MINISTERUL ÎNVĂȚĂMÎNTULUI ȘI CULTURII
INSTITUTUL DE ȘTIINȚE PEDAGOGICE

LEGAREA TEORIEI DE PRACTICĂ ÎN STUDIUL MATEMATICII

(Culegere de articole)

EDITURA DE STAT DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
1958

Pentru a veni în sprijinul profesorilor de matematică — în special al celor mai tineri — Institutul de științe pedagogice publică această culegere de articole. Prezenta lucrare conține experiența și concluziile, la care au ajuns unele cadre didactice cu o activitate mai îndelungată în realizarea unei legături mai strînse între disciplinele matematicii și practică. Fiind vorba de o culegere, desigur că lucrarea nu poate să lămurească absolut toate problemele respective. Cu toate acestea socotim că autorii au izbutit să răspundă, în bună parte, principalelor sarcini ridicate de cerințele realizării învățămîntului politehnic în cadrul cursului de matematică.

Experiența prezentată de autori a fost verificată de către cercetătorii Institutului în școli. Observațiile recenzenților de specialitate au contribuit mult la îmbunătățirea articolelor.

Institutul de științe pedagogice roagă cadrele didactice să comunice observațiile și sugestiile lor în legătură cu folosirea acestei lucrări.

CONTRIBUȚIA MATEMATICII LA REALIZAREA SARCINILOR ÎNVĂȚĂMÎNTULUI POLITEHNIC

M. SCHEIN
Școala medie nr. 22,
BUCUREȘTI

Directivele Congresului al II-lea al Partidului Muncitoresc Romîn cu privire la cel de-al II-lea plan cincinal de dezvoltare a economiei naționale cer școlii de cultură generală să ridice necontenit nivelul învățămîntului, acordînd cea mai mare atenție legării învățămîntului de viață, de activitatea productivă. Școala trebuie să dea elevilor cunoștințe temeinice cu privire la bazele științei și producției moderne, să-i înarmeze cu deprinderea de a aplica aceste cunoștințe în cele mai variate ramuri de activitate.

Matematica fiind unul din obiectele de bază în școala de cultură generală, ocupă un loc deosebit de important în procesul de instruire și educare a elevilor. Dacă sînt predate în mod sistematic, ținîndu-se seama de particularitățile de vîrstă ale elevilor, dacă sînt însușite în mod conștient, temeinic, cunoștințele de matematică aduc o contribuție deosebită la dezvoltarea gîndirii logice a elevilor. Ele ajută pe elevi să-și formeze o concepție științifică despre lume, le pun la îndemînă unul dintre cele mai puternice instrumente pentru studierea fenomenelor naturii, a legilor ei.

Studiul matematicii în școala de cultură generală își poate atinge scopul pe deplin numai dacă este strîns legat de viață, de activitatea practică, dacă elevii iau cunoștință de aplicațiile ei multiple în cele mai variate ramuri de activitate, dacă ei înșiși pot să aplice cunoștințele de matematică în viață.

Ca orice altă știință, matematica are drept obiect studiul realității obiective. Ea s-a născut din necesitățile practice ale oamenilor și s-a dezvoltat treptat, răspunzînd diferitelor probleme ridicate de activitatea practică, de mecanică, de fizică, astronomie, de diferitele probleme tehnice ale vieții economice. „Obiectul matematicii pure — spune Engels — sînt formele spațiale și relațiile cantitative ale lumii reale, adică un material

foarte real. Faptul că acest material apare într-o formă extrem de abstractă nu poate să ascundă decît superficial proveniența lui din lumea exterioară" (F. Engels Anti-Dühring, Ed. P.M.R. 1952, ed. a II-a, pag. 46—47). Chiar și acele ramuri ale matematicii care s-au dezvoltat fără a avea o legătură nemijlocită cu practica, și-au găsit mai tîrziu aplicații importante în practică.

A studia deci matematica în școala de cultură generală rupînd-o de aplicațiile ei numeroase și variate înseamnă, de fapt, a studia matematica numai în mod formal.

Unii profesori de matematică, recunoscînd necesitatea legării matematicii de viață, de aplicațiile ei, consideră că aceasta se realizează de la sine, că elevii înșiși învață treptat să aplice cunoștințele lor în practică. Dar elevii, nu pot învăța aceasta decît dacă legarea matematicii de viață constituie o preocupare permanentă a profesorului începînd chiar cu clasele elementare, decît dacă acesta îi deprinde să folosească în viață, în activitatea productivă cunoștințele însușite în clasă. De altfel chiar însușirea deplină a cunoștințelor teoretice de matematică nu poate fi asigurată fără o legătură strînsă a acestora cu aplicațiile lor.

Înarmarea tinerei generații cu cunoașterea principiilor științifice de bază ale producției contemporane, cu priceperea de a mînui unelte este o parte integrantă a muncii de instruire a tinerei generații, a creșterii necontenite a nivelului de pregătire al tuturor membrilor societății.

Problema învățămîntului politehnic constituie o parte componentă a învățăturii marxiste despre construirea societății socialiste. În soçietatea socialistă, unde întreaga economie se dezvoltă în mod planificat, cu participarea maselor largi și în interesul lor, oamenii trebuie să fie multilateral dezvoltați, capabili de a se orienta în întreg sistemul de producție. Încă la sfîrșitul secolului trecut, dezvoltînd învățătura marxistă despre rolul educației în societatea socialistă, Lenin arăta că numai învățămîntul legat de munca productivă poate face față cerințelor pe care le ridică tehnica modernă și marile cuceriri ale științei. Tocmai de aceea hotărîrea partidului și a guvernului cu privire la îmbunătățirea învățămîntului de cultură generală din țara noastră consideră realizarea învățămîntului politehnic ca una dintre sarcinile cele mai importante ale școlii, menită să contribuie în cea mai mare măsură la ridicarea calității învățămîntului.

Alături de fizică și de chimie, de științele biologice, de geografie și desen, matematica constituie una dintre disciplinele de bază ale învățămîntului politehnic. Așa se explică faptul

că Hotărîrea stabileşte o serie de măsuri importante privind îmbunătăţirea studiului matematicii în şcoala de cultură generală, ridicarea acestui studiu la un nivel cît mai înalt; introducerea în programa de matematică a elementelor de matematici superioare, de geometrie analitică, de calcul diferenţial şi integral etc. Aceasta îi va ajuta pe elevi să înţeleagă mai adînc bazele ştiinţei şi tehnicii moderne, îi va pregăti mai bine pentru viitoarea lor activitate practică.

* * *

Căile de realizare a învăţămîntului politehnic în predarea matematicii sînt numeroase, începînd de la studiul bazelor producţiei moderne şi pînă la însuşirea de către elevi a unor deprinderi şi priceperi practice. Studiind aspectele cantitative ale obiectelor şi fenomenelor lumii reale, formele ei spaţiale, matematica nu este legată de producţie în acelaşi mod în care sînt legate, de pildă, fizica, chimia sau biologia. În predarea matematicii nu există, de aceea, posibilitatea de a-i familiariza pe elevi nemijlocit cu desfăşurarea proceselor de producţie, în măsura în care aceasta se realizează în predarea fizicii, a chimiei, sau a biologiei. De asemenea, în predarea matematicii există posibilităţi reduse în ceea ce priveşte înarmarea elevilor cu priceperea de a mînui unelte, de a lucra la maşini etc. Cu toate acestea, studiul matematicii aduce o contribuţie deosebit de mare la realizarea învăţămîntului politehnic, prin aceea că ajută, înlesneşte înţelegerea bazelor producţiei moderne şi îi înarmează pe elevi cu deprinderi şi priceperi absolut necesare în viaţa de toate zilele ca şi în orice domeniu al producţiei. Cunoştinţele de matematică sînt absolut necesare în studierea legilor naturii, în înţelegerea proceselor tehnice, în proiectarea şi folosirea maşinilor. Fără matematică, aproape că nu mai este posibilă astăzi nici o descoperire în domeniul ştiinţei. Inginerii, tehnicienii, maiştrii şi montorii calificaţi, agronomii, feroviarii, statisticienii, contabilii — toţi au nevoie de matematică pentru a-şi putea îndeplini bine meseria. Iată, aşadar, fiecărui elev îi sînt necesare cunoştinţe temeinice de matematică, strîns legate de viaţă.

Oricare ar fi căile concrete prin care profesorul de matematică asigură legătura între cunoştinţele de matematică şi activitatea productivă, această legătură trebuie să se realizeze numai pe baza unui studiu sistematic, temeinic al disciplinelor matematice. Realizarea învăţămîntului politehnic în cadrul predării matematicii, presupune în primul rînd ridicarea nivelului ştiin-

ţific al lecţiilor, perfecţionarea măiestriei pedagogice. Orice ştirbire adusă nivelului ştiinţific al cunoştinţelor predate şi expunerii lor metodice nu poate decît să dăuneze pregătirii elevilor şi realizării învăţămîntului politehnic în cadrul acestui obiect.

* * *

În vederea apropierii studiului matematicii de necesităţile practicii, este necesar să se acorde o atenţie mai mare, în cadrul predării lecţiilor, unor teme care îşi găsesc o largă aplicare în producţie. La aritmetică, de pildă, este necesar a se insista (fără a se neglija celelalte teme) asupra calculului cu procente, asupra mărimilor proporţionale, asupra alcătuirii unor diagrame şi grafice simple etc. Cu prilejul studierii procentelor trebuie rezolvate probleme cu conţinut practic privind cele mai variate ramuri de activitate. Pe lîngă problemele din culegerile de aritmetică, sînt deosebit de utile, în această privinţă şi problemele alcătuite de profesor pe baza unor date culese din ziare, reviste, sau direct de la întreprinderi, gospodării agricole colective şi de stat, date care reflectă realizările obţinute în dezvoltarea economiei noastre naţionale. Asupra calculului cu procente este necesar a se reveni şi mai tîrziu, cu prilejul rezolvării unor probleme de algebră, de geometrie şi de trigonometrie.

Strîns legat de realizarea învăţămîntului politehnic este studiul mărimilor proporţionale, deoarece el se referă la două forme de dependenţă funcţională în legătură cu care se pot rezolva numeroase probleme cu conţinut practic. Elevii trebuie să capete o ideie clară de ceea ce se înţelege prin mărimi direct proporţionale, prin mărimi invers proporţionale şi mărimi neproporţionale.

Alcătuirea diagramelor şi graficelor la aritmetică trebuie să dea elevilor posibilitatea de a înţelege mai bine relaţiile între diferite mărimi. Aplicarea largă a acestora în producţie necesită să li se acorde o atenţie tot mai mare. În predarea algebrei este util să se insiste mai mult asupra determinării valorii numerice a unei expresii algebrice, asupra alcătuirii unor tabele care să cuprindă valorile numerice ale literelor care alcătuiesc expresiile şi valorile respective ale acestora.

Larga aplicaţie în producţie şi în cercetările ştiinţifice a funcţiilor şi graficelor lor, impun ca în predarea matematicii să se acorde toată grija predării acestei teme, chiar înainte de introducerea elementelor de matematici superioare.

Elevii trebuie să aibă o idee cît mai clară asupra dependenţii funcţionale între diferite mărimi variabile, să ştie să

execute graficele unor funcții, să folosească aceste grafice pentru înțelegerea mai adîncă a fenomenelor studiate.

Dacă cei mai mulți profesori de matematică stăruie, în predare, asupra funcțiilor și graficelor, trebuie recunoscut faptul că în unele școli studiul acestei teme nu se desfășoară încă la un nivel corespunzător. În aceste școli elevii capătă doar cunoștințe destul de vagi asupra ideii de dependență funcțională, cu prilejul studierii capitolelor speciale din programă (funcțiile liniară, cuadratică, logaritmică, exponențială și trigonometrică), accentuîndu-se mai mult asupra reprezentării grafice a funcțiilor respective. Atenția este într-atît îndreptată asupra reprezentărilor grafice, încît elevii le execută mai mult sau mai puțin mecanic și nu le folosesc pentru a cunoaște mai bine dependența funcțională pe care le ilustrează, nu rezolvă aproape de loc probleme în legătură cu funcțiile. Cunoștințele elevilor despre funcții și grafice rămîn izolate, nelegate de întreg cursul de matematică. Și mai slabă este legătura care se stabilește între studiul funcțiilor și aplicațiile lor în fizică, mecanică etc.

Articolul profesorului Hollinger, arată că în însușirea funcțiilor și a graficelor se obțin rezultate mai bune dacă studiul acestora este introdus treptat, chiar din primele clase, la început sub o formă pregătitoare, urmînd ca mai tîrziu, la algebră să se trateze mai adînc și mai sistematic. Ideea de dependență funcțională poate fi introdusă la început ușor chiar la aritmetică, în legătură, de pildă, cu proprietățile operațiilor aritmetice, în legătură cu studiul mărimilor proporționale, cu rezolvarea problemelor etc. La algebră aceasta se poate realiza de la început, în legătură cu numerele relative, cu calcularea valorii numerice a unei expresii algebrice. Această perioadă de pregătire dă elevilor posibilitatea ca, atunci cînd trec la studiul propriu-zis al funcțiilor și graficelor, să pătrundă mai adînc, mai temeinic aceste cunoștințe. Culegerea de probleme de algebră de P. A. Laricev[1] cuprinde, chiar de la primele capitole de algebră, numeroase probleme de acest fel, care urmăresc să introducă treptat ideea de dependență funcțională[2].

O dată cu trecerea la studiul propriu-zis al funcțiilor este necesar ca acestea să fie tratate, nu numai cu prilejul capitolelor respective, ci să se revină asupra lor ori de cîte ori se ivește

[1] Culegere de probleme de algebră pentru cl. a VI/ și a VII-a de P. A. Laricev, tradusă din limba rusă (Ed. de Stat didactică și pedagogică 1956).

[2] Problemele 67, 156, 163, punctul 9, 229, 241, 264, 267, 666, 669, 822, 1018 etc.

prilejul. Culegerea de probleme pentru clasele VIII—X de P. A. Laricev[1] cuprinde un mare număr de probleme referitoare la funcţii şi la grafice. Este de remarcat faptul că aceste probleme se referă şi la alte capitole decît la acele referitoare la funcţii şi grafice, cum sînt cele cu privire la puteri şi radicali, sisteme de ecuaţii de gradul II, inecuaţii de gradul I şi II etc. Este deosebit de utilă rezolvarea unor probleme care cer elevilor să apeleze la tabele (ex. nr. 144), îl pun în situaţia de a trage unele concluzii interesante cu privire la o funcţie pe baza graficului ei în domeniul de existenţă al funcţiei, intervalele de creştere şi de descreştere ale funcţiei etc. (problema nr. 697), sau în care se cere să se determine funcţia pe baza graficului ei (problema nr. 1465).

În clasele VIII—X ideea de dependenţă funcţională se poate fixa cu mult succes cu prilejul rezolvării problemelor. În acest sens, deosebit de utile sînt problemele de maxim şi minim care pot fi introduse pe baza cunoştinţelor de matematici elementare pe care le au elevii, urmînd ca mai tîrziu în clasa a XI-a, să se acorde problemelor de acest fel o atenţie şi mai mare, cu atît mai mult cu cît elevii se vor putea folosi şi de cunoştinţele de matematici superioare. Problemele de maxim şi minim se pot rezolva cu prilejul studierii trinomului de gradul II. Profesorul poate însă să extindă mult volumul acestor probleme, dacă în clasă se demonstrează în prealabil teoremele cunoscute: dacă suma a două mărimi pozitive variabile este constantă, atunci produsul lor are valoarea maximă, cînd aceste mărimi devin egale, sau: dacă produsul a două mărimi pozitive variabile este constant, atunci suma lor are valoarea minimă cînd ele devin egale.

Problemele de maxim şi minim trebuie alese astfel, încît conţinutul lor să fie legat cît mai mult de aplicaţii practice. Totodată, ele trebuie să constituie un prilej pentru studiul funcţiilor şi al graficelor.

Este deosebit de important, ca elevii să înţeleagă că la studiul funcţiilor ne conduce studiul unor procese din natură sau din tehnică.

* * *

Una din căile esenţiale de legare a studiului matematicii de practică, de viaţă o constituie scoaterea în evidenţă a felului cum adevărurile stabilite în matematică sînt aplicate în celemai

[1] Culegere de probleme de algebră pentru clasele VIII — X de P. A. Laricev, tradusă din limba rusă (Ed. de Stat didactică şi pedagogică 1953).

variate domenii de activitate. Elevii trebuie să înțeleagă clar de ce este necesară o anumită formulă sau teoremă și unde se poate ea aplica. Desigur că unele adevăruri stabilite în matematică nu-și găsesc imediat aplicație practică, ele fiind necesare pentru stabilirea altor adevăruri. În orice caz, însă, acolo unde este posibil, acolo unde profesorul dispune de material, el trebuie să ilustreze aplicarea propozițiilor matematice în practică. Fiecare disciplină a matematicii dă profesorului prilejul de a arăta elevilor necesitatea introducerii unor noțiuni în matematică, ce aplicații practice au unele formule, teoreme etc.

Aceasta se poate asigura uneori la început, înainte de a se trece la demonstrarea teoremei noi, cu scopul de a stimula interesul elevilor pentru adevărul ce trebuie demonstrat. Alte ori, legătura dintre cunoștințele teoretice și aplicațiile lor practice, poate fi stabilită mai tîrziu, după demonstrarea lor.

Iată cîteva exemple: cu prilejul studierii criteriilor de egalitate a triunghiurilor, la criteriul al III-lea li se poate vorbi elevilor despre construirea unor suporturi triunghiulare la poduri, mașini etc., pe baza proprietății numite „rigiditatea triunghiului" și care, în fond, se reduce la aceea că un triunghi este perfect determinat prin cele trei laturi ale sale. Li se poate arăta elevilor că nici un alt poligon nu are această proprietate.

Vorbindu-li-se elevilor despre simetrie este util să li se dea cît mai multe exemple de figuri simetrice existente în practică, în construcțiile tehnice (elicea avionului).

La capitolul despre patrulatere li se poate vorbi elevilor despre larga lor răspîndire în activitatea practică datorită proprietăților lor. Dreptunghiul, bunăoară, este mult folosit în construcții, în parcelarea terenurilor etc.

Cu prilejul studierii sumei unghiurilor interioare ale unui poligon convex, este bine să li se arate elevilor și cum se ridică un teren prin ocolirea lui. (Vezi articolul profesorului Cornel Săsăran publicat în lucrarea de față).

Cu privire la poligoane, elevii trebuie să cunoască o proprietate interesantă a unora din ele, care constă în aceea că se poate acoperi perfect o suprafață (parchetare cu triunghiuri echilaterale, cu pătrate sau cu exagoane regulate). Elevilor trebuie să li se vorbească cu prilejul studierii cercului, despre sistemul de transmisie, despre trecerea lentă de pe un arc pe altul, de pe un cerc pe o dreaptă, atît de utilă în proiectarea drumurilor, desenarea pieselor etc., despre „unghiul de pericol", în legătură cu arcul capabil de un unghi dat etc.

La geometria în spațiu, cu prilejul studierii diferitelor corpuri li se poate arăta elevilor importanța practică a unor proprietăți studiate, a formulelor.

* * *

Faptul că fiecare disciplină a matematicii se predă în școală în mod separat nu înseamnă că între cunoștințele respective nu trebuie să se stabilească în cursul predării o legătură cît mai strînsă.

La examenele de absolvire a școlii medii și la concursurile de admitere în facultăți, s-a constatat că numeroși candidați care răspund mulțumitor la diferite discipline luate separat, întîmpină greutăți de îndată ce sînt puși în situația de a îmbina toate cunoștințele pe care le au la matematică, pentru a rezolva o problemă complexă. Dar practica cere adesea împletirea cunoștințelor din diferitele discipline ale matematicii. În activitatea practică se ivesc diferite probleme în care trebuie aplicate concomitent cunoștințe de algebră, geometrie, trigonometrie etc. Oare în activitatea practică se impune ca o problemă să fie rezolvată numai pe cale aritmetică sau numai pe cale algebrică? De aceea elevii trebuie obișnuiți ca în rezolvarea problemelor să facă apel la toate cunoștințele pe care le au, alegînd pentru rezolvare căile cele mai raționale, metodele cele mai simple, care duc cît mai repede și mai ușor la rezultat.

Este necesar să se stabilească o legătură cît mai strînsă nu numai între diferitele discipline ale matematicii ci și între cunoștințele de matematică și acelea studiate la alte obiecte. În această privință legătura cea mai strînsă poate fi stabilită în special cu fizica. Aproape în toate capitolele de fizică se pot găsi numeroase probleme care-i pun pe elevi în situația de a aplica variate cunoștințe de matematică. Pe baza unor probleme de fizică se pot adînci și fixa cunoștințele elevilor cu privire la studiul funcției liniare, al trinomului de gradul II, al funcțiilor trigonometrice, se pot executa diferite grafice. Rezolvînd probleme de fizică elevii reușesc de multe ori să-și lămurească o serie de chestiuni pe care le sezisează mai greu dacă au de rezolvat numai probleme abstracte, rupte de un conținut practic. Problemele de fizică ne dau un material variat pentru fixarea cunoștințelor pe care și le-au însușit elevii, în legătură cu aflarea valorii numerice a unei expresii algebrice, în legătură cu transformările identice operației prescurtate, cu descompunerea în factori, cu rezolvări de ecuații, inecuații etc. În problemele de fizică elevii au posibilitatea de a aplica numeroase cunoștințe de geometrie, de trigonometrie etc. De

pildă, rezolvarea unei probleme simple ca aceea în care se cere să se determine forța necesară menținerii unei greutăți date și a forței de apăsare pe un plan înclinat de lungime și înălțime date, necesită aplicarea unor cunoștințe în legătură cu asemănarea triunghiurilor dreptunghice, cu teorema lui Pitagora etc.

Pornind de la exemple din fizică, elevii pot înțelege mai bine caracterul specific pe care îl are matematica în studierea legilor naturii. Li se poate arăta, de pildă, că matematica reușește să reducă studiul unor fenomene atît de variate ca dependența lungimii unei bare de temperatura la care este încălzită, dependența volumului de temperatură (presiunea constantă), dependența dintre presiune și temperatură (la un volum constant), dependența dintre viteză și timp la o mișcare uniform accelerată etc., la studiul funcției liniare $y = mx + n$, tocmai pentru că ea studiază relațiile cantitative dintre aceste fenomene.

În articolul profesorului Gh. Popescu din Lugoj, sînt date interesante indicații și exemple cu privire la aplicarea cunoștințelor de matematică în rezolvarea unor probleme de fizică, care se referă la diferite clase și la capitole variate de matematică. Tov. Popescu folosește cunoștințele de fizică ale elevilor atît pentru introducerea unor cunoștințe noi de matematică, cît și pentru fixarea lor.

Deosebit de utile pentru cititori pot fi cele două anexe la articolul tov. Popescu. Prima anexă cuprinde numeroase probleme de fizică, clasificate conform temelor de matematică la care ele se referă mai mult: funcții și grafice, progresii, ecuații de gr. I, ecuații de gr. II, discuția ecuațiilor de gr. II și studiul trinomului de gr. II, ecuații trigonometrice, sisteme de ecuații trigonometrice etc. sînt date și probleme prin schițe. A doua anexă cuprinde soluțiile unora dintre problemele propuse.

O legătură strînsă poate fi stabilită și între cunoștințele de matematică și cele de astronomie, de chimie, de geografie, de desen.

În articolul profesorului Adolf Lincker din lucrarea de față sînt date unele observații interesante în legătură cu executarea desenelor în rezolvarea problemelor de geometrie.

* * *

O altă cale esențială care contribuie la apropierea studiului matematicii de necesitățile practicii o constituie dezvoltarea la elevi a unor deprinderi temeinice de calcul.

Calculele, începînd de la cele mai simple și pînă la cele mai complexe, se folosesc în toate ramurile de activitate. Este evi-

dent, deci, că elevul trebuie să capete în școală priceperea de a efectua calcule exact, în mod rațional și pe cît este posibil mai rapid.

După felul cum sînt efectuate, calculele pot fi: orale, în scris, sau cu ajutorul unor tabele, instrumente, mașini etc. Desigur însă că în practică aceste forme se împletesc, în funcție de greutatea calculelor, de pricepere acelùia care le efectuează, de mijloacele pe care le are la dispoziție.

Trebuie recunoscut faptul că în multe școli se acordă puțină atenție calculului oral și foarte puțină atenție calculului cu ajutorul unor tabele și instrumente. Destui elevi fac greșeli de calcul, care presupun ignorarea unor cunoștințe teoretice și o lipsă de deprinderi de calcul. Nu întotdeauna se folosesc căile cele mai raționale de calcul.

Cu toate că școala nu are drept scop să pregătească specialiști calculatori, este totuși necesar ca elevii să învețe să efectueze calcule cu pricepere și ușurință în scris și oral și să se familiarizeze cu unele mijloace auxiliare de calcul, cum sînt tabelele, rigla de calcul etc.

O mare însemnătate pentru practică o are calculul oral.

În unele școli, însă, acesta este folosit nu în mod sistematic, ci mai mult întîmplător. În dorința de a-i înarma pe elevi cu diferite procedee de calcul oral, unii profesori au trecut această temă aproape cu totul în cadrul cercurilor de matematică ale elevilor. Aceasta, pe lîngă faptul că-i lipsește pe unii elevi, neparticipanți la cerc, de posibilitatea de a-și dezvolta tehnica de calcul oral, mai prezintă și dezavantajul că le dă elevilor într-un timp scurt numeroase procedee de calcul, care de cele mai multe ori nu sînt apoi fixate prin exerciții.

Însușirea tehnicii calculului oral trebuie asigurată în primul rînd în cadrul lecțiilor și numai completată în cadrul cercurilor. Introducerea diferitelor procedee de calcul oral trebuie să se realizeze treptat, cu prilejul studierii fiecărei operații de bază. Studiind, de pildă, adunarea, scăderea etc., profesorul poate indica elevilor diferite procedee de calcul oral.

Este esențial însă ca, o dată învățate, aceste procedee să fie folosite ori de cîte ori se ivește prilejul. Este lipsit de sens, de pildă, ca la algebră elevul să învețe cum se poate calcula rapid diferența a două pătrate, iar mai tîrziu să nu se folosească acest procedeu cînd are de calculat, de exemplu, $\sqrt{19^2 - 9^2}$, pentru a determina cateta unui triunghi dreptunghi.

Calculul oral trebuie folosit nu numai la aritmetică, ci la toate disciplinele matematicii.

În calcule trebuie să se urmărească nu numai precizia, ci și rapiditatea. Aceasta se realizează îndeosebi prin tabele, instrumente de calculat, mașini de calculat. Sînt cunoscute succesele obținute în construirea unor mașini de calcul extrem de perfecționate, care pot executa mii de operații pe secundă. În cadrul cercurilor de matematici li se pot da elevilor unele cunoștințe referitoare la aceste mașini. Este deosebit de util să se organizeze vizite la unele întreprinderi unde există mașini de calculat. Un mijloc de calcul accesibil elevilor și foarte des utilizat în practică îl constituie tabelele. Este regretabil că unii profesori nu acordă suficientă atenție folosirii acestora. De obicei se folosesc în școli numai tabele de logaritmi și tabele trigonometrice. Este necesar însă ca elevii să fie obișnuiți să folosească și alte tabele, ca acele referitoare la calculul procentelor și al raporturilor procentuale, la calculul pătratelor și cuburilor numerelor, la valorile inverse pentru rădăcinile pătrate și cubice, la multiplii lui π etc.

Este necesar ca elevii să învețe să folosească metoda grafică pentru rezolvarea unor ecuații, a unor sisteme de ecuații. În tehnică se folosește adesea metoda grafică de rezolvare a diferitelor probleme practice pe bază nomogramelor, care ne permit să găsim rapid rezultatele diferitelor calcule. Aceasta ar putea constitui o temă interesantă pentru cercul de matematici al elevilor. Tot în cadrul cercului elevii pot să capete priceperea de a folosi și rigla de calcul.

În activitatea practică se obișnuiește deseori ca, înainte de a se trece la efectuarea unor calcule, să se evalueze rezultatul care trebuie obținut. Aceasta va da posibilitatea de a aprecia apoi dacă în timpul efectuării lucrărilor nu au fost făcute unele greșeli grosolane. În cazul cînd evaluarea se face și pentru unele rezultate parțiale, pe parcurs, putem evita de a continua calculele în cazul cînd s-au făcut unele greșeli mai mari. Este util ca elevii să învețe cum trebuie făcute astfel de evaluări, atît de utile în activitatea practică. Evaluarea prealabilă a rezultatului se poate face pe cale orală sau, în parte, în scris, cînd dorim să obținem un rezultat mai aproape de cel adevărat. Iată un exemplu:

Înainte de a se calcula $50\frac{10}{11}\cdot 61{,}6 - 29{,}16\cdot 100$,

o primă evaluare a rezultatului poate fi:

$$50\frac{10}{10}\cdot 61{,}6 \approx 50\cdot 60 = 3000$$
$$29{,}16\cdot 100 \approx 2900$$
$$3000 - 2900 = 100$$

A doua evaluare a rezultatului mai apropape de cel adevărat este:

$$50\frac{10}{11} \cdot 61{,}6 \approx 51 \cdot 62 \approx 50 \cdot 63 \approx 3150$$

$$29{,}16 \cdot 100 \approx 2920$$

$$3150 - 2920 = 230$$

Elevii trebuie să capete priceperea de a face astfel de evaluări cu prilejul studierii treptate a diferitelor operații.

În vederea apropierii studiului matematicii de necesitățile practicii este absolut necesar să se acorde mai multă atenție operațiilor cu numere aproximative. În practică, problemele care sînt legate mai ales de efectuarea unor măsurători, nu pot fi rezolvate în mod rațional fără a se lua în considerație regulele de calcul aproximativ. Numerele aproximative apar în activitatea practică din măsurători, din valorile luate din tabele. Operațiile cu astfel de numere sînt, cum este și firesc, numere aproximative și, deci, la stabilirea rezultatului final este necesar a se lua în considerație regulele de calcul aproximativ.

O importanță deosebită o are în special rotunjirea rezultatelor operațiilor. Este neapărat necesar ca elevii să capete în școală, treptat, cu prilejul studierii diferitelor operații, cunoștințele necesare în această direcție.

În articolul profesorului S. Ghițescu publicat în lucrarea de față sînt date pe baza experienței sale și a unor colegi de la școala unde lucrează, unele rezultate cu privire la dezvoltarea tehnicii de calcul la elevi. Articolul indică numeroase procedee de calcul rapid, cu privire la operații cu numere întregi, fracții ordinare, cu procente. De asemenea, el cuprinde date cu privire la introducerea în cadrul predării aritmeticii a calculelor cu numere aproximative.

Materialul pe care îl dă tov. Ghițescu poate fi util atît pentru lecțiile de aritmetică cît și pentru cercurile de matematică ale elevilor. Profesorii de matematică vor completa, desigur, diferitele procedee de calcul oral și la alte discipline (algebră, trigonometrie etc.).

Dezvoltarea tehnicii de calcul în general, este legată de alegerea celor mai raționale procedee, care conduc la rezultat cu mijloacele cele mai simple. S-ar putea da numeroase exemple de exerciții, care pot fi rezolvate prin mai multe metode, dintre care unele sînt mai simple.

Elevii trebuie obișnuiți de a găsi tocmai căile cele mai simple. Folosirea procedeelor raționale de calcul necesită cunoaște-

rea temeinică a temei și de aceea ele constituie un mijloc deosebit de puternic de legare a temei de practică.

Calculul rațional constituie un exercițiu minunat pentru dezvoltarea spiritului de analiză a elevilor. „Priceperea de a efectua calcule algebrice cunoscute tuturor care învață algebra, — spune academicianul sovietic A. N. Kolmogorov — în sensul transformării expresiilor literale complicate în mod iscusit, al găsirii unor căi reușite pentru rezolvarea ecuațiilor, care în afara regulilor obișnuite și altele, se apropie de acele calități care se cer des de la un matematician într-o muncă serioasă științifică".

Un mijloc eficace pentru dezvoltarea calculului rațional, este rezolvarea aceluiași exercițiu sau aceleiași probleme prin cîteva metode deosebite și alegerea celei mai bune. În perioada recapitulării, aceasta se poate realiza mai ușor, deoarece elevii cunosc toate procedeele pe care le-au studiat în cursul trimestrului sau al anului.

Grija pentru folosirea căilor raționale de calcul, trebuie să fie însoțită de o luptă împotriva folosirii de către elevi a unor căi neraționale de calcul (nu greșite). Iată cîteva exemple de calcule neraționale: adunarea și scăderea numerelor mixte după ce s-au introdus în prealabil numere întregi în fracție; neaplicarea proprietăților de comutativitate și asociativitate la adunare și înmulțire; nesimplificarea unei fracții, a unei ecuații; neaplicarea formulelor de calcul prescurtat, nefolosirea formulei reduse pentru rezolvarea ecuației de gr. II etc.

În articolul publicat în lucrarea de față al profesoarei Maria Dinescu, din București, sînt date exemple de folosire a calculului rațional în rezolvarea ecuațiilor, a problemelor cu ajutorul ecuațiilor, prin alegerea potrivită a necunoscutelor principale, rezolvarea unor probleme de geometrie, folosind cunoștințe de trigonometrie etc. Procedeul pe care îl folosește tov. Dinescu, de a rezolva unele exerciții și probleme prin cîteva metode, dă elevilor posibilitatea să se convingă de utilitatea alegerii metodei celei mai raționale și îi învață totodată pe elevi cum să caute ei înșiși căi raționale. În articol sînt date exemple în legătură cu predarea la clasele VIII-X, unde lucrează tov. Dinescu. Dezvoltarea calculului rațional trebuie să înceapă însă înainte, din primele clase, la toate disciplinele matematice.

* * *

O cale importantă pentru stabilirea legăturii strînse între studiul matematicii și activitatea practică o constituie rezolvarea de probleme cu conținut practic. Problemele cu conținut practic

dați elevilor posibilitatea de a înțelege mai bine necesitatea diferitelor adevăruri teoretice, matematice, le arată utilitatea studierii matematicii, contribuie la pregătirea elevilor pentru viață, pentru diferite probleme pe care le vor avea de rezolvat apoi în activitatea lor profesională.

Probleme cu conținut practic se găsesc în culegeri. În afară de acestea, profesorul de matematică poate să alcătuiască și probleme noi, folosind pentru aceasta date culese din ziare, din reviste de specialitate, date culese cu prilejul vizitării unor întreprinderi industriale, gospodării agricole colective, a unor SMT-uri etc. Aceste probleme trebuie să se refere la cele mai variate ramuri de activitate: industrie, agricultură, comerț, viață zilnică, viață școlară etc. Cu mult interes sînt urmărite de către elevi problemele al căror conținut este luat din mediul înconjurător, din activitatea productivă a părinților lor. În mediul rural este deosebit de util, de pildă, să se calculeze recolta la hectar, greutatea fînului în căpițe și stoguri etc.

Uneori, problemele cu conținut practic pot fi alcătuite folosind unele probleme cu caracter abstract, luate din culegeri.

La alcătuirea problemelor este necesar să se ia în considerație, în primul rînd, particularitățile de vîrstă a elevilor, să se țină seama de noțiunile cunoscute lor. Este necesar, de asemenea, ca conținutul practic să nu fie prea complicat chiar dacă este accesibil elevilor, ca el să nu necesite indicații suplimentare tehnice prea ample din partea profesorului, deoarece prin aceasta se sustrage atenția elevilor de la aspectul matematic al problemei. În nici un caz problema de matematică nu trebuie transformată de pildă, într-o problemă de electrotehnică, de rezistența materialelor etc., în care elementul matematic ocupă un loc secundar. Problema trebuie să aibă un caracter real, nu artificial, iar datele ei trebuie să corespundă realității practice cu aproximațiile uzuale.

În afară de problemele întocmite de profesor, se mai pot rezolva probleme cu date culese de elevi din tabele.

Elevii pot determina, de pildă, pe baza măsurătorilor pe care le efectuează singuri, volumul clasei, aria curții școlii, cantitatea de combustibil necesar școlii în timpul iernii etc. Sînt utile și problemele în care elevii trebuie să stabilească ariile unor figuri desenate pe tablă sau decupate din carton, volumul unor corpuri geometrice confecționate de dînșii etc.

Este de dorit ca și elevii să întocmească probleme pe care apoi să le rezolve. Pentru a se ajunge la aceasta este necesar,

însă, să se pornească de la exemple simple, şi apoi, treptat, să se ajungă la probleme mai complexe.

În articolul profesorului Constantin Borş (Piatra-Neamţ) publicat în lucrarea de faţă, sînt expuse interesante probleme de fizică, de mecanică, de astronomie, de tehnică pe care le-a rezolvat cu elevii săi şi în care sînt aplicate în special diferite cunoştinţe de trigonometrie. Rezolvarea unor astfel de probleme este utilă atît prin aceea că dă elevilor prilejul de a adînci unele cunoştinţe de matematică, cît şi prin aceea că aduce un aport la îmbogăţirea cunoştinţelor elevilor, la dezvoltarea interesului lor pentru aplicarea matematicii, în practică. Dat fiind timpul destul de redus de care dispune profesorul de matematică pentru studiul diferitelor capitole ale matematicii, este evident că astfel de probleme pot fi analizate cum se cuvine, mai ales în cadrul cercului de matematică al elevilor, unde ele pot constitui un material deosebit de valoros, prin caracterul lor atrăgător şi instructiv.

Atenţia care trebuie acordată problemelor cu conţinut practic, nu presupune înlăturarea sau neglijarea celorlalte probleme care nu au un astfel de conţinut. Şi acestea îşi au rostul lor, ele contribuind la însuşirea unor reguli, la dezvoltarea gîndirii matematice a elevilor etc. Cînd profesorul, de pildă, urmăreşte lămurirea unor chestiuni teoretice mai dificile, conţinutul problemei trebuie să fie mai simplu. În acest caz conţinutul practic ar putea sustrage atenţia elevilor de la aspectul matematic al problemei.

* * *

În dezvoltarea priceperii elevilor de a aplica cunoştinţele de matematică, un loc însemnat îl ocupă lucrările practice. Este bine cunoscut faptul că unii elevi, care ştiu să calculeze fără greşeli arii şi volume întîmpină greutăţi de îndată ce sînt puşi în situaţia de a stabili pe bază de măsurători datele necesare. Ei nu mai ştiu, în asemenea cazuri, care anume dimensiuni trebuie determinate pe bază de măsurători şi care pe bază de calcul, nu ştiu uneori cum trebuie efectuate măsurătorile. De aceea este necesar ca în cadrul orelor de matematică elevii să capete unele deprinderi practice de a efectua măsurători, deprinderi practice pe care să le poată folosi apoi în activitatea practică.

Lucrările practice la matematică, în afară de faptul că stabilesc o legătură strînsă între teorie şi practică, contribuind astfel la înţelegerea mai adîncă a teoriei, şi constituind deci un puternic instrument împotriva formalismului în însuşirea cunoştinţelor, contribuie de asemenea, la dezvoltarea spiritului de

observație al elevilor, la dezvoltarea reprezentării lor spațiale și a deprinderilor de muncă individuală.

Ar fi greșit să se considere că lucrările practice pot fi executate la matematică numai pe teren. Experiența ne arată că se pot obține rezultate frumoase și în lucrările efectuate în clasă sau chiar în cadrul temelor pentru acasă.

Pentru a-i ajuta pe elevi să-și însușească cunoștințele teoretice de geometrie și să le aplice în rezolvarea problemelor este foarte indicată folosirea unor figuri din carton, executate chiar de elevi. Ei pot confecționa din diferite materiale, pe baza unor date stabilite înainte, dreptunghiuri, pătrate, paralelograme, triunghiuri, paralelipipede, cuburi etc. Practica ne arată că însușirea de către elevii din clasele mici a unor noțiuni ca perimetru, arii etc. se realizează mult mai ușor atunci cînd elevii se folosesc de astfel de modele.

De un real folos din punct de vedere al pregătirii politehnice sînt problemele în care elevii trebuie să determine ei înșiși pe bază de măsurători, dimensiunile figurilor, pentru a determina, de pildă, aria, perimetrul etc. Pentru aceasta se pot folosi anumite figuri care pot fi descompuse în triunghiuri sau patrulatere cunoscute elevilor, figuri care să reprezinte secțiuni în anumite piese etc. Pentru determinarea unor volume, se pot alege diferite obiecte care se găsesc ușor ca găleți, pahare etc. Și în acest caz elevii trebuie să determine ei înșiși dimensiunile pe bază de măsurători.

De un real folos sînt lucrările care se pot executa în clasă cu ajutorul unor instrumente geodezice în miniatură. În unele școli se folosește pentru aceasta „poligonul de clasă", alcătuit dintr-o planșă mare de lemn, pe care se așază sau se înfig diferite piese de lemn ce reprezintă jaloane, țăruși, echere, eclimetre etc. Aceste piese, mari de aproximativ 20 cm, sînt confecționate chiar de elevi, sub îndrumarea profesorului, în cadrul orelor de lucru manual sau de lucrări practice de tîmplărie în atelier. „Poligonul de clasă" dă profesorului posibilitatea de a arăta elevilor pe tot parcursul studierii geometriei, în clasele a VI-a și a VII-a, cum se pot aplica în practică anumite cunoștințe. De pildă, cu prilejul studierii liniei drepte, li se arată elevilor „pe poligon" cum se jalonează o dreaptă, cum se stabilește punctul de intersecție dintre două drepte etc.; cu prilejul studierii unghiurilor li se arată elevilor cum se determină un unghi dat, cum se măsoară un unghi, cum se determină un ar, un hectar etc.; cu prilejul studierii cazurilor de egalitate a triunghiurilor de exemplu, se poate arăta cum se determină distanțe inaccesibile,

iar în legătură cu suma unghiurilor unui triunghi, cum se determină distanțe inaccesibile cu ajutorul unui triunghi dreptunghi isoscel.

Lucrările se efectuează întîi de către profesori și apoi de către elevi. Ele se revăd cu prilejul verificării cunoștințelor. În cazul cînd în școală se pot organiza și lucrări practice pe teren, atunci „poligonul de clasă" poate fi de un real folos în vederea pregătirii acestor măsurători. În acest caz pe poligon se pot efectua lucrările de pe teren, întocmai cum vor decurge ele, astfel încît elevii să aibe o idee clară asupra întregului mers al lucrărilor. Cu ajutorul cretei sau al hîrtiei colorate se pot determina pe tabla poligonului condiții asemănătoare acelora în care se vor desfășura lucrările pe teren.

În clasele VIII—X, lucrările practice pe teren sînt strîns legate de aplicarea unor cunoștințe de geometrie și trigonometrie (asemănarea triunghiurilor, cazuri de rezolvare a triunghiurilor etc.).

Este indicat ca instrumentele necesare efectuării lucrărilor pe teren, să fie confecționate chiar de elevi. Cu acest prilej ei au posibilitatea de a înțelege construcția instrumentelor, putînd apoi să le folosească mai ușor.

Practica ne arată că lecția practică propriu-zisă poate da rezultate bune dacă este precedată de o lecție pregătitoare în care folosindu-se eventual „poligonul de clasă" elevii capătă toate cunoștințele necesare desfășurării lucrărilor și este urmată apoi de o lecție de analiză.

În articolul profesorului Cornel Săsăran (Jimbolia) publicat în lucrarea de față se dau unele date cu privire la desfășurarea lucrărilor practice la clasele V—VII. Articolul cuprinde o descriere a tuturor aparatelor necesare efectuării unor lucrări practice și care por fi confecționate cu mijloace proprii antrenînd la aceasta și elevii precum și o descriere a lucrărilor practice ce se pot organiza pe teren, cu unele indicații metodice.

Indicații deosebit de interesante și utile cu privire la metodica organizării și desfășurării lucrărilor practice, sînt date în articolul profesoarei Florica Rusu (București). Deși articolul se referă la clasele VIII—X, observațiile metodice sînt pe deplin valabile și pentru celelalte clase. Este interesant de asemenea în acest articol exemplul pe care îl dă tov. Rusu referitor la introducerea pentru prima oară a funcțiilor trigonometrice pornind de la probleme cu conținut practic.

Lucrări practice pot fi date elevilor și ca temă pentru acasă. Ei pot determina, prin măsurători, unele date necesare rezolvării problemelor, pot confecționa modele pentru lecțiile de geometrie

etc. În cazul cînd li se cere elevilor să confecționeze unele corpuri geometrice, este util ca aceasta să fie legată de rezolvarea unor probleme, astfel încît construcția practică să fie însoțită de aplicarea unor cunoștințe de matematică legate de acest corp. De pildă, li se poate cere elevilor să confecționeze o piramidă exagonală regulată, cu latura bazei dată și unghiul dintre fața laterală și planul bazei dat.

Problema confecționării de material didactic pentru matematică este interesant analizată în articolul profesorului Băleanu M. (Lugoj). Articolul descrie unele aparate confecționate cu elevii, indică metodica folosirii lor și rezultatele obținute în ceea ce privește calitatea învățămîntului prin folosirea la geometria în spațiu a unor modele. De asemenea articolul arată cum confecționarea modelelor cu mijloace proprii dă posibilitatea de a se dezvolta la elevi deprinderi practice, pentru prelucrarea unor materiale, pentru folosirea unor instrumente de măsurat, instrumente de lucru. Tov. Băleanu ne arată cum se poate stabili o legătură între studiul matematicii și lucrările practice ale elevilor în atelier, astfel încît acestea să aibă un caracter științific iar nu meșteșugăresc.

Deosebit de utilă este și experiența pe care ne-o împărtășesc profesoarele Marta Marini și Ioana Teodorescu (București) în articolul cu privire la modul cum confecționarea materialului didactic de către elevi, contribuie la dezvoltarea reprezentărilor spațiale, la înțelegerea chestiunilor teoretice, la rezolvarea unor probleme mai grele de geometrie în spațiu. În articol se dau numeroase exemple de modele care au fost confecționate de către elevi pentru rezolvarea unor probleme dificile de geometrie în spațiu ca și exemple de planșe pentru alte discipline ale matematicii.

* * *

Apropierea studiului matematicii de activitatea practică se realizează nu numai în cadrul lecțiilor, ci și prin activitatea în afară de clasă și extrașcolară.

În afară de temele pentru acasă, un rol important în acest sens îl poate avea activitatea cercurilor de matematică din școală. Aci pot fi incluse unele referate ca „Matematica în viață", „Aplicațiile matematicii în agricultură", „Aplicațiile matematicii în industrie" și altele, în care la un nivel accesibil elevilor, să se arate cum se pot aplica cunoștințele de matematică în diferite ramuri de activitate. În cercurile de matematică pot fi rezolvate problemele cu conținut practic, se poate dezvolta tehnica de

calcul a elevilor, completîndu-se cunoştinţele lor, cu privire la calculul oral, la calculul cu numere aproximative. Aci îşi pot însuşi elevii tehnica mînuirii riglei de calcul, pot căpăta cunoştinţe referitoare la nomograme, cunoştinţe suplimentare referitoare la rezolvarea grafică a ecuaţiilor etc. În cadrul cercului se pot efectua unele lucrări suplimentare de măsurători pe teren.

Practica arată că este mai greu de organizat excursii avînd o temă de matematică. Dar în cadrul excursiilor organizate de profesorii de fizică în întreprinderi industriale, la S. M. T. etc. se pot urmări şi unele chestiuni privind aplicarea matematicii în ramurile respective. Excursiile oferă un prilej bun pentru culegerea de date necesare întocmirii unor probleme.

În legătură cu activitatea în afară de clasă şi extraşcolară, în lucrarea de faţă sînt publicate două articole. În articolul profesorului Halunga (Bucureşti) sînt date indicaţii preţioase cu privire la organizarea cercurilor de matematică, rezultate ale unei experienţe îndelungate. În afară de numeroase teme menite să ridice pregătirea teoretică a matematicii, în activitatea cercurilor de matematici, tov. Halunga include şi unele teme utile a elevilor: ca acele cu privire la calculul erorilor, al calculului aproximativ, la rezolvarea de probleme de maxim şi minim cu conţinut practic, teoremele lui Guldin, studiul funcţiei exponenţiale şi logaritmice şi aplicaţiile lor în fizică şi biologie, lucrări practice pe teren etc. Tov. Halunga foloseşte activitatea cercului de matematică pentru dezvoltarea la elevi a priceperii de a studia individual ceea ce este deosebit de important pentru buna lor pregătire pentru viaţă.

În articolul profesorului Sergiu Postolache (Bacău) sînt date aspecte interesante cu privire la activitatea cercului de matematică privind realizarea învăţămîntului politehnic la matematică. În cadrul cercului de matematică se efectuează lucrări practice pe teren, se construiesc cu elevii aparate pentru efectuarea acestora, diferite instrumente (pantograf etc.), se alcătuiesc nomograme etc. Sînt interesante de asemenea datele referitoare la organizarea seratelor matematice, şi a excursiilor în uzine şi în natură pentru adîncirea unor chestiuni de matematică.

Experienţa a numeroşi profesori ne arată că în direcţia realizării învăţămîntului politehnic în predarea matematicii există mari posibilităţi. Pentru aceasta este necesar însă ca învăţătorii şi profesorii să acorde o atenţie tot mai sporită acestor probleme.

NOȚIUNEA DE FUNCȚIE ÎN ȘCOALA DE CULTURĂ GENERALĂ

A. HOLLINGER
profesor emerit
BUCUREȘTI

Noțiunea de funcție este una din cele mai importante noțiuni ale matematicii. „Un punct de cotitură l-a constituit numărul variabil al lui Descartes. Prin aceasta au fost introduse în matematică mișcarea și dialectica și totodată a devenit imediat necesar calculul diferențial și integral". (Engels, DIALECTICA NATURII, pag. 263). Academicianul Kolmogorov, în periodizarea matematicii pe care o face în articolul „Matematica" din Marea enciclopedie sovietică, consideră că una din perioadele dezvoltării matematicii este caracterizată prin introducerea noțiunilor de funcție și transformare.

Încă la începutul acestui secol a devenit clar că, în învățămînt, trebuie să se acorde noțiunii de funcție un rol primordial. Programa de la Meran (1907) cere ca noțiunea de funcție să străbată ca un fir roșu tot cursul de matematică elementară. Într-un articol intitulat „Despre formalism în predarea matematicii în școală", publicat în „Informațiile Academiei de Științe Pedagogice" (în l. rusă) nr. 4/1946, profesorul A.I. Hîncin scrie:... „aproape toate capitolele matematicii elementare, dacă sînt pătrunse și luminate de ideea de dependență funcțională, cîștigă ca utilitate, intuiție, claritate și atracție".

Cele mai multe aplicații în practică ale matematicii se datoresc noțiunii de funcție. În adevăr orice studiu cantitativ al unor fenomene din natură sau din producție urmărește să stabilească corespondențe între elementele a două mulțimi. Funcția $y = f(x)$ este expresia matematică a acestei corespondențe.

Odată corespondența exprimată sub forma matematică, părăsim faza empirică a studiului, studiem în abstract proprietățile funcției respective și stabilim pe cale deductivă proprietățile fenomenului studiat.

În zilele noastre, noțiunea de funcție a fost introdusă în programele școlare, dar mai este mult de făcut. În adevăr la alge-

bră s-a adăugat la materia tradițională cîte un capitol: într-o clasă funcția liniară, în altă clasă trinomul ș.a.m.d., dar aceste chestiuni sînt deseori adăugiri la materia tradițională și nu se realizează în măsură suficientă deziderатul ca, efectiv cursul de algebră să fie pătruns de ideea de funcție. Cît despre geometrie, dat fiind că se acordă un loc redus transformărilor, ea a rămas neinfluențată de ideile schițate mai sus.

În cadrul acestui studiu, voi face o serie de propuneri care urmăresc să realizeze o legătură mai strînsă între noțiunea de funcție și cursul clasic de matematică elementară. Mă voi limita la matematica elementară, înțelegînd prin aceasta că nu mă voi ocupa de elementele de analiză care vor fi introduse în curînd în programa școlară și unde noțiunea de funcție este obiectul propriu-zis al studiului.

Noțiunea de funcție în cadrul cursului de aritmetică

Ideea de dependență funcțională nu se naște o dată cu definirea noțiunii de variabilă și de funcție și cu notația $y = f(x)$. Terenul pentru studiul funcțiilor poate fi pregătit din vreme. Din punct de vedere psihologic, o pregătire pentru studiul dependenței funcționale constă în următoarele:

a) Să deprindem elevii să privească datele unei probleme ca variabile. În limbaj matematic, aceasta înseamnă să privească constantele ca parametri;

b) Să-i învățăm pe elevi să considere în același timp două mărimi susceptibile de a lua mai multe valori, astfel încît valorile mărimii a doua să fie determinate îndată ce cunoaștem valorile primei mărimi și să urmărească variația mărimii a doua.

Această formă de gîndire se realizează încă de la începutul cursului de aritmetică (în clasa a cincia), la proprietățile operațiilor. La fiecare operație se studiază cum variază rezultatul cînd elementele cu care se operează variază. De exemplu: cum variază suma a doi termeni cînd unul din ei se mărește cu un număr; cum variază produsul a doi termeni, cînd unul din ei se mărește de un număr de ori ș.a.m.d.

Acest element, introdus în cadrul cursului de aritmetică de metodiștii sovietici, constituie, după părerea mea, un pas important în sensul preconizat mai sus, ca ideea de funcție să nu fie introdusă în mod subit, ci treptat.

Nu insist asupra acestui element, care a pătruns și în manuale. Îmi propun să arăt cum, în rezolvarea unor probleme de aritmetică, se poate pregăti terenul pentru studiul funcțiunilor.

Voi expune metoda, aşa cum se face în aritmetică, pe o serie de exemple.

1) *A are 160 lei, B are 20 lei. Cît trebuie să dea A lui B pentru ca A să aibă de 3 ori mai mult ca B?*

Căutăm soluţia prin încercări.

Să luăm cazul cînd A dă lui B 10 lei. Atunci lui A îi rămîne (160—10= 150 lei), *B* are (20+10= 30 lei). Acest număr înmulţit cu 3 dă: $30 \cdot 3 = 90$ — nu 150. Diferenţa dintre banii rămaşi lui A şi triplul banilor lui B este: $150 - 90 = 60$; ea ar trebui să fie zero.

Încercăm alte numere şi formăm treptat tabloul următor.

1	2	3	4	5
A dă lui B	Lui A îi rămîn	Atunci B are	Întreitul banilor lui B	Diferenţa
10	150	30	90	60
11	149	31	93	56
12	148	32	96	52
13	147	33	99	48
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
x	$160-x$	$20+x$	$3(20+x)$	$160-x-3(20+x)$

Lăsăm elevii să completeze un număr mai mare de rînduri ale acestui tablou. Apoi îi îndemnăm să studieze cum variază numerele din diferitele coloane.

a) Numerele din prima coloană cresc cu cîte o unitate — aşa le-am ales noi.

b) Numerele din coloana a doua scad cu cîte o unitate. E firesc să fie aşa. Dacă scădem din 150 nişte numere care cresc cu cîte o unitate, diferenţa scade cu cîte o unitate.

c) Numerele din coloana a treia cresc cu cîte o unitate. Aşa trebuie să fie. Dacă adăugăm la 20 nişte numere care cresc cu cîte o unitate, suma creşte cu cîte o unitate.

d) Numerele din coloana a patra cresc din 3 în 3. Aşa trebuie să fie: dacă un număr creşte cu 1, întreitul lui creşte cu 3.

e) Numerele din coloana a cincia descresc din 4 în 4. Cum se explică aceasta?

Numerele din coloana a doua scad cu cîte 1, iar cele din coloana a patra cresc cu cîte 3, diferenţele lor (coloana cincia) cresc cu $3 + 1 = 4$.

Acum soluţia problemei a devenit simplă.

Cînd A dă lui B 10 lei, rezultă o diferenţă de 60 de lei. Noi vrem ca diferenţa din ultima coloană să fie zero. Cînd numărul din prima coloană creşte cu 1, diferenţa scade cu 4; deci trebuie să mărim primul număr din prima coloană cu 60: 4 = 15.

A trebuie să dea lui B 10 + 15 = 25 lei.

Proba: lui A îi rămîn 160 — 25 = 135 lei, B are 20 + 25 = = 45 lei; 45·3 = 135, tocmai suma care rămîne lui A.

Variante ale aceleiaşi probleme:

2) *Într-o magazie se găsesc 185 lăzi de zahăr, iar într-o altă magazie 115 lăzi. Cîte lăzi trebuie să mutăm dintr-o magazie în cealaltă, pentru ca în prima magazie să fie de două ori mai multe lăzi ca într-a doua?*

Răspuns: Trebuie să mutăm 15 lăzi din magazia a doua în prima.

3) *Într-un rezervor se găsesc 310 litri benzină, iar în alt rezervor se găsesc 124 litri benzină. Vrem să adăugăm la ambele rezervoare aceeaşi cantitate de benzină, astfel ca primul rezervor să conţină de două ori mai mult ca al doilea.*

Care este acea cantitate?

Răspuns: 62 litri.

4) *O luminare are 16 cm, iar o altă luminare are 37 cm. În fiecare minut, ambele lumînări se scurtează cu cîte 1 cm. După cît timp va fi luminarea a doua de 4 ori mai lungă ca prima?*

Răspuns: După 9 minute.

Să se observe că ultimele două variante sînt de tipul „raport şi diferenţă". Din timpurile cele mai vechi se obişnuia să se pună astfel de probleme în legătură cu vîrstele („Un tată are... ani, iar fiul lui are... ani. Peste cît timp va fi tatăl de... ori mai mare ca fiul? Cu cîţi ani în urmă a fost tatăl de... ori mai mare ca fiul?"). Aceste probleme se rezolvă de obicei observînd că diferenţa celor două numere este constantă. Primele două probleme sînt mai simple [1] — totuşi, în prezentarea de faţă, aceste patru probleme nu sînt decît variante ale aceluiaşi tip.

Tot de acelaşi tip este şi problema următoare, pe care o voi rezolva, pentru că îmi pare puţin mai complicată.

5) *Într-un rezervor se găsesc 50 l apă, în alt rezervor numai 30 litri. Primul rezervor are un robinet prin care se scurg 3 litri*

---

[1] Soluţia problemei 1: A şi B au împreună 180 lei. Împărţim această sumă în raportul 1 : 3. Avem:

1+3=4, 180 : 4=45, 45 · 3=135. A rămîne cu 135 lei, B cu 45 lei. Pentru aceasta, A trebuie să dea lui B: 160—135=25 lei.

Problema 2 se rezolvă în mod analog.

apă pe minut, iar al doilea are un robinet prin care se scurg 2 litri apă pe minut. Deschidem amîndouă robinetele. După cît timp rămîne în primul rezervor de 6 ori mai multă apă decît în cel de-al doilea?

Examinăm care este situaţia după 1, 2, 3... minute.

Timpul	Bazinul I		Bazinul II		De 6 ori cantitatea de apă rămasă în bazinul II	Diferenţa
	Se scurge	Rămîne	Se scurge	Rămîne		
1	2	3	4	5	6	7
0	0	50	0	30	180	130
1	3	47	2	28	168	121
2	6	44	4	26	156	112
3	9	41	6	24	144	103
4	12	38	8	22	132	94
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
x	$3x$	$50-3x$	$2x$	$30-2x$	$6(30-2x)$	$6(30-2x)-(50-3x)$

După o analiză a coloanelor acestui tablou (ca în exemplul 1), se observă că numerele din ultima coloană scad din 9 în 9. Aşa trebuie să fie. Numerele din coloana a 3-a scad din 3 în 3. Numerele din coloana a cincia scad din 2 în 2; şi cum numerele din coloana a şasea se obţin, înmulţind numerele din coloana a cincia cu 6, numerele din această coloană trebuie să scadă din 12 în 12, căci $6 \cdot 2 = 12$. Dacă numerele din coloana a treia scad din 3 în 3, iar cele din coloana a şasea scad din 12 în 12, numerele din coloana a şaptea (care sînt diferenţele lor) trebuie să scadă din 9 în 9.

Diferenţa dintre coloana a şasea şi a treia este la început 130 şi scade cu 9 litri pe minut. Diferenţa va dispare după

$$\frac{130}{9} = 14\frac{4}{9} \text{ minute}$$

Problema este rezolvată.

6) *Un număr de caiete se distribuie la elevii unei clase. Dacă se dau fiecărui elev 10 caiete, 3 elevi rămîn fără caiete; iar dacă se dau numai cîte 9 caiete de elev, rămîn 5 caiete. Cîţi elevi sînt în clasă?*

Presupunem, de exemplu, că în clasă ar fi 20 de elevi. Atunci în prima distribuție, numai $20-3=17$ elevi capătă caiete, deci se distribuie $10 \cdot 17=170$ de caiete. În distribuția a doua, fiecare elev capătă 9 caiete, deci se distribuie $9 \cdot 20=180$ de caiete. Dacă mai adăugăm cele 5 caiete care rămîn, înseamnă că au fost $180+5=185$ de caiete. În clasă nu au fost 20 de elevi, căci $170 \neq 185$. Încercăm 21, 22,... elevi și formăm tabloul de mai jos:

Total elevi	Distribuția I		Distribuția II		Diferența
	Elevi care capătă caiete	Total caiete	Caiete distribuite	Total caiete	
1	2	3	4	5	6
20	17	170	180	185	15
21	18	180	189	194	14
22	19	190	198	203	13
23	20	200	207	212	12
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
x	$x-3$	$10(x-3)$	$9x$	$9x+5$	.

În prima distribuție, un elev în plus înseamnă 10 caiete în plus; în distribuția a doua, un elev în plus înseamnă 9 caiete în plus. Astfel se explică faptul că numerele din coloana a 3-a cresc din 10 în 10, iar cele din coloana a 5-a — din 9 în 9. Rezultă că diferențele din coloana a 6-a scad cu cîte o unitate.

În cazul a 20 de elevi, avem o diferență de 15; pentru ca să nu mai existe diferență, adică diferența să scadă cu 15, trebuie să mărim numărul elevilor cu 15.

Problema este rezolvată. În clasă sînt $20+15=35$ de elevi.

Un alt mod de a rezolva problema ar fi următorul.

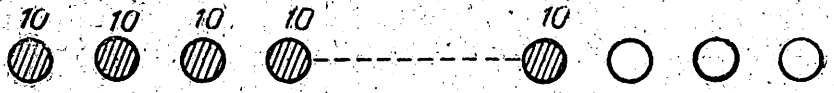


Fig. 1

Situația după prima distribuție este cea schițată în figura 1: un număr (necunoscut) de elevi au cîte 10 caiete, iar 3 elevi au rămas fără

caiete. Pentru a putea da caiete la toți elevii clasei, luăm de la toți elevii cîte un caiet, așa că ei rămîn cu cîte 9 caiete — așa cum se spune în problemă. Ce facem cu caietele strînse? Dăm și ultimilor 3 elevi cîte 9 caiete, deci $3 \cdot 9 = 27$ de caiete și ne mai rămîn 5 caiete. $27 + 5 = 32$, deci s-au strîns 32 de caiete. În prima distribuție, s-au dat caiete la 32 de elevi; dacă adăugăm și cei 3 elevi care au rămas fără caiete, rezultă că în clasă au fost $32 + 3 = 35$ de elevi.

Problema este rezolvată.

Variante ale acestei probleme:

7) *În magazia unui internat se găsește o cantitate de zahăr care trebuie să ajungă pentru un număr de zile. Dacă se consumă cîte 15 kg pe zi, provizia se termină cu 3 zile prea devreme, iar dacă se consumă cîte 10 kg pe zi, mai rămîn 40 kg. Pentru cîte zile a fost planificată cantitatea de zahăr? Cît zahăr se găsește în magazie?*

Răspuns: 17 zile, 210 kg.

8) *Într-o clasă se găsesc un număr de bănci și un număr de elevi. Dacă se așază cîte 3 elevi într-o bancă, 7 elevi rămîn fără loc; iar dacă se așază cîte 4 elevi într-o bancă, rămîn două bănci goale. Cîte bănci (și cîți elevi) sînt în clasă?*

Răspuns: 15 bănci, 52 elevi.

Problemele care urmează duc la sisteme de ecuații liniare cu două necunoscute.

9) *Într-o tabără sînt de 5 ori mai multe fete decît băieți. Pleacă 10 băieți și 10 fete și în tabără rămîn de 6 ori mai multe fete decît băieți. Cîți băieți și cîte fete sînt?*

Procedeul folosit în problemele precedente duce la tabloul următor:

Băieți	Fete	Băieți rămași	Fete rămase	Numărul băieților rămași înmulțit cu 6	Diferența
1	2	3	4	5	6
11	55	1	45	6	39
12	60	2	50	12	38
13	65	3	55	18	37
14	70	4	60	24	36
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
x	$5x$	$x-10$	$5x-10$	$6(x-10)$	

Pentru a forma rîndul întîi, am presupus că sînt 11 băieți (mai puțini nu puteau fi căci 10 pleacă). Atunci numărul fetelor este $11 \cdot 5 = 55$. După plecare, rămîn $11 - 10 = 1$ băiat și $55 - 10 = 45$ fete. Numărul băieților înmulțit cu 6 este $1 \cdot 6 = 6$, ($\neq 45$). Avem o diferență de $45 - 6 = 39$.

Analiza tabloului: *a)* Numerele din prima coloană cresc cu cîte o unitate — așa le luăm noi.

b) Numerele din coloana a doua se obțin înmulțind cele din prima coloană cu 5, deci aceste numere cresc din 5 în 5.

c) Dacă în tabără se găsește un băiat mai mult și pleacă 10 băieți, numărul băieților rămași crește tot cu 1; de aceea numerele din coloana a treia cresc cu cîte o unitate.

d) Faptul că numerele din coloana a 4-a cresc din 5 în 5 se explică în același fel.

e) Numerele din coloana a 5-a se obțin înmulțind numerele din coloana a 3-a cu 6, de aceea aceste numere cresc din 6 în 6.

f) În sfîrșit, numerele din coloana a 6-a se obțin scăzînd numerele din coloana a 5-a din cele din coloana a 4-a. Numerele din coloana a 4-a cresc din 5 în 5, iar cele din coloana a 5-a — din 6 în 6; rezultă că diferența lor scade cu cîte o unitate.

Vrem ca diferența din coloana a 6-a să scadă la zero. Cînd numărul din coloana întîi crește cu o unitate, numărul din coloana a 6-a scade cu o unitate. Deci, trebuie să mărim numărul din coloana întîi cu 39:

$$11 + 39 = 50.$$

Problema este rezolvată. În tabără sînt 50 de băieți și $50 \cdot 6 = 300$ de fete.

Variante:

10) *Un aliaj din aramă și zinc conține de 6 ori mai multă aramă decît zinc. Îl topim și adăugăm cîte 27 kg din fiecare metal; și în noul aliaj se găsește de 3 ori mai multă aramă decît zinc. Cîtă aramă și cît zinc conținea aliajul la început.*

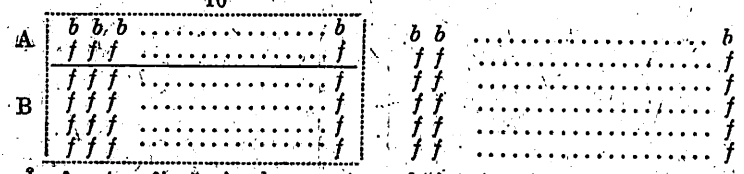
Răspuns: 18 kg zinc, 108 kg aramă.

11) *A are de 10 ori mai mulți bani decît B. Dacă A dă lui B 42 de lei, atunci A are de 4 ori mai mult decît B. Cît are A? Cît are B?*

Răspuns: A are 10 lei, B are 350 lei.

Să vedem cum se pot rezolva aceste probleme pe altă cale. Luăm, de exemplu, tot problema 8.

La început, au fost de 5 ori mai multe fete decît băieți. Acești elevi puteau deci fi așezați ca în tabloul de mai jos:



În fruntea fiecărei coloane este un băiat, iar în spatele lui sînt 5 fete.

Problema va fi rezolvată cînd vom şti cîte coloane sînt. În problemă se dă că, dacă pleacă 10 băieţi şi 10 fete, elevii pot fi grupaţi astfel ca în spatele fiecărui băiat să vină 6 fete.

Or, dacă îndepărtăm cei 10 băieţi şi cele 10 fete din chenarul A, fetele din chenarul B rămîn libere. Numărul lor este $10 \cdot 4 = 40$. Aceste fete urmează să se aşeze în coloanele celelalte. Cum? În noua grupare, în spatele fiecărui băiat trebuie să stea 6 fete în loc de 5, deci în fiecare coloană se adaugă o fată. Cum noi trebuie să plasăm 40 de fete, înseamnă că la dreapta chenarelor sînt 40 de coloane; dacă adăugăm şi cele 10 coloane din chenar, avem $40 + 10 = 50$ de coloane.

Problema este rezolvată. Sînt 50 de băieţi şi $50 \cdot 5 = 250$ de fete.

12) *B are cu 65 de lei mai mult decît A. Dacă B dă lui A 12 lei, îi rămîne lui B de două ori mai mult decît are A. Cîţi bani are fiecare din ei?*

Dacă A are 10 lei, B are $10 + 65 = 75$ lei. Dacă B dă lui A 12 lei, B rămîne cu $75 - 12 = 63$ lei, iar A are $10 + 12 = 22$ lei. Dublul lui A este $22 \cdot 2 = 44 \neq 63$ şi există o diferenţă de $63 - 44 = 19$. Luăm cazul cînd A are 11,12,... lei şi formăm tabloul:

La început		După ce B dă lui A 12 lei			
A	B	A	B	Dublul lui A	Diferenţa pînă la 65
10	75	22	63	44	19
11	76	23	64	46	18
12	77	24	65	48	17
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.

Numerele din ultima coloană scad cu cîte o unitate. Pentru ca diferenţa, care este la început 19, să dispară, ea trebuie să scadă cu 19, deci numărul din prima coloană trebuie să crească cu 19. Problema este rezolvată. A are $10 + 19 = 29$ lei, iar B are $29 + 65 = 94$ lei.

Un alt mod de a rezolva problema este următorul:

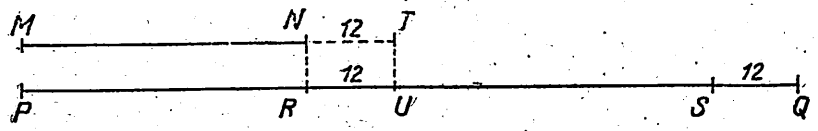


Fig. 2

Reprezentăm (fig. 2) prin segmentul *MN* banii lui A, şi prin *PQ* banii lui B. Se ştie că diferenţa *RQ* reprezintă 65 lei. Luăm de la *PQ*

o parte SQ care reprezintă 12 lei şi o adăugăm la MN, în NT. În urma acestei operaţii, banii lui A sînt reprezentaţi de segmentul $MT = PU$, iar banii lui B de segmentul PS. Se dă că PS este dublul lui MT sau al lui PU, deci $PU = US$. Dar US se poate afla. US s-a obţinut scăzînd din RQ segmentele RU şi SQ care reprezintă cîte 12 lei fiecare, deci US reprezintă $65 - 12 \cdot 2 = 41$ lei. Rezultă că MT reprezintă tot 41 lei, iar MN reprezintă $41 - 12 = 29$ lei. Aşadar, A are 29 lei, iar B are $29 + 65 = 94$ lei.

13) *Pentru 269 lei s-au cumpărat 43 bilete de teatru de două feluri. Un bilet din primul fel costă 8 lei, iar un bilet de felul al doilea costă 5 lei. Cîte bilete de fiecare fel s-au cumpărat?*

Dacă luăm 10 bilete de primul fel, va trebui să luăm $43 - 10 = 33$ bilete de felul al doilea şi vom plăti $10 \cdot 8 + 33 \cdot 5 = 245$ lei — nu 269 lei. Diferenţa este de $269 - 245 = 24$ lei. Luăm 11,12,... bilete de primul fel şi, făcînd calculele analoage, obţinem tabloul:

1	2	3	4
Bilete de cîte 8 lei	Bilete de cîte 5 lei	Costul total	Diferenţa pînă la 269
10	33	245	24
11	32	248	21
12	31	251	18
13	30	254	15
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

Se explică destul de uşor că dacă numărul din prima coloană creşte cu 1, diferenţa din ultima coloană trebuie să scadă cu 3. Pentru ca diferenţa să dispară, trebuie să mărim numărul din prima coloană cu $24 : 3 = 8$, deci s-au cumpărat $10 + 8 = 18$ bilete de primul fel şi $43 - 18 = 25$ bilete de felul al doilea.

Problema este rezolvată.

În mod obişnuit, această problemă se rezolvă prin „metoda ipotezelor", cu care, de altfel, procedeul folosit aci are multă asemănare.

* * *

Exemplele care preced arată cu prisosinţă în ce constă metoda.

Cum se face că, în toate exemplele, numerele din ultima coloană sînt proporţionale cu cele din prima coloană? Ce probleme pot fi rezolvate prin această metodă? Care este valoarea ei pedagogică? Ce legătură are ea cu noţiunea de funcţie?

1. Să lăsăm la o parte pentru un moment toate considerentele pedagogice pentru a ne ocupa de latura pur matematică a chestiunii.

Considerăm funcţia

$$f(x) = ax + b.$$

Dăm variabilei x două valori oarecare x_1 şi x_2, unde $x_2 > x_1$; diferenţa $x_2 - x_1$ este creşterea variabilei. Valorile corespunzătoare ale funcţiei sînt:

$$f(x_1) = ax_1 + b, \qquad f(x_2) = ax_2 + b,$$

iar diferenţa lor (creşterea funcţiei) este:

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1).$$

Raportul dintre aceste creşteri este:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a,$$

deci constant. Deci:

În cazul funcţiei $f(x) = ax + b$, *creşterile funcţiei sînt proporţionale cu creşterile variabilei, coeficientul de proporţionalitate fiind* a.

Reciproc, să căutăm funcţia $f(x)$ (definită pentru anumite valori ale variabilei x) ale cărei creşteri să fie proporţionale cu creşterile variabilei, deci care să satisfacă relaţia

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

oricare ar fi valorile (admise) x_1 şi x_2, a fiind o constantă dată.

Luăm pentru x_2 o valoare oarecare x, şi $x_1 = 0$. Relaţia dată se scrie

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = a,$$

de unde

$$f(x) = ax + f(0).$$

Dacă punem $f(0) = b$, avem

$$f(x) = ax + b.$$

Ecuaţia funcţională este rezolvată. Funcţia căutată este de forma $f(x) = ax + b$.

Deci, faptul că creşterile funcţiei sînt proporţionale cu creşterile variabilei este caracteristic pentru funcţia liniară.

Fie acum o ecuaţie de gradul I

$$f(x) = ax + b = 0.$$

Considerăm o valoare oarecare a variabilei $x = x_1$ şi valoarea corespunzătoare a funcţiei $f(x_1)$, pe care o presupunem diferită de zero. Unei creşteri a variabilei $x_2 - x_1$ îi corespunde, după cum am arătat, o creştere a funcţiei egală cu $a(x_2 - x_1)$; ce creştere trebuie să dăm variabilei pentru ca valoarea funcţiei să devină zero, adică creşterea funcţiei să fie $-f(x_1)$. Schematic:

$$\begin{array}{l} x_2 - x_1 \ldots\ldots\ldots a(x_2 - x_1) \\ \underline{x - x_1 \ldots\ldots\ldots -f(x_1)} \end{array}$$

Creşterile fiind proporţionale, avem:

$$\frac{x_2 - x_1}{x - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{-f(x_1)}.$$

Din această proporţie scoatem

$$x - x_1 = -\frac{f(x_1)}{a}.$$

Această formulă dă rădăcina ecuaţiei $ax + b = 0$, căci ne arată cu cît trebuie să crească x începînd de la x_1, pentru ca funcţia să se anuleze. Avem astfel un mijloc de a rezolva orice ecuaţie de gradul I cu o necunoscută fără a folosi regulile obişnuite, folosind numai regula după care se scoate necunoscuta dintr-o proporţie.

Exemple: *1.* Fie ecuaţia $f(x) = 5x - 13 = 0$, în care $a = 5$. Dăm lui x, de exemplu, valoarea $x_1 = 8$. Avem $f(x_1) = 27$. Pentru ca $f(x)$ să se anuleze, trebuie ca x să crească cu $-\frac{f(x_1)}{a} = -\frac{27}{5}$. Rădăcina ecuaţiei este: $x = 8 - \frac{27}{5} = \frac{13}{5}$.

2. În cazul ecuaţiei $f(x) = 17 - 3x$, avem $a = -3$. Luăm, de exemplu, $x = 4$. Atunci $f(x_1) = 17 - 12 = 5$. Pentru ca $f(x)$ să se anuleze, x trebuie să crească cu $-\frac{f(x_1)}{a} = -\frac{5}{-3} = \frac{5}{3}$.

Rădăcina ecuaţiei este $x = 4 + \frac{5}{3} = \frac{17}{3}$.

Observări: a) Fie ecuația $f(x) = ax + b = 0$. Dacă luăm $x_1 = 0$, avem $f(x_1) = b$ și formula ne arată că x trebuie să crească cu $-\frac{f(x_1)}{a} = \frac{-b}{a}$. Dar, în acest caz, creșterea lui x este chiar valoarea lui, deci rădăcina ecuației este $x = -\frac{b}{a}$. Am obținut astfel expresia rădăcinii sub forma obișnuită.

b) În aritmetică, unde intervin numai valori pozitive, trebuie să facem deosebire între creșteri și scăderi.

2. Problemele precedente au putut fi reduse la probleme de regulă de trei simplă, pentru că am putut găsi — cu ajutorul tablourilor — două mărimi proporționale, mărimile din prima și ultima coloană. Aceasta se datorește faptului că, în fond, aceste probleme se reduc la rezolvarea unor ecuații de gradul I cu o necunoscută. În problemele tratate, această ecuație este:

Problema 1: $160 - x - 3(20 + x) = 0$.
Problema 5: $6\,(30 - 2x) - (50 - 3x) = 0$.
Problema 6: $9x + 5 - 10\,(x - 3) = 0$.

ș.a.m.d.

Neavînd la îndemînă mijloacele de exprimare ale algebrei, care să arate că problema se reduce la rezolvarea unei ecuații de forma $f(x) = ax + b = 0$, nici teorema stabilită la punctul precedent, care arată cum se poate afla cu ajutorul proporțiilor rădăcina unei astfel de ecuații, raționamentul se reface pe fiecare caz în parte. Se constată (și se explică de ce) mărimile din prima și ultima coloană sînt proporționale și problema se reduce la o problemă de regulă de trei simplă.

Or, problemele de aritmetică școlare sînt, *toate*, probleme de gradul I. S-ar putea trage concluzia că toate problemele de aritmetică școlare se pot rezolva prin metoda aceasta. Dar lucrurile nu stau așa. În adevăr, noi nu dispunem de calculul cu litere, unde se desfac paranteze, se reduc termeni asemenea și relațiile se exprimă sub forma cea mai simplă. Sînt necesare tablouri, pentru ca să ne dăm seama în fiecare caz în parte că avem de a face cu mărimi proporționale. Cîtă vreme lucrurile sînt destul de transparente, metoda este aplicabilă; ea devine inaplicabilă cînd reducerea ecuației la forma canonică cere calcule mai lungi, pe care cu greu le putem stăpîni fără a folosi calculul algebric.

Astfel, în exemplul 1 de mai sus, ecuația apare sub forma

$$f(x) = 160 - x - 3(20 + x) = 0,$$

şi tabloul ne-a permis să ne dăm seama că numerele din prima şi ultima coloană sînt proporţionale. Acest lucru nu mai este posibil — sau cel puţin, devine foarte greu — cînd intervin operaţii în care ambii termeni sînt necunoscuţi. Această greutate limitează — o limită precisă nu se poate indica — eficacitatea metodei.

Voi ilustra aceasta printr-un exemplu — o problemă bine cunoscută.

A spune lui B : „*Am acum dublul vîrstei pe care ai avut-o tu cînd eu am avut vîrsta ta de acum, iar cînd vei avea vîrsta pe care o am eu acum, vom avea împreună 72 ani*". *Ce vîrstă are fiecare din ei?*

Fie x vîrsta lui A, şi y vîrsta lui B.

B a avut vîrsta lui A cu $y - x$ ani în urmă; atunci A a avut vîrsta: $x - (y - x) = 2x - y$. Prima parte a enunţului ne dă ecuaţia: $y = 2(2x - y)$, de unde:

$$4x = 3y.$$

Partea a doua a enunţului dă ecuaţia $3y - x = 72$ şi rămîne de rezolvat sistemul format de aceste două ecuaţii.

Nu văd cum am putea aplica metoda noastră pentru a rezolva această problemă! Pentru a stabili relaţia $4x = 3y$ a trebuit să scădem din numărul mai mic diferenţa celor două numere, apoi să interpretăm faptul că numărul mai mare este dublul numărului astfel obţinut — aceasta nu merge fără a folosi paranteze şi ecuaţii.

O dată ce am obţinut relaţia $4x = 3y$ sau $y = \frac{4}{3}x$, se poate face un tablou ca cel de mai jos, care duce la rezolvarea problemei.

În prezent		Cînd B ar avea vîrsta lui A		Suma vîrstelor	Diferenţa pînă la 72 ani
Vîrsta lui B	Vîrsta lui A	Vîrsta lui B	Vîrsta lui A		
3	4	4	5	9	63
6	8	8	10	18	54
9	12	12	15	27	45
.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	
x	$\frac{4x}{3}$	$\frac{4x}{3}$	$\frac{5x}{3}$	$3x$	$72 - 3x$

Este uşor să ne dăm seama că, dacă numerele din prima coloană cresc cu cîte o unitate, cele din ultima coloană scad cu cîte trei unităţi. Pentru ca diferenţa din ultima coloană să dispară (să scadă cu 63), trebuie să mărim primul număr din prima coloană cu $63 : 3 = 21$. Vîrsta lui B este de $3 + 21 = 24$ ani.

Dar chestiunea nu prezintă interes, căci cine găseşte mijlocul (care există) de a stabili pe cale aritmetică că vîrstele celor doi oameni sînt proporţionale cu 3 şi 4 rezolvă numaidecît problema. Cu ajutorul tabloului am rezolvat însă problema următoare: raportul vîrstei a doi oameni este 3 : 4. Cînd cel mai mic dintre ei va avea vîrsta pe care o are acum cel mai mare, ei vor avea la un loc 72 ani. Să se afle vîrsta celor doi oameni.

În rezumat: procedeul indicat în exemplele precedente este, în principiu, aplicabil la orice problemă de aritmetică. În practică, însă, el poate fi aplicat numai în cazurile în care relaţiile dintre mărimi se pot stabili pe cale aritmetică, adică fără a folosi calculul algebric.

3. Deşi metoda nu este generală, contrar aparenţei, ea este totuşi mai generală decît oricare alta dintre „metodele" obişnuite: metoda ipotezelor, metoda retrogradă etc. — şi acesta este unul dintre motivele pentru care ea merită să fie luată în consideraţie.

Este un lucru recunoscut de foarte mulţi profesori că elevii îşi însuşesc cu greu diferitele „metode" şi — aceasta îmi pare şi mai important — cînd se găseşte în faţa unei probleme, pînă şi elevul cel mai bun, care cunoaşte metodele, nu ştie care metodă să aplice. Afară de aceasta, nici nu există o colecţie de metode astfel ca orice problemă de aritmetică să poată fi rezolvată prin una din ele. De exemplu, ultima problemă nu se încadrează în nici o problemă „tipică", nici problemele 8, 9, 10 ş.a.m.d. În foarte multe cazuri, rezolvarea problemei se bazează pe un artificiu, pe o inspiraţie, care-ţi vine sau nu. Cînd profesorul explică bine cum se rezolvă problema, elevul înţelege, dar are sentimentul demobilizator că n-ar fi putut face la fel.

Să luăm, de exemplu, problema 8 de mai sus. Trebuie multă ingeniozitate să-ţi închipui elevii din tabără aşezaţi frumos în coloane, fiecare coloană fiind formată dintr-un băiat urmat de şase fete, apoi să îndepărtezi primele două elemente din primele 10 coloane ş.a.m.d. La concluzia analoagă ajungem dacă analizăm soluţia a doua a problemei 6.

Din punct de vedere educativ, valoarea acestor soluţii este îndoielnică. Soluţia poate stîrni admiraţie, dar această admiraţie nu este fecundă, ea nu stimulează.

Este drept că şi în aplicarea metodei expuse aci apare o greutate remarcabilă: întocmirea tabloului, în special formarea coloanelor, nu completarea lor. Greutatea este reală. Dar cînd ne străduim să întocmim acest tablou, ştim că mergem pe o cale sigură şi nu sîntem în căutarea unor artificii capricioase. Afară de aceasta, cred că nu trebuie să trecem cu vederea faptul că

ideea care stă la baza acestei metode este o idee generală — precum am arătat sub 1 — deşi acest lucru nu poate fi explicat elevilor.

Aşadar, spre deosebire de celelalte metode, metoda propusă aci este mai naturală, mai generală.

4. Al doilea fapt care pledează pentru folosirea metodei indicată aici este că ea este o bună pregătire pentru înţelegerea noţiunii de funcţie. Cînd se dă noţiunea de funcţie cu ajutorul unei expresii algebrice, de exemplu $y = 3x + 5$, $y = x^2$, aşa cum se face în cele mai multe manuale, se spune prea puţin despre această noţiune. Deşi definiţia se dă corect („fiecărei valori a argumentului, îi corespunde...), elevii nu sezisează importanţa noţiunii. Totul apare ca un simplu joc. Expresia funcţiei este o mică maşină în care „bagi un x şi iese un y". În schimb, dacă elevii rezolvă un număr oarecare de probleme prin metoda preconizată aici, pregătim terenul pentru înţelegerea noţiunii de funcţie: ei văd în multe cazuri particulare ce este o variabilă independentă (numărul din prima coloană), o variabilă dependentă (numărul din ultima coloană) şi dependenţa funcţională sau corespondenţă (în dreptul fiecărui număr din prima coloană apare cîte un număr din ultima coloană).

Elevii se obişnuiesc să urmărească evoluţia unui fenomen, să observe o coloană de numere, mai mult: să observe simultan două coloane de numere şi să vadă cum variază aceste numere, să compare creşterile lor. A alcătui un tablou ca cele folosite în exemplele precedente — chiar dacă coloanele sînt indicate de profesor — este un mod de a studia variaţia unei funcţii. E un studiu al variaţiei unei funcţii prin mijloace primitive, pentru că expresia funcţiei nu este dată.

În sfîrşit, ceea ce măreşte valoarea acestei metode este faptul că studierea tabloului constituie o îmbinare fericită a observaţiei cu raţionamentul. Elevii întîi observă o anumită regularitate în succesiunea numerelor, apoi şi-o explică.

5. Ca tehnică de predare, trebuie început, bineînţeles, cu exemple simple. Este poate util să se rezolve pe această cale şi problemele considerate ca fundamentale: să se afle două numere cunoscînd suma şi diferenţa lor, suma şi raportul lor, diferenţa şi raportul lor. Urmează cîte un exemplu din fiecare fel.

a) *Să se împartă suma de 38 lei în două părţi, astfel ca o parte să fie cu 12 mai mică decît cealaltă.*

Dacă partea mai mică este de 5 lei, partea mai mare este de $5 + 12 = 17$ lei, iar suma este de $5 + 17 = 22$ lei, nu de

38 lei cum se dă. Luînd pentru numărul mai mic 6, 7, 8... lei, se obţine următorul tablou:

Partea mai mică	Partea mai mare	Suma	Diferenţa pînă la 38
5	17	22	16
6	18	24	14
7	19	26	12
8	20	28	10

Cînd numărul din prima coloană creşte cu 1, cel din ultima coloană scade cu 2. Pentru ca diferenţa să scadă cu 16 (să scadă la 0), trebuie să mărim primul număr din prima coloană cu $16 : 2 = 8$. Numărul mai mic este $5 + 8 = 13$, iar numărul mai mare este $13 + 12 = 25$.

b) *Într-o magazie sînt 582 kg zahăr, de 5 ori mai mult zahăr tos decît cubic. Cîte kilograme de zahăr de fiecare fel sînt?*

Dacă avem 20 kg zahăr cubic, avem $20 \cdot 5 = 100$ kg zahăr tos, iar în total $20 + 100 = 120$ kg, nu 582 kg. Se obţine tabloul:

Zahăr cubic	Zahăr tos	Total	Diferenţă pînă la 582
20	100	120	462
21	105	126	456
22	110	132	450
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

Pentru fiecare kilogram de zahăr cubic în plus, diferenţa din ultima coloană scade cu 6. Pentru ca diferenţa să scadă cu 462, trebuie să mărim numărul 20 cu $462 : 6 = 77$. În magazie sînt $20 + 77 = 97$ kg zahăr cubic şi $97 \cdot 5 = 485$ kg zahăr tos.

c) *Într-o gospodărie sînt de 4 ori mai multe găini decît raţe. Numărul găinilor este cu 78 mai mare decît numărul raţelor. Cîte găini şi cîte raţe sînt?*

Luăm cazul cînd sînt 12, 13, 14,... raţe; obţinem tabloul:

Raţe	Găini	Diferenţa	Diferenţa pînă la 78
12	48	36	42
13	52	39	39
14	56	42	36
15	60	45	33
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

Numerele din ultima coloană scad din 3 în 3. Pentru ca diferenţa 42 să dispară, trebuie să mărim numărul 12 cu 42 : : 3 = 14. Gospodăria are $12 + 14 = 26$ raţe şi $26 \cdot 4 = 104$ găini.

În încheierea acestei părţi, ţin să accentuez că, dacă am căutat să scot în evidenţă avantajele metodei preconizate aici, nu rezultă că celelalte metode sînt lipsite de valoare sau măcar că această metodă ar fi cea mai bună. Artificiile îşi au rostul lor în matematică, şi ingeniozitatea nu trebuie neglijată. Ceea ce doresc este ca metoda propusă aci să fie acceptată cel puţin alături de celelalte metode.

În ceea ce priveşte posibilitatea de a face probleme de acest fel la clasă, ea depinde de nivelul clasei. Problemele ca cele discutate aci, pot constitui însă, în tot cazul, un material bun pentru cercul de matematică.

Punerea problemelor în ecuaţie

Care este greutatea principală la punerea problemelor în ecuaţie? De a exprima prin semne matematice relaţiile dintre mărimile care intervin în problemă. Este vorba de dependenţa funcţională; diferitele mărimi care intervin trebuie exprimate în *funcţie* de una din ele considerată ca necunoscută.

Deoarece tablourile ca cele folosite mai sus scot în evidenţă dependenţa funcţională, ele pot fi foarte utile la punerea problemelor în ecuaţie. Elevului îi vine mai uşor să facă operaţii cu numere date (căci le face efectiv) decît cu expresii care conţin litere (de multe ori operaţia nici nu se face; a aduna x cu 3 înseamnă a scrie: $x + 3$). După ce s-au completat cîteva rînduri din tablou, cel mult trei, se scrie în prima coloană x şi atunci

este foarte uşor să se facă aceleaşi lucrări ca în primele rînduri. În problemele pe care le-am rezolvat mai înainte am introdus şi acest rînd. Pentru a scrie ecuaţia problemei (ultima coloană este de prisos) se egalează expresiile din două coloane, astfel:

Problema 1: $160 - x = 3 \cdot (20 + x)$;
Problema 5: $50 - 3x = 6 \cdot (30 - 2x)$;
Problema 6: $10 \cdot (x - 3) = 9x + 5$

ş.a.m.d.

Evident, aceste tablouri nu trebuie să constituie o etapă obligatorie în punerea problemelor în ecuaţie. Se recurge la ele din cînd în cînd, îndeosebi la probleme mai grele. Dacă insist asupra lor, n-o fac numai pentru că văd în ele un auxiliar pentru punerea problemelor în ecuaţie, ci pentru că ele sînt un mijloc de a-i face pe elevi să înţeleagă noţiunea de funcţie şi, prin aceasta, să înţeleagă mai profund ce este o ecuaţie: nu „două *expresii* legate prin semnul =", ci două *funcţii* legate prin semnul =. Completînd coloanele unui tablou, se calculează valorile funcţiei care corespund valorii variabilei din prima coloană.

În clasele superioare, cînd se trece la studiul funcţiilor, în special la studiul trinomului, elevii se obişnuiesc greu să vadă în litera x o variabilă; pentru ei x este o necunoscută. Şi acest lucru este perfect explicabil, căci aşa s-au obişnuit în perioada lungă cît au lucrat cu ecuaţii. Dacă elevii se obişnuiesc din vreme să privească ecuaţia ca o egalitate între două funcţii, greutatea nu apare sau este atenuată.

Totodată se clarifică sensul noţiunii de soluţie a unei ecuaţii: valoarea variabilei pentru care cele două funcţii au aceeaşi valoare. În primele rînduri ale tabloului valorile lui x *nu* satisfac ecuaţia. Se înţelege bine ce înseamnă că un număr satisface o ecuaţie cînd se văd şi numere care nu o satisfac.

Funcţia liniară

Aproape toată materia care se predă la aritmetică în clasa a VI-a este centrată pe o singură idee: ideea de proporţie. Aici se explică elevilor ce sînt mărimi direct proporţionale şi invers proporţionale şi li se dă pentru prima oară — deşi sub o formă încă insuficient cristalizată — ideea de mărime variabilă. În mai toate cărţile de aritmetică găsim în adevăr o definiţie ca următoarea: „Două mărimi sînt direct (invers) proporţionale atunci cînd..." Deci, se vorbeşte despre mărimi susceptibile de

a avea mai multe valori. Totodată elevii se obișnuiesc cu o anumită schemă de rezolvare a problemelor de regulă de trei:

$$a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b$$
$$a' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ?$$

În clasa a VII-a se tratează la algebră funcția liniară sau cel puțin funcția $y = ax$. În toate manualele pe care le cunosc, această noțiune este prezentată izolat și formal, în sensul că se studiază o relație între numere abstracte, și nu se valorifică faptul că elevii au lucrat mai înainte un an întreg cu această funcție, dar fără să o exprime într-o formulă.

În fond, schema schițată mai sus, pe care o fac elevii atunci cînd au de rezolvat o problemă de regulă de trei, în care mărimile sînt direct proporționale, revine la problema următoare:

Se știe că între două variabile, x și y, există relația $y = kx$ (se știe că y este direct proporțional cu x) și că, pentru $x = a$, y are valoarea b (condiție inițială). Se cere valoarea lui y care corespunde unei valori date a lui x, $x = a'$.

Exemplu: *15 caiete costă 4 lei. Cît costă 11 caiete?*

Fie x numărul caietelor și y costul lor:

Schema
$$15 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4$$
$$11 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y$$

ne arată lucrul următor:

Se știe că y (costul unui număr de caiete) este direct proporțional cu x (numărul lor). Deci, y și x sînt legați prin relația $y = kx$. Se cere să se determine coeficientul de proporționalitate k și, funcția fiind astfel determinată se cere să se afle valoarea lui y pentru $x = 11$. Așadar, rîndul întîi din schemă reprezintă condițiile inițiale care ne permit să aflăm valoarea lui k, iar rîndul al doilea ne arată pentru care valoare a lui x trebuie să aflăm valoarea lui y.

Dacă folosim din plin metoda algebrică, această problemă s-ar rezolva deci astfel:

1. Știm că între x și y există relația $y = kx$ și ni se dă că, pentru $x = 15$, $y = 4$. Deci

$$4 = 15\ a,$$

de unde

$$a = \frac{4}{15}.$$

Deci în cazul nostru funcţia este

$$y = \frac{4}{15}x.$$

2. Rămîne să aflăm valoarea acestei funcţii pentru $x = 11$.

Avem: $y = \frac{4}{15} \cdot 11 = \frac{44}{15} = 2\frac{14}{15}$.

Evident, nu aceasta este calea care poate fi urmată în clasă, dar socot că se poate proceda în felul următor: se propune un grup de probleme de regulă de trei, în care primul număr din rîndul al doilea este variabil, de exemplu:

15 caiete costă 4 lei. Cît costă 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 14, 17,... caiete?

Se face de 2—3 ori schema obişnuită:

15.....4	15.....4
2.....?	3.....?

ş. a. m. d. Lucrarea începe să fie plicticoasă. Elevii fiind de mult obişnuiţi să opereze cu numere reprezentate prin litere, propunerea de a înlocui primul număr din rîndul al doilea printr-o literă şi de a rezolva problema o dată pentru totdeauna va fi bine primită, — se va găsi poate, un elev care să facă această propunere.

Se face schema:

$$\begin{matrix} 15 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 4 \\ x & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & y \end{matrix}$$

Se aminteşte că costul unui număr de caiete este direct proporţional cu numărul caietelor şi se scrie proporţia

$$\frac{15}{x} = \frac{4}{y},$$

de unde

$$y = \frac{15}{4}x.$$

Nu rămîne decît să dăm în această expresie lui x valorile din enunţ şi să aflăm valorile corespunzătoare ale lui y.

Un alt procedeu ar fi cel bazat pe reducerea la unitate.

Se înţelege uşor că un caiet costă $\frac{15}{4}$ lei, deci x caiete vor costa

$$y = \frac{15}{4}x \text{ lei.}$$

Primul procedeu are avantajul că, pentru a ajunge la expresia $y = \frac{15}{4}x$, se folosește *proporția*, deci se justifică denumirea de *mărimi (direct) proporționale*: procedeul al doilea face să se înțeleagă mai bine formula $y = kx$, care exprimă relația dintre două mărimi (direct) proporționale: dacă 1 caiet costă k lei, x caiete costă kx lei, deci costul lor este $y = kx$.

Pentru fixare, se propun mai multe probleme de regulă de trei, în care primul număr din rîndul al doilea este nedeterminat (exprimat printr-o literă). Mărimile concrete vor fi cît mai variate.

1. *Un robinet dă în 8 minute 25 litri apă. Să se exprime cantitatea de apă (y) în funcție de timpul (x) cît robinetul este deschis. Să se afle cîți litri de apă dă robinetul în: 3, 8, 5½..... minute.*

Soluția s-ar putea redacta astfel:

$$\begin{array}{c} 8 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 25 \\ \underline{x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y} \end{array}$$

$$\frac{8}{x} = \frac{25}{y}; \qquad y = \frac{25}{8}x$$

x	3	8	$5\frac{1}{2}$	.....
y	$\frac{25}{8} \cdot 3 = 9\frac{3}{8}$	$\frac{25}{8} \cdot 8 = 25$	$\frac{25}{8} \cdot \frac{11}{2} = \frac{275}{16} = 17\frac{3}{6}$	....

2. *O echipă de cosași a cosit în 7 zile 3 ha de trifoi. Să se exprime întinderea (y) a unui loc pe care această echipă îl poate cosi în funcție de numărul zilelor de lucru (x). Să se afle valoarea acestei funcții pentru* $x = 2$, $x = 1\frac{1}{4}$, $x = 7$ *ș. a. m. d.*

3. *Într-o școală în care sînt 12 sobe, se consumă într-o zi 200 kg lemne. Să se exprime cantitatea de lemne (y) ce se consumă zilnic într-o școală în funcție de numărul sobelor (x).*

De la un timp, după nivelul cunoștințelor elevilor clasei, se poate renunța la diferitele valori numerice ale lui x; este suficient să cerem expresia funcției, ca în ultimul exemplu.

Consider că acest mod de a introduce funcția liniară este cu totul potrivit cu posibilitatea de înțelegere a elevilor de clasa VII-a și realizează o sudură satisfăcătoare între procedeele folosite la

aritmetică şi expresia $y = kx$ a funcţiei liniare. Această noţiune nu mai este un simplu adaos la programa de algebră, ci o cristalizare a unui mod de a raţiona care este foarte familiar elevilor. Totodată se scoate în evidenţă folosul notaţiei algebrice, în care se exprimă printr-o singură formulă o idee care în aritmetică se realizează pe nenumărate cazuri. Elevii văd cum se rezolvă printr-o singură formulă un număr mare de probleme de regulă de trei, fără a reface de fiecare dată schema.

Graficele

Strîns legat de funcţia liniară este graficul ei. Consider că putem folosi aceste grafice fără să fim prea scrupuloşi în privinţa demonstraţiei faptului că o ecuaţie de forma $y = ax + b$ reprezintă o dreaptă. Acest fapt se poate stabili prin exemple.

Se ia, de exemplu, funcţia $y = 2x - 5$, se dă lui x un şir de valori, se calculează valorile corespunzătoare ale lui y, se reprezintă în raport cu două axe punctele corespunzătoare şi se constată că ele se înşiră frumos pe dreaptă.

Această idee, o dată dobîndită, poate şi trebuie să fie folosită pe scară largă la rezolvarea unor probleme unde soluţia apare imediat şi este foarte intuitivă cînd se foloseşte reprezentarea grafică. Mă gîndesc în special la problemele de mişcare uniformă.

Pentru aceasta, este necesar ca elevii să înveţe mai întîi să facă şi să citească o diagramă. Este vorba de următoarele probleme, care pot fi considerate ca fundamentale:

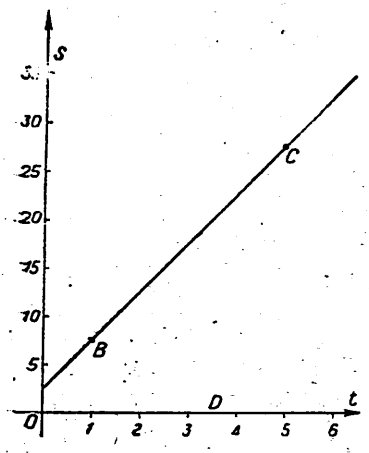


Fig. 3

1. Să se construiască diagrama mişcării unui mobil cînd se cunoaşte locul plecării şi viteza. Exemplu: mobilul porneşte dintr-un punct situat la 3 km de origine şi are o viteză de 5 km/oră, îndreptată în sens pozitiv.

Luăm pentru 1 oră un segment de 1 cm, iar pentru 1 km un segment de 2 mm (fig. 3).

La începutul mişcării, mobilul se găseşte în punctul A de coordonate $t = 0$, $s = 3$. Într-o oră, el face 5 km, deci după

o oră el se găseşte în punctul B de coordonate $t = 1$, $s = 8$. Diagrama mişcării este dreapta AB.

2. Se cunosc poziţiile mobilului în două momente date. Exemplu: La ora 3 mobilul se găseşte la 12 km de origine, iar la ora 5 el se găseşte la 2 km de origine.

Diagrama este dreapta MN (fig. 4), în care M şi N au coordonatele: M (3,12), N (5,2). S-a luat pentru 1 oră un segment de 1 cm, şi pentru 1 km un segment de 5 mm.

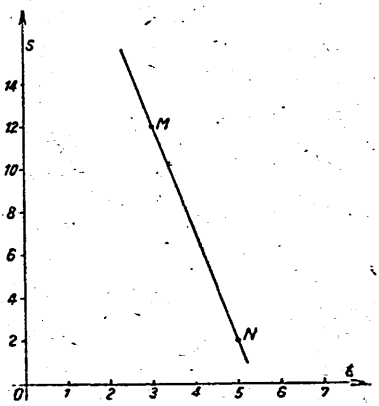


Fig. 4

3. Prin citirea diagramei se înţeleg următoarele:

a) Aflarea locului în care se află mobilul la un moment dat.

Exemplu: în cazul figurii 3, pentru a afla unde se află mobilul în momentul $t = 5$, ducem prin punctul 5 de pe axa Ot o paralelă la axa Os şi obţinem pe diagramă punctul C. Cînd se foloseşte hîrtie milimetrică, această paralelă este gata dusă. Ordonata acestui punct este $CD = 28$. Mobilul se află la 23 km de origine.

b) Aflarea momentului în care mobilul se află într-un punct dat.

Exemplu: în cazul figurii 4, pentru a afla cînd mobilul se află la 8 km de origine, ducem prin punctul A, o paralelă la axa OS şi obţinem punctul B. Citim pe grafic că abscisa acestui punct este $AB = 4{,}8$ ore, adică 4 ore şi 48 minute.

c) Sensul mişcării. Cînd mobilul merge înainte, diagrama este o dreaptă care urcă, ca cea din figura 3; cînd mobilul merge înapoi, diagrama este o dreaptă care coboară, ca cea din figura de mai sus.

d) Aflarea vitezei. Viteza este dată de diferenţa ordonatelor a două puncte ale căror abscise diferă cu o unitate.

Exemplu: în cazul figurii 4 luăm, de exemplu punctele M şi B care corespund momentelor $t = 3$ şi $t = 4$. Ordonatelor sînt: 12 şi 8. Viteza mobilului este $12 - 8 = 4$.

Mobilul merge cu atît mai repede cu cît diagrama este mai înclinată faţă de orizontală. Repausul este reprezentat printr-un segment paralel cu axa timpului (t creşte, s rămîne neschimbat).

e) Întîlnirea a două mobile este dată de punctul de intersecție a diagramelor. Abscisa acestui punct ne dă momentul întîlnirii, iar ordonata — locul întîlnirii.

Aceste idei se fixează prin cîteva exerciții. Citirea diagramelor se poate face pe diagrame gata făcute.

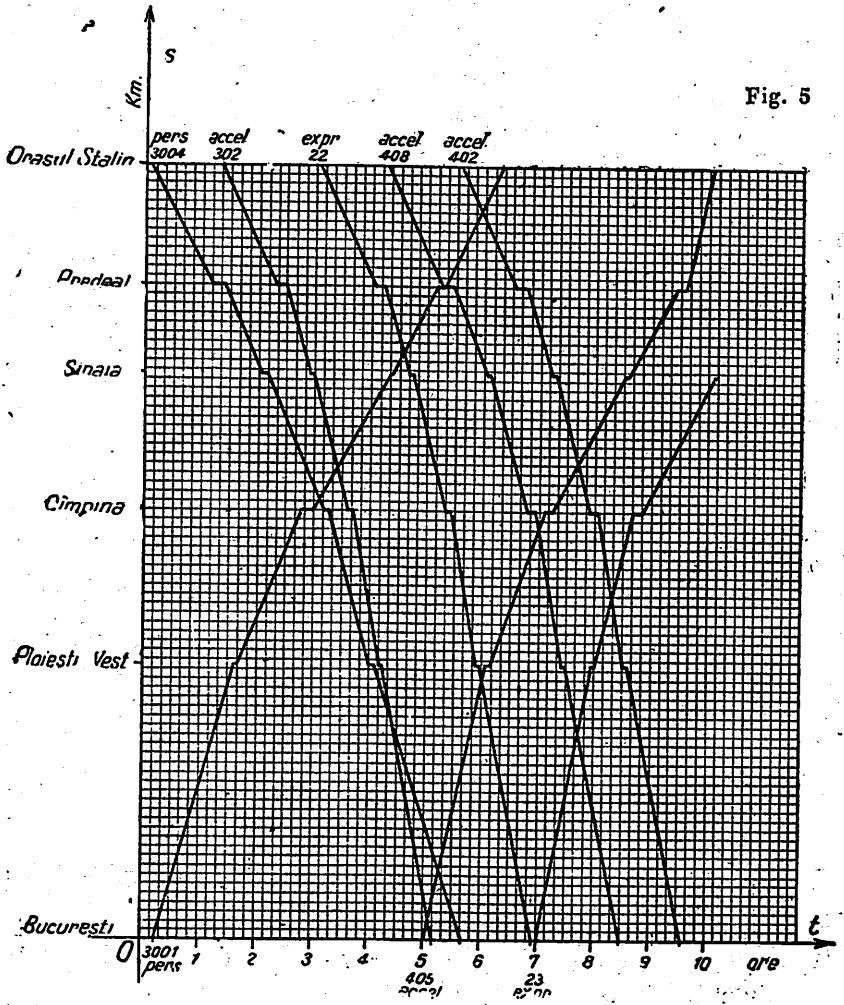


Fig. 5

În figura 5 se dă graficul cîtorva trenuri de pe linia București — Orașul Stalin. Mărit, astfel încît să capete dimensiunile unui

afiș, poate constitui un material util (diagramele se trag în diferite culori și cu grosimi diferite). Pe diagramă se pot citi răspunsurile la întrebări ca următoarele: La ce oră pleacă trenul... din București? Cînd ajunge la Bușténi? Unde se găsește la ora...? Unde face cruce cu trenul... ? Cum variază viteza lui? Pe ce parte din drum are viteza cea mai mică? ș. a. m. d.

Iată acum cîteva exemple de probleme:

1. *Două localități A și B se găsesc la o distanță de* 30 *km una de alta. Din A pleacă un om pe jos către B, iar în același timp cu el pleacă din B un biciclist către A. Viteza primului este de* 5 *km/oră, iar viteza celui de-al doilea este de* 10 *km/oră. Se cer momentul și locul întîlnirii.*

Pe axa timpului luăm pentru 1 oră un segment de 24 mm, ceea ce înseamnă că 2 mm corespund la 5 minute; pe axa spațiului, luăm pentru 1 km un segment de 5 mm (fig. 6).

Diagrama pietonului: în momentul inițial, pietonul se află în origine. După o oră, el se găsește la 5 km de origine. Diagrama mișcării sale este dreapta I, care unește originea cu punctul (1,5).

Diagrama biciclistului: în momentul $t = 0$, biciclistul se găsește la 30 km de origine, deci în punctul B (0,30). După o oră, el se găsește la 20 km de origine. Deci diagrama sa trece prin punctul C (1,20).

Diagramele o dată trasate, coordonatele punctului lor de intersecție M, ne dau momentul și locul întîlnirii. Citim pe figură că mobilele se întîlnesc în momentul $t = 2$ și în locul $s = 10$, adică la două ore după plecare și la zece kilometri de punctul A.

Cu ajutorul acestei diagrame se poate răspunde la unele întrebări, ca următoarele:

a) Cît de mare este distanța dintre cele două mobile, în momentul $t = 1$ oră 20 minute?

Prin punctul corespunzător C ducem o paralelă la axa spațiului. Distanța este dată de segmentul $DE = 50$ mm, care corespunde unei distanțe de 10 km.

b) Cînd este distanța dintre cele două mobile de 5 km?

Luăm pe axa spațiului un segment $ON = 5$ și ducem prin N o paralelă la diagrama I, iar prin punctul P în care această dreaptă taie diagrama II ducem o paralelă la axa spațiului. Răspunsul este dat de abscisa punctului P. Se citește că ea este de 40 mm, ceea ce corespunde la 1 oră 40 minute.

În mod analog se află că distanța dintre cele două mobile este din nou de 5 km în momentul dat de abscisa punctului P', care corespunde la 2 ore 20 minute.

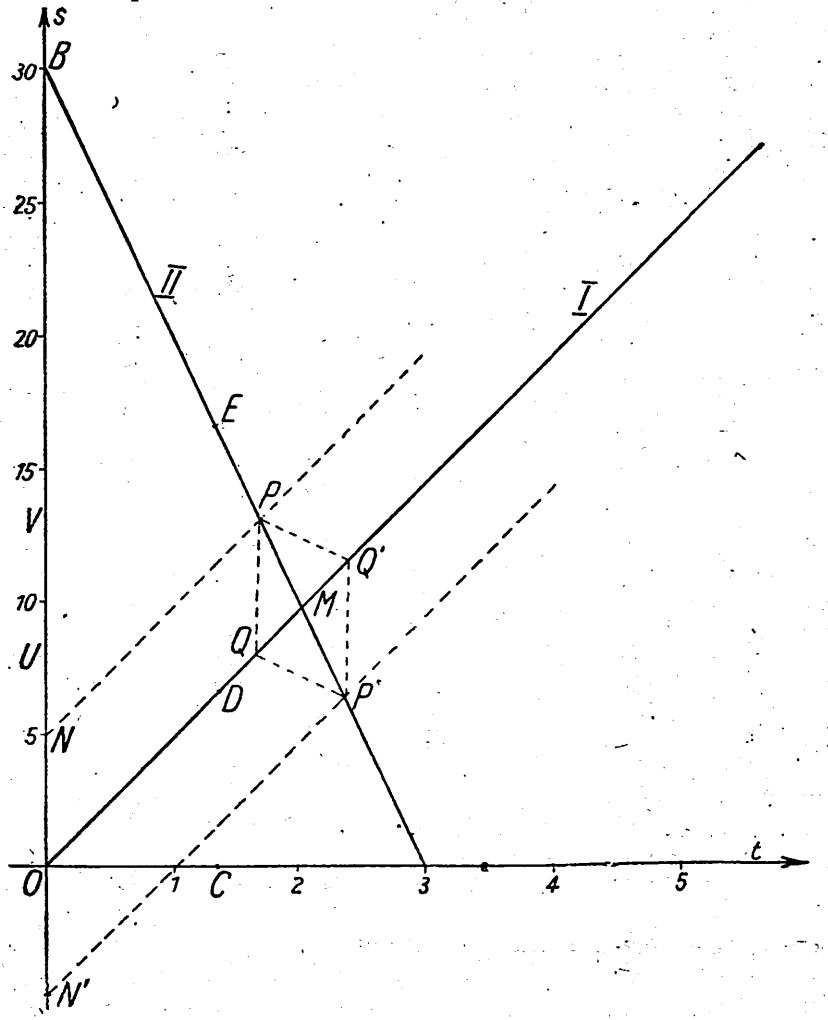


Fig. 6

Se observă că $PQP'Q'$ este un paralelogram (PQ este egal și paralel cu $P'Q'$), punctul M este centrul lui. Diagonalele paralelogramului se împart în părți egale, deci $MP = MP'$.

Rezultă că și proiecțiile acestor segmente pe axele de coordonate vor fi egale. Prima dată cînd distanța dintre cele două mobile este cea cerută, pietonul se găsește într-un punct U, iar bicicletistul într-un punct V; distanța dintre ei va fi din nou aceeași, cînd bicicletistul va fi în V, iar pietonul în U. Aceeași simetrie se observă cu privire la timp: distanța dintre cele două mobile este cea cerută la 20 minute înainte de întîlnire și tot la 20 minute după întîlnire.

(Răspunsul la această întrebare se poate da și pe baza unor paralele duse la diagrama II prin punctele 25 și 35 de pe axa spațiului).

2. Problema analoagă în cazul cînd cele două mobile se mișcă în același sens și pleacă din același punct, momentul plecării nefiind același. De exemplu:

Dintr-o localitate A, pleacă un biciclist și merge cu o viteză de 8 km/oră. Cu 3 ore mai tîrziu, pleacă pe aceeași șosea și în același sens o mașină care face 50 km/oră. După cît timp și în ce loc ajunge mașina pe biciclist?

Diagrama mișcării bicicletistului: pentru $t = 0$, avem $s = 0$; pentru $t = 1$, avem $s = 8$. Deci diagrama este dreapta I (fig. 7) care trece prin origine și prin punctul (1,8).

Diagrama mișcării mașinii: Pentru $t = 3$, avem $s = 0$. Pentru $t = 4$, avem $s = 50$. Deci această diagramă va fi o dreaptă care trece prin punctele (3,0), (4,50).

Punctul M în care se taie aceste drepte ne dă ora și locul întîlnirii.

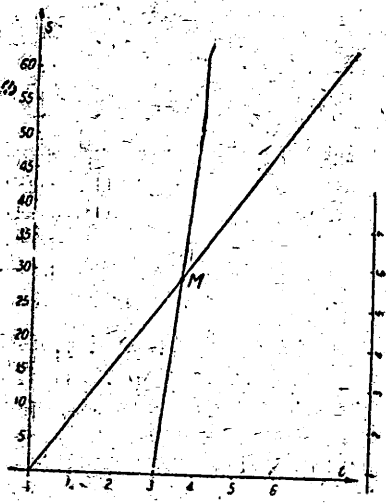


Fig. 7

Citim pe figură că mobilele se întîlnesc la 3 ore 35 minute (aproximativ) după plecarea bicicletistului, la 29 kilometri (aproximativ) de locul de plecare.

Și în legătură cu această problemă se pot pune întrebări suplimentare ca cele de mai sus.

Iată un exemplu mai complicat:

3. *Doi muncitori locuiesc în aceeași curte și pleacă în același timp la fabrică, primul pe jos, al doilea cu bicicleta, vitezele lor*

fiind de 4,8 km/oră și 12 km/oră. După 10 minute de mers, biciclistul își aduce aminte că a uitat ceva acasă, se întoarce, ia obiectul uitat și pornește din nou spre fabrică. Amîndoi ajung la fabrică în același timp. Se cere distanța de la locuința lor pînă la fabrică.

Graficul din figura 8 descrie cele două mișcări.

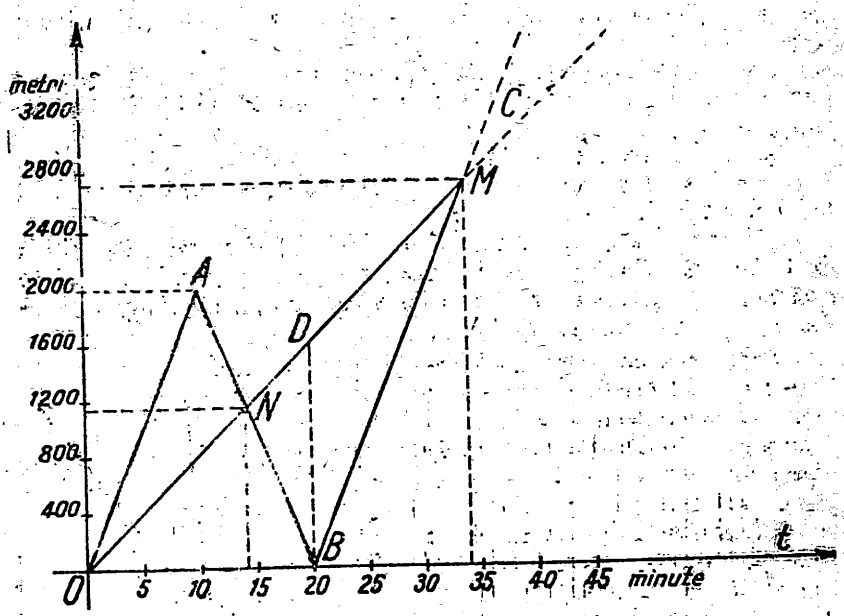


Fig. 8

Diagrama mișcării biciclistului: în zece minute, biciclistul, face 2 km. Fixăm punctul A (10,2000) și ducem segmentul OA, care corespunde cu drumul biciclistului pînă la întoarcere. Pentru înapoiere îi trebuie biciclistului alte 10 minute. Marcăm punctul B (20,0); segmentul AB corespunde cu drumul înapoi. În sfîrșit, ducem prin B o paralelă la AB. Semidreapta BC corespunde mișcării biciclistului cînd pornește a doua oară de acasă. Diagrama mișcării biciclistului este linia frîntă $OABC$.

Graficul mișcării pietonului: în 20 minute, pietonul face $4800 : 3 = 1600$ m. Marcăm punctul D (20,1600) și ducem dreapta OD, care este diagrama mișcării pietonului.

Cele două linii se taie în punctul M. Citim pe grafic coordonatele acestui punct: $t = 34$, $s = 2700$ (aproximativ). Fabrica se găsește la cca. 2400 m de locuința celor doi muncitori.

Pe același grafic mai putem citi următoarele: drumul de acasă pînă la fabrică durează (aproximativ) 34 minute. Biciclistul, cînd se întoarce, întîlnește pietonul la cca. 14 minute după plecare (abscisa punctului N).

Variante:

În această problemă intră următoarele mărimi:
1) viteza pietonului, 2) viteza biciclistului, 3) distanța de la locuință la fabrică. Se pot deci compune trei probleme pe această temă, unde una sau alta din aceste mărimi este necunoscută.

4. Deosebit de sugestivă este soluția grafică a problemei următoare[1]:

Doi băieți dispun de o singură bicicletă și vor să meargă de la A la B. Ei se înțeleg să pornească o dată, primul din ei pe bicicletă, iar al doilea pe jos. Într-un punct M al drumului, primul va lăsa bicicleta și-și va continua drumul pe jos. Al doilea băiat, cînd ajunge în punctul M unde se găsește bicicleta, o ia și continuă drumul pe bicicletă. Cum trebuie ales punctul M pentru ca amîndoi să ajungă în același timp la destinație?

Amîndoi băieții merg cu aceeași viteză pe jos și cu aceeași viteză pe bicicletă.

Figura 9 dă o descriere completă a mișcării.

Diagrama mișcării primului băiat este o dreaptă OP, iar a celui de-al doilea — o dreaptă OQ mai puțin înclinată față de axa timpului (viteza pietonului este mai mică decît a biciclistului). Din momentul (QC) în care primul băiat lasă bicicleta și își continuă drumul pe jos, graficul mișcării sale este o dreaptă DR paralelă cu OQ. Din momentul cînd primul băiat lasă bicicleta, diagrama ei este o dreaptă DS paralelă cu Ot (bicicleta este în repaus). Punctul E în care se taie dreptele OQ, DS dă momentul în care al doilea băiat găsește bicicleta. De aci înainte, diagrama mișcării sale este o dreaptă ET paralelă cu OP. Punctul F corespunde

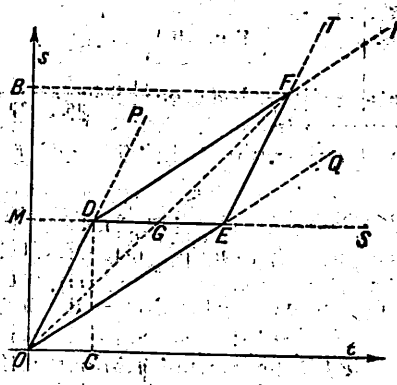


Fig. 9

[1] V. Laisant, Initiation mathématique, Ed. Hachette.

cu întîlnirea celor doi băieți, deci cu punctul de destinație. Diagramele mișcării sînt:

Primul băiat: linia frîntă ODF;
Băiatul al doilea: linia frîntă OEF;
Bicicleta: linia frîntă $ODEF$.

$OEFD$ este un paralelogram. Deoarece diagonalele unui paralelogram se taie în părți egale, G

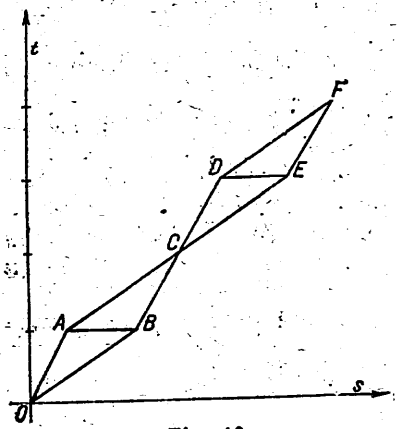


Fig. 10

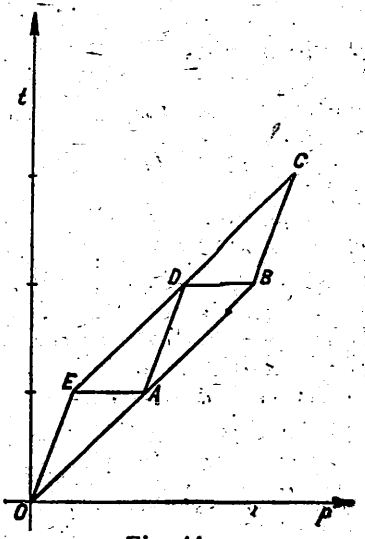


Fig. 11

este mijlocul diagonalei DE. Rezultă că și M este mijlocul segmentului OB. Punctul M în care trebuie lăsată bicicleta este mijlocul segmentului OB, adică la mijlocul drumului.

Soluția devine evidentă dacă ne gîndim că amîndoi băieții pleacă în același timp și ajung la destinație în același timp. Ei trebuie să beneficieze în măsură egală de bicicletă, căci dacă unul din ei s-ar folosi de bicicletă mai mult timp decît celălalt, ar ajunge mai devreme la destinație. Rezultă că ei trebuie să parcurgă pe bicicletă drumuri egale. Ceea ce înseamnă că punctul M trebuie să fie la mijlocul drumului.

Variante:

a) Băieții se pot înțelege să facă schimb, nu o dată, ci de mai multe ori. Figura 10 descrie cazul cînd schimbul se face de două ori. La mijlocul drumului, cei doi băieți se regăsesc și călătoria reîncepe. Diagrama mișcării primului băiat, care pornește pe bicicletă, este linia frîntă $OACDF$, diagrama mișcării băiatului al doilea este $OBCEF$, iar diagrama mișcării bicicletei este $OABCDEF$.

b) Figura 11 dă descrierea mișcării în cazul cînd sînt trei băieți și o bicicletă. Fiecare din ei beneficiază de bicicletă

numai pe o treime din drum şi ei ajung în acelaşi timp la destinaţie.

Diagramele sînt:

Primul băiat:	OEC
Băiatul al doilea:	$OADC$
Băiatul al treilea:	OBC
Bicicleta:	$OEADBC$

Dau, în continuare, două exemple de probleme care pot fi numite probleme globale, în sensul următor: dacă urmărim în mod amănunţit mişcarea fiecărui mobil, problema devine foarte complicată, dar soluţiile se obţin uşor dacă aruncăm o privire de ansamblu asupra fenomenelor. Graficul înlesneşte această privire de ansamblu.

5. *Un autobus face curse între două puncte A şi B. O dată cu autobusul porneşte un pieton din punctul A. Viteza autobusului este V km/oră, iar viteza pietonului este v km/oră. De cîte ori întîlneşte pietonul autobusul?*

Soluţia problemei este dată de figura 12, în care linia în formă de zig-zag $OA_1A_2A_3\ldots$ reprezintă diagrama mişcării autobusului, iar linia dreaptă OA_{13} — a pietonului. Se citeşte pe figură că pietonul întîlneşte autobusul de 13 ori, unde am socotit şi autobusul care porneşte o dată cu pietonul şi cel care ajunge la capătul liniei o dată

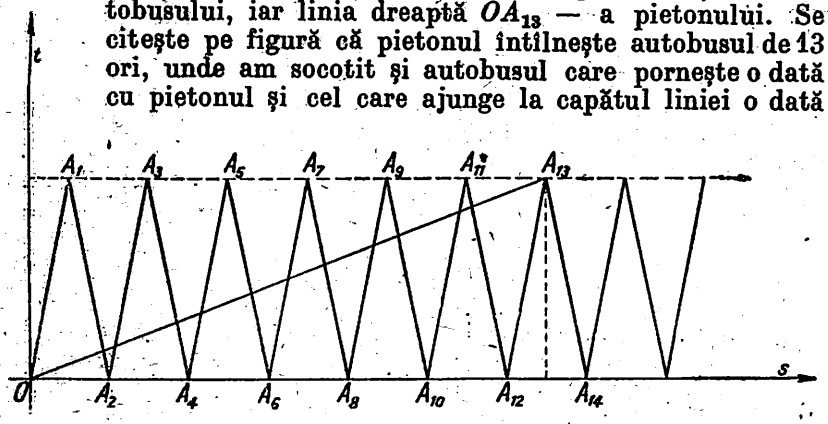


Fig. 12

cu pietonul; n-am socotit şi plecarea care are loc tot atunci.

Diagrama ne permite să stabilim o relaţie simplă între numărul care arată de cîte ori pietonul se întîlneşte cu autobusul şi raportul dintre viteza autobusului şi a pietonului, V: v.

În adevăr, fie din nou (fig. 13) $OA_1A_2A_3$ diagrama mișcării autobusului și OM a pietonului. Raportul vitezelor celor două mobile este

$$\frac{V}{v} = \frac{BC}{BA_1} = n,$$

căci BC și BA_1 reprezintă spațiul parcurs de cele două mobile în același interval de timp (durata unei curse).

Triunghiurile asemenea ODM, OBC dau

$$\frac{OB}{OD} = \frac{BC}{DM}.$$

Dar $DM = BA_1$, deci

$$\frac{OB}{OD} = n.$$

Dacă n este un număr impar, M este un vîrf al unuia dintre triunghiurile isoscele OA_1A_2, $A_2A_3A_4$,... Fie $M = An$ acest vîrf. Graficul arată

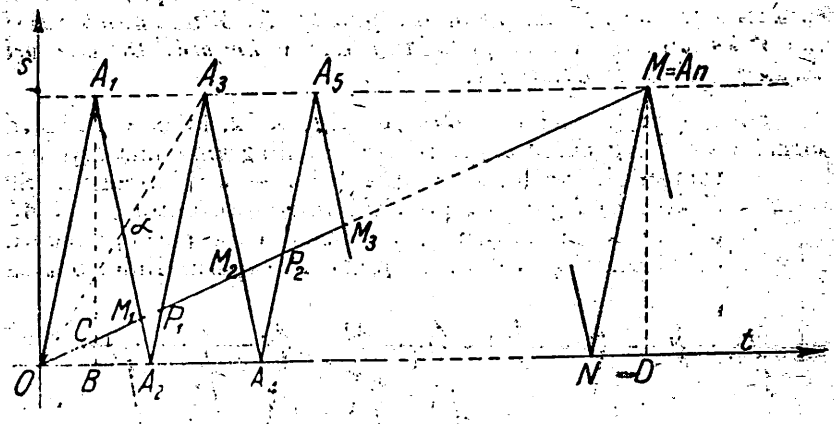


Fig. 13

următoarele: dacă graficul pietonului este OA_3 (M cade în A_3) au loc trei întîlniri (în sensul precizat mai sus), dacă graficul pietonului este OA_5 au loc cinci întîlniri ș.a.m.d. Dacă M coincide cu An; au loc n întîlniri. E cazul din figură.

Dacă n nu este impar (n este par, fracționar sau irațional), punctul M cade între două vîrfuri A_p și A_{p+2}, iar numărul întîlnirilor este $p + 1$ (cel mai mare număr impar mai mic decît n, mărit cu o unitate). De acest lucru ne dăm seama ușor astfel: ducem dreapta OA_3; în acest caz sînt trei întîlniri, date de punctele O, α, A_3. Dacă rotim puțin această dreaptă în jurul punctului O apropiind-o de Ot, ea taie și segmentul A_3A_4 într-un punct situat între A_3 și A_4, deci sînt patru întîlniri, și numărul întîlnirilor rămîne același pînă cînd dreapta noastră devine OA_5.

Graficul ne dezvăluie și alte aspecte. Astfel,

$$OM_1 = M_1M_2 = M_2M_3 = \ldots$$

căci sînt segmente determinate pe transversala OM de dreptele paralele A_1A_2, A_3A_4,... iar $OA_2 = A_2A_4$... Rezultă că și intervalele de timp dintre două întîlniri propriu-zise consecutive sînt egale între ele. Prin întîlnire propriu-zisă înțeleg că mobilele merg în sensuri opuse.

În același fel se arată că intervalele de timp dintre două întîlniri consecutive de celălalt fel (cînd autobusul ajunge pietonul din urmă) sînt egale între ele ($OP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = \ldots$).

S-ar putea studia șirul de segmente M_1P_1, M_2P_2,... care dau intervalele de timp dintre două întîlniri consecutive de natură diferită ș.a.m.d.

6. *Două localități A și B sînt legate printr-o linie de autobuse. Autobusele circulă între ora 5 dimineața și 11 seara, în sensul că la ora 5 dimineața pleacă cîte un autobus din A și B, iar ultima plecare are loc la ora 11 seara. Durata unei curse este de două ore, iar autobusele pleacă din jumătate în jumătate de oră. Cîte autobuse sînt necesare? Cîte autobuse întîlnește fiecare autobus în timpul unei curse?*

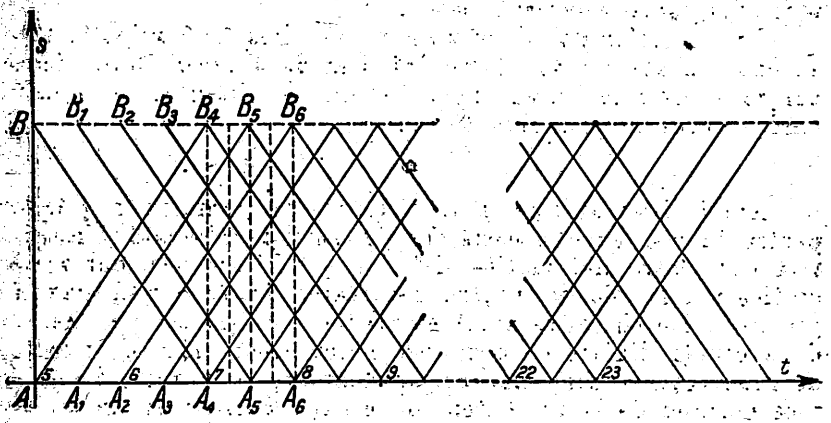


Fig. 14

Figura 14 dă o descriere completă a mișcărilor. Segmentul AB_6 și cele paralele cu el sînt graficele mișcării autobuselor într-un sens, segmentul A_1B și cele paralele cu el — în celălalt sens.

a) La orele 5,5½ ş.a.m.d. pleacă din A cîte un autobus (diagrame: AB_4, A_1B_5, A_2B_6, ...); aceste autobuse îşi fac prima cursă, cîtă vreme în A n-a sosit nici un autobus, deci trebuie puse în circulaţie mereu autobuse noi (care vin de la depou). Abia la ora 7 soseşte în A primul autobus (diagrama BA_4) şi porneşte spre A, deci nu mai sînt necesare autobuse noi. În total, sînt necesare patru autobuse, cu plecările date de punctele A, A_1, A_2 şi A_3. În B situaţia este aceeaşi — deci sînt necesare $4 + 4 = 8$ autobuse.

b) Dacă urmărim graficul unui autobus care are plecarea după ora 7, de exemplu cursa a cărei diagramă porneşte din B_5, numărăm pe figură 8 întîlniri (am socotit şi autobusul care pleacă din A în clipa în care soseşte autobusul nostru). Acest lucru este valabil pentru toate autobusele care pleacă după ora şapte sau înainte de ora 21 (inclusiv). Primul autobus care pleacă din B întîlneşte numai 5 autobuse, al doilea numai 6 ş. a. m. d.

