

$$I_1 = \int_0^{\pi/n} f(t) \sin nt \, dt = \frac{\beta_n}{n} f\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad \beta_n \to 2,$$

$$I_2 = \int_{\pi/n}^{\pi/2} f(t) \sin nt \, dt = -\frac{1}{n} f\left(\frac{\pi}{n}\right) + \gamma_n, \quad \sum_1^{\infty} |\gamma_n| < \infty.$$

În primul caz se înlocuiește nt prin τ, în al doilea se integrează prin părți și se aplică teorema mediei și exerc. 16, cap. 7.

8. *Indicație.* Adăugați condiția $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n} f\left(\frac{\pi}{n}\right) = \infty$ condițiilor 1)—4) din exerc. 7. Folosiți exerc. 6.

9. *Indicație.* Puneți sub formă complexă seria Fourier pentru funcția $f(t)$ din exerc. 8.

10. *Indicație.* $(xQ_n, Q_k) = (Q_n, xQ_k)$ și xQ_k, pentru $k < n-1$, este un polinom de grad inferior lui n; prin urmare avem

$$xQ_n(x) = \gamma_{n+1} Q_{n+1}(x) + \gamma_n Q_n(x) + \gamma_{n-1} Q_{n-1}(x) \qquad (1)$$

cu constantele $\gamma_{n+1}, \gamma_n, \gamma_{n-1}$. Comparați coeficienții lui x^{n+1}, x^n și calculați (xQ_n, Q_{n-1}).

11. *Indicație.* Înmulțiți (1) prin $Q_n(t)$. Înlocuind t prin x și x prin t, scădeți identitatea obținută din cea precedentă. Sumați după n.

12. *Indicație.* Prima proprietate decurge din ortogonalitatea pe (1), a doua din ortogonalitatea pe polinomul $\prod_{k=1}^{n} (x - x_k)$ în ipoteza că $x_1, \ldots, x_m$ sînt toate rădăcinile polinomului $Q_n(t)$ și că $m < n$.

Capitolul 15

1. *Indicație.* Aplicați metoda din exerc. 5 și 6, cap. 14.

2. *Indicație.* Folosiți ideea de rezolvare exerc. 8, cap. 14.

3. *Indicație.* Folosiți ideea de rezolvare din exerc. 9, cap. 14.

4. *Indicație.* Verificați afirmația pentru funcțiile din clasa S (15.29 a); apoi pentru funcția $f_N(x)$ care este $f(x)$ pentru $|x| \leqslant N$ și zero pentru $|x| > N$, aproximînd-o prin funcții din clasa S; treceți la limită pentru $N \to \infty$.

5. *Indicație.* Considerați integrala $\int_{-\infty}^{\infty} |tx\varphi(x) + \varphi'(x)|^2 \, dx \geq 0$ ca un trinom de gradul al doilea în raport cu parametrul t.

6. *Răspuns.* $F_1(p) = F(p - a)$, $F_2(p) = pF(p)$,

$$F_3(p) = \frac{1}{p} F(p), \quad F_4(p) = -F'(p), \quad F_5(p) = \int_p^{\infty} F(s)\, ds,$$

unde integrala este luată în lungul unui drum oarecare care se depărtează spre infinit în semiplanul $\operatorname{Re} p > \gamma_0$.

7. *Răspuns.* $\Phi_1(p) = \dfrac{1}{p - a}$, $\Phi_2(p) = \dfrac{\Gamma(\alpha)}{p^{\alpha}}$, $\Phi_3(p) = \dfrac{\Gamma(\alpha)}{(p - a)^{\alpha}}$,

$$\Phi_4(p) = \frac{a}{p^2 + a^2}, \quad \Phi_5(p) = \frac{p}{p^2 + a^2}, \quad \Phi_6(p) = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{a}{p}$$

(pentru $p > 0$).

8. *Indicație.* Puneți $x = e^t$.

Capitolul 16

1. *Indicație.* Pentru elicea $r = \{a \cos t, a \sin t, bt\}$, elicea centrelor de curbură are raza proiecției pe planul orizontal egală cu b^2/a.

2. *Indicație.* Transformările ortogonale ale autocongruenței comută, deci au o bază canonică comună.

3. *Indicație.* Toate raporturile indicate sînt egale cu $ds^{(1)}/ds^{(2)}$.

4. *Indicație.* $S_{m-1} \subset S_m$.

