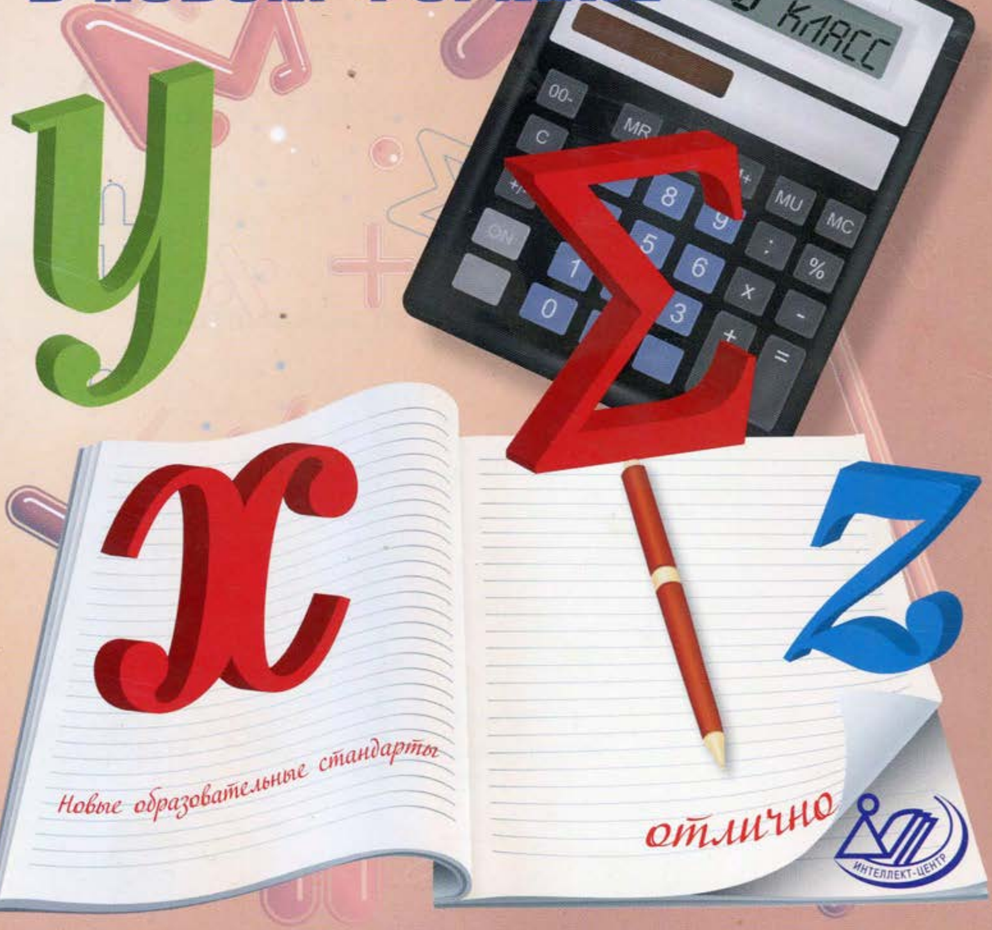
АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА 10

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ В НОВОМ ФОРМАТЕ



МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ
ОТКРЫТОГО ОБРАЗОВАНИЯ

МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР
НЕПРЕРЫВНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Ю. П. Дудницын
А. В. Семенов

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

10 класс

Контрольные работы в НОВОМ формате

Москва
«Интеллект-Центр»
2011

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я721
Д 81

Под общей редакцией заведующего методической лабораторией математики Московского института открытого образования, к.п.н. А.В. Семенова

Рецензент – учитель математики ГБОУ СОШ № 129 СЗОУО г. Москвы, к.п.н. П.И. Самсонов

Рекомендовано лабораторией математики МИОО для использования в образовательном процессе общеобразовательных учреждений.

Дудницын, Ю. П.

Д 81 Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Контрольные работы в НОВОМ формате: [учебное пособие] / Ю. П. Дудницын, А. В. Семенов; [под общ. ред. А. В. Семенова]; Московский центр непрерывного математического образования. – Москва: Интеллект-Центр, 2011. – 80 стр.

ISBN 978-5-89790-834-9

Сборник предназначен для проведения тематического контроля знаний учащихся по алгебре и началам математического анализа за курс 10 класса. Он будет также полезен при подготовке к итоговой аттестации.

Контрольные работы ориентированы на учебник по алгебре и началам анализа для 10-11 классов под редакцией Колмогорова А.Н. (авторы: А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын, Б.М. Ивлев, С.И. Шварцбурд – М.: Просвещение, 2007 и последующие издания).

Сборник поможет учителю повысить эффективность тематического контроля, учащемуся – подготовиться к итоговой аттестации в форме единого государственного экзамена.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я721

Генеральный директор издательства «Интеллект-Центр»
М.Б. Миндюк

Редактор Д.П. Локтионов
Художественный редактор Е.Ю. Воробьева

Подписано в печать 23.08.2011. Формат 60x84/16.
Усл. печ. л. 5,0. Тираж 5000 экз. Заказ № 1108970.

Издательство «Интеллект-Центр»
117342, Москва, ул. Бутлерова, д. 17Б

arvato
ЯПК

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленного электронного оригинал-макета в ОАО «Ярославский полиграфкомбинат»
150049, Ярославль, ул. Свободы, 97

ISBN 978-5-89790-834-9

Содержание

Введение 4

Планирование 6

Контрольные работы 10

Контрольная работа № 1 10

Контрольная работа № 2 14

Контрольная работа № 3 16

Контрольная работа № 4 20

Контрольная работа № 5 22

Контрольная работа № 6 26

Контрольная работа № 7 30

Итоговая контрольная работа 34

Приложения 40

Приложение № 1. Рекомендации по использованию материалов сборника для учебного процесса 40

Приложение № 2. Ответы и решения 41

ВВЕДЕНИЕ

Сборник предназначен для проведения контрольных работ по алгебре и началам анализа в 10 классе с целью проверки уровня усвоения учащимися 10 класса знаний и умений в объеме, установленном обязательным минимумом содержания образования. Он ориентирован на учебник по алгебре и началам анализа для 10–11 классов под редакцией Колмогорова А.Н. (авторы: А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын, Б.М. Ивлев, С.И. Шварцбурд – М.: Просвещение, 2007 и последующие издания).

Материалы сборника будут также полезны учителям и учащимся, занимающимся по другим учебникам. Их можно использовать при организации тематического и обобщающего контроля, организации итогового повторения, а также для подготовки учащихся к единому государственному экзамену.

Количество контрольных работ, предусмотренных традиционным планированием курса алгебры и начал математического анализа 10 класса (вариант тематического планирования приведен после введения), сохраняется, изменяется только структура самих работ. Каждая контрольная работа по алгебре и началам анализа, представленная в сборнике, состоит из двух частей.

Часть 1 содержит четыре задания базового уровня с кратким ответом (для них необходимо записать только ответ).

Часть 2 содержит три задания повышенного уровня – с развернутой формой ответа, к которым необходимо записать подробные решения в тетради для контрольных работ или на отдельном листе. Такая форма заданий присутствует в традиционных контрольных работах и хорошо знакома учащимся.

На выполнение каждой контрольной работы отводится 40–45 минут.

В конце сборника содержатся два приложения.

В приложении 1 представлены рекомендации по применению контрольных работ в учебном процессе и оценке результатов выполнения учащимися контрольной работы.

Проверка правильности выполнения работы учащегося производится учителем в соответствии с ответами к заданиям части 1 и критериями оценивания к заданиям части 2 (приложение 2). Выполнение задания из части 1 оценивается 1 баллом. За задание части 2 учащийся может получить от 0 до 2-х баллов в зависимости от правильности и полноты ответа.

Данный формат контрольных работ поможет и учителю, и учащемуся адаптироваться к формату единого государственного экзамена.

Предлагаемые контрольные работы примерные, каждый учитель вправе внести в них свои изменения в соответствии с профилем обучения и уровнем подготовленности учащихся класса.

Текущие контрольные работы выполняют прежде всего диагностическую и контролирующую функции, но нельзя исключать обучающую составляющую. Задания первой части предполагают проверку только одного ответа (как на ЕГЭ), но с целью формирования навыков самоконтроля лучше, если учащийся запишет решение, а потом даст ответ. С этой целью имеет смысл ставить один балл за правильное решение и правильный ответ.

Контрольные работы составлены на проверку знаний традиционного курса алгебры и начал анализа старшей школы. При профильном обучении математике в старшей школе инвариантность курса алгебры и начал анализа поддерживается предложенным набором контрольных работ, но учитель вправе некоторые задания изменить.

При оценивании выполнения заданий следует обращать внимание не только на правильность ответа, но и на правильность решения. В отличие от основной школы учащегося нужно ориентировать на получение правильного ответа «законными» способами, а не искать, за что бы похвалить. Разумная последовательность и даже жесткость предъявляемых требований в оценивании выполнения заданий с последующей корректировкой знаний позволит учащемуся получить знания школьного курса алгебры и начал анализа, сдать экзамен (в любой форме) и продолжать обучение в высшем учебном заведении.