Este interesant de observat că întîlnirile au loc numai cînd ceasul arată un număr întreg de ore sau... şi 1/4, şi 1/2 sau... fără 1/4. Acest lucru este indicat în figură prin liniile punctate dintre punctele B_4 şi B_6.

O problemă interesantă care se poate rezolva uşor cu ajutorul diagramei este următoarea:

Un controlor poate controla un autobus în 5 minute. Cîte autobuse poate controla într-o oră? Dar dacă îi trebuie 10 minute pentru a controla un autobus? Depinde rezultatul de momentul cînd se urcă în primul autobus?

*

Am insistat atît de mult asupra diagramelor mişcărilor pentru că mă tem că această chestiune atît de frumoasă şi instructivă cade între matematică şi fizică — deci nicăieri, dar aceste grafice pot fi folosite pentru rezolvarea *oricărei* probleme de gradul I. De obicei se arată elevilor că soluţia unui sistem de două ecuaţii liniare cu două necunoscute este dată de punctul de intersecţie a dreptelor corespunzătoare, dar acest lucru se face pornind de la un sistem de ecuaţii *dat*. Ar fi instructiv să se pornească, nu de la un sistem de ecuaţii dat, ci de la o problemă. Lucrurile ar fi mai puţin schematice, mai concrete. În cazul unui sistem de două ecuaţii, de exemplu, graficul arată cum variază, nu y în funcţie de x — ceea ce este abstract — ci mărimea sau mulţimea concretă reprezentată de y. Voi arăta aceasta pe două exemple.

1. Reiau problema 8 de la pag. 28.

Reprezentăm grafic numărul elevilor în funcţie de numărul băncilor.

Prima aşezare: dacă n-avem nici o bancă, toţi elevii stau în picioare, deci clasa are 7 elevi; dacă avem 6 bănci, numărul elevilor este $3 \cdot 6 + 7 = 25$. Punctele (0,7), (0,25) ne permit să

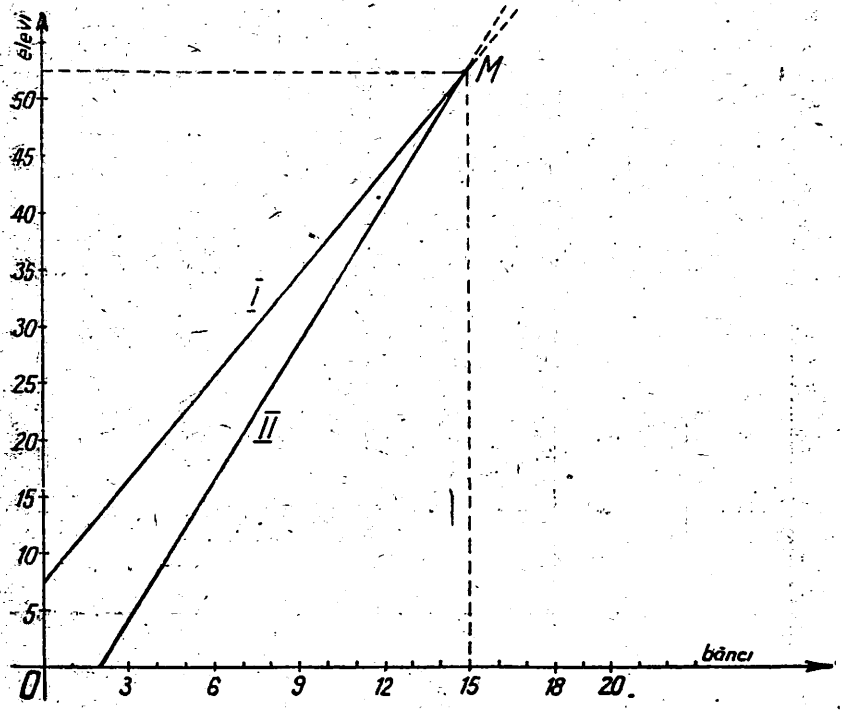


Fig. 15

trasăm dreapta I. E o dreaptă care urcă; cînd numărul băncilor creşte, numărul elevilor creşte de asemenea.

Aşezarea a doua: în mod analog, cu ajutorul punctelor (2,0), (7,20), se obţine dreapta II. Această dreaptă urcă mai rapid ca prima, căci, de data aceasta, fiecare bancă în plus reprezintă 4 locuri în plus — în loc de 3.

În general, numărul elevilor în cele două moduri de aşezare nu este acelaşi, o dreaptă paralelă cu axa ordonatelor nu taie ambele drepte în acelaşi punct. Soluţia problemei este dată de punctul M. Graficul arată că sînt 15 bănci şi puţin peste 50 de elevi.

2. În unele cazuri, soluția problemei se obține, nu prin intersecția celor două drepte, ci printr-o cale care seamănă cu soluția obișnuită.

Ca exemplu, luăm problema 6 de mai sus.

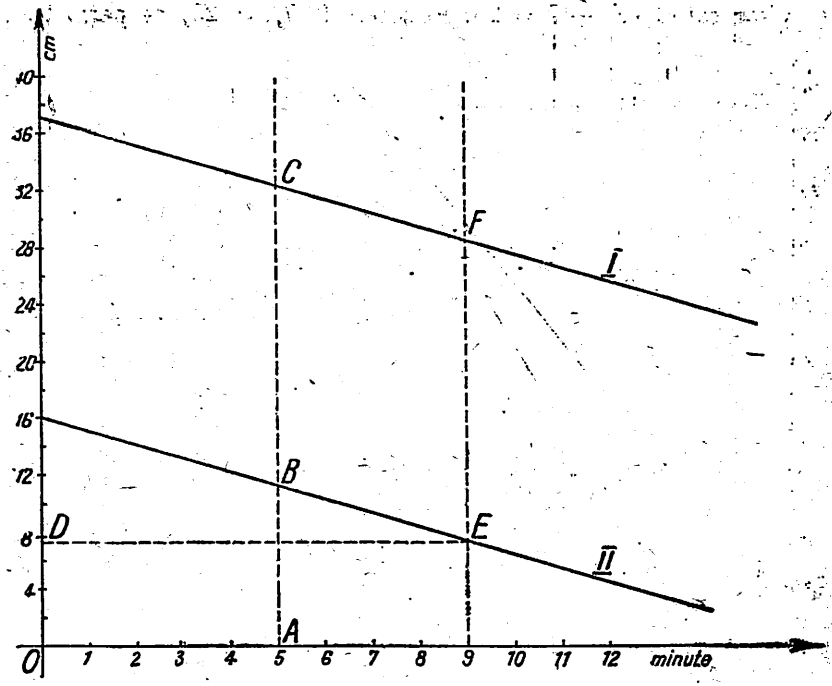


Fig. 16

Prima lumînare: în momentul $t = 0$, ea are o lungime de 37 cm, iar în momentul $t = 5$, lungimea ei este de $37 - 5 = 32$ cm. Punctele (0,37), (5,32) ne permit să trasăm dreapta I (fig. 16), care dă lungimea primei lumînări în funcție de timp. Dreapta coboară, ceea ce înseamnă că lungimea lumînării scade cu timpul.

Lumînarea a doua: în mod analog se obține dreapta II. Această dreaptă este paralelă cu prima — cele două lumînări scad deopotrivă de repede.

Pentru a avea diferența dintre lungimile celor două lumînări la un moment dat, de exemplu după 5 minute, ducem prin punctul 5 o paralelă la axa ordonatelor. Segmentul BC este diferența căutată.

Trebuie să deplasăm dreapta ABC astfel ca AC să fie de 4 ori mai mare ca AB — sau astfel ca BC să fie de 3 ori mai mare ca AB. Or, dreptele I și II sînt paralele. Cînd dreapta ABC se deplasează paralel cu ea însăși, segmentul BC păstrează o lungime constantă, $BC = 37 - 16 = 21$. Va trebui deci ca AB să fie de $21 : 3 = 7$ unități.

Problema este rezolvată. Prin punctul D (0,7) ducem o paralelă la axa absciselor: ea taie dreapta II într-un punct E. Abscisa acestui punct ne dă momentul căutat. Graficul dă $t = 9$ minute.

Graficele dau o privire de ansamblu asupra dependențelor dintre mărimi, asupra variației lor, care îmi pare deosebit de utilă. Construcția lor are un caracter practic, ea cere elevilor să se orienteze de la început asupra ordinului mărimilor ce intervin în problemă, pentru a putea alege unitățile în mod convenabil.

Celelalte funcții elementare din cursul de algebră

1. Funcția $y = ax^2 + bx + c$ face parte de mult din programele de algebră elementară. Ca și în cazul funcției liniare, pentru a face ca elevii să-și însușească bine această temă, trebuie rezolvate numeroase probleme în care intervine această funcție. Mă refer la probleme de geometrie și fizică în care se cere să se studieze variația unor mărimi ce se exprimă sub această formă.

În cele mai multe culegeri de probleme și manuale, această chestiune este oarecum neglijată. Astfel, culegerea de probleme de P. A. Laricev, atît de bogată de altfel, conține la acest capitol 32 de probleme cu numeroase subpuncte, dintre care una singură (686) este de tipul la care mă refer. Culegerile de probleme franceze conțin foarte multe probleme de maxim și minim, dar la cele mai multe dintre aceste probleme se cer numai valorile extreme ale funcției, care se află pe baza discuției ecuației de gradul II, deci nu se valorifică ceea ce se învață la această temă, și anume că funcția $f(x) = ax^2 + bx + c$ își atinge valoarea extremă pentru $x = \frac{b}{a}$.

Într-un articol publicat în Gazeta matematică și fizică, nr. 3—4/1953 m-am ocupat pe larg de această chestiune, dînd numeroase probleme de acest tip, deci care se pot rezolva fără a încărca programa. Dau aici numai un singur exemplu.

Două puncte se mișcă pe laturile unui unghi drept, fiecare pe o altă latură, cu vitezele constante V și v. La începutul mișcării,

ele se află la distanțele a respectiv b de vîrful unghiului. Să se studieze variația distanței dintre ele.

În momentul x, punctul A (fig. 17) se găsește în M, iar B în N, unde

$$AM = a + \mathrm{V}x,\ BN = b + \mathrm{v}x.$$

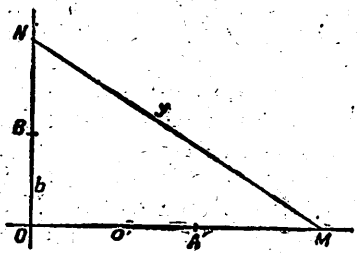


Fig. 17

Teorema lui Pitagora, aplicată în triunghiul OMN, dă

$$y^2 = (a + \mathrm{V}x)^2 + (b + \mathrm{v}x)^2$$

sau

$$y^2 = (\mathrm{V}^2 + \mathrm{v}^2)\,x^2 + 2x\,(a\mathrm{V} + b\mathrm{v}) + a^2 + b^2.$$

Această funcție (putem studia variația funcției y^2 în locul variației funcției y) are un minim pentru

$$x = -\frac{a\mathrm{V} + b\mathrm{v}}{\mathrm{V}^2 + \mathrm{v}^2}$$

Avem în tot cazul un minim, căci $\mathrm{V}^2 + \mathrm{v}^2 > 0$.

Luînd pentru a, b, V, v, valori numerice convenabile se pot construi diferite variante ale acestei probleme.

2. Funcția exponențială se definește, în cursurile de algebră, treptat. Ea se definește întîi pentru cazul cînd exponentul este un număr natural, dar sub o formă de nerecunoscut: ca progresie geometrică. Se consideră șirul

$$a, aq, aq^2, \ldots$$

și se studiază unele proprietăți ale lui, dar nu se arată că este vorba de funcția

$$y = aq^x$$

unde x parcurge șirul numerelor naturale. Mai tîrziu, cînd se introduce funcția exponențială $y = a^x$ ($a > 0, x$ rațional), de obicei, nu se face legătura[1] cu progresiile geometrice. Unele

[1] Același fenomen se produce cu progresia aritmetică: nu se arată că termenii unei progresii aritmetice nu sînt altceva decît valorile funcției $y = ax + b$ cînd x parcurge valorile 1, 2, 3,... n. Lucrul este, în acest caz, cu atît mai ciudat cu cît această funcție a fost studiată într-o clasă anterioară. Această anomalie își găsește explicația în istoria matematicii. Șirurile de numere au fost studiate încă din antichitate, deci cu mult înainte de a se studia funcții în care argumentul ia toate valorile reale dintr-un anumit interval. În învățămînt, această formă arhaică s-a păstrat pînă azi, cu o notație specială. Acest lucru este justificat. Nu este justificat faptul că progresiile aritmetice sînt prezentate și astăzi ca ceva deosebit de funcția liniară.

aplicații ale funcției exponențiale apar astfel sub o denumire pe care o consider nepotrivită, ca aplicații la progresiile geometrice. Consider această denumire ca nepotrivită, pentru că din cauza ei, se pulverizează ideile, se pierde unitatea.

Studiul funcției exponențiale, ca și a celorlalte funcții elementare nu este complet dacă nu se arată și unele aplicații ale ei. În literatura didactică se dau, de obicei, — deși sub o denumire improprie — mai multe aplicații ale funcției exponențiale cînd variabila ia valori discrete: dobînda compusă, anuități, probleme legate de mașina pneumatică ș.a. Trebuie introduse și aplicații în care variabila variază în mod continuu.

În aplicațiile pe care le am în vedere joacă un rol important următoarea însușire a funcției exponențiale:

Creșterile funcției sînt proporționale cu valorile ei.

În adevăr, fie funcția

$$y = a^x,$$

x o valoare oarecare a variabilei, iar h o creștere a ei. Creșterea corespunzătoare a funcției este

$$k = a^{x+h} - a^x = a^x a^h - a^x = a^x (a^h - 1).$$

Dacă considerăm h constant, factorul $a^h - 1$ este constant, deci raportul

$$\frac{k}{a^x} = a^h - 1$$

este constant. Dar numitorul, a^x, este valoarea funcției în punctul x. Rezultă că raportul $\frac{k}{y}$ dintre creșterea funcției și valoarea ei este constant, adică afirmația noastră de mai sus.

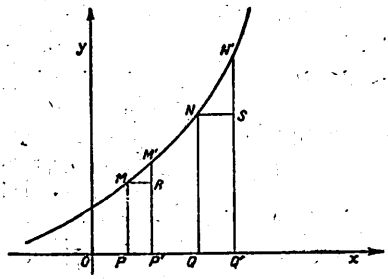


Fig. 18

Precizez că această afirmație are sens numai dacă creșterile lui x sînt constante.

Grafic, acest fapt se interpretează astfel: fie M și N două puncte de pe curba $y = a^x$, M' și N' două puncte vecine cu ele, unde $PP' = QQ'$ $(= h)$. Are loc relația:

$$\frac{RM'}{P'M'} = \frac{SN'}{Q'S'}.$$

Se poate demonstra că, reciproc, dacă creșterile unei funcții $y = f(x)$ sînt proporționale cu valorile ei, acea funcție este

de forma $y = a^x$, dar această demonstrație nu se poate face în cadrul matematicii elementare.

Datorită acestei proprietăți, funcția exponențială a căpătat numele de *funcția creșterii organice*, căci se admite că, cantitatea cu care crește un corp viu este, într-un interval de timp convenabil, proporțională cu mărimea acelui obiect. De exemplu, cantitatea de lemn dintr-o pădure crește anual cu un anumit procent din cantitatea inițială. Creșteri sau descreșteri de același tip au loc și la unele fenomene fizice. De exemplu, cînd o rază de lumină trece printr-un mediu absorbant, pe o porțiune mică de drum, ea pierde o anumită fracție din energia pe care a avut-o la început. Sînt deci exemple frumoase de dependență complexă, în care ceea ce a fost efect într-o primă etapă devine cauză în etapa următoare. În cazul unei mulțimi de viețuitoare, puii dintr-o generație devin părinți în generația următoare; în cazul absorbției, faptul că raza și-a pierdut o parte din energie pe o primă porțiune de drum face ca, în porțiunea următoare să piardă mai puțin, căci fracția rămîne aceeași.

Urmează cîteva exemple din fizică.

1. Energia transportată de o mișcare vibratorie este dată de formula:

$$W = W_0 e^{-kx},$$

unde W_0 este energia la izvor, W este energia în punctul de abscisă x, iar k este o constantă care depinde de mediu.

2. Transmiterea temperaturii într-o bară se face după legea:

$$t - t_2 = (t_1 - t_2) \cdot e^{-kx},$$

unde t_1, t_2 și t sînt respectiv temperatura la un capăt al barei, temperatura ambiantă și temperatura în punctul de abscisă x, iar k este o constantă, care depinde de forma barei, de materialul din care este făcută ș.a.m.d.

3. În radioactivitate, dezagregarea se face după formula:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

unde N_0 este numărul nucleelor existente la un moment inițial $t_0 = 0$ (arbitrar ales), N este numărul nucleelor rămase nedezintegrate la un moment t, λ este constanta radioactivă.

Chestiuni de geometrie elementară

În geometria elementară, se studiază figuri rigide, toate mărimile sînt constante și se stabilesc relații între aceste mărimi. În acest spirit a studiat Euclid geometria și așa a rămas pînă

în ziua de azi. Noțiunea de variabilă este mai recentă, ea a început să fie luată în considerare abia din secolul al XVII-lea, dar această noțiune n-a pătruns în geometria elementară „care face anatomie descriptivă, nu funcțională".

Cred că expunerea geometriei ar cîștiga — cel puțin ca vioiciune — dacă s-ar folosi într-o măsură mai largă mișcarea.

A. Teoremele în care intervin neegalități s-ar putea formula cu ajutorul unor elemente mobile. De exemplu:

Fie O un punct exterior unei drepte d, P piciorul perpendicularei coborîtă din O pe d și OM o oblică (fig. 19). *OM > OP, și cînd M se depărtează de P, OM crește.*

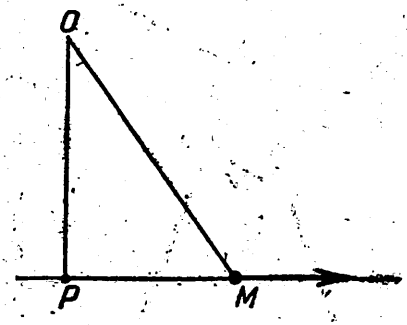


Fig. 19

Sau:

Dacă într-un $\triangle ABC$ (fig. 20) *unghiul A variază și laturile AB, AC rămîn constante, latura BC variază în același sens cu unghiul A.*

Acest din urmă enunț este categoric preferabil teoremei despre „triunghiuri cu două laturi respectiv egale".

B. Proporțiile folosite în geometrie merită o atenție deosebită în această ordine de idei. La capitolul „Asemănare" se folosesc pe scară largă proporții. Dar datorită faptului că numerele care se folosesc acolo sînt de cele mai multe ori măsurile unor segmente, precum și faptul că fiecare număr este reprezentat prin două litere, *AB*, *MN*, ideile apar într-o formă nouă și elevii nu fac în măsură suficientă legătura între proporțiile din aritmetică și cele din geometrie. În plus, proporțiile se aplică de cele mai multe ori numai la două figuri, așa că elevilor le scapă din vedere faptul că mărimile care intervin în aceste proporții sînt și ele susceptibile de a lua un număr mare de valori.

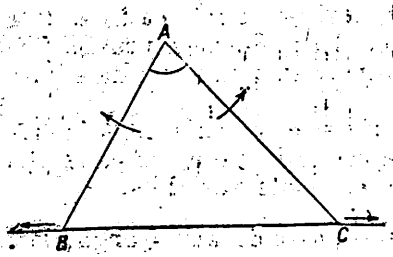


Fig. 20

Propun ca, de exemplu, teorema lui Thales, pe lîngă formularea clasică, să fie dată și sub forma următoare:

Fie (fig. 21) AOB un unghi şi MN o dreaptă care se mişcă paralel cu ea însăşi. Dacă notăm OM cu x şi ON cu z, atunci z este direct proporţional cu x.

Tot în aceeaşi figură $y = MN$ este direct proporţional cu x.

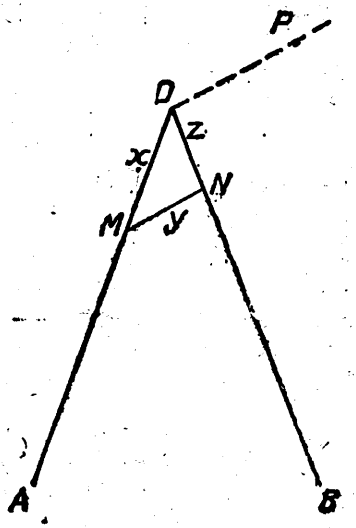


Fig. 21

Acest enunţ are faţă de cel clasic avantajul că scoate bine în evidenţă faptul că variabila x (lungimea segmentului OM) poate varia în mod continuu.

Dacă elevii sînt deprinşi să privească în acest fel proporţiile din geometrie, deducerea ecuaţiei dreptei nu mai prezintă nici o dificultate. În adevăr, să ducem $OP \| MN$ şi să privim OA şi OP ca două axe de coordonate. Faptul că MN este direct proporţional cu OM se scrie $y = ax$. Cînd N descrie dreapta OB, avem $y = ax$. Aceasta este ecuaţia dreptei OB.

C. Capitolul arii şi volume ne oferă un cîmp vast de folosire a noţiunilor de variabilă şi de funcţie.

În mod obişnuit, formulele pentru arii şi volume sînt privite ca reguli după care se află aria sau volumul cînd elementele necesare sînt date. Aceste elemente sînt considerate ca fiind date o dată pentru totdeauna, constante. În problemele uzuale, formulele sînt privite ca ecuaţii în raport cu una sau alta dintre mărimile pe care le conţin.

Consider că este foarte instructiv şi contribuie mult la lărgirea orizontului elevilor să privim aceste formule, nu ca relaţii între constante, ci ca relaţii între elemente variabile.

Fie de exemplu formula $A = \frac{bi}{2}$, care dă aria trunghiului. Această formulă ne învaţă că aria unui triunghi este direct proporţională cu baza şi cu înălţimea triunghiului. Aceasta înseamnă că, dacă baza sau înălţimea unui triunghi se măreşte de un număr de ori, aria sa se măreşte de acelaşi număr de ori.

Interpretarea în acest sens nu prezintă nici o dificultate, mai ales cînd este sprijinită de figură — ori de cîte ori acest lucru este posibil.

În manualul de geometrie pentru clasa a VII-a chestiunile au fost tratate în acest spirit şi s-au propus numeroase exerciţii simple, menite să obişnuiască elevii cu acest mod de a vedea lucrurile. Aci mă limitez la două exemple.

1. *Aria unui triunghi este de* 93463,5842 m^2. *Baza unui alt triunghi este de cinci ori mai mare decît baza acestui triunghi, iar înălţimea triunghiului al doilea este de două ori mai mare decît înălţimea primului. Se cere aria triunghiului al doilea.*

La prima vedere, problema ar putea părea nedeterminată. Ca să aflu aria triunghiului al doilea trebuie să cunosc bază şi înălţimea sa. Pentru aceasta, ar trebui să cunosc baza şi înălţimea primului triunghi, dar nu le pot afla, căci nu cunosc decît aria acestui triunghi — s-ar putea spune. O soluţie a problemei s-ar putea obţine eliminînd b şi i între relaţiile

$$\frac{bi}{2} = 93463{,}5842,\ b' = 5b,\ i' = 2i,\ S' = \frac{b'i'}{2},$$

ceea ce este greoi. Cred că aşa ar proceda un elev mijlociu. Dacă sîntem însă deprinşi să privim b şi i ca variabile, răspunsul este imediat:

Triunghiul al doilea se poate obţine mărind baza primului triunghi de cinci ori şi înălţimea de două ori. Prin aceasta, aria triunghiului se măreşte de $5 \cdot 2 = 10$ ori. Nu rămîne decît să mutăm virgula peste o cifră spre dreapta.

2. *Fundul unei farfurii are un diametru de* 20 *cm. Avem nişte monede cu diametrul de* 2 *cm. Punem pe fundul farfuriei* 12 *astfel de monede. Cît la sută din fundul farfuriei va fi acoperit?*

Aflăm aria fundului farfuriei, aria unei monede, împărţim şi exprimăm raportul în procente — acesta ar fi un mod de rezolvare nepotrivit, deşi corect. Problema se poate rezolva în gînd.

Aria unui cerc este direct proporţională cu pătratul razei sale. Dacă raza monedei este de 10 ori mai mică decît raza farfuriei, aria sa va fi de 100 de ori mai mică. Cu alte cuvinte, aria unei monede este 1% din aria farfuriei. Cele 12 monede acoperă 12 % din fundul farfuriei.

D. Problemele de maxim şi minim sînt tratate de obicei ca probleme de algebră. S-ar contribui la realizarea unei fuziuni între spiritul mai nou în care domină noţiunea de variabilă, şi geometria elementară dacă în cadrul geometriei s-ar rezolva, prin mijloace geometrice, unele probleme de maxim şi minim.

Dau cîteva exemple.

1. *Într-un triunghi ABC dreptunghic în A* (fig. 22) *se duce $MN \| AB$, iar din N se coboară $NP \perp AB$. Să se demonstreze că aria dreptunghiului $AMNP$ este maximă cînd M este mijlocul lui AC.*

Fie MN linia mijlocie a triunghiului ABC. Ducem $M'N' \| MN$. Trebuie să demonstrăm că aria dreptunghiului $AM'N'P'$ este mai mică decît aria dreptunghiului $AMNP$.

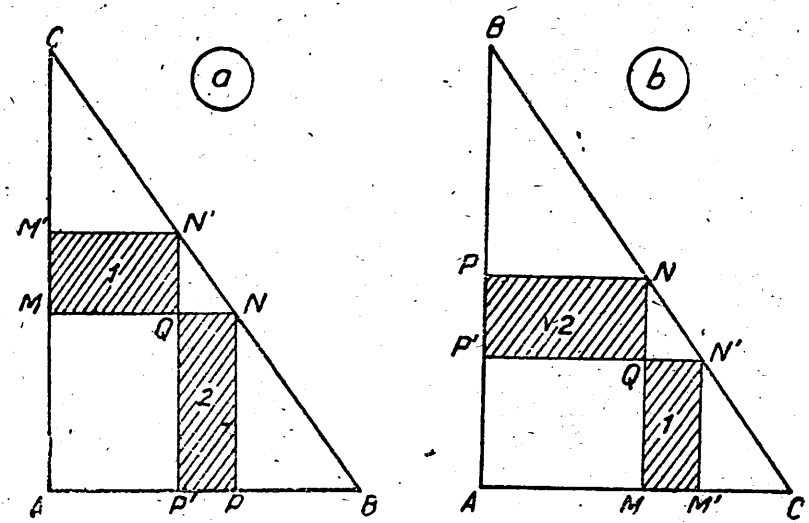


Fig. 22

Aceste dreptunghiuri au o porțiune comună: $AMQP'$. Rămîne deci să demonstrăm că dreptunghiul 1 are o arie mai mică decît dreptunghiul 2.

Triunghiul QNN' este asemenea cu triunghiul MNC, deci

$$\frac{QN}{MN} = \frac{N'Q}{MC}.$$

Înlocuim în această proporție MN prin MQ, care este mai mic. Obținem neegalitatea

$$\frac{QN}{MQ} > \frac{N'Q}{MC},$$

de unde

$$MQ \cdot N'Q < QN \cdot MC$$

sau, deoarece $MC = MA = NP$,

$$MQ \cdot N'Q < QN \cdot NP,$$

ceea ce a fost de demonstrat.

Demonstrația se poate repeta cuvînt cu cuvînt în cazul figurii *b* și cu aceasta demonstrația este completă.

Rezultatul se extinde numaidecît la un triunghi oarecare:

Dacă într-un triunghi oarecare ABC (fig. 23) *ducem* $MN \parallel BC$, $MP \perp BC$, $NQ \perp BC$, *aria dreptunghiului* $M\,N\,Q\,P$ *este maximă cînd* MN *este linia mijlocie a triunghiului.*

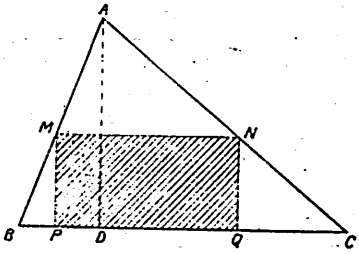


Fig. 23

În adevăr, înălțimea AD împarte triunghiul în două triunghiuri dreptunghice și pentru triunghiul dreptunghic teorema este demonstrată.

2. *Pe un segment* AB (fig. 24) *se ia un punct* M *și se construiesc pătratele de latură* AM *respectiv* MB. *Să se demonstreze că suma ariilor acestor pătrate este minimă cînd* M *este mijlocul lui* AB.

Cînd M este la mijlocul segmentului AB, cele două pătrate sînt $AMNP$ și $MBRN$. Cînd punctul M se mută în M' cele două pătrate sînt $AM'N'P'$ și $M'BR'N''$. Se cîștigă dreptunghiul 1 și se pierde dreptunghiul 2. Aceste dreptunghiuri au o latură egală: $SN' = SN'' = MM'$, iar $P'N' = AM' > M'B = SR$.

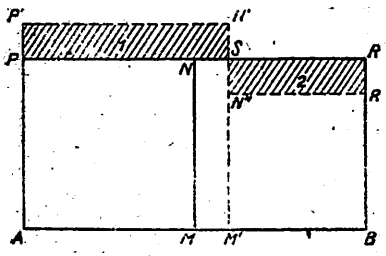


Fig. 24

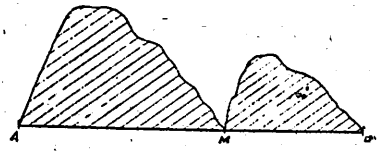


Fig. 25

Rezultă că aria dreptunghiului 1 este mai mare ca aria dreptunghiului 2, deci ...

Cu aceasta am demonstrat și propoziția următoare:

Dacă pe un segment AB (fig. 25) *se ia un punct* M *și se construiesc două figuri asemenea, astfel ca* AM *și* MB *să fie elemente omo-*

loage, suma ariilor acestor figuri este minimă cînd M este mijlocul segmentului AB.

În adevăr, ariile celor două figuri sînt proporționale cu AM^2 și MB^2.

3. *Dintre toate dreptunghiurile care au același perimetru, pătratul are aria cea mai mare.*

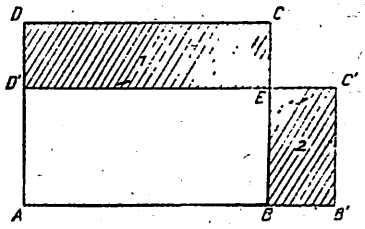


Fig. 26

Fie $ABCD$ (fig. 26) un pătrat și $AB'C'D'$ un dreptunghi care are același perimetru cu el. Dacă am mărit una dintre dimensiunile pătratului cu segmentul BB', trebuie să micșorăm cealaltă dimensiune cu un segment egal, $CE = BB'$. Prin aceasta se pierde dreptunghiul 1 și se cîștigă dreptunghiul 2. Dar aceste dreptunghiuri au cîte o latură egală: $CE = BB'$, iar $BE < DC$. Rezultă că aria dreptunghiului care se pierde este mai mare decît aria dreptunghiului care se cîștigă, deci...

Aria triunghiului ABC este jumătate din aria pătratului $ABCD$, iar aria triunghiului $AB'C'$ este jumătate din dreptunghiul $AB'C'D'$. Avem astfel teorema:

Dintre toate triunghiurile dreptunghice în care suma catetelor este aceeași, triunghiul isoscel are cea mai mare arie [1].

Cu aceasta devine imediată rezolvarea problemei următoare (de altfel bine cunoscută):

Pe laturile unui pătrat $ABCD$ (fig. 27) *se iau în același sens segmentele $AM = BN = CP = DQ$. Să se demonstreze că aria pătratului $MNPQ$ este minimă cînd M, N, P, Q sînt mijloacele laturilor respective.*

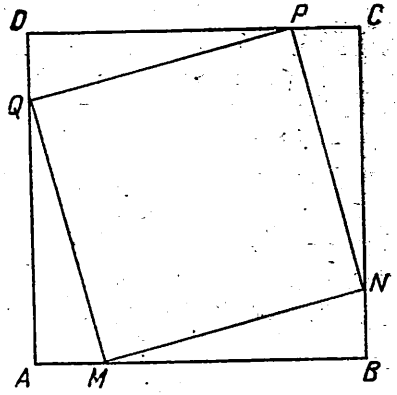


Fig. 27

În adevăr, aria pătratului este minimă cînd aria triunghiului MBN, de exemplu, este maximă. Or, cînd M se mișcă pe AB, suma catetelor $MB + BN$ este constantă, egală cu latura pă-

[1] Această chestiune va fi reluată în cele ce urmează.

tratului. Deci, aria acestui triunghi va fi maximă, cînd triunghiul va fi isoscel, adică atunci cînd M va fi mijlocul laturii AB.

Împotriva acestor exerciţii se poate ridica o obiecţiune. Problema constă de fapt în aflarea condiţiei în care o anumită mărime atinge o valoare extremă; aici se dă rezultatul şi se cere doar să se demonstreze că el este just. Obiecţiunea este justificată. Dar ea se poate ridica împotriva celor mai multe teoreme de geometrie elementară, unde rareori se cere să se afle ceva; de cele mai multe ori se cere să se demonstreze că ...

Funcţiile trigonometrice

La trigonometrie se studiază funcţiile trigonometrice. Totuşi atenţia elevilor este îndreptată în primul rînd spre transformările expresiilor care conţin funcţii trigonometrice, spre rezolvarea ecuaţiilor trigonometrice şi spre calculul numeric. Datorită acestui fapt, ideea de funcţie nu este pusă în valoare în măsură suficientă. Funcţiile trigonometrice nu sînt folosite pentru a studia variaţia unor fenomene, şi în special pentru determinarea valorilor extreme a unor mărimi variabile.

Cum am remarcat şi cu altă ocazie, se studiază variaţiile funcţiilor trigonometrice, se fac graficele acestor funcţii, dar culegerile de probleme obişnuite nu conţin aproape nici o problemă în care să se aplice cele studiate[1].

Cursul de trigonometrie ar avea mult de cîştigat dacă, pe lîngă problemele clasice (identităţi, ecuaţii, rezolvări de triunghiuri), s-ar folosi funcţiile trigonometrice pentru a studia variaţiile unor fenomene. Aici vin, în primul rînd, în consideraţie aplicaţiile funcţiilor trigonometrice la studiul oscilaţiilor. Problema este tratată foarte frumos în articolul prof. C. Borş în această culegere.

În al doilea rînd, vin în consideraţie probleme de geometrie şi mecanică, în special probleme de maxim şi minim. În cele ce urmează dau cîteva probleme simple de acest fel, care pot fi rezolvate cu uşurinţă în clasă. Problemele sînt departe de a fi inedite. Tot ce am făcut este că le-am grupat, precum se va vedea, punînd astfel la îndemîna colegilor materialul necesar pentru a traduce în fapt cele preconizate.

---

[1] Vezi şi articolul: „Unele probleme de predarea trigonometriei" de V. S. Davîdov (Matematika v şkole, nr. 2/1954).

Mă voi limita la probleme simple, care se pot face pe baza unui minim de cunoştinţe de trigonometrie, deci fără a încărca elevii cu formule în plus.

A. Vin în consideraţie în primul rînd probleme în care mărimea y a cărei variaţie se studiază apare sub forma $y = a \sin \alpha$, sau $y = a \cos \alpha$ ş.a.m.d., unde α variază, iar a este o constantă, cum ar fi:

1. *Într-un cerc de rază R dată, se duc două raze OA, OB* (fig. 28). *Să se studieze variaţia ariei triunghiului AOB, cînd unghiul $AOB = \alpha$ variază.*

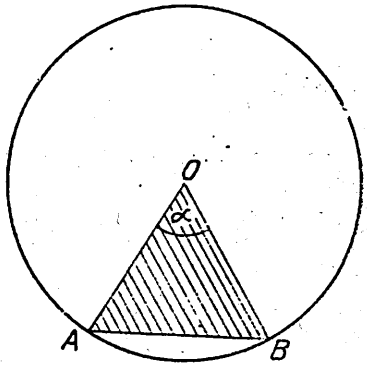


Fig. 28

Considerăm raza AO fixă şi OB mobilă. Unghiul α variază între 0° (OB coincide cu OA) şi 180° (OB este în prelungirea lui OA). Aria triunghiului AOB este

$$y = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha.$$

Se vede că y este proporţional cu $\sin\alpha$. Pentru $\alpha = 0$, avem $y = 0$, apoi y creşte şi atinge un maximum pentru $\alpha = 90°$. De aci înainte y descreşte şi, pentru $\alpha = 180°$, y este din nou zero.

B. Problemele următoare se rezolvă pe baza identităţii:

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha.$$

2. *Într-un semicerc de diametru $AB = 2R$ se înscrie un dreptunghi $MNPQ$* (fig. 29). *Cum trebuie dusă coarda MN pentru ca aria dreptunghiului să fie maximă?*

Luăm ca variabilă unghiul $BON = \alpha$ ($0 \leqslant \alpha \leqslant 90°$).

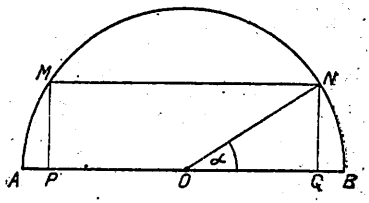


Fig. 29

Avem:

$$OQ = R \cos \alpha, \quad PQ = 2R \cos \alpha, \quad QN = R \sin \alpha.$$

Aria dreptunghiului este

$$y = PQ \cdot QN = 2R^2 \sin \alpha \cos \alpha = R^2 \sin 2\alpha.$$

y este proporţional cu $\sin 2\alpha$.

Pentru $\alpha = 0$, avem $y = 0$.

Cînd α crește, 2α crește, de asemenea și $\sin 2\alpha$, deci y crește. y atinge un maximum pentru $2\alpha = 90°$, deci $\alpha = 45°$. Apoi y descrește și se anulează pentru $2\alpha = 180°$, deci $\alpha = 90°$.

Dreptunghiul de arie maximă se obține luînd $\alpha = 45°$. În acest caz, $OQ = QN$, deci dreptunghiul este format din două pătrate. Valoarea maximului este

$$y_{max} = R^2 \sin 90° = R^2.$$

3. *Să se înscrie într-o sferă de rază R un cilindru circular drept de arie laterală maximă* (fig. 30).

Luăm o variabilă independentă unghiul $MOB = \alpha$ ($0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$). Avem:

$$MB = R \cos \alpha, \quad MM' = 2\,OM = 2R \sin \alpha.$$

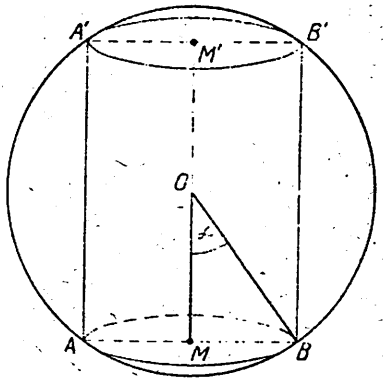


Fig. 30

Aria laterală este

$$y = 2\pi \cdot MB \cdot MM' = 4\pi R^2 \sin \alpha \cos \alpha = 2\pi R^2 \sin 2\alpha.$$

y este maxim o dată cu $\sin 2\alpha$, deci pentru $\alpha = 45°$. Valoarea acestui maxim este

$$y_{max} = 2\pi R^2.$$

Secțiunea axială prin cilindru este un pătrat, și anume pătratul înscris într-un cerc mare al sferei.

4. *Se dă un semicerc cu diametrul $AB = 2R$* (fig. 31). *Să se determine un punct M pe semicerc astfel încît triunghiul AMB să aibă aria maximă.*

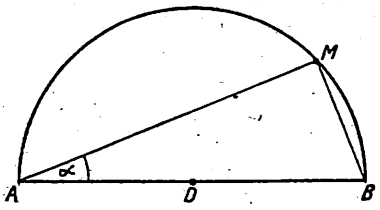


Fig. 31

Luăm ca variabilă independentă unghiul $MAB = \alpha$ ($0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$). Atunci: $MA = 2R \cos \alpha$, $MB = 2R \sin \alpha$, iar aria triunghiului este

$$y = \frac{1}{2} MA \cdot MB = 2R^2 \sin \alpha \cos \alpha = R^2 \sin 2\alpha$$

y este maxim o dată cu $\sin 2\alpha$, pentru $\alpha = 45°$. Valoarea acestui maxim este

$$y_{max} = R^2.$$

Observări. 1. Cînd $\alpha = 45°$, triunghiul AMB este isoscel. Deci, dintre toate triunghiurile dreptunghice înscrise în același semicerc, triunghiul isoscel are aria cea mai mare.

2. Mediana MO împarte triunghiul AMB în două triunghiuri echivalente, aria triunghiului AMB este dublul ariei triunghiului MPB, deci aria triunghiului AMB va fi maximă o dată cu aria triunghiului MOB. Problema se reduce astfel la problema 1 de mai sus.

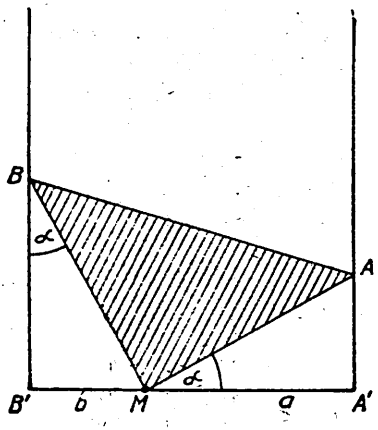


Fig. 32

5. *Se dau două drepte paralele și un punct M situat între ele* (fig. 32), *unde* $MA' = a$, $MB' = b$. *Un unghi drept AMB se rotește în jurul punctului M. Ce poziție trebuie să ocupe acest unghi pentru ca aria triunghiului AMB să fie maximă?*

a) Luăm ca variabilă unghiul $AMA' = MBB' = \alpha\ (0° \leqslant \leqslant \alpha \leqslant 90°)$. Triunghiurile $A'MA$, $B'BM$ dau:

$$MA = \frac{a}{\cos\alpha}, \quad MB = \frac{b}{\sin\alpha}$$

aria triunghiului AMB este

$$y = \frac{1}{2}\, MA \cdot MB = \frac{ab}{2 \sin\alpha \cos\alpha} = \frac{ab}{\sin 2\alpha}$$

Numărătorul acestei fracții este constant, fracția va fi minimă cînd numitorul ei va fi maxim, deci pentru $\alpha = 45°$. Atunci $\sin 2\alpha = \sin 90° = 1$ și aria triunghiului este

$$y_{max} = ab.$$

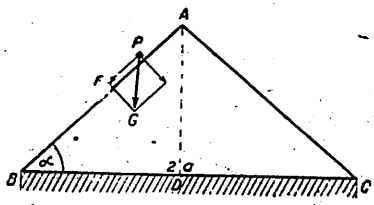


Fig. 33

6. *Ce unghi trebuie să formeze un acoperiș* (fig. 33) *cu orizontala, pentru ca apa să se scurgă într-un timp minim?*

Fie α unghiul căutat. Se știe că accelerația cu care se mișcă un punct pe un plan înclinat este

$$a = g \sin\alpha$$

unde g este accelerația gravității.

Dacă notăm cu $l = AB$ drumul parcurs de o picătură de ploaie, iar $BC = 2a$ baza acoperișului, avem:

$$l = \frac{a}{2} t^2 = \frac{g \sin \alpha}{2} t^2,$$

de unde

$$t^2 = \frac{2l}{g \sin \alpha}$$

Pe de altă parte, triunghiul ABD dă

$$l = \frac{a}{\cos \alpha},$$

deci

$$t^2 = \frac{2a}{g \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{4a}{g \sin 2\alpha}.$$

Pentru ca t^2 să fie minim trebuie ca $\sin 2\alpha$ să fie maxim, deci $\alpha = 45°$.

C. Cînd mărimea a cărei variație se studiază este proporțională cu $\sin \alpha + \sin \beta$ unde $\alpha \pm \beta$ este constant, variația se studiază ușor transformînd suma în produs. În adevăr în expresia obținută,

$$2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

unul din factori este constant. În mod analog se studiază mărimile proporționale cu

$$\sin \alpha - \sin \beta \quad \text{sau cu} \quad \cos \alpha \pm \cos \beta$$

cînd $\alpha + \beta$ sau $\alpha - \beta$ este constant.

Problemele care urmează se încadrează în această categorie.

7. *Se dă un semicerc cu diametrul $AB = 2R$. Să se determine un punct M pe semicerc astfel ca suma $MA + MB$ să fie minimă.*

Cu notațiile din figura 31, avem:

$$y = MA + MB = 2R (\sin \alpha + \cos \alpha)$$

Înlocuim $\cos\alpha$ prin $\sin (90° - \alpha)$ și transformăm suma în produs:

$$y = 2R [\sin \alpha + \sin (90° - \alpha)] = 4R [\sin 45° \cos (\alpha - 45°)] =$$
$$= 2R \sqrt{2} \cos (\alpha - 45°).$$

y este maxim o dată cu $\cos(\alpha - 45°)$, pentru $\alpha - 45° = 0$, $\alpha = 45°$.

Valoarea maximului este

$$y_{max} = 2R\sqrt{2}.$$

8. *Se dă un sector circular cu raza R şi unghiul $\alpha \leqslant 90°$* (fig. 34). *Dintr-un punct M al arcului său se coboară perpendiculare pe razele care mărginesc sectorul, MA, MB. Să-se determine poziţia punctului M astfel ca:*

a) suma $MA + MB$ să fie maximă;
b) suma $OA + OB$ să fie maximă;
c) aria $OAMB$ să fie maximă.

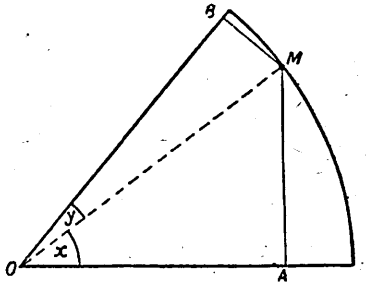


Fig. 34

a) Fie x şi y unghiurile formate de raza OM cu razele care mărginesc sectorul. Avem:

$$MA = R \sin x, \quad MB = R \sin y,$$
$$x + y = \alpha,$$

unde x şi y sînt cuprinşi între 0 şi α.

Se cere maximul sumei

$$s = R(\sin x + \sin y) = 2R \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = 2R \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{x-y}{2}.$$

s este maxim o dată cu $\cos \frac{x-y}{2}$, pentru $x = y$. Valoarea maximului este

$$s_{max} = 2R \sin \frac{\alpha}{2}.$$

b) Avem:

$$OA = R \cos x, \; OB = R \cos y, \; x + y = \alpha$$

$$S = R(\cos x + \cos y) = 2R \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{x-y}{2}.$$

S este maxim în acelaşi timp cu s.

c) Aria triunghiului OAM este

$$\frac{1}{2} OA \cdot AM = \frac{1}{2} R^2 \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{4} R^2 \sin 2x.$$

În mod analog se află că aria triunghiului OMB este

$$\frac{1}{4} R^2 \sin 2y.$$

Aria pătratului $OAMB$ este suma acestor arii:

$$A = \frac{1}{4} R^2 (\sin 2x + \sin 2y) = \frac{1}{2} R^2 \sin (x + y) \cos (x - y).$$

În acest produs, numai factorul $\cos (x - y)$ este variabil. A este maxim pentru $x = y$ și are valoarea maximă

$$A_{max} = \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha$$

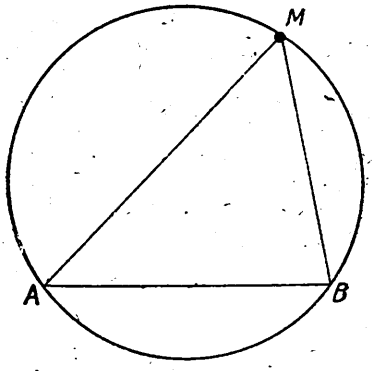


Fig. 35

9. *Într-un cerc de rază R se dă o coardă fixă AB* (fig. 35). *Să se determine pe cerc un punct M astfel ca perimetrul triunghiului AMB să fie maxim.*

Este suficient ca suma $MA + MB$ să fie maximă.

Teorema sinusului dă:

$$MA = 2R \sin B, \; MB = 2R \sin A.$$

Interesează suma

$$s = MA + MB = 2R (\sin A + \sin B) = 4R \sin \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2}$$

Factorul $\sin \frac{A + B}{2}$ este constant, căci $\hat{A} + \hat{B} = 180° - \hat{M}$, iar unghiul M este constant $\left(= \frac{\widehat{AB}}{2} \right)$. s este maxim o dată cu $\cos \frac{A - B}{2}$, cînd $A = B$.

În acest caz triunghiul MAB este isoscel.

D. Într-o altă serie de probleme, este avantajos să se transforme produsele $\sin x \cdot \cos y$, $\cos x \cdot \cos y$ etc. în sume.

Exemplele care urmează se rezolvă pe această cale.

10. *Notațiile fiind cele din figura* 35, *să se determine punctul* M, *astfel ca aria triunghiului* MAB *să fie maximă.*

Calculăm aria triunghiului prin formula $\frac{1}{2} MA \cdot MB \cdot \sin M$.

Cu expresiile pentru MA, MB obținute în exemplul precedent, aria triunghiului MAB este

$$y = \frac{1}{2} \cdot 2R \sin A \cdot 2R \sin B \cdot \sin M = 2R^2 \sin A \sin B \sin M.$$

Transformăm produsul sin A sin B în sumă:

$$y = R^2 \sin M [\cos (A - B) - \cos (A + B)].$$

Termenul $\cos (A+B) = -\cos M$ este constant, y este maxim o dată cu $\cos (A-B)$, cînd $A = B$. În acest caz, triunghiul AMB este isoscel. Aria sa este:

$$y_{max} = R^2 \sin M (1 + \cos M).$$

11. *Se dă un sector circular cu raza* R *și unghiul* α (fig. 36). *Să se determine un punct* M *pe arcul său astfel ca paralelogramul* $OAMB$ *să fie maxim.*

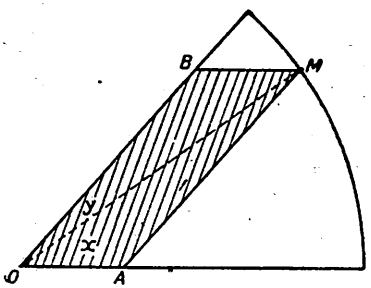


Fig. 36

Fie x și y unghiurile pe care le formează raza OM cu cele două raze care mărginesc sectorul; $x + y = \alpha$. Teorema sinusului aplicată în triunghiul OAM dă:

$$OA = \frac{R \sin y}{\sin \alpha}, \quad AM = \frac{R \sin x}{\sin \alpha}.$$

Aria paralelogramului este dublul ariei triunghiului, deci

$$y = OA \cdot AM \sin OAM$$

sau, deoarece $\sin OAM = \sin \alpha$,

$$y = \frac{R^2}{\sin^2 \alpha} \sin x \sin y \qquad (x + y = \alpha)$$

sau, transformînd produsul sin x sin y în sumă,

$$y = \frac{R^2}{2 \sin^2 \alpha} [\cos (x - y) - \cos \alpha].$$

y este maxim cînd cos $(x-y)$ este maxim, deci pentru $x = y$. Atunci AM este bisectoarea unghiului α. Valoarea maximului este:

$$y_{max} = \frac{R^2}{2 \sin^2 \alpha} (1 - \cos \alpha).$$

12. *Să se înscrie într-un sector circular un dreptunghi de arie maximă. Raza* $OA=OB=R$ (fig. 37) *şi unghiul* $COD = 2\alpha$ *sînt date.*

Ducem bisectoarea OM a unghiului O deci $\widehat{DOM} = \alpha$. Dreptunghiul este determinat cînd se cunoaşte poziţia razei OA. Fie x şi y unghiurile indicate în figură; $x + y = \alpha$.

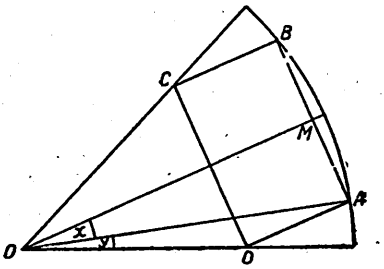


Fig. 37

Triunghiul AOM dă $AM = R \sin x$, deci

$$AB = 2R \sin x.$$

Pentru a afla cealaltă latură a dreptunghiului, aplicăm teorema sinusului în triunghiul OAD şi observăm că unghiul ODA este suplementul unghiului $DOM = \alpha$. Deci:

$$\frac{AD}{\sin y} = \frac{OA}{\sin \alpha}; \; AD = \frac{R \sin y}{\sin \alpha},$$

iar aria dreptunghiului este

$$S = \frac{2R^2}{\sin \alpha} \sin x \sin y$$

$$(x + y = \alpha).$$

Procedeul folosit în exemplele precedente arată că S este maxim cînd $x = y$, şi are valoarea

$$S_{max} = R^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

13. *Un cerc este tangent la laturile unui unghi drept. Să se ducă o tangentă astfel ca segmentul AB (fig. 38) determinată pe ea de laturile unghiului să aibă lungimea maximă.*

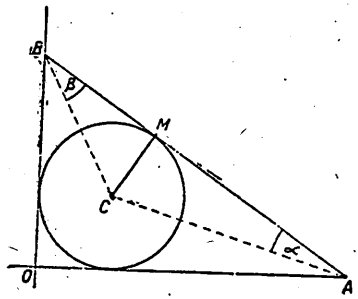


Fig. 38

Fie 2α, 2β unghiurile pe care le formează o tangentă la cerc cu laturile unghiului drept. AC, BC sînt bisectoarele unghiurilor respective, deci $\widehat{CAM}=\alpha$, $\widehat{CBM}=\beta$. Triunghiurile CAM, CBM, în care $CM = R$, dau:

$$AM = R \operatorname{cotg} \alpha, \quad BM = R \operatorname{cotg} \beta$$
$$(\alpha + \beta = 45°).$$

Deci

$$AB = R(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta) = \frac{R \sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha \sin\beta} = \frac{2R \sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}.$$

Deoarece numărătorul acestei fracții este constant, AB va fi minim cînd numitorul va fi maxim și cum $\alpha + \beta$ este constant; este suficient ca termenul $\cos(\alpha-\beta)$ să fie maxim, deci $\alpha = \beta$. Se obține

$$AB_{min} = 2R(1 + \sqrt{2}).$$

Observare. Problema se rezolvă la fel cînd unghiul O are o valoare oarecare. În general, AB este minim cînd triunghiul AOB este isoscel și

$$AB_{min} = \frac{2R \cos \frac{\hat{O}}{2}}{1 - \sin \frac{\hat{O}}{2}}$$

E. Cînd mărimea este de forma

$$y = a \sin x + b \cos x$$

variația ei se studiază ușor introducînd unghiul auxiliar Q dat de $\operatorname{tg} Q = \frac{b}{a}$. Se obține

$$b = a \operatorname{tg} Q = \frac{a \sin Q}{\cos Q},$$

deci

$$y = \frac{a(\sin x \cos Q + \cos x \sin Q)}{\cos Q} = \frac{a}{\cos Q} \sin (x + Q).$$

y este proporţional cu $\sin (x + Q)$. În special maximul lui y are loc pentru $x + Q = 90°$ şi este

$$y_{max} = \frac{a}{\cos Q} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Problemele următoare se rezolvă după acest procedeu.

14. *Să se înscrie într-un semicerc un dreptunghi de perimetru maxim.*

Notaţiile fiind cele din figura 29, în care se dă $AB = 2R$, avem:

$$OQ = R \cos \alpha, \quad PQ = 2R \cos \alpha, \quad QN = R \sin \alpha.$$

Semiperimetrul dreptunghiului este

$$y = R (\sin \alpha + 2 \cos \alpha).$$

Cu $\operatorname{tg} Q = 2$, avem

$$y = \frac{R \sin (\alpha + Q)}{\cos Q}$$

y este maxim cînd $\alpha + Q = 90°$. Cum $Q = 63°30'$, urmează că $\alpha = 26°30'$.

15. *Să se înscrie într-o sferă de rază R un cilindru circular drept, astfel ca aria totală a cilindrului să fie maximă.*

Cu notaţiile din figura 30, avem:

$$MB = R \sin \alpha, \quad MM' = 2R \cos \alpha.$$

Aria totală a cilindrului este

$$A = 2\pi R^2 \sin^2 \alpha + 2\pi R \sin \alpha . 2R \cos \alpha = 2\pi R^2 (\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha).$$

A variază proporţional cu expresia dintre paranteze, care se scrie

$$y = \frac{1}{2} (2 \sin^2 \alpha + 2 \sin 2\alpha).$$

Înlocuim $\sin^2 \alpha$ prin $\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ şi obţinem:

$$y = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha + 2 \sin 2\alpha).$$

Interesează maximul expresiei

$$z = 2 \sin 2\alpha - \cos 2\alpha.$$

Cu $\operatorname{tg} Q = \frac{1}{2}$, deci $Q = 26°36'$, expresia devine

$$z = \frac{2 \sin (2\alpha - Q)}{\cos Q}.$$

Ea este maximă cînd $2\alpha - Q = 90°$, deci $\alpha = 58°18'$.
În acest caz, avem:

$$\cos Q = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad z_{max} = \sqrt{5}, \quad y_{max} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}),$$

$$A_{max} = \pi R^2 (1 + \sqrt{5}).$$

16. *Se consideră un poligon în formă de cruce ca cel din figura 39 şi cercul care trece prin 8 dintre vîrfurile sale. Raza cercului fiind dată, să se afle în ce caz aria poligonului este maximă.*

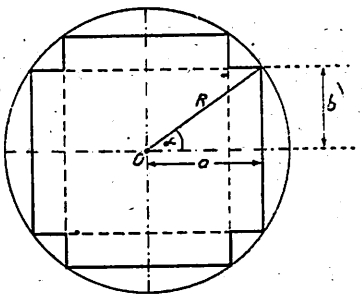


Fig. 39

Cu notaţiile din figură, avem:

$$a = R \cos \alpha, \qquad b = R \sin \alpha.$$

Poligonul se compune dintr-un pătrat cu latura $2b$, înconjurat de patru dreptunghiuri cu dimensiunile $2b$ şi $a-b$. Aria sa este:

$$A = 4b^2 + 4 \cdot 2b(a-b) = 4b(2a-b).$$

Introducînd variabila α, avem:

$$A = 4R^2 \sin \alpha (2 \cos \alpha - \sin \alpha).$$

Partea variabilă se scrie

$$y = \sin \alpha (2 \cos \alpha - \sin \alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha - \sin^2 \alpha = \sin 2\alpha - \sin^2 \alpha.$$

Înlocuim $\sin^2 \alpha$ prin $\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$, şi obţinem

$$y = \sin 2\alpha - \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{2}(2 \sin 2\alpha + \cos 2\alpha - 1).$$

Interesează maximul expresiei

$$z = 2 \sin 2\alpha + \cos 2\alpha.$$

Punem $\operatorname{tg} Q = \frac{1}{2}$, deci $Q = 26°36'$. Expresia devine:

$$z = \frac{2 \sin (2\alpha + Q)}{\cos Q}.$$

z este maxim cînd $2\alpha + Q$ este maxim, adică $2\alpha + Q = 90°$, deci

$$\alpha = 45° - \frac{Q}{2} = 45° - 13°18' = 31°42'.$$

Această problemă găseşte aplicaţie în construcţia transformatorilor de curent alternativ. Poligonul în formă de cruce este secţiunea prin miezul de fier. Acest miez trebuie să umple o parte cît mai mare din rotor.

Observare. Pentru a nu reface de fiecare dată calculele, am folosit în exemplele precedente formula dată la pag. 79. Socot că în clasă este mai bine să nu recurgem la formulă. De exemplu, în ultima problemă, pentru a afla maximul funcţiei

$$z = 2 \sin 2\alpha + 2 \cos 2\alpha,$$

procedăm astfel:

Punem $\operatorname{tg} Q = \frac{1}{2}$ (deci $Q = 26°36'$). Urmează că

$$1 = 2 \operatorname{tg} Q = \frac{2 \sin Q}{\cos Q}.$$

Înlocuim în expresia lui z coeficientul lui $\cos 2\alpha$, care este 1, prin această expresie:

$$z = 2 \sin 2\alpha + \frac{2 \sin Q}{\cos Q} \cos 2\alpha =$$

$$= \frac{2 (\sin 2\alpha \cos Q + \cos 2\alpha \sin Q)}{\cos Q};$$

$$z = \frac{2 \sin (2\alpha + Q)}{\cos Q}.$$

Am obţinut expresia de mai sus a lui z.

În cele ce precedă m-am limitat la problemele de maxim și minim, care se pot rezolva pe baza formulelor uzuale de trigonometrie. Sfera acestor probleme poate fi mult lărgită dacă se folosește următoarea teoremă de algebră:

Dacă suma $x + y$ *este constantă, produsul* $x^m y^n$ este maxim cînd

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n}.$$

Dat fiind că $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (constant) produsul $\sin^{2m} x \cdot \cos^{2n} y$ este maxim cînd

$$\frac{\sin^2 x}{m} = \frac{\cos^2 x}{n}.$$

Iată o problemă de maxim care se rezolvă ușor pe această cale.

17. *Să se înscrie într-o sferă de rază* R *un cilindru de volum maxim.*

Cu notațiile din figura 30 avem:

$$MB = R \sin \alpha, \quad MM' = R(1 + \cos \alpha).$$

Volumul cilindrului este

$$V = \pi R^3 \sin^2 \alpha (1 + \cos \alpha).$$

Dacă exprimăm cu $\sin \alpha$ și $\cos \alpha$ în funcție de $\frac{\alpha}{2}$, avem:

$$V = 8\pi R^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^4 \frac{\alpha}{2}.$$

V este maxim o dată cu produsul

$$y = \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

Deoarece $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1$ (constant), y este maxim cînd

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{2};$$

de unde

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

În acest caz:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

deci

$$V_{max} = \frac{32}{27} \pi R^3.$$

Nu insist asupra problemelor ce se rezolvă pe această cale, pentru că, deşi este vorba tot de probleme de maxim, ele nu se încadrează în ideea care stă la baza acestui studiu; maximul nu se află pe baza variaţiei funcţiilor trigonometrice, ci pe baza unor teoreme generale de algebră.

FORMAREA DEPRINDERILOR DE CALCUL LA ARITMETICĂ

SPIRIDON GHIȚESCU
Școala medie nr. 18
BUCUREȘTI

Studiul matematicii în școala de cultură generală urmărește să înzestreze pe elevi nu numai cu un sistem precis de cunoștințe ci și cu deprinderi temeinice de calcul, care să dea elevilor posibilitatea să rezolve probleme ridicate de viața de toate zilele. Perfecționarea deprinderilor de calcul va constitui un prețios ajutor viitorului tehnician sau inginer. Folosirea celor mai simple metode de calcul înlătură pierderea de timp, permite rezolvarea mai rapidă a unei probleme.

Folosirea mijloacelor auxiliare — rigle, tabele, nomograme, mașini de calcul — constituie un ajutor în munca tehnicianului. Dar pentru a ajunge să le folosească pe acestea, el trebuie să stăpînească în primul rînd metodele de calcul.

Formarea deprinderilor de calcul scris și oral, constituie o etapă importantă în atingerea obiectivelor urmărite de învățămîntul matematic. Școala trebuie să le formeze elevilor deprinderea de a face calcule numerice simple, fără a le scrie și fără a folosi mijloace de calcul auxiliare. Aceasta este așa-zisul „calcul oral" sau „calcul mintal". Noua programă școlară prevede, din păcate, calcule orale numai în clasa a V-a.

Unii profesori de matematici subapreciază deseori importanța calculului oral și, din această cauză, elevii din clasele superioare recurg de multe ori la scris chiar în cazuri simple ca $58+35$ sau 17×8. Aceasta este o situație anormală. Pe lîngă folosul practic direct, formarea deprinderilor de a calcula oral are și o mare importanță educativă, deoarece dezvoltă memoria elevilor, îi obișnuiește să se concentreze, le dezvoltă perspicacitatea.

Este esențial să-i învățăm pe elevi să efectueze calculele orale nu după reguli strict stabilite, ca la cele scrise, ci folosind particularitățile fiecărui caz, pentru a-și simplifica cît mai mult munca.

În învățarea aritmeticii, calculul oral este forma cea mai simplă de creație individuală a copiilor. Dacă munca este bine organizată, calculul oral devine pentru copii un fel de sport atrăgător.

Colectivul de profesori de matematici de la școala medie de băieți nr. 18 București, format din tovarășii Vasile Georgescu, Florea Păsărică, N. Dumitriu, A. Danielache și subsemnatul a avut o preocupare permanentă pentru deprinderea elevilor de a efectua calcule orale și cu aproximație, făcînd un plan de muncă în acest sens. Rezultatele acestui plan de activitate îl vom expune în cele ce urmează.

S-au făcut lecții speciale de calcul oral la clasele V—VII, iar la anumite lecții s-au rezervat cîte 5—6 minute pentru astfel de calcule.

În lucrarea de față ne vom ocupa pe rînd cu următoarele:

a) Procedee de calcul oral cu cîteva exemple de exerciții simple;

b) Procedee de calcul cu aproximație cu cîteva exemple de exerciții simple;

c) Exemple de lecții cu indicații metodice, predate în clasele a V-a și a VI-a;

d) Cum au folosit elevii calculul oral în desfășurarea lecțiilor, precum și la examenul de admitere în clasa a VIII-a;

e) Concluzii.

I. Procedee de calcul oral la adunarea și scăderea numerelor întregi

La adunare și scădere se obțin unele procedee de calcul oral, folosind proprietățile adunării și scăderii:

Comutativitatea adunării:

$$a + b = b + a$$

Asociativitatea adunării:

$$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$$

Regulile operațiilor cu sume și diferențe neefectuate:

$$a + (b - c) = a + b - c$$
$$a - (b + c) = a - b - c$$
$$a - (b - c) = a - b + c$$

La efectuarea operațiilor aritmetice se folosește deseori faptul că un număr de mai multe cifre poate fi prezentat sub forma unei sume de termeni constînd dintr-o cifră deosebită de zero, urmată de zerouri.

De exemplu:

$$3796 = 3000 + 700 + 90 + 6$$

sau sub formă generală:

$$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + a_{n-2} 10^{n-2} \ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$$

Numărul, care are numai prima cifră semnificativă iar restul zerouri, se numește număr rotund.

Exemple: 7000,300,90

În cazul adunării orale este indicat ca, folosind proprietatea asociativității, să se adauge la primul termen, al doilea termen descompus în sumă de numere rotunde sau să se adune ambii termeni începînd cu cifrele de cel mai mare ordin.

Exemplu:

$$49 + 63 = 49 + 60 + 3 = 109 + 3 = 112 \text{ sau}$$
$$49 + 63 = (40 + 9) + (60 + 3) = (40 + 60) + (9 + 3) = 100 + 12 = 112$$

Acest exercițiu se mai poate efectua și altfel:

$$49 + 63 = 50 - 1 + 63 = 50 + 62 = 112$$

Folosind proprietatea $a - (b + c) = a - b - c$, se poate efectua scăderea.

Exemplu:

$$864 - 352 = 864 - 300 - 50 - 2 = 512$$

sau

$$864 - 352 = (800 - 300) + (60 - 50) + (4 - 2) = 512$$

Se poate aduna și scădea un număr apropiat de un număr rotund, adăugînd sau scăzînd acest număr rotund și făcînd apoi rectificarea necesară.

Exemple:

$$2648 + 398 = 2648 + 400 - 2 = 3046$$
$$4243 - 1991 = 4243 - 2000 + 9 = 2243 + 9 = 2252$$

Scăderea unui număr din altul poate fi înlocuită cu adăugarea complementului său pînă la 100, 1000 etc. şi scăderea de la rezultat a lui 100, 1000 etc.

Exemplu:

$$537 - 256 = 537 + 1000 - 1000 - 256 = 537 + (1000 - 256) - 1000 = 537 + 744 - 1000 = 1281 - 1000 = 281.$$

Se pot utiliza procedee rapide şi în calculul scris, ca de pildă în exemplul care urmează.

Scăderea scrisă poate fi înlocuită cu adunarea. În acest caz, pentru a afla diferenţa, se determină cîte unităţi trebuie adăugate la fiecare cifră a scăzătorului (începînd de la ordinul cel mai mic) pentru a obţine numărul de unităţi din ordinul superior al descăzutului.

Exemplu:

$$\begin{array}{rl} 5427 - & 5 + 2 = 7 \\ 3785 & 8 + \overline{4} = 12 \\ \hline 1642 & 1 + 7 + \overline{6} = 14 \\ & 1 + 3 + \overline{1} = 5 \end{array}$$

Folosirea acestui procedeu de scădere, este cea mai indicată atunci cînd trebuie scăzute o serie de numere, de exemplu la *soldare*, adică la aflarea restului.

Exemplu:

$$\begin{array}{rl} 76\,325 - & 7 + 4 + 3 + 6 + 5 = 25 \\ 12\,356 & 2 + 8 + 1 + 2 + 5 + \overline{4} = 22 \\ 7\,423 & 2 + 9 + 2 + 4 + 3 + \overline{3} = 23 \\ + \ 1\,214 & 2 + 4 + 1 + 7 + 2 + \overline{0} = 16 \\ 4\,987 & 1 + 1 + \ldots\ldots + \overline{5} = 7 \\ \hline 50\,345 & \end{array}$$

În cazul de faţă, cifrele diferenţei sînt aflate ca fiind compensări la sumele cifrelor din fiecare ordin al tuturor scăzătorilor, pînă la numărul cel mai apropiat care se termină cu cifra ordinului corespunzător al descăzutului.

II. Procedee de calcul oral la înmulțirea numerelor

Proprietățile pe care ne vom baza sînt comutativitatea $a \cdot b = b \cdot a$ și asociativitatea $a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c$ precum și regulile pentru înmulțirea produsului cu un număr $(a \cdot b \cdot c) \cdot n = (a \cdot n) \cdot b \cdot c$ înmulțirea unui număr cu un produs; $n \cdot (a \cdot b) = (n \cdot a) \cdot c \cdot b$ înmulțirea a două produse $(a \cdot b \cdot c) \cdot (m \cdot n) = a \cdot m \cdot b \cdot n \cdot c$.

Cu ajutorul acestor proprietăți putem scoate observațiile:

1. Înmulțirea cu numere de 2 cifre, pînă la 20, se poate efectua ca și cu numere de o singură cifră.

Exemplu:

$$\frac{4232 \times 14}{59248}$$

$2 \times 14 = 28$, scriem 8 unități ale produsului, ținînd în minte cele 2 zeci; $3 \times 14 = 42$; $42 + 2 = 44$; avem 4 zeci drept a doua cifră a produsului și ținem în minte 4 sute;

$2 \times 14 = 28$; $28 + 4 = 32$; $4 \times 14 = 56$; $56 + 3 = 59$

2. Cu ajutorul identității

$$(10 + a)\,(10 + b) = [(10 + a) + b]\,10 + ab$$

se pot înmulți ușor numerele de 2 cifre pînă la 20.

Exemplu:

$$17 \times 18 = (17 + 8) \times 10 + 7 \times 8 = 306$$

la unul din factori se adaugă unitățile celuilalt și la suma obținută, mărită de 10 ori, se adaugă produsul unităților).

3. Cazuri de simplificare a înmulțirii.

a) Dacă înmulțitorul are forma 5×10^n în care $n = -1, 0, 1, 2$ etc., atunci înmulțirea trebuie efectuată împărțind deînmulțitul cu 2 și înmulțindu-l respectiv cu 10^{n+1}

Exemple:

$$742 \times 5 = \frac{742}{2} \times 10 = 3710;\ \text{aici } n = 0 \text{ și } n + 1 = 1$$

$$531 \times 0{,}5 = \frac{531}{2} \times 1 = 265{,}5;\ \text{aici } n = -1 \text{ și } n + 1 = 0$$

b) Dacă înmulțitorul are forma 25×10^n, iar $n = -2; -1; 0{,}1$ etc., atunci înmulțirea trebuie efectuată împărțind deînmulțitul cu 4 și înmulțindu-l respectiv cu 10^{n+2}.

Exemple:

$$864 \times 25 = \frac{864}{4} \times 100 = 21600;$$ aici $n = 0$ și $n + 2 = 2$

$$547 \times 2{,}5 = \frac{547}{4} \times 10 = 1367{,}5;$$ aici $n = -1$ și $n + 2 = 1$

c) Folosind identitatea

$$a\,(b + c) = ab + ac,$$

unul din factori se poate prezenta sub forma sumei algebrice a unor termeni, apoi se va efectua produsul celuilalt factor cu acești termeni, după care se vor aduna produsele obținute.

Exemple:

$386 \times 98 = 386 \times (100 - 2) = 38600 - 386 \times 2 = 38600 - 772 = 37828$

$475 \times 126 = 475 \times (100 + 20 + 6) = 47500 + 9500 + 2850 = 59850$

Observația 1.

Se mai poate aplica un procedeu de înmulțire care este comod atunci cînd unul din factori poate fi descompus în factori astfel încît produsele parțiale să fie numere rotunde.

Exemple:

$25 \times 28 = 25 \times 7 \times 4 = 25 \times 4 \times 7 = 100 \times 7 = 700$

$15 \times 54 = 15 \times 9 \times 6 = 15 \times 6 \times 9 = 90 \times 9 = 810$

Observația 2. Folosind identitatea de la punctul c și observația 1, putem scoate următoarele procedee:

Înmulțirea cu 6

$$(6 = 3 \times 2)$$

$$48 \times 6 = 48 \times 3 \times 2 = 144 \times 2 = 288$$

sau, cum

$$6 = 5 + 1$$

$$48 \times 6 = 48 \times (5 + 1) = \frac{48}{2} \times 10 + 48 = 240 + 48 = 288$$

Înmulțirea cu 7

$$7 = 5 + 2$$

$$48 \times 7 = 48 \times (5 + 2) = \frac{48}{2} \times 10 + 48 \times 2 = 240 + 96 = 336$$

Înmulțire cu 8

$$8 = 2 \times 2 \times 2$$

$$48 \times 8 = 48 \times 2 \times 2 \times 2 = 96 \times 2 \times 2 = 192 \times 2 = 384$$

sau

$$8 = 10 - 2$$

$$48 \times 8 = 48 \times (10 - 2) = 480 - 48 \times 2 = 480 - 96 = 384$$

Înmulțirea cu 9

$$9 = 10 - 1$$

$$87 \times 9 = 87 \times (10 - 1) = 870 - 87 = 783$$

Înmulțirea cu 11

$$11 = 10 + 1$$

$$48 \times 11 = 48 \times (10 + 1) = 480 + 48 = 528$$

sau

$$63 \times 11 = 693 \quad (6 + 3 = 9,\ 693)$$

$$48 \times 11 = 528 \quad (4 + 8 = 12;\ \ 4 + 1 = 5;528)$$

Înmulțirea cu 25

$$25 = \frac{100}{4}$$

$$96 \times 25 = \frac{96}{4} \times 100 = 24 \times 100 = 2400$$

Înmulțirea cu 30

$$30 = 3 \times 10$$

$$75 \times 30 = 75 \times 3 \times 10 = 225 \times 10 = 2250$$

Înmulțirea cu 50

$$50 = \frac{100}{2}$$

$$89 \times 50 = \frac{89 \times 100}{2} = \frac{8900}{2} = 4450$$

Înmulțirea cu 111 (cînd deînmulțitul este mai mic decît 100)

$53 \times 111 = 5883$ (5 și 3; $5 + 3 = 8$; 5883)
$63 \times 111 = 6993$ (6 și 3; $6 + 3 = 9$; 6993)

Înmulțirea cu 125

$$125 = \frac{1000}{8}$$

$$48 \times 125 = \frac{48}{8} \times 1000 = 6000$$

Observare. Aplicînd aceleași procedee, se pot face înmulțiri rapide cu:

$12\ (12 = 10 + 2)$; $13\ (13 = 15 - 2)$; $14\ (14 = 15 - 1)$; $15\ (15 = 10 + 5)$; $16\ (16 = 15 + 1)$; $17\ (17 = 15 + 2)$; $20\ (20 = 2 \times 10)$; $18\ (18 = 20 - 2)$; $19\ (19 = 20 - 1)$; $21\ (21 = 20 + 1)$; $22\ (22 = 20 + 2)$; $23\ (23 = 25 - 2)$; $24\ (24 = 25 - 1)$; $26\ (26 = 25 + 1)$; $27\ (27 = 25 + 2)$; sau $27\ (27 = 30 - 3)$; $28\ (28 = 30 - 2)$; $29\ (29 = 30 - 1)$; $35\ (35 = 25 + 10)$; $36\ (36 = 40 - 4)$; $40\ (40 = 2 \times 2 \times 10)$;

$45\left(45 = 50 - \frac{50}{10}\right)$; $54\left(54 = 60 - \frac{60}{10}\right)$; $60\ (60 = 3 \times 2 \times 10)$; $65\ (65 = 50 + 15)$; $70\ [70 = (5 + 2) \times 10]$; $75\ (75 = 50 + 25)$, sau $(75 = 25 \cdot 3)$ sau $\left(75 = 100 - \frac{100}{4}\right)$; $85\ (85 = 100 - 15)$; $95\ (95 = 100 - 5)$; $105\ (105 = 100 + 5)$; $37\left(37 = \frac{111}{3}\right)$; $115\ (115 = 100 + 15)$; $99\ (99 = 100 - 1)$; $999\ (999 = 1000 - 1)$.

d) Pentru a simplifica înmulțirea se pot folosi în unele cazuri formule algebrice, care ușurează munca și economisesc timpul necesar efectuării calculelor.

Vom folosi formula:

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ la înmulțirea a două numere din care unul este mai mare decît un număr rotund cu cîteva unități, iar celălalt este mai mic decît același număr rotund cu același număr de unități.

Exemplu:

$62 \times 58 = (60 + 2) \times (60 - 2) = 3600 - 4 = 3596$

e) Dacă două numere au același număr de zeci, iar unitățile adunate dau zece, atunci pentru a le înmulți este suficient *să se înmulțească* numărul zecilor unuia dintre numere cu numărul zecilor celuilalt, mărit cu unu. Prin această operație se află numărul sutelor din produse iar la rezultatul obținut se adaugă produsul unităților.

Demonstrație

$$(10a + b) \times (10a + c) = 100a^2 + 10ab + 10ac + bc = 100a^2 + 10a\ (b + c) + bc = 100a^2 + 100a + bc = a\ (a + 1)\ 100 + bc.$$

deoarece $b + c = 10$

Exemple:

$$59 \times 51 = 3009\ (5 \times 6 \times 100 + 1 \times 9 = 3009)$$
$$153 \cdot 157 = 24021\ (15 \times 16 \times 100 + 3 \times 7 = 24021)$$

f) Dacă două numere au același număr de unități, iar cifrele zecilor adunate dau zece, atunci pentru a le înmulți este suficient ca la produsul zecilor să se adauge unitățile unuia dintre numere (aceasta va da numărul sutelor din produse) și să se adauge la dreapta pătratul unităților.

Demonstrație. Fie numerele $10\ a + b$ și $10\ c + b$, în care a, b, c, sînt numere de o singură cifră, iar $a + c = 10$. Facem înmulțirea:

$$(10a + b)\ (10c + b) = 100ac + 10bc + 10ab + b^2 = 100ac + 10b\ (a + c) + b^2 = 100\ (ac + b) + b^2$$

Deci

$$(10a + b)\ (10c + b) = 100\ (ac + b) + b^2$$

Exemplu:

$$74 \times 34 = (21 + 4) \times 100 + 16 = 2516$$

g) Dacă factorii sînt apropiați de un număr având forma 10^n, atunci pentru a-i înmulți este suficient ca dintr-un factor să se scoată completarea celuilalt factor pînă la 10^n, să se înmulțească diferența obținută cu 10^n, și să se adauge la acest rezultat produsul completărilor ambilor factori pînă la 10^n.

Demonstrație.

Fie factorii $10^n - a$ și $10^n - b$, produsul $(10^n - a)(10^n - b) = 10^{2n} - 10^n a - 10^n b + ab$ $[(10^n - a) - b]\, 10^n + b$

sau

$$[(10^n - b) - a]\, 10^n + ab$$

Exemplu:

$98 \times 96 = 9408$ $(98 - 4) \cdot 100 + 8$ sau $(96 - 2) \cdot 100 + 8$

în care 2 și 4 sînt completările factorilor pînă la 100.

În înmulțirea de două numere, factorii pot fi așezați alături.

Exemplu:

$$\begin{array}{r} 618 \times 78 \\ \hline 4944 \\ 4326 \\ \hline 48204 \end{array}$$

Dacă înmulțitorul începe sau se termină cu 1, atunci trebuie folosit deînmulțitul drept primul produs parțial, scriind sub el celălalt produs parțial, cu cifrele la locurile corespunzătoare.

Exemplu:

$$\begin{array}{r} 3623 \times 71 \\ \hline 25361 \\ \hline 257233 \end{array}$$

III. Procedee de calcul oral la operații de ridicare la pătrat

a) Folosim formulele ridicării la pătrat a sumei sau a diferenței a două numere:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Acest procedeu se întrebuințează cu succes cînd numărul ce trebuie ridicat la pătrat se poate descompune ușor într-o sumă algebrică de doi termeni, astfel ca primul să fie un număr rotund iar celălalt un număr de o cifră.

Exemple:

$36^2 = (30 + 6)^2 = 900 + 360 + 36 = 1296$
$58^2 = (60 - 2)^2 = 3600 - 240 + 4 = 3364$
$103^2 = (100 + 3)^2 = 10000 + 600 + 9 = 10609.$
$502^2 = (500 + 2)^2 = 250000 + 2000 + 4 = 252004$
$1999^2 = (2000 - 1)^2 = 4000000 - 4000 + 1 = 3996001$

b) Dacă numărul este de două cifre, iar ultima cifră este 5, ridicarea la pătrat se poate face pe o altă cale, mult mai simplă. Astfel $45^2 = 45 \cdot 45 = 2025 = (4 \cdot 5)\ 100 + 5^2 = 2000 + 25 = 2025$, adică am înmulțit prima cifră a deînmulțitului cu prima cifră a înmulțitorului + 1, la care am adăugat pătratul lui 5.

Exemple:

$65^2 = 65 \cdot 65 = (6 \cdot 7)\ 100 + 25 = 4225$
$75^2 = 75 \cdot 75 = (7 \cdot 8)\ 100 + 25 = 5625$
$95^2 = 95 \cdot 95 = (9 \cdot 10)\ 100 + 25 = 9025$

IV. Procedee de calcul oral folosite la împărțirea numerelor

Proprietățile și regulile de care ne vom baza la aceste procedee de calcul rapid sînt:

— Schimbarea ordinii factorilor unui șir de împărțiri și regulile privitoare la:

— Împărțirea unui număr la un produs de factori;

$$n : (a \cdot b \cdot c) = [(n : a) : b] : c$$

— Împărțirea unui număr la un cît;

$$a \cdot b : [c : d] = a \cdot b \cdot d : c$$

— Împărțirea unui produs la un număr;

$$(a \cdot b \cdot c) : n = (a : n) \cdot b \cdot c$$

— Împărțirea a două produse cu mai mulți factori:

$$(a \cdot b) : (c \cdot d) = (a : c) \cdot (b : d).$$

— Împărțirea unei sume algebrice la un număr:

$$(a + b - c) : m = (a : m) + (b : m) - (c : m)$$

Bizuindu-ne pe aceste proprietăți și reguli putem scoate următoarele procedee.

a) Dacă împărțitorul este un număr de o singură cifră, atunci în operația împărțirii produsele parțiale și resturile succesive nu trebuie scrise dedesubt, ci scăderea lor trebuie făcută mintal, iar cifrele cîtului vor fi scrise direct.

Exemple:

$$73821 : 3 = 24607$$
$$37245 : 5 = 7449$$

b) Dacă împărțitorul se prezintă sub forma unui produs de factori, atunci se împarte deîmpărțitul la un factor, cîtul obținut la alt factor și așa mai departe.

Exemple: $3808 : 28 = (3808 : 4) : 7 = 952 : 7 = 136$

c) Dacă împărțitorul se prezintă sub forma $5 \cdot 10^n$, unde $n = -1, 0, 1, 2$ atunci împărțirea se efectuează înmulțind deîmpărțitul cu 2 și împărțim produsul obținut respectiv cu 10^{n+1}

Exemple:

$74,3 : 0,5 = 148,6$; $(74,3 \times 2)$ aici $n = -1$; $n + 1 = 0$
$213,7 : 50 = 4,274$; $(213,7 \times 2) : 100$; aici $n = 1$; $n + 1 = 2$

d) Dacă împărțitorul are forma $25 \cdot 10^n$, unde $n = -2, -1, 0, 1$, atunci împărțirea se efectuează înmulțind deîmpărțitul cu 4 și împărțind produsul obținut respectiv cu 10^{n+2}.

Exemple:

$27,3 : 0,25 = 109,2$; $(27,3 \times 4)$; aici $n = -2$, $n + 2 = 0$
$78,4 : 2,5 = 31,36$; $(78,4 \cdot 4) : 10$; aici $n = -1$; $n + 2 = 1$

e) Dacă împărțitorul se termină cu zerouri, atunci ele trebuie șterse, iar deîmpărțitul trebuie micșorat de 10^n ori, în care n este numărul zerourilor șterse la împărțitor, dacă nu interesează valoarea restului

Exemple:

$$73962 : 3000 = 73,962 : 3 = 24,654$$
$$5883,6 : 1200 = 58,836 : 12 = 4,903.$$

f) Procedee particulare de calcul oral:

Împărțirea cu 4,6,8,9,12,14,15,225,275,375 etc. se face prin descompunerea împărțitorului în produs de factori.

Exemple:

$$864 : 4 = (864 : 2) : 2 = 216$$
$$1116 : 6 = (1116 : 2) : 3 = 186$$
$$1116 : 12 = (1116 : 2) : 2 : 3 = 93$$
$$375 : 15 = (375 : 5) : 3 = 25$$

În acest caz, împărțirea se mai putea face și altfel:

$$375 \cdot 15 = \frac{375 \cdot 2}{3 \cdot 10} = \frac{750}{3 \cdot 10} = 25$$

$$645 : 15 = \frac{645 \cdot 2}{3 \cdot 10} = \frac{1290}{3 \cdot 10} = 43$$

$$2025 : 225 = 2025 : 25 : 9 = 81 : 9 = 9$$
$$1925 : 275 = 1925 : 25 : 11 = 77 : 11 = 7$$
$$4875 : 375 = 4875 : 125 : 3 = 13$$

— Împărțirea cu 5; 25; 50; 125; 0,5; 0,25; 0,75; 0,125

$$32 : 5 = (32 \cdot 2) : 10 = 64 : 10 = 6,4$$
$$32 : 25 = (32 \cdot 4) : 100 = 128 : 100 = 1,28$$
$$32 : 50 = (32 \cdot 2) : 100 = 64 : 100 = 0,64$$
$$32 : 125 = (32 \cdot 8) : 1000 = 256 : 1000 = 0,256$$
$$32 : 0,5 = 32 \cdot 2 = 64$$
$$28 : 0,25 = 28 \cdot 4 = 112$$
$$33 : 0,75 = (33 : 3) \cdot 4 = 11 \cdot 4 = 44$$
$$28 : 0,125 = 28 \cdot 8 = 224$$

V. Procedee de calcul oral cu fracții ordinare

Procedeele de calcul oral se bazează pe proprietățile fracțiilor ordinare. Vom urmări să aducem operațiile cu fracții la forme simple $\left(\frac{1}{a}\right)$

Adunarea fracțiilor ordinare

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{3 \cdot 2} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{\frac{4+6}{2}}{\frac{4 \cdot 6}{2}} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12} \text{ (divizor comun 2)}$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{15}=\frac{\frac{9+15}{3}}{\frac{9\cdot 15}{3}}=\frac{24}{135}=\frac{8}{45}\ \text{(divizor comun 3)}$$

$$\frac{1}{4}+\frac{7}{12}=\frac{3}{12}+\frac{7}{12}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}\left(\text{amplificarea } \frac{1}{4}=\frac{3}{12}\right)$$

sau

$$\frac{7}{12}+\frac{1}{4}=\frac{7+\frac{12}{4}}{12}=\frac{7+3}{12}=\frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{3}{4}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}=\frac{7}{12}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{7+12:2}{12}=\frac{13}{12}$$

$$3\frac{5}{6}+4\frac{2}{3}+6\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+1\frac{1}{3}+1=$$

$$\left(3\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\right)+\left(4\frac{2}{3}+1\frac{1}{3}\right)+\left(6\frac{1}{5}+1\right)=17\frac{1}{5}$$

$$\frac{5}{6}+\frac{3}{4}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{8}{4}=$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=1\frac{7}{12}$$

La fel:

$$\frac{5}{8}+\frac{5}{6}=\frac{4}{8}+\frac{1}{8}+\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{3}\right)=1\frac{11}{24}$$

Scăderea fracțiilor ordinare

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3-2}{3\cdot 2}=\frac{1}{6}$$

La fel $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{4-3}{3\cdot 4}=\frac{1}{12}$

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

la fel:

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

La fel:

$$1\frac{1}{2}-\frac{5}{6}=\frac{1}{2}+\left(1-\frac{5}{6}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

$$2\frac{1}{5}-\frac{7}{8}=\frac{1}{5}+\left(2-\frac{7}{8}\right)=\frac{1}{5}+1\frac{1}{8}=1\frac{13}{40}$$

Înmulțirea fracțiilor ordinare

$$6\cdot\frac{1}{2}=6:2=3$$

La fel $7\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}$, dacă se procedează obișnuit sau

$$7\cdot\frac{1}{2}=(6+1)\cdot\frac{1}{2}=3+\frac{1}{2}=3\frac{1}{2}$$

La fel:

$$11\cdot\frac{1}{3}=(9+2)\cdot\frac{1}{3}=3+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

$$27\cdot 1\frac{1}{9}=\frac{27}{9}\cdot 10=30\ (27:9=3;3\cdot 10=30)$$

La fel:

$$24\cdot 3\frac{1}{3}=\frac{24}{3}\cdot 10=80$$

$$21\cdot 1\frac{3}{7}=\frac{21}{7}\cdot 10=30$$

$$54\cdot 33\frac{1}{3}=\frac{54}{3}\cdot 100=1800\ (54:3=18;8\cdot 100=1800)$$

$$24\cdot 1\frac{1}{4}=24:4\cdot 5=6\cdot 5=30$$

La fel:

$$6246 \cdot 1\frac{2}{3} = (6246 : 3) \cdot 5 = 2082 \cdot 5 = \frac{2082}{2} \cdot 10 = 10410$$

$$4\frac{2}{3} \cdot 4\frac{1}{3} = 4 \cdot 5 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = 20\frac{2}{9}$$

În cazul în care suma părților fracționare este 1, iar întregii sînt egali, se obține

$$\begin{cases} 6\frac{5}{8} \cdot 6\frac{3}{8} = 6 \cdot 7 + \frac{15}{64} = 42\frac{15}{64} \\ 2\frac{2}{3} : 3\frac{1}{3} = 3^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 9 - \frac{1}{9} = 8\frac{8}{9} \end{cases}$$

La fel:

$$6\frac{3}{8} \cdot 7\frac{5}{8} = 7^2 - \left(\frac{5}{8}\right)^2 = 49 - \frac{25}{64} = 48\frac{39}{66}$$

$$\left(7\frac{1}{2}\right)^2 = 7\frac{1}{2} \cdot 7\frac{1}{2} = 7 \cdot 8 + \frac{1}{4} = 56\frac{1}{4}$$

La fel:

$$\left(9\frac{1}{2}\right)^2 = 9\frac{1}{2} \cdot 9\frac{1}{2} = 9 \cdot 10 + \frac{1}{4} = 90\frac{1}{4}$$

Împărțirea fracțiilor ordinare

Aici întîlnim practic un singur caz, deoarece împărțirea se reduce la înmulțirea fracțiilor.

$$5 : \frac{1}{3} = \frac{5 \cdot 3}{1} = 15$$

La fel:

$$6 : \frac{1}{5} = 30$$

$$8 : \frac{1}{8} = 64$$

Aplicațiile înmulțirii și împărțirii rapide ale fracțiilor ordinare se întîlnesc mai des la calcularea procentelor dintr-un număr și la calcularea numărului dîndu-se un procent din el.

Dăm mai jos cîteva procente des întîlnite în probleme sub formă de fracție ordinară, care transformă aflarea procentului într-un produs.

$$1\% = \frac{1}{100};\ 10\% = \frac{1}{10};\ 1\frac{1}{4}\% = \frac{1}{80};\ 1\frac{2}{3}\% = \frac{1}{60}$$

$$1\frac{1}{3}\% = \frac{1}{75};\ 2\% = \frac{1}{50};\ 6\frac{1}{4}\% = \frac{1}{16};\ 2\frac{1}{2}\% = \frac{1}{40}$$

$$6\frac{2}{3}\% = \frac{1}{15};\ \frac{1}{2}\% = \frac{1}{8};\ 8\frac{1}{3}\% = \frac{1}{12};\ 16\frac{2}{3}\% = \frac{1}{6}$$

$$20\% = \frac{1}{5};\ 33\frac{1}{3}\% = \frac{1}{6};\ 4\% = \frac{1}{25};\ 5\% = \frac{1}{20}$$

$$25\% = \frac{1}{4};\ 3\frac{1}{3}\% = \frac{1}{30};\ 80\% = \frac{4}{5};\ 50\% = \frac{1}{2};\ 75\% = \frac{3}{4}$$

Calcularea procentelor dintr-un număr

1. Cît face 5% din 600?

$$5\% = \frac{1}{20}\ 600 \cdot 0{,}05 = 600 : 20 = 30$$

2. Cît face 4 % din 250?

$$4\% = \frac{1}{25}$$

$$250 \cdot 0{,}04 = 250 : 25 = 10$$

3. Cît face $3\frac{1}{3}$ % din 720?

$$3\frac{1}{3}\% = \frac{1}{30}$$

$$720 \cdot 3\frac{\frac{1}{3}}{100} = 720 : 30 = 24$$

4. Cît face $12\frac{1}{2}$% din 640?

$$12\tfrac{1}{2}\% = \frac{1}{8}\ 640 \cdot \frac{12\frac{1}{2}}{100} = 640 : 8 = 80$$

Calcularea numărului cunoscînd un procent din el.

1. 4% dintr-un număr este 60. Care este acel număr?

$$4\% = \frac{1}{25}\ ;\ 60 : 0{,}04 = 1500\ (60 : 4 = 15 \cdot 100)$$

2. $6\frac{1}{4}\%$ dintr-un număr este 80. Care este acel număr?

$$6\frac{1}{4}\% = \frac{1}{16}\ ;\ 80 : 6\frac{1}{4}\% = 80 \cdot 16 = 1280$$

3. $4\frac{1}{2}\%$ dintr-un număr este 9. Să se afle acel număr.

$$4\frac{1}{2}\% = \frac{9}{200};\ 9 : 4\frac{1}{2}\% = \frac{9 \cdot 200}{9} = 200$$

4. $3\frac{1}{3}\%$ dintr-un număr este 30. Să se afle acel număr.

$$3\frac{1}{3}\% = \frac{1}{30}$$

$$30 : 3\frac{1}{3}\% = 30 \cdot 30 = 900$$

VI. Calcule cu aproximaţie

În marea majoritate a cazurilor, numerele pe care le întrebuinţăm în practică nu exprimă exact raporturile cantitative reale, ci doar cu aproximaţie. Astfel, orice măsurare, pe care o efectuăm în procesul lucrărilor practice are numai o precizie limitată, din cauza imperfecţiunii atît a aparatelor de măsurat, cît şi a procesului de măsurare. În afară de aceasta, o unitate de măsură nu se cuprinde aproape niciodată de un număr exact de ori în mărimea măsurată. Din această cauză nu trebuie să neglijăm un rest oarecare, care se obţine în procesul măsurării unei anumite mărimi.

Fracţiile ordinare se înlocuiesc adeseori în lucrările practice prin fracţii zecimale, în scopul simplificării calculelor. Numai puţine fracţii ordinare pot fi exprimate prin echivalente zecimale precise (de exemplu: $\frac{1}{20} = 0{,}05$, $\frac{1}{25} = 0{,}04$); majoritatea fracţiilor ordinare pot fi prezentate numai sub forma unor echivalenţi

zecimali aproximativi (de exemplu: $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$; $\frac{1}{6} = 0{,}1666\ldots$ etc). In sfîrşit, rezultatele unei serii de calcule efectuate în activitatea economică sau tehnică conţin adeseori, un număr atît de mare de zecimale, încît întrec de multe ori necesitatea practicii, deoarece unele părţi fracţionare nu pot fi exprimate în mod concret în lucrări practice.

Să presupunem că se cere să se afle prin calcul greutatea unei plăci de aluminiu în formă de paralelipiped dreptunghic ale cărui muchii au fost măsurate cu rigla milimetrică şi s-au găsit că sînt 184 mm, 109 mm, 32 mm (cu aproximaţie de 1 mm). Tabloul de densitate arată că densitatea aluminiului variază între 2,5 — 2,7 încît noi vom lua densitatea 2,6. Transformînd în centimetri, aflăm că volumul plăcii este $18{,}4 \times 10{,}9 \times 3{,}2 = 641{,}792$ cm², iar greutatea ei este 1668,9592 g. Toate datele folosite sînt numere aproximative, deci se înţelege că şi rezultatul final va fi de asemenea aproximativ. Cuprinde el ceva sigur?

După cum vom vedea mai departe, rezultatul obţinut trebuie rotunjit pînă la două cifre semnificative, deoarece a treia cifră semnificativă nu este sigură. Scriind răspunsul sub forma 1,7 kg observăm că munca pe care am depus-o pentru a obţine un număr cu opt cifre — 1668,6592 g — a fost pe trei sferturi zadarnică.

Rezultă de aici că operaţiile cu numere aproximative au particularităţile lor şi trebuie să cunoaştem teoria lor ca să le putem efectua cu siguranţă şi fără a depune o muncă neproductivă.

Unii profesori care predau la clasele a V-a şi a VI-a consideră că elevii nu trebuie puşi la curent cu regulile simple de calcul cu aproximaţie, deoarece acestea sînt mai presus de puterea lor de înţelegere, că parcurgerea acestui capitol (care nici nu este prevăzut în programa şcolară) va dăuna parcurgerii celuilalt material. Experienţa colectivului profesorilor de matematici de la şcoala medie de băieţi nr. 18 din Bucureşti a arătat că aceste argumente nu stau în picioare. După părerea noastră, parcurgerea acestui capitol va ajuta elevilor să-şi însuşească mai bine cunoştinţele de aritmetică, deoarece, datorită simplificării calculelor, ei vor economisi timpul şi vor putea rezolva un mai mare număr de probleme.

Punerea elevilor la curent cu regulile calculelor cu aproximaţie noi am făcut-o şi în cursul mediu, sub formă de conversaţie scurtă (5 — 10 minute), la fixarea materialului comunicat în decursul unui şir de lecţii.

Acest capitol al calculelor cu aproximație îl vom împărți în:

a) Rotunjirea numerelor
b) Precizia măsurătorilor
c) Adunarea și scăderea numerelor aproximative.
d) Înmulțirea și împărțirea numerelor aproximative.

a) *Rotunjirea numerelor*

Să luăm problema următoare: cîți pași trebuie considerați într-un kilometru? Un elev numără 1327 pași, altul 1338 pași, și în fine, un al treilea 1335 pași. Din aceste trei măsurători rezultă că numai numărul sutelor și miilor vor coincide cu numărul adevărat de pași într-un kilometru. Vom pune zerouri în locul cifrelor zecilor și unităților, încît numărul pașilor dintr-un kilometru este egal aproximativ cu 1300. O astfel de înlocuire în numărul cifrelor cu zeci se numește rotunjirea lor.

Alteori sîntem nevoiți să rotunjim și o fracție zecimală. De exemplu, prin împărțirea lui 3 la 7 se obține citul 0,42857... adică $\frac{3}{7} = 0{,}42857$.

Valoarea aproximativă a acestei fracții cu o aproximație de 0,001 este 0,429 deoarece, neglijînd pe 57, care a trecut de 50, am adăugat 1 la ultima cifră.

La fel, valoarea aproximativă cu o aproximație de 0,01 este 0,43, iar cu o aproximație de 0,1 este 0,4.

În acest caz nu s-a adăugat 1 ultimei cifre, deoarece cifra neglijată este mai mică decît 5.

Ca exerciții se pot propune elevilor următoarele exemple:

1. Să se rotunjească 1382567 pînă la o mie, pînă la o sută, pînă la zece.
2. Să se rotunjească numerele 158,352 și 726456 pînă la cifra sutelor.
3. Idem numărul 62556 pînă la ordinul zecilor, sutelor, miilor.

b) *Precizia măsurătorilor*

Facem trei măsurători pentru lungimea și lățimea clasei. Obținem datele:

lungimea	*lățimea*
12m	7m
12,3m	6,8m
12,32 m	6,83 m

Prima dată, măsurătoarea s-a făcut cu o precizie pînă la 1 metru, a doua oară pînă la 0,1 dintr-un metru, a treia oară cu o precizie de 0,01 dintr-un metru. Această măsurătoare nu se poate face precis; întotdeauna se obține o eroare mai mare sau mai mică. În urma acestor măsurători am dat peste numere aproximative.

Zicem că în primul caz am măsurat lungimea cu două cifre semnificative, iar lățimea cu o singură cifră semnificativă.

Al doilea caz, am măsurat lungimea cu trei cifre semnificative iar lățimea cu două, în al treilea caz, lungimea este măsurată cu patru cifre semnificative, iar lățimea cu trei.

Zerourile de la începutul numerelor obținute prin măsurătoare nu se consideră cifre semnificative. Astfel, 0,24 se consideră un număr semnificativ de două cifre, iar 0,03 m un număr semnificativ de o cifră. Zerourile din interiorul numărului se consideră cifre semnificative. Astfel 5,06 m este un număr semnificativ de trei cifre. Zerourile puse la sfîrșitul numărului în locul cifrelor necunoscute nu se consideră cifre semnificative.

Astfel, dacă populația unui oraș este de 32800 locuitori și socotim acest număr cu o precizie pînă la ordinul sutelor, el este considerat un număr de trei cifre.

Zerourile scoase de la sfîrșitul numărului prin rotunjirea lui nu se consideră cifre semnificative.

c) *Adunarea și scăderea numerelor aproximative*

Propunem următoarea problemă: o damigeană de sticlă cîntărește 85,6 g, iar dopul ei 2,34 g. În damigeană s-au turnat 36 g apă. Să se afle greutatea totală a damigenei, împreună cu dopul și cu apa. Damigeana este cîntărită cu o precizie de 0,1 g, dopul cu o precizie de 0,01 g, iar apa cu o precizie de 1 g.

Atunci se procedează astfel:

$$\begin{array}{rr} & 85{,}6? \\ + & 2{,}34 \\ & 36\cdot?? \\ \hline & 123{,}?? \end{array}$$

Termenii neavînd același număr de zecimale, este bine, pentru a lămuri cîte cifre sigure are suma, să se pună la sfîrșitul fiecărui termen semn de întrebare în locul cifrelor necunoscute.

În exemplul nostru numărul cifrelor exacte ale sumei coincide cu numărul lor în numărul dat cel mai puțin exact.

Alte exemple:

2,342	12,3?	366,???
+ 3,84?	+ 3,222	+ 82,4??
15,2??	136,???	3,45?
21,3??	151,???	451,???

La fel se procedează şi la scădere. Exemple:

2,27?	25,632
− 1,90	8,5??
0,37?	17,1??

Din aceste exemple putem scoate concluzia: pentru adunarea sau scăderea numerelor aproximative cu precizie diferită trebuie să luăm numerele cu precizia numărului celui mai puţin precis.

PROBLEME PROPUSE PENTRU ADUNAREA ŞI SCĂDEREA NUMERELOR APROXIMATIVE

1. Lăţimea unei case este de 6,3 m iar lungimea de 8,2 m. În faţa casei există o porţiune de teren de formă dreptunghiulară cu lungimea de 24 m şi lăţimea de 87 m. Să se afle toată suprafaţa ocupată de casă şi de porţiunea de teren.

2. În fundul unui rîu, care are o adîncime de 12,2 m. este bătut un par vertical, care intră în pămînt 2,26 m şi care se înalţă deasupra apei cu 1,5 m.

Să se afle lungimea parului.

3. Volumul unui copac cu coajă este 0,36 m^3. Volumul cojei (scoarţei) este 42 dm^3. Să se afle volumul copacului fără coajă.

4. Într-o grădiniţă dreptunghiulară lungă de 15 m şi lată de 12 m se face un strat rotund, cu diametrul de 5,0 m. Să se afle porţiunea rămasă din grădiniţă.

d) *Înmulţirea şi împărţirea numerelor aproximative*

Problemă. Să se calculeze suprafaţa unei camere dreptunghiulare lungă de 7,28 m şi lată de 5,24 m

$$S = 7{,}28 \times 5{,}24 = 38{,}147$$

Pentru a verifica, care cifre, de la stînga spre dreapta, sînt considerate sigure prin înmulţirea unui număr de trei cifre cu alt număr

de cifre vom pune în locul milimetrilor semn de întrebare şi vom înmulţi.

$$\begin{array}{r} 728? \\ \times\ 524? \\ \hline ???? \\ 2912? \\ 1456? \\ 3640? \\ \hline 3814???? \end{array}$$

În acest rezultat numai primele trei cifre pot fi considerate exacte. A patra cifră (4) este nesigură, deoarece prin adunarea? $+1+6+?$ nu ştim cîte unităţi vor trece la ordinul superior.

Alte exemple:

$$\begin{array}{r} 2{,}36? \\ 1{,}84? \\ \hline ??? \\ 944? \\ 1888? \\ 236? \\ \hline 434???? \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 7{,}4\ ??? & 274{,}? \\ 5{,}4\ 8? & 2{,}7 \\ \hline 19{,}2\ ?? & \\ 19{,}1\ 8? & \\ \hline 02\ ?? & \end{array}$$

Linia verticală desparte cifrele sigure de cele nesigure. Prin mutarea virgulei în datele problemei la înmulţire şi împărţire, numărul cifrelor sigure ale rezultatului nu se schimbă, se schimbă numai poziţia virgulei. Putem formula astfel regula: la înmulţirea şi împărţirea numerelor aproximative, trebuie păstrate la rezultat atîtea cifre semnificative cîte sînt în numărul aproximativ cu cel mai mic număr de cifre semnificative.

PROBLEME

1. Să se calculeze volumul unui cilindru cu diametrul bazei de 36 cm şi înălţimea de 4,1 m.

2. O porţiune de teren are forma unui triunghi cu baza de 34,3 m şi lăţimea de 112 m. Recolta pe ha este de 1300 kg. La ce recoltă ne putem aştepta de pe întreaga porţiune?

3. La un meci de fotbal au asistat 5936 oameni. Din ei 1205 oameni au plătit la intrare cîte 6 lei, 1473 cîte 3 lei, iar restul cîte 2,5 lei. Cîţi bani s-au strîns în total de la intrare?

4. Dimensiunile unei camere sînt 6,2 m × 8,3 m. La ce înălțime (de la duşumea) trebuie să se afle tavanul, pentru ca această cameră să conțină 250 m^3 aer?

5. Volumul unui cilindru este 5,000 dm^3. Înălțimea cilindrului este 43,5 m. Să se afle suprafața bazei cilindrului.

6. Cîte cărămizi sînt necesare pentru construirea unui perete lung de 8,7 m, înalt de 4,4 m şi gros de 0,43 m, dacă dimensiunile cărămizii sînt 2,50 cm × 15 cm × 6 cm?

Intervalele dintre cărămizi se umplu cu var, care ocupă 0,1 dm din volumul total al cărămizii.

Un material bogat pentru calcule aproximative îl dau problemele cu procente şi problemele cu conținut geometric.

La studiile numerelor iraționale, ce se vor face în cursul mediu, vom avea nevoie de teoria limitelor, care dă posibilitatea de a face calcule aproximative cu o evidență exactă a erorilor.

e) *Exemple de lecții predate la clasele a V-a şi a VI-a*

I. Lecția de recapitulare a fracțiilor zecimale (clasa a V-a „A", prof. V. Georgescu). Li s-a dat elevilor următoarea problemă:

În două hambare se păstrează 45 t 875 kg bumbac în baloturi de greutate egală. În primul hambar sînt depozitate cu 58 q 75 kg mai mult decît în cel de-al doilea hambar. Cîte baloturi de bumbac se află în fiecare hambar, dacă în primul se află cu 47 baloturi mai mult decît în cel de-al doilea?

Profesorul a cerut elevilor să efectueze pentru rezolvarea acestei probleme calcule orale, semiscriptice, scriptice.

Etapele de rezolvare sînt:

1) 5875 kg: 47 = 125 kg — este greutatea unui balot de bumbac (calcul scris)

2) 45t 875 kg +
5t 875 kg

51t 750 kg de bumbac ar fi fost în ambele hambare, dacă în cel de-al doilea ar fi fost tot atîtea cîte erau în primul (calcul scris).

3) 51t 750 kg: 2 = 25t 875 kg de bumbac erau în primul hambar (calcul semiscriptic).

4) 25t 875 kg: 125 kg = 207 (oral); 207 baloturi erau în primul hambar (calcul oral).

5) 207 baloturi — 47 baloturi = 160 baloturi erau în cel de-al doilea hambar (calcul oral).

II. Lecție de recapitulare a operațiilor cu numere întregi (clasa a V-a „B", profesor Spiridon Ghițescu). Li s-a dat elevilor următoarea problemă:

O gospodărie agricolă de stat a însămînțat 4725 ha cu grîu, ovăz, secară. Cu grîu s-a însămînțat cu 684 ha mai mult decît cu ovăz, cu secară s-a însămînțat cu 1473 ha mai puțin decît cu grîu. Cîte ha s-au însămînțat cu fiecare?

Tipul problemei: aflarea numerelor după suma și diferența lor.

Planul problemei:

1. Cu cîte ha mai mult s-a însămînțat ovăz decît secară?
2. Cu cît s-ar fi micșorat suprafața totală ocupată de cele 3 culturi, dacă s-ar fi însămînțat cu grîu și ovăz aceeași suprafață ca și cu secară?
3. Care ar fi fost suprafața însămînțată cu cele 3 culturi, dacă s-ar fi însămînțat cu fiecare cultură aceeași suprafață ca și cu secară?
4. Ce suprafață a cîmpului a fost însămînțată cu secară?
5. Ce suprafață a cîmpului a fost însămînțată cu grîu?
6. Ce suprafață a fost însămînțată cu ovăz?

Rezolvare

1) 1473 ha — 684 ha = 789 ha (calcul oral)
2) 1473 ha + 789 ha = 2262 ha (calcul oral)
3) 4725 ha — 2262 ha = 2463 ha (calcul oral)
4) 2463 ha : 3 = 821 ha (calcul oral)
5) 621 ha + 1473 ha = 2294 ha.
6) 2294 ha — 684 ha = 1610 ha.

Răspuns. Cu grîu au fost însămînțate 2294 ha, cu ovăz 1610 ha, cu secară 821 ha.

Verificare

1. Care este suprafața cîmpului însămînțat cu cele 3 culturi?

2294 ha + 1610 ha + 821 ha = 4725 ha.

2. Cu cîte ha este mai mare suprafața semănată cu grîu decît cea semănată cu ovăz?

2294 ha — 1610 ha = 684 ha.

3. Cu cîte ha este mai mare suprafaţa însămînţată cu secară decît cea semănată cu grîu?

$$2294 \text{ ha} - 821 \text{ ha} = 2473 \text{ ha}.$$

S-au obţinut datele din enunţ. Rezolvarea problemei este corectă.

III. Lecţie de recapitulare a cunoştinţelor despre mărimi proporţionale (clasa a VI-a, profesor Florea Păsărică).

Li s-a dat elevilor următoarea problemă: o gospodărie agricolă colectivă a cosit fînul din două lunci. Din prima luncă a obţinut 49 t, ceea ce constituie $46\frac{2}{3}$ % din întreaga cantitate de fîn obţinută, gospodăria agricolă colectivă a depozitat-o într-un şopron, iar restul cantităţii a fost clădită în trei stoguri, fînul fiind distribuit între aceste trei stoguri oarecum proporţional cu numerele $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$. Cîte tone de fîn sînt în fiecare stog?

Problema este o problemă *combinată*: aflarea procentelor şi împărţirea invers proporţională a numerelor date.

Planul problemei:

1. Stabilirea greutăţii întregii cantităţi de fîn obţinută de pe cele 2 lunci.
2. Stabilirea greutăţii întregii cantităţi de fîn clădită în cele trei stoguri.
3. Stabilirea greutăţii fînului în fiecare stog.

Rezolvare

1. $46\frac{2}{3}\% = \frac{140}{3100} = \frac{7}{15}$ părţi (calcul oral)

$$49 : \frac{7}{15} = \frac{49 \cdot 15}{7} = 105 \text{ t (calcul semiscriptic).}$$

2. $100\,\% - 48\,\frac{4}{7}\,\% = \frac{360}{700} = \frac{18}{35} = 51\,\frac{3}{7}\,\%$

$$51\,\frac{3}{7}\,\% = \frac{360}{700} = \frac{18}{35}$$

$$105 \cdot \frac{18}{35} = 54 \text{ t} \quad \text{(calcul oral).}$$

3. $2+3+4 = 9$

$$54 : 9 = 6 \text{ t}$$
$$6 \times 2 = 12$$
$$6 \times 3 = 18$$
$$6 \times 4 = 24$$

Răspuns. În primul stog s-au clădit 12 t
În al doilea stog s-au clădit 18 t
În al treilea stog s-au clădit 24 t

Cum au aplicat elevii calculul oral

S-au obținut rezultate mai bune la clasele V-VII și mai slabe la clasele VIII-X. Mai ales în clasa a X-a a fost greu să-i deprindem pe elevi să folosească calculul oral. Timpul a fost prea scurt pentru a-i dezbăra de obișnuința de a folosi calcule scriptice pentru orice lucrare.

La examenul de admitere în clasa a VIII-a însă colectivul profesorilor de matematici și-a dat seama cu satisfacție de faptul că absolvenții clasei a VII-a și-au însușit bine deprinderile de calcul oral.

Din cele două clase a VII-a (86 elevi) s-au prezentat 78 elevi la examenul de admitere ținut la Școala medie nr. 18, reușind 72 elevi. Circa 40 elevi au rezolvat exercițiul aritmetic prin calcul oral fără nici o greșeală.

Formarea deprinderilor de calcul scris și oral în clasele V-VII este o sarcină importantă a muncii profesorului. Această sarcină poate fi adusă la îndeplinire, cum s-a spus la început, fie în ore speciale, fie în 5-10 minute la începutul unora din lecții, sau chiar în timpul lecției dacă este nevoie. De asemenea astfel de calcule trebuie date și ca temă pentru acasă, cu condiția să fie bine pregătite de către profesor. Dacă elevul mînuiește cu abilitate calculele orale și cu aproximație, atunci timpul de rezolvare a problemelor se scurtează, încît el poate face un număr mai mare de probleme și în afara celor date acasă.

CUM DEPRIND PE ELEVII DIN CLASELE VIII—X SĂ FOLOSEASCĂ PROCEDEE RAȚIONALE DE CALCUL

MARIETA DINESCU
Școala medie nr. 55 mixtă
BUCUREȘTI

Noile programe școlare pun premisele pregătirii multilaterale a elevilor. Un rol deosebit are, în această privință, pregătirea elevilor la matematică. Un absolvent al școlii medii trebuie să fie astfel pregătit, încît să poată face față cu ușurință diferitelor probleme pe care i le pune practica de zi cu zi. Pentru aceasta nu este suficient ca elevul să acumuleze o serie de cunoștințe teoretice, ci trebuie să fie capabil să aplice în practică acele cunoștințe, să știe să aleagă cea mai rațională cale de rezolvare a unei probleme și cele mai raționale procedee de calcul. În același timp, el trebuie să fie familiarizat cu diferitele tabele matematice și cu calculele cu aproximație.

Elevii clasei a VIII-a au formate o serie de deprinderi de calcul. Ei cunosc unele reguli pentru efectuarea înmulțirii și împărțirii rapide, știu că la operații cu fracții ordinare este bine să se facă mai întîi toate simplificările posibile, știu să aplice proprietățile operațiilor etc.

Aceste deprinderi trebuie să fie însă dezvoltate în clasele VIII—X. Așa, de exemplu, la calculele cu logaritmi se pot aplica proprietățile operațiilor într-un șir de adunări și scăderi de logaritmi. Ele duc la rezolvarea exercițiilor de forma:

$$\log x = \bar{3},\ 12103 - \bar{1},\ 12107 + 2,\ 00305 - 0,15127 + 0,\ 11304 - 2,\ 25307$$

Este mai simplu să strîngem într-un termen toți termenii care se scad pentru a aplica cologaritmul o singură dată.

$$\log x = \bar{1},\ 23712 - 1,52541 = \bar{1},23712 + \bar{2},47459 = \bar{3},71171$$

Tot la calcule cu logaritmi se poate scoate în evidență că la împărțirea unui logaritm cu caracteristică negativă cu un

număr este uneori convenabil că transformăm logaritmul în cologaritm. De exemplu, la calcularea expresiei:

$$\log x = 3{,}23005 - \frac{\bar{3},12075}{5} + \frac{\bar{2},10121}{3} - \frac{1{,}17105}{5}$$

este preferabil ca la prima împărțire să se afle întîi cologaritmul

$$\log x = 3{,}23005 + \frac{2{,}87925}{5} + \bar{1},36707 - 0{,}23421$$

$$\log x = 3{,}23005 + 0{,}57585 + \bar{1},36707 + \bar{1},76579 = 2{,}93876$$

Tot în scopul simplificării calculelor este util uneori să se aplice permutările circulare (atunci cînd expresiile prezintă o simetrie în raport cu literele pe care le cuprind).

De aceea, la calcularea expresiei:

$$A = \frac{x^2+y^2-z^2}{xy(x+z)(y+z)} + \frac{-x^2+y^2+z^2}{yz(x+y)(x+z)} + \frac{x^2-y^2+z^2}{xz(x+y)(y+z)}$$

$$A = \frac{z(x+y)(x^2+y^2-z^2)+x(y+z)(y^2+z^2-x^2)+y(z+x)(z^2+x^2-y^2)}{xyz(x+y)(x+z)(y+z)}$$

notînd:

$$z(x+y)(x^2+y^2-z^2) = X$$
$$x(y+z)(y^2+z^2-x^2) = Y$$
$$y(z+x)(z^2+x^2-y^2) = Z$$

se vede că este suficient să se calculeze X. Prin permutări circulare

$x \to y \to z$ din X deducem Y iar din Y pe Z.

$$X = x^3z + y^3z + x^2yz + xy^2z - xz^3 - yz^3$$
$$Y = y^3x + z^3x + y^2zx + yz^2x - yx^3 - zx^3$$
$$Z = z^3y + x^3y + z^2xy + zx^2y - zy^3 - xy^3$$
$$A = X + Y + Z = 2x^2yz + 2z^2xy + 2xy^2z$$
$$A = 2xyz(x+y+z)$$

Evident că, pentru rezolvarea rațională a unei probleme nu este suficient să se efectueze anumite simplificări de calcul. Important este ca metoda de rezolvare să fie cea mai simplă și să folosească un număr minim de calcule.

Pentru a atrage atenția elevilor mele asupra utilității de a folosi procedee raționale la rezolvarea problemelor și exercițiilor, dau ca teme de muncă independentă (teme pentru acasă sau lucrări de control curent), exerciții care se pot rezolva ușor dacă se folosesc procedee raționale.

La verificarea temei se lucrează la tablă în cel mai rațional mod exercițiile pe care elevele le-au rezolvat printr-o metodă mai complicată. Simplitatea calculelor făcute la tablă scoate în evidență avantajul procedeului folosit. Am atras atenția elevelor că „artificiile de calcul" folosite de ele la rezolvarea unui sistem de ecuații nu sînt altceva decît procedee raționale de calcul, procedee sugerate de particularitatea sistemului respectiv. Cu timpul, majoritatea elevelor s-au obișnuit să cerceteze cu atenție un exercițiu înainte de a trece la rezolvarea lui; ele și-au reamintit anumite procedee folosite în anii precedenți la aritmetică și algebră și și-au însușit alte procedee noi.

Așa, de exemplu, pentru a reaminti elevelor unele procedee raționale de calcul folosite de ele la operațiile cu fracții, am propus să se rezolve exerciții de felul următor:

$$1)\ \frac{x^3-3ax^2+3a^2x-a^3}{x+a}:\frac{x-a}{x+a}=\frac{(x-a)^3}{(x+a)}\cdot\frac{x+a}{x-a}=(x-a)^2$$

$$2)\ \frac{x^2-x}{x-3}:\frac{x^2-5x}{x-3}=\frac{x(x-1)}{x-3}\cdot\frac{(x-3)}{x(x-5)}=\frac{x-1}{x-5}$$

Pentru a reaminti elevelor că de multe ori este util să aplicăm în calcul proprietățile operațiilor și că la operațiile cu fracții este bine să se facă mai întîi toate simplificările posibile, am propus exerciții de felul următor:

$$1)\ \frac{(x+a)^2-b^2}{x^2-a^2+2ab-b^2}+\frac{x-a-b}{x+a-b}-\frac{x+a+b}{x-a+b}=x-a-b$$

Simplificînd prima fracție se obține:

$$\frac{(x+a-b)\ (x+a+b)}{[x-(a-b)][x+(a-b)]}+\frac{x-a-b}{x+a-b}-\frac{x+a+b}{x-a+b}=x-a-b$$

Reducînd fracţiile care au acelaşi numitor, se obţine ecuaţia:

$$\frac{x-a-b}{x+a-b}=x-a-b$$

Dînd $x-a-b$ factor se obţine:

$$(x-a-b)\,(1+b-a-x)=0 \quad (x+a-b\neq 0)$$

De unde $x_1=a+b \qquad x_2=b-a+1$

$$2)\ \frac{2x+2x^2}{9x^3-4x}-\frac{x-2}{9x^2+12x+4}=\frac{x+4}{9x^2-4}$$

$$\frac{x\,(2+2x)}{x\,(9x^2-4)}-\frac{x-2}{(3x+2)^2}=\frac{x+4}{9x^2-4}$$

$$\frac{x-2}{9x^2-4}-\frac{x-2}{(3x+2)^2}=0$$

$$(x-2)\cdot(3x+2-3x+2)=0 \quad (9x^2-4\neq 0)$$

$$x-2=0 \qquad x=2$$

Pentru a reaminti elevelor procedeul de a folosi în calculele numerice formulele de calcul prescurtat cunoscute din algebră, le-am cerut să aplice aceste formule ori de cîte ori este posibil. De exemplu, la rezolvarea triunghiului dreptunghic în care se cunosc ipotenuza (a) şi o catetă (b), pentru calcularea celeilalte catete (c) se aplică formula

$c^2=a^2-b^2=(a-b)\,(a+b)$. De exemplu, dacă $a=29$, $b=20$

$$c^2=29^2-20^2=49\cdot 9$$

$$c=7\cdot 3 \qquad c=21$$

Procedeul folosit este evident mai avantajos decît dacă s-ar face operaţiile direct şi e cu atît mai avantajos cu cît numerele sînt mai mari.

*
* *

Pentru a reaminti procedeele de calcul folosite la studiul proporţiilor, am propus să se rezolve ecuaţia de forma:

$$1)\ \frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{a+b+1}{a+b-1}$$

Formînd o proporţie derivată:

$$\frac{x^2+1+x^2-1}{x^2+1-x^2+1}=\frac{a+b+1+a+b-1}{a+b+1-a-b+1}$$

$$x^2=a+b \qquad x=\pm\sqrt{a+b}$$

2) $$\frac{x^2+1}{x^2+a+b}=\frac{x^2-1}{x^2+a-b}$$

Dacă schimbăm mezii între ei şi formăm o proporţie derivată, obţinem:

$$\frac{x^2+a}{b}=x^2 \qquad x^2=\frac{a}{b-1} \qquad x=\pm\sqrt{\frac{a}{b-1}}$$

3) $$\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\dfrac{25}{7} \\ xy=48 \end{cases}$$

Aplicînd acelaşi procedeu, se obţine:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2}=\dfrac{16}{9} \\ xy=48 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{y}=\pm\dfrac{4}{3} \\ xy=48 \end{cases}$$

1′) $$\begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{4}{3} \\ xy=48 \end{cases}$$ şi 2′) $$\begin{cases} \dfrac{x}{y}=-\dfrac{4}{3} \\ xy=48 \end{cases}$$

Primul sistem ne duce la soluţiile:

$$x_1=8; \quad y_1=6$$
$$x_2=-8; \quad y_2=-6$$

Al doilea sistem nu are soluţii.

Comparînd rezolvarea sistemului prin acest procedeu cu rezolvarea directă, elevele şi-au dat seama că este avantajos să se lucreze în primul fel.

Este evident că la fiecare capitol nou elevele căutau să găsească noi procedee raţionale de calcul.

De exemplu, la rezolvarea ecuaţiilor de gr. II cu coeficienţi literali, elevele au observat că uneori (cînd coeficientul lui x este par), este preferabil, să nu se aplice formula de rezolvare, ci să se formeze în primul membru un pătrat perfect. Acest pro-

cedeu are și avantajul că reamintește elevilor modul cum s-a stabilit formula respectivă. Dăm cîteva exemple de acest fel:

1) $x^2 - 6acx + a^2(9c^2 - 4b^2) = 0$

$$(x - 3ac)^2 = 4a^2b^2$$

$$x - 3ac = \pm 2ab \qquad x = 3ac \pm 2ab$$

2) $d^2x^2 - 4ab\,dx + 4\,a^2b^2 - 9c^2 = c$

$$(dx - 2ab)^2 = 9c^2$$

$$dx - 2\,ab = \pm 3c \qquad x = \frac{2ab \pm 3c}{d}$$

3) $x^2 - 2(a^2 + b^2)\,x + (a^2 - b^2)^2 = 0$

$$[x - (a^2 + b^2)]^2 = (a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2$$

$$x - (a^2 + b^2) = \pm\sqrt{2a^2 \cdot 2b^2}$$

$$x = a^2 + b^2 \pm 2ab$$

$$x = (a \pm b)^2$$

4) $(a^2 - b^2)\;x^2 - 2(a^2 + b^2)\,x + a^2 - b^2 = 0$

$$x^2 - \frac{2(a^2 + b^2)}{a^2 - b^2} \cdot x + 1 = 0$$

$$\left(x - \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}\right)^2 = \frac{(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2}{(a^2 - b^2)^2}$$

$$x - \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \pm \sqrt{\frac{2a^2 \cdot 2b^2}{a^2 - b^2}}\,;\; x = \frac{a^2 + b^2 \pm 2\,ab}{a^2 - b^2}$$

$$x_1 = \frac{a + b}{a - b} \qquad x_2 = \frac{a - b}{a + b}$$

5) $\dfrac{x^2}{(a + b)^2} - \dfrac{4\,ab\,x}{(a + b)^2} - (a - b)^2 = 0$

$$x^2 - 4\,abx - (a^2 - b^2)^2 = 0$$

$$(x - 2ab)^2 = 4\,a^2b^2 + (a^2 - b^2)^2$$

$$x - 2ab = \pm (a^2 + b^2)$$

$$x_1 = (a + b)^2 \qquad x_2 = -(a - b)^2$$

* * *

La rezolvarea unor ecuații și sisteme de ecuații s-au scos în evidență, cu ajutorul exemplelor, două procedee folosite mai des:

1) introducerea unei necunoscute ajutătoare;

2) descompunerea unui membru al ecuației în factori.

Așa, de exemplu, elevele au remarcat că, la rezolvarea sistemelor care cuprind egalități de rapoarte este mai simplu uneori să se egaleze rapoartele cu o nouă necunoscută decît să se aplice proprietatea rapoartelor egale.

Sistemul $\begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{u}{d} \\ ax + by + cz + du = \frac{a}{b} \end{cases}$

se rezolvă imediat dacă egalăm șirul de rapoarte cu K, de unde: $x = Ka$; $y = Kb$; $z = Kc$; $u = Kd$; ultima ecuație devine

$$K(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = \frac{a}{b}$$

$$K = \frac{a}{b(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}$$

De unde:

$$x = \frac{a^2}{b(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}$$

$$y = \frac{a}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

$$z = \frac{ac}{b(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}$$

$$u = \frac{ad}{b(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}$$

În același mod se rezolvă sistemul:

$$\begin{cases} \frac{x}{6} = \frac{y}{3} = \frac{z}{18} \\ 3x + 5y + z = 34 \end{cases}$$

$$x = 6K;\ y = 3K;\ z = 18K$$

$$K(18 + 15 + 18) = 34$$

$$K = \frac{34}{51} = \frac{2}{3}$$

$$x = 4;\ y = 2;\ z = 12$$

Procedeul poate fi folosit și la rezolvarea sistemelor de forma

$$\begin{cases} mx = ny = pz \\ ax + by + cz = d \end{cases}$$

Egalînd primele produse cu K, avem,

$$x = \frac{K}{m}; \qquad y = \frac{K}{n}; \qquad z = \frac{K}{p}.$$

$$K\left(\frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p}\right) = d \qquad K = \frac{d\,m\,n\,p}{an\,p + bmp + cmn}$$

$$x = \frac{d\,np}{amp + bmp + cmn}; \quad y = \frac{m\,p\,d}{anp + bmp + cmn};$$

$$z = \frac{m\,n\,p}{anp + bmp + cmn}$$

Tot prin introducerea unei necunoscute auxiliare s-au rezolvat ecuații și sisteme de ecuații de forma următoare:

I. 1) $\sqrt{x-3} + 6 = 5\sqrt[4]{x-3}$

Notînd $\sqrt[4]{x-3} = y$ ecuația (1) devine

2) $y^2 - 5y + 6 = 0$ care are evident rădăcinile

$$y_1 = 2; \qquad y_2 = 3$$

Deci:

$$x - 3 = 16 \qquad x_1 = 19$$
$$x - 3 = 81 \qquad x_2 = 84$$

Verificînd, se vede că ambele rădăcini sînt soluții ale ecuației (1).

II. 1) $x^2 - 3x + \sqrt{x^2 - 3x + 5} = 7$

Notînd

$$x^2 - 3x + 5 = y^2$$ obținem ecuația:

$$y^2 + y - 12 = 0$$

III. 1) $\sqrt{6x^2-12x+7}=x^2-2x$

Notînd $x^2-2x=y$, obţinem ecuaţia:

2) $\sqrt{6y+7}=y$. Ridicînd ambii membri la pătrat şi strîngînd termenii asemenea, se obţine ecuaţia:

3) $y^2-6y-7=0$ care are evident rădăcinile

$$y_1=-1; \qquad y_2=7$$

Din ecuaţia (2) rezultă că $y>0$, deci ecuaţia (2) este satisfăcută de rădăcina $y=7$.

$$x^2-2x-7=0 \qquad x=1\pm\sqrt{1+7}$$

$$x_{1,2}=1\pm 2\sqrt{2}$$

Aceste valori ale lui x verifică ecuaţia (1), deci sînt soluţiile ecuaţiei (1).

IV. 1) $4\sqrt[3]{x}-\dfrac{20}{\sqrt[3]{x}}=11$

Notînd $\sqrt[3]{x}=y$. Ecuaţia (1) devine

2) $4y^2-11y-20=0 \qquad y=\dfrac{11\pm\sqrt{121+320}}{8}=\begin{cases}4\\ -\dfrac{5}{4}\end{cases}$

$$x_1=(4)^3 \qquad x_2=\left(-\frac{5}{4}\right)^3$$

$$x_1=64 \qquad x_2=\frac{-125}{64}$$

Ambele valori verifică ecuaţia (1)

V. 1) $x^2+x+1=\dfrac{42}{x^2+x}$

Notînd $x^2+x=y$ ecuaţia (1) devine

2) $y+1=\dfrac{42}{y}$ de unde $y^2+y-42=0$

$$y=\frac{-1\pm 13}{2}=\begin{cases}6\\ -7\end{cases}$$

$x^2+x-6=0$, de unde $x_1=-3$; $x_2=2$

$$x^2+x+7=0 \qquad x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{1-28}}{2}$$

$$x_3=\frac{-1+3i\sqrt{3}}{2};$$

$$x_4=\frac{-1-3i\sqrt{3}}{2}$$

VI. 1) $\left(\frac{a-x}{x-b}\right)^2 + 8\frac{a-x}{b-x} = -15$

Notînd $\frac{a-x}{x-b} = y$ ecuația (1) devine

$y^2 - 8y + 15 = 0$, de unde $y_1 = 5$; $y_2 = 3$

$\frac{a-x}{x-b} = 5$; $6x = a + 5b$ $\quad x_1 = \frac{a+5b}{6}$

$\frac{a-x}{x-b} = 3$; $4x = a + 3b$ $\quad x_2 = \frac{a+3b}{4}$

VII. 1) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 9 \\ xz = \frac{1}{5} \\ yz = \frac{1}{3} \end{cases}$

Notînd $\frac{1}{x} = u$; $\frac{1}{y} = v$; $\frac{1}{z} = w$ ecuația (1) devine

2) $\begin{cases} u + v + w = 9 \\ uw = 5 \\ vw = 3 \end{cases}$ $\qquad$ 2') $\begin{cases} (9 - w)\, w = 8 \\ uw = 5 \\ vw = 3 \end{cases}$

Prima ecuație (2') are soluțiile: $w_1 = 8$ $w_2 = 1$

Soluțiile sistemului (2) sînt

$\begin{cases} u_1 = \frac{5}{8} \\ v_1 = \frac{3}{8} \\ w_1 = 8 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} u_2 = 5 \\ v_2 = 3 \\ w_2 = 1 \end{cases}$

Soluțiile sistemului (1) sînt deci:

$$x_1 = \frac{8}{5}\ ; \quad y_1 = \frac{8}{3}\ ; \quad z_1 = \frac{1}{8}$$

$$x_2 = \frac{1}{5}\ ; \quad y_2 = \frac{1}{3}\ ; \quad z_2 = 1$$

Elevele au aplicat metoda introducerii unei necunoscute auxiliare (făcînd schimbarea de necunoscută $y = tx$) la rezolvarea sistemelor de două ecuații cu două necunoscute cînd, omițînd termenul liber al fiecărei ecuații se obțin ecuații omogene de același grad.