5. Folosiți dezvoltările zecimale ale celor două coordonate ale unui punct dat din pătrat.

BIBLIOGRAFIE

[1] R. Agnew, *Equivalence of methods for evaluation sequences*, Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), 550—562.

[2] G. Alexits, *Convergence problems of orthogonal series*, Pergamon Press, London, 1961.

[3] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Chelsea publ. C.O., New York, 1955.

[4] N. Bourbaki, *Theorie des ensembles*, ch. IV, Hermann, Paris, 1971.

[5] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique*, livre III, Topologie générale, Hermann, Paris, 1972.

[6] M. S. Brodski, *Treugolnie i jordanovi prestavlenia lineinih operatorov*, Nauka, Moskva, 1969.

[7] A. L. Brudno, *Summirovanie ogranicennih posledovatelnostei matriţami*, Matem. sb., tom 16, 1945, pp.191—245.

[8] N. G. Cebotarev, Uspehi Matematiceskih Nauk, 2, 2 (1947), Moskva.

[9] N. G. Cebotarev, *Sobranie socinenii*, tom 1, Izd. AN SSSR, Moskva, 1950.

[10] R. Cooke, *Infinite matrices and sequence spaces*, Macmillan, London, 1950.

[11] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of mathematical physics*, vol. 1, New York — London, 1955.

[12] J. Dieudonné, *Éléments d'analyse*, tome I, ch. IV, Gauthier-Villars, Paris, 1968.

[13] G. M. Fihtengolţ, *Kurs differenţialnovo i integralnovo iscislenia*, tom II, Nauka, Moskva, 1967, cap. 19.

[14] I. M. Gelfand, D. A. Raikov, G. E. Şilov, *Kommutativnie normirovannie kolţa*, Fizmatghiz, Moskva, 1960.

[15] I. M. Gelfand, G. E. Şilov, *Les distributions*, Dunod, Paris, 1962—1967.

[16] I. T. Gohberg, M. G. Krein, *Vedenie v teoriu lineinih nesamosopriajennih operatorov*, Nauka, Moskva, 1965.

[17] I. T. Gohberg, M. G. Krein, *Teoria volterrovih operatorov v hilbertovom prostranstve i prilojenia*, Nauka, Moskva, 1967.

[18] F. Hausdorff, *Mengenlehre*, de Gruyter, Berlin, 1927.

[19] G. H. Hardy, *The Integration of Functions of a Single Variable*, Cambridge University Press, C. F. Clay manage London, Felter Lane E. C., 1916.

[20] A. I. Hincin, *Kratkii kurs matematicescovo analiza*, Nauka, Moskva, 1953, cap. 27.

[21] A. M. Iaglom, *Sluciainie proiesi so stationarnimi prirașceniami*, Uspehi Matematiceskih Nauk, 2, 5(1952).
[22] D. Jackson, *Fourier series and orthogonal polynomials*, Carus Math. Monographs, Oberlin (Ohio), 1948.
[23] St. Kaczmarz, H. Steinhaus, *Theorie des Orthogonalreihen*, Warszawa-Lwów, 1935.
[24] A. G. Kuroș, *Lekții po obșcei algebre* (l. rusă), cap. 5, § 8, Nauka Moskva, 1962.
[25] A. Kuroș, *Cours d'algèbre supérieure*, ch. 5, Ed. Mir, Moscou, 1971.
[26] M. Lavrentiev, B. Șabat, *Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe*, Ed. Mir, Moscou, 1973.
[27] N. N. Luzin, *Funkții* (Sobranie socinenii), 3 (1959), 319—344. Izd. AN SSSR, Moskva.
[28] S. Mandelbrojt, *Cvasianaliticeskie klasî funkții*, Gostehizdat, Moskva, 1936.
[29] A. I. Markușevici, *Kratkii kurs teorii analiticeskih funkții*, Gostehizdat, Moskva, 1957.
[30] A. S. Monin, A. M. Iaglom, *Statisticeskaia hidromehanika*, tom 2, cap. 8, Nauka, Moskva, 1967.
[31] M. A. Naimark, *Normirovannie kolța*, ed. II-a, Nauka, Moskva, 1968.
[32] I. P. Natanson, *Konstruktivnaia teoria funkții*, Moskva—Leningrad, 1949.
[33] P. S. Novikov, *Elementî matematiceskoi logiki*, Fizmatghiz, Moskva, 1959.
[34] V. P. Palamodov, *Lineinie differențialnie operatorî s postoiannimi koeffițientami*, Nauka, Moskva, 1967.
[35] I. G. Petrovski, *Lekții ob uravneniah s ciastnimi proizvodnimi* (cap. II, § 9; cap. III, § 28; cap. IV), Fizmatghiz, Moskva, 1961.
[36] I. I. Privalov, *Teoria funkții kompleksnovo peremenovo*, Moskva, 1966.
[37] V. Smirnov, *Cours de mathématiques supérieures* (3 vol.) Ed. Mir, Moscou, 1970—1972.
[38] G. Springer, *Introduction to Riemann surfaces*, 1957.
[39] G. E. Șilov, *Matematiceskii analiz* (Funkții neskolkih veșcestvenîh peremennîh), Nauka, Moskva, 1972.
[40] G. E. Șilov, *Matematiceskii analiz* (Konecinomernie lineinie prostranstva), Nauka, Moskva, 1969: tradusă în l. română: *Analiză matematică* (Spații finit-dimensionale) Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1983.
[41] G. E. Șilov, B. L. Gurevici, *Integral, mera i proizvodnaia* Nauka, Moskva, 1967, cap. 2—4.
[42] G. E. Șilov, *Matematiceskii analiz* (Pervîi spețialnîi kurs) Fizmatghiz, Moskva, 1961, p. 262.
[43] G. E. Șilov, *Matematiceskii analiz* (Vtoroi spețialnîi kurs) Nauka, Moskva, 1965.
[44] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1953.
[45] V. A. Uspenski, *Lekții o vicislimîh funkțiah*, Moskva, 1960, § 12.
[46] Uspehi Matematiceskih Nauk (UMN), 17, vip. 3, 105(1962), 163—168.
[47] *Filozoficeskii slovar*, Izd. Politiceskii Literaturî, Moskva, 1968.

