Серия «Библиотека школьника»

Э. Н. Балаян

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА И СИСТЕМЫ

Ростов-на-Дону
«ФЕНИКС»
2006

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я721
КТК 444
Б 20

Балаян Э.Н.
Б 20 Практикум по решению задач. Тригонометрические уравнения, неравенства и системы / Э.Н. Балаян. — Ростов н/Д : Феникс, 2006. — 153, [2] с. — (Библиотека школьника).

ISBN 5-222-07201-0

Данное пособие предназначено для самостоятельного изучения школьного курса математики, содержит большое количество разноуровневых задач с подробными решениями, в том числе и для самостоятельной работы.

Книгу можно использовать как задачник по данной теме, включающий решение тригонометрических уравнений, неравенств и систем.

Предлагаемая серия предназначена для учащихся старших классов, абитуриентов, слушателей подготовительных отделений вузов, при подготовке к экзаменам как в форме ЕГЭ, так и в традиционной письменной форме.

Кроме того, пособие может быть использовано учителями математики для организации дополнительных занятий со школьниками.

УДК 373.167.1:512
ISBN 5-222-07201-0 ББК 22.14я721

Краткие справочные материалы

1. $\sin x = a,\ x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z, |a| \le 1.$

2. $\cos x = a, x = \pm\arccos a + 2\pi n, n \in Z, |a| \le 1.$

3. $tgx = a, x = \mathrm{arctg}a + \pi \mathrm{n}, n \in Z, a \in R.$

4. $\mathrm{ctg}x = a, x = \mathrm{arcctg}a + \pi n, n \in Z, a \in R.$

Частные случаи $(a = 0, a = 1, a = -1)$.

$\sin x = 0, x = \pi n, n \in Z;$

$\sin x = 1, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;$

$\sin x = -1, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;$

$\cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$

$\cos x = 1, x = 2\pi n, n \in Z;$

$\cos x = -1, x = \pi + 2\pi n, n \in Z;$

$\mathrm{tg}x = 0, x = \pi n, n \in Z;$

$\mathrm{ctg}x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$

Основные формулы

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;\ \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$

$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1, 1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; 1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha};$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha;$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;$$

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha;$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2};$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},\alpha\neq\pi+2\pi n,n\in Z;$$

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$

$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$, где

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right);$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right);$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin\left(\alpha-\beta\right)+\sin\left(\alpha+\beta\right)\right);$$

$$\arcsin\left(-x\right)=-\arcsin x;$$

$$\arccos\left(-x\right)=\pi-\arccos x;$$

$$\operatorname{arctg}\left(-x\right)=-\operatorname{arctg} x;$$

$$\operatorname{arcctg}\left(-x\right)=\pi-\operatorname{arcctg} x;$$

Тригонометрические уравнения, неравенства и системы

§ 1. Уравнения (№1—101)

Пример 1. Решить уравнение $\cos 3x = 0$.

Решение.

Имеем частный случай:

$$3x = \frac{\pi}{2} + \pi n, x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z.$

Пример 2. Решить уравнение

$$\sin\frac{x}{4} = -1.$$

Решение.

Аналогично, имеем:

$$\frac{x}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \text{ откуда } x = -2\pi + 8\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $-2\pi + 8\pi n, n \in Z.$

Пример 3. Решить уравнение

$$\cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Решение.

Так как $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$, то получим:

$$\frac{x}{2} = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, \frac{x}{2} = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n,$$

$$\frac{x}{2} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \text{ откуда } x = \pm\frac{4\pi}{3} + 4\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $\pm\frac{4\pi}{3} + 4\pi n, n \in Z.$

Пример 4. Решить уравнение

$2\sin x = -\sqrt{2}.$

Решение.

Разделив обе части уравнения на 2, получим

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ откуда}$$

$$x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi n, \text{ или}$$

$$x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$$

Ответ: $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

Пример 5. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}.$$

Решение.

Применяя формулу для решения уравнения вида $\operatorname{tg} x = a$, имеем:

$$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi n, n \in Z; \ \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + \pi n, \text{ или}$$

$$x - \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \text{ откуда } x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$

Пример 6. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)=-1.$$

Решение.

Применяя формулу приведения

$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha,$ получим:

$\operatorname{tg}2x=-1,$ или $2x=\operatorname{arctg}(-1)+\pi n,$

$$2x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z.$

Пример 7. Решить уравнение

$$2\sin^2 x-5\sin x+2=0.$$

Решение.

Данное уравнение является квадратным относительно $\sin x$. Заменой $\sin x=y$, оно сводится к уравнению

$$2y^2-5y+2=0, D=25-16=9=3^2>0, y_{1,2}=\frac{5\pm 3}{2},$$

$$y_1=\frac{5-3}{2}=1, y_2=\frac{5+3}{2}=4.$$

Если $y=1$, то получим $\sin x=1$, откуда

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z.$$

Если $y=4$, то $\sin x=4$ — нет корней, так как $|\sin x|\le 1$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z.$

Пример 8. Решить уравнение $2\cos^2 + \sin x - 1 = 0.$
Решение.

Так как $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, то данное уравнение примет вид:

$$2\left(1 - \sin^2 x\right) + \sin x - 1 = 0, \text{ или } 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0.$$

Пусть $\sin x = y$, где $|y| \le 1$, тогда

$$2y^2 - y - 1 = 0, D = 1 + 8 = 3^2 > 0,$$

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4}, y_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}; y_2 = 1.$$

Если $y = -\frac{1}{2}$, то $\sin x = -\frac{1}{2}, x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z;$

если $y = 1$, то $\sin x = 1, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$

Ответ: $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$

Пример 9. Решить уравнение $\cos x - \sin x = 0.$
Решение.

Данное уравнение является однородным уравнением I степени.

Заметим, что $\cos x \ne 0, \sin x \ne 0$ одновременно, ибо не будет выполняться основное тригонометрическое тождество $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Тогда, разделив обе части исходного уравнения на $\cos x \ne 0$, получим $1 - \operatorname{tg} x = 0$, или $\operatorname{tg} x = 1$, откуда

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

Пример 10. Решить уравнение

$\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^2 x=0.$

Решение.

Заметим, что делить обе части уравнения на $\cos^2 x$ нельзя, так как те значения x, при которых $\cos^2 x=0$ удовлетворяют данному уравнению, а значит, деление на $\cos^2 x$ приведет к потере корней.

Уравнения такого типа целесообразно решать разложением левой части на множители:

$\cos x\left(\sqrt{3}\sin x-\cos x\right)=0,$ откуда $\cos x=0,$ или

$\sqrt{3}\sin x-\cos x=0.$

Если $\cos x=0,$ то $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z;$

если $\sqrt{3}\sin x-\cos=0,$ то $\sqrt{3}\operatorname{tg}x-1=0,$ или

$\operatorname{tg}x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}, x=\dfrac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}+\pi n;\dfrac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z.$

Пример 11. Решить уравнение $\sin 3x+\sin x=\sin 2x.$

Решение.

Применяя формулу суммы синусов, получим: $2\sin 2x\cos x=\sin 2x,$ или $\sin 2x(2\cos x-1)=0,$ откуда $\sin 2x=0,$ или $2\cos x-1=0$.

Если $\sin 2x=0,$ то $2x=\pi n, x=\dfrac{\pi n'}{2}, n\in Z;$

если $2\cos x-1=0,$ то $\cos x=\dfrac{1}{2}, x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z.$

Ответ: $\dfrac{\pi n}{2};\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z.$

Пример 12. Решить уравнение $\sin 2x = \sqrt{2}\cos x$.

Решение.

Так как $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, то данное уравнение запишется в виде $2\sin x\cos x = \sqrt{2}\cos x$.

Заметим, что разделить обе части полученного уравнения на $\cos x$ нельзя, так как это приведет к потере решений, являющихся корнями уравнения $\cos x = 0$.

Запишем уравнение в виде:

$$\cos x\left(2\sin x - \sqrt{2}\right) = 0,$$

откуда имеем совокупность уравнений:

а) $\cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$

б) $2\sin x - \sqrt{2} = 0, \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n; (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

Пример 13. Решить уравнение $\sin 4x - \cos 2x = 0$.

Решение.

Так как $\sin 4x = \sin(2 \cdot 2x) = 2\sin 2x\cos 2x$, то получим $2\sin 2x\cos 2x - \cos 2x = 0$, $\cos 2x(2\sin 2x - 1) = 0$, откуда $\cos 2x = 0$, или $2\sin 2x - 1 = 0$.

Из уравнения $\cos 2x = 0$, имеем:

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

Из уравнения $2\sin 2x - 1 = 0$, находим:

$$\sin 2x = \frac{1}{2}, 2x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$

Пример 14. Решить уравнение

$\cos 2x - \sin x = \sqrt{3}\left(\cos x - \sin 2x\right).$

Решение.

Разделим обе части уравнения на 2:

$$\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos x - \sin 2x\right), \text{ или}$$

$$\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x.$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6} \text{ и } \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6},$$

имеем:

$$\cos\frac{\pi}{3}\cos 2x + \sin\frac{\pi}{3}\sin 2x = \cos\frac{\pi}{6}\cos x + \sin\frac{\pi}{6}\sin x;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right), \text{ или}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 0.$$

Применяя формулу разности косинусов, получим:

$$-2\sin\frac{\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) + \left(\frac{\pi}{6} - x\right)}{2}\sin\frac{\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) - \left(\frac{\pi}{6} - x\right)}{2} = 0;$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{x}{2}\right) = 0.$$

Отсюда получим:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3x}{2}\right) = 0, \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} = \pi n, \quad 3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$

$$x_1=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3},n\in Z;$$

2) $\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{x}{2}\right)=0,\ \frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}=\pi n,\ x_2=\frac{\pi}{6}+2\pi n,n\in Z.$

Ответ: $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3};\frac{\pi}{6}+2\pi n,n\in Z.$

Пример 15. Решить уравнение

$2(\cos 4x-\sin 3x\cos x)=\sin 4x-\sin 2x.$

Решение.

Запишем уравнение в виде:

$\cos 4x-\sin 3x\cos x=0,5(\sin 4x-\sin 2x)$, или

$\cos 4x=\sin 3x\cos x+0,5(\sin 4x-\sin 2x).$

Так как $\sin 4x-\sin 2x=2\sin x\cos 3x$, то получим:

$\cos 4x=\sin 3x\cos x+\sin x\cos 3x$, или

$\cos 4x=\sin 4x, \cos 4x\neq 0$, откуда

$\mathrm{tg}\, 4x=1; 4x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\quad x=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4},n\in Z.$

Ответ: $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4},n\in Z.$

Пример 16. Решить уравнение $\cos 3x+\cos 5x=\cos 4x.$

Решение.

Применяя формулу суммы косинусов, получим:

$2\cos 4x\cos x=\cos 4x$, или $\cos 4x(2\cos x-1)=0$,

откуда:

1) $\cos 4x=0,\ 4x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ x_1=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4},\ n\in Z;$

2) $2\cos x - 1 = 0, \cos x = \dfrac{1}{2}, x_2 = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{4}; \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$

Пример 17. Решить уравнение

$\sin x - \sqrt{3}\cos 2x = \sin 3x.$

Решение.

Запишем уравнение в виде:

$(\sin 3x - \sin x) + \sqrt{3}\cos 2x = 0,$ или

$2\sin x\cos 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 0, \ \cos 2x\left(2\sin x + \sqrt{3}\right) = 0,$

откуда:

1) $\cos 2x = 0, 2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, x_1 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}, n \in Z;$

2) $2\sin x + \sqrt{3} = 0, \sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, x_2 = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}; (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z.$

Пример 18. Решить уравнение

$\sin x - 1 = \sin x\cos x - \cos x.$

Решение.

В правой части уравнения общий множитель $\cos x$ выносим за скобки:

$\sin x - 1 = \cos x(\sin x - 1),$ или $(\sin x - 1)(\cos x - 1) = 0,$

откуда имеем:

1) $\sin x - 1 = 0, \sin x = 1, x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;$

2) $\cos x - 1 = 0, \cos x = 1, x = 2\pi n, n \in Z.$

Ответ: $\frac{\pi}{2}+2\pi n; 2\pi n, n\in Z.$

Пример 19. Решить уравнение $\operatorname{tg} x(\sin x-1)=0.$

Решение.

Считать данное уравнение равносильным совокупности уравнений $\operatorname{tg} x=0$ и $\sin x-1=0$ было бы ошибкой. Объясняется это тем, что из уравнения $\operatorname{tg} x=0$ находим $x=\pi n$; из уравнения $\sin x=1$ получим $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, тогда множитель $\operatorname{tg} x$, входящий в данное уравнение не имеет смысла, т.е. значения $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$ не принадлежат области определения уравнения, это посторонние корни.

Тогда $x=\pi n$ — корни исходного уравнения.

Ответ: $\pi n, n\in Z.$

Пример 20. Решить уравнение $\cos 3x\cos x=\cos 2x.$

Решение.

Заметим, что

$$\cos 2x=\cos(3x-x)=\cos 3x\cos x+\sin 3x\sin x,$$

тогда данное уравнение примет вид $\sin x\sin 3x=0$, откуда имеем:

1) $\sin x=0, x=\pi n, n\in Z;$

2) $\sin 3x=0, x=\frac{\pi n}{3}, n\in Z.$

Нетрудно видеть, что числа вида $x=\pi n$ содержатся среди чисел вида $x=\frac{\pi n}{3}, n\in Z$, так как, если $n=3k, k\in Z$, то $\frac{\pi n}{3}=\pi k.$

Значит, первая серия корней содержится во второй.

Ответ: $\frac{\pi n}{3}, n \in Z.$

Пример 21. Решить уравнение

$$\sin 2x \sin 4x \sin 6x = \frac{1}{4}\sin 4x.$$

Решение.

Наиболее простым кажется такое решение:

1) $\sin 4x = 0, 4x = \pi n, x = \frac{\pi n}{4}, n \in Z.$

2) $\sin 2x \sin 6x = \frac{1}{4}$, или $\frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 8x) = \frac{1}{4}$,

$\cos 8x - \cos 4x + \frac{1}{2} = 0;\quad 2\cos^2 4x - \cos 4x - \frac{1}{2} = 0,$

$D = 1 + 4 = 5 > 0, \cos 4x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$, откуда находим

$$x = \pm\frac{1}{4}\arccos\frac{1 \pm \sqrt{5}}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

Следует заметить, что более рациональным оказывается другое решение:

$\sin 2x \sin 4x \sin 6x = \frac{1}{2}\sin 2x \cos 2x$, откуда:

1) $\sin 2x = 0; x = \frac{\pi n}{2}, n \in Z;$

2) $2\sin 4x \sin 6x = \cos 2x$, или $\cos 2x - \cos 10x = \cos 2x$,

откуда $\cos 10x = 0,\ 10x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{10},\ n \in Z.$

Пример 22. Решить уравнение

$$\sin^2 2x + 4\sin^2 x - 3 = 0.$$

Решение.

Так как $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, то

$\sin^2 2x = 4\sin^2 x\cos^2 x$, тогда получим

$4\sin^2 x\cos^2 x + 4\sin^2 x - 3 = 0.$

Но $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, значит,

$4\sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right) + 4\sin^2 x - 3 = 0$, или

$4\sin^4 x - 9\sin^2 x + 3 = 0.$

Пусть $\sin^2 x = t, 0 \le t \le 1$, тогда

$$4t^2 - 8t + 3 = 0, \frac{D}{4} = 16 - 12 = 4 = 2^2 > 0,$$

$t_{1,2} = \dfrac{4 \pm 2}{4}, t_1 = \dfrac{1}{2}, t_2 = \dfrac{3}{2}$ (не удовлетворяют, т.к. $0 \le t \le 1$).

Если $t = \dfrac{1}{2}$, то $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}$ или $\dfrac{1-\cos 2x}{2} = \dfrac{1}{2}$, откуда

$$\cos 2x = 0, \quad 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}, n \in Z.$

Замечание 1.

Решение исходного уравнения несколько упростится, если перейти к $\cos 2x$:

$1 - \cos^2 2x + 2(1 - \cos 2x) - 3 = 0$, $\cos^2 2x + 2\cos 2x = 0$,

$\cos 2x(\cos 2x + 2) = 0$,

и так как $\cos 2x + 2 \ne 0$, остается $\cos 2x = 0$, откуда

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

Замечание 2.

Если при I способе заменить

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x,$

то получим после упрощения

$$4\cos^4 x = 1, \cos^2 x = \frac{1}{2}, \quad \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2},$$

откуда

$$\cos 2x = 0 \text{ и } x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

Пример 23. Решить уравнение $1 - \cos 4x = \operatorname{tg} 2x.$

Решение.

Так как $1 - \cos 4x = 2\sin^2 2x,$ то уравнение примет вид

$$2\sin^2 2x = \operatorname{tg} 2x \text{ или } 2\sin^2 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}, \cos 2x \neq 0;$$

$$2\sin^2 2x \cos 2x = \sin 2x;$$

1) $\sin 2x = 0, \quad 2x = \pi n, x_1 = \frac{\pi n}{2};$

2) $2\sin 2x \cos 2x = 1, \sin 4x = 1, 4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;$

$$x_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$

Пример 24. Решить уравнение $\sin 9x = 3\sin 3x.$

Решение.

Так как $3\sin 3x = \sin 3x + 2\sin 3x,$ то уравнение запишется в виде: $\sin 9x - \sin 3x = 2\sin 3x.$

К левой части полученного уравнения применим формулу разности синусов:

$2\sin 3x\cos 6x = 2\sin 3x$, или $\sin 3x\cos 6x = \sin 3x$.

Отсюда имеем:

1) $\sin 3x = 0$, $3x = \pi n$, $x_1 = \dfrac{\pi n}{3}$, $n \in Z$;

2) $\cos 6x = 1$, $6x = 2\pi n$, $x_2 = \dfrac{\pi n}{3}$, $n \in Z$.

Как видим, обе серии совпадают. Объясняется это тем, что $1-\cos 6x = 2\sin^2 3x$, тогда $2\sin^2 3x = 0$, $\sin 3x = 0$, что совпадает с 1).

Ответ: $\dfrac{\pi n}{3}, n \in Z$.

Пример 25. Решить уравнение

$$\sin 6x = 2\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right).$$

Решение.

Так как $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+2x\right) = \sin 2x$, то получим

$\sin 6x = 2\sin 2x$, или $\sin 6x - \sin 2x = \sin 2x$.

К левой части полученного уравнения применим формулу разности синусов:

$2\sin 2x\cos 4x = \sin 2x$, откуда:

1) $\sin 2x = 0$, $2x = \pi n$, $x_1 = \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in Z$;

2) $2\cos 4x = 1$, $\cos 4x = \dfrac{1}{2}$; $4x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$,

$x_2 = \pm\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2}, n \in Z$.