De exemplu sistemul:

$$1)\ \begin{cases} x^2 + y^2 - 3xy = -1 \\ 3x^2 + 3y^2 - xy = 13 \end{cases}$$

Făcînd schimbarea de necunoscută $y = tx$, sistemul devine

$$2)\ \begin{cases} x^2(1 + t^2 - 3t) = -1 \\ x^2(3 + 3t^2 - t) = 13 \end{cases}$$

Împărțind cele două ecuații membru cu membru se obține o ecuație în t

$$3)\ 16t^2 - 40t + 16 = 0$$

$$t = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

Din prima ecuație a sistemului (2) rezultă pentru $t = 2$,

$$x^2 = \frac{-1}{-1} \quad x_{1,2} = \pm 1$$

iar pentru $t = \frac{1}{2}$, $x^2 = \frac{-1}{1 + \frac{1}{4} - \frac{3}{2}}$; $x^2 = 4$; $x_{3,4} = \pm 2$

Soluțiile sistemului (1) sînt deci:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 2 \\ x_4 = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = -2 \\ y_3 = 1 \\ y_4 = -1 \end{cases}$$

S-a făcut remarca, că sistemul (1) se putea rezolva mai uşor făcîndu-se alte înlocuiri;

Dacă notăm:

$x^2 + y^2 = u$ şi $xy = v$, sistemul (1) devine:

$$\begin{cases} u - 3v = -1 \\ 3u - v = 13 \end{cases}$$

care are soluţia $u = 5$; $v = 2$

Deci:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ 2\,xy = 4 \end{cases}$$

Adunînd şi scăzînd succesiv cele două ecuaţii, membru cu membru, se obţin 4 sisteme de gradul I şi anume:

$$\begin{cases} x + y = \pm 3 \\ x - y = \pm 1 \end{cases}$$

Rezolvînd aceste sisteme se obţin soluţiile găsite prin prima metodă.

O altă metodă folosită foarte des la rezolvarea sistemelor de ecuaţii de gradul al doilea este descompunerea unui membru al ecuaţiei în factori. De exemplu,

$$a) \begin{cases} (x + y)(8 - x) = 10 \\ (x + y)(5 - y) = 20 \end{cases}$$

Împărţind membru cu membru cele două ecuaţii se obţine:

$$\frac{5 - y}{8 - x} = 2, \text{ de unde } y = 2x - 11$$

Înlocuind în prima ecuaţie, se obţine:

$$3x^2 - 35x + 98 = 0, \quad x = \frac{35 \pm 7}{6} \begin{matrix} \nearrow 7 \\ \searrow \frac{14}{3} \end{matrix}$$

Soluţiile sistemului sînt deci:

$$x_1 = 7 \qquad y_1 = 3$$

$$x_2 = \frac{14}{3} \qquad y_2 = -\frac{5}{3}$$

După ce s-au lucrat 2 — 3 sisteme de acest fel (membrul I descompus în factori) elevele au rezolvat sisteme de felul următor:

$$\begin{cases} x^2 - 5y^2 - 3x - y + 22 = 0 \\ (x-3)\ (y-2) = y^2 - 3y + 2 \end{cases}$$

Prima ecuație se poate scrie:

$$x\ (x-3) = 5y^2 + y - 22$$

Împărțind cele două ecuații membru cu membru

$$\frac{x\,(x-3)}{(x-3)\ (y-2)} = \frac{5y^2 + y - 22}{y^2 - 3y + 2}$$

$$x = \frac{(y-2)\ (5y^2 + y - 22)}{(y-2)\ (y-1)}$$

Înlocuind pe x în ecuația a doua și dînd pe $y - 2$ factor comun se obține:

$$(y-2)\left[\frac{5y^2 + y - 22 - 3y + 3}{y-1} - (y-1)\right] = 0$$

Pentru $y - 1 \neq 0$ avem:

$$(y-2)\ (4y^2 - 20) = 0,\ y_1 = 2;\ y_{2,3} = \pm\sqrt{5}$$

Dacă $y_1 = 2$, din prima ecuație scoatem valoarea lui x (nu putem înlocui în a doua ecuație care este verificată pentru $y = 2$ oricare ar fi x)

$$x^2 - 3x = 0 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 3$$

Pentru $y = \pm\sqrt{5}$ este preferabil să scoatem valoarea lui x din a doua ecuație, care cuprinde pe x numai la puterea întîi

$$x = y + 2 \quad x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{5} = \begin{cases} 2 + \sqrt{5} \\ 2 - \sqrt{5}. \end{cases}$$

Soluțiile sistemului sînt:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = 2 + \sqrt{5} \quad x_4 = 2 - \sqrt{5}$$
$$y_1 = 2 \quad y_2 = 2 \quad y_3 = \sqrt{5} \quad y_4 = -\sqrt{5}.$$

S-a trecut apoi la rezolvarea sistemelor de felul următor:

$$1)\ \begin{cases} x^2 + xy + xz = a \\ y^2 + xy + yz = b \\ z^2 + xz + yz = c \end{cases}$$

Descompunînd membrul I al fiecărei ecuații în factori și adunînd membru cu membru, se obține:

$$(x+y+z)\ (x+y+z) = a+b+c \qquad x+y+z = \pm\sqrt{a+b+c}$$

$$x = \frac{a}{\pm\sqrt{a+b+c}}\ ;\ y = \frac{b}{\pm\sqrt{a+b+c}}\ ;\ z = \frac{c}{\pm\sqrt{a+b+c}}$$

$$2)\ \begin{cases} x^2 + xy - xz = a \\ y^2 + xy - yz = b \\ -z^2 + xz + yz = c \end{cases} \qquad \begin{cases} x\ (x+y-z) = a \\ y\ (x+y-z) = b \\ z\ (x+y-z) = c \end{cases}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}\ ;\ \frac{z}{y} = \frac{c}{b} \qquad y^2 \cdot \left(\frac{a}{b} + 1 - \frac{c}{b}\right) = b$$

$$y = \pm\frac{b}{\sqrt{a+b-c}}\ ;\ x = \pm\frac{a}{\sqrt{a+b-c}}\ ;\ z = \pm\frac{c}{\sqrt{a+b-c}}$$

$$3)\ \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 4y - 45 = 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

Grupînd convenabil termenii, se obține:

$$\begin{cases} (x+y)^2 - 4\ (x+y) - 45 = 0 \\ (x-y)^2 - 2\ (x-y) - 3 = 0 \end{cases}$$

de unde:

$$x + y = 2 \pm 7$$
$$x - y = 1 \pm 2$$

Se obțin 4 sisteme de gradul I

$$\text{a}\ \begin{cases} x+y=9 \\ x-y=3 \end{cases} \quad \text{b}\ \begin{cases} x+y=-5 \\ x-y=3 \end{cases} \quad \text{c}\ \begin{cases} x+y=9 \\ x-y=1 \end{cases}$$

$$\text{d}\ \begin{cases} x+y=-5 \\ x-y=-1 \end{cases}$$

care dau respectiv soluțiile:

$$x_1 = 6 \qquad x_2 = -1 \qquad x_3 = 4 \qquad x_4 = -3$$

$$y_1 = 3 \qquad y_2 = -4 \qquad y_3 = 5 \qquad y_4 = -2$$

4) $\begin{cases} x^2 + 2xy - 8y^2 - 6x + 18y - 7 = 0 \\ 2x^2 - 5xy - 10y^2 - 3x + 9y + 7 = 0 \end{cases}$

La rezolvarea acestui sistem elevele au întîmpinat greutăți. Numai 5 eleve din clasă l-au rezolvat corect: 3 eleve au rezolvat prima ecuație în raport cu x descompunînd membrul întîi al primei ecuații prin metoda coeficienților nedeterminați. Ele au obținut sistemul:

$$\begin{cases} (x + 4y - 7)\,(x - 2y + 1) = 0 \\ 2x^2 - 5xy - 10y^2 - 3x - 9y + 7 = 0 \end{cases}$$

Din prima ecuație se obține:

a) $x = 7 - 4y$ și b) $x = 2y - 1$

a) $2(49 - 56y + 16y^2) - 35y + 20y^2 - 10y^2 - 21 + 12y + 9y +$

$+ 7 = 0 \qquad y^2 - 3y + 2 = 0 \qquad y_1 = 1 \qquad y_2 = 2$

b) $2\,(4y^2 - 4y + 1) - 10x^2 + 5y - 10y^2 - 6y + 3 + 9y + 7 = 0$

$$-12y^2 + 12 = 0 \qquad y_{3,4} = \pm 1$$

Soluțiile sistemului sînt deci:

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = -1 \qquad x_3 = 1 \qquad x_4 = -3$$

$$y_1 = 1 \qquad y_2 = 2 \qquad y_3 = 1 \qquad y_4 = -1$$

Prima metodă folosită pentru descompunerea în factori a expresiei $x^2 + 2xy - 8y^2 - 6x + 18y - 7$ a condus însă mai repede la rezultat:

$$x = 3 - y + \sqrt{9y^2 - 24y + 16} \qquad x_1 = 2y - 1$$

$$x = 3 - y \pm (3y - 4) \qquad x_2 = -4y + 7$$

$$(x - 2y + 1)\,(x + 4y - 7) = 0$$

Totuşi, majoritatea elevelor au preferat cea de-a doua metodă:

$$E = x^2+2xy-8y^2-6x+18y-7 = (x+ay+b)(x+cy+a) = x^2+ + (a+c)\,xy+acy^2+ (b+d)\,x + (ad+bc)\,y+bd$$

$$\begin{cases} a+c=2 \\ ac=-8 \\ b+d=-6 \\ ad+bc=18 \\ bd=-7 \end{cases}$$

Din primele două relaţii rezultă:

$$a_1 = 4 \qquad c_1 = -2$$
$$a_2 = -2 \qquad c_2 = 4$$

Apoi se găseşte:

$$b_1 = -7 \qquad d_1 = 1$$
$$b_2 = 1 \qquad d_2 = -7$$

deci:

$$E = (x + 4y - 7)\,(x - 2y + 1)$$

*
* *

Necesitatea de a observa cu atenţie un exerciţiu pentru a găsi calea cea mai simplă de rezolvare apare în mod evident pentru elevi la rezolvarea unui exerciţiu fără calcule, numai pe baza cunoştinţelor teoretice pe care le au. De exemplu, la discuţia ecuaţiei de gradul al doilea elevii pot afirma, fără a calcula discriminantul, că o ecuaţie de gradul al doilea în care $ac < 0$ are rădăcini reale. La rezolvarea ecuaţiilor iraţionale elevii îşi pot da seama direct, în unele cazuri, dacă o ecuaţie nu are soluţie, ţinînd seama de convenţia făcută la ecuaţiile iraţionale ca radicalul de ordinul al doilea să fie considerat totdeauna pozitiv şi să fie număr real.

Dau cîteva exemple din culegerea de probleme de algebră pentru clasele VIII—X.

1) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1} = 0$. Ecuaţia nu are rădăcini, pentru că o sumă de două numere pozitive nu poate fi nulă, iar $x+3$ şi $x+1$ nu pot fi nuli pentru aceeaşi valoare a lui x.

2) $\sqrt{x^2-1} + \sqrt{6x+7} = -4$. Ecuaţia nu are rădăcini, căci o sumă de două numere pozitive nu poate fi negativă.

3) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=0$. Ecuaţia nu are rădăcini, căci diferenţa a două numere diferite nu poate fi nulă.

4) $\sqrt{x-7}-\sqrt{5-x}=3$. Ecuaţia nu are rădăcini, căci primul radical are sens pentru $x>7$, iar al doilea pentru $x<5$; condiţii care nu pot fi îndeplinite simultan. O deosebită importanţă o are folosirea procedeelor raţionale de calcul la rezolvarea problemelor.

Simplitatea rezolvării unei probleme nu se datoreşte numai folosirii anumitor procedee de calcul, ci în primul rînd metodei de rezolvare. Elevii ştiu din practica lor zilnică, că majoritatea problemelor pot fi rezolvate pe mai multe căi şi că de alegerea metodei de rezolvare depind şi calculele pe care le vor efectua.

Aşa, de exemplu, la rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuaţiilor elevii ştiu că, de cele mai multe ori, problema cuprinde mai multe mărimi necunoscute şi că rezolvarea se simplifică dacă se fixează necunoscuta principală pe baza analizei problemei respective.

Problemă

Un motociclist a parcurs drumul de la un sat pînă la oraş în cîteva ore. Dacă viteza lui ar fi cu 4 km pe oră mai mică, i-ar trebui cu 1 oră mai mult, iar dacă viteza lui ar fi cu 6 km pe oră mai mare, ar parcurge drumul numai în $\frac{4}{5}$ din timpul în care l-a parcurs în realitate. Să se afle viteza motociclistului şi distanţa de la sat la oraş (Culegere de probleme de algebră pentru clasele a VI-a şi a VII-a).

În această problemă toate trei mărimile (spaţiu, viteză, timp) sînt necunoscute. Problema se poate rezolva în trei feluri, după cum fixăm necunoscutele principale. Ţinînd seama de relaţia $S=vt$ care leagă cele trei mărimi ar fi raţional să alegem ca necunoscute principale viteza şi timpul, pentru a nu lucra cu ecuaţii care conduc în mod obişnuit la calcule mai lungi.

Prima rezolvare:

	Viteza în km/oră	Timpul în ore	Distanţa în km
I.	x	y	xy
II.	$x-4$	$y+1$	$(x-4)(x+1)$
III.	$x+6$	$\frac{4}{5}-y$	$\frac{4}{5}y(x-6)$

Ecuaţiile problemei sînt:

$$\begin{cases} xy = (x-4)(y+1) \\ \frac{4}{5}y(x+6) = xy \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 4y = 4 \\ xy - 24y = 0 \end{cases}$$

Soluţia $y = 0$ nu convine problemei

deci $x = 24 \qquad y = 5$

R. Viteza motociclistului = 24 km/oră, distanţa parcursă= $= 24 \cdot 5 = 120$ (km).

A doua rezolvare::

Timpul în ore	Distanţa în km	Viteza în km/oră
I. x	y	$\frac{y}{x}$
II. $x+1$	y	$\frac{y}{x+1}$
III. $\frac{4}{5}x$	y	$\frac{5y}{4x}$

Ecuaţiile problemei:

$$\begin{cases} \frac{y}{x} - 4 = \frac{y}{x+1} \\ \frac{5y}{4x} = \frac{y}{x} + 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} yx + y - 4x^2 - y = 0 \\ \frac{y}{x} = 24 \end{cases}$$

$$y = 24x \quad (x \neq 0)$$

$$24x^2 - 4x^2 - 4x = 0$$

$20x^2 - 4x = 0 \quad x = 0$ nu convine problemei

$x = 5 \qquad y = 120$

R. Distanţa parcursă = 120 km, cu viteza

$$\frac{120}{5} = 24 \text{ (km/oră)}$$

A treia rezolvare:

	Spaţiul în km	Viteza în km/oră	Timpul în ore
I.	x	y	$\frac{x}{y}$
II.	x	$y-4$	$\frac{x}{y-4}$
III.	x	$y+6$	$\frac{x}{y+6}$

Ecuaţiile problemei:

$$\begin{cases} \frac{x}{y}+1=\frac{x}{y-4} \\ \frac{x}{y+6}=\frac{4}{5}\cdot\frac{x}{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy-4x+y^2-4y=xy \\ 5xy=4xy+24x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2-xy-4x=0 \\ xy=24x \end{cases}$$

$x=0$ nu convine problemei, deci

$y=24$ $\qquad 24\,(24-4)=4x$

$x=24\cdot 5=120$

Răspuns: distanţa parcursă = 120 km, cu viteza de 24 km/oră.

Este evident că în primul caz sistemul obţinut se rezolvă mai uşor.

Problema:

Suma a trei numere care formează o progresie aritmetică este 45. Dacă din aceste numere se scad respectiv 2,9 şi 8 se obţin 3 numere care formează o progresie geometrică crescătoare. Să se afle suma a nouă termeni ai progresiei geometrice obţinute (Culegerea de probleme de algebră pentru clasele VIII-X).

În acest caz este preferabil să luăm ca necunoscute principale al doilea termen al progresiei aritmetice şi raţia (avînd suma unui

număr impar de termeni ai progresiei, termenii care conţin raţia se reduc).

$$\div\ a-r;\quad a;\quad a+r$$

$$S=45\qquad 3a=45$$
$$a=15$$

$$\div\ 15-r;\quad 15;\quad 15+r$$

$$\div\ 13-r;\quad 6;\quad 7+r$$

Condiţia ca aceste 3 numere să fie în progresie geometrică

$$6^2=(13-r)(7+r)$$

$$r^2-6r-55=0$$

$$r=3\pm 8=\begin{cases}11\\-5\end{cases}$$

Soluţia $r=-5$ nu corespunde problemei (progresia geometrică este crescătoare).

Pentru $r=11$ se obţine:

$$\div\ 2;\quad 6;\quad 18.....$$

$$S_9=2\cdot\frac{3^9-1}{2}$$

$$S_9=2\cdot\frac{19683-1}{2}$$

$$S_9=19682$$

Pentru a calcula pe S_9 am folosit tabela XX din „Tabele şi formule matematice" şi anume $3^9=(27)^3$ iar pe coloana x^3 se găseşte că $27^3=19683$.

O notaţie fericit aleasă uşurează calculele şi în cazul cînd se dă valoarea produsului unui număr impar de termeni consecutivi ai unei progresii geometrice. În acest caz se alege termenul de la mijloc ca necunoscută principală. De exemplu, dacă se cunoaşte produsul $P_a(n-1)$ termeni consecutivi ai unei progresii geometrice, notăm termenii progresiei astfel:

$$\div\ --\cdot\frac{a}{q^2};\ \frac{a}{q^1};\ a;\ aq;\ aq^2--.$$

Din datele problemei rezultă $a^{n-1} = P$, de unde $a = \sqrt[n-1]{P}$.

Problemă: Să se afle progresia geometrică în care produsul primilor 3 termeni este 7414875, iar suma lor este 845.

Notăm termenul de la mijloc cu a

$$\div \frac{a}{q}\ ;\quad a;\quad aq$$

$$a^3 = 7414875 \quad \text{deci} \quad a = 195$$

(Se foloseşte tabela IX din „Tabele şi formule matematice").

$$\div \frac{195}{q}\ ;\quad 195;\quad 195q$$

$$\frac{195}{q} + 195 + 195q = 845$$

$$195q^2 - 650q + 195 = 0$$

$$3q^2 - 10q + 3 = 0$$

$$q = \frac{5 + \sqrt{25 - 9}}{3} = \begin{cases} \frac{1}{3} \\ 3 \end{cases}$$

$$\div\ 65;\quad 195;\quad 585$$

$$\div\ 585;\quad 195;\quad 65$$

Problemele de acest fel scot în evidenţă avantajul de a folosi tabelele matematice care dau direct rezultatul unor calcule destul de lungi şi obositoare. Astfel, în aceste tabele se găsesc, în afară de puterile a doua şi a treia, radicali de ordinele doi şi trei ai numerelor de la 1 — 1500, precum şi valoarea fracţiei $\frac{1}{n}$, a produsului πn, $\pi \frac{n^2}{4}$ (pentru n cuprins între 1 şi 1500) tabele utile în unele probleme de geometrie.

* * *

De multe ori, alegerea raţională a procedeului de rezolvare atrage după sine o simplificare foarte mare a calculelor. De exemplu, la examenul de maturitate din sesiunea iunie 1956, cei mai

mulţi elevi au judecat bine problema dar s-au încurcat în calcule lungi şi obositoare, deşi problema putea fi rezolvată destul de simplu dacă se lucra în mod raţional. Dau ca model de rezolvare raţională lucrarea prezentată de Dogaru Viorica, absolventă a clasei a X-a, „B" —Şcoala medie de fete nr. 21 (clasă la care a predat prof. Florica Russu).

Problema:

Un pătrat cu latura l se roteşte în jurul unei axe din planul său, ce trece printr-un vîrf fără să taie pătratul şi formează cu una din laturi un unghi α.

Să se calculeze:

1) volumul corpului obţinut prin rotire;

2) aria acestui corp;

3) unghiul α în cazul cînd aria este egală cu $4\sqrt{2}\pi l^2$

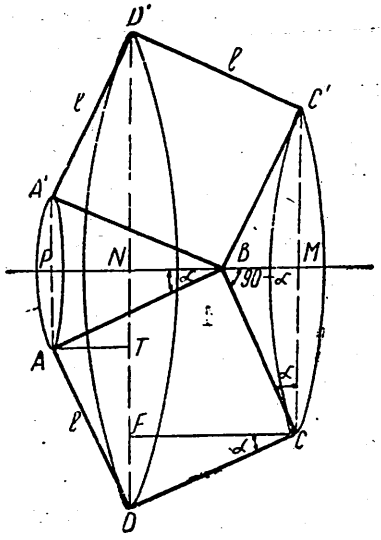


Fig. 1

$$\widehat{ABP} = \alpha.$$

Corpul obţinut prin rotirea pătratului în jurul lui PM este format din două trunchiuri de con (trunchiul generat de $\overline{AD}$ şi cel generat de $\overline{DC}$) din care se scot două conuri (conul generat de AB şi conul generat de BC)

$$V = \frac{\pi \overline{PN}}{3} \cdot (\overline{AP}^2 + \overline{DN}^2 + \overline{AP} \cdot \overline{DN}) + \frac{\pi \cdot \overline{MN}}{3} \cdot$$

$$(\overline{DN}^2 + \overline{MC}^2 + \overline{DN} \cdot \overline{MC}) - \frac{\pi \overline{PB}}{3} \cdot AP^2 - \frac{\pi \overline{BM}}{3} \cdot \overline{MC}^2$$

Calculăm elementele necesare:

ΔAPB: $\overline{AP} = l \sin \alpha$

$\overline{PB} = l \cos \alpha$

ΔMBC : $\widehat{MBC} = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$

iar $\widehat{BCM} = \alpha$

$$\overline{BM} = l \sin \alpha$$

$$\overline{MC} = l \cos \alpha$$

$\Delta DCF : \widehat{FCD} = \widehat{NBA}$ ($\widehat{FCD}$ și $\widehat{NBA}$ au laturile paralele și îndreptate în același sens $DC \parallel AB$, $FC \parallel NB$)

$$\overline{FC} = \overline{MN} = l \cos \alpha$$

$$\overline{DF} = \overline{DN} - \overline{NC} = l \sin \alpha; \ \overline{DN} = l \sin \alpha + l \cos \alpha$$

$\Delta DAT : \widehat{ADT} = \alpha$ (are laturile perpendiculare pe laturile unghiului $\widehat{FDC} = \alpha$: $DF \perp FC$; $AD \perp DE$)

$$\overline{AT} = \overline{PN} = l \sin \alpha$$

Observăm că toate elementele care intră în calcul sînt egale sau cu $l \sin \alpha$ ($\overline{AP}$; $\overline{BM}$; $\overline{PN}$), sau cu $l \cos \alpha$ ($\overline{PB}$; $\overline{MC}$; $\overline{MN}$), sau cu $l(\sin \alpha + \cos \alpha)$ ($\overline{DN}$).

Să notăm pentru a ușura calculul

$$\overline{AP} = \overline{BM} = \overline{PN} = l \sin \alpha = m$$

$$\overline{PB} = \overline{MC} = \overline{MN} = l \cos \alpha = n$$

$$\overline{DN} = l \sin \alpha + l \cos \alpha = m + n$$

$$V = \frac{\pi m}{3}[m^2 + (m+n)^2 + m(m+n)] + \frac{\pi n}{3}[n^2 + (m+n)^2 + n(m+n)] - \frac{\pi}{3} nm^2 - \frac{\pi}{3} mn^2$$

$$V = \frac{\pi}{3}[m^3 + m(m+n)^2 + m^2(m+n) + n^3 + n(m+n)^2 + n^2(m+n) - mn(m+n)]$$

Grupăm pe m^3 cu n^3

$$V = \frac{\pi}{3}[(m+n)(m^2 - mn + n^2) + m(m+n)^2 + m^2(m+n) +$$
$$+ n(m+n)^2 + n^2(m+n) - mn(m+n)]$$

Se dă $(m+n)$ factor comun

$$V = \frac{\pi}{3}(m+n)(m^2 - mn + n^2 + m^2 + mn + m^2 + mn +$$
$$+ n^2 + n^2 - mn).$$

$$V = \frac{\pi}{3}(m+n) \cdot 3 \cdot (m^2 + n^2) = \pi(m+n)(m^2 + n^2)$$

înlocuim pe m şi n cu valorile lor

$$V = \pi l(\sin\alpha + \cos\alpha)(l^2 \sin^2\alpha + l^2\cos^2\alpha) = \pi l^3(\sin\alpha + \cos\alpha) =$$
$$= \pi l^3[\sin\alpha + \sin(90° - \alpha)] = 2\pi l^3 \sin 45° \cos(\alpha - 45°) =$$
$$= 2\pi l^3 \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\alpha - 45°)$$

$$\boxed{V = \pi l^3 \sqrt{2}\cos(\alpha - 45°)}$$

2) Aria corpului este aria laterală a celor două trunchiuri de con la care se adaugă aria laterală a celor două conuri

$$A = \pi \cdot \overline{AD} \cdot (\overline{AP} + \overline{DN}) + \pi \overline{DC}(\overline{DN} + \overline{MC}) + \pi \overline{BC} \cdot \overline{MC} +$$
$$+ \pi \overline{AP} \cdot \overline{AB};\ \overline{AD} = \overline{DC} = \overline{BC} = \overline{AB} = l$$
$$A = \pi l(\overline{AP} + \overline{DN} + \overline{DN} + \overline{MC} + \overline{MC} + \overline{AP}) =$$
$$= 2\pi l(\overline{AP} + \overline{DN} + \overline{MC})$$
$$A = 2\pi l(l\sin\alpha + l\cos\alpha + l\sin\alpha + l\cos\alpha) = 4\pi l^2(\sin\alpha +$$
$$+ \cos\alpha) = 4\pi l^2[\sin\alpha + \sin(90° - \alpha)] =$$
$$= 8\pi l^2 \sin 45° \cdot \cos(\alpha - 45°) = 8\pi l^2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos(\alpha - 45°)$$

$$\boxed{\text{Aria corpului} = 4\pi l^2 \sqrt{2}\cos(\alpha - 45°)}$$

3) Dîndu-se aria totală $= 4\pi l^2 \sqrt{2}$ rezultă pentru

$$4\pi l^2 \sqrt{2} \cos(\alpha - 45°) = 4\pi l^2 \sqrt{2}$$
$$\cos(\alpha - 45°) = 1$$
$$\cos(\alpha - 45°) = \cos 0°$$
$$\alpha - 45° = 0° + K \cdot 360°$$
$$\alpha = 45° + K \cdot 360°$$
$$\boxed{\alpha = 45°}$$

Aceeaşi problemă a fost rezolvată corect şi de alte eleve ale şcolii, dar folosind calcule mai lungi. Dau două exemple de felul cum a fost calculat volumul de alte eleve ale aceleiaşi şcoli:

1

$$V = \frac{\pi l \cos\alpha}{3} 2l^2 \cos^2(45° - \alpha) + l^2 \cos^2\alpha + l^2 \sqrt{2} \cos\alpha \cdot$$
$$\cdot \cos(45° - \alpha) + \frac{\pi l \sin\alpha}{3} [2l^2 \cos^2(45° - \alpha) + l^2 \sin\alpha + l^2 \sqrt{2}$$
$$\sin\alpha \cos(45° - \alpha) - \frac{\pi l^2 \cos^2\alpha \sin\alpha}{3} - \frac{\pi l^2 \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha}{3} =$$
$$= \frac{\pi l^3}{3} \{\cos\alpha [2\cos^2(45° - \alpha) + \cos^2\alpha + \sqrt{2} \cdot \cos\alpha \cdot \cos(45° - \alpha)] +$$
$$+ \sin\alpha [2\cos^2(45° - \alpha) + \sin^2\alpha + \sqrt{2} \sin\alpha \cdot \cos(45° - \alpha)] -$$
$$- \cos^2\alpha \sin\alpha - \sin^2\alpha \cos\alpha\} = \frac{\pi l^3}{3} \{\cos\alpha [1 + \sin 2\alpha +$$
$$+ \cos^2\alpha - \sqrt{2} \cos\alpha \cdot \cos(45° - \alpha) - \sin^2\alpha] + \sin\alpha [1 + \sin\alpha +$$
$$+ \sin^2\alpha + \sqrt{2} \sin\alpha \cdot \cos(45° - \alpha) - \cos^2\alpha]\} = \frac{\pi l^3}{3} [\cos\alpha +$$
$$+ \cos\alpha \sin 2\alpha + \cos^3\alpha + \sqrt{2} \cos^2\alpha \cos(45° - \alpha) - \cos\alpha \cdot \sin^2\alpha +$$
$$+ \sin\alpha + \sin\alpha \cdot \sin 2\alpha + \sin^3\alpha + \sqrt{2} \sin^2\alpha \cos(45° - \alpha) -$$
$$- \sin\alpha \cos^2\alpha] = \frac{\pi l^3}{3} [\sqrt{2} \cos(45° - \alpha)(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + \cos\alpha +$$
$$+ \sin\alpha + \sin 2\alpha \cdot (\sin\alpha + \cos\alpha) + \sin^3\alpha + \cos^3\alpha - \sin\alpha \cos\alpha$$
$$(\sin\alpha + \cos\alpha)] = \frac{\pi l^3}{3} [\sqrt{2} \cos(45° - \alpha)(1 + 1 + \sin 2\alpha - \sin\alpha \cos\alpha +$$

$$+\frac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}\Big]=\frac{\pi l^3}{3}\Big[\sqrt{2}\cos(45^\circ-\alpha)(2+\sin 2\alpha-\sin\alpha\cdot$$

$$\cdot\cos\alpha+\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha)}{\sin\alpha+\cos\alpha}\Big]=\frac{\pi l^3}{3}\cdot$$

$$\cdot[2\cos(45^\circ-\alpha)\,(2+\sin 2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+1-\sin\alpha\cos\alpha)]=$$

$$=\frac{\pi l^3}{3}\sqrt{2}\cos(45^\circ-\alpha)\,(2+\sin 2\alpha-\sin 2\alpha+1)=$$

$$=\pi l^3\sqrt{2}\cos(45^\circ-\alpha)$$

2

$$V_{1trc}=\frac{\pi l\sin\alpha}{3}[\,l^2\sin^2\alpha+l^2\sin^2\alpha+l^2\cos^2\alpha+2\,l^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+$$

$$+\,l^2\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)]=\frac{\pi l\sin\alpha}{3}(3l^2\sin^2\alpha+l^2\cos^2\alpha+$$

$$+3\sin\alpha\cos\alpha)=\frac{\pi l^3\sin\alpha}{3}(3\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+3\sin\alpha\cdot\cos\alpha)$$

$$V_2\,(_{trc})=\frac{\pi l\cos\alpha}{3}[l^2\cos^2\alpha+l^2(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+l^2\cos\alpha\cdot$$

$$\cdot(\sin\alpha+\cos\alpha)]=\frac{\pi l\cos\alpha}{3}(l^2\cos^2\alpha+l\sin^2\alpha+2l^2\sin\alpha\cos\alpha+$$

$$+\,l^2\cos^2\alpha+l^2\cos\alpha\cdot\sin\alpha+l^2\cos^2\alpha)=\frac{\pi l\cos\alpha}{3}(3l^2\cos^2\alpha+$$

$$+\,l^2\sin^2\alpha+l^2\cos\alpha\cdot\sin\alpha+2\,l^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha)=\frac{\pi l^3\cos\alpha}{3}$$

$$(3\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+3\cos\alpha\sin\alpha)$$

$$V_1+V_2=\frac{\pi l^3\sin\alpha}{3}(3\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+3\sin\alpha\cdot\cos\alpha)+$$

$$+\frac{\pi l^3\cos\alpha}{3}(3\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+3\sin\alpha\cos\alpha)=$$

$$=\frac{\pi l^3}{3}(3\sin^3\alpha+\sin\alpha\cos^2\alpha+3\sin^2\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin^2\alpha+$$

$$+ \sin\alpha\cos^2\alpha) = \frac{\pi l^3}{3}(3\sin^3\alpha + 3\cos^3\alpha + 4\cos^2\alpha\sin\alpha +$$

$$+ 4\sin^2\alpha\cos\alpha)$$

$$V \text{ conurilor} = \frac{\pi l^3 \sin^2\alpha\cos\alpha}{3} + \frac{3 l^3 \sin\alpha\cos^2\alpha}{3} =$$

$$= \frac{\pi l^3}{3}(\sin^2\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos^2\alpha)$$

$$V \text{ corpului} = \frac{\pi l^3}{3}(3\sin^3\alpha + 3\cos^3\alpha + 4\cos^2\alpha\sin\alpha +$$

$$4\sin^2\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\cos^2\alpha) = \frac{\pi l^3}{3}(3\sin^3\alpha +$$

$$+ 3\cos^3\alpha + 3\cos^2\alpha\sin\alpha + 3\sin^2\alpha\cos\alpha) = \pi l^3\cos\alpha$$

$$(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + \sin\alpha \cdot (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = \pi l^3 (\cos\alpha + \sin\alpha) =$$

$$= \pi l^3 \sqrt{2}\cos(45° - \alpha).$$

Am constatat că, în general, elevele nu folosesc procedee raţionale la rezolvarea problemelor de sinteză din geometrie şi nu folosesc procedee raţionale în calculul expresiilor trigonometrice care intervin în aceste probleme. Acest lucru se explică printr-o insuficientă cunoaştere a formulelor de trigonometrie din cauză că, în general, elevii noştri nu studiază individual, nu lucrează suficiente exerciţii.

Acest lucru apare evident mai ales în clasa a X-a, cînd se rezolvă probleme de geometrie cu ajutorul trigonometriei. De cele mai multe ori, elevii aleg metoda de rezolvare la întîmplare, fără a se gîndi în prealabil care ar fi calea cea mai simplă şi mînuiesc cu stîngăcie formulele de trigonometrie. Rezultatul este că cei mai mulţi se încurcă în calcule lungi şi obositoare, şi nu obţin rezultate sub cea mai simplă formă.

În rezolvarea problemei date la examenul de maturitate din iulie 1955 numeroşi elevi nu au rezolvat corect primul şi al doilea punct şi mulţi elevi buni au rezolvat problema pe o cale mai lungă. Iată, de exemplu, lucrarea dată de o absolventă a Şcolii medii nr. 21 fete:

Problemă:

Într-o sferă de rază R se înscrie o piramidă regulată cu baza un pătrat şi cu unghiul de la vîrful unei feţe laterale α.

Să se afle:

1) Volumul piramidei înscrise;

2) Aria laterală și totală a piramidei;

3) Unghiul α când înălțimea piramidei înscrise este egală cu raza sferei.

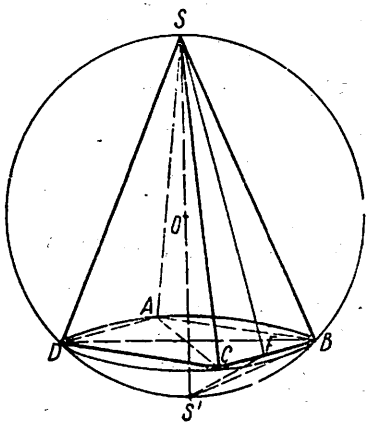


Fig. 2

1) ΔSNB

$$\overline{SB} = a \qquad \overline{NB} = x$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{x}{a}$$

$$x = a\sin\frac{\alpha}{2} \quad \overline{BC} = 2a\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\Delta SMC$$

$$r^2 = a^2 - (R + \overline{CM})^2$$

$$\Delta OMC$$

$$r^2 = R^2 - \overline{OM}^2$$

$$a^2 - R^2 - \overline{OM}^2 - 2R\cdot\overline{OM} = R^2 - \overline{OM}^2$$

$$2R\cdot\overline{OM} = a^2 - 2R^2$$

$$\overline{OM} = \frac{a^2 - 2R^2}{2R}$$

$$r^2 = R^2 - \frac{4R^4 + a^4 - 2R^2\cdot a^2}{4R^2}$$

$$r^2 = \frac{4R^2a^2 - a^4}{4R^2}$$

$$r = \frac{a\sqrt{4R^2 - a^2}}{2R}$$

$$l_4 = r\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{4R^2 - a^2}}{2R}\cdot\sqrt{2}$$

$$\overline{BC} = l_4 = 2a\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$2a\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a\sqrt{4R^2 - a^2\cdot\sqrt{2}}}{2R}$$

$$a\sqrt{2(4R^2-a^2)}=4aR\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$a^2[2(4R^2-a^2)]=16a^2R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$a^2(8R^2-2a^2)=16a^2R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$8a^2R^2-2a^4=16a^2R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$2a^4+a^2\left(16R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}-8R^2\right)=0$$

$$a^2=y$$

$$2y^2+y\left(16R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}-8R^2\right)=0$$

$$y\left(2y+16R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}-8R^2\right)=0$$

$$y_1=0$$

$$2y+16R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}-8R^2=0$$

$$y=\frac{8R^2-16R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2}$$

$$y=4R^2\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$y=4R^2\cos\alpha$$

$$a^2=y$$

$$a=\sqrt{4R^2\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$a=2R\sqrt{1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$a=2R\sqrt{\cos\alpha}$$

$$l_4 = 4R\sqrt{1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}} \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$

$$l_4 = 4R\sqrt{\cos\alpha} \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\overline{OM} = \frac{4R^2\cos\alpha - 2R^2}{2R} = \frac{2R^2(\cos\alpha - 1)}{2} = R(2\cos\alpha - 1)$$

$$I = R + R(2\cos\alpha - 1) = 2R\cos\alpha.$$

$$S = 16R^2\sin^2\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\alpha$$

$$V = \frac{16R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha \cdot 2R\cos\alpha}{3} = \frac{32R^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\alpha}{3} =$$

$$= 10\frac{2}{3}R^3\sin^2\frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2\alpha$$

2)

$$S_{lat} = \frac{P \times A}{2}$$

$$P = 4 \cdot 4R\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}$$

$$P = 16 \quad R\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{A}{2R\sqrt{\cos\alpha}}; \quad A = 2R\sqrt{\cos\alpha} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$$

$$S_{lat} = 16R\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha} \cdot 2R\sqrt{\cos\alpha} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} =$$

$$= 16R^2\cos\alpha \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = 8R^2\cos\alpha \cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$S_{lat} = 8R^2 \cos\alpha \cdot \sin\alpha = 4R^2\, 2\cos\alpha \cdot \sin\alpha = 4R^2 \sin 2\alpha$$

$$S_{tot} = 8R^2 \cos\alpha \cdot \sin\alpha + 16R^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$$

$$S_{tot} = 8R^2 \cos\alpha \left(\sin\alpha + 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

3)

$$\overline{SO} = \overline{OC} = R$$

$$\Delta SOB$$

$$\overline{SB}^2 = 2R^2$$

$$\overline{SB} = R\sqrt{2}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{MB}}{R\sqrt{2}}$$

$$\overline{MB} = \frac{\overline{BC}}{2}$$

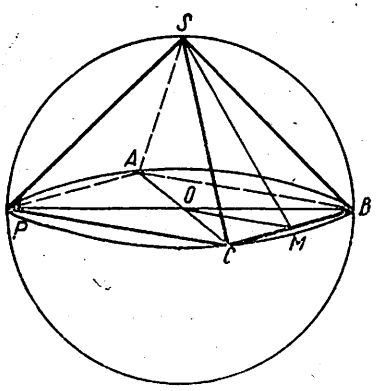


Fig. 3

$$\overline{BC} = R\sqrt{2};\ \overline{BM} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{R\sqrt{2}}{2}}{R\sqrt{2}}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2R\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 30°;\quad \alpha = 60°$$

Pornindu-se pe aceeași cale, problema putea fi rezolvată mai simplu pe baza relațiilor metrice în triunghiul dreptunghic astfel:

a) Notăm $\overline{AB} = l$

$$\overline{SB} = \frac{l}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\overline{SO} = \sqrt{\frac{l^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{l^2}{2}} = \frac{l}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

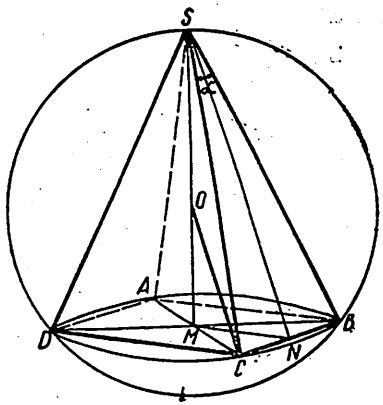


Fig. 4

$$I = \overline{SO} = \frac{l}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\cos\alpha}$$

Determinăm pe l prin relația $\overline{SB}^2 = \overline{SS'} \cdot \overline{SM}$ ($\triangle SS'B$ dreptunghic în B)

$$\frac{l^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} = 2R\frac{l}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos\alpha}$$

$$\frac{l}{4\sin\frac{\alpha}{2}} = R\sqrt{\cos\alpha};$$

$$l = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}$$

Atunci:

$$\overline{SO} = \frac{4R\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\cos\alpha} = 2R\cos\alpha$$

$$V = \frac{16R^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}{3} \cdot 2R\cos\alpha$$

$$V = \frac{32}{3}R^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\alpha$$

b)

$$A_{lat} = \frac{4l \cdot \overline{SF}}{2} = 2l \cdot \overline{SF}$$

$$\overline{SR} = \overline{SB}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\overline{SB} = 2R\sqrt{\cos\alpha}$$

$$\overline{SF} = 2R\sqrt{\cos\alpha}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}.$$

$$A_{lat} = 8R\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}\cdot 2R\sqrt{\cos\alpha}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} = 8R^2 2\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\alpha = 8R^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$A_{lat} = 4R^2\sin 2\alpha$$

$$A_{tot} = 4R^2\sin 2\alpha + 16R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha = 8R^2\cos\alpha(\sin\alpha +$$

$$+\sin^2\frac{\alpha}{2} = 16R^2\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= 16R^2\cos\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$A_1 = 16\sqrt{2}\cos\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$$

c)

$$I = R$$

$$2R\cos\alpha = R \qquad \cos\alpha = \frac{1}{2}$$

$\alpha < 180^\circ$ (din datele problemei) deci

$$\boxed{\alpha = 60^\circ}$$

Tot atît de simplu se puteau calcula elementele piramidei necesare rezolvării problemei, introducînd unghiul dintre înălțimea piramidei și muchie.

Păstrînd aceeași figură și notînd $\widehat{S'SB} = \beta$, avem:

Din ΔSCB; $\overline{SB} = \dfrac{l}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Din ΔSOB; $\overline{SB} = \dfrac{l}{\sqrt{2}\sin\beta}$.

De unde $\frac{l}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{l}{\sqrt{2}\cdot\sin\beta}$;

$$\sin\beta = \sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$$

Pentru a-l determina pe l folosim $\Delta\, SS'\, B$ în care

$$\overline{SB} = 2R\cos\beta = 2R\sqrt{1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\overline{SB} = 2R\sqrt{\cos\alpha}$$

Deci

$$2R\sqrt{\cos\alpha} = \frac{l}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

de unde:

$$l = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}$$

Din $\Delta\, S\, O'B$ scoatem înălțimea piramidei

$$I = \overline{SO'} = \overline{SB}\cos\beta = 2R\sqrt{\cos\alpha}\cdot\sqrt{\cos\alpha} = 2R\cos\alpha$$

$$I = 2R\cos\alpha$$

Apotema piramidei se exprimă din $\Delta\, SFB$

$$\overline{SF} = \overline{SB}\cos\frac{\alpha}{2} = 2R\sqrt{\cos\alpha}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$A = \overline{SF} = 2R\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}$$

Deși ultimele două procedee sînt evident mai bune decît primul, nici o elevă (de la școala citată) nu a rezolvat problema în acest fel și multe eleve nu au ajuns la rezultat pentru că au greșit la calcule.

Este de la sine înțeles că formarea priceperii de a folosi metode raționale în rezolvarea problemelor depinde de profesor, de pregătirea lui științifică și pedagogică. Profesorul trebuie să atragă mereu atenția elevilor asupra celei mai simple metode de rezolvare a unei probleme. Acest lucru nu este însă suficient. Procedee raționale de calcul nu pot folosi decît acei elevi care duc o muncă susținută în rezolvarea problemelor.

LEGAREA CUNOȘTINȚELOR DE MATEMATICĂ CU CELE DE FIZICĂ PRIN REZOLVAREA PROBLEMELOR CU CONȚINUT DE FIZICĂ LA DIFERITELE DISCIPLINE ALE MATEMATICII ÎN ȘCOALA MEDIE

GHEORGHE POPESCU
Școala medie
LUGOJ

Orice profesor de matematică sau fizică este convins sau se poate convinge ușor, prin practica școlară, de importanța legăturii strînse între studierea matematicii și fizicii în școala medie.

Învățămîntul politehnic, impus de viață, ne cere să asigurăm tinerei generații o pregătire cît mai temeinică pentru activitatea practică. În același timp, învățămîntul politehnic ne cere să nu slăbim atenția acordată înarmării elevilor cu bazele științelor și să depunem toate eforturile pentru îmbunătățirea calității cunoștințelor de cultură generală a elevilor prin efectuarea exercițiilor de aplicare a cunoștințelor teoretice în practică.

La lecțiile de fizică elevii trebuie să-și însușească cunoștințele despre principalele aplicații ale fizicii în tehnică. Școala noastră are menirea să formeze oameni care să nu fie numai o anexă a mașinii, ci oameni în stare să stăpînească și să dirijeze tehnica. De aceea profesorul de fizică trebuie să se ferească de practicismul îngust, de cunoștințe nefundate din punct de vedere științific. Tocmai aici are o mare însemnătate instrumentul matematic, întrebuințarea rațională a acestuia.

De pildă, dacă un profesor de fizică, atunci cînd predă descompunerea forțelor la clasa a VIII-a, în cazul planului înclinat, nu pune accent pe condițiile în care două triunghiuri sînt asemenea și pe modul de a scrie proporționalitatea laturilor omoloage, el poate conduce elevii la rezultate formale, poate aplica cu aceștia formule „șablon" în exerciții numerice, dar elevii respectivi nu se vor putea descurca în exerciții similare, deoarece cunoștințele lor de matematică n-au fost îmbinate cu studiul conștient al fenomenului fizic.

Dacă profesorul, atunci cînd trebuie să intuiască cu elevii mărimea rezultantei a două forțe, procedează prin măsurători minuțioase, el contribuie la înarmarea elevilor cu deprinderi utile. În clasa a VIII-a, însă, elevii și-au însușit noțiunea de măsură comună a două segmente și dacă li se amintesc rezultatele la care au ajuns, prin întrebuințarea unității de măsură și a raportului a două segmente, aceasta îi va ajuta să facă abstractizări folositoare.

În cadrul rezolvării diferitelor probleme în clasa a VIII-a, profesorul de fizică este în egală măsură interesat ca elevii să cunoască bine capitolele „Rapoarte și proporții", „Rezolvarea ecuațiilor și sistemelor de gr. I și II", precum și „Ecuații iraționale". El este obligat să se intereseze de cunoașterea de către elevi a metodelor potrivite de calcul matematic și să corecteze anumite deprinderi greșite folosite de unii din elevi.

Profesorul de matematică, la rîndul său, trebuie, pe de o parte să dezvolte puterea de abstractizare a elevilor, asigurînd în același timp legătura cu realitatea vie, iar pe de altă parte, să le insufle interesul de a folosi creator cunoștințele în rezolvarea problemelor cu caracter practic. Pentru a izbuti în această direcție, profesorul de matematică trebuie să fie sau să devină un bun cunoscător al disciplinelor înrudite—fizica, chimia, astronomia—fiindcă de aici poate extrage el, elementele pe care fundamentează teoretic faptele matematice și tot aici își găsesc aplicare multe din rezultatele deduse la lecțiile de matematică.

Folosirea pe o scară întinsă a noțiunilor și problemelor de fizică la tratarea diferitelor capitole ale matematicii constituie un aport serios atît la realizarea unei mai mari accesibilități a cunoștințelor de matematică, cît și la aplicarea acestor cunoștințe.

Se știe că elevul își însușește mai greu unele noțiuni complicate dacă nu i se deșteaptă interesul pentru acestea. În momentul însă în care el simte un interes real pentru aceste noțiuni, ascensiunea spre învingerea piedicilor, spre cunoaștere este asigurată.

Să urmărim un elev pus, pentru prima dată, în fața unei reviste de un nivel mai ridicat decît cunoștințele sale, cum este „Gazeta matematică și fizică Seria B". El va fi mai întîi atras de articolele și problemele de fizică, unde întîlnește termeni mai apropiați posibilității sale de înțelegere; se întîmplă de multe ori ca el să încerce să deslușească o problemă de fizică mai dificilă decît una de matematică, numai prin faptul că aceasta îi oferă o reprezentare mai vie a realității. Pe măsură ce-și perfecționează instrumentul matematic, el singur se îndreaptă către rezolvarea problemelor care cer o abstractizare mai mare.

Folosirea la lecțiile de matematică a cunoștințelor pe care elevii le au de la cursul de fizică îngăduie realizarea unei legături mai strînse a faptelor matematice cu practica, ceea ce face să crească mult interesul elevilor pentru matematică. Ei capătă astfel posibilitatea de a aplica în practică unele rezultate dobîndite la matematică. Prin folosirea justă a problemelor de fizică se dezvoltă totodată capacitatea și spiritul inventiv al elevilor, priceperea lor de a clarifica noțiunile de matematică și de a le aplica în practică. De asemenea, aceste probleme ne dau prilejul să realizăm legătura între diferitele capitole ale matematicii.

Se știe că atunci cînd legăm cunoștințele de matematică de problemele de fizică, din realitate cunoscute de elevi, atmosfera clasei se înviorează, iar dispoziția elevilor de a-și spori eforturile crește simțitor. Iată două exemple edificatoare: nu este totuna a începe predarea funcției liniare la clasa a VII-a spunînd: „Să considerăm funcția $y = ax + b$", și a o începe prin prezentarea cîtorva exemple de mișcare uniformă sau de dilatare a unei vergele de fier. Din primul mod de prezentare elevii rămîn cu impresia că funcțiile și matematica sînt scorniri ale minții omenești, menite să chinuiască pe elevi. În schimb al doilea mod de prezentare a funcției liniare, îi face să înțeleagă că matematica este un ajutor prețios în descoperirea și studierea legilor naturii, în folosirea lor pentru binele omului.

Predarea la clasa a X-a a temei: „Discuția sistemelor de gradul I", dă rezultate mai bune dacă o începem cu prezentarea unei probleme, cum este problema nr. 1446 din Culegerea de probleme de algebră pentru cursul mediu: „Dacă se amestecă a litri de alcool de calitatea întîi cu b litri de alcool de calitatea a doua, se obține un alcool cu tăria k grade; dacă se amestecă b litri de alcool de calitatea întîi cu a litri de alcool de calitatea a doua se obține un alcool de t grade. Să se determine tăria alcoolului de fiecare calitate și relațiile dintre parametrii a, b, k, t pentru ca problema să aibă soluție".

Rezolvare: dacă x și y sînt tăriile celor două calități de alcool care se amestecă, sistemul de ecuații al problemei este:

$$\begin{cases} ax+by = k(a+b) \\ bx+ay = t(a+b) \end{cases} \text{ cu soluțiile } x = \frac{ak-bt}{a-b},\ y = \frac{at-bk}{a-b}$$

Raționînd asupra rezultatelor obținute în această problemă și deducînd astfel cazurile care se pot prezenta la discuția sistemului general

$$\begin{cases} ax+by = c \\ a_1x+b_1y = c_1 \end{cases}$$

obținem un avantaj serios față de predarea aceleiași teme prin considerarea formală a sistemului de gradul I cu două necunoscute. Elevii se conving astfel, chiar de la început, că sforțările lor corespund unor necesități de ordin practic.

Probleme de fizică pot constitui un material foarte potrivit pentru predarea mai accesibilă a unor noțiuni de matematică chiar în clasa a V-a, unde, deși elevii nu învață fizica, sînt totuși familiarizați cu diferite noțiuni de fizică, cum sînt elementele mișcării uniforme. Pentru explicarea regulii împărțirii fracțiilor, de pildă, se obișnuiesc probleme de felul următor:

1. Un tren străbate distanța de $98\frac{3}{4}$ km în $2\frac{1}{2}$ ore. Cîți kilometri parcurge el pe oră?

2. Un război mecanic țese $2\frac{4}{5}$ metri pînză pe oră. În cîte ore va țese 28 metri?

În clasa a VI-a, o dată cu predarea algebrei, domeniul de aplicare la matematică a cunoștințelor de fizică se mărește simțitor. Care dintre profesorii de matematică nu a folosit scara termometrică la introducerea numerelor relative sau nu s-a sprijinit pe cunoștințele despre mișcarea uniformă în cadrul explicării regulilor privind operațiile cu aceste numere! Preocuparea aceasta scade, din păcate, cînd se calculează valorile numerice ale expresiilor algebrice, deși la acest capitol exercițiile de fizică bazate pe cunoștințele elevilor despre greutate specifică, presiune, lucru mecanic etc. pot oferi prilejul de a nu se transmite cunoștințe formale, de a nu se lucra mereu numai cu expresii în care literele x și y au rolul predominant. De asemenea, cunoștințele elevilor din clasa a VII-a despre dilatarea corpurilor, propagarea căldurii, schimbarea stării de agregare a corpurilor ne pot furniza suficient material pentru studierea concretă a ecuațiilor și a sistemelor de ecuații sau pentru prezentarea intuitivă a dependenței funcționale.

Se întîmplă uneori ca profesorul de matematică să nu cunoască anumite capitole ale fizicii și, în consecință să le evite. Este și mai rău însă ca profesorul de fizică necunoscînd programa de matematică, să pretindă de la elevi cunoștințe pe care aceștia nu și le-au însușit încă sau să-i obișnuiască cu un calcul nerațional. Profesorul de matematică trebuie să se simtă obligat să folosească noțiunile de fizică din primii ani, să clarifice din punct de vedere matematic și uneori chiar să le completeze, cum

este cazul cu noţiunile de mecanică. Aceeaşi grijă trebuie s-o aibă şi profesorul de fizică pentru cunoştinţele de matematici.

Auzim deseori profesori de fizică spunînd: „N-am putut preda în bune condiţiuni în cutare clasă, cutare lecţie, deoarece am întîlnit elevi care nu ştiu cum se efectuează împărţirea la un număr zecimal, sau extragerea rădăcinii pătrate". Sau: „Am dat nota patru la fizică, deşi elevul nu cunoaşte calculul algebric". Aceasta denotă existenţa unei rupturi între predarea acestor două discipline, legate totuşi atît de strîns prin natura lor. La asemenea profesori putem constata că la rezolvarea unei ecuaţii de tipul $2t+3=5t$ lasă pe elevi să scrie $-5t+2t=-3$, fiindcă trebuie să respecte şablonul de a trece necunoscutele numai în membrul întîi, sau că permit efectuarea calculelor fără simplificări. Nu mai vorbim de regula de trei simplă, pe care unii profesori de fizică şi chimie o folosesc automat în probleme, fără să ceară elevilor un cît de mic efort de gîndire. Am întîlnit cazuri de rezolvare a problemelor de fizică, bazate pe cunoştinţe mai accentuate de matematică, desfăşurate pe pagini întregi, fără să se ceară vreo sistematizare a calculelor. Toate acestea încurcă activitatea profesorului de matematică.

Preocuparea profesorului de fizică de a contribui la utilizarea cunoştinţelor de matematică, la aprofundarea şi completarea acestora în cadrul lecţiilor de fizică constituie un sprijin preţios pentru profesorul de matematică, acest lucru la rîndul lui se răsfrînge favorabil şi asupra predării fizicii.

La nici o clasă a şcolii medii legătura dintre matematică şi fizică nu este mai pregnantă decît la clasa a VIII-a. Aici profesorul de matematică trebuie să folosească în cea mai largă măsură cunoştinţele de fizică şi tot aici profesorul de fizică se sprijină cel mai mult pe cunoştinţele de matematică. Dacă nu se stabileşte chiar de la începutul anului şcolar o strînsă legătură între cei doi profesori, atunci se nasc în cursul muncii tot felul de probleme. De aceea se impune ca profesorul de fizică să ţină pasul cu cel de matematică, pentru a evita să dea elevilor, de pildă, probleme asupra mişcării uniform variate care cer cunoaşterea ecuaţiei de gr. II complete, cînd la matematică se mai predau încă numere iraţionale; sau să ceară folosirea teoremei lui Pitagora cu ocazia calculului rezultantei a două forţe, cînd la matematică nici nu s-a abordat capitolul „Relaţii metrice într-un triunghi dreptunchi".

În legătură cu reprezentarea funcţiilor la clasele a VII-a şi a VIII-a, am observat că elevii reţin mai uşor denumirea de axa timpului şi axa spaţiului la cele două axe perpendiculare

pe coordonate, pentru că aceasta se apropie de reprezentările lor despre spațiu și timp. Dar folosirea problemelor de fizică numai pentru a favoriza o înțelegere mai ușoară a noțiunilor de matematică ar prezenta un mare neajuns. Trebuie să ținem seama, este drept, de capacitatea de înțelegere a elevilor, dar avem datoria să sporim mereu această capacitate. Datele problemelor, ca și metodele de rezolvare trebuie să contribuie la o profundă cunoaștere a fenomenelor fizice precum și a operațiilor matematice, obișnuind pe elevi să abstractizeze, să-și mărească eforturile în această privință.

Problemele de fizică rezolvate în cadrul lecțiilor de matematică trebuie să dea elevilor prilejul de a obține inițial soluția intuitivă. Ulterior însă profesorul trebuie să antreneze clasa în analiza critică, în demonstrații riguroase, care pot confirma sau infirma rezultatul intuit.

Din experiența proprie am constatat că rezolvarea acestor probleme cu prilejul predării funcțiilor de gr. II îi ajută pe elevi să înțeleagă just atît noțiunea de corespondență între valorile argumentului și ale funcției, și interpretarea grafică a acestei corespondențe. De asemenea poate crea un sistem unitar, de ansamblu făcînd legătura între aceste funcții și diferitele feluri de mișcări uniform variate. Funcțiile de forma $y = ax^2$, $y = ax^2 + c$, $y = ax^2 + bx$, $y = a(x + d)^2$, $y = ax^2 + bx + c$ își găsesc corespondența la ecuațiile $s = \frac{at^2}{2}$, $s = \frac{at^2}{2} + s_o$, $s = \frac{at^2}{2} + v_o\, t$, $s = \frac{a}{2}(t + d)^2$, $s = \frac{at^2}{2} + v_o t + s_o$, care transpun analitic mișcarea uniform variată, uniform variată cu spațiu inițial, uniform variată cu viteză inițială, uniform variată cu viteză inițială și spațiu inițial.

De obicei încep studiul acestor funcții plecînd de la o problemă cum ar fi aceasta: să se studieze variația distanței între două pietre lăsate să cadă liber din vîrful unui turn la interval de 1 secundă. Încerc mai întîi să stabilesc intuitiv cu elevii ce se va întîmpla cu distanța între cele două pietre: dacă va crește sau va descreste. După aceea stabilesc, cu participarea elevilor ecuațiile celor două mișcări $s_1 = \frac{1}{2} gt^2, s_2 = \frac{1}{2} g(t-1)^2$. Voi lua totdeauna pentru g valoarea $10 m/sec^2$. Funcția $s_1 = 5t^2$ este deja cunoscută. Pentru funcția a doua $s_2 = 5(t-1)^2$ întocmesc un tabel cu valori din care voi avea grijă să nu lipsească $t = 1$. Se construiesc apoi cele două parabole, se verifică pe grafic ce

se întîmplă cu distanțele între cele două pietre. Mă ocup apoi de felul în care se poate obține parabola $s_2=5(t-1)^2$ din $s_1=5t^2$, arăt ce importanță are valoarea $t=1$ pentru graficul primei funcții și ce reprezintă această valoare pentru funcția a doua. După aceea pun întrebările: dar dacă piatra a doua ar fi fost lăsată după 2, 3, 5 secunde, care ar fi fost graficul funcției obținute? Dar dacă piatra a doua ar fi fost lăsată să cadă cu 1, 2, 4 secunde mai devreme decît cea dintîi ce grafic am fi obținut? Avem astfel o serie de parabole cu axele paralele cu axa ordonatelor și cu vîrfurile pe axa absciselor: scot regula de trecere de la parabola de forma $y=ax^2$ la $y=a(x+d)^2$. Trecînd la fixarea cunoștințelor cer elevilor să construiască graficele funcțiilor: $u=2(v+5)^2$ sau $m=-3(n-2)^2$, făcînd legătura cu parabolele care au concavitatea orientată în alt sens. Ca temă pentru acasă cer să se studieze grafic distanța între două mobile care au mișcările date de ecuațiile: $s=2(t-4)^2$, $s=3t^2$ sau grafice de funcții formale.

Dacă îi obișnuim pe elevi să lucreze cu hîrtie milimetrică, ei capătă deprinderea de a construi grafice cu repeziciune, pot studia în aceeași oră variația distanței între cele două pietre din problema de mai sus, luînd diferența $s = s_1 - s_2 = 5t^2 - 5(t-1)^2 = 10t - 5$ și urmărind variația unei funcții liniare, care va duce la același rezultat.

În acest mod de a prezenta funcția de forma $y=a(x+d)^2$ are un avantaj net asupra expunerii seci, care pornește pur și simplu de la funcția $y=a(x-d)^2$. Efectuînd exerciții simple de urmărire a unui fenomen fizic, elevii cunosc o funcție despre care își dau de la început seama că poate răspunde la anumite întrebări pe care le pune realitatea. În acest proces mintea lor este permanent trează, iar regulile stabilite le apar ca ceva firesc. Prin însăși natura problemei pe care o studiază, ei vor depune un efort mai mare pentru a întocmi cu mai multă precizie graficele. Alt avantaj al acestui mod de a prezenta funcțiile este că pe nesimțite plecînd de la diagrame cunoscute, elevii se ridică la altele noi și apoi revin, în cadru aceleiași probleme la grafice cunoscute cum este acela al funcției liniare. De asemenea, cercetînd timpul după care s-au întîlnit mobilele, elevii pot rezolva sisteme simple de gradul II, fiindcă problema așteaptă un răspuns. Cu acest prilej se pot arăta și exemple de soluții fără sens (imaginare), în cazul cînd cele două grafice nu se mai întîlnesc. Se înțelege de la sine că printr-o astfel de studiere a matematicii elevii își îmbogățesc și-și precizează și cunoștințele de fizică.

Se ridică totuși unele obiecții în legătură cu acest mod de a studia variația funcțiilor de gr. II. Problema, așa cum e

dată, duce în mod real la studiul unei singure ramuri a parabolei — și anume a aceleia care corespunde timpului pozitiv.

La aceste obiecții se poate răspunde prin considerațiile:

a) Nimic nu ne împiedică să trasăm punctat sau în altă culoare ramura parabolei corespunzătoare timpului negativ, sau, în cazul funcției $s=a(t-d)^2$, timpul în care mobilul respectiv nici nu începuse mișcarea, și să raționăm mai întîi asupra ramurilor trasate continuu ale parabolelor obținute. În momentul cînd răspunsul problemei a fost găsit, este chiar recomandabil să se extindă instrumentul matematic pentru a se face interpretările adecvate și asupra celorlalte ramuri și a se definitiva matematic variația unei funcții pe tot intervalul ei de existență.

b) Sînt rari profesorii de fizică, care să nu le fii dat elevilor, cu prilejul diverselor aplicații pe care le fac chiar în clasă, exemple de mișcări uniform variate cu viteză inițială. Profesorului de matematică îi revine sarcina de a lămuri mai bine și a completa cunoștințele elevilor în această direcție. Să ne mai gîndim că în majoritatea cazurilor profesorul de fizică sau matematică aplică rezultate găsite mai mult sau mai puțin printr-o cercetare vie în probleme directe în care formulele au rolul predominant. De ce atunci să nu obișnuim a face cu prilejul cercetării unei probleme concrete teoretizări cît mai temeinice, chiar dacă simpla intuire a ei nu ne oferă toate perspectivele. Spiritul creator al elevilor, bazat pe cunoașterea realității vii, nu are decît de cîștigat, iar concluziile teoretice la care ajung devin cu atît mai puternice, fiind sprijinite pe fapte concrete.

La prezentarea funcției generale $y=ax^2+bx+c$ mă folosesc de mișcări generale uniform variate cu viteză și spațiu inițial. Mai întîi aleg probleme care conduc la ecuații de mișcare unde spațiul se anulează pentru valori reale ale timpului, cum este problema a/12 (vezi anexa cu probleme), apoi alte probleme ce conduc la ecuații de mișcare în care trinomul obținut este un pătrat perfect, cum a fost în cazul precedent, sau de mișcare în care spațiul nu se anulează pentru nici o valoare reală a timpului, ca de exemplu: Un tren trece prin fața unei gări cu viteza de 4m/s; cînd se află la distanța de 200 m de gară, el primește o accelerație de 30 m/s^2. Care este distanța lui de gară la un moment dat "t_n"? Ecuația mișcării $s=15t^2+4t+200$ ne duce la o parabolă care nu taie axa timpului. Pentru a construi ramura crescătoare pentru care $t>0$ voi reprezenta această funcție pe intervalul $(-00,+00)$.

Cu prilejul rezolvării problemei a/12 (vezi anexa) sau a altora similare, am posibilitatea de a stabili punctele de maxim

și minim ale funcției $y = ax^2 + bx + c$, punînd întrebări adecvate în legătură cu problema studiată și de a trece apoi la un studiu general — etapa abstractizării — pentru găsirea extremelor unor astfel de funcții. La repetarea acestui capitol mă folosesc de planșe în care sînt înfățișate, prin graficele lor, toate formele de mișcări uniform variate, sau rezolv, în cazul cînd dispun de timp și clasa are un nivel mai ridicat problema 1/1 (vezi anexa).

Capitolul „Probleme de gradul II" este de asemenea un capitol care îngăduie largi aplicații ale cunoștințelor de fizică în rezolvarea problemelor puse de realitate.

Culegerea de probleme oferă exemple numeroase în care intervin noțiunile de mișcare uniformă, dar acestea fie că sînt tipizate în cîteva forme generale de rezolvare, fie că duc la rezultate exprimate în numere întregi sau raționale. Or, în problemele practice, soluțiile nu sînt totdeauna numere rotunde și simple. De aceea se simte des nevoia calculului cu aproximație și a stabilirii erorilor rezultatelor. Aici pot fi luate probleme cu date apropiate de cele din viața reală, sau pot fi reluate datele din anumite lucrări de laborator pe care le fac profesorii de fizică. Astfel, problema d/33 (vezi anexa) este bine să fie studiată cu elevii de către fiecare profesor de matematică, fiindcă se referă la date pe care oricare dintre elevi le poate măsura și duce la o ecuație irațională din cele mai interesante. Tot aici se poate încerca o discuție parțială făcîndu-se legătura cu capitolul „Discuția rădăcinilor ecuației de gr. II" care, în general, se prezintă formal de către majoritatea profesorilor de matematică.

Manualul și culegerea de probleme de fizică pentru clasa a VIII-a ne pun la dispoziție un mare număr de probleme care pot fi utilizate cu succes în însușirea și consolidarea cunoștințelor de matematică din fiecare capitol al programei școlare.

Ca profesor de matematică mă consider obligat să reiau calculul rezultantei și al componentelor a două forțe care acționează perpendicular sau sub unghiuri particulare în cadrul aplicațiilor la funcțiile trigonometrice ale unui unghi ascuțit, și la teorema lui Pitagora, și să scot în evidență cu mai multă putere ajutorul matematicii la rezolvarea acestor probleme cu caracter practic. Nu ezit să fac schemele cerute de probleme și să explic noțiunile de fizică, care îmi folosesc la rezolvare. La tratarea sistemelor de gr. II folosesc probleme în care se dă rezultanta a două forțe perpendiculare și o anumită relație între aceste forțe. De asemenea, profit de sistemele rezultate din ecua-

țiile a două mișcări pentru a confrunta pe grafic soluțiile reale sau complexe care se obțin.

În predarea geometriei la clasa a VIII-a, folosesc probleme de fizică mai ales la capitolele: Asemănarea triunghiurilor, Relații metrice într-un triunghi dreptunghi și Arii plane. Obișnuiesc să reiau justificarea unor proprietăți care se studiază la fizică, ca de exemplu: descompunerea forțelor în cazul planului înclinat, aflarea poziției punctului de aplicație a două forțe paralele, condițiile de echilibru a forțelor la o pană etc. — dintre care ultimele două nu sînt prevăzute în programa pentru fizică.

Aflarea centrului de greutate a unei plăci omogene de diferite forme geometrice îmi dă prilejul să aplic cunoștințele asupra proprietăților figurilor plane, asupra asemănării figurilor și asupra diferitelor relații metrice, precum și să verific practic rezultatele la care ajung. În același timp, astfel de probleme îmi dau posibilitatea de a arăta elevilor schița figurii, cu diferitele ei dimensiuni sau, eventual, aducînd astfel de plăci în clasă, să efectuez măsurători directe. Este foarte mare satisfacția pe care o au elevii cînd, după calcule laborioase sau prin exerciții grafice meticuloase, stabilesc poziția centrului de greutate și apoi constată experimental că punctul găsit este cel adevărat. În acest fel încrederea lor în instrumentul matematic folosit corect crește mult.

Problema h/1 (vezi anexa) este una din problemele care rezolvată la sfîrșitul capitolului (Arii plane), pe lîngă avantajele enumerate mai sus, poate servi și ca mijloc de recapitulare a unor variate cunoștințe de geometrie.

Programa prevede destul timp pentru rezolvarea de exerciții și probleme la fiecare capitol. O întrebuințare rațională a acestui timp va duce la un rezultat mulțumitor în această direcție. Este necesar să arătăm însă, că legătura dintre aceste cunoștințe nu trebuie să se facă numai în cadrul rezolvării problemelor și exercițiilor ci la toate tipurile de lecții. Aceasta nu înseamnă că trebuie să facem fizică la lecțiile de matematică ci, profesorul de matematică trebuie să urmărească prezentarea noțiunilor și dezvoltarea instrumentului matematic prin și în cadrul cercetării fenomenelor din viața reală sprijinindu-se pe legi și concluzii pe care elevii le cunosc din studierea fizicii. De asemenea, trebuie să mai amintesc aici că problemele de fizică nu pot înlocui exercițiile care au ca scop formarea deprinderilor, dar ele pot servi ca bun mijloc de formare conștientă a acestor deprinderi.

În clasa a IX-a, cunoștințele de fizică dobîndite de elevi în clasa a VIII-a se pot folosi cu mult succes în prezentarea pro-

gresiilor aritmetice şi geometrice. Aici folosesc Culegerea de probleme de algebră în care se găsesc o serie de probleme cu conţinut de fizică. Tratez comparativ aceste probleme atît pe baza cunoaşterii legilor fizicii învăţate, cît şifolosind rezultatele obţinute la studiul progresiilor. De asemenea, aleg probleme din manualul sau culegerea de probleme de fizică pentru clasa a VIII-a, cum sînt problemele din exemplele b/2 şi b/3 (vezi anexa). Unele din aceste probleme îmi servesc la predarea noţiunilor teoretice din capitolul „Progresii". Ele au avantajul, aşa cum s-a arătat mai sus, că redau fenomene din viaţa înconjurătoare cu date nerotunjite artificial şi ale căror rezultate concordă sau se pot verifica uşor. Ca probleme facultative propun generalizări ale unora din aceste probleme cum sînt problemele b/4 şi b/5 (vezi anexa). În cercul elevilor propun spre rezolvare probleme mai pretenţioase, ca cele din exemplele b/6 şi b/7 (vezi anexa). Numărul de ore prevăzute pentru studierea acestor capitole nu este suficient pentru a se face mai multe aplicaţii cu ajutorul cunoştinţelor de fizică. Introduc însă probleme de fizică în cuprinsul temelor pentru acasă sau le propun spre rezolvare la cercul de elevi.

În cadrul exerciţiilor pentru aplicarea logaritmilor în calcul, pentru care am la dispoziţie mai multe ore, aleg formule caracteristice pentru calcularea diferitelor mărimi fizice, ca de ex.: lungimea unui pendul cu o anumită perioadă de oscilaţie, aflarea timpului după care un corp ajunge la pămînt căzînd de la o anumită înălţime în spaţiul vid, volumul şi greutatea pămîntului, acceleraţia forţei centrifuge a lunei sau a altor planete, aflarea căldurii de topire sau de vaporizare cu ajutorul ecuaţiilor calorimetrice etc.

Elevii folosesc bucuroşi calculul cu logaritmi pentru efectuarea unor formule fizice al căror conţinut nu le este cunoscut.

La una din lecţiile de calcul cu logaritmi i-am întrebat pe elevi dacă ar putea să calculeze costul curentului electric pentru a fierbe un ceai. Evident că din discuţii a reieşit necesitatea de a dispune de o formulă care să ne dea cantitatea de căldură dezvoltată de un anumit curent ce trece printr-o anumită rezistenţă. Dîndu-le în acelaşi timp şi preţul unui kilowat-oră de curent, elevii au urmărit cu multă atenţie desfăşurarea operaţiilor în cadrul problemei combinînd cunoştinţele pe care şi le însuşiseră cu prilejul studierii capitolului „Căldura" cu unele cunoştinţe de electricitate pe care le studiaseră în clasa a VII-a.

La studiul trigonometriei în clasa a IX-a se simte de la primele lecţii nevoia de a clarifica în condiţii cît mai bune noţiunea de radian şi măsura arcelor în radiani. Este greşit

dacă în această etapă nu amintim anumite cunoştinţe de fizică în legătură cu arcele exprimate în radiani, cum este exprimarea vitezei unghiulare de la mişcarea de rotaţie uniformă în radiani-secundă. Cu această ocazie obişnuiesc să arăt prin exerciţii necesitatea practică de a măsura unghiurile în radiani. Aceasta îmi va folosi mai tîrziu, cînd va fi vorba de reprezentarea grafică a funcţiei de forma $x=x_0 \cos(at+b)$, care exprimă legea unei oscilaţii armonice.

Aproape toate capitolele de trigonometrie care se studiau în clasa a IX-a, iar după programa actuală în clasa a X-a dau profesorului prilejul de a rezolva ecuaţii trigonometrice simple prin determinarea valorii principale a argumentelor. După cum la clasele V-VII nu este recomandabil de a lăsa rezolvarea ecuţiilor de gr. I pentru ultimul moment (în clasa a VII-a) tot astfel găsesc că este necesar ca ecuaţiile trigonometrice să fie folosite pentru concretizarea diferitelor transformări identice ce se studiază în prima parte a trigonometriei. Aceasta poate contribui mult la realizarea unei mai strînse legături a matematicii cu fizica în clasa a IX-a. În acelaşi timp, folosirea cunoştinţelor de fizică în cadrul rezolvării ecuaţiilor trigonometrice simple poate aduce un aport la înlăturarea unui mare neajuns ce se observă în aplicarea acestei părţi a trigonometriei — şi anume la evitarea tratării ei sec şi arid. Ar trebui să specifice acest lucru şi în programă, iar în culegerile de probleme ar fi bine să figureze probleme adecvate. Am folosit în acest scop cu rezultate bune, problemele f/2, f/4, f/5, f/8 (vezi anexa). Către sfîrşitul anului cînd la trigonometrie se lucrează cu logaritmii funcţiilor trigonometrice pentru rezolvarea triunghiului dreptunghi, am ales exemple de probleme pentru rezolvarea cărora elevii trebuiau să folosească o serie de cunoştinţe de mecanică însuşite în clasa a VIII-a. Din păcate, prin reducerea numărului de ore la matematică, trigonometriei la această clasă, i s-a repartizat numai o singură oră în a doua jumătate a anului şcolar, aşa că posibilităţile sînt foarte reduse pentru o activitate temeinică în direcţia problemelor cu caracter practic şi legăturii cu fizica.

În clasa a X-a, posibilităţile de legare a cunoştinţelor de matematică cu cele de fizică s-ar putea lărgi simţitor. Elevii apropiindu-se de maturitate, pot pătrunde mai uşor în fondul problemelor cu caracter practic şi au la îndemînă un instrument matematic mai dezvoltat şi mai cuprinzător decît în clasele precedente. În al doilea rînd, acum se consolidează anumite deprinderi practice pentru care mulţi dintre elevi au înclinări. Trebuie să spunem însă că programa şi repartiţia de ore, aşa

cum sînt alcătuite în prezent, nu dau posibilităţi suficiente pentru realizarea legăturii mai strînse între matematică şi fizică. Dacă izbutim să asigurăm pentru lunile aprilie şi mai un număr satisfăcător de ore pentru probleme recapitulative, în vederea examenului de maturitate, aceasta se face în contul restrîngerii unor capitole care au o deosebită importanţă pentru problemele practice. Astfel, cele 22 de ore rezervate studiului inegalităţilor — care cuprinde şi discuţia problemelor de gr I şi gr II — sînt insuficiente, fiindcă acest capitol se pretează la aplicaţii extrem de variate în domeniul tehnicii. De asemenea, cele 16 ore pentru studiul ecuaţiilor şi sistemelor trigonometrice nu sînt suficiente dacă se intenţionează a se extinde ceva mai mult rezolvarea problemelor de fizică ce au o strînsă contigenţă cu acest capitol. Pe lîngă aceasta, cunoştinţele de mecanică, care intervin mai des în problemele care conduc la ecuaţii trigonometrice, nu se mai refac şi nici nu se întregesc la lecţiile de fizică în clasa a X-a. Mai mult chiar: în programa de pînă acum pentru examenul de maturitate nu s-au cerut cunoştinţe de mecanică, iar profesorii de fizică, procedînd în consecinţă n-au dat atenţie acestor cunoştinţe. În aceste condiţii, profesorul de matematică convins de necesitatea unei asimilări conştiente şi durabile a cunoştinţelor trebuie să folosească o adevărată artă în dozarea acestor cunoştinţe. El trebuie să aibă în vedere că desprinderea faptelor matematice din cercetarea legilor fizice ale materiei, cît şi aplicarea acestora în viaţă au tot atîta importanţă ca şi perfecţionarea instrumentului matematic însuşi, ca mijloc de investigaţie. Nu trebuie neglijat caracterul aplicativ şi util al cunoştinţelor de matematică, după cum nu trebuie pierdute din vedere exerciţiile specifice studiului teoretic.

Programa şcolară, în felul cum repartizează orele la cele 3 discipline ale matematicii în clasa a X-a, dă prioritate trigonometriei cu scopul ca, mai ales în ultimul trimestru să facă legătura cu algebra şi geometria, în sensul aplicării lor la rezolvări de probleme cît mai cuprinzătoare. Este adevărat că urmînd această programă avem posibilitatea, către sfîrşitul anului, să rezolvăm cu elevii o serie de probleme foarte variate şi să asigurăm un anumit succes la efectuarea lucrării scrise de trigonometrie cu geometrie din cadrul examenului de maturitate. Drumul acesta însă este destul de dificil şi mai ales nu răspunde de cît în parte cerinţei de a pregăti absolvenţi capabili să devină buni cunoscători ai tehnicii. Este inutil să încercăm fel şi fel de metode de rezolvare a unor probleme de sinteză, dacă aceste metode n-au fost cristalizate din timp în mintea elevilor prin cercetarea pro-

Problemele de maxim și minim, pe bază de discriminant, deși nu sînt prevăzute în programă, prezintă totuși mare importanță pentru adîncirea cunoștințelor în legătură cu studiul trinomului și discuția problemelor de gr. II. Problemele de această natură le dau elevilor prilejul de a-și însuși cunoștințe teoretice interesante, iar diversele lor aplicații în geometrie și fizică, le fac folositoare din mai multe puncte de vedere.

În afară de rezolvarea unor exerciții de geometrie care îmi dau posibilitatea să le transmit elevilor reguli ușoare pentru stabilirea extremelor unor funcții particulare, obișnuiesc să dau și probleme de maxim și minim cu conținut fizic. Probleme ca e/9, e/10, e/11, e/8, (expuse în anexă), îmi servesc în mare măsură pentru a indica elevilor importanța cunoașterii condițiilor concrete din natură în care putem avea un maxim sau un minim și să le vorbesc despre diverse activități de producție în cadrul cărora se urmărește un maxim de randament cu minim de efort sau cu un minim de materie primă și utilaj. Ar fi bine să se prevadă asemenea probleme și în programă, deoarece ele se întîlnesc des în practică și sînt rezultatul firesc al discuției trinomului de gr. II.

În momentul de față, capitolele de matematică, care dau prilejul celei mai strînse legături cu fizica în clasa X-a, sînt capitolele de trigonometrie. Începînd cu aplicarea teoremelor referitoare la triunghiul oarecare, trecînd prin rezolvări clasice și speciale de triunghiuri oarecare și ecuații trigonometrice și terminînd prin lecții de sinteză, profesorul de matematică are multe prilejuri de a folosi cu succes material din domeniul fizicii. Pentru fixarea și aplicarea teoremei sinusurilor și teoremei cosinusului, de pildă, am întrebuințat totdeauna exerciții și probleme referitoare la compunerea și descompunerea forțelor. Cazurile clasice de rezolvare a triunghiurilor le ilustrez în general prin date extrase din probleme în care se cer rezultanta, tensiunea în lungul firelor sau forțele de reacțiune. Aici trebuie să mai adaug că este cît se poate de necesar de a da de la început, în legătură cu rezolvarea triunghiurilor, probleme cu date concrete, pentru a-i feri pe elevi de șablonizare.

La lecțiile de recapitulare am folosit de multe ori probleme de fizică cum este i/2 (vezi anexa), care m-au condus la rezolvarea cazurilor clasice, obținînd cu această ocazie o participare mai activă a întregei clase. Cazurile speciale, foarte numeroase, existente în culegerea de probleme de trigonometrie, unde sînt date și multe indicații, îl îndeamnă uneori pe profesor la o prezentare teoretică a acestui capitol. Pentru majoritatea elevilor, însă, rezolvarea unor asemenea probleme este mai mult o pierdere

de vreme. Nu mulțimea exercițiilor, ori cît de multă simetrie ar putea să intervină în rezolvarea lor, poate asigura înarmarea elevilor cu deprinderi de muncă independentă, ci analiza atentă în vederea obținerii rezultatelor pe o cale cît mai scurtă. La acest lucru ajungem dacă restrîngem numărul problemelor referitoare la cazurile speciale și căutăm să fixăm cunoștințele prin rezolvarea unor probleme care îi interesează mai mult pe elevi.

Am cerut de multe ori elevilor — și mulți dintre ei au reușit — să întocmească probleme cu caracter practic, axate pe datele furnizate de cazurile speciale de rezolvare a triunghiurilor. Iată ce problemă a compus un elev pentru cazul cînd la un triunghi ABC se cunosc laturile AB, AC și bisectoarea unghiului A: Trei mobile pornesc din același punct pe direcțiile AB, AD, AC cu mișcări uniforme și cu vitezele V_1, V_2, V_3. Să se afle distanțele între aceste mobile, știind că după timpul t ele se află pe aceeași dreaptă BC și că direcția AD împarte unghiul BAC în părți egale. Evident că din rezolvarea acestui caz special, din combinarea metodelor geometrice și trigonometrice, a reieșit și posibilitatea de a se găsi prin construcții geometrice distanțele cerute între cele trei mobile.

La studiul ecuațiilor trigonometrice în clasa a X-a îmi fixez mai mult atenția asupra aplicațiilor pe care le au aceste ecuații, începînd cu formele: $\sin(mx + n) = a$, $\cos(mx + n) = a$, $\operatorname{tg}(mx+n)=a$, întrucît elevii au cunoscut asemenea aplicații cu prilejul rezolvării ecuațiilor directe: $\sin x=a$, $\cos x=a$ $\operatorname{tg} x=a$. În momentul în care încep studiul ecuațiilor de mai sus, caut ca elevii să cunoască metodele de trecere de la funcție la argument, sub forma generală adică:

$$x=\frac{1}{m}[(-1)^k \operatorname{Arc}\sin a+k\pi],\quad x=\frac{1}{m}(-\operatorname{Arc}\cos a+2k\pi),$$

$$x=\frac{1}{m}(\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x+k\pi)$$

Cînd anunț studiul acestor categorii de ecuații, pornesc de la o problemă concretă, ca de ex. f/9 (vezi anexa). Pun mare preț pe considerațiile de geometrie și fizică ce intervin aici. Rezultatul obținut prin examinarea schiței executate la tablă îl dau tot sub formă generală (adică arăt că argumentului îi corespund o infinitate de valori). Abia după aceea particularizez rezultatul, căutînd să dau răspuns problemei practice considerate. Urmează apoi — chiar în aceeași oră, dacă dispun de timp, sau în orele următoare—exerciții pentru formarea deprinderilor în legătură cu rezolvarea acestor tipuri de ecuații. Dau și ca teme pentru

acasă probleme care duc la acest fel de ecuații trigonometrice, dintre care cel puțin una însoțită de explicații amănunțite, iar una fără nici o indicație. Atunci cînd examinez elevii asupra unei probleme în clasă sau le cer să rezolve la tablă una din problemele date ca temă pentru acasă, discut rezultatele problemei și trag concluzii pentru cazuri similare.

La prezentarea altor categorii de ecuații trigonometrice, am pornit fără să anunț la ce tip de ecuație vom ajunge; aceasta a reieșit din însăși rezolvarea problemei propuse. Astfel, în cazul ecuației de forma $a \sin x + b \cos x = c$, am pornit de la problema numărul f/12 (vezi anexa). La rezolvarea acestei probleme în clasă am fost nevoit, din lipsă de timp să nu mă mențin pe plan general, întrebuințînd parametrii v, v_1 l, h, ci să dau valori numerice în momentul în care am stabilit ecuația trigonometrică ce rezolva problema propusă. Astfel am izbutit să rezolv în aceeași oră problema prin două metode: prin ridicare la pătrat cît și prin exprimarea sinusului și cosinusului prin tangenta semiunghiului. Am cerut elevilor să rezolve acasă aceeași problemă în cazul altor valori ale parametrilor. Problema a prezentat interes, iar majoritatea elevilor au izbutit să afle toate soluțiile convenabile. În a doua oră am examinat un număr mai mare de elevi la aceeași problemă și am dat și schița unei discuții complete a ei. Celelalte cîteva probleme de același tip, luate din culegere sau formate de elevii înșiși, pe care le-am lucrat în clasă sau le-am dat acasă, au fost rezolvate cu ușurință.

Metoda de rezolvare prin introducerea unui unghi auxiliar am aplicat-o pe un exercițiu.

O altă problemă examinată în clasă anul acesta și care a contribuit mult la creșterea interesului elevilor pentru a găsi cele mai potrivite transformări în vederea obținerii aceleiași funcții cu același argument, a fost problema f/17 (vezi anexa). Aici am lăsat pînă la sfîrșit notația pentru unghiul celor două forțe, iar particularizarea am făcut-o tocmai la urmă. Am avut grijă ca în tot timpul, în afară de ecuații să dau ca temă acasă probleme dintre care unele au fost facultative, ca de ex. f/11, f/15, f/16, f/18, f/19 (vezi anexa). Pentru a nu pierde timp prea mult în oră, am discutat în clasă cîteva minute, aspectele mai dificile ale problemelor respective sau am dat lămuriri complete, în afară de oră, acelor elevi care se angajaseră în rezolvarea unor probleme mai grele.

În cazul rezolvării sistemelor trigonometrice, timpul este și mai limitat. Practica mi-a arătat că nu se pot cerceta complet

mai mult de una sau două din multele probleme cu caracter aplicativ care se referă la acest capitol. Calculele pentru aflarea soluțiilor unor astfel de probleme sînt destul de complicate, iar examinarea condițiilor fizice în care au loc fenomenele tratate răpește mult timp. Este bine însă ca cel puțin un singur exemplu să fie cercetat pe larg.

În ceea ce privește repetarea și adîncirea cunoștințelor de fizică și, în special, de mecanică ce se cer pentru rezolvarea problemelor unde se întîlnesc cel mai des ecuațiile trigonometrice, aceasta este o problemă destul de dificilă avînd în vedere cele arătate mai sus. Este totuși necesar ca profesorul de matematică să insiste — fie la începutul prezentării problemei, fie în cursul rezolvării ei — asupra teoremelor fundamentale ale mecanicii și fizicii fiindcă numai astfel se poate asigura o deplină înțelegere a legăturii strînse între matematică și fizică. Aceste cunoștințe nu sînt multe și au avantajul de a se cimenta solid atunci cînd ele sînt introduse cu dibăcie în probleme care provoacă interesul elevilor.

În concluzie, trebuie să remarc următoarele:

a) Legătura între matematică și fizică se poate realiza în condiții bune în măsura în care profesorul de matematică cunoaște îndeaproape capitolele ce se studiază la fizică în școala medie, iar profesorul de fizică este convins de rolul important al matematicii pentru fundamentarea științifică a cunoștințelor de fizică, fie ele teoretice sau aplicate.

b) Colaborarea între cei doi profesori care predau aceste discipline nu trebuie să se rezume numai la un schimb de informații în legătură cu parcurgerea programei, ci să se oglindească într-un interes creator în favoarea ambelor discipline, în sensul unei completări reciproce.

c) Profesorul de matematică trebuie să-i orienteze pe elevi spre examinarea fenomenelor naturii, spre aplicarea cunoștințelor de matematică. El trebuie să se sprijine activ pe cunoștințele lor de mecanică, electricitate și optică, spre a le dezvolta interesul pentru activitatea creatoare în producție.

d) De asemenea, profesorul de matematică trebuie să profite de orice ocazie pentru a da elevilor cunoștințe de tehnică, stabilind în acest scop un program comun cu profesorul de fizică, atît pentru activitatea din clasă cît și pentru cea dinafara clasei.

ANEXA nr. 1

Enunțurile unor probleme de fizică ce pot fi folosite cu prilejul predării diferitelor discipline ale matematicii.

A. *Probleme în legătură cu studiul dependenței funcționale și al reprezentărilor grafice*

1. Cîte minute a durat zborul de încercare al unui aviator, dacă el zboară cu o viteză de 840 km pe oră, pe o distanță: a) de 700 km; b) de 800 km; c) de 1000 km; d) de 1200 km?

2. O grupă de turiști a parcurs 27 km în $6\frac{3}{4}$ ore. Ce parte din drum au parcurs turiștii într-o oră? Dar în două ore? Dar în trei ore?

3. Un termometru Réaumur arată următoarele temperaturi: 38°, 42°, 50°, 60°. Ce temperaturi corespund pentru un termometru Celsius? Să se întocmească un tablou cu corespondența între cele două termometre din 5 în 5 grade, în intervalul 35° — 60°.

4. Densitatea cuprului este de 8,9. Ce volum au următoarele cantități de cupru: 10 g, 35 g, 90 g, 2,5 kg, 20 kg?

5. Cu ce forțe sînt împinse de jos în sus în apă niște bucăți de marmură ale căror volume sînt: 20 cm^3, 40cm^3, 50 cm^3?

6. Fonta turnată conține 3,5% carbon, 1,5% siliciu, 1% mangan, 0,4% fosfor și 0,01% sulf. Să se determine cantitățile în kg ale acestor elemente, completîndu-se tabelul alăturat:

Fontă	Carbon	Siliciu	Mangan	Fosfor	Sulf
500 kg 1000 kg 2000 kg					

7. Un tren parcurge 40 km pe oră. Cîți kilometri parcurge trenul în 2 ore? în 4 ore?, în 5 ore? Să se înscrie rezultatul într-un tabel (t=timpul, d=drumul în kilometri).

8. De brațul $OA=40$ cm al unei pîrghii, arătată în figura alăturată, se suspendă greutatea P de 6 kg. De brațul $OB=40$cm al acestei pîrghii se suspendă greutatea Q, de 8 kg. Să se determine 10 poziții pentru punctele de aplicație ale celor două greutăți pe brațele pîrghiei, pentru ca pîrghia să rămînă în echilibru.

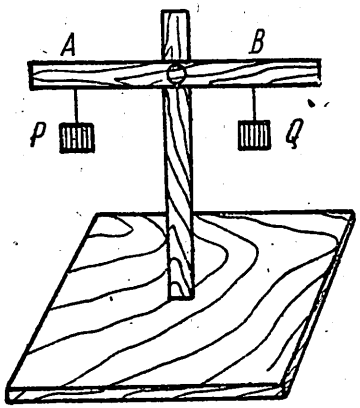


Fig. 1

9. Două mobile pleacă din același loc cu mișcări uniforme, avînd vitezele $V_1 = 2\ \frac{cm}{s}$ și $V_2 = 3\ \frac{cm}{s}$. Să se stabilească grafic după cît timp și la ce distanță de punctul de plecare al doilea mobil îl ajunge pe primul, știindu-se că pleacă cu o secundă mai tîrziu decît primul.

10. Prin punctul A al unei șosele trec, la intervale de 2 minute 3 bicicliști, cu vitezele de 100 m/minut, 200 m/minut și 300 m/minut. În momentul cînd ultimul biciclist trece prin punctul A, un al patrulea biciclist trece printr-un punct B, în sens contrar, la distanță de 1000 m de A, cu viteza de 150 m/minut. Să se afle timpul și distanța față de A după care cei patru bicicliști se întîlnesc doi cîte doi.

11. Un ascensor urcă cu viteza constantă de $5\ \frac{m}{s}$. Cînd este la 10 m sub noi, lăsăm să cadă liber o pietricică. Să se afle peste cît timp și la ce distanță de noi, piatra întîlnește ascensorul.

12. Din două puncte A și B, situate la distanța de 100 m unul de altul, pornesc pe direcția AB două mobile. Mobilul plecat din A are o mișcare uniform întîrziată cu $V_o = 60\ \frac{m}{s}$ și $a = 4\ \frac{m}{s}$, iar cel plecat din B are o mișcare uniform accelerată cu $v = 20\ \frac{m}{s}$ și $a = 2\ \frac{m}{s}$. Să se studieze variația distanței dintre cele două mobile.

13. Un pendul de greutate p oscilează între două poziții extreme ce fac cu verticala un unghiu de 60°. Să se studieze variația forței care tinde să aducă pendulul în poziția de echilibru.

14. Un mobil se mișcă pe un arc de cerc de rază R cu o viteză unghiulară dată. Să se studieze variația distanțelor acestui mobil la 2 diametri perpendiculari.

B. *Probleme de fizică legate de studiul progresiilor*

1. Un corp lăsat să cadă liber parcurge în prima secundă 4,9 metri și în fiecare secundă următoare cu 9,8 metri mai mult decît în cea precedentă. Să se determine:

a) Ce distanță parcurge un corp care cade timp de 12 secunde?

b) În cîte secunde va ajunge la pămînt un corp lăsat să cadă liber de la o înălțime de 1960 metri?

2. Un corp cade liber de la înălțimea de 490 metri. Cît spațiu parcurge el în secunda a șasea?

3. O minge a fost aruncată în sus cu viteza de 49 metri pe secundă. Cîte secunde va urca și care este înălțimea maximă atinsă?

4. Două corpuri pleacă simultan din două puncte între care este o distanță de 200 metri și se mișcă unul către celălalt. Primul corp parcurge 12 metri pe secundă și cel de-al doilea parcurge în prima secundă 20 metri și în fiecare secundă următoare cu 2 metri mai puțin decît în secunda precedentă. Peste cîte secunde se vor întîlni aceste corpuri?

5. Din punctul A a plecat un biciclist care în prima oră a parcurs 10 km și în fiecare oră următoare cu 1 km mai mult decît în ora precedentă. În același timp, din punctul B, care se găsește la o distanță de 7,5 km de punctul A, a plecat în același sens un al doilea biciclist, care în prima oră a făcut 12 km și în fiecare oră următoare a făcut cu 1,5 km mai mult decît în ora precedentă. Să se determine după cîte ore al doilea biciclist îl va ajunge pe primul biciclist.

6. Un gaz cu volumul de a metri cubi se găsește la o presiune constantă; gazul trece consecutiv prin n filtre. Fiecare filtru absoarbe p procente din volumul total al impurităților care sînt în gaz (care ajung la filtru). Apoi acest gaz trece într-un rezervor unde se găsesc b metri cubi (raportat la aceeași presiune) de gaz, care conține q procente de impurități (după volum). Ce procent de impurități (după volum) admitem pentru gaz, pînă la curățirea lui, dacă numărul de procente al impurităților în amestecul de gaz din rezervor nu trebuie să întreacă r?

7. Să se stabilească, pe baza progresiilor geometrice infinit descrescătoare, formula care dă dilatarea liniară a unui corp între temperaturile t_1 şi t_2.

C. *Probleme de fizică ce se rezolvă cu ajutorul ecuaţiilor de gradul I*

1. Roţile de dinainte ale unei trăsuri au circumferinţa de 2,8 m, iar cele dinapoi 3,5 m. Ce distanţă a parcurs această trăsură, dacă roţile de dinainte au făcut 500 învîrtituri mai mult decît cele dinapoi? Să se generalizeze.

2. Un ceasornic arată orele 12. Să se afle la ce oră acul care arată minutele va întîlni pe cel care arată orele? Cînd se face întîlnirea între orele 2 şi 3?

3. Un vapor face pe Dunăre o distanţă de 60 km împotriva curentului apei în 4 ore, iar în sensul curentului, aceeaşi distanţă şi cu aceeaşi putere a maşinii în 3 ore. Care ar fi iuţeala vaporului în apă stătătoare şi care e iuţeala apei?

4. Un paralelipiped de gheaţă, ale cărui dimensiuni sînt 4,5 m., 12,4 m şi 16,2 m se cufundă în apa de mare, astfel că dimensiunea cea mică să aibă o poziţie verticală; densitatea gheţii este de 0,930 şi a apei de mare de 1,026. Se cere înălţimea părţii necufundate cînd paralelipipedul pluteşte liber.

5. Să se afle volumele a două lichide ale căror densităţi sînt 1,3 şi 0,7 şi care, fiind amestecate, formează un lichid cu volumul de 3 litri şi densitatea de 0,9.

6. Se topeşte un aliaj de argint cu titlul de 0,836 cu altul, al cărui titlu este de 0,900. Se obţin 5 kg dintr-un nou aliaj cu titlul 1 de 0,860. Cîte kg s-au topit din fiecare din cele două aliaje?

7. O probă a unui aliaj compus din două metale are greutatea specifică d. Greutatea specifică a primului metal este d_1, iar a celui de-al doilea d_2. Cîte grame trebuie luate din fiecare metal pentru ca proba să cîntărească a kilograme?

8. Viteza unei bărci cu motor pe apă stătătoare este u, iar viteza curentului unui rîu este v. Să se calculeze în cît timp barca va parcurge dus şi întors, pe acest rîu, distanţa d dintre două oraşe?

9. O picătură de ploaie, atingînd geamul unui automobil care merge cu viteza v km pe oră, a făcut pînă la partea de jos a ferestrei un drum de a metri. Să se afle viteza de cădere a picăturii de ploaie, ştiindu-se că înălţimea ferestrei este de b metri.

D. *Probleme de fizică ce se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor de gradul II*

1. Două corpuri A și B se mișcă pe laturile unui unghiu drept. Primul pleacă pe una din laturi cu o secundă înaintea celui de-al doilea, făcînd 6 metri pe secundă; cel de-al doilea, 5 metri pe secundă, pe a doua latură. După cît timp se vor afla la distanța de 75 metri unul de altul?

2. Un corp este lăsat să cadă fără iuțeală, sub acțiunea gravitații; după a secunde, un al doilea corp este lăsat să cadă din același punct. După cît timp cele două corpuri se găsesc la distanța d metri? Caz particular $a = 1$, $d = 98$ m. Nu se ține seama de rezistența aerului.

3. Să se găsească adîncimea unui puț în fundul căruia, lăsînd să cadă o piatră, zgomotul se aude după t secunde din momentul cînd i s-a dat drumul. Nu se ține seama de rezistența aerului. Caz particular $t = 4$, $g = 9{,}81$, $v = 337$.

4. Intercalînd într-un circuit electric, produs de o diferență de potențial de 220 volți, o rezistență de 2 ohmi, intensitatea curentului scade cu un amper. Să se afle rezistența inițială a circuitului.

5. Intensitatea curentului într-un circuit produs de o forță electromotoare de 10 volți este cu 0,5 amperi mai mare decît intensitatea curentului dintr-un al doilea circuit cu o forță electromotoare de 3 volți. Mărindu-se rezistența fiecărui circuit cu 1 ohm, diferența dintre intensitățile curenților devine 0,8 amperi. Să se afle rezistența fiecărui circuit.

6. Un circuit electric se compune din rezistențele a și b așezate în paralel. Să se mărească rezistențele cu aceeași rezistență, astfel ca rezistența totală a circuitului să fie c. Caz particular $a = 2{,}5$ ohmi, $b = 0{,}5$ ohmi, $c = 2{,}4$ ohmi.

E. *Probleme de fizică în legătură cu discuția ecuațiilor de gradul II și studiul trinomului de gradul II*

1. Din două orașe A și B, care se află la o distanță de s kilometri, se îndreaptă în același timp, unul spre celălalt, două trenuri care se întîlnesc după t ore. Primul tren parcurge m kilometri cu q ore mai repede decît al doilea. Să se găsească viteza fiecărui tren. Să se afle forma parametrilor m, q, s și t în așa fel încît vitezele celor două trenuri să fie numere întregi.

2. O piatră este aruncată de la suprafața pămîntului vertical în sus, cu viteza inițială V_0. Să se determine cît timp rămîne piatra deasupra unui gard de înălțime h.

3. Un obiect mic se găsește la distanța d de un ecran. La ce distanță x de obiect trebuie așezată o lentilă convexă pentru a se obține pe ecran o imagine clară?

4. Doi poli magnetici A și B se află la o distanță de a centimetri unul de altul. Polul magnetic B este de n ori mai puternic decît polul magnetic A. Să se afle, pe dreapta care unește cei doi poli, punctul în care puterea de atracție a ambilor poli este egală.

5. Să se afle valorile unghiului a două forțe P și Q, astfel ca rezultanta lor să fie egală cu semisuma acestor forțe.

6. Două mașini auto pornesc în același timp din același loc în aceeași direcție. Prima merge cu a kilometri pe oră, iar a doua cu b kilometri pe oră. După c ore pornește din același loc, în aceeași direcție, o a treia mașină, care ajunge una din aceste mașini cu d ore mai tîrziu decît pe cealaltă. Ce viteză are mașina a treia?

7. Un balon este terminat cu un gît care are forma unui tub cilindric AB, de lungime $l = 50$ cm și secțiune $s = 1$ cm^2. Balonul, inclusiv gîtul, are volumul $V = 1$ litru și este plin cu aer la temperatura 0° și presiunea $H = 760$ mm. Gîtul balonului este împlîntat în întregime într-o baie de mercur, aflat tot la temperatura de 0°. Se întreabă pînă la ce înălțime BC se ridică mercurul în tub?

8. Un corp este aruncat vertical în sus, cu viteza inițială de 20 cm pe secundă. Să se afle distanța maximă la care poate ajunge acest corp.

9. O pîrghie de genul al doilea are punctul de sprijin la un capăt și este echilibrată de forța f, aplicată la celălalt capăt. La distanța a de la punctul de sprijin este atîrnată greutatea p. Greutatea unității de lungime a pîrghiei este egală cu m. Să se determine lungimea x a pîrghiei, astfel încît forța să fie minimă.

10. Avînd la dispoziție o baterie electrică cu o forță electromotoare E și o rezistență interioară Ri, se cere să se afle rezistența exterioară a unui reșou care, alimentat de la această baterie, să furnizeze maximum de căldură.

11. Din punctele A și A_1 pornesc concomitent de-a lungul dreptelor AO și A_1O, în direcția punctului O, două corpuri cu vitezele v și v_1. Știind că $AO = a$, $A_1O = a_1$, iar unghiul între AO și A_1O este egal cu x, să se afle cînd distanța dintre aceste două corpuri va fi minimă.

F. *Probleme de fizică, care conduc la rezolvarea unor ecuații trigonometrice*

1. Să se determine unghiul format de două forțe având mărimile $F_1 = 10$ kg și $F_2 = 20$ kg, dacă mărimea rezultantei lor este de rO kg.

2. În punctul de îmbinare A a două grinzi identice $A\ B$ și $A\ C$ dintr-o formă de acoperiș este suspendată o greutate P. Să se determine unghiul $BAC = \alpha$, dacă mărimea forței S, care întinde grinda orizontală BC, este jumătate din greutatea P.

3. Un tren se mișcă uniform cu viteza v_1, iar picăturile ploii cad vertical cu viteza v_2 și lasă urme pe geamurile vagoanelor. Să se afle unghiul format de urma unei picături și verticală, cînd $v_1 = 30$ km pe oră și $v_2 = 8$ m pe secundă.

4. Un avion zboară pe o vreme fără vînt cu viteza v_1. În vremea cînd vîntul bate de la est, acest avion zboară cu o viteză v_2. Ce direcție trebuie să aibă axa longitudinală a avionului, ca el să zboare exact spre sud?

5. Înălțimea unui turn este h metri. O piatră aruncată din vîrful turnului cu o viteză v_0 sub un unghi anumit cu orizontala cade pe pămînt după t secunde. Sub ce unghi a fost aruncată piatra?

6. Un biciclist are la o curbă a drumului viteza v_0. Raza de curbură este egală cu R. Să se afle înclinația pe care trebuie să o aibă drumul pentru ca biciclistul să nu fie deplasat în direcția lățimii drumului.

7. Un fascicol de raze paralele, căzînd pe un paravan sub un unghi α de 30°, dă o iluminație egală cu 40 lux. Sub ce unghi trebuie îndreptat acest fascicol pentru ca iluminația acestui paravan să fie egală cu 60 lux?

8. Sub ce unghi față de orizontală trebuie să dea drumul un pușcaș unui glonț care pleacă în spațiul vid cu viteza inițială de 360 m pe secundă, astfel ca glonțul să cadă pe pămînt la distanța $H = 11{,}4$ km de el?

9. O sferă de greutate P este prinsă printr-un fir de punctul fix B, iar punctul A se sprijină pe un plan înclinat cu unghiul de 30° față de orizontală. Să se determine unghiul x făcut de fir cu verticala, știind că raportul dintre greutatea sferei și tensiunea firului este $\sqrt{2}$.

10. Un corp A de greutate $P = 5$ kg este așezat pe un plan orizontal. Corpului i se aplică o forță de 3 kg. Să se afle care trebuie să fie unghiul dintre forță și orizontală pentru ca această forță să poată pune în mișcare corpul cînd coeficientul de frecare al corpului pe plan este 0,6.

11. Un zmeu AB, de greutate $P = 2$ kg, legat printr-un fir de punctul fix C, este ţinut în echilibru de presiunea vîntului sub unghiul $\varphi = 45°$ faţă de orizontală (planul zmeului face unghiul $\varphi = 45°$ cu orizontala). Să se determine unghiul α dintre fir şi orizontală, ştiind că tensiunea T a firului este de 6 kg.

12. Viteza apei unui rîu este de v metri pe secundă, iar viteza unui înotător în apa stătătoare este de v_1 metri pe secundă. Sub ce unghi x format cu direcţia perpendiculară pe cursul apei trebuie să înoate înotătorul pentru a ajunge într-un punct C, C fiind în dreptul lui A punctul de plecare?

13. Într-un vas emisferic neted de rază r este aşezată o bară omogenă AB, de lungime $2a$ şi greutate P. Să se determine unghiul α format de bară cu planul orizontal cînd bara este în poziţia de echilibru.

14. Într-o prismă de secţiune dreaptă BAC se cunoaşte unghiul $A = 45°$ şi indicele de refracţie al sticlei faţă de aer $n = \frac{3}{2}$. O rază de lumină SI cade pe faţa AB, se refractă şi iese din prismă prin faţa AC după direcţia $I'S'$. Să se găsească condiţia ca direcţia $I'S'$ să fie perpendiculară pe direcţia AB.

15. Două forţe P şi Q sînt aplicate într-un punct material. Să se afle unghiul între aceste forţe, ştiind că dacă mărim de două ori unghiul dintre forţe, fără a modifica mărimea forţelor, valoarea rezultantei rămîne neschimbată.

16. O rază de lumină plecată din sursa S şi care face unghiul u cu orizontala se reflectă într-o oglindă O sub unghiul $2u$ faţă de orizontală şi apoi întîlneşte un punct P. Ştiind că $\overline{SO} = \overline{OP} = 100$ m şi distanţa de la S la verticala lui P este de $50(1 + \sqrt{3})$ m, să se afle unghiul u.

17. Rezultanta a două forţe aplicate unui punct material care fac între ele un unghi φ formează cu una din ele un unghi x. Să se afle acest unghi ştiind că dacă mărim cealaltă forţă de 3 ori, unghiul căutat se măreşte de 2 ori. Cazuri particulare: $\varphi = 90°, \varphi = 45°$.

18. O pîrghie frîntă BAC se află în echilibru atunci cînd la capătul segmentului AB de lungime $p = 2$ dm acţionează o forţă $R = 6$ kg, iar la capătul segmentului AC de lungime $l = 3$ dm acţionează o forţă de $Q = 8$ kg. Să se afle unghiurile formate de segmentele pîrghiei cu orizontala, ştiind că unul din aceste unghiuri este de 2 ori mai mare decît celălalt. Nu se ia în considerare greutatea pîrghiei.

19. Două bare omogene, AB şi BC, una fiind jumătate din cealaltă ($\overline{AB} = l$, $\overline{BC} = 2l$), sînt unite solidar între ele, for-

mînd un unghi $\varphi = 60°$. Sistemul obținut este suspendat de un fir la extremitatea A. Să se determine unghiul dintre bara CB și orizontală, în poziție de echilibru.

G. *Probleme de fizică, care conduc la rezolvarea sistemelor de ecuații trigonometrice*

1. Inelele A, B și C a trei dinamometre sînt fixate pe o scîndură orizontală. Trei sfori întinse sînt legate de cele trei cîrlige ale dinamometrelor. Celelalte capete ale sforilor sînt legate într-un nod D. Dinamometrele arată 8 kgf, 7 kgf și 13 kgf. Să se afle unghiurile x și y formate din direcțiile sforilor AD și BD cu prelungirea lui CD.

2. O bară omogenă AB se reazimă pe două plane care formează cu orizontala unghiurile α și β. Să se determine unghiurile α și β știind că în poziție de echilibru reacțiunile planelor în punctele A și B sînt de două ori mai mari decît greutatea P a barei.

3. La capetele unui fir trecut peste doi scripeți mici și bine lustruiți, aflați la același nivel, sînt legate greutățile $P = 4$ kgf și $Q = 6$ kgf. Să se determine poziția de echilibru a firului în cazul cînd de punctul C se prinde o greutate $G = 9$ kgf.

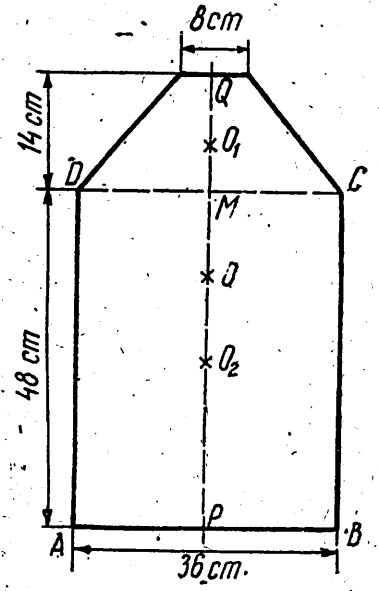


Fig. 2

H. *Probleme de fizică, care au ca enunț o schiță*

1. Să se determine poziția centrului de greutate a unei plăci omogene de forma și dimensiunile arătate în schița alăturată.

2. Să se determine în schema alăturată rezistența R_x în așa

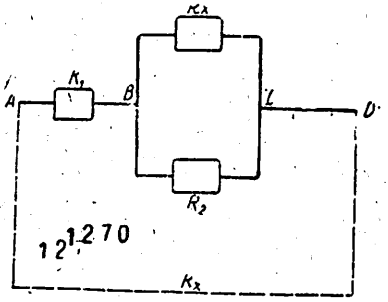


Fig. 3

fel încît valoarea ei să fie egală cu a întregului sistem de rezistențe. Soluția este totdeauna posibilă? Să se determine raportul tensiunilor dintre punctele $A\ C$ și $B\ C$.

I. *Probleme de fizică pentru recapitularea cunoștințelor de matematică*

1. Pe o șosea sînt două pietre kilometrice A și B, la distanță de 32 km una de alta. Pe această distanță se mișcă două mobile. Primul pornește în momentul 0 din A și se deplasează pînă în B cu o mișcare uniformă, avînd o viteză de 4 km pe oră. Al doilea mobil pornește împreună cu primul din A, cu o mișcare uniform accelerată, avînd viteza inițială 0. El merge în acest fel pînă la mijlocul distanței AB, apoi își continuă mersul cu o mișcare uniform întîrziată, avînd accelerația egală în valoare absolută cu aceea din prima jumătate a distanței și ajunge în B în același moment cu primul mobil. Să se afle în ce moment și în ce poziție distanța dintre cele două mobile are cea mai mare valoare. Să se reprezinte grafic mișcările celor două mobile.

2. Un fir flexibil și inextensibil de greutate neglijabilă este fixat cu un capăt în B. La distanța $\overline{BA}$ este legată o greutate P. Firul trece apoi peste un mic scripete C, situat pe orizontala punctului B, la distanța BC. Frecarea în scripete fiind neglijabilă, să se afle greutatea G care echilibrează greutatea P în condițiile:

1°	$\overline{BA}=2$ m,	$\overline{AC}=\sqrt{6}$ m,	$\hat{A}=75°$,	$P=10$ kg
2°	$\overline{BC}=\sqrt{3}$ m,	$\overline{BA}=\sqrt{2}$ m,	$\hat{A}=60°$,	$P=10$ kg
3°	$\overline{BC}=2$ m,	$\overline{BA}=\sqrt{3}+1$ m,	$\overline{CA}=\sqrt{6}$ m,	$P=10$ kg

ANEXA nr. 2

Soluțiile problemelor mai importante

*Problema a/*10. Dacă socotim originea timpului în momentul cînd primul biciclist trece prin A, avem pentru mișcările celor patru bicicliști ecuațiile:

$$S_1=100\,t;\ S_2=200\,(t-2);\ S_3=300\,(t-4);\ S_4=1000-150\,(t-4)=1600-150\,t.$$

Reducînd scara spaţiilor în raportul 1 : 50, obţinem funcţiile:

$S_1 = 2t$; $S_2 = 4t - 8$; $S_3 = 6t - 24$; $S_4 = 32 - 3t$.

Reprezentînd grafic aceste funcţii, obţinem:

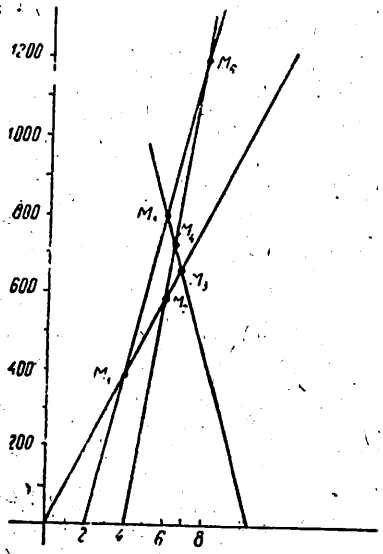


Fig. 4

Pe graficul de mai sus se pot citi valorile timpului şi spaţiului cînd cei patru biciclişti se întîlnesc doi cîte doi, adică

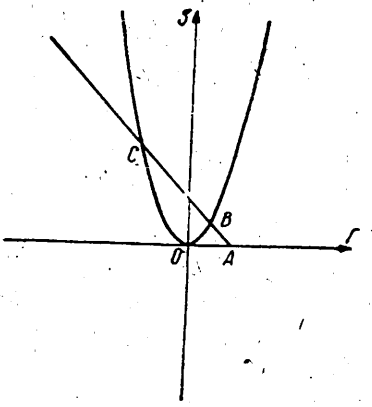


Fig. 5

$(S_1, S_2) \to M_1$ [4 min, 400 m]; $(S_2, S_3) \to M_6$ [8 min, 1200 m]
$(S_1, S_3) \to M_2$ [6 min, 600 m]; $(S_2, S_4) \to M_5$ [$\approx$6 min, $\approx$800 m]
$(S_1, S_4) \to M_3$ [6,4min, 640 m]; $(S_3, S_4) \to M_4$ [$\approx$6 min, $\approx$600 m]

Acest gen de probleme le formează elevilor deprinderea de a urmări variaţia fiecărei funcţii în parte şi de a găsi soluţiile sistemelor prin măsurători de precizie şi înlătură confuzia pe care o fac unii dintre elevi între graficul unei funcţii şi traiectoria mişcării.

Problema a/11. Considerînd ca origine poziţia unde ne găsim noi, cele două mişcări au ca ecuaţii: $S_1 = 10 - 5t$, $S_2 = \frac{1}{2} gt^2$.

Punînd $g \approx 10 \frac{m}{s^2}$, obţinem funcţiile $S_1 = 10 - 5t$; $S_2 = 5t^2$.

Reprezentîndu-le grafic, avem:

Amplificăm scara spaţiilor în raportul $\frac{1}{5}$.

Coordonatele punctului B(1,5) de intersecţie al parabolei cu dreapta reprezintă soluţia problemei.

Aceste valori corespund cu cele date de calcul:

$$\text{I} \begin{cases} t = 1 \\ S = 5 \end{cases} \qquad \text{II} \begin{cases} t = -2 \\ S = 20 \end{cases}$$

Soluția $\begin{cases} t = -2 \text{ s} \\ S = 20 \text{ m} \end{cases}$ se poate interpreta grafic și corespunde punctului C, unde dreapta AB întîlnește a doua oară parabola.

Problema a/12. Luînd ca origine punctul A, avem:
Ecuația mișcării mobilului plecat din A, $S_A = 60t - 2t$
Ecuația mișcării mobilului plecat din B, $S_B = 20t + t^2 + 100$.

Distanța dintre ele este:

$$S = S_B - S_A = 3t^2 - 40t + 100$$

Reprezentînd grafic această funcție, obținem:

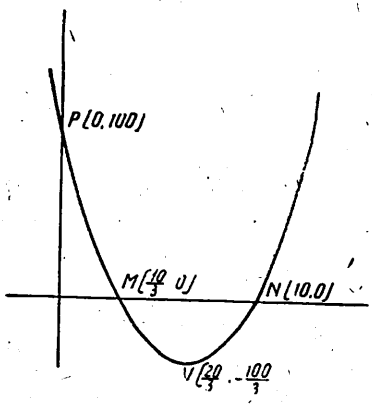


Fig. 6

Analizînd acest grafic se vede că:

La momentul $t = 0$, distanța între cele două mobile este de 100 m.

Pentru $0 < t < \frac{10}{3}$ și $t > 10$, mobilul plecat din B se află înaintea celui plecat din A. Pentru $t = \frac{10}{3}$, $t = 10$, distanța dintre mobile este zero, deci ele se întîlnesc. Pentru $\frac{10}{3} < t < 10$, mobilul plecat din A trece înaintea celui plecat din B.

Cea mai mare distanță dintre cele două mobile pentru $\frac{10}{3} < t < 10$ este de $\frac{100}{3}$ m. Pentru $t > 0$ distanța dintre mobile crește indefinit.

Problema b/1. 1) *a)* Metoda progresiilor:

$$S_{12} = \frac{[a_1 + a_1 + (n-1)]\, n}{2} = \frac{[9{,}8 + (12-1)]\, 12}{2} = 705{,}6 \text{ m}.$$

b) Metoda formulelor fizice:

$$S = \frac{1}{2} gt^2 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot 12^2 = 705{,}6 \text{ m.}$$

2) *a)* Prin progresii: $1960 = \frac{[2 \cdot 4{,}9 + (n-1)\ 9{,}8]\ n}{2}$ de unde

$$n = 20 \text{ secunde}$$

b) Prin formule fizice: $t = \sqrt{\frac{2S}{g}} = \sqrt{\frac{3920}{9{,}8}} = 20$ secunde.

Problema b/3. a) Prin progresii:

1° Din formula ultimului termen $a_n = a_1 + (n-1)\, r$ deducem:

$0 = 4{,}9 - 9{,}8 - (n-1)\ 9{,}8$ de unde $n = 5$ secunde

2° Din formula sumei $S_5 = \frac{(0 + 49)\ 5}{2} = 122{,}5$ m.

b) Prin formule fizice:

$$1^0\ t = \frac{v}{g} = \frac{49}{9{,}8} = 5 \text{ secunde}$$

$$2^0\ S = \frac{V_0^2}{2g} = \frac{49^2}{2 \cdot 9{,}8} = 122{,}5 \text{ m.}$$

Problema b/4. a) Prin progresii: $12\ n = \frac{[40 - (n-1)\ 2]\ n}{2}$ de unde $n = 8$ secunde

b) Prin formule fizice:

Primul mobil merge cu o mişcare uniformă, după relaţia $S = vt$; al doilea mobil se mişcă uniform încetinit, după relaţia:

$$S = v_0 t - \frac{a}{2} t^2 \text{ unde } v_0 = 20 + \frac{2}{2} = 21 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

De unde ecuaţia:

$12\,t + 21t - t^2 = 200$ sau $t^2 - 33t - 200 = 0$ care dă $t_1 = 25$, $t_2 = 8$ dintre care, pentru problemă, este acceptabilă soluţia $t = 8$.

Problema b/5. a) Prin progresii:

Notăm cu n numărul orelor și avem de rezolvat ecuația $S_B - S_A = 7{,}5$ km, unde S_B și S_A înseamnă sumele a două progresii aritmetice, cu elementele

$$\begin{cases} a_1 = 12 \\ r_1 = 1{,}5 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2 = 10 \\ r_2 = 1 \end{cases}$$

Avem deci $\frac{[12+12+(n-1)\cdot 1{,}5]\,n}{2} - \frac{[10+10+(n-1)]\,n}{2} = 7{,}5$

din care deducem $n = 3$ ore.

b) Prin formule de fizică:

În această problemă avem de-a face cu două mișcări uniform accelerate cu elementele

$$\begin{cases} v_0 = 12 - \frac{1{,}5}{2} = 10{,}5 \\ a = 1{,}5 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = 10 - \frac{1}{2} = 9{,}5 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Se obține astfel ecuația problemei:

$10{,}5 + 0{,}75t^2 - 9{,}5t - 0{,}5t^2 = 7{,}5$ de unde $t = 3$ ore.

În general, dacă a și b reprezintă drumul parcurs de cele două mobile în prima oră, q numărul de km cu care merg mai mult în ora următoare și d (km) diferența de drum dintre punctele de plecare, soluția problemei este dată de ecuația:

$$(p - q)t^2 + (2a - 2b - p + q)\,t - 2d = 0.$$

Problema b/6. Fie x procentul căutat; atunci gazul care nu a trecut încă prin filtru conține $\frac{ax}{100}$ impurități și $a - \frac{ax}{100} = a\left(1 - \frac{x}{100}\right)$ gaz pur. La trecerea prin filtru, cantitatea de gaz pur nu se schimbă, iar cantitatea de impurități se schimbă în modul următor: primul filtru absoarbe $\frac{p}{100}$ din volumul de impurități existent inițial, adică $\frac{ax}{100} \cdot \frac{p}{100}$ și impuritățile rămase vor ocupa volumul $\frac{ax}{100} - \frac{ax}{100} \cdot \frac{p}{100} = \frac{ax}{100}\left(1 - \frac{p}{100}\right)$.

După al doilea filtru vor rămîne $\frac{ax}{100}\left(1-\frac{p}{100}\right)^2$ m³ impurități, iar după trecerea prin al n-lea filtru volumul ocupat de impuritățile rămase va fi $\frac{ax}{100}\left(1-\frac{p}{100}\right)^n$.

(După legea de formare a ultimului termen într-o progresie geometrică).

După terminarea experienței, toate impuritățile vor ocupa volumul $\frac{ax}{100}\left(1-\frac{p}{100}\right)^n+\frac{bq}{100}$ m³, iar volumul total al gazului din rezervor va fi $b+a\left(1-\frac{x}{100}\right)+\frac{ax}{100}\left(1-\frac{p}{100}\right)^n$.

Conform enunțului trebuie să avem inegalitatea:

$$\frac{ax}{100}\left(1-\frac{p}{100}\right)^n+\frac{bq}{100}\leqslant\frac{r}{100}\left[b+a\left(1-\frac{p}{100}\right)+\frac{ax}{100}\left(1-\frac{p}{100}\right)^n\right]$$

de unde

$$x\leqslant\frac{r(a+b)-bq}{a\left[\left(1-\frac{p}{100}\right)^n\left(1-\frac{r}{100}\right)+\frac{r}{100}\right]}$$

Condițiile suplimentare ale problemei sînt $0\leqslant p\leqslant 100$, $0\leqslant q\leqslant 100$, $0\leqslant r\leqslant 100$, n număr natural, iar $r(a+b)-bq\geqslant 0$ adică $r\geqslant\frac{bq}{a+b}$.

Problema b/7. Lungimea la temperatura t_2 este $l_{t_2}=l_0(1+\alpha t_2)$, iar la temperatura t_1 este $l_{t_1}=l_0(1+\alpha t_1)$. Avem

$$\frac{l_{t_2}}{l_{t_1}}=\frac{1+\alpha t_2}{1+\alpha t_1}=\frac{1+\alpha t_1+\alpha t_2-\alpha t_1}{1+\alpha t_1}=1+\alpha(t_2-t_1)\cdot\frac{1}{1+\alpha t_1}$$

și fiindcă $\alpha t_1<1$ putem scrie

$$\frac{l_{t_2}}{l_{t_1}}=1+\alpha(t_2-t_1)\left[1-\alpha t_1+(\alpha t_1)^2-(\alpha t_1)^3+\ldots\right]$$

Neglijînd termenii αt_1 și următorii, fiindcă descresc foarte repede, se obține formula practică

$$l_{t_2}\approx l_{t_1}\left[1+\alpha(t_2-t_1)\right]$$

Problema c/8. Presupunem că la început barca cu motor coboară în sensul curentului apei. Atunci viteza ei absolută (față de malurile rîului) va fi $u+v$, iar timpul folosit pentru parcurgerea distanței d va fi:

$$t_1 = \frac{d}{u+v}$$

Pe drumul de întoarcere, viteza absolută va fi $u - v$, timpul folosit $t_2 = \frac{d}{u-v}$.

Timpul total va fi

$$t = t_1 + t_2 = \frac{d}{u+v} + \frac{d}{u-v} = \frac{2du}{u^2-v^2} = \frac{2d}{u} \cdot \frac{1}{1-\frac{v^2}{u^2}}$$

Deoarece $0 < 1 - \frac{v^2}{u^2} < 1$ timpul $t > \frac{2d}{u}$, adică timpul dus și întors în apa curgătoare este mai mare decît timpul dus și întors în apă stătătoare și este cu atît mai mare cu cît v este mai aproape de u.

Dacă $u = v$ $1 - \frac{v^2}{u^2} = 0$, iar t ar fi infinit de mare.

În adevăr, barca după ce ar parcurge distanța d coborînd cursul apei, n-ar mai fi în stare să urce îndărăt, împotriva curentului, căci viteza u cu care urcă este egală cu viteza v cu care rîul o trage înapoi.

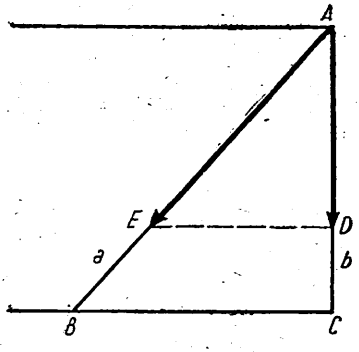


Fig. 7

Problema c/9. În unitatea de timp, picătura a ajuns din A în E, iar componentele sale în direcția în care merge automobilul și în direcția verticalei sînt v viteza automobilului și v' viteza picăturii pe verticală.

Din $\Delta\, ADE \sim \Delta\, ACB$ deducem:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}};\quad \frac{v'}{v} = \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}} \text{ de unde } v' = \frac{bv}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

Discuție

1° Dacă $a > b$, v' este determinată și cum $\frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}} < 1$ rezultă $v' < v$.

2° Dacă $a = b\sqrt{2}$ atunci $v' = v$ și $\sphericalangle EAD = 45°$.

3° Cînd $a = b$, $v \neq 0$, direcțiile $\overline{AC}$ și $\overline{AB}$ se confundă, iar $v' = \infty$, adică imposibilitate.

4° Cînd $a = b$, $v = 0$, v' este nedeterminată, adică automobilul stă pe loc, iar viteza picăturii poate fi oarecare.

Problema d/3. Pînă în fundul puțului, piatra a făcut $t = \sqrt{\frac{2S}{g}}s$. Timpul pînă cînd se aude zgomotul căderii este $\frac{S}{v}$ unde S este adîncimea puțului și v viteza sunetului.

Avem de rezolvat ecuația irațională:

$$\sqrt{\frac{2S}{g}} + \frac{S}{v} = t \text{ care duce la}$$

$$\frac{S^2}{v^2} - 2S\left(\frac{t}{v} + \frac{1}{g}\right) + t^2 = 0$$

$$\text{de unde } S = \frac{\frac{t}{v} + \frac{1}{g} \pm \sqrt{\frac{2}{g} \cdot \frac{t}{v} + \frac{1}{g^2}}}{\frac{1}{v^2}}$$

Deoarece $v > 0$, $g > 0$, $t > 0$, ambele soluții sînt pozitive.

Timpul după care se aude zgomotul căderii trebuie să fie mai mic decît timpul total, adică $\frac{S}{v} < t$.

Pentru $S_2 = \frac{\frac{t}{v} + \frac{1}{g} + \sqrt{\frac{2t}{gv} + \frac{1}{g^2}}}{\frac{1}{v^2}}$ avem

$$\frac{S_2}{v} = \frac{\frac{t}{v} + \frac{1}{g} + \sqrt{\frac{2t}{gv} + \frac{1}{g^2}}}{\frac{1}{v}}$$ și condiția nu este îndeplinită.

Deci soluția acceptabilă pentru problemă este:

$$S_1 = \frac{\frac{t}{v} + \frac{1}{g} - \sqrt{\frac{2t}{gv} + \frac{1}{g^2}}}{\frac{1}{v}} = \frac{v}{g}\left\{tg + v - \sqrt{[(t+1)g+v][(t-1)g+v]}\right\}$$

care pentru $t = 4$, $g = 9{,}81$, $v = 337$ dă:

$$S_1 = 70{,}5 \text{ m.}$$

Problema d/4. Notînd cu x ohmi rezistența inițială a circuitului, după legea lui Ohm rezultă pentru intensitatea $I = \frac{220}{x}$.

Rezistența x mărindu-se cu $2\,\Omega$, intensitatea devine $\frac{220}{x+2}$.

Avem ecuația $\frac{220}{x} - \frac{220}{x+2} = 1$

Rezolvînd-o, obținem $x_1 = 20$, $x_2 = -22$, dintre care numai prima soluție este acceptabilă.

Deci circuitul are o rezistență de $20\,\Omega$, intensitatea lui fiind $220 : 20 = 11$ A.

Problema d/5. Notîndu-se cu x și respectiv y rezistențele celor două circuite și aplicînd legea lui Ohm $I = \frac{E}{R}$, ajungem la sistemul:

$$\begin{cases} \frac{10}{x} - \frac{3}{y} = -0{,}5 \\ \frac{10}{x+1} - \frac{3}{y+1} = 0{,}8 \end{cases} \quad \text{cu soluția} \quad \begin{cases} x = 4\,\Omega \\ y = 1{,}5\,\Omega \end{cases}$$

Problema d/6. Notăm cu x (Ω) rezistența adițională și obținem ecuația

$$\frac{1}{a+x} + \frac{1}{b+x} = \frac{1}{c} \text{ sau } x^2 - (2c - a - b)\,x + ab - (a+b)\,c = 0$$

de unde

$$x = \frac{2c - (a+b) \pm \sqrt{(a-b)^2 + 4c^2}}{2}.$$

Ecuația are rădăcini reale pentru orice a, b, c.

Soluțiile negative se pot interpreta în problemă în sensul că, în loc să mărim rezistențele, le vom micșora.

În cazul particular $a = 2{,}5\,\Omega$, $b = 0{,}5\,\Omega$, $c = 2{,}4\,\Omega$, se obține:

$$x_1 = -1{,}7\,\Omega,\quad x_2 = 3{,}5\,\Omega.$$

Problema e/1. 1° Dacă notăm cu V_1 și V_2 vitezele celor două trenuri, ecuațiile problemei sînt:

$$\begin{cases} s = t(V_1 + V_2) \\ \dfrac{m}{V_2} - \dfrac{m}{V_1} = q \end{cases}$$

Acest sistem trebuie rezolvat cu condițiile suplimentare:

$$0 < V_2 < V_1$$

După sensul problemei, valorile admise pentru parametri sînt pozitive: $s > 0$, $m > 0$, $t > 0$, $q > 0$.