INDEX DE NOȚIUNI

algebră 567
algebră Gelfand 677
algebră normată 675
alternativa Fredholm 691
argumentul unui număr complex 193
aria unei figuri plane 366, 375
aria unei suprafețe de rotație 383
automorfism de structuri 52

bază canonică a lui $\mathbb{R}_n$ 59
bază jordaniană 566
bază naturală 870
bază ortonormată 612
bilă deschisă (sferă plină) 77

celulă 330
centru de curbură 870
cerc osculator 870
clasă de echivalență 555
clasă, S, W_M 825, 827
compact încărcat 331
completatul unui spațiu 601, 615
condiția Dini 763
condițiile Cauchy-Riemann 428
contracție 717
convergență uniformă 209
convoluție 525
coordonate polare 192, 198
corespondență bijectivă 45
criteriul Abel-Dirichlet 529
criteriul Cauchy 129, 211, 220, 522
criteriul D'Alembert 219
criteriul Leibniz 223
criteriul Weierstrass 599
curbă integrală 701
curbură 868

definiția axiomatică a integralei 421
derivarea sub integrală 406
derivarea șirurilor de funcții 401
derivata 256, 636
derivata unei funcții inverse 261
derivata la stînga (dreapta) 265
derivată de ordin superior 285, 426, 647
determinantul Wronski 736
diametrul unei mulțimi 76
diferențiala 271, 427, 637
diferențiala unei funcții compuse 271
diferențiale de ordin superior 297, 647
direcție 121
distanță 74
domeniu conex 424
domeniu simplu conex 442
dreapta numerică (reală) 28
dreapta reală încheiată $\overline{\mathbb{R}}$ 29
drum 410

ecuația caracteristică 712
ecuația Laplace 432
ecuații naturale 878
elice 883
exponențiala complexă 301

formula de inversare a transformării Fourier 805

formula de inversare a transformării Laplace 834
formula integrală Cauchy 445
formula Leibniz 285
formula Leibniz-Newton 338
formula Stirling 542
formula Taylor 288, 356
formulele Euler 303
formulele Frénet 870
frontieră 333
funcție analitică 424
funcție armonică 432
funcție complexă 200
funcție continuă 156
funcție convexă 275
funcție derivabilă 256
funcție integrabilă 315
funcție inversă 168
funcție întreagă 453
funcție mărginită 132
funcție monotonă 167
funcție netedă pe porțiuni 342
funcție numerică 70
funcție olomorfă 424
funcție omografică 473
funcție periodică 188, 304
funcție uniform continuă 160
funcție vectorială 70
funcții armonic conjugate 432
funcțiile Beta și Gamma 530
funcțională liniară 577, 652