ПЛАНИРОВАНИЕ

10 класс

Базовый уровень

Учебник: А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын, Б.М. Ивлев, С.И. Шварцбурд. «Алгебра и начала анализа, 10–11» (Москва, Просвещение, 2007 г. и последующие издания)

№ уроков	Содержание учебного материала
§12*. Тригонометрические функции любого угла (6 ч)	
1, 2	Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса
3, 4	Свойства синуса, косинуса, тангенса и котангенса
5, 6	Радианная мера угла
§13. Основные тригонометрические формулы (9 ч)	
7, 8	Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла
9–12	Применение основных тригонометрических формул к преобразованию выражений
13, 14	Формулы приведения
15	**Контрольная работа №1**
§14. Формулы сложения и их следствия (7 ч)	
16–19	Формулы сложения. Формулы двойного угла

20–22*	Формулы суммы и разности тригонометрических функций *Изучение материала §§ 12, 13, 14 ведется по учебнику «Алгебра 9 класс» под редакцией С.А.Теляковского (Москва, «Просвещение», 2004 г. и последующие издания)*
§1. Тригонометрические функции числового аргумента (6 ч)	
23, 24	Синус, косинус, тангенс, котангенс (повторение)
25–27	Тригонометрические функции и их графики
28	**Контрольная работа №2**
§2. Основные свойства функций (12 ч)	
29–31	Функции и их графики
32–34	Четные и нечетные функции. Периодичность тригонометрических функций
35, 36	Возрастание и убывание функций. Экстремумы
37–39	Исследование функций. Свойства тригонометрических функций. Гармонические колебания
40	**Контрольная работа №3**
§3. Решение тригонометрических уравнений и неравенств (13 ч)	
41–43	Арксинус, арккосинус и арктангенс
44–46	Решение простейших тригонометрических уравнений

47	Решение простейших тригонометрических неравенств
48–52	Примеры решения тригонометрических уравнений и систем уравнений
53	**Контрольная работа №4**
§4. Производная (14 ч)	
54, 55	Приращение функции
56	Понятие о производной
57, 58	Понятие о непрерывности и предельном переходе
59–63	Правила вычисления производных
64–66	Производная сложной функции. Производные тригонометрических функций
67	**Контрольная работа №5**
§5. Применение непрерывности и производной (9 ч)	
68–70	Применение непрерывности
71–73	Касательная к графику функции
74	Приближенные вычисления
75	Производная в физике и технике
76	**Контрольная работа №6**
§6. Применение производной к исследованию функций (16 ч)	
77–80	Признак возрастания (убывания) функции
81–83	Критические точки функции, максимумы и минимумы

84–87	Примеры применения производной к исследованию функций
88–91	Наибольшее и наименьшее значения функции
92	**Контрольная работа №7**
93–101	Заключительное повторение курса алгебры и начал анализа. Итоговая контрольная работа (2 часа)

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Контрольная работа № 1

Вариант 1

Часть 1

1 Вычислите произведение значений выражений A и B, если $A = \text{tg}45° \cdot \sin 90° + 2\cos 60°$, $B = 4\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{2} \cdot \text{tg}\frac{\pi}{3}$.

2 Гипотенуза *MP* треугольника *MPK* равна 8. $\angle K = 90°$, $\cos M = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Найдите длину катета *PK*.

3 Упростите выражение $1 - \text{tg}\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

4 Найдите значение выражения $\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{\cos^2\alpha}$, если $\text{ctg}\alpha = \frac{1}{5}$.

Часть 2

5 Докажите тождество

$$\frac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} - \text{ctg}\alpha \cdot \sin\alpha = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right).$$

6 Найдите наибольшее значение выражения $5-\cos(\pi+\alpha)$.

7 Существует ли значение α, при котором $\sin\alpha=\dfrac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$ и $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{3}}$? Ответ поясните.

Контрольная работа № 1

Вариант 2

Часть 1

1 Вычислите сумму значений выражений A и B, если

$A = \cos 45^\circ \cdot \operatorname{ctg} 90^\circ + 2\sin 30^\circ$, $B = 3\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \sin\pi \cdot \cos\frac{\pi}{6}$.

2 Гипотенуза AB треугольника ABC равна 12. $\angle C = 90^\circ$, $\sin B = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Найдите длину катета BC.

3 Упростите выражение $1 - \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$.

4 Найдите значение выражения $\frac{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}{\sin^2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$.

Часть 2

5 Докажите тождество $\frac{(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 - 1}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha - 1} + \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = 0$.

6 Найдите наибольшее значение выражения $3-\sin(\pi+\alpha)$.

7 Существует ли значение α, при котором $\cos\alpha=\dfrac{1-\sqrt{6}}{\sqrt{10}}$ и $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt{5}}$? Ответ поясните.

Контрольная работа № 2

Вариант 1

Часть 1

1 Вычислите значение выражения $4\sin\frac{7\pi}{6}+\mathrm{ctg}\frac{5\pi}{4}$.

2 Упростите выражение $2\cos^2\alpha-\cos2\alpha$.

3 Найдите значение $\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

4 Вычислите значение выражения $\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\cdot\sin\beta$, если $\cos\alpha=-\frac{2}{5}$, $\cos\beta=\frac{15}{16}$.

Часть 2

5 Докажите тождество $1-2\sin^2\alpha=\frac{2\cos^2\alpha\cdot\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}2\alpha}$.

6 Сравните с нулём значение выражения

$$A=\sin25^\circ+\sin35^\circ-\cos5^\circ.$$

7 Дана функция $y=-2\sin x$. Найдите её область определения, множество значений и все значения x, при которых $y=0$.

Контрольная работа № 2

Вариант 2

Часть 1

1 Вычислите значение выражения $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}+2\cos\frac{5\pi}{3}$.

2 Упростите выражение $4\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos2\alpha$.

3 Найдите значение $\cos2\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4 Вычислите значение выражения $\sin(\alpha-\beta)+\sin\beta\cdot\cos\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=-\frac{7}{15}$.

Часть 2

5 Докажите тождество $\frac{2\sin^2\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

6 Сравните с нулём значение выражения

$$A=\cos75^\circ+\cos45^\circ-\cos15^\circ.$$

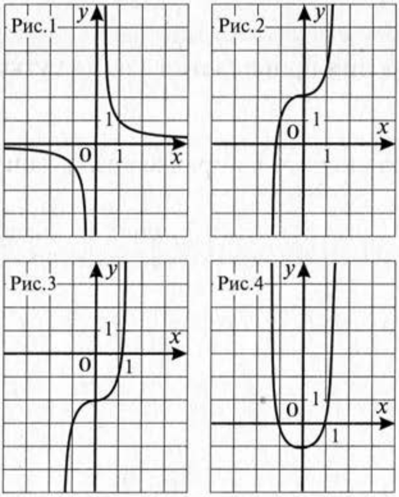
7 Дана функция $y=1-\cos x$. Найдите её область определения, множество значений и все значения x, при которых $y=0$.

Контрольная работа № 3

Вариант 1

Часть 1

1 На каких рисунках схематически изображены графики функций $y=x^4-1$, $y=x^{-5}$.



2 Функция $y=f(x)$ является чётной. Вычислите $f(-3)+2f(1)$, если $f(3)=4$, $f(-1)=2$.

3 Найдите наименьший положительный период функции $f(x)=\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$.

4 Постройте эскиз графика функции $y=\dfrac{1}{x+2}$ и найдите координаты точек его пересечения с осями координат. В ответе запишите найденные координаты.

Часть 2

5 Докажите, что функция $f(x) = 4x - \mathrm{tg}x$ является нечётной.

6 Функция $y = \cos 2x$ принимает равные значения при $x = \frac{\pi}{6}$, $x = a$, $x = b$ $\left(a < \frac{\pi}{6} < b\right)$. Найдите числа a и b, если они принадлежат промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

7 Расположите в порядке возрастания числа:

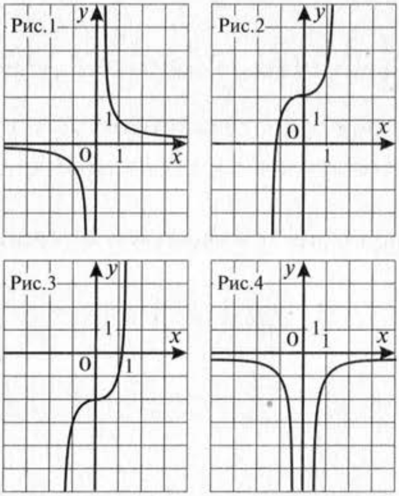
$$\cos 0{,}3,\ \cos 1{,}2,\ \cos\pi,\ \cos 2{,}7.$$

Контрольная работа № 3

Вариант 2

Часть 1

1 На каких рисунках схематически изображены графики функций $y = x^5 + 2$, $y = -x^{-4}$.



2 Функция $y = f(x)$ является нечётной. Вычислите $2f(-4) + f(3)$, если $f(4) = 1$, $f(-3) = 2$.

3 Найдите наименьший положительный период функции $f(x) = \cos 4x$.

4 Постройте эскиз графика функции $y = (x-1)^4$ и найдите координаты точек его пересечения с осями координат. В ответе запишите найденные координаты.

Часть 2

5 Докажите, что функция $f(x) = x^2 + \cos x$ является чётной.

6 Функция $y = \cos\frac{x}{2}$ принимает равные значения при $x = \frac{\pi}{2}$, $x = a$, $x = b$ $\left(a < \frac{\pi}{2} < b\right)$. Найдите числа a и b, если они принадлежат промежутку $[-\pi; 4\pi]$.

7 Расположите в порядке возрастания числа:

$$\sin 0{,}8,\ \sin(-0{,}9),\ \sin\frac{3\pi}{2},\ \sin 1{,}2.$$

Контрольная работа № 4

Вариант 1

Часть 1

1 Вычислите значение выражения

$$2\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\arccos 1+\operatorname{arctg}\sqrt{3}.$$

2 Найдите наименьший целый положительный корень уравнения $\sin\frac{\pi x}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3 Решите уравнение $\cos 5x+\cos x=0$.

4 Найдите все значения x, при которых значения выражений $1+2\cos^2 x$ и $(-\sin x)$ равны.