Exprimînd pe V_2 din prima ecuație în funcție de V_1 și înlocuind în ecuația a doua, obținem:

$$qtV_1^2 + (2mt - qs)\,V_1 - ms = 0.$$

Discriminantul ecuației $\Delta = (2mt - qs)^2 - 4mstq = q^2s^2 + 4m^2t^2$. Fiind pozitiv, soluțiile sînt reale și fiindcă produsul rădăcinilor este negativ $-\dfrac{ms}{qt}$, rădăcinile sînt de semne contrare. Dar $\sqrt{q^2s^2 + 4m^2t^2} > qs - 2mt$ și rădăcina pozitivă este cea mai mare. Trebuie să luăm deci

$$V_1 = \frac{qs - 2mt + \sqrt{q^2s^2 + 4m^2t^2}}{2qt}$$

Pentru V_2 găsim $V_2 = \dfrac{s}{t} - V_1 = \dfrac{qs + 2mt - \sqrt{q^2s^2 + 4m^2t^2}}{2qt}$.

Condiția $0 < V_2 < V_1$ pentru $q > 0$ și $V > 0$ este îndeplinită în virtutea celei de-a doua ecuații $\dfrac{m}{V_2} - \dfrac{m}{V_1} = q$.

Deci valorile găsite pentru V_1 și V_2 satisfac toate condițiile puse și dau soluția problemei.

2° Pentru a avea soluții întregi trebuie ca expresia $qs - 2mt$ să fie divizibilă cu 2 qt, iar expresia $q^2s^2 + 4m^2t^2$ să fie un pătrat perfect divizibil cu $2qt$.

Punem $s = 2\mu t$, $m = \nu t$, unde μ, ν sînt două numere întregi pozitive.

Expresia $q^2s^2 + 4m^2t^2$ devine $4t^2(\mu^2q^2 + \nu^2t^2)$.

Pentru ca această expresie să fie divizibilă cu $2qt$, vom pune $\mu^2q^2 + \nu^2t^2 = q^2K^2$ unde K este un număr întreg.

Acum punem

$\mu q = \alpha^2 - \beta^2$, $\nu t = 2\alpha\beta$, $qK = \alpha^2 + \beta^2$, unde α, β sînt numere întregi.

Luăm: $\mu = \alpha + \beta$, $q = \alpha - \beta$, $\nu = 2\alpha$, $t = \beta$, și cu aceste notații, avînd în vedere că $s = 2\mu t$ și $m = \nu t$, deducem soluțiile

$$\begin{aligned} q &= \alpha - \beta \\ t &= \beta \text{ cu } \alpha > \beta \\ s &= 2\beta(\alpha + \beta) \\ m &= 2\alpha\beta \end{aligned}$$

Cu aceste valori pentru parametri, soluția problemei devine $V_1 = 2\alpha$ și $V_2 = 2\beta$.

Exemple numerice:

a) $\alpha = 3$, $\beta = 2$
$q = 1$, $t = 2$, $s = 20$, $m = 12$
$V_1 = 6$, $V_2 = 4$

b) $\alpha = 5$, $\beta = 1$
$q = 4$, $t = 1$, $s = 12$, $m = 10$.
$V_1 = 10$, $V_2 = 2$.

Problema e/2. Conform legilor fizicii (se neglijează rezistența aerului), în momentul t piatra se va găsi la înălțimea $S = V_0t - \frac{gt^2}{2}$ deasupra pămîntului, unde g este accelerația gravitațională, iar V_0 viteza inițială. Dacă la momentul t piatra se găsește deasupra gardului de înălțime h, trebuie să fie satisfăcută inegalitatea:

$$V_0 - \frac{gt^2}{2} > h \text{ sau } gt^2 - 2V_0t + 2h < 0$$

Valorile admise ale parametrilor sînt $V_0 > 0$, $h > 0$, iar condiția suplimentară pentru necunoscuta $t > 0$.

Să formăm discriminantul trinomului de gradul al doilea $\Delta = V_0^2 - 2gh$.

Cazul 1°. Dacă $\Delta = 0$, adică $V_0 = \sqrt{2gh}$, atunci trinomul nu poate fi negativ și, prin urmare, inegalitatea nu poate fi satisfăcută: problema nu are soluție, piatra nu se ridică deasupra gardului.

Cazul 2°. Dacă $\Delta > 0$, adică $V_0 > \sqrt{2gh}$ rădăcinile t_1 și t_2 ale trinomului sînt pozitive și distincte, și inegalitatea este satisfăcută pentru t cuprins între rădăcinile trinomului

$$\frac{V_0 - \sqrt{V_0^2 - 2gh}}{g} < t < \frac{V_0 + \sqrt{V_0^2 - 2gh}}{g}$$

Intervalul (t_1, t_2) este intervalul de timp în decursul căruia piatra se găsește deasupra gardului, valoarea acestui interval fiind egală cu $t_2 - t_1 = \frac{\sqrt{V_0^2 - 2gh}}{g}$.

Problema e/3. Conform legilor fizicii trebuie să fie îndeplinită condiția: $\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} = \frac{1}{F}$ (F este distanța focală a lentilei). Această ecuație trebuie rezolvată în corpul numerelor reale pentru valorile admise ale parametrilor $d > 0$, $F > 0$ și pentru condițiile suplimentare $0 < x < d$. Valorile căutate ale lui x trebuie să satisfacă ecuația de gradul al doilea:

$$f(x) = x^2 - dx + dF = 0.$$

Avem $\Delta = d^2 - 4dF = d(d - 4F)$.

Rădăcinile sînt reale dacă $d \geqslant 4F$. Dacă această condiție este satisfăcută, ambele rădăcini sînt pozitive. Numărul d se află în afara intervalului rădăcinilor, deoarece $f(d) = dF > 0$. Dacă ar fi fost înăuntrul intervalului rădăcinilor $f(d)$ ar fi fost negativ. Rezultă că d este mai mare decît cea mai mare din rădăcini $d > x_2$.

Și deoarece $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{d}{2} < d$, rezultă că $x \leqslant x_2 < d$.

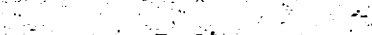
Dacă $d > 4F$, problema are două soluții:

$$x_1 = \frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} - dF} \text{ și } x_2 = \frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} - dF}.$$

Pentru $d = 4F$, problema are soluție unică $x = \frac{d}{2}$.

Pentru $d < 4F$ problema nu are soluții.

Problema e/4



Dacă notăm $\overline{AM} = x$ atunci ecuația problemei este $\frac{1}{x^2} = \frac{n}{(a-x)^2}$, de unde găsim $x_1 = \frac{a}{1+n}, x_2 = \frac{a}{1-n}$.

Cazul 1°. Dacă $n>1$, adică polul B, are o putere mai mare decît A, atunci $0<x_1<a$ iar $x_2<0$. Deci, un punct se găsește între A și B, iar celălalt la stînga lui A.

Cazul 2°. Dacă $n<1$, adică polul A are o putere mai mare decît polul B, atunci $0<x_1<a$ și $0<a<x_2$. Deci, un punct se află între A și B, iar celălalt la dreapta lui B.

Cazul 3°. Dacă $n = 1$, adică puterile celor doi poli sînt egale, atunci $x_1 = \frac{a}{2}$, $x_2 = \infty$. Deci, unul din punctele M se află la jumătatea segmentului AB, iar celălalt este aruncat la infinit.

Cazul 4°. Dacă n crește indefinit, adică punctul B are o putere mare în comparație cu A, ambele puncte tind să se confunde cu A.

Cazul 5°. Dacă n descrește și se apropie de zero, adică punctul B are o putere neglijabilă în raport cu A, atunci soluțiile x_1, x_2 tind către a, iar punctele M tind să se confunde cu B.

În rezumat avem schema:

n	0	1	∞
M_1	$B \searrow$	$\frac{AB}{2}$	$\searrow A$
M_2	$B \nearrow \pm\infty$		$\nearrow A$

Se observă că punctele M_1 și M_2 sînt conjugate armonic față de A și B.

Problema e/5. Înlocuind în formula $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\omega$ care ne dă rezultanta celor două forțe P și Q și care fac unghiul ω, pe R cu $\frac{P+Q}{2}$ obținem:

$$\left(\frac{P+Q}{2}\right)^2 = (P+Q)^2 - 2(1-\cos\omega)PQ \text{ de unde}$$

$$\sin^2\frac{\omega}{2} = \frac{3(P+Q)^2}{16PQ} = \frac{3\left(\frac{P}{Q}+1\right)^2}{16\frac{P}{Q}}$$

Discuție. Pentru a avea soluții trebuie ca $\frac{3\left(\frac{P}{Q}+1\right)^2}{16\frac{P}{Q}} \leqslant 1$ de unde $\frac{3\left(\frac{P}{Q}+1\right)^2-16\frac{P}{Q}}{16\frac{P}{Q}} \leqslant 0$ sau $3\frac{P}{Q}\left(\frac{P}{Q}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{P}{Q}-3\right) \leqslant 0$ (1)

Condițiile suplimentare ale problemei sînt $P>0$, $Q>0$, $0<\omega<180°$.

Pentru ca inegalitatea (1) să aibă loc este necesar ca

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{P}{Q} \leqslant 3.$$

Pentru $\frac{P}{Q}=3$ și $\frac{P}{Q}=\frac{1}{3}$ $\sin^2\frac{\omega}{2}=1$ și $\omega=180°$

Pentru $\frac{P}{Q}=1$ $\sin^2\frac{\omega}{2}=\frac{3}{4}$ și $\omega=120°$

În concluzie avem:

1° $P>Q$ trebuie ca $\frac{P}{Q} \leqslant 3$, iar unghiul ω variază între 120° și 180°.

2° $P<Q$ trebuie ca $\frac{P}{Q} \geqslant \frac{1}{3}$ și unghiul ω variază între 120° și 180°.

Rezultă deci că în condițiile problemei $R=\frac{1}{2}(P+Q)$, unghiul ω variază între 120° și 180°.

Problema e/6. Notăm cu x viteza mașinii a treia. Presupunem că ea întîlnește în punctul A pe cea cu viteza de a km/oră și în B pe cea cu b km/oră. Fie y timpul în care mașina a treia, plecată din punctul O, a străbătut distanța OB.

Avem

$$\begin{cases} by = x(y-c) \\ a(y-d) = x(y-c-d) \end{cases}$$

Eliminînd pe y obținem $y = \frac{cx}{x-b} = \frac{x(c+d)-ad}{x-a} =$

$= \frac{ad-dx}{a-b}$ de unde $dx^2 + [c(a-b) - d(a+b)]\ x + abd^2 = 0$ (1)

Eliminînd pe x, obținem:

$$\frac{y-c-d}{y-c} = \frac{a(y-d)}{by} \text{ de unde } (b-a)\,y^2 - (b-a)$$

$$(c+d)\,y - acd = 0 \qquad (2)$$

Discriminantul ecuației (1) este:

$[c(a-b) - d(a+b)]^2 - 4abd^2 = (c^2+d^2)(a-b)^2 + 2cd(b^2-a^2)$

iar al ecuației (2) este $(b-a)^2(c+d)^2 + 4(b-a)\,acd$.

Dacă $b>a$, atunci soluțiile celor două ecuații sînt reale. Ecuația (2), care dă timpul în care mașina parcurge distanța OB, are două soluții reale: una negativă și una pozitivă. Soluția pozitivă este

$$y = \frac{(b-a)(c+d) + \sqrt{(b-a)^2(c+d)^2 + 4(b-a)\,acd}}{2(b-a)}$$

Suma rădăcinilor ecuației (2) pentru $b>a$ este pozitivă, deci rădăcina pozitivă este mai mare în valoarea absolută decît cea negativă, căreia îi corespunde o viteză mai mare. Deci pentru x luăm valoarea mai mică.

Obținem astfel soluția problemei:

$$\begin{cases} x = \dfrac{d(a+b) + c(b-a) - \sqrt{(c^2+d^2)(a-b)^2 + 2cd(b^2-a^2)}}{2d} \\ y = \dfrac{(b-a)(c+d) + \sqrt{(b-a)^2(c+d)^2 + 4(b-a)\,acd^2}}{2(b-a)} \end{cases}$$

Problema e/7. Masa de aer din balon are volumul $V = 1000$ cm^3 și presiunea $H = 76$ cm; la sfîrșitul experienței, mercurul se ridică în tub pînă la înălțimea $x = \overline{BC}$, deci volumul masei de aer a scăzut cu sx cm^3 și este egal cu $(V - sx)$. Mercurul din cuvetă se află, față de mercurul din tub, la o diferență de nivel egală cu $(l - x)$; însă presiunea la suprafața mercurului

din cuvetă este presiunea atmosferică H, deci presiunea aerului din balon este $H + l - x$. Legea lui Mariotte este:

$\overline{VH} = (V - sx)(H + l - x)$ și x este rădăcina ecuației de gradul al doilea

$$sx^2 + (Hs + ls + V)x + Vl = 0$$

care are rădăcinile reale pentru că discriminantul ei este mai mare ca $(Hs + ls - V)^2$; o rădăcină $x_2 > l$ nu convine problemei, pentru că înălțimea $\overline{BC}$ a coloanei de mercur din tub nu poate fi mai mare ca lungimea $\overline{BA}$ a întregului tub, și o rădăcină $x_1 < l$ care convine problemei. În cazul problemei ecuația este:

$$x^2 - 1126x - 50\,000 = 0$$

și rădăcina $x_1 < l$ este egală cu 47,4 cm.

Problema e/8. Se știe că spațiul parcurs în mișcarea ascendentă pe verticală este dat de relația

$$S = V_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Maximul este dat de $t = \frac{V_0}{g}$, iar valoarea acestui maxim este

$$S_M = V_0 \frac{V_0}{g} - \frac{1}{2} g \frac{V_0^2}{g^2} = \frac{V_0^2}{2g}$$

În cazul problemei, $t = 2\,s$, iar $S_M = 20$ m.

Problema e/9. Scriind că suma momentelor în raport cu punctul O (punctul de sprijin) este nulă, obținem relația:

$$ap + \frac{x}{2} mx - fx = 0$$

sau $mx^2 - 2fx + 2ap = 0$.

Pentru ca x să fie real trebuie ca $f^2 - 2amp \geqslant 0$ sau $f \geqslant \sqrt{2amp}$, deci minimul lui f este $\sqrt{2amp}$ pentru care $x = \sqrt{\frac{2ap}{m}}$.

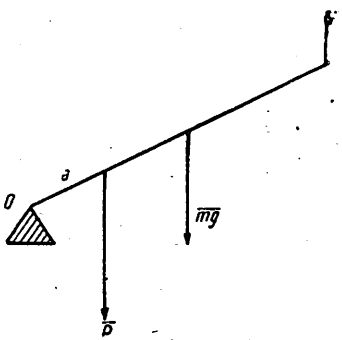


Fig. 8

Problema e/10. După relaţia lui Joule-Lentz $C = RI^2t$, unde $I = \frac{E}{R_i + R_e}$.

Pentru o secundă, avem $C = RI^2 = \frac{R_eE^2}{(R_i+R_e)^2}$, din care deducem ecuaţia

$$CR_e^2 = R_e(2R_iC - E^2) + CR_i^2 = 0.$$

Pentru ca rădăcinile să fie reale, trebuie: $(2R_iC - E^2)^2 - 4C^2R_i^2 \geqslant 0$ de unde $C \leqslant \frac{E^2}{4R_i}$.

Căldura maximă este $C = \frac{E^2}{4R_i}$, iar R_e minim este $R_e = -\frac{2R_iC - E^2}{2C}$. Înlocuind pe C, găsim:

$$R_e = -\frac{E^2 - 2E^2}{\frac{E^2}{R_i}} = R_i$$

Prin urmare, pentru ca reşoul să furnizeze maximum de căldură trebuie ca rezistenţa exterioară să fie egală cu rezistenţele interioare.

Problema e/11. După t secunde mobilele ajung în M şi respectiv N. Distanţa $\overline{MN}$ este dată de relaţia $\overline{MN}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 - 2\overline{OM}\cdot\overline{ON}\cos\alpha$, dar $\overline{OM} = a - vt$, $\overline{ON} = a_1 - v_1t$, deci $\overline{MN}^2 = [(V^2 + V_1^2) - 2VV_1\cos\alpha]t^2 - 2[aV + a_1V_1 - (a_1V + aV_1)\cos\alpha]t + a^2 + a_1^2 - 2aa_1\cos\alpha$.

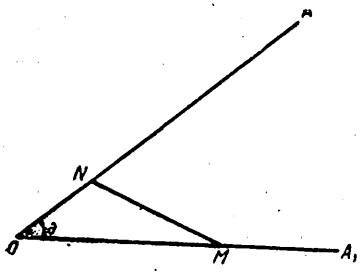


Fig. 9

Timpul t după care distanţa MN este minimă este dat de relaţia

$$t = \frac{aV + a_1V_1 - (a_1V + aV_1)\cos\alpha}{V^2 + V_1^2 - 2VV_1\cos\alpha}$$

Dacă $\alpha = 90°$, $t = \frac{aV + a_1V_1}{V^2 + V_1^2}$ şi $MN = \frac{|a_1V - aV_1|}{\sqrt{V^2 + V_1^2}}$

Problema f/2. Tensiunile de-a lungul grinzilor sînt egale între ele. Din triunghiul APD scoatem: $\frac{T}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{P}{\sin\alpha}$ de unde

$$T = \frac{P}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$$

În punctul C tensiunea T se descompune în forța S și o

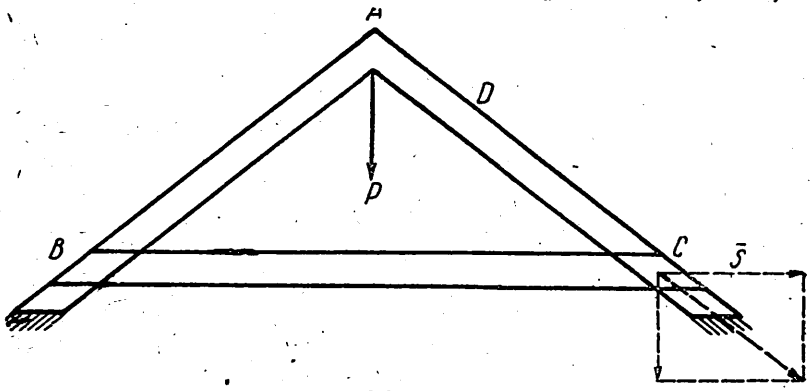


Fig. 10

forță perpendiculară pe ea. Din triunghiul CEF scoatem: $S = T\sin\frac{\alpha}{2}$.

Apoi, înlocuind mai sus obținem $S = \frac{P}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, și cum $S = \frac{P}{2}$ rezultă $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 1$, de unde $\alpha = 90°$.

Problema f/8. Se știe că distanța maximă pe orizontală la care ajunge glonțul este dată de relația $\overline{OA} = \frac{V_0^2}{g}\sin 2\alpha$, de unde $\sin 2\alpha = \frac{gH}{V_0^2} = \frac{9{,}8\frac{m}{s^2}\cdot 11.400\text{ m}}{360^2\frac{m^2}{s^2}} \approx 0{,}861$

iar $\alpha \approx 29°30'$

Problema f/9. Greutatea $\overline{P}$ a sferei este echilibrată de reacțiunea $\overline{N}$ normală planului înclinat și de tensiunea $\overline{T}$ de-a lungul firului.

Se observă că $\sphericalangle AOC = 30°$ și $\sphericalangle OAC = 180° - (x + 30°)$. Aplicînd relația sinusurilor în triunghiul OAC obținem:

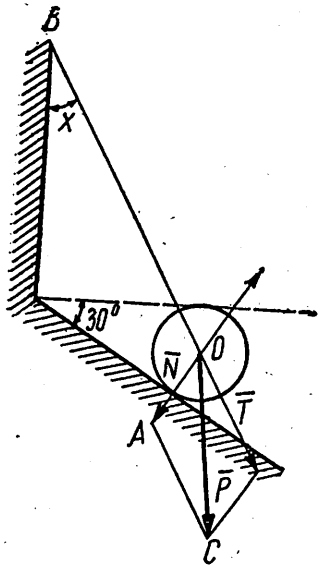


Fig. 11

$$\frac{\overline{P}}{\sin(x+30°)} = \frac{\overline{T}}{\sin 30°}, \text{ de unde}$$

$$\sin(x+30°) = \frac{\overline{P}}{2\overline{T}}.$$

Și fiindcă s-a dat $\frac{\overline{P}}{\overline{T}} = \sqrt{2}$, avem

$$\sin(x + 30°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ și } x = 15°.$$

Problema f/10. Dacă $\overline{R}$ este reacțiunea totală, $\overline{N}$ reacțiunea normală și $\overline{R_t}$ forța de frecare de alunecare, atunci, proiectînd aceste forțe pe normala la plan, avem:

$$N + Q \sin\alpha = P \qquad (1)$$

Proiectînd aceste forțe pe plan, avem:

$$R_t = Q \cos\alpha \qquad (2)$$

Și fiindcă $\overline{R_t} = f_N$ (forța de frecare de alunecare este proporțională cu reacțiunea normală) relația (2) devine

$$f_N = Q \cos\alpha \qquad (3)$$

Eliminînd pe $\overline{N}$ între relațiile (1) și (3), obținem:

$$fQ \sin\alpha + Q \cos\alpha - fP = 0 \qquad (4)$$

Cu datele problemei, ecuația (4) devine

$$0{,}6 \sin\alpha + \cos\alpha - 1 = 0.$$

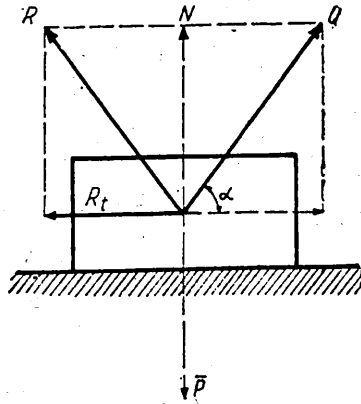


Fig. 12

Pentru a rezolva această ecuație trigonometrică scriem succesiv: $0{,}6 \sin \alpha = 1 - \cos \alpha$; $1{,}2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$.

Soluția acceptabilă este $x \approx 62°$.

Problema f/11. În centrul de greutate O al smeului acționează forțele: greutatea $\bar{P}$, reacțiunea normală $\bar{N}$ și tensiunea firului $\bar{T}$. Proiectînd aceste forțe pe orizontală obținem:

$N \sin \varphi - T \cos \alpha = 0$ (1)

Proiectînd pe verticală, obținem: $N \cos \varphi - T \sin \alpha - P = 0$ (2)

Eliminînd reacțiunea N din relațiile (1) și (2) deducem ecuația $T \sin \alpha - T \cos \alpha \cdot \operatorname{ctg} \varphi + P = 0$.

Și, înlocuind cu datele problemei,

$6 \sin \alpha - 6 \cos \alpha + 2 = 0$.

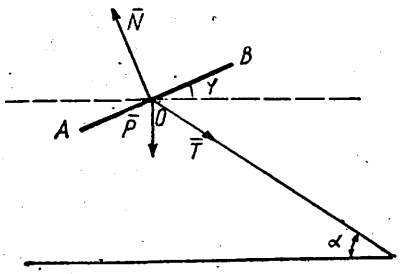


Fig. 13

Pentru a rezolva această ecuație scriem succesiv:

$$\cos \alpha - \sin \alpha = \frac{1}{3}; \quad \sin (90° - \alpha) - \sin \alpha = \frac{1}{3};$$

$2 \sin (45° - \alpha) \cdot \cos 45° = \frac{1}{3}$, de unde soluția acceptabilă

$$\alpha \approx 31°30'.$$

Problema f/12. Notăm cu l lățimea rîului și cu h distanța $\overline{CB}$. Descompunem viteza înotătorului în direcția $\overline{AB}$ în viteza V a rîului și viteza V_1 a înotătorului în apa stătătoare.

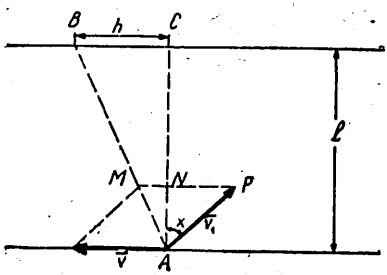


Fig. 14

Din asemănarea triunghiurilor ABC și AMN, scoatem:

$\frac{\overline{MN}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}$ (1), dar $\overline{MN} = \overline{MP} - \overline{NP} = V - V_1 \sin x$;

$\overline{AN} = V_1 \cos x$.

Înlocuind aceste valori în proporția (1), obținem:

$$\frac{V - V_1 \sin x}{h} = \frac{V_1 \cos x}{l}$$

Deducem astfel ecuația trigonometrică

$$lV_1 \sin x + hV_1 \cos x - lV = 0 \qquad (2)$$

Dacă viteza V_1 este îndreptată în sensul curentului apei, atunci $MN = MP + PN$ și proporția (1) devine

$$\frac{V + V_1 \sin x}{h} = \frac{V_1 \cos x}{l}$$

iar ecuația (2) devine $lV_1 \sin x - hV_1 \cos x + lV = 0$.

Observăm că această ecuație se obține din ecuația (2) înlocuind în această ecuație pe x prin $(-x)$. Rezultă că ecuația (2) este valabilă și pentru acest caz, cu condiția să scoatem unghiul x negativ atunci cînd V_1 este îndreptat în sensul curentului apei. Pentru a rezolva ecuația (2), folosim formulele raționale:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

Obținem succesiv

$$lV_1 \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + hV_1 \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - lV = 0$$

$$(V_1 h + Vl) \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 2lV_1 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + lV - hV_1 = 0 \qquad (3)$$

Discuție. Condițiile suplimentare ale problemei sînt:

$$1°) V > 0,\ V_1 > 0,\ l > 0,\ h > 0;\ 2°) -90° < x < 90°;\ 3°) -1 < \operatorname{tg} \frac{x}{2} < 1$$

Pentru ca ecuația (3) și deci problema să aibă soluții este necesar ca discriminantul $\Delta = V_1^2(h^2 + l^2) - V^2 l^2$ să fie pozi-

tiv sau zero. Pe de altă parte, pentru a determina relațiile dintre parametrii V_1, V, h, l, ca să satisfacem condiția $-90°<x<90°$, vom transforma ecuația (3), punînd

$$y=\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1} \text{ de unde } \operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1+y}{1-y}.$$

Aceasta, transformată, este:

$$F(y)=l(V-V_1)\,y^2+2hV_1y+lV=0 \qquad (4).$$

Discriminantul ecuației transformate (4) este

$$\Delta'=h^2V_1^2-l^2V(V-V_1)=V_1^2(h^2+l^2)-l^2V^2$$

Deci ecuația transformată (4) are rădăcini reale în același timp cu ecuația (3). Așa și trebuia, deoarece transformarea

$$y=\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}$$ arată că V și $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ sînt în același timp cantități reale sau imaginare.

Comparînd acum ecuațiile (3) și (4), putem spune:

a) Dacă ecuația (4) are două rădăcini negative, atunci ecuația (3) are două rădăcini acceptabile, adică pentru care $-90°<x<90°$.

b) Dacă ecuația (4) are o singură rădăcină negativă, atunci ecuația (3) are o singură rădăcină acceptabilă.

c) Dacă ecuația (4) nu are nici o rădăcină reală negativă, atunci ecuația (3) și problema nu au soluții acceptabile.

În concluzie, avem următoarele cazuri:

$$1°\ \begin{cases} V_1^2(h^2+l^2)-V^2l^2>0 \\ V<V_1 \\ lV>hV_1 \end{cases}$$

Ecuația (4) are ambele rădăcini negative, iar ecuația (3) ambele rădăcini acceptabile, amîndouă fiind pozitive.

Înotătorul are posibilitatea de a pleca sub două unghiuri orientate împotriva curentului apei. Evident că el va alege pe cel mai mic, deoarece în acest caz va depune un efort mai mic.

$$2^\circ \begin{cases} V_1^2(h^2 + l^2) - V^2 l^2 > 0 \\ V > V_1 \\ lV < hV_1 \end{cases}$$

Ecuația (3) are două soluții acceptabile, dintre care cea mai mare pozitivă, iar cea mai mică negativă. Înotătorul are în acest caz posibilitatea să plece, fie sub un unghi orientat împotriva curentului apei, fie sub un unghi îndreptat în sensul curentului apei.

$$3^\circ \begin{cases} V_1^2(l^2 + h^2) - l^2V^2 > 0 \\ V < V_1 \\ lV > hV_1 \end{cases}$$

Ecuația (3) are o soluție pozitivă acceptabilă, adică înotătorul poate pleca sub un unghi orientat împotriva curentului apei.

$$4^\circ \begin{cases} V_1^2(h^2 + l^2) - l^2V^2 > 0 \\ V < V_1 \\ lV < hV_1 \end{cases}$$

Ecuația (3) are o soluție acceptabilă negativă, adică înotătorul poate pleca sub un unghi orientat în sensul curentului apei.

5° $V_1^2(h^2 + l^2) - l^2V^2 = 0$ atunci $\frac{V}{V_1} = \frac{h^2 + l^2}{l}$ și $V > V_1$

Ecuația (5) are o soluție acceptabilă pozitivă, deci înotătorul trebuie să plece sub un unghi îndreptat împotriva curentului apei.

$$6^\circ \; lV = hV_1 \text{ sau } \frac{l}{h} = \frac{V_1}{V}$$

Ecuația (4) devine, punînd $h = \frac{lV}{V_1}$

$$(V - V_1)\, y^2 + 2Vy + V = 0$$

și are două rădăcini negative cînd $V < V_1$.

Ecuația (3) are două soluții acceptabile:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{lV_1}{hV_1+lV},\quad x=2\operatorname{arc\,tg}\frac{lV_1}{hV_1+lV}$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0 \qquad x=0°$$

cînd $V>V_1$

și o singură soluție acceptabilă $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0$, $x=0°$, cînd $V<V_1$.

Înotătorul poate pleca spre C, fie sub un unghi îndreptat împotriva curentului cînd $V>V_1$, fie numai direct spre C (unghi zero) cînd $V<V_1$.

Exemplificări numerice

1° $V=2\frac{m}{s}$, $V_1=1{,}5\frac{m}{s}$, $h=120\ m$, $l=100\ m$

$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{277}{380}$, $x\approx 72°10'$; $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{33}{380}$, $x\approx 9°56'$

2° $V=2\ \frac{m}{s}$, $V_1=1\frac{m}{s}$, $h=300\ m$, $l=100\ m$

$\operatorname{tg}\frac{x}{2}\approx 0{,}69$ $\quad x\approx 69°10'$

$\operatorname{tg}\frac{x}{2}\approx -0{,}29$ $\quad x\approx -32°20'$

} ambele acceptabile

3° $V=1\frac{m}{s}$, $V_1=2\frac{m}{s}$, $h=20\ m$, $l=100\ m$

$\operatorname{tg}\frac{x}{2}\approx\frac{11}{70}$ $\quad x\approx 18°$ $\quad$ acceptabilă

$\operatorname{tg}\frac{x}{2}\approx 2{,}7$ $\quad x\approx 138°40'$ $\quad$ neacceptabilă

4° $V=1\frac{m}{s}$, $V_1=2\frac{m}{s}$, $h=60$ m, $l=100\ m$

$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\frac{1}{22}$ $\quad x \approx -5°40'$ acceptabilă

$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{41}{22}$ $\quad x \approx 123°30'$ neacceptabilă

5° $V = 2\frac{m}{s}$, $V_1 = 1{,}2\frac{m}{s}$, $h = 80\ m$, $l = 60\ m$

$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{3}$ $\quad x \approx 36°40'$ acceptabilă

6° a) $V = 2\frac{m}{s}$, $V_1 = 1\frac{m}{s}$, $h = 200\ m$, $l = 100\ m$

$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$ $\quad x = 0°$

$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{4}$ $\quad x \approx 28°$

} ambele acceptabile

b) $V = 1\frac{m}{s}$, $V_1 = 2\frac{m}{s}$, $h = 50\ m$, $l = 100\ m$

$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$ $\quad x = 0°$ acceptabilă

$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$ $\quad x = 90°$ inacceptabilă

Problema f/13. Fie G centrul de greutate al barei $\overline{AB}$. Vasul fiind neted, asupra barei $\overline{AB}$ vor lucra următoarele forţe: $\overline{P}$ greutatea barei orientată vertical în jos; $\overline{R_1}$ reacţiunea emisferei asupra barei orientată radial; $\overline{R_2}$ reacţiunea emisferei asupra barei orientată perpendicular pe $\overline{AB}$. Proiectînd aceste forţe pe $\overline{AB}$ şi $\overline{GD}$, găsim:

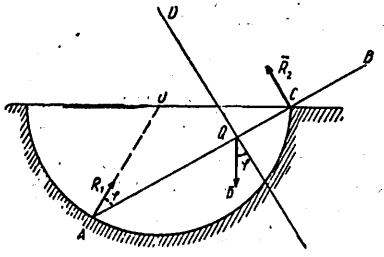


Fig. 15

$R_1 \cos \varphi - P \sin \varphi = 0$

$R_2 - P \cos \varphi + R_1 \sin \varphi = 0$

De aci scoatem

$R_1 = P \operatorname{tg} \varphi$

$R_2 = \frac{P \cos 2\varphi}{\cos \varphi}$

Luînd momentul față de punctul G, se găsește:
$R_1 \cdot a \sin \varphi - R_2 \cdot \overline{CG} = 0$, dar $\overline{CG} = \overline{AC} - a = 2r \cos \varphi - a$.
Prin înlocuire obținem

$$\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi - (2r \cos \varphi - a) \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi} = 0,$$

de unde $4r \cos^2 \varphi - a \cos \varphi - 2r = 0$.

Soluțiile ecuației sînt:

$$\cos \varphi = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 32 r^2}}{8 r}$$

Problema admite o singură soluție, căci soluția negativă n-are semnificație în cazul problemei.

Echilibrul este posibil în cazul $a + \sqrt{a^2 + 32 r^2} \leqslant 8r$, adică $a \leqslant 2r$.

Problema f/14. Fie IN și $I'N'$ normalele pe $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$ și K punctul lor de intersecție, i și r, i' și r' unghiurile de incidență și refracție în I și I'. Avem $\sin i = n \sin r$, $\sin i' = n \sin r'$. Unghiurile i' și A sînt egale, pentru că au laturile perpendiculare; în patrulaterul $AIKI'$, unghiurile A și K sînt suplementare, pentru că celelalte două unghiuri sînt drepte; în fine, în triunghiu IKI' unghiurile sînt egale cu r, k, r', deci: $i = A$, $A + K = 180°$, $r + K + r' = 180°$, de unde deducem:

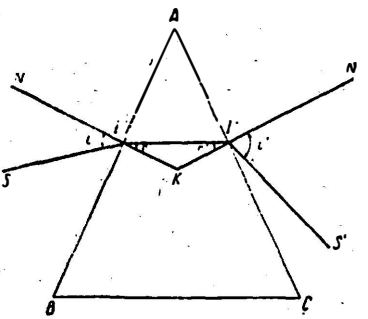


Fig. 16

$$\sin i = n \sin r, \quad \sin A = n \sin r', \quad r + r' = A.$$

Dacă eliminăm pe r și r' din aceste trei ecuații, obținem:

$$\sin^2 i + \sin 2A \sin i - (n^2 - 1) \sin^2 A = 0,$$

adică o ecuație de gradul al doilea în raport cu $\sin i$. Rădăcinile ecuației sînt reale și de semne contrarii; singura rădăcină pozitivă convine problemei, dacă este mai mică decît unitatea, adică

$$n^2 < (1 + \sin 2A + \sin^2 A) : \sin^2 A.$$

În cazul problemei, $A = 45°$, $n^2 < 5$. Condiția este îndeplinită, pentru că $n = 3 : 2$. Ecuația care determină unghiul de incidență este $\sin^2 i + \sin i \cdot 5 : 8 = 0$,

a cărei rădăcină pozitivă este:

$$\sin i = (-1 + \sqrt{3,5}) : 2 \approx 0,435,$$

de unde deducem unghiul de incidenţă $i \approx 25° 47'$.

Problema f/15. Fie P şi Q forţele date.

Ecuaţia problemei este: $P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos^2 \alpha$ de unde $\cos^2 \alpha - \cos \alpha = 0$ şi soluţia acceptabilă $\alpha = 60°$.

Problema f/16. Se observă pe figură că: $\overline{OS} = \overline{AO} + \overline{BS}$

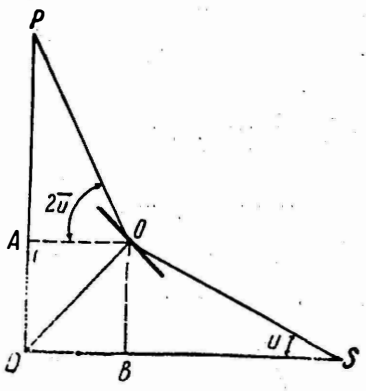


Fig. 17

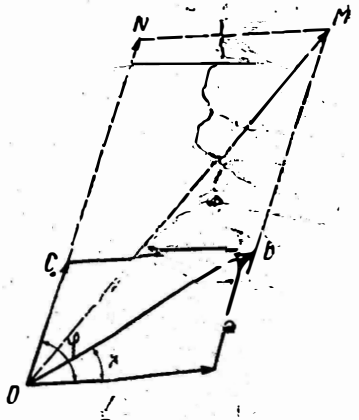


Fig. 18

sau $50 (1 + \sqrt{3}) = \cos 2u + 100 \cos u$, de unde $\cos 2u + \cos u - \frac{1 + \sqrt{3}}{2} = 0$. Prin înlocuirea $\cos 2u = 2 \cos^2 u - 1$ găsim soluţia ce convine problemei, $u = 30°$.

Problema f/17. Din triunghiul OAB scoatem:

$$\frac{P}{\sin (\varphi - x)} = \frac{Q}{\sin x} \qquad (1)$$

La fel, din triunghiul OAB,

$$\frac{P}{\sin (\varphi - 2x)} = \frac{3Q}{\sin 2x} \qquad (2)$$

Eliminînd pe P şi Q între relaţiile (1) şi (2) găsim

$\frac{P}{Q} = \frac{\sin(\varphi - 2x)}{\sin 2x} = \frac{\sin(\varphi - x)}{\sin x}$, de unde ecuaţia trigonometrică

$$\frac{3\sin(\varphi - 2x)}{\sin 2x} = \frac{\sin(\varphi - x)}{\sin x}$$

Pentru rezolvare scriem succesiv

$$\frac{3(\sin\varphi\cos 2x - \cos\varphi\sin 2x)}{\sin 2x} = \frac{\sin\varphi\cos x - \sin x\cos\varphi}{\sin x}$$

$$3\sin\varphi\operatorname{ctg} 2x - 3\cos\varphi = \sin\varphi\operatorname{ctg} x - \cos\varphi$$
$$3\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x = 2\operatorname{ctg}\varphi$$
$$\operatorname{ctg}^2 x - 4\operatorname{ctg}\varphi\operatorname{ctg} x - 3 = 0,$$

de unde $\operatorname{ctg} x = 2\operatorname{ctg}\varphi \pm \sqrt{4\operatorname{ctg}^2\varphi + 3}$.

Soluţia negativă nu corespunde problemei, deoarece

$$2\operatorname{ctg}\varphi - \sqrt{4\operatorname{ctg}^2\varphi + 3} < \operatorname{ctg}\varphi$$

şi atunci ar însemna că $x > \varphi$.

Rămîne deci soluţia $\operatorname{ctg} x = 2\operatorname{ctg}\varphi + \sqrt{4\operatorname{ctg}^2\varphi + 3}$.

În cazurile particulare avem:

1° $\varphi = 90°$ $\quad \operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$; $x = 30°$

2° $\varphi = 45°$ $\quad \operatorname{ctg} x = 2 + \sqrt{7}$; $x \approx 12°15'$

Problema f)18. Scriind că suma momentelor forţelor G şi R faţă de punctul A este nulă, obţinem ecuaţia

$Rp\cos x - Ql\cos 2x = 0$ şi în cazul numeric, $2\cos 2x - \cos x = 0$.

Soluţia acceptabilă este $\cos x = \frac{1+\sqrt{33}}{8}$, de unde $x \approx 32°50'$.

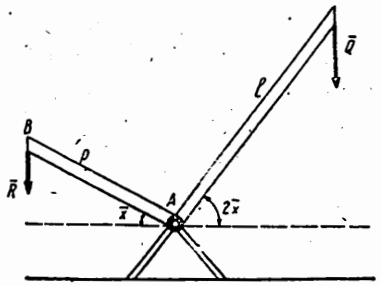


Fig. 19

Problema f/19. Momentul greutății p al barei $\overline{AB}$ față de A este $p\,\overline{O_1M} = p\,l\cos(\varphi - x)$. Momentul greutății $2p$ al barei BC față de A este $2p\,\overline{O_2N} = 2p\,(\overline{BP} - \overline{BQ}) = 2p\,[2l\cos x - 2l\cos(\varphi - x)] = 4pl\,[\cos x - \cos(\varphi - x)]$.

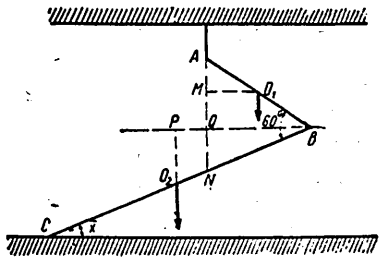


Fig. 20

Cele două momente sînt de sensuri contrare, fiindcă ele tind să rotească sistemul în sensuri opuse.

Scriind că suma acestor momente este nulă (condiție de echilibru), obținem ecuația

$pl\cos(\varphi - x) - 4pl\cdot[\cos x - \cos(\varphi - x)]$ sau

$5\cos(\varphi - x) - 4\cos x = 0$, care ne dă $\operatorname{tg} x = \dfrac{4 - 5\cos\varphi}{5\sin\varphi}$.

Pentru $\varphi = 60°$ găsim $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$, iar $x \approx 19°5'$.

Problema g/1. Forța de-a lungul sforii $\overline{DC}$ ce leagă dinamometrul trebuie să echilibreze forțele de-a lungul sforilor $\overline{DA}$ și $\overline{DB}$.

Deci $\overline{DP}^2 = \overline{DM}^2 + \overline{DN}^2 + 2\,\overline{DM}\cdot\overline{DN}\cos(x+y)$

Deducem $\cos(x + y) = \dfrac{1}{2}$ (1)

Din triunghiul DMP scoatem $\dfrac{\overline{MP}}{\sin x} = \dfrac{\overline{DN}}{\sin y}$

sau, înlocuind, $\dfrac{\sin y}{\sin x} = \dfrac{8}{7}$ (2)

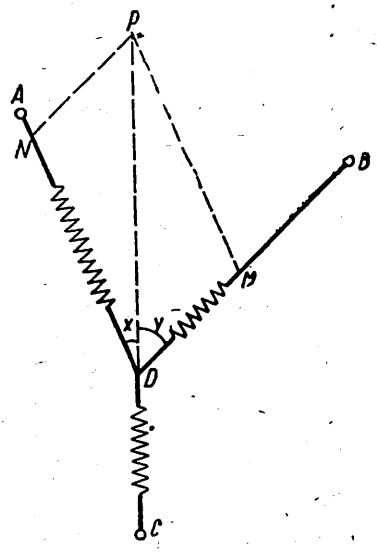


Fig. 21

Din relația (1) deducem $x + y = 60°$.

Din relația (2) avem succesiv $\frac{\sin y - \sin x}{\sin y + \sin x} = \frac{1}{15} \operatorname{tg} \frac{y-x}{2}$.

$\operatorname{ctg} \frac{y+x}{2} = \frac{1}{15} \quad \operatorname{tg} \frac{y-x}{2} = \frac{1}{15\sqrt{3}} \approx 0{,}04$ de unde $y - x = 4°40'$.

Avînd și $y + x = 60°$, găsim soluțiile $\begin{cases} x = 27°40' \\ y = 32°20' \end{cases}$

Problema g/2. Izolînd bara de legături, forțele care acționează asupra ei sînt:

— greutatea proprie P
— reacțiunea în punctul A ($N_A = 2P$)
— reacțiunea în punctul B ($N_B = 2P$)

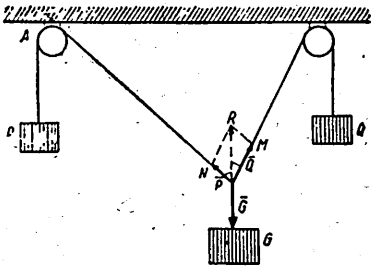


Fig. 22

Scriind că suma proiecțiilor acestor forțe pe orizontală este zero, obținem $N_A \sin \alpha - N_B \sin \beta = 0$ sau, în condițiile problemei, $\sin \alpha - \sin \beta = 0$ (1).

Scriind că suma proiecțiilor pe verticală este zero, avem $N_A \cos \alpha + N_B \cos \beta - P = 0$, de unde $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{2}$ (2).

Din relația (1) deducem $\alpha = \beta$ și, înlocuind în relația (2), găsim $\alpha = \beta = 75°30'$.

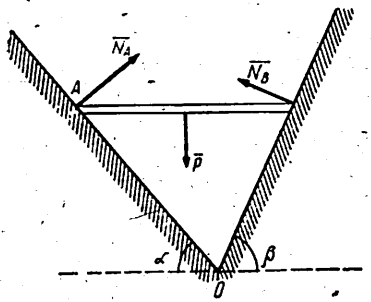


Fig. 23

Problema g/3. Greutatea G trebuie să echilibreze tensiunile de-a lungul firelor. Din triunghiul CMR scoatem

$$\frac{P}{\sin \beta} = \frac{Q}{\sin \alpha} = \frac{G}{\sin (\alpha + \beta)} \quad (1)$$

Primele două rapoarte ne dau:

$$\sin \alpha = \frac{Q}{P} \sin \beta \quad (2),$$

Amplificînd primul raport din relația (1) cu $\cos\alpha$ și al doilea cu $\cos\beta$, avem $\frac{P\cos\alpha + Q\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{G}{\sin(\alpha+\beta)}$, de unde $P\cos\alpha + Q\cos\beta - G = 0$ (3).

Din (2) scoatem $\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{Q^2}{P^2}\sin^2\beta}$ și, înlocuind în ecuația (3), obținem:

$$\sqrt{P^2 - Q^2\sin^2\beta} = G - Q\cos\beta,$$

a cărei soluție este

$$\cos\beta = \frac{G^2 + Q^2 - P^2}{2 \cdot G \cdot Q} = \frac{81 + 36 - 16}{2 \cdot 9 \cdot 6} = 0{,}935,$$

de unde $\beta \approx 20°40'$.

În mod analog se obține:

$$\cos\alpha = \frac{G^2 + P^2 - Q^2}{2 \cdot G \cdot P} = \frac{81 + 16 - 36}{2 \cdot 9 \cdot 4} = 0{,}847,$$

de unde $\alpha = 32°5'$.

Pentru ca problema să admită soluții trebuie ca:

$$-1 \leqslant \cos\beta \leqslant 1 \text{ și } -1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1.$$

Problema h/1. Centrul O de greutate al plăcii se găsește pe axa de simetrie PM (vezi fig. 2). Dacă presupunem că întreaga masă M a plăcii $DCEF$ în formă de trapez isoscel este concentrată în centrul său de greutate O_1 și masa M_2 a plăcii $ABCD$ în centrul O_2, atunci depărtarea PO este dată de relația

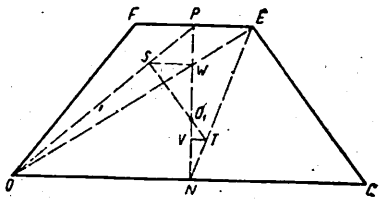


Fig. 24

$$PO = \frac{M_2\,\overline{PO_2} + M_1\,\overline{PO_1}}{M_1 + M_2}$$

În condițiile problemei (placă omogenă și de aceeași secțiune) putem pune:

$$PO = \frac{M_1\overline{PO_1} + M_2\overline{PO_2}}{M_1 + M_2} = \frac{\overline{PO_1} + \frac{M_2}{M_1}PO_2}{1 + \frac{M_2}{M_1}} =$$

$$= \frac{\overline{PO_1} + \frac{\text{aria } ABCD}{\text{aria } DCEF} \cdot \overline{PO_2}}{1 + \frac{\text{aria } ABCD}{\text{aria } DCEF}} \qquad (1)$$

Pentru a determina distanța $\overline{PO_1}$, considerăm placa în formă de trapez (fig. 24). Diagonala $\overline{DE}$ împarte trapezul în două triunghiuri, cu centrele de greutate în S și T, situate pe medianele $\overline{DM}$ și $\overline{EQ}$ la o treime de la bază. Notăm $\overline{DC} = 2a$, $\overline{FE} = 2b$, $\overline{MQ} = i$, $\overline{PM} = I$.

Avem $\overline{SW} = \frac{a}{3}$, $\overline{TV} = \frac{b}{3}$, $\frac{\overline{VO}}{\overline{WO}} = \frac{\overline{TV}}{\overline{SW}} = \frac{b}{a}$

Deducem $\frac{\overline{VO}}{\overline{VO} + \overline{WO}} = \frac{b}{a+b}$; $\frac{\overline{VO}}{\frac{1}{3}i} = \frac{b}{a+b}$; $\overline{VO} = \frac{bi}{3(a+b)}$

$\overline{QO_1} = \frac{1}{3}i + \frac{bi}{3(a+b)} = \frac{(a+2b)i}{3(a+b)}$ și $\overline{PO_1} = \overline{PQ} + \overline{QO_1} = I + \frac{(a+2b)i}{3(a+b)}$

aria $ABCD = 2aI$, aria $DCEF = (a+b)i$.

Înlocuind în relația (1), obținem:

$$\overline{PO} = \frac{\frac{(a+2b)i}{3(a+b)} + I + \frac{I}{2} \cdot \frac{2aI}{(a+b)i}}{1 + \frac{2aI}{(a+b)i}} = \frac{3aI^2 + 3i(a+b)I + (a+2b)i^2}{3[2aI + (a+b)i]}$$

În cazul numeric din figură, $a = 18$, $b = 4$, $I = 48$, $i = 14$. Deci, avem:

$$\overline{PO} = \frac{3 \cdot 18 \cdot 48^2 + 42 \cdot 22 \cdot 48 + 26 \cdot 196}{3(36 \cdot 48 + 22 \cdot 14)} \approx 28{,}86$$

Problema h/2 (vezi fig. 3). Rezistența între punctele B și C este dată de relația :

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_x}+\frac{1}{R_2} \text{ sau } R=\frac{R_2 R_x}{R_2+R_x}$$

Pentru montajul rezistențelor în serie, avem:

$$(1)\ R_x = R_1 + R = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_x}{R_2+R_x}$$

de unde obținem ecuația în R_x

$$R_x^2 - R_1 R_x - R_1 R_2 = 0 \text{ și deci } R_x = \frac{R_1+\sqrt{R_1^2+4R_1R_2}}{2}$$

Socotim numai semnul plus înaintea radicalului, deoarece $R_1^2 + 4R_1R_2 > R_1^2$ și R_x trebuie să fie pozitivă.

$$\text{Mai rezultă că } R_x > \frac{R_1+R_2}{2} \text{ adică } R_x > Ri$$

Dacă $R_2 = \alpha$,din relația $R_x = R_1 + \dfrac{R_x}{1+\dfrac{R_1}{R_2}}$ dedusă din (1) rezultă $R_1 = 0$.

Dacă $R_2 > 0$ avem $R_1 = R_x$, iar dacă $R_1 = 0$ avem $R_2 = \infty$ sau $R_1 = R_2 = R_x = 0$.

$$\frac{V_{AC}}{V_{BC}}=\frac{IR_x}{IR}=\frac{R_x}{R}=\frac{R_2+R_x}{R_2}=1+\frac{R_x}{R_2}=1+\frac{R_1+\sqrt{R_1^2+4R_1R_2}}{2R_2}$$

Problema i/1. Timpul în care primul mobil parcurge distanța AB este $\frac{32}{4} = 8$ ore. Până la jumătatea distanței AB, al doilea mobil are mișcarea $S=\frac{1}{2}gt^2$, de unde $a=\frac{2S}{t^2}$, fiindcă ambele mobile ajung în B în același timp, $S = 16$ și $t = 4$, deci $a=\frac{32}{16}=2$. Dacă y_1 este distanța între cele două mobile, $y_1 =$

$= vt - \dfrac{at^2}{2} = 4t - t^2$.

Trinomul $4t - t^2$, după cum se știe, devine maxim pentru $t = 2$, iar valoarea acestui maxim este 4.

Deci distanța dintre cele două mobile este maximă după două ore de la plecarea primului mobil și este egală cu 4 km.

Problema i/2. Tensiunea de-a lungul porțiunii de fir AC este egală cu greutatea G. Scriind că suma momentelor forțelor față de punctul fix B este zero, avem:

$$P \cdot DB = G \cdot BE$$

de unde $G = P \cdot \dfrac{\overline{DB}}{\overline{BE}}$ (1)

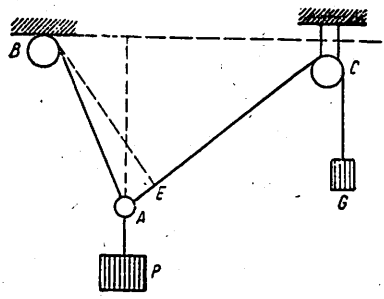


Fig. 25

1° Din triunghiul ABE, găsim

$$\overline{BE} = \overline{AB} \cdot \sin A = 2 \sin 75° = 2 \cdot \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) = \frac{1}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2}).$$

Din teorema cosinusului aplicată triunghiului ABC scoatem

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos A \text{ sau}$$

$$\overline{BC}^2 = 4 + 6 - \frac{4\sqrt{6}}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = 2(2 + \sqrt{3})$$

iar $\overline{BC} = (\sqrt{3} + 1)$ metri.

Din teorema sinusurilor

$$\frac{\overline{AC}}{\sin B} = \frac{\overline{BC}}{\sin 75°}, \text{ de unde } \sin B = \frac{\overline{AC} \sin 75°}{\overline{BC}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{\sqrt{3} + 1} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ adică } \hat{B} = 60°.$$

Din triunghiul ABD găsim $BD = AB \cos B = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ m

Relația (1) devine $G = P \cdot \dfrac{1}{\frac{1}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})} = \dfrac{P}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \approx 0{,}53P$

Înlocuind $P = 10$ kg obținem $G = 5{,}3$ kg.

2° Din teorema sinusurilor aplicată triunghiului ABC scoatem

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\overline{BA}}{\sin C}, \text{ de unde } \sin C=\frac{\overline{BA}\cdot\sin A}{\overline{BC}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ și } \hat{C}=45°.$$

$$\overline{BD}=\overline{AC}\cos C=\sqrt{2}\cos 75°=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1) \text{ metri}$$

$$\overline{BE}=\overline{AB}\sin A=\sqrt{2}\sin 60°=\frac{\sqrt{6}}{2} \text{ metri.}$$

Relația (1) devine

$$G=P\cdot\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)}{\frac{\sqrt{6}}{2}}=P\cdot\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}\approx 0{,}29\ P$$

Făcînd $P=10$ kg aflăm $G\approx 2{,}9$ kg.

3° Din teorema cosinusului aplicată triunghiului ABC scoatem

$$\cos A=\frac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{2\overline{AB}\cdot\overline{AC}}=\frac{3+\sqrt{3}}{3(\sqrt{2}+\sqrt{6})}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

de unde $\hat{A}=45°$.

Și din teorema sinusurilor

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\overline{CA}}{\sin B}, \text{ de unde } \sin B=\frac{\overline{CA}\sin A}{\overline{BC}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

adică $\hat{B}=60°$.

$$\text{Avem } G=P\cdot\frac{\overline{BD}}{\overline{BE}}=P\frac{(\sqrt{3}+1)\frac{1}{2}}{(\sqrt{3}+1)\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}P\approx 0{,}705\ P$$

Făcînd $P = 10$ kg deducem $G \approx 7{,}05$ kg.

Pentru aflarea unghiului A putem întrebuința formula

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$ care, în cazul nostru, devine

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{6}+3)(\sqrt{6}-\sqrt{3}+1)}{4\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

de unde

$$\hat{A} = 45°.$$

CUM DEPRIND PE ELEVI SĂ REZOLVE PROBLEME DE FIZICĂ, DE TEHNICĂ, PROBLEME LEGATE DE VIAȚA ÎNCONJURĂTOARE

CONSTANTIN BORȘ
Școala medie nr. 2
PIATRA-NEAMȚ

Dintre toate ramurile matematicii studiate în școala medie, trigonometria este aceea la care se pot face cele mai multe aplicații practice și prin care se poate rezolva un mare număr de probleme din domeniul fizicii și al tehnicii.

Aceste posibilități pe care le oferă studiul trigonometriei, nu sînt însă valorificate din plin decît după o practică mai îndelungată în predare, în timpul căreia profesorul se străduiește pe de o parte să culeagă un număr suficient de probleme variate din diferite domenii, iar pe de altă parte reușește să îmbine în mod firesc teoria cu aplicațiile ei practice.

În însemnările de față voi trece în revistă concluziile metodice la care am ajuns, după o predare mai îndelungată a trigonometriei în școala medie, cu privire la aplicarea cunoștințelor de trigonometrie la rezolvarea unor probleme practice de topografie și astronomie, cum și a unor importante probleme de fizică.

Ordinea expunerii însemnărilor de față este aceea pe care experiența personală mi-o arată cea mai potrivită. Ea suferă însă, desigur, modificări în legătură cu structura clasei.

I

Pentru adîncirea noțiunilor de trigonometrie, pentru limpezirea lor, practica mi-a arătat că trebuie bine lămurite două noțiuni pe care elevii trebuie să le posede de la studiul fizicii și al geometriei plane:

a) **Noțiunea de segment orientat sau vector**, care, din punct de vedere fizic, reprezintă o mărime caracterizată prin:

1° Punctul de aplicație;
2° Direcția pe care acționează;
3° Sensul în care acționează pe suportul ei;
4° Modulul sau intensitatea ei.

b) **Noţiunea de unghi orientat.** Laturile unghiului fiind date într-o anumită ordine (ca şi extremităţile segmentelor orientate) adică precizînd *latura origine* şi *latura extremitate*, unghiul poate fi considerat ca „porţiunea de plan" descrisă de latura origine care se roteşte în jurul vîrfului pînă coincide cu latura extremitate. Rotaţia se poate face în sens pozitiv (contrar acelor ceasornicului) sau negativ (în acelaşi sens cu acele ceasornicului).

Dacă laturile unghiului sînt semidrepte orientate (axe) unghiul este egal cu porţiunea parcursă *în sensul pozitiv* de latura origine $\overrightarrow{Ox}$ ca să coincidă cu latura extremitate $\overrightarrow{OF}$ adică, mai pe scurt *unghiul dintre direcţiile pozitive (indicate de săgeţi) ale celor două axe.*

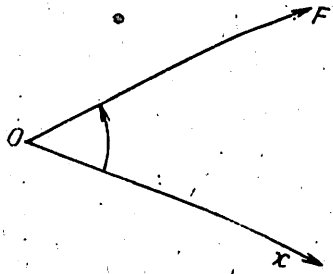


Fig. 1

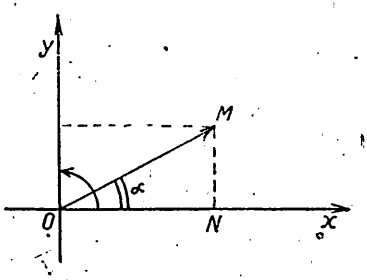


Fig. 2

c) **Orientarea planului cu ajutorul sistemului de coordonate.** Fiind dat sistemul de axe de coordonate rectangulare xOy, considerînd ca *latura origine*, a unghiului xOy, semiaxa pozitivă Ox şi ca *latură extremitate* semiaxa pozitivă Oy, planul *devine orientat*, stabilind ca sens pozitiv sensul direct (în figură este indicat prin săgeata curbilinie).

Orice unghi din plan, orientat ca şi unghiul xOy se zice de *sens pozitiv*. În legătură cu această problemă arăt elevilor şi o interpretare simplă a funcţiilor trigonometrice: dacă $OM = 1$ atunci $\cos \alpha = a$, $\sin \alpha = b$, adică sinusul şi cosinusul unghiului sînt abscisa şi ordonata punctului M situat pe cercul trigonometric.

Cu aceste noţiuni recapitulate şi bine însuşite de către elevi, după definiţia funcţiilor trigonometrice ale sumei, diferenţei, ale multiplilor unui arc, la formulele împărţirii arcelor etc. fac multe aplicaţii la fizică în legătură cu reprezentarea vectorială a forţelor.

După aceste aplicaţii, calculul formal care urmează este privit cu interes, tendinţa de mecanizare este spulberată, fiindcă elevii sînt convinşi că toate aceste calcule sînt necesare cel puţin

pentru a putea afla diferite elemente ale forțelor, sau pentru a rezolva probleme practice de mecanică.

Încep prin teorema fundamentală: Proiecția unei forțe F pe o axă, este egală cu produsul dintre intensitatea forței și cosinusul unghiului pe care forța îl face cu sensul pozitiv al axei.

$\boxed{\overline{F}_x = \overline{F}\cos\varphi}$ în care F este intensitatea forței $\overline{F}$.

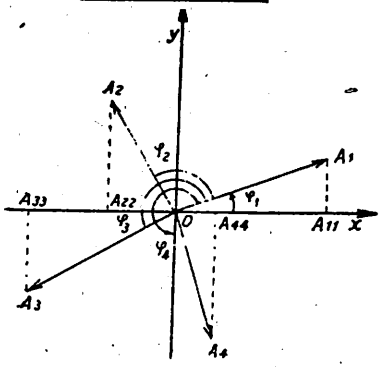


Fig. 3

După pregătirea făcută, elevii demonstrează cu ușurință teorema, în cazul cînd punctul de aplicație al forței este în originea O a sistemului de axe de coordonate. Consider apoi cazurile în care extremitatea forței $\overline{F}$ este în fiecare din celelalte trei cadrane, cerînd elevilor să determine proiecțiile forței pe Ox în orice cadran (ținînd seama că proiecțiile pe Ox ale punctelor A_2 și A_3 din cadranele II și III sînt de sens contrar sensului pozitiv al axei Ox).

$$OA_{11} = pr_{ox}\,\overline{OA}_1 = F\cos\varphi_1$$
$$OA_{22} = pr_{ox}\,\overline{OA}_2 = -F\cos(\pi-\varphi_2) = F\cos\varphi_2$$
$$OA_{33} = pr_{ox}\,\overline{OA}_3 = -F\cos(\varphi_3-\pi) = F\cos\varphi_3$$
$$OA_{44} = pr_{ox}\,\overline{OA}_4 = F\cos(2\pi-\varphi_4) = F\cos\varphi_4$$

Este foarte important ca elevii să observe că aceste calcule sînt o aplicare a reducerii arcelor la primul cadran și că în fiecare caz unghiul este socotit în sens pozitiv și format de forță cu sensul pozitiv al axei.

Pentru o însușire mai temeinică, pun elevii să proiecteze forțele și pe axa Oy:

$$pr_{oy}\,OA_1 = F\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_1\right) = F\sin\varphi_1$$

$$pr_{oy}\,OA_2 = F\cos\left(\varphi_2-\frac{\pi}{2}\right) = F\sin\varphi_2$$

$$pr_{oy}\,OA_3 = F\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\varphi_3\right) = F\sin\varphi_3$$

$$pr_{oy}\,OA_4 = F\cos\left(\varphi_4-\frac{3\pi}{2}\right) = F\sin\varphi_4$$

Remarcabile pentru adîncirea teoremei sînt şi cazurile particulare cînd forţa $\overline{F}$ este situată pe axele de coordonate. Dacă $\varphi = 0$ forţa $\overline{F}$ este situată pe Ox şi are acelaşi sens cu Ox; dacă $\varphi = \pi$, forţa este situată pe Ox şi de sens contrar; dacă $\varphi = \frac{\pi}{2}$ sau $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, forţa este situată pe Oy respectiv de acelaşi sens sau de sens contrar cu Oy. Elevii deduc cu uşurinţă că în aceste cazuri proiecţiile forţei pe Ox sînt respectiv:

$$F_x = F \cdot \cos 0 = F;\ F_x = F \cdot \cos \pi = -F$$

$$F_x = F \cdot \cos \frac{\pi}{2} = F \cdot 0 = 0;\ F_x = F \cdot \cos \frac{3\pi}{2} = F \cdot 0 = 0$$

La fel calculez şi proiecţiile pe Oy.

În cazul proiecţiei unei forţe cînd punctul de aplicaţie este într-un punct O' oarecare din plan, arăt elevilor că problema se reduce la cea precedentă ducînd prin punctul O' paralele la axele de coordonate.

Proiecţiile pe axele Ox, Oy sînt egale cu acelea pe axele $O'x'$, $O'y'$ şi unghiul făcut de forţă cu sensul pozitiv al axei Ox egal cu unghiul făcut de forţă cu sensul pozitiv al axei $O'x'$. Repet cu elevii şi cazurile cînd extremitatea forţei este în fiecare cadran al axelor $x'O'y'$. De exemplu, dacă extremitatea forţei este în cadranul $x'O'y'$ şi (a, b) sînt coordonatele punctului de aplicaţie ale forţei se deduce că proiecţiile pe Ox şi Oy sînt respectiv:

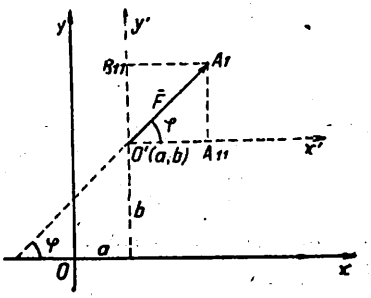


Fig. 4

$$pr_{o'x'} \overline{F} = O'A_{11} = F \cos \varphi = pr_{ox} \overline{F}$$

$$pr_{o'y'} \overline{F} = O'B_{11} = F \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = F \sin \varphi = pr_{oy} \overline{F}$$

Tot pentru a uşura înţelegerea şi rezolvarea aplicaţiilor ulterioare, propun elevilor şi exerciţii ca în figura alăturată şi insist să înţeleagă că în acest caz unghiul făcut de *direcţia forţei cu sensul pozitiv al axei Ox* este $x'O_1A$ în sensul săgeţii curbilinii şi egal cu unghiul xO_2A_1 în sensul săgeţii curbilinii.

Pentru că este util în practică arăt elevilor că, în acest caz, unghiurile indicate de săgeţile curbilinii pot fi înlocuite prin unghiul de sens negativ $x'O_1A$ sau xO_2A_1 căci acest unghi este $\widehat{x'O_1A} = 2\pi - \widehat{x'O_1A}$ (săgeţile curbilinii indicînd sensurile unghiului). Rezultă $\cos(\widehat{x'O_1A}) = \cos(2\pi - \widehat{x'O_1A}) = \cos(\widehat{x'O_1A})$

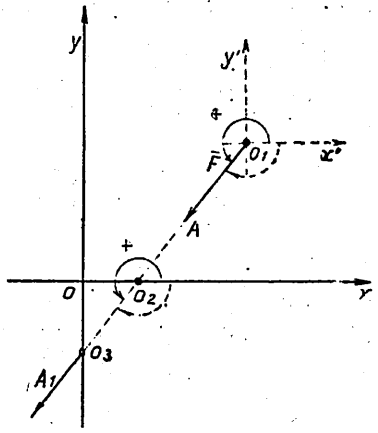


Fig. 5

ceea ce nu alterează valoarea proiecţiei forţei. În acelaşi fel pentru proiecţia pe Oy se remarcă:

$$\cos(\widehat{AO_1y'}) = \cos(\widehat{AO_1y'}) = \cos(A_1O_3y).$$

Ca aplicaţie, sau temă pentru acasă, propun elevilor să afle proiecţiile forţei pe Ox (şi pe Oy) în situaţiile din figura 6. Remarc, încă o dată, că unghiul φ din teorema proiecţiei este unghiul dintre *forţă* şi *sensul pozitiv al axei de proiecţie*.

După însuşirea definiţiei proiecţiei unei forţe, trec la aplicaţii, care constau în determinarea elementelor necunoscute ale unei forţe, în cazul cînd sînt date unele din elementele forţei.

De obicei, sistematizez această problemă (importantă pentru aplicaţiile viitoare) în mai multe cazuri:

1. Fiind dată o forţă $\bar{F}$ cu punctul de aplicaţie O, de intensitate cunoscută F şi unghiul φ făcut de direcţia ei cu sensul pozitiv al axei Ox, să se afle poziţia extremităţii forţei (adică coordonatele extremităţii ei). Cazuri particulare:

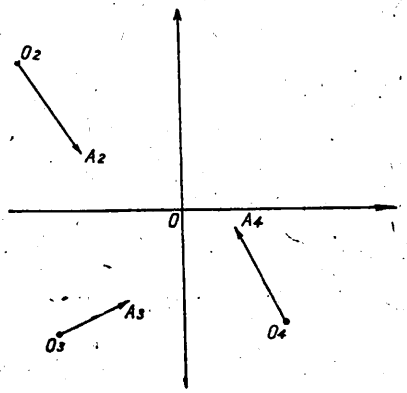


Fig. 6

$F = 3$ kgf; $\varphi = 30°$ ($\varphi = 120°$; $\varphi = 215°$).

Elevii deduc cu ușurință din triunghiul dreptunghi $OA'A$ (ei trebuie conduși să rețină acest lucru) că proiecțiile forței pe axe sînt chiar coordonatele extremității

(1) $$\boxed{X = F\cos\varphi\,;\ Y = F\sin\varphi}$$

și că în cazul particular $F = 1$ kg proiecțiile (sau coordonatele extremității forței) sînt chiar cosinusul și sinusul unghiului format de forță cu sensul pozitiv al axei Ox.

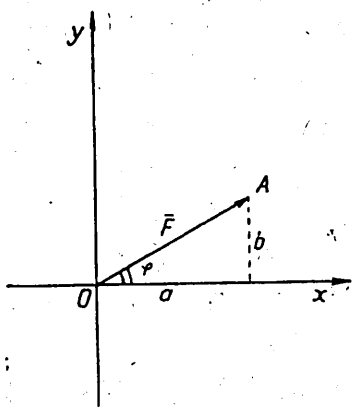


Fig. 7

$$x = \cos\varphi\ ;\ y = \sin\varphi$$

Pentru $F = 3$ kgf și $\varphi = 30°$, 120°, 215° se obține

$$X = 3\cos 30° = \frac{3\sqrt{3}}{2};\ Y = 3\sin 30° = \frac{3}{2}$$

$$X = 3\cos 120° = -3\cos 60° = -\frac{3}{2};$$

$$Y = 3\sin 120° = 3\sin 60° = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$X = 3\cos 215° = -3\cos 45° = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$Y = 3\sin 215° = -3\sin 45° = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Elevii reprezintă grafic, la anumită scară, fiecare din rezultatele obținute în cazurile particulare.

Din exemple numeroase elevii vor reține și cum se determină poziția extremității forței față de axe (care sînt cei doi diametri perpendiculari ai cercului pe care s-au interpretat funcțiile trigonometrice) și că proiecția pe axă este pozitivă sau negativă după cum sensul forței este îndreptat sau nu spre sensul pozitiv al axei. Acest caz se intuiește prin reprezentările grafice făcute în cazurile particulare. Ele consolidează cunoștințele despre variația funcțiilor trigonometrice. Cu aceste aplicații elevii încep să-și

întărească convingerea despre utilitatea studiului funcțiilor trigonometrice, a posibilității aplicării lor în probleme practice.

Înainte de a trece la aplicații de altă natură reiau aplicația sub aspectul mai general cînd punctul de aplicație al forței este într-un punct oarecare A_0 de coordonate (a_0, b_0).

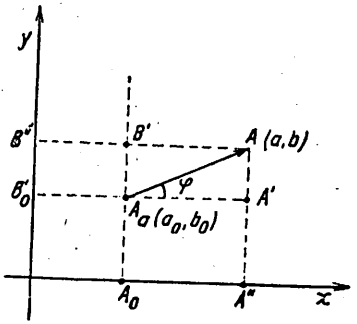


Fig. 8

Elevii reduc cu ușurință această problemă la precedenta (cînd este posibil să le subliniem acest fapt care ajută munca creatoare a elevilor) și obțin: $x = \overline{OA''} = \overline{OA'_0} + \overline{A'_0 A''}$;

$y = \overline{OB''} = OB'_0 + \overline{B'_0 B''}$ adică:

$$\begin{cases} x = a_0 + F \cdot \cos\varphi \\ y = b_0 + F \cdot \sin\varphi \end{cases} \quad (1)$$

Rezolv cu elevii și cazurile particulare ale problemei luînd originea forțelor de exemplu în punctul A_0 $(-1,2)$. Folosind valorile proiecțiilor în cazul forței cu punctul de aplicație în O, se deduce din (1):

$$x = -1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$y = 2 - \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ etc.}$$

2. Acum se poate trece la următoarea problemă:

Să se determine elementele forței $\overline{F} = A_0A$, *cunoscînd coordonatele punctului de aplicație* A_0 (a_0, b_0) *și ale extremității forței* A (a, b).

De obicei tratez în prealabil problema mai simplă, cînd punctul de aplicație este în origine, după care elevii rezolvă ușor pe cea generală.

În cazul general se deduce (din triunghiul dreptunghic $A_0 A' A$):

$$F^2 = \overline{A'_0A^2} = \overline{A_0A'^2} + \overline{A'A^2}$$

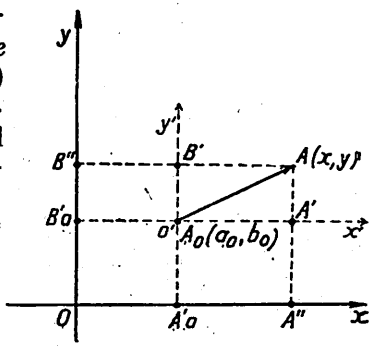


Fig. 9

$$(2)\qquad \boxed{F = \sqrt{(a-a_0)^2 + (b-b_0)^2} = \sqrt{X^2+Y^2}}$$

Elevii au dedus singuri:

$$X = AA' = A_0' A'' = a - a_0$$
$$Y = AB' = B_0' B'' = b - b_0$$

Formula (2) determină intensitatea forței. După obținerea formulei (2) întreb pe elevi cum regăsesc formula în cazul particular cînd punctul de aplicație al forței A_0 este în O.

Ei deduc imediat că:

$$a_0 = b_0 = 0 \text{ deci}$$

$$(2')\qquad \boxed{F = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Pentru determinarea direcției forței, din același triunghi dreptunghi avem:

$$(3)\qquad \boxed{\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{A_0A'}{A_0A} = \frac{a-a_0}{\sqrt{(a-a_0)^2+(b-b_0)^2}} = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}} \\ \sin\varphi &= \frac{A'A}{A_0A} = \frac{b-b_0}{\sqrt{(a+a_0)^2+(b-b_0)^2}} = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}} \\ \operatorname{tg}\varphi &= \frac{Y}{X} \end{aligned}}$$

În cazul particular cînd punctul de aplicație este în origine, adică $a_0 = b_0 = 0$, direcția φ a forței este dată de formulele:

$$(3')\qquad \boxed{\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\varphi &= \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \operatorname{tg}\varphi &= \frac{b}{a} \end{aligned}}$$

Este foarte important ca această problemă să fie intuită în cazuri particulare din care să reiasă necesitatea folosirii simultane a relațiilor (3) și (3'). Se va arăta de exemplu că pentru o forță cu punctul de aplicație în origine și cu extremitatea în punctul A (1,—1) nu e suficientă o singură relație (3') căci

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ar conduce la două direcții $\varphi = 45°$ dar și $\varphi = 315°$ (cosinusul având aceeași valoare). Este necesară folosirea celeilalte relații (3') $\sin \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ care determină, cu prima, direcția (și totodată și sensul) forței. În legătură cu această problemă, fac cît mai numeroase aplicații numerice. Elevii își adîncesc astfel cu interes și deci sistematic și temeinic cunoștințele fundamentale despre funcțiile trigonometrice.

II

Organizarea predării capitolului: „Reprezentarea grafică a funcțiilor trigonometrice" o fac din 1953, folosind sugestiile articolului „Obiectul trigonometriei" de Eugen Rusu, din 1953 și Metodica lui V. Bradis apărută în același an.

La acest capitol în lecția de introducere, caut să motivez elevilor necesitatea studiului funcțiilor trigonometrice și a reprezentărilor lor grafice prin aplicarea lor în probleme practice de fizică, astronomie, tehnică ș.a.m.d.

În ora care precede predarea graficului funcțiunilor trigonometrice, recapitulez mișcarea uniform variată al cărei studiu conduce la necesitatea de a reprezenta grafic funcția de gradul II și funcția liniară.

Problema I. *Să se studieze mișcarea rectilinie uniform accelerată definită prin ecuația:*

$$s = 5\,t^2 - 2\,t + 3$$

Soluție. Amintesc elevilor că în ecuația generală

$$s = \frac{1}{2}\,at^2 + v_0\,t + s_0$$

a este accelerația mișcării, v_0 și s_0 viteza și spațiul inițial, iar viteza la un moment dat

$$v = at + v_0$$

și că mișcarea este întîrziată dacă viteza și accelerația sînt de sens contrar ($va < 0$) și *accelerată* dacă viteza și accelerația sînt de același sens ($va > 0$).

În cazul problemei avem

$a = 10\ cm/s^2$; $v_0 = -2\ cm/s$; $s_0 = 3\ cm$ și viteza $v = 10t - 2$

Reprezentarea grafică a funcțiilor s și v permite studiul mișcării, adică determinarea spațiului, a vitezei și a felului mișcării la un moment dat:

t	$-\infty$		0		0,2		$+\infty$
s	$+\infty$	↘	3	↘	2,8 *minim*	↗	$+\infty$
v	$-\infty$	↗	-2	↗	0	↗	$+\infty$
a		+		+		+	
av		−		−		+	
	mișcare întîrziată				mobilul se oprește		mișcare accelerată

Pe grafic studiul mișcării devine intuitiv; obișnuit desenez diagramele cu culori diferite: o culoare pentru diagrama spațiului și altele pentru viteză și accelerație; cînd $t = 0{,}2$ s mobilul se oprește și își schimbă sensul mișcării: pînă la $t = 0{,}2$ (fig. 10) mișcarea este întîrziată, apoi accelerată.

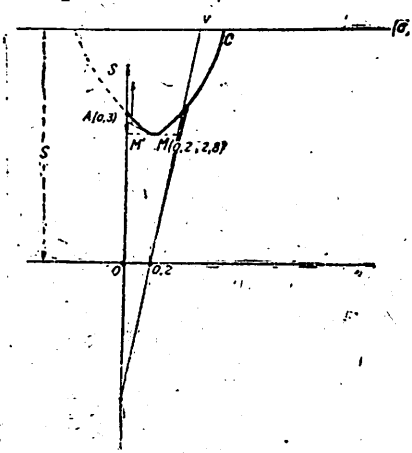


Fig 10

Socotind că mobilul se mișcă pe Os plecînd din A la $t = 0$ ($OA = 3$) ajunge pînă în M' ($OM' = 2{,}8$) cu mișcarea întîrziată și apoi din M' se întoarce cu mișcare accelerată. Graficul permite aflarea spațiului și vitezei pentru fiecare valoare a lui t.

Problema II. *Două corpuri sînt aruncate vertical în sus cu o*

viteză de 30 m/s la un interval de 3 secunde. După cît timp și la ce înălțime se vor întîlni?

Soluție. Însemnînd cu s_1 și s_2 abscisele traiectoriilor celor două corpuri, ecuațiile sînt respectiv

$$s_1 = \frac{-1}{2} gt^2 + 30\,t$$

$$s_2 = \frac{-1}{2} g\,(t-3)^2 + 30\,(t-3)$$

Reprezint grafic cele două parabole calculînd, pentru prima, punctele de intersecție cu axa Ot, deci pentru $s_1 = 0$.

$$t(gt - 60) = 0;\ t_1 = 0;\ t_2 = \frac{60}{g}$$

și maximul $t_m = \frac{-b}{2a} = \frac{30}{g}$; $s_m = \frac{30^2}{2g}$

Înlocuind pe g cu 9,81 m/s² obținem valorile care conduc la reprezentarea grafică a primei parabole: a doua se obține din prima printr-o translație paralelă cu axa Ot de amplitudine 3. Timpul și locul întîlnirii sînt date pe grafic de valorile coordonatelor punctului A de intersecție a celor două diagrame (fig. 11)

$$t \approx 4{,}50\,s\ ;\ s \approx 34{,}9\ \text{m}.$$

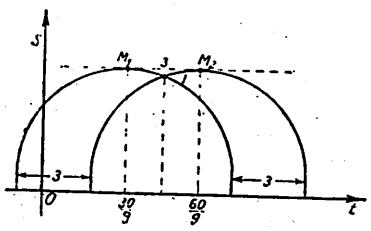


Fig. 11

Deși scopul lecției este de a reaminti elevilor ajutorul pe care reprezentarea grafică a trinomului îl aduce studiului mișcării uniform variate, verific cu elevii rezultatele aflate pe grafic calculînd t din ecuația $s_1 - s_2$ care determină momentul întîlnirii corpurilor.

Atrag iarăși atenția elevilor că graficele realizate cu atenție, pe hîrtie milimetrică, conduc, în multe probleme practice, la rezultate cu aproximații satisfăcătoare.

În ora următoare reiau problema necesității studiului reprezentării funcțiilor trigonometrice, legată de problema oscilațiilor armonice.

Recapitulez pentru aceasta unele chestiuni, cu privire la mișcarea circulară a unui punct M (fig. 12), cunoscute de elevi din fizică.

Dacă punctul M descrie semicercul AMB în sensul indicat de săgeată, proiecția N a lui M pe Ox descrie diametrul AB al cercului, de la A la B; cînd punctul M descrie, în același sens, semicercul $BM'A$ punctul N descrie diametrul BA, de la B la A.

Dacă punctul M se mișcă continuu pe cerc, punctul N descrie pe Ox o mișcare periodică, *mișcarea rectilinie oscilatorie armonică*. A afla legile acestei mișcări înseamă a stabili:

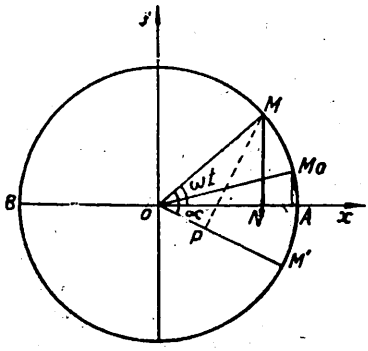


Fig. 12

a) Relația între spațiul descris de punctul N (adică poziția lui pe AB) și timpul corespunzător.

b) Relația între viteza v_x a punctului N și timpul corespunzător.

c) Relația între accelerația γ_x a punctului N și timpul corespunzător.

Să presupunem că la momentul inițial $t = 0$ punctul N se află în A. Dacă ω este viteza unghiulară a punctului M (adică unghiul descris în unitatea de timp), la momentul oarecare t, unghiul AOM, care determină poziția punctului M în mișcarea circulară, este ωt (măsurat în radiani).

a) Poziția punctului N este determinată de segmentul $x = ON$, care se obține din triunghiul ONM:

$$x = r \cdot \cos \omega t$$

în care $r = \overline{OM}$. Dacă punctul M s-ar afla la momentul inițial într-un punct oarecare M_0 așa fel ca raza lui vectoare OM_0 să facă cu sensul pozitiv al axei Ox unghiul α, ecuația care determină poziția proiecției punctului M pe diametrul OM_0 se obține însemnînd $OP = x$.

Deci:

$$\boxed{x = r \cos (\omega t + \alpha)}$$

Această ecuație exprimă sub o formă mai generală legea mișcării oscilatorii. Distanța $OP = x$ se numește elongație, iar constantele r, ω, α se numesc respectiv: *amplitudinea* mișcării, *pulsația*, *diferența de fază*.

Argumentul $\omega t + \alpha$ se numește *faza mișcării*, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ *perioada* mișcării.

Cazuri particulare:

1° Dacă $r = 1$; $\omega = 1$ rad/s.; $\alpha = 0$, ecuația (1) se reduce la (2) $x = \cos t$

2° Dacă $\gamma = 1$; $\alpha = 0$, legea mișcării este:

$$(3)\quad x = \cos \omega t$$

3° Dacă $\alpha = 0$, avem:

$$(4)\quad x = \gamma \cos \omega t$$

Rezultă că studiul mișcării oscilatorii armonice face necesară reprezentarea grafică a funcțiilor sinusoidale*, exprimate prin ecuațiile : (1), (2), (3), (4). Ordinea în care reprezint grafic aceste funcții este dată mai jos.

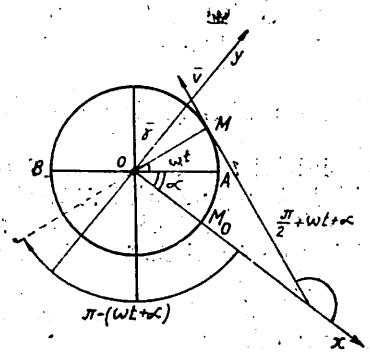


Fig. 13

b) Pentru a obține viteza în funcție de timp, proiectez (așa cum am arătat în cap.I) vectorul $\overline{V}$ pe axa Ox și obțin: (fig. 13) $V_x = V \cos\left(\frac{\pi}{2} + \omega t + \alpha\right) =$ $= -V \sin(\omega t + \alpha)$ dar $V = \omega r$ și deci:

$$(1')\quad \boxed{V_x = -\omega r \sin(\omega t + \alpha)}$$

c) În același fel proiectînd vectorul accelerației γ pe axa Ox obținem: $\gamma_x = \cos[\pi - (\omega t + \alpha)] = -\gamma \cos(\omega t + \alpha)$ în care $\gamma = \omega^2 R$ și deci:

$$(1'')\quad \boxed{\gamma_x = -\omega^2 r \cos(\omega t + \alpha)}$$

Elevii deduc prin compararea relațiilor (1') și (1''), proprietatea că în mișcarea rectilinie oscilatorie armonică mărimea

* Elevii înțeleg această denumire, căci $\cos A = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \hat{A}\right)$

accelerației este proporțională și de sens contrar cu elongația, adică $\gamma = -\omega^2 x$, accelerația fiind mereu îndreptată spre centrul de oscilație O în care se anulează. Conform legii fundamentale a mecanicii $F = -m\omega^2 x$, intensitatea forței este proporțională cu elongația și forța este îndreptată spre centrul de oscilație.

Închei această pregătire arătînd că mișcarea oscilatorie se întîlnește des în fizică — în mecanică și acustică, în optică și electricitate, la studiul fenomenelor periodice.

Prin această introducere este cîștigat interesul elevilor pentru reprezentarea grafică a funcțiunilor trigonometrice.

Reprezentarea sinusoidei o fac treptat, trecînd prin formele (2), (3), (4) la forma generală (1):

a) Reprezint în primul rînd funcția

$$y = \sin x$$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$y = \sin x$	0	↗	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	0	↘	-1	↗	0
$y = \sin 2x$	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0		0		0
$y = \sin \frac{x}{2}$	0		↗		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		↗		1	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	0

precizînd alegerea unității de măsură și făcînd tabloul de variație în care trec și alte funcțiuni cu argumentele

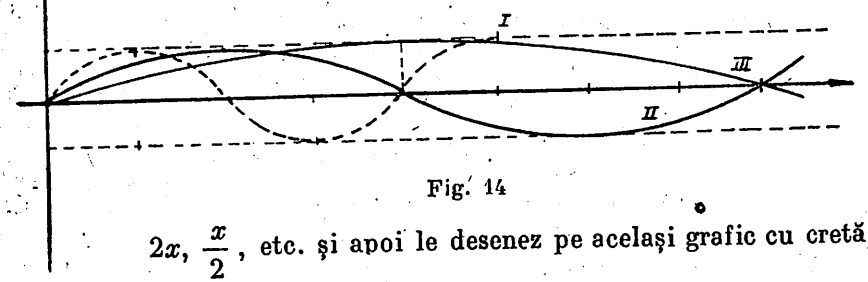


Fig. 14

$2x$, $\frac{x}{2}$, etc. și apoi le desenez pe același grafic cu cretă colorată (fig. 14).

Deprind elevii să calculeze perioada: în primul caz este 2π; în al II-lea $\frac{2\pi}{2}$; în al III-lea caz $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ etc.

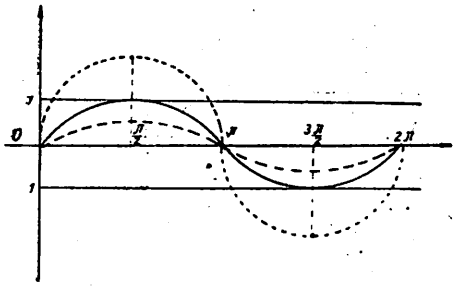


Fig. 15

Observații. După reprentarea funcției $y = \sin x$, înainte de a trece la alte reprezentări, intuiesc cu elevii pe grafic variația sinusoidei.

b) Reprezint apoi sinusoide de forma $y = \sin x$; $y = 2 \sin x$; $y = \frac{1}{2} \sin x$ etc. (fig. 15).

Prin aplicații fac pe elevi să reție că perioada este neschimbată dar, din cauza variației amplitudinii, sinusoida se depărtează sau se apropie de axa *ox*.

c) Reprezint acum sinusoide de forma (4) și discut rezultatul din punct de vedere fizic, calculînd elementele mișcării oscilatorii și citind de pe grafic valoarea elongației la un moment dat (fig. 16).

$y = 2 \sin 2x$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$y = \sin 2x$	0	1	0	−1	0
$y = 2 \sin 2x$	0	2	0	−2	0

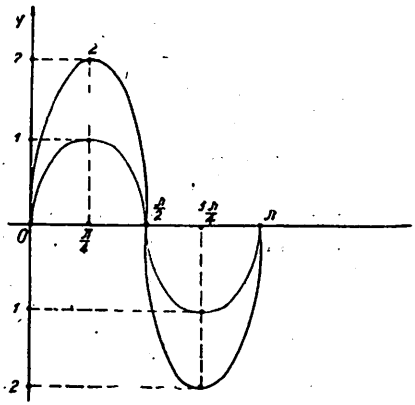


Fig. 16

d) Reprezint apoi sinusoide de forma

$y = \sin (x - 1)$; $y = \sin (x + 1)$ etc.

$y = \sin 2(x - 1)$; $y = \sin (2x + 1)$

după care ajung la forma generală (1).

Pentru reprezentarea funcției $y = \sin(x-1)$ arăt elevilor că ea poate fi redusă la forma cea mai simplă dacă punem $x-1 = x'$ și reprezentăm funcția $y = \sin x'$. Diagrama funcției $y = \sin(x-1)$ se obține din aceasta prin deplasarea absciselor spre dreapta cu o unitate (adică o mișcare de translație) (fig. 17). Reprezint și funcția $y = \sin(x+1)$, pe care elevii o fac singuri, deplasînd abscisele cu o unitate spre stînga, adică dînd sinusoidei $y = \sin x$ o mișcare de translație în sensul negativ al axei Ox cu distanță egală cu 1 (fig. 18).

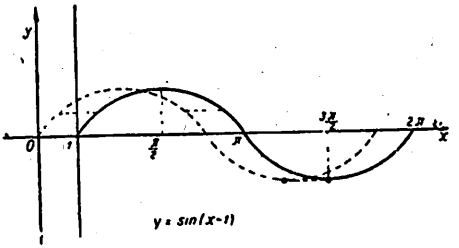


Fig. 17

Observația 1. În această parte a lecției, înainte de a trece la reprezentarea funcțiilor de forma generală (1), arăt elevilor că funcțiile de forma

$$y = \sin(2x+3)$$
$$\text{și } y = \sin 2(x+1{,}5)$$

se reduc la forma precedentă, propunîndu-le ca temă pentru acasă exerciții de acest fel.

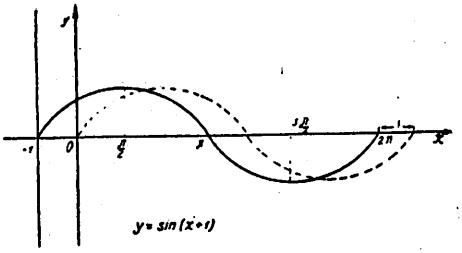


Fig. 18

2. Propun elevilor și exercițiul $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Deduc cu elevii că reprezentarea se obține prin deplasarea sinusoidei spre stînga cu distanța $\frac{\pi}{2}$ și că această curbă este $y = \cos x$, căci $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$, și deci diagrama ei este tot o sinusoidă (fig. 19). Trebuie deci ca elevii să-și însușească bine diferitele forme expuse, legate de mișcările rectilinii oscilatorii armonice.

c) Pentru reprezentarea sinusoidei în cazul general, adică a funcțiilor (1) reprezint încă o funcție particulară, de exemplu: $y = 2\sin(2x+1)$ determinînd în prealabil și elementele mișcării oscilatorii pe care o reprezint: *amplitudinea* $r = 2$; *faza inițială* $\alpha = 1$; *pulsația* $\omega = 2$; *faza mișcării* $x + 1$ *și perioada* $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$.

Scriind funcția sub forma: $y=2\sin 2(x+0{,}5)$ și folosind exemplele precedente, elevii construiesc întîi graficul funcțiunii

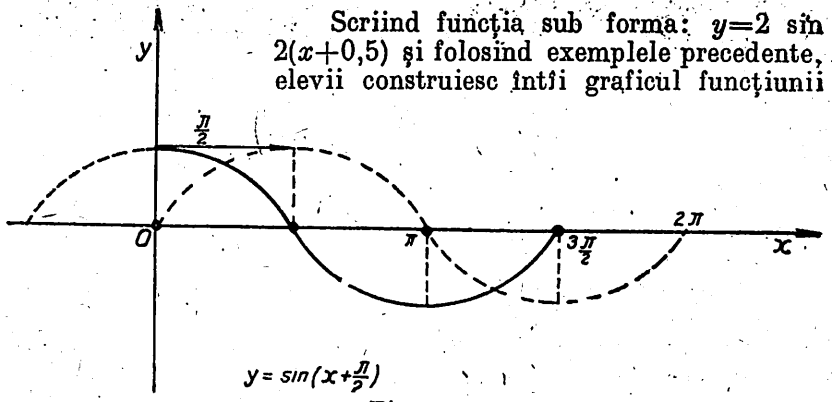


Fig. 19

$y=\sin 2(x+0{,}5)$ și apoi, pe aceeași schemă, graficul funcției date (fig. 20). Efectuez cu elevii în clasă și le propun ca teme pentru acasă exerciții similare după care încep aplicațiile la:

1°. Studiul mișcării oscilatorii armonice.

2°. Rezolvarea ecuațiilor trigonometrice simple și a ecuațiilor transcendente — ecuația lui Kepler — (în cadrul cercului).

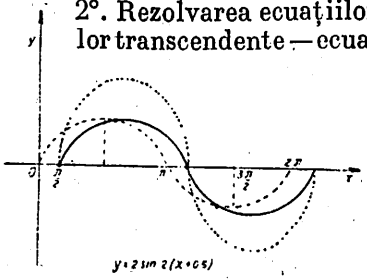


Fig. 20

3°. Rezolvarea inecuațiilor simple (în cadrul cercului).

4°. Compunerea mișcărilor oscilatorii (în cadrul cercului).

P r o b l e m a I. *Să se studieze mișcarea oscilatorie armonică*:

$$x = 3\cos(2t - 3)$$

Soluție. A studia mișcarea înseamnă a determina, la un moment dat, poziția, viteza și accelerația mobilului.

Elementele mișcării date sînt: $\omega = 2$ rad/sec. $\alpha = -3$ rad; $r = 3$ cm; $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$. Viteza și accelerația sînt date de (1′) și (1″)*

* Arăt elevilor că în această problemă ecuația elongației este dată sub forma $y=\gamma\cos(\omega t+\alpha)$ care se obține proiectînd mișcarea circulară pe axa Oy.

Viteza și accelerația sînt respectiv $V_y = -\gamma\omega\sin(\omega t+\alpha)$; $\gamma_y = \gamma\omega^2\cos(\omega t+\alpha)$. Avînd proiecțiile pe două axe putem calcula mărimea vitezei și accelerației în mișcarea circulară:

$$V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \gamma\omega; \quad \gamma = \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} = \gamma\omega^2.$$

$$v_x = -6\sin(2t-3) \qquad \gamma_x = -12\cos(2t-3)$$

Reprezint (ca mai sus) expresiile lui x și v_x pe același grafic și elevii studiază mișcarea. Temele pentru acasă, elevii le fac în carnetele de inginer sau de tehnician, pe hîrtie milimetrică.

Reprezentarea funcției:

$$x = 3\cos(2t-3)$$

o fac analog cu a cosinusului scriind-o sub forma

$$x = 3\cos 2(t-1{,}5)$$

și obțin, amplificînd de 3 ori, ordonatele curbei $x=\cos 2(t-1{,}5)$ care se obține contractînd perioada funcției: $x=\cos(t-1{,}5)$, obținută la rîndul ei prin deplasarea spre dreapta cu mărimea 1,5 a curbei $v=\cos x$ (figura 21).

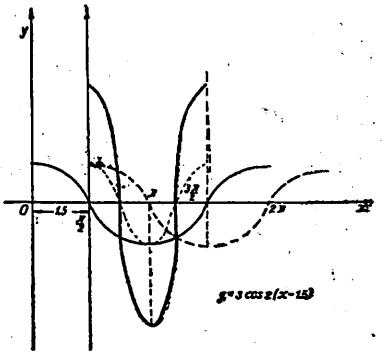


Fig. 21

Elevii rezolvă cu mult interes și exactitate problemele de acest fel. Uneori am fixat reprezentarea grafică și aplicațiile ei ca temă anuală pentru unii elevi.

Referatele întocmite au fost expuse la expozițiile de sfîrșit de an.

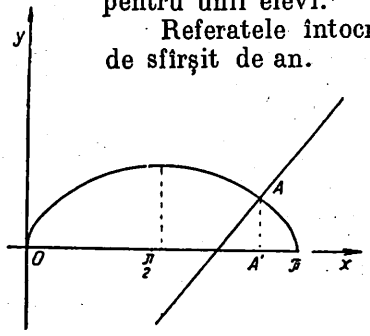


Fig. 22

În anii următori acest material a fost folosit ca bibliografie de alți elevi care și-au ales teme de studiu analoage.

Acest procedeu constituie un stimulent puternic al muncii individuale a elevilor.

P r o b l e m a II. Să se rezolve ecuația (Kepler) $x = a + e\sin x^*$ în cazul $a=2$ și $e=0{,}1$ pentru $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

---

* Reamintesc în cîteva cuvinte însemnătatea descoperirilor lui Kepler, precum și caracteristicile ecuației care-i poartă numele, așa cum am arătat mai sus.

Soluție: E t a p a I: Separ partea algebrică de cea transcendentă (fig. 22).

$$\frac{x-2}{0{,}1} = \sin x$$

$$10x - 20 = \sin x$$

E t a p a I I: Reprezint curbele: $y=10x-20$; $y=\sin x$.

E t a p a I I I: Abscisa punctului A, OA' este abscisa punctului de intersecție a celor două curbe: este o singură soluție (fig. 22). De pe grafic se citește: $x=OA'\approx 2{,}1$ rad. Din tabelele care transformă radianii în grade se obține: $x\approx 119°$ sau se calculează $x \approx 2{,}1 \cdot \frac{\pi}{180°} \approx 119°$.

Observație. În legătură cu această problemă, elevii singuri indică și o altă rezolvare, dacă se face separarea părții transcendente în felul următor: $x-2=0{,}1 \sin x$ și x reprezintă curbele $y = x - 2$; $y = 0{,}1 \sin x$ (fig. 23).

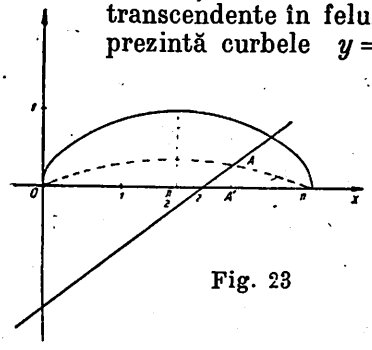


Fig. 23

Dacă reprezentarea este corectă, graficul redă valoarea. Socotesc foarte important pentru însușirea temeinică a cunoștințelor și pentru educarea posibilităților creatoare, ca problemele să fie rezolvate pe diferite căi[1] și apoi să se tragă concluzii, semnalîndu-se de exemplu calea cea mai simplă.

Ca teme pentru acasă propunem elevilor exerciții care să cuprindă funcții cunoscute:

$$x - 2\cos x = 0; \quad x^2 - \sin x = 0 \text{ etc.}$$

Precizez și intervalul în care trebuie să se afle rădăcinile cerute.

1) Tot în această perioadă, experiența mi-a arătat că este bine să se dea elevilor și cîteva noțiuni simple în legătură cu ecuațiile și inecuațiile trigonometrice simple și cu rezolvarea lor grafică.

Astfel, o dată cu reprezentarea grafică a sinusului, propun să se afle pe grafic soluțiile ecuației trigonometrice:

$$\sin x - 0{,}5 = 0$$

și apoi să se aleagă cele din intervalul $-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$. Elevii deduc singuri că rezolvarea acestei ecuații urmează etapele rezolvării

ecuațiilor transcendente; soluțiile sînt date de abscisele punctelor de intersecție ale curbelor

$$y = \sin x;\ y = 0{,}5 \text{ (fig. 24)}$$

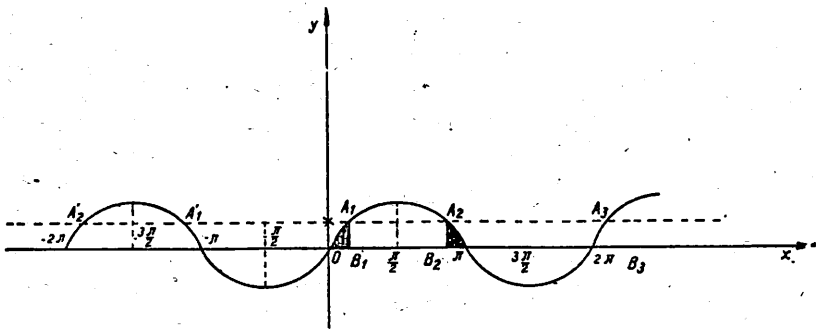


Fig. 24

De pe grafic se deduce că există o infinitate de soluții

$$x_1 = OB_1 = \frac{\pi}{6};\ x_2 = OB_2 = \frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$$

Începînd cu x_3 elevii regăsesc cu ușurință de pe grafic că: $x_3 = x_1 + 2\pi$ etc.... În același fel, pentru soluțiile A_1', A_2' etc. soluția cuprinsă între $-\frac{\pi}{2}$ și $+\frac{\pi}{2}$ este $x = OB_1 = \frac{\pi}{6}$.

După rezolvarea ecuației, întreb pe elevi care sînt valorile dintre 0 și π pentru care este satisfăcută inecuația

$$\sin x < 0{,}2$$

și le propun să haşureze pe grafic.

Ei deduc cu ușurință (de pe grafic) că soluțiile cerute sînt date de

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6} \leqslant x \leqslant 2\pi$$

Atrag atenția elevilor că aceste limitări de intervale le vor aplica fie la probleme de fizică, fie la probleme de geografie cînd un unghi al unui triunghi oarecare este soluția unei ecuații trigonometrice, adică trebuie ca $0 < x < 180°$ sau dacă x este unghiul unui triunghi dreptunghic, trebuie ca $0 < x < 90°$ etc.

2) În ultimii ani, după apariţia metodicii lui Bradis, şi sub influenţa ei, înainte de a încheia capitolul referitor la graficele funcţiunilor trigonometrice reprezint şi funcţii de forma

$$y = a \sin x + b \cos x$$

şi elevii constată cu mirare, cum spune Bradis în metodica sa (şi deci şi cu interes) că aceste curbe sînt tot sinusoide*. Mai tîrziu, la predarea metodei unghiului auxiliar, ca aplicaţii completez studiul mişcării oscilatorii armonice şi rezolv grafic ecuaţia de forma $a \sin x + b \cos x = c$, anunţînd pe elevi că această ecuaţie va fi reluată mai tîrziu şi studiată pe larg.

Problema III. Se dă funcţiunea

$$y = \sin x + \cos x$$

şi se cere:

1) Să se reprezinte grafic pentru $0 < x < 2\pi$
2) Să se deducă rezolvarea ecuaţiei

$$\sin x + \cos x = 1$$

Soluţii. Însemnînd

$$y_1 = \sin x \text{ şi } y_2 = \cos x$$

rezultă că

$$y = y_1 + y_2$$

Elevii după această indicaţie, deduc că pentru reprezentarea funcţiei date prin puncte, pentru fiecare valoare a lui x ordonata corespunzătoare se obţine adunînd ordonatele sinusoidei şi cosinusoidei. Reprezentînd aceste două curbe pe acelaşi grafic cu creioane colorate şi pe tablă cu cretă colorată, se deduc uşor şi reprezentarea curbei $y = \sin x + \cos x$

Soluţiile ecuaţiei

$$\sin x + \cos x = 1$$

---

* $a \sin x + b \cos x = \gamma \sin (x + \varphi)$
unde $\gamma = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\varphi = \text{arc tg} \frac{b}{a}$

sînt abscisele punctelor de intersecție a curbei reprezentate cu dreapta $y = 1$. Aceasta este (se vede imediat de pe grafic,

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ (fig. 25).}$$

Verific și în ecuație. Propun elevilor să rezolve grafic ecuația de forma

$$3 \sin x + 4 \cos x = 5 \text{ etc.}$$

La predarea metodei unghiului auxiliar demonstrez că ecuația

$$x = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

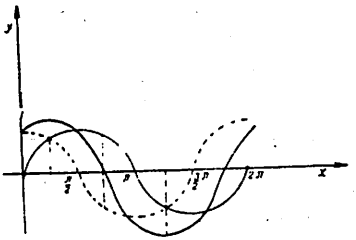


Fig. 25

reprezintă o mișcare oscilatorie armonică și deduc, în același timp, una din aplicațiile practice care conduc la această metodă.

Calculul fiind cel din manual, se obține:

$$s = \sqrt{A^2 + B^2} \sin (\omega t + \alpha)$$

în care faza inițială este dată de $\operatorname{tg} \alpha = \frac{B}{A}$;

și amplitudinea $r = \sqrt{A^2 + B^2}$. Rezolv cu elevii și cîteva aplicații de acest fel; să se studieze mișcarea $x = \sin t + \cos t$.

Faza inițială este $\alpha = 45°$, amplitudinea $r = 2$, deci ecuația se scrie:

$$x = \sqrt{2} \cdot \sin (t + 45°)$$

pe care elevii știu să o studieze.

III

Cînd nivelul clasei permite și planificarea normală a materiei nu e stingherită, dezvolt noțiunile de mai sus în legătură cu compunerea a două forțe concurente (calculul rezultantei și descompunerea unei forțe după două direcții date) tot în cadrul primelor capitole de trigonometrie, de exemplu după operațiile cu arce.

De altfel, reiau această problemă la rezolvarea triunghiurilor, ca aplicație directă a teoremei cosinusului și a teoremei sinusurilor.

Compunerea a două forțe concurente

Fiind date două forțe $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$ cu același punct de aplicație O și care fac cu sensul pozitiv al axei Ox respectiv unghiurile α_1 și α_2, să se determine rezultanta.

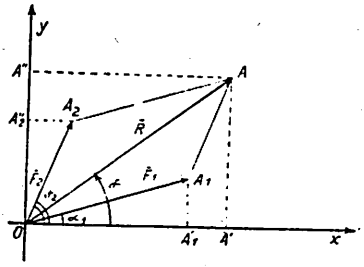


Fig. 26

În pregătire repet cu elevii la tablă compunerea forțelor: regula paralelogramului forțelor și a triunghiului și generalizarea pentru mai multe forțe cînd rezultanta închide conturul poligonal al forțelor; anularea rezultantei (închiderea conturului poligonal al forțelor) exprimă condiția de echilibru a forțelor aplicate unui punct material. Dacă predarea aplicațiilor de la 1° și 2° (capitolul I al articolului) a fost făcută cu mai multe ore înainte, în pregătire repet, pe scurt, teorema proiecției sau, în tema pentru acasă propun un exercițiu în care să aplice și acele cunoștințe.

Discut cu elevii mai întîi, că a determina rezultanta înseamnă a afla: intensitatea, direcția, sensul și punctul de aplicație.

Punctul de aplicație fiind în O (în care $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$ sînt concurente) intensitatea R a rezultantei, direcția ei α și sensul se determină cu formulele (2′) și (3′). Proiecțiile rezultantei pe axe sînt

$$OA' = OA'_1 + A'_1A'$$

$$OA'' = OA''_2 + A''_2A'' \text{ adică}$$

proiecțiile rezultantei a două forțe concurente sînt egale cu suma proiecțiilor forțelor. Aici atrag atenția că teorema este adevărată în general, în cazul a n forțe concurente sau oarecare.

Însemnînd prin F_1 și F_2 intensitățile forțelor componente și prin R intensitatea rezultantei se obține pentru proiecțiile rezultante expresiile

$$OA' = F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2$$
$$OA'' = F_1 \sin \alpha_1 + F_2 \sin \alpha_2$$

care sînt coordonatele extremității rezultantei. Formulele (2′) și (3′) dau

$$R = \sqrt{OA'^2 + OA''^2} =$$

$$= \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2(\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2)}$$

Dar $\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 = \cos(\alpha_1 - \alpha_2) =$

$\cos(\alpha_2 - \alpha_1) = \cos\alpha$ și deci

$$4)\quad \boxed{R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)}}$$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}$$

Folosind formulele (3′) se deduce direcția și sensul rezultantei.

$$(4')\quad \boxed{\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{OA'}{R} = \frac{F_1\cos\alpha_1 + F_2\cos\alpha_2}{R} \\ \sin\alpha &= \frac{OA''}{R} = \frac{F_1\sin\alpha_1 + F_2\sin\alpha_2}{R} \end{aligned}}$$

Observație. 1. În cadrul predării teoremei cosinusului se determină rezultanta direct, însemnînd cu α_1 și α_2 unghiurile rezultantei, respectiv, cu componentele F_1 și F_2 (conform fig. 27)

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos[\pi - (\alpha_2 + \alpha_1)]$$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_1F_2\cos(\alpha_2 + \alpha_1)}$$

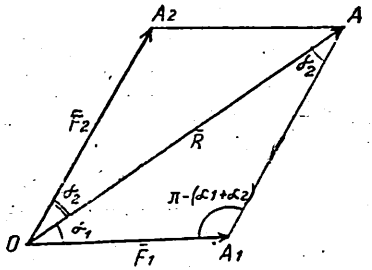


Fig. 27

Însemnînd cu α unghiul dintre $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ ($\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$), se obține:

$$(5)\quad \boxed{R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}}$$

Unghiurile α_1 și α_2 se află prin teorema sinusurilor

$$\frac{\sin\alpha_1}{F_2} = \frac{\sin\alpha_2}{F_1} = \frac{\sin[\pi - (\alpha_1 + \alpha_2)]}{R}$$

adică

$$(5')\quad \boxed{\sin\alpha_1 = \frac{F_2\sin\alpha}{R};\ \sin\alpha_2 = \frac{F_1\sin\alpha}{R}}$$

2. *Cazuri particulare.* Pentru însușirea temeinică a cunoștințelor și pentru a-i obișnui pe elevi cu folosirea lor la rezolvarea problemelor, după deducerea formulelor obișnuiesc pe elevi să cerceteze și cazurile particulare mai însemnate. Astfel, la compunerea forțelor, cercetez și cazurile particulare:

$F_1 = F_2 = F$ și $\alpha = 90°$ (forțele perpendiculare).

În primul caz paralelogramul forțelor A_1OA_2A este un romb și triunghiul OA_1A este isoscel deci $\alpha_2 = \alpha_1$. Formula (5) devine:

$$R = \sqrt{F^2 + F^2 + 2F^2 \cos\alpha}$$

$$R = F\sqrt{2(1 + 2\cos\alpha)}$$

$$R = F\sqrt{2 \cdot 2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

adică

$$\boxed{R = 2F\cos\frac{\alpha}{2}}$$

În cazul forțelor perpendiculare, paralelogramul forțelor este un dreptunghi $\alpha = 90°$; $\cos\alpha = 0$ și formula (5) devine

$$\boxed{R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}}$$

Însoțesc aceste chestiuni teoretice de multe exerciții de felul celor expuse mai jos. Ele au fost folosite în ani diferiți și la diferite clase. Alegerea lor o hotărăște și nivelul clasei. Folosesc la aceste aplicații în mod obișnuit „Culegerea de probleme de mecanică rațională" de N. N. Bucholtz, Matematica v Skole, Gazeta matematică și fizică seria B și seria A.

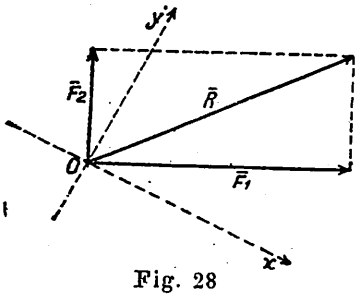


Fig. 28

1. *Să se determine unghiul format de două forțe* $F_1 = 30$ *kg.* *și* $F_2 = 40$ *kg, dacă mărimea rezultantei lor este de* 50 *kg.*

Metoda I. Proiectînd pe două axe perpendiculare oarecare *Ox* și *Oy*, avem

$$50 = \sqrt{30^2 + 40^2 + 2 \cdot 30 \cdot 40 \cdot \cos\alpha}$$

Calculînd, se obţine

$$\alpha = 90°$$

Metoda II. Obişnuiesc pe elevi şi cu metoda grafică. Încă din cl. VIII, îi îndemn să-şi procure hîrtie milimetrică (le plac îndeosebi aşa-zisele „Carnete de inginer"; folosirea lor este un impuls în plus spre interesul şi dragostea faţă de matematică).

Pe aceste carnete elevii rezolvă problemele cu reprezentări grafice, apoi le trec pe caietul de probleme făcînd reprezentarea pe o foaie de hîrtie milimetrică lipită pe foaia caietului. La probleme mai complicate (rezolvări de ecuaţii transcendente, studiul mişcării uniforme şi variate, şi al mişcării oscilatorii etc.), îi îndemn să folosească şi creioane de culori diferite sau tuşuri. În problema de faţă, rezolv problema construind triunghiul cu laturile de 3 cm, 4 cm, 5 cm; elevii recunosc de la început că triunghiul este dreptunghic şi deduc că unghiul dintre forţe este $\alpha = 90°$.

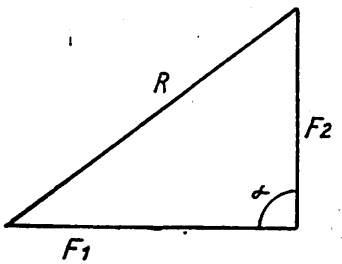


Fig. 29

2. *Două forţe care au mărimile de* 5 *kg şi* 16 *kg formează un unghi de* 60°; *să se afle mărimea rezultantei şi unghiurile pe care rezultanta le formează cu fiecare din cele două forţe.*

Metoda I. Aleg ca axă Ox direcţia forţei F_1 şi perpendiculara în O pe F_1 ca axă Oy.

Proiecţiile forţelor şi ale rezultantei le scriu în tabloul:

	X	Y
$\overline{F}_1$	$F_1 \cos 0° = F_1 = 16$	$F_1 \cos 90° = 0$
$\overline{F}_2$	$F_2 \cos 60° = 2{,}5$	$F_2 \cos 30° = 2{,}5 \cdot \sqrt{3}$
Rezultanta	$R_x = 16 + 2{,}5 = 18{,}5$	$R_y = 2{,}5\sqrt{3}$

Folosind formulele (2′) şi (3′) (elevii cunosc aceste formule precum şi faptul că le aplică pentru determinarea forţei cînd se cunosc proiecţiile ei) avem

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{18{,}5^2 + (2{,}5\sqrt{3})^2} = \sqrt{361} \approx 18{,}97 \text{ kg}.$$

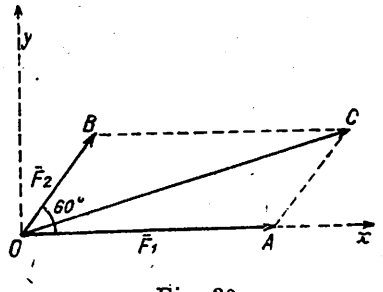


Fig. 30

Iar formulele (3′) sau formula $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{R_y}{R_x}$ determină unghiul φ_1 pe care rezultanta îl face cu $\bar{F}_1$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{2{,}5\sqrt{3}}{18{,}5} = \frac{0{,}5\sqrt{3}}{3{,}7} \approx 0{,}234;$$

$$\varphi_1 \approx 13°10'$$

$$\varphi_2 = 60° - \varphi_1 = 60° - 13°10';$$

$$\varphi_2 = 46°50'$$

Metoda II. O folosesc în problemele analoage rezolvate în cadrul lecţiilor despre rezolvarea triunghiurilor oarecare. În triunghiul OAC se cunosc laturile $OA = 16$ şi $AC = 5$ şi $\hat{A} = 120°$. Se foloseşte teorema lui Napier (exemple similare de rezolvare sînt date în cap. IV din Culegerea de probleme de trigonometrie).

Metoda III. Elevii fac graficul, redus la scară, reprezentînd de ex. 1 kg prin 0,5 cm. Executarea cît mai corectă pe hîrtie milimetrică a desenului conduce la rezultate exacte în grade. Arăt elevilor că, dacă de multe ori în unele probleme aproximaţiile nu dau un rezultat practic valabil, metoda grafică executată corect dă un rezultat cu o aproximaţie pînă la 0,5%, mulţumitor din punct de vedere practic.

3. *Asupra unui punct acţionează patru forţe ale căror proiecţii pe axele perpendiculare* xOy *sînt date în tabelul*:

Forţele / Proiecţiile	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_2$	$\bar{F}_3$	$\bar{F}_4$
Pe *Ox*	$X_1 = 1$	$X_2 = 2$	$X_3 = 0$	$X_4 = 2$
Pe *Oy*	$Y_1 = 10$	$Y_2 = 15$	$Y_3 = -5$	$Y_4 = 10$

Să se calculeze mărimea rezultantei şi unghiul pe care rezultanta îl face cu axa Ox.

Soluție. Proiecțiile X, Y ale rezultantei sînt egale cu suma proiecțiilor forțelor

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 5$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = 30$$

Alegînd originea O ca punct de aplicație, după formulele (2′) și (3′) obținem succesiv

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{5^2 + 30^2} = \sqrt{925} \approx 30{,}4$$

$$\cos\varphi = \frac{X}{R} = \frac{5}{30{,}4}; \quad \sin\varphi = \frac{Y}{R} = \frac{30}{30{,}4}.$$

Unghiul $0 < \varphi < 90°$ este dat de tabele. Se va face observația că în locul acestor două formule poate fi folosită formula:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{Y}{X} = 6 \qquad \varphi = \operatorname{arc\,tg}\, 6 \approx 80°30'$$

Observații. La rezolvarea acestei probleme amintesc și asociativitatea compunerii forțelor și elevii verifică aceasta calculînd proiecțiile rezultantei R_{12} a primelor două forțe: $X_{12} = 3$, $Y_{12} = 25$; apoi proiecțiile rezultantei forțelor R_{12} și F_3 ș.a.m.d. Elevii au înțeles cu ușurință proprietatea de asociativitate a forțelor bazată pe asociativitatea numerelor reale (proiecțiile forțelor).

Tot în cadrul problemelor de acest fel întreb pe elevi ce forță trebuie să intervină, pe lîngă cele date, pentru ca punctul O să fie în repaus. Elevii au putut răspunde că problema se reduce la a afla o forță ale cărei proiecții f_x și f_y pe axe să satisfacă sistemul:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + f_x = 0; \quad f_x = -5$$

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + f_y = 0; \quad f_y = -30$$

adică forța introdusă pentru a echilibra punctul este egală și de sens contrar cu rezultanta. Le arăt și grafic cazul a trei forțe în echilibru: una din forțe este egală și de sens contrar cu diagonala paralelogramului construit pe celelalte două forțe.

4. *Să se determine rezultanta forțelor* $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$ *concurente în* O, *care au mărimile respectiv*: 3 *kg*, 2 *kg*, 4 *kg* (fig. 31).

Soluție. Proiecțiile forțelor pe Ox sînt:

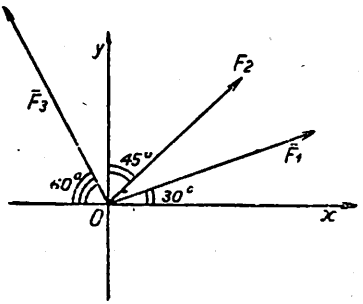


Fig. 31

$$X_1 = 3 \cdot \cos 30° = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$X_2 = 2 \cdot \cos 45° = \sqrt{2}$$

$$X_3 = 4 \cdot \cos 120° = -2$$

Pe axa Oy proiecțiile sînt:

$$Y_1 = 3 \cdot \sin 30° = \frac{3}{2}$$

$$Y_2 = 2 \cdot \sin 45° = \sqrt{2}$$

$$Y_3 = 4 \cdot \cos 30° = \sqrt{3}$$

Proiecțiile rezultantei sînt deci:

$$X = 1{,}5\sqrt{3} + \sqrt{2} - 2 \approx 2$$

$$Y = 1{,}5 + \sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 4{,}6$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{4 + 21{,}16} \approx 5 \text{ kg}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{Y}{X} \approx \frac{4{,}6}{2} = 2{,}3; \quad \varphi \approx 66°30'$$

5. *Sînt date cinci forțe avînd mărimile*: $P_1 = 2$ *kg*, $P_2 = 3$ *kg*, $P_3 = 4$ *kg*, $P_4 = 5$ *kg*, $P_5 = 7$ *kg*, *și orientate ca în figură* (fig. 34). *Să se afle rezultanta acestor forțe.*

Soluție. În cursul rezolvării problemelor de acest fel am observat că elevilor le place să consemneze calculele și rezultatele în tablouri. Cred că puținul timp folosit pentru aceasta nu e pierdut; el contribuie la educarea spiritului de ordine și de inițiativă al elevului.

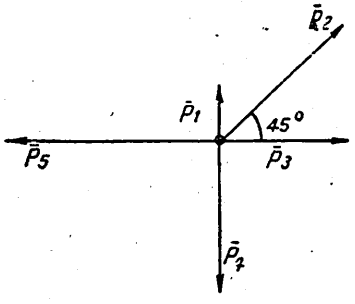


Fig. 32

	$\overline{P}_1$	$\overline{P}_2$	$\overline{P}_3$	$\overline{P}_4$	$\overline{P}_5$	$\overline{R}$
X	$2 \cos 90° = 0$	$3\sqrt{2} \cdot \cos 45° = 3$	$4 \cos 0° = 4$	$5 \cos 270° = 0$	$7 \cos 180° = -7$	$R_x = 0$
Y	$2 \cos 0° = 2$	$3\sqrt{2} \sin 45° = 3$	$4 \cos 90° = 0$	$5 \cos 180° = -5$	$7 \cos 90° = 0$	$R_y = 0$

Deci $R = 0$; punctul O asupra căruia acţionează forţele din figură este în echilibru.

* * *

Folosind datele problemei precedente, conduc pe elevi să reţină condiţiile de echilibru ale unui sistem de n forţe concurente $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots \overline{F}_n$, aplicate unui punct material, care sînt date de:

$$(6) \quad \begin{cases} X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = 0 \\ Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = 0 \end{cases}$$

Elevii reţin importanţa relaţiilor (6) şi, în aceeaşi lecţie le spun că, în cursul aplicaţiilor trigonometrice la statică, le vom întîlni în repetate rînduri în rezolvarea problemelor în legătură cu echilibrul forţelor aplicate punctului material. Le atrag atenţia că, pentru echilibrul solidelor mai intervin şi alte condiţii.

În concluzie arăt elevilor că pentru rezolvarea problemei echilibrului punctului material solicitat de exemplu de trei forţe concurente (ale căror direcţii nu sînt coliniare) pot fi folosite mai multe metode:

1. *O metodă de calcul* (analitică) care constă în a scrie ecuaţiile (6)

$$X = X_1 + X_2 + X_3 = 0$$
$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 = 0$$

axele pe care proiectăm putînd fi alese de noi convenabil (perpendiculare pe o direcţie a forţelor, căci uşurează calculul: această proiecţie e nulă etc.) dacă nu sînt impuse prin conţinutul problemei.

2. *Metoda trigonometrică.* Se formează poligonul forţelor în cazul a trei forţe în echilibru, un triunghi ABC în care aplică teorema sinusurilor:

$$\frac{\overline{F}_1}{\sin(F_2F_3)} = \frac{\overline{F}_2}{\sin(\overline{F}_3\overline{F}_1)} = \frac{\overline{F}_3}{\sin(F_1F_2)}$$

Se observă că unghiurile triunghiului ABC sînt suplementare celor formate de cîte două forţe, deci sinusurile lor sînt egale.

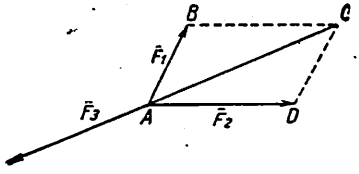


Fig. 33

3. *O metodă grafică*, aşa cum a fost expusă la rezolvarea exemplului 1°. În cazul mai multor forţe, grafic problema se reduce la o construire a poligonului închis al forţelor. În legătură cu această problemă reamintesc sau recapitulez cu elevii cunoştinţe din mecanică despre forţele de reacţiune.

7. *Trei fire sînt prinse în nodul* C (fig. 34). *Două dintre ele trec peste scripeţii* A *şi* B, *iar la extremităţile lor sînt suspendate greutăţile* P = 3 *kg şi* Q = 5 *kg. La extremitatea firului al treilea este suspendată o greutate. Să se afle valoarea lui* X *şi unghiurile* φ_1 *şi* φ_2 *formate de firele* AC *şi* BC *cu verticala, ştiind că sistemul se află în echilibru şi că* $\measuredangle$ ACB=60°.

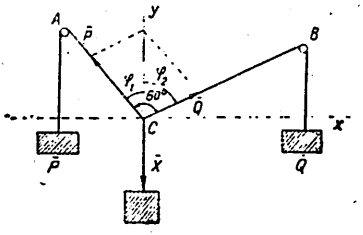


Fig. 34

Metoda I. Arăt elevilor că este convenabil să aleg ca axe sistemul xOy şi că forţele ale căror direcţii sînt concurente şi acţionează în C sînt greutăţile $\overline{X}$, $\overline{P}$ şi $\overline{Q}$.

Elevii alcătuiesc cu uşurinţă tabloul proiecţiilor

	$\overline{X}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{R}$
X	$X\cos\frac{\pi}{2}=0$	$P\cos\left(\varphi_1+\frac{\pi}{2}\right)=-P\sin\varphi_1$	$Q\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_2\right)=Q\sin\varphi_2$	$-P\sin\varphi_1+Q\sin\varphi_2$
Y	$X\cos\pi=-X$	$P\cos\varphi_1$	$Q\cos\varphi_2$	$-X+P\cos\varphi_1+Q\cos\varphi_2$

Scriind condițiile de echilibru $R_x = R_y = 0$ obțin sistemul

$$\begin{cases} P\sin\varphi_1 - Q\sin\varphi_2 = 0 \\ P\cos\varphi_1 + Q\cos\varphi_2 = X \end{cases}$$

și în care $P = 3$ kg, $Q = 5$ kg și $\varphi_2 = \frac{\pi}{3} - \varphi_1$

$$\begin{cases} 3\sin\varphi_1 - 5\sin\varphi_2 = 0 \\ 3\cos\varphi_1 + 5\cos\varphi_2 = X \end{cases}$$

Atrag atenția elevilor că această problemă de fizică a condus la un sistem de ecuații trigonometrice căci necunoscutele φ_1 și φ_2 intervin sub formă de funcții trigonometrice și că deci rezolvarea sistemelor, care se va studia mai tîrziu, este implicată de probleme practice. În cazul problemei de față rezolvarea sistemului se poate face numai cu cunoștințe din prima parte a trigonometriei. Înlocuind în prima ecuație

$$\sin\varphi_2 = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \varphi_1\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\varphi_1 - \cos\frac{\pi}{3}\sin\varphi_1$$

$$\sin\varphi_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi_1 - \frac{1}{2}\sin\varphi_1$$

se obține $\left(3 - \frac{5}{2}\right)\sin\varphi_1 = \frac{5\sqrt{3}}{2}\cos\varphi_1$ adică

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = 5\sqrt{3} \qquad \varphi_1 \approx 38°13'$$

$$\varphi_2 \approx 21°14'$$

Înlocuind în ecuația a doua se obține $X \approx 7$ kg.

Metoda II. Fiind date trei forțe, construiesc triunghiul forțelor.

Aplic teorema sinusurilor triunghiului ABC:

$$\frac{\sin\varphi_1}{Q} = \frac{\sin\varphi_2}{P} = \frac{\sin 120°}{X}$$

$$\frac{\sin\varphi_1}{5} = \frac{\sin\varphi_2}{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{X}$$

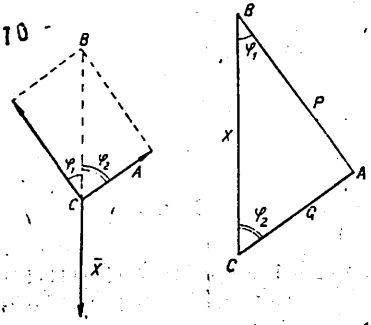


Fig. 35

Adică aceeaşi ecuaţie pentru determinarea unghiurilor φ_1 şi φ_2

$$3 \sin \varphi_1 - 5 \sin \varphi_2 = 0 \text{ etc.}$$

Metoda e mai simplă; ea se reia la rezolvarea triunghiurilor.

IV

Capitolele de trigonometrie relative la rezolvarea triunghiurilor dau posibilitatea profesorului să facă frumoase aplicaţii la fizică, astronomie, topografie. În cursul ultimilor ani, predînd trigonometria la cl. IX , X, şi recapitulînd-o la clasa XI, am avut posibilitatea să dezvolt cunoştinţele elevilor în această direcţie. Dacă exemplele le-am schimbat de la an la an, dacă locul ocupat de aceste aplicaţii în dezvoltarea cursului a suferit de asemeni unele modificări, am căutat să ajung la o împletire gradată, naturală a acestor aplicaţii cu cunoştinţele teoretice, aşa fel încît cunoştinţele de fizică şi de matematică să fie însuşite gradat, folosind rezultatele găsite la obţinerea unor rezultate noi, legate de capitole mai înaintate ale trigonometriei. Astfel aplic teorema cosinusului, aşa cum am arătat în altă parte a acestor însemnări, la compunerea forţelor; ca primă aplicaţie la stabilirea teoremei sinusurilor deduc relaţiile lui Stevin, relativ la descompunerea unei forţe după două direcţii date, arătînd elevilor importanţa acestor relaţii în mecanică pe care, ulterior, o vor constata singuri din problemele ce le vor rezolva. În aceeaşi oră în care predau teorema sinusurilor, reamintesc elevilor regula paralelogramului şi triunghiului de compunere a forţelor cercetate şi aplicată, în legătură cu capitolele anterioare ale cursului de trigonometrie. Pun elevilor problema inversă: *fiind dată o forţă $\overline{R}$ care face cu două direcţii concurente cu ea unghiurile φ_1 şi φ_2 să se determine componentele $\overline{F}_1$ şi $\overline{F}_2$ ale forţelor $\overline{R}$ după aceste direcţii* (fig. 36). Elevii observă singuri că în triunghiul forţelor *OAC* cunosc o latură *R* (mărimea forţei date $\overline{R}$) şi unghiurile alăturate ei φ_1 şi φ_2 şi deduc că pentru aflarea mărimii F_1 şi F_2 ale componentelor forţei *R*, vor aplica teorema

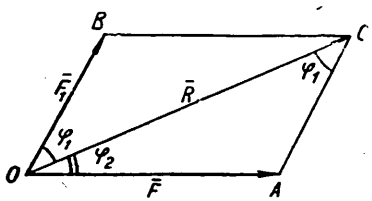


Fig. 36

sinusurilor (lucru care îl arăt ca o necesitate care conduce la descoperirea teoremei). Din relaţiile lui Stevin

$$\frac{F_1}{\sin \varphi_2} = \frac{F_2}{\sin \varphi_1} = \frac{R}{\sin (\varphi_1 + \varphi_2)}$$

şi însemnînd prin φ unghiul celor două direcţii date, adică $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi$, se obţin valorile componentelor căutate

$$F_1 = \frac{R \sin \varphi_2}{\sin \varphi}$$

$$F_2 = \frac{R \sin \varphi_1}{\sin \varphi}$$

Pentru ora în care predau teorema sinusurilor nu-mi planific altceva, rezervînd timpul necesar pentru rezolvarea cel puţin a unei aplicaţii numerice. În orele următoare, la predarea celorlalte formule relativ la triunghiurile oarecare, precum şi alte aplicaţii din acelea pe care le consemnez mai jos, încep cu problema pe care o predau în ora în care predau teorema sinusurilor (din Manualul de Mecanică de E. Abason).

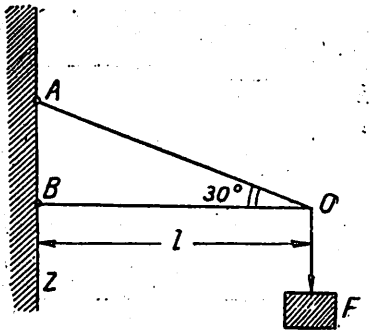


Fig. 37

1. *O lampă de greutate* F = 200 *kg este atîrnată în punctul* O, *de întretăiere a barelor* OA *şi* OB, *care sînt prinse de zidul* Z. *Să aflăm acţiunile la care sînt supuse aceste două bare şi reacţiunile pe care le dezvoltă.*

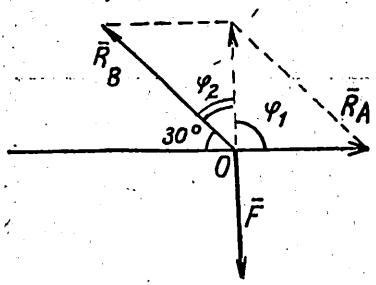


Fig. 38

Soluţie. Notînd cu $\bar{R}_A$ şi $\bar{R}_B$ tensiunile necunoscute din barele *OA* şi *OB*, se observă că asupra punctului *O*, ele se transmit ca reacţiuni (fig. 38), care trebuie să aibă pentru echilibru, o rezultantă egală şi de sens contrar cu acţiunea *F*.