grad 187
graficul unei funcții 70

homeomorfism 86
homomorfism 556, 569

închiderea unei mulțimi 99
inegalitatea Bessel 750
inegalitatea Cauchy 62
inegalitatea patrulaterului 75
inegalitatea triunghiului 74
inegalitatea Young 377
integrala (Riemann) 314
integrala curbilinie 432
integrala Stieltjes 410
integrale convergente, divergente 487
integrale eliptice 351
integrale Fourier 509
integrale improprii 486
integrale multiplicative 715
integrale cu paramteri 403, 518
integrarea șirurilor de funcții 397
izometrie 78
izomorfism 52, 556

lema acoperirii finite 117

lema Jordan 511
lema paralelogramului 608
limita după o direcție 121, 145
limita generalizată 670
limita în sens Cesaro 670
limita inferioară, superioară 148
limita șirurilor de funcții 208
lungimea unui arc de curbă 335, 377, 864
majorant, margine inferioară, superioară 20, 29
matrice jordaniană a unui operator 566
măsură Jordan 332
media integrală 320
metrica unui spațiu 74
morfism 556, 569
multiplicitate 205
mulțime absolut convexă 604
mulțime densă 98
mulțime deschisă 80
mulțime de puterea continuului 51
mulțime echicontinuă de funcții 580
mulțime echilibrată 591
mulțime majorată, minorată, mărginită 20, 28, 31
mulțime numărabilă 46
mulțime precompactă 582
mulțime total ordonată 52
mulțimi echipotente 45
norma unui vector 61, 587
norme echivalente 593
nucleul Dirichlet 767
nucleul Fejér 791
nucleul Poisson 785
numărul e 180
numere transcendente 51

operator compact 687
operator integral Fredholm 561, 691
operatorul integral Volterra 693
operator de proiecție 660
operator rezolvant 723
oscilația unei funcții 162, 640

plan oscilator 862

pol 466
polinoame ortogonale clasice (Legendre, Laguerre, Cebîşev) 796, 800
polinomul Taylor 290
prelungire analitică 301
primitivă 337
principiul lui Arhimede 32
principiul lui Cantor 38
principiul Picard-Banach de punct fix 717
produs cartezian 70
produs de convoluţie 525
produs scalar 61
proiector 660
punct de acumulare 94
punct de condensare 119
punct de continuitate 156
punct de extrem local 270
punct de inflexiune 275
punct izolat 107
punct singular izolat 465
punctele Valiron 843

rază de convergenţă 246
rază vectoare 857
restul formulei Taylor 290
reziduu 457
reziduu logaritmic 461

seria armonică 222
serie absolut convergentă 225
serie convergentă, divergentă 216
serie Fourier 750
serie de funcţii 243
serie numerică 216
serie de puteri 245
serie semiconvergentă 225
serie Taylor 298
serie de vectori 234
sferă deschisă plină (bilă deschisă), sferă închisă 76
sistem fundamental de soluţii 736
sistem ortonormal de vectori 612
soluţie, soluţie generală 699
spaţiu Banach 587
spaţiu compact 111
spaţiu dual 662
spaţiu Hilbert 605, 613
spaţiu local compact 112
spaţiu metric 74
spaţiu precompact 113
spaţiu real n-dimensional 58
spaţiu separabil 517
spectru 570
spectrul unui element 678
spectrul unui operator compact 689
spirala Wiener 888
structură matematică 51
suma unei serii 216, 227
suprafaţă Riemann 477

şir Cauchy 101
şiruri cofinale 108
şir convergent 101
şir delta reprezentativ 626
şir de funcţii 208
şir uniform convergent 210

teorema Abel 248
teorema Arzelà 580
teorema Baire 106
teorema Banach 658
teorema Banach-Steinhaus 663
teorema Bolzano-Weierstrass 95, 165
teorema Cantor 50
teorema Carleman-Ostrowski 845
teorema Cauchy 442
teorema Darboux 281
teorema Dirichlet 231
teorema Fejér 789
teorema Hausdorff 108, 114
teorema Louville 453
teorema Nikolski 792
teorema Pitagora 67, 610
teorema Riemann 232
teorema Riesz 588
teorema Rolle 272
teorema Stone 622
teorema Weierstrass 159, 624
teorema reziduurilor 460
torsiunea unei curbe 872
transformarea Abel 237
transformarea Fourier 805
transformarea Laplace 830
transformare ortogonală 197

valoare de aderenţă 140, 147
valoare proprie 560
vecinătate 77
vector de curbură 867
vectori ortogonali 64, 609
vector propriu 560
volum 332

zero al unei funcţii analitice 452