Часть 2

5 Решите неравенство $2\cos x-\sqrt{2}\geq 0$.

6 Решите уравнение $3\cos^2 x-5\sin^2 x=\sin 2x$.

7 Решите систему уравнений $\begin{cases} y+1=2\cos x, \\ y^2=1+4\cos x. \end{cases}$

Контрольная работа № 4

Вариант 2

Часть 1

1 Вычислите значение выражения $\arcsin 1 - 3\arccos\frac{1}{2} + \operatorname{arcctg}(-1)$.

2 Найдите наибольший целый отрицательный корень уравнения $\cos\frac{\pi x}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3 Решите уравнение $\sin 3x + \sin x = 0$.

4 Найдите все значения x, при которых значения выражений $2\sin^2 x$ и $1 - \cos x$ равны.

Часть 2

5 Решите неравенство $2\sin x - \sqrt{3} \geq 0$.

6 Решите уравнение $3\cos^2 x - 5\sin^2 x = \sin 2x$.

7 Решите систему уравнений $\begin{cases} 3\operatorname{tg} x + 4\cos y = 5, \\ 3\operatorname{tg} x + 8\cos y = 7. \end{cases}$

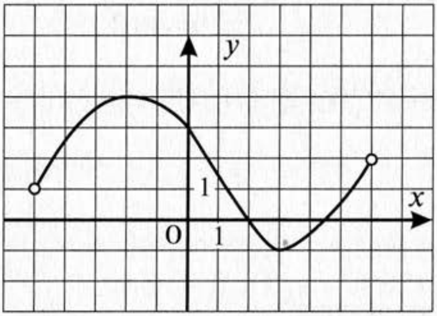
Контрольная работа № 5

Вариант 1

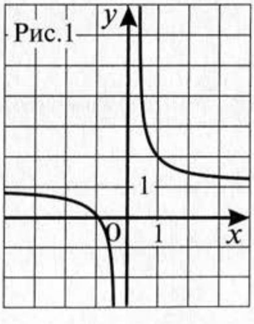
Часть 1

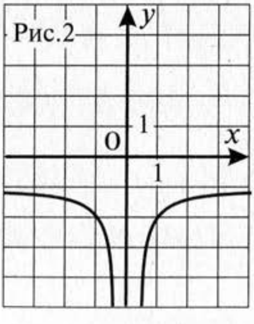
1 Вычислите $f'(3)$, если $f(x)=\frac{2}{3}x^3-x+2$.

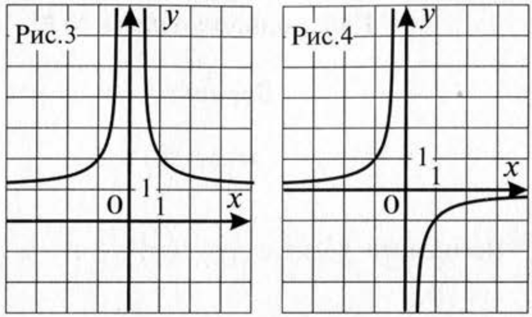
2 На рисунке изображён эскиз графика функции $y=f(x)$. Найдите все целые значения её аргумента, при которых $f'(x)>0$.



3 На каком рисунке изображён эскиз графика $y=f'(x)$ – производной функции $f(x)=x-\frac{1}{x}$?







4 Найдите производную функции $y = x\cos x$.

Часть 2

5 Постройте эскиз графика функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 \text{ при } x \le 1, \\ 5 - x \text{ при } x > 1. \end{cases}$$

Является ли она непрерывной в каждой точке области определения?

К какому числу стремится значение функции f при $x \to -2$? (Ответ поясните.)

6 Докажите, что $f'(2) = g'(2)$, если $f(x) = (2x-5)^4$, $g(x) = 3 - 8x$.

7 Найдите все значения x, при которых $f'(x) = 0$, если $f(x) = 2\sqrt{2} \cdot x - \sin 4x$.

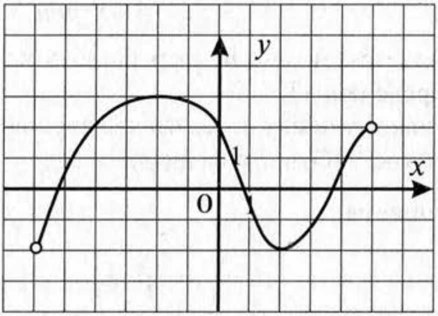
Контрольная работа № 5

Вариант 2

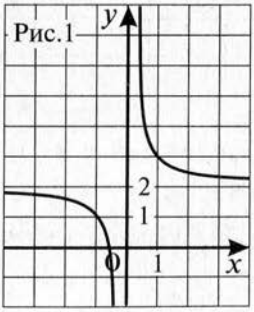
Часть 1

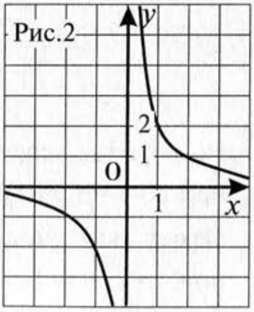
1 Вычислите $f'(2)$, если $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2-3$.

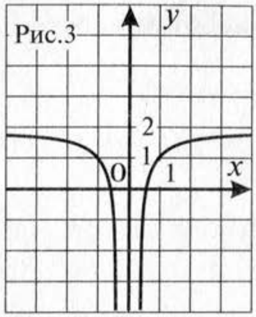
2 На рисунке изображён эскиз графика функции $y=f(x)$. Найдите все целые значения её аргумента, при которых $f'(x)<0$.

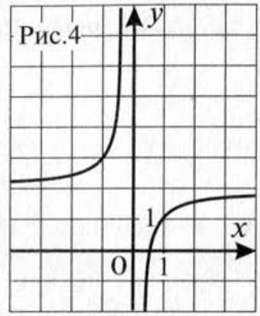


3 На каком рисунке изображён эскиз графика $y=f'(x)$ – производной функции $f(x)=2x-\frac{1}{x^2}$?









4 Найдите производную функции $y = \frac{\sin x}{x}$.

Часть 2

5 Постройте эскиз графика функции

$$f(x) = \begin{cases} x+3 \ \ \textit{при} \ \ x \le -1, \\ 2 - x^2 \ \ \textit{при} \ x > -1. \end{cases}$$

Является ли она непрерывной в каждой точке области определения?

К какому числу стремится значение функции f при $x \to 1$? (Ответ поясните.)

6 Докажите, что $g'(3) = h'(3)$, если $g(x) = (2x-7)^5$, $h(x) = 10x - 7$.

7 Найдите все значения x, при которых $f'(x) = 0$, если $f(x) = \cos 2x + \sqrt{3} \cdot x$.

Контрольная работа № 6

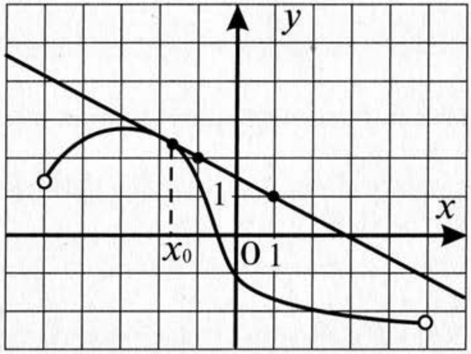
Вариант 1

Часть 1

1 Сколько целых отрицательных решений имеет неравенство $x \geq \frac{5x}{2+x}$?

2 К графику функции $f(x) = x^5 - 6x^3$ проведена касательная через точку с абсциссой $x_0 = 1$. Вычислите тангенс угла наклона этой касательной к оси абсцисс.

3 На рисунке изображёны эскиз графика функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



4 Прямолинейное движение точки описывается законом $x(t) = t^4 - 2t^2$. Найдите её скорость и ускорение в момент времени $t = 3$. (Время измеряется в секундах, перемещение – в метрах.)

Часть 2

5 Докажите, что касательные, проведённые через точки графика функции $f(x)=1-\cos\frac{x}{2}$ с абсциссами $x_1=-\pi$ и $x_2=3\pi$, параллельны.

6 Касательные, проведённые через точки P и M графика функции $f(x)=\frac{x-2}{x-1}$, параллельны биссектрисам первого и третьего координатных углов. Найдите координаты точек P и M.

7 Найдите величину угла, образованного касательными к графику функции $y=\sin x$, которые проходят через его точки с абсциссами $x_1=\pi$ и $x_2=2\pi$.

Контрольная работа № 6

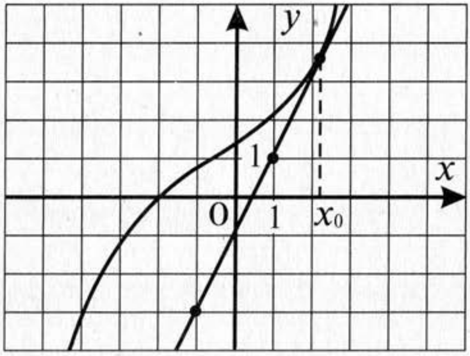
Вариант 2

Часть 1

1 Сколько целых положительных решений имеет неравенство $\frac{1}{x} \leq \frac{2}{3-x}$?

2 К графику функции $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^4$ проведена касательная через точку с абсциссой $x_0 = -2$. Вычислите тангенс угла наклона этой касательной к оси абсцисс.

3 На рисунке изображёны эскиз графика функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



4 Прямолинейное движение точки описывается законом $x(t) = t^5 + t^3$. Найдите её скорость и ускорение в момент времени $t = 2$. (Время измеряется в секундах, перемещение – в метрах.)