Ответ: $\dfrac{\pi n}{2}, \pm\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{2}, n \in Z$.

Пример 26. Решить уравнение $\sin 3x = \cos 5x$.
Решение.
Заметим, что

$$\cos 5x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right),$$

тогда уравнение запишется в виде

$$\sin 3x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = 0.$$

Применяя формулу разности синусов, получим:

$$2\sin\frac{3x - \left(\frac{\pi}{2} - 5x\right)}{2}\cos\frac{3x + \left(\frac{\pi}{2} - 5x\right)}{2} = 0, \text{ или}$$

$$\sin\left(4x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0, \quad \text{откуда:}$$

1) $\sin\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad 4x - \frac{\pi}{4} = \pi n,\ x_1 = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4},\ n \in Z;$

2) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0, \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0;$

$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n, x_2 = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}, \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

Пример 27. Решить уравнение

$$\frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin x} = 0.$$

Решение.
Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 3x = 0, \\ \sin x \neq 0. \end{cases}$$

Из уравнения $\operatorname{tg} 3x = 0$ имеем $3x = \pi n, x = \dfrac{\pi n}{3}, n \in Z$.

Заметим, что $\sin\dfrac{\pi n}{3}$ обращается в нуль при n кратном 3, следовательно, из серии решений $x = \dfrac{\pi n}{3}$ надо исключить такие значения x.

Ответ: $\pm\dfrac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$.

Пример 28. Решить уравнение

$$1 - \sin 7x = \left(\cos\frac{5x}{2} - \sin\frac{5x}{2}\right)^2.$$

Решение.
Имеем:

$1 - \sin 7x = \cos^2\dfrac{5x}{2} + \sin^2\dfrac{5x}{2} - 2\sin\dfrac{5x}{2}\cos\dfrac{5x}{2}$, или

$1 - \sin 7x = 1 - \sin\left(2\cdot\dfrac{5x}{2}\right)$, или

$1 - \sin 7x = 1 - \sin 5x$, или $\sin 7x - \sin 5x = 0$.

Применяя формулу разности синусов, получим $2\sin x \cos 6x = 0$, откуда:

1) $\sin x = 0, x_1 = \pi n$;

2) $\cos 6x = 0, \quad 6x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \ x_2 = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{6}, n \in Z$.

Ответ: $\pi n, \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{6}, n \in Z$.

Пример 29. Решить уравнение
$\operatorname{tg}^4 x - 1 = \cos 2x.$

Решение.

$$\frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} - 1 = \cos 2x;$$

$$\frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\cos^4 x} = \cos 2x;$$

$$\frac{\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)}{\cos^4 x} = \cos 2x,$$

$$\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^4 x} = \cos 2x,$$

или $\dfrac{-\cos 2x}{\cos^4 x} = \cos 2x,\quad \dfrac{\cos 2x\left(1 + \cos^4 x\right)}{\cos^4 x} = 0.$

Заметим, что $1 + \cos^4 x > 0$ при всех $x \in R$, тогда последнее уравнение равносильно смешанной системе:

$$\begin{cases} \cos 2x = 0, \\ \cos x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ \cos x \neq 0, \end{cases}$$

откуда $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}, n \in Z.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}, n \in Z.$

Пример 30. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x \sin x - \frac{1}{2\cos x} = \cos x.$$

Решение.

Так как $\cos x \neq 0$, т.е. $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$, то, разделив обе части уравнения на $\cos x \neq 0$, получим:

$$\operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{2\cos^2 x} = 1.$$

Но $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, тогда полученное уравнение примет вид

$$\operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right) = 1, \text{ или } 2\operatorname{tg}^2 x - 1 - \operatorname{tg}^2 x = 2,$$

$$\operatorname{tg}^2 x = 3, \operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}, \text{ откуда } x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z.$

Пример 31. Решить уравнение

$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos 2x.$$

Решение.

Используя формулу понижения степени

$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha,$

получим:

$$1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos 2x, \text{ или } 1 - \sin 2x = \cos 2x.$$

Полученное уравнение можно решить различными способами, например:

$$\left(1 - \cos 2x\right) - \sin 2x = 0, \ 2\sin^2 x - 2\sin x\cos x = 0,$$

$$\sin x\left(\sin x - \cos x\right) = 0, \text{ откуда}$$

1) $\sin x = 0, x_1 = \pi n, n \in Z;$

2) $\sin x - \cos x = 0$ — однородное уравнение I степени.

Так как $\cos x \neq 0$, то $\operatorname{tg} x - 1 = 0, \operatorname{tg} x = 1,$

$$x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$$

Ответ: $\pi n, \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

Пример 32. Решить уравнение

$8\sin^4 x = 1 + \cos 4x.$

Решение.

Применяя формулу $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$, получим:

$2\left(2\sin^2 x\right)^2 = 2\cos^2 2x$, или $\left(1 - \cos 2x\right)^2 = \cos^2 2x$,

$1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x = \cos^2 2x, 1 - 2\cos 2x = 0, \cos 2x = \dfrac{1}{2};$

$2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, откуда $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$

Ответ: $\pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$

Пример 33. Решить уравнение

$1 + 6\sin^2\left(\dfrac{13\pi}{2} + x\right) = 4\sin 2x + \cos 2x.$

Решение.

Заметим, что

$\sin\left(\dfrac{13\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ и

$1 - \cos 2x = 2\sin^2 x,$

тогда данное уравнение примет вид

$2\sin^2 x + 6\cos^2 x = 4 \cdot 2\sin x\cos x$, или

$2\sin^2 x + 6\cos^2 x - 8\sin x\cos x = 0.$

Полученное уравнение является однородным уравнением II степени. Так как $\sin x \neq 0, \cos x \neq 0$ одновременно, то, разделив обе части полученного уравнения, например, на $\cos^2 x \neq 0$, получим:

$2\,\mathrm{tg}^2 x + 6 - 8\,\mathrm{tg}\, x = 0$, или $\mathrm{tg}^2 x - 4\,\mathrm{tg}\, x + 3 = 0$, откуда

$\operatorname{tg} x = 1, \operatorname{tg} x = 3.$

Значит, $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n, x_2 = \operatorname{arctg} 3 + \pi n, n \in Z.$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n, \operatorname{arctg} 3 + \pi n, n \in Z.$

Пример 34. Решить уравнение $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = 0.$

Решение.

Используя формулу суммы тангенсов, имеем:

$$\frac{\sin(x+2x)}{\cos x \cos 2x} = 0, \text{ или } \frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x} = 0.$$

Полученное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \sin 3x = 0, \\ \cos x \neq 0, \\ \cos 2x \neq 0; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = \frac{\pi n}{3}, n \in Z, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z. \end{cases}$$

Остается сделать проверку:

а) $\frac{\pi n}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, при $2n = 3(2n+1)$, что невозможно;

б) $\frac{\pi n}{3} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, при $4n = 3(2n+1)$, что также невозможно. Значит, посторонних корней нет.

Ответ: $\frac{\pi n}{3}, n \in Z.$

Пример 35. Решить уравнение

$\sin 2x \cdot \sin 6x = \cos x \cos 3x.$

Решение.

Используя формулы произведения синусов и косинусов двух аргументов, получим:

$$\frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 8x) = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x), \text{ или}$$

$\cos 4x - \cos 8x = \cos 2x + \cos 4x$, $\cos 8x + \cos 2x = 0$, или

$2\cos 5x \cos 3x = 0$, откуда:

1) $\cos 5x = 0$, $5x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $n \in Z$;

2) $\cos 3x = 0$, $3x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$; $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$.

Пример 36. Решить уравнение

$2\cos 4x \cos 2x = 4\cos^3 2x - 3\cos 2x$.

Решение.

Заметим, что $4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \cos 3\alpha$, тогда данное уравнение примет вид $2\cos 4x \cos 2x = \cos 6x$, или $\cos 6x + \cos 2x =$ $= \cos 6x$, или $\cos 2x = 0$, $2x \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$.

Пример 37. Решить уравнение

$1 + \sin 2x = (\cos 5x + \sin 5x)^2$.

Решение.

$1 + \sin 2x = (\cos^2 5x + \sin^2 5x) + 2\cos 5x \sin 5x$,

$1 + \sin 2x = 1 + \sin 10x$, или $\sin 10x - \sin 2x = 0$,

$2\sin 4x \cos 6x = 0$, $\sin 4x \cos 6x = 0$, откуда имеем:

1) $\sin 4x = 0$; $4x = \pi n$, $x_1 = \dfrac{\pi n}{4}$, $n \in Z$;

2) $\cos 6x = 0$; $6x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $x_2 = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{6}$, $n \in Z$.

Ответ: $\dfrac{\pi n}{4}$; $\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{6}$, $n \in Z$.

Пример 38. Решить уравнение $4\sin x + 3\cos x = 5$.

Решение.

I способ.

Разделим обе части уравнения на 5:

$$\frac{4}{5}\sin x + \frac{3}{5}\cos x = 1.$$

Пусть $\dfrac{4}{5} = \sin\varphi$, где $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$,

получим

$$\frac{3}{5} = \cos\varphi \quad \left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1\right),$$

и, тогда данное уравнение примет вид

$$\sin\varphi\sin x + \cos\varphi\cos x = 1, \text{ или } \cos(x - \varphi) = 1,$$

откуда

$$x - \varphi = 2\pi n \text{ и } x = 2\pi n + \varphi, \text{ где } \varphi = \arccos\frac{3}{5},$$

тогда

$$x = \arccos\frac{3}{5} + 2\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $\arccos\dfrac{3}{5} + 2\pi n, n \in Z$.

II способ.

Используя формулы

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}, \quad \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$$

и записывая правую часть уравнения в виде

$$5 = 5 \cdot 1 = 5\left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}\right),$$

получим

$$8\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 3\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = 5\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right);$$

$$8\sin^2\frac{x}{2} - 8\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 2\cos^2\frac{x}{2} = 0;$$

$$4\sin^2\frac{x}{2} - 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 0;$$

$$\left(2\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 = 0, \text{ или}$$

$2\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} = 0$ — однородное уравнение I степени.

Разделив обе части уравнения на $\cos\frac{x}{2} \neq 0$, получим

$$2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1 = 0,\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{2};\ \frac{x}{2} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n,$$

$$x = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Ответ: $2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

III способ.

Используя формулы, выражающие $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (универсальные тригонометрические подстановки), получим:

$$4\cdot\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}+3\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=5.$$

Пусть $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, тогда получим:

$\frac{8t}{1+t^2}+\frac{3-3t}{1+t^2}=5$, $1+t^2>0$ при всех $t\in R$,

$8t+3-3t^2=5+5t^2$, или $8t^2-8t+2=0$,

$4t^2-4t+1=0$; $(2t-1)^2=0$; $2t-1=0$, $t=\frac{1}{2}$.

Учитывая, что $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, имеем $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$, откуда

$x=2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi n,\ n\in Z.$

Но $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ не имеет смысла, если $\cos\frac{x}{2}=0$, т.е. при $x=\pi+2\pi n, n\in Z$. Проверкой можно убедиться, что числа вида $\pi+2\pi n$ не являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi n,\ n\in Z.$

IV способ.

Используя основное тригонометрическое тождество, получим систему уравнений:

$$\begin{cases}4\sin x+3\cos x=5,\\ \sin^2 x+\cos^2 x=1.\end{cases}$$

Далее, обозначив $\sin x=a$, $\cos x=b$, где $|a|\le 1$, $|b|\le 1$, получим алгебраическую систему

$$\begin{cases} 4a+3b=5, \\ a^2+b^2=1 \end{cases}$$

которую легко решить способом подстановки.

Замечание 1. При решении I способом вопрос о проверке корней отпадает, так как нельзя ни потерять решения, ни получить посторонние.

Замечание 2. Этот способ решения дает возможность оценить наибольшее значение выражения $\sin x+\cos x$, а именно:

$$|\sin x+\cos x|\le\sqrt{2}.$$

Замечание 3. При решении данного уравнения различными способами мы получаем разные формы записи ответа, и приводить одно решение к другому (если этого не требуется) нет необходимости.

Замечание 4. При решении уравнения II способом, также не нужна проверка найденных корней, а при решении III способом проверка обязательна, так как могут появиться посторонние корни.

Пример 39. Решить уравнение

$$\sin 5x\cos 3x=\sin 6x\cos 2x.$$

Решение.

Применяя формулу

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right)$$

к обеим частям уравнения, получим:

$$\frac{1}{2}(\sin 8x+\sin 2x)=\frac{1}{2}(\sin 8x+\sin 4x),$$ или

$$\sin 2x-\sin 4x=0.$$

К полученному уравнению применим формулу разности синусов:

$-2\sin x\cos 3x = 0$, или $\sin x\cos 3x = 0$, откуда имеем:

а) $\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in Z$;

б) $\cos 3x = 0$, $3x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}$, $n \in Z$.

Ответ: πn, $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}$, $n \in Z$.

Замечание. Уравнение $\sin 2x - \sin 4x = 0$ можно решить иначе:

$\sin 2x - 2\sin 2x\cos 2x = 0$, $\sin 2x(1 - 2\cos 2x) = 0$

и т.д.

Пример 40. Решить уравнение

$\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x$.

Решение.

Используя формулу понижения степени

$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$, имеем:

$$\frac{1}{2}(1-\cos 2x) + \frac{1}{2}(1-\cos 4x) = \frac{1}{2}(1-\cos 6x) + \frac{1}{2}(1-\cos 8x),$$

или $1 - \cos 2x + 1 - \cos 4x = 1 - \cos 6x + 1 - \cos 8x$,

$\cos 2x + \cos 4x = \cos 6x + \cos 8x$.

Теперь применим формулу суммы косинусов:

$2\cos 3x\cos x = 2\cos 7x\cos x$, или

$\cos x(\cos 3x - \cos 7x) = 0$, $\cos x\sin 5x\sin 2x = 0$,

откуда имеем:

а) $\cos x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$;

б) $\sin 5x = 0,\ x = \frac{\pi n}{5},\ n \in Z;$

в) $\sin 2x = 0,\ x = \frac{\pi n}{2},\ n \in Z.$

Заметим, что корни уравнения $\cos x = 0$ содержатся среди корней уравнения $\sin 2x = 0$, поэтому имеем

$x = \frac{\pi n}{2},\ x = \frac{\pi n}{5},\ n \in Z.$

Ответ: $\frac{\pi n}{2},\ \frac{\pi n}{5},\ n \in Z.$

Пример 41. Решить уравнение $37 \operatorname{tg} 3x = 11 \operatorname{tg} x.$

Решение.

Очевидно, что $\cos 3x \neq 0$, $\cos x \neq 0$. Применим формулу

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x},$$

тогда данное уравнение запишется в виде:

$$37 \cdot \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x} - 11\operatorname{tg} x = 0, \text{ или}$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \left(\frac{100 - 4\operatorname{tg}^2 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}\right) = 0, \text{ откуда:}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 0, \\ \operatorname{tg}^2 x = 25, \end{array}\right. \\ \operatorname{tg}^2 x \neq \frac{1}{3}, \\ \cos x \neq 0; \end{cases}$$

или $x = \pi n,\ x = \pm \operatorname{arctg} 5 + \pi n,\ n \in Z.$

Ответ: $\pi n,\ \pm \operatorname{arctg} 5 + \pi n,\ n \in Z.$

Пример 42. Решить уравнение

$$\sin\frac{5x}{4}+\cos x=2.$$

Решение.

Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}\sin\dfrac{5x}{5}=1,\\ \cos x=1;\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{5x}{4}=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\\ x=2\pi k;\end{cases}\quad \begin{cases}x=\dfrac{2\pi}{5}+\dfrac{8\pi n}{5},\\ x=2\pi k;\end{cases}$$

$$2\pi k=\frac{2\pi}{5}+\frac{8\pi n}{5},\ \text{откуда}\ k=\frac{1}{5}(4n+1).$$

Так как $k\in Z$, то $n=1+5m$, $m\in Z$, и тогда

$x=2\pi+8\pi m$, $m\in Z$.

Ответ: $2\pi+8\pi m$, $m\in Z$.

Пример 43. Решить уравнение

$$2(\sin 2x+\cos 2x)+\sin 4x+1=0.$$

Решение.

Пусть $\sin 2x+\cos 2x=t$, тогда $t^2=1+\sin 4x$, и данное уравнение примет вид $2t+t^2=0$, или $t(t+2)=0$, откуда $t_1=0$, $t_2=-2$, так что данное уравнение равносильно совокупности уравнений:

1) $\sin 2x+\cos 2x=0$ — однородное уравнение I степени; $\cos 2x\neq 0$, тогда $\operatorname{tg}2x+1=0$, $\operatorname{tg}2x=-1$;

$$2x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \text{откуда}\ x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z;$$

2) $\sin 2x+\cos 2x=-2$ — нет корней, так как

$$|\sin\alpha+\cos\alpha|=\sqrt{2}\left|\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right|\leq\sqrt{2},$$

так что $|t| \le \sqrt{2}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$.

Пример 44. Решить уравнение

$$\sin x\cos x\cos 2x\cos 8x=\frac{1}{4}\sin 12x.$$

Решение.

Умножив обе части уравнения на 4 и используя формулу $\sin 2x=2\sin x\cos x$, получим $\sin 4x\cos 8x=\sin 12x$.

Теперь используем формулу преобразования произведения в сумму:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right).$$

$$\frac{1}{2}\left(\sin(-4x)+\sin 12x\right)=\sin 12x,\quad \sin 12x+\sin 4x=0.$$

Применив формулу суммы синусов, получим

$2\sin 8x\cos 4x=0$, откуда:

1) $\sin 8x=0,\ 8x=\pi n,\ x=\frac{\pi n}{8},\ n\in Z$;

2) $\cos 4x=0,\ 4x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4},\ n\in Z$.

Заметим, что корни уравнения $\cos 4x=0$ содержатся среди корней уравнения $\sin 8x=0$ $(\sin 8x=2\sin 4x\cos 4x)$, тогда корни уравнения $\sin 8x=0$ являются и корнями исходного уравнения.

Ответ: $\frac{\pi n}{8},\ n\in Z$.

Пример 45. Решить уравнение $\sin x+\sin^3 x+\cos^3 x=0$.

Решение.

Запишем уравнение в виде

$\sin x(1+\sin x)+\cos x(1-\sin^2 x)=0$, или

$(1+\sin x)(\sin x+\cos x-\sin x\cos x)=0$,

откуда имеем:

1) $1+\sin x=0$, $\sin x=-1$, $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$;

2) $\sin x+\cos x-\sin x\cos x=0$.

Пусть $\sin x+\cos x=t$, тогда $t^2=1+2\sin x\cos x$,

откуда $\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}(t^2-1)$,

и последнее уравнение примет вид

$t-\dfrac{1}{2}(t^2-1)=0$, или $t^2-2t-1=0$,

$\dfrac{D}{4}=1+1=2>0$, $t_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$, тогда

$\sin x+\cos x=1\pm\sqrt{2}$.