Din figură rezultă:

$\varphi_1 = 90°$; $\varphi_2 = 60°$, $\varphi_3 = 150°$ și deci folosind relația

$$\frac{\overline{R}_A}{\sin \varphi_2} = \frac{\overline{R}_B}{\sin \varphi_1} = \frac{F}{\sin \varphi} \text{ avem:}$$

$$\frac{\overline{R}_A}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\overline{R}_B}{1} = \frac{200}{\frac{1}{2}}$$

Rezultă:

$$\overline{R}_A = 200\sqrt{3} \text{ kg}; \qquad \overline{R}_B = 400 \text{ kg}.$$

Observații. Caut să-mi rezerv timp ca în aceeași oră să pot soluționa problema și analitic, întărind cunoștințele comunicate elevilor încă de la primele capitole ale trigonometriei. În același timp conduc pe elevi să facă și generalizarea problemei luînd $\sphericalangle AOB = \alpha$ și greutatea forței $\overline{F}$. Elevii indică drept axe AC și FO.

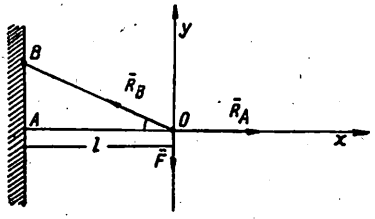


Fig. 39

În acest caz tabloul proiecțiilor este

	$\overline{F}$	$\overline{R}_A$	$\overline{R}_B$	Rezultanta
X	$F\cos\frac{\pi}{2} = 0$	$R_A \cos\pi = +R_A$	$-R_B\cos\alpha$	$+R_A - R_B\cos\alpha$
Y	$F\cos\pi = -F$	$R_A\cos\frac{\pi}{2} = 0$	$R_B\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = +R_B\sin\alpha$	$-F + R_B\sin\alpha$

Condițiile de echilibru sînt deci:

$$\begin{cases} +R_A - R_B\cos\alpha = 0, \\ -F \quad + R_B\sin\alpha = 0 \end{cases}$$

$$R_B = \frac{F}{\sin\alpha}$$

$R_A = R_B \cos \alpha = F \operatorname{ctg} \alpha$ şi în cazul particular $F = 200$ kg; $\alpha = 30°$ se obţine $R_B = 200 : \frac{1}{2} = 400$ kg; $R_A = 200\sqrt{3}$ kg.

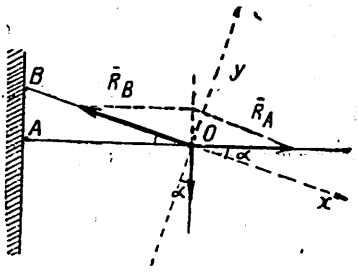


Fig. 40

Arăt şi cu această ocazie că axele pot fi luate oricum, practic alegînd poziţia cea mai convenabilă (cît mai multe proiecţii nule).

Dacă alegem OB ca axă Ox şi perpendiculara în O pe OB ca axă Oy, tabloul proiecţiilor este:

	$\bar{F}$	$\bar{R}_A$	$\bar{R}_B$	Rezultanta
X	$F\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = F\sin\alpha$	$R_A\cos\alpha$	$R_B\cos\pi = -R_B$	$F\sin\alpha + R_A\cos\alpha - R_B$
Y	$F\cos(\pi-\alpha) = -F\cos\alpha$	$R_A\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = R_A\sin\alpha$	$R_B\cos\frac{\pi}{2} = 0$	$-F\cos\alpha + R_A\sin\alpha$

Condiţiile de echilibru sînt în acest caz:

$$\begin{cases} F\sin\alpha + R_A\cos\alpha - R_B = 0 \\ -F\cos\alpha + R_A\sin\alpha = 0 \end{cases}$$

scrise sub formă mai complicată (deci alegerea mai practică a axelor este cea dîntîi) dar rezultatul nu se modifică. Rezolvînd a doua ecuaţie avem

$$R_A = F\operatorname{cotg}\alpha$$

şi deci prima

$$R_B = R_A\cos\alpha + F\sin\alpha = \frac{F\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + F\sin\alpha$$

$$R_B = \frac{F}{\sin\alpha}$$

Pentru acasă dau problema analoagă cu deosebire că bara OB este sub bara orizontală OA iar ca indicație schema forțelor (fig. 41) și recomandarea să rezolve problema și prin metoda tri-

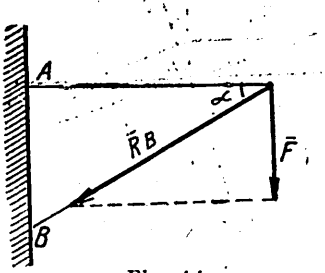


Fig. 41

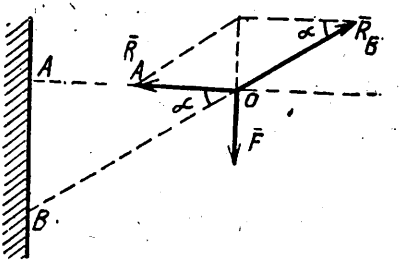


Fig. 42

gonometrică și prin metoda proiecțiilor și prin metoda analitică.

Observație. După rezolvarea acestor probleme, sau a unora similare, rezolv cu elevii sau propun ca temă pentru acasă și unele probleme cu caracter tehnic, de rezistența materialelor.

Problemele le aleg ca să nu introducă dificultăți noi, ci doar aplicarea unei formule tehnice pe care o dau elevilor.

Astfel le arăt formula de calcul pentru rezistența materialelor:

$$(1) \qquad \sigma = \frac{N}{A} \leqslant \sigma_a \text{ kg/cm}^2$$

Unde σ reprezintă efortul unitar normal (și măsoară rezistența efectivă), $\overline{N}$ forța ce acționează normal asupra unei suprafețe de arie A; σ_a reprezintă efortul unitar admisibil, la întindere sau compresiune pentru un anumit fel de material (σ_a are o valoare care înlătură riscul distrugerii materialului).

Astfel efortul unitar admisibil pentru oțel poate fi luat $\sigma_a = 2000$ kg/cm² (pentru întindere și compresiune); la fontă $\sigma_a = 1200$ kg/cm² (la compresiune) și $\sigma_a = 350$ kg/cm² (la întindere); pentru lemnul de brad respectiv 20 kg/cm² și 100 kg/cm² pentru compresiune și întindere etc.

Calculul unei bare la compresiune se face prin formula (1). Iată una din problemele pe care le rezolv cu elevii clasei a X-a, probleme care-i interesează, îi stimulează către aplicațiile practice, tehnice.

O macara de perete având o forță de ridicare P = 3000 *kg, este compusă din două grinzi*: AB, *făcute din fier lat (secțiune dreptunghiulară), raportul dintre dimensiunile secțiunii fiind* 1 : 4,

și dintr-o proptea de lemn de brad AC, *de secțiune circulară. Unghiul* α *făcut de bara cu propteaua este dat de relația* $\cos \alpha = \frac{3}{5}$. *Să se afle celelalte dimensiuni ale acestor piese.* Rezistența admisibilă la întindere pentru fier $\sigma = 600$ kg/cm² și rezistența admisibilă la compresiunea pentru lemn de brad este $\sigma_a = 20$ kg/cm².

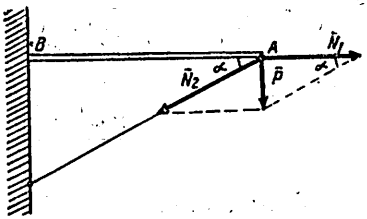


Fig. 43

Soluție. Fie $\bar{N}_1$ și $\bar{N}_2$ cele două componente ale sarcinii de ridicat $\bar{P}$ respectiv după direcția grinzilor și a proptelei. $\bar{N}_1$ întinde grinda iar $\bar{N}_2$ comprimă propteaua. Astfel pentru grinzi (rezistența admisibilă a fierului fiind $\sigma_a = 500$ kg/cm²) vom avea după formula (1′)

$$\frac{\frac{N_1}{2}}{\overline{A}} \leqslant \sigma_a \; ; \; \overline{A} \geqslant \frac{N_1}{2\sigma_a}$$

în care am pus $\frac{N_1}{2}$ căci forța $\bar{N}_1$ întinde *două grinzi* și $A = l \cdot 4l = 4l^2$ — unde l este lățimea secțiunii transversale dreptunghiulare în bară. Valoarea lui N_1 se poate calcula sau cu ajutorul triunghiului forțelor sau proiectînd pe două axe. Folosind prima metodă, din triunghiul dreptunghic PAN, avem luînd valoarea minimă pentru A, dată de condiția de mai sus:

$$4 \cdot l^2 = \frac{P \cdot \operatorname{cotg} \alpha}{2 \cdot \sigma_a}$$

$$\boxed{l = \sqrt{\frac{P \cdot \operatorname{cotg} \alpha}{8 \cdot \sigma_a}}}$$

Înlocuind cu datele din problemă obținem:

$$l = \sqrt{\frac{3000 \cdot \frac{3}{4}}{8 \cdot 600}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 4}} \approx 0{,}68 \text{ cm}$$

Pentru propteaua de brad avem, d fiind diametrul proptelei:

$$A = \frac{\pi d^2}{4} \text{ și } N_2 = \frac{P}{\sin \alpha}.$$

Deci, după formula (1) diametrul d al proptelei de brad trebuie să satisfacă relația:

$$\frac{\pi d^2}{4} \geqslant \frac{\frac{P}{\sin \alpha}}{20}; \quad d^2 \geqslant \frac{P}{5 \pi \sin \alpha}$$

Luînd valoarea minimă avem:

$$d = \sqrt{\frac{P}{5\pi \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{300}{5\pi \cdot \frac{4}{5}}} = \frac{750}{\pi} \approx 15{,}5 \text{ cm}.$$

Observație. Recomand elevilor să rezolve probleme (determinarea mărimilor N_1 și N_2) prin metoda proiecțiilor și în cazul numeric dat și prin asemănarea triunghiurilor PAN și ABC, fără ajutorul trigonometriei.

2. *Forța* $\overline{P}$ *se descompune în două componente. Una are chiar mărimea forței* $\overline{P}$ *și formează cu ea un unghi* α. *Să se afle mărimea componentei a doua și unghiul* β, *pe care îl formează cu forța* $\overline{P}$.

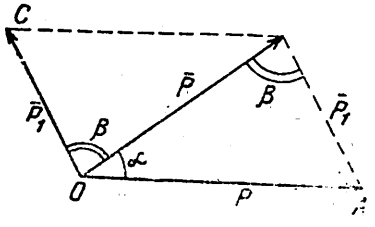


Fig. 44

SOLUȚIE. Însemnînd cu P_1 mărimea componentei a doua din $\triangle OAB$ aplicînd teorema sinusurilor obținem:

$$\frac{P}{\sin \beta} = \frac{P_1}{\sin \alpha}$$

și

$$P_1^2 = P^2 + P^2 - 2P \cdot P \cos \alpha = 2P^2(1 - \cos \alpha) = 4P^2 \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$P_1 = 2P \sin \frac{\alpha}{2} \text{ și } \frac{P}{\sin \beta} = \frac{2P \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}; \sin \beta = \cos \frac{\alpha}{2} \text{ deci}$$

$\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$. Arăt însă elevilor că, același rezultat se obține

mai simplu din observăţia că triunghiul AOB e isoscel:

$$2\beta + \alpha = 180° \qquad \beta = 90° - \frac{\alpha}{2}$$

şi

$$\frac{P_1}{2} = P \sin \frac{\alpha}{2} \qquad P = 2P \sin \frac{\alpha}{2}$$

3) În ora cînd deduc formulele lui Napier, ca aplicaţie imediată rezolv problema:

Două forţe $\overline{F}_1$ *şi* $\overline{F}_2$ *fac un unghi* φ. *Să se afle intensitatea rezultantei şi unghiurile* φ_1 *şi* φ_2 *pe care le fac cu forţele date. Caz particular* $\overline{F}_1 = 3$ *kg*; $\overline{F}_2 = 4$ *kg*; $\varphi = 60°$ (vezi fig. 36).

Soluţie. Elevii arată imediat că în triunghiul forţelor OAC se cunosc două laturi $OA = F_1$, $AC = F_2$ şi unghiul dintre ele $\sphericalangle OAC = \pi - \varphi$; este indicată deci aplicarea formulelor lui Napier

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = \frac{F_1 - F_2}{F_1 + F_2} \operatorname{cotg} \frac{\pi - \varphi}{2}$$

dar

$$\operatorname{cotg} \frac{\pi - \varphi}{2} = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

deci

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = \frac{F_1 - F_2}{F_1 + F_2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

din care (în cazurile numerice cu ajutorul tabelelor) deducem

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2 \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{F_1 - F_2}{F_1 + F_2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)$$

şi pentru că în cazul problemei, în aplicaţia numerică avem $F_2 > F_1$, schimbăm semnele (aici insist asupra proprietăţii folosite a tangentei). Se obţine un sistem algebric de două ecuaţii cu două necunoscute

$$\begin{cases} \varphi_1 - \varphi_2 = 2 \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{F_2 - F_1}{F_2 + F_1} \operatorname{tg} \dfrac{\varphi}{2}\right) \\ \varphi_1 + \varphi_2 = \varphi \end{cases}$$

ale cărei soluții sînt

$$\begin{cases} \varphi_1 = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{F_2 - F_1}{F_2 + F_1}\ \operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}\right) + \dfrac{\varphi}{2} \\ \varphi_2 = -\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{F_2 - F_1}{F_2 + F_1}\ \operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}\right) + \dfrac{\varphi}{2} \end{cases}$$

În cazul particular

$$\varphi_1 = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{3}}{21}\right) + 30°$$

$$\varphi_2 = -\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{3}}{21}\right) + 30° \text{ etc.}$$

Spun elevilor că la această problemă conduce și rezolvarea unor sisteme trigonometrice care vor fi studiate mai tîrziu și care, deci, au aplicații practice.

Observații. Ca aplicații la predarea teoremei tangentelor rezolv problema.

Fiind date forțele $\overline{F}_1$ $\overline{F}_2$ *și* $\overline{R}$ *rezultanta lor, să se determine unghiurile făcute de rezultantă cu forțele*

Soluție. Avem: $\operatorname{tg}\dfrac{\varphi_1}{2} = \sqrt{\dfrac{(p - F_1)(p - R)}{p\ (p - F_2)}}$

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi 2}{2} = \sqrt{\frac{(p - F_2)(p - R)}{p\ (p - F_1)}}$$

în care $2p = F_1 + F_2 + R$ (F_1, F_2, R fiind intensitățile forțelor și a rezultantei).

4. O altă categorie de probleme care trezește interesul elevilor sînt acele relative la mecanisme. Problemele cu mecanismul bielă-manivelă le folosesc, după caz, fie la rezolvarea triunghiurilor dreptunghice, fie la rezolvarea triunghiurilor oarecare. În pregătirea problemei insist asupra înțelegerii fenomenului fizic, cunoscut de elevi, de la fizică.

Diametrul pistonului unei mașini cu abur este de d *cm. Presiunea aburului dintr-o parte a pistonului este egală cu* p *at, iar din partea cealaltă* p_0 *at* (1 atmosferă este presiunea de 1 kg pe cm^2). *Să se afle mărimea forței* $\overline{T}$ *care învîrtește manivela* $\overline{OA}$,

dacă $\overline{OA} = r$, *lungimea bielei* $\overline{AB} = l$ *şi unghiul de rotaţie al manivelei* $OAB = \alpha$

Soluţie. Înclinarea bielei pe orizontală fiind egală cu unghiul

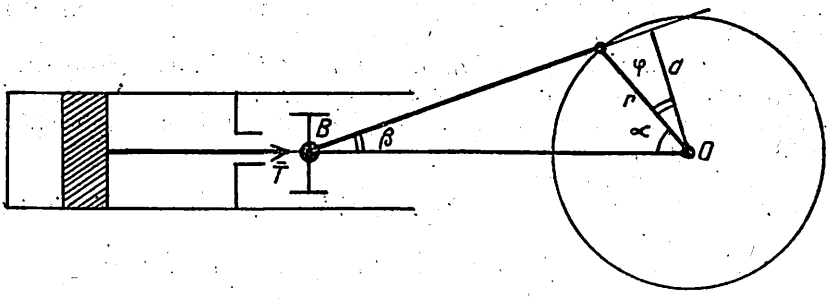


Fig. 45

β, din triunghiul OAB, aplicînd teorema sinusurilor, se obţine:

$$\frac{r}{\sin\beta} = \frac{l}{\sin\alpha} \text{ adică}$$

$$\sin\beta = \frac{r\sin\alpha}{l}.$$

După calculul unghiului β, arăt elevilor schematic că, pentru aflarea mărimii forţei $\overline{T}$, care învîrteşte manivela (normală la manivelă), trebuie aflat efortul din bielă $\overline{F}_B$. Schemele de descompunere ale efortului din bielă şi a forţei $\overline{F}$ sînt respectiv (P fiind presiunea pistonului):

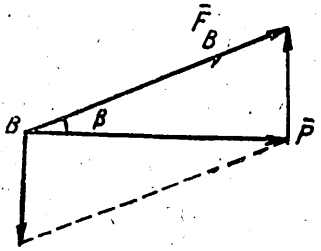


Fig. 46

$$P = \frac{\pi d^2}{4}(p - p_0)$$

$$F_B = \frac{\pi d^2 (p - p_0)}{4\cos\beta}$$

Pentru echilibru avem:

$$T \cdot r = d \cdot F_B$$

Cum $d = r \cdot \cos\varphi = r \cdot \sin(\alpha + \beta)$, rezultă:

$$T = F_B \sin(\alpha + \beta) \text{ şi deci}$$

$$T = \frac{d^2 (p - p_0)\sin(\alpha + \beta)}{4\cos\beta}$$

Observaţie. Folosesc probleme similare şi în primele capitole ale definiţiei funcţiilor trigonometrice, probleme în care unghiul făcut de bielă cu orizontala este cunoscut. Iată o asemenea problemă (Aurelian Stan şi Mircea Grumăzescu: Mecanica tehnică):

La un război de ţesut, în momentul baterii, vătala apasă asupra ţesăturii cu o forţă orizontală F=200 *kg. Ştiind că piciorul vătalei (*BC*) este vertical, iar biela (*BA*) este înclinată cu* $\alpha=30°$ *faţă de orizontată, se cere:*

1. *efortul din bielă;*

2. *efortul suportat de manivela* OA *în momentul baterii în cazul cînd* $\alpha=45°$.

Indicaţie. Ca şi în problema precedentă se obţine:

$$F_B=\frac{F}{\cos\beta}=\frac{200}{\cos 30°}=200\sqrt{3}\text{ kg}$$

$$X_T=F_B\sin 75°=200\sqrt{3}\cdot 0{,}966\text{ kg}.$$

În cadrul capitolului relativ la relaţiile între laturile şi unghiurile unui triunghi rezolv cu elevii şi aplicaţii la astronomie. Aceste aplicaţii, nu numai că măresc interesul elevilor pentru studiul trigonometriei, dar le îndrumă, în acelaşi timp preocuparea creatoare de a aplica cunoştinţele teoretice în practică, îi stimulează şi îi entuziasmează. Orele în care elevii au putut citi, pe cadranul orizontal calculat şi construit de ei, ora locală a oraşului Piatra-Neamţ cu o aproximaţie destul de bună, au fost ore de mare valoare educativă şi instructivă. De aceea, paralel cu predarea Astronomiei, fie în orele de astronomie, fie în cele de trigonometrie (şi chiar de stereometrie) am dat o atenţie deosebită următoarelor aplicaţii practice:

1. Determinarea răsăritului, a apusului soarelui şi a duratei zilei.

2. Determinarea latitudinii locului (în anumite condiţii).

3. Elemente de geodezie, în legătură cu latitudinea localităţii (raza pămîntului, iuţeala liniară în mişcarea de rotaţie a pămîntului etc.).

4. Calculul şi construcţia cadranului orizontal pentru latitudinea localităţii.

5. La clasele cu nivelul mai ridicat (de exemplu la clasele a XI-a, uneori chiar la clasele a X-a) sau în cadrul cercurilor de studii am predat ca aplicaţii ale triedrelor calculul distanţelor între două localităţi. Şi această aplicaţie (în unii ani şcolari 1953—1954 şi 1955—1956, am reuşit s-o realizez şi cu clasele a

X-a), place foarte mult elevilor, îi interesează, îi preocupă. În acești ani, ca particularizări ale formulelor stabilite am reluat aplicațiile relativ la răsăritul și apusul soarelui, la durata zilei.

Determinarea răsăritului și apusului unui astru. Pentru rezolvarea acestei probleme recapitulez în pregătirea cunoștințelor necesare: relațiile între timpurile siderale t_1 și t_2 ale răsăritului și apusului ($t_1 = \alpha - H$; $t_2 = \alpha + H$, în care α și H sînt ascensiunea dreaptă și unghiul orar), durata intervalului de vizibilitate $2H = t_2 - t_1$. (fig. 47).

Dacă G este răsăritul sau apusul unui astru, din triunghiurile dreptunghice GKI și KIO se deduce respectiv:

$\overline{IK} = \overline{IG} \cos (180° - H) =$

$= - \overline{IG} \cos \widehat{GIK}$

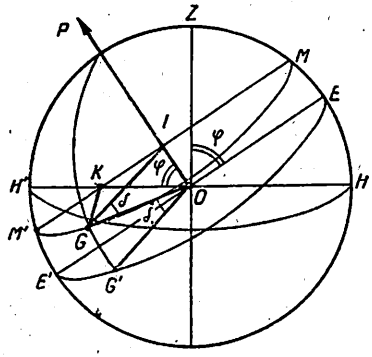


Fig. 47

Din triunghiul OKI

$$\overline{IK} = \overline{OK} \sin\varphi$$

Egalînd obținem

$$\cos H = -\frac{OK}{IG} \sin\varphi$$

Din triunghiurile dreptunghice QIK și OIG se obține pentru $\overline{OI}$:

$$\overline{OI} = \overline{OK} \cos\varphi \qquad \overline{OI} = \overline{OG} \sin\delta$$

din care, luînd $\overline{OG} = 1$, avem pentru $\overline{OK}$

$$\overline{OK} = \frac{\sin\delta}{\cos\varphi}$$

Din triunghiul OIG

$$\overline{IG} = \overline{OG} \cos\delta = \cos\delta$$

Înlocuind valorile aflate pentru OK și IG în relația precedentă obținem formula

$$\boxed{\cos H = -\operatorname{tg}\delta \cdot \operatorname{tg}\varphi}$$

care determină unghiul orar H la o latitudine φ pentru un astru a cărui declinație este δ.

Cu ajutorul acestei relații elevii au calculat latitudinea orașului Piatra-Neamț. Ei au indicat că, pentru calculul lui φ este necesară cunoașterea declinației soarelui la o anumită perioadă și a unghiului orar H sau a duratei zilei $2H$ în aceeași perioadă. Le-am atras atenția că aceste date pot fi obținute ușor. Alegînd ziua solstițiului de vară (21 iunie), declinația soarelui este $\delta = 23°27'$, iar durata acestei zile le-am arătat că poate fi citită și din unele calendare recente.

Am găsit pentru ziua de 21 iunie:

$$t_1 = 4{,}31 \text{ ore}$$
$$t_2 = 20{,}03 \text{ ore}$$

deci $2H = 20{,}03 - 4{,}31 = 15{,}72$ ore $= 15^h\ 43^m$

Transformînd în grade prin înmulțirea cu 15 obținem

$$2H = (15^h \times 15)° \ (43^m \times 15)' = 235°\ 45'$$
$$H = 117°\ 53'30''$$

Înlocuind în formula stabilită avem

$$\operatorname{tg}\varphi = -\cos 117°\ 52'\ 30'' \cdot \operatorname{cotg} 23°27'$$
$$\operatorname{tg}\varphi = \cos (180° - 117°\ 52'\ 30'') \operatorname{cotg} 23°\ 27'$$
$$\operatorname{tg}\varphi = \cos 62°7'30'' \cdot \operatorname{cotg} 23°\ 27'$$

Efectuînd calculele, elevii au determinat latitudinea orașului lor. Comparînd-o cu valoarea obținută de Institutul meteorologic local, eroarea cu care au aflat elevii latitudinea este foarte mică.

Observații. 1. Ca temă pentru acasă dau elevilor să recalculeze latitudinea orașului folosind datele analoage relative la solstițiul de iarnă adică $\delta = 23°27'$

$$t_1 = 7{,}50 \text{ ore}; \ t_2 = 16{,}40 \text{ ore}$$

2. Arăt elevilor că relația stabilită poate fi folosită și pentru aflarea duratei unei anumite zile cunoscînd latitudinea locului și declinația soarelui în acea zi. Astfel am rezolvat cu elevii, în cursul capitolului ecuații trigonometrice problema următoare (dintr-un număr mai vechi al Gazetei matematice și fizice seria B pe atunci Revista de matematică și fizică).

O stea stă $15^h\ 14^m\ 40^s$ *deasupra orizontului unui loc, iar distanța zenitală meridiană este de* $21°37'$ *(trece la sud de zenit). Să se afle latitudinea locului.*

Indicație. Se calculează unghiul orar

$$2H = 15^h\ 14^m\ 40^s,\ H = 7^h\ 37^m\ 20^s$$

Declinația și latitudinea sînt date de sistemul trigonometric

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\delta \cdot \operatorname{tg}\varphi = -\cos H \\ \varphi - \delta = Z_m \end{cases}$$

în care $H = 114°\ 14'$ și $Z_m = 21°37'$.

Dacă rezolv această problemă în ora de astronomie atrag atenția elevilor și asupra faptului că studierea sistemelor de ecuații este necesară pentru rezolvarea a multe și variate probleme practice și tehnice.

2. *Calculul și construcția cadranului orizontal.* O altă aplicație care interesează în mod deosebit pe elevi este construcția cadranului solar orizontal pentru o localitate de latitudine dată și care permite determinarea timpului solar adevărat.

Amintesc elevilor importanța determinării timpului solar adevărat din care, prin corecția ecuației timpului, obținem timpul solar mijlociu. Explic mai întîi elevilor principiul simplu care stă la baza calculului cadranului orar pentru o localitate de latitudine φ. Fie MP direcția polului ceresc, MO meridianul locului, $\sphericalangle PMO = \varphi$ latitudinea locului; $\sphericalangle OMQ = \tau$ unghiul de deviere a umbrei lăsată de vergeaua MP; unghiul orar $\hat{H} = \widehat{ONQ}$ este unghiul plan al diedrului format din planul meridian al locului (PMC) și planul meridian PMQ în care se află soarele la un moment dat. Din triunghiurile dreptunghice MOQ, NOQ avem respectiv: $\overline{OQ} = \overline{OM}\operatorname{tg}\tau$, $\overline{OQ} = \overline{ON}\operatorname{tg}H$, $\overline{ON} : \overline{OM} = \sin\varphi$, relații care, prin eliminarea segmentelor OM, ON și OQ, conduc la *formula cadranului orizontal pentru latitudinea* φ

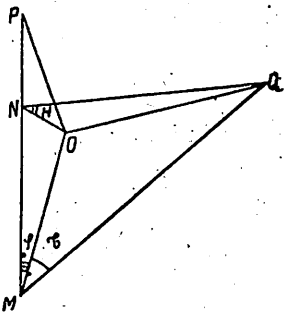


Fig. 48

$$\operatorname{tg}\tau = \sin\varphi \operatorname{tg}H$$

În aceeași oră în care predau această formulă dau indicații și o schiță a felului cum trebuie construit un cadran orizontal;

1. O planșetă din placaj cu dimensiuni de cca. 50—60 cm.

2. Un echer de placaj MOP construit cu grijă în aşa fel ca $\sphericalangle OMP = \varphi$ (cu aproximaţie de grade; pentru oraşul Piatra-Neamţ am luat cu aproximaţie în plus $\varphi \approx 47°$).

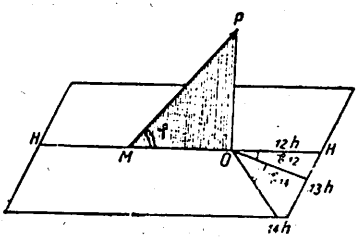


Fig. 49

3. Pe dosul planşetei se lipeşte o foaie pe care este dedusă formula cadranului orizontal şi calculele valorilor lui τ din jumătate în jumătate de oră.

4. Calculul unghiurilor τ ce trebuie desenate pe faţa planşetei pornind de la cateta echerului prins pe planşetă se face pentru diferite valori ale lui H; de ex. pentru indicatorul orei 13 avem

$$\operatorname{tg}\tau = \sin\varphi \cdot \operatorname{tg} 15°$$

pentru ora 14

$$\operatorname{tg}\tau = \sin\varphi \cdot \operatorname{tg} 30° \text{ etc.}$$

Elevii construiesc uneori cadrane orizontale de mare precizie cu mijloace proprii. Citirea orei solare adevărate, corecţia ei şi determinarea astfel a timpului mijlociu de către elevi cu destul de bună aproximaţie) au asupra lor un puternic efect educativ.

Cînd folosesc un cadran vechi construit de foştii elevi ai şcolii, le spun numele, le amintesc calităţile.

Observaţie. Folosind cursul special de trigonometrie de S. I. Novoselov, articolul „Unghiuri triedre" de Gh. D. Simionescu sau „Trigonometria sferică" de F. F. Pavlov şi V. P. Maşkevici, în cadrul cercului de studiu (în unii ani chiar în orele de clasă, la clasele a XI-a şi la unele clase a X-a cu nivelul ridicat) reiau unele probleme ca aplicaţii ale teoremei de trigonometrie sferică:

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A$$

Stabilirea acestei formule o fac cu ajutorul triedrului $OABC$, în care α, β, γ sînt feţele triedrului şi $\sphericalangle A$, unghiul plan al unghiului diedru opus feţei α. Din triunghiurile dreptunghice CAO şi BAO avem respectiv $\sin\beta = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{OC}}$; $\sin\gamma = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{OB}}$; $\cos\beta = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OC}}$; $\cos\gamma = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$ şi $\overline{OB}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{OA}^2$; $\overline{OC}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{OA}^2$.

Din triunghiurile oarecare ABC și BOC avem (prin teorema cosinusului) $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos A$
$\overline{BC}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 - 2\,\overline{OB} \cdot \overline{OC} \cos \alpha$

Eliminînd pe $\overline{BC}$ și folosind relațiile precedente se obține $\overline{OB} \cdot \overline{OC} \cos \alpha = \overline{OA}^2 + \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cos A$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \cdot \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} + \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{OC}} \cos A$$

și înlocuind rapoartele, se obține formula

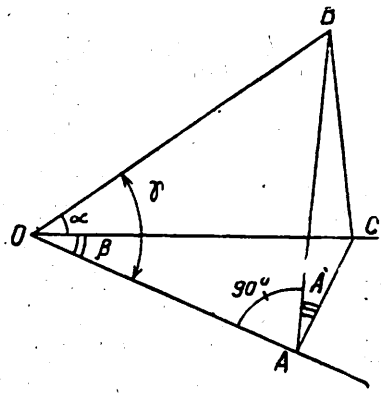


Fig. 50

(1) $$\boxed{\cos \alpha = \cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cos A}$$

Arăt elevilor că ei cunosc un caz particular al acestei formule cînd OA este proiecția lui OC pe planul ACB adică

$$\hat{A} = 90° \text{ și deci } \cos \alpha = \cos \beta \cdot \cos \gamma$$

relații cu multe aplicații (cunoscute elevilor) la poliedre. Teorema la trigonometria sferică o fac simplu considerînd sfera de centru O arcele de cercuri mari de pe ea corespunzătoare unghiurilor; A, B, C sînt *laturile* triunghiului sferic, dar unghiurile triunghiului sferic A, B, C sînt unghiurile diedre ale triedrului $OABC$ (egale cu unghiurile tangentelor la laturile triunghiului sferic).

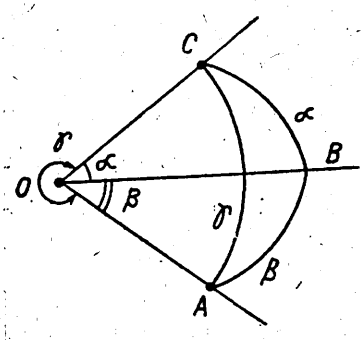


Fig. 51

Aplicații. (1) *Se cunosc coordonatele geografice* (φ_a, λ_a), (φ_b, λ_b) *respectiv a două puncte* A *și* B *de pe suprafața pămîntului; să se determine distanța dintre aceste puncte* (S. D. Novoselov pag. 566).

Soluție. Înainte de rezolvarea acestei probleme ajut elevii să intuiască triunghiul sferic folosit (ABN), N fiind polul nord al pământului — , și coordonatele geografice ale punctelor A și B cu ajutorul globului negru pe care sînt trasate meridianele și paralelele. Desenez cu cretă pe glob triunghiul sferic ABN și apoi desenez pe tabelă. Elevii deduc (în pregătire reamintesc definițiile coordonatelor geografice) elementele triunghiului sferic ABN:

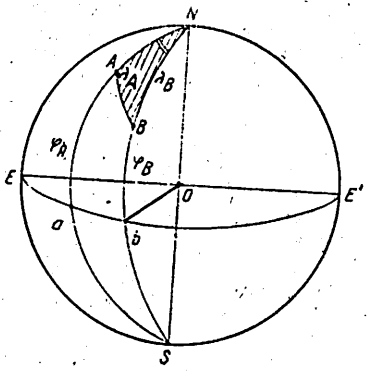


Fig. 52

$$\sphericalangle ANB = \lambda_a - \lambda_b$$

$$\overset{\frown}{AN} = 90° - \varphi_a;\ \overset{\frown}{BN} = 90° - \varphi_b$$

Aplicînd formula stabilită se obține:

$$\cos \overset{\frown}{AB} = \cos(90 - \varphi_a) \cos (90 - \varphi_b) + \\ + \sin (90 - \varphi_a) \sin (90 - \varphi_b) \cos ANB$$

adică $\cos \overset{\frown}{AB} = \sin \varphi_a \sin \varphi_b + \cos \varphi_a \cos \varphi_b \cos (\lambda_a - \lambda_b)$

din care se obține arcul AB *măsurat în grade* $\overset{\frown}{AB} = \text{arc cos } [\sin \varphi_a \cdot \sin \varphi_b + \cos \varphi_a \cos \varphi_b \cos (\lambda_a - \lambda_b)]$. Aflarea distanței în km se obține prin regula de trei simplă:

$$360° \ldots\ldots\ldots\ldots 2R\ (R = 6370 \text{ km})$$

$$\overset{\frown}{AB}° \ldots\ldots\ldots\ldots \alpha = \frac{\pi R}{180°}$$

$$\overset{\frown}{AB}° = \frac{\pi R}{180 \cdot 60} \cdot \overset{\frown}{AB}$$

Observație: arăt elevilor că se poate calcula $\cos \overset{\frown}{AB}$ fie calculînd separat cu ajutorul logaritmilor expresiile:
$\log (\sin \varphi_a \sin \varphi_b)$; $\log [\cos \varphi_a \cos \varphi_b \cos (\lambda_a - \lambda_b)]$ fie făcînd calculabilă expresia lui $\cos \overset{\frown}{AB}$ prin introducerea unui unghi auxiliar:

$$\cos \overset{\frown}{AB} = \sin \varphi_b (\sin \varphi_a + \cos \varphi\, a \operatorname{tg} \theta)$$

în care $\operatorname{tg} \theta = \operatorname{cotg} \varphi_b \cos (\lambda_a - \lambda_b)$

și deci $\cos \overset{\frown}{AB} = \dfrac{\sin \varphi_b \sin (\varphi_a + \theta)}{\cos \theta}$

În aplicațiile lucrate recomand elevilor să rezolve efectuînd calculele prin amîndouă metodele.

În afară de calculul distanței dintre Leningrad ($\varphi_a = 39°56'5''$, $\lambda_a = 30°18'$), Berlin ($\varphi_b = 52°30'$, $\lambda_b = 13°18'5''$) rezolvată în cartea lui S. I. Novoselov, calculez cu elevii distanțele dintre București ($\varphi_1 = 44°24'$, $\lambda_1 = 26°6'$) și Moscova ($\varphi = 55°45'$, $\lambda = 37°37'$) sau Paris ($\varphi = 48°50'$, $\lambda = 2°20'$) și Moscova.

Ca temă pentru acasă am propus calculul distanței dintre Piatra-Neamț și București, apoi am verificat cu datele oficiale. Efectul instructiv și educativ este remarcabil.

2. *Aflarea răsăritului și apusului astrelor.* S fiind poziția astrului la orizontul locului, Z zenitul, P polul nord ceresc în triunghiul sferic PSZ avem $\sphericalangle SPZ = H$ (unghiul orar al poziției răsăritului sau apusului astrului) $\sphericalangle PZS = 180 - A$ (A = = azimutul) și laturile $SP = 90° - \delta$ (δ = declinația astrului considerat); $\widehat{ZS} = 90°$ (triunghiul sferic este dreptunghic) și $PZ = 90° - \varphi$. Înlocuind în formula (1) se obține respectiv

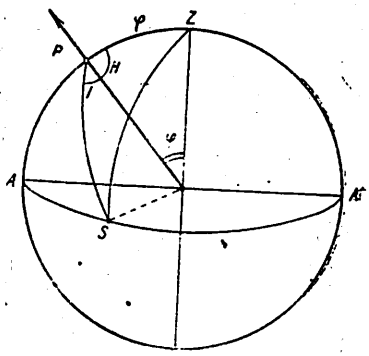


Fig. 53

$$\cos \widehat{SP} = \cos \widehat{PZ} \cdot \cos \widehat{SZ} + \\ + \sin \widehat{PZ} \cdot \sin \widehat{SZ} \cdot \cos \widehat{PZS}$$

$$\cos \widehat{ZS} = \cos \widehat{PZ} \cdot \cos \widehat{PS} + \\ + \sin \widehat{PZ} \cdot \sin \widehat{PS} \cdot \cos H \text{ și}$$

înlocuind se obțin formulele (accentuez că ele sînt valabile numai cînd astrul este la orizont):

$$\sin \delta = - \cos \varphi \cdot \cos A$$

$$\cos H = - \operatorname{tg} \delta \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

din care ultima a fost obținută, mai sus, pe cale elementară.

3. Aplicații interesante pe care le fac în cadrul orelor de trigonometrie (sau în cadrul orelor de astronomie dezvoltînd aplicațiile practice și restrîngînd studiul descriptiv la o expunere concentrată) sînt acelea în legătură cu mișcarea de rotație a pămîntului, cu determinarea vitezei liniare la o anumită latitudine, a vitezei unghiulare de rotație, a variației greutății corpurilor cu latitudinea etc. Aceste aplicații sînt simple și interesează cu elevi. În pregătire recapitulez cunoștințele de fizică în

legătură cu mişcarea circulară uniformă. Deduc expresiile pentru viteza liniară v şi pentru viteza unghiulară ω prin raţionamentul simplu al reducerii la unitate (R fiind raza traiectoriei şi T durata unei revoluţii)

T s	.....	$2\pi R$ cm	T s	.....	2π radiani
1 s	.....	v cm/s	1 s	.....	ω radiani/s

$$v = \frac{2\pi R}{T} \text{ cm/s} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ rad/s}$$

Aceste expresii conduc la relaţia între viteza liniară şi cea unghiulară $\boxed{v = \omega R}$, relaţie valabilă pentru orice fel de mişcare circulară.

P r o b l e m a I. *Să se determine viteza unghiulară şi viteza liniară pentru punctele de pe suprafaţa globului pământesc precum şi acceleraţia lor normală.*

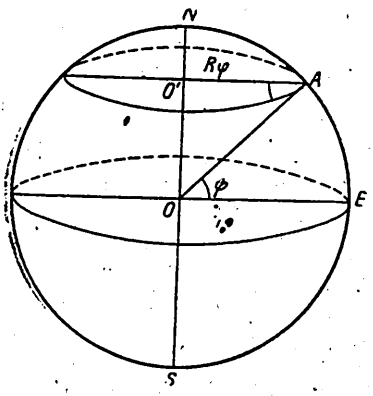


Fig. 54

Soluţia. Viteza unghiulară ω nu depinde de poziţia punctului pe glob; ea este dată de

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86 \cdot 400} \text{ rad/s}$$

$$\omega \approx 7{,}3 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

Punctul situat pe suprafaţa pământului la latitudinea φ descrie o circumferinţă de rază $R\varphi$. Viteza liniară la latitudinea φ este

$$v_\varphi = \omega R_\varphi = \omega R \cos\varphi$$

în care $R = 6370$ km $= 6{,}37 \cdot 10^6$ m este valoarea mijlocie a razei pământului. Se obţine înlocuind:

$$v_\varphi = 7{,}3 \cdot 10^{-5} \cdot 6{,}37 \cdot 10^6 \cos\varphi$$

$$v_\varphi = 4{,}65 \cdot 10^2 \cdot \cos\varphi \text{ m/s}$$

În cazul oraşului Piatra-Neamţ,

$$v_\varphi = 465 \cdot \cos 46°56' \text{ m/s}$$

P r o b l e m a I I. *Să se studieze variaţia forţei de gravitaţie în raport cu latitudinea geografică.*

Soluţie. Fie un corp greu de masă m situat la latitudinea φ. Punctul A este solicitat de două forţe: forţa de gravitaţie $\overline{P}$ îndreptată către centrul pămîntului şi a cărei mărime este $\overline{P} = mg$ (g = acceleraţia gravităţii) şi forţa $\overline{F}$ perpendiculară pe axa pămîntului, la distanţa R_φ de ea; mărimea ei este (după legea fundamentală a mecanicei) $F = m\,\gamma_n = m\,\omega^2\,R_\varphi$

$$F = m\,\omega^2\,R\cos\varphi$$

Greutatea $\overline{P}_\varphi$ la latitudinea φ este deci rezultanta acestor două forţe $\overline{P}$ şi $\overline{F}$.

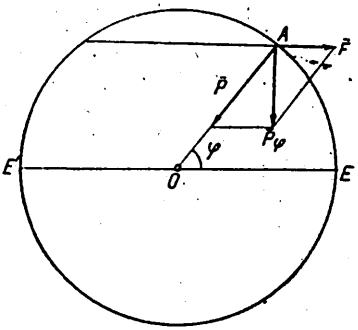


Fig. 55

Forţa F* este foarte mică faţă de forţa de gravitaţie.

Calculez raportul mărimilor lor

$$\frac{F}{P} = \frac{m\,\omega^2\,R\cos\varphi}{mg} = \frac{\omega^2\,R}{g}\cdot\cos\varphi$$

înlocuind pe ω (cu valoarea aflată în problema I), pe R şi $g = 9{,}81$ m/sec² se obţine:

$$\frac{\overline{F}}{\overline{P}} = \frac{1}{289}\cdot\cos\varphi$$

De ex. la ecuator $\cos\varphi = 1$ şi deci raportul de mai sus este

$$\frac{F}{P} = \frac{1}{289}$$

adică, la ecuator, forţa centrifugă F este a 289-a parte din greutatea corpului.

Un corp de 289 kg cîntăreşte la ecuator 289 — 1 = 288 kg. Pentru latitudinea oraşului Piatra-Neamţ, raportul este

$$\frac{F}{P} = \frac{\cos\ 46°56'}{289}$$

În legătură cu aplicaţiile practice ale trigonometriei la topografie încerc să educ la elevi şi dragostea pentru marile construcţii ale socialismului din patria noastră, să le formez dorinţa de a persevera, de a se pregăti temeinic, cu dragoste ca să devină

* Explic elevilor ce sînt forţele definite prin exemple concrete.

la rîndul lor buni ingineri şi tehnicieni, constructori ai socialismului. Procedez aşa cum arăt în acest paragraf, fie în orele de clasă, fie în cadrul cercului de elevi.

V

În predarea ecuaţiilor şi sistemelor trigonometrice mă conduc după următoarele idei:

a) Introduc fiecare tip principal de ecuaţie sau sistem cu ajutorul unei probleme practice, de obicei o problemă de fizică, uneori de geometrie.

Mi-a folosit în acest scop mai ales articolul: „Probleme de geometrie şi fizică rezolvate prin ecuaţii trigonometrice" de I. M. Kipnis, publicate în Gazeta matematică şi fizică nr. 10 din 1952.

b) Sistematizez etapele principale de rezolvare ale ecuaţiilor.

c) Rezolv unele ecuaţii şi prin metoda grafică, care dă o verificare imediată a greşelilor mari din rezolvarea ecuaţiei.

Pentru a cîştiga interesul elevilor pentru studiul ecuaţiilor şi sistemelor trigonometrice rezolv probleme cu conţinut practic. Astfel la introducerea în capitolul respectiv, rezolv probleme de balistică, cu planul înclinat etc. care conduc la ecuaţii trigonometrice simple. Anunţ elevilor că vor repeta cîteva proprietăţi cunoscute din fizică pe care le vom folosi pentru a deduce necesitatea practică a studiului ecuaţiilor trigonometrice.

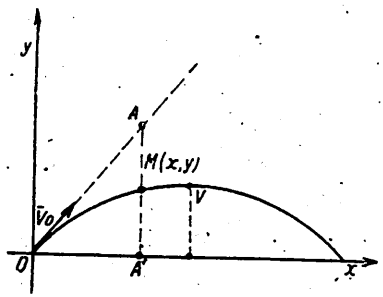


Fig. 56

Dacă mă opresc asupra unei probleme de balistică, în pregătirea lecţiei deduc *legea mişcării unui corp greu aruncat cu viteză iniţială v_0 înclinată cu un unghi α faţă de orizontală* (fig. 56). După t secunde de la aruncare, corpul ar trebui să fie în A; din cauza acceleraţiei gravităţii el se află în M; poziţia corpului material la timpul t, este dată prin coordonatele sale faţă de axele xOy:

$$x = \overline{OA'}$$

$$y = \overline{MA'} = \overline{AA'} - \overline{AM}$$

în care $$OA' = OA \cdot \cos\alpha = t\cos\alpha$$

căci, dacă nu ar exista acceleraţia gravităţii, corpul ar parcurge traiectoria rectilinie $OA = v_0 t$

Deci $$\boxed{x = v_0 \cdot t \cos \alpha}$$

În acelaşi fel se obţine

$$AA' = v_0 t \sin \alpha \text{ şi } AM = -\frac{1}{2} g t^2$$

Ultima relaţie reprezintă distanţa pe care corpul ar parcurge-o în căderea liberă în t secunde, deci

$$\boxed{y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2}$$

P r o b l e m a I. *Cunoscînd viteza iniţială a unui proiectil* $V_0 = 300$ *m/s şi distanţa orizontală* $d = 1200$ *m la care trebuie să ajungă proiectilul, să se calculeze unghiul de tragere şi timpul după care ajunge la ţintă.*

Indicaţie. Înlocuind în ecuaţiile mişcării $v_0 = 300$, $x = 1200$ şi $y = 0$ se obţine din prima ecuaţie

$$t = \frac{4}{\cos \alpha}$$

şi din ecuaţia a doua (excluzînd $t = 0$)

$$t = \frac{600 \sin \alpha}{9{,}81}$$

adică

$$\frac{4}{\cos \alpha} = \frac{600 \sin \alpha}{9{,}81}$$

sau

$$\boxed{\sin 2\alpha = \frac{9{,}81}{75}} \quad (1)$$

Din tabele se obţin valorile

$\alpha' = 3°45'$ (tragere de distrugere)

$\alpha'' = 86°15'$ (tragere pentru doborîre)

şi timpurile respective

$$t' = 4 \text{ s}; \quad t'' = 61 \text{ s}.$$

Spun elevilor că relaţia (1) care determină unghiul şi este de forma

$$\sin x = a$$

se numeşte *ecuaţia trigonometrică simplă* şi se rezolvă astfel.

Etapa I. Se determină cel mai mic argument x_0 cu ajutorul tabelelor.

Etapa II. Se deduc toate valorile folosind formulele de periodicitate; în cazul ecuaţiei din problemă:

$$x = 2K\pi + x_0$$
$$x = (2K + 1)\pi - x_0$$

Etapa III. Se reţin numai valorile acceptabile pentru problema propusă; în cazul problemei rezolvate $0 < \alpha < 90°$, adică $0 < 2\alpha < 180°$. În aceeaşi oră mai rezolv o problemă cu planul înclinat. Deduc descompunînd greutatea corpului pe planul înclinat după BC (fig. 57) şi perpendicular în M la BC,

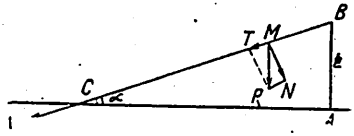


Fig. 57

$$MT = MP \sin^{\circ}\alpha$$

Însemnînd cu x spaţiul parcurs $x = MT$ şi înlocuind $MP = \frac{1}{2} gt^2$ avem:

$$(2) \quad \boxed{x = \frac{1}{2} gt^2 \cdot \sin \alpha}$$

Problema II. *Un corp se coboară pe un plan înclinat şi parcurge 20 m în 5 secunde. Să se afle înclinarea planului faţă de orizont şi viteza la care ajunge mobilul, neglijînd frecarea.*

Soluţie. Din ecuaţia (2) se obţine

$$\sin \alpha = 0{,}1134$$

Elevii recunosc că este o ecuaţie trigonometrică simplă şi rezolvînd-o după etapele indicate obţin

$$\alpha = 6° 3' \ (0° < \alpha < 90°)$$

Viteza corpului coborînd pe planul înclinat de la înălţimea h este

$$v = \sqrt{2gh} = 6{,}06 \text{ m/s}.$$

Observație. În fixarea cunoștințelor elevii dau exemple și de alte ecuații trigonometrice simple $\cos x = a$; $\operatorname{tg} x = b$ și repetă etapele de rezolvare și formulele de periodicitate respective.

Studiul ecuațiilor trigonometrice de forma

$$a \sin x + b \cos x = c$$

îl încep cu problema „înotătorul" care place elevilor și îi interesează, arătîndu-le cum pot folosi cunoștințele teoretice în cele mai variate probleme pe care le pune viața.

P r o b l e m a I I I . *Viteza apei unui rîu este de* v *m/sec. iar viteza unui înotător în apă stătătoare este de* v_1 *m/sec. Sub ce unghi* x *format cu direcția perpendiculară pe cursul apei trebuie să înoate înotătorul ca să ajungă în punctul* B *al malului celălalt, la o distanță* h *de punctul* C, C *fiind în dreptul punctului de plecare* A.

Lățimea rîului este egală cu l m.

Aplicații: $h = l$, $v = v_1$

Soluții. Fie $AC = l : BC = h$

Vectorul AA'', a cărui direcție trece prin B este viteza mișcării ce trebuie să rezulte din compunerea vitezei $\bar{v}$ a apei și a vitezei $\bar{v}_1$ a înotătorului. Din triunghiul $AA'A'''$ rezultă:

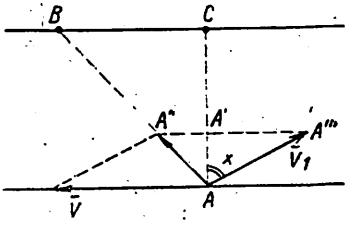


Fig. 58

$$\sin x = \frac{A'A'''}{v_1} = \frac{A''A''' - A'A''}{v_1}$$

Din asemănarea triunghiurilor $A'A''A$ și CBA

se calculează $A'A'' = \frac{h\,v_1}{l} \cdot \cos x$

Înlocuind în relația precedentă se obține

$$v_1 \sin x = v - \frac{h\,v_1}{l} \cdot \cos x$$

adică *ecuația trigonometrică*

$$\boxed{lv_1 \sin x + h\,v_1 \cos x = vl}$$

Ea este de forma $a \sin x + b \cos x = c$ a cărei reducere la două ecuații trigonometrice simple se obține folosind metoda unghiului auxiliar (cunoscută elevilor)

$$\sin (x + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ unde } \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$$

În cazul problemei

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{l}, \quad \alpha = \operatorname{arc\,tg} = \frac{h}{l} \text{ și } \sin (x + \alpha) = \frac{lv}{v_1 \sqrt{l^2 + h^2}}$$

În cazul particular ecuația este

$$\sin x + \cos x = 1$$

Pentru care $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, deci

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} 1 = 45°; \quad \sin (x + 45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

adică, cel mai mic argument pozitiv este

$$(x + 45°) = 45°$$

și aplicînd formulele de periodicitate

$$x + 45° = 360° K + 45°$$

$$x + 45° = (2K + 1)\, 180° - 45°$$

singura soluție acceptabilă ($0 \leqslant x \leqslant 90°$) este $x = 0$; deci în acest caz înotătorul pleacă perpendicular pe direcția apei.

Observații. O problemă care interesează în mod deosebit pe elevi este problema „Șmeului" (N. N. Bucholtz „Culegeri de probleme de mecanică rațională"). În rezolvarea acestei probleme urmăresc, în afară de menținerea și dezvoltarea interesului față de studiul ecuațiilor trigonometrice, și:

a) recapitularea metodei proiecțiilor pentru a înțelege și fixa cît mai temeinic noțiunile fundamentale despre funcțiile trigonometrice;

b) recapitularea formulelor care exprimă relațiile dintre laturile și unghiurile triunghiurilor, pe care încerc astfel să nu le părăsesc complet în toată această perioadă de studiu al formulelor (operații cu arce, identități și ecuații trigonometrice).

Problema IV. *Un zmeu* AB *de greutate* P, *legat printr-un fir de punctul fix* C, *este ținut în echilibru de presiunea vîntului,*

perpendicular pe planul AB. *Să se determine unghiul* φ *dintre planul zmeului şi orizontală şi mărimea presiunii* $\overline{N}$ *a vîntului, fiind cunoscute unghiul* α *dintre fir şi orizontală şi tensiunea firului* $\overline{T}$.

Să se efectueze calculul pentru $\overline{P} = 2\ kg$, $\overline{T} = 6\ kg$, $\varphi = 45°$.

Soluţie. Metoda proiecţiilor. Condiţiile de echilibru sînt

$$X = X_1 + X_2 + X_3 = 0$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 = 0$$

în care X, Y sînt proiecţiile rezultantei celor trei forţe $\overline{P}$, $\overline{T}$, $\overline{N}$ care acţionează asupra zmeului şi (X_i, Y_i) proiecţiile acestora pe două axe perpendiculare alese convenabil, de exemplu, paralela Ox cu orizontala şi perpendiculara pe aceasta în O, ca axă Oy (fig. 59).

Proiecţiile forţelor $\overline{T}$, $\overline{N}$ şi $\overline{P}$ pe axele Ox şi Oy le scriem în tabloul:

	X	Y
$\overline{T}$	$T \cos \alpha$	$T \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -T \sin \alpha$
$\overline{N}$	$N \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -N \sin \varphi$	$N \cos \varphi$
$\overline{P}$	0	$-P$
Rezultanta	$X = T \cos \alpha - N \sin \varphi$	$Y = N \cos \varphi - T \sin \alpha - P$

Condiţiile de echilibru sînt deci:

$$\begin{cases} N \sin \varphi - T \cos \alpha = 0 \\ N \cos \varphi - T \sin \alpha = P \end{cases}$$

Semnalez aici un artificiu: cînd în ecuaţie sinusul şi cosinusul au aceiaşi coeficienţi, eliminarea unghiului se face uşor făcînd suma pătratelor ecuaţiilor:

$$N \sin \varphi = T \cos \alpha$$

$$N \cos \varphi = T \sin \alpha + P$$

Ridicînd la pătrat

$$N^2 (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = T^2 \cos^2\alpha + (T \sin \alpha + P)^2$$

din care se deduce (ţinînd seama că $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$)

$$N = \sqrt{P^2 + T^2 + 2PT \sin \alpha}$$

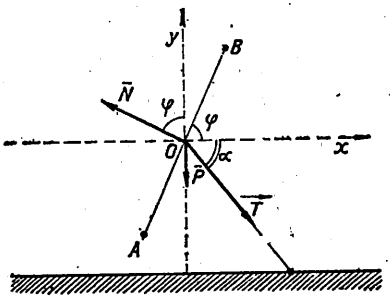


Fig. 59

La fel arăt elevilor că eliminarea lui N se face împărţind ecuaţiile parte cu parte

$$\operatorname{cotg} \varphi = \frac{T \sin \alpha + P}{T \cos \alpha}$$

$$\operatorname{cotg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha + \frac{P}{T \cos \alpha}$$

ecuaţie trigonometrică simplă care determină pe φ.

În cazul particular se obţine: $N = 7{,}35$ kg, $\varphi = 34°12'$.

Metoda trigonometrică. Problema se rezolvă simplu cu ajutorul triunghiului forţelor (fig. 60) folosind relaţiile lui Stevin (teorema sinusurilor) şi teorema cosinusului:

$$\frac{N}{\sin [180° - (90° - \alpha)]} = \frac{T}{\sin \varphi}$$

adică

$$\frac{N}{\cos \alpha} = \frac{T}{\sin \varphi}$$

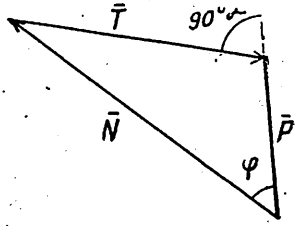


Fig. 60

şi

$$N = \sqrt{P^2 + T^2 - PT \cos [180° - (90° - \alpha)]}$$

$$N = \sqrt{P^2 + T^2 - 2\,PT \sin \alpha}$$

În lecţiile introductive la „Sisteme de ecuaţii trigonometrice“ procedez în acelaşi fel, rezolvînd probleme simple de fizică sau de tehnică, care conduc la sisteme de ecuaţii trigonometrice

și apoi încerc, pe cît permite varietatea formelor, o sistematizare a sistemelor și rezolvării lor.

P r o b l e m a V. *Trei greutăți de* 8; 10; 12 *kg sînt atîrnate de*

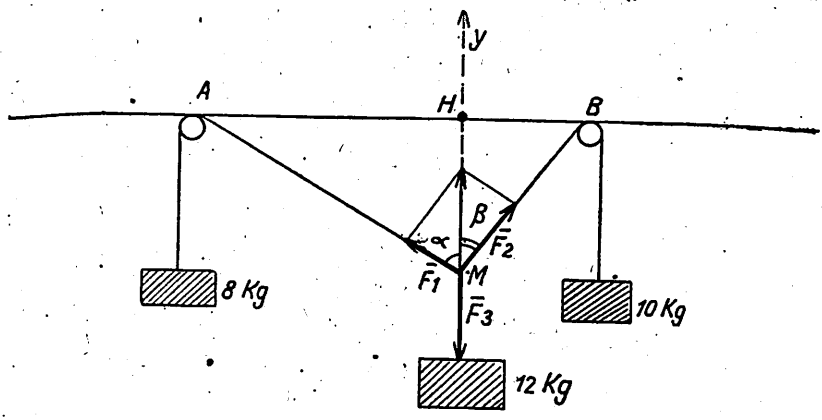


Fig. 61

capetele a trei fire înodate în M. *Cele dintîi două fire trec prin două inele lustruite* A *și* B, *iar direcția celui de-al treilea este verticală.*

Să se determine poziția firelor cînd echilibrul e stabil.

Soluție. M e t o d a p r o i e c ț i i l o r. Poziția de echilibru este determinată de unghiurile α și β (fig. 61). Ne sînt necesare deci două ecuații pe care le obținem proiectînd cele trei forțe pe două axe (de exemplu AB și perpendiculara MH, în H pe AB).

Avem:

	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_2$	$\bar{F}_3$	Rezultanta
X	$F_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -F_1 \sin\alpha$	$F_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = F_2 \sin\beta$	0	$-F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\beta$
Y	$F_1 \cos\alpha$	$F_2 \cos\beta$	$-F_3$	$F_1\cos\alpha + F_2 \cos\beta - F_3$

Condițiile de echilibru sînt deci:

$$\begin{cases} F_1 \sin\alpha - F_2 \sin\beta = 0 \\ F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta = F_3 \end{cases}$$

Un sistem de două ecuații cu două necunoscute α și β.

Indic elevilor că metoda generală de rezolvare este substituția.

Din prima ecuație se obține $\sin\beta = \frac{F_1}{F_2}\sin\alpha$, care înlocuită în ecuația a doua dă:

$$F_1\cos\alpha + F_2\sqrt{1-\frac{F_1^2}{F_2^2}\sin^2\alpha} = F_3$$

$$F_1\cos\alpha + \sqrt{F_2^2 - F_1^2\sin^2\alpha} = F_3$$

$$F_2^2 - F_1^2\sin^2\alpha = F_3^2 - F_1F_2\cos\alpha + F_1^2\cos^2\alpha$$

$$2F_1F_2\cos\alpha = F_1^2 + F_3^2 - F_2^2$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{F_1^2 + F_3^2 - F_2^2}{2F_1F_3}}$$

din care se determină unghiul α; unghiul β este dat de ecuația

$$\sin\beta = \frac{F_1}{F_2}\sqrt{1-\left(\frac{F_1^2+F_3^2-F_2^2}{4F_1^2F_3^2}\right)^2}$$

$$\sin\beta = \frac{1}{2F_2F_3}\sqrt{(2F_1F_2 - F_1^2 - F_3^2 + F_2^2)(2F_1F_3 + F_1^2 + F_3^2 - F_2^2)}$$

$$\sin\beta = \frac{1}{2F_2F_3}\sqrt{[F_2^2 - (F_1-F_3)^2][(F_1+F_3)^2 - F_2^2]}$$

$$\boxed{\sin\beta = \frac{1}{2F_2F_3}\sqrt{(-F_1+F_2+F_3)(F_1-F_2+F_3)(F_1+F_2-F_3)(F_1+F_2+F_3)}}$$

În cazul particular se obține $\cos\alpha = \frac{9}{16}$, $\alpha = 55°\,46'$ etc.

Metoda II. În triunghiul forţelor cunoaştem cele trei laturi F_1, F_2, F_3. Aplicînd teorema cosinusului avem

$$\cos \alpha = \frac{F_1^2 + F_3^2 - F_2^2}{2 F_1 F_3}$$

care determină pe α şi, după teorema sinusurilor avem:

$$\frac{\sin \beta}{F_1} = \frac{\sin \alpha}{F_2}$$

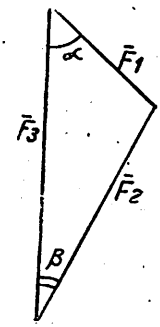


Fig. 62

relaţie obţinută şi prin metoda proiecţiilor. În rezolvare nu am folosit de la început datele iniţiale pentru a obişnui pe elevi să generalizeze şi să regăsească (pe cale analitică) teorema cosinusului şi să-şi reamintească calculul făcut la deducerea formulelor unghiurilor, cînd se cunosc laturile. Elevii regăsesc cu oarecare uimire calculul, îi bucură cînd îl regăsesc şi îl reţin.

Observare. O problemă interesantă din fizică este aceea a echilibrului unei figuri plane nedeformabile. Recapitulez cu elevii:

a) Momentul unei forţe $\bar{F}$ în raport cu un punct este egal cu produsul dintre mărimea forţei şi distanţei de la punctul fix la direcţia forţei. Dacă punctul fix se află pe direcţia forţei, momentul în raport cu acest punct este nul. Arăt elevilor că, în rezolvarea problemelor, la alegerea punctului fix vom ţine seama de această proprietate. Vom alege ca punct fix acela prin care trec cît mai multe direcţii ale forţelor.

b) Condiţiile de echilibru ale unei figuri plane nedeformabile sînt:

1. Rezultanta forţelor să fie nulă.
2. Suma momentelor forţelor (momentul rezultant) în raport cu un punct oarecare din plan, să fie nul.

P r o b l e m a VI. *Se atîrnă de punctul* O *o bară grea omogenă* OAB *formată din două segmente* OA = a, OB = b, *înclinate una faţă de alta cu un unghi* φ.

Să se calculeze unghiurile α *şi* β *făcute de verticala punctului de suspensie* O *cu* OA *şi* OB *în poziţia de echilibru.*

Soluţie. Problema are două necunoscute α şi β între care există relaţia

$$\alpha + \beta = \varphi$$

A doua ecuație se obține scriind că suma momentelor forțelor în raport cu un punct fix, de exemplu punctul O, este nulă:

$$\begin{cases} M\bar{P}_A = -P_A \cdot \dfrac{a}{2} \sin \alpha \\ M\bar{P}_B = P_B \cdot \dfrac{b}{2} \sin \beta \end{cases}$$

căci forțele $\bar{P}_A$, $\bar{P}_B$ acționează în centrul de greutate al barelor (mijloacele lor) și sînt verticale (fig. 66). Barele OA și OB fiind omogene greutățile sînt proporționale, cu a și b, deci

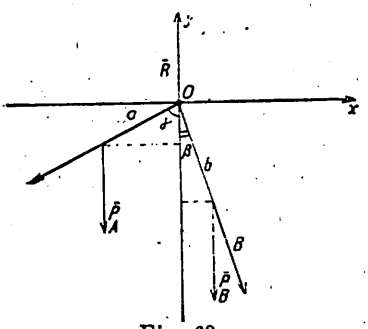


Fig. 63

$$-a \frac{a}{2} \sin \alpha + b \frac{b}{2} \sin \beta = 0$$

$$a^2 \sin \alpha - b^2 \sin \beta = 0$$

Necunoscutele α și β sînt deci soluțiile sistemului de ecuații trigonometrice:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \varphi \\ a^2 \sin \alpha - b^2 \sin \beta = 0 \end{cases}$$

Arăt elevilor că sistemul poate fi rezolvat prin metoda generală (substituției) $\beta = \varphi - \alpha$

$$a^2 \sin \alpha - b^2 \sin (\varphi - \alpha) = 0$$

care conduce la ecuația trigonometrică simplă

$$(a^2 + b^2 \cos \varphi) \sin \alpha - b^2 \sin \varphi \cos \alpha = 0$$

adică

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b^2 \sin \varphi}{a^2 + b^2 \cos \varphi}$$

Observație. 1. Arăt elevilor că sistemele de acest fel se scriu sub forma

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \varphi \\ \dfrac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \dfrac{a^2}{b^2} \end{cases}$$

și în acest caz rezolvarea este cunoscută de ei.

Încerc să-i conduc să stabilească analogia cu demonstrația formulei lui Neper cunoscută de ei

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}$$

$$\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}$$

Adică sistemul se reduce la sistemul algebric:

$$\alpha + \beta = \varphi$$

$$\alpha - \beta = 2\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)$$

2. Indic elevilor că în același fel se rezolvă și sistemele de forme

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \varphi \\ \dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \dfrac{a}{b} \end{cases} \text{ și } \begin{cases} \alpha + \beta = \varphi \\ \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \dfrac{a}{b} \end{cases}$$

3. Atrag atenția elevilor că în problemă nu a fost necesar să folosim și celelalte ecuații de echilibru: sumele proiecțiilor forțelor să fie nule.

Aceste ecuații ne dau reacțiunea $\overline{R}$ exercitată de punctul de sprijin. Avem (proiecția pe orizontală este identic nulă) proiectînd vertical în O

$$P_A - P_B + R = 0;\ R = P_A + P_B$$

VI

În acest capitol expun unele probleme cu conținut tehnic fără detalii care să îngreuneze înțelegerea lor.

Problemele sînt alese, unele adaptate, din cărțile deja citate N.N. Bucholtz: Culegerea de probleme de mecanică rațională; I.N. Veselovschi: Mecanica și rezistența materialelor; A.I. Raskatov. Probleme de electrotehnică; Aurelian Stan și Mircea Grumăzescu Mecanica tehnică; Ernest Abason: Exerciții de mecanică.

Rezolvarea acestor probleme stimulează interesul elevilor şi îi ajută la fixarea şi aprofundarea cunoştinţelor.

(1) *În timpul strunjirii unei piese, asupra cuţitului unui strung acţionează trei forţe:*

$\overline{F}_1$, *verticală* ($F_1 = 1800$ kg)

$\overline{F}_2$, *orizontală* ($F_2 = 630$ kg)

$\overline{F}_3$, *orizontală, după axul piesei — perpendiculară pe* $\overline{F}_2$, ($F_3 = 450$ kg).

Să se determine mărimea rezultantei şi unghiurile pe care le face cu direcţiile forţelor.

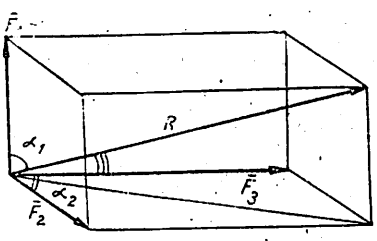


Fig. 64

Indicaţie. În pregătirea acestei probleme, recapitulez teorema relativă la diagonala paralelipipedului dreptunghic; aplicînd la paralelipipedul forţelor $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}$ dacă cele trei forţe ar fi egale ar rezulta $R = F\sqrt{3}$ şi paralelipipedul forţelor ar fi un cub. Unghiurile se obţin din triunghiuri dreptunghice:

$$\cos \alpha_1 = \frac{F_1}{R}\ ;\ \cos \alpha_2 = \frac{F_2}{R}\ ;\ \cos \alpha_3 = \frac{F_3}{R}.$$

(2) *Un glob electric de* G *kg este suspendat în mijlocul unei străzi cu trei cabluri. Unul din cabluri este fixat de zidul unei clădiri la o înălţime de* a *m; celelalte cabluri de aceeaşi lungime şi dispuse simetric faţă de primul cablu sînt fixate de zidul clădirii opuse, la o înălţime de* b *m. Distanţa între punctele de suspensie ale acestor două cabluri este de* c *m. Lăţimea străzii este de* l *m, iar nodul de legătură a cablurilor cu* d *m deasupra străzii. Să se determine tensiunile din cele trei cabluri. Caz particular:* G = 55 *kg*; a = 8 *m*; b = 6,5 *m*; c = 2,5 *m*; l = 9 *m*; d = 5 *m*.

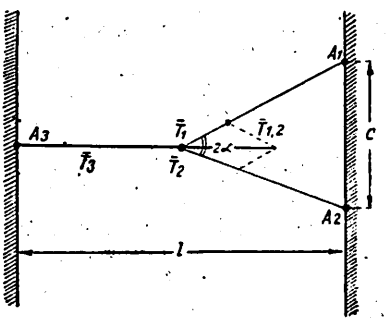


Fig. 65

*(Examen de admitere în Școala de Poduri și Șosele, anul 1919)**.

Indicație. Asupra lămpii acționează trei forțe: greutatea ei $\overline{G}$, tensiunea $\overline{T}_{1,2}$ (rezultanta tensiunilor $\overline{T}_1$ și $\overline{T}_2$, a cărei direcție este în același plan cu tensiunea $\overline{T}_3$ căci are direcția bisectoarei cablurilor OA_1 și OA_2) și tensiunea $\overline{T}_3$. Proiectînd pe sistemul de axe format de orizontala și verticala în 0 avem:

	X	Y
$\overline{T}_{1,2}$	$T_{1,2}\cos\alpha_1$	$T_{1,2}\sin\alpha_1$
$\overline{T}_3$	$T_3\cos(\pi-\alpha_2)=$ $=-T_3\cos\alpha_2$	$T_3\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_2\right)=$ $=T_3\sin\alpha_2$
$\overline{G}$	0	$-G$
Rezultanta	$T_{1,2}\cos\alpha_1-$ $-T_3\cos\alpha_2$	$T_{1,2}\sin\alpha_1+$ $+T_3\sin\alpha_2-G$

Condițiile de echilibru sînt

$$(1)\begin{cases} T_{1,2}\cos\alpha_1 - T_3\cos\alpha_2 = 0 \\ T_{1,2}\sin\alpha_1 + T_3\sin\alpha_2 = G \end{cases}$$

în care (calculînd ca în exemplele precedente)

$$T_{1,2} = 2\,T_1\cos\alpha$$

și $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\frac{C}{2}}{\frac{l}{2}} = \dfrac{c}{l}$ $\quad T_1 = \dfrac{T_{1,2}}{2\cos\alpha}$

adică $T_1 = T_2 = \dfrac{\sqrt{b^2+c^2}}{2b}\cdot T_{1,2}$ (2)

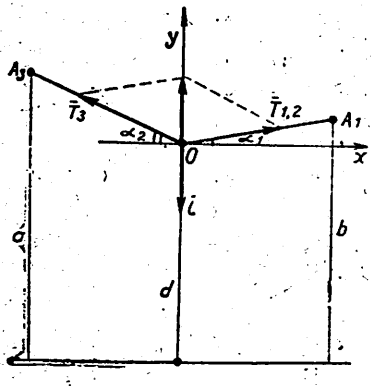


Fig. 66

* *Ernest Abason* : Exerciții de mecanică.

Rezolvînd sistemul (1) avem:

$$T_{1,2} = \frac{G \cos \alpha_2}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)} \qquad T_3 = \frac{G \cos \alpha_1}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)}$$

În care unghiurile α_1 și α_2 sînt date de $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{b-d}{\frac{l}{2}} = \frac{2(b-d)}{l}$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{a-d}{\frac{l}{2}} = \frac{2(a-d)}{l}$$

Relația (2) determină tensiunile $T_1 = T_2$ în cablurile egale. În cazul numeric avem (folosind tabele de linii naturale cu trei zecimale):

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{2 \cdot 1{,}5}{9} \approx 0{,}333 \qquad \alpha_1 \approx 18°28'$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{2 \cdot 3}{9} \approx 0{,}666 \qquad \alpha_2 \approx 33°40'$$

Calculînd, se obțin tensiunile:

$$T_1 = P_2 \approx 29{,}5 \text{ kg}$$

$$T_3 \approx 65{,}5 \text{ kg}$$

Observație. Problema se rezolvă simplu prin metoda trigonometrică folosind triunghiul forțelor.

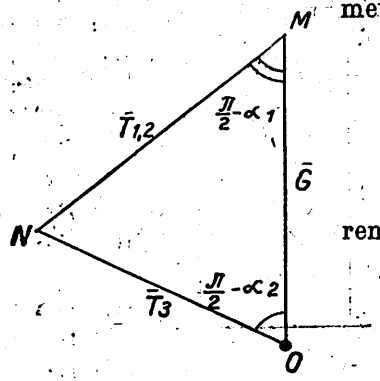


Fig. 67

$$\sphericalangle MON = \frac{\pi}{2} - \alpha_2$$

$$\sphericalangle OMN = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$$

Aplicînd relațiile lui Stevin (teorema sinusurilor) avem:

$$\frac{T_{1,2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right)} = \frac{T_3}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right)} = \frac{G}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)}$$

din care rezultă $T_{1,2} = \dfrac{G \cos \alpha_2}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)}$ $\qquad$ $T_3 = \dfrac{G \cos \alpha_1}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)}$

relații aflate și prin metoda precedentă;

(3) *Pentru a se putea turna fonta topită în forme, un cubilou în greutate de* G *kg, atîrnat de o macara, se înclină cu un unghi* α *față de verticală. Să se determine:*

1) *Forța orizontală* $\overline{F}$ *necesară pentru a înclina cubiloul.*

2) *Tensiunea în cablul de susținere a cubiloului*.*

Indicație. Metoda I. Proiectînd pe orizontala și verticala punctului de suspensie O, forțele $\overline{F}$ și $\overline{G}$ care acționează asupra cubiloului ($\overline{T}$ tensiunea cablului) avem:

	X	Y
$\overline{G}$	0	$-G$
$\overline{F}$	F	0
$\overline{T}$	$T \sin (\pi + \alpha) = -T \sin \alpha$	$T \cos \alpha$
Rezultanta	$F - T \sin \alpha$	$-G + T \cos \alpha$

Condițiile de echilibru

$$F - T \sin \alpha = 0$$

$$G - T \cos \alpha = 0$$

determină mărimile tensiunii $\overline{T}$ și ale forței orizontale $\overline{F}$

$$T = \frac{G}{\cos \alpha} \qquad F = G \operatorname{tg} \alpha$$

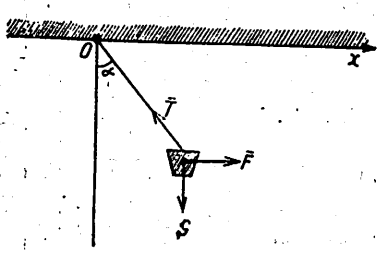


Fig. 68

* Aurelian Stan și Mircea Grumăzescu: „Mecanică tehnică".

Metoda II. Triunghiul forţelor este dreptunghic şi avem:

$$F = G \operatorname{tg} \alpha \qquad T = \frac{G}{\cos \alpha}$$

Metoda III. În cazuri numerice, alegînd o scară convenabilă, putem rezolva grafic.

Dacă de exemplu avem $G = 100$ kg şi $\alpha = 30°$, alegem scara 25 kg = 1 cm. Se cunosc: cateta triunghiului dreptunghic şi unghiul alăturat de 30°; se măsoară laturile şi se transformă în kg.

(4) *Troleul unui tramvai are* G *kg şi forma şi dimensiunile din figură. Rola* R *are greutatea* G′ *kg, trebuie să exercite pe*

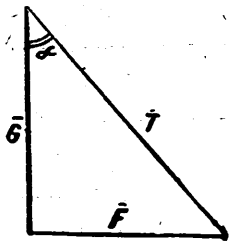


Fig. 69

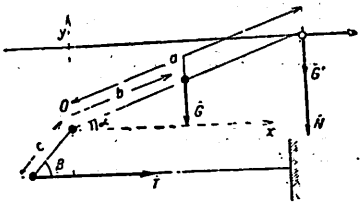


Fig. 70

cablu o apăsare de N *kg. Care este tensiunea în resortul troleului? Caz particular*: G=11 *kg*; G′ = 3,8 *kg*; N = 9 *kg*; a = 2,7 *m*; b = 0,9 *m*; c = 0,23 *m*; $\alpha = 30°$; $\alpha = 15°$.

Indicaţie. Forţele care acţionează troleul sînt $\bar{G}$, $\bar{G}'$, $\bar{N}$, $\bar{T}$. Pentru poziţia de echilibru momentul forţelor este nul (aşa cum am arătat în cap. V, problemele de acest fel le pregătesc recapitulînd noţiunea de moment în raport cu un punct şi de echilibru al corpurilor nedeformabile).

Calculînd momentele în raport cu punctul O avem

$$-G \cdot b \cos \alpha - G' \cdot a \cos \alpha - G'' \cdot a \cos \alpha + T \cdot c \cos \beta = 0$$

din care se deduce că tensiunea în resortul troleului este

$$T = \frac{(G \cdot b + G' \cdot a + G'' \cdot a) \cos \alpha}{c \cos \beta} =$$

$$= \frac{(11 \cdot 0{,}9 + 3{,}8 \cdot 2{,}7 + 9 \cdot 2{,}7) \cos 30°}{0{,}23 \cos 15°} \approx 173{,}4 \text{ kg}.$$

(5) *Un acoperiş* $Z_1 Z_2 = 2\,l$, *înclinat cu unghiul* α *pe orizontală este rezemat de două ziduri de înălţimi diferite. Greutatea acoperişului fiind* P *kg, să se determine reacţiunile în ziduri.*

Caz particular: $P = 500$ kg; $\alpha = 30°$.

Indicaţie. Forţele care menţin acoperişul în echilibru sînt: $\overline{P}$ greutatea acoperişului, care acţionează în centrul de greutate G al acoperişului şi reacţiunile $\overline{R}_1$ şi $\overline{R}_2$ în Z_1 şi Z_2. $\overline{R}_2$ este normală la acoperişul $Z_1 Z_2$ iar $\overline{R}_1$ se descompune în două reacţiuni $\overline{R}_1'$ şi $\overline{R}_1''$ în direcţie orizontală şi a doua verticală. Condiţiile de echilibru sînt:

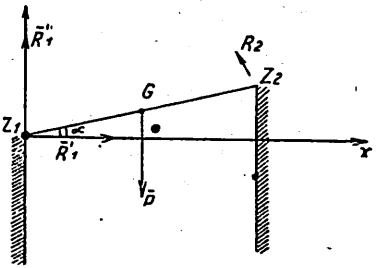


Fig. 71

a) Proiecţiile rezultantei pe axele X Z_1 Y trebuie să fie nule.

$$\begin{cases} R_1' + R_2 \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = 0 \\ R_1'' + R_2 \cos\alpha - P = 0 \end{cases}$$

b) Momentul rezultanţei în raport cu un punct fix (de exemplu Z_1) trebuie să fie nul.

$$-P \cdot l\cos\alpha + 2\,l \cdot R_2 = 0$$

Din ultima ecuaţie se determină reacţiunea R_2:

$$R_2 = \frac{P\cos\alpha}{2}$$

Înlocuind în primele două ecuaţii avem

$$\begin{cases} R_1' = R_2 \sin\alpha = \dfrac{P\sin\alpha\cos\alpha}{2} = \dfrac{P\sin 2\alpha}{4} \\ R_1'' = P - \dfrac{P\cos^2\alpha}{2} = \dfrac{P}{2}(2 - \cos^2\alpha) \end{cases}$$

cunoscînd proiecţiile lui $\overline{R}_1$ R_1' şi R_1'' pe două axe perpendiculare avem

$$R_1 = \sqrt{R_1'^2 + R_1''^2}$$

6) *Vătala unui război de ţesut execută o mişcare oscilatorie armonică a cărei ecuaţie este de forma* $y = a \sin \omega t$, *adică pentru*

$t = 0$; *vătala are poziția normală și cunoscînd lungimea vătalei* l *și lungimea de oscilație* $\alpha \leqslant 10°$ *de o parte și de alta a poziției de echilibru, se cere:*

1) *Să se determine amplitudinea, pulsația și perioada mișcării știind că trecînd prin poziția normală vătala are viteza liniară* $\bar{v}_0$.

2) *Să se deducă numărul de rotații ale manivelei care acționează biela vătalei, viteza și accelerația la timpul* t.

3) *În cît timp vătala va executa drumul de la poziția de echilibru la elongația maximă; dar prima jumătate a acestui drum?*

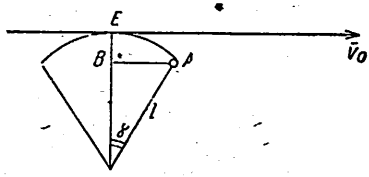


Fig. 72

Indicație. 1. Viteza mișcării este $v = a\omega \cos \omega t$. Trecînd la $t = o$ prin E cu viteza v_0 avem $v_0 = a\,\omega$ și deci pulsația este $\omega = \frac{v_0}{a}$ rad/sec. Amplitudinea pentru valorile mici ale lui α poate fi socotită egală cu segmentul AB

$$a = AB = l \sin \alpha$$

Ecuația mișcării este deci

$$Y = l \sin \alpha \cdot \sin \omega t = l \sin \alpha \cdot \sin \frac{V_0}{l \sin \alpha} \cdot t, \text{ căci } \omega = \frac{v_0}{l \sin \alpha}.$$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi l}{v_0} \cdot \sin \alpha$ este perioada mișcării vătalei, și frecvența:

$f = \frac{1}{T} = \frac{v_0}{2\pi l \sin \alpha}$ rotații pe secundă.

2. Numărul de rotații pe secundă este f; viteza și accelerația sînt $v = \omega l \cdot \sin \alpha \cdot \cos \omega t = v_0 \cdot \cos \omega t = v_0 \cdot \cos \left(\frac{v_0 t}{l \sin \alpha} \right)$

$$\gamma = -\omega^2 y = -\frac{v_0^2}{l^2 \sin^2 \alpha} \cdot l \sin \alpha \cdot \sin \omega t,$$

$$\gamma = \frac{v_0^2}{l \sin \alpha} \cdot \sin \frac{v_0}{l \sin \alpha} \cdot t$$

3. Făcînd $y = a$ avem

$$a = a \sin \omega t, \quad \omega t = \frac{\pi}{2}, \quad t = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{\frac{2 v_0}{l \sin \alpha}}$$

$$t = \frac{\pi l \sin \alpha}{2 v_0}$$

În acelaşi fel se află t pentru jumătatea acestui drum înlocuind $y = \frac{a}{2}$.

Aplicaţie numerică: $L = 1$ m; $\alpha = 10°$. În acest caz reprezintă şi graficele mişcării: elongaţia, viteza, acceleraţia aşa cum am arătat în cap. II.

(7) *Culisa* AB *se mişcă în ghidajul* K′K *şi* L′L. *În interiorul ei există un canal în care se mişcă o glisieră* M *legată printr-o articulaţie de bara* OM *de lungimea* a $= 10$ *cm, care se roteşte în jurul unui punct fix* O, *făcînd* 6 *ture pe minut. Să se determine viteza* v *de deplasare a culisei* AB, *în momentul cînd pistonul formează cu verticala unghiul* α; *caz particular* $\alpha = 30°$.

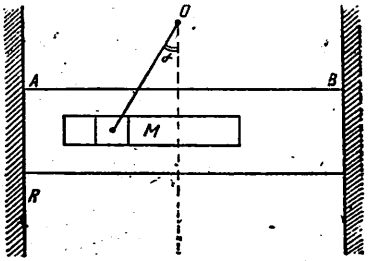


Fig. 73

Indicaţie. Spaţiul descris de culisa *AB* este $s = a \cos \omega t$ şi viteza $v = -a\omega \sin \omega t$.

Amplitudinea mişcării este a; frecvenţa fiind $f = 6$ ture/min perioada este $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{6}$ minute $= 10$ sec.

Pulsaţia va fi $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$ rad/sec. Viteza este deci reprezentată prin relaţia

$$v = -10 \frac{\pi}{5} \sin \frac{\pi t}{5}; \quad v = -2\pi \sin \frac{\pi t}{5}$$

Elevii reprezintă curbele

$$s = 10 \cos \frac{\pi t}{5}$$

$$v = -2\pi \sin \frac{\pi t}{5}$$

și deduc studiul mișcării; citesc pe grafic valoarea vitezei pentru o valoare oarecare $\frac{\pi t}{5} = \alpha$ și în particular pentru $\alpha = 30°$; se verifică prin calcul

$$v = -2\pi \sin 30° = -3{,}14 \text{ cm/sec.}$$

(8) *Pana* A, *avînd fețele înclinate cu un unghi* α *față de axul ei, este introdusă în adîncitura* BB_1 *prin forța* $\overline{Q}$. *Să se determine presiunea normală* N *exercitată pe fețe și forța* $\overline{P}$ *necesară pentru scoaterea penei. Coeficientul de frecare dintre fețele penei și pereții adînciturii este* $k = tg\ \varphi$.

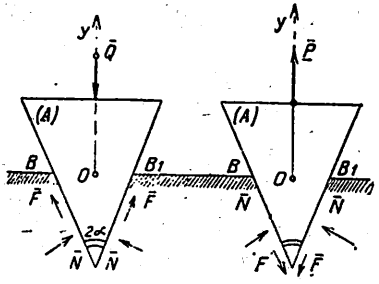


Fig. 74

Indicație. Dacă $\overline{F}$ este forța de frecare ea satisface relația $F \leqslant k\ N$ în care k este coeficientul de frecare, $k = tg\varphi$, și N reacțiunea normală între cele două suprafețe de contact. La introducerea în despicătură acționează asupra penei forțele: $\overline{Q}, 2\ \overline{N}$ și două forțe de frecare de mărime maximă $F = kN$ îndreptate în sens contrar mișcării. Proiectînd pe axa Oy (verticală) condiția de echilibru este $-Q + 2N\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 2F\cos\alpha = 0$

Înlocuind forța $F = kN$ avem:

$$Q = 2N\sin\alpha + 2Nk\cos\alpha$$

$$Q = 2N(\sin\alpha + k\cos\alpha)$$

Dar $k = tg\ \varphi$ și deci

$$Q = 2N(\sin\alpha + tg\varphi \cdot \cos\alpha) = 2N\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos\varphi}$$

presiunea normală este deci

$$N = \frac{Q\cos\varphi}{2\sin(\alpha+\varphi)}$$

În cazul scoaterii penei, procedînd în același fel (proiectînd pe Oy), ecuația de echilibru este

$$P + 2N\sin\alpha - 2kN\cos\alpha = 0$$

În același mod se deduce că forța $\overline{P}$ necesară scoaterii penei are mărimea $P = 2N\dfrac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos\varphi}$

(9) *Un laminor este format din doi cilindri cu diametrul* $2r = 50$ *cm care se învîrtesc în sens opus. Distanța între cilindri fiind* a *și coeficientul de frecare dintre fierul (înroșit) de laminat și cilindrii din fontă ai laminorului fiind* $k = 0{,}1$, *se cere:*

1. *Să se arate că pentru a fi posibilă apucarea tablei de laminat, unghiul de frecare dintre valțuri și tabla de laminat trebuie să fie mai mare ca unghiul la centru.*

2. *Să se determine grosimea maximă* b *a tablei care poate fi laminată.*

Indicație. 1. În momentul prinderii tablei de către valțuri, asupra ei acționează următoarele forțe: reacțiunile normale $\overline{N}$ pe direcția razelor AC și BD ale valțurilor, forțele de frecare $k\cdot\overline{N}$ pe direcția tangentelor la valțuri.

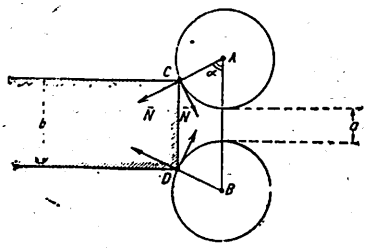


Fig. 75

Proiectînd pe orizontală ecuația de echilibru este $2N\cdot\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right) + 2kN\cos\alpha = 0$ adică $-\sin\alpha + k\cos\alpha = 0$, din care rezultă $\operatorname{tg}\alpha \leqslant k$ dar $k = \operatorname{tg}\varphi$. ($\varphi$ fiind unghiul de frecare între valțuri și fierul înroșit); deci $\operatorname{tg}\alpha \leqslant \operatorname{tg}\varphi$ adică: $\alpha \leqslant \varphi$.

2. Grosimea maximă (admisibilă) a tablei ce poate fi laminată este baza CD a trapezului $ABCD$, în care $AC = BD = r$; $AB = a + 2r$ și $CD = b$ fiind grosimea (admisibilă) avem

$$AB = b + 2r\cos\alpha$$

deci

$$b + 2r\cos\alpha = a + 2r$$
$$b = a + 2r(1 - \cos\alpha)$$

Folosind relația $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\varphi$ și înlocuind $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}$ rezultă $b \leqslant a + 2r\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{1 + k^2}}\right)$

În cazul numeric se obține $b \leqslant 0{,}75$ cm.

(10) *Banda dispozitivului unui oscilograf care servește la înregistrarea oscilațiilor armonice se deplasează de la stînga spre*

dreapta cu viteza $v_0 = 2m/sec$. *Corpul în oscilaţie descrie pe ea o sinusoidă a cărei ordonată maximă* AB = a = 2,5 *cm, iar lungimea undei* AC = λ = 8 *cm. Să se afle ecuaţia oscilaţiei armonice înregistrată de oscilograf, presupunînd că în momentul iniţial* t = 0, *punctul în mişcare se află în centrul de oscilaţie* 0.

Indicaţie. Amplitudinea mişcării oscilatorii este $AB = a =$ = 2,5 cm; perioada mişcării se deduce din

$$T = \frac{\lambda}{v_0} = \frac{8}{200} = 0{,}04 \text{ sec}$$

pulsaţia $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot 25 = 50\pi$ rad/sec

Ecuaţia mişcării oscilatorii armonice este:

$$x = a \cdot \cos(\omega t + \alpha)$$

Înlocuind obţinem $x = 2{,}5 \cos(50\pi t + \alpha)$

Faza iniţială α se determină prin condiţiile iniţiale date: pentru $t = 0$, $K = 0$, deci $2{,}5 \cos \alpha = 0$; $\cos \alpha = 0$; $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$

Ecuaţia mişcării este deci:

$$x = 2{,}5 \cos\left(50\pi t \pm \frac{\pi}{2}\right) \text{ sau}$$

$$x = 2{,}5 \sin(-50\pi t) = -2{,}5 \sin 50\pi t \text{ şi}$$

$$x = 2{,}5 \sin\left(\frac{\pi}{2} - 50\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 2{,}5 \sin 50\pi t$$

Graficele se obţin ca în cap. II. Propun elevilor să reprezinte şi viteza şi acceleraţia în mişcarea studiată.

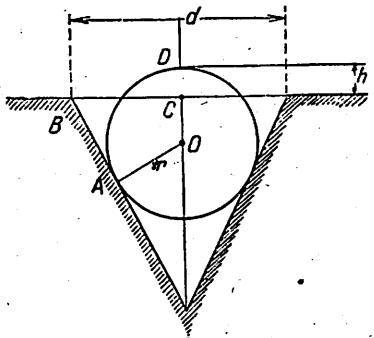


Fig. 76

(11) *Pentru măsurarea diametrului* d *al bazei unei găuri conice, avînd cunoscut unghiul de la vîrf* α, *se introduce o sferă de rază cunoscută* r *şi se măsoară distanţa* h *dintre punctul cel mai de sus al sferei şi planul bazei. Să se afle* d.

Indicaţie. Din triunghiurile dreptunghice *SAO* şi *SCB* avem

$$SO = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}; \quad SC = \frac{d}{2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

calculînd $CD = h$ (cunoscut) avem $h = SO + OD - SC$ adică

$$h = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} + r - \frac{d}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

$$h = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} + r - \frac{d\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$2h\sin\frac{\alpha}{2} = 2r + 2r\sin\frac{\alpha}{2} - d\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$d = \frac{2r + 2r\sin\frac{\alpha}{2} - 2h\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = 2\left[r\sec\frac{\alpha}{2} + (r-h)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right]$$

DIN EXPERIENȚA FOLOSIRII MODELELOR ÎN REZOLVAREA PROBLEMELOR DE GEOMETRIE ÎN SPAȚIU

MIRCEA BĂLEANU
Școala medie nr. 1
LUGOJ

I. Cum contribuie materialul concret la formarea reprezentărilor spațiale ale elevilor în diversele etape ale dezvoltării

Trecerea de la studiul geometriei plane la studiul geometriei în spațiu cere elevilor un efort deosebit. De aceea, primele lecții de geometrie în spațiu sînt pentru ei unele din cele mai grele. Pentru a ușura studierea de către elevi a geometriei în spațiu, profesorul trebuie mereu să se adreseze realității înconjurătoare, să folosească materialele didactice pe care le are la dispoziție sau să confecționeze el însuși, cu ajutorul elevilor, asemenea materiale.

Dacă în primele lecții de geometrie în spațiu din clasa a IX-a profesorul nu folosește material intuitiv, el observă repede că elevii singuri încearcă să-și imagineze, cu ajutorul creioanelor, al tocurilor și caietelor, poziția diferitelor drepte, unghiuri, plane etc. Aceste încercări ale lor scot și mai mult în evidență nevoia elevilor de a se sprijini pe materialul didactic. Tocmai de aceea eu caut să-l folosesc cît mai larg. Obișnuiesc să explic teoremele pe materialul adus de mine sau confecționat de elevi acasă, după îndrumările primite din partea mea. În acest fel, elevii văd concret faptul matematic care le apare evident. După ce am făcut acest prim pas, le cer să deseneze figura în caiete, un elev o desenează la tablă, notăm figura și apoi face demonstrația la tablă, pe desen. În lecția următoare, în cadrul verificării cunoștințelor, teorema se demonstrează la tablă sau se fac aplicații directe, fără material intuitiv.

La primele lecții de geometrie în spațiu am cerut elevilor, ca temă pentru acasă, să confecționeze modele simple, cu un material pe care-l au cu toții la îndemînă (o bucată de carton, pioneze, cîteva bețișoare și ață de cusut).

Problemele din culegerea anexată manualului ne oferă material bogat. Am ales problemele nr. 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17,.... şi am cerut fiecărui elev să rezolve cîte două probleme, dintre care pentru una să construiască şi modelul. Nu am dat cîte două probleme diferite fiecărui elev din clasă, ci am făcut combinaţii în aşa fel încît pînă la urmă un elev a avut de confecţionat acelaşi model cu încă 3—4 colegi de ai săi şi aceeaşi problemă de rezolvat numai pe caiet cu alţi 3—4 elevi.

Le-am dat indicaţii cum să facă construcţia: cartonul reprezintă planul, iar băţul fixat de carton cu pioneze este perpendicular pe plan. Prin punctele din plan unde am calculat că vor cădea picioarele oblicelor am trecut, cu un ac de cusut, firele de aţă, după ce le-am făcut un nod la capăt ca să se fixeze de plan, iar în celălalt capăt le fixăm de băţ (perpendiculară) tot cu ajutorul unei pioneze înfipte în vîrful acestuia. Proiecţiile oblicelor pe plan sînt desenate cu creionul pe carton, pentru ca să le putem şterge uşor cînd vom folosi materialul pentru altă problemă.

Desigur că trebuie să le dăm elevilor indicaţii amănunţite, aşa ca ei să nu ia lungimile la întîmplare, ci respectînd exact datele problemei, iar dacă acestea sînt prea mici sau prea mari (de ex. la problema 13, pag. 110) să lucreze la scară şi să indice într-un colţ al cartonului scara la care au lucrat.

După ce au rezolvat acasă problemele şi au construit modelele, elevii le-au demontat şi au venit cu materialul la şcoală. În pauza dinaintea lecţiei modelele au fost refăcute în cîteva minute. În clasă am procedat în felul următor: am cerut elevilor care au avut de făcut problema numai în caiet să verifice rezultatele obţinute de ei prin măsurători pe modelul colegilor care au făcut construcţia şi apoi să analizeze diferenţele de rezultate obţinute prin măsurare şi calcul. În felul acesta fiecărui elev i-a fost verificat modelul şi el, la rîndul său, a verificat un model.

Analiza rezultatelor a dus la discuţii interesante: s-a constatat că unele probleme au fost greşit rezolvate şi unele modele rău confecţionate (două cazuri). Deoarece am pretins maximum de precizie, am putut face aprecieri asupra posibilităţilor noastre de măsurare folosind echerul şi raportorul pentru uz didactic. Problemele nr. 10, 14 şi 15 (pag. 110) au prilejuit discuţii asupra segmentelor incomensurabile. Problema nr. 9 (pag. 110) a dus la discuţii prin faptul că nu am fixat elevilor care au avut să confecţioneze modelul, valori pentru „a“ şi „b“. Cei trei elevi care au construit acest model şi-au ales valori după voie şi au venit fiecare cu un model de alte dimensiuni. Din cauza diferenţelor,

am dat elevului V. care rezolvase problema pe caiet toate trei modelele pentru verificare.

Într-o altă oră, am împărțit clasa în patru grupe și le-am dat o serie de probleme pe care să le rezolve acasă, executînd și desenele și modelele. Grupa nr. 1 a primit spre rezolvare problema 25, grupa nr. 2 problema 26, grupa nr. 3 problema 27, iar grupa nr. 4 problema 28 (pag. 111—112 din culegere).

În ora viitoare, cîte două grupe și-au schimbat modelele între ele, fără a-și schimba și caietele. De exemplu, fiecare elev din grupa nr. 1 avea în față un model al unui elev din grupa nr. 3 și textul problemei din manual, care pentru el, era nouă. În aceste condițiuni am dat următoarea lucrare: „Să se rezolve problema și apoi, comparînd rezultatele obținute prin calcul cu cele obținute măsurînd modelul, să se facă un referat asupra felului în care a fost confecționat modelul de către elevul...“ Lucrările au fost corectate și analizate la lecția următoare, în decursul întregii ore.

Altă dată am procedat la fel, cu diferența că lucrările au fost efectuate acasă și nu în clasă. Elevii au măsurat în clasă doar modelele pe care trebuiau să le verifice și au luat schițe după ele pentru ca să poată face acasă referatul după schiță.

Știind că toată clasa vede modelele, elevii căutau să le execute cît mai corect, să le perfecționeze. De pildă elevul S., în loc să folosească o bucată de carton, a folosit capacul unei cutii de bomboane, iar bețele, ațele, pionezele, acele, le păstra în cutie. În ora următoare aproape toți au renunțat la cartoane și s-au folosit de cutii. Elevii se interesau și de modelele colegilor, de felul cum rezolvau aceștia problema și cum executau desenele ba, uneori, necesitatea lor de activitate practică, caracteristică vîrstei, îi făcea să lucreze acasă și modelele care nu le fuseseră cerute. Am constatat acest lucru într-o zi cînd, fiind de serviciu, am vizitat elevii de la internat.

Confecționarea modelelor îi ajută pe elevi să înțeleagă desenele, să-și dea seama ce reprezintă acestea. În cazul cînd un elev are de verificat un model greșit, el e obligat să facă un desen corect după datele problemei, arătînd greșelile modelului pe o schiță. În acest fel desenul începe să devină element de bază în studierea geometriei în spațiu.

Cu ajutorul modelelor, elevii ajung să rezolve destul de repede probleme grele. În această etapă trebuie să facem un pas mai departe. Propunem spre rezolvare probleme mai ușoare, dar fără modele, lucrînd numai pe desen. La început am folosit cretă

colorată, dar şi în această perioadă am adus în clasă permanent un aparat construit din rame şi plasă de sîrmă, care foloseşte la concretizarea problemelor de geometrie în spaţiu (pe care îl voi descrie mai jos). Nu trebuie să se înţeleagă că la început am lucrat numai cu metoda verificării reciproce a problemelor date acasă, ci s-au lucrat probleme noi în clasă cu ajutorul acestui aparat.

Desigur că nu putem renunţa brusc şi definitiv la construirea modelelor. Dacă avem probleme mai grele, este necesar să dăm elevilor indicaţii cum să le construiască. Dacă, de exemplu, vom da spre rezolvare acasă problemele nr. 20 şi 21 (pag. 115), va trebui să le cerem să facă şi modelul şi le vom spune că de data aceasta, vor folosi două beţe pentru a reprezenta perpendicularele CC', BB', din figura 150 (problema 20, pag. 115). Celelalte elemente pot fi reprezentate prin bucăţi de aţă. În cazul că această problemă este rezolvată în clasă, modelul trebuie construit dinainte de profesor, căci dacă am cere să se construiască modelul în timpul orei s-ar pierde prea mult timp.

Acum este momentul cînd trebuie dată toată atenţia folosirii raţionale a materialului intuitiv. După comportarea unor elevi sîntem tentaţi să-l reducem la minimum, iar după comportarea altora, să ne menţinem pe linia de pînă acum. În general, trebuie să folosim acum mai puţin material intuitiv, dar specificul clasei cu care lucrăm este acela care ne poate da măsura justă. Elevilor mai bine pregătiţi le putem da de pe acum probleme simple, care să fie rezolvate direct, fără nici o schiţă pe tablă. Iată un exemplu de asemenea problemă: „O oblică face cu planul un unghi de 30° şi are lungimea a. Să se găsească proiecţia ei pe plan". Pe aceste elemente am brodat mai multe exerciţii. La început foarte puţini elevi s-au anunţat la răspuns, dar după ce s-au obişnuit, majoritatea clasei a dat, cu o surprinzătoare rapiditate, răspunsuri corecte.

Trecînd la studiul unghiurilor diedre, am cerut elevilor să-şi procure două scoarţe tari de la un caiet vechi de format mare, sau două bucăţi de carton de formă dreptunghiulară cu dimensiunile 20/28 şi 20/25 cm. După ce au lipit aceste cartoane cu o hîrtie pe o muchie, ca să le poată da orice deschidere, în marginea rămasă la cartonul cel mai mare au făcut o tăietură perpendiculară pe muchie, în care au fixat raportorul în aşa fel încît mijlocul bazei lui să se aşeze chiar pe muchie, iar diviziunea 0 în planul în care s-a făcut tăietura. Unghiului diedru format de

aceste două plane i se dă mărimea dorită cu ajutorul unui cui ascuțit la ambele capete sau a unui ac (figura 1).

În felul acesta se poate obține orice unghi diedru, a cărui mărime poate fi citită pe gradațiile raportorului. Diferitele drepte cuprinse în unul din cele două plane se desenează ușor cu

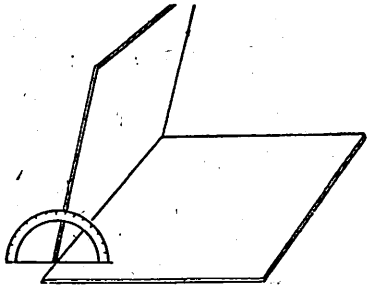


Fig. 1

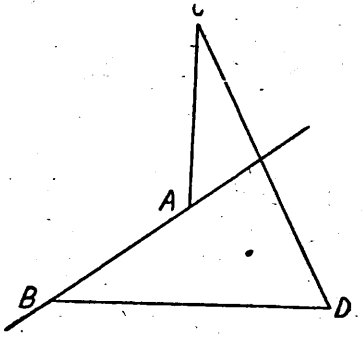


Fig. 2

creionul, iar dacă este vorba de drepte care nu sînt cuprinse în aceste plane ne folosim de bucăți de ață de cusut, pe care le trecem cu un ac prin cartoane. Perpendicularele sînt vechile bețe, fixate cu pioneze.

Nu vom cere elevilor să construiască cu acest material acasă decît machete pentru una-pînă la două probleme, pentru a-i obișnui să lucreze cu el. Elevii trebuie însă să aibă acest material la îndemînă, pentru ca atunci cînd nu pot rezolva o problemă numai după desen să se ajute cu el.

Tot cam în acest timp obișnuiesc să cer elevilor, să rezolve unele probleme (de exemplu problema nr. 8, pag. 119) numai pe o schiță simplă. Ei vor desena numai muchia diedrului, vor lua punctele A și B, vor ridica perpendicularele pe muchie în cele două fețe imaginate și vor calcula distanța CD (fig. 2).

În partea a doua a geometriei în spațiu (clasa a X-a), rolul materialului intuitiv scade, necesitatea lui nu se simte decît în anumite ocazii.

II. Material confecționat cu mijloace proprii și material fabricat

Elevilor din clasa a X-a nu le cer să-și confecționeze material intuitiv pentru a se folosi de el acasă, în rezolvarea diferitelor probleme. Cu ajutorul elevilor am confecționat însă aparatul cu

rame și plasă de sîrmă, lădița cu găuri, scheletele poliedrelor (le voi descrie mai jos), pentru a le folosi la clarificarea problemelor mai grele în clasă.

Este oare bine să confecționăm noi înșine, cu ajutorul elevilor asemenea aparate, sau trebuie să cerem Întreprinderii de material didactic să le fabrice? Există o tendință de a cere ca ministerul să pună la dispoziția noastră tot materialul de care avem nevoie. Se aduc și argumente: în primul rînd se vorbește de supraîncărcarea elevilor și a cadrelor, care și așa au destule sarcini, în al doilea rînd se arată că materialul fabricat, pe lîngă că are un rol pozitiv în îmbunătățirea pregătirii elevilor, el ajută, fiind frumos construit, și la dezvoltarea simțului estetic, pe cînd materialul confecționat de profesori și elevi este lucrat de oameni nepricepuți, într-o manieră grosolană. În felul acesta, se spune, ar putea mai mult să strice decît să ajute.

Eu sînt de părere că a privi lucrurile din acest punct de vedere înseamnă a neglija unul din factorii esențiali care ne dau posibilitatea să înarmăm elevii cu deprinderi practice, să-i educăm în spiritul dragostei de muncă. Atunci cînd apreciem un material intuitiv, trebuie să ținem seama și de scopurile școlii, de principiile pedagogiei noi. Din acest punct de vedere materialul lucrat de profesor și elevi are o valoare însemnată. Greutățile pe care le biruie elevii în cursul construcției fac să crească stima lor față de munca fizică, unul din cele mai importante elemente ale educației comuniste. În pregătirea acestui material se dezvoltă totodată, priceperea elevilor de a aplica în practică cunoștințele lor teoretice. În procesul pregătirii materialului intuitiv elevul nu numai că adîncește cunoștințele sale teoretice și dobîndește deprinderi practice, dar cel mai important lucru este că el se deprinde cu munca, care îl disciplinează. În acest proces de muncă în colectiv se întărește, în același timp, voința elevilor și disciplina lor liber consimțită.

În procesul de pregătire a materialului intuitiv, elevii acumulează noi cunoștințe prin rezolvarea diferitelor probleme de construcție ce se impun.

Afirm cele de mai sus, bazat pe observațiile pe care le-am făcut cu prilejul confecționării a 16 schelete de poliedre și a diferitelor secțiuni în ele. Am arătat elevilor din clasa a X-a (cursul seral și de zi) ce aș dori să facem și le-am cerut să procure deșeuri de tablă și sîrmă. Le-am indicat grosimea tablei și diametrul sîrmei. După ce s-a adunat materialul am desenat împreună cu elevii, pe carton, toate poligoanele de bază de care aveam nevoie și le-am dat dimensiunile muchiilor. În foarte scurt timp,

unii elevi au găsit foarfeci de tăiat tablă şi au venit cu material gata pregătit pentru sudură. Am făcut apel la elevii cursului seral, dintre care cîţiva erau sudori. Cînd tot materialul necesar a fost pregătit, o echipă de şase elevi l-a dus la atelierul unde lucra elevul R., sudor mecanic. Echipa avea rolul să verifice materialul adus pentru sudură şi să pregătească restul materialului. Elevul R. trebuia doar să sudeze. Aici s-au ivit însă unele greutăţi. În primul rînd tabla şi sîrma aduse de elevi erau îndoite, strîmbe. Ei au pus mîna pe ciocanele de fier, pentru a le îndrepta. Au fost opriţi. Elevul R. le-a spus: „Sîrma şi tabla se îndreaptă numai cu ciocan de lemn"... „De ce?"... „Ciocanul de fier turteşte şi deformează, ciocanul de lemn, nu. Noi avem nevoie de sîrmă perfect rotundă, pentru a face un lucru frumos".

Am verificat apoi măsurile. Ne-am propus să nu lucrăm cu o aproximaţie mai mare de 1/2 mm. Au intrat în funcţie şublerul şi vinclerul. Aici alte probleme: „Cum funcţionează şublerul?"... „De ce nu este bun raportorul şi trebuie să folosim vinclerul pentru a măsura unghiurile drepte?" S-a constatat că dimensiunile materialelor nu erau exacte şi a trebuit să înlăturăm diferenţele. Sîrma a tăiat-o cu fierăstrăul, iar tabla cu foarfeca. Elevilor le-a părut o nimica toată, însă la început au ştirbit în aşa fel două pînze de ferăstrău, că au trebuit schimbate.

Erau în atelier două foarfeci de tăiat tablă, una dreaptă şi alta cu cuţitul curb. Elevii au întrebat: „De ce cu foarfecele cu cuţitul curb tabla se taie uşor, iar cu cel drept destul de greu; nu e bine ascuţit?" Elevul R. le-a dat explicaţia: „Sînt la fel de ascuţite, depinde însă de unghiul sub care apucă tabla una şi cealaltă".

Am trecut apoi la aşa-zisa finisare a materialului retuşat. Capetele sîrmelor le-am dat la polizor, iar marginile poligoanelor de tablă tăiată le-am pilit. Acum elevii şi-au dat seama cît de greu este să pileşti o margine de tablă pe o lungime de 10 pînă la 15 cm fără a strica unghiurile şi cît de uşor era acest lucru pentru elevul R., care le-a arătat cum să fixeze tabla în menghină, cum să ţină pila în mînă.

Cînd s-a apropiat un elev din echipă să dea capetele sîrmelor la polizor, sîrma i-a fost smulsă din mînă. „Ce forţă..... Cîte turaţii are?".... „N-aş putea să-ţi răspund exact, dar calculează", a răspuns elevul R., dîndu-i şi toate elementele necesare calculului.

Elevului i-a fost destul de greu să obţină o secţiune dreaptă pe sîrma de 3,5 mm, chiar după ce s-a mai obişnuit cu polizorul.

O nouă problemă s-a ridicat în momentul cînd a trebuit să tăiem materialul brut. Aveam diferite bucăţi de sîrmă de 70 cm,

230 cm, 50 cm etc. Cum să le tăiem ca să obţinem, cu cea mai mare economie, bucăţi de 12 cm, 18 cm, 30,4 cm etc.? Aceeaşi problemă în privinţa tablei. În afară de aceste situaţii, pe care le-am amintit în treacăt, au mai fost şi altele.

Cînd am plecat acasă, toţi elevii aveau degetele rănite, dar nici unul n-a clipit măcar. În drum, unul dintre ei a spus: „E greu să fii mecanic. Cîte trebuie să mai ştii!" Cred că această afirmaţie ţine locul celui mai bun comentariu.

Membrii echipei au povestit colegilor lor despre munca în atelier. Toată clasa dorea acum să viziteze atelierul. Am reuşit în total să trec prin acest atelier 4 echipe.

Odată scheletele de poliedre confecţionate, le-am spus elevilor, înainte de a începe studiul corpurilor rotunde, să confecţioneze din celuloid cilindri, conuri şi trunchiuri de con care pot fi înscrise şi circumscrise acestor schelete. Celuloidul s-a procurat relativ uşor, de la secţiile radiologice ale unui spital. Plăcile de radiografie spălate în apă caldă ne dau materialul ideal. Trebuie alese plăci mai groase.

Aceste construcţii, pe lîngă faptul că i-au familiarizat de la început pe elevi cu corpurile rotunde, au ridicat anumite probleme: desfăşurarea conului, a trunchiului de con, calcule de dimensiuni. În privinţa desfăşurării corpurilor rotunde, elevii nu m-au consultat numai pe mine, ci şi pe profesorul de desen, care le-a indicat metode grafice.

Ministerul ne poate trimite materialul fabricat frumos, bun, material de vitrină, pe care îl dăm cu grijă în mîna elevilor să-l privească şi să-şi lămurească anumite fapte matematice. Dar nu ne putem rezuma numai la atît. Prin aceasta nu înţeleg că nu avem nevoie de nici un material fabricat. Dimpotrivă, unele materiale, pe care noi nu le putem confecţiona, ne sînt foarte necesare. Iată un exemplu: pentru a face diferite aplicaţii ale trigonometriei pe teren avem nevoie de un grafometru, sau mai bine de un teodolit. Grafometrele improvizate, cînd sîntem puşi în situaţia ca să măsurăm distanţe mai mari, dau erori atît de mari, încît într-adevăr ar putea mai mult să strice, decît să ajute.

Cîteva aparate confecţionate de elevii mei

În capitolul precedent am arătat cum am confecţionat anumite modele, pentru a susţine consideraţiile de ordin pedagogic pe care le-am expus. Aci voi descrie cîteva modele şi aparate confecţionate cu elevii mei şi voi arăta cum lucrez cu ele în clasă.

Am confecţionat 16 schelete de poliedre şi diferite secţiuni. Baza corpurilor era din tablă, iar scheletul din sîrmă. Vîrfurile corpului sînt sudate. Corpurile le-am vopsit în alb-argintiu. Am tăiat din tablă poligoane care reprezintă diferite secţiuni în corp. Aceste bucăţi de tablă le-am vopsit în negru mat, pentru a putea desena pe ele cu cretă. Diagonalele poliedrului, diagonalele feţelor, înălţimile, sînt bucăţi de sîrmă vopsite tot în negru, pentru a fi în contrast cu scheletul corpului. Deci fiecare poliedru are mica sa trusă, formată din bucăţi de sîrmă şi diferite poligoane de tablă sau carton (diferite secţiuni în corp).

În felul acesta, alegînd dimensiuni convenabile, obţinem un material cu ajutorul căruia putem concretiza majoritatea problemelor din culegere, referitoare la poliedre. Unul din cele două paralelipipede oblice construite de noi este lucrat după datele problemei nr. 18, cap. V, pag. 122. Cubul şi piramida patrulateră regulată sînt astfel construite încît se poate concretiza, cu ajutorul lor, problema nr. 8, pag. 127 etc.

Materialul acesta este foarte solid, el poate fi dat fără teamă în mîna copiilor în clasă şi chiar acasă. Dau elevilor scheletele de corpuri acasă şi apoi le cer să propună ei o problemă, pe baza scheletului corpului pe care îl au la îndemînă. Primesc de la ei probleme interesante, pe care apoi le putem trata în clasă.

Este bine să arătăm elevilor din clasa a X-a cum se pot ajuta şi acasă de un material improvizat, atunci cînd întîmpină greutăţi în rezolvarea unor probleme. În acest scop am adus o dată în clasă cuburi mici de cartofi şi scobitori şi le-am arătat cum pot să-şi confecţioneze singuri corpurile de care au nevoie. Profesorul I. Starostin arată, într-un articol publicat în „Matematika v skole" nr. 3 din 1955 că astfel de modele sînt destul de durabile, deoarece cartofii, după un anumit timp, se usucă şi se întăresc.

Am amintit în capitolele precedente de un aparat cu rame şi plase de sîrmă pe care îl folosesc, cînd nevoia o impune, mai ales pentru demonstrarea teoremelor din prima parte a geometriei în spaţiu şi pentru rezolvarea problemelor mai dificile din culegere. Acest aparat l-am construit după modelul indicat de profesorul N. A. Molev din oraşul Cikalov în Matematika v skole nr. 3/1955 (articolul prof. N. I. Kacenovski).

Aparatul se compune din trei rame de sîrmă groasă, în formă de pătrat. Latura pătratelor este de 50 cm. Pe fiecare din aceste rame am întins o sită de sîrmă subţire, cu ochiurile de ½ cm. (sîrma se găseşte în comerţ).

Operaţia de întindere a sîrmei pe rame este destul de migăloasă. Am tăiat sîrma în trei pătrate cu latura de 55 cm, apoi

am scos din fiecare parte cîte 4—5 fire, așa că mi-au rămas la marginile planelor fire de sîrmă lungi de 4 cm. Am introdus ramele între aceste fire și apoi, cu un clește, am răsucit două cîte două din aceste fire — cel care ieșia deasupra sîrmei groase (marginea ramei) cu cel care venea dedesubtul sîrmei. Capetele răsucite le-am îndoit de-a lungul ramelor. Pentru ca să nu ne înțepăm în aceste capete cînd vom lucra cu aparatul, am acoperit partea din afară a ramelor (unde sînt îndoite capetele de sîrmă), cu o fîșie subțire de carton și am bandajat-o cu o panglică. Ramele, cu sită cu tot, le-am vopsit în negru. Dacă bandajul a fost făcut cu destulă grijă, după vopsire el nici nu se observă. Am preferat culoarea neagră, deoarece ea scoate mai bine în evidență figurile pe care le vom construi din șnururi de cauciuc pe aparat.

Am confecționat acest aparat cu ajutorul elevilor din clasa a IX-a. Cîte doi din elevi lucrau deodată la fiecare ramă, la fixarea sitei, îndoind deodată sîrmele pe două laturi opuse, deoarece sitele trebuie să fie foarte bine întinse. Un alt elev îndoia capetele sîrmelor pe ramă, iar alții, tot cîte doi la fiecare ramă, fixau cartoanele de protecție și făceau bandajele.

Pentru confecționarea modelelor aveam nevoie de șnururi de cauciuc cu cîrlige la capete. Șnururile de cauciuc le-am tăiat dintr-o cameră de bicicletă spartă, iar cîrligele le-am făcut din cuie subțiri, lungi de cîte 15 mm, pe care le-am îndoit. În timp ce o parte din elevi întindeau plasele pe ramă, alții tăiau cauciucurile, îndoiau cuiele pentru a face cîrlige și le legau de capetele șnururilor de cauciuc. Șnururile le-am tăiat de diferite dimensiuni, cîte 6—10 buc. din fiecare dimensiune. Dimensiunile după care le-am tăiat sînt de 15 cm, 12 cm, 10 cm și 6 cm. Unele din ele sînt simple și tăiate mai gros, altele sînt din două bucăți mai subțiri și cu noduri din loc în loc.

Ramele se pot așeza în orice poziție cu ajutorul unor suporturi școlare obișnuite, pe care le putem găsi în laboratorul de fizică. Eu le-am confecționat și pe acestea într-un atelier.

Ramele cu plasă joacă diferite roluri cînd lucrăm cu aparatul. De exemplu, dacă doresc să reprezint două drepte oarecare în spațiu, așez pe două suporturi două rame astfel încît să facă între ele un unghi de aproximativ 60°, una dintre rame fiind orizontală. Cu ajutorul cîrligelor agăț de ochiurile plaselor de sîrmă două șnururi de cauciuc. Șnururile reprezintă dreptele. În figura propriu-zisă, ramele nu joacă nici un rol; interesează numai cele două drepte.

Dacă însă doresc, de exemplu, să demonstrez teorema „O dreaptă perpendiculară pe două drepte concurente dintr-un plan

este perpendiculară pe întreg planul", aşez cele trei rame pe două suporturi — cea de la mijloc orizontal, iar celelalte cu o oarecare înclinare. În această situaţie, rama de la mijloc face parte efectivă din modelul pe care vreau să-l reprezint; ea joacă rolul planului, iar celelalte două îmi servesc ca să pot duce dreptele de care am nevoie. Astfel, dacă doresc să duc perpendiculara, o agăţ cu un cîrlig de un ochi al plasei de sus, o trec printr-un ochi al plasei orizontale şi o agăţ apoi de rama de jos. La fel procedez şi cu celelalte drepte.

În caz că lucrăm cu unghiuri diedre, ramele fac parte efectiv din model; ele joacă rolul planelor (fig. 3).

Iată cum am lucrat cu acest aparat cînd am predat teorema celor trei perpendiculare: am adus aparatul în clasă şi am fixat sita de jos orizontal, iar celelalte i-am dat o înclinare faţă de prima, de aproximativ 60°. Am spus elevilor: „Vă propun o problemă. Eu voi lucra la aparat, voi faceţi figura pe caiet" (fig. 3). Am continuat: „O dreaptă este perpendiculară pe un plan"....

Am atras atenţia elevilor că planul care ne interesează este planul orizontal şi, în acest timp, am agăţat de sita de sus un şnur perpendicular pe planul de jos (pe acest şnur am făcut 4 noduri).

„Prin piciorul acestei perpendiculare ducem o dreaptă oarecare în plan"... În ochiul din sita de jos, de care era agăţat piciorul perpendicularei, am prins unul din cîrligele de la capătul şnurului ce reprezenta această dreaptă. „Pe această dreaptă ducem în

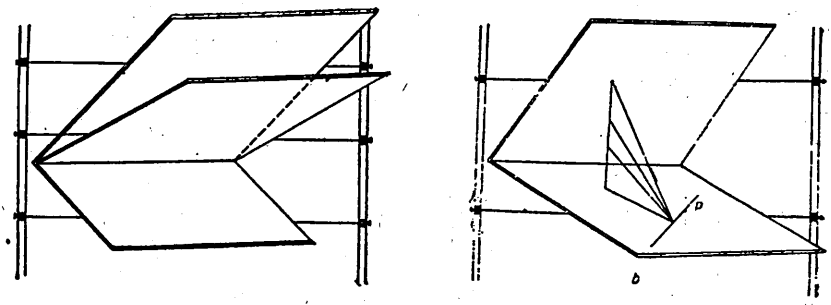


Fig. 3

planul nostru o perpendiculară (p)"... Am agăţat şi şnurul respectiv. „Punctul de intersecţie al acestor două drepte din planul nostru îl unesc cu un punct oarecare al perpendicularei pe plan (dreapta „r")"...

Am agăţat un şnur de ochiul de sită de jos, din dreptul punctului de intersecţie, şi de un nod oarecare al şnurului perpendicular pe plan. „Ce unghiuri formează dreptele (p) şi (r)?“

Desigur că toată clasa a observat imediat.

„Să dovedim că într-adevăr este aşa“... Nu am întîmpinat nici o dificultate, lucrînd cu elevi mai slabi. Am prins apoi un şnur de acelaşi ochi al sitei de jos, şi de un al doilea nod, pe care l-am făcut din vreme pe şnurul ce reprezenta perpendiculara, şi aşa cîte un şnur pentru fiecare nod. Numai acum am spus elevilor că în realitate am demonstrat teorema celor trei perpendiculare.

Cu uşurinţă şi într-un timp scurt au fost demonstrate şi reciprocele. Au mai rămas destule minute pentru „fixare“. S-a demontat aparatul şi am cerut să fie demonstrată teorema la tablă.

Alteori folosesc aparatul numai pentru a lămuri elevilor o anumită figură pe care nu şi-o pot imagina.

Într-o lecţie de verificare a cunoştinţelor le-am citit elevilor problema nr. 25 de la pag. 116 şi le-am cerut să-şi facă schiţa în caiete. Am observat că unii din ei nu-şi puteau reprezenta pe loc figura. Am cerut unuia să facă construcţia la aparat. Aci s-a lămurit. I-am spus să treacă la tablă să facă desenul şi să rezolve problema.

Uneori, cînd trebuie rezolvate probleme mai grele, a căror construcţie la aparat ar lua prea mult timp dacă am face-o complet în clasă, o parte din construcţie o fac eu, în pauză. De exemplu: mi-am propus să rezolv cu elevii problema nr. 13, de la pag. 69 a Culegerii de probleme de trigonometrie. Am procedat în felul următor: am aşezat un plan al aparatului orizontal, iar al doilea înclinat faţă de primul. Am luat un cilindru de celuloid mai gros, care nu avea lipite cercurile de bază, şi l-am fixat pe planul orizontal cu două şnururi subţiri de cauciuc cu cîrlige. Un cîrlig l-am agăţat de marginea de sus a cilindrului, iar al doilea de un ochi al plasei orizontale, astfel că şnururile să joace şi rolul de generatoare a cilindrului. Ele sînt diametral opuse. Am dus apoi, prinzîndu-l de cele două site, un şnur de cauciuc care avea pe el noduri, tangent la cilindru într-un punct al generatoarei reprezentată prin unul din cele două cauciucuri cu care am fixat cilindrul în punctul de tangenţă. Am reuşit astfel să reprezint distanţa de la punctul de tangenţă la centrul bazei inferioare. Distanţa de la centrul bazei inferioare pînă la tangentă, am dus-o perforînd din nou cilindrul. Şnurul care reprezenta distanţa l-am prins cu un cîrlig de ochiul planşei de sîrmă în care era centrul bazei inferioare, iar cu alt cîrlig de un nod al cauciucului

ce reprezenta tangenta la cilindru. Tot în cancelarie am construit și raza, după necesitatea problemei. Am dus modelul în clasă, am citit problema și am explicat construcția făcută de mine. Un elev a făcut desenul pe tablă și am început rezolvarea problemei. Am lucrat cu toată clasa. Un elev a observat că aveam nevoie de

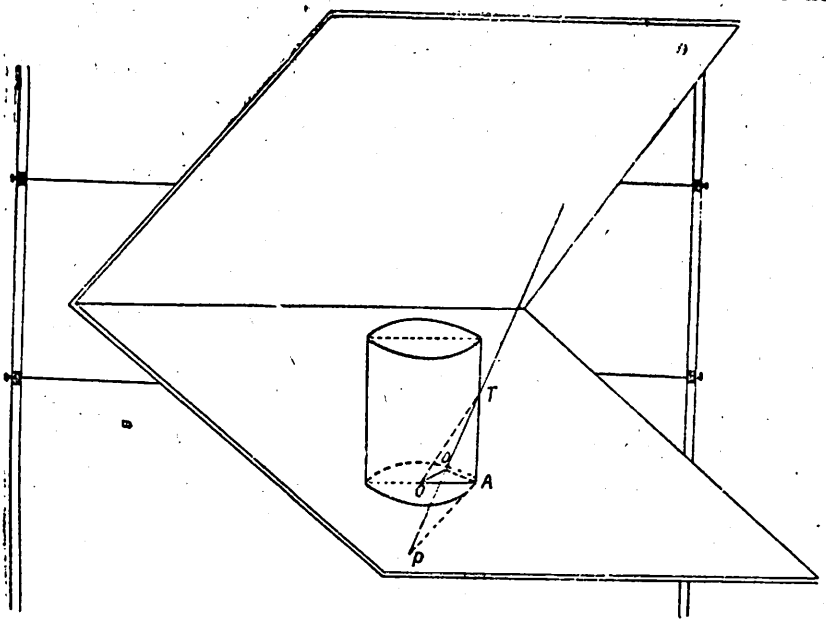


Fig. 4

proiecția tangentei pe plan, că această proiecție va fi perpendiculară pe rază. S-a desenat. Pe un alt elev, mai slab, care mi-a făcut impresia că nu-i prea lămurit, l-am chemat la aparat să construiască figura. Cu acest elev am început o discuție asupra acestei chestiuni (fig. 4). Treptat, prin observațiile elevilor, s-a completat, o dată cu desenul, și construcția modelului.

Construind modele în felul acesta, dăm elevilor posibilitatea să găsească mai multe metode de rezolvare. Chiar în această problemă, unii elevi au indicat la început o metodă greoaie (voiau să determine înălțimea OD din triunghiul TOP și numai apoi au observat că ducînd pe AD, obținem triunghiul DTA și că triunghiul ODA este tot dreptunghic, metodă mult mai ușoară. S-a lucrat după ultima metodă. În același timp se completa și desenul pe tablă și construcția la aparat.

Acest aparat, atît de practic, devine însă greoi cînd facem aplicaţii asupra poliedrelor. Să presupunem că dorim să construim o prismă exagonală. Trebuie să aşezăm paralel cele două site şi în fiecare sită să construim, cu ajutorul şnururilor de cauciuc, exagoanele de bază. În afară de faptul că această construcţie ia mult timp, elevii nici nu pot vedea bine corpul în întregime, din cauza poziţiei celor două site.

Pentru a înlătura acest neajuns, am confecţionat un alt aparat, compus dintr-o lădiţă cu dimensiunile 10 × 25 × 25 cm, care are partea superioară construită dintr-o scîndură de lemn tare, groasă de 2 cm. Această scîndură are pe toată suprafaţa găurele, din trei în trei cm. Lădiţa are un pupitru în care se ţin anexele corpurilor.

În afară de lădiţă, aparatul se mai compune dintr-o vergea de cupru, groasă, care să se poată introduce exact în găurelele din partea superioară a lădiţei. La distanţa de 2—3 cm de baza vergelei am sudat o placă mică, rotundă, care să împiedice vergeaua să intre prea adînc în lădiţă.

De-a lungul vergelei alunecă o piesă care are în partea inferioară patru cîrlige, iar în partea superioară un cui subţire în care se fixează poligoanele de bază ale corpurilor ce dorim să construim. Rostul acestui cui este să oprească eventuala rotire a bazei superioare în jurul vergelei. Această piesă se fixează de vergea cu ajutorul unui şurub.

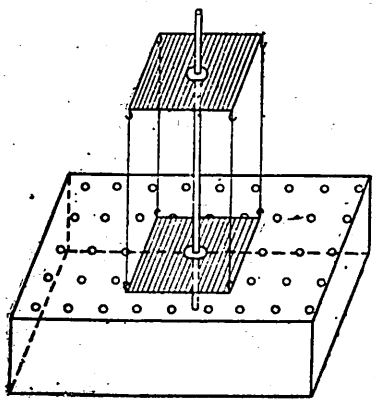


Fig. 5

În cazul cînd construim corpuri oblice, ne vom folosi de un şurub cu piuliţă, cu ajutorul căruia fixăm bazele inferioare ale corpurilor de lădiţă (fig. 6).

Anexele aparatului sînt şnururi de cauciuc cu belciuge la capete şi diferite poligoane tăiate din placaj. Poligoanele prin care reprezentăm bazele inferioare au în centru cîte un orificiu de diametrul găurelelor, prin care vom introduce cînd lucrăm cu el, vergeaua de cupru, iar cele prin care reprezentăm bazele superioare, au în afară de acest orificiu, o mică gaură pentru a le fixa în cuiul subţire din piesa ce alunecă pe vergea. Şi poligoanele care reprezintă bazele inferioare şi cele care reprezintă

bazele superioare au în vîrfuri cîrlige (cuie subțiri îndoite). De aceste cuie se prind cauciucurile cu belciug, care vor reprezenta muchiile laterale ale corpului pe care dorim să-l construim.

Pentru a lucra cu aparatul avem nevoie de multe poligoane tăiate din placaj.

În afară de perechile de poligoane egale, pe care le vom folosi pentru construirea prismelor, mai trebuie să tăiem și poligoane mai mici, asemenea cu primele, pentru a putea realiza diferite trunchiuri de piramidă.

Piramidele se construiesc ușor. Pentru baza inferioară se folosește un poligon din trusă, de ale cărui cîrlige prindem cau-

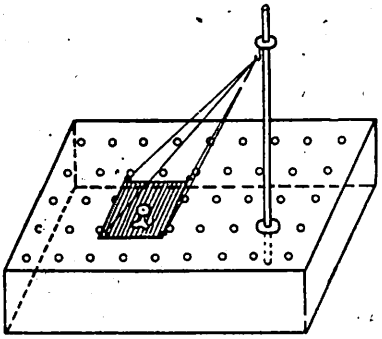


Fig. 6

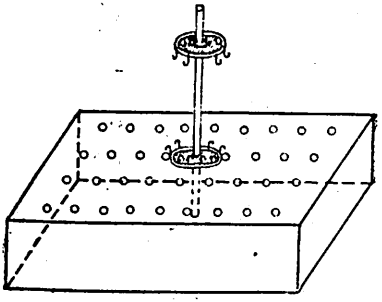


Fig. 7

ciucurile. Celălalt capăt al cauciucurilor îl prindem de cîrligul de la piesă ce alunecă pe vergea (fig. 6).

Pentru a da o imagine a unui cilindru sau trunchi de con în care sînt înscrise poliedre mă folosesc de cercuri tăiate din placaj. Pentru partea superioară a cercurilor de bază înscriu poligonul, cu tuș, iar cîrligele le fixez în vîrfurile poligonului (fig. 7).