Часть 2

5 Докажите, что касательные, проведённые через точки графика функции $f(x)=2+\sin 2x$ с абсциссами $x_1=0$ и $x_2=\pi$, параллельны.

6 Касательные, проведённые через точки A и B графика функции $f(x)=\dfrac{3+x}{x+2}$, параллельны биссектрисам второго и четвёртого координатных углов. Найдите координаты точек A и B.

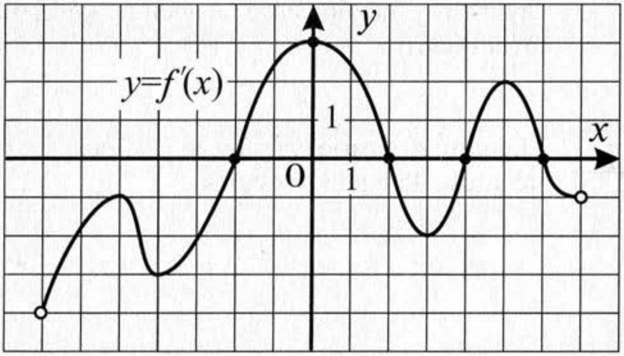
7 Найдите величину угла, образованного касательными к графику функции $y=-\cos x$, которые проходят через его точки с абсциссами $x_1=-\dfrac{\pi}{2}$ и $x_2=\dfrac{\pi}{2}$.

Контрольная работа № 7

Вариант 1

Часть 1

1 Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-7; 7)$. На рисунке изображён эскиз графика её производной $y = f'(x)$. Найдите точки минимума функции f.



2 Найдите промежутки возрастания функции

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4.$$

3 Найдите наибольшее значение функции $y = 3x - 6\sin x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

4 Прямолинейное движение точки описывается законом $S(t) = \frac{2}{3}t^3 - 6t^2 + 20t$. (Время измеряется в секундах, перемещение – в метрах.) Найдите наименьшую скорость её движения.

Часть 2

5 Докажите, что уравнение $x^5 + 3x^3 - 4 = 0$ имеет единственное решение. Найдите его.

6 Число 45 нужно представить в виде суммы трёх положительных слагаемых таким образом, чтобы их произведение было наибольшим, причём два слагаемых были пропорциональны числам 2 и 3. Задайте формулой функцию, наибольшее значение которой необходимо будет найти.

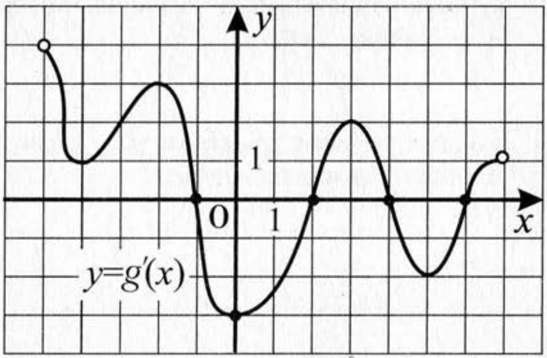
7 Найдите искомые слагаемые (см. задание 6) и представьте число 45 в виде их суммы.

Контрольная работа № 7

Вариант 2

Часть 1

1 Функция $y = g(x)$ определена на промежутке $(-5; 7)$. На рисунке изображён эскиз графика её производной $y = g'(x)$. Найдите точки максимума функции g.



2 Найдите промежутки убывания функции

$$f(x) = 8x^2 - x^4.$$

3 Найдите наименьшее значение функции $y = 8\cos x + 4x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

4 Прямолинейное движение точки описывается законом $S(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 48t$. (Время измеряется в секундах, перемещение – в метрах.) Найдите наибольшую скорость её движения.

Часть 2

5 Докажите, что уравнение $3-x^3-2x=0$ имеет единственное решение. Найдите его.

6 Число 27 нужно представить в виде суммы трёх положительных слагаемых таким образом, чтобы их произведение было наибольшим, причём два слагаемых были пропорциональны числам 1 и 5. Задайте формулой функцию, наибольшее значение которой необходимо будет найти.

7 Найдите искомые слагаемые (см. задание 6) и представьте число 27 в виде их суммы.

Итоговая контрольная работа

(2 урока)

Вариант 1

Часть 1

1 Строительной фирме нужно приобрести 79 кубометров пеноблоков. У неё есть три поставщика. Сколько придется заплатить за самую дешёвую покупку с доставкой? Цены и условия доставки приведены в таблице.

Поставщик	Стоимость пеноблоков (руб. за 1 м^3)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
А	2750	4800	
Б	3200	4500	При заказе на сумму более 150000 руб. доставка бесплатно
В	2800	4700	При заказе на сумму более 200000 руб. доставка бесплатно

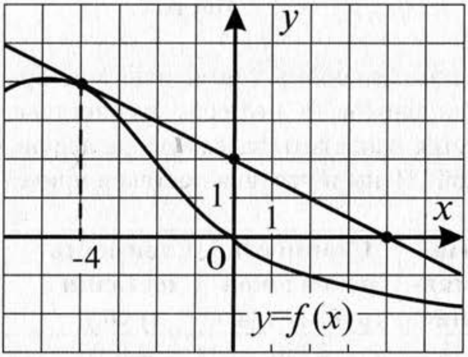
2 Найдите область определения функции $y=\sqrt{\dfrac{x+3}{x^2-2x}}$.

В ответе запишите наименьшее целое отрицательное число, принадлежащее ей.

3 Вычислите значение выражения $14\operatorname{tg}^2\alpha$, если

$\sin\alpha=\sqrt{\dfrac{3}{17}}$.

4 На рисунке изображёны эскиз графика функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0 = -4$. Вычислите значение производной этой функции в точке $x_0 = -4$.



5 Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^3 - 10{,}5t^2 + 30t$. Если при движении были остановки, то найдите соответствующие значения t.

6 Найдите значения выражения

$$\sin 2\alpha \cdot \cos 3\alpha + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 5\alpha\right) + \cos 2\alpha \cdot \sin 3\alpha,$$

если $\alpha = \frac{\pi}{30}$.

7 Функция задана формулой $y = \frac{8x}{x^2 + 4}$. Найдите её наибольшее значение на промежутке $[0; 3]$.

Часть 2

8 Постройте эскиз графика функции $f(x)=x^4-8x^2$. Используя его, определите число корней уравнения $f(x)=-2$.

9 Решите уравнение $\left(1-\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)\sqrt{9-x^2}=0$.

10 При каком значении параметра a прямая $y=3x+a$ является касательной к графику функции $y=4x^2-5x+9$?

11 Представьте число 16 в виде произведения двух положительных чисел, сумма которых будет наименьшая.

Итоговая контрольная работа

(2 урока)

Вариант 2

Часть 1

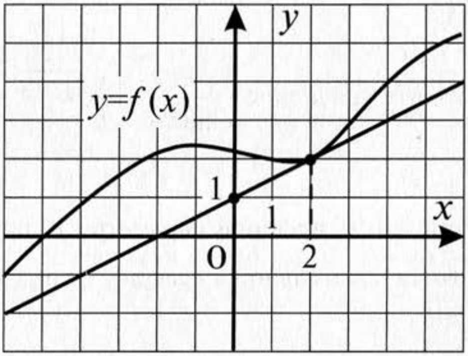
1 Для изготовления книжных полок требуется заказать 20 одинаковых стекол в одной из трёх фирм. Площадь каждого стекла равна 0,15 м^2. В таблице приведены цены на стекло и резку стёкол. Сколько рублей нужно заплатить за самый выгодный заказ?

Фирма	Стоимость стекла (руб. за 1 м^2)	Резка стекла (руб. за одно стекло)
А	100	10
Б	90	15
В	140	Бесплатно

2 Найдите область определения функции $y=\sqrt{\dfrac{x^2-4x}{2-x}}$. В ответе запишите наибольшее целое положительное число, принадлежащее ей.

3 Вычислите значение выражения $9\cos^2\alpha$, если $\mathrm{ctg}\alpha=\sqrt{\dfrac{4}{11}}$.

4 На рисунке изображёны эскиз графика функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0 = 2$. Вычислите значение производной этой функции в точке $x_0 = 2$.



5 Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 5t^2 + 21t$. Если при движении были остановки, то найдите соответствующие значения t.

6 Найдите значения выражения

$$\cos 4\alpha \cdot \cos 5\alpha - \cos(\pi + 9\alpha) - \sin 5\alpha \cdot \sin 4\alpha,$$

если $\alpha = \frac{\pi}{27}$.

7 Функция задана формулой $y = \frac{6x}{x^2 + 9}$. Найдите её наименьшее значение на промежутке $[1; 6]$.

Часть 2

8 Постройте эскиз графика функции $f(x)=\frac{1}{9}x^3-x^2$. Используя его, определите число корней уравнения $f(x)=-1$.

9 Решите уравнение $\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)\sqrt{4-x^2}=0$.

10 При каком значении параметра a прямая $y=5x+a$ является касательной к графику функции $y=2x^2-3x+7$?

11 Площадь прямоугольника равно 36. Какие длины должны иметь его стороны, чтобы периметр прямоугольника был наименьшим?

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение № 1

Рекомендации по использованию материалов сборника для учебного процесса

В начале сборника приведено тематическое планирование по алгебре и началам математического анализа для 10–11 класса по учебнику «Алгебра и начала математического анализа, 10–11» А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын, Б.М. Ивлев, С.И. Шварцбурд / под ред.А.Н. Колмогорова – М.: Просвещение, 2007 и последующие издания. В таблице показано, что изучение каждой темы завершается проведением соответствующей контрольной работы, представленной в данном сборнике. Учитель может заменить некоторые задания другими из соответствующей темы или уменьшить (увеличить) объём контрольной работы в зависимости от уровня подготовленности учащихся своего класса.