Но $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ и $|t|\le\sqrt{2}$, так что значение $t=1+\sqrt{2}$ не подходит.

Остается $\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1-\sqrt{2}$, или

$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, откуда находим:

$x=(-1)^n\arcsin\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)-\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$.

Ответ: $-\dfrac{\pi}{2}+\pi n$; $(-1)^n\arcsin\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)-\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$.

Пример 46. Решить уравнение
$\sin 9x + 2\cos 6x = 2.$
Решение.
Пусть $3x = y$, тогда уравнение примет вид
$\sin 3y + 2\cos 2y = 2.$

Но $\sin 3y = 3\sin y - 4\sin^3 y$ и $\cos 2y = 1 - 2\sin^2 y$,

имеем: $3\sin y - 4\sin^3 y + 2\left(1 - 2\sin^2 y\right) = 2,$

$\sin y\left(3 - 4\sin^2 y - 4\sin y\right) = 0,$ откуда имеем:

1) $\sin y = 0,\ y = \pi n,$ т.е. $3x = \pi n,\ x = \dfrac{\pi n}{3},\ n \in Z;$

2) $3 - 4\sin^2 y - 4\sin y = 0,\ 4\sin^2 y + 4\sin y - 3 = 0.$
Решая полученное уравнение, находим

$\sin y = \dfrac{1}{2},\ \sin y = -1{,}5.$

Если $\sin y = \dfrac{1}{2}$, то $y = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$, или

$3x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n$, откуда $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{\pi n}{3},\ n \in Z.$

Если $\sin y = -1{,}5$, то корней нет, так как $|\sin y| \le 1.$

Ответ: $\dfrac{\pi n}{3};\ (-1)^n \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{\pi n}{3},\ n \in Z.$

Пример 47. Решить уравнение

$2\sin^2 x + \sin x + \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{2}{\sin^2 x} = 6.$

Решение.
Запишем уравнение в виде

$$\left(\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)+2\left(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)=6.$$

Пусть $\sin x+\dfrac{1}{\sin x}=t$, тогда $\sin^2 x+\dfrac{1}{\sin^2 x}=t^2-2.$

Получим уравнение $t+2\left(t^2-5\right)=6$ или

$2t^2+t-10=0,$

откуда находим $t_1=2,\ t_2=-\dfrac{5}{2}.$

Учитывая подстановку, получим два уравнения:

1) $\sin x+\dfrac{1}{\sin x}=2,\ \sin^2 x-2\sin x+1=0,$

$(\sin x-1)^2=0,\ \sin x=1,\ x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z;$

2) $\sin x+\dfrac{1}{\sin x}=-\dfrac{5}{2}$, или $2\sin^2 x+5\sin x+2=0,$

откуда находим $\sin x=-2,\ \sin x=-\dfrac{1}{2}.$

Уравнение $\sin x=-2$ не имеет действительных корней.

Если $\sin x=-\dfrac{1}{2}$, то $x=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;\ (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z.$

Пример 48. Решить уравнение

$\sqrt{1-\cos x}=\sin x,\ x\in[\pi;\ 3\pi].$

Решение.

Область определения уравнения

$$\begin{cases} 1-\cos x \ge 0, \\ \sin x \ge 0. \end{cases}$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$1-\cos x = \sin^2 x$, или $1-\cos x = 1-\cos^2 x$, или

$\cos^2 x - \cos x = 0$, $\cos x(\cos x - 1) = 0$, откуда:

1) $\cos x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$;

2) $\cos x = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in Z$.

Остается найти корни исходного уравнения на промежутке $[\pi; 3\pi]$.

Так как $\sin x \ge 0$, $x \in [\pi; 3\pi]$, то подходят лишь значения

$$x = 2\pi,\ x = \frac{5\pi}{2}.$$

Ответ: $x = 2\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{2}$.

Пример 49. Решить уравнение

$$\sqrt{3\sin^2 x - 2} = 1 - 3\cos x.$$

Решение.

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$3\sin^2 x - 2 = 1 - 6\cos x + 9\cos^2 x$, или

$3 - 3\cos^2 x - 2 = 1 - 6\cos x + 9\cos^2 x$,

$12\cos^2 x - 6\cos x = 0$,

$2\cos^2 x - \cos x = 0$, $\cos x(2\cos x - 1) = 0$, откуда:

1) $\cos x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$;

2) $2\cos x-1=0$, $\cos x=\dfrac{1}{2}$, $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$.

Итак, имеем три серии корней.

Остается сделать проверку найденных решений:

а) $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$;

Левая часть:

$$\sqrt{3\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)-2}=\sqrt{3\cdot 1-2}=1;$$

правая часть: $1-3\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)=1-3\cdot 0=1.$

Значит, числа вида $\dfrac{\pi}{2}+\pi n$ — решения исходного уравнения;

б) $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$.

Имеем:

$$\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)=\pm\frac{\sqrt{3}}{2};\quad \cos\left(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)=\frac{1}{2}.$$

Левая часть уравнения:

$\sqrt{3\cdot\dfrac{3}{4}-2}=\dfrac{1}{2}$, **а правая часть:** $1-3\cdot\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}$.

Как видим, равенство не имеет места, следовательно, $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$ — посторонние корни для исходного уравнения.

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$.

Пример 50. Решить уравнение

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}.$$

Решение.

Запишем уравнение в виде:

$(\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = \dfrac{7}{16}$, или

$\left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 + \left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)^3 = \dfrac{7}{16}$, или $1 - 3\cos 2x +$

$+3\cos^2 2x - \cos^3 2x + 1 + 3\cos 2x + 3\cos^2 2x + +\cos^3 2x = \dfrac{7}{2}$,

или $2\cos^2 2x = \dfrac{1}{2}$, $1 + \cos 4x = \dfrac{1}{2}$, $\cos 4x = -\dfrac{1}{2}$,

откуда $4x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

Ответ: $\pm\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

Пример 51. Решить уравнение

$$\sqrt[6]{\frac{1}{2} - \cos x} + \sqrt[6]{\frac{1}{2} + \cos x} = 1.$$

Решение.

I способ.

Область определения уравнения равносильна системе неравенств:

$\begin{cases} \dfrac{1}{2} - \cos x \geq 0, \\ \dfrac{1}{2} + \cos \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \cos x \leq \dfrac{1}{2}, \\ \cos \geq -\dfrac{1}{2}; \end{cases}$ откуда $-\dfrac{1}{2} \leq \cos x \leq \dfrac{1}{2}$.

При $\cos = \pm\frac{1}{2}$ имеем

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n \text{ и } x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

При других значениях $\cos x$ слева имеем сумму двух иррациональных чисел, справа — число 1.

II способ.

Пусть

$$\sqrt[6]{\frac{1}{2} - \cos x} = u,\ \sqrt[6]{\frac{1}{2} + \cos x} = v, \text{ где } u \ge 0,\ v \ge 0, \text{ тогда}$$

$$\frac{1}{2} - \cos x = u^6,\ \frac{1}{2} + \cos x = v^6,$$

и, кроме того, исходное уравнение примет вид $u + v = 1$. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ \frac{1}{2} - \cos x = u^6, \\ \frac{1}{2} + \cos x = v^6; \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} u + v = 1, \\ u^6 + v^6 = 1. \end{cases}$$

Заметим, что если u и v — дробные числа, что $u^6 < u$, $v^6 < v$, значит, u и v — целые числа. Имеем две возможности:

$$1)\begin{cases} u = 0, \\ v = 1; \end{cases} \quad 2)\begin{cases} u = 1, \\ v = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $\cos x = \frac{1}{2}$, или $\cos x = -\frac{1}{2}$, откуда

$$x_1 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ x_2 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Объединяя оба решения, можно ответ записать в виде:

$$x=\frac{\pi}{3}(3k\pm1),\ k\in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}(3k\pm1),\ k\in Z.$

Пример 52. Решить уравнение

$\sqrt{1+4\sin x\cos x}=\sin x+\cos x.$

Решение.

Пусть $\sin x+cox=t$, тогда $(\sin x+\cos x)^2=t^2$, или

$1+2\sin x\cos x=t^2$, откуда

$2\sin x\cos x=t^2-1$ и

$1+4\sin x\cos x=1+2\left(t^2-1\right)=2t^2-1.$

Следовательно, исходное уравнение примет вид $\sqrt{2t^2-1}=t.$ Так как $t\geq0$, то возведя обе части полученного уравнения в квадрат, получим $2t^2-1=t^2$, или $t^2=1$, откуда $t=1$ (ввиду того, что $t\geq1$).

Если $t=1$, то $\sin x+\cos x=1.$

Полученное уравнение можно решать различными способами. Например:

$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ или

$\cos\frac{\pi}{4}\sin x+\sin\frac{\pi}{4}\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}},$

$x+\frac{\pi}{4}=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n,$ откуда

$x=(-1)^n\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z.$

Если $n = 2k$ — четное, то $x_1 = 2\pi k$,

если $n = 2k+1$ — нечетное, то $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $2\pi k$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Пример 53. Решить уравнение

$$\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\cos x - \frac{4\pi}{3}\right) = 1.$$

Решение.

Известно, что $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$, тогда данное уравнение примет вид:

$$\frac{1}{2}\left(1+\cos\left(\frac{4\pi}{3}\cos x - \frac{8\pi}{3}\right)\right) = 1, \text{ или}$$

$$\cos\left(\frac{4\pi}{3}\cos x - \frac{8\pi}{3}\right) = 1, \text{ откуда}$$

$$\frac{4\pi}{3}\cos x - \frac{8\pi}{3} = 2\pi k,\ k \in Z,\quad 4\pi\cos x - 8\pi = 6\pi k, \text{ или}$$

$$\cos x = \frac{1}{4\pi}(8\pi + 6\pi k), \text{ или}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}(4+3k),\ k \in Z.$$

Так как $|\cos x| \le 1$, то $\left|\frac{4+3k}{2}\right| \le 1$, или

$$-1 \le \frac{1}{2}(4+3k) \le 1, \text{ или } -2 \le 4+3k \le 2,\ -6 \le 3k \le -2,$$

$-2 \le k \le -\frac{2}{3}$, $k \in Z$.

Значит, $k = -2$, $k = -1$.

Если $k = -2$, то $\cos x = \frac{4-6}{2} = -1$, $x_1 = \pi + 2\pi n$;

если $k = -1$, то $\cos x = \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2}$,

откуда $x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $\pi + 2\pi n$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Пример 54. Решить уравнение $\sin^3 x + \cos^3 x = \cos 2x$.
Решение.
Так как

$$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x) =$$

$$= (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) \text{ и } \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x =$$

$$= (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x), \text{ то получим:}$$

$$(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) - (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = 0,$$

$(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x - \cos x + \sin x) = 0$, откуда

$\sin x + \cos x = 0$, или $1 - \sin x \cos x - \cos x + \sin x = 0$.

Если $\sin x + \cos x = 0$, то $\operatorname{tg} x + 1 = 0$, $\operatorname{tg} x = -1$, откуда

$x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$;

если $1 - \sin x \cos x - \cos x + \sin x = 0$,

то $(1 - \cos x) + \sin x(1 - \cos x) = 0$, или

$(1-\cos x)(1+\sin x)=0$, откуда $1-\cos x=0$, $\cos x=1$,

$x_2=2\pi n$; или $\sin x=-1$, $x_3=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$.

Ответ: $-\dfrac{\pi}{4}+\pi n$; $2\pi n$; $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$.

Пример 55. Решить уравнение

$$2\sin\frac{\pi x}{2}=\frac{x^2+1}{x}.$$

Решение.

Заметим, что $\dfrac{x^2+1}{x}=x+\dfrac{1}{x}\geq 2$ при $x>0$, причем знак равенства выполняется, если $x=1$.

$\dfrac{x^2+1}{x}\leq -2$ при $x<0$, причем равенство достигается при $x=-1$.

Кроме того, $\left|2\sin\dfrac{\pi x}{2}\right|\leq 2$ при всех $x\in Z$.

Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases}\sin\dfrac{\pi x}{2}=1,\\ x=1;\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}\sin\dfrac{\pi x}{2}=-1,\\ x=-1;\end{cases}$$

откуда $x=\pm 1$.

Ответ: ± 1.

Пример 56. Решить уравнение $5\sin 5x-3\sin 7x=8$.

Решение.

Так как $|\sin\alpha|\leq 1$, то данное уравнение выполняется, если одновременно:

$$\begin{cases}\sin 5x = 1,\\ \sin 7x = -1;\end{cases} \quad \begin{cases}5x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\\ 7x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k, n \in Z.\end{cases} \quad \begin{cases}x = \dfrac{\pi}{10}(4n+1),\\ x = \dfrac{\pi}{14}(4k+3).\end{cases}$$

Найдем общее решение полученной системы:

$\dfrac{\pi}{10}(4n+1) = \dfrac{\pi}{14}(4k+3)$, или

$\dfrac{4n+1}{10} = \dfrac{4k+3}{14}$, $28n + 7 = 20k + 15$, откуда $7n = 5k + 2$.

Чтобы n было целым, необходимо, чтоб $k - 1$ было кратно 7, т.е. $k - 1 = 7p$, или $k = 7p + 1$, тогда

$$x = \frac{\pi}{14}(4k+3) = \frac{\pi}{14}(4(7p+1)+3) = \frac{\pi}{14}(28p+7) = \frac{\pi}{2}(4p+1).$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}(4p+1)$, $p \in Z$.

Пример 57. Решить уравнение

$\sqrt{2+\sin^2 4x} = \sin 3x - \cos 3x$.

Решение.

Заметим, что

$\sqrt{2+\sin^2 4x} \ge \sqrt{2}$, а

$$\sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 3x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 3x\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin 3x - \sin\frac{\pi}{4}\cos 3x\right) = \sqrt{2}\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}.$$

Следовательно, имеем систему:

$$\begin{cases}\sqrt{2+\sin^2 4x} = \sqrt{2},\\ \sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2};\end{cases} \quad \begin{cases}\sin^2 4x = 0,\\ \sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1;\end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x = \pi n, \\ 3x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{\pi n}{4}, \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi k}{3}, \end{cases} n, k \in Z.$$

Найдем общее решение полученной системы, для чего решим уравнение:

$\dfrac{\pi n}{4} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi k}{3}$ **в целых числах:**

$3\pi n = 3\pi + 8\pi k$, откуда $n = 1 + \dfrac{8k}{3}$.

Тогда $k = 3m$, $m \in Z$ и

$n = 1 + 8m$, $x = \dfrac{\pi}{4}(8m + 1)$, или

$x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in Z$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in Z$.

Пример 58. Найти целые корни уравнения

$\cos\left(\pi\left(5x - \sqrt{25x^2 - 80x + 200}\right)\right) = 1.$

Решение.

Имеем: $\pi\left(5x - \sqrt{25x^2 - 80x + 200}\right) = 2\pi k$, или

$5x - \sqrt{25x^2 - 80x + 200} = 2k$, $k \in Z$,

$\sqrt{25x^2 - 80x + 200} = 5x - 2k$, где $5x - 2k \geq 0$.

Кроме того, $25x^2 - 80x + 200 > 0$, $5x^2 - 16x + 40 > 0$ при любом $x \in R$, так как

$$\frac{D}{4}=16-200=-184<0,\ a=5>0.$$

Следовательно, $25x^2-80x+200=(5x-2k)^2$, или

$20kx-80x=4k^2-200$, откуда

$$x=\frac{k^2-50}{5(k-4)}.$$

По условию, $x\in Z$, $k\in Z$, тогда

$$5x=\frac{(k-4)(k+4)-34}{k-4}=\ k+4-\frac{34}{k-4}.$$

Значит 34 делится нацело на $k-4$, т.е.

$k-4=\pm1,\ \pm2,\ \pm17,\ \pm34.$

Нетрудно проверить, что условию удовлетворяет лишь значение $k=5$.

Тогда $x=-5$, $k=-30$, при этом опять $x=-5$.

Ответ: -5.

Пример 59. Решить уравнение $\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x-1}=1$.

Решение.

Из условия следует, что $\operatorname{tg} x-1>0$, $\cos x\neq 0$, тогда, разделив обе части данного уравнения на $\cos^2 x\neq 0$, получим

$$\sqrt{\operatorname{tg} x-1}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Но $\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x$,

тогда $\sqrt{\operatorname{tg} x-1}=1+\operatorname{tg}^2 x$.

Кроме того, $1+\operatorname{tg}^2 x>1$, а $\operatorname{tg} x-1>0$, т.е. $\operatorname{tg} x>1$.

Заметим, что при любом $\operatorname{tg} x > 1$, $1+\operatorname{tg}^2 x > \sqrt{\operatorname{tg} x - 1}$, так что уравнение $\sqrt{\operatorname{tg} x - 1} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, а значит, и исходное уравнение корней не имеет.

Ответ: корней нет.

Пример 60. Решить уравнение

$16\sin 2x \sin 3x \sin 5x = 13.$

Решение.

Применяя формулу преобразования произведения в сумму, получим:

$$16\sin 5x \cdot \frac{1}{2}(\cos x - \cos 5x) = 13;$$

$$8\sin 5x(\cos x - \cos 5x) = 13;$$

$$\sin 5x \cos x - \sin 5x \cos 5x = \frac{13}{8}.$$

Аналогично,

$$\frac{1}{2}(\sin 6x + \sin 4x) - \frac{1}{2}(2\sin 5x \cos 5x) = \frac{13}{8}, \text{ или}$$

$$\sin 6x + \sin 4x - 10x = \frac{13}{4}.$$

Так как $|\sin t| \le 1$, то левая часть полученного уравнения не превосходит 3, а правая часть — $\frac{13}{4} > 3$, значит, полученное уравнение, а значит, и исходное, не имеет корней.

Ответ: нет корней.

Пример 61. Решить уравнение

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

Решение.

Заметим, что

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3x}{2}\right)=\sin\left(\pi-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3x}{2}\right)\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{3x}{2}\right)=$$

$$=\sin 3\cdot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right).$$

Известно, что $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$, тогда

$$\sin 3\cdot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=3\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-4\sin^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right).$$

Следовательно, исходное уравнение примет вид:

$$3\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-4\sin^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right),$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-4\sin^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=0,\text{ или}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\left(1-4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right)=0,\text{ откуда:}$$

1) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=0$, $\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}=\pi n$, откуда

$x_1=\frac{\pi}{2}-2\pi n,\ n\in Z;$

2) $1-4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=0$, или $1-2\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=0$,

$1-2(1-\sin x)=0$; $2\sin x=1$, $\sin x=\frac{1}{2}$, откуда

$x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z.$

Ответ: $\frac{\pi}{2}-2\pi n$; $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z.$

Пример 62. Решить уравнение

$7\,\mathrm{tg}^3 x - 6 = \sqrt[3]{\dfrac{1}{7}(\mathrm{tg}\,x + 6)}$.