Lădița cu găurele și vergeaua cu piesele respective le-am confecționat cu ajutorul elevilor de la cursul seral, iar diferitele poligoane din placaj au fost tăiate de elevii din clasa a X-a, secția de zi. Ei se pricep la acest lucru și îl fac cu plăcere.

Metodele de lucru cu acest aparat în clasă sînt aceleași ca și cele întrebuințate în munca cu primul aparat. El are rolul să înlăture neajunsurile primului și avantajul că se pot construi pe el modele foarte repede și cu multă ușurință.

Dacă avem de construit un corp drept, corpul se poate detaşa de lădiţă, căci cauciucurile ţin pe vergea cele două poligoane de bază. Modelul, se poate da elevului în mînă (fig. 8).

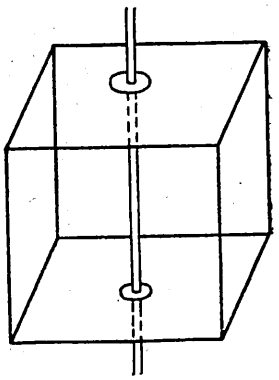


Fig. 8

Piesa care alunecă de-a lungul vergelei îmi permite să dau corpurilor diferite înălţimi, iar găurile din lădiţă să realizez diferite unghiuri ale muchiilor laterale cu planul bazei, atunci cînd este vorba de corpuri oblice.

Am arătat mai sus diferite materiale intuitive folosite în predarea geometriei în spaţiu. Asemenea materiale contribuie la formarea reprezentărilor spaţiale ale elevilor, îi ajută să înţeleagă mai bine cunoştinţele predate.

Aparatele descrise mai sus şi în special metodele de lucru cu ele trebuie privite numai ca un început; ele sînt doar încercări, cărora li se pot aduce multe îmbunătăţiri.

CONFECȚIONAREA ȘI FOLOSIREA MATERIALULUI DIDACTIC LA GEOMETRIE

MARTA MĂRINI
Școala medie nr. 10 — *BUCUREȘTI*
IOANA TEODORESCU
Școala medie nr. 22 — *BUCUREȘTI*

Pentru ca o lecție de matematică să-și ajungă în întregime scopul, trebuie ca explicația noastră, oricît ar fi de precisă și de completă, să nu se bazeze numai pe puterea de reprezentare, pe imaginația elevului. Acestea îl pot servi numai parțial și uneori îl pot chiar înșela. De aceea se face adînc resimțită nevoia de a se prezenta concret figurile ce trebuie studiate. Și, dacă la aritmetică și geometrie plană putem folosi în acest scop desene, planșe sau chiar elemente ale mediului înconjurător, la geometria în spațiu este neapărat necesar să le prezentăm elevilor machetele corpurilor geometrice.

Trecerea de la studierea spațiului cu două dimensiuni — planul — la studierea spațiului cu trei dimensiuni este pentru elevi o piatră de încercare. Pentru a le ușura însușirea cunoștințelor, pentru a-i ajuta să înțeleagă în adîncime cunoștințele trebuie să folosim neapărat materiale didactice adecvate.

Ținînd seama de faptul că „materia primă" pentru aceste materiale nu-i nici prea costisitoare, nici greu de găsit — e vorba de creioane, cartoane, echere etc. — am văzut că putem porni singuri la treabă. Așa am început să alcătuim cu mijloace proprii materialul didactic ce ne era necesar. La început am confecționat corpuri geometrice simple și planșe. Ne-am propus însă să mergem și mai departe, să concretizăm formule algebrice, teoreme din geometria plană, din trigonometrie și geometrie în spațiu.

Elevele au lucrat cu multă însuflețire și ne-am dat seama că materialul lucrat chiar de ele avea asupra lor o influență mai mare decît cel făcut gata.

În construcția și folosirea materialului didactic am urmărit:

— să le facem pe elevă să-și precizeze conținutul noțiunii respective și să știe să formuleze o definiție sau o proprietate;

— să le facem să pătrundă definiţiile matematice, să le interpreteze şi să le recunoască în practică (îndeosebi cînd e vorba de trigonometrie);

— să le ajutăm să-şi sistematizeze şi să-şi clasifice diferitele figuri sau corpuri geometrice, să asigurăm o însuşire trainică a cunoştinţelor;

— să dezvoltăm reprezentările spaţiale ale elevelor; să le formăm deprinderi practice de folosire a instrumentelor celor mai simple, să le dezvoltăm priceperea de a folosi diverse materiale (carton, plăci de radiografie, sîrme, sticle etc.), să le dezvoltăm aptitudinile pentru construcţii şi, mai ales, spiritul de observaţie;

— să le facem să înţeleagă unitatea strînsă dintre teorie şi practică;

— să le obişnuim să lucreze îngrijit şi corect, economisind timpul.

Construind ele însele şi folosind în cadrul lecţiilor machete, planşe etc. elevele au început să vadă în spaţiu, să înţeleagă mai bine proprietăţile figurilor plane şi ale corpurilor geometrice.

Cum am procedat pentru a le trezi interesul pentru munca de confecţionare a materialului didactic? Le-am arătat figuri şi machete lucrate de colegele lor mai mari, acum studente, tehniciene, inginere sau profesoare. De multe ori am cîştigat în felul acesta adepţi ai matematicilor, căci unele eleve au avut astfel revelaţia viitoarei lor profesiuni. Am organizat apoi cîteva şedinţe de lucru, la care am invitat toate elevele care doreau să-şi încerce puterile de constructori. Pentru a le forma primele deprinderi de lucru, le-am arătat: cum trebuie să spele, să coloreze, să taie şi să coasă sau să lipească o placă de radiografie („materie primă" de mare însemnătate pentru noi), cum trebuie să lucreze o planşă, cum se pot concretiza problemele, cum obţinem secţiunile în poliedre etc.

După aceste şedinţe am ales cîteva lucrări potrivite ca greutate cu puterea de muncă şi cu priceperea elevelor. Le-am dat indicaţii asupra materialului şi a procedeului de lucru, lăsînd însă drum cît mai liber ideilor originale; chiar dacă acestea nu sînt totdeauna realizabile, ele sînt totuşi valoroase şi, prin sfatul nostru pot fi corectate şi îndrumate just.

Materialele confecţionate, iscălite de autorii lor, sînt păstrate în dulapul şcolii. Pentru evidenţa lor avem un registru special în care însemnăm 1) data intrării; 2) numele autorului; 3) subiectul lucrării (de ex. numărul problemei, din ce carte); 4) la ce temă poate fi utilizată.

În practica noastră, folosim ca material didactic obiecte foarte diferite. Însuşi mediul înconjurător ne procură multe

asemenea materiale: obiectele din clasă, coridoarele, curtea etc. pe care copiii la intuiesc şi le măsoară. Aceste materiale trebuie folosite îndeosebi cînd începem studiul geometriei, în clasele mici. În acest fel se leagă dintru început matematica de viaţă. Unii elevi mai repede, alţii mai încet încep să aprecieze corect proprietăţile figurilor. O mare atenţie trebuie acordată şi folosirii instrumentelor de geometrie: compas, raportor, echer etc.

La clasele mici folosim mult material didactic din carton sau hîrtie, în ultimul timp din celuloid. Ca material intuitiv mobil folosim poligoane formate din tije mobile în jurul vîrfurilor, care îşi pot micşora lungimile sau numărul laturilor. Un bun material intuitiv îl constituie desenul la tablă şi pe planşe. Desenul bine executat în cretă colorată îi ajută pe copii să găsească soluţia problemei şi dezvoltă reprezentările lor spaţiale. Adesea chiar înţelegerea expunerii depinde de calitatea desenului prezentat de profesor. De aceea ne străduim să desenăm astfel figurile în cursul explicării cunoştinţelor noi, încît elevele să vadă repede relaţiile între elementele figurilor. În acest scop gîndim dinainte la mărimea şi poziţia cea mai favorabilă a figurii, astfel ca să dăm elevelor impresia vizuală pe care ar avea-o, dacă ar vedea în realitate figura. De asemenea, căutăm ca secţiunile şi construcţiile ajutătoare să nu acopere nimic din elementele importante ale figurii. Folosim mereu creta colorată, linii punctate şi haşuri pentru a scoate în evidenţă anumite părţi ale figurii. Ne ferim ca în desenele prezentate la tablă să luăm cazuri şi poziţii particulare.

Folosim de asemenea, pe scară largă, planşe şi desene menite să concretizeze problemele.

Să începem cu cele mai simple:

1. *La aritmetică*, am încercat să dăm o imagine mai raţională şi mai uşor de reţinut, în acelaşi timp, a modului de rezolvare a unei probleme în care se cunosc suma şi diferenţa a două cantităţi. Cum în clasa a VI-a se studiază şi operaţiile cu segmente, am găsit un bun prilej pentru a le face pe eleve să înţeleagă că în sumă se cuprinde diferenţa şi de două ori segmentul cel mic. Iată cum am procedat: am trasat suma formată din $AB+BC$ şi cu albastru diferenţa $AB-BC'$.

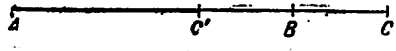


Fig. 1

Acest mic desen colorat s-a întipărit în mintea elevelor şi le-a folosit pînă la rezolvarea de sisteme de gradul I:

$$\begin{cases} x+y=s \\ x-y=d \end{cases}$$

și pînă la probleme cu vapoare care merg în sensul sau împotriva cursului apei.

Suma: $AC = AB + BC$

Diferența $AC' = AB - BC'$

2. a) *La geometrie plană.* Am ilustrat grafic probleme de genul următor: de cîte ori se mărește (micșorează) aria unui dreptunghi dacă mărim (micșorăm) ambele dimensiuni de două ori sau de trei ori?

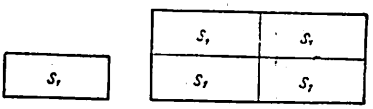


Fig. 2

b) Pentru a dovedi că suma unghiurilor unui triunghi este 180°, am construit din carton un triunghi oarecare ABC, căruia i-am dus linia mijlocie DE. Am îndoit figura de-a lungul lui DE și apoi de-a lungul lui EF și DH. Cele trei unghiuri s-au așezat în jurul lui M., de aceeași parte a dreptei AC; însumîndu-le obținem 180°.

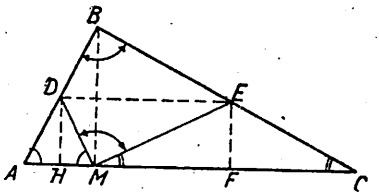


Fig. 3

c) Am căutat să facem cunoscute elevelor, la cerc, cîteva demonstrații foarte sugestive ale teoremei lui Pitagora, cărora le-am făcut și machete colorate. Iată-le: prima, e cea dată de Bretschneider: pe un fund patratic de latură $b + c$ al unei cutii,

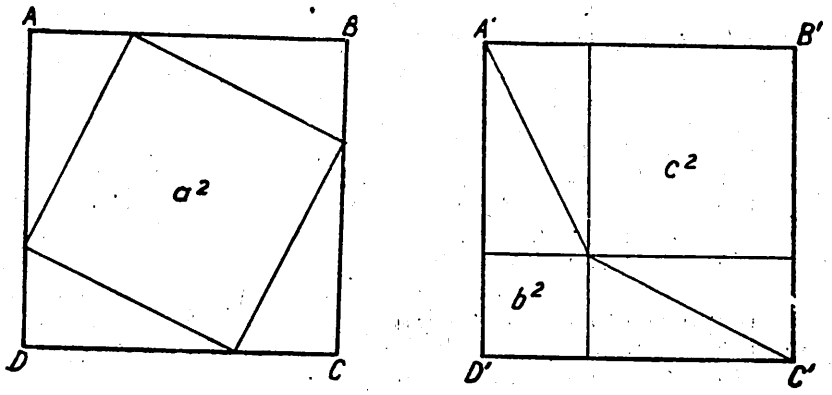


Fig. 4

se aşază patru triunghiuri egale, avînd catetele b şi c şi ipotenuza a, în două feluri:

Golul rămas în cele două poziţii trebuie să fie acelaşi.

Deci $a^2 = b^2 + c^2$.

Socotim această demonstraţie ca fiind cea mai simplă.

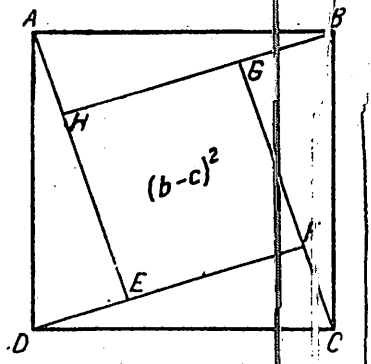


Fig. 5

O altă demonstraţie a acestei teoreme, dată de Vija-Ganita este următoarea: tot într-o cutie cu baza un pătrat de latura a se aşază cele patru triunghiuri dreptunghice egale de catete b şi c şi de ipotenuză a ($b > c$). Se poate scrie apoi egalitatea de arii

$$S_{ABCD} = S_{ADE} + S_{EFGH}$$

$a^2 = 2\,bc + (b-c)^2$ şi deci $a^2 = b^2 + c^2$

Această demonstraţie a fost efectuată în cadrul cercului după ce s-a demonstrat aceeaşi teoremă, pe bază de calcul algebric dată în manualul pentru clasa a VIII-a.

d) În clasa a IX-a am executat cîteva planşe interesante privitoare la multiplicarea pătratului sau a cercului şi la diferite metode de împărţire a cercului în părţi echivalente.

Vorbind la cercul matematici despre marile probleme nerezolvate cu rigla şi compasul, am dat ca exemplu de cuadratura aproximativă a cercului metoda dată de Kochanski. Lucrată în culori, pe o planşă mai mare, problema a interesat şi a plăcut mult. Iat-o: Într-un cerc de diametru $AOB = 2\,R$ se duce tangenta în B, se ia apoi unghiul BOC de 30°. Din punctul C, pe tangentă, trecînd prin B, se ia $CBD = 3\,R$. Să se arate că AD este aproximativ egal cu lungimea semicercului.

Astfel enunţată, problema a figurat în manualul de geome-

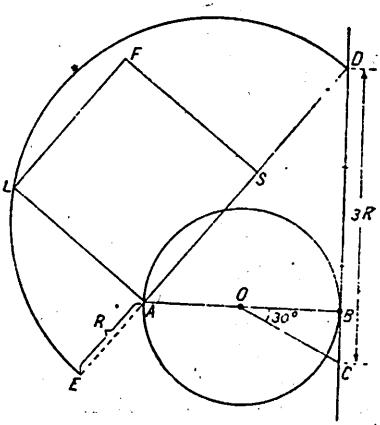


Fig 6

trie pentru clasa a VIII-a din 1948. Cum elevii lucrează în această clasă reprezentări geometrice de formule algebrice, după ce am scos din triunghiul dreptunghic că $\overline{AD} = R\sqrt{\frac{2}{3}(20 - 3\sqrt{3})} \approx \approx \pi R$ le-am cerut să găsească pătratul echivalent cu cercul. Latura x a acestui pătrat se află astfel: $x^2 = \pi R \cdot R$, deci x este medie geometrică între πR și R. Construcția acestui pătrat, se înțelege din figura alăturată: $ALFS$ este patratul aproximativ echivalent cu cercul dat.

Tot în cadrul cercului am construit un trisector (al lui Moreux): Dintr-o placă transparentă, se construiește un triunghi dreptunghic CBA. În continuarea lui se construiește semicercul cu raze $AO = CA$. Sub figură se lasă o mică prelungire, pentru a nu lăsa să se desprindă triunghiul dreptunghic de semicerc.

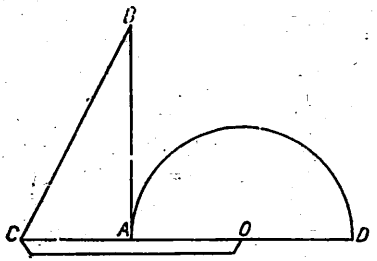


Fig. 7

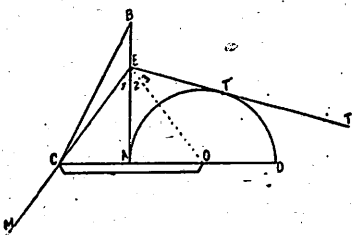


Fig. 8

Pentru a împărți un unghi dat MET în trei părți egale, am procedat astfel: am așezat trisectorul astfel ca latura AB a triunghiului să treacă prin vîrful E al unghiului, semiarcul să fie tangent la una din laturile lui, iar vîrful celuilalt unghi ascuțit (al trisectorului) să fie pe cealaltă latură a unghiului. Am unit apoi vîrful E cu centrul cercului și cu punctul A. În condițiile acestea $\hat{E}_1 = \hat{E}_2 = \hat{E}_3$. Instrumentul trebue să fie de dimensiuni mici și dintr-un material transparent: plăci de radiografie.

e) Am alcătuit, de asemenea, schemele unor probleme de locuri geometrice, scheme care dau elevului posibilitatea de a cuprinde deodată cu privirea diferite poziții ale unei figuri sau ale elementelor ei.

f) S-au executat unele desene pentru recapitulările curente sau finale, cînd timpul nu permite să se refacă toate figurile. (De ex. pozițiile relative a două cercuri, laturi și apoteme ale poligoanelor regulate, pătratul și cubul unui binom și al unui trinom etc.).

g) Pentru a stimula elevele şi a le da încredere în puterea lor de judecată, le-am arătat cum pot ele singure să propună probleme. Această încercare am făcut-o referitor la arii plane elementare: triunghi, cerc, segmente, sectoare. În momentul cînd autoarea unei probleme îşi explica la tablă problema, prin bănci circulau planşe mici ce o reprezentau. Ulterior aceste planşe au îmbogăţit materialul didactic al şcolii. Iată cîteva din aceste probleme:

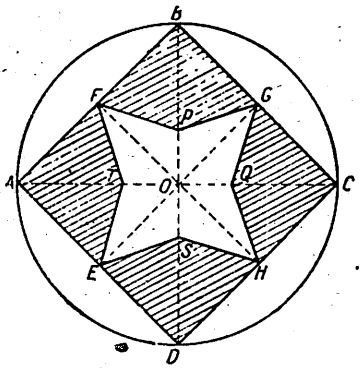


Fig. 9

Într-un cerc se înscrie un patrat cu apotema de 3,5 cm. Se duc diagonalele şi axele de simetrie ale pătratului şi se unesc extremităţile apotemelor cu punctele P, Q, S, T $\left(OQ = OP = OT = OS = \frac{R}{3}\right)$

Să se calculeze aria haşurată.

Într-un cerc se înscrie un triunghi echilateral; se duc apotemele şi din mijloacele laturilor ca centru şi cu raza $= a_3$ se descriu trei cercuri. Să se calculeze aria porţiunii nehaşurate din triunghi ştiind că aria exagonului înscris în cercul dat este de 10,38 m².

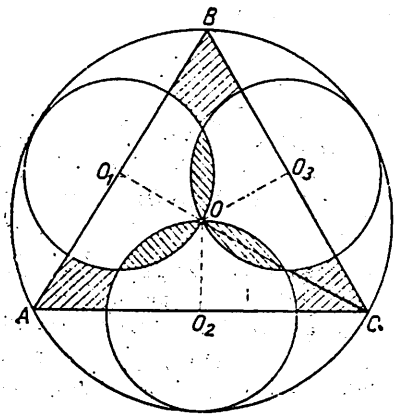


Fig. 10

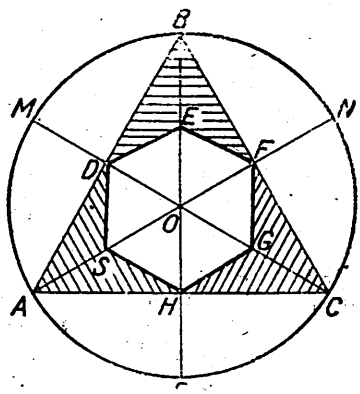


Fig. 11

Se dă un triunghi echilateral înscris într-un cerc cu lungimea de 25,12 m. Din centru se duc 6 raze formînd 6 sectoare de cîte 60°.

Unind mijloacele acestor raze se formează un exagon. Să se calculeze aria haşurată.

4. Pe o parcelă în formă de triunghi echilateral cu latura de 75 m se face un parc astfel: cu o rază cît $\frac{2}{5}$ din latura triunghiu-

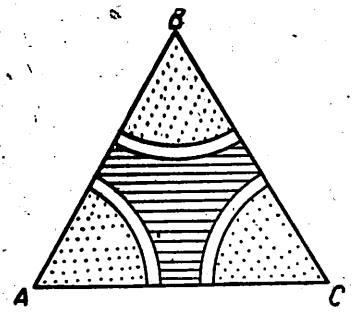


Fig. 12

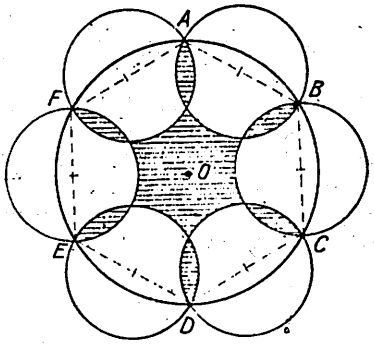


Fig. 13

lui şi cu centrul în fiecare vîrf se duc 3 arce de cerc. Suprafeţele din colţuri se seamănă cu flori. Pe lîngă ele se face cîte o alee

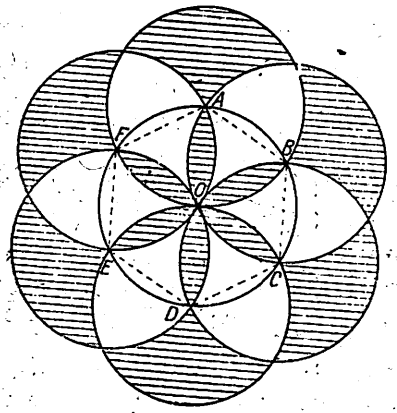


Fig. 14

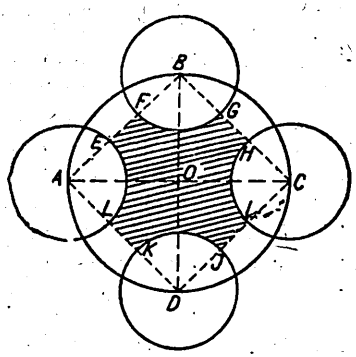


Fig. 15

lată de 3 m. Să se afle aria rămasă pentru a fi acoperită cu iarbă.

5, 6, 7: Se dă raza R, a cercului O; să se afle aria haşurată, din figurile 13, 14, 15.

La fiecare planşă cercurile au fost făcute din placă de radiografie colorată şi prinse în centrul lor de planşă.

3. La trigonometrie, concretizarea nu poate merge decît numai pînă la interpretarea geometrică a formulelor trigonometrice. Această tălmăcire geometrică a funcţiilor trigonometrice este însă deosebit de preţioasă.

Am dat elevelor, metode de stabilire geometrică imediată a oricărei formule corelative (G.M.F. seria A sep. 1952) sau demonstraţii geometrice a cîtorva identităţi trigonometrice (G.M.F. seria A oct. 1954).

Unele probleme de trigonometrie cu determinări de înălţimi şi distanţe inaccesibile au fost concretizate în plastilină. S-au reprezentat diferite peisaje cerute de probleme, precum şi oameni la lucru în mijlocul lor.

4. La astronomie am făcut planşe pentru a explica de ce şi care anume stele sînt cu răsărit şi apus sau circumpolare (aceasta pentru diferite latitudini). De asemenea, s-au confecţionat planşe care lămuresc cauza inegalităţii zilelor şi nopţilor.

5. Au fost alcătuite numeroase materiale didactice în legătură cu cunoştinţele de geometrie în spaţiu. Astfel s-au confecţionat paralelipipede de diferite feluri, cu diagonalele lor, secţiuni în prismă sau în piramidă, secţiuni în conul cu una sau două pînze. S-au confecţionat şi unele figuri legate de problemele care nu se pot desena la tablă. Iată asemenea probleme: 1) 4 sfere egale sînt tangente două cîte două şi tangente altor două sfere; 2) sfera care atinge muchiile unui cub; 3) sfera care atinge muchiile unui tetraedru regulat (Probleme de geometrie în spaţiu, Culegere, cap. XX, nr. 10, 14, 46 etc.).

Dăm mai jos enunţurile cîtorva probleme indicînd şi modul de executare a planşelor care concretizează aceste probleme.

1. „Latura bazei unei piramide regulate patrulatere este egală cu a. Muchia laterală formează cu înălţimea un unghi de 30°. Să se determine aria unei secţiuni duse printr-un vîrf al bazei perpendicular pe muchia laterală opusă. (Culegere de probleme de geometrie în spaţiu, cap. VII, nr. 19).

Am executat întîi un desen corect la tablă, atrăgînd atenţia elevelor asupra modului cum apare secţiunea şi asupra formei acesteia. Am folosit teoremele corespunzătoare din prima parte a manualului de geometrie în spaţiu; după ce s-a analizat în amănunt problema, am atras atenţia asupra concretizării ei.

Piramida patrulateră regulată avînd baza fixată de o foaie de placaj va fi astfel construită, încît secţiunile ei diagonale SBD

și SAC să fie triunghiuri echilaterale cu laturile egale cu diagonala pătratului de bază.

(Dacă $\widehat{OSD} = 30°$ rezultă că $\widehat{BSD} = 66°$)

Muchiile piramidei se fac din sîrmă; înălțimea tot din sîrmă, dar colorată. Din analiza problemei a reieșit că $SB \perp EF$, $SB \perp FD$, $SF \perp FG$, $\overline{SE} = \overline{SG}$, $EG \| AC$, $\overline{SF} = \overline{FB}$. Printr-o sîrmă

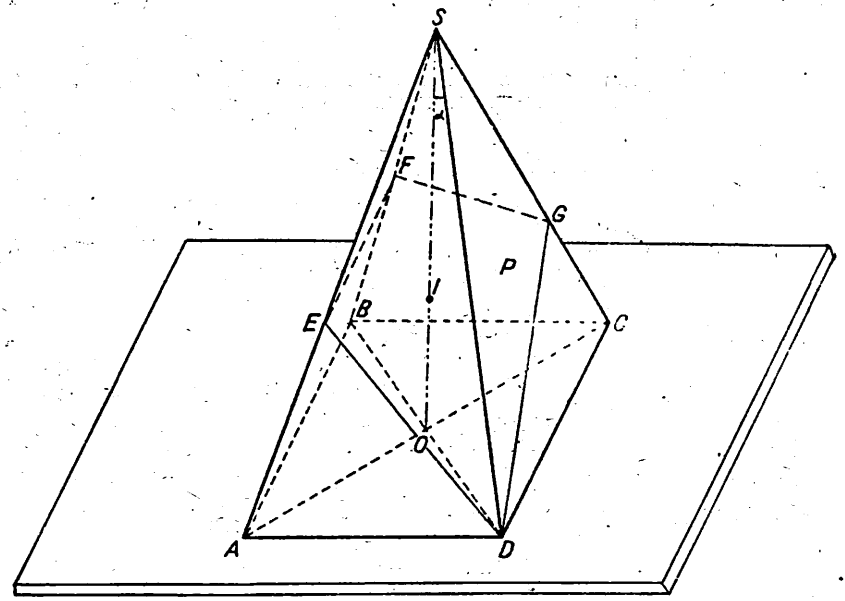


Fig. 16

mai subțire sau o ață colorată se unește D cu mijlocul muchiei SB, care trebuie să se întîlnească cu SO într-un punct I, astfel ca $\overline{SI} = \frac{2}{3}\overline{SO}$. Prin punctul I de întîlnire al înălțimii SO cu DF se duce (din același material ca FD) $EG \| AC$. Obținem astfel punctele E și G. Printr-o ață de altă culoare ca cele de pînă acum, se unesc punctele D, G, F, E. Astfel căpătăm secțiunea dorită. Această secțiune se poate țese frumos, ca să dea impresia unui plan concret.

Rezolvarea problemei devine ușoară în urma acestor precizări.

2. Se poate concretiza cu bune rezultate problema nr. 3, cap. VIII: Un cub are muchia egală cu a. Să se determine aria

laterală a unei piramide care are vîrful în centrul bazei superioare, iar baza piramidei îşi are vîrfurile în mijloacele laturilor bazei inferioare.

Cubul se poate face din placă de radiografie gălbuie — culoarea pe care o capătă după spălat — iar piramida tot din placă de radiografie colorată în albastru. Am dat elevelor indicaţii cum să procedeze ca să determine mărimea elementelor piramidei, apoi să construiască piramida prin desfăşurarea

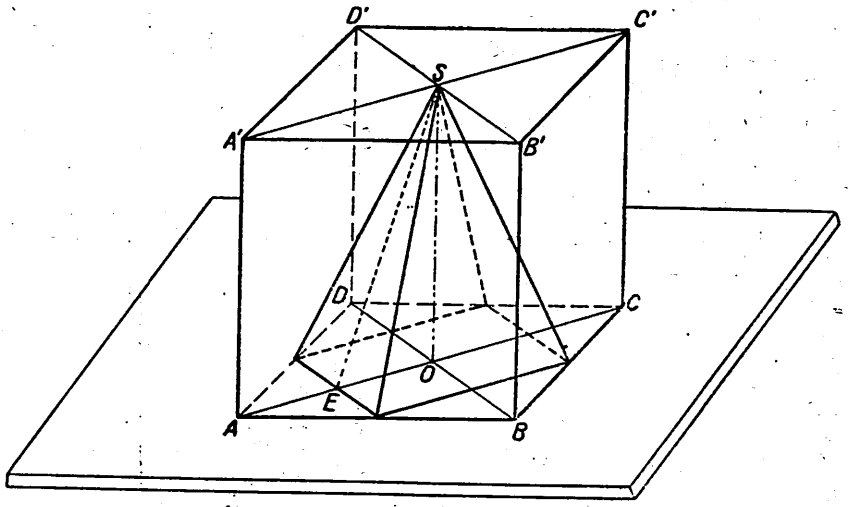


Fig. 17

ei pe plan şi cum să pună baza superioară a cubului, după ce piramida a fost introdusă în cub, în aşa fel, încît să respecte datele problemei. Le-am atras atenţia că nu trebuie să uite să marcheze prin fire colorate, triunghiul *SOE*, necesar rezolvării problemei.

Această problemă poate fi concretizată şi astfel: se construieşte cubul din sîrmă (schelet) şi se uneşte prin sîrmă colorată (sau îmbrăcată în aţă colorată) centrul bazei superioare cu mijloacele laturilor bazei inferioare. Prin aceeaşi sîrmă se unesc şi mijloacele laturilor bazei inferioare. Triunghiul *SOE* se marchează printr-o ţesătură.

3. Problema nr. 8. capitolul XIV. Unind consecutiv mijloacele muchiilor unui tetraedru regulat prin drepte, obţinem muchiile unui octaedru regulat. Muchia tetraedului este a; să se afle volumul octaedrului şi să se compare cu volumul tetrae-

drului. Problema a fost de asemenea ilustrată prin machete din placă de radiografie diferit colorată. Elevele au constatat că volumul tetraedrului minus volumul a 4 tetraedre egale (a căror muchie este egală cu jumătate din muchia primului tetraedru) = Vol. octaedrului. Tetraedrul poate fi confecționat și din sîrmă, unindu-se prin altă sîrmă, colorată, mijloacele muchiilor lui.

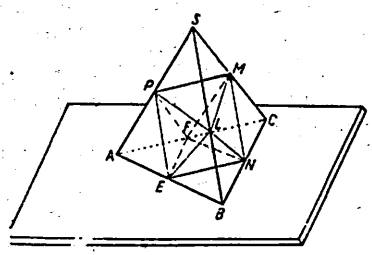


Fig. 18

4. Iată o problemă care nu a putut fi rezolvată pînă ce nu a fost concretizată, desenul ei fiind aglomerat de prea multe linii. Este vorba de o problemă dată la o olimpiadă din Leningrad, în anul 1952: „Într-un cub se află două tetraedre regulate, astfel încît patru vîrfuri ale cubului sînt vîrfurile unuia din ele, iar celelalte

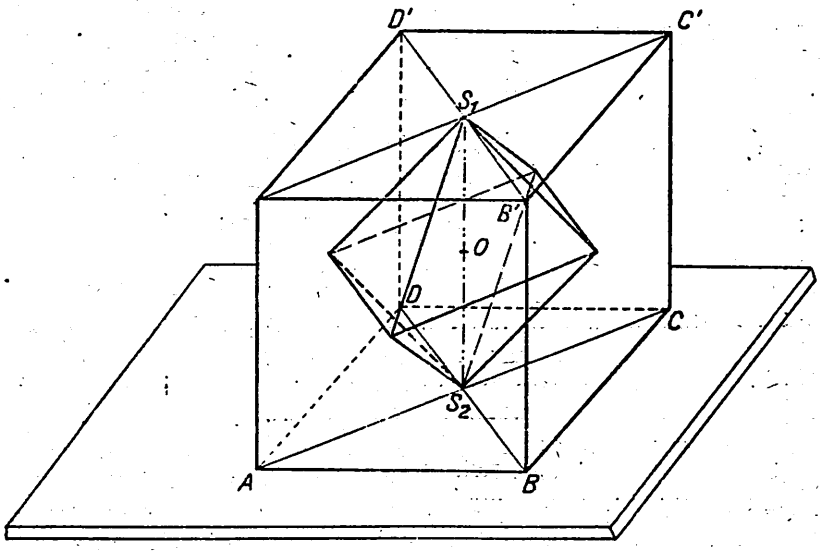


Fig. 19

patru vîrfuri ale cubului, vîrfurile celuilalt. Ce fracțiune din volumul cubului formează partea comună a acestor tetraedre?

Toată construcția s-a făcut din sîrmă colorată — și anume: cubul într-o culoare, iar fiecare tetraedru în altă culoare. S-a

observat ușor că partea comună celor două tetraedre este un octaedru înscris în cub. În acest fel problema se reducea la una deja studiată din capitolul XIV, problema nr. 9 al cărei enunț este: centrele fețelor unui cub sînt vîrfurile unui octaedru regulat. Să se afle raportul volumelor cubului și octaedrului. Problema a fost concretizată astfel:

a) Cubul și octaedrul au fost confecționate din placă de radiografie colorată.

b) Cubul a fost reprezentat printr-o călimară de sticlă întoarsă cu gura în jos. Octaedrul s-a construit din placă de radiografie după ce i s-a aflat muchia în funcție de muchia cubului de sticlă. Totul a fost pus pe un mic postament de care octaedrul a fost fixat cu diagonale S_1S_2, paralelă cu muchia AA' a cubului.

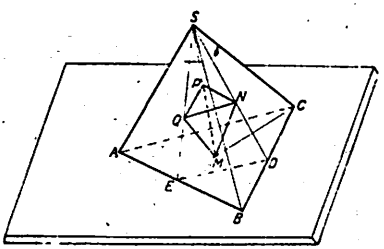


Fig. 20

În problema nr. 31 din capitolul XIV se spune că centrele fețelor unui tetraedru regulat cu muchia a sînt vîrfurile unui tetraedru regulat. Se cere să se afle aria și volumul lui.

Tetraedrul a fost construit din sîrmă (schelet); din altă sîrmă mai subțire s-au dus înălțimile fețelor lui. S-a construit apoi un tetraedru cu muchie

$$QN = \frac{2}{3}ED = \frac{2}{3}\cdot\frac{AC}{2} = \frac{AC}{3} = \frac{a}{3}$$

și s-au fixat vîrfurile lui în punctele Q, P, N, M situate pe înălțimile fețelor primului tetraedru, la $\frac{2}{3}$ de vîrful fiecărei înălțimi. Se observă ușor că $QN \parallel ED$ și $ED \parallel AC$.

6. Pentru a concretiza problema nr. 21 din cap. XII. („Cubul a cărui muche este egală cu a este tăiat la colțuri de către plane duse prin mijloacele fiecăreia din cele trei muchii concurente în fiecare vîrf. Să se afle volumul și aria poliedrului obținut"); o elevă a procedat astfel:

A construit cubul din placă de radiografie necolorată. A țesut cu ață roșie opt triunghiuri de mărimea și forma necesară ($\Delta\, ABC$) celor 8 secțiuni. Acestea au fost prinse de muchiile cubului, în mijloacele lor, înainte de a coase baza superioară a cubului.

O altă elevă a așezat pe o planșă un cub din placă de radiografie colorată, cu o singură secțiune ABC, și alături poliedrul rezultat după secționare. Pentru construcția acestui poliedru,

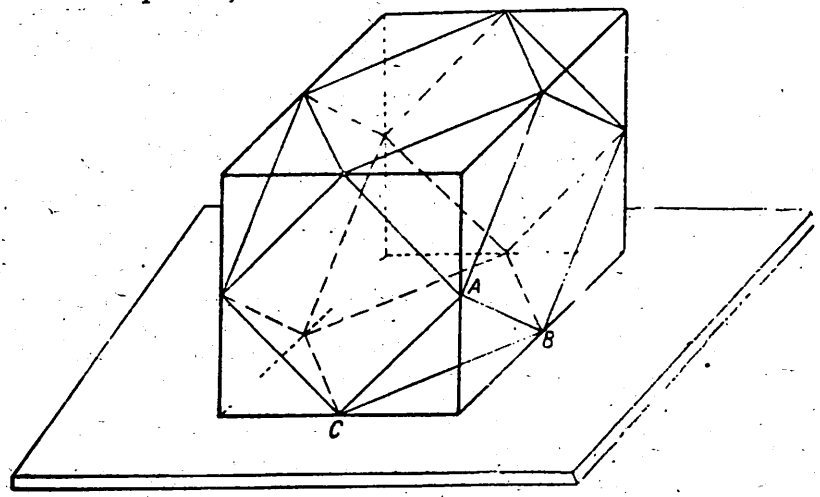


Fig. 21

eleva și-a tăiat din placa de radiografie șase pătrate egale, cu latura cît AC și opt triunghiuri egale cu ABC. A cusut plăcile de radiografie făcîndu-le mai întîi găuri pe margine. A făcut apoi

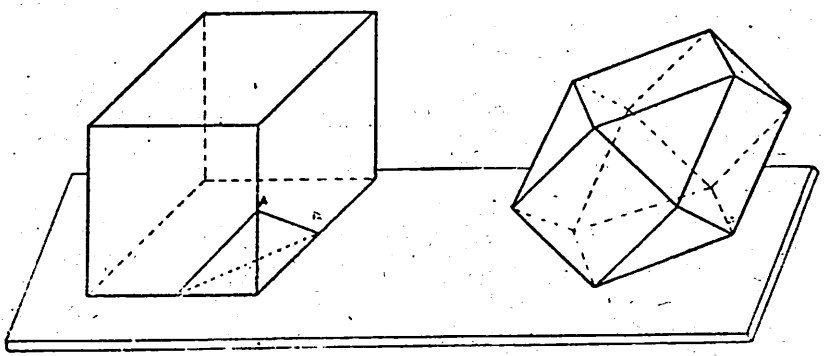


Fig. 22

un feston prin aceste găuri, iar în urmă a cusut marginile festonului muchiilor ce trebuiau alăturate.

7. În problema nr. 27 din capitolul IX se cere aria laterală a unui trunchi de piramidă neregulat cu bazele dreptunghiuri.

După ce desenul a fost făcut corect la tablă, am dat elevilor indicația să construiască trunchiul micșorînd elementele date de același număr de ori — din sîrmă. Triunghiurile neegale necesare rezolvării problemei — ILK și DSB — au fost țesute în culori diferite.

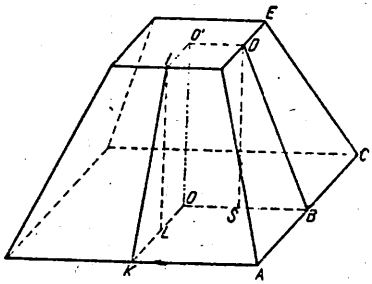


Fig. 23

8. Am concretizat și problema nr.13 din capitolul XV. Iată enunțul acestei probleme: Trunchiul de piramidă patrulateră regulată este împărțit în trei părți de două plane duse prin două laturi opuse ale bazei mici, perpendiculare pe planul bazei mari. Să se afle volumul fiecărei părți, dacă înălțimea trunchiului de piramidă este de 4 cm, iar laturile bazelor de cîte 2 cm și 5 cm.

a) Trunchiul de piramidă a fost construit din carton și apoi fixat pe o foaie de placaj, în așa fel încît numai partea din mijloc — prisma $B'C'PQA'D'SR$ colorată diferit de restul trunchiului — se scoate, ridicîndu-se în sus și deci alunecînd pe bazele ei $B'C'PQ$ și $A'D'SR$. O dată această parte mijlocie scoasă, se răstoarnă și nu mai este nici o îndoială că este o prismă — înălțimea ei fiind $A'B'$, ale cărei elemente se cunosc. Rezolvarea devine foarte ușoară.

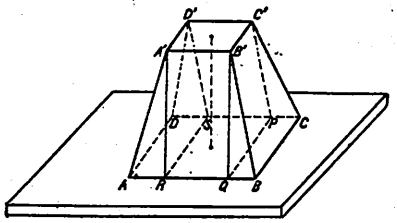


Fig. 24

b) Altă elevă s-a dus la un maistru lemnar care i-a confecționat din lemn trunchiul de piramidă, căruia i-a făcut secțiunile cerute. Cele trei părți în care a fost tăiat trunchiul de piramidă se pot prinde din nou laolaltă prin cuișoare înfipte în secțiunile făcute. Totul este așezat pe un placaj de lemn.

c) De asemenea, o altă elevă a confecționat trunchiul din sîrmă, iar secțiunile le-a țesut cu ață colorată.

9. A fost concretizată de asemenea problema nr. 30, capitolul X. Un octaedru regulat este înscris într-un cilindru. Două vîrfuri ale octaedrului se află în centrele bazelor cilindrului, iar celelalte patru pe suprafața lui laterală. Muchia octaedrului $a = 10$ cm. Să se afle aria laterală a cilindrului.

Cu prilejul studierii poliedrelor regulate, elevele au învățat să facă tiparul desfășurării pe plan a octaedrului regulat. Unele eleve au concretizat această problemă construind octaedrul din placă de radiografie colorată, iar cilindrul din placă necolorată. Ele au trasat cu ață colorată diagonalele octaedrului, care dau posibilitatea să se vadă că cilindrul este echilateral și deci că generatoarea este egală cu diagonala octaedrului, iar raza cît jumătatea acestei diagonale.

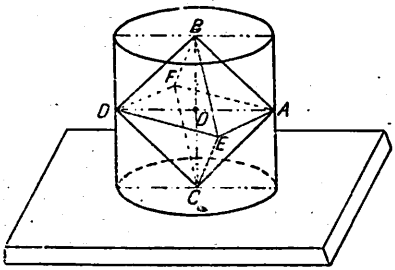


Fig. 25

Calculele sînt simple.

O altă elevă a concretizat această problemă astfel:

A construit octaedrul ca și mai sus, iar cilindrul l-a reprezentat printr-un pahar a cărui gură era introdusă într-o bucată de lemn, căreia i s-a făcut un șanț rotund de mărimea cercului de bază al paharului. Paharul se poate scoate și introduce la loc.

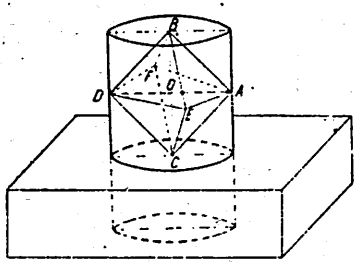


Fig. 26

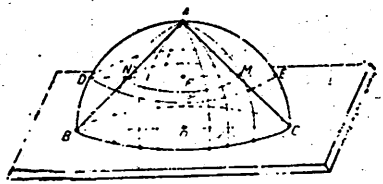


Fig. 27

10. În problema nr. 10 din capitolul XVII se arată că emisfera și conul înscris în ea au baza și înălțimea comună; prin mijlocul înălțimii este dus un plan paralel cu baza. Se cere să se demonstreze că aria secțiunii cuprinsă între suprafața laterală a conului și suprafața emisferei este egală cu jumătatea ariei bazei.

Unele eleve nu au înțeles la început care este și cum se formează secțiunea cerută. Imediat ce au văzut problema concretizată, au înțeles-o și au rezolvat-o ușor.

Emisfera a fost făcută din mai multe sferturi de cerc mare din sîrmă groasă și bine nituită în *A*. Coroana circulară a cărei arie se cere a fost făcută dintr-un carton colorat altfel decît

culoarea conului şi care se introduce o dată cu conul în emisferă. Cercul mare BC al emisferei a fost prins de o placă.

11. Elevelor le-a fost greu să deseneze corect figura necesară rezolvării problemei nr. 13 din capitolul XVII. Problema sună astfel: Laturile unui triunghi sînt de 13 cm, 14 cm şi 15 cm. Să se afle distanţa de la planul triunghiului pînă la centrul sferei tangentă la laturile triunghiului, raza sferei fiind de 5 cm.

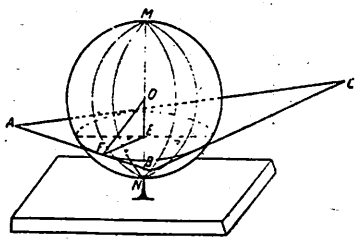


Fig. 28

După ce au văzut însă problema concretizată, munca s-a redus doar la cîteva calcule. Sfera a fost făcută din sîrmă groasă— cercurile meridiane fiind bine nituite la capetele diametrului MN.

Planul triunghiului ABC, făcut din placă de radiografie, taie sfera. Am scos în evidenţă cercul de secţiune printr-o culoare şi punctele de tangenţă ale lui cu laturile triunghiului şi deci cu sfera. Se vede imediat că raza cercului de secţiune este tocmai raza cercului înscris în triunghiul ABC, care se determină uşor. Triunghiul OEF se scoate în evidenţă cu sîrmă sau aţă colorată cu o culoare diferită de cele întrebuinţate pînă acum.

Acelaşi procedeu s-a folosit pentru problema nr. 17 din capitolul XVII.

Raza unei sfere este de 7 cm. Pe suprafaţa ei sînt date două cercuri egale care se intersectează după o coardă egală cu 2 cm. Să se afle razele acestor cercuri, ştiind că planele lor sînt perpendiculare.

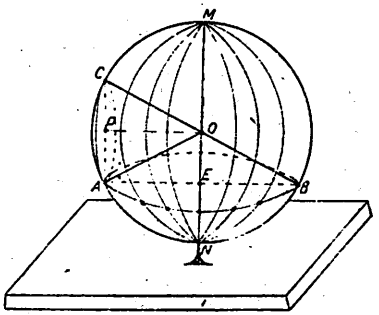


Fig. 29

12. Cu multă uşurinţă a fost rezolvată, după concretizare, şi problema nr. 16 din capitolul XVII. Printr-un punct aflat pe suprafaţa unei sfere sînt duse două plane perpendiculare între ele, care taie sfera după cercurile de raze r_1 şi r_2. Să se afle raza R a sferei.

Sfera a fost făcută din sîrmă — mai multe cercuri mari, bine nituite la capete. Cercurile AB şi AC au fost făcute din placă de radiografie colorată. Ele au fost prinse din loc în loc. Triunghiul OAE a fost pus în evidenţă prin aţă colorată.

13. Problema nr. 19 din capitolul XX sună astfel:

Înălțimea unei piramide triunghiulare regulate este h. Muchiile laterale sînt perpendiculare între ele. Să se afle raza sferei circumscrise.

Rezolvarea acestei probleme devine ușoară cînd se vede că

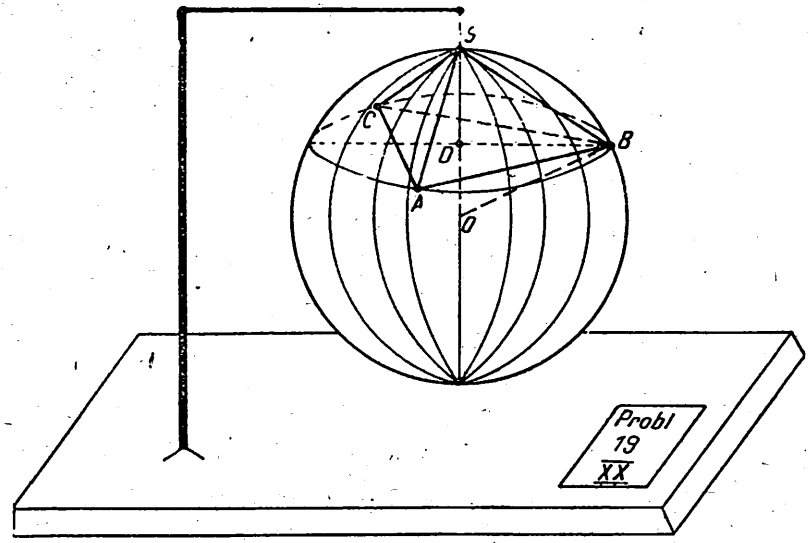


Fig. 30

fețele laterale ale piramidei sînt triunghiuri dreptunghice și că centrul sferei cade în afara bazei piramidei.

Sfera este făcută din sîrmă îmbrăcată în ață albă, iar piramida din placă de radiografie, colorată în albastru. Piramida a fost introdusă în sferă înainte de a fi cusute cîteva din cercurile meridiane. Vîrfurile bazei piramidei au fost prinse de cercurile meridiane o dată cu cercul mic al sferei în care este înscrisă baza piramidei.

Se pune în evidență triunghiul DOB.

14. În problema nr. 25 din capitolul XX se spune că un trunchi de piramidă patrulateră regulată este circumscris unei sfere de rază R și are unghiul diedru de la bază egal cu 45°. Se cere să se afle aria lui totală.

Trunchiul de piramidă a fost făcut din sîrmă groasă, nituită la vîrfurile pătratelor de bază; din aceeași sîrmă au fost făcute și apotemele EM, MP.

Sfera a fost făcută din lemn (lăcuit). S-a tăiat din ea un sfert, ca să se poată adăuga trapezul $EMPO$ făcut din placaj subțire. S-a pus în evidență prin colorare, triunghiul dreptunghic isoscel MNP. De asemenea, s-a marcat punctul F de tangență al sferei cu fața laterală $ABB'A'$ (adică cu apotema trunghiului),

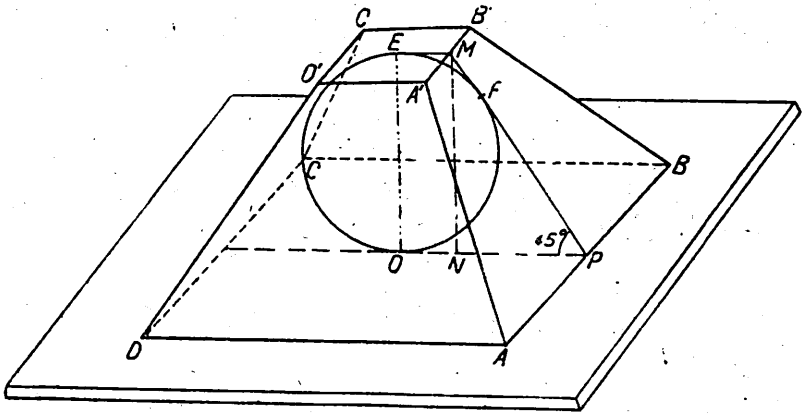


Fig. 31

pentru ca să se vadă mai ușor egalitatea segmentelor $EM = MF$ și $FP = PG$.

15. Problema nr. 10 din capitolul XX cere să se afle care este raportul ariilor a trei sfere, dacă prima suprafață atinge fețele

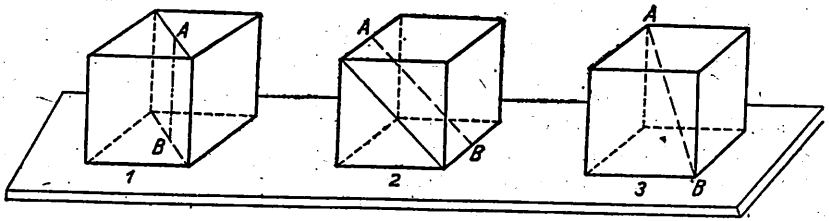


Fig. 32

unui cub, a doua atinge muchiile lui, iar a treia trece prin vîrfurile lui.

Iată cum s-a concretizat această problemă: s-au confecționat trei cuburi egale, primele două din sîrmă, iar al treilea din lemn $\left(\frac{1}{4}\right.$ din ultimul cub s-a tăiat$\left.\right)$. Cuburile au fost așezate pe aceeași

planşetă. În primele două cuburi s-au introdus sfere din lemn vopsit, din care s-a tăiat cîte un sfert pentru a se arăta că diametrul primei sfere este egal cu muchia cubului, iar diametrul celei de a doua cu diagonala feţei laterale a cubului. A treia sferă a fost făcută din sîrmă. Cubul s-a introdus în ea, punîndu-se în evidenţă că diametrul ei este egal cu diagonala cubului.

16. În problema nr. 46 din capitolul XX se dau patru sfere egale de raze R, din care fiecare le atinge pe celelalte trei şi se cere să se afle raza sferei care atinge toate sferele date.

Problema a fost concretizată astfel: cele 4 sfere au fost reprezentate prin 4 mingi mici, care au fost introduse uşor în altă sferă, făcută din sîrmă groasă (cercuri mari, nituite la capetele unui diametru) şi a cărei rază a fost în prealabil calculată. Cele 4 sfere au fost astfel aranjate încît să fie tangente trei cîte trei. În spaţiul rămas gol între ele, s-a introdus o bilă de lemn, care este şi ea tangentă celor 4 sfere egale şi care indică soluţia a II-a a problemei. Reprezentîndu-se figura, elevele au putut înţelege uşor că centrele celor 4 sfere egale sînt vîrfurile unui tetraedru regulat cu muchia egală cu $2R$.

17. Problema nr. 28 din capitolul XXII, arată că în interiorul bazei unei emisfere este înscris un dreptunghi cu laturile a şi b. Prin laturile dreptunghiului sînt duse patru plane perpendiculare pe bază, care taie din emisferă patru părţi (jumătăţi de segmente). Problema cere să se afle volumul părţii rămase.

Emisfera a fost reprezentată printr-o jumătate de glob sferic (din sticlă), iar planele prin jumătăţi de cercuri (din sticlă colorată) de diametru a şi b.

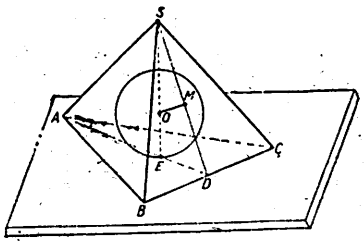


Fig. 33

18. Pentru a concretiza problema nr. 9 din cap. X se cere să se găsească raza sferei înscrise într-un tetraedru regulat. Elevele au confecţionat tetraedrul, apotema şi înălţimea lui din sîrmă îmbrăcată în aţă colorată. Sfera era o minge de ping-pong albă, din care s-a tăiat un sfert pentru a se vedea bine raza sferei $OM = OE$, precum şi $\triangle SOM \sim \triangle SED$.

Construcţia a fost fixată pe o placă de scîndură pe care s-a făcut şi desenul şi s-a scris rezolvarea problemei. Construcţia tetraedrului a fost făcută în funcţie de raza sferei (a mingii).

19. În problema nr. 10 din capitolul X se cere să se calculeze suprafaţa trunchiului de con determinat de două sfere tangente

între ele de raza R și r și de conul tangent exterior celor două sfere.

Conul a fost făcut din sîrmă groasă, vopsit cu lac alb, avînd mai multe generatoare; sferele tot din sîrmă, reprezentate prin mai multe cercuri mari vopsite cu lac colorat. Prin sîrme colorate

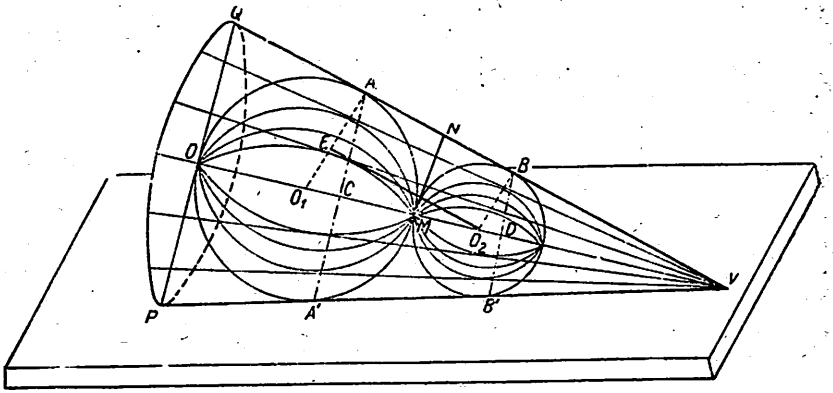


Fig. 34

s-a pus în evidență triunghiul O_1O_2E și tangenta comună interioară la cele două sfere (MN) care este linie mijlocie în trapezul $DBAC$.

Frumos a fost concretizată problema nr. 20 din capit. XXI.

II. Un trapez isoscel în care unghiul ascuțit este de 45° și latura înclinată pe baze este egală cu baza mică, se rotește în jurul laturii înclinată pe baze. Dîndu-se lungimea ei $a = 3$ cm, să se construiască solidul ce ia naștere și să se calculeze volumul și aria corpului de rotație.

Solidul este mărginit de aria laterală a conului BCC', aria laterală a conului ADD' și de coroana circulară de grosime $\overline{CD}$.

S-a calculat $\overline{OA} = \overline{OD} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = EB$

$$\overline{CB} = a + 2\overline{EB} = a + a\sqrt{2} = a(1+\sqrt{2}) = 3 \times 2{,}41 \approx 7{,}23 \text{ cm}.$$

$$\overline{OC} = \overline{OB} = a + \overline{OA} = a + \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}+1)$$

Pentru a obține tiparul suprafețelor ce mărginesc solidul, s-a desfășurat conul BCC' pe un plan și a rezultat un sector cir-

cular s_1 cu raza cît $\overline{BC} = 7{,}23$ cm și lungimea arcului cît lungimea cercului CC'.

$$\text{Deci } \frac{\pi \overline{BC} \cdot n^\circ}{180^\circ} = 2\pi \overline{OC} \text{ sau } \frac{a(1+\sqrt{2})\, n^\circ}{180^\circ} = a\sqrt{2}\,(\sqrt{2}+1)$$

$$\text{Deci } n^\circ = (180\sqrt{2})^\circ \approx 180^\circ \times 1{,}41 \approx 254^\circ$$

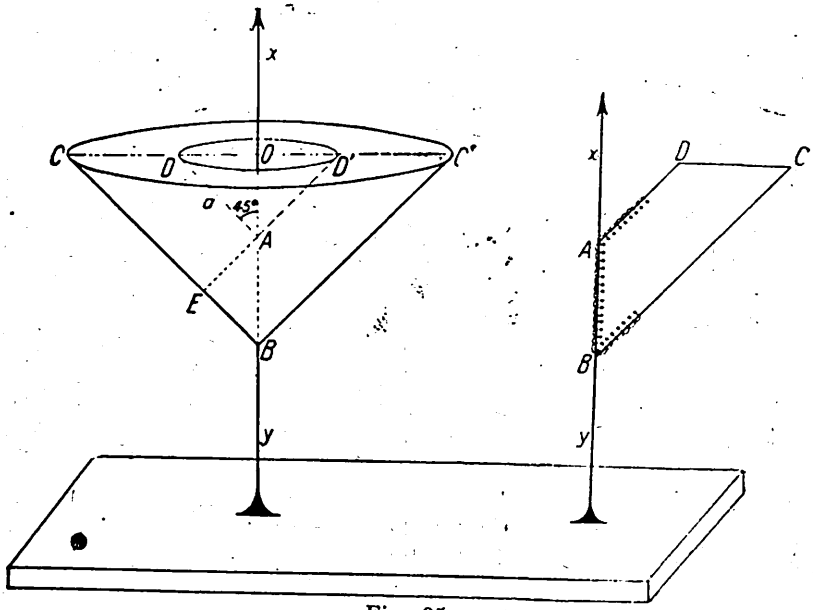


Fig. 35

Conul ADD' s-a desfășurat rezultînd un sector (s_2) cu același număr de grade ca primul, dar cu raza $\overline{AD} = a = 3$ cm. Coroana circulară (s_3) de lățime $\overline{CD}$ s-a obținut din două cercuri concentrice de raze

$$R = \overline{OC} = \frac{3\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}+1) = \frac{3 \cdot 1{,}414}{2} \cdot 2{,}41 \approx 5 \text{ cm.}$$

$$r = OD = \frac{3\sqrt{2}}{2} = 3 \cdot 0{,}707 = 2{,}121 \approx 2 \text{ cm.}$$

Pentru confecționarea solidului, am tăiat din placa de radiografie (spălată și colorată apoi cu tentă de tuș) figurile s_1, s_2 și s_3, după tipar.

Pentru a îmbina uşor aceste suprafeţe s-au făcut găurele de jur împrejurul lor (cu un ac gros) la distanţe egale şi apoi un feston cu aţă obişnuită.

S-a cusut marginea festonului de pe segmentul BC de marginea festonului de pe segmentul BC' şi s-a obţinut conul BCC'; s-au

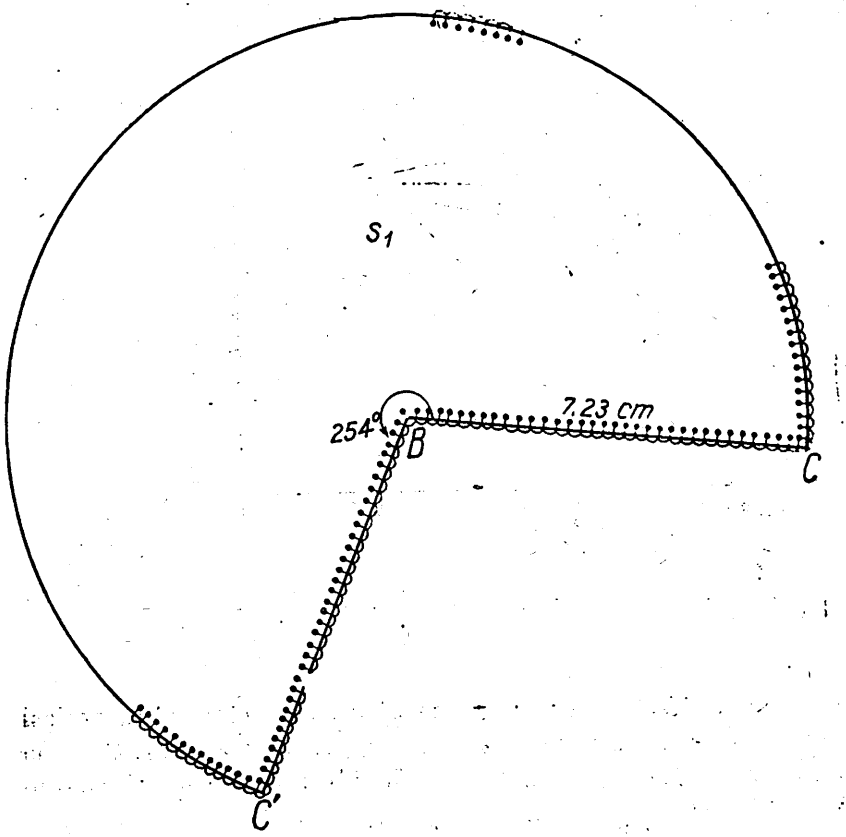


Fig. 36

cusut apoi marginile festonului de pe segmentul AD de marginea festonului AD' şi s-a obţinut conul ADD'. S a cusut apoi marginea festonului de pe cercul de bază al conului BCC' de marginea festonului de pe cercul cel mare al coroanei circulare; la fel festonul de pe cercul conului mic de cercul mic al coroanei circulare. S-a ţinut seama că vîrful conului mic trebuie să fie îndreptat în interiorul conului mare.

Prin vîrfurile A şi B ale celor 2 conuri se trece o axă (o andrea sau o sîrmă) în jurul căreia solidul se poate învîrti. Partea de jos a axei, se fixează pe o placă. Pe aceeaşi placă s-a fixat încă o andrea în jurul căreia se poate roti un trapez egal cu cel dat; acesta arată figura plană care se roteşte pentru a da naştere corpu-

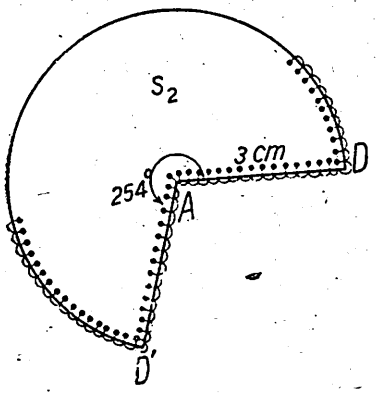


Fig. 37

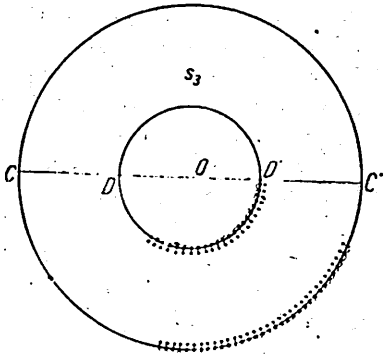


Fig. 38

lui construit. De placă este prins un cărneţel care conţine rezolvarea problemei (aria şi volumul solidului) precum şi desenul în plan.

Dacă elevele bune pot rezolva acest gen de probleme fără să aibă nevoie să construiască şi solidul, elevele mediocre şi cele slabe au rămas perfect lămurite asupra determinării ariei şi volumului oricărui corp de rotaţie după ce au înţeles calculele necesare construirii (2—3 probleme) şi au văzut şi pipăit aceste corpuri.

* * *

Căutăm să folosim cît mai larg materialul didactic confecţionat de noi. Corpurile geometrice (cub, paralelipiped etc.) le arătăm ori de cîte ori este necesar să fie intuite aceste corpuri şi elementele lor. Înainte de a explica o noţiune nouă, înainte de a da o definiţie, arătăm elevelor figurile respective, pentru a fi intuite. Pentru a scoate în evidenţă caracteristicile esenţiale ale unei noţiuni, arătăm figura respectivă alături de figura contrară ei (prisme cu piramide, paralelipipedul dreptunghic şi cel oblic etc.).

Chibzuim bine momentele de folosire a materialului didactic pentru ca scopul să fie cît mai bine atins.

Ne ferim să folosim planşe cu demonstraţiile unor teoreme cînd pe desene sînt reprezentate în acelaşi timp şi figurile date şi construcţiile suplimentare care trebuie să apară în procesul demonstraţiei.

Folosim uneori planşe pregătite dinainte, atunci cînd prin aceasta economisim timp. De exemplu, se rezolvă o problemă cînd figura are o anumită poziţie iar planşa serveşte pentru a arăta diferite alte cazuri particulare.

La anumite lecţii frontale (de exemplu la lecţia despre perpendiculara pe două drepte ale unui plan) dăm elevelor din fiecare bancă cîte o machetă a teoremei. Astfel pot urmări pe această demonstraţie ce se face la tablă, pe desen.

Adesea materialul didactic este lăsat în clase mai multe zile, pentru ca elevele să-l studieze cu multă atenţie.

În general cerem elevelor să concretizeze teoreme sau probleme după ce acestea au fost explicate şi desenate la tablă.

Pentru ca lucrările individuale să poată fi efectuate mai uşor, le-am sfătuit pe eleve să-şi confecţioneze anumite figuri (de preferinţă din sîrmă tare la poliedre şi din carton la prima parte a geometriei în spaţiu). Astfel elevele au gata pregătite scheletele tuturor poliedrelor regulate, mai obişnuite (paralelipipede, prisme, piramide regulate: patrulatere, triunghiulare şi exagonale).

Cînd lucrează acasă, elevele îşi pot construi pe aceste schelete cu fire colorate secţiunile de care au nevoie la problemele mai grele.

Pentru geometrie elevele şi-au făcut caiete speciale în care au notat un grup de teoreme referitoare la anumite elemente ale triunghiului: mediane, înălţimi etc. O serie de eleve şi-au alcătuit caiete în care au trecut relaţiile metrice mai importante, probleme de arii, de construcţii geometrice, de locuri geometrice, teoreme celebre etc. În felul acesta elevele şi-au sistematizat şi îşi clasifică cunoştinţele.

La toate concretizările am căutat ca figurile să fie cît mai simple, pentru a se vedea uşor şi repede dependenţa dintre elementele corpurilor geometrice.

Am căutat, de asemenea, ca materialul didactic să fie executat prin posibilităţile elevelor, deoarece însuşi procesul de construire este un bun mijloc educativ, înarmînd pe copii cu deprinderi de muncă practică, disciplinîndu-i şi întărindu-le voinţa.

Unele probleme nu au putut fi ilustrate efectiv de eleve, dată fiind necesitatea de a se lucra cu strungul, de a se nitui sîrmele etc. Totuşi elevele au asistat la efectuarea acestor operaţii, căpătînd pe această cale unele cunoştinţe.

Practica folosirii şi confecţionării materialului didactic, pe lîngă faptul că uşurează însuşirea cunoştinţelor predate, ajută elevilor să înţeleagă mai adînc legătura dintre teorie şi practică, îi înarmează cu numeroase deprinderi practice necesare, îi învaţă să utilizeze raţional materialele şi le dezvoltă iniţiativa creatoare.

LUCRĂRI PRACTICE LA MATEMATICĂ LA CLASELE V — VII

CORNEL SĂSĂRAN
Şcoala medie romînă
JIMBOLIA
Regiunea Timişoara

Congresul al II-lea al P.M.R. a cerut şcolii să acorde o atenţie deosebită studierii matematicii şi fizicii şi mai ales, legării lor cu viaţa, cu practica. Realizînd această sarcină, noi, profesorii de matematică trebuie să asigurăm nu numai însuşirea de către elevi a cunoştinţelor teoretice ci şi înarmarea lor cu deprinderea de a aplica aceste cunoştinţe la rezolvarea unor probleme practice din viaţa de toate zilele şi din producţie. De aceea, lucrările practice trebuie să ocupe un loc important în predarea matematicii.

În trecut, matematica era considerată adesea ca o materie foarte grea şi de aceea nu era prea iubită de elevi. Practica muncii în şcoală dovedeşte însă că matematica poate deveni pentru foarte mulţi elevi obiectul cel mai iubit. Acest lucru se realizează îndeosebi prin apropierea matematicii de viaţă, de practică, apropiere care face ca acest obiect să fie cu mult mai accesibil elevilor. Şi eu, ca şi mulţi alţi profesori am întîmpinat adesea greutăţi în predarea geometriei, mai ales în clasa a VI-a. Elevii nu înţelegeau multe demonstraţii, ba, mai mult decît atît, ei nu simţeau nevoia demonstraţiilor. Îmi aduc aminte că o dată pe cînd predam criteriile de egalitate ale triunghiurilor în clasa a VI-a, după ce m-am zbătut o oră întreagă folosind diferite metode şi tot felul de planşe, ca să fac lecţia cît mai atractivă şi cît mai accesibilă elevilor, am chemat un elev la tablă ca să repete demonstraţia. Deodată acesta întrebă:

— „Tovarăşe profesor, dar ce rost au toate acestea, că doar e clar că dacă în două triunghiuri avem cîte două laturi, respectiv egale şi unghiul cuprins între ele egal, cele două triunghiuri sunt egale?"

Ce era să-i răspund? Am început să trec în revistă cunoştinţele geometriei, aproape de la început, subliniind diferenţa între o axiomă şi o teoremă arătîndu-i că criteriile de egalitate ale

triunghiurilor sînt adevăruri care trebuie demonstrate. Am citit, după expresia feţei elevului, că tot nu s-a lămurit. Acest lucru m-a pus pe gînduri şi am luat o hotărîre: să încep să aplic toate teoremele care se pretează la măsurători pe teren. Nu aveam instrumente, nu exista o metodică a lucrărilor practice ce se pot efectua în cadrul orelor de matematică şi nici măcar cele mai elementare instrucţiuni în această privinţă. Cu toate acestea, nu m-am dat bătut şi am pornit cu toată hotărîrea să-mi realizez scopul propus.

În primul rînd am consultat o serie de lucrări de topografie, geodezie, planimetrie, agrimensură etc. de la biblioteca Institutului Politechnic din Timişoara. Am dobîndit astfel o serie întreagă de cunoştinţe necesare pentru efectuarea lucrărilor practice. Am studiat amănunţit aparatele şi instrumentele descrise în aceste lucrări pe care socoteam că le voi putea confecţiona şi folosi în diferite măsurători, notînd în caietul meu de studiu individual dimensiunile şi schiţele lor, precum şi observaţii asupra modului de întrebuinţare.

Am trecut apoi la realizarea instrumentelor, antrenînd în confecţionarea lor şi pe elevi şi chiar pe unii părinţi. Înainte de toate am confecţionat cu elevii instrumente în miniatură, cioplite cu cuţitul din şipci subţiri de brad. Jaloanele-miniatură au fost confecţionate din nuiele de salcie curăţate de coajă şi apoi vopsite din loc în loc cu cerneală roşie. Apoi am confecţionat echere pentru măsurători, din bucăţele de şipci îmbinate sub un unghi drept sau bucăţele de scînduri pătrate, pe care am trasat două axe de simetrie sau cele două diagonale, înfigînd în extremităţile acestor linii cîte un cui, care servea drept pinule de vizare. Această scîndurică s-a fixat cu centrul său pe un beţişor care servea drept picior. Jaloanele şi toate instrumentele care se sprijineau pe un singur picior, ca să prezinte o stabilitate, le-am montat în partea lemnoasă a unor mosoare de aţă care în prealabil au fost tăiate în două. O dată cu confecţionarea instrumentelor, elevii au învăţat cum să le mînuiască şi la ce lucrări să le aplice.

În acelaşi timp, părintele unui elev ne-a confecţionat două echere topografice, un compas topografic, o alidadă din lemn, un echer mai mare, cu catetele egale, şi ne-a împrumutat un stativ pe care am montat o planşetă pentru a putea face ridicări de teren. Trepied şi grafometru nu am reuşit să confecţionăm, deoarece necesitau mai multe investiţii şi şcoala nu dispunea de fonduri. Totuşi, cu ajutorul raportorului ce-l foloseam în clasă, am reuşit să determinăm unghiurile în plan orizontal aşezînd raportorul pe planşeta noastră de pe stativ în poziţie orizontală.

În centrul raportorului a fost înfiptă o vergea, cu ajutorul unui cui în jurul căruia se putea roti această vergea ca un arătător al unui ceas. Pentru vizare la capătul vergelei s-a bătut cîte un cui înfipt vertical şi care servea drept pinulă de vizare.

Pentru determinarea unghiurilor în plan vertical am întrebuinţat eclimetrul, confecţionat tot dintr-un raportor, care însă acum era montat cu diametrul pe o linie lungă de un metru, a cărei muchie servea pentru vizare.

În tot timpul executării instrumentelor elevii au dat dovadă de un interes deosebit, fiecare întrecîndu-se în a efectua instrumentele sale cît mai perfect şi într-o formă cît mai estetică. Numeroase instrumente-miniatură confecţionate de elevi au fost expuse la expoziţia organizată cu prilejul consfătuirilor raionale.

După confecţionarea instrumentelor a început munca operativă pe teren. Orice lucrare ce urma să se efectueze pe teren era efectuată în prealabil de mine în clasă, cu instrumentele mici. Drept teren pentru efectuarea acestor „lucrări" în miniatură era folosită tabla, care se aşeza în poziţie orizontală pe masă şi pe care au fost desenate diferite forme de relief şi construcţii necesare, în funcţie de lucrarea propusă. După ce executam lucrarea, ceream elevilor s-o repete pe rînd, pe cît era posibil toţi, cu instrumentele lor proprii.

După ce constatam că elevii cunosc bine mersul lucrării ieşeam pe teren, de obicei pe izlazul comunal, care este foarte aproape de şcoală. Lucrările pe teren nu aveau loc în timpul orelor de curs, deoarece majoritatea cereau un timp mai îndelungat decît 45—50 minute. De aceea, aceste lucrări erau organizate în cadrul activităţii în afara clasei, în anumite după amieze dinainte fixate. Nu am putut împărţi clasa în grupe de lucru, aşa cum mi-am propus, deoarece nu dispuneam decît de un singur rînd de instrumente, astfel că pe teren lucrarea era repetată de mai mulţi elevi pe rînd. Trebuie să arăt că chiar după prima lucrare efectuată cu elevii pe teren, interesul lor faţă de studiul matematicii s-a ridicat mult. Noţiunile de geometrie au devenit mai clare. Acasă elevii îi uimeau pe părinţi prin faptul că puteau să determine diferite înălţimi cu ajutorul umbrei sau cu ajutorul echerului cu catetele egale, precum şi diferite distanţe inaccesibile prin metoda triunghiurilor egale.

Într-o zi am fost plăcut surprins de un fapt relatat de elevul care-mi pusese întrebarea cu privire la rostul demonstrării criteriilor de egalitate ale triunghiurilor. Elevul mi-a povestit că pe cînd era cu tatăl său pe cîmp, pentru a-l ajuta în muncă, acesta l-a întrebat, dacă îşi poate da seama de lăţimea pîrăului Ier,

care trece prin comuna Becicherecul Mic. Băiatul i-a răspuns că această distanță poate fi determinată cu precizie, cu ajutorul unor instrumente, fără să se măsoare direct. Tatăl n-a vrut să-l creadă și băiatul era trist că n-are instrumente pentru a dovedi adevărul spuselor sale. Sezisînd momentul, am propus elevilor să mergem cu toții după lecții, pe cîmp, să vedem cum efectuează colegul lor lucrarea. Toți au acceptat bucuroși și au început să-i dea indicații.

Cînd am sosit pe cîmp, tatăl elevului a început să facă glume, văzîndu-i pe băieți cu bețele de floarea-soarelui care serveau drept jaloane. Băiatul foarte serios i-a spus că am venit să-i demonstrăm că se poate determina lățimea pîrăului numai cu aceste instrumente simple. Pînă la urmă s-a aprins și curiozitatea tatălui și el a urmărit cu foarte mare atenție cum copilul său, stăpîn pe sine, efectuează singur lucrarea, făcînd semne cu mîna ajutorilor săi pentru a muta la stînga, la dreapta sau pentru a înfige jalonul. După terminarea lucrării băiatul i-a comunicat tatălui său, foarte mîndru rezultatul: pîrăul e lat de 7,46 metri. Dar nici acum n-a fost crezut. Atunci, am intervenit eu și am aruncat capătul lanțului de măsurat peste pîrău. Un elev a trecut pe celălalt mal și a ajutat la întinderea lanțului între cele două jaloane reperate. Am rămas și eu surprins de rezultat: elevul lucrase cu atîta precizie încît măsurînd cu lanțul am găsit 7,40 metri. Deci o eroare foarte mică.

Întîmplarea aceasta a avut urmări pozitive; i-a convins pe elevi de utilitatea practică a cunoștințelor, a arătat părinților că fiii lor știu să aplice cele învățate în clasă și a contribuit, astfel la ridicarea prestigiului școlii.

Organizarea lucrărilor practice

Lucrările practice pe teren trebuie efectuate la toate clasele începînd din clasa a V-a. Înainte de efectuarea lor pe teren este necesar să explicăm aceste lucrări în clasă, să arătăm elevilor toate aparatele și instrumentele cu care vom lucra și să le dăm indicații asupra mînuirii acestora.

Este bine ca fiecare elev să aibă un caiet special pentru lucrări practice în care să însemne unele observații cu privire la partea teoretică a lucrării, schițele, tabelele și întreg mersul lucrării, în prealabil explicate în clasă de profesor. Explicațiile teoretice ale profesorului au efect foarte mare dacă sînt însoțite de o machetă a lucrării constînd într-o planșă mare de cca.

60 cm × 100 cm, pe care sînt desenate diferite forme naturale (rîu, pădurice sau obiecte în legătură cu lucrarea), şi pe care se lucrează cu modele de instrumente în miniatură. Pe o asemenea planşă se pot executa toate problemele pe care le vor avea de rezolvat elevii pe teren: jalonarea unei drepte cu ajutorul acelor de gămălie, construirea unghiurilor drepte cu ajutorul echerului de agrimensură, construirea unor triunghiuri egale pentru determinarea distanţei pînă la nişte puncte inaccesibile etc.

În locul planşei se poate întrebuinţa cu succes o tablă aşezată orizontal, pe o masă, pe care se desenează toate schiţele necesare.

Trebuie să menţionăm că toate lucrările ce se efectuează precum şi mînuirea instrumentelor trebuie foarte amănunţit explicate de profesor şi apoi efectuate de el. După aceea li se va cere şi elevilor să repete operaţiile pe rînd, pe cît e posibil toţi, pentru a ne da seama în ce măsură şi-au însuşit tehnica lucrării, precum şi pentru a-i deprinde să mînuiască instrumentele.

Dacă lucrarea n-a fost pregătită în clasă destul de bine, elevii vor avea numai o idee vagă despre operaţiile pe care vor trebui să le îndeplinească, vor dibui, ceea ce avea desigur rezultate negative.

Este bine ca măsurarea fiecărui element (distanţă, unghi etc.) să se efectueze de mai multe ori, şi apoi să se ia media lor aritmetică.

Dacă şcoala este înzestrată cu mai multe rînduri de instrumente (10—15 bucăţi) atunci, înainte de prima ieşire pe teren, fiecare clasă se împarte în grupe de 4—6 elevi, care vor lucra independent bineînţeles sub supravegherea şi îndrumarea profesorului. Grupele trebuie astfel organizate, încît fiecare să aibă aceeaşi capacitate atît în ce priveşte numărul elevilor cît şi pregătirea lor. Munca în grupă se împarte, pe cît este posibil în mod egal pentru fiecare elev şi în acelaşi timp în aşa fel ca după efectuarea tuturor lucrărilor toţi elevii să cunoască bine modul de lucru cu fiecare instrument.

Dacă şcoala are un singur rînd de instrumente, atunci toate lucrările trebuie efectuate întîi de către profesor, pe etape, acesta dînd explicaţiile necesare, iar apoi, pe rînd de către mai mulţi elevi.

Ca teren pentru efectuarea lucrărilor practice poate să servească şi curtea şcolii.

Toate obiectele din natură sau reperele fixe la care raportăm lucrarea trebuie să fie alese din timp. Profesorul trebuie să efectueze singur în prealabil fiecare lucrare pentru a putea să verifice uşor exactitatea rezultatelor obţinute de elevi.

Descrierea instrumentelor

Pentru efectuarea lucrărilor practice la clasele V—VII, avem nevoie de următoarele instrumente a căror confecționare se poate realiza pe plan local și fără mari cheltuieli:

1. **Jalonul.** Jalonul este un baston de lemn sau fier, lung de 2 m și gros cca. de 3—5 cm. Pentru a se înfige mai bine în pămînt, la una din extremități este ascuțit și prevăzut cu un sabot de fier. La cealaltă extremitate, jalonul este prevăzut cu o tăietură de ferăstrău, pentru a se atașa o bucată de carton sau o tăbliță spre a se mări vizibilitatea jalonului. În același scop el este vopsit în alb și roșu (fig. 1). Verticalitatea jalonului se verifică cu un fir cu plumb.

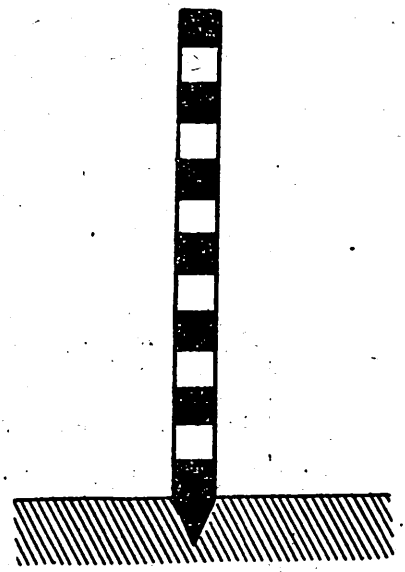


Fig. 1

2. **Țărușii.** Țărușii sînt bucăți de lemn din esență tare, lungi de 20 — 40 cm și groși de 5—10 cm, ce se ascut la un capăt pentru a se putea înfige în pămînt; la celălalt capăt sînt retezați normal cu fierăstrăul (fig. 2). Ei se întrebuințează la indicarea pe teren a punctelor ce voim să le considerăm. Cînd lucrarea cere precizie mare, se bate în mijlocul capului retezat un cui care să indice cît mai exact locul matematic al punctului considerat. În punctele aflate în locuri de mare circulație (șosele, șantiere etc.) în locul țărușilor de lemn se întrebuințează țăruși de fier, avînd aceleași dimensiuni ca cei din lemn. Prin izbituri normale cu un baros, țărușii sînt bătuți pînă la nivelul pămîntului, pentru ca ei să

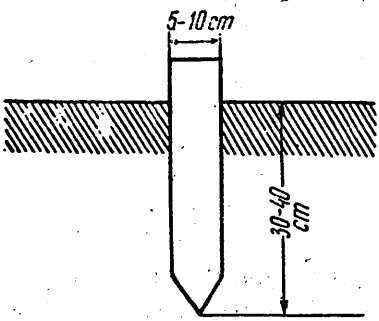


Fig. 2

marcheze cu adevărat suprafaţa lui. Ţăruşii astfel instalaţi sînt acoperiţi cu un muşuroi de pămînt de cca. 0,40 m înălţime, pentru a nu fi expuşi dislocării; în timpul operaţiunilor, ei se dezvelesc.

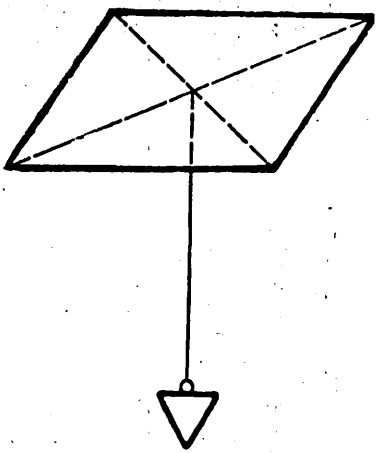


Fig. 3

3. **Firul cu plumb.** Firul cu plumb se utilizează la aşezarea în staţie a diferitelor instrumente, precum şi la instalarea unei mire sau a unui jalon în poziţie verticală. El se compune dintr-un fir de sfoară lung de cca. 1,50 m, prevăzut la unul din capete cu o greutate ce se termină cu un vîrf ascuţit pentru a fi uşor proiectat pe punctul de staţie (fig. 3).

Observaţii: numai după ce firul cu plumb a încetat să mai penduleze, adică se află în repaus complet, arată direcţia verticalei. Mîna care ţine firul trebuie să fie liniştită. Cînd bate vîntul operatorul se aşază totdeauna contra vîntului, astfel ca firul cu plumb să fie apărat de vînt.

După scopul în care se execută măsurătoarea unei lungimi, distingem: măsurători precise, măsurători obişnuite şi măsurători puţin precise. Evident că şi instrumentele întrebuinţate la măsurarea lungimilor sînt adecvate felului de măsurare sau precizie cerute.

4. **Instrumentele de măsurat lungimi.** Pentru măsurători obişnuite se întrebuinţează panglica de oţel, ruleta de oţel sau de pînză.

Pentru măsurători mai puţin precise se întrebuinţează compasul topometric. În şcoală se pot confecţiona prin mijloace proprii frînghia sau lanţul de măsurat lungimi.

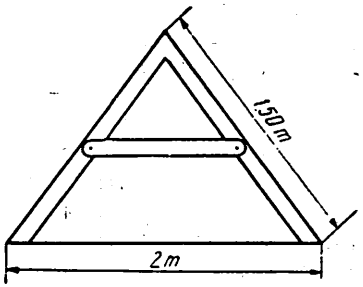


Fig. 4

a) *Compasul topografic.* Compasul topografic este format din două bastoane de lemn lungi de 1,50—1,70 m, prinse la un capăt printr-un şurub cu urechi. Deschizătura dintre gheare se ia de

obicei de 2 m, iar pentru rigiditatea compasului se leagă ambele picioare de la mijloc printr-o stinghie ușoară. Pentru a măsura cu compasul topometric anumite lungimi se merge cu el pe distanța jalonată, învîrtindu-l dintr-o gheară în alta și ținînd seama de numărul învîrtiturilor (fig. 4).

b) *Frînghia de măsurat.* În loc de panglică etalonată din oțel sau ruletă, în practica școlară unde se măsoară distanțe relativ

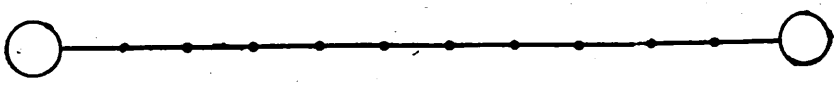


Fig. 5

mici și care nu necesită o precizie așa de mare, se poate întrebuința o frînghie de 10—20 m, care din metru în metru să poarte cîte un nod, unde se prinde pe o bucățică de carton sau placaj numărul metrilor (fig. 5).

Numărul de centimetri se poate măsura cu o linie gradată de un metru.

c) *Lanțul de măsurat.* Se poate confecționa din bucățele de sîrmă de cupru sau aluminiu, lungi de cîte 20 cm și cu o grosime de 3 mm.

Se taie cu o daltă bucățele de sîrmă cu o lungime de 22 cm. Se lasă în ambele capete cîte un centimetru pentru a se putea face inelul de legătură între ele.

Îndoirea sîrmei se face astfel (fig. 6): se bat două cuie de fier groase de cîte 3—4 mm vertical într-o bucată de lemn, la o distanță de 3 mm unul de altul, astfel încît capătul sîrmei să intre între ele. Se introduce sîrma între aceste cuie astfel ca să le depășească cu un centimetru. Apoi răsucim sîrma în jurul unui cui și în felul acesta obținem un ochi într-unul din capetele sîrmuliței.

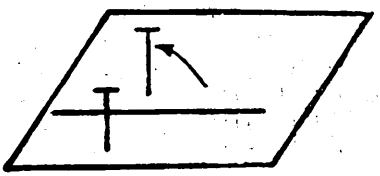


Fig. 6

La fel se procedează și cu celălalt capăt și, pe rînd cu toate bucățelele tăiate. După confecționarea a 50 bucăți de astfel de sîrmulițe ele se prind unele de altele cu ajutorul unui clește de electrician. Din 5 în 5 bucățele se prinde de ochi cîte o plăcuță

de tablă rotundă, pe care se specifică numărul metrilor întregi (fig. 7).

La capete se adaugă cîte un mîner confecționat tot din sîrmă, în formă de triunghi, prevăzut cu o apărătoare din lemn de soc.

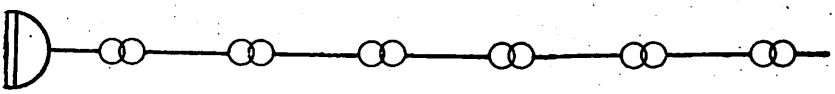


Fig. 7

5. **Nivela cu bula de aer.** Nivela cu bula de aer se compune dintr-un tub de sticlă ermetic închis (fig. 8).

Tubul se umple aproape în întregime cu lichid foarte fluid (alcool, eter sau în caz de nevoie și apă), colorat. În tubul incomplet umplut, bula de aer se oprește deasupra, mișcîndu-se după înclinările date tubului. Tubul de sticlă se așază pe o masă perfect orizontală. Cu o zgîrietură fină, făcută cu un cuțit de tăiat fiole sau cu o bucată de quarț, se notează extremitățile bulei de aer. Aceste liniuțe formează reperele tubului. Apoi tubul se fixează într-un șănțuleț circular făcut într-o riglă prismatică, bine geluită, lungă de 30 cm, lată de 5 cm și înaltă de 2 cm, în așa fel ca bula de aer să fie între repere. După această operație, nivela se rotește cu 180° astfel ca extremitățile ei să vină în același loc. Dacă bula se menține tot între repere aceasta înseamnă că nivela este reglată.

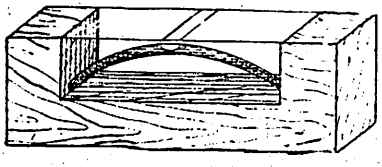


Fig. 8

6. **Cumpăna zidarului.** Cumpăna zidarului se utilizează de multe ori în locul nivelei cu bula de aer. Ea se compune din trei stinghii unite într-un triunghi echilateral sau isoscel. În mijlocul stinghiei inferioare (linia de bază) este făcută o mică crestă-

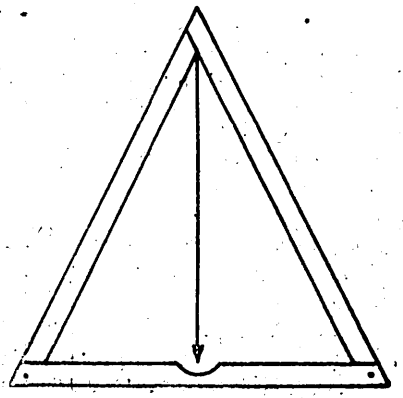


Fig. 9

tură, iar în vîrful triunghiului se agaţă un fir cu plumb care întîlneşte crestătura făcută în stinghia inferioară; atunci cumpăna se află în poziţie orizontală (fig. 9).

7. **Echerul topografic.** Echerul topografic poate avea construcţii variate. Cel mai simplu echer topografic este format din două linii drepte trasate pe o scîndură, perpendiculare una pe alta.

Un echer topografic simplu şi uşor de confecţionat este cel din fig. 10, format din 2 stinghii lungi de 40 cm, late de 3 cm şi groase de 1—1,5 cm, astfel îmbinate încît liniile drepte AB şi CD trase pe ele să formeze în punctul lor de intersecţie O, unghiuri de 90° ($AB \perp CD$). În punctele A,B,C şi D se bat nişte cuie mai mari în poziţii verticale. De asemenea, în punctul O se bate un cui ce trece prin ambele stinghii şi apoi se înfige într-un ţăruş ascuţit la capătul de jos, care ajută la înfigerea aparatului în punctul unde vrem să ridicăm perpendiculara pe o dreaptă.

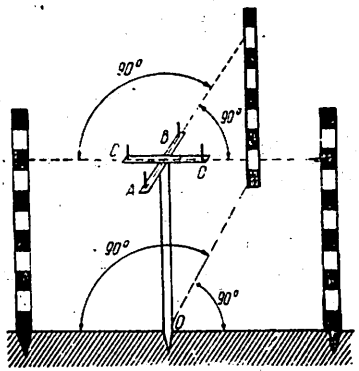


Fig. 10

8. **Alidada** (riglă de vizare). Alidadele sînt de construcţii variate.

Alidada ce o recomandăm (fig. 11) este formată dintr-o riglă de lemn de 25—30 cm lungime, lată de 3 cm şi groasă de un centimetru prevăzută cu o nivelă cu bulă de aer.

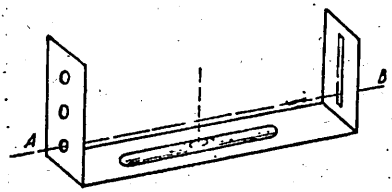


Fig. 11

În partea de sus a acestei alidade — riglă — se află un dispozitiv de vizare, format din două rigle (AB) aşezate vertical la capetele alidadei.

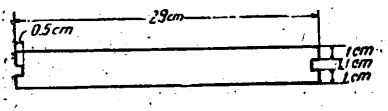


Fig. 12

Una din aceste rigle (A) este prevăzută cu trei orificii foarte fine, ce servesc drept oculari. Cealaltă riglă (B) este prevăzută cu un jgheab de-a lungul căruia trece un fir de păr sau de aţă bine întins, care înlocuieşte obiectivul. Deci părţile componente ale alidadei sînt:

a) *Rigla* din figura 12, cu dimensiunile specificate pe ea: grosimea riglei este de un centimetru (rigla de bază).

b) *Rigla de vizare*: grosimea 0,5 cm ce se fixează în capătul *A* al riglei de bază.

Orificiile de vizare se fixează începînd de la bază, la o înălţime de 2—3 cm, iar celelalte la distanţe convenabile, mai sus.

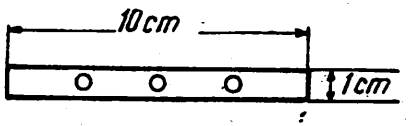


Fig. 13

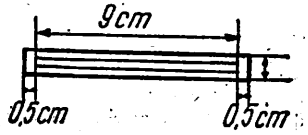


Fig. 14

c) *Rigla cu jgheab* ce se fixează în capătul (*B*) cu grosimea de 0,5 cm (fig. 14).

9. **Planşeta cu trepied.** Se compune dintr-o planşetă dreptunghiulară cu dimensiunile 35/40 cm, fixată pe un suport numit trepied (fig. 15).

Cu ajutorul planşetei cu trepied şi al alidadei, se efectuează ridicarea planului în care unghiurile nu se măsoară, ci se obţin direct în mod grafic, pe hîrtie. De aceea ridicarea planului cu planşeta poartă denumirea de ridicare grafică a planului sau ridicarea planului cu desemnarea unghiurilor.

Tehnica obţinerii pe planşetă a unghiurilor planului de pe teren constă în următoarele: fixăm trepiedul cu planşeta în vîrful unui unghi al conturului poligonal, iar pe planşetă luăm un punct ce se află pe aceeaşi verticală cu acest vîrf, cu ajutorul echerului de planşetă. Apoi, cu ajutorul alidadei, din acest punct tragem două drepte pe direcţia laturilor unghiului dat şi în felul acesta obţinem pe planşetă unghiul egal cu cel de pe teren. Se măsoară apoi lungimile acestor laturi şi, reducînd la o scară convenabilă, fixăm pe planşetă alte două vîrfuri ale conturului poligonal. Ne deplasăm cu planşeta în punctul următor şi procedăm ca în primul caz. În felul acesta mergem roată pe perimetrul conturului poligonal, obţinînd în mod grafic perimetrul planului.

Planşeta este prevăzută în centru cu un orificiu cu un bulon cu capul îngropat, cu ajutorul căruia se fixează de trepied.

Trepiedul este un suport format din trei picioare, constînd fiecare din cîte două vergele de formă dreptunghiulară sau rotundă, distanţate din ce în ce mai puţin cu cît se apropie de partea inferioară, unde se unesc printr-o armătură ascuţită. Pentru a se uşura înfigerea picioarelor, armătura este amenajată cu un călcîi ce se manevrează cu piciorul.

La partea superioară picioarele se prind în niște urechi cu ajutorul unui bulon, confecționat din placă de lemn sau din metal (fig. 16). În mijlocul plăcii este un lăcaș prin care trece bulonul planșetei. Cu ajutorul acestuia planșeta se fixează pe trepied.

10. **Echerul de planșetă.** Este format din două stinghii de diferite lungimi prinse astfel încît să formeze între ele un unghi oarecare. De capătul unei stinghii se leagă un fir cu plumb astfel încît dacă se așază cealaltă stinghie în poziție orizontală, direcția firului cu plumb să coincidă cu crestătura făcută în vîrful ei. În felul acesta, cu ajutorul echerului de planșetă se poate proiecta un punct de pe teren pe planșeta noastră, undeva în afara centrului său (la ridicarea planului).

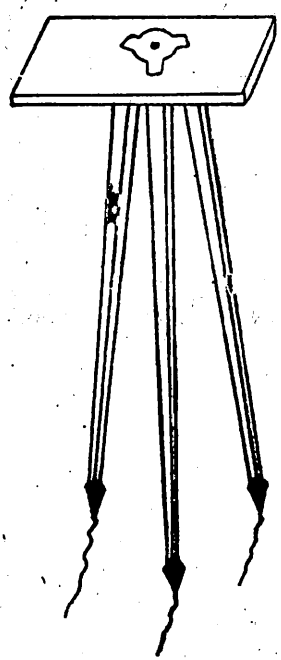


Fig. 15

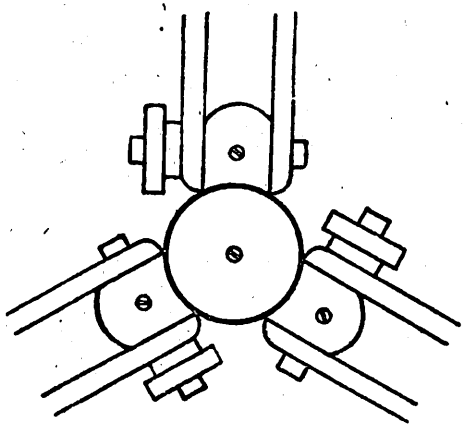


Fig. 16

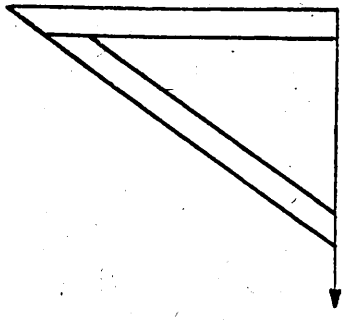


Fig. 17

11. **Mira.** Este o scîndură de 2 m lungime, 10 cm lățime și cca. 2 cm grosime, gradată în cm și numerotată în dm de jos în sus (fig. 18).

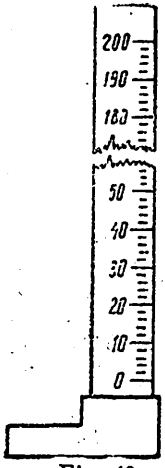


Fig. 18

La partea inferioară se poate prevedea o armătură pe care operatorul armăturii reazimă piciorul, pentru a o fixa pe punctul dat și a o menține verticală.

O astfel de mîră se poate întrebuința și ca riglă.

12. **Grafometrul universal.** Cu ajutorul grafometrului universal se pot măsura și construi unghiuri în planul orizontal și vertical. El poate înlocui deci atît grafometrul orizontal și echerul topografic, precum și eclimetrul.

Grafometrul universal este compus din trei părți principale: trepied, planșetă — raportor și alidadă (rigla de vizare).

Trepiedul. Atunci cînd se măsoară unghiuri în planul orizontal se întrebuințează trepiedul descris mai sus (fig. 15). Cînd grafometrul este întrebuințat pentru determinarea unghiurilor în planul vertical, se întrebuințează un trepied cu picioare simple (fig. 19).

Picioarele trepiedului sînt formate din cîte o vergea de lemn tare, de formă prismatică, ce se subțiază către partea inferioară. La partea inferioară picioarele sînt prevăzute cu o armătură protectoare terminată cu un vîrf ascuțit ce ușurează înfigerea lor în pămînt.

La extremitatea superioară picioarele se prind prin intermediul unor buloane la o prismă triunghiulară. Buloanele sînt prevăzute cu niște piulițe cu urechi, ce servesc la strîngerea sau desfacerea trepiedului. Prisma triunghiulară se termină printr-un gît pe care se așază planșeta în poziție verticală printr-un dispozitiv semicilindric din tablă, prins în dosul planșetei gradate.

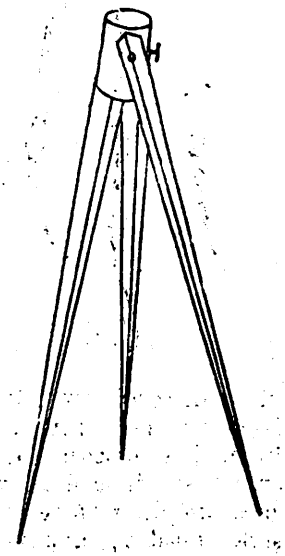


Fig. 19

Planşeta raportor. Este formată dintr-o scîndură pătrată, cu dimensiunile de 40/40 cm, pe care se desenează un cerc cu centrul în punctul de intersecţie al diagonalelor şi avînd raza de 13—15 cm. Cercul se împarte în 360°. Diviziunile se numerotează în sensul mersului acelor ceasornicului. Zero se pune astfel ca diametrele 0° — 180° şi 90° — 270° să fie paralele cu laturile pătratului ca în figura 20.

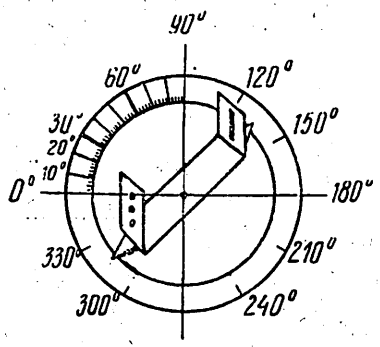


Fig. 20

Aceste diametre se desenează cît se poate de vizibil, căci ele vor servi la trasarea dreptelor perpendiculare atunci cînd aparatul va fi întrebuinţat în locul echerului de agrimensură.

În centrul planşetei se face o gaură cu diametrul de 5 mm, pentru axa alidadei.

În partea opusă a planşetei, în dreptul diviziunii 270°, se fixează un semicilindru de tablă, lung de cca. 10 cm şi cu diametrul cît gîtul cu care se termină partea prismatică a trepiedului, care să intre forţat în acest cilindru, pentru ca în felul acesta să poată susţine planşeta în poziţie verticală şi cu axa 0°—180° în poziţie orizontală.

Alidada. Alidada sau dispozitivul de vizare este o riglă de lemn în genul celei descrise anterior. Lungimea ei este cu ceva mai scurtă decît diametrul cercului gradat al planşetei raportor. Alidada se termină în ambele capete cu ace indicatoare, cu ajutorul cărora se citeşte pe planşeta raportor.

Alidada se fixează pe planşetă printr-un bulon ce trece prin centrul planşetei şi al alidadei.

În alidadă se montează mai întîi un manşon de metal, servind drept lagăr al bulonului, a cărui înălţime este cu un milimetru mai mare ca grosimea alidadei (fig. 21). Acest manşon-lagăr se termină jos printr-o şaibă ce face corp comun cu manşonul care se sprijină pe planşetă şi în felul acesta permite învîrtirea alidadei în jurul axei, oricît am strînge piuliţa care leagă alidada, cît şi planşeta de trepied.

După cum se vede, grafometrul se poate întrebuinţa în locul tuturor instrumentelor înşirate pînă acum, de aceea i s-a dat şi denumirea de universal. Se pot face cu el măsurători de unghiuri în planul orizontal, folosindu-l în poziţie orizontală ca astrolab,

Se poate întrebuința în locul echerului topografic, folosindu-se cele două diametre perpendiculare ale cercului gradat. Se poate folosi și ca eclimetru, la măsurarea unghiurilor de pe teren situate în planul vertical, adică a unghiurilor de înclinare față de orizont necesare pentru determinarea înălțimilor. Pentru

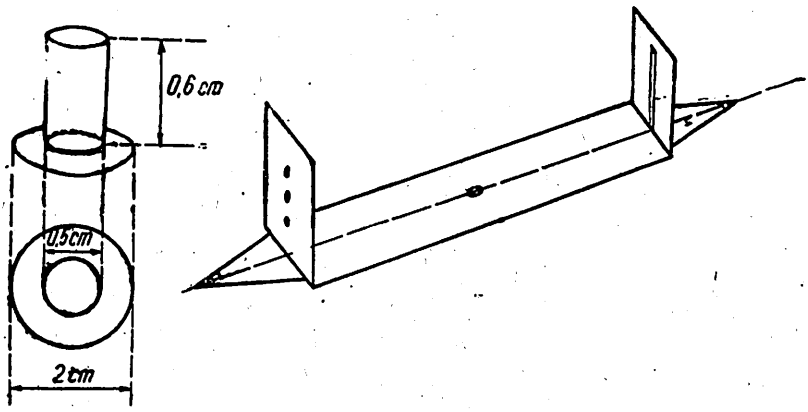


Fig. 21

acest lucru grafometrul se așază în poziție verticală, folosindu-ne de trepiedul care se termină prin prisma triunghiulară și cu gît (fig. 19).

La ridicarea planului de asemenea se poate întrebuința grafometrul cu același succes ca și celelalte instrumente înșirate.

13. **Eclimetrul cu fir cu plumb.** Un instrument simplu pentru determinarea unghiurilor în plan vertical este eclimetrul cu fir cu plumb, care este cel mai simplu eclimetru; el este format dintr-un limb (semicerc) de aramă, lemn sau carton presat, divizat în grade (fig. 22). În centrul limbului atîrnă un fir cu plumb. Deasupra limbului se găsește o riglă cu pinule pentru vizare. Tot aparatul este fixat, printr-o articulație simplă (un cui sau un bulon), de un par care în timpul lucrului se înfige în pămînt.

Pentru a înlătura influența viciilor de construcție a eclimetrului asupra rezultatelor măsurării unghiul trebuie determinat de două ori, întorcîndu-se aparatul cu 180° după prima măsurare. Din rezultatele obținute se ia media aritmetică.

Citirile se fac după linia firului cu plumb, care indică un unghi egal cu unghiul de înclinare a obiectului vizat față de orizontală (au laturile respectiv perpendiculare).

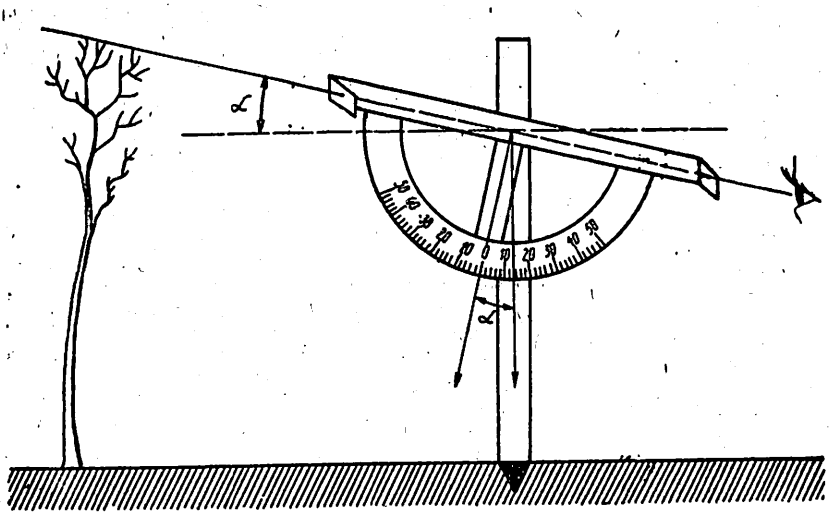


Fig. 22

DESCRIEREA LUCRĂRILOR

Clasa a V-a

1. **Etalonarea pasului.** În prealabil se măsoară o distanță oarecare (de exemplu 80 metri) și se bat țăruși la capetele acestei distanțe.

Se așază elevii, în două grupe, la capetele acestei distanțe și în flanc cîte unul la un interval de cîțiva metri unul de altul. Fiecare elev măsoară cu pasul lui obișnuit, neforțat, această distanță de cîteva ori, aflîndu-se apoi numărul mediu de pași pentru această distanță. Rezultatele obținute se înscriu într-un tabel cum este cel de jos:

Nr. măsurării	I	II	III	IV	Media
Nr. pașilor	117	120	119	122	118,5

După aflarea numărului mediu de paşi pentru această distanţă, fiecare elev îşi va calcula lungimea medie a pasului său, împărţind lungimea dată la numărul mediu de paşi:

$$80 : 118{,}5 = 0{,}675 \text{ m}.$$

Deci lungimea medie a pasului este 0,675 m, care pentru măsurători ce nu cer prea mare exactitate se poate rotunji pînă la o zecime (în cazul nostru 0,7 m).

După determinarea lungimii medii a pasului li se propune elevilor să determine distanţa dintre două puncte cu ajutorul pasului propriu.

De exemplu distanţa de la şcoală pînă la domiciliul fiecărui elev.

Dacă un elev a făcut de acasă pînă la şcoală, după mai multe măsurători, în medie 603,5 paşi, la ce depărtare locuieşte acest elev de şcoală, ştiind că lungimea medie a pasului este 0,675 m?

Răspuns: $603{,}5 \times 0{,}675 \approx 407$ m.

2. **Determinarea din ochi a diferite distanţe şi verificarea lor cu paşii.** De multe ori sîntem puşi în situaţia să determinăm diferite distanţe fără instrumente, din ochi, aproximativ, însă totuşi cît mai exact.

Acest lucru se poate face exact numai după un antrenament îndelungat, verificîndu-se de fiecare dată cu paşii şi transformînd apoi în metri.

Înaintea efectuării unei asemenea lucrări, profesorul trebuie să cunoască diferite distanţe de pe teren, fără însă să le comunice elevilor.

3. **Jalonarea unei drepte şi măsurarea lungimii unui segment al ei.** Cînd vrem să determinăm distanţa între două puncte A şi B trebuie să jalonăm în prealabil această distanţă. Jalonarea se efectuează astfel: se fixează un jalon în punctul A şi altul în punctul B. Observatorul se aşază la cîţiva paşi de una din extremităţi, în A de exemplu (fig. 23) şi vizează jalonul B din cealaltă extremitate, aşezîndu-se succesiv jaloane intermediare, care să nu se zărească nici la stînga nici la dreapta faţă de linia vizuală $A\,B$. În acest scop observatorul indică purtătorului de jaloane, prin semne, să mişte jalonul la stînga, la dreapta, sau să-l fixeze, după cum e cazul.

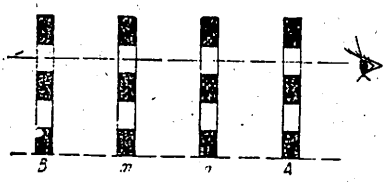


Fig. 23

Se înfig în acest mod atîtea jaloane de cîte are nevoie aliniamentul, operîndu-se succesiv cu fiecare în parte la fel ca mai sus. Apoi se măsoară distanța AB cu ruletă sau compasul topografic.

În cazuri particulare, cînd e nevoie să aflăm punctul de intersecție a două aliniamente, se procedează astfel: operatorul așezat în punctul A (fig. 24) vizează punctul B, el indică prin semne ajutorului așezat în P, ce ține un jalon în direcția liniei jalonate CD, să meargă către D sau către C (la stînga și dreapta). În momentul cînd jalonul se găsește pe aliniamentul AB, operatorul face un ultim semn cu mîna, pentru a arăta că jalonul trebuie înfipt în punctul P, care este acum de intersecție.

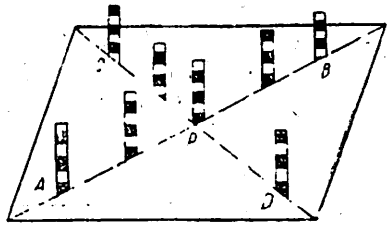


Fig. 24

Se verifică apoi dacă jalonul în P este riguros așezat și pe aliniamentul CD, transportîndu-ne în acest scop în punctul C sau D.

4. **Construirea unui unghi drept cu echerul topografic.** Instrumente necesare: echerul topografic și 8—10 jaloane.

C a z u l I. Se dă o dreaptă AB și un punct C pe această dreaptă. Să se construiască în punctul C o dreaptă perpendiculară pe AB.

Se jalonează dreapta AB, apoi se așază echerul de agrimensură în punctul C astfel ca pinulele A și B să se afle pe dreapta AB. Apoi ne uităm pe direcția pinulelor c și d și jalonăm dreapta CM (vezi fig. 10).

C a z u l I I. Se dă dreapta AB și punctul C exterior dreptei. Să se coboare din punctul C o perpendiculară pe dreapta AB.

Se jalonează dreapta AB, apoi se fixează un jalon în punctul C. Ne plimbăm cu echerul de agrimensură pe dreapta AB iar punctul C va fi pe prelungirea dreptei cd.

Notă: Aceste lucrări sînt premergătoare lucrărilor de construire și determinare a ariilor dreptunghiului, pătratului, triunghiului, unde va trebui să trasăm drepte perpendiculare.

5. **Construirea unui dreptunghi și determinarea ariei sale.** Instrumente necesare: echerul topografic, o ruletă și 8—10 jaloane.

Se jalonează direcția xy și se așază echerul de agrimensură într-un punct oarecare A de pe această dreaptă, se jalonează și

dreapta AD perpendiculară pe xy. Se ia AD egal cu b și AB egal cu a. Ne mutăm apoi cu echerul de agrimensură în punctul B și jalonăm dreapta BC perpendiculară pe xy. Se ia BC egal cu b. Patrulaterul $ABCD$ este dreptunghiul căutat.

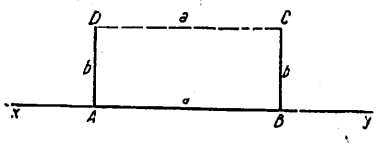


Fig. 25

Pentru a verifica dacă construcția este exactă, este suficient să verificăm cu echerul de agrimensură dacă unul din unghiurile C sau D este unghi drept și să controlăm dacă lungimea CD este egală cu AB. Aria dreptunghiului căutat va fi egală cu produsul dintre a și b.

Pătratul se construiește prin același procedeu ca mai sus.

Clasa a VI-a

1. **Construirea unui unghi drept cu ajutorul unei frînghii.** Instrumentele necesare: 8—10 jaloane, 2 țăruși și o frînghie de 15—20 m.

Cazul I. Se dă o dreaptă AB și un punct C pe această dreaptă. Să se ridice din C o perpendiculară pe AB (fig. 26).

Jalonăm dreapta AB și fixăm punctul C pe această dreaptă.

Din punctul C se iau segmentele CE și CF egale, în așa fel ca distanța EF să nu depășească lungimea frînghiei. În punctele E și F se înfige cîte un țăruș de care se leagă capetele frînghiei. Apoi se depărtează frînghia, ținîndu-se de mijlocul ei pînă ce ambele părți ale ei vor fi egal întinse. Se fixează punctul M și se jalonează dreapta MC. Triunghiul EMF este un triunghi isoscel, deoarece $\overline{MF}$ este egal cu $\overline{ME}$ (jumătate din frînghie). Dreapta MC este mediană, deoarece $\overline{CF}$ este egal cu $\overline{CE}$. Prin urmare, dreapta MC este și înălțime în triunghiul isoscel EMF.

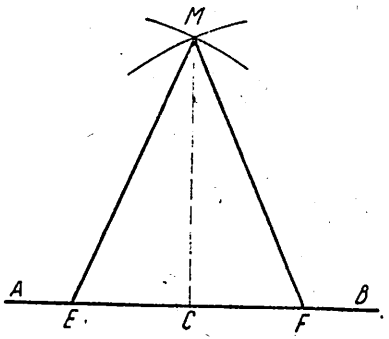


Fig. 26

Cazul II. Punctul C se află în afara dreptei AB (fig. 27).

Se ia punctul C astfel încît să fie la o distanţă mai mică faţă de AB decît lungimea frînghiei ce o avem la dispoziţie.

Se fixează în C un ţăruş de care legăm un capăt al frînghiei. Apoi întindem bine frînghia, ţinînd de celălalt capăt al ei pînă ce intersectează dreapta $\overline{AB}$ în punctul E. La fel fixăm şi punctul F, astfel încît distanţele $\overline{CE}$ şi $\overline{CF}$ să fie egale. Tot cu ajutorul frînghiei măsurăm distanţa $\overline{EF}$. Apoi îndoim frînghia în două părţi egale, determinînd în felul acesta punctul M de pe dreapta $\overline{AB}$ $\left(\overline{ME} = \overline{MF} = \frac{\overline{EF}}{2}\right)$.

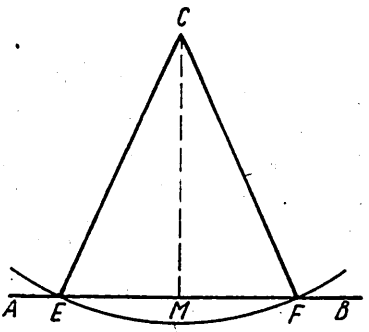


Fig. 27

După ce am aflat punctul M jalonăm dreapta MC, care este tocmai perpendiculara căutată, deoarece triunghiul ECF este isoscel căci laturile $\overline{CE}$ şi $\overline{CF}$ sînt egale prin construcţie. Dreapta CM este mediană, deoarece $\overline{EM} = \overline{MF}$. Prin urmare, $\overline{CM}$ este şi înălţime în triunghiul isoscel ECF.

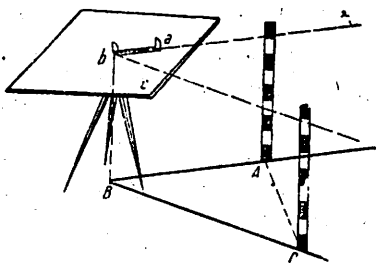


Fig. 28

2. Determinarea şi construirea unghiurilor cu ajutorul alidadei sau al grafometrului. Instrumente necesare: o alidadă şi o planşetă cu trepied sau un grafometru, un raportor, 4 — 6 jaloane, echer de planşetă, bulă cu nivelă de aer.

a) Se dau două direcţii AB şi BC concurente în B.

Să se determine unghiul ABC format de aceste direcţii.

Se aşază trepiedul cu planşeta deasupra punctului B. Apoi, cu ajutorul nivelei cu bula de aer, aşezăm planşeta în poziţie orizontală şi o fixăm. Cu ajutorul echerului de planşetă ridicăm punctul D de pe teren pe planşetă. Înfigem în planşetă, în punctul B un ac cu gămălie, în poziţie verticală. Apoi aşezăm alidada pe

planşetă, lipită cu o muchie de acul înfipt în b şi vizăm jalonul A. Trasăm pe hîrtie în felul acesta direcţia ba. La fel procedăm şi pentru determinarea direcţiei bc. În felul acesta obţinem pe hîrtie unghiul abc, pe care-l măsurăm apoi cu ajutorul raportorului (fig. 28).

Această determinare se efectuează direct şi mai simplu cu grafometrul.

Se aşază grafometrul cu centrul în punctul B şi apoi se pune în poziţia orizontală. Se vizează cu alidada direcţia BC şi se notează numărul de grade obţinut ($x°$). Apoi se vizează cu alidada direcţia BA, notîndu-se din nou numărul de grade obţinut ($y°$).

Unghiul ABC este egal cu $x°-y°$.

Exemplu: prima citire pe dreapta BC a fost 270°, iar a doua citire pe direcţia BA a fost 150°. Atunci $\widehat{ABC} = 270° - 150° = 120°$.

Dacă la rotirea alidadei de la direcţia BC spre direcţia BA se întîmplă să trecem prin 0° al discului

$$\sphericalangle ABC = 360° + x° - y°.$$

De exemplu: prima citire pe dreapta BC a fost 30°, iar a doua citire pe direcţia BA a fost 290°.

$$\sphericalangle ABC = 360° + 30° - 290° = 100°.$$

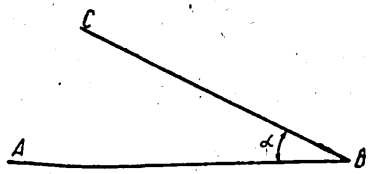


Fig. 29

b) Să se jaloneze o dreaptă BC care să formeze un unghi dat cu dreapta AB dată.

Se jalonează dreapta AB. Aşezăm grafometrul în aşa fel încît centrul său să corespundă cu punctul B. Vizăm cu alidada direcţia BA. Direcţia BC ne va da relaţia $x° - \alpha° = y°$. Rotim alidada cu $y°$ şi jalonăm dreapta BC. Unghiul $ABC = x°-y° = \alpha°$ este cel căutat (fig. 29).

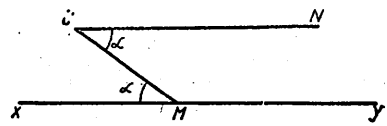


Fig. 30

3. **Construirea unei drepte ce trece printr-un punct C dat, paralelă cu o dreaptă dată xy.** Instrumente necesare: un echer topografic sau o frînghie şi 8—10 jaloane.

a) Se jalonează dreapta xy din punctul C dat se coboară pe xy cu ajutorul echerului topografic sau al frînghiei, perpendiculara $\overline{CD}$ (vezi fig. 25).

Măsurăm $\overline{CB} = b$. Apoi alegem pe dreapta xy un alt punct oarecare A, din care ridicăm perpendiculara $\overline{AD} = a$. Se jalonează dreapta $\overline{DC}$, care este paralelă cu dreapta dată xy, deoarece patrulaterul $ABCD$ este un dreptunghi.

b) Cu ajutorul grafometrului, aceeași lucrare se efectuează în felul următor:

După ce s-a jalonat dreapta xy se așază grafometrul într-un punct oarecare M, pe dreapta xy. Se determină unghiul AMC, format din direcțiile AM și MC. Ne mutăm apoi cu grafometrul în punctul C care este dat, și jalonăm dreapta CN în așa fel încît să formeze cu dreapta CM unghiul NCM egal cu unghiul AMC. Dreapta CN astfel obținută este paralelă cu dreapta AB dată deoarece cele două unghiuri formate sînt alterne interne egale (fig. 30).

4. Determinarea distanței dintre două puncte date dintre care unul este inaccesibil.

a) Să se determine distanța între punctele A și B date, dintre care A este inaccesibil.

Instrumente necesare: un grafometru, o ruletă și 8 — 10 jaloane.

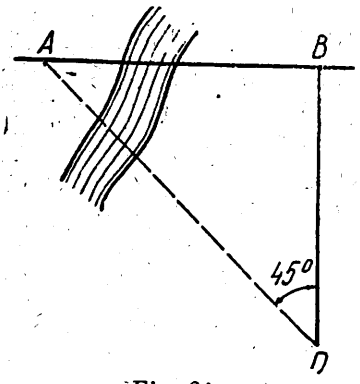


Fig. 31

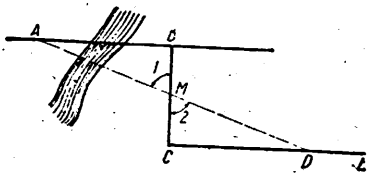


Fig. 32

Se jalonează dreapta AB. Așezăm grafometrul în punctul B și trasăm dreapta BD perpendiculară pe AB. Apoi ne deplasăm cu grafometrul pe direcția BD pînă în punctul D, de unde se vede punctul A sub un unghi de 45° cu direcția DB. Am obținut deci un triunghi dreptunghi isoscel, în care BD este egal cu AB. Măsurînd distanța BD, găsim distanța căutată AB care, după cum am arătat mai sus, este egală cu BD (fig. 31).

b) Aceeași problemă se poate rezolva prin construirea a două triunghiuri dreptunghice egale, în felul următor (fig. 32): Se

jalonează dreapta AB și se așază echerul topografic în punctul dat B. Se construiește dreapta BC perpendiculară pe AB. Se ia $BC = a$. În mijlocul M al dreptei BC se fixează un jalon. Apoi ne mutăm cu echerul de agrimensură în punctul C și construim direcția CL perpendiculară pe BC. Luăm pe direcția CL un punct D în așa fel încît să se găsească pe aceeași dreaptă cu punctele M și A. Măsurăm distanța $\overline{CD} = d$. Din egalitatea triunghiurilor ABM și MCD rezultă că $\overline{AB} = \overline{CD} = d$ ($BM = MC$ prin construcție: $\widehat{ABM} = \widehat{MCD} = 90°$ tot prin construcție, iar $\widehat{AMB} = \widehat{CMD}$ ca opuse la vîrf).

5. **Determinarea distanței dintre două puncte date atunci cînd ele sînt accesibile, dar distanța dintre ele este inaccesibilă.** Se dau două puncte A și B așezate astfel, încît de la unul nu se vede celălalt, însă dintr-un punct oarecare se poate ajunge la ambele puncte. Să se determine distanța dintre punctele date.

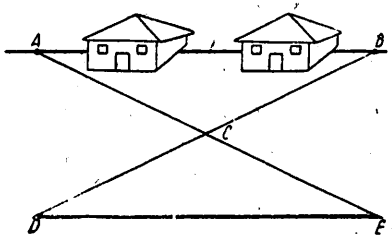


Fig. 33

Instrumente necesare: o ruletă, 10—12 jaloane.

Se alege punctul C în așa fel încît să putem măsura direct distanțele $\overline{AC}$ și $\overline{BC}$. Înfigem un jalon în C și jalonăm dreptele ACE și BCD concurente în punctul C. Măsurăm distanțele $\overline{AC}$ și $\overline{BC}$ și luăm $\overline{AC} = \overline{CE}$ și $\overline{BC} = \overline{CD}$. Jalonăm și măsurăm apoi dreapta DE. Din egalitatea triunghiurilor ABC și DEC rezultă că $DE = AB$, adică tocmai distanța căutată.

6. **Determinări de înălțimi.**

a) Să se determine cu ajutorul echerului dreptunghic isoscel, înălțimea unui obiect AB (un stîlp, un zid), a cărui bază este accesibilă (fig. 34).

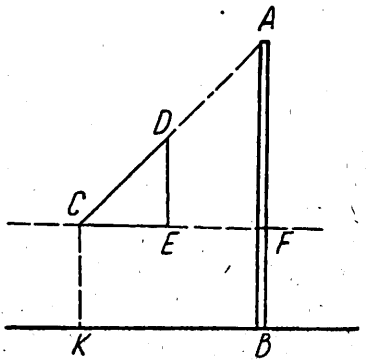


Fig. 34

Instrumente necesare: un echer dreptunghic isoscel, un fir cu plumb și o ruletă.

Ne depărtăm de obiectul AB pînă la o distanță din care

vîrful A al obiectului se vede pe direcţia ipotenuzei CD a echerului dreptunghic isoscel ţinut în mînă în aşa fel încît cateta DE să fie verticală. Acest lucru este verificat de un elev, cu ajutorul firului cu plumb legat în punctul D al echerului dreptunghic isoscel. Se măsoară distanţa $\overline{KB} = d$. Se observă că triunghiul CFA este triunghi dreptunghic isoscel, deoarece $\widehat{AFC} = 90°$ şi $\widehat{ACF} = 45°$. Rezultă deci că $\overline{CF} = \overline{FA} = \overline{KB} = d$.

Se măsoară apoi înălţimea CK a observatorului şi apoi se determină întreaga înălţime $\overline{AB}$, care rezultă din:

$$\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{FB} = d + \overline{CK}.$$

b) Determinarea cu ajutorul grafometrului folosit ca eclimetru sau a eclimetrului cu fir de plumb, a înălţimii unui obiect a cărui bază este accesibilă.

Instrumente necesare: un grafometru sau un eclimetru cu fir cu plumb şi o ruletă.

Se ia distanţa $\overline{BC} = 60$ m. Această distanţă dintre baza obiectului măsurat şi observator se ia arbitrar. Se determină apoi, cu ajutorul eclimetrului, unghiul $EDA = \alpha$. Se construieşte pe hîrtie un triunghi dreptunghic $A'E'D'$, redus la o scară oarecare cu cateta $\overline{ED'} = 60$ m şi unghiul $A'D'E'$ egal cu unghiul EDA citit pe eclimetru (fig. 35).

Se măsoară apoi cealaltă catetă $\overline{A'E'}$, obţinută pe hîrtie. Folosind aceeaşi scară de reducere, se determină $\overline{A'E'} = a$. Se determină înălţimea $\overline{DC}$ a ochiului şi în felul acesta întreaga înălţime a obiectului va fi:

$$\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EB} = a + \overline{EB}.$$

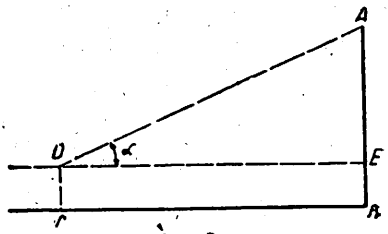


Fig. 35

De exemplu: luăm $\overline{CB} = d = 60$ m şi unghiul $ADE = 30°$. Reducînd la scara 1 : 500, vom obţine pe hîrtie un triunghi dreptunghic cu cateta $\overline{D'E'} = 12$ cm şi unghiul $A'D'E' = 30°$. Măsurînd apoi cu un dubludecimetru cateta $\overline{E'A'}$ vom afla, de exemplu, $\overline{EA} = 3{,}46$ cm.

Pentru a afla înălţimea adevărată a obiectului respectiv judecăm astfel:

un cm de pe hîrtie reprezintă 500 cm în natură. 3,46 cm de pe hîrtie vor reprezenta x cm în natură, de unde rezultă că

$x = 3{,}46$ cm $\times$ 500 $= 17{,}30$ m, iar întreaga înălțime $AB = AE + EB = 17{,}30 + EB$.

7. **Determinarea înălțimii unui obiect a cărui bază este inaccesibilă.** Instrumente necesare: un grafometru folosit ca eclimetru sau un eclimetru cu fir cu plumb, o ruletă și 4—6 jaloane.

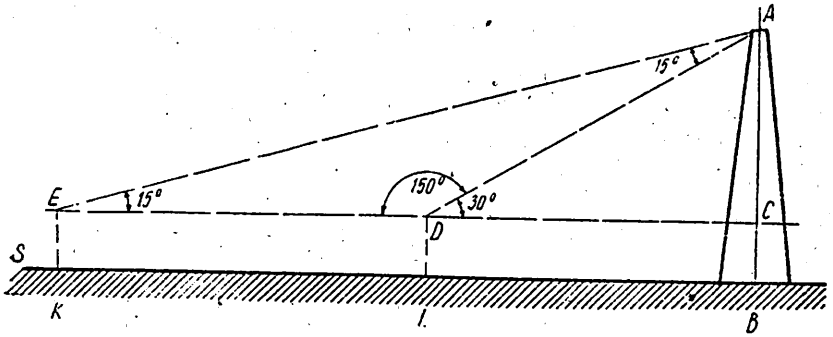


Fig. 36

Ne depărtăm cu eclimetrul de obiectul AB, a cărui înălțime vrem să o determinăm, pînă în punctul D, de unde se vede porțiunea AC din acest obiect sub un unghi de 30°. Se jalonează dreapta $\overline{BL}$. Din punctul L ne depărtăm cu eclimetrul pe această dreaptă pînă la punctul K, de unde se vede aceeași porțiune AC sub un unghi de 15°. Se măsoară distanța $\overline{KL} = 2x$. Porțiunea $\overline{AC}$ din înălțimea $\overline{AB}$ este egală cu jumătate din $\overline{KL}$, deci $\overline{AC} = x$ și prin urmare, înălțimea întreagă va fi egală cu $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB} = x + \overline{CB}$ ($\overline{CB}$ = înălțimea ochiului observatorului).