Для оценки предложенных работ можно использовать следующую шкалу. За каждое верно выполненное задание части 1 выставляется 1 балл. Количество баллов за каждое верно выполненное задание части 2 – 2 балла (в зависимости от полноты и правильности ответа).

Успешность выполнения каждой тематической контрольной работы определяется в соответствии со шкалой:
удовлетворительно – 4–5 баллов;
хорошо – 6–8 баллов;
отлично – 9–10 баллов;

для итоговой контрольной работы в соответствии со шкалой:
удовлетворительно – 6–8 баллов;
хорошо – 9–12 баллов;
отлично – 13–15 баллов.
Таким образом, оценку «4» учащийся может получить, только выполнив хотя бы одно из заданий части 2.

Учитель может скорректировать предлагаемую шкалу оценок с учётом особенностей класса.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

Контрольная работа № 1

Вариант 1

Часть 1

№ задания	1	2	3	4
Ответ	4	6	$\cos^2\alpha$	25

Часть 2

5 Докажите тождество

$$\frac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\mathrm{ctg}\alpha\cdot\sin\alpha=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right).$$

Решение.

$$\frac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\mathrm{ctg}\alpha\cdot\sin\alpha=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\cos\alpha=$$

$$=\sin\alpha+\cos\alpha-\cos\alpha=\sin\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha.$$

Равенство верно при всех допустимых значениях α.

6 Найдите наибольшее значение выражения $5-\cos(\pi+\alpha)$.

Решение.

$5-\cos(\pi+\alpha) = 5+\cos\alpha$; $5-1\le 5+\cos\alpha\le 5+1$;

$4\le 5+\cos\alpha\le 6$.

Наибольшее значение 6 достигается, например, при $\alpha=0$.

Ответ: 6.

7 Существует ли значение α, при котором $\sin\alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$ и $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{3}}$? Ответ поясните.

Решение.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{3}}\right)^2 =$$

$$= \frac{6-2\sqrt{5}}{6} + \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{6-2\sqrt{5}+2\sqrt{5}}{6} = 1.$$

Ответ: существует.

Контрольная работа № 1

Вариант 2

Часть 1

№ задания	1	2	3	4
Ответ	4	8	$\sin^2\alpha$	4

Часть 2

5 Докажите тождество $\dfrac{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2-1}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha-1}+\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)=0$.

Решение.

$\dfrac{-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{-2\cos^2\alpha}-\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha=0$.

Равенство верно при всех допустимых значениях α.

6 Найдите наибольшее значение выражения $3-\sin(\pi+\alpha)$.

Решение.

$3-\sin(\pi+\alpha)=3+\sin\alpha$; $3-1\le 3+\sin\alpha\le 3+1$;

$2\le 3+\sin\alpha\le 4$.

Наибольшее значение 4 достигается, например, при $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$.

Ответ: 4.

7 Существует ли значение α, при котором $\cos\alpha=\dfrac{1-\sqrt{6}}{\sqrt{10}}$ и $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt{5}}$? Ответ поясните.

Решение.

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \left(\frac{1-\sqrt{6}}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt{5}}\right)^2 =$$

$$= \frac{7-2\sqrt{6}}{10} + \frac{\sqrt{6}}{5} = \frac{7}{10} \neq 1.$$

Ответ: не существует.

Контрольная работа № 2

Вариант 1

Часть 1

№ задания	1	2	3	4
Ответ	-1	1	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{8}$

Часть 2

5 Докажите тождество $1-2\sin^2\alpha=\frac{2\cos^2\alpha\cdot \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha}$.

Решение.

$1-2\sin^2\alpha=\cos2\alpha$,

$$\frac{2\cos^2\alpha\cdot \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha}=\frac{2\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha}=\cos2\alpha$$

Равенство верно при всех допустимых значениях α.

6 Сравните с нулём значение выражения
$A=\sin25°+\sin35°-\cos5°$.

Решение.

$\sin25°+\sin35°-\cos5°=$

$$=2\sin\frac{25°+35°}{2}\cdot\cos\frac{25°-35°}{2}-\cos5°=\cos5°-\cos5°=0.$$

$A=0$.

Ответ: $A=0$.

7 Дана функция $y=-2\sin x$. Найдите её область определения, множество значений и все значения x, при которых $y=0$.

Решение.

$D(y)=\mathbf{R}$;

$E(y)=[-2;2]$, так как $-2\le -2\sin x\le 2$.

$\sin x=0$ при $x=\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $D(y)=\mathbf{R}$; $E(y)=[-2;2]$; $x=\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Контрольная работа № 2

Вариант 2

Часть 1

№ задания	1	2	3	4
Ответ	0	$\sin4\alpha$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{7}{25}$

Часть 2

5 Докажите тождество $\frac{2\sin^2\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

Решение.

$$\frac{2\sin^2\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}=\frac{2\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha\cdot\sin\alpha}=\frac{\sin2\alpha\cdot\cos2\alpha}{\sin2\alpha}=\cos2\alpha,$$

$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos2\alpha$.

Равенство верно при всех допустимых значениях α.

6 Сравните с нулём значение выражения
A = $\cos75°+\cos45°-\cos15°$.

Решение.

$\cos75°+\cos45°-\cos15°=$

$=2\cos\frac{75°+45°}{2}\cdot\cos\frac{75°-45°}{2}-\cos15°=$

$=2\cos60°\cos15°-\cos15°=0$.

Ответ: A = 0.

7 Дана функция $y=1-\cos x$. Найдите её область определения, множество значений и все значения x, при которых $y=0$.

Решение.

$D(y) = \mathbf{R}$;

$E(y) = [0; 2]$, так как $0 \le 1 - \cos x \le 2$.

$1 - \cos x = 0$, $\cos x = 1$ при $x = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $D(y) = \mathbf{R}$; $E(y) = [0; 2]$; $x = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Контрольная работа № 3

Вариант 1

Часть 1

№ задания	1	2	3	4
Ответ	рис. 4; 1	8	3π	$0; \frac{1}{2}$

Часть 2

5 Докажите, что функция $f(x) = 4x - \operatorname{tg} x$ является нечётной.

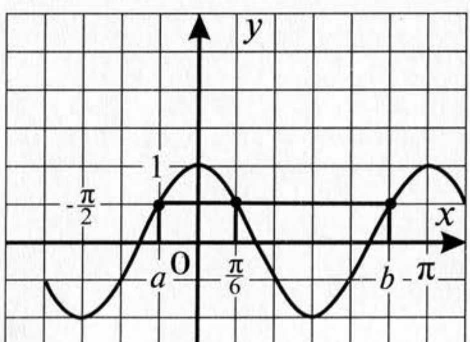
Решение.

Область определения симметрична относительно 0,

$f(-x) = 4(-x) - \operatorname{tg}(-x) = -(4x - \operatorname{tg} x) = -f(x)$.

6 Функция $y = \cos 2x$ принимает равные значения при $x = \frac{\pi}{6}$, $x = a$, $x = b$ $\left(a < \frac{\pi}{6} < b\right)$. Найдите числа a и b, если они принадлежат промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Решение.



$$\cos 2x = \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} = \cos 2a = \cos 2b.$$

$$2a = -\frac{\pi}{3},\ a = -\frac{\pi}{6}.$$

$$2b = -\frac{\pi}{3} + 2\pi;\ b = \frac{5\pi}{6}.$$

Ответ: $a = -\frac{\pi}{6}$; $b = \frac{5\pi}{6}$.

7 Расположите в порядке возрастания числа:

$$\cos 0{,}3,\ \cos 1{,}2,\ \cos\pi,\ \cos 2{,}7.$$

Решение.

На промежутке $[0;\pi]$ функция $f(x) = \cos x$ убывает и $0 < 0{,}3 < 1{,}2 < 2{,}7 < \pi$, тогда

$\cos 0{,}3 > \cos 1{,}2 > \cos 2{,}7 > \cos\pi$.

Ответ: $\cos\pi$, $\cos 2{,}7$, $\cos 1{,}2$, $\cos 0{,}3$.

Контрольная работа № 3

Вариант 2

Часть 1

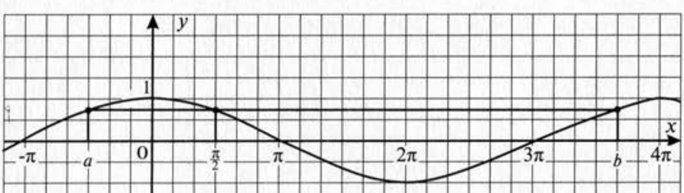
№ задания	1	2	3	4
Ответ	рис. 2; 4	-4	$\dfrac{\pi}{2}$	(0; 1); (1; 0)

Часть 2

5 Докажите, что функция $f(x)=x^2+\cos x$ является чётной.

Решение.
Область определения симметрична относительно 0,
$f(-x)=(-x)^2+\cos(-x)=x^2+\cos x=f(x)$.

6 Функция $y=\cos\dfrac{x}{2}$ принимает равные значения при $x=\dfrac{\pi}{2}$, $x=a$, $x=b$ $\left(a<\dfrac{\pi}{2}<b\right)$. Найдите числа a и b, если они принадлежат промежутку $[-\pi;4\pi]$.



Решение.

$$\cos\frac{x}{2} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{a}{2} = \cos\frac{b}{2}.$$

$$\frac{a}{2} = -\frac{\pi}{4},\ a = -\frac{\pi}{2}.$$

$$\frac{b}{2} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi;\ b = \frac{7\pi}{2}.$$

Ответ: $a = -\frac{\pi}{2}$; $b = \frac{7\pi}{2}$.