Решение.

Пусть $f(x) = 7\,\mathrm{tg}^3 x - 6$,

тогда $7\,\mathrm{tg}^3 x = f(x) + 6$, или $7\,\mathrm{tg}^3 x = \dfrac{1}{7}(f(x) + 6)$,

откуда $\mathrm{tg}\,x = \sqrt[3]{\dfrac{1}{7}f(x) + 6}$,

то есть $g(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1}{7}f(x) + 6}$ — обратная функция (правая часть исходного уравнения).

Тогда $g(x) = f(x)$, $f(x)$ — монотонно возрастающая на области определения, значит, $f(x) = g(x)$, откуда $f(x) = x$, или $7\,\mathrm{tg}^3 x - 6 = \mathrm{tg}\,x$, или $7\,\mathrm{tg}^3 x - \mathrm{tg}\,x - 6 = 0$.

Пусть $\mathrm{tg}\,x = y$, тогда $7y^3 - y - 6 = 0$.

Заметим, что $y = 1$ — корень полученного уравнения,

тогда $7y(y^2 - 1) + 6(y - 1) = 0$,

или $(y - 1)(7y^2 + 7y + 6) = 0$,

откуда $y = 1$ — единственный корень уравнения $7y^3 - y - 6 = 0$, так как уравнение $7y^2 + 7y + 6 = 0$ не имеет действительных корней ($D = -119 < 0$).

Если $y = 1$, то $\mathrm{tg}\,x = 1$, $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

Пример 63. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{ctg}^3 x=\frac{8}{\sin^3 2x}+12.$$

Решение.

Упростим левую часть уравнения:

$$\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{ctg}^3 x=\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}+\frac{\cos^3 x}{\sin^3 x}=$$

$$=\frac{\sin^6 x+\cos^6 x}{\sin^3 x\cos^3 x}=\frac{\left(\sin^2 x\right)^3+\left(\cos^2 x\right)^3}{\left(\sin x\cos x\right)^3}=$$

$$=\frac{\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x\right)}{\frac{1}{8}\cdot\left(2\sin x\cos x\right)^3}=$$

$$=\frac{8\left(\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-3\sin^2 x\cos^2 x\right)}{\sin^3 2x}=$$

$$\frac{8\left(1-3\sin^2 x\cos^2 x\right)}{\sin^3 2x}=\frac{8\left(1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\right)}{\sin^3 2x}.$$

Тогда исходное уравнение примет вид:

$$\frac{8\left(1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\right)}{\sin^3 2x}=\frac{8}{\sin^3 2x}+12,$$

или, учитывая, что $\sin 2x\neq 0$, имеем:

$$\begin{cases}-\frac{3}{2}\sin^2 2x=3\sin^3 2x,\\ \sin 2x\neq 0;\end{cases}$$

откуда $\sin 2x=-\frac{1}{2}$,

$$2x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z.$$

Ответ: $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z.$

Пример 64. Решить уравнение

$$\sqrt{1+8\cos^2 2x\sin 2x}=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Решение.

Заметим, что

$$\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=0,$$

тогда, возведя обе части уравнения в квадрат, получим:

$$1+8\cos^2 2x\sin 2x=4\sin^2\left(3x+\frac{\pi}{4}\right);$$

$$1+4(2\cos 2x\sin 2x)\cos 2x=2\left(1-\cos\left(6x+\frac{\pi}{2}\right)\right);$$

$$1+4\sin 4x\cos 2x=2\left(1-\cos\left(6x+\frac{\pi}{2}\right)\right);$$

$$1+2(\sin 2x+\sin 6x)=2+2\sin 6x;$$

$$1+2\sin 2x+2\sin 6x=2+2\sin 6x;$$

$2\sin 2x=1;\ 2x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,$ откуда

$$x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z.$$

Значит, $x_1=\frac{\pi}{12}+\pi k$ (если $n=2k$), либо

$$x_2 = \frac{5\pi}{12} + \pi m \text{ (если } n = 2m+1), \; k, m \in Z.$$

Из найденных серий решений надо выбрать те, которые удовлетворяют неравенству

$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0;$$

$$\sin\left(3x_1 + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 3\pi k\right) \geq 0 \text{ при } k = 2p;$$

$$\sin\left(3x_2 + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 3\pi m\right) \geq 0$$

при $m = 2c - 1$, где $p, c \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{12} + 2\pi p; \; \frac{7\pi}{12} + 2\pi c, \; p, c \in Z.$

Пример 65. Решить уравнение

$16\sin^3 x = 14 + \sqrt[3]{\sin x + 7}.$

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$8\sin^3 x - 7 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\sin x + 7}, \text{ или } 8\sin^3 x - 7 = \sqrt[3]{\frac{f+7}{8}},$$

то есть $g = \sqrt[3]{\dfrac{\sin x + 7}{8}}$.

Имеем уравнение вида $f(x) = g(x)$, значит, $f(x) = x$,

или $8\sin^3 x - 7 = \sin x$, $8\sin^3 x - \sin x - 7 = 0$,

или $(\sin x - 1)(8\sin^2 x + 8\sin x + 7) = 0$, откуда

$\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$, или

$8\sin^2 x + 8\sin x + 7 = 0$ — нет корней, так как $D < 0$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Пример 66. Решить уравнение

$\cos^4 14x - 2\cos^2 14x + \cos^2 7x = -1$.

Решение.

Запишем уравнение в виде:

$$\left(1 - 2\cos^2 14x + \cos^4 14x\right) + \cos^2 7x = 0, \text{ или}$$

$$\left(1 - \cos^2 14x\right)^2 + \cos^2 7x = 0, \text{ или } \sin^4 14x + \cos^2 7x = 0.$$

Но сумма квадратов двух действительных чисел равна нулю в том и только в том случае, когда каждое из слагаемых равно нулю. Следовательно, полученное уравнение равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} \sin 14x = 0, \\ \cos 7x = 0. \end{cases}$$

Так как $\sin 14x = 2\sin 7x \cos 7x$, то всякое решение уравнения $\cos 7x = 0$ является решением и уравнения $\sin 14x = 0$.

Следовательно, полученная система равносильна уравнению $\cos 7x = 0$, откуда

$$7x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7},\ n \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7},\ n \in Z$.

Пример 67. Решить уравнение

$x^2 - 4x\cos(xy) + 4 = 0$.

Решение.

Запишем уравнение в виде:

$$\left(x^2-4x\cos(xy)+4\cos^2(xy)\right)+\left(4-4\cos^2(xy)\right)=0;$$

$$\left(x-2\cos(xy)\right)^2+4\left(1-\cos^2(xy)\right)=0,$$

$\left(x-2\cos(xy)\right)^2+2\left(\sin(xy)\right)^2=0,$ **откуда**

$x-2\cos(xy)=0$ **и** $\sin(xy)=0,$ **то есть**

$x-2\cos(xy)=0$ **и** $\cos(xy)=\pm1.$

Имеем две системы:

1)

$$\begin{cases}x-2\cos(xy)=0,\\ \cos(xy)=1;\end{cases}\begin{cases}x-2=0,\\ \cos(xy)=1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=2,\\ xy=2\pi n;\end{cases}\begin{cases}x=2,\\ y=\pi n,\ n\in Z.\end{cases}$$

2)

$$\begin{cases}x-2\cos(xy)=0,\\ \cos(xy)=-1;\end{cases}\quad\begin{cases}x+2=0,\\ xy=\pi+2\pi k;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-2,\\ y=-\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z.\end{cases}$$

Ответ: $(2;\pi n),\ \left(-2;-\dfrac{\pi}{2}+\pi k\right),\ n,k\in Z.$

Пример 68. **Решить уравнение**

$$2\left(\cos x-\sqrt{3}\sin x\right)\sin y=3-\cos y.$$

Решение.

Упростим выражение в скобке:

$$\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)=$$

$$=2\left(\cos x\cos\frac{\pi}{3}-\sin x\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right).$$

Тогда получим уравнение

$$4\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin y=3-\cos 2y.$$

Так как $1-\cos 2y=2\sin^2 y$, то получим

$$4\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin y=2\sin^2 y+2,$$ или

$\sin^2 y-2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin y+1=0$ — квадратное уравнение относительно $\sin y$.

Имеем: $\frac{D}{4}=\cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-1.$

Следовательно, полученное уравнение, а значит, и исходное, имеет корни, если $\frac{D}{4}\geq 0$, то есть

$$\cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\geq 1.$$

Так как $|\cos t|\leq 1$, то полученное неравенство выполняется при условии:

$$\cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1,$$ или $$\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0,$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0,\ x+\frac{\pi}{3}=\pi n,\ x=-\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z.$$

1) Если $n = 2k$, то $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$, тогда квадратное уравнение примет вид:

$$\sin^2 y-2\sin y+1=0,\ (\sin y-1)^2=0,\ \sin y=1,$$

$$y=\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in Z;$$

2) Если $n = 2k + 1$,

то $x=-\frac{\pi}{3}+\pi(2k+1)=\frac{2\pi}{3}+2\pi k;$

аналогично $\sin^2 y+2\sin y+1=0,\ (\sin y+1)^2=0,$

$$\sin y=-1,\ y=-\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in Z.$$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi m\right),$

$\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\ -\frac{\pi}{2}+2\pi m\right),\ k,m\in Z.$

Пример 69. Решить уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\sqrt{2}=\cos 3x-\sin 3x.$$

Решение.

Запишем уравнение в виде:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=\cos 3x-\sin 3x-\sqrt{2}\ \text{ или}$$

$$\frac{1}{2}\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 3x-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 3x-1,\ \frac{1}{2}\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=$$

$$=\cos\frac{\pi}{4}\cos 3x-\sin\frac{\pi}{4}\sin 3x-1,\ \frac{1}{2}\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=$$

$$=\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)-1,\ \text{или}$$

$$\frac{1}{2}\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\left(1-\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\right)=0,$$

$$\frac{1}{2}\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+2\sin^2\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=0.$$

Полученное равенство выполняется, если

$$\begin{cases}\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=0,\\ \sin^2\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=0;\end{cases}\quad \begin{cases}\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=0,\\ \sin\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=0;\end{cases}\quad \begin{cases}x+\frac{\pi}{12}=2\pi k,\\ \frac{3x}{2}+\frac{\pi}{8}=\pi n;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\pi k-\frac{\pi}{12},\\ x=\frac{2\pi n}{3}-\frac{\pi}{12}.\end{cases}$$

Тогда общее решение будет иметь вид:

$$x=-\frac{\pi}{12}+2\pi m,\ m\in Z.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{12}+2\pi m,\ m\in Z.$

Пример 70. Решить уравнение

$$\left(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x\right)^2 = 5 + \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right).$$

Решение.

Заметим, что

$$\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 2\left(\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right) =$$

$$= 2\left(\sin\frac{\pi}{6}\sin 2x + \cos\frac{\pi}{6}\cos 2x\right) = 2\left(\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Следовательно, исходное уравнение запишется в виде:

$$4\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) - 5 = 0,$$

$$4\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 5 = 0.$$

Пусть $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = t$, тогда получим

$$4t^2 - t - 5 = 0,\ D = 1 + 80 = 81 = 9^2 > 0,\ \ t_{1,2} = \frac{1 \pm 9}{8},$$

$$t_1 = -1,\ t_2 = \frac{5}{4}.$$

Так как $|\cos\alpha| \le 1$, то корень $t_2 = \frac{5}{4}$ не подходит.

Если $t = -1$, то $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -1,\ 2x - \frac{\pi}{6} = \pi + 2\pi n,$

$$x = \frac{7\pi}{12} + \pi n,\ n \in Z.$$

Ответ: $\frac{7\pi}{12} + \pi n,\ n \in Z.$

Пример 71. Решить уравнение

$$\sin^4 2x + \sin^4\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

Решение.

Применяя формулу понижения степени, получим:

$$\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\cos\left(4x - \frac{3\pi}{2}\right)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \text{ или}$$

$$(1-\cos 4x)^2 + \left(1-\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 4x\right)\right)^2 = 1,$$

$$1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x + (1+\sin 4x)^2 = 1,$$

$$1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x + 1 + 2\sin 4x + \sin^2 4 = 1,$$

$$-2\cos 4x + 2\sin 4x + \left(\cos^2 4x + \sin 4x\right) + 1 = 0,$$

$$-2\cos 4x + 2\sin 4x + 2 = 0, \quad \sin 4x + (1-\cos 4x) = 0,$$

$$2\sin 2x\cos 2x + \sin^2 2x = 0, \quad \sin 2x(\cos 2x + \sin 2x) = 0,$$

откуда $\sin 2x = 0$, или $\cos 2x + \sin 2x = 0$.

Если $\sin 2x = 0$, то $2x = \pi n$, $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$;

если $\cos 2x + \sin 2x = 0$, то $1 + \operatorname{tg} 2x = 0$, $\operatorname{tg} 2x = -1$,

$$2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi n}{2}$; $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

Пример 72. Решить уравнение

$$\left(\cos\frac{x}{4}-2\sin 2x\right)\sin 2x+\left(1-\sin\frac{x}{4}-2\cos 2x\right)\cos 2x=0.$$

Решение.

$$\left(\sin 2x\cos\frac{x}{4}-\cos 2x\sin\frac{x}{4}\right)+\cos 2x=2\left(\sin^2 2x+\cos^2 2x\right),$$

$$\sin\left(2x-\frac{x}{4}\right)+\cos 2x=2,\ \sin\frac{7x}{4}+\cos 2x=2.$$

Так как $\sin\frac{7x}{4}\le 1,\ \cos 2x\le 1,$ то полученное равенство будет иметь место, если одновременно будут выполняться равенства:

$$\sin\frac{7x}{4}=1,\ \cos x=1.$$

Таким образом, имеем систему уравнений:

$$\begin{cases}\sin\frac{7x}{4}=1,\\ \cos x=1;\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{7x}{4}=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\\ x=2\pi k;\end{cases}\qquad n,k\in Z.$$

$$\begin{cases}x=\frac{4}{7}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right),\\ x=2\pi k;\end{cases}\quad \begin{cases}x=\frac{1}{7}(2\pi+8\pi n),\\ x=2\pi k;\end{cases}$$

откуда исключая x, имеем:

$$\frac{2\pi+8\pi n}{7}=2\pi k,\ \text{или}\ 2\pi+8\pi n=14\pi k,\ \text{или}\ 1+4n=7k,$$

откуда $n=\frac{7k-1}{4}=2k-\frac{k+1}{4};$

так как $n\in Z$, то $\frac{k+1}{4}=m,\ k=4m-1,\ m\in Z,$

тогда $x = 2\pi k = \; = 2(4m-1)\pi.$

Ответ: $2(4m-1)\pi.$

Пример 73. Решить уравнение

$(\sin x + \cos x)\sin 6x = \sqrt{2}.$

Решение.

Заметим, что

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$$

тогда уравнение примет вид:

$$\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin 6x = \sqrt{2}, \text{ или } \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin 6x = 1.$$

Полученное уравнение равносильно двум системам:

$$1) \begin{cases} \sin 6x = 1, \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 6x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x - \frac{\pi}{4} = 2\pi k; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, \\ x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k; \end{cases} \quad n, k \in Z.$$

Следовательно,

$$\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3} = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \text{ или } \pi + 4\pi n = 3\pi + 24\pi k,$$

$$2\pi = 4\pi n - 24\pi k, \; 2n - 12k = 1$$

и так как $n \in Z$, $k \in Z$, то полученное уравнение не имеет решений в целых числах.

$$2)\ \begin{cases} \sin 6x = -1, \\ \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -1; \end{cases} \begin{cases} 6x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x - \dfrac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k; \end{cases} \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{3}, \\ x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k; \end{cases}$$

$\dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{3}$, или $15\pi + 24\pi k = -\pi + 4\pi n$,

$16\pi = 4\pi n - 24\pi k$, $n = 6k + 4$, тогда

$x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{3}(6k + 4)$, или $x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $\dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Пример 74. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} \frac{4\pi x}{x^2 + x + 1} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Решение.

Имеем:

$$\frac{4\pi x}{x^2 + x + 1} = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi n,\ n \in Z.$$

$\dfrac{4\pi x}{x^2 + x + 1} = -\dfrac{\pi}{6} + \pi n$, или $\dfrac{4x}{x^2 + x + 1} = n - \dfrac{1}{6}$,

$$(x^2 + x + 1)(6n - 1) = 24x,$$

$$(6n - 1)x^2 + (6n - 1)x + (6n - 1) - 24x = 0,$$

$$(6n - 1)x^2 + (6n - 25)x + (6n - 1) = 0,\ n \in Z.$$

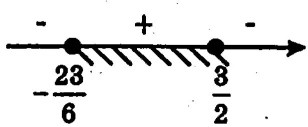
$$D = (6n-25)^2 - 4(6n-1)^2 = (-6n-23)(18n-27) =$$

$$= 9(6n+23)(3-2n) \geq 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{(25-6n) \pm 3\sqrt{(6n+23)(3-2n)}}{2(6n-1)},\ n \in Z.$$

Следовательно, $(6n+23)(3-2n) \geq 0$, или, решая методом интервалов, находим:

$$n_1 = -\frac{23}{6},\ n_2 = \frac{3}{2}.$$



Значит, $n \in \left[-\frac{23}{6}; \frac{3}{2}\right]$.

Так как $n \in Z$, **то** $n = -3; -2; -1; 0; 1$.

1) При $n = -3$, $x_{1,2} = \dfrac{43 \pm 3\sqrt{5 \cdot 9}}{-38} = -\dfrac{1}{38}\left(43 \pm 9\sqrt{5}\right)$;

2) при $n = -2$, $x_{3,4} = \dfrac{37 \pm 3\sqrt{11 \cdot 7}}{-26} = -\dfrac{1}{26}\left(37 \pm 3\sqrt{77}\right)$;

3) при $n = -1$, $x_{5,6} = \dfrac{31 \pm 3\sqrt{17 \cdot 5}}{-14} = -\dfrac{1}{14}\left(31 \pm 3\sqrt{85}\right)$;

4) при $n = 0$, $x_{7,8} = \dfrac{25 \pm 3\sqrt{23 \cdot 3}}{-2} = -\dfrac{1}{2}\left(25 \pm 3\sqrt{69}\right)$;

5) при $n = 1$, $x_{9,10} = \dfrac{19 \pm 3\sqrt{29}}{10} = \dfrac{1}{10}\left(19 \pm 3\sqrt{29}\right)$;

Ответ: $x_{1,2}=-\frac{1}{38}\left(43\pm9\sqrt{5}\right)$; $x_{3,4}=-\frac{1}{26}\left(37\pm3\sqrt{77}\right)$;

$x_{5,6}=-\frac{1}{14}\left(31\pm3\sqrt{85}\right)$; $x_{7,8}=-\frac{1}{2}\left(25\pm3\sqrt{69}\right)$;

$x_{9,10}=\frac{1}{10}\left(19\pm3\sqrt{29}\right)$.