Demonstrație: în triunghiul treptunghic ACD, cateta opusă unghiului ADC de 30°, este egală cu jumătate din ipotenuza $\overline{AD}$, adică $\overline{AC} = \overline{AD}/2$. Unghiul $ABE = 180° - 30° = 150°$; unghiul $AED = 15°$ prin construcție. Rezultă deci că unghiul $EAD = 180° - (150° + 15°) = 15°$. Prin urmare unghiul $AED = 15°$. Deci, triunghiul ADE este un triunghi isoscel. De unde rezultă că laturile $\overline{AD}$ și $\overline{DE}$ sînt egale. Așa dar, $\overline{AC} = \overline{AD}/2 = \overline{DE}/2$.

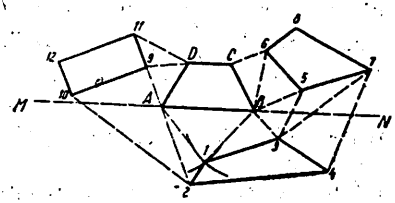


Fig. 37

8. **Ridicarea prin metoda triangulației grafice a unei parcele acoperite cu diverse construcții.** Instrumente necesare: o ruletă

In prealabil se face o schiță din ochi a întregii parcele, cu toate clădirile care trebuie specificate în plan.

Mai întîi se face planul clădirii principale $ABCD$. Se măsoară toate distanțele și se notează pe schiță. Apoi se trece la construirea planului parcelei respective, prin construirea unor triunghiuri în care ni se dau laturile:

se ia o dreaptă MN, pe care se fixează, redus la scară, segmentul $\overline{AB}$. Apoi se descrie din A, cu o deschizătură de compas egală cu $\overline{A-1}$ un arc de cerc care se va intersecta în punctul 1 cu un arc de cerc cu centrul în B și raza egală cu $\overline{B-1}$. In mod analog se determină și punctele 2,3,4,.... etc., care apoi se unesc ca în schița de mînă.

Exemplu: $\overline{AB} = 18$ m, $\overline{A-1} = 16$ m, $\overline{B-1} = 10$ m, $\overline{A-2} = 20$ m, $\overline{1-2} = 5$ m, $\overline{B-3} = 4$ m, $\overline{1-3} = 6$ m, $\overline{3-4} = 8$ m, $\overline{2-4} = 12$ m.

Această lucrare poate fi împărțită în 4 grupe (de exemplu, prima grupă pe parcela mărginită de punctele AB 1234, a doua grupă pe parcela BC 5678 și așa mai departe).

9. Ridicarea topografică, cu ajutorul grafometrului.

Fie de ridicat conturul poligonal $ABCDE$.

Se ia în interior un punct O, în așa fel încît din acest punct să se poată viza și determina distanțele pînă la vîrfurile poligonului. Toate măsurătorile se notează pe schița făcută din ochi înainte de a începe lucrarea.

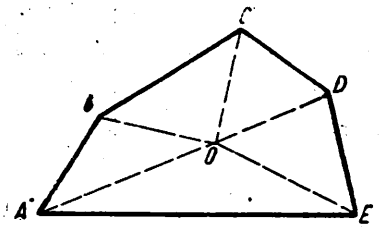


Fig. 138

Se înfig jaloane în punctele A,B,C,D,E. Așezăm apoi grafometrul în punctul luat arbitrar, se trasează cu ajutorul lui dreptele OA, OB, OC, OD și OE și se determină unghiurile AOB, BOC, COD, DOE și AOE. Apoi se jalonează și se măsoară distanțele $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ și $\overline{AE}$. Cu aceste date se trece apoi la executarea planului pe hîrtie, redus la o scară convenabilă.

Schița planului se poate executa și fără a măsura distanțele $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ și $\overline{AC}$, deoarece la fiecare dintre triunghiurile cu vîrful în O cunoaștem două laturi și unghiul cuprins între ele. Laturile se măsoară numai pentru a verifica exactitatea lucrării.

10. Ridicarea unui teren prin ridicarea perimetrului.
Instrumentele necesare: un grafometru, o ruletă, 8 — 10 jaloane.

Fie de ridicat terenul poligonal *ABCDE*.

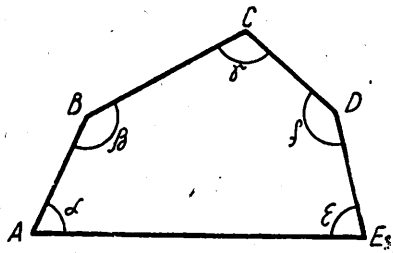


Fig. 39

Se aşază grafometrul în punctul *A* şi se măsoară unghiul *BAE*, determinat de direcţiile *AB* şi *AE*. Se jalonează şi se măsoară latura $\overline{AB}$. In felul acesta obţinem punctul *B* al conturului. Apoi ne mutăm cu grafometrul în punctul *B*. Măsurăm unghiul *ABC*, format de direcţiile *BA* şi *BC*. Jalonăm şi măsurăm latura $\overline{BC}$. Procedăm în continuare la fel pînă ajungem din nou în punctul *A*. Rezultatele citirilor şi măsurătorilor se trec într-un tabel, cum se vede mai jos:

Unghiurile interioare	Mărimea lor în grade	Distanţele în metri
$\sphericalangle EAB$		
$\sphericalangle ABC$		
$\sphericalangle BCD$		
$\sphericalangle CDE$		
$\sphericalangle DEA$		
Suma unghiurilor		

Se ştie că suma unghiurilor interioare într-un poligon se află după formula: $S = 180° (n - 2)$.

Intre suma unghiurilor determinate de noi şi cea adevărată ce rezultă din formulă poate să se ivească vreo nepotrivire din cauza măsurilor nu prea exacte sau din cauza imperfecţiei instrumentelor.

Dacă această nepotrivire nu e mai mare de 3 grade, diferenţa se împarte uniform între toate unghiurile.

La desenarea planului pe hîrtie într-o scară oarecare totdeauna se întîmplă că nu se închide conturul. Aceste erori sînt inerente din cauza imperfecțiunii instrumentelor de măsurat și a celor de desenat.

Pentru înlăturarea acestei diferențe se aplică o metodă grafică (fig. 40).

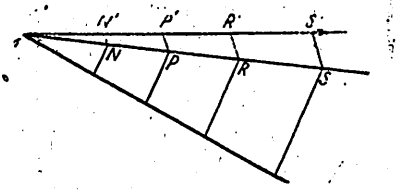


Fig. 40

Clasa a VII-a

1. **Determinarea distanței între două puncte accesibile.** Instrumentele necesare: un echer topografic, o ruletă, 8—10 jaloane.

Se dau două puncte A și B situate astfel încît de la unul nu se poate trece la celălalt, însă ele sînt accesibile din alte direcții (fig. 41).

Se așază echerul topografic în punctul A și se jalonează dreapta AC, perpendiculară pe AB. Se măsoară o distanță oarecare $\overline{AC} = a$. Apoi ne mutăm cu echerul topografic în punctul B și procedăm la fel ca în punctul A, trasînd dreapta BD perpendiculară pe AB și egală cu a. Apoi se jalonează și se determină lungimea dreptei CD. Pe baza proprietății dreptunghiului obținut, această lungime este egală cu lungimea căutată AB.

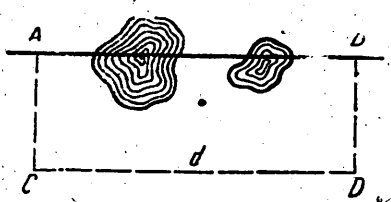


Fig. 41

Pentru verificare așezăm echerul de agrimensură în punctul D sau C și verificăm dacă unghiurile formate în aceste puncte sînt unghiuri drepte (fig. 41).

2. **Determinarea distanței dintre două puncte accesibile însă situate astfel încît din unul nu se vede celălalt.** Instrumente necesare: o ruletă și 8 — 10 jaloane.

Se dau două puncte A și B, între care există anumite clădiri sau plantații. Să se determine distanța între punctele A și B.

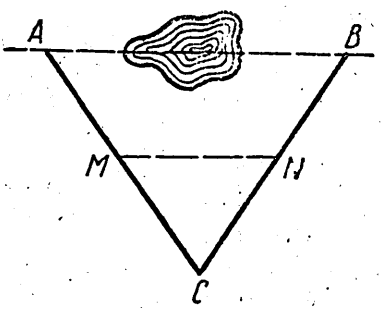


Fig. 42

Se alege un punct oarecare C situat astfel încît din el să se vadă şi să se poată determina distanţele pînă la punctele A şi B (fig. 42).

Infigem un jalon în C, jalonăm şi măsurăm distanţele CA şi CB.

Se notează mijloacele acestor drepte prin punctele M şi N, înfigînd cîte un jalon. Se măsoară apoi dreapta $\overline{MN}$.

Se ştie că linia mijlocie dintr-un triunghi este jumătate din latura paralelă. Deci:

$$\overline{MN} = \overline{AB}/2 \text{ de unde } \overline{AB} = 2\,\overline{MN}$$

3. **Determinarea distanţei între două puncte inaccesibile, prin construirea unui paralelogram.** Instrumente necesare: un echer topografic, o ruletă şi 12 — 14 jaloane. Trebuie să determinăm distanţa dintre două puncte A şi B situate dincolo de un rîu peste care nu putem trece.

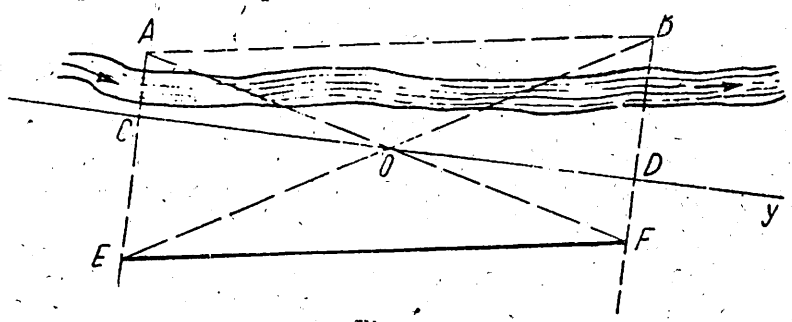


Fig. 43

Pe partea dreaptă a rîului, unde ne găsim şi noi, se jalonează o dreaptă oarecare XY. Cu ajutorul echerului topografic, determinăm pe această dreaptă, poziţia punctului C în aşa fel încît dreapta AC să fie perpendiculară pe dreapta xy. Apoi se jalonează direcţia ACM. Tot cu ajutorul echerului topografic, determinăm în mod similar poziţia punctului D de pe dreapta xy, în aşa fel încît dreapta BD să fie perpendiculară pe xy. Se jalonează şi aici direcţia BDN.

Se înfige un jalon în punctul O, situat la mijlocul dreptei CD şi se determină apoi poziţia punctului E pe direcţia AM, astfel ca punctele E, O şi B să fie pe aceeaşi dreaptă. La fel se determină poziţia punctului F, în aşa fel încît să fie pe aceeaşi linie cu punctele O şi A. Jalonăm şi măsurăm dreapta EF, care este egală în lungime tocmai cu distanţa cerută dintre punctele A şi B.

Demonstrație:

$\triangle ACO = \triangle ODF$, deoarece: $\overline{CO} = \overline{OD}$ prin construcție;
$\sphericalangle ACO = \sphericalangle ODF = 90°$ prin construcție și
$\sphericalangle ACO = \sphericalangle DOF$ opuse la vîrf.

Din egalitatea celor două triunghiuri reiese deci că $\overline{AO}$ este egal cu $\overline{OF}$, iar din egalitatea triunghiurilor dreptunghice BDC și OCE rezultă că și segmentele $\overline{OB}$ și $\overline{OE}$ sînt egale.

Prin urmare $\overline{EF} = \overline{AB}$.

4. Ridicarea topografică prin folosirea unei direcții principale (metoda coordonatelor). Instrumentele necesare: un echer topografic, o ruletă, 8—10 jaloane.

Se dau mai multe puncte pe teren, necoliniare.

Să se ridice planul conturului poligonal determinat de aceste puncte, într-o scară oarecare.

Se alege de obicei ca direcție principală una din diagonale, pe care se pot proiecta toate vîrfurile poligonului.

Dacă nu corespunde nici o diagonală, atunci se poate lua altă dreaptă, în așa fel încît pe ea să se poată proiecta toate vîrfurile poligonului. Metoda de lucru este aceeași în oricare caz.

De exemplu: se ia ca direcție principală diagonala ce unește vîrfurile A și C, pe care se pot proiecta toate celelalte vîrfuri.

Se jalonează și se măsoară diagonala AC.

Se determină apoi pe această dreaptă, cu ajutorul echerului de agrimensură, punctele E', B' și D', picioarele perpendicularelor coborîte din vîrfurile E, B și D (fig. 44).

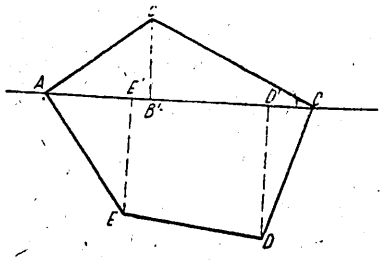


Fig. 44

Apoi se măsoară pe diagonala AC distanțele AE', AB', și AD', precum și lungimile perpendicularelor $\overline{EE'}$, $\overline{BB'}$ și $\overline{DD'}$.

Toate aceste date se trec într-un tabel, în felul următor:

Distanța pe direcția principală	Distanța vîrfurilor de la dir. principală	Observații
$\overline{AE'} = 12$ m	$\overline{EE'} = -20$ m	
$\overline{AB'} = 18$ m	$\overline{BB'} = 14$ m	
$\overline{AD'} = 38$ m		
$\overline{AC} = 46$ m	$\overline{DD'} = -24$ m	

Semnul — arată că vîrfurile E și D sînt de cealaltă parte a direcției principale AC.

După culegerea acestor date se poate desena imediat pe hîrtie, luînd o dreaptă arbitrară AC redusă la o scară oarecare. Apoi construim vîrfurile E, B și D după coordonatele obținute, tot la aceeași scară.

De exemplu dacă se alege scara 1 : 500, se ia un segment de dreaptă $AC = 9{,}2$ cm, apoi se iau pe acest segment dreptele $AE' = 2{,}4$ cm., $AB' = 3{,}6$ cm și $AD' = 7{,}6$ cm.

Din punctul E' se coboară perpendiculara $EE' = 4$ cm și din punctul D' perpendiculara $DD' = 4{,}8$ cm. Din punctul B se ridică perpendiculara $BB' = 2{,}8$ cm. Apoi se unesc punctele $ABCDE$ între ele, în ordine, unul cu celălalt, obținîndu-se în felul acesta planul locului respectiv la scara 1 : 500 (fig. 44).

Pe lîngă lucrările de măsurători descrise în capitolul „Descrierea lucrărilor", care au fost efectuate cu elevii de la școala de 7 ani din comuna Becicherecul Mic, raionul Timișoara, am efectuat cu elevii și alte lucrări, impuse de împrejurări.

Astfel, într-o zi, pe cînd ne aflam într-o mică excursie pe cîmp, pe malul Ierului, un elev a întrebat: Oare cu ce viteză curge apa din Ier? Problema pusă trebuia rezolvată. Cîțiva elevi au plecat imediat la școală după instrumente. Pînă au sosit instrumentele, am pregătit lucrarea. Am arătat elevilor că apa rîurilor are viteze diferite în diferitele zile ale anului. Dar nu numai atît, viteza variază și după locul unde o măsurăm; ea este mare în mijlocul rîului și mică la margine. Am ales un loc pe rîu unde acesta era în linie dreaptă și avea o lățime mijlocie. Apoi am măsurat de-alungul rîului o distanță de 50 m, înfigînd în capetele acestei distanțe cîte un jalon (în A și B).

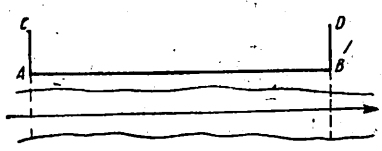


Fig. 45

Pe distanța $A\ B$ am înfipt cu ajutorul echerului topografic, în C și D, la o distanță de vreo 2 m cîte un jalon, astfel încît $\overline{CA} \perp \overline{AB}$ și $\overline{DE} \perp \overline{AB}$. Apoi am aruncat în apă cam prin mijlocul ei, din sus de punctul A, o sticlă goală înfundată cu un dop, care plutea pe apă. Cînd sticla plutitoare a trecut în dreptul liniei AC, am notat timpul. Apoi ne-am deplasat în punctul D, unde am așteptat trecerea sticlei de linia BD. În acest moment am notat din nou timpul și în felul acesta am aflat cît timp a plutit sticla pe distanța $\overline{AB}$. Am aflat astfel

că sticla a parcurs această distanță de 50 metri în 1 minut și 40 secunde.

Apoi am aflat ușor viteza apei printr-o regulă de trei simplă:

$$V = 50 \text{ m} : 100 \text{ sec} = 0{,}5 \text{ m/sec}$$

Elevii au mai repetat lucrarea de vreo cîteva ori, obținînd același rezultat sau un rezultat foarte apropiat de cel determinat prima oară.

Nu m-am oprit însă aci, ci le-am pus elevilor întrebarea:

— Acum, după ce cunoaștem viteza apei, cum am putea afla debitul ei?

După scurte discuții s-a ajuns la concluzia că ar trebui aflată aria secțiunii transversale a rîului.

In continuare am azvîrlit peste rîu, în dreptul unui podeț o sîrmă bine întinsă; din metru în metru am determinat, de pe podeț, adîncimea apei, împărțind în felul acesta toată secțiunea în niște trapeze dreptunghice la care cunoșteam bazele (adîncimile rîului măsurate din metru în metru) și înălțimea fiecărui trapez — de cîte un metru — ca în figura alăturată.

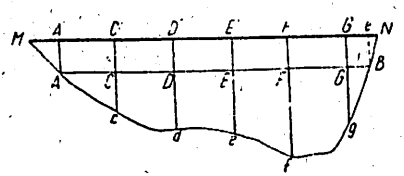


Fig. 46

Adîncimea rîului am determinat-o de pe podeț cu un băț lung, în capătul căruia am înfipt un dovlecel găsit în apropiere, pentru ca bățul să nu se înfunde prea tare. Însumînd ariile acestor trapeze, am obținut aria secțiunii rîului. Am aflat astfel că această secțiune are 9,42 mp. In felul acesta debitul de apă va fi dat de relația:

$$Q = S \cdot V = 9{,}42 \times 0{,}5 = 4{,}71 \text{ m}^3\text{/sec}$$

Altă dată am fost solicitați să ajutăm la determinarea cubajului unor șire de fîn și paie. Lucrarea a reușit foarte bine. Fiecare șiră a fost descompusă în conuri, piramide și mai ales în prisme avînd ca bază diferite poligoane. Această lucrare i-a deprins pe elevi să determine cu ușurință în practică volumul diferitelor corpuri geometrice.

I-am învățat pe elevi să determine și volumul unui arbore tăiat, măsurînd lungimea trunchiului și 3 diametri în partea de jos, sus și la mijloc — și aplicînd apoi relația:

$$V = \frac{H}{2}(R_1^2 + 4R_2^2 + R_3^2),$$

în care: H = lungimea arborelui,

R_1 = raza părții de jos,

R_2 = raza părții de la mijloc,

R_3 = raza părții de sus.

Exemplele date mai sus nu epuizează șirul lucrărilor ce se pot executa ca aplicații practice la matematică. De altfel, materialul de față nici nu și-a propus să arate toate aceste lucrări, ci de a arăta cît de necesare sînt ele pentru a consolida cunoștințele de matematică dobîndite de elevi în cursul lecțiilor, precum și pentru înarmarea elevilor cu deprinderi practice.

LUCRĂRI PRACTICE LA MATEMATICĂ LA CLASELE V — VII

EMIL SFICHI
Școala de 7 ani nr. 7
IAȘI

Predarea matematicii trebuie să asigure nu numai formarea judecății și gîndirii elevilor, nu numai înarmarea lor cu cunoștințe teoretice, ci și formarea deprinderilor de aplicare în practică a acestor cunoștințe. Întrebările elevilor ne dovedesc adesea că ei doresc să știe la ce vor folosi cunoștințele pentru asimilarea cărora depun eforturi, cum se aplică acestea în producție. Conștiința că tot ce se învață este util este cel mai puternic stimulent pentru asimilarea temeinică a cunoștințelor.

Desigur, este mult mai comod a preda matematica numai teoretic. Uneori avem chiar iluzia că am obținut rezultate bune, deoarece elevii se descurcă ușor în demonstrații și calcule, dovedesc că și-au însușit multe cunoștințe. Dar aceste cunoștințe își dovedesc valabilitatea numai în măsura în care elevii știu să le folosească pentru rezolvarea problemelor pe care le ridică munca practică, activitatea productivă.

La alte obiecte de învățămînt (fizica, chimia, șt. naturale), găsim mai ușor mijloace prin care să formăm priceperea elevilor de a aplica cunoștințele. La matematică, însă, ne mărginim de multe ori numai la rezolvarea problemelor din culegere. Aceasta este cu totul neîndestulător. Profesorul este dator să organizeze lucrări practice — dacă nu la fiecare lecție, cel puțin la fiecare capitol. Desigur, rezultate bune în această privință nu se obțin decît dacă profesorul este bine pregătit.

Activitatea elevului trebuie dirijată astfel, încît în multe cazuri să ajungă să descopere el însuși cunoștințele pe care și le însușește. Lucrările practice, pe care elevii le execută cu mult interes, ne dau posibilitatea să realizăm mai ușor acest lucru. Mulți elevi întîmpină greutăți la însușirea cunoștințelor de geometrie, dacă acestea le sînt predate numai teoretic. Lucrările practice le ușurează însă foarte mult înțelegerea cunoștințelor teoretice.

O greutate pe care o prezintă lucrările practice de matematică o constituie lipsa de instrumente. Pentru științele naturii, fizică, chimie și alte obiecte de învățămînt, ministerul trimite școlilor mult material didactic, bogat și variat. Ar fi bine ca și pentru predarea matematicii să se construiască mai multe aparate, în afară de instrumentele de geometrie și de cîteva din unitățile de măsură. Pînă cînd se va putea construi însă în serie materialul necesar pentru toate școlile, nu este greu ca la fiecare școală să se confecționeze unele instrumente prin mijloace proprii. Chiar dacă măsurătorile sînt făcute cu aparate rudimentare, ele vor contribui totuși la formarea deprinderilor practice, la dezvoltarea spiritului de inventivitate al elevilor, le vor dezvolta interesul pentru însușirea temeinică a cunoștințelor.

În manualele pentru clasele a VI-a și a VII-a se prevăd cîteva aplicații practice pe teren, dar acestea trebuie pregătite prin exerciții mai simple. Oricît de simple ar fi, aplicațiile pe teren prezintă dificultăți care determină pe mulți profesori să nu le mai facă, mulțumindu-se cu rezolvarea lor schematică pe tablă. Acest procedeu are foarte mari neajunsuri. Pe de o parte, el nu-i convinge pe elevi de importanța cunoștințelor teoretice pentru rezolvarea problemelor practice, iar pe de altă parte înlătură posibilitatea profesorului de a-i înarma pe elevi cu deprinderi de muncă, de a-i învăța să aplice în viață cunoștințele lor. De aceea trebuie să ne străduim să organizăm cît mai multe lucrări practice.

În munca pe teren cu elevii trebuie să acordăm o mare atenție asigurării disciplinei. Scoși din clasă, elevii sînt mult mai greu de stăpînit. Toți vor să măsoare, toți vor să fie „actori principali", comentează rezultatele prin strigăte sau își împrăștie atenția asupra altor preocupări oferite de mediul înconjurător. Această dificultate se înlătură prin organizarea clasei pe echipe și pregătirea minuțioasă a lucrării practice.

Se va avea în vedere ca fiecare elev să îndeplinească o anumită însărcinare în cuprinsul lucrării, trecînd prin rotație la fiecare activitate. La lucrările unde se fac măsurători, se vor repeta aceste măsurători de către fiecare echipă, confruntîndu-se rezultatele, discutîndu-se erorile, cauzele acestora și consecințele ce ar avea aceste erori în viața practică.

Unele lucrări practice trebuie să preceadă însușirea teoretică a cunoștințelor, altele trebuie să constituie o aplicare a cunoștințelor teoretice. Voi da mai jos cîteva exemple privitoare la organizarea lucrărilor practice. Se poate ca unele din acestea să pară simple, dar nu trebuie să uităm că ceea ce pare simplu

și elementar pentru profesor constituie pentru elevi o muncă grea, care cere mari eforturi.

Înainte de a arăta aplicațiile practice pe care le-am experimentat la clasele V—VII, voi descrie materialul folosit la aceste aplicații. Unele sugestii pentru confecționarea acestui material le-am luat din îndrumările date de Ministerul Învățământului, însă cele mai multe sugestii le-am căpătat din aplicațiile pe care le-am experimentat.

DESCRIEREA MATERIALULUI FOLOSIT PENTRU LUCRĂRILE PRACTICE LA MATEMATICĂ

1. **Planșeta goniometru.** Aparatul este simplu, se poate construi cu mijloace proprii în fiecare școală. Se folosește la executarea multor aplicații pe teren.

Elevii lucrează cu multă plăcere la planșeta goniometru și fac cu ea măsurători precise.

Planșeta se compune din următoarele piese (fig. 1 și 2):

I. Un trepied format din trei bastoane prinse în două șuruburi sau într-un șurub triplu. (Dacă aparatul s-ar construi în serie, ar fi bine ca trepiedul să fie telescopic.)

II. Pe trepied se sprijină o planșetă lungă de 60 cm și lată de 40 cm. Aceasta poate fi o planșetă obișnuită, folosită de elevi și studenți la desen. Pe planșetă se desenează un cerc gradat în grade sexazecimale. Pentru a da planșetei orizontalitate, se montează pe ea două bule de nivel ce pot fi construite dintr-un tub subțire de sticlă. Bulele de nivel sînt montate în două direcții perpendiculare. În același scop se poate folosi și o nivelă cu bulă de aer obișnuită, care nu trebuie să fie montată neapărat pe planșetă.

III. Din mijlocul cercului gradat, printr-o gaură mică, este atîrnat un fir cu plumb care va marca pe teren centrul cercului gradat.

IV. În cercul gradat se montează un vizor foarte simplu de construit, format dintr-o ramă pătrată, cu laturile cît raza cercului desenat pe planșetă (15 cm). Rama se fixează cu un colț, printr-un ax, în centrul cercului. La celălalt capăt al laturii care se sprijină pe planșetă se pune un indicator care ajută la citirea gradațiilor. În cele două laturi verticale se face cîte o tăietură, mai mică spre ochi și mai mare spre obiectiv. Vizarea se face prin ferăstruica de pe latura fixată în centru. Lățimea ferăstruicilor poate fi de 1,5 mm, către ocular și 2 mm către obiectiv,

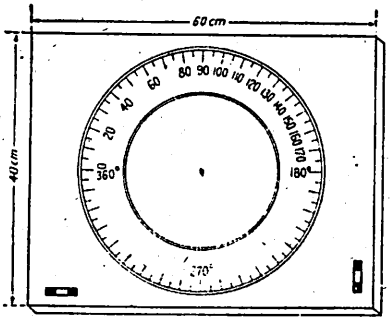
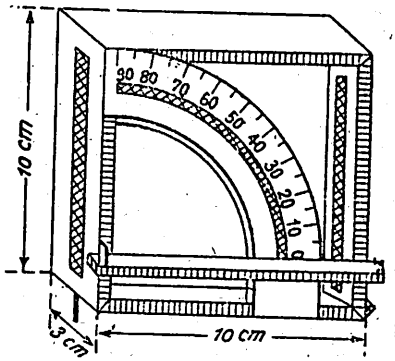


Fig. 1



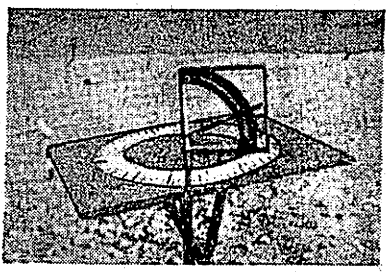
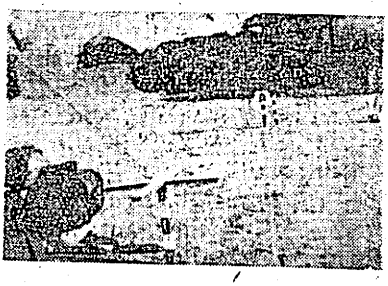


Fig. 2



A

În fotografia nr. 1 și nr. 2 se vede planșeta cu trepied și vizor

iar lungimea de 7—8 cm. În mijlocul tăieturii de la obiectiv se întinde un fir de păr prin care se vizează direcțiile jalonate. Pentru a scoate în evidență gradațiile de pe planșetă, fondul ei se vopsește în negru, iar cercul gradat se lasă alb (de culoarea lemnului). Apoi se lustruiește. Dacă este greu de lustruit, se poate folosi orice vopsea, sau se lipește pe planșetă un cerc gradat făcut din hîrtie.

Am folosit la lucrările practice și alte instrumente, care sînt descrise în articolul anterior. Aceste instrumente sînt următoarele:

— jaloane;
— țăruși;
— lanț de măsurat;
— echerul topografic (pentru construirea unghiurilor drepte);
— țăruși cu etichetă;
— firul cu plumb;
— nivela cu bulă de aer;
— metrul pătrat despărțit în decimetri pătrați.

LUCRĂRI PRACTICE EFECTUATE CU ELEVII CLASEI a V-a

Voi începe cu prezentarea lucrărilor mai simple, ce se efectuează în clasa a V-a, continuînd progresiv cu lucrări pentru clasele a VI-a și a VII-a, cînd se cere ca elevii să aibă cunoștințe mai bogate. Descrierea lucrărilor practice va fi precedată de indicarea materialului folosit și a pregătirilor menite să asigure disciplina muncii pe teren. Voi arăta, de asemenea, locurile unde pot fi încadrate lucrările practice în planul calendaristic, potrivit nivelului de cunoștințe ale elevilor.

1. **Jalonarea unei linii drepte și măsurarea unei distanțe.** Lucrarea se efectuează după repetarea și adîncirea cunoștințelor din clasele I-IV despre unități de măsură.

Materiale necesare: jaloane, țăruși, rulete sau lanț.

Procedeul de lucru. Se împarte clasa în 3—4 echipe. Li se explică elevilor cum se aliniază jaloanele. Apoi echipele lucrează independent, trasînd mai multe direcții. În cadrul echipelor se vor schimba rolurile elevilor, punîndu-i să se verifice reciproc.

Pentru a-i deprinde, de la început, pe elevi cu ordinea, se stabilește un cod de semnale. Alinierea jaloanelor se face numai

prin semne cu mîna spre dreapta sau spre stînga, dacă jalonul trebuie mutat într-o parte sau în alta, iar cînd jalonul este aliniat, se face semn cu palma de trei ori în jos. (Se poate stabili şi alt cod de semnale.) Elevii gălăgioşi vor fi eliminaţi de la măsurători. Această sancţiune se va aplica însă cu atenţie.

După trasarea direcţiei, se efectuează măsurătoarea cu lanţul sau cu ruleta, punîndu-se la fiecare capăt de lanţ cîte un ţăruş. Se va stabili pe teren raportul între diferite unităţi de măsură: m, dam, hm, km etc.

Este bine ca după aceste măsurători fiecare elev să-şi etaloneze pasul prin mers normal pe direcţiile trasate şi măsurate. Pentru aceasta, elevii vor merge de mai multe ori pe distanţa stabilită, făcînd media numărătorii paşilor, căci la început au tendinţa de a forţa pasul. Fiecare elev va ţine minte cîţi paşi face pentru 10 m, pentru 100 m etc. Exerciţiul acesta este important pentru a arăta necesitatea practică a mediei aritmetice.

2. **Exerciţii de apreciere a distanţelor.** După ce elevii au făcut mai multe măsurători pe teren, şi-au etalonat pasul şi au făcut şi măsurători cu pasul, cu prilejul excursiilor sau altor ieşiri pe teren, este bine să-i deprindem cu aprecierea distanţelor, ceea ce îi va ajuta la rezolvarea multor probleme practice.

Pentru aprecierea distanţelor trebuie să li se dea cîteva cunoştinţe despre felul cum se văd distanţele şi înălţimile în diferite împrejurări. Iată cîteva observaţii:

a) Lungimile egale par cu atît mai scurte, cu cît sînt mai departe de observator;

b) Segmentele egale par mai scurte cînd ochiul observatorului este situat mai aproape de pămînt;

c) Distanţele (segmentele) privite în lung par mai scurte decît atunci cînd sînt perpendiculare pe direcţia vizuală;

d) Pe teren accidentat distanţele par mai scurte decît pe teren şes;

e) Cînd un teren şes este luminat puternic de soare, distanţele par mai mici decît în realitate.

Pentru că la aprecierea distanţelor se prezintă cazuri atît de variate, se vor face aprecieri în împrejurări diferite, apreciindu-se mai întîi liber şi verificîndu-se apoi prin măsurare exactitatea aprecierii.

Deprinderea de a aprecia distanţele este foarte folositoare în viaţă, fixează cunoştinţele despre unităţile de măsură şi ajută la interpretarea rezultatelor unor probleme la care se obţin rezultate nereale din cauza greşelilor de calcul.

3. **Intuirea verticalei, orizontalei şi oblicei.**

Materiale necesare: firul cu plumb şi nivela cu bulă de aer.

Elevii vor verifica verticalitatea zidurilor clădirilor, orizontalitatea geamurilor, dușumelelor etc.

Dacă în apropierea şcolii se construieşte o clădire, se va vizita şantierul, observîndu-se cum folosesc zidarii cumpăna zidarului şi nivela cu bula de aer.

4. **Construirea pe teren a unui unghi drept, a unui pătrat, a unui dreptunghi şi a unui paralelogram.**

Materialele didactice folosite: ruletă sau lanţ, jaloane, ţăruşi, etichete cu ţăruşi, echerul pentru teren.

Observaţie: pentru buna efectuare a acestor lucrări este necesar ca elevii să cunoască bine definiţia unghiului.

Procedeul de lucru:

a) *Construirea unghiului drept.* Se trasează pe teren o direcţie care se jalonează. Se aşază un braţ al echerului pe direcţia trasată. Se vizează apoi prin celălalt braţ al echerului o altă direcţie şi se jalonează această dreaptă care este perpendiculară pe prima (vezi fotografia nr 3).

b) *Construirea pătratului.* Pe cele două direcţii perpendiculare trasate, se măsoară segmente egale cu latura pătratului, a cărui lungime se ia după voie sau după posibilităţile oferite de teren. Prin capetele segmentelor măsurate se duc alte două perpendiculare. Prin intersecţiile acestora se formează pătratul cu dimensiunile căutate. Este bine să se construiască un dam^2 şi un hm^2, pentru ca elevii să facă comparaţie între aceste unităţi de măsurat suprafaţele.

c) *Construirea unui dreptunghi şi a unui paralelogram, determinarea ariei acestora.* Se trasează o dreaptă pe care, cu ajutorul echerului, se duc două perpendiculare. Pe aceste două drepte jalonate se iau bazele dreptunghiului sau paralelogramului, se construiesc extremităţile şi li se determină aria.

Cu acest prilej este bine să se arate elevilor cum se reduc dimensiunile la scară. Elevii vor face pe caiete schema figurilor de pe teren, reducîndu-le scara, şi le vor determina acasă aria.

După aceste construcţii li se pot da elevilor diferite probleme simple, cerîndu-li-se să facă independent o construcţie oarecare pe teren.

Exemple:

— Să se construiască pe teren un dreptunghi cînd se dă lungimea, ştiind că lăţimea este 3/4 din lungime. Să se determine aria dreptunghiului construit.

— Să se construiască şi să se determine aria unui dreptunghi cunoscînd perimetrul şi una din laturi.

— Să se construiască şi să se determine aria unui pătrat căruia i se cunoaşte perimetrul.

Se pot găsi nenumărate exemple de acest fel.

Se împarte clasa în echipe şi se dă fiecărei echipe o problemă pe care o rezolvă pe teren în linişte.

Multe din aceste probleme practice se pot rezolva pe lotul şcolar.

5. **Construirea de triunghiuri şi cercuri pe teren şi determinarea ariei lor.**

Materialele necesare. Pe lîngă materialul folosit la celelalte lucrări, se va folosi şi o sfoară pentru trasarea cercului.

Se vor face cîteva construcţii simple.

Exemple:

— Să se construiască un triunghi cînd se dă baza şi înălţimea. Să i se determine aria. (Înălţimea se va duce numai în interiorul triunghiului, ridicîndu-se o perpendiculară într-un punct dat de pe bază, deoarece altfel se poate construi o infinitate de triunghiuri cu aceste elemente.)

— Cercurile vor fi construite cu ajutorul unei sfori fixate de un ţăruş. Se va determina aria acestor cercuri.

Se poate determina şi aria unui poligon oarecare, prin împărţirea lui în triunghiuri şi dreptunghiuri.

6. **Confecţionarea cubului, paralelipipedului, cilindrului.** Deoarece în clasa a V-a se studiază volumul cîtorva corpuri — cubul, paralelipipedul, cilindrul — este bine ca profesorul de matematică în colaborare cu conducătorul cercului de „mîini îndemînatice“ şi profesorul de desen să organizeze construirea de către elevi a desfăşuratelor unui cub, unui paralelipiped şi unui cilindru.

În legătură cu determinarea volumelor se pot face următoarele probleme:

— Determinarea volumului claselor din şcoală.

— Determinarea volumului unui trunchi de copac, făcînd media diametrelor celor două capete şi considerîndu-l astfel un cilindru.

— Calcularea cantităţii de scîndură necesară pentru duşumelele unei clase.

— Formarea unui ster din lemnele şcolii.

— Calcularea numărului de cărămizi necesare construirii unei clase.

— Cubajul unei grămezi de lemne sau cărămizi.

LUCRĂRI PRACTICE PENTRU CLASA a VI-a

Pentru efectuarea lucrărilor practice la clasa a VI-a, se va folosi în afară de materialele folosite la clasa a V-a planşeta goniometru.

Unele din lucrările efectuate în clasa a V-a se vor repeta şi în clasa a VI-a, folosindu-se cunoştinţele de geometrie cuprinse în programă.

Voi arăta cîteva teme ce trebuie să constituie subiectul lucrărilor practice pe teren în clasa a VI-a.

1. **Jalonarea unei drepte, a unei semidrepte şi a unui segment.** Dreptele vor fi marcate pe teren cu literele X,Y sau M; semidreptele vor fi notate cu M sau X la capătul presupus nelimitat şi cu alte litere la celălalt capăt.

Ca aplicaţii în legătură cu jalonarea dreptelor, se recomandă următoarele lucrări:

— Măsurarea dimensiunilor curţii sau grădinii şcolare, mergîndu-se pe direcţia unei drepte, pentru a se obţine desfăşurarea perimetrului. Se va înlătura astfel confuzia pe care o fac unii elevi la calcularea ariei şi perimetrului.

— Etalonarea pasului, dacă nu s-a făcut în clasa a V-a, stăruindu-se asupra formării deprinderii de apreciere a distanţelor. Trebuie să se ţină seama de condiţiile în care se fac aceste aprecieri.

2. **Construirea pe teren a diferitelor unghiuri şi măsurarea lor.** *Materialele necesare*: jaloane, ţăruşi, planşeta goniometru, ţăruşi cu etichete, busolă, ruletă sau lanţ.

Se descrie planşeta şi modul de întrebuinţare.

Elevii fac exerciţii de darea orizontalităţii planşetei, de mînuire a vizorului şi de citire a gradaţiilor. La trasarea direcţiilor cu ajutorul planşetei se procedează astfel: un elev se uită prin vizor, iar alţi doi elevi aşază jaloanele după indicaţiile date de primul. Lăsîndu-se planşeta fixă, se mişcă vizorul în jurul axului său. Se citeşte pe cercul gradat unghiul ce urmează să fie construit şi se trasează a doua direcţie. Vîrful unghiului dorit se găseşte la intersecţia celor două direcţii, în punctul indicat de firul cu plumb de sub planşetă.

Se pot măsura diferite unghiuri formate de direcţia dintre planşetă şi reperele alese pe teren. Este necesar ca fiecare elev să se deprindă cu măsurarea lor pe teren.

3. **Construirea pe teren a dreptelor perpendiculare şi a diferitor unghiuri după dimensiunile date.**

Materialele necesare: echer pentru teren, jaloane, ţăruşi cu etichete, ruletă sau lanţ, planşeta goniometru. Pentru a

putea împărți clasa în echipe mai multe, se vor folosi mai multe echere de teren.

Iată cum se poate proceda pentru a se cîștiga timp și pentru a se antrena în efectuarea lucrării cît mai mulți elevi. Se împarte clasa în mai multe echipe, după materialul de care dispunem. Una sau două echipe construiesc drepte perpendiculare, folosind echerul, jaloane și țăruși. O echipă construiește triunghiuri dreptunghice cu ajutorul echerului, după dimensiunile date. O altă echipă construiește un triunghi oarecare, după dimensiunile date, folosind planșeta, iar alta construiește diferite triunghiuri fără a le da dimensiunile, pe care le măsoară apoi cu ajutorul planșetei și ruletei.

Toate echipele, după ce jalonează direcțiile laturilor, le limitează cu țăruși, măsoară laturile, trasează înălțimea, notează toate dimensiunile. În clasă sau acasă se vor desena figurile la scara indicată, calculîndu-se ariile.

La extremitățile figurilor construite pe teren se înfig țăruși ce au pe ei cîte o etichetă cu o literă. Li se cere elevilor să păstreze pe schemă notația de pe teren, căci astfel se poate verifica cu ușurință tema.

Este bine ca în schemele făcute de elevi în clasă sau acasă, să se respecte orientarea după punctele cardinale. Vom înlătura astfel din deprinderile elevilor interpretarea mecanică a poziției figurilor desenate pe caiete. (Multă vreme, unii elevi consideră că baza unui triunghi nu poate fi decît latura de jos.)

Fiecare echipă va trece pe rînd, pe teren, la efectuarea lucrărilor fixate. Lucrările se vor discuta comparativ.

4. Construirea pe teren a dreptelor paralele, măsurarea unghiurilor formate din două drepte paralele tăiate de o secantă; construirea unui pătrat și a unui dreptunghi. Se folosesc aceleași materiale ca și la lucrările precedente.

Pentru construirea dreptelor paralele pe teren se pot aplica multe procedee. Folosirea unor procedee variate dă posibilitatea să se lucreze concomitent cu mai multe echipe.

a) Se trasează cu jaloane o direcție, pe care se vor duce mai multe perpendiculare cu ajutorul echerului sau cu ajutorul planșetei, așa cum s-a făcut și în clasa a V-a. Perpendicularele duse pe aceeași dreaptă sînt paralele.

b) Construirea unei drepte paralele cu o dreaptă dată, care trebuie să treacă printr-un punct dat, exterior dreptei. Procedăm astfel: se jalonează o dreaptă și se ia un punct în afara ei. Tot prin jalonare se intersectează această dreaptă cu o altă dreaptă, care să treacă prin punctul ales. Cunoscînd relațiile dintre

unghiurile formate de două drepte paralele tăiate de o secantă, se jalonează cealaltă dreaptă, măsurîndu-se cu ajutorul planşetei goniometru o pereche din aceste unghiuri.

c) Construirea de segmente paralele cu ajutorul simetriei faţă de un punct.

Această lucrare va folosi la măsurarea distanţei dintre două puncte, dintre care unul este inaccesibil.

Se jalonează un segment şi se fixează un punct în afara lui, apoi se construieşte simetricul acestui segment faţă de punctul ales, folosindu-se numai ruleta, jaloane şi ţăruşi cu etichete. Se demonstrează egalitatea triunghiurilor formate, din care se deduce paralelismul segmentelor.

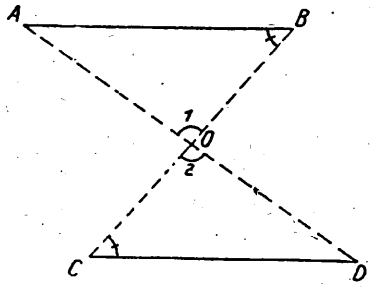


Fig. 3

$$\overline{AO} = \overline{OD}$$
$$\overline{BO} = \overline{OC}$$
$$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$$
$$\widehat{AOB} = \widehat{COD}$$
$$\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$$

Aceste unghiuri ocupă poziţia de alterne interne. Deci AB este paralelă cu CD.

5. **Măsurarea pe teren a distanţei dintre două puncte între care nu se poate trece.** Trebuie să se măsoare distanţa dintre punctele A şi B. Terenul dintre aceste puncte nu este accesibil (fig.4), dar există un punct C din care se văd ambele puncte A şi B. Terenul de la C la A şi B este accesibil.

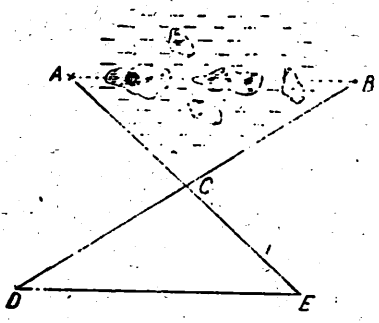


Fig. 4

Alegînd punctul C astfel ca de la el să putem măsura distanţele $\overline{CB}$ şi $\overline{AC}$, jalonăm direcţiile $\overline{BD}$ şi $\overline{AE}$.

Se iau pe aceste direcţii: $\overline{BC} = \overline{CD}$ şi $\overline{AC} = \overline{CE}$. Folosind criteriile de egalitate ale triunghiurilor, se demonstrează că $\overline{DE} = \overline{AB}$. Distanţa $\overline{DE}$ se măsoară. Pentru a-i convinge pe elevi asupra valabilităţii construcţiilor geometrice, construcţia se poate face, ca exerciţiu,

și pe un teren accesibil, dînd elevilor posibilitatea să măsoare și distanța $\overline{AB}$.

Exercițiul se poate face și în curtea școlii, dacă nu se găsește prin apropiere un teren potrivit.

6. Măsurarea pe teren a distanței dintre două puncte dintre care unul este inaccesibil (din cauza unui rîu, mlaștină, clădiri etc.).

Materialele necesare: jaloane, țăruși, țăruși cu etichete, ruletă sau lanț.

Problema se poate rezolva ca exercițiu și pe un teren plan, unde ambele puncte sînt accesibile, pentru a-i convinge pe elevi asupra valabilității construcțiilor geometrice.

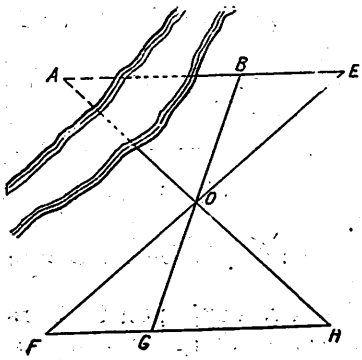


Fig. 5

Trebuie să se măsoare distanța AB. Punctul A este inaccesibil din cauza rîului. Se jalonează direcția AB. Punctul A îl fixăm pe teren printr-un reper oarecare (un stîlp, o tufă, o piatră etc.). Prelungim direcția AB după cum ne permite terenul, luînd segmentul $\overline{BE}$ care se poate măsura.

Se ia apoi pe teren un punct „O" din care se vede punctul A și se pot măsura segmentele $\overline{OB}$, $\overline{OE}$, $\overline{OF}$, $\overline{OC}$, $\overline{OH}$ și $\overline{GH}$. Vom alege după voie punctele O și E, astfel încît construcția să se poată face pe teren ales. Se trasează prin jaloane toate direcțiile indicate de fig. 5. Se măsoară și se fixează prin țăruși segmentele $\overline{OE} = \overline{OF}$ și $\overline{OB} = \overline{OC}$. În punctul O se înfige un jalon distinct (ar fi bine să fie colorat deosebit).

Mergem apoi pe direcția FH, pînă găsim un punct, care se află pe aceeași dreaptă cu direcția CA. Demonstrînd egalitatea triunghiurilor BCE și FGO, arătăm că AB este paralelă cu FH. Pe această bază putem demonstra egalitatea triunghiurilor AOB și GOH. Se măsoară distanța $\overline{GH}$, care este egală cu $\overline{AB}$.

Pentru ca elevii să-i facă schema de pe teren pe caiete, se înfige în punctele de intersecție ale dreptelor trasate cîte un țăruș cu literă (exceptînd punctul inaccesibil). Elevii vor desena la scară schema de pe teren și vor face demonstrațiile.

Dacă punctul A se găseşte chiar pe malul opus al rîului, atunci se poate determina lăţimea rîului, scăzînd din distanţa $\overline{GH}$ distanţa de la punctul B pînă la malul rîului.

Aceeaşi construcţie poate fi folosită pentru măsurarea lăţimii unui lac sau a unei mlaştini.

7. **Măsurarea lăţimii unui lac folosind proprietăţile unui triunghi isoscel sau proprietăţile oblicelor egal depărtate de piciorul perpendicularei** (fig. 6). Se cere să se măsoare distanţa AB, dintre 2 puncte aşezate pe malurile opuse ale unui lac. Se jalonează direcţia BD. Apoi ne mişcăm pe această dreaptă pînă într-un punct E şi ridicăm cu echerul de teren o perpendiculară care să treacă prin punctul A.

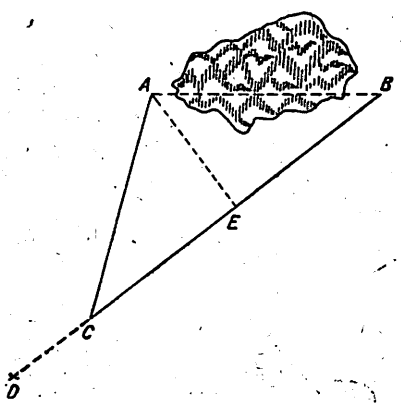


Fig. 6

Se măsoară distanţa $\overline{EB}$, luînd pe dreapta BD segmentul $\overline{EC} = \overline{EB}$. Din punctul C se jalonează direcţia $\overline{AC}$, care se măsoară. $\overline{AC}$ este egal cu AB ca oblice egal depărtate de piciorul perpendicularei sau ca laturi ale triunghiului isoscel construit. (Elevii vor face pe caiete schema redusă la scară şi vor demonstra egalitatea segmentelor $\overline{AC}$ şi $\overline{AF}$.)

8. **Măsurarea lăţimii unui rîu cu ajutorul triunghiului dreptunghic** (fig. 7). Se ia un reper pe malul opus (o tufă, o piatră sau un alt semn distinct). Se trasează segmentul $\overline{AB}$, perpendicular pe cursul rîului. Cu ajutorul echerului de teren sau cu planşeta goniometru, se trasează direcţia BD, perpendiculară pe AB. Se împarte segmentul $\overline{BD}$ în două părţi egale. Se trasează direcţia DE, perpendiculară pe BD. Ne deplasăm pe această direcţie pînă într-un punct, de unde vedem punctele C şi A pe această dreaptă.

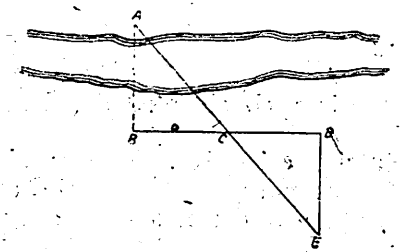


Fig. 7

Se obţin astfel triunghiurile dreptunghice ADC şi CDE. Se demonstrează egalitatea lor.

Măsurînd segmentul $\overline{DE}$ obţinem distanţa $\overline{AB}$, din care scă-

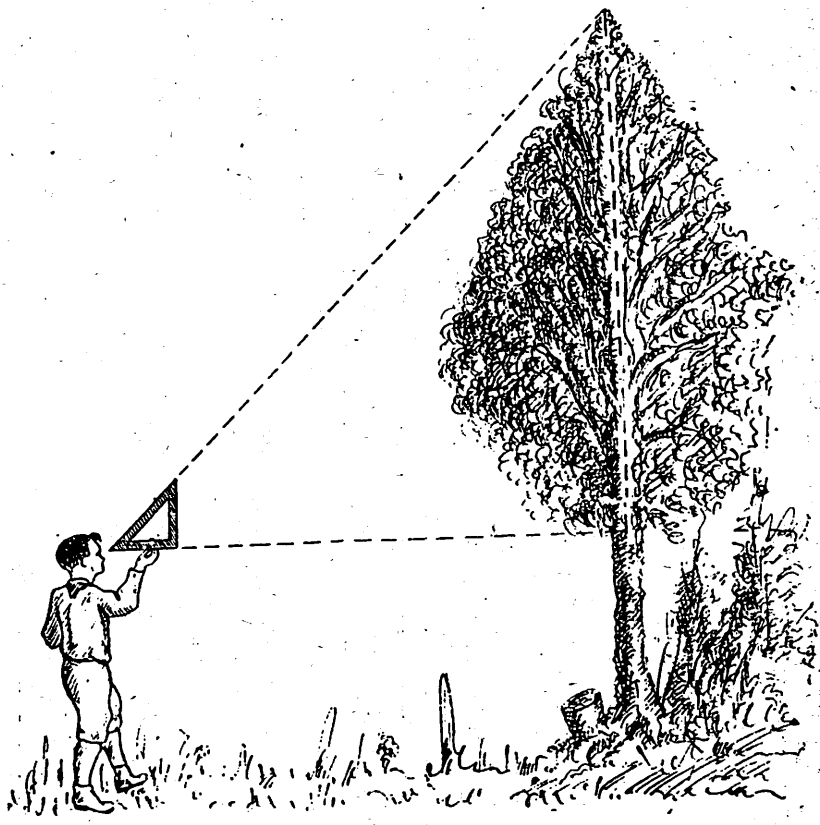


Fig. 8

dem distanţa de la punctul B pînă la mal, obţinînd astfel lăţimea rîului.

9. **Măsurarea înălţimii cu ajutorul echerului.** Dacă razele solare ar cădea sub un unghi de 45°, atunci umbra obiectului ar fi egală cu înălţimea lui. Unghiul sub care cad razele solare nu se poate determina decît cu greu.

Pentru o măsurare aproximativă se poate folosi echerul de 45°.

Se procedează astfel: ţinînd echerul cu o catetă orizontal, ne depărtăm de obiect vizînd pe ipotenuză pînă cînd prelungirea acesteia este pe aceeaşi dreaptă cu vîrful copacului sau cu extremitatea obiectului a cărui înălţime o măsurăm. Din punctul unde am ajuns, măsurăm distanţa pînă la baza obiectului şi adăugînd înălţimea observatorului, obţinem înălţimea obiectului. (Elevii ştiu că echerul de 45° are catetele egale.)

Măsurătoarea aceasta este aproximativă din cauză că, ţinînd echerul în mînă, nu sîntem siguri de orizontalitatea catetei. Putem mări precizia măsurătorii, dacă echerul este sprijinit cu o catetă pe planşetă, a cărei-orizontalitate este dată cu ajutorul nivelei cu bulă de aer.

10. **Măsurarea înălţimilor cu planşeta goniometru.** La vizorul planşetei goniometru ataşăm un sfert de cerc, gradat de la 0° — 90°, pe care alunecă o bară cu crestătură şi cătare, în jurul unui ax fixat în centrul cercului din care face parte cadranul gradat (vezi fig. 2 şi fotografiile). Cu acest dispozitiv se pot măsura unghiurile în plan vertical.

Se procedează astfel: se aşază planşeta la o distanţă aproximativ egală cu înălţimea obiectului de măsurat. Se dă orizontalitatea planşetei. Se pune pe vizor unghiul de 45° şi se vizează. Se mişcă planşeta pînă cînd linia de ochire cade pe vîrful obiectului de măsurat, verificîndu-se totodată şi orizontalitatea planşetei.

Se măsoară distanţa de la planşetă pînă la baza obiectului. Adăugînd înălţimea planşetei, vom obţine înălţimea căutată.

Dacă gradaţiile pe planşetă sînt corecte şi dacă se verifică riguros orizontalitatea planşetei, măsurătoarea este precisă.

11. **Ridicarea unui teren.**

a) Dacă în apropierea şcolii nu există un teren de forma unui poligon neregulat, atunci profesorul trasează un asemenea poligon prin jaloane şi ţăruşi, înfigînd la extremităţi ţăruşi cu etichete.

Se trasează diagonala AB, care să treacă prin interiorul poligonului. Din fiecare unghi al poligonului se trasează cîte o perpendiculară pe diagonala AB, marcîndu-se punctele de intersecţie cu cîte o literă sau un ţăruş. Se măsoară pe dreapta AB

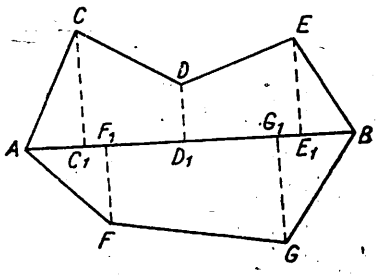


Fig. 9

distanţele de la o perpedinculară la alta. Acestea se notează într-un tablou făcut pe caiete, al cărui model este dat. Se măsoară apoi pe teren lungimea fiecărei perpendiculare şi se notează în tablou. Unind capetele perpendiculare căpătăm conturul poligonului. În timp ce se află pe teren, elevii vor face pe caiete o schiţă aproximativă, urmînd ca acasă să reducă dimensiunile notate la scara indicată şi să deseneze, eventual pe o planşă, planul terenului recunoscut. Lucrînd la scara de 1:1000 (1 cm pe plan reprezintă 10 m pe teren) şi ţinînd seamă de fig. 9, elevii vor face următorul tablou (dimensiunile se pot nota şi pe schiţa făcută de elevi pe teren).

După această ridicare topografică simplă, elevii vor putea face la geografie planul unui cartier din oraş sau planul satului. La ridicarea topografică este bine să se ţină seamă de orientarea după punctele cardinale.

După ce elevii au învăţat să ridice planul unui teren, se poate da ca temă pentru munca independentă transpunerea pe teren a unui plan. Se dă elevilor schiţa unui poligon de o formă oarecare, cu dimensiunile reduse la scară. Ei vor transpune acest poligon pe teren cu dimensiunile reale.

b) *Ridicarea topografică a unui teren prin măsurarea perimetrului şi unghiurilor lui.* Se alege un teren de o formă poligonală oarecare sau se marchează acest teren după forma dorită de profesor. Elevii măsoară laturile poligonului cu ruleta, iar unghiurile cu ajutorul planşetei goniometru, instalînd planşeta în fiecare unghi al poligonului. Îşi notează dimensiunile pe o schiţă, iar acasă desenează planul după scara indicată.

12. Pe lîngă problemele indicate se mai pot efectua următoarele probleme:

a) Să se construiască pe teren bisectoarea unui unghi (fig. 10).

Se procedează astfel: se măsoară pe laturile unghiului, începînd de la vîrf, segmente egale $\overline{AB} = \overline{AC}$. Se află mijlocul segmentului $\overline{BC}$, măsurîndu-se cu ruleta. $\overline{BD}$ fiind egal cu $\overline{DC}$, $\overline{AD}$ comună şi $\overline{AB}$ egal cu $\overline{AC}$, se obţin două triunghiuri egale. Deci: $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$.

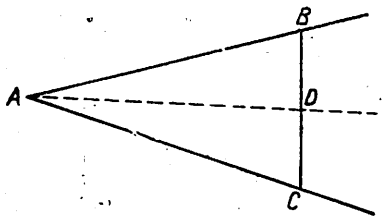


Fig. 10

b) Să se ducă o perpendiculară dintr-un punct exte-

rior unei drepte trasate pe teren, cu ajutorul unei frînghii sau sfori (fig. 11).

Se procedează astfel: se caută prin îndoire mijlocul sforii sau frînghiei. Acestea se fixează în punctul C prjntr-un țăruș. Se întind apoi capetele sforii pînă cînd ating dreapta MN în punctele A și B și se caută mijlocul segmentului $A\ B$. Unind punctul D cu C, vom găsi perpendiculara căutată.

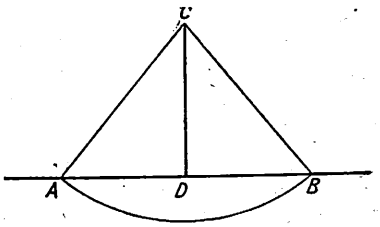


Fig. 11

Elevii fac scheme pe caiete demonstrînd egalitatea triunghiurilor $A\ D\ C$ și $D\ C\ B$. Ei vor deduce că $C\ D$ este perpendiculară pe MN.

c) *Ridicarea pe teren a unei perpendiculare dintr-un punct dat al unei drepte cu ajutorul unei sfori sau frînghii.* Se procedează astfel: se jalonează o dreaptă pe care se ia un segment $\overline{AB}$, căruia i se determină mijlocul. După ce s-a determinat mijlocul sforii, se fixează capetele ei în punctele A și B (fig. 11). Apoi, prinzînd de mijloc, se întinde sfoara. Unind vîrful triunghiului isoscel astfel format cu mijlocul segmentului AB, obținem perpendiculara căutată.

Am dat numai cîteva exemple, dar se pot face și alte construcții, mai ales după ce elevii au obținut îndemînarea de a lucra pe teren.

În clasa a VI-a trebuie să se continue construcția din carton a corpurilor geometrice și desfășurarea lor.

LUCRĂRI PRACTICE LA CLASA a VII-a

Îndrumările programei de învățămînt prevăd că în clasa a VII-a trebuie repetate lucrările efectuate în clasele anterioare. De asemenea, trebuie făcute acum lucrările ce nu s-au putut executa în clasele a V-a și a VI-a. Este bine să repetăm o serie de lucrări pentru a consolida deprinderile practice ale elevilor. Repetarea nu trebuie să fie însă mecanică. În acest scop vom alege probleme mai complicate și chiar unele probleme noi. După cum prevede programa nouă, se pot face în clasa a VII-a și probleme pe baza asemănării triunghiurilor.

Voi expune cîteva lucrări practice care, dacă nu se vor putea efectua toate în clasa a VII-a, vor putea fi continuate în clasa a VIII-a.

1. **Măsurarea înălțimii unui copac sau a unui turn a cărui bază este inaccesibilă** (fig. 12). Se procedează astfel: ne depărtăm cu planșeta pînă cînd unghiul format de orizontală și linia de

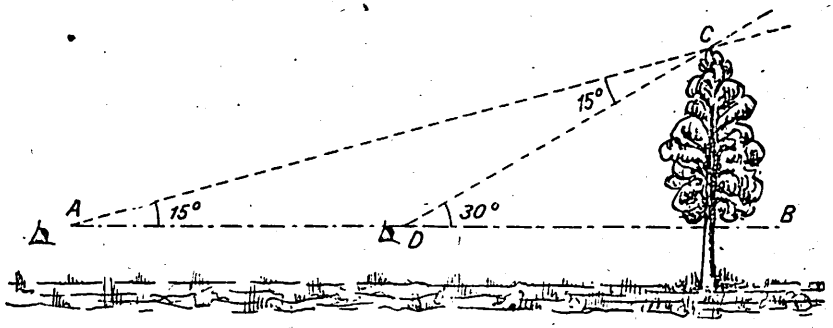


Fig. 12

ochire ce trece prin vizor și vîrful copacului este de 30°. Ne depărtăm apoi cu planșeta, pînă cînd vedem vîrful copacului sub un unghi de 15°. Dacă n-avem planșetă, vom folosi eclimetrul, care este descris și desenat în figura 33.

Demonstrație:

$\widehat{CDB}$ este unghi exterior triunghiului ACD. Deci $\widehat{CAD} + \widehat{ACD} = \widehat{CDB} = 30°$. Atunci $\widehat{ACD} = 15°$. Triunghiul $\widehat{ADC}$ este isoscel. $\overline{AD} = \overline{DC}$; $\overline{CB} = \frac{1}{2}\overline{DC}$, catetă opusă unui unghi de 30°. $\overline{AD}$ fiind egal cu $\overline{DC}$, atunci $\overline{CB} = \frac{\overline{AD}}{2}$. $\overline{AD}$ se poate măsura. La dimensiunea aflată se adaugă înălțimea planșetei.

2. **Măsurarea înălțimii unui copac sau a unui turn, după umbră, pe baza asemănării triunghiurilor** (fig. 13). Înfigem un țăruș de mărime cunoscută în apropierea obiectului de măsurat și măsurăm umbrele. Unind vîrful copacului și vîrful țărușului cu capătul umbrei respective, s-au format două triunghiuri asemenea. Făcînd raportul laturilor omoloage, determinăm înălțimea copacului $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$ (se poate face mai întîi demonstrația în clasă).

3. **Măsurarea înălțimii unui copac sau a unui turn cu ajutorul unui țăruș, pe timp noros** (fig. 14). Se înfige un țăruș de lun-

gime cunoscută la o depărtare oarecare de turn sau de copac. Apoi ne depărtăm de baston pînă într-un punct de unde, culcaţi

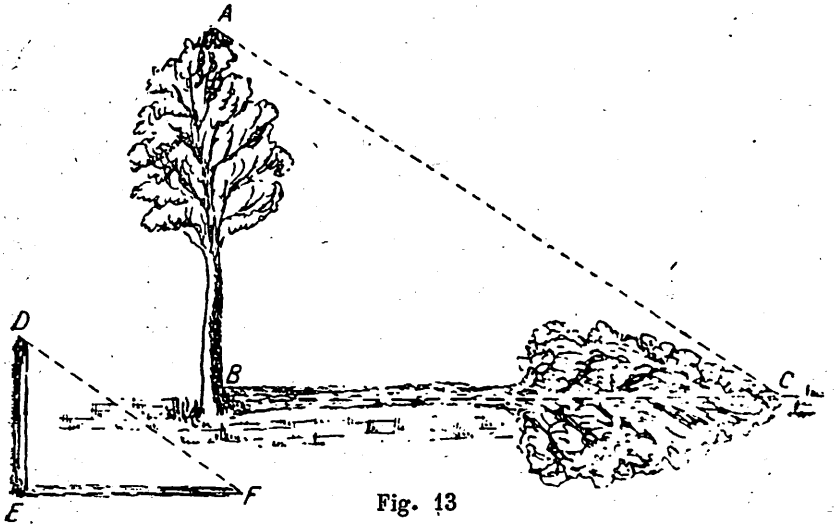


Fig. 13

pe spate, vedem vîrful ţărușului pe aceeași linie cu vîrful turnului. S-au format două triunghiuri asemenea: primul din vîrful

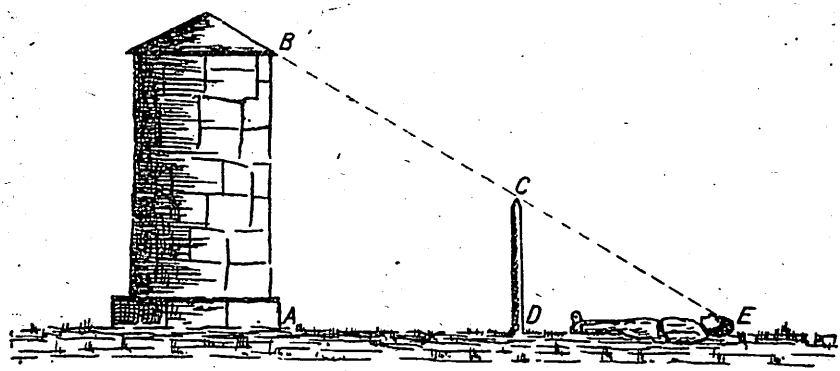


Fig. 14

turnului, baza lui și ochiul observatorului, iar al doilea din vîrful ţărușului, baza lui și ochiul observatorului.

Facem raportul laturilor analoage: $\frac{\overline{AB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{DE}}$

Acest procedeu a fost folosit de eroii romanului „Insula misterioasă" de Jules Verne, pentru măsurarea înălțimii unei stînci. (Înainte de a face lucrarea, am recomandat elevilor să citească această carte.)

4. **Măsurarea înălțimii unui copac, după ploaie, folosind imaginea ce se formează în bălțile apropiate** (fig. 15). Se procedează

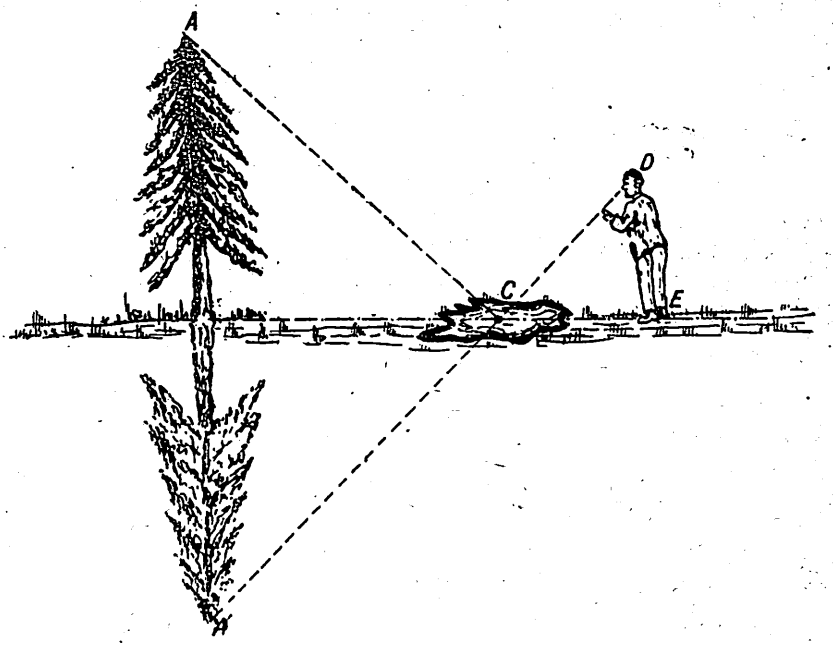


Fig. 15

astfel: căutăm în apropierea copacului o baltă, apoi căutăm în apropierea bălții un punct de unde să vedem imaginea vîrfului copacului. Mărimea obiectului reflectat este egală cu mărimea reală. Prin unirea vîrfului cu centrul bălții, cu ochiul observatorului și cu picioarele lui și cu baza obiectului, se formează două triunghiuri egale ABC și BAC și triunghiul CDE asemenea cu cele două. Facem raportul laturilor analoage $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CE}}$.

Cel care vizează, își cunoaște înălțimea. Urmează să se măsoare distanțele BC și CE. Cu cît balta este mai mică, cu atît

precizia este mai mare, dar trebuie făcute mai multe încercări, pînă cînd observatorul găseşte punctul de unde vede în baltă imaginea vîrfului copacului.

Cu încercări mai multe, problema se poate rezolva şi cu o oglindă, deplasîndu-se pe teren pînă cînd prindem în oglinda aşezată jos imaginea vîrfului copacului.

Este bine ca pionierii să cunoască şi acest procedeu, pe care-l pot folosi în excursii.

5. **Măsurarea înălţimii unui deal cu mira şi planşeta.** Pînă acum am dat exemple de măsurare a înălţimii diferitelor obiecte a căror bază era accesibilă. Baza înălţimii unui deal, de pildă, nu este însă accesibilă. De aceea, folosim alte procedee.

Folosind planşeta pe care am descris-o la început (deşi nu este atît de perfectă) şi mira, putem face măsurători destul de precise.

Mira este făcută dintr-o scîndură lungă de 3 m, cu gradaţii vizibile de la distanţă. Se vopseşte cu fond alb, iar gradaţiile se fac cu roşu. Într-o margine se atîrnă de un cîrlig fixat la capătul de sus, un fir cu plumb. Pentru ca mira să poată fi mînuită de copii, este bine să se construiască dintr-un material uşor. Ea poate avea următoarele dimensiuni: lungimea — 3 m, lăţimea — 10 cm, grosimea — 3 cm. Mira nu se foloseşte decît la probleme de nivelment. Elevii trebuie deprinşi cu rezolvarea problemelor de nivelment, deoarece în clasele superioare, cînd se studiază ridicarea planului unui teren, trebuie să înregistreze pe plan şi detalii de nivelment. La lucrările cu mira, trebuie să colaborăm mai activ cu profesorul de geografie. Acesta îi va familiariza pe elevi cu semnele topografice pentru acoperirile de pe teren şi îi va învăţa cum să reprezinte detaliile de nivelment. Elevii trebuie să ştie ce este o curbă de nivel şi o cotă. Aceste noţiuni se înţeleg uşor după ce s-a măsurat înălţimea unei pante. Pentru aceasta se procedează astfel:

trebuie să măsurăm panta *AB*. Aşezăm planşeta în deal şi dăm orizontalitatea. Un elev ia linia de ochire, iar altul se deplasează cu mira, oprindu-se la indicaţia celui ce ocheşte. Din diferenţa de nivel se scade înălţimea planşetei. Dacă diferenţa de nivel dintre punctele *AB* este mai mare, sau diferenţa este prea mare şi nu se pot vedea gradaţiile

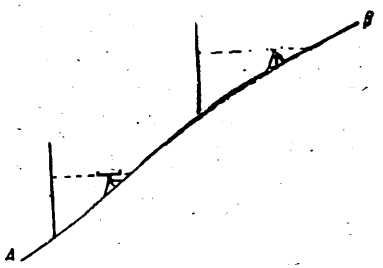


Fig. 16

de pe miră, se iau puncte intermediare, mutîndu-se succesiv planşeta în locul mirei. Trebuie să avem grijă să notăm exact locul unde a fost mira.

Noţiunea de curbă de nivel se poate da în clasa a VII-a prin următorul exemplu sugestiv: se face un mamelon de ceară, care se înconjoară cu cercuri de sîrmă. Apoi se topeşte ceara, fără a se mişca în timpul topirii. Cercurile de sîrmă se aşază în acelaşi plan sub formă de cercuri concentrice. Astfel elevii pricep că o curbă de nivel este linia care uneşte punctele de aceeaşi altitudine şi că detaliile de nivelment sînt reprezentate pe hartă prin curbe conţinute în acelaşi plan, dar care reprezintă înălţimi diferite. Punctele cele mai apropiate de cotă reprezintă punctele cele mai înalte ale terenului.

La această lucrare, contribuţia profesorului de geografie trebuie să fie mai mare decît a profesorului de matematică, dar colaborarea dă rezultate mai bune.

6. **Măsurarea distanţelor cu aparate improvizate.** Formarea deprinderii de a aprecia distanţele începe din clasa a V-a şi se continuă şi în celelalte clase. Elevii trebuie să ştie însă că există aparate precise de măsurare a distanţelor fără a parcurge aceste distanţe. Desigur că şcoala nu poate avea un telemetru, dar se pot improviza aparate simple, cu ajutorul cărora putem măsura distanţe mici, cu o aproximaţie destul de redusă. Cel mai simplu procedeu este măsurarea cu ajutorul unei rigle gradate sau cu un chibrit gradat în mm. Cu rigla sau chibritul putem măsura distanţa pînă la diferite obiecte a căror înălţime este cunoscută, cum ar fi înălţimea unui om care este considerată în medie de 1,7 m, înălţimea unui călăreţ care este în medie de 2,2 m, înălţimea unui stîlp de telegraf — 8 m — înălţimea unei case cu trei etaje — 15—16 m. (Se pot lua şi alte exemple.)

Să măsurăm cu ajutorul riglei sau chibritului gradat distanţa pînă la un stîlp îndepărtat (fig. 17). Întindem mîna şi vizăm prin capătul chibritului la vîrful stîlpului de telegraf. Apoi mişcăm cu degetul în jos, vizăm la baza stîlpului şi citim numărul de mm care acoperă înălţimea stîlpului. Este bine ca atunci cînd se vizează, mîna să fie sprijinită.

Din aceste vizări rezultă următoarea construcţie geometrică:

$\overline{AB}$ = stîlpul de telegraf,

$\overline{DC}$ = distanţa de la ochi pînă la stîlp,

$\overline{CG}$ = distanţa de la ochi pînă la chibrit,

$\overline{EF}$ = partea de chibrit sub care vedem stîlpul de telegraf.

Din triunghiurile asemenea formate putem face următoarea proporție:

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{GC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}}$$

Este bine ca elevii să țină minte următoarea formulă:

$$\frac{\text{Distanța de la ochi pînă la stîlp}}{\text{Distanța de la ochi pînă la chibrit}} = \frac{\text{înălțimea stîlpului}}{\text{numărul de milimetri luat pe chibrit}}$$

Să luăm un exemplu numeric:

Înălțimea stîlpului standard = 8 m.

Distanța de la ochi pînă la chibrit = 60 cm.

Numărul de mm luat pe chibrit = 5 mm.

Lucrăm cu milimetri

$$\frac{x}{600} = \frac{8000}{5}; \; x = \frac{600 \cdot 8000}{5} =$$

$$= 960\,000 \text{ mm} = 960 \text{ m}.$$

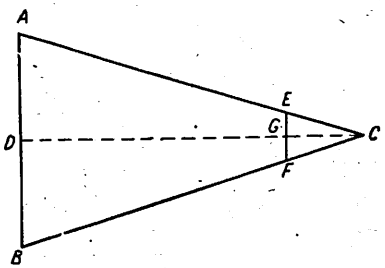


Fig. 17

Ținînd seama că numărul de milimetri de pe chibrit sau de pe rigla gradată este același pentru distanțe egale de la stîlp, se poate construi un dispozitiv pentru măsurarea distanțelor care va fi folosit de elevi în excursii și jocuri (fig. 18). Construcția lui nu este prea grea.

Telemetrul improvizat de noi este format dintr-o riglă în formă de T, care alunecă între două glisiere. Poate avea următoarele dimensiuni: lungimea glisierelor cu tot cu rigla în formă de T — 20 cm, lățimea — 1 cm. Teul va fi colorat, altfel decît glisierele. Pe glisiere se desenează o scală, iar pe teu niște indicatoare. Cînd rigla în formă de T este trasă afară, între capetele glisierelor și traversa teului se formează un interval. Acest interval se mărește sau se micșorează pînă cînd, prin vizare, se cuprinde obiectul. Atunci indicatorul se oprește în dreptul unei gradații de pe scală, care ne indică distanța.

Telemetrul improvizat se gradează măsurîndu-se distanța pînă la obiecte. Pe glisiere se pot desena patru scale pentru obiecte tipice, după care se pot determina distanțele: om (înălțimea medie 1,70 m), stîlp de telegraf (8 m), călăreț (2,2 m), casă cu trei etaje (15—16 m). Se pot alege și alte înălțimi-tip (autobus, autocamion etc.) Pentru înălțimea omului și călărețului, gradațiile

pe scală s-au făcut din 10 în 10 m, iar pentru stîlpul de telegraf din 100 în 100 m. Pentru distanţele pînă la 400 m, precizia este destul de mare.

Figura 19 ne arată cum se foloseşte ţelemetrul improvizat.

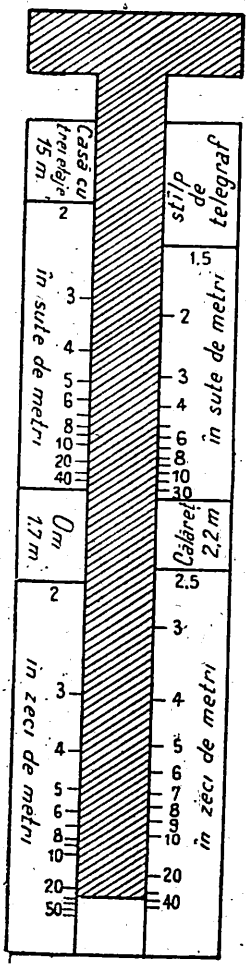


Fig. 18

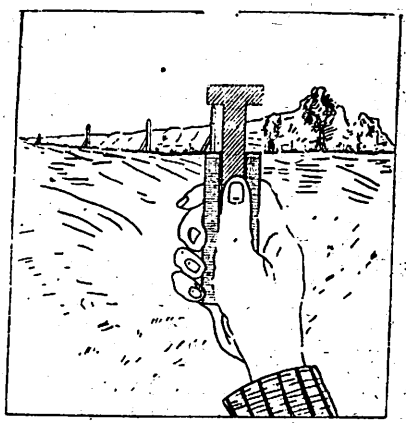


Fig. 19

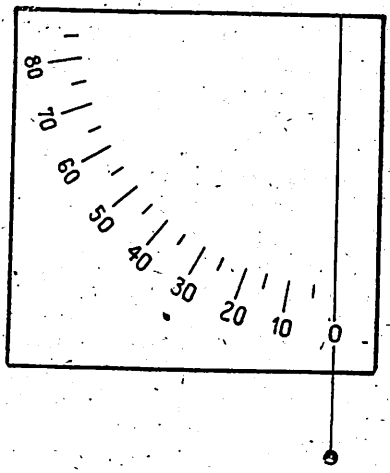


Fig. 20

7. **Măsurarea înălţimilor cu un hipsometru construit de elevi.** Dispozitivul este simplu. În figura alăturată, se vede în mărimea lui reală (fig. 20). Se desenează cu precizie figura pe

un pătrat de hîrtie cu latură de 10 cm, care se lipește pe placaj. Din punctul de întîlnire a liniilor se atîrnă un fir cu plumb.

Așezăm dispozitivul vertical, după indicațiile firului cu plumb. Îl îndreptăm spre obiectul de măsurat după indicația săgeții de pe figură. Privind de-a lungul laturii de sus, vizăm astfel încît vîrful obiectului de măsurat să se găsească pe aceeași linie. (Pentru a lua linia de ochire mai bine, se montează pe muchia de sus a pătratului o cătare și o crestătură.) Firul cu plumb, căutînd să se mențină vertical, se va opri în dreptul unei gradații. După ce am verificat bine linia de ochire, apăsăm pe firul cu plumb, oprindu-i mișcarea, pentru a citi gradația. Fiecare gradație ne arată raportul dintre înălțimea obiectului la care vizăm și distanța de la observator pînă la obiect, deci ne arată a cîta parte din distanța de la obiect pînă la observator reprezintă înălțimea obiectului de măsurat. Măsurăm distanța de la obiect pînă la observator și o înmulțim cu numărul indicat de firul cu plumb. Adăugînd înălțimea pînă la ochiul observatorului, căpătăm înălțimea obiectului. Pentru simplificarea calculului ne apropiem sau ne depărtăm de obiect și vizăm pînă cînd firul cu plumb se oprește la gradația 1. Atunci vîrful obiectului este privit sub un unghi de 45° și distanța de la observator pînă la obiect plus înălțimea observatorului este egală cu înălțimea obiectului.

8. **Măsurarea înclinării unei pante cu ajutorul eclimetrului.** Se desenează figura alăturată pe hîrtie și se lipește pe un pătrat de placaj cu latura de 10 cm. În centrul cercului din care face parte sfertul de cadran gradat se atîrnă un fir cu plumb. Cu acest dispozitiv simplu se poate măsura înclinarea pantei de jos în sus și de sus în jos. Cînd se măsoară înclinarea de la piciorul pantei, se vizează pe direcția muchiei de sus a pătratului dinspre gradația 90°, iar în creasta dealului se înfige un baston egal cu înălțimea observatorului, vizîndu-se astfel pe o linie paralelă cu panta.

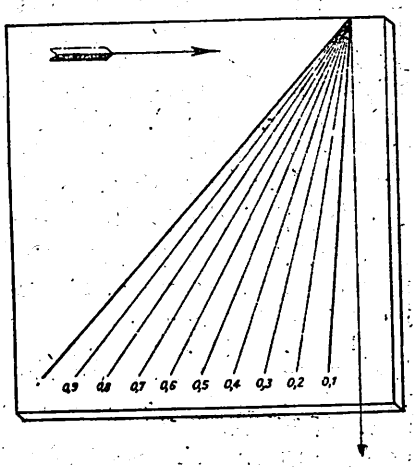


Fig. 21

Cînd se măsoară panta de la creastă spre vale, se înfige un baston la piciorul pantei, dar se vizează din partea unde se găsește centrul cadranului.

Acest aparat simplu poate fi folosit la rezolvarea multor probleme de geometrie (spre exemplu, problema expusă mai sus, în care se cere să se afle înălțimea unui obiect a cărui bază este inaccesibilă). El este însă util și la rezolvarea problemelor de fizică privind aplicațiile practice ale planului înclinat.

Cu ajutorul eclimetrului putem determina ușor înălțimile unor obiecte (copaci, turnuri, clădiri), dacă vizăm la vîrful acestor obiecte sub un unghi de 45°.

PLASAREA LUCRĂRILOR PRACTICE ÎN PLANUL CALENDARISTIC ȘI ÎN PROGRAMA DE ÎNVĂȚĂMÎNT

Deși lucrările expuse mai sus par simple, totuși mulți elevi chiar dintre cei mai buni, le execută greu la început. Din această cauză s-ar părea că lucrările vor răpi din timpul necesar parcurgerii programei. Dacă le formăm însă elevilor deprinderea de muncă disciplinată și dacă plasăm fiecare lucrare în planul calendaristic la locul potrivit, dacă-i ajutăm pe elevi să folosească experiența și deprinderile căpătate de ei în rezolvarea problemelor, ne vom da seama curînd că lucrările practice se pot efectua ușor.

Programa de matematică pentru clasele VI-VII, apărută în anul 1956, prevede că metoda de predare a geometriei în aceste clase trebuie să se sprijine în cea mai mare parte pe intuiție. De aceea nu ne putem mulțumi numai cu întocmirea schemelor pe tablă. Pentru elevi, ale căror reprezentări spațiale sînt sărace și pentru care chiar vocabularul de specialitate este greu de însușit, deoarece mulți termeni nu le indică ceva cunoscut, schemele de pe tablă sînt cu totul insuficiente. Cunoștințele noi se asimilează ușor numai cînd se sprijină pe reprezentări căpătate prin cît mai multe simțuri.

În cele mai multe lecții de matematică se lucrează cu noțiuni abstracte, dar și cele mai abstracte noțiuni pot avea la bază intuiția. Folosind intuiția din plin la fiecare lecție, profesorul va deștepta interesul și atenția elevilor, va dezvolta memoria, judecata și voința lor.

Lucrările practice constituie unul dintre cele mai bune mijloace de realizare a acestor scopuri. Ele nu numai că îi înarmează pe elevi cu deprinderi de muncă practică, dar îi ajută să înțeleagă mai adînc cunoștințele predate, să-și fixeze și să-și consolideze aceste cunoștințe. Totodată, ele îi conving pe elevi asupra utilității cunoștințelor teoretice, stimulîndu-le interesul pentru învățătură.

Cînd am început să organizez asemenea lucrări, le lăsam pentru sfîrșitul anului. Am observat că și alți profesori procedează la fel. În procesul muncii am constatat însă că este mai bine ca lucrările practice să fie efectuate în tot cursul anului, ca o aplicație a cunoștințelor predate sau ca o pregătire pentru însușirea unor cunoștințe noi.

În primii ani de experimentare, le-am făcut în afara orelor de program, făcînd numai cîteva ieșiri de durată mai lungă, sub formă de excursii, cînd elevii cunoșteau procedeul de lucru și erau în stare să lucreze independent pe echipe. În multe cazuri, pentru a nu pierde prea mult timp, i-am obișnuit pe elevi cu mînuirea jaloanelor și instrumentelor în curtea școlii, făcînd construcțiile prevăzute în problemele expuse pe teren restrîns.

Deși programa nu afectează ore speciale pentru lucrări practice în clasa a V-a, acestea trebuie totuși făcute.

Voi arăta cum se pot încadra lucrările descrise în cadrul programei și în planul calendaristic. Le voi lua în ordinea în care au fost prezentate în articolul *Planificarea lucrărilor pentru clasa a V-a.*

Lucrările de jalonare a unei linii drepte, de măsurare a unei distanțe, de etalonare a pasului ca și exercițiile de apreciere a distanțelor se pot efectua în perioada repetării materiei din clasa a IV-a.

La capitolul „Numere întregi", înainte de a se lucra probleme bazate pe cunoștințele de geometrie din clasele I—IV, trebuie să se lărgească conținutul acestor cunoștințe.

O dată cu calcularea ariilor și perimetrelor figurilor simple, trebuie să se construiască aceste figuri pe teren, sau să se aleagă pe teren parcele de formă dreptunghiulară, pătrată, ale căror dimensiuni să fie măsurate de elevi.

Pentru aceasta este necesar să se precizeze noțiunea de unghi și să se construiască unghiuri drepte pe teren cu ajutorul echerului. Se va trece apoi la construirea dreptunghiului și pătratului pe teren. Cu ocazia acestor construcții se vor preciza noțiunile despre unități de măsură. Dacă din cele 41 de ore prevăzute pentru capitolul „Numere întregi" se iau 4 ore pentru lucrări practice, vom avea posibilitatea să facem probleme mai variate și mai interesante pentru elevi. Restul de teme și probleme practice, precum și repetarea lucrărilor făcute la începutul anului, se vor face în trimestrul III, după capitolul „Fracții zecimale". În trimestrul II, cînd timpul nu este favorabil pentru ieșiri pe teren, se vor face lucrări legate de geometria în spațiu.

Planificarea lucrărilor practice pentru clasa a VI-a

Pentru clasa a VI-a, programa prevede 6 ore de aplicații practice pe teren.

Aceste ore trebuie rezervate pentru lunile aprilie și mai, cînd se fac problemele mai complexe. Paralel cu parcurgerea materiei se pot organiza lucrări în curtea școlii sau pe un teren apropiat. Aici se va stărui mai mult asupra mînuirii aparatului de măsurat unghiurile și asupra tehnicii construcțiilor simple. În primul trimestru se vor efectua jalonări de drepte și segmente, se vor construi și se vor măsura unghiuri, se vor construi bisectoare și drepte perpendiculare, folosind echerul, planșeta goniometru și sfoara. De asemenea, se vor construi diferite triunghiuri cu dimensiuni date. În trimestrul II se pot găsi zile cu vreme bună, cînd se vor construi drepte paralele.

În cele mai multe cazuri, pentru a-i deprinde pe elevi cu tehnica de lucru, am oprit la sfîrșitul orelor de clasă cîte o grupă, controlînd felul de a lucra al fiecărui elev în parte. După ce toți elevii și-au însușit tehnica de lucru, se poate lucra cu toată clasa, dîndu-le teme variate, pe echipe.

Multe din problemele expuse în această lucrare au același scop, însă procedeul de rezolvare este diferit. Nu totdeauna le-am putut rezolva pe toate, însă ceea ce n-am putut rezolva în clasa a VI-a, am continuat în clasa a VII-a.

Pentru lucrările mai complicate, de exemplu pentru măsurarea distanței dintre puncte inaccesibile, cînd au fost necesare deplasări mai importante, am folosit 2—3 după amieze, în loc de ședințe ale cercului de matematică, la care am invitat întreaga clasă.

Planificarea lucrărilor practice pentru clasa a VII-a

În clasa a VII-a, lucrările practice pot fi executate parte la începutul anului școlar, parte în lunile aprilie și mai, și aici am folosit cîteva din ședințele cercului de matematică. Noua programă prevede că în clasa a VII-a se vor rezolva probleme practice folosind relațiile metrice în triunghiurile dreptunghice. Pentru a măsura distanța dintre două puncte inaccesibile se pot construi cu jaloane și prin vizări triunghiuri dreptunghice în care o catetă sau ipotenuza se calculează. Folosind planșeta goniome-

tru, care are dispozitiv de măsurare a unghiurilor în plan orizontal și plan vertical, se pot rezolva practic foarte multe probleme de trigonometrie.

Deoarece în clasa a VII-a s-au introdus noțiuni sumare de trigonometrie și cunoștințe privitoare la rezolvarea triunghiurilor dreptunghice, se pot rezolva multe probleme practice de acest fel.

Dau numai un exemplu:

Un teren de formă dreptunghiulară a fost inundat și trebuie să i se măsoare aria (fig. 27). Pentru determinarea ariei nu i s-a putut măsura baza — AB, dar se poate măsura înălțimea $AD = 18$ cm. Cu ajutorul planșetei goniometru s-a măsurat unghiul $CAB = 32° 38'$. Baza AB se poate calcula trigonometric.

LUCRĂRI PRACTICE LA TRIGONOMETRIE

FLORICA RUSU
Şcoala medie nr. 20 mixtă
BUCUREŞTI

În predarea matematicii, pericolul alunecării pe panta desprinderii de realitate e mai de temut decît în predarea oricărui alt obiect de învăţămînt. Atît prin conţinutul ei abstract, cît, mai ales, prin tendinţa unor profesori de a prezenta cunoştinţele în modul cel mai concis, cel mai simbolic şi mai ermetic, matematica este de multe ori dificilă pentru elevi. Apropiind-o de viaţă, de practică, evidenţiindu-i utilitatea, nu numai că îi facem pe elevi s-o înţeleagă şi s-o înveţe mai uşor, dar îi înarmăm, în acelaşi timp, cu cunoştinţe şi deprinderi care le vor fi mai tîrziu de cel mai mare folos în munca lor în producţie.

Desigur că în această privinţă s-au făcut astăzi progrese mari. Revizuindu-şi concepţia asupra ştiinţei şi metodele de predare, mulţi profesori se străduiesc să-şi convingă elevii că matematica nu e un simplu „joc" al minţii, rezervat unui număr de „aleşi", ci un mijloc pe care oamenii îl folosesc de milenii pentru a cunoaşte din ce în ce mai bine realitatea şi astfel, stăpînind-o, să-şi înlesnească cît mai mult condiţiile de viaţă.

Există mai multe căi care pot lega studiul matematicii de viaţă, de activitatea practică. O cale foarte lesnicioasă este aceea a folosirii desenelor, materialelor intuitive, exemplelor concrete, problemelor legate de producţie etc. Toate acestea, deşi valoroase, nu sînt însă suficiente.

Vizitele în producţie nu sînt întotdeauna concludente pentru elevi, deoarece se întîmplă adesea ca în procesul de producţie resortul matematic să depăşească nivelul de cunoştinţe al elevilor. De asemenea, se poate întîmpla să fie nevoie de îndelungate şi complicate explicaţii tehnice pînă să ajungem la sîmburele matematic al procesului de producţie. De asemenea, mi se pare greşit procedeul de a pune pe elevi să facă diferite calcule cu privire la piesele maşinilor, calcule care în adevărata practică nu folo-

sesc la nimic. Cred că pentru apropierea reală a matematicii de producție trebuie să stăruim în special asupra lucrărilor care au în adevăr o valoare practică.

În același timp, nu trebuie să uităm că, dacă trebuie să prezentăm elevilor noștri matematica ca pe o știință care izvorăște din viață și care se aplică în viață, nu sîntem mai puțin datori *să-i învățăm matematică*, adică să le dăm cunoștințe științifice și să-i învățăm să le mînuiască, să le aplice.

Cu grija de a ne plasa pe poziția justă în această problemă, dozînd echilibrat lecțiile teoretice, cele de exerciții pur matematice și cele de aplicații practice, făcute fie în clasă, fie în afară de clasă, este de la sine înțeles că vom obține rezultate din ce în ce mai bune, dînd elevilor noștri posibilitatea să înțeleagă în adîncime adevărurile matematice și deșteptîndu-le în același timp interesul pentru folosirea lor în practică.

Putem realiza o legătură strînsă a matematicii cu realitatea, dacă arătăm elevilor că fiecare cucerire a oamenilor în acest domeniu a apărut ca urmare a necesității de a răspunde la probleme puse de viață și mai ales făcînd cu ei lucrări de aplicare a cunoștințelor teoretice în probleme ale realității.

În cursul anului școlar trecut m-am preocupat în mod deosebit de una dintre aplicațiile practice ale matematicii — și anume de *aplicațiile trigonometriei în măsurătorile pe teren.*

Problema măsurării distanțelor și înălțimilor m-a interesat în special pentru motivul că ea poate fi folosită și la introducerea unor noțiuni noi — și anume la introducerea noțiunii de funcție trigonometrică.

Niciodată nu m-am împăcat cu introducerea acestei noțiuni atît de importante pentru practică, pe calea unui formalism strict matematic (ca aplicație a asemănării triunghiurilor și nimic mai mult). Funcțiile trigonometrice așa cum le-am predat în ultimii ani și tratate ca o simplă aplicație, își pierd relieful și trec aproape nebăgate în seamă, pierzîndu-se între alte aplicații din capitolul asemănării. Am încercat diferite moduri de predare a acestor cunoștințe căutînd să scot în evidență necesitatea de ordin practic datorită căreia ele au fost concepute, importanța lor din acest punct de vedere și, în fond, simplitatea ideii care stă la baza lor. Este aci un bun prilej de a convinge pe elevi că noțiunile matematice noi s-au născut din nevoia de a se rezolva anumite probleme practice și că nici într-un caz ele nu sînt niște născociri arbitrare așa cum le-ar putea considera elevii, dacă le-am prezenta de la început

prin definiția lor pur matematică: „Fie unghiul xOy. Dintr-un punct oarecare al laturii Ox se ridică pe această latură o perpendiculară...“

Am predat ultima oară aceste cunoștințe în felul următor:

Am început prin aplicarea asemănării triunghiurilor dreptunghice în problema măsurării înălțimilor care au baza accesibilă, descriind elevelor scena în care Thales măsoară înălțimea piramidei lui Keops prin metoda umbrelor.

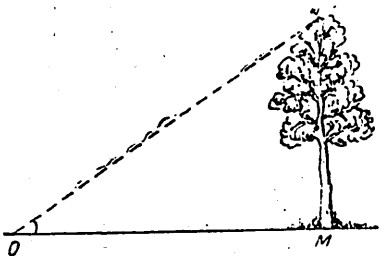


Fig. 1

În a doua oră am reluat aceeași problemă a măsurării înălțimilor, de această dată prin metoda grafică. Astfel, în prima parte a orei le-am explicat elevelor în ce constă această metodă, arătîndu-le că, în esență, ea nu este diferită de metoda umbrelor, cerînd numai introducerea unghiului sub care se vede înălțimea $\overline{MN}$ din punctul O situat în planul orizontal ce trece prin M (fig. 1). Cu această ocazie le-am arătat goniometrul — un instrument simplu de măsurat unghiurile din planul vertical, confecționat de mine dintr-un raportor[1]. Măsurînd apoi distanța $\overline{OM}=d$ și desenînd pe o planșă un triunghi ABC asemenea cu triunghiul OMN, triunghi în care $\overline{AC}=b$ și $\overline{AB}=c$ se pot măsura direct pe figură. Din proporționalitatea laturilor acestor două triunghiuri, am dedus:

$$\overline{MN}=\overline{OM}\cdot\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=-d\cdot\frac{b}{c}$$

În partea a doua a orei am ieșit cu elevele în curtea școlii și am măsurat prin această metodă înălțimea unei ferestre de la etaj[2]. Am verificat apoi rezultatul măsurătorii cu ajutorul unei sfori care la un capăt avea o greutate iar de celălalt era ținută sus de către o elevă.

Scopul acestei măsurători executată pe teren nu a fost în fond acela de a face mai bine înțeleasă metoda grafică, ci — pe de o parte — de a pune pe eleve în mod nemijlocit în fața problemei practice care ne preocupă și, pe de altă parte, de a le face să-și dea seama că mînuirea acestei metode e anevoioasă, cere timp și conduce la rezultate aproximative, din cauză că intervin prea

[1] Voi descrie acest goniometru în paginile următoare.

[2] Voi descrie mai jos și această lucrare executată pe teren, precum și tehnica organizării ei.

multe măsurări directe ($\widehat{MON}$; d; b; c) pe care nu le putem face exact, precum și desene care sînt desigur imperfecte.

În ora a treia, reluînd lucrarea efectuată în ora precedentă și analizînd-o din punctul de vedere exprimat mai sus, am cerut elevilor să-și imagineze cum va proceda cineva care, avînd de măsurat o altă înălțime $M'N'$, reușește s-o vadă dintr-un punct O' tot sub unghiul de 42°, ca și în exemplul precedent (fig. 2).

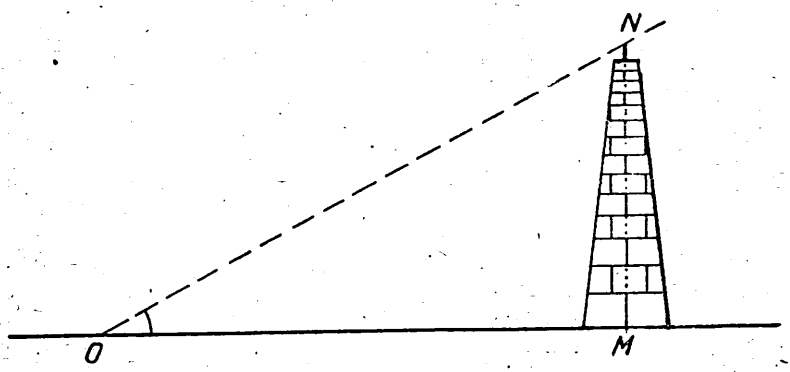


Fig. 2

Ele singure au dedus că, de data aceasta, nu mai este nevoie să desenăm triunghiul AOB, ci vom folosi valoarea raportului $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c}$ care, înmulțit cu distanța $\overline{O'M'}$ ne conduce la aflarea noii înălțimi $M'N'$. Le-am arătat că, în adevăr, așa se procedează și și-au notat pentru diferite unghiuri valoarea rapoartelor $\frac{b}{c}$ corespunzătoare, întocmind niște tabele din care puteau citi de fiecare dată numărul $\frac{b}{c}$ cu care trebuia înmulțită distanța $\overline{OM} = d$, pentru a se afla înălțimea MN, în loc să construiască de fiecare dată un triunghi ABC asemenea cu OMN, să-i măsoare catetele și să calculeze raportul dintre ele. Munca s-a normat astfel mult, iar exactitatea rezultatelor a crescut, găsindu-se mijloace de a se calcula foarte exact aceste rapoarte. Le-am explicat elevelor că raportului $\frac{AC}{AB}$ i s-a dat numele de tangenta unghiului MON. Am enunțat apoi pe scurt probleme menite să introducă pe aceeași cale noțiunile de sinus și cosinus.

De aci nu este de făcut decît un pas pînă la definiţiile funcţiilor trigonometrice exprimate în limbaj strict matematic, definiţii pe care le-am fixat tot în această oră.

Spre sfîrşitul anului şcolar, cînd materia este aproape terminată, lucrările de măsurători pe teren vin în ajutorul elevelor şi ca un mijloc de consolidare a cunoştinţelor teoretice căpătate la curs, şi prin faptul că le conving că studierea teoretică a funcţiilor trigonometrice nu este lipsită de interes practic; ele înţeleg că diferitele proprietăţi ale acestor funcţiuni, legăturile dintre ele ne înarmează cu mijloace de rezolvare a noi şi numeroase probleme legate direct de viaţa practică. Totodată, executînd lucrări practice, elevele dobîndesc numeroase deprinderi de muncă, de mînuire a instrumentelor, de efectuare a calculelor etc. Lucrările de aplicare a trigonometriei pe teren dezvoltă interesul elevelor pentru aprofundarea materiei şi dorinţa lor de a folosi cît mai des cunoştinţele însuşite.

Motivele pentru care lecţiile de aplicare a matematicii pe teren sînt uneori neglijate de profesori, deşi aceştia îşi dau seama de valoarea lor instructivă şi educativă — constau în faptul că astfel de lecţii sînt, în general, deajuns de greu de organizat, trebuie conduse şi mai ales pregătite cu foarte multă atenţie şi grijă. Totuşi, rezultatele pe care le dau sînt atît de importante, încît profesorul este obligat să înlăture greutăţile ce s-ar putea ivi şi să organizeze cît mai multe lecţii practice. Pentru ca ele să-şi ajungă în adevăr scopul, profesorul trebuie să aibă în vedere satisfacerea mai multor cerinţe, dintre care unele deosebite de cerinţele ce stau în faţa unei lecţii obişnuite ţinute în clasă. Astfel, tema pe care vrem s-o executăm trebuie să fie interesantă, convingătoare. Nu putem propune, mai ales în clasele mari, să se efectueze, de exemplu, măsurarea distanţei dintre doi copaci din curtea şcolii, folosind metoda de calcul trigonometric, cînd bunul simţ le conduce pe eleve la măsurarea directă cu pasul sau cu ruleta. Pentru aceste clase trebuie să ne fixăm asupra unor teme mai complicate, ca de exemplu: măsurări de distanţe îndepărtate, înălţimi inaccesibile etc.

Rezultatele măsurătorii pe care o executăm cu elevele trebuie să fie cît mai exacte şi — dacă se poate — verificabile. Cum temele sînt, în general, suficient de grele, nu putem obţine rezultate exacte fără folosirea unor instrumente perfecţionate pentru măsurarea unghiurilor, de aceea trebuie să fim foarte atenţi şi să dăm toate explicaţiile în ceea ce priveşte mînuirea instrumentelor, să le formăm elevelor deprinderea de a le folosi corect.

Fiecare elevă trebuie să ia parte activă la efectuarea măsurătorii. Am realiza mai bine această cerință, dacă am putea lucra într-o oră, nu cu toată clasa, ci numai cu o grupă de eleve, rămînînd ca celelalte să lucreze pe teren în alte ore. Cum însă pe lîngă ora de lucru pe teren, ne mai trebuie o oră de pregătire a acesteia în clasă (rezolvarea teoretică, explicarea construcției și a folosirii instrumentelor etc.) și încă una de analiză a rezultatelor, timpul nu ne permite să ieșim pe teren pentru aceeași lucrare de mai multe ori, de fiecare dată cu altă grupă de eleve. De aceea, trebuie să organizăm astfel munca, încît chiar în cuprinsul unei ore să poată lucra efectiv, pe rînd, toate elevele. Aceasta depinde de priceperea noastră de a împărți sarcinile, de a trezi interesul tuturor elevelor nu numai asupra unor operații izolate, ci asupra întregii lucrări, în ansamblul ei.

În sfîrșit, trebuie să ne preocupăm în mod deosebit de asigurarea disciplinei elevelor în timpul orelor de lucru pe teren, care cere alte procedee decît cele folosite în clasă. Ieșirea elevelor din cadrul lor obișnuit, varietatea impresiilor de care sînt solicitate, precum și posibilitățile sporite pe care le au, din cauza condițiilor deosebite, de a se sustrage de la lucru, pot amenința ca lecția practică să se transforme într-un fel de plimbare în colectiv. De aceea profesorul trebuie să fie foarte atent și să știe că disciplina poate fi asigurată în primul rînd de caracterul interesant al muncii și de buna organizare a acesteia. Succesul lecțiilor practice depinde și de pregătirea din timp a instrumentelor, de buna informație a profesorului însuși asupra problemelor pe care le va rezolva cu elevii. Toate acestea stau în puterile noastre, ale profesorilor, depind în primul rînd de noi. De aceea astăzi, cînd problema politehnizării învățămîntului este atît de actuală, să nu pierdem unul dintre cele mai potrivite mijloace prin care putem contribui la această interesantă acțiune de înnoire a învățămîntului și să ne pregătim cît mai conștiincios nu numai pentru lecțiile teoretice, ci și pentru munca practică.

Există numeroase teme pentru lecțiile practice. Astfel se pot face măsurări de distanțe, de înălțimi, ridicări topografice sau probleme de nivelment ca aplicație la materia predată în clasele VIII, IX și X. În alegerea temei trebuie să ținem seama de cel mai potrivit loc din apropierea școlii, unde putem ieși cu elevii, evitînd astfel pierderea timpului care este destul de scurt, dacă socotim că în 50 de minute trebuie să ne deplasăm pînă la locul ales, să facem măsurătorile necesare și să ne întoarcem la timp la școală.

Voi expune aci temele pe care le-am efectuat anul trecut cu elevele claselor în care am predat. Totodată, voi arăta felul cum m-am pregătit pentru fiecare dintre aceste teme, cum am organizat clasa în vederea executării lucrării propuse, cum a decurs aceasta, care au fost rezultatele şi ce propuneri pot face pentru viitor.

Cum m-am pregătit pentru lucrările practice

Primele lecţii de măsurători pe teren le-am efectuat în primăvara trecută. O anumită neîndemînare şi mai ales lipsa mea de experienţă în ceea ce priveşte lucrările practice m-au determinat să mă limitez, pentru început, numai la cîteva teme. În alegerea lor m-am călăuzit de următoarele:

1. Lucrînd cu clasele a IX-a şi a X-a, am ales teme destul de grele, care să intereseze pe elevele mari şi să le convingă de utilitatea practică a cunoştinţelor de matematică.

2. Cercetînd împrejurimile şcolii, am fost nevoită să aleg acele lucrări care se puteau face în apropiere, evitînd deplasări prea mari, deci pierdere de timp.

3. Am avut grijă ca temele să fie în strînsă legătură cu materia predată la curs şi să execut aplicaţiile prevăzute de programă, pentru ca astfel să evit supraîncărcarea elevelor cu probleme noi şi, în acelaşi timp, să le ajut în consolidarea cunoştinţelor deja însuşite.

Am ales, astfel, următoarele lucrări:

La clasa a IX-a: *Măsurarea unei înălţimi cu bază accesibilă. Măsurarea unei înălţimi cu bază inaccesibilă* şi anume:

Măsurarea înălţimii unei ferestre a clasei (la etajul II)[1]. Măsurarea înălţimii furnalului fabricii de conserve „Grivița“ vizibil din curtea şcolii, dar la baza căruia nu se putea ajunge.

Aceste lucrări au fost efectuate pe baza relaţiilor trigonometrice în triunghiul dreptunghic.

La clasa a X-a: *Măsurarea unei distanţe dintre două puncte inaccesibile*, adică: Măsurarea distanţei dintre furnalul uzinei „Timpuri Noi“ şi turla unei biserici (circa 400 m). Atît furnalul cît şi turla sînt vizibile de pe dealul Cocioc din imediata apropiere a şcolii.

Aceste teme se încadrează în programa şcolară la sfîrşitul lecţiilor teoretice de trigonometrie, ca nişte aplicaţii practice

[1] Această măsurătoare fusese executată în anul precedent cu elevele clasei a VIII-a, cu scopul introducerii funcţiilor trigonometrice.

ale rezolvării triunghiurilor. Ele au fost planificate în ultimele lecţii din luna mai.

După ce am stabilit terenul, felul lucrării şi modul de a o executa, am început să caut materialul necesar.

Ce material am folosit

Pentru executarea lucrărilor asupra căror m-am fixat, am avut nevoie de materialul necesar măsurării unei lungimi pe pămînt *(baza)* şi de instrumente de măsurat unghiurile în plan vertical şi orizontal.

Prin bunăvoinţa părintelui unei eleve, ca şi prin sprijinul oferit de colegi, mi-am procurat un număr suficient de jaloane, ţăruşi, o miră şi două rulete de măsurat lungimi. De altfel, acest material este uşor de confecţionat şi se poate improviza chiar de către elevi, astfel ca el să rămînă în inventarul şcolii.

Ceea ce însă mi-a dat mai mult de lucru a fost procurarea instrumentelor de măsurat unghiuri.

Am construit singură două goniometre rudimentare. De asemenea, pentru măsurarea unghiurilor cu laturile în plan orizontal am luat o planşetă de desen, pe care am lipit un cerc tăiat din hîrtie groasă. Am divizat acest cerc numai din 3 în 3 grade. În centrul cercului am fixat o alidadă mobilă, ascuţită la capătul care descrie cercul (fig. 3).

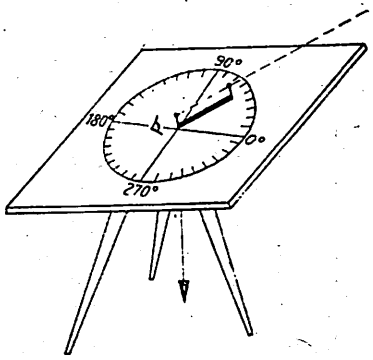


Fig. 3

Pe alidadă, în centrul cercului şi în vîrful ei, am înfipt perpendicular pe planul cercului cîte un ac cu gămălie. Planşa am aşezat-o pe un trepied de la un aparat de fotografiat. Am verificat orizontalitatea cu o nivelă cu apă, pe două direcţii perpendiculare. (Se înţelege că acest lucru l-am făcut de fiecare dată cînd procedam la o măsurare.) Direcţia unei laturi a unghiului de măsurat se vizează, căutînd să se vadă pe aceeaşi dreaptă gămălia acului din centru, din capătul mobil al alidadei şi obiectul vizat. Unghiul măsurat se află făcîndu-se diferenţa unghiurilor citite pe fiecare direcţie, menţinînd instru-

mentul în aceeaşi poziţie atît timp cît se vizează şi se citesc unghiurile fiecărei direcţii. Astfel

$$\sphericalangle AOB = \beta_0 - \alpha_0 \text{ (fig. 4)}$$

Pentru măsurarea unghiurilor verticale am adaptat un raportor şcolar mare în felul următor: În centrul raportorului am prins un fir cu plumb, iar pe linia de siguranţă a raportorului am bătut 2 cuie, pentru vizare (fig. 5).

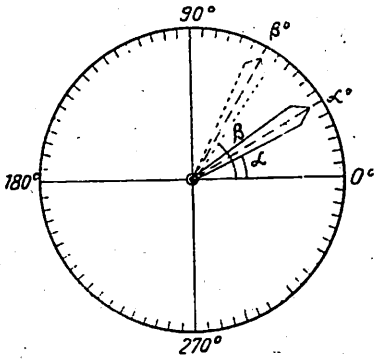


Fig. 4

Cu aceste instrumente rudimentare am încercat să măsor pe teren elementele necesare executării temelor. Aceste încercări, pe care le-am făcut singură sau cu ajutorul unor colegi, m-au condus la rezultate nu destul de bune pentru a le putea folosi la lucrările planificate. Astfel, la lucrarea pentru clasa a X-a, în care voiam să măsor distanţa dintre două puncte inaccesibile, distanţă situată faţă de observator la o depărtare destul de mare, o eroare de 1° în măsurarea unui unghi mă putea duce la o eroare de 18—20 m în aprecierea distanţei. În faţa acestei situaţii, am fost nevoită să procur instrumente de precizie pentru măsurarea unghiurilor. Prin intervenţia făcută de şcoală la Institutul de studii şi prospecţiuni, am obţinut un teodolit de precizie. Totodată, institutul a trimis la şcoală un inginer topograf pentru a ne instrui în folosirea acestui instrument.

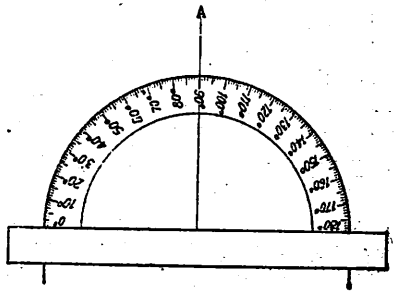


Fig. 5

Deoarece însă teodolitul de precizie nu poate fi mînuit decît de specialişti, n-am vrut să părăsesc nici ideia de la început — de a măsura cu instrumente confecţionate de noi, astfel că m-am hotărît să fac aceeaşi încercare şi cu teodolitul şi cu goniometrele improvizate. În acest mod un număr mai mare de eleve au fost ocupate în timpul lecţiei, şi din compararea rezultatelor obţinute — lucrînd în două moduri — s-a putut pune în evidenţă necesitatea folosirii instrumentelor de precizie.

Cum am organizat clasa

Din timp, anunţînd elevelor data cînd vom face lecţiile de măsurători pe teren, am organizat astfel clasa:

a) Am împărţit-o în 4 echipe (cîte 8—9 eleve în fiecare echipă).

b) Fiecare echipă era condusă de către o şefă şi o ajutoare, alese dintre cele mai bune eleve. Şefa împreună cu ajutoarea au condus lucrările şi au răspuns de disciplina echipei.

c) Fiecare membră a echipei avea o atribuţie precisă în lucrarea ce trebuia executată. Astfel, şefa stătea la aparatul de măsurat unghiuri şi conducea jalonarea bazei. Ajutoarea supraveghea măsurarea bazei cu lanţul. O elevă nota datele culese pe planşa lucrării, pe care o desenase din timp. O elevă citea unghiurile la goniometru, după ce l-a pus în staţie. Altă elevă răspundea de materialul folosit, pe care trebuia să-l predea în întregime şi în bună stare la sfîrşitul orei. Celelalte eleve ţineau jaloanele şi ajutau la întinderea lanţului.

Aceste atribuţiuni au fost fixate pentru fiecare grupă de către şefă, care şi-a organizat singură echipa după indicaţiile de mai sus.

d) Şefele de echipă şi ajutoarele lor au fost instruite de mine într-o oră, în afara programului şcolar, asupra felului cum trebuiau executate cele două operaţiuni de bază în măsurătorile pe teren 1) jalonarea şi măsurarea bazei şi 2) măsurarea unghiurilor (la clasa a IX-a numai unghiuri în plan vertical, iar la clasa a X-a unghiuri în plan orizontal).

Pentru a evita dezordinea şi pierderea de timp, am insistat să se respecte anumite reguli atunci cînd se efectuează jalonarea şi întinderea lanţului.

Astfel, şefa s-a aşezat la capătul bazei, unde stătea goniometrul. În timp ce eleva care avea această atribuţie se ocupa cu aşezarea lui în stare de funcţionare, şefa privea spre celălalt capăt al bazei, unde o a treia elevă fixa un jalon. În acelaşi timp, mai aproape de acest capăt al bazei, se aşeza o altă elevă, ţinînd un jalon în mîna dreaptă. Ea stătea cu faţa spre şefă şi executa comenzile acesteia. Dacă şefa ridica mîna stîngă, eleva care ţinea jalonul ştia că trebuie să mute jalonul în acea parte, mai mult sau mai puţin, după cum şefa ridicase mîna mai mult sau mai puţin. Cînd şefa vedea jalonul extremităţii şi cel mijlociu coincizînd, făcea semn elevei să-l înfigă în pămînt. Apoi intervenea o a treia elevă între cea de a doua şi şefă şi operaţia se repeta la fel. Cînd dreapta era jalonată, ajutoarea începea

întinderea lanțului care, în timpul jalonării drepte, fusese fixat cu unul din capete de un țăruș bătut la extremitatea opusă aceleia unde stătea șefa. Ajutoarea anunța lungimea bazei elevei care nota rezultatele și care stătea în preajma șefei.

Numai după ce se termina măsurarea bazei se începea măsurarea unghiurilor.

e) În timpul liber, fiecare șefă și ajutoare explicau celorlalte eleve din echipă cum trebuie să lucreze, făcînd exerciții în curtea școlii cu tot materialul, în afară de teodolit.

În planificarea temelor, am rezervat fiecăreia, atît la clasa a IX-a cît și la clasa a X-a cîte trei ore, distribuite astfel:

Lecția 1 (În clasă): *Rezolvarea temelor propuse:*

a) Intuirea problemei pe planșă.

b) Descrierea instrumentelor necesare executării ei pe teren.

c) Rezolvarea matematică a temei.

Lecția a 2-a (Pe teren): *Culegerea datelor.* Concomitent lucrează echipe cu instrumentele simple și cu teodolitul. Elevele au de lucrat acasă ca temă problema propusă, folosind datele culese pe teren.

Lecția a 3-a (În clasă): *Controlul temei, analiza lucrării și discuția erorilor.*

Cum au decurs lecțiile practice

Clasa a IX-a

Lecția 1 (În clasă): *Rezolvarea temelor propuse. a)* Pentru această lecție am adus în clasă, pe lîngă materialul pe care urma să-l folosim pe teren (jaloane, țăruși, lanț și goniometrele de măsurat unghiuri verticale) și două planșete, pe care am fixat desenele problemelor.

b) Am enunțat pe rînd cele două probleme:

I. *„Să se afle înălțimea unui perete vertical la baza căruia se poate ajunge".*

Cum măsurarea se efectuează în plan vertical, am făcut desenul pe tablă și o elevă a găsit soluția, cuprinzînd această înălțime într-un triunghi dreptunghic cu două elemente măsurabile:

$$\overline{AB} = d,\ \widehat{BAD} = \alpha,\ \overline{BC} = x$$

Aplicînd relația catetei am găsit înălțimea căutată x

$$x = d \operatorname{tg} \alpha$$

II. *„Să se afle înălțimea unui furnal la baza căruia nu se poate ajunge“.*

Se cuprinde înălțimea furnalului în două triunghiuri dreptunghice A_1BC și A_2BC, având următoarele elemente măsurabile:

$$\widehat{BA_1C} = \alpha_1;\ \overline{A_1A_2} = d = \overline{BA_2} - \overline{BA_1}$$

$$\widehat{BA_2C} = \alpha_2$$

deci:

$$\overline{BA_1} = x\operatorname{cotg}\alpha_1;\ \overline{BA_2} = x\operatorname{cotg}\alpha_2$$

adică:

$$d = x\operatorname{cotg}\alpha_2 - x\operatorname{cotg}\alpha_1$$

$$d = x(\operatorname{cotg}\alpha_2 - \operatorname{cotg}\alpha_1)$$

$$x = \frac{d}{\operatorname{cotg}\alpha_2 - \operatorname{cotg}\alpha_1} = \frac{d}{\dfrac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2}} = \frac{d\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

c) Analizînd elementele care intră în formulele găsite, am dedus că, pe teren, avem nevoie de măsurarea lungimilor și a unghiurilor în plan vertical.

Le-am arătat elevilor instrumentele cu care se fac astfel de măsurători, am descris principiul după care e construit teodolitul și le-am explicat modul cum trebuie folosit, făcînd în clasă chiar un exercițiu aproximativ de jalonare și măsurare a unei drepte. Fiecare elevă a examinat teodolitul și goniometrul improvizat din raportor.

d) Am anunțat apoi că în lecția următoare de trigonometrie vom ieși în curtea școlii pentru a rezolva pe teren cele două probleme și anume: vom măsura *înălțimea unei ferestre a clasei*, indicînd această fereastră și *înălțimea furnalului fabricii de conserve „Griviță“*, furnal care se vede din curtea școlii, dar la baza căruia nu putem ajunge din cauza zidului ce separă curtea școlii de curtea fabricii. Totodată, am mai dat cîteva instrucțiuni de ordin organizatoric. Astfel am împărțit clasa pe echipe, așa cum am arătat mai sus, atribuind fiecărei echipe lucrarea pe care o va avea de executat:

Echipa I — măsurarea înălțimii ferestrei folosind raportorul
Echipa II — măsurarea înălțimii ferestrei folosind teodolitul
Echipa III — măsurarea înălțimii furnalului folosind raportorul
Echipa IV — măsurarea înălțimii furnalului folosind teodolitul.

În aceeași zi, după terminarea orelor de curs, am reținut șefele de echipă și ajutoarele lor, în vederea instruirii lor asupra operațiilor de bază: jalonarea și măsurarea dreptei și măsurarea unghiurilor. Am făcut cu ele exerciții chiar pe locul unde urma să executăm lucrările rămînînd ca aceste eleve să-și instruiască echipele.

Lecția a 2-a (pe teren): *Culegerea datelor*. Am ieșit cu elevele în curtea școlii și, în timp ce echipele III și IV căutau o bază pentru măsurarea înălțimii furnalului și începeau jalonarea ei, elevele din echipele I și II executau măsurătorile pentru aflarea înălțimii ferestrei. A lucrat întîi echipa I (cu raportorul), în timp ce echipa a II-a așeza teodolitul în stare de funcționare.

La această lucrare, elevele au fost puse în fața cîtorva probleme practice, neprevăzute și care trebuiau soluționate pe loc. Astfel baza de pe sol trebuia astfel aleasă, încît o extremitate a ei să fie în piciorul verticalei care trece prin punctul C al ferestrei, punct fixat pentru a fi vizat cu goniometrul. Unde este acest picior? O elevă a dat ideia de a arunca pe fereastră, chiar prin punctul C, o sfoară cu o greutate la capăt și acolo unde va cădea ea pe sol va fi o extremitate a bazei de pe sol. S-a constatat, însă, că nu era nevoie de aceasta, deoarece piciorul perpendicularei se obținea vizînd în planul vertical.

Jalonîndu-se apoi baza aleasă, s-a observat că înălțimea trepiedului pe care era așezat goniometrul (sau teodolitul) e mai mare cu 0,85 m decît înălțimea de la sol a punctului în care planul orizontal ce trece prin A întîlnește verticala BC, ceea ce înseamnă că baza $B_1 A_1$ jalonată și măsurată nu e orizontală, deci nu e perpendiculară pe firul cu plumb CB_1 (fig. 6). Pămîntul e mai lăsat la extremitatea A_1 a bazei. Acest lucru a fost observat chiar în timpul lucrării și elevele și-au dat seama că nu pot continua lucrarea așa cum se hotărîse în clasă, fiindcă ele nu măsuraseră pe sol cateta AB a triunghiului ABC, ci ceva mai mult, din cauza neorizontalității terenului. Acest fapt, neprevăzut, atunci cînd s-a rezolvat problema teoretic, s-a ivit atunci cînd elevele au dat piept chiar cu realitatea. Ce trebuia făcut? Imediat, eleva care avea desenul lucrării, executat după

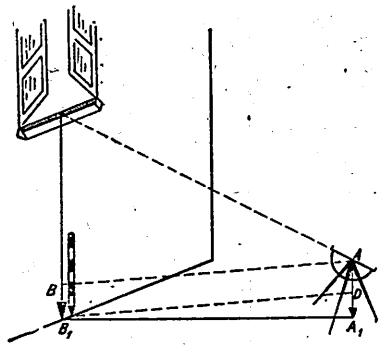


Fig. 6

indicațiile din prima lecție, cînd s-a rezolvat pe tablă această problemă, a corectat desenul. Întreaga echipă, cercetînd desenul în noua lui formă, a fost pusă în situația de-a căuta pe loc soluționarea acestui inconvenient. Șefa echipei a dat soluția: măsurăm pe A_1B_1, adică baza jalonată și calculăm din triunghiul dreptunghic B_1DA_1 cateta DB_1, fiindcă cealaltă catetă, DA_1, o putem cunoaște: este diferența dintre înălțimea trepiedului și a lungimii AB_1, măsurabilă pe jalon.

Am descris amănunțit acest moment al lecției, fiind cu totul neprevăzut și mai ales fiindcă el a întărit mai mult convingerea elevelor asupra complexității realității față de schematismul matematicii. Desigur că dacă un „specialist" în topografie ar citi aceste rînduri, ar considera drept puerile problemele care pe noi ne-au pus în încurcătură. Ar critica, poate, pe profesorul care n-a inițiat pe eleve în astfel de probleme, folosind cele mai moderne metode, sau ar considera de-a dreptul fără rost aceste lucrări care în realitate nu se fac în practică. Din punctul nostru de vedere, însă, această lucrare este valoroasă, căci nu urmărim să-i facem pe elevi niște adevărați topometri, ci să le dăm noțiuni științifice legate de practică, să-i convingem de utilitatea chestiunilor teoretice în problema practicii.

Aceeași temă, folosind aceeași bază, a fost lucrată măsurînd unghiul cu teodolitul. Echipele I și II, avînd toate datele măsurate și curioase să verifice dacă rezultatele pe care le calculau sînt exacte (avînd mijlocul de control, fiindcă sfoara aruncată pe fereastră a fost măsurată), au trecut în clasă, unde pînă la sfîrșitul orei au terminat calculele, obținînd pentru înălțimea ferestrei un număr destul de apropiat, mai ales cele care au lucrat cu teodolitul.

Datele necesare celeilalte teme au fost măsurate de celelalte echipe. Fiind vorba aci de măsurarea a două unghiuri, lucrările au durat mai mult, mai ales că fiecare unghi a fost măsurat și cu teodolitul și cu goniometrul improvizat. Totuși, la sfîrșitul orei toate elevele erau în clasă. Fiecare dintre ele a primit ca temă pentru acasă efectuarea calculelor lucrării echipei din care au făcut parte.

Din punct de vedere al disciplinei, lecția n-a avut de suferit. Cu toată stîngăcia noastră, a tuturor, operațiile de jalonare și măsurare a bazei, precum și stabilirea unghiului au decurs destul de repede și de ordonat.

Lecția a 3-a (În clasă): *Controlul calculelor și discuția erorilor*. În prima parte a orei am verificat atît modul cum s-a rezolvat matematic problema, cît și calculele făcute cu datele

culese de pe teren. Cum în general rezultatele au diferit de adevăratele înălțimi, am căutat să ne dăm seama de unde ar putea proveni aceste erori. S-a constatat că unele eleve au uitat să adauge la înălțimea calculată *și înălțimea trepiedului*. Altele, neținînd seama de faptul că baza măsurată nu era orizontală, au obținut rezultate mai puțin exacte. De asemenea, echipele care au lucrat cu teodolitul au ajuns la înălțimi mai apropiate de cele adevărate decît cele care au lucrat cu goniometrul improvizat. Unele eleve, care au avut curiozitatea de a citi singure unghiul sub care se vede înălțimea de măsurat, au găsit pentru acest unghi un număr puțin diferit de cel citit de eleva care avea această sarcină. Lucrînd cu acest unghi, ele au găsit alte valori pentru înălțime. Din discuția acestor erori s-a ajuns la concluzia necesității folosirii instrumentelor de precizie, la care citirea unghiurilor să se facă de mai multe ori, iar media acestor valori să fie folosită în calcule. De asemenea, elevele și-au dat seama că baza trebuie aleasă cu atenție și segmentul vizat ca fiind înălțimea căutată, să fie într-adevăr vertical, ceea ce se obține folosind un instrument de măsurat unghiurile în plan vertical.

Ceea ce însă le-a interesat în mod deosebit pe eleve a fost discuția matematică a variației erorii care se face în citirea unghiului, în funcție de depărtarea observatorului de piciorul înălțimii de măsurat. Astfel, reluînd expresia prin care am calculat înălțimea inaccesibilă x, la baza căreia putem însă ajunge, adică:

$$x = d \operatorname{tg} \alpha \tag{1}$$

cum creșterea funcției „tangentă" nu e mereu aceeași, unghiul crescînd cu pași egali, este de la sine înțeles că erorile pe care le vom face în citirea unghiurilor la goniometru vor avea alte repercusiuni asupra valorii lui x, după cum α e mai mare sau mai mic, adică d, distanța la care se așază observatorul e mai mare sau mai mică. Astfel, presupunînd că la citirea unghiului α am făcut o eroare de 1° în plus, vom obține pentru x o valoare x' care diferă de x prin:

$$(2)\quad e = x' - x = d \operatorname{tg}(\alpha + 1) - d \operatorname{tg} \alpha = d[\operatorname{tg}(\alpha + 1) - \operatorname{tg} \alpha] =$$

$$= d \frac{\sin(\alpha + 1 - \alpha)}{\cos(\alpha + 1) \cos \alpha} = \frac{\sin 1°}{\cos(\alpha + 1) \cos \alpha}$$

Cum din relația (1) avem

$$d = \frac{x}{\operatorname{tg} \alpha}$$

înlocuind în (2) obținem pentru eroare următoarea valoare

$$e = \frac{x}{\operatorname{tg}\alpha} \cdot \frac{\sin 1^\circ}{\cos(\alpha+1)\cos\alpha} = \frac{x}{\sin\alpha} \cdot \frac{\sin 1^\circ}{\cos(\alpha+1)} =$$

$$= \frac{x \sin 1^\circ}{\sin\alpha \cdot \cos(\alpha+1)}$$

Dar cum produsul $\sin\alpha \cdot \cos(\alpha+1)$ este foarte aproape de $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$, înlocuind în expresia erorii avem:

$$e = x \frac{\sin 1^\circ}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha} = x \frac{2 \sin 1^\circ}{\sin 2\alpha}$$

Așadar eroarea va fi cu atît mai mică cu cît $\sin 2\alpha$ va fi mai mare. Cum $\sin 2\alpha$ e maxim cînd $2\alpha = 90^\circ$ sau $\alpha = 45^\circ$, rezultă că poziția observatorului din care erorile de citire a unghiului α au cele mai slabe efecte asupra rezultatului, este aceea în care unghiul sub care se vede înălțimea de măsurat este de 45°. Deci cele mai bune observații se fac, pentru această problemă, atunci cînd ne așezăm la depărtarea d astfel aleasă încît să vedem înălțimea sub un unghi în jurul a 45°.

Clasa a X-a

Lecția 1 (În clasă): *Rezolvarea temelor propuse.* Întocmai ca la clasa a IX-a, această lecție a urmărit un întreit scop. În primul rînd rezolvarea problemei prin stabilirea unei expresii care să calculeze distanța dintre două puncte inaccesibile în general. La această problemă am evitat să fac desenul figurii pe tablă, folosind în locul acestuia o planșă pe care am așezat-o orizontal pe o masă, pentru a ajuta astfel orientarea elevelor cu situația de pe teren, unde măsurătorile în această problemă se fac în plan orizontal. Am insistat apoi asupra înțelegerii depline a soluției problemei și mai ales, asupra fixării triunghiurilor care se folosesc în această soluție care, după cum știm, este destul de laborioasă.

În al doilea rînd, lecția a avut scopul de a familiariza elevele cu instrumentele, de a le face cunoscută construcția acestora, felul cum trebuie mînuite. Am adus în clasă toate instrumentele. Elevele au luat un prim contact cu ele și au înțeles mai bine

construcţia teodolitului avînd alături goniometrul cu cerc orizontal improvizat de mine. În sfîrşit lecţia a avut ca scop organizarea clasei în vederea lucrării pe teren, pe care am anunţat-o pentru următoarea oră de trigonometrie. Am repartizat fiecărei echipe sarcinile sale.

Din cauza dificultăţilor pe care le prezintă această măsurătoare, a trebuit să renunţ la executarea ei pe două baze deosebite, pe una lucrînd echipele I şi II cu teodolitul, iar pe cealaltă echipele III şi IV cu goniometrul, fiecare dintre echipe măsurînd unghiurile de la cîte o extremitate a bazei. Am hotărît ca, pe aceeaşi bază, la un capăt al ei să lucreze, în prima parte a orei, echipele I şi II cu teodolitul, în timp ce la celălalt capăt să lucreze cu goniometrul echipele III şi IV, iar în a doua parte a orei, echipele care lucrează la teodolit să execute cu acelaşi instrument măsurătorile de la celălalt capăt al bazei, iar cele care lucrează la goniometru să se mute în locul primelor.

Ca şi la clasa a IX-a, în aceeaşi zi, după terminarea programului şcolar, am instruit elevele şefe de echipă şi ajutoarele lor în vederea executării operaţiilor de jalonare a bazei şi măsurare a unghiurilor în plan orizontal.