7 Расположите в порядке возрастания числа:

$$\sin 0{,}8,\ \sin(-0{,}9),\ \sin\frac{3\pi}{2},\ \sin 1{,}2.$$

Решение.

$$\sin\frac{3\pi}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

На промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $f(x) = \sin x$ возрастает и $-\frac{\pi}{2} < -0{,}9 < 0{,}8 < 1{,}2 < \frac{\pi}{2}$, тогда

$$\sin\frac{3\pi}{2} < \sin(-0{,}9) < \sin 0{,}8 < \sin 1{,}2.$$

Ответ: $\sin\frac{3\pi}{2}$, $\sin(-0{,}9)$, $\sin 0{,}8$, $\sin 1{,}2$.

Контрольная работа № 4

Вариант 1

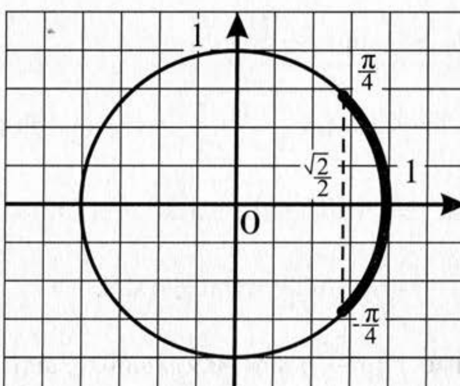
Часть 1

№ задания	1	2	3	4
Ответ	0	2	$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n$; $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n$, $n\in Z$	$-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$

Часть 2

5 Решите неравенство $2\cos x-\sqrt{2}\geq 0$.

Решение.



$2\cos x\geq\sqrt{2}$; $\cos x\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$ при $-\frac{\pi}{4}+2\pi n\leq x\leq\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4}+2\pi n\leq x\leq\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$.

6 Решите уравнение $3\cos^2 x - 5\sin^2 x = \sin 2x$.

Решение.

$3\cos^2 x - 5\sin^2 x - 2\sin x\cos x = 0$.

Если $\cos x \neq 0$, тогда получаем:

$3 - 5\mathrm{tg}^2 x - 2\mathrm{tg}x = 0$;

$5\mathrm{tg}^2 x + 2\mathrm{tg}x - 3 = 0$;

$\mathrm{tg}x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{10}$;

$\mathrm{tg}x = -1$ или $\mathrm{tg}x = \dfrac{3}{5}$;

$x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; $x = \mathrm{arctg}\dfrac{3}{5} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Если $\cos x = 0$, то исходное уравнение не обращается в равенство.

Ответ: $-\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; $\mathrm{arctg}\dfrac{3}{5} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

7 Решите систему уравнений $\begin{cases} y+1 = 2\cos x, \\ y^2 = 1 + 4\cos x. \end{cases}$

Решение.

$\begin{cases} 2\cos x = y+1, \\ y^2 = 1 + 2y + 2; \end{cases}$

$y^2 - 2y - 3 = 0$;

$y_1 = 3$; $y_2 = -1$;

$\cos x = \dfrac{4}{2} > 1$ или $\cos x = 0$;

$\begin{cases} \cos x = 0, \\ y = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z} \\ y = -1. \end{cases}$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$, $y = -1$.

Контрольная работа № 4

Вариант 2

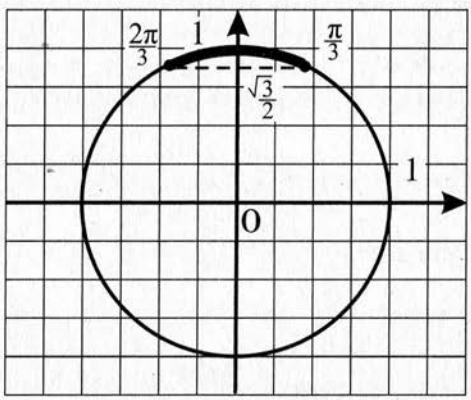
Часть 1

№ задания	1	2	3	4
Ответ	$\frac{\pi}{4}$	-1	$\frac{\pi}{2}n,\ n\in\mathbf{Z}$	$\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ 2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$

Часть 2

5 Решите неравенство $2\sin x-\sqrt{3}\geq 0$.

Решение.



$2\sin x\geq\sqrt{3}$; $\sin x\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$, при $\frac{\pi}{3}+2\pi n\leq x\leq\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}+2\pi n\leq x\leq\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

6 Решите уравнение $3\cos^2 x - 5\sin^2 x = \sin 2x$.

Решение.

$2\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x + 2\sin x\cos x$;

$3\sin^2 x - 2\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$.

Если $\cos x \neq 0$, тогда получаем:

$3\mathrm{tg}^2 x - 2\mathrm{tg} x - 1 = 0$;

$\mathrm{tg} x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+12}}{6}$;

$\mathrm{tg} x = 1$ или $\mathrm{tg} x = -\dfrac{1}{3}$;

$x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $x = -\mathrm{arctg}\dfrac{1}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Если $\cos x = 0$, то исходное уравнение не обращается в равенство.

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; $-\mathrm{arctg}\dfrac{1}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

7 Решите систему уравнений $\begin{cases} 3\mathrm{tg} x + 4\cos y = 5, \\ 3\mathrm{tg} x + 8\cos y = 7. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} 3\mathrm{tg} x + 4\cos y = 5, \\ 4\cos y = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} \mathrm{tg} x = 1, \\ \cos y = \dfrac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z} \\ y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$, $y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Контрольная работа № 5

Вариант 1

Часть 1

№ задания	1	2	3	4
Ответ	17	– 4; – 3; 4; 5	рис. 3	$y' = \cos x - x\sin x$

Часть 2

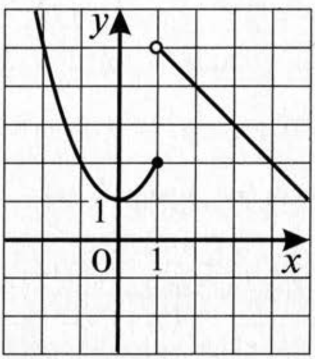
5 Постройте эскиз графика функции

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 \ \textit{при}\ x\le 1, \\ 5-x \ \textit{при}\ x>1. \end{cases}$$

Является ли она непрерывной в каждой точке области определения?

К какому числу стремится значение функции *f* при $x\to -2$? (Ответ поясните.)

Решение.



Не является непрерывной в точке $x=1$;

при $x\to -2$ $f(x)\to 5$.

Ответ: не является непрерывной в точке $x=1$;

при $x\to -2$ $f(x)\to 5$.

6 Докажите, что $f'(2)=g'(2)$, если $f(x)=(2x-5)^4$, $g(x)=3-8x$.

Решение.

$f(x)=(2x-5)^4$, $D(f)=\mathbf{R}$, $f'(x)=4\cdot 2\cdot(2x-5)^3$;

$D(f')=\mathbf{R}$, $f'(2)=-8$,

$g(x)=3-8x$, $D(g)=\mathbf{R}$, $g'(x)=-8$; $D(g')=\mathbf{R}$,

$g'(2)=-8$.

$f'(2)=g'(2)$.

7 Найдите все значения x, при которых $f'(x)=0$, если $f(x)=2\sqrt{2}\cdot x-\sin 4x$.

Решение.

$f(x)=2\sqrt{2}\cdot x-\sin 4x$, $D(f)=\mathbf{R}$,

$f'(x)=2\sqrt{2}-4\cos 4x$; $D(f')=\mathbf{R}$.

$f'(x)=0$; $4\cos 4x=2\sqrt{2}$.

$\cos 4x=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$4x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$

$x=\pm\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{2}n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{2}n$, $n\in\mathbf{Z}$; $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{2}n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Контрольная работа № 5

Вариант 2

Часть 1

№ задания	1	2	3	4
Ответ	4	$-1; 0; 1$	рис. 1	$y' = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$

Часть 2

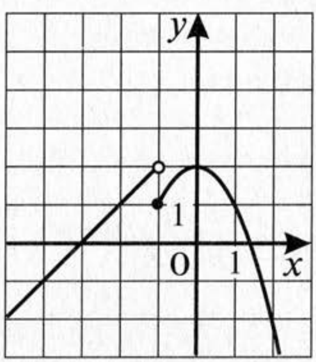
5 Постройте эскиз графика функции

$$f(x) = \begin{cases} x+3 \ \text{при} \ x \le -1, \\ 2-x^2 \ \text{при} \ x > -1. \end{cases}$$

Является ли она непрерывной в каждой точке области определения?

К какому числу стремится значение функции f при $x \to 1$? (Ответ поясните.)

Решение.



Не является непрерывной в точке $x = -1$;

при $x \to 1$ $f(x) \to 1$.

Ответ: не является непрерывной в точке $x = -1$;

при $x \to 1$ $f(x) \to 1$.

6 Докажите, что $g'(3)=h'(3)$, если $g(x)=(2x-7)^5$, $h(x)=10x-7$.

Решение.

$g(x)=(2x-7)^5$, $D(g)=\mathbf{R}$, $g'(x)=5\cdot 2\cdot(2x-7)^4$;

$D(g')=\mathbf{R}$, $g'(3)=10$;

$h(x)=10x-7$, $D(h)=\mathbf{R}$, $h'(x)=10$; $D(h')=\mathbf{R}$,

$h'(3)=10$.

$g'(3)=h'(3)$.

7 Найдите все значения x, при которых $f'(x)=0$, если $f(x)=\cos 2x+\sqrt{3}\cdot x$.

Решение.