Пример 75. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg}2x+3\operatorname{tg}3x=2\operatorname{tg}x+\frac{2}{\sin4x}.$$

Решение.

Так как $\sin4x=\frac{2\operatorname{tg}2x}{1+\operatorname{tg}^2 2x}$, то получим

$$\frac{1}{\operatorname{tg}2x}+3\operatorname{tg}3x=2\operatorname{tg}x+\left(1+\operatorname{tg}^2 2x\right)\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}2x},$$

$3\operatorname{tg}3x=2\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x.$

Далее имеем $2\operatorname{tg}3x-2\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}3x-\operatorname{tg}2x=0,$

$2\left(\operatorname{tg}3x-\operatorname{tg}x\right)+\left(\operatorname{tg}3x-\operatorname{tg}2x\right)=0,$ или

$$\frac{2\sin2x}{\cos3x\cos x}+\frac{\sin x}{\cos3x\cos2x}=0.$$

Следовательно, имеем смешанную систему:

$$\begin{cases}2\sin2x\cos2x+\sin x\cos x=0,\\ \sin2x\neq0,\\ \cos3x\neq0,\\ \cos2x\neq0,\\ \cos x\neq0.\end{cases}$$

Заметим, что $\sin2x\neq0$, тогда получим равносильное уравнение

$$2\cos 2x+\frac{1}{2}-0,\ \cos 2x=-\frac{1}{4},$$

откуда $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+\pi n,\ n\in Z.$

Так как все ограничения системы выполняются, то найденные значеия x являются решениями исходного уравнения.

Пример 76. Решить уравнение

$$\cos\left(\pi\sqrt{x}\right)\cos\left(\pi\sqrt{x-4}\right)=1.$$

Решение.

Данное уравнение равносильно совокупности двух систем:

1) $\begin{cases}\cos\left(\pi\sqrt{x}\right)=1,\\ \cos\left(\pi\sqrt{x-4}\right)=1;\end{cases}$

2) $\begin{cases}\cos\left(\pi\sqrt{x}\right)=-1,\\ \cos\left(\pi\sqrt{x-4}\right)=-1.\end{cases}$

Решая первую систему, находим:

$$\begin{cases}\pi\sqrt{x}=2\pi n,\\ \pi\sqrt{x-4}=2\pi k;\end{cases} \text{ или } \begin{cases}\sqrt{x}=2n,\\ \sqrt{x-4}=2k;\end{cases} \begin{cases}x=4n^2,\\ x=4k^2+4;\end{cases}$$

где $n,k=0,1,2,\ldots$

Приравнивая различные выражения для x, получим $n^2=k^2+1$, откуда $(n-k)(n+k)=1$.

Так как $n,\ k\in Z$ и $n\geq 0,\ k\geq 0$, то

$$\begin{cases}n-k=1,\\ n+k=1.\end{cases}$$

Значит, $n=1$, $k=0$, тогда $x=4$.

2) $\begin{cases}\sqrt{x}=2n+1, \\ \sqrt{x-4}=2k+1;\end{cases}$ $\begin{cases}x=(2n+1)^2, \\ x=(2k+1)^2+4,\end{cases}$

где $n, k=0, 1, 2, \ldots$

Сравнивая правые части полученной системы, имеем $(2n+1)^2-(2k+1)^2=4$, или $(n-k)(n+k+1)=1$. Так как $n, k \in Z$ и $n \ge 0$, $k \ge 0$, то полученное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}n-k=1, \\ n+k=0;\end{cases}$$

которая не имеет решений в целых числах.

Ответ: 4.

Пример 77. Решить уравнение

$$\sin x\left(\cos\frac{x}{4}-2\sin x\right)+\cos x\left(1+\sin\frac{x}{4}-2\cos x\right)=0.$$

Решение.

Запишем уравнение в виде:

$$\left(\sin x\cos\frac{x}{4}+\cos x\sin\frac{x}{4}\right)-2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)+\cos x=0,$$

$$\sin\left(x+\frac{x}{4}\right)-2+\cos x=0, \text{ или } \sin\frac{5x}{4}+\cos x=2.$$

Так как $\sin\frac{5x}{4}\le 1$, $\cos x \le 1$, то полученное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}\sin\frac{5x}{4}=1, \\ \cos x=1.\end{cases}$$

Из уравнения $\cos x = 1$, находим $x = 2\pi n$. Подставляя в первое уравнение, имеем

$$\sin\left(\frac{5}{4}\cdot 2\pi n\right) = 1, \text{ или } \sin\left(\frac{5}{2}\pi n\right) = 1, \text{ или}$$

$$\sin\left(2\pi n + \frac{\pi n}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right),$$

откуда следует, что равенство

$$\sin\left(\frac{5x}{4}\right) = 1$$

выполняется лишь при $n = 4k + 1$.

Ответ: $2\pi(4k+1)$, $k \in Z$.

Пример 78. Решить уравнение

$$8\sin x = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}.$$

Решение.

$$\cos x \neq 0, \sin x \neq 0, \text{ т.е. } x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, x \neq \pi n, n \in Z.$$

Запишем уравнение в виде:

$$8\sin^2 x \cos x = \sqrt{3}\sin x + \cos x, \text{ или}$$

$$4\sin 2x \sin x = \sqrt{3}\sin x + \cos x.$$

Применяя формулу:

$$2\sin\alpha \sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha - \beta), \text{ получим}$$

$$2(\cos x - \cos 3x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x.$$

Разделим обе части полученного уравнения на 2:

$$\cos x - \cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x, \text{ или}$$

$$\cos 3x-\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)=0.$$

Но $\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}$, тогда имеем:

$\cos 3x-\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=0$, или

$-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$, откуда:

1) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=0$, $2x+\frac{\pi}{6}=\pi n$, $x_1=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$;

2) $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$, $x-\frac{\pi}{6}=\pi n$, $x_2=\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$.

Ответ: $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$.

Пример 79. Решите уравнение

$\sqrt[3]{\sin^2 x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}=\sqrt[3]{4}$.

Решение.

Возведем обе части уравнения в куб, используя формулу $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ и основное тригонометрическое тождество: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

Имеем:

$\sin^2 x+\cos^2 x+3\sqrt[3]{\sin^2 x}\cdot\sqrt[3]{\cos^2 x}\left(\sqrt[3]{\sin^2 x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}\right)=4$,

$1+3\sqrt[3]{4\sin^2 x\cos^2 x}=4$, $3\sqrt[3]{\sin^2 2x}=3$, $\sqrt[3]{\sin^2 2x}=1$,

$\sin^2 2x=1$, $1-\sin^2 2x=0$, $\cos^2 2x=0$; $\cos 2x=0$,

$2x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, откуда $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$.

Пример 80. Решить уравнение

$\sqrt[3]{\sin^2 x}-\sqrt[3]{\cos^2 x}=\sqrt[3]{2\cos 2x}$.

Решение.

Возведем обе части уравнения в куб, используя формулу

$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$:

$$\sin^2 x-\cos^2 x-3\sqrt[3]{\sin^2 x\cos^2 x}\left(\sqrt[3]{\sin^2 x}-\sqrt[3]{\cos^2 x}\right)=2\cos 2x,$$

или $-3\sqrt[3]{\sin^2 x\cos^2 x}\cdot\sqrt[3]{2\cos 2x}=3\cos 2x$,

$\sqrt[3]{2\sin^2 x\cos^2 x\cos 2x}=-\cos 2x$.

Вновь возведем обе части в куб:

$2\sin^2 x\cos^2 x\cos 2x+\cos^3 2x=0$, или

$\cos 2x\left(2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^2 2x\right)=0$, откуда:

1) $\cos 2x=0$, $2x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$.

2) $2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^2 2x=0$, $\frac{1}{2}\sin^2 2x+\cos^2 2x=0$ —

нет корней, так как $\sin 2x$, $\cos 2x$ не могут одновременно быть равны 0.

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$.

Пример 81. Решить уравнение $1+\cos^2 4x=\operatorname{ctg}^4 2x$.

Решение.

ОДЗ: $\sin 2x \neq 0$, $2x \neq \pi n$, $x \neq \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

$$1+\cos^2 4x = \frac{\cos^4 2x}{\sin^4 2x}, \text{ или } 1+\cos^2 4x = \left(\frac{\cos^2 2x}{\sin^2 2x}\right)^2.$$

Но $\cos^2 2x = \dfrac{1}{2}(1+\cos 4x)$ и $\sin^2 2x = \dfrac{1}{2}(1-\cos 4x)$,

тогда получим $1+\cos^2 4x = \dfrac{(1+\cos 4x)^2}{(1-\cos 4x)^2}$.

$(1+\cos^2 4x)(1-\cos 4x)^2 = (1+\cos 4x)^2$,

$(1+\cos^2 4x)(1-2\cos 4x+\cos^2 4x) = 1+2\cos 4x+\cos^2 4x$,

$1-2\cos 4x+\cos^2 4x+\cos^2 4x-2\cos^3 4x+\cos^4 4x =$
$= 1+2\cos 4x+\cos^2 4x$,

$\cos^4 4x-2\cos^3 4x+\cos^2 4x-4\cos 4x = 0$,

$\cos 4x(\cos^3 4x-2\cos^2 4x+\cos 4x-4) = 0$, откуда:

1) $\cos 4x = 0$, $4x = \dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $x = \dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{4}$, $n \in Z$;

2) $\cos^3 4x-2\cos^2 4x+\cos 4x-4 = 0$. (1)

Пусть $\cos 4x = t$, $|t| \leq 1$.

Рассмотрим функцию $y(t) = t^3-2t^2+t-4$. Производная $y'(t) = 3t^2-2t+1 > 0$ при всех $t \in R$ (и, тем более, при $-1 \leq t \leq 1$), так как $a = 3 > 0$, $\dfrac{D}{4} = 1-3 = -2 < 0$.

Следовательно, y — монотонно возрастающая функция, $y(1) = -4$, значит, на интервале $[-1; 1]$ график функции $y(t)$ ось абцисс не пересекает, т.е. уравнение (1) не имеет корней.

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$.

Пример 82. Решить уравнение

$$\left(3 - \frac{1}{\cos^2 x}\right)\left(4 + 2\cos^4 x\right) = 9 + 3\sin 2y.$$

Решение.

ОДЗ: $\cos \neq 0$, т.е. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

Заметим, что левая часть исходного уравнения не меньше 12, а правая — не больше 12, тогда уравнение равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} \cos^2 x = 1, \\ \sin 2y = 1; \end{cases} \begin{cases} \sin^2 x = 0, \\ \sin 2y = 1; \end{cases} \begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin 2y = 1. \end{cases}$$

Из уравнения $\sin x = 0$ находим $x = \pi n$, $n \in Z$;

из уравнения $\sin 2y = 1$, имеем $2y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$,

откуда $y = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $x = \pi n$; $y = \frac{\pi}{4} + \pi k$, где $k, n \in Z$.

Пример 83. Решить уравнение
$\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\, x - 6\,\mathrm{ctg}^2 x - 3\,\mathrm{ctg}\, x - 1 = 0$.
Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \sin x \neq 0; \end{cases} \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ x \neq \pi n; \end{cases} \quad n \in Z.$

Запишем уравнение в виде:

$$\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x-\frac{6}{\operatorname{tg}^2 x}-\frac{3}{\operatorname{tg} x}-1=0, \text{ или}$$

$$\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg} x-6=0,$$

$$\left(\operatorname{tg}^4 x-\operatorname{tg}^2 x-6\right)+\left(\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg} x\right)=0.$$

Но $\operatorname{tg}^4 x-\operatorname{tg}^2 x-6=\left(\operatorname{tg}^2 x-3\right)\left(\operatorname{tg}^2 x+2\right)$,

тогда получим $\left(\operatorname{tg}^2 x-3\right)\left(\operatorname{tg}^2 x+2\right)+\operatorname{tg} x\left(\operatorname{tg}^2 x-3\right)=0$,

$\left(\operatorname{tg}^2 x-3\right)\left(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x+2\right)=0$, откуда:

1) $\operatorname{tg}^2 x-3=0$, $\operatorname{tg}^2 x=3$, $\operatorname{tg} x=\pm\sqrt{3}$,

$x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z;$

2) $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x+2=0$ — нет корней, так как $D=1-8=-7<0$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z.$

Пример 84. Решить уравнение

$\cos^4 x+12\cos x+3=0.$

Решение.

Пусть $\cos x=y$, $|y|\le 1$, тогда данное уравнение примет вид:

$$y^4+12y+3=0,\quad \left(y^4+6y^2+9\right)-6\left(y^2-2y+1\right)=0,$$

$$\left(y^2+3\right)^2-6\left(y-1\right)^2=0,\quad \left(y^2+3\right)^2-\left(\sqrt{6}\left(y-1\right)\right)^2=0,$$

$$\left(y^2+3+\sqrt{6}\left(y-1\right)\right)\left(y^2+3-\sqrt{6}\left(y-1\right)\right)=0,$$

$\left(y^2+\sqrt{6}y+3-\sqrt{6}\right)\left(y^2-\sqrt{6}y+3+\sqrt{6}\right)=0$, откуда:

1) $y^2+\sqrt{6}y+\left(3-\sqrt{6}\right)=0,\ D=6-4\left(3-\sqrt{6}\right)=4\sqrt{6}-6;$

$y_{1,2}=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{6}\pm\sqrt{4\sqrt{6}-6}\right)$, или $y_{1,2}=\frac{\sqrt{6}}{2}\left(-1\pm\sqrt{4-\sqrt{6}}\right);$

2) $y^2-\sqrt{6}y+\left(3+\sqrt{6}\right)=0,\ D=6-4\left(3+\sqrt{6}\right)=$

$=-6-4\sqrt{6}=-\left(6+4\sqrt{6}\right)<0$ — нет действительных корней.

Итак, $\cos x=\frac{\sqrt{6}}{2}\left(-1\pm\sqrt{4-\sqrt{6}}\right).$

Если $\cos x=\frac{\sqrt{6}}{2}\left(-1-\sqrt{4-\sqrt{6}}\right)$, то корней нет, так как

$-1-\sqrt{4-\sqrt{6}}\approx-2,2;\ \frac{\sqrt{6}}{2}(-2,2)<-1;$

если $\cos x=\frac{\sqrt{6}}{2}\left(-1+\sqrt{4-\sqrt{6}}\right)$, то $-1+\sqrt{4-\sqrt{6}}\approx0,25,$

$\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot0,25\approx0,31<1.$

Значит, $x=\pm\arccos\frac{\sqrt{6}}{2}\left(-1+\sqrt{4-\sqrt{6}}\right)+2\pi n,\ n\in Z.$

Ответ: $\pm\arccos\frac{\sqrt{6}}{2}\left(-1+\sqrt{4-\sqrt{6}}\right)+2\pi n,\ n\in Z.$

Пример 85. Решить уравнение

$\operatorname{tg}^6x+\operatorname{tg}^5x+4\operatorname{tg}^4x-\operatorname{tg}^3x+4\operatorname{tg}^2x+\operatorname{tg}x+1=0.$

Решение.

Заметим, что $\operatorname{tg} x \neq 0$, тогда, разделив обе части уравнения на $\operatorname{tg}^3 x$, получим:

$$\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x - 1 + \frac{4}{\operatorname{tg} x} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + \frac{1}{\operatorname{tg}^3 x} = 0,$$

$$\left(\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{\operatorname{tg}^3 x}\right) + \left(\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\right) + 4\left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right) - 1 = 0.$$

Пусть $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = y$, тогда

$$\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} = \left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)^2 - 2 = y^2 - 2,$$

$$\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{\operatorname{tg}^3 x} = \left(\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\right)\left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right) -$$

$$-\left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right) = (y^2 - 2)y - y = y^3 - 3y.$$

Получим уравнение:

$y^3 - 3y + y^2 - 2 + 4y - 1 = 0$ или

$$y^3 + y^2 + y - 3 = 0. \qquad (1)$$

Нетрудно видеть, что $y = 1$ — корень уравнения (1), тогда получим:

$y^2(y-1) + 2y(y-1) + 3(y-1) = 0$, или

$(y-1)(y^2 + 2y + 3) = 0$, откуда $y = 1$ — единственный корень уравнения (1).

Уравнение $y^2 + 2y + 3 = 0$ не имеет действительных корней, так как $\frac{D}{4} = 1 - 3 = -2 < 0$.

Если $y = 1$, то, учитывая подстановку

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = y,$$ получим

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 1,$$ или

$\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 1 = 0$ — нет корней, так как
$D = 1 - 4 = -3 < 0$.
Следовательно, исходное уравнение не имеет корней.
Ответ: нет корней.

Пример 86. Решить уравнение
$\sin^4 x + 4\sin^2 x + 9\cos x - 9 = 0.$
Решение.
Так $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, то уравнение примет вид

$$\left(1-\cos^2 x\right)^2 + 4\left(1-\cos^2 x\right) + 9\cos x - 9 = 0,$$

$$1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x + 4 - 4\cos^2 x + 9\cos x - 9 = 0,$$

$$\cos^4 x - 6\cos^2 x + 9\cos x - 4 = 0. \qquad (1)$$

Пусть $\cos x = y$, $|y| \le 1$, тогда получим

$$y^4 - 6y^2 + 9y - 4 = 0. \qquad (2)$$

Заметим, что $y = 1$ — корень уравнения (2), тогда уравнение (2) примет вид:
$y^2\left(y^2-1\right) - 5y\left(y-1\right) + 4\left(y-1\right) = 0$, или
$\left(y-1\right)\left(y^3+y^2-5y+4\right) = 0$, откуда:

1) $y - 1 = 0$, $y = 1$, тогда $\cos x = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in Z$;

2) $y^3 + y^2 - 5y + 4 = 0$.

Рассмотрим функцию

$t(y) = y^3 + y^2 - 5y + 4$, $|y| \le 1$; $t(-1) = 9$; $t(1) = 1$.

Производная

$$t'(y) = \left(y^3 + y^2 - 5y + 4\right)' = 3y^2 + 2y - 5 = 3(y-1)\left(y + \frac{5}{3}\right) \le 0$$

при $y \in [-1;\ 1]$ и функция t монотонно убывает на $[-1;\ 1]$ и экстремумов не имеет.

Так как $t(1) > 0$, то $t \neq 0$, т.е. исходное уравнение не имеет корней.

Ответ: $2\pi n,\ n \in Z$.

Пример 87. Решить уравнение

$$\sin^{10} x + \cos^{10} x = \frac{29}{24}.$$

Решение.