Lecţia a 2-a (Pe teren) : *Culegerea datelor* (fig. 7). Am ieşit cu elevele pe dealul Cocioc, care se află în faţa şcolii şi de pe muchia căruia se deschide o largă perspectivă asupra cartierului Văcăreşti.

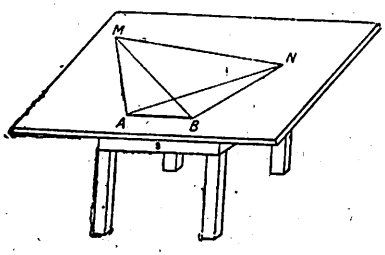


Fig. 7

Cum distanţa pe care voiam s-o măsurăm era de circa 400 m, a trebuit să alegem o bază lungă, ceea ce a necesitat un timp mai îndelungat pentru jalonarea şi măsurarea ei. Totodată trebuia verificată şi orizontalitatea bazei. De asemenea, măsurarea celor 4 unghiuri necesare calculului a făcut ca această lecţie să nu poată capta îndeajuns atenţia tuturor elevelor — şi anume a acelora care nu luau parte la măsurători. Totuşi, disciplina a fost bună. Toate elevele au avut ca temă pentru acasă efectuarea calculului pentru aflarea distanţei.

Lecţia a 3-a (În clasă): *Controlul calculelor şi discuţia erorilor*. Executînd calculele cu datele culese şi cunoscînd acum şi aspectul real al problemei, elevele, chiar cele care mi-au apărut pe teren mai puţin active, au dovedit că lucrarea le-a interesat în mod deosebit. Multe dintre ele au observat anumite simplifi-

cări pe care le-am putut aduce lucrării, dacă de exemplu am fi luat drept extremitate a bazei punctul din care raza vizuală ce ducea la unul dintre puncte ar fi fost perpendiculară pe bază (unul din triunghiuri să fi fost dreptunghic). De asemenea, elevele şi-au dat seama că nu putem ajunge la un rezultat prea bun, deoarece distanţa pe care am măsurat-o era foarte depărtată faţă de baza folosită, astfel încît la o eroare mică de citire a unghiului, eroarea pentru distanţă era foarte mare. Cu toate acestea, am obţinut prin calcul un rezultat satisfăcător, el fiind verificat ca atare prin informaţie directă şi prin consultarea planului oraşului.

Rezultate

În general, lecţiile la clasa a IX-a au fost mai interesante decît cele de la clasa a X-a, aceasta în special din cauza alegerii mai potrivite a temei. În clasa a X-a tema a prezentat dificultăţi mai mari, atît în ceea ce priveşte măsurarea elementelor de pe teren, cît şi în ceea ce priveşte calculul necesar rezolvării.

Majoritatea elevelor au manifestat interes pentru lucrările practice care, scoţîndu-le din atmosfera obişnuită a clasei, le-au dat prilejul de a privi cu alţi ochi peisaje familiare lor. Această schimbare de perspectivă — ca să spun aşa — n-a putut decît să le dezvolte gustul pentru matematică, convingîndu-le de puterea instrumentului matematic în înţelegerea şi stăpînirea realităţii.

Cred că pentru desfăşurarea în mai bune condiţii a lecţiilor de măsurători pe teren în şcoala medie ca şi pentru extinderea lor la cît mai multe clase, e necesar să dispunem de un instrument pentru măsurarea unghiurilor mai potrivit scopului urmărit de noi. Instrumentele improvizate de către noi sînt rudimentare şi conduc la erori de 2° — 3° în citirea unghiurilor, erori care influenţează serios asupra rezultatelor. Pe de altă parte, folosirea instrumentelor de precizie pe care le-am putea eventual împrumuta şi care nu ne pot fi lăsate mult timp la dispoziţie, cere multă dibăcie, care nu se poate căpăta decît după o îndelungată practică. Ne trebuie dar instrumente pe măsura noastră, în special goniometre de tip şcolar, cu care să fie înzestrată, dacă nu fiecare şcoală, cel puţin cîteva pe raion. În ceea ce priveşte restul materialului, el poate fi confecţionat cu mijloacele fiecărei şcoli şi păstrat în inventarul şcolii respective.

ROLUL DESENULUI ÎN PREDAREA GEOMETRIEI

ADOLF LINCKER
Şcoala medie nr. 17 mixtă
BUCUREŞTI

Ramura matematicii care a ajuns la o formă înaintată încă înaintea erei noastre a fost geometria. Aceasta se explică în primul rînd prin faptul că geometria l-a ajutat pe om să rezolve unele din primele probleme dificile ale vieţii — măsurarea distanţelor, determinarea ariilor şi volumelor etc. — În al doilea rînd, trebuie să ţinem seama de faptul că geometria se bazează pe un material intuitiv la îndemîna oricui — desenul, care se poate efectua în orice condiţii şi chiar cu instrumente improvizate.

Şcoala greacă studiind proprietăţile figurilor, dezvoltă mai departe geometria, aducînd-o la forma în care se studiază şi astăzi în şcoală, forma expusă de Euclid în „Elementele" sale.

Se ştie că, în şcoală, problemele de geometrie atrag chiar pe elevii mai slabi, datorită faptului că desenul înlesneşte intuirea figurilor şi corpurilor.

Dacă desenul are un rol important în studiul geometriei cel puţin tot atît de important este şi rolul pe care îl are geometria pentru studiul desenului, îndeosebi al desenului tehnic, care foloseşte figurile geometrice şi proprietăţile lor.

Pe noi ne interesează însă, în ce măsură se realizează această interdependenţă în şcoala de cultură generală şi, în primul rînd, rolul pe care îl are desenul în predarea geometriei.

Primele noţiuni de geometrie pe care le capătă elevii în şcoala de 7 ani urmăresc: înarmarea lor cu deprinderi practice de măsurare a segmentelor şi de determinare a suprafeţelor şi volumelor; înarmarea lor cu cunoştinţe despre proprietăţile figurilor şi corpurilor geometrice şi despre relaţiile dintre diferite elemente ale lor; dezvoltarea imaginaţiei spaţiale şi a gîndirii, prin demonstrarea teoremelor şi rezolvarea problemelor.

În clasele mici, elevii studiază geometria pe baza percepţiei directe — în natură — a distanţei dintre obiecte, a direcţiei în

care se găsesc acestea, a mărimii şi formei corpurilor. Astfel, ei vin în clasele mari cu o mare rezervă de reprezentări spaţiale, ceea ce constituie o premisă favorabilă pentru studierea cu succes a cursului de geometrie.

Predarea intuitivă a geometriei trebuie să fie însoţită de experienţe şi de lucrări practice. Elevii trebuie nu numai să perceapă formele geometrice, ci să creeze, să reproducă formele geometrice studiate, folosind în acest scop diferite mijloace: schiţarea cu ajutorul riglei şi echerului, tăierea şi lipirea diferitelor figuri geometrice, formarea unor figuri geometrice după modele date, obţinerea diferitelor figuri geometrice pe calea îndoirii unor foi de hîrtie etc.

De asemenea, lucrările de geometrie efectuate în clasă trebuie completate cu lucrări practice efectuate pe teren, în special cu lucrări de măsurare, care nu sînt decît aplicarea practică a cunoştinţelor căpătate la lecţii.

Un caz cu totul aparte îl constituie studiul figurilor şi corpurilor geometrice elementare în clasa a V-a, în cadrul cursului de aritmetică. În această clasă nu se studiază în mod sistematic geometria, ci se dau doar unele noţiuni în măsura în care ele apar în probleme. Aceste noţiuni se explică cu ajutorul desenelor. Elevii nu reţin aici decît ceea ce rezultă din desen — forma figurii sau a corpului şi formulele care dau perimetrul, aria sau volumul respectiv.

În clasele următoare cunoştinţele de geometrie se lărgesc şi se adîncesc. Elevii stabilesc diferite proprietăţi, fac raţionamente simple. Dar şi aici rolul desenului este principal. Un desen greşit îi poate duce pe elevi la însuşirea unei noţiuni greşite. Este suficient să amintim dificultatea pe care o întîmpină un elev cînd i se cere să ducă înălţimea într-un triunghi obtuzunghi, sau dreptunghi, dacă el şi-a fixat noţiunea de înălţime numai cu ajutorul triunghiului ascuţitunghi.

Am constatat că la clasele mici se lămureşte mult mai bine noţiunea de arie, dacă se împart suprafeţele în pătrăţelele care constituie unitatea. Această subliniere a unităţii de măsură am păstrat-o chiar şi cînd am demonstrat echivalenţa unor figuri geometrice.

De exemplu, cînd am stabilit formula ariei paralelogramului am procedat astfel: Pentru calcularea ariei paralelogramului şi triunghiului m-am bazat pe cunoaşterea dreptunghiului şi a triunghiului dreptunghic, care se obţine prin tăierea unui dreptunghi în lungul diagonalei. Dacă se taie dintr-un dreptunghi un triunghi dreptunghic, o catetă fiind una din laturile drept-

unghiului, şi se mută acest triunghi convenabil, dreptunghiul se transformă într-un paralelogram (fig. 1).

Lipind triunghiul dreptunghic BCE cu cateta BC la lăţimea AD, se obţine paralelogramul $ABEF$ (fig. 2). Elevul se convinge, dacă desenul a fost bine executat, că paralelogramul conţine

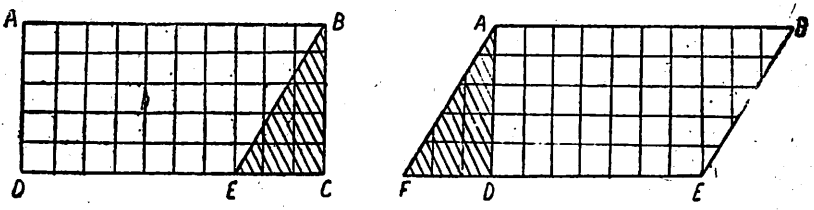


Fig 1

acelaşi număr de pătrăţele, căci pentru un începător o arie nu este altceva decît numărul pătratelor cu latura de 1 cm sau de o unitate oarecare. La fel se poate deduce şi aria unui triunghi oarecare.

În clasa a VII-a raţionamentul are un rol mai important decît desenul. Şi aici elevul se bazează pe desen, dar în demonstraţie ţine seama de proprietăţile date, iar nu de desen. Mai mult chiar, la construcţiile grafice, el face analiza construcţiilor pe baza unei figuri ajutătoare aproximative.

Elevul din clasele mari are formată deprinderea de a rezolva probleme prin raţionament, folosind desenul doar ca un auxiliar.

La studiul geometriei în spaţiu, elevul se serveşte foarte mult de desen, în special în prima parte. Aici sînt necesare desene clare, în culori, cu linii de diferite grosimi, pentru ca elevii să poată vedea corpurile în spaţiu. De asemenea este important ca elevii să capete deprinderea de a vedea diferite secţiuni în corpuri şi de a reduce în plan probleme de geometrie în spaţiu.

* * *

În cele ce urmează voi arăta ceea ce a rezultat din experienţa mea proprie, precum şi ceea ce am aplicat din îndrumările date de „Metodica de predare a matematicii în şcoala medie" de V. M. Bradis.

După cum am arătat mai înainte desenul are un rol important în intuirea unei teoreme sau proprietăţi. Desenul are însă un rol important şi în înţelegerea lor. Astfel la teorema lui Pitagora am dat totdeauna şi interpretarea geometrică. Chiar

deducerea teoremei pe cale geometrică este mult mai simplă. Am predat mai întîi teorema catetei (într-un triunghi dreptunghic):

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BD}$$

teoremă care se enunţă astfel: „O catetă este medie proporţională între ipotenuza întreagă şi proiecţia ei pe ipotenuză.“ Teorema poate fi interpretată geometric astfel:

Pătratul construit pe catetă este echivalent cu dreptunghiul care are ca laturi ipotenuza întreagă şi proiecţia ortogonală a catetei pe ipotenuză.

De aici se trece foarte uşor la demonstrarea prin arii a teoremei lui Pitagora. Interpretarea geometrică ajută la enunţarea corectă a acestei teoreme.

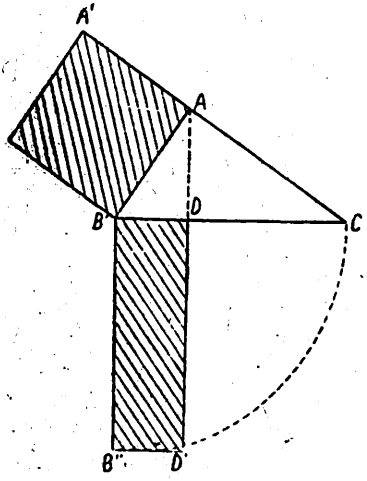


Fig 2

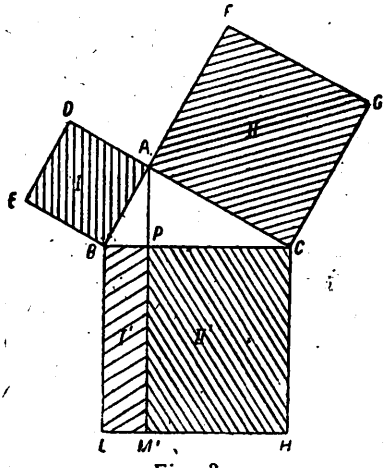


Fig. 3

De multe ori elevii enunţă greşit teorema lui Pitagora: „Pătratul ipotenuzei este egal cu suma catetelor la pătrat.“ Astfel de greşeli se înlătură dacă teorema este demonstrată intuitiv, prin interpretarea geometriei, astfel:

Aria pătratului construit pe ipotenuză este egală cu suma ariilor pătratelor construite pe catetele aceluiaşi triunghi, căci, conform teoremei catetei, pătratul I este echivalent cu dreptunghiul I' şi pătratul II echivalent cu dreptunghiul II'

$$I' + II' = I + II$$

Însuşindu-şi acest mod de demonstrare, avînd mereu în minte imaginea desenului din fig. 3, elevul nu mai greşeşte şi se poate exprima pe scurt: pătratul construit pe ipotenuză este echivalent cu suma pătratelor construite pe catete. În felul acesta elevul nu mai spune niciodată că pătratul ipotenuzei este egal cu suma catetelor la pătrat.

Desigur desenul nu poate fi un mijloc de stabilire a adevărului matematic. Este de la sine înţeles că numai raţionamentul poate confirma sau infirma ceea ce un desen prezintă ca o sugestie. Desenul trebuie considerat numai ca un ajutor, dar ca un ajutor extrem de preţios.

Prin exemplele date mai sus am arătat pe de o parte cum se trece de la concret la definiţia abstractă, iar pe de alta să demonstrez că elevii memorează mai uşor şi mai exact enunţul unei teoreme, dacă acestei teoreme i se dă o interpretare geometrică.

* * *

Trebuie să fim atenţi ca, atunci cînd folosim desenul, elevii să nu fie induşi în eroare de anumite impresii vizuale. Astfel, dacă se consideră un triunghi isoscel avînd baza egală cu înălţimea, elevii afirmă, privind desenul, că înălţimea este mai mare decît baza (fig. 4). De aceea, cînd a intervenit această figură în probleme, am subliniat totdeauna că se dă baza egală cu înălţimea.

Un alt exemplu pe care l-am întîlnit a fost următorul: În paralelogramul $ABCD$ se duce mediatoarea laturii DC, care întîlneşte latura opusă AB în M. Din M se duce MN paralel cu AD. Să se demonstreze că diagonalele DM şi MC sînt egale (fig. 5).

În primul moment elevii au declarat că cele două segmente nu pot fi egale, deoarece din figură au avut impresia că $\overline{MC}$ este mai mare decît $\overline{MD}$.

Din datele problemei au dedus însă că triunghiul DMC este isoscel şi că deci, cele două

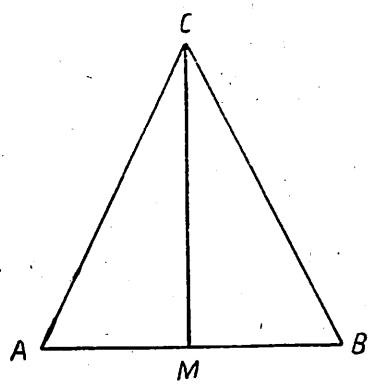


Fig. 4

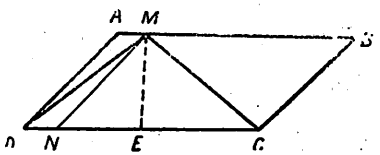


Fig. 5

diagonale sînt egale. Ţinînd seama de aceste observaţii, rezultă că desenul, pentru a putea ajuta un raţionament, trebuie să îndeplinească anumite condiţii.

În primul rînd desenul trebuie să fie clar, astfel încît şi elevii care nu au văzut construcţia lui să-l poată înţelege.

Consider că nu este lipsit de interes să arăt cum deşi un raţionament este bine făcut, dacă desenul este greşit, putem ajunge la greşeli grave.

S-a definit adesea geometria ca fiind „arta de a raţiona pe figuri inexacte". Sofismul pe care îl voi expune mai jos, arată cît de greşită este afirmaţia citată şi dovedesc că o demonstraţie în care deducţiile succesive sînt riguroase, dar care este stabilită utilizînd un desen voluntar fals poate să ducă la o concluzie absurdă.

I. *Orice triunghi este isoscel.* Fie triunghiul ABC (fig. 6), în care să ducem bisectoarea unghiului A şi mediatoarea DO a laturii $\overline{BC}$.

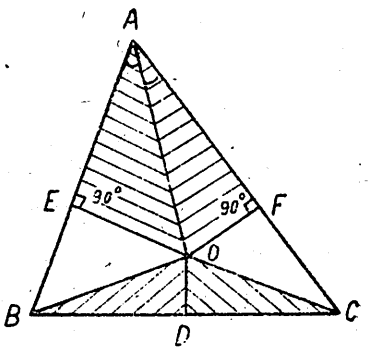


Fig. 6

Dacă bisectoarea şi această mediatoare DO ar fi paralele, bisectoarea s-ar confunda cu înălţimea vîrfului A, triunghiul ABC ar fi isoscel, adică în acest caz teorema este adevărată. Dacă mediatoarea menţionată se întretaie cu bisectoarea unghiului chiar în B — mijlocul lui $\overline{BC}$ — atunci bisectoarea ar fi mediană şi deci şi în acest caz triunghiul ar fi isoscel. Rămîne să considerăm cazul cînd bisectoarea şi perpendiculara se întretaie într-un punct O, diferit de D. Dar punctul O poate fi în interiorul triunghiului sau în exteriorul său. Să presupunem mai întîi că punctul O se găseşte în interiorul triunghiului.

1. Construim perpendicularele din acest punct O pe laturile $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$. Triunghiurile AOE şi AOF sînt egale, pentru că: sînt dreptunghice, au o ipotenuză comună şi cîte un unghi ascuţit egal ($\hat{A}_1 = \hat{A}_2$), prin urmare (1) $\overline{AM} = \overline{AF}$.

Triunghiurile ODB şi ODC sînt de asemenea egale, pentru că: sînt dreptunghice, au cateta $\overline{OD}$ comună şi $\overline{BD} = \overline{DC}$ prin construcţie.

Triunghiurile dreptunghice OBE și OCF sînt și ele egale, ca avînd catetele egale și ipotenuzele egale. Rezultă că (2) $\overline{BE} = \overline{CF}$. Adunînd membru cu membru egalitățile (1) și (2), se găsește că $\overline{AE} + \overline{BE} = \overline{AF} + \overline{CF}$, sau $\overline{AB} = \overline{AC}$, adică triunghiul ABC este isoscel.

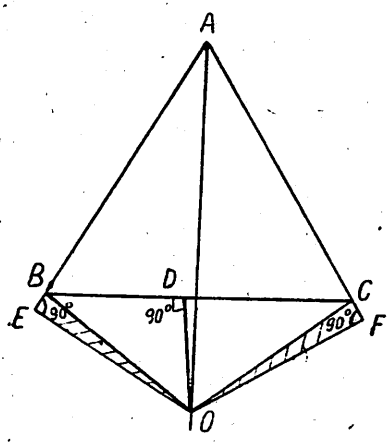


Fig. 7

2. Presupunem acum punctul O în exteriorul triunghiului ABC.

Să coborîm din el perpendicularele $\overline{OE}$ și $\overline{OF}$ respectiv pe $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$ (fig. 7). Triunghiurile OEA și OFA sînt egale, ele fiind dreptunghice și avînd ipotenuza comună și cîte un unghi ascuțit egal $\hat{1} = \hat{2}$. De asemenea: Triunghiurile ODE și ODC sînt egale ca fiind dreptunghice în D și avînd catetele egale. Prin urmare, din cele două triunghiuri deducem:

$$(1)\ \overline{AE} = \overline{AF};\ \overline{OB} = \overline{OC};\ \overline{OE} = \overline{OF}$$

Astfel, triunghiurile dreptunghice OEB și OFC sînt egale, căci au ipotenuzele egale, $\overline{OB} = \overline{OC}$, și catetele $\overline{OE}$ și $\overline{OF}$ egale. Din egalitatea lor rezultă că (2) $\overline{BE} = \overline{FC}$. Scăzînd egalitățile (1) și (2) membru cu membru, obținem:

$$\overline{AE} - \overline{EB} = \overline{AF} - \overline{FC} \text{ sau } \overline{AB} = \overline{AC}$$

Am dovedit astfel că orice triunghi este isoscel. Atunci unde e greșeala? Toate raționamentele făcute sînt ireproșabile și totuși am ajuns la concluzia falsă. În ultimă analiză, fals este doar desenul. Desenul trebuie să fie astfel încît din el să se poată vedea:

1° Că punctul O nu poate fi situat în interiorul triunghiului ABC.

2° Presupunînd E așezat pe prelungirea lui $\overline{AB}$, punctul F trebuie să se găsească între A și C și nu pe prelungirea lui $\overline{AC}$, cum arată desenul din fig. 10.

Toate aceste raţionamente le-am făcut privind figura şi ocolind logica raţionamentului. Iată deci unde poate duce un desen greşit. Să arătăm atunci cum trebuie procedat.

1° Punctul O nu se poate găsi în interiorul triunghiului ABC. În adevăr, să circumscriem un cerc, triunghiului ABC (fig. 8). Bisectoarea unghiului A şi mediatoarea segmentului BC se întîlnesc într-un punct O, situat pe mijlocul arcului BOC. Acest punct O se află în mod necesar în afara triunghiului ABC.

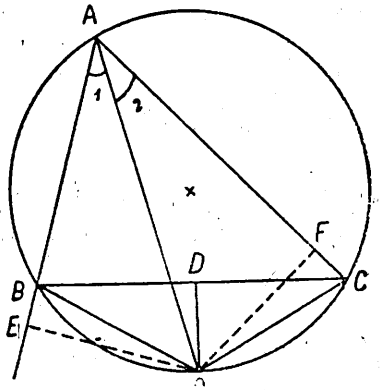


Fig. 8

2° E fiind pe prelungirea lui $\overline{AB}$, F trebuie să se găsească între A şi C. În adevăr, din ipoteza făcută rezultă că $\widehat{ABO}$ este obtuz. Or, $\widehat{ABO}$ şi $\widehat{ACO}$ fiind suplementare, unghiul ACO este ascuţit. De aceea, piciorul F al perpendicularei OF, trebuie să se găsească între A şi C.

Acest raţionament trebuia făcut încă la început, cînd am găsit în primul caz triunghiul isoscel. Altfel, dacă îşi sprijineau raţionamentul pe o figură corectă, elevii nu mai făceau demonstraţii de prisos. Ca atare ori de cîte ori se ajunge la demonstrarea unui paradox sîntem obligaţi să cerem ca demonstraţia să folosească figuri exacte (lucrate cu instrumentele). În felul acesta, figura corectă înlesneşte raţionamentul şi înlătură folosirea poziţiilor false de puncte sau segmente. Natural că dacă lipsesc şi anumite cunoştinţe, s-ar putea ca elevul să particularizeze problema dată şi să ajungă la absurdităţi.

Un desen întocmit greşit din lipsă de cunoştinţe, duce la concluzii absurde. Astfel, un elev avea de rezolvat următoarea problemă: Un patrulater $ABCD$ are diagonalele perpendiculare şi $\hat{A} = 90°$. Se cunosc lungimile diagonalelor $\overline{AC} = 8{,}4$ m; $\overline{BD} = 12{,}5$ m şi lungimea laturii $\overline{AB} = 7$ m. Să se afle perimetrul patrulaterului. Elevul a făcut construcţia arătată în fig. 9. Pentru a calcula perimetrul el a adunat $\overline{AD}$ cu $\overline{AB}$ şi a dublat rezultatul. El a considerat $\triangle DAB = \triangle DCB$ deşi din calcul rezultă: $\overline{AO} \approx 6$ m şi $\overline{OC} \approx 2{,}4$ m.

Astfel de greşeli se întîlnesc des. Ele constau în particularizarea problemei din lipsa deprinderii de a analiza datele ei în întregime şi din cauza necunoaşterii enunţului.

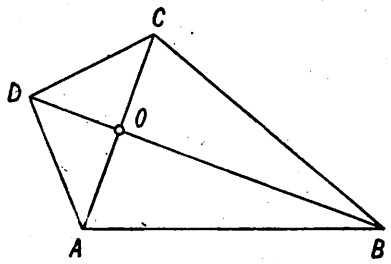


Fig. 9

Din experienţa mea personală şi din discuţiile pe care le-am avut cu colegii de aceeaşi specialitate am tras concluzia că elevii întîmpină, în general, o aceeaşi greutate la studierea geometriei în spaţiu — anume, ei „nu văd în spaţiu", nu pot reprezenta prin desen anumite figuri din spaţiu, secţiuni în aceste figuri etc.

Aceste lipsuri s-ar putea înlătura, dacă profesorii ar insista tocmai asupra executării unor desene clare, asupra reproducerii pe un plan a anumitor modele şi secţiuni. Cînd reprezentăm în plan o figură din spaţiu căutăm să dăm omului impresia vizuală pe care ar avea-o dacă ar vedea direct acea figură. Această problemă — de a da o reprezentare intuitivă — apare pe primul plan în predare.

Pentru a fundamenta ştiinţific desenul ca mijloc de reprezentare plană a obiectelor din spaţiu trebuie să ne întrebăm: cum vedem şi cum putem reproduce pe plan ceea ce vedem? (desenul perspectiv); cum este în realitate ceea ce vedem şi cum redăm pe plan această realitate? (desen geometral); cum se leagă între ele, adică desenul perspectiv şi desenul geometral?

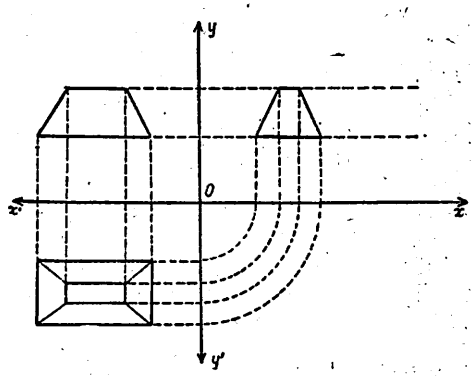


Fig. 10

Posibilitatea de măsurare a dimensiunilor corpurilor se asigură prin folosirea proiecţiei ortogonale pe trei plane, care se predă la cursul de desen tehnic în clasa a X-a. Proiecţia ortogonală este extrem de utilă în studiul geometriei în spaţiu, mai ales cînd este vorba de rezolvarea problemelor. În acest caz se pot

înlocui prin epure descrierile lungi ale figurilor din spațiu ce se dau în enunțul problemei. Așa, spre exemplu, avînd epura unei porțiuni de dig (prismatoid) (fig. 10) se pot pune mai multe probleme:

a) să se afle ariile fețelor prismatoidului și să se deseneze aceste fețe în mărime naturală;

b) să se afle volumul prismatoidului.

Firește că rezolvarea unei probleme de acest fel pe baza unei epure date, ca și desenarea de către elevi a epurelor unor figuri în spațiu ce se dau printr-o descriere în cuvinte, ajută atît la o mai bună înțelegere a problemei cît și la dezvoltarea imaginației spațiale.

O reprezentare intuitivă este dată de proiecția de cabinet, care se folosește cu mult succes în predarea geometriei în spațiu și care reprezintă un caz particular al axonometriei. În această metodă, segmentele și unghiurile situate paralel cu planul desenului sînt reprezentate pe el în mărime naturală, iar segmentele perpendiculare pe foaia de desen sînt micșorate de două sau trei ori și înclinate cu 45° sau 60°. Lucrurile se întîmplă ca și cum corpul geometric ar fi luminat, din față și puțin lateral, de un reflector ce emite raze paralele, iar umbra corpului s-ar profila pe un ecran înclinat față de direcția razelor.

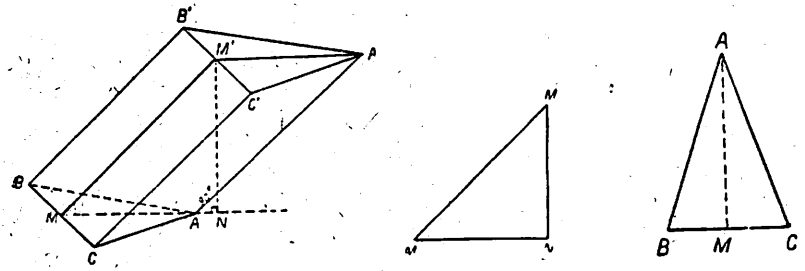


Fig. 11

Proiecțiile trebuie folosite cu atenție, ca nu cumva să utilizăm în aceeași figură elemente din fiecare din ele. În general, trebuie să-i obișnuim pe elevi cu folosirea unei singure proiecții.

Iată cum am procedat la clasă pentru a lămuri problema cu ajutorul desenului.

O prismă oblică $ABCA'B'C'$ (fig. 11) are baza un triunghi isoscel ABC ($\overline{AB} = \overline{AC}$). Fața $BB'CC'$ este un dreptunghi. Ea

face cu planul ABC un unghi de 45°. Ştiind că $\overline{BC} = 10$ cm, $\overline{AB} = \overline{AC} = 13$ cm, $\overline{BB'} = 20$ cm, se cere volumul prismei date.

Privind figura elevii au putut vedea clar forma ei. Nu rezultă din figură că triunghiul de la bază este isoscel, dar aceasta rezultă din enunţul problemei. Pentru acei elevi care nu şi-au putut totuşi imagina clar problema, am recurs şi la desene ajutătoare, ca de exemplu: secţiunea MNM' şi baza ABC.

Făcînd calculele elevii au găsit $\overline{AM} = 12$, stabilind astfel că piciorul înălţimii prismei oblice se află pe prelungirea înălţimii $\overline{AM}$ (a triunghiului isoscel BAC). Acest lucru s-a constatat imediat, deoarece:

$$\overline{MN} = \overline{M'N} = 10\sqrt{2} \approx 14{,}1$$

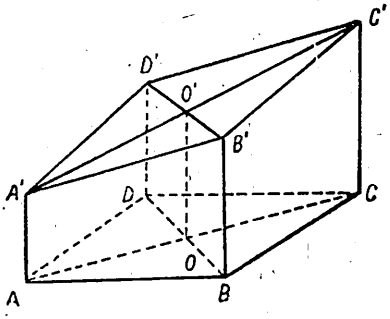


Fig. 12

De multe ori elevii greşesc desenele, din cauză că reprezintă în mod arbitrar unele elemente ale figurii, care sînt însă determinate de alte elemente.

Astfel, dacă trebuie să reprezinte poliedrul, care se obţine făcînd într-un paralelipiped dreptunghic o secţiune plană ce nu este paralelă cu baza şi din care se îndepărtează partea superioară a paralelipipedului (fig. 12) trei puncte de intersecţie ale muchiilor laterale cu planul secţiunii — de exemplu: punctele $A'B'C'$ — pot fi luate arbitrar, dar al patrulea punct D', trebuie construit, ducîndu-se liniile ajutătoare AC; BD; $A'C'$; oo'; $B'o'$, deoarece punctele de intersecţie ale diagonalelor bazelor se află pe o paralelă la muchiile laterale.

Am arătat mai sus că desenul trebuie socotit doar ca un auxiliar preţios în stabilirea adevărurilor matematice şi că numai raţionamentul poate confirma sau infirma ceea ce un desen prezintă ca o sugestie. Dar o sugestie este de multe ori elementul esenţial în rezolvarea unei probleme. Invers, raţionamentul ne va arăta dacă un desen este luat just sau nu.

Iată, de pildă problema:

Fiecare muchie a unei prisme triunghiulare regulate este a. Prin latura bazei şi mijlocul axei este dus un plan. Să se afle aria secţiunii. (Cazul $a = 3$ m).

La prima vedere s-ar părea că secțiunea este un triunghi isoscel, deși sugestia bazată pe intuiție ne conduce la presupunerea că planul de secțiune, trebuind să treacă prin mijlocul O (fig. 13) al axei OO', va trebui să iasă afară din prismă și să taie muchia AA' în E, situat pe prelungirea segmentului AA', astfel că secțiunea este trapezul $BCML$. În acest caz elevul va trebui să verifice prin calcul dacă presupunerea sa este justă sau nu. Pentru aceasta el va fi tentat imediat să calculeze lungimea $\overline{AE}$. Folosind triunghiurile asemenea ODO' și EDA, se scrie:

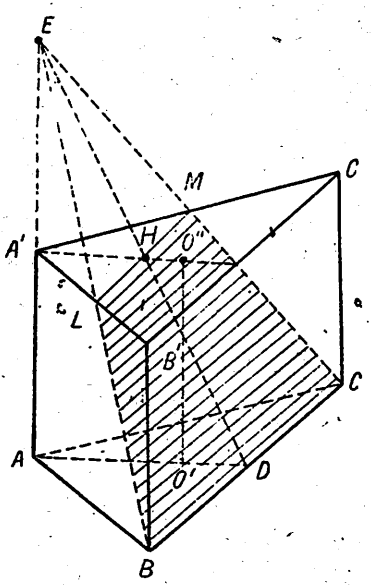


Fig. 13

$$\frac{\overline{DO}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{OO'}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{DO'}}{\overline{DA}}$$

Se calculează: $\overline{DA} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

$\overline{DO'} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; $\overline{DO}^2 = \frac{a^2}{3}$

$$\overline{DO} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Înlocuind segmentele găsite în (1), se obține:

$$\overline{DE} = a\sqrt{3} \text{ și } \overline{AE} = \frac{3a}{2}$$

Cu alte cuvinte, elevul descoperă că planul de secțiune taie muchia AA' dincolo de A', într-un punct E care depășește pe A' cu segmentul $\overline{A'E} = \frac{a}{2}$.

Din acest moment, elevul s-a convins că secțiunea este un trapez isoscel a cărui arie trebuie s-o afle. În continuare va calcula $\overline{DR} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$, $\overline{LM} = \frac{a}{3}$ și în sfîrșit $S = \frac{4a^2\sqrt{3}}{9}$.

Dacă elevul ar fi continuat problema în ipoteza greșită că secțiunea este un triunghi, calculul i-ar fi arătat că $\overline{EA} = \frac{3a}{2}$,

decî mai mare decît muchia $\overline{AA'} = a$ a prismei date şi ar fi văzut că secţiunea nu poate fi un triunghi.

Aşadar, iată un exemplu din care se poate vedea că un desen bun, obţinut printr-un raţionament riguros, poate duce mai repede şi mai sigur la rezolvarea unei probleme. Totuşi, trebuie să recunoaştem că, oricît de bune ar fi desenele care reprezintă pe plan figuri în spaţiu, în practica predării sînt dese cazurile cînd claritatea deplină se asigură numai prin modele. Aşa stau lucrurile, de exemplu, la egalitatea şi simetria unghiurilor.

Nici un desen nu poate da aici ceea ce dau două modele făcute din carton. Dar chiar construirea modelelor se face cu ajutorul desenelor şi, în consecinţă, desenul îşi justifică calificativul de auxiliar neapărat necesar în studiul geometriei.

Pentru ca elevii să capete cunoştinţe temeinice de geometrie este necesar să se intensifice colaborarea dintre profesorii de matematică şi cei de desen. Această colaborare nu trebuie să se limiteze numai la informarea reciprocă în cadrul şcolii, ci să se realizeze pornind chiar de la programele celor două discipline: desen şi matematică. În felul acesta chiar informarea reciprocă a profesorilor, ar da rezultate mai bune, deoarece se tinde către acelaşi scop.

Socotesc că ar fi bine ca profesorul sau profesorii de desen să participe la unele şedinţe ale colectivului profesorilor de matematică, în care se discută probleme comune celor două materii şi modalitatea de ajutorare reciprocă.

Se ştie că problemele de construcţii în spaţiu sînt mult mai dificile decît problemele asemănătoare din geometria plană, dat fiind că problemele de construcţii în spaţiu au un caracter abstract. Din această cauză, acest capitol se pare că nu e simpatizat nici de elevii cei mai buni. Cum în programa cursului de desen tehnic sînt prevăzute multe probleme de acest gen, schimbul reciproc de probleme între profesorii de geometrie şi desen tehnic ar fi binevenit, întrucît ei pot găsi mai uşor, împreună, calea justă pentru a prezenta problemele într-o formă mai intuitivă şi deci mai atrăgătoare.

* * *

În desenul liniar au o mare însemnătate un şir de condiţii (felurile liniilor, modul de a reprezenta corpurile, indicarea dimensiunilor, felurile inscripţiilor, poziţia proiecţiei etc.), dintre care o parte capătă un caracter obligatoriu. Multe din aceste condiţii se întrebuinţează curent în geometrie, ceea ce face desenul geometric mai clar şi mai complet din punct de vedere

grafic. Afară de aceasta, în cazuri speciale (destul de dese), geometria poate împrumuta de la desen şi unele metode, ca de exemplu întrebuinţarea epurelor. În acest mod, caracterul legăturii şi al raportului între desenul liniar şi geometrie posedă următoarea particularitate de bază: el nu este de principal (superior) şi secundar (inferior). Din însuşi conţinutul acestor discipline, reiese că legătura între ele este reciprocă şi necesară.

Practica muncii şcolare arată că pot fi folosite următoarele căi de realizare a legăturii între aceste discipline:

I. *În predarea geometriei*:

a) Folosirea deprinderilor practice de desen tehnic, precum şi a reprezentărilor grafice a formelor spaţiale pe un plan, folosite la desen.

b) Folosirea metodelor de construcţii geometrice (în plan şi în spaţiu).

II. *În predarea desenului liniar*:

a) Folosirea largă a cunoştinţelor de geometrie pentru diferite construcţii;

b) Formarea deprinderilor de desenare a figurilor plane şi în spaţiu, care ar putea fi folosite la cursul de geometrie.

Să cercetăm ce este posibil şi ce este bine să se facă pentru stabilirea legăturii în predarea geometriei şi a desenului liniar, pentru fiecare obiect în parte.

I. *Geometria*

Greşelile desenelor în planimetrie pot fi împărţite în două categorii:

a) Greşeli cu caracter geometric;

b) Conturare nereuşită.

Defectele din prima categorie apar din cauza înţelegerii greşite a problemei, sau din lipsa de cunoştinţe a elevilor.

De exemplu, i se dă elevului să deseneze un romb, iar el desenează un paralelogram oarecare. Asemenea greşeli pot duce la generalizări inadmisibile şi uneori absurde.

Greşelile din a doua categorie pun în faţa noastră problema de a evita conturarea greşită a desenului. În desenul tehnic există numeroase reguli care ne ajută la efectuarea în bune condiţii a desenului. De exemplu, dacă desenul se efectuează pentru rezolvarea unor probleme de construcţie, atunci putem citi chiar din desenul respectiv, fără de nici o altă lămurire, condiţiile date prin problemă, ne putem da seama ce construcţii au fost efec-

tuate în procesul rezolvării şi ce s-a obţinut ca rezultat al acestei rezolvări.

Exactitatea efectuării este vizibilă imediat. Nu intenţionez să intru în amănunte în ceea ce priveşte regulile de efectuare a desenului liniar. Voi indica numai anumite notaţii absolut necesare unei bune citiri a desenului. Astfel:

1° Dacă unghiul drept se întîlneşte pe desen de mai multe ori şi dacă pe desen este loc, el se poate nota cu un sfert de cerc;

2° Segmentele egale sînt scoase în evidenţă cu metoda obişnuită, adică notîndu-le cu acelaşi număr de liniuţe sau cu aceleaşi semne;

3° În cazul cînd există posibilităţi se întrebuinţează creioane colorate, tuş colorat, sau cretă colorată;

4° Cînd trebuie să arătăm că două unghiuri sînt egale, notăm mărimea lor (dacă este cunoscută), sau însemnăm unghiurile egale cu acelaşi număr de arce concentrice, sau ducem cîte un arc în fiecare unghi şi îl tăiem cu acelaşi număr de liniuţe.

În orice caz, figura trebuie să fie astfel desenată, încît să poată fi „citită" cu uşurinţă.

Aşa, de exemplu, dacă trebuie să citim că dintr-un punct oarecare A se construieşte un arc de rază R, atunci procedăm ca în figura 14.

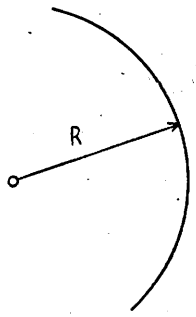


Fig. 14

Fraza „o dreaptă paralelă unei drepte date AB la o distanţă a de ea", se exprimă grafic ca în figura 15.

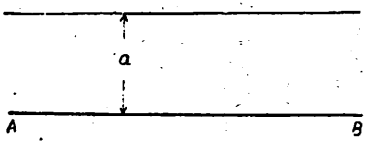


Fig. 15

Dacă printr-un punct oarecare A al unei drepte BC se duce o dreaptă sub unghiul α, aceasta se arată ca în desenul din fig. 16. În cazul cînd mărimea unghiului nu este arătată în desen, considerăm că secanta este dusă în mod arbitrar.

Desenul din figura 17 arată că **prin** punctul a, se duce un segment AB, iar **din** punctul A se duce o dreaptă, pe care se iau segmentele succesive — a, b şi c.

Pe această cale se pot prezenta pe desen şi alte construcţii ajutătoare, dar numărul lor nu este atît de mare în practica şcolară.

Pe desenele din cărţile de metodică, numeroasele puncte de intersecţie ale diferitelor drepte, fie că sînt scoase în evidenţă prin mici cerculeţe ce le înconjoară, fie că nu sînt scoase în evi-

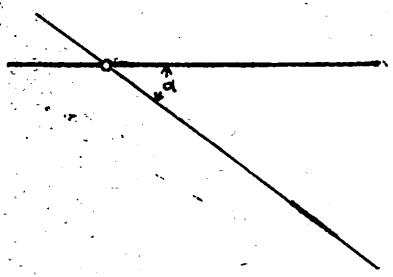


Fig. 16

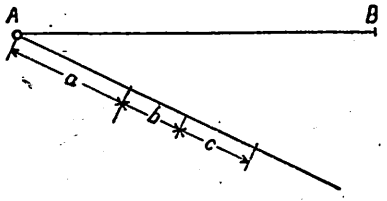


Fig. 17

denţă în mod deosebit. Şi primul şi al doilea procedeu sînt la fel de incomode, deoarece nu permit să se observe dintr-o dată punctele desenului care au mai multă importanţă în rezolvarea problemei date.

Nu sînt rare cazurile cînd scopul construcţiei se reduce la găsirea unuia sau a cîtorva puncte izolate. Alteori găsirea unor astfel de puncte dă posibilitatea de a construi deodată figura cerută (de exemplu, ducerea tangentei comune la două cercuri).

Voi prezenta mai multe exemple pentru a arăta în ce fel se realizează recomandările de mai sus. Aceste exemple se referă la probleme de calcul şi de construcţii.

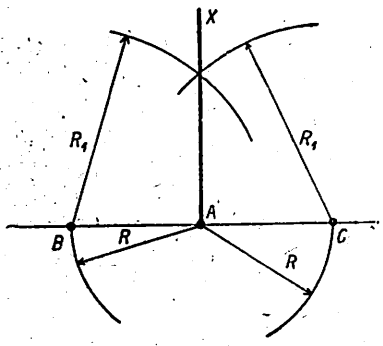


Fig. 18

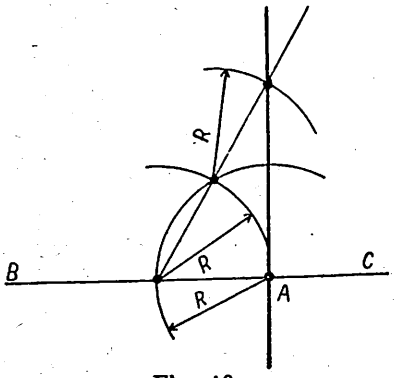


Fig. 19

Exemplul 1. Să se ridice în punctul *A* situat pe o dreaptă *BC* o perpendiculară (fig. 18 şi 19).

Explicația construcției e simplă și rezultă din însăși citirea figurii.

Exemplul 2. Să se ducă dintr-un punct A exterior dreptei BC o perpendiculară pe dreaptă (fig. 20 și 21).

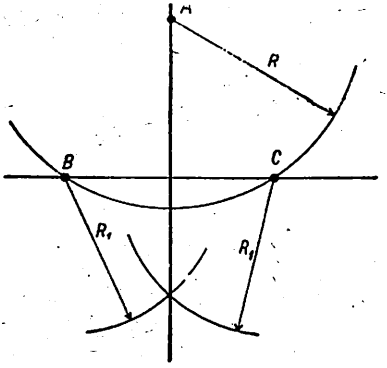


Fig. 20

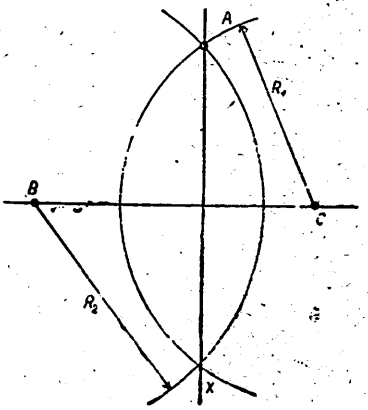


Fig. 21

Exemplul 3. Să se construiască bisectoarea unghiului ABC (fig. 22).

Exemplul 4. Într-un trapez isoscel înălțimea dusă din unghiul obtuz împarte baza mare în două segmente: de 6 cm și 30 cm. Să se găsească bazele trapezului (fig. 23).

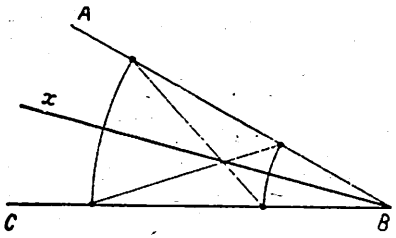


Fig. 22

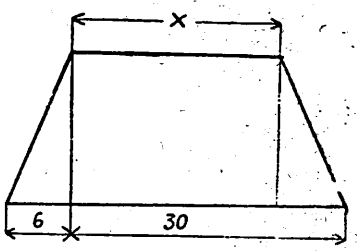


Fig. 23

Ne oprim aici cu exemplele care, cred, au arătat cititorului utilitatea desenelor. Totuși, pentru a preveni unele eventuale obiecțiuni și neînțelegeri trebuie să dăm unele lămuriri cu privire la exemplele indicate.

Procedeele expuse nu trebuie privite ca niște procedee universale, care ar îndepărta în mod categoric greutățile efectuării unui desen. Profesorul trebuie să folosească el însuși desenele și să-i deprindă și pe elevi să le folosească. Procedeele propuse pentru efectuarea desenelor liniare sînt necesare atunci cînd ne interesează, nu numai rezultatul unui desen, ci și procesul efectuării (probleme de construcție). Bineînțeles că aceste procedee devin de prisos dacă ne interesează numai figura, procesul construirii fiindu-ne indiferent.

Însușindu-și procedeele de bază ale efectuării desenului liniar, elevii pot înțelege, adică pot „citi" mai ușor desenele, chiar dacă nu sînt efectúate de ei.

Problema citirii desenelor poate fi pusă astfel: fiind dat un desen, să se afle în ce a constat construirea lui, cum a fost efectuată construirea, ce fel de figuri s-au obținut ca rezultat al construcției efectuate.

Înțelegînd aceste chestiuni, elevul va fi în stare să reconstituie datele problemei din a cărei rezolvare a luat ființă desenul dat.

Uneori se obiectează că efectuarea desenului liniar după regulile arătate este un lucru greu și care cere prea mult timp, ducînd astfel la supraîncărcarea elevilor. Desigur că pentru o lucrare îngrijită este necesar un timp mai îndelungat decît pentru executarea unei lucrări neglijente. Dar practica ne arată că elevii cărora li s-au cerut în mod sistematic desene îngrijite și-au însușit destul de repede deprinderea necesară de a face desene bune fără prea multă pierdere de timp.

DIN EXPERIENȚA MUNCII ÎN AFARĂ DE CLASĂ LA MATEMATICĂ

SERGIU POSTOLACHE
Școala medie nr. 1
BACĂU

Pentru îndeplinirea sarcinilor pe care le pune în fața școlii noastre acțiunea de politehnizare a învățămîntului de cultură generală, simpla activitate în clasă, limitată la lecția curentă nu este satisfăcătoare. Aceasta este tot atît de valabil și pentru matematică ca și pentru celelalte discipline.

Deși programele de învățămînt prevăd un număr mare de ore pentru matematici care asigură posibilitatea de a se preda în cele mai bune condițiuni materia, totuși se simte nevoia unei activități în afară de clasă pentru acei elevi, care manifestă un interes deosebit pentru matematică și din rîndurile cărora se vor recruta viitorii studenți ai facultăților de matematici și fizică și ai institutelor tehnice.

Activitatea în afară de clasă cu elevii este o problemă care trebuie să preocupe pe fiecare profesor de matematici.

Multiplele forme de activitate în afară de clasă (cercuri, excursii, olimpiade, seri matematice) urmăresc lărgirea orizontului științific al elevilor și mai ales formarea deprinderilor de a aplica cunoștințele teoretice în practică, în activitatea productivă.

Astfel îi învățăm pe elevi să valorifice cunoștințele însușite în clasă, rezolvînd diferite probleme din culegeri sau din reviste și să propună ei înșiși probleme, îi deprindem să efectueze diferite măsurători pe teren: să măsoare dimensiunile unor piese și, pe baza măsurătorilor făcute, să calculeze diferite elemente: distanțe inaccesibile, dimensiuni care nu se pot măsura direct, volume, greutăți, densități etc. Totodată, în cadrul activității în afara clasei elevii se deprind să mînuiască diferite scule pentru a confecționa materialul didactic sau pentru a concretiza probleme, construind corpuri geometrice și secțiuni, care sînt date sau cerute în probleme.

Cercurile de matematică lărgesc cunoştinţele elevilor, dîndu-le posibilitatea să afle cum s-au dezvoltat diferite ramuri ale matematicii în legătură cu dezvoltarea tehnicii şi a altor ştiinţe, să cerceteze aspecte ale vieţii şi operei marilor matematicieni ai lumii, precum şi ale matematicienilor romîni.

Literatura sovietică de specialitate indică diferite forme de organizare a activităţii extraşcolare la matematică. De exemplu, în revista „Matematika v şkole" nr. 4 din 1951 profesorul P. Ghermanovici (Leningrad) indică următoarele activităţi:

1. Activităţi cu caracter periodic:
   a) Clubul matematicienilor veseli (cl. V)
   b) Cercul de aritmetică (cl. VI)

Activitatea acestora se desfăşoară în şedinţele lunare sau bilunare.

2. Activităţi care nu se desfăşoară periodic:
   a) Victorine matematice.
   b) Adunări convocate pentru rezolvări de probleme cu clasele paralele.
   c) Olimpiade matematice şcolare.
   d) Serate matematice.
   e) Gazete matematice de perete.

În nr. 3 din 1954 al aceleiaşi reviste găsim o altă clasificare indicată de Mojaev (Voroşilovgrad).

Reţinem din aceste indicaţii trei forme de activitate:

— Excursii matematice de studii (în natură sau în întreprinderi industriale).

— Serate matematice.

— Cercuri de elevi (pentru clasele mari).

Profesorii de matematici din oraşul Bacău au pus în practică următoarele forme de activitate, pe care le vom descrie în cele ce urmează:

1. Cercurile de elevi.
2. Publicaţii matematice (gazeta de perete a cercului, buletine matematice).
3. Excursii matematice de studii.
4. Serate matematice.
5. Participarea la olimpiadele de matematică.

Cercurile de elevi

Profesorii de matematică din şcolile oraşului Bacău au început încă de cîţiva ani să desfăşoare o bogată activitate în afara orelor de curs.

Ei au primit un ajutor însemnat în această privinţă din partea filialei locale a Societăţii de ştiinţe matematice şi fizice. Astfel, ei au format îndrumări cu privire la organizarea cercurilor de elevi (mai ales la şcolile de 7 ani), la întocmirea planurilor de lucru pentru cercuri, la periodicitatea şi la conţinutul muncii în cercuri. De aceste îndrumări s-au folosit şi profesorii din şcolile raionului.

La şcolile medii din oraşul Bacău funcţionează cercuri organizate pe grupe de clase paralele. Astfel, la şcoala medie nr. 1 există trei cercuri de matematică corespunzătoare celor trei grupe de clase paralele conduse fiecare de către un profesor (un cerc pentru clasele a VIII-a A-B-C, altul pentru clasele a IX-a A-B-C-D-E şi altul pentru clasele a X-a A-B-C-D-E. Fiecare cerc este condus de profesorul care predă la cele mai multe dintre clasele paralele respective).

De obicei şedinţele cercurilor au loc lunar, în afara cercului claselor a VIII-a care se întruneşte de două ori pe lună. La aceste cercuri participă elevii care au obţinut la clasă numai note foarte bune la matematici şi nici o notă proastă la celelalte materii. Frecvenţa la cercuri este controlată, iar elevii care au trei absenţe nemotivate consecutive sînt excluşi din cerc.

În cele ce urmează voi descrie mai pe larg activitatea cercului claselor a VIII-a pe care l-am condus.

Prima şedinţă a fost consacrată organizării cercului. S-a făcut din timp o mobilizare largă printre elevii celor trei clase a VIII-a prin anunţuri scrise pe tablă şi prin afişe.

Am expus în faţa elevilor un scurt referat asupra scopului cercului şi asupra modului de lucru în şedinţe. Apoi s-a citit un proiect al regulamentului de funcţionare a cercului, care prevede cum se alege comitetul de conducere, cine are dreptul de a fi membru al cercului, ce îndatoriri au membrii şi cum se va desfăşura activitatea cercului.

În mod asemănător s-au organizat şi celelalte cercuri din şcoala noastră şi din celelalte şcoli din oraş.

În organizarea muncii am ţinut seama de experienţa pe care o dobîndisem cu un an înainte, cînd am condus cercul elevilor din clasa a X-a. Analizînd munca mea din anul trecut, mi-am dat seama că activitatea cercului s-a desfăşurat unilateral, urmărind numai îmbogăţirea cunoştinţelor. Aplicaţiile practice pe teren au fost neglijate aproape complet din care cauză elevii nu şi-au însuşit deprinderi practice. Este drept însă că ei şi-au consolidat cunoştinţele de matematică, obţinînd rezultate bune

la examenele de admitere în învățământul superior, la concursurile organizate de Societatea de matematică și fizică.

Ținînd seama de lipsurile constatate în anul trecut mi-am propus ca la cercul din anul acesta să urmăresc obiectivele indicate mai jos:

— Lărgirea orizontului de cunoștințe al elevilor, prin introducerea unor chestiuni în afara programei (în special a acelor chestiuni care s-au scos în ultimii ani și care, după părerea noastră, lasă goluri în cunoștințele elevilor).

— Deprinderea elevilor de a se folosi de cunoștințele lor la rezolvarea de probleme cu caracter practic: măsurători pe teren, calcule de distanță sau înălțimi etc.

— Lămurirea elevilor (prin excursii în întreprinderi, lectură etc.) asupra importanței deosebite pe care o are matematica în dezvoltarea tehnicii moderne.

Avînd în vedere aceste obiective, am alcătuit cu elevii următorul plan de lucru:

Nr. crt.	Temele ședințelor cercului	Date calendaristice	Cine răspunde de executare
1	Ședința de organizare a cercului.	19 sept.	Profesorul
2	Despre locuri geometrice. Cîteva locuri geometrice elementare. Probleme rezolvate prin metoda intersecției locurilor geometrice. Probleme distractive.	3 oct.	Elevul Dobronăuțeanu
3	Cum variază raportul în care un punct împarte un segment dat, cînd punctul descrie dreapta suport al segmentului.		Elevul Tițaru
	— Locul geometric al punctelor, astfel ca raportul distanțelor sale la 2 puncte fixe să fie constant.	17 oct.	Profesorul
4	Transformarea radicalilor de forma $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ într-o sumă de doi radicali simpli. Aplicații. — Probleme distractive.	31 oct.	Elevul Dimitriu
5	Transformarea figurilor prin asemănare. Probleme de construcții geometrice.	14 nov.	Profesorul
6	Ecuații reciproce (proprietăți și rezolvarea lor)	5 dec.	Elevii Sîrbu și Dobronăuțeanu

Nr. crt.	Temele şedinţelor cercului	Date calendaristice	Cine răspunde de executare
7	Confecţionarea de material didactic: compasul reductor şi pantograful. Descrierea teoremelor pe care se bazează construcţia şi funcţionarea lor. Îndrumări asupra modului cum se va lucra.	19 dec.	Profesorul
8	Aplicaţii ale asemănării triunghiurilor: Teorema lui Menelaus şi teorema lui Ceva. Probleme rezolvate cu ajutorul acestor teoreme.	16 ian.	Elevul Alexandrescu
9	Confecţionarea unui instrument de măsurat unghiuri verticale (materiale: raportor de şcoală, linie, trepied)	30 ian.	Profesorul
10	Aplicaţii pe teren: Calculul unei înălţimi cu ajutorul funcţiilor trigonometrice a unghiului ascuţit. Verificarea rezultatelor calculînd aceleaşi înălţimi prin asemănare.	13 feb.	Profesorul
11	Relaţii metrice în cerc (puterea unui punct faţă de cerc). Axul radical a două cercuri. Centrul radical a 3 cercuri.	27 feb.	Profesorul
12	Excursie la întreprinderea metalurgică a Trustului de utilaj petrolifer.	26 martie	Profesorul
13	Despre importanţa matematicii în dezvoltarea tehnicii moderne. Convorbiri cu elevii asupra celor văzute în uzină.	9 aprilie	un inginer de la T.C.U.P.
14	Relaţii metrice într-un triunghi oarecare (Relaţia lui Stewart). Aplicaţii: Calculul medianei	23 aprilie	Profesorul
15	Figuri de mari matematicieni romîni (Gheorghe Ţiţeica — David Emanuel — Traian Lalescu).	7 mai	Elevul Oprea
16	O excursie în natură. Calcule şi măsurători de distanţe. Aflarea lăţimii unui rîu prin diferite metode. Compararea rezultatelor.	21 mai	Profesorul

Planul de mai sus a fost realizat întocmai, cu excepția ședinței din 13 februarie, a cărei temă din cauza timpului nefavorabil, a fost înlocuită cu tema: Noțiuni de nomografie. Cîteva nomograme care se sprijină pe asemănare și relații metrice.

În prima parte a anului școlar, ședințele cercului au avut un caracter mai mult teoretic, atingînd numai primul dintre obiectivele fixate. Aceasta din cauză că membrii cercului, elevi ai primei clase a școlii medii (a VIII-a), aveau un orizont îngust de cunoștințe, o pregătire neomogenă și era necesară o perioadă mai lungă de timp pentru a-i familiariza cu materia clasei a VIII-a și a le forma o serie de deprinderi de studiu.

În general, o ședință a cercului avea următoarea ordine de zi:

— Apelul.

— Un referat privitor la o chestiune teoretică, prezentat de profesor sau de un elev.

— Rezolvări de probleme în legătură cu tema expusă în referat precum și rezolvarea problemelor propuse în ședința anterioară.

— Probleme propuse pentru ședința viitoare (de profesor și de elevi).

Uneori elevii propun la cerc, spre rezolvare, diferite probleme distractive, ghicitori, șarade etc. Aceasta face ca activitatea cercului să fie mai atractivă.

Iată acum descrierea amănunțită a unei ședințe a cercului.

Elevii au învățat, în clasă, relațiile metrice într-un triunghi dreptunghic și oarecare. De asemenea au învățat relațiile metrice în cerc. Era momentul potrivit pentru a se da noțiuni elementare de nomografie. Am pregătit materialul necesar—și anume, hîrtie milimetrică și hîrtie de calc.

Înainte de a trece la lucrările practice, le-am explicat elevilor ce este nomograma, la ce folosește și care este importanța folosirii nomogramelor în calculele cerute de practică, atunci cînd nu este nevoie de o precizie prea mare. Le-am dat apoi exemple simple de nomograme.

a) Nomograma pentru aflarea rădăcinii pătrate din suma a două pătrate, formată din două axe perpendiculare trasate pe hîrtie milimetrică.

Fie de calculat $\sqrt{7^2 + 12^2}$. Se ia $\overline{OB} = 7$ și $\overline{OA} = 12$, pe cele două axe. Se ia între ghearele compasului distanța $\overline{AB}$ și se așază pe axa OA, începînd din O. Se citește rezultatul.

Aceeaşi nomogramă au folosit-o elevii şi pentru aflarea rădăcinii pătrate din diferenţa a două pătrate, folosind compasul. În loc de compas se poate folosi o riglă gradată sau o foaie de hîrtie milimetrică.

Acest grafic, o dată făcut, poate fi folosit pentru multe calcule de felul celor de mai sus. Exemplul este extrem de simplu, dar convingător pentru elevi şi constituie o aplicaţie a teoremei lui Pitagora în practică. Elevii au calculat rădăcina pătrată în mod obişnuit şi apoi prin grafic şi au văzut că prin această metodă se poate obţine o precizie destul de mare. Cu ajutorul graficului au obţinut rezultatul de cinci ori mai repede decît dacă ar fi calculat în mod obişnuit. Argumentul a fost convingător şi elevii au devenit atenţi şi nerăbdători să cunoască şi alte nomograme.

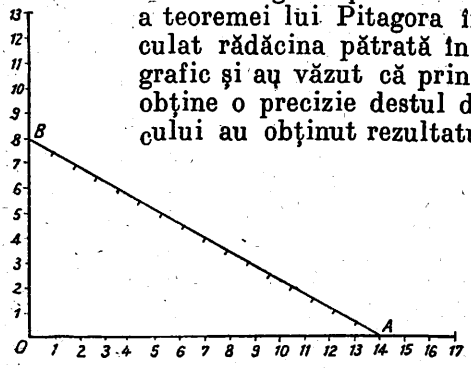


Fig. 1

b) Linia mijlocie a trapezului şi-a găsit şi ea aplicarea într-o nomogramă care serveşte la aflarea mediei aritmetice a două numere. Pe hîrtie milimetrică, s-au tras cu creioane colorate trei paralele situate la depărtare egală una de alta, după cum se vede în figura 2

$$\frac{\overline{OA} + \overline{CB}}{2} = \overline{DE}$$

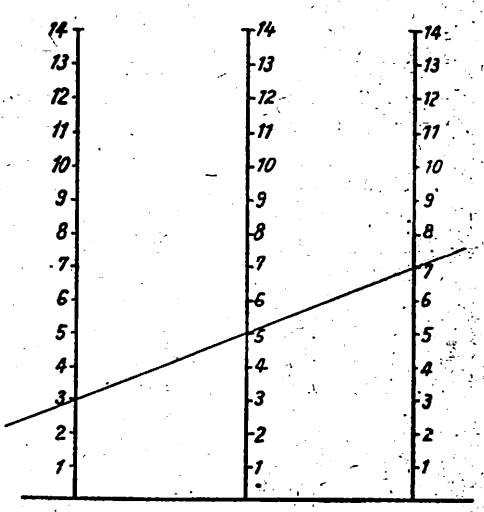


Fig. 2

c) În multe probleme sau desene este nevoie să se calculeze rapid a patra proporţională între trei lungimi cunoscute sau trei mărimi date. Pentru asta este nevoie de o hîrtie milimetrică pe care s-au tras două perpendiculare (poate fi folosită şi hîrtia

din primul exemplu) şi de un triunghi dreptunghic cu catetele de 10—15 cm, tăiat din celuloid sau din hîrtie de calc.

Iată cum se foloseşte nomograma: Fie de aflat $x = \frac{ab}{c}$.

Se fixează pe axa xx' punctele A, B şi C astfel ca $\overline{OA} = a$ $\overline{OB} = b$ de o parte şi alta a axei şi punctul C, astfel ca $\overline{OC} = c$ (de aceeaşi parte cu A). Se aşază triunghiul dreptunghic de celuloid

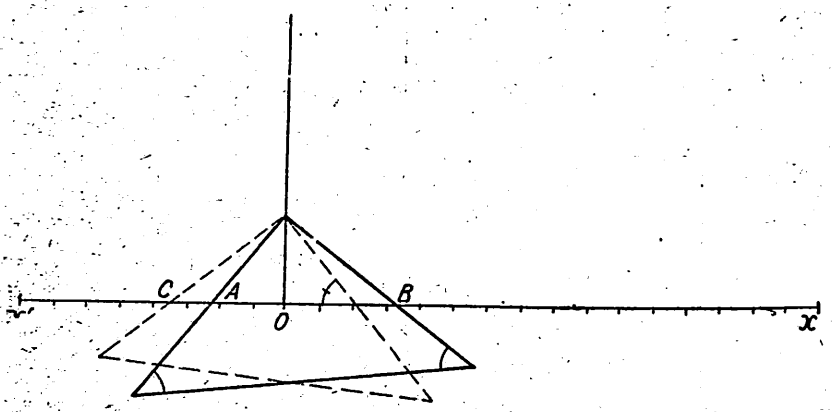


Fig. 3

astfel ca vîrful unghiului drept să fie pe axa OY, iar catetele să treacă prin A şi B. Se fixează vîrful unghiului drept pe OY în Q. Se roteşte apoi în jurul lui Q, pînă ce cateta din stînga trece prin C. Fie X punctul în care cealaltă catetă taie pe xx'. OX este lungimea căutată. Într-adevăr:

$$\overline{OQ}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB} = a \cdot b.$$

$$\overline{OQ}^2 = \overline{OC} \cdot \overline{OX} = c \cdot x.$$

Rezultă:

$$a \cdot b = c \cdot x \quad \therefore \quad x = \frac{a \cdot b}{c}$$

d) Aceeaşi problemă se mai poate rezolva prin următoarea nomogramă: un

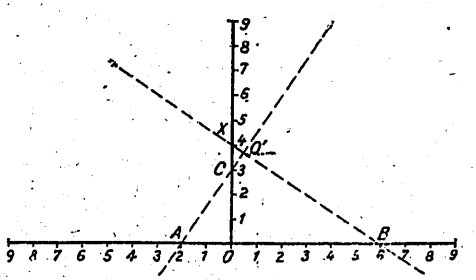


Fig. 4

sistem de axe dreptunghiulare pe hîrtie milimetrică, iar pe o foaie de celuloid sau hîrtie de calc un alt sistem de axe perpendiculare. Se marchează pe Ox, $\overline{OA} = a$ şi pe Ox, $\overline{OB} = b$. Pe Oy se marchează $\overline{OC} = c$. Se aşază hîrtia transparentă astfel ca una din axe să treacă prin A şi C, iar cealaltă axă prin B. $\overline{OB}$ taie yy' în X. OK este lungimea căutată. Într-adevăr, triunghiul OKB este asemenea cu triunghiul OAC ($\hat{B}_1 = \hat{C}_1$)

$$\frac{\overline{OK}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} \quad \overline{OK} = \frac{a \cdot b}{c}$$

e) În sfîrşit, încă un exemplu interesant:

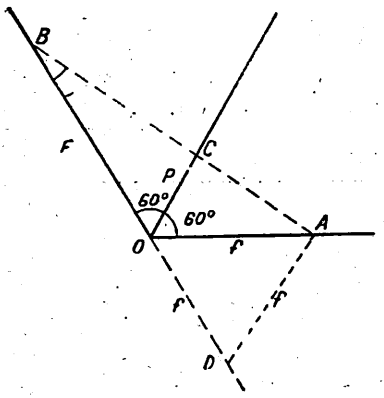


Fig. 5

În studiul lentilelor există relaţia:

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{f} + \frac{1}{F}$$

sau $P = \frac{F \cdot f}{f + F}$ care se poate calcula cu ajutorul nomogramei de mai sus sau cu ajutorul următoarei nomograme: fie unghiul $xOy = 120°$ şi Oz bisectoarea acestui unghi. Toate trei liniile sînt gradate în milimetri. Se aşază pe Ox lungimea $\overline{OA} = f$, pe Oy lungimea $\overline{OB} = F$. Se aşază o linie trecînd prin A şi B. Se citeşte în C, pe Oz distanţa $OC = P$. Într-adevăr, dacă prelungim pe OB în sens opus lui B cu o lungime $\overline{OD} = \overline{OA}$ şi unim A cu D, avem triunghiul ODA echilateral. $\overline{OC}$ este paralel cu $\overline{DA}$ şi deci

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{OC}} \text{ sau } \frac{f + F}{F} = \frac{f}{P}$$

S-au făcut şi alte nomograme iar elevii şi-au luat notiţe pentru a-şi confecţiona fiecare aceste nomograme în scopul de a le folosi în diferite calcule. Se înţelege că exemplele date mai sus nu reprezintă decît lucruri cu totul elementare, dar îi ajută pe elevi să înţeleagă cum se pot aplica în practică unele cunoştinţe teoretice învăţate în clasă şi le dau, în acelaşi timp, o ideie

despre numeroasele aplicaţii în practică a nomogramelor a căror construcţie se bazează pe cunoştinţe de matematici superioare. Exemplele de mai sus sînt luate din articolul profesoarei sovietice Kramskaia, publicat în „Matematika v şkole" nr. 5 din 1954.

În partea a doua a şedinţei s-au dat consultaţii elevilor care aveau greutăţi în rezolvarea unor probleme din „Gazeta de matematică şi fizică seria *B*". În cadrul consultaţiilor li s-au lămurit unele noţiuni noi şi li s-au dat indicaţii asupra unor teoreme.

În şedinţa care a urmat studierii în clasă a capitolului despre transformarea figurilor prin asemănare s-au rezolvat cîteva probleme de construcţii geometrice prin metoda asemănării şi s-a vorbit apoi despre pantograf şi despre compasul reductor. Au fost descrise aceste instrumente şi s-a discutat despre teoremele de asemănare, pe care se sprijină construcţia lor. Elevii au pus în discuţie posibilitatea construirii acestor instrumente. Un elev şi-a amintit că are acasă o bucată de tablă de aluminiu. Alt elev a spus că poate să lucreze la atelierul întreprinderii unde tatăl său este maistru lăcătuş.

În şedinţa următoare elevii au adus materialul şi au primit indicaţii cu privire la dimensiunile pieselor ce trebuie tăiate din tablă de aluminiu. Cîţiva membri ai cercului au mers la atelier şi au tăiat acolo piesele necesare pentru construirea unui pantograf şi a unui compas reductor. Apoi la un alt atelier, piesele au fost asamblate.

De asemenea, în cadrul cercului elevii au discutat despre instrumentele de măsurat unghiuri. Ei cunoşteau teodolitul, dar au simţit nevoia unui instrument de măsurat unghiuri aşezate în plan vertical. (Teodolitul nostru nu are cerc vertical.) Li s-a propus să construiască singuri un asemenea instrument, folosind un raportor şcolar cu fir de plumb, montat pe un trepied.

Membrii cercului claselor a IX-a au studiat unghiul a două plane şi unghiul unei drepte cu un plan, iar pentru ilustrarea temelor studiate au construit pe o scîndură o serie de piramide cu muchiile egal înclinate pe planul bazei, trăgînd concluzia că acestor piramide li se poate circumscrie un con. Tot pe aceeaşi placă au construit o serie de piramide care au feţele laterale egal înclinate pe planul bazei, cărora li se poate înscrie un con. Muchiile laterale sînt făcute cu multă măiestrie, din beţişoare de lemn frumos lustruite şi lipite cu clei de tîmplărie.

Elevii claselor a X-a au construit machetele unor probleme cu secţiuni plane în diferite corpuri geometrice, formînd o colecţie bogată de material intuitiv, care este de un real folos profe-

sorului la rezolvarea problemelor mai grele și la dezvoltarea reprezentării spațiale a elevilor.

Elevii claselor a IX-a au construit și ei asemenea modele, ilustrînd teoremele referitoare la dreaptă și plan, precum și unele probleme mai dificile în culegerea de probleme.

Nu putem trece cu vederea activitatea cercului de elevi pe oraș, organizat de filiala Societății de științe matematice și fizice. La acest cerc participă cei mai buni elevi de la școlile medii de fete și de băieți, precum și de la școlile pedagogice. Cercul are două secții, una de matematică și alta de fizică, conduse fiecare de către un profesor de specialitate. Fiecare secție ține ședințe lunare.

Scopul cercului pe oraș este de a da elevilor cunoștințe suplimentare de algebră, geometrie și trigonometrie, de a-i antrena în rezolvarea și formularea problemelor și de a-i face să colaboreze la „Gazeta matematică și fizică". Un rol de seamă a avut acest cerc în pregătirea elevilor pentru concursurile organizate de Societatea de științe matematice și fizice din R.P.R.

Pentru a realiza schimbul de experiență în organizarea activității cercurilor de elevi, Cercul pedagogic al profesorilor de matematică din orașul Bacău a consacrat o ședință muncii în cercuri. În cadrul acesteia s-a desfășurat, după sistemul lecțiilor deschise, o ședință a cercului elevilor din clasa a VII-a a școlii de 7 ani nr. 8. Durata ședinței a fost de 90 minute. S-au expus numeroase planșe, care sînt rezultatul muncii de un an al cercului și reprezintă diferite probleme și teoreme de geometrie și din „Gazeta matematică și fizică seria B". Figurile desenate pe aceste plane sînt mari, frumos executate, iar rezolvările sau demonstrațiile sînt scrise cu litere vizibile de la distanță. Aceste planșe, expuse pe pereții sălii de clasă, sînt urmărite cu interes chiar de către elevii care nu sînt membri ai cercului, contribuind astfel la ridicarea nivelului de pregătire al clasei. La ședință elevii au propus și au rezolvat cîteva probleme de geometrie, iar apoi, în cadrul unor exerciții de agerime, au fost puși să descopere greșelile din diferite figuri geometrice. După încheierea activității elevilor profesorii au purtat discuții ample, împărtășindu-și experiența lor în privința conducerii muncii în cercuri.

Publicații matematice. Pentru a antrena în activitatea cercului lor cît mai mulți elevi, în școala noastră s-au editat gazete de perete, matematice, în care se propun diferite probleme, de cele mai multe ori alcătuite de către elevi, sau luate din culegeri și reviste. Gazetele cuprind o rubrică cu probleme distrac-

tive şi sofisme, care este mult apreciată de elevi. Asemenea gazete au scos şi elevele şcolii medii nr. 2.

Iată un exemplu de problemă publicată în gazetă, care se adresează agerimii elevilor:

În finalul campionatului de şah al unităţilor militare s-au întîlnit 8 şahişti: un colonel, un maior, un căpitan, un locotenent, un plutonier, un sergent, un fruntaş şi un soldat. Printre dînşii erau: un infanterist, un aviator, un tanchist, un artilerist, un pionier, un genist, un transmisionist şi un cavalerist. În prima rundă, colonelul a jucat cu aviatorul, maiorul cu tanchistul, sergentul cu infanteristul, iar plutonierul cu cavaleristul. După prima rundă soldatul s-a retras din joc. Din această cauză au rămas fără pereche în runda a doua genistul, în runda a treia căpitanul, în runda a patra pionierul, în runda a cincia locotenentul, în runda a şasea tanchistul, în runda a şaptea transmisionistul. În runda a 2-a colonelul a jucat cu artileristul, infanteristul cu tanchistul şi locotenentul cu sergentul. În runda a treia fruntaşul a cîştigat de la cavalerist, iar partidele colonelului cu pionierul şi a maiorului cu artileristul au fost remize. Ce specialitate militară a avut fiecare? (Din articolul „Cercul de matematică în şcoală", de L.M. Lupova—Proskurov).

Elevele claselor a X-a de la şcoala medie nr. 2 au scos un buletin matematic foarte reuşit, sub îndrumarea profesorului care conduce cercul lor. Coperta buletinului înfăţişează cîteva figuri geometrice, îngrijit executate. Prima pagină cuprinde citate din operele unor mari oameni de ştiinţă. Pagina următoare vorbeşte despre numărul „π".

Cititorul află de aici că acest număr a fost calculat pînă la 707 zecimale. Urmează apoi o serie de probleme de geometrie plană şi în spaţiu, apoi probleme istorice versificate. Nici cunoscuta problemă a trestiei de bambus (chineză) nu lipseşte din paginile buletinului, cu un desen frumos al figurii, formată din trestia ruptă şi un chinez alături.

Probleme-şarade, curiozităţi ştiinţifice, îmbogăţesc mai departe paginile buletinului. Parte din problemele publicate în buletin au fost afişate şi la gazeta matematică de perete. Multe eleve s-au preocupat timp îndelungat pentru a găsi greşeala de logică a sofismelor din paginile buletinului.

Serate matematice

O acţiune demnă de a fi relevată este serata matematică organizată de elevele claselor a VII-a de la şcoala medie nr. 2 sub conducerea întregului colectiv de profesori de matematică

de la această şcoală. Programul după care s-a desfăşurat serata a fost bogat, conţinînd în special probleme distractive, foarte mult apreciate de publicul care a asistat. La pregătirea seratei au contribuit şi profesorii de limba romînă şi de muzică. Iată conţinutul programului:

1. Cuvînt de deschidere.
2. Discuţii despre paralelograme şi trapeze.
3. Monolog despre procente.
4. Eleve cu memorie fenomenală.
5. Ce mi s-a întîmplat la ora de geometrie.
6. Sceneta „Ora de algebră".
7. Dansuri geometrice.

Acest program a avut, pe de o parte, meritul de a fi instructiv, lărgind orizontul de cunoştinţe al elevilor, iar pe de altă parte i-a distrat mult pe elevi, antrenîndu-i şi pe calea aceasta la studierea matematicii.

Excursii

Despre excursiile matematice se vorbeşte pe larg într-un articol de Abaleaev, publicat în revista „Matematika v şkole" nr. 5—1954. În acest articol se arată cum trebuie să fie pregătită o excursie legată de studierea matematicii atît în natură cît şi în întreprinderi. În „Matematika v şkole" nr. 3—1954, în articolul lui Mojaev (Voroşilovgrad), sînt descrise două excursii. Una din aceste excursii s-a făcut într-o uzină, cu elevii clasei a IX-a.

Călăuziţi de experienţa profesorilor sovietici, am făcut anul acesta o vizită cu membrii cercului de elevi din clasa a VIII-a la uzinele metalurgice din Bacău.

Vizita a fost pregătită după cum urmează:

Am luat legătura cu conducerea întreprinderii, care a repartizat un maistru tehnician care să ne conducă prin diferitele secţii. Eu am vizitat în prealabil împreună cu maistrul uzina, notînd ceea ce era mai potrivit de arătat elevilor, ţinînd seama de modul cum s-ar putea lega diferitele cunoştinţe de matematică ale elevilor de ceea ce se poate vedea în uzină.

Am fixat ziua şi ora cînd urmau să vină elevii în uzină. Înainte de aceasta le-am vorbit elevilor despre ceea ce trebuie să vadă în uzină:

— unghiuri pozitive şi negative;

— mişcarea de translaţie şi rotaţie a pieselor la diferite strunguri;

— diferite feluri de ciocane mecanice;
— instrumente de măsurat.

A urmat vizitarea uzinei. Aici elevii au primit explicații asupra unghiurilor de tăiere (pozitive și negative). Ei au văzut apoi mașina de ascuțit cuțitele de strung—unde a fost vorba iarăși despre unghiuri. Le-au fost înfățișate elevilor diferite tipuri de strunguri și li s-au explicat diferitele mișcări ce le execută piesa strungului în funcțiune (rotație, translație etc.) De asemenea li s-au arătat instrumente de precizie (șublere, compase etc.) vorbindu-li-se și despre vernier.

La secția de turnătorie, elevii au văzut diferitele combinate pe care le execută macaraua care transportă oala cu fontă topită de la gura cuptorului la tipare. La secția unde se forjează fierul li s-au arătat diferite ciocane mecanice, explicîndu-li-se în principiu cum se calculează forța cu care izbește ciocanul la fiecare bătaie.

Această vizită a elevilor în întreprindere a constituit doar un început, care va fi continuat cu mai mult succes în anul următor.

Excursii în natură

Aplicațiile practice în teren nu au putut fi făcute anul acesta în afara orașului, așa cum este indicat. Ele s-au realizat în curtea și grădina școlii. Elevii clasei a VIII-a au măsurat distanțe, unghiuri orizontale și verticale și au făcut calculele necesare pentru aflarea înălțimilor, ca aplicație la capitolul „Rezolvarea triunghiului dreptunghic".

Ca instrumente de măsurat s-au folosit teodolitul, linia gradată și în loc de lanț o sfoară de 20 metri, cu noduri din jumătate în jumătate metru. Ultimul metru al sforii era marcat din zece în zece cm cu cerneală.

Elevii celorlalte clase au calculat distanța între două puncte presupuse inaccesibile și apoi au măsurat această distanță, ajungînd la rezultate care nu se deosebeau între ele decît cu cîțiva cm. Acest lucru a făcut să crească încrederea elevilor în cunoștințele lor și în precizia metodelor de calculare.

* * *

Din cele arătate pînă aici se vede că munca profesorului în afară de clasă este destul de cuprinzătoare. Ea cere din partea profesorului o pregătire serioasă, îi cere să folosească mereu metode și mijloace noi, care să nu ducă la rutină; îi cere, de

asemenea o adîncă cunoaştere a particularităţilor elevilor, aşa încît să-i poată antrena pe toţi în studiul ştiinţelor matematice şi în aplicarea practică a cunoştinţelor.

Datorită activităţii în afară de clasă, elevii şcolii noastre s-au prezentat cu mult succes la olimpiadele de matematică şi fizică organizate de S.S.M.F., plasîndu-se în fruntea şcolilor din regiune.

Se înţelege că această activitate este încă la începutul ei, se desfăşoară încă cu multe lipsuri, care se cer a fi remediate. Numărul elevilor participanţi la cercuri este încă mic faţă de numărul total al elevilor fiecărei clase. Cea mai mare parte a activităţii cercurilor are încă un caracter teoretic. Excursiile în natură sau la întreprinderile industriale legate de o anumită temă sînt încă în faza de încercare.

O greutate pe care o întîmpinăm este lipsa de material bibliografic în limba romînă. Se simte nevoia unei literaturi ştiinţifice de specialitate care să stea la îndemîna profesorului de matematică.

Şi în această direcţie trebuie urmat exemplul sovietic: în Uniunea Sovietică s-au elaborat numeroase cărţi şi broşuri care stau la îndemîna profesorilor. (Colecţia „Biblioteca cercurilor de matematici", broşurile cu conţinut din istoria matematicilor, revista „Matematika v şkole" şi multe cărţi de matematici elementare). Este o datorie a profesorilor noştri de matematici să pornească la elaborarea materialelor de felul celui citat mai sus.

În lucrarea de faţă am încercat să expun cîteva din modestele realizări ale profesorilor din oraşul Bacău, în domeniul activităţii în afară de clasă. Aş fi mulţumit dacă această lucrare va provoca discuţii şi va îndemna şi pe alţi colegi să-şi facă cunoscute realizările lor, contribuind astfel la schimbul de experienţă şi la îmbunătăţirea metodelor noastre de lucru pentru a ridica pe o treaptă superioară nivelul învăţămîntului matematicilor în şcoala noastră. În felul acesta vom contribui şi noi, profesorii de matematici, la creşterea de cadre de înaltă calificare, atît de necesară construirii socialismului în patria noastră.

DIN EXPERIENȚA CERCURILOR DE MATEMATICĂ

OCTAV HALUNGA
Școala medie nr. 20
BUCUREȘTI

Mulți elevi din școala medie doresc să adîncească studiul matematicii, să afle, în acest domeniu, mai mult decît pot afla la orele de clasă. De aceea elevii activează cu plăcere în cadrul cercurilor de matematică din școală.

Am organizat cercurile de matematică în moduri diferite. Astfel în unii ani cercul s-a format din elevii unei singure clase, în în alți ani cercul cuprindea grupe de clase paralele; în sfîrșit, am organizat și cercuri în care activau elevii din două clase succesive — de exemplu clasele a VI-a și a VII-a, a VIII-a și a IX-a etc. În acest din urmă caz trebuia să se adîncească mai mult materia din clasa cea mai mică ori să se abordeze unele chestiuni noi pentru elevii ambelor clase, cum ar fi teoria determinanților, noțiuni de geometrie analitică sau de mecanică etc.

Rezultatele au fost totdeauna bune, pentru că aceste rezultate depind mai puțin de materia tratată și în mai mare măsură de felul în care știm să dezvoltăm interesul elevilor, să asigurăm disciplina lor și atenția lor pentru chestiunile ce se dezbat. Domeniul matematicii este așa de vast, încît orice problemă vei studia poți fi sigur că vei găsi chestiuni frumoase și interesante pentru elevi, de orice vîrstă ar fi ei. Bineînțeles, trebuie să ții socoteală de pregătirea lor anterioară; în orice caz, trebuie să lămurești toate noțiunile pe care se bazează problema tratată. Șalturile îngreuiază înțelegerea și de aceea nu trebuie să te bazezi prea mult pe perspicacitatea auditorilor, ci pe un sistem de cunoștințe temeinice, cu noțiuni sigure.

Am căutat totdeauna ca prima ședință de cerc să fie închinată actualității matematice din țară sau din lume. De pildă, într-un an activitatea cercului de matematică a început cu studierea operei lui N. I. Lobacevski, folosind cărțile „N. I. Lobacevski" de V. Holodkovski, editura „Cartea Rusă" 1946, „Geometria lui

Lobacevski și elementele de bază ale Geometriei" de B. V. Cutuzov în Editura tehnică 1952 și N. I. Lobacevski „Cercetări geometrice cu privire la teoria liniilor paralele", Editura Academiei R.P.R. 1952. Cu prilejul apariției în limba romînă a operei „Appendix" de Ianoș Bolyai (Editura Academiei R.P.R. 1954) membrii cercului au studiat viața și activitatea acestuia. Altădată elevii înșiși au cerut să li se vorbească despre „Teoria relativității" a lui A. Einstein, pentru că o serie de ziare și reviste aduseseră în discuție această chestiune.

Cînd actualitatea nu ne-a impus vreo chestiune interesantă, am deschis activitatea cercului printr-o privire generală asupra domeniului matematicilor, arătînd ce progrese s-au făcut în fiecare disciplină a matematicii, ce probleme au pasionat pe cercetători în decursul veacurilor și la ce aplicații practice au condus descoperirile teoretice.

La alcătuirea programului de lucru am ținut seama întotdeauna, de părerile și dorințele elevilor. Am folosit cu bune rezultate ajutorul „Societății de științe matematice și fizice din R.P.R." care a trimis la un moment dat școlilor o listă de subiecte pentru tratarea în cercurile de elevi a tuturor celor patru discipline matematice ce se învață în școala medie. Aceste subiecte erau foarte bine alese și potrivite pentru dezvoltarea puterii de înțelegere și a deprinderilor de calcul ale elevilor. Iată lista acestor subiecte, care se pot prescurta, multiplica și împărți în alte subiecte mai restrînse — după nivelul clasei, după interesele elevilor, după literatura matematică ce o avem la dispoziție:

Algebra

1. Calculul algebric. Identități (cu indicarea importanței și aplicațiilor lor). Considerații de omogenitate și simetrie.

2. Ecuații ce se reduc la gradul I sau II prin artificii de calcul.

3. Probleme ce se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor. Se vor da soluții aritmetice (unde este cazul) paralel cu cele algebrice.

4. Probleme de gradul I și II ce comportă discuții.

5. Valori extreme ale funcției

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

deduse din realizant.

6. Transformarea ecuațiilor cu aplicații la aflarea condiției ca rădăcinile unei ecuații de gradul II să fie într-un interval dat.

7. Transformarea expresiilor de forma:

$$\sqrt{a + \sqrt{b}}$$

8. Determinarea rădăcinilor întregi, fracționare și iraționale ale unei ecuații cu coeficienți numerici.

9. Formule de rezolvare pentru ecuațiile de gradul III și IV.

10. Logaritmi. Istorie. Sisteme de ecuații logaritmice.

11. Noțiuni de aritmetică rațională.

12. Erori. Cîte zecimale exacte are rezultatul unei operații, atunci cînd datele sînt cunoscute cu un anumit număr de zecimale.

13. Noțiuni de analiză.

14. Noțiuni de geometrie analitică.

15. Noțiuni de calculul probabilităților.

Trigonometria

1. Probleme în legătură cu compunerea și descompunerea forțelor concurente. Echilibrul corpurilor.

2. Probleme de geometrie rezolvate prin trigonometrie, paralel cu metoda geometrică.

3. Inecuații trigonometrice (legate de probleme concrete).

4. Probleme de maxim și minim rezolvate prin trigonometrie.

5. Ecuații trigonometrice (legate de probleme) cu un parametru care comportă discuții.

6. Raza cercului înscris, circumscris și razele cercurilor exînscrise.

7. Rezolvări de triunghiuri deosebite de cazurile clasice. Rezolvarea patrulaterului inscriptibil și în general.

8. Formula lui Moivre. Aplicații. Ecuații binoame.

9. Aplicații pe teren (determinări de distanțe, înălțimi etc.).

Geometria plană

1. Probleme menite să adîncească și să lărgească cunoștințele dobîndite în clasă.

2. Metode cunoscute în geometrie (locuri geometrice, reducere la o problemă cunoscută etc.). Probleme tipice care să ilustreze fiecare din aceste metode.

3. Teoreme remarcabile de geometrie: cercul lui Euler, dreapta lui Simson, teorema lui Menelaus, teorema lui Ceva, teorema lui Ptolomeu etc.

4. Metode care nu fac parte din program: omotetie, inversiune, polare reciproce etc.

5. Chestiuni metrice: aflarea înălțimilor, medianelor etc. ale unui triunghi în funcție de laturi.

6. Probleme de locuri geometrice.

7. Construcții grafice cu noțiuni de geometrografie.

8. Probleme de maxim și minim, rezolvate geometric (chestiuni interesante).

9. Priviri generale asupra unui capitol din geometrie, subliniindu-se ordinea în care se succed teoremele.

10. Metode generale: analiza, sinteza, reducerea la absurd.

Geometria în spațiu

1. Noțiuni despre triedre.

2. Noțiuni despre triunghiurile sferice.

3. Metode (ca la geometrie plană).

4. Probleme de locuri geometrice.

5. Privire generală asupra unui capitol, subliniindu-se ordinea, în care se înlănțuie teoremele.

6. Refacerea temeinică a demonstrațiilor în care intervin noțiuni de calcul infinitezimal — volumul piramidei, suprafața și volumul sferei — metoda exaustiei, metoda indivizibililor.

7. Centre de greutate, teoremele lui Guldin.

Toate aceste chestiuni sînt foarte frumoase. Ele constituie o completare firească a materiei studiate în clasă și se găsesc în toate tratatele de matematică mai dezvoltate. Unele din ele au fost tratate în „Gazeta matematică și fizică". Aceste subiecte nu pot fi însă tratate toate într-un an, chiar dacă cercul s-ar întruni în fiecare săptămînă, deoarece unele cer adînciri pe durata mai multor ore. Putem însă selecționa anumite chestiuni pe care să le tratăm în cadrul cercului, în conformitate cu nivelul de pregătire al membrilor cercului și cu timpul disponibil.

Voi da mai jos planificarea subiectelor tratate la cercul de matematică de elevii claselor a X-a „A" și „B" și a XI-a „B" de la Școala medie de băieți nr. 20 din București în anul școlar 1953/54. Subiectele au fost alese de către elevi, după ce au luat cunoștință de lista tuturor subiectelor trimise de către S.Ș.M.F. și au fost dezbătute în ordinea următoare:

1. *Borşan, clasa a X-a „B"*: Aflarea înălţimilor medianelor şi bisectoarelor unui triunghi în funcţie de laturi. Teorema lui Stewart. Raza cercului circumscris, raza cercului înscris şi razele cercurilor exînscrise triunghiului.

(3 şedinţe de cîte o oră).

2. *Niculescu, clasa a X-a „B"*: Dreapta lui Simson. Teorema lui Menelaus, Teorema lui Ceva, Teorema lui Ptolomeu.

(2 şedinţe de cîte o oră).

3. *Şefler, clasa a X-a „A"*: Transformarea ecuaţiilor cu aplicaţii la aflarea condiţiei ca rădăcinile unei ecuaţii de gradul doi să fie într-un interval dat.

(2 şedinţe de cîte o oră).

4. *Bilcea, clasa a XI-a „B"*: Noţiuni despre triedre şi proprietăţile triedrelor.

(2 şedinţe de cîte o oră).

5. *Voiculescu, clasa a X-a „A"*: Determinarea rădăcinilor întregi, fracţionare şi iraţionale ale unei ecuaţii cu coeficienţi numerici.

(3 şedinţe de cîte o oră).

6. *Popescu Bogdan, clasa a X-a „A"*: Noţiuni de aritmetică raţionată. Despre divizibilitate şi numere prime.

(3 şedinţe de cîte o oră).

7. *Anghel, clasa a XI-a „B"*: Ecuaţii trigonometrice cu un parametru. Discuţie.

(2 şedinţe de cîte o oră).

8. *Mihai C., clasa a XI-a „B"*: Refacerea temeinică a demonstraţiilor în care intervin noţiuni de calcul infinitezimal. Metoda exaustiei şi metoda indivizibililor.

(2 şedinţe de cîte o oră).

Şedinţele cercului s-au ţinut de două ori pe lună.

Bineînţeles, pentru toate aceste probleme li s-a indicat elevilor literatura matematică necesară, li s-a acordat timpul necesar pentru studiul chestiunilor, li s-au dat consultaţii pentru înlăturarea greutăţilor întîmpinate în alcătuirea referatelor. Elevii trebuiau să stăpînească atît de bine chestiunea, încît să poată face demonstraţiile necesare fără a se folosi de referatul scris şi să poată da toate lămuririle ce li s-ar fi cerut de către elevii care îi ascultau.

Prin tratarea acestor subiecte orizontul matematic al elevilor s-a lărgit foarte mult şi a crescut curajul lor de a adînci şi alte subiecte, pentru care mi-au cerut să le recomand cărţi. Cei mai mulţi din aceşti elevi sînt acum studenţi la Institutul politehnic

sau la alte institute tehnice şi au fost corespondenţi ai „Gazetei matematice şi fizice".

În anul şcolar 1949-50, la cercul de matematici al claselor a X-a s-au tratat următoarele subiecte:

1. Privire istorică asupra dezvoltării geometriei de la egipteni la Euclid.
2. Lobacevski, Copernic al geometriei.
3. Gauss şi Bolyai.
4. Relativitatea restrînsă a lui Einstein.
5. Funcţia exponenţială şi logaritmică. Istoric şi aplicaţie în fizică şi biologie.
6. Probleme de fizică-matematică.
7. Nepăsarea faţă de oamenii de ştiinţă în regimul burghez şi încurajarea lor în Uniunea Sovietică şi în ţările de democraţie populară; Einstein, Joliot Curie.
8. Hilbert şi axiomele geometriei.

Şi aceste subiecte au trezit interesul elevilor. La discuţii unii au venit cu completări din lecturile lor în afara clasei, alţii şi-au exprimat nedumeriri asupra unor puncte, au pus întrebări, au cerut o bibliografie mai bogată, pentru a adînci şi mai mult chestiunile tratate. Discuţiile se prelungeau între elevi şi în afara şedinţelor de cerc — în clasă, în recreaţie, pe drum, acasă — aşa că de cele discutate la cerc luau cunoştinţă şi cei care nu fuseseră prezenţi. Astfel la şedinţele următoare numărul auditorilor se mărea.

Trebuie să amintesc că şedinţele nu se ţineau în cercul închis al acelora care au fost înscrişi la început. La cerc putea să vină orice elev din orice clasă şi cu orice nivel de pregătire, dacă arăta interes pentru activitatea noastră.

* * *

Cînd interesul elevilor din cerc pentru aceste chestiuni se micşora, mergeam pe o altă linie. De cîţiva ani s-au ţinut regulat concursurile organizate de „Gazeta matematică şi fizică" în cadrul cărora s-au dat pentru fiecare clasă probleme foarte frumoase, ce se găsesc publicate în gazetă. Am încercat să rezolv aceste probleme cu membrii cercului de matematică. O dată cu aceasta, am comentat partea de teorie care intervenea la fiecare problemă şi metodele de rezolvare. Era o muncă plăcută nu numai pentru elevi, ci şi pentru mine. Am lucrat astfel nu numai problemele ce fuseseră date la clasa în care erau membrii cercului, ci şi problemele date la clasele inferioare acesteia. În felul acesta se făcea o recapitulare la un nivel mai înalt şi într-un spirit de sinteză, ceea ce

era un lucru nou. Gradarea acestor exerciții și probleme, după clase și după etapele concursului, înlesnește alegerea lor conform planificării. Iată de pildă, cîteva probleme frumoase propuse pentru concursul din 6 mai 1951, la etapa regională, pentru clasa a XI-a și pe care membrii cercului nostru le-au rezolvat cu interes și plăcere:

I. Opt oglinzi plane egale sînt așezate astfel, încît secțiunea lor cu un plan este un octogon regulat $ABCDEFGH$, înscris într-un cerc de rază r și cu centrul O. Din mijlocul N al razei OA pleacă o rază de lumină ce cade în mijlocul M_1 al oglinzii AB, apoi se reflectă și așa mai departe.

a) Să se arate că reflecția se produce în circuit închis.

b) Să se calculeze un parcurs întreg al ei.

c) Să se afle unde trebuie plasată sursa luminoasă M pentru ca raza care se reflectă din M_1 să ajungă într-un colț al octogonului.

II. În trapezul $ABCD$, AB fiind baza mică și CD baza mare, E și F sînt respectiv mijloacele laturilor BC și AD, iar I intersecția diagonalelor. Să se demonstreze că:

$$\frac{\text{aria } ABEF}{\text{aria } FECD} > \frac{\text{aria } ABI}{\text{aria } IDC}$$

III. Pe un plan înclinat cu unghiul α față de planul orizontal este așezat un corp de greutate G. Care este forța N cu care apasă acest corp pe planul inclinat?

Aplicație: $\alpha = 30°$, $\alpha = 45°$ și $\alpha = 60°$

Astfel de probleme dau și posibilitatea realizării unei corelații interesante a matematicii cu fizica. Membrii cercului au rezolvat în total 12 probleme, material destul de bogat pentru 4—5 ședințe de lucru.

Foloseam la cercul de matematică și probleme date la concursurile de admitere în institutele tehnice și în facultățile de fizică și matematică din țară. Aceste probleme care se găsesc, de asemenea, în „Gazeta matematică și fizică" sînt așa fel alcătuite, încît să cuprindă chestiunile cele mai importante ale materiei studiate în școala medie, dar la un nivel mai ridicat. Ele pot fi tratate cu succes la cercurile de matematică, mai ales de către elevii din ultima clasă. Nu a fost serie de elevi căreia să nu-i fi dat spre rezolvare în cadrul cercului următoarea problemă, propusă la concursul de admitere în Institutul politehnic din București, în anul 1946, de către cunoscutul geometru Al. Pantazi:

Se dă un paralelogram $ABCD$. Cercul circumscris triunghiului ABD taie latura BC în E și prelungirea laturii DC în F.

Dreptele BF și AD se taie în G. Dreptele AB și DE se taie în H. Paralela din G la AB taie paralela din H la AD în J; iar BF și ED se taie în I. Să se demonstreze:

1. Asemănarea triunghiurilor BIE și DFI;
2. Asemănarea triunghiurilor GID și HIB;
3. Paralelismul dreptelor GH și FE;
4. Că punctele I, J, C sînt colineare;
5. Egalitatea segmentelor AF și AE;
6. Că punctele G, H, B, D sînt pe același cerc (fig. 1).

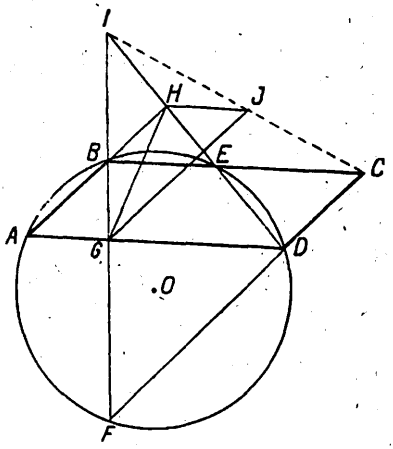


Fig. 1

Această problemă atinge aproape toate cunoștințele mai importante de geometrie plană pe care trebuie să le cunoască un elev, pe lîngă cele mai interesante metode de a demonstra egalitatea a două segmente, asemănarea triunghiurilor, paralelismul a două drepte, metoda de a demonstra că trei puncte sînt colineare și metoda de a demonstra că patru puncte sînt conciclice. Din rezolvarea acestei probleme rezultă învățătura că pentru a stăpîni geometria nu-i nevoie să rezolvi prea multe probleme ci mai degrabă, să rezolvi probleme bine alese, în care să se cuprindă toată materia, probleme de genul aceleia de mai sus.

Asemenea probleme care formează cel mai bun material pentru cercurile de matematică din școala medie, pot fi găsite în colecția „Gazetei matematice și fizice". Profesorul trebuie să le extragă, să le studieze și să le rezolve el întîi și apoi să le dea spre rezolvare membrilor cercului, comentîndu-le cu ei în toate amănuntele, punînd în evidență metodele cele mai juste de rezolvare. Le-am arătat elevilor că ei trebuie să-și însușească temeinic aceste metode, deoarece ele constituie cheia cu care putem rezolva multe probleme. De asemenea, i-am făcut să înțeleagă că reușim să rezolvăm cu atît mai ușor problemele practice cu cît avem cunoștințe teoretice mai întinse și mai adînci. De exemplu teorema că linia mijlocie a unui triunghi este paralelă și egală cu jumătatea laturii a treia se rezolvă prin metoda ega-

lității triunghiurilor și pe baza proprietăților paralelogramului cînd cunoaștem numai cartea I a lui Euclid. Dacă cunoaștem însă și cartea a II-a, relativ la segmente proporționale, atunci reciproca teoremei lui Thales demonstrează singură teorema amintită, deci mult mai simplu, mai ușor. De ce? Pentru că teoria cuprinsă în cartea a II-a include întrebuințarea egalității triunghiului și nu mai e nevoie s-o întrebuințăm la teorema amintită. Deci, cu cît ajungem la cunoștințe teoretice mai adînci, cu atît acestea sînt mai sintetice și mai generale, de aceea se aplică la mai multe cazuri particulare.

*

* *

De multe ori ne-am ocupat în cadrul cercului de dezvoltarea unor paragrafe sau unor capitole din manual. Astfel, în par. 70 al manualului de algebră pentru clasele VIII-X, sub titlul „Demonstrarea unei neegalități se cuprinde teorema: „*Dacă suma numerelor* x *și* y *este constantă, produsul lor e maxim, cînd* $x = y$". Or, se știe că această teoremă este prima dintr-un capitol important al algebrei, cunoscut prin alte cărți sub titlul: „*Cercetarea directă a cîtorva maxime și minime*". Studierea completă a acestor probleme de maxim și minim se impune cu atît mai mult cu cît sînt necesare la rezolvarea problemelor din capitolul XIII „*Inegalități*" din *Culegerea de probleme de algebră*, printre care se găsește și inegalitatea interesantă:

$$\frac{x+y+z}{3} > \sqrt[3]{xyz}$$

care se poate generaliza:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} > \sqrt[n]{x_1 . x_2 . x_3 \ldots x_n}$$

De asemenea, la geometrie, cînd este vorba de a stabili cîte puncte împart un segment dat într-un raport dat, dacă introducem noțiunea de segment orientat așa fel ca să avem

$$\overline{AB} + \overline{BA} = 0 \text{ sau } \overline{AB} = -\overline{BA},$$

atunci putem ușor ajunge la diviziunea armonică a patru puncte de pe o dreaptă. Două din aceste puncte, M și N, sînt conjugate armonic cu alte două puncte, A și B, cînd avem relațiunea:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}$$

Exprimarea acestei relaţii prin relaţiile echivalente

$$\overline{OA^2} = \overline{OM} \times \overline{ON}$$

unde O este mijlocul lui AB, sau relaţia

$$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AM}} + \frac{1}{\overline{AN}},$$

ca şi celelalte teoreme interesante cu privire la *fascicolul armonic* pot constitui un bun mijloc de introducere a elevilor în geometria superioară. Dacă la diviziunea şi fascicolul armonic adăugăm raportul anarmonic a patru puncte în linie dreaptă şi polul şi polara în raport cu un unghi sau cu un cerc atunci formăm subiecte dintre cele mai atrăgătoare pentru cercul matematic.

Nu numai extinderea unor capitole mai interesante din manual, dar chiar rezolvarea problemelor mai grele dintr-un capitol al culegerii de probleme pot fi transformate în subiecte pentru cercul de matematică. Astfel, rezolvarea ecuaţiei de gradul II (Culegerea pentru clasele VIII—IX, ed. 1948)

$$(a^2 - b^2)\ x^2 + ab = (a^2 + b^2)\ x,$$

al cărei discriminant nu se vede că este un pătrat perfect, mi-a dat prilejul de a expune metoda coeficienţilor nedeterminanţi pentru extragerea rădăcinii pătrate dintr-un polinom, sau de a rezolva ecuaţia cu ajutorul relaţiilor dintre rădăcini şi coeficienţi, sau de a pune discriminantul sub forma

$$\Delta = [(x \pm y) \pm u]^2$$

Printr-o discuţie adîncită elevii au aflat cine este x, y şi u. De asemenea, rezolvarea acestei ecuaţii a dat elevilor prilejul să întrebuinţeze mai multe artificii de calcul, punînd cantitatea $(a^2 + b^2)^2$ în funcţie de cantitatea $(a^2 - b^2)^2$. Astfel, ecuaţia a fost rezolvată, pînă la urmă, prin vreo şase metode, de unde la început elevii n-au putut s-o rezolve de loc, căci numai întrebuinţarea formulei cunoscute nu ducea la rezultat.

Rezolvarea problemelor din Culegerea de probleme de algebră pentru clasele XIII—X, capitolul XV constituie de asemenea un material interesant pentru cercul de matematică (61 probleme cu cîte 3 puncte fiecare, deci 183 exerciţii şi probleme). Nici nu

pot fi rezolvate într-un singur an, încît trebuie să se continue rezolvarea lor şi în anul următor.

*
* *

În anul 1954/55, activitatea la cercul de matematică a devenit mai strîns legată de practică. Am studiat şi temele:

1. Măsurarea înălţimii unui turn a cărui bază nu era accesibilă;

2. Ridicarea terenului ocupat de şcoala medie de băieţi nr. 20.

Tratarea acestor subiecte a prilejuit o colaborare rodnică între membrii cercului şi unii absolvenţi ai şcolii, în prezent studenţi la Institutul politehnic. Aceştia ne-au procurat un teodolit pentru măsurat unghiuri, au făcut cunoscute membrilor cercului o serie de metode de calcul etc. Am avut atunci o şedinţă de mai multe ore în care elevii au mînuit instrumente de precizie, au confruntat metode şi procedee şi au cules date, care apoi au format materialul necesar pentru calcule şi pentru găsirea rezultatelor cerute.

*
* *

În sfîrşit, nu trebuie să uităm că rolul cercului de matematică este şi acela de a deprinde pe elevi cu munca individuală, cu studiul literaturii de specialitate. În acest scop am folosit cu bune rezultate materialele apărute în „Gazeta matematică şi fizică". Am atras atenţia elevilor asupra faptului că această revistă publică regulat cîte unul sau două articole ce tratează chestiuni interesante de matematică şi cîte unul sau două articole ce tratează chestiuni interesante de fizică, prezintă probleme rezolvate de matematică şi fizică legate de cunoştinţele teoretice predate în clasă, precum şi chestiuni de examen. De asemenea, i-am făcut atenţi asupra rubricii „Probleme propuse". Treptat mulţi elevi încep să studieze articolele din gazetă, să rezolve problemele şi chiar să propună ei înşişi probleme. Astfel se dezvoltă gîndirea lor matematică, gîndirea ştiinţifică în general vorbind şi fac mari progrese în însuşirea cunoştinţelor teoretice şi practice.

Citirea unei cărţi de matematică nu este lucru uşor pentru un elev de şcoală medie, deoarece o asemenea carte cuprinde de multe ori lucruri deasupra nivelului de cunoştinţe al elevului. Uneori o simplă prescurtare de notaţie, pe care n-o cunoaşte, îl împiedică pe elev să meargă mai departe. De aceea este datoria profesorului de matematică să familiarizeze pe elevii săi cu lectura

unor asemenea cărți. Dacă mai înainte exista scuza că nu prea existau asemenea cărți în limba română, astăzi această scuză nu se mai poate aduce. În Biblioteca Societății de științe matematice și fizice din R.P.R. au apărut pînă acum numeroase volume care tratează diferite chestiuni, de la „Teoria numerelor" pînă la „Geometria proiectivă". Fiecare din aceste chestiuni poate forma obiect de studiu pentru cercul matematic.

Prin studierea literaturii de specialitate elevii își dau seama că pentru a ajunge să cunoști bine o anumită problemă trebuie să ai și o serie de cunoștințe de bază. De aci îndemnul ca elevii să lărgească și să adîncească cunoștințele de bază predate în școală. Uneori, cărțile de matematică, în totalitatea lor sînt prea grele pentru elevi. În orice caz însă părți din acestea, anumite capitole, anumite paragrafe pot fi studiate. Ele îi ajută pe elevi să vadă cum este abordată o problemă de matematică sau de fizică, cum se rezolvă o asemenea problemă. Unii elevi își alcătuiesc chiar o bibliotecă științifică.

Am găsit multe subiecte frumoase și interesante pentru cercurile de matematică în seria matematică-fizică a Analelor romîno-sovietice. De pildă, articolul lui Z. N. Poliakovski, „Metodica rezolvării problemelor cu poliedre" din nr. 3, aprilie-iulie 1950 mi-a dat material pentru mai multe ședințe ale cercului. În special problemele asupra secțiunilor făcute în poliedre, prin plane înclinate pe bază, sub diferite unghiuri, au contribuit foarte mult la formarea reprezentărilor spațiale ale elevilor și la realizarea legăturii între cunoștințele lor de geometrie plană și geometrie în spațiu pe de o parte și cunoștințele de algebră și trigonometrie pe de altă parte. De unde mai înainte asemenea probleme păreau de nepătruns, astăzi elevii le înțeleg cu multă ușurință.

O lipsă a cercurilor de matematică din școlile noastre a fost aceea că ele au activat cu totul separat de cercurile de fizică, așa încît legătura cu fizica nu s-a făcut decît atunci cînd s-au tratat unele probleme care cereau și cunoștințe de fizică. Multă vreme a fost foarte redusă legătura cu tehnica. Membrii cercurilor nu aveau un contact direct cu tineretul muncitor din fabrici și uzine.

Într-un articol din „Revista matematică și fizică" nr. 5 din mai 1953, marele savant rus Kolmogorov vorbește și de rolul cercurilor de matematici din școli. El arată că în cadrul acestor cercuri elevii își încearcă forțele la rezolvarea unor probleme mai grele, află mai îndeaproape modul cum rezolvă știința problemele matematice mai dificile și modul cum se aplică matematica. Kolmogorov atrage în același timp atenția că cercurile nu pot

suplini întreaga muncă de antrenare a tînărului matematician, care se realizează prin rezolvarea individuală a problemelor, independent de participarea la cercuri.

Predarea matematicii la clasa a VI-a, unde elevii aplică raționamentul la rezolvarea problemelor de geometrie plană, este piatra de încercare pentru calitățile pedagogice ale profesorului de matematică. Deși pentru această clasă sînt prevăzute în planul de învățămînt suficiente ore de matematică, în cadrul cărora profesorul poate realiza în bune condițiuni pregătirea elevilor săi, sînt necesare și activități în cercul de matematică. În cadrul cercurilor se pot efectua calcule numerice și desene geometrice. Am făcut cu membrii cercului exerciții variate de transformări a unităților de măsuri. De asemenea am sistematizat cu ei numeroase exerciții la care se aplică proprietățile operațiilor neefectuate — comutativitatea, asociativitatea, dissociativitatea și distributivitatea — care formează baza calculului aritmetic prescurtat și a calculului algebric. Am făcut pe baza acestor proprietăți tot felul de operații prescurtate. Am adîncit operația împărțirii și raționamentul la probleme cu împărțiri în cele două cazuri: cînd termenii împărțirii sînt numere concrete de același fel, cînd termenii sînt numere deosebite și cînd deîmpărțitul este concret iar împărțitorul abstract. Am întărit raționamentul matematic prin rezolvări de probleme cu numere întregi și zecimale din ce în ce mai grele, pînă cînd elevii au ajuns să rezolve pe cale aritmetică probleme de tipul următor, de pildă: Cineva cumpără 30 m stofă de două calități, pe care a plătit 1968 lei. Cîți metri a cumpărat din fiecare calitate de stofă, dacă metrul de calitatea I costă 80 lei și metrul de calitatea a II-a costă 56 lei?

Elevii și-au format deprinderi temeinice de rezolvarea operațiilor cu fracții ordinare, așa încît pentru ei nu mai prezintă nici o greutate un exercițiu ca cel de felul următor, de pildă, unde se cere să se calculeze expresia:

$$E = \frac{\frac{15}{16} + \frac{7}{12} \times 3\frac{1}{4} - \left(\frac{7}{8} \times \frac{37}{21} - \frac{1}{3}\right)}{\frac{5}{6} - \frac{3}{7} \times \frac{1}{2}}$$

Cu elevii din clasa a VI-a am adîncit la cercul de matematică capitolul privitor la rapoarte și proporții, așa fel ca ei să poată demonstra toate proprietățile proporțiilor pe exemple literare și să rezolve cu ajutorul acestor proprietăți probleme în care

se cere să se afle două numere cunoscîndu-se suma şi raportul lor. De asemenea problemele cu fracţii ordinare şi problemele cu procente trebuie să fie rezolvate de elevi cu siguranţă în raţionament şi în calcul.

Raţionamentul matematic se poate dezvolta foarte mult şi prin problemele de geometrie în legătură cu materia clasei a VI-a dacă stăruim la cerc asupra însemnătăţii metodei egalităţii triunghiurilor pentru demonstrarea egalităţii a două segmente sau pentru demonstrarea egalităţii a două unghiuri. La problemele de construcţii grafice, trebuie să ţinem seama nu numai de aspectul exterior al desenului, ci şi de exactitatea şi precizîunea construcţiilor şi mai ales de justificarea raţională a acestor construcţii. Dacă exerciţiile practice care cer utilizarea instrumentelor geometrice — compas, riglă, echer, raportor — sînt date pe exemple numerice, atunci contribuim şi la realizarea legăturii între teorie şi practică. Aceste exerciţii practice cer timp şi, de aceea, dacă în general se trece uşor asupra lor în orele de curs, nu trebuie neglijate la cercul de matematică.

La clasa a VII-a, descompunerea în factori a expresiilor algebrice poate fi reluată la cercul de matematică prin exerciţii sistematice de greutăţi diferite, care pot merge pînă la descompunerea în factori a trinomului de gradul doi, cu coeficienţi numerici, fără a-i cunoaşte rădăcinile. Activitatea cercului elevilor din această clasă trebuie să se concentreze asupra rezolvării problemelor care se rezolvă prin ecuaţii de gradul I cu una şi două necunoscute, întrebuinţîndu-se şi metode aritmetice de rezolvare, acolo unde este posibil, ca şi asupra operaţiilor cu fracţii algebrice mai complicate. La geometrie manualul cuprinde destule probleme frumoase, asupra cărora se poata insista oricît de mult.

Problemele care s-au dat la Olimpiadele de matematică pentru clasele V—VII sînt de asemenea un foarte bun material ce se poate utiliza la cercurile de matematică.

Am folosit cu bune rezultate, la cerc, rezolvarea problemelor de geometrie pe figuri la o scară mărită, pe coale de desen. În felul acesta se realizează frumoase planşe care pot fi întrebuinţate apoi la clasă ca material didactic.

Dar cel mai mare interes l-a trezit rezolvarea problemelor practice, pe teren, în curtea şcolii. De pildă, a fost măsurată distanţa dintre două puncte A şi B (fig. 2) între care nu se poate trece cu lanţul de măsurat din cauza unui obstacol închipuit: o mlaştină, o pădure. De asemenea, s-a măsurat pe teren distanţa dintre două puncte P şi Q (fig. 3), din care unul este inaccesibil.

Astfel de probleme s-au rezolvat prin metoda egalității triunghiurilor.

„Gazeta matematică și fizică" are în fiecare număr un capitol special intitulat „Exerciții și probleme pentru școala de 7 ani" cuprinzînd frumoase probleme de aritmetică, algebră și

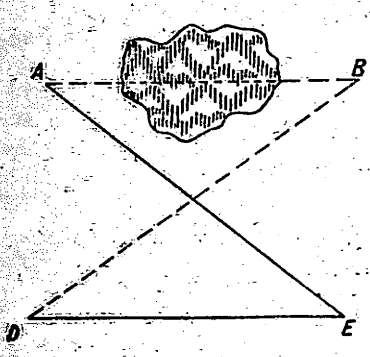


Fig. 2

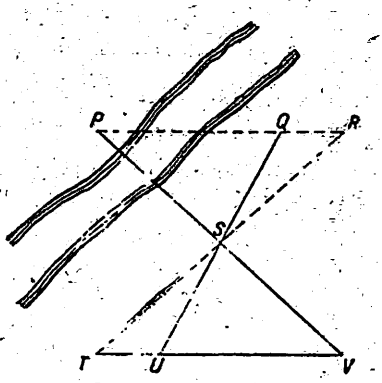


Fig. 3

geometrie. Aceste exerciții și probleme rămîn neutilizate dacă profesorul de matematică nu le scoate în evidență frumusețea și utilitatea.

Rezolvarea problemelor din „Gazeta matematică și fizică" în cadrul cercului de matematică, îi deprinde pe elevi cu întrebuințarea acestei reviste, ceea ce le va dezvolta gustul pentru munca individuală.

La cerc profesorul indică elevilor problemele potrivite pentru pregătirea fiecăruia; aci el înlătură piedicile ce stau în calea elevilor care se ocupă cu matematica, le recomandă literatura corespunzătoare unei anumite chestiuni, îi învață cum să redacteze o problemă care trebuie trimisă la gazetă, după ce a fost rezolvată. Bineînțeles, profesorul nu intervine în crearea problemelor pe care elevii le trimit la gazetă, însă îi poate ajuta să formuleze corect aceste probleme.

Cît privește organizarea activității matematice în cercurile de elevi, se pot căpăta sugestii și subiecte interesante din articolul profesorului P. Ghermanovici din Leningrad: „*Activitatea extrașcolară matematică în clasele V—VII*" traducere din „*Matematica v škole*" și publicat în nr. 6 și 7 ale „Gazetei matematice și fizice" din iunie și iulie 1952.

„Clubul matematicienilor veseli" este prima formă de activitate extrașcolară în masă a elevilor clasei a V-a, și în parte a elevilor clasei a VI-a care pot fi atrași în acest club începînd din a doua jumătate a anului școlar.

Programul de lucru al clubului se compune din:

a) Rebusuri matematice.

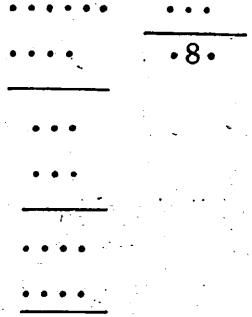
b) Scamatorii și ghicitori matematice.

c) Chestiuni și probleme cu caracter logic.

d) Întrebări aritmetice.

e) Alcătuirea și rezolvarea problemelor care reflectă construirea socialismului în R.P.R.

Iată un model de rebus matematic: Să se reconstituie următoarea împărțire efectuată, în care aproape toate cifrele șterse sînt înlocuite cu puncte:



Pentru „scamatorii" și ghicitori matematice se poate da următorul exemplu:

Ionescu, gîndește-te la un număr format din trei cifre. Scrie-l pe o bucată de hîrtie și transmite hîrtia lui Popescu.

Popescu, adaugă numărului, pe care-l vezi, același număr. Obții astfel un număr de șase cifre. Transmite hîrtia lui Ștefănescu.

Ștefănescu, împarte numărul de șase cifre la 13. Transcrie cîtul pe o hîrtie separată și transmite-l lui Teodorescu.

Teodorescu, împarte acest număr la 11. Cîtul găsit scrie-l pe o hîrtie separată și transmite-l lui Alexandrescu.

Alexandrescu, împarte numărul pe care l-ai primit prin 7. Scrie cîtul pe altă hîrtie și transmite-mi-l mie.

Atențiune! Acum voi spune numărul la care s-a gîndit Ionescu. Ionescu, te-ai gîndit la numărul cutare...

Și acum, gîndiți-vă, cum s-a întîmplat de am găsit numărul la care s-a gîndit Ionescu?

Întrebări și probleme cu caracter logic se găsesc în orice culegere de probleme. Iată un singur exemplu: Produsul a patru numere consecutive este egal cu 3024. Să se găsească aceste numere.

Cercul de aritmetică se organizează pentru elevii din clasa a VI-a și pentru elevii din clasa a V-a mai avansați. Pot fi membri ai acestui cerc și elevi din clasa a VII-a. Referatele prezentate la cerc pot avea următoarele teme:

Sisteme de numerație;
Numărul și istoria lui;
Metoda falsei ipoteze;
Algoritmul lui Euclid;
Criteriile de divizibilitate cu 7, 11 și 13.

La acestea se pot adăuga diferite chestiuni de aritmetică teoretică, care pot fi luate din „Aritmetica pentru școlile pedagogice" și „Culegerea de probleme de aritmetică" de Ion Ionescu apărută în biblioteca Gazeta matematică.

Programul de activitate al cercului poate fi format din: prezentarea unor referate teoretice; rezolvarea unor probleme aritmetice mai dificile; adunarea materialului, compunerea și rezolvarea problemelor care reflectă succesele oamenilor muncii din R.P.R., din U.R.S.S. și din țările de democrație populară; rezolvarea unor probleme cu caracter logic și probleme de demonstrație; studierea metodelor de calcul rapid; întrebări aritmetice etc.

Iată un exemplu de problemă mai dificilă: Doi tovarăși au împreună 184 lei. După ce unul din ei a cheltuit $\frac{3}{11}$ din banii săi, iar al doilea $\frac{2}{9}$ din banii lui, au rămas împreună cu 137 lei. Câți lei a avut fiecare?

Iată o problemă, care cere și introducerea unor elemente de algebră:

Să se arate că un număr format din 4 cifre de forma *abab* nu poate fi pătrat perfect.

Planul de activitate al cercului de matematică pentru clasa a VII-a poate să cuprindă următoarele puncte: referate prezentate de elevi; rezolvarea unor probleme de aritmetică mai dificile; adunarea materialului și alcătuirea de probleme care să reflecte construirea socialismului; rezolvarea unor probleme de algebră și geometrie; rezolvarea unor probleme cu caracter logic; sofismele și erorile în raționamentele matematice.

Materialul pentru acest ultim punct poate fi ales din cărțile V. M. Bradis și A. C. Harceva: „Erori în raționamentele mate-

matice" şi „Unde este eroarea?" de Idtzman şi Trir. Bunăoară, problema nr. 553 din nr. 9 al „Gazetei matematice şi fizice" din septembrie 1956 cere aflarea unei asemenea greşeli în demonstrarea unei reguli de aritmetică.

Iată cîteva exemple de probleme ce pot fi date pentru rezolvare individuală membrilor cercului de matematică al clasei a VII-a:

Ce este mai mare: 100^{20} sau 9000^{10}

Să se arate că pentru orice valoare a lui a, expresia $(a-1)\,(a-3)\,(a-4)\,(a-6)+10$ este un număr pozitiv.

Să se efectueze:

$$\frac{4}{1-a}+\frac{1}{1+8}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}+\frac{8}{1+a^8}+\frac{16}{1+a^{16}}$$

Să se arate că expresia:

$$\frac{m}{3}+\frac{m^2}{2}+\frac{m^3}{6},$$

unde m este un număr întreg oarecare, este totdeauna un număr întreg.

Se dau o dreaptă şi de o parte a ei două puncte. Să se găsească un punct pe această dreaptă, astfel încît suma distanţelor de la acesta la cele două puncte să fie minimă.

Întrecerile pe echipe

Întrecerile pe echipe între clase paralele pentru rezolvarea problemelor, constituie o formă importantă în activitatea extraşcolară, ele pregătind cu succes Olimpiadele matematice.

Autorul sovietic a experimentat asemenea întreceri şi recomandă următoarea organizare a întrecerilor, pe echipe, în rezolvarea problemelor.

Clasele paralele formează echipe de 8—10 elevi, care sînt trecuţi pe liste în ordinea pregătirii lor la matematici, după părerea profesorului şi după părerea generală a clasei. Cel mai bun matematician al clasei este trecut în listă la nr. 1, următorul la nr. 2 ş.a.m.d.

Se pregătesc apoi 4—5 probleme de greutate inegală. Echipele iau loc una în faţa celeilalte, în ordinea numerelor de pe listă. Primilor doi elevi din fiecare echipă li se dă aceeaşi problemă,

însemnată cu nr. 1, următorilor doi elevi, trecuți în listă sub nr. 2 li se dă problema nr. 2 ș.a.m.d.

Întrecerea are loc sub forma de lucrare scrisă, pentru care se acordă o oră.

Serata matematică

În școlile sovietice, serata matematică este o formă foarte populară de activitate extrașcolară.

Dacă în școală a avut loc Olimpiada matematică, atunci una din seratele matematice trebuie consacrată integral Olimpiadei terminate. Atunci se face o dare de seamă asupra rezultatelor Olimpiadei și premierea festivă a învingătorilor la Olimpiadă. Dacă serata are loc înaintea Olimpiadei, atunci ea conține două părți. În partea întîi profesorul poate prezenta o comunicare cu o anumită temă, de pildă, cu tema „Există oare cel mai mare număr prim?" Cu această ocazie el poate aminti despre marele matematician rus P. L. Cebîșev și despre formula dedusă de el, care caracterizează numărul numerelor prime cuprinse între 1 și un număr arbitrar N.

Partea a doua a seratei va avea un caracter distractiv cu „scamatorii" matematice și întrebări matematice.

Nu se vor organiza decît două serate pe an, pentru a nu se dăuna celorlalte activități matematice.

Gazeta de perete

Am experimentat editarea unei gazete de perete la cursul seral, la clasele a VIII-a „A", „E" și „G". Elevii nu aveau deprinderi sigure de calcul, fiindcă nu cunoșteau precis regulile asupra operațiilor cu fracții ordinare algebrice, asupra operațiilor neefectuate, asupra calculului cu puteri și radicali. Cerîndu-le să lucreze o gazetă de perete care să conțină formularea prescurtată a regulilor de calcul i-am făcut să se preocupe mai îndeaproape de acestea și cu acest prilej le-au învățat bine. Am cerut ca fiecare elev sau fiecare grupă de doi elevi, așa cum stau în bănci, să alcătuiască după caietul de notițe și după carte o listă a regulilor amintite mai sus, exprimate prin cuvinte și prin formula respectivă. De exemplu:

— Pentru a înmulți mai mulți radicali care au același indice se înmulțesc cantitățile de sub radical și se extrage rădăcina din produs.

$$\sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{B} \cdot \sqrt[3]{C} = \sqrt[3]{A \cdot B \cdot C}$$

— Pentru a ridica un produs neefectuat la o putere, ridicăm fiecare factor la acea putere şi apoi înmulţim rezultatele:

$$(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$$

Acel elev sau acea grupă care a ştiut să formuleze mai bine şi mai complet toate regulile învăţate, trecea regulile pe curat, pe o coală mare de desen, care constituia un număr special al gazetei matematice de perete a clasei respective. Munca aceasta pentru formularea regulilor şi alcătuirea listei acestor reguli, cît şi afişarea gazetei în clasă, au stîrnit şi curiozitatea celor mai indolenţi elevi, antrenîndu-i în muncă.

În alt număr al gazetei de perete matematice s-au publicat exerciţiile şi problemele ce s-au dat la etapa pe şcoală a Olimpiadei matematice, în redactarea cea mai bună făcută de un elev din clasă, după ce s-a cerut această redactare de la toţi elevii care au luat parte la Olimpiadă. În acest mod s-au popularizat problemele date la Olimpiadă şi s-a înfăţişat un model de redactare a celei mai bune metode de rezolvare a problemelor.

Gazeta matematică de perete poate critica lipsurile elevilor în studierea matematicii, poate da informaţii asupra activităţii altor clase, a cercurilor de matematică, a „Gazetei de matematică şi fizică". Ea poate aduce la cunoştinţa elevilor cărţile de matematică nou apărute, problemele date la concursurile de admitere în învăţămîntul superior, precum şi probleme date la Olimpiade în toate etapele acestora. De asemenea, gazeta poate publica soluţiile unor probleme interesante, poate aduce ştiri despre activitatea cercurilor de matematică de la Universitate etc.

Trei pînă la patru numere de gazetă pe an sînt suficiente ca să întreţină interesul elevilor. Acestea pot juca, în mic, rolul pe care „Gazeta matematică şi fizică" îl joacă, în mare, printre cititorii ei.

* * *

Prin lărgirea activităţii matematice în cercurile de matematică, dincolo de lecţiile obişnuite, profesorul contribuie la educarea patriotismului şi mîndriei naţionale, punînd în contact pe elevi cu materialul istoric şi biografic al şcolii matematice româneşti.

În al doilea rînd profesorul face educaţia elevilor săi în spiritul internaţionalismului dacă le aduce la cunoştinţă materialul istoric şi biografic despre marii matematicieni ai celorlalte popoare.

Pe de altă parte el poate pune temelia, pentru formarea concepției științifice materialiste despre lume, îmbogățind cunoștințele elevilor despre fenomenele naturii și despre legile care guvernează Universul, dacă face legătura dintre matematică și fizică, dintre matematică și tehnică, dintre matematică și știință.

În sfîrșit, la cercurile matematice se pot da elevilor deprinderi practice de măsurători de unghiuri și distanțe, de construcții grafice, de geometrie descriptivă și observațiuni astronomice, de mînuire a unor instrumente de precizie ca teodolitul, sextantul, a riglei de calcul, a diferitelor tabele: de logaritmi, de numere prime, de anuități. Tot în cadrul cercului pe baza materialului statistic publicat în ziare și reviste din gospodăriile agricole, din comerțul și economia statului se poate confecționa un material didactic nou, planșe demonstrative, diagrame, tablouri statistice și de procentaj, se pot alcătui probleme de aritmetică, de algebră și probleme practice în legătură cu electrificarea și tehnica nouă, care să reflecte modul în care se construiește socialismul în țara noastră.

CUPRINSUL LUCRĂRII

Pag.

Contribuția matematicii la realizarea sarcinilor învățămîntului politehnic. *M. Schein.* Șc. medie nr. 22 — *București* 3

Noțiunea de funcție în școala de cultură generală. *A. Hollinger* Profesor emerit — *București* 22

Formarea deprinderilor de calcul la aritmetică. *Spiridon Ghițescu* Șc. medie nr. 18 — *București* 84

Cum deprind pe elevii din clasele VIII—X, să folosească procedee raționale de calcul. *Marieta Dinescu.* Șc. medie nr. 8 — *București* 111

Legarea cunoștințelor de matematică cu cele de fizică, prin rezolvarea problemelor cu conținut de fizică la diferitele discipline ale matematicii în școala medie. *Gheorghe Popescu.* Șc. medie nr. 1 — *Lugoj* 145

Cum deprind pe elevi să rezolve probleme de fizică, de tehnică, probleme legate de viața înconjurătoare. *Constantin Borș.* Școala medie nr. 2 — *Piatra Neamț* 208

Din experiența folosirii modelelor în rezolvarea problemelor de geometrie în spațiu. *Mircea Băleanu.* Șc. medie nr. 1 — *Lugoj* .. 284

Confecționarea și folosirea materialului didactic la geometrie. *Marta Marini.* Șc. medie nr. 10 — *București* și *Ioana Teodorescu.* Șc. medie nr. 22 — *București* 300

Lucrări practice la matematică la clasele V—VII. *Cornel Săsăran* Șc. medie romînă — *Jimbolia* 326

Lucrări practice la matematică la clasele V — VII. *Emil Sfichi.* Șc. de 7 ani nr. 7 — *Iași* 359

Lucrări practice la trigonometrie. *Florica Rusu.* Șc. medie nr. 20 — *București* 388

Rolul desenului în predarea geometriei. *Adolf Lincker.* Șc. medie nr. 17 mixtă. — *București* 406

Din experiența muncii în afară de clasă la matematică. *Sergiu Postolache.* Șc. medie nr. 1 — *Bacău* 424

Din experiența cercurilor de matematică. *Octav Halunga.* Șc. medie nr. 20 — *București* 439

Responsabil de carte : N. Dincă
Tehnoredactor : Nicolae Atanasiu
Corector : Sofia Boştină-Dorneanu şi Ada Marcov

Dat la cules 16.VIII.957. Bun de tipar 26.II.958. Tiraj 7.000. Hîrtie semivel. 65 gr. m.p. Ft. 16/61×86. Coli de editură 26,149. Coli tipar 29. Nr. de plan editură 3,346. A. 697

Tiparul executat sub com. nr. 1270 la Combinatul Poligraic Casa Scînteii „I. V. STALIN", Bucureşti — R.P.R.
E. 12.813