$f(x)=\cos 2x+\sqrt{3}\cdot x$, $D(f)=\mathbf{R}$,

$f'(x)=-2\sin 2x+\sqrt{3}=0$, $D(f')=\mathbf{R}$,

$f'(x)=0$; $2\sin 2x=\sqrt{3}$.

$\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$2x=(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n$;

$x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Контрольная работа № 6

Вариант 1

Часть 1

№ задания	1	2	3	4
Ответ	1	– 13	– 0,5	96 м/с, 104 м/с^2

Часть 2

5 Докажите, что касательные, проведённые через точки графика функции $f(x)=1-\cos\frac{x}{2}$ с абсциссами $x_1=-\pi$ и $x_2=3\pi$, параллельны.

Решение.

$f(x)=1-\cos\frac{x}{2}$, $D(f)=\mathbf{R}$, $f'(x)=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$; $D(f')=\mathbf{R}$,

$y=k_1x+b_1$ – касательная, проведённая в точке графика функции с абсциссой $x_1=-\pi$;

$y=k_2x+b_2$ – касательная, проведённая в точке графика функции с абсциссой $x_2=3\pi$.

$f'(-\pi)=-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}=-\frac{1}{2}$; $f'(3\pi)=\frac{1}{2}\sin\frac{3\pi}{2}=\frac{1}{2}\cdot(-1)=-\frac{1}{2}$;

$k_1=k_2$.

$f(-\pi)=1-\cos\frac{-\pi}{2}=1$; $y=1-\frac{1}{2}(x+\pi)$; $y=-\frac{1}{2}x+1-\pi$;

$b_1=1-\pi$;

$f(3\pi)=1-\cos\frac{3\pi}{2}=1$; $y=1-\frac{1}{2}(x-3\pi)$; $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3\pi}{2}+1$;

$b_2=\frac{3\pi}{2}+1$.

$k_1=k_2$, $b_1\neq b_2$ – прямые параллельны.

6 Касательные, проведённые через точки P и M графика функции $f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$, параллельны биссектрисам первого и третьего координатных углов. Найдите координаты точек P и M.

Решение.

$f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$, $D(f)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

$f'(x)=\dfrac{(x-1)-(x-2)}{(x-1)^2}=\dfrac{1}{(x-1)^2}$,

$D(f')=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

Прямая, содержащая биссектрисы первого и третьего координатных углов, задается уравнением $y=x$.

$\dfrac{1}{(x-1)^2}=1$; $x_1=0$, $x_2=2$; $f(0)=2$, $f(2)=0$; $P(0;2)$, $M(2;0)$.

Ответ: $P(0;2)$, $M(2;0)$.

7 Найдите величину угла, образованного касательными к графику функции $y=\sin x$, которые проходят через его точки с абсциссами $x_1=\pi$ и $x_2=2\pi$.

Решение.

$y=\sin x$, $D(y)=\mathbf{R}$; $y'=\cos x$, $D(y')=\mathbf{R}$.

$y=k_1x+b_1$ – касательная, проведённая в точке графика функции с абсциссой $x_1=\pi$;

$y=k_2x+b_2$ – касательная, проведённая в точке графика функции с абсциссой $x_2=2\pi$.

$y'(x_1)=y'(\pi)=\cos\pi=-1=k_1$;

$y'(x_2)=y'(2\pi)=\cos 2\pi=1=k_2$.

$k_1\cdot k_2=-1$: угол между прямыми – $90°$.

Ответ: $90°$.

Контрольная работа № 6

Вариант 2

Часть 1

№ задания	1	2	3	4
Ответ	2	30	2	92 м/с, 172 м/с^2

Часть 2

5 Докажите, что касательные, проведённые через точки графика функции $f(x)=2+\sin 2x$ с абсциссами $x_1=0$ и $x_2=\pi$, параллельны.

Решение.

$f(x)=2+\sin 2x$, $D(f)=\mathbf{R}$,

$f'(x)=2\cos 2x$; $D(f')=\mathbf{R}$,

$y=k_1x+b_1$ – касательная, проведённая в точке графика функции с абсциссой $x_1=0$;

$y=k_2x+b_2$ – касательная, проведённая в точке графика функции с абсциссой $x_2=2\pi$.

$f'(0)=2\cos 0=2$; $f'(\pi)=2\cos 2\pi=2$; $k_1=k_2$.

$f(0)=2+\sin 0=2$; $y=2+2(x-0)$; $y=2x+2$; $b_1=2$;

$f(\pi)=2+\sin 2\pi=2$; $y=2+2(x-\pi)$; $y=2x+2-2\pi$;

$b_2=2-2\pi$.

$k_1=k_2$, $b_1\neq b_2$ – прямые параллельны.

6 Касательные, проведённые через точки A и B графика функции $f(x)=\dfrac{3+x}{x+2}$, параллельны биссектрисам второго и четвёртого координатных углов. Найдите координаты точек A и B.

Решение.

$f(x)=\dfrac{3+x}{x+2}$, $D(f)=(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$.

$f'(x)=\dfrac{(x+2)-(x+3)}{(x+2)^2}=\dfrac{-1}{(x+2)^2}$,

$D(f')=(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$.

Прямая, содержащая биссектрисы второго и четвёртого координатных углов, задается уравнением $y=-x$.

$\dfrac{-1}{(x+2)^2}=-1$; $x_1=-1$, $x_2=-3$; $f(-1)=2$, $f(-3)=0$;

$A(-1;2)$, $B(-3;0)$.

Ответ: $A(-1;2)$, $B(-3;0)$.

7 Найдите величину угла, образованного касательными к графику функции $y=-\cos x$, которые проходят через его точки с абсциссами $x_1=-\dfrac{\pi}{2}$ и $x_2=\dfrac{\pi}{2}$.

Решение.

$y=-\cos x$, $D(y)=\mathbf{R}$; $y'=\sin x$, $D(y')=\mathbf{R}$.

$y=k_1x+b_1$ – касательная, проведённая в точке графика функции с абсциссой $x_1=-\dfrac{\pi}{2}$;

$y=k_2x+b_2$ – касательная, проведённая в точке графика функции с абсциссой $x_2=\dfrac{\pi}{2}$.

$y'(x_1)=y'\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-1=k_1$;

$y'(x_2)=y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1=k_2$.

$k_1\cdot k_2=-1$: угол между прямыми – $90°$.

Ответ: $90°$.

Контрольная работа № 7

Вариант 1

Часть 1

№ задания	1	2	3	4
Ответ	$-2; 4$	$(-\infty;0], [2;+\infty)$	0	2 м/с

Часть 2

5 Докажите, что уравнение $x^5+3x^3-4=0$ имеет единственное решение. Найдите его.

Решение.

$f(x)=x^5+3x^3-4$, $D(f)=\mathbf{R}$,

$f'(x)=5x^4+9x^2$; $D(f')=\mathbf{R}$,

$f'(x)\geq 0$, следовательно, $f(x)$ возрастает на области определения.

$f(1)=1+3-4=0$.

$x=1$ – единственный нуль функции, соответственно, единственный корень уравнения.

Ответ: 1.

6 Число 45 нужно представить в виде суммы трёх положительных слагаемых таким образом, чтобы их произведение было наибольшим, причём два слагаемых были пропорциональны числам 2 и 3. Задайте формулой функцию, наибольшее значение которой необходимо будет найти.

Решение.

Пусть x – коэффициент пропорциональности, тогда одно число – $2x$; второе – $3x$, третье – $45-5x$.

Произведение этих трёх положительных чисел:

$2x \cdot 3x \cdot (45-5x)$ при $0<x<9$.

$f(x)=2x \cdot 3x \cdot (45-5x)$, $f(x)=270x^2-30x^3$.

Ответ: $f(x)=270x^2-30x^3$ при $0<x<9$.

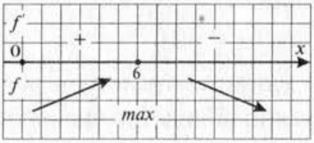
7

Найдите искомые слагаемые (см. задание 6) и представьте число 45 в виде их суммы.

Решение.

$f(x)=270x^2-30x^3$ при $0<x<9$ (см. решение задания 6).

$f'(x)=30\left(18x-3x^2\right)$; $f'(x)=0$: $x=0$, $x=6$.



$45=12+18+15.$

Ответ: $45=12+18+15.$

Контрольная работа № 7

Вариант 2

Часть 1

№ задания	1	2	3	4
Ответ	$-1; 4$	$[-2; 0], [2; +\infty)$	2π	64 м/с

Часть 2

5 Докажите, что уравнение $3 - x^3 - 2x = 0$ имеет единственное решение. Найдите его.

Решение.

$f(x) = 3 - x^3 - 2x$, $D(f) = \mathbf{R}$,

$f'(x) = -3x^2 - 2$; $D(f') = \mathbf{R}$,

$f'(x) < 0$, следовательно, $f(x)$ убывает на области определения.

$f(1) = 3 - 1 - 2 = 0$.

$x = 1$ – единственный нуль функции, соответственно, единственный корень уравнения.

Ответ: 1.

6 Число 27 нужно представить в виде суммы трёх положительных слагаемых таким образом, чтобы их произведение было наибольшим, причём два слагаемых были пропорциональны числам 1 и 5. Задайте формулой функцию, наибольшее значение которой необходимо будет найти.

Решение.

Пусть x – коэффициент пропорциональности, тогда одно число – x, второе – $5x$, третье – $27-6x$. Произведение этих трёх положительных чисел: $x\cdot 5x\cdot(27-6x)$ при $0<x<4{,}5$.

$f(x)=x\cdot 5x\cdot(27-6x)$, $f(x)=135x^2-30x^3$ при $0<x<4{,}5$.