Перепишем уравнение в виде:

$$\left(\sin^2 x\right)^5 + \left(\cos^2 x\right)^5 = \frac{29}{64}, \text{ или}$$

$$\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^5 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^5 = \frac{29}{64},$$

$$(1 - \cos 2x)^5 + (1 + \cos 2x)^5 = \frac{29}{2}, \tag{1}$$

Известно, что

$$a^5 + b^5 = (a + b)\left(a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - ab^3 + b^4\right),$$

тогда (1) примет вид:

$$(1 - \cos 2x + 1 + \cos 2x)\Big((1 - \cos 2x)^4 - (1 - \cos 2x)^3 (1 +$$

$$+ \cos 2x) + (1 - \cos 2x)^2 (1 + \cos 2x)^2 - (1 - \cos 2x)(1 +$$

$$+ \cos 2x)^3 + (1 + \cos 2x)^4\Big) = \frac{29}{2},$$

$$2\left((1-\cos 2x)^4+(1+\cos 2x)^4-(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)\left((1-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\cos 2x)^2+(1+\cos 2x)^2\right)+(1-\cos 2x)^2(1+\cos 2x)^2\right)=\frac{29}{2};$$

$$2\left(\left((1-\cos 2x+1+\cos 2x)^2-2(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)\right)^2-\right.$$

$$-2(1-\cos 2x)^2(1+\cos 2x)^2-(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)\left((1-\right.$$

$$\left.-\cos 2x+1+\cos 2x)^2-2(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)\right)+$$

$$\left.+(1-\cos 2x)^2(1+\cos 2x)^2\right)=\frac{29}{2},$$

$$2\left(\left(4-2\left(1-\cos^2 2x\right)\right)^2-\left(1-\cos^2 2x\right)^2-\left(1-\cos^2 2x\right)\left(4-\right.\right.$$

$$\left.\left.-2\left(1-\cos^2 2x\right)\right)\right)=\frac{29}{2};$$

$$2\left(\left(4-2\sin^2 2x\right)^2-\sin^4 2x-\sin^2 2x\left(4-2\sin^2 2x\right)\right)=\frac{29}{2};$$

Пусть $\sin^2 2x=t$, тогда получим:

$2\left((4-2y)^2-y^2-y(4-2y)\right)=\dfrac{29}{2}$ или

$$4\left(16-16y+4y^2-y^2-4y+2y^2\right)=29,$$

$$4\left(5y^2-20y+16\right)=29,\ 20y^2-80y+64=29,$$

$20y^2-80y+35=0$, или $4y^2-16y+7=0$,

$$\frac{D}{4}=64-28=36=6^2>0,\ y_{1,2}=\frac{8\pm 6}{4};\ y_1=\frac{1}{2},\ y_2=\frac{7}{2}.$$

Если $\sin^2 2x=\dfrac{1}{2}$, то

$$\frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{1}{2},\ \cos 4x=0,$$

$$4x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4},\ n\in Z;$$

если $\sin^2 2x=\frac{7}{2}$, то корней нет.

Ответ: $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4},\ n\in Z.$

Пример 88. Решить уравнение

$$\left(\cos x+\sqrt{3}\sin x\right)^2=5+\cos\left(\frac{\pi}{6}+2x\right).$$

Решение.

Запишем уравнение в виде:

$$4\left(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)^2=5+\cos\left(\frac{\pi}{6}+2x\right),\ \text{или}$$

$$4\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos x+\cos\frac{\pi}{6}\sin x\right)^2=5+\cos\left(\frac{\pi}{6}+2x\right),$$

$$4\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=5+\cos\left(\frac{\pi}{6}+2x\right). \qquad (1)$$

Заметим, что левая часть уравнения (1)

$4\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\le 4$, а правая $5+\cos\left(\frac{\pi}{6}+2x\right)\ge 4$.

Следовательно, имеем систему уравнений:

$$\begin{cases}4\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=4,\\ 5+\cos\left(\frac{\pi}{6}+2x\right)=4;\end{cases}\ \begin{cases}\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=1,\\ \cos\left(\frac{\pi}{6}+2x\right)=-1;\end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos^2\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=0, \\ \cos\left(\frac{\pi}{6}+2x\right)=-1; \end{cases} \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=0, \\ \cos\left(\frac{\pi}{6}+2x\right)=-1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{6}+x=\frac{\pi}{2}+\pi n, \\ \frac{\pi}{6}+2x=\pi+2\pi k; \end{cases} \begin{cases} x=\frac{\pi}{3}+\pi n, \\ x=\frac{5\pi}{12}+\pi k; \end{cases}$$

откуда $\frac{\pi}{3}+\pi n=\frac{5\pi}{12}+\pi k$, $4\pi+12\pi n=5\pi+12\pi k$, $\pi+12\pi k=12\pi n$, или $12k=12n-1$, откуда

$k=\frac{12n-1}{12}$, тогда

$x=\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi(12n-1)}{12}$, $x=\frac{5\pi+12\pi n-\pi}{12}$, или

$x=\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z.$

Ответ: $\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z.$

Пример 89. Решить уравнение

$\sin x\sin 5x=1.$

Решение.

I способ.

Используя формулу

$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$,

получим

$\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos 6x)=1$, или $\cos 4x-\cos 6x=2$,

$$\cos 2\cdot(2x)-\cos 3\cdot(2x)=2,$$

или, используя формулы косинусов двойного и тройного углов, получим:

$$2\cos^2 2x-1-4\cos^3 2x+3\cos 2x=2,$$

$$4\cos^3 2x-2\cos^2 2x-3\cos 2x+3=0,$$

$$4\cos^2 2x(\cos 2x+1)-6\cos 2x(\cos 2x+1)+$$
$$+3(\cos 2x+1)=0,$$

$$(\cos 2x+1)(4\cos^2 2x-6\cos 2x+3)=0,$$

откуда имеем:

а) $\cos 2x+1=0$, $\cos 2x=-1$; $2x=\pi+2\pi n$, откуда

$x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;$

б) $4\cos^2 2x-6\cos 2x+3=0$ — нет корней, так как

$\dfrac{D}{4}=9-12=-3<0.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z.$

II способ.

$\sin x\sin 5x=1.$

Поскольку $|\sin x|\le 1$, $|\sin 5x|\le 1$, то левая часть уравнения не превосходит 1 и равна 1, если выполняются условия:

а) $\begin{cases}\sin x=1,\\ \sin 5x=1;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\sin x=-1,\\ \sin 5x=-1.\end{cases}$

Для нахождения значения x, удовлетворяющих обоим уравнениям, решим одно из них, например, первое, затем подставим значение x во второе уравнение системы и среди найденных значений отберем те, которые удовлетворяют и другому:

а) $\sin x = 1,\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z,$

тогда из второго уравнения имеем

$$5x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z, \text{ или } 5\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

$$5\pi + 20\pi n = \pi + 4\pi k, \text{ или } 4\pi + 20\pi n = 4\pi k, \text{ откуда}$$

$$k = 1 + 5n \text{ и } 5x = \frac{\pi}{2} + 2\pi(1 + 5n),\ 5x = \frac{5\pi}{2} + 10\pi n,$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Это значение удовлетворяет каждому уравнению системы а), значит, является решением исходного уравнения.

б) $\begin{cases} \sin x = -1, \\ \sin 5x = -1. \end{cases}$

Решая аналогично, находим, что $k = 5n - 1$ и $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ — удовлетворяют системе б).

Следовательно, исходное уравнение имеет решение

$$x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Ответ: $\pm\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Пример 90. Решить уравнение

$$|\operatorname{tg} x| + 1 = \frac{1}{\cos^2 2x}.$$

Решение.

ОДЗ: $\cos x \neq 0$, $\cos 2x \neq 0$, т.е. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$,

$x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

Так как $\frac{1}{\cos^2 2x} = 1 + \operatorname{tg}^2 2x$,

то получим $|\operatorname{tg} x| + 1 = 1 + \operatorname{tg}^2 2x$, или $|\operatorname{tg} x| = \operatorname{tg}^2 2x$.

Но $\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$, тогда $|\operatorname{tg} x| = \frac{4\operatorname{tg}^2 x}{\left(1 - \operatorname{tg}^2 x\right)^2}$.

Кроме того, $\operatorname{tg}^2 x = |\operatorname{tg} x|^2$.

Следовательно,

$$|\operatorname{tg} x| = \frac{4|\operatorname{tg} x|^2}{\left(1 - |\operatorname{tg} x|^2\right)^2} \qquad (1)$$

Пусть $|\operatorname{tg} x| = y$, $y \geq 0$, тогда $y = \frac{4y^2}{\left(1 - y^2\right)^2}$,

$y\left(1 - y^2\right)^2 = 4y^2$, откуда $y_1 = 0$, т.е. $|\operatorname{tg} x| = 0$, $\operatorname{tg} x = 0$,

$x = \pi n$, $n \in Z$.

Далее имеем:

$\left(1 - y^2\right)^2 = 4y$ или $\left(1 - y^2 - 2\sqrt{y}\right)\left(1 - y^2 + 2\sqrt{y}\right) = 0$.

Значит,

а) $1 - y^2 - 2\sqrt{y} = 0$ или $y^2 + 2\sqrt{y} - 1 = 0$; $\sqrt{y} = m$, $m \geq 0$,

$$m^4 + 2m - 1 = 0,\ m^4 = 1 - 2m \qquad (2)$$

Уравнение (2) решим графически (рис. 1).

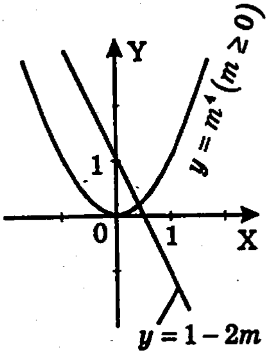


Рис. 1.

Как видно из рисунка,

$$0 < m < \frac{1}{2},\ \text{или}\ 0 < \sqrt{y} < \frac{1}{2},\ 0 < y < \frac{1}{4}.$$

Так как $y = |\mathrm{tg}\, x|$, то $0 < |\mathrm{tg}\, x| < \frac{1}{4}$.

Полученное неравенство также решим графически (рис. 2).

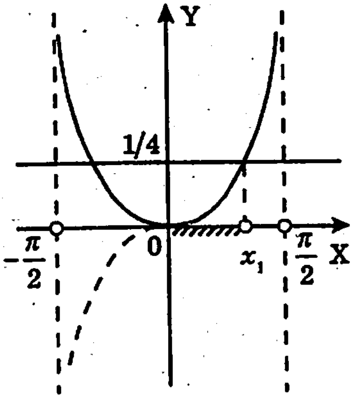


Рис. 2.

Имеем $\pi n < x < x_1 + \pi n$, $x_1 = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{4}$.

Значит, $\pi n < x < \operatorname{arctg}\dfrac{1}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

Аналогично решаем уравнение б):

$1 - y^2 + 2\sqrt{y} = 0$, $y^2 - 2\sqrt{y} = 1$, или

$y^2 = 2\sqrt{y} + 1$; $\sqrt{y} = n$, $n \ge 0$.

$$n^4 = 2n + 1. \qquad (3)$$

Уравнение (3) решаем также графически (рис. 3):

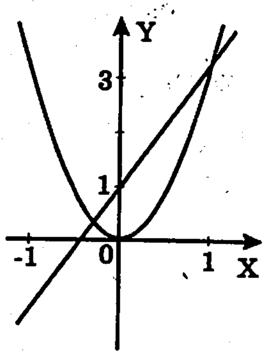


Рис. 3.

Так как $n \ge 0$, то $1 < n < 1{,}5$, тогда $1 < \sqrt{y} < 1{,}5$, или $1 < y < 2{,}25$, где $y = |\operatorname{tg} x|$, значит $1 < |\operatorname{tg} x| < 2{,}25$, откуда (см. рис. 4) имеем:

$\dfrac{1}{4} + \pi n < x < x_2 + \pi n$, где $x_2 = \operatorname{arctg} 2{,}25$.

Значит, $\dfrac{\pi}{4} + \pi n < x < \operatorname{arctg} 2{,}25 + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ: πn; $\pi n < x < \operatorname{arctg} 0{,}25 + \pi n$;

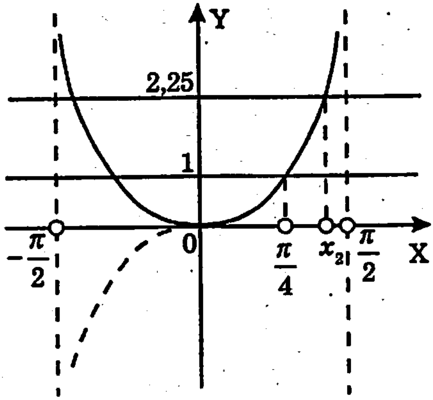


Рис. 4.

$$\frac{\pi}{4}+\pi n < x < \operatorname{arctg}(2{,}25)+\pi n,\ n \in Z.$$

Пример 91. **Решить уравнение** $|\cos x| - \cos 3x = \sin 2x.$

Решение.

Возможны 2 случая:

1) $\cos x \geq 0$, тогда $\cos x - \cos 3x = \sin 2x$, или

$-2\sin 2x \sin(-x) = \sin 2x$, или $2\sin 2x \sin x - \sin 2x = 0$,

$\sin 2x(2\sin x - 1) = 0$, откуда:

а) $\sin 2x = 0$, $2x = \pi n$, $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

Так как $\cos x \geq 0$, то $x = 2\pi k$, $k \in Z$.

б) $2\sin 2x - 1 = 0$, $\sin x = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

Если $n = 2k$, то $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$.

В этом случае

$$\cos x = \cos\left(2\pi k + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} > 0$$

— удовлетворяет условию $\cos x \geq 0$.

Если $n = 2k+1$, то

$x = -\frac{\pi}{6} + \pi(2k+1) = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,$

тогда $\cos x = \cos\left(2\pi k + \frac{5\pi}{6}\right) = \cos\frac{5\pi}{6} =$

$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} < 0$ — не удовлетворяет условию $\cos x \geq 0$.

2) $\cos x < 0$, тогда $-\cos x - \cos 3x = \sin 2x$, или $\cos 3x + \cos x = -\sin 2x$, $2\cos 2x \cos x + 2\sin x \cos x = 0$, $\cos x(\cos 2x + \sin x) = 0$, откуда:

а) $\cos x = 0$ — не подходит, ввиду того, что $\cos x < 0$;

б) $\cos 2x + \sin x = 0$, $1 - 2\sin^2 x + \sin x = 0$,

$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$, $D = 1 + 8 = 3^2 > 0$, $\sin x = \frac{1 \pm 3}{4}$,

$\sin x = 1$, $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Если $\sin x = 1$, то $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ и $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) =$

$= \cos\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ — не подходит, т.к. $\cos x < 0$.

Если $\sin x = -\frac{1}{2}$, то $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

При $n = 2k$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ и

$$\cos x = \cos\left(2\pi k - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} > 0$$ — не подходит.

При $n = 2k+1$, $x = \frac{\pi}{6} + \pi(2k+1) = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$ и

$$\cos x = \cos\left(2\pi k + \frac{7\pi}{6}\right) = \cos\frac{7\pi}{6} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} < 0$$ —

удовлетворяет условию $\cos x < 0$.

Ответ: $2\pi k$; $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $\frac{7\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Пример 92. Решить уравнение

$$\frac{3}{\cos^2 x} + 1 = \frac{7\sin x}{|\cos x|}.$$

Решение.

Известно, что

$1 + \mathrm{tg}^2\, x = \frac{1}{\cos^2 x}$, тогда

$$\frac{3}{\cos^2 x} = 3\left(1 + \mathrm{tg}^2\, x\right),$$

и, данное уравнение примет вид

$3\left(1 + \mathrm{tg}^2\, x\right) + 1 = \frac{7\sin x}{|\cos x|}$, или

$$3\,\mathrm{tg}^2\, x + 4 = \frac{7\sin x}{|\cos x|}. \qquad (1)$$

Возможны два случая:

1) $\cos x > 0$, тогда $|\cos x| = \cos x$ и (1) примет вид:

$3\operatorname{tg}^2 x+4=7\operatorname{tg}x$, или $3\operatorname{tg}^2 x-7\operatorname{tg}x+4=0$,

$D=49-48=1>0$, $(\operatorname{tg}x)_{1,2}=\dfrac{7\pm1}{6}$, $(\operatorname{tg}x)_1=1$,

$(\operatorname{tg}x)_2=\dfrac{4}{3}$.

Если $\operatorname{tg}x=1$, то $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$.

Так как $\cos x>0$, то $n=2k$, тогда $x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$;

если $\operatorname{tg}x=\dfrac{4}{3}$, то $x=\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}+\pi n,\ n\in Z$.

Аналогично $n=2k$, $x=\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}+2\pi k,\ k\in Z$.

2) $\cos x<0$, тогда $|\cos x|=-\cos x$ и (1) примет вид

$3\operatorname{tg}^2 x+7\operatorname{tg}x+4=0$, откуда находим

$\operatorname{tg}x=-1$, или $\operatorname{tg}x=-\dfrac{4}{3}$.

Если $\operatorname{tg}x=-1$, то $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$.

Так как $\cos x<0$, то $n=2k+1$ — нечетно, тогда

$x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi(2k+1)$, или $x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$;

если $\operatorname{tg}x=-\dfrac{4}{3}$, то $x=-\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}+\pi n,\ n\in Z$.

Аналогично, $n=2k+1$, $x=\pi-\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}+2\pi k,\ k\in Z$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}+2\pi k$, $\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}+2\pi k$, $\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k$,

$\pi-\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}+2\pi k,\ k\in Z$.

Пример 93. Решить уравнение

$$6\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right|=1.$$

Решение.

Пусть $x-\frac{\pi}{6}=y$, тогда $x+\frac{\pi}{3}=y+\frac{\pi}{2}$, и

$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+y\right)$, или $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos y$.

Следовательно, исходное уравнение примет вид:

$6\cos y-|\sin y|=1$, или $6\cos y-1=|\sin y|$.

Так как $|\sin y|\geq 0$, то и $6\cos y-1\geq 0$.

Значит, обе части полученного уравнения можно возвести в квадрат:

$$\begin{cases}(6\cos y-1)^2=\sin^2 y,\\ 6\cos y-1\geq 0;\end{cases} \quad \begin{cases}36\cos^2 y-12\cos y+1=\sin^2 y,\\ \cos y\geq \frac{1}{6}.\end{cases}$$

$37\cos^2 y-12\cos y=0$, или $\cos y(37\cos y-12)=0$,

откуда $\cos y=0$ (не удовлетворяет условию $\cos y\geq\frac{1}{6}$),

или $37\cos y-12=0$, $\cos y=\frac{12}{37}$,

откуда $y=\pm\arccos\frac{12}{37}+2\pi n$.

Учитывая подстановку, находим:

$$x=y+\frac{\pi}{6}=\pm\arccos\frac{12}{37}+\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z.$$

Ответ: $\pm\arccos\frac{12}{37}+\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z.$

Пример 94. Решить уравнение

$\operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{tg}^3 x = 8\operatorname{ctg}^2 2x + 6.$

Решение.

$$\frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} - \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} = \frac{\cos^6 x - \sin^6 x}{\sin^3 x\cos^3 x} = \frac{\left(\cos^2 x\right)^3 - \left(\sin^2 x\right)^3}{\sin^3 x\cos^3 x} =$$

$$= \frac{\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\left(\cos^4 x + \cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x\right)}{\sin^3 x\cos^3 x} =$$

$$= \frac{\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\left(\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)^2 - \cos^2 x\sin^2 x\right)}{\sin^3 x\cos^3 x} =$$

$$= \frac{8\cos 2x\left(1 - \frac{1}{4}\left(4\cos^2 x\sin^2 x\right)\right)}{\sin^3 2x} = \frac{8\cos 2x\left(1 - \frac{1}{4}\sin^2 2x\right)}{\sin^3 2x}.$$

Данное уравнение примет вид:

$$\frac{8\cos 2x\left(1 - \frac{1}{4}\sin^2 2x\right)}{\sin^3 2x} - \frac{8\cos^2 2x}{\sin^2 2x} = 6;$$

$$\begin{cases} 8\cos 2x - 2\sin^2 2x\cos 2x - 8\sin 2x\cos^2 2x = 6\sin^3 2x, \\ \sin 2x \neq 0; \end{cases}$$

$$4\cos 2x - \sin^2 2x\cos 2x - 4\sin 2x\cos^2 2x = 3\sin^3 2x.$$

Заметим, что

$\cos 2x = 1\cdot\cos 2x = \left(\sin^2 2x + \cos^2 2x\right)\cos 2x =$

$= \sin^2 2x\cos 2x + \cos^3 2x,$

тогда получим уравнение:

$$4\sin^2 2x\cos 2x + 4\cos^3 2x - \sin^2 2x\cos 2x -$$

$$-4\sin 2x\cos^2 2x = 3\sin^3 2x, \text{ или}$$

$$4\cos^3 2x + 3\sin^2 2x\cos 2x - 4\sin 2x\cos^2 2x - 3\sin^3 2x = 0$$
— однородное уравнение 3-й степени.

Поскольку $\cos 2x \neq 0$, то разделив обе части на $\cos^3 2x$, получим:

$4 + 3\operatorname{tg}^2 2x - 4\operatorname{tg} 2x - 3\operatorname{tg}^3 2x = 0$, или

$3\operatorname{tg}^2 2x(\operatorname{tg} 2x - 1) + 4(\operatorname{tg} 2x - 1) = 0$,

$(\operatorname{tg} 2x - 1)(3\operatorname{tg}^2 2x + 4) = 0$, откуда:

1) $\operatorname{tg} 2x - 1 = 0$, $\operatorname{tg} 2x = 1$, $2x = \frac{\pi}{4} + \pi n$,

откуда $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

Найденные решения удовлетворяют ограничению $\sin 2x \neq 0$.

2) $3\operatorname{tg}^2 2x + 4 = 0$ — нет корней, так как

$3\operatorname{tg}^2 2x + 4 > 0$.

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

Пример 95. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{1}{4} - \sin x} - \sqrt{-\cos x} = \sqrt{\frac{1}{4} - \sin x + \cos x}.$$

Решение.

Заметим, что $\frac{1}{4} - \sin x + \cos x \geq 0$ и $-\cos x \geq 0$,

тогда и $\frac{1}{4} - \sin x \geq 0$.

Запишем данное уравнение в виде:

$$\sqrt{\frac{1}{4} - \sin x} = \sqrt{\frac{1}{4} - \sin x + \cos x} + \sqrt{-\cos x}. \qquad (1)$$

Возведем обе части (1) в квадрат:

$$\frac{1}{4}-\sin x=\frac{1}{4}-\sin x+\cos x-\cos x+$$

$$+2\sqrt{\sin x\cos x-\cos^2 x-\frac{1}{4}\cos x},$$

$$\sqrt{\sin x\cos x-\cos^2 x-\frac{1}{4}\cos x}=0 \text{ или}$$

$$\cos x\left(\sin x-\cos x-\frac{1}{4}\right)=0, \text{ откуда:}$$

$$1)\ \begin{cases}\cos x=0,\\ \frac{1}{4}-\sin x+\cos x\geq 0;\end{cases}$$

откуда $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z.$

2) $\sin x-\cos x-\frac{1}{4}=0$, или

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4\sqrt{2}},$$

$$x-\frac{\pi}{4}=(-1)^n\arcsin\frac{1}{4\sqrt{2}}+\pi n,\ n\in Z.$$

$$x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{4\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z.$$

Если $n=2k$, то $x=\arcsin\frac{1}{4\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z.$

Так как $\cos x\leq 0$, то эта серия не подходит;

если $n=2k+1$, то $x=-\arcsin\frac{1}{4\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}+\pi(2k+1),$

или $x = \frac{5\pi}{4} - \arcsin\frac{1}{4\sqrt{2}} + 2\pi k,\ k \in Z.$

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{4} - \arcsin\frac{1}{4\sqrt{2}} + 2\pi k;\ n, k \in Z.$

Пример 96. Найти все корни уравнения

$\cos x + (1 + \cos x)\operatorname{tg}^2 x - 1 = 0,$

удовлетворяющие неравенству $\operatorname{tg} x > 0$.

Решение.

Известно, что $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, откуда

$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, где $\cos x \neq 0$, т.е. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$

Получим $\cos x + (1 + \cos x)\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) - 1 = 0$, или

$$\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos x} - 1 - \cos x - 1 = 0,$$

$\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos x} - 2 = 0$, откуда

$$\left(\frac{1}{\cos x}\right)_1 = -2,\ \left(\frac{1}{\cos x}\right)_2 = 1.$$

Если $\frac{1}{\cos x} = -2$, то $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z;$

если $\frac{1}{\cos x} = 1$, то $\cos x = 1$, $x = 2\pi n,\ n \in Z.$

По условию, $\operatorname{tg} x > 0$, что верно для I и III угловых четвертей. Этому условию удовлетворяет лишь серия решений

$$x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z,\ \text{или}\ x=\frac{\pi}{3}-\pi+2\pi n=$$

$$=\frac{\pi}{3}-(\pi-2\pi n)=\frac{\pi}{3}+(2\pi n-\pi);$$

$$x=\frac{\pi}{3}+(2n-1)\pi,\ n\in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}+(2n-1)\pi,\ n\in Z.$

Пример 97. Найти все корни уравнения

$$\sin^4 x+\sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin^2\frac{25\pi}{6},$$

удовлетворяющие неравенству $\lg\left(x-\sqrt{2x+24}\right)>0.$

Решение.

Известно, что $2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha$, тогда имеем

$$\frac{1}{4}(1-\cos 2x)^2+\frac{1}{4}\left(1-\cos 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)^2=\sin^2\left(4\pi+\frac{\pi}{6}\right),$$

или $(1-\cos 2x)^2+\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)\right)^2=4\sin^2\frac{\pi}{6},$

$$(1-\cos 2x)^2+(1+\sin 2x)^2=4\cdot\frac{1}{4},$$

$$1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\sin 2x+\sin^2 2x=1,$$

$2-2\cos 2x+2\sin 2x=0,$ или $\sin 2x-\cos 2x+1=0,$

$2\sin x\cos x+(1-\cos 2x)=0,$ $2\sin x\cos x+2\sin^2 x=0,$

$\sin x(\cos x+\sin x)=0,$ откуда $\sin x=0,$ или

$\cos x+\sin x=0.$

Если $\sin x = 0$, то $x = \pi n,\ n \in Z$;

если $\cos x + \sin x = 0$, то $1 + \operatorname{tg} x = 0$ $(\cos x \neq 0)$,

$\operatorname{tg} x = -1$, $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

Теперь решим логарифмическое неравенство

$\lg\left(x - \sqrt{2x + 24}\right) > 0.$

Это неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x - \sqrt{2x+24} > 1, \\ x - \sqrt{2x+24} > 0; \end{cases}$$

откуда $x - \sqrt{2x + 24} > 1$, или

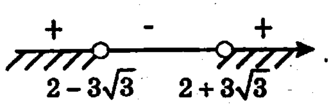
$\sqrt{2x + 24} < x - 1$, что равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} 2x + 24 \geq 0, \\ x - 1 > 0, \\ 2x + 24 < (x-1)^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -12, \\ x > 1, \\ x^2 - 4x - 23 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1, \\ x^2 - 4x - 23 > 0. \end{cases}$$

Решим неравенство $x^2 - 4x - 23 > 0$ методом интервалов:

$\dfrac{D}{4} = 4 + 23 = 27 > 0$, $x_{1,2} = 2 \pm 3\sqrt{3}$.

$x < 2 - 3\sqrt{3}$, $x > 2 + 3\sqrt{3}$.



Так как $x > 1$, то решением системы неравенств $x > 2 + 3\sqrt{3}$. Этому условию удовлетворяют корни

$x=\pi n,\ x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n;\ n\ge 3,\ n\in N.$

Ответ: $\pi n;\ -\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z,\ n\ge 3,\ n\in N.$

Пример 98. Решить уравнение

$$\arcsin x\cdot\arccos x=\frac{\pi^2}{18}.$$

Решение.

Так как $\arcsin x=\dfrac{\pi}{2}-\arccos x$, то получим уравнение

$$\left(\frac{\pi}{2}-\arccos x\right)\arccos x=\frac{\pi^2}{18}. \qquad (1)$$

Пусть $\arccos x=y$, где $0\le y\le\pi$, тогда (1) примет вид

$$\left(\frac{\pi}{2}-y\right)y=\frac{\pi^2}{18},\ \text{или}\ y^2-\frac{\pi}{2}y+\frac{\pi^2}{18}=0,$$

$$D=\frac{\pi^2}{4}-\frac{2\pi^2}{9}=\frac{\pi^2}{36}>0,\quad y_{1,2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{6}\right),\ \text{откуда}$$

$$y_1=\frac{\pi}{3},\ y_2=\frac{\pi}{6}.$$

Оба корня удовлетворяют условию $y\in[0;\pi]$.

Если $y=\dfrac{\pi}{3}$, то $\arccos x=\dfrac{\pi}{3}$, $x_1=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$;

если $y=\dfrac{\pi}{6}$, то $\arccos x=\dfrac{\pi}{6}$, $x_2=\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{1}{2};\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 99. Решить уравнение

$$\operatorname{arctg}(1+x)+\operatorname{arctg}(1-x)=\frac{\pi}{2}.$$

Решение.

Пусть $\operatorname{arctg}(1+x)=\alpha$, $\operatorname{arctg}(1-x)=\beta$, тогда

$\operatorname{tg}\alpha=1+x$, $\operatorname{tg}\beta=1-x$, где $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$.

Следовательно, исходное уравнение запишется в виде

$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$, тогда $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=1$.

Но $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$, значит,

$$\frac{1+x+1-x}{1-(1+x)(1-x)}=1,\text{ или }\frac{2}{1-(1-x^2)}=1,$$

$\frac{2}{x^2}=1$, $x^2=2$, откуда $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$.

Ответ: $\pm\sqrt{2}$.

Пример 100. Решить уравнение

$$\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)=2\arccos x.$$

Решение.

Взяв синус от левой и правой частей уравнения, получим:

$\sin\left(\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)\right)=\sin(2\arccos x)$, или

$2x\sqrt{1-x^2}=2\sin(\arccos x)\cos(\arccos x)$, или

$2x\sqrt{1-x^2}=2x\sqrt{1-x^2}$.

Полученное равенство представляет тождество. Так как $1-x^2 \geq 0$, то есть $|x| \leq 1$, $0 \leq \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) \leq \dfrac{\pi}{2}$, получим $0 \leq 2\arccos x \leq \dfrac{\pi}{2}$, или $0 \leq \arccos x \leq \dfrac{\pi}{4}$.

Значит, $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$.

Пример 101. Решить уравнение

$$\sqrt{4x^2+4x+3}\cdot\operatorname{arctg}(2x+1)+\sqrt{x^2-4x+6}\cdot\operatorname{arctg}(2-x)=0.$$

Решение.

Заметим, что $4x^2+4x+3=(2x+1)^2+2$ и

$x^2-4x+6=(2-x)^2+2$,

тогда данное уравнение примет вид:

$$\sqrt{(2x+1)^2+2}\cdot\operatorname{arctg}(2x+1)+\sqrt{(2-x)^2+2}\cdot\operatorname{arctg}(2-x)=0,$$

$$\sqrt{(2x+1)^2+2}\cdot\operatorname{arctg}(2x+1)=\sqrt{(2-x)^3+2}\cdot\operatorname{arctg}(x-2)=0.$$

Функция $f(t)=\sqrt{t^2+2}\cdot\operatorname{arctg} t$ — монотонно возрастающая. Следовательно, последнее равенство означает, что при $t_1=2x+1$ и при $t_2=x-2$ значения функции совпадают, что возможно при условии, если $t_1=t_2$, то есть $2x+1=x-2$, откуда $x=-3$.

Ответ: -3.

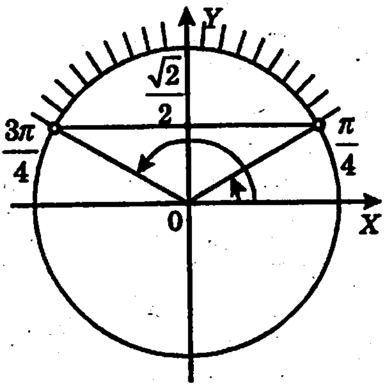
§ 2. Неравенства (№ 1–20)

Пример 1. Решить неравенство

$$\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Решение.

По определению синуса, $\sin x$ — это ордината точки единичной окружности. Чтобы решить неравенство $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, нужно выяснить, какие точки единичной окружности имеют ординату, большую $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Тогда точки, ордината которых больше $\frac{\sqrt{2}}{2}$, заполняют открытую дугу (на рисунке она заштрихована).

Эта дуга является геометрическим решением неравенства, тогда $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ — одно из решений исходного неравенства. Учитывая периодичность функции $\sin x$, получим все решения данного неравенства — множество интервалов $\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$.

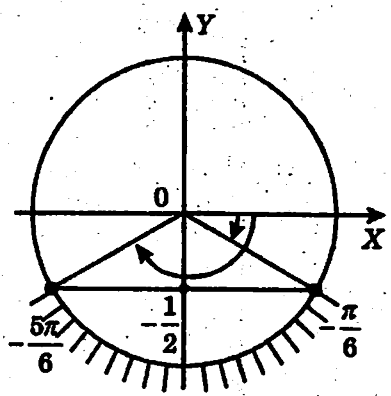
Ответ: $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$.

Пример 2. Решить неравенство

$\sin x \le -\frac{1}{2}$.

Решение.

Ординату, не большую $-\frac{1}{2}$, имеют все точки закрытой дуги (на рисунке она заштрихована) единичной окружности.



Следовательно, решениями неравенства $\sin x \le -\frac{1}{2}$ являются числа x, принадлежащие промежутку $-\frac{5\pi}{6} \le x \le -\frac{\pi}{6}$. Все решения данного неравенства — множество отрезков $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \le x \le -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $\left[-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$.

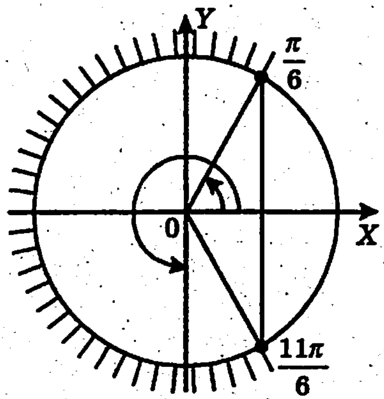
Пример 3. Решить неравенство

$\cos x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение.

Абсциссу, не большую $\frac{\sqrt{3}}{2}$, имеют все точки закрытой дуги (на рисунке она заштрихована) единичной окруж-

ности. Значит, решениями неравенства $\cos x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$ являются числа x, принадлежащие промежутку $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{11\pi}{6}$.



Все решения исходного неравенства — множество отрезков

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n \le x \le \frac{11\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Ответ: $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{11\pi}{6} + 2\pi n\right],\ n \in Z.$

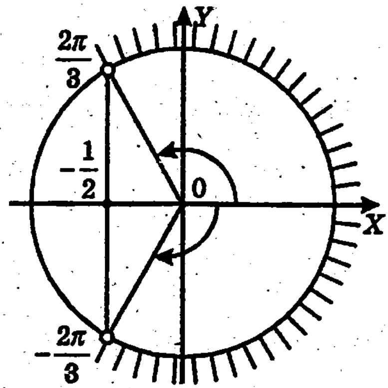
Пример 4. Решить неравенство

$$\cos x > -\frac{1}{2}.$$

Решение.

По определению косинуса, $\cos x$ — это абцисса точки единичной окружности.

Абциссу, большую $-\frac{1}{2}$, имеют все точки открытой дуги (на рисунке она заштрихована) единичной окружности, лежащей правее прямой $x=-\frac{1}{2}$. Следовательно, решениями неравенства $\cos x>-\frac{1}{2}$ являются все числа x из промежутка $-\frac{2\pi}{3}<x<\frac{2\pi}{3}$. Тогда все решения данного неравенства — множество интервалов



$$-\frac{2\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z.$$

Ответ: $\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right),\ n\in Z.$

Пример 5. Решить неравенство $\operatorname{tg} x\le 1$.

Решение.

Неравенства вида

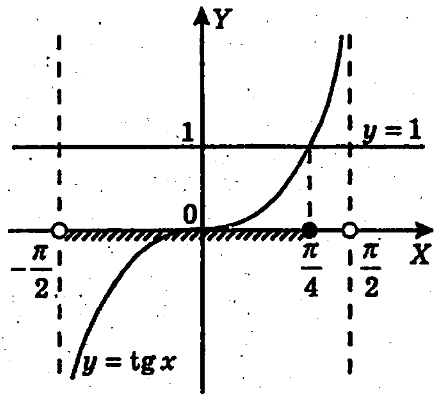
$\operatorname{tg} x<a$, $\operatorname{tg} x>a$ (или $\operatorname{tg} x\le a$, $\operatorname{tg} x\ge a$)

удобно решать с помощью графика придерживаясь алгоритма:

1) строим тангенсоиду $y=\operatorname{tg} x$ и прямую $y=a$;

2) выделяем для главной ветви тангенсоиды промежуток оси x, на котором выполняется заданное неравенство;

3) учитывая периодичность функции $y = \operatorname{tg} x$, записываем ответ в общем виде.



Как видно из рисунка, график функции $y = \operatorname{tg} x$ и прямая $y = 1$ пересекаются в точке $x = \frac{\pi}{4}$.