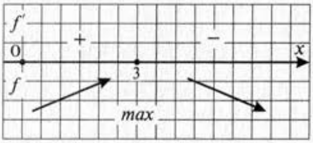
Ответ: $f(x)=135x^2-30x^3$ при $0<x<4{,}5$.

7 Найдите искомые слагаемые (см. задание 6) и представьте число 27 в виде их суммы.

Решение.

$f(x)=135x^2-30x^3$ при $0<x<4{,}5$ (см. решение задания 6).

$f'(x)=90x(3-x)$; $f'(x)=0$: $x=0$, $x=3$.



27 = 3 + 15 + 9.

Ответ: 27 = 3 + 15 + 9.

Итоговая контрольная работа

Вариант 1

Часть 1

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
Ответ	221200	– 3	3	–0,5	2; 5	1	2

Часть 2

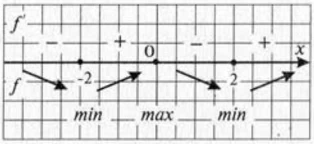
8 Постройте эскиз графика функции $f(x) = x^4 - 8x^2$. Используя его, определите число корней уравнения $f(x) = -2$.

Решение.

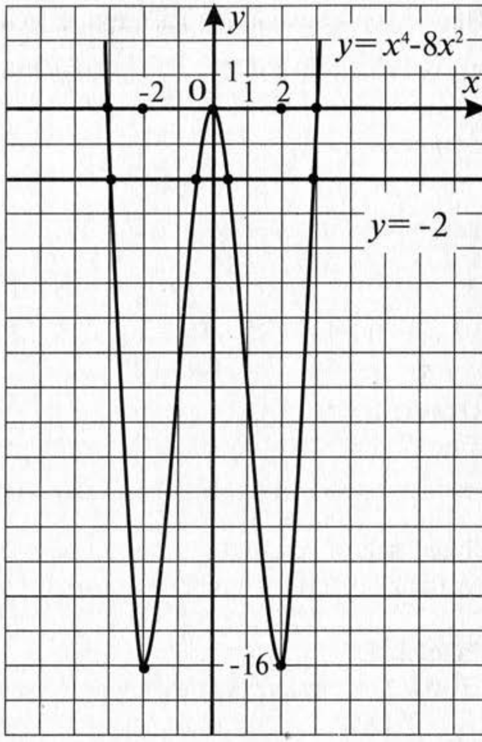
$f(x) = x^4 - 8x^2$, $D(f) = \mathbf{R}$,

$f'(x) = 4x^3 - 16x$, $D(f') = \mathbf{R}$.

$f'(x) = 0$, $4x^3 - 16x = 0$: $x = 0$; $x = -2$; $x = 2$.



$f(0) = 0$; $f(-2) = f(2) = 16 - 32 = -16$.



Уравнение $f(x) = -2$ имеет 4 корня.

Ответ: 4 корня.

9 Решите уравнение $\left(1 - \frac{1}{\cos^2 x}\right)\sqrt{9 - x^2} = 0$.

Решение.

$\left(1 - \frac{1}{\cos^2 x}\right)\sqrt{9 - x^2} = 0$.

$-\mathrm{tg}^2 x = 0$; $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$;

$-3 \le x \le 3$: $n = 0$ $x = 0$; $n = 1$ $x = \pi > 3$; $n = -1$ $x = -\pi < -3$.

$9 - x^2 = 0$: $x = -3$, $x = 3$.

Ответ: –3, 0, 3.

10 При каком значении параметра a прямая $y=3x+a$ является касательной к графику функции $y=4x^2-5x+9$?

Решение.

$y=4x^2-5x+9$, $D(y)=\mathbf{R}$.

$y'=8x-5$, $D(y')=\mathbf{R}$.

$y'(x)=k=3$; $8x_0-5=3$; $x_0=1$.

$y(x_0)=y(1)=4-5+9=8=y_0$; $y_0=3+a$; $3+a=8$;

$a=5$.

Ответ: $a=5$.

11 Представьте число 16 в виде произведения двух положительных чисел, сумма которых будет наименьшая.

Решение.

Пусть x – один из множителей, тогда другой множитель – $\dfrac{16}{x}$.

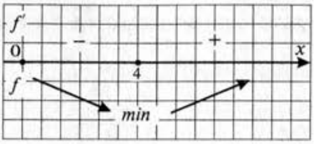
Сумма этих чисел: $x+\dfrac{16}{x}$ при $x>0$.

$f(x)=x+\dfrac{16}{x}$ при $x>0$.

$f'(x)=1-\dfrac{16}{x^2}$ при $x>0$.

$f'(x)=0$: $x=4$, $x=-4<0$.

При $x\in(0;4)$ $f'(x)<0$; при $x\in(4;+\infty)$ $f'(x)>0$.



$$\min_{(0;\,+\infty)} f(x) = f(4).$$

$16 = 4 \cdot 4$.

Ответ: $16 = 4 \cdot 4$.

Итоговая контрольная работа

Вариант 2

Часть 1

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
Ответ	420	4	2,4	0,5	3; 7	1	0,6

Часть 2

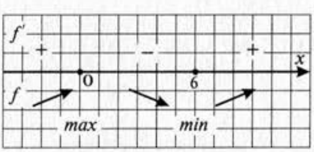
8 Постройте эскиз графика функции $f(x)=\frac{1}{9}x^3-x^2$. Используя его, определите число корней уравнения $f(x)=-1$.

Решение.

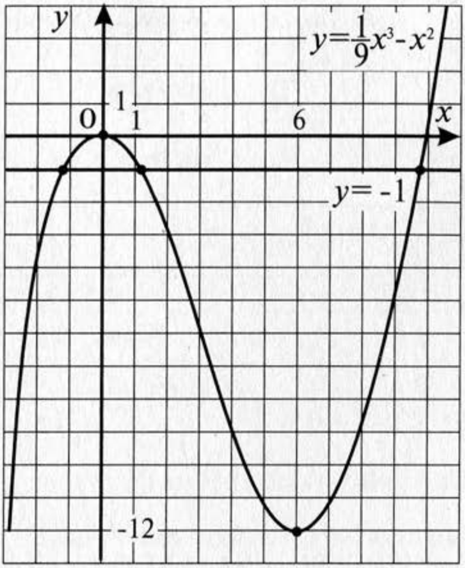
$f(x)=\frac{1}{9}x^3-x^2$, $D(f)=\mathbf{R}$,

$f'(x)=\frac{1}{3}x^2-2x$, $D(f')=\mathbf{R}$.

$f'(x)=0$, $\frac{1}{3}x^2-2x=0$: $x=0$; $x=6$.



$f(0)=1$; $f(6)=24-36=-12$.



Уравнение $f(x)=-1$ имеет 3 корня.

Ответ: 3 корня.

9 Решите уравнение $\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)\sqrt{4-x^2}=0$.

Решение.

$\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\cdot\sqrt{4-x^2}=0$.

$\mathrm{ctg}^2 x=0$; $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$;

$-2\le x\le 2$: $n=0$ $x=\frac{\pi}{2}\approx 1{,}5$, $n=1$ $x=\frac{3\pi}{2}\approx 4{,}5>2$,

$n=-1$ $x=-\frac{\pi}{2}\approx -1{,}5$, $n=-2$ $x=-\frac{3\pi}{2}\approx -4{,}5<-2$.

$4-x^2=0$: $x=-2$, $x=2$.

Ответ: -2, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, 2.

10 При каком значении параметра a прямая $y=5x+a$ является касательной к графику функции $y=2x^2-3x+7$?

Решение.

$y=2x^2-3x+7$, $D(y)=\mathbf{R}$.

$y'=4x-3$, $D(y')=\mathbf{R}$.

$y'(x)=k=5; 4x_0-3=5;$ $x_0=2$.

$y(x_0)=y(2)=8-6+7=9=y_0$; $y_0=10+a$; $10+a=9$;

$a=-1$.

Ответ: $a=-1$.

11 Площадь прямоугольника равно 36. Какие длины должны иметь его стороны, чтобы периметр прямоугольника был наименьшим?

Решение.

Пусть x – длина одной стороны прямоугольника, тогда длина другой стороны – $\frac{36}{x}$.

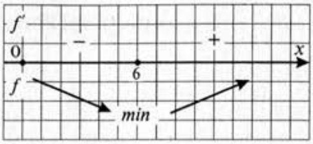
Периметр прямоугольника: $2\left(x+\frac{36}{x}\right)$ при $x>0$.

$P(x)=2\left(x+\frac{36}{x}\right)$ при $x>0$.

$P'(x)=2\left(1-\frac{36}{x^2}\right)$ при $x>0$.

$P'(x)=0$: $x=6$, $x=-6<0$.

При $x\in(0;6)$ $P'(x)<0$; при $x\in(6;+\infty)$ $P'(x)>0$.



$$\min_{(0;\,+\infty)} P(x) = P(6).$$

Стороны прямоугольника: 6; 6.

Ответ: 6; 6.

Для заметок

ИНТЕЛЛЕКТ-ЦЕНТР

Учебные материалы для подготовки к ЕГЭ и ГИА

Тетради для тематического и итогового контроля

Сборники тестовых заданий

Дидактические материалы

Материалы для развития интеллектуальных способностей

Учебные пособия, реализующие современные технологии в обучении и контроле учащихся

По вопросам оптовых закупок и заключения договоров обращайтесь по тел./факсу: (495) 330-43-47, 330-08-83

Ждем Ваших писем: Москва, 117485, а/я 18

E-mail: incent@com2com.ru

http: www.intellectcentre.ru

ISBN 978-5-89790-834-9

9 785897 908349