Выделим промежуток оси OX (на рисунке он заштрихован), на котором главная ветвь тангенсоиды расположена ниже прямой $y = 1$, — это интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$.

Учитывая периодичность функции $y = \operatorname{tg} x$, находим

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \le \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right],\ n \in Z.$

Пример 6. Решить неравенство $2\sin 3x > -1$.

Решение.

Разделим обе части неравенства на 2:

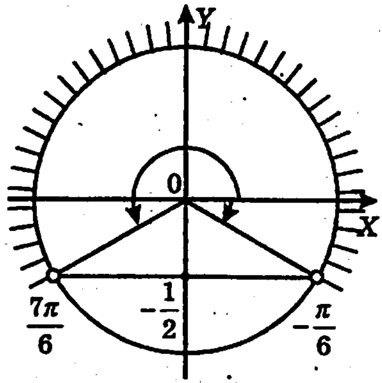
$\sin 3x > -\frac{1}{2}.$

Пусть $3x = t$, тогда получим

$$\sin t = -\frac{1}{2}. \qquad (1)$$

$\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6},$

тогда $-\frac{\pi}{6} < t < \frac{7\pi}{6}$ — одно из решений неравенств (1).



Учитывая периодичность синуса, получим:

$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Так как $t = 3x$, то $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < 3x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n,$

откуда $-\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} < x < \frac{7\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in Z.$

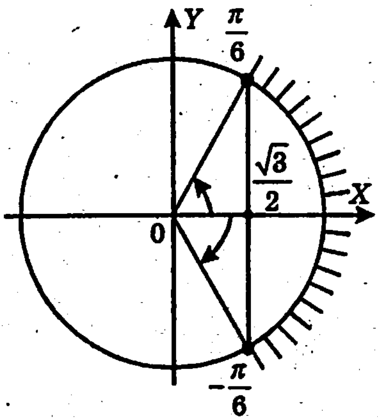
Ответ: $\left(-\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3};\ \frac{7\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}\right),\ n \in Z.$

Пример 7. Решить неравенство

$\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\geq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение.

Пусть $x-\dfrac{\pi}{3}=t$, тогда получим $\cos t\geq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



Следовательно, $-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n\leq t\leq\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$.

Учитывая, что $x-\dfrac{\pi}{3}=t$, получим

$-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n\leq x-\dfrac{\pi}{3}\leq\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$,

$-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3}+2\pi n\leq x\leq\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$, откуда

$\dfrac{\pi}{6}+2\pi n\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$.

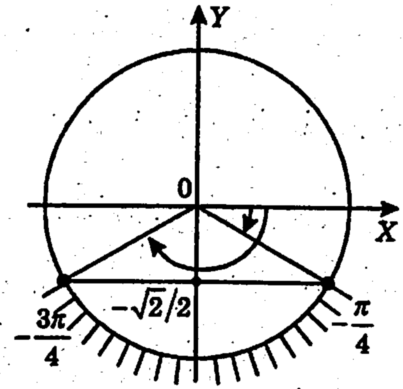
Ответ: $\left[\dfrac{\pi}{6}+2\pi n;\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right],\ n\in Z$.

Пример 8. Решить неравенство

$$\sin\left(\frac{x}{3}-2\right)\le-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Решение.

Пусть $\frac{x}{3}-2=t$, тогда получим $\sin t\le-\frac{\sqrt{2}}{2}$.



$\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$, значит, $-\frac{3\pi}{4}+2\pi n\le t\le-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, или

$$-\frac{3\pi}{4}+2\pi n\le\frac{x}{3}-2\le-\frac{\pi}{4}+2\pi n,$$

$$-\frac{3\pi}{4}+2+2\pi n\le\frac{x}{3}\le-\frac{\pi}{4}+2+2\pi n,\text{ откуда}$$

$$-\frac{9\pi}{4}+24+24\pi n\le x\le-3\pi+24+24\pi n,\ n\in Z.$$

Ответ: $\left[-\frac{9\pi}{4}+24+24\pi n;\ -3\pi+24+24\pi n\right],\ n\in Z.$

Пример 9. Найти все решения неравенства $\cos x \geq \frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$.

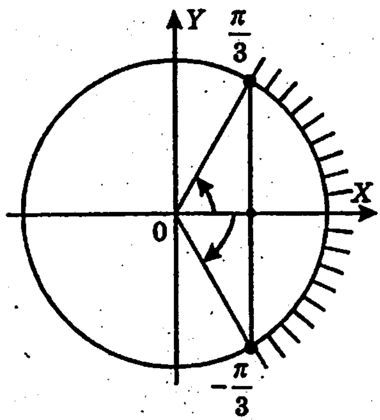
Решение.

$-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ — одно из решений неравенства.

Учитывая периодичность косинуса, имеем

$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Остается из всех полученных решений отсеять те, которые не принадлежат отрезку $[0; 3\pi]$.



При $n = 0$, $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$,

откуда $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ — решение исходного неравенства;

при $n = 1$, $-\frac{\pi}{3} + 2\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi$,

или $\frac{5\pi}{3} \leq x \leq \frac{7\pi}{3}$ — решение исходного неравенства.

При $n > 1$ и при $n < 0$ — решений нет.

Ответ: $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]; \left[\frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}\right]$.

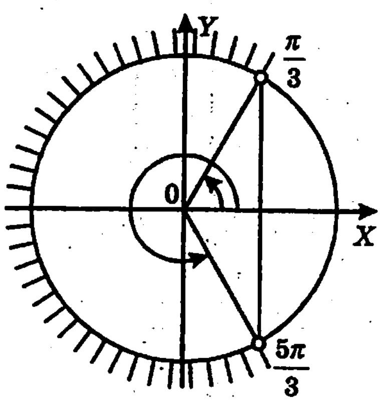
Пример 10. Найти все решения неравенства $\cos 2x < \frac{1}{2}$, принадлежащего промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

$$2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}.$$

Имеем, $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < 2x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$, откуда

$$\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{5\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$$



По условию

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}. \qquad (1)$$

При $n = 0$, $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ — удовлетворяет (1);

при $n = 1$, $\frac{7\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}$, и т.к. $x \le \frac{3\pi}{2}$, то

$\frac{7\pi}{6} < x \le \frac{3\pi}{2}$; при $n > 1$ и $n < 0$ решений нет.

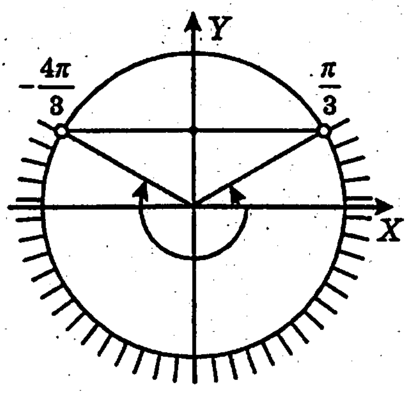
Ответ: $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right); \left(\frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Пример 11. Найти все решения неравенства $\sin 3x < \frac{\sqrt{3}}{2}$, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right]$.

Решение.

$\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$, тогда $-\frac{4\pi}{3} + 2\pi n < 3x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, откуда

$-\frac{4\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3} < x < \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in Z$.



При $n = 0$, $-\frac{4\pi}{9} < x < \frac{\pi}{9}$ — решение исходного неравенства;

при $n = 1$, $-\frac{4\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} < x < \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}$,

или $\frac{2\pi}{3} < x < \frac{7\pi}{9}$ — решение неравенства;

при $n = 2$, $-\frac{4\pi}{9} + \frac{4\pi}{3} < x < \frac{\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}$, или $\frac{8\pi}{9} < x < \frac{13\pi}{9}$,

и так как $x \le \pi$, то $\frac{8\pi}{9} < x \le \pi$ — решение неравенства;

при $n \ge 3$ — решений нет;

при $n = -1$, $-\frac{4\pi}{9} - \frac{2\pi}{3} < x < \frac{\pi}{9} - \frac{2\pi}{3}$, или

$-\frac{10\pi}{9} < x < -\frac{5\pi}{9}$ — решение неравенства;

при $n = -2$, $-\frac{4\pi}{9} - \frac{4\pi}{3} < x < \frac{\pi}{9} - \frac{4\pi}{3}$, или

$-\frac{16\pi}{9} < x < -\frac{11\pi}{9}$, и так как $x \ge -\frac{3\pi}{2}$, то имеем:

$-\frac{3\pi}{2} \le x < -\frac{11\pi}{9}$ — решение неравенства;

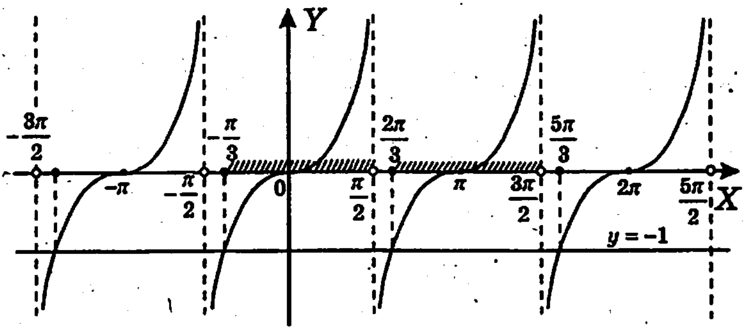
при $n < -2$ — решений нет.

Ответ: $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{11\pi}{9}\right)$, $\left(-\frac{10\pi}{9}; -\frac{5\pi}{9}\right)$, $\left(-\frac{4\pi}{9}; \frac{\pi}{9}\right)$,

$\left(\frac{2\pi}{9}; \frac{7\pi}{9}\right)$, $\left(\frac{8\pi}{9}; \pi\right]$.

Пример 12. Найти все решения неравенства $\operatorname{tg} x \geq -\sqrt{3}$, принадлежащие промежутку $(-\pi;\ 2\pi)$.

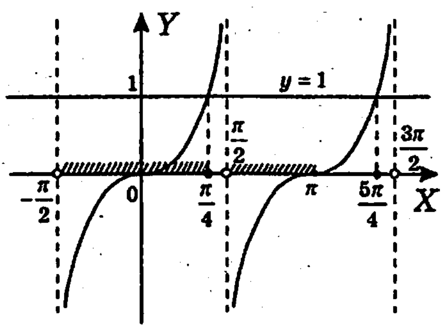
Решение.



$$-\frac{\pi}{3}+\pi n < x < \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in Z.$$

Ответ: $\left(-\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right), \left[-\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2}\right), \left[\frac{2\pi}{3};\ \frac{3\pi}{2}\right); \left[\frac{5\pi}{3};\ 2\pi\right).$

Пример 13. Найти все решения неравенства $\operatorname{tg} 2x \leq 1$, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$.



Решение.

Пусть $2x = t$, тогда имеем $\operatorname{tg} x \le 1$. Строим график функции $y = \operatorname{tg} t$ и прямую $y = 1$, тогда $-\frac{\pi}{2} < t \le \frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2} < t < \pi$.

Учитывая, что $2x = t$, получим $-\frac{\pi}{2} < 2x \le \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2} < 2x < \pi$, откуда $-\frac{\pi}{4} < x \le \frac{\pi}{8}$; $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{8}\right]; \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Пример 14. Найти решения неравенства $2 + \operatorname{tg} x > 0$, принадлежащие промежутку $[-2\pi; -\pi]$.

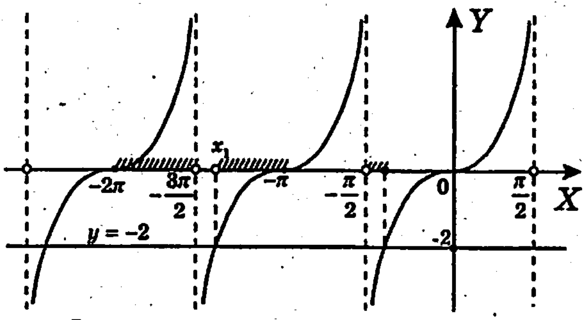
Решение.

$\operatorname{tg} x > -2$.

Строим графики функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = -2$.

Тогда $-\operatorname{arctg} 2 + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$;

$-2\pi \le x < -\frac{3\pi}{2}$; $x_1 < x \le -\pi$, где $x_1 = -\operatorname{arctg} 2 - \pi$.

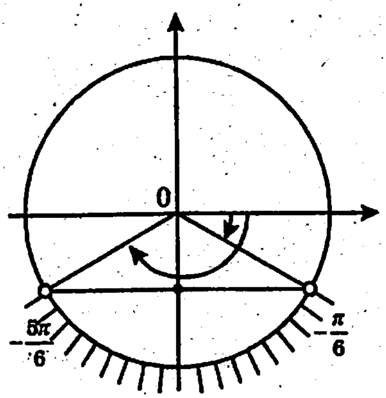


Ответ: $\left[-2\pi; -\frac{3\pi}{2}\right)$, $(-\operatorname{arctg} 2 - \pi; -\pi]$.

Пример 15. Решить неравенство $2\cos^2 x + \sin x - 1 < 0$.

Решение.

Так как $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, то получим
$2\left(1 - \sin^2 x\right) + \sin x - 1 < 0$, или $2\sin^2 x - \sin x - 1 > 0$.



Пусть $\sin x = t$, $|t| \le 1$, тогда $2t^2 - t - 1 > 0$,

$D = 1 + 8 = 9 = 3^2 > 0$, $t_{1,2} = \dfrac{1 \pm 3}{4}$, $t_1 = 1$; $t_2 = -\dfrac{1}{2}$.

Решая неравенство $2t^2 - t - 1 > 0$ методом интервалов, находим:

$t < -\dfrac{1}{2}$; $t > 1$.

Так как $|t| \le 1$, то неравенство $\sin x > 1$ не имеет решений. Остается решить неравенство $\sin x < -\dfrac{1}{2}$.

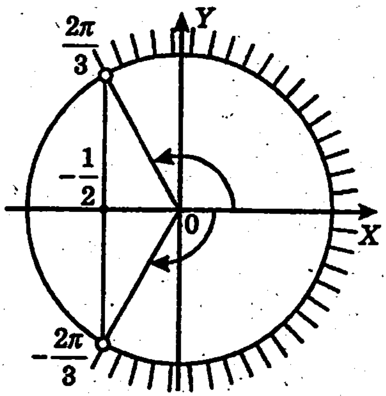
$\pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$, тогда $-\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n < x < -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $\left(-\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$.

Пример 16. Решить неравенство

$$2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}\cos x>0.$$

Решение.



Так как $2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha$, то неравенство примет вид:

$$1-\cos 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}\cos 2x>0, \text{ или}$$

$$1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)+\sqrt{3}\cos 2x>0,$$

$$1+\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x>0, \text{ или}$$

$$\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x>-1,\ \frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x>-\frac{1}{2},$$

$$\sin\frac{\pi}{6}\sin 2x+\cos\frac{\pi}{6}\cos 2x>-\frac{1}{2},\ \cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)>-\frac{1}{2}.$$

Пусть $2x-\frac{\pi}{6}=t$, тогда получим $\cos t>-\frac{1}{2}$ (см. пример 4).

$$-\frac{2\pi}{3}+2\pi n < t < \frac{2\pi}{3}+2\pi n, n \in Z.$$

Учитывая, что $t = 2x - \frac{\pi}{6}$, имеем:

$$-\frac{2\pi}{3}+2\pi n < 2x-\frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{3}+2\pi n,$$

$$-\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}+2\pi n < 2x < \frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}+2\pi n,$$

$$-\frac{\pi}{2}+2\pi n < 2x < \frac{5\pi}{6}+2\pi n, \text{ откуда}$$

$$-\frac{\pi}{4}+\pi n < x < \frac{5\pi}{12}+\pi n, n \in Z.$$

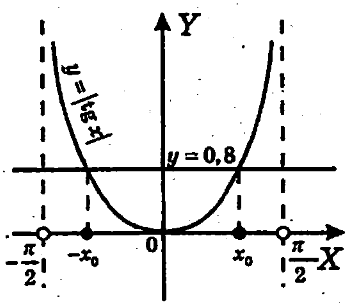
Ответ: $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{5\pi}{12}+\pi n\right), n \in Z.$

Пример 17. Решить неравенство $|\operatorname{tg} x| \le 0,8$.

Решение.

Строим графики функций $y = |\operatorname{tg} x|$, $y = 0,8$.

Как видно из рисунка, $-x_0 < x < x_0$, где x_0 — абсцисса точки пересечения рассматриваемых графиков, т.е. корень уравнения $\operatorname{tg} x = 0,8$, лежащий в промежутке $0 < x < \frac{\pi}{2}$.



Значит, $x_0 = \operatorname{arctg}\dfrac{3}{5}$.

Учитывая период функции $y = |\operatorname{tg} x|$, получим

$-\operatorname{arctg} 0,8 + \pi n \le x \le \operatorname{arctg} 0,8 + \pi n,\ n \in Z$.

Ответ: $(-\operatorname{arctg} 0,8 + \pi n;\ \operatorname{arctg} 0,8 + \pi n),\ n \in Z$.

Пример 18. **Решить неравенство** $3\operatorname{tg} 2x \le 5\operatorname{tg} x$.

Решение.

Известно, что $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$, тогда данное неравенство примет вид

$$\frac{6\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} \le 5\operatorname{tg} x, \text{ или}$$

$$\operatorname{tg} x\left(\frac{6}{1-\operatorname{tg}^2 x} - 5\right) \le 0,\ \frac{\operatorname{tg} x\left(6-5+5\operatorname{tg}^2 x\right)}{1-\operatorname{tg}^2 x} \le 0;$$

$$\frac{\operatorname{tg} x\left(1+5\operatorname{tg}^2 x\right)}{1-\operatorname{tg}^2 x} \le 0.$$

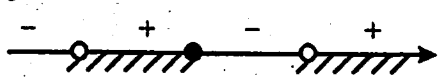
Пусть $\operatorname{tg} x = t$, тогда $\dfrac{t\left(1+5t^2\right)}{1-t^2} \le 0$.

Заметим, что $1+5t^2 > 0$ при всех t, тогда имеем равносильное неравенство

$$\frac{t}{1-t^2} \le 0, \text{ или } \frac{t}{(t-1)(t+1)} \ge 0.$$

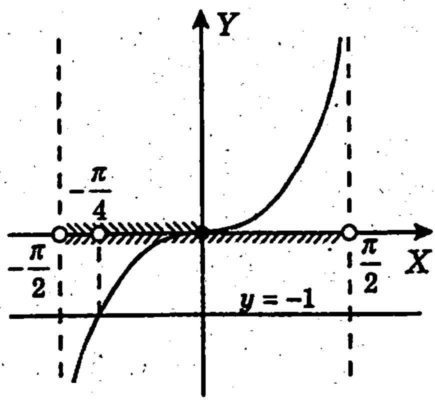
Решая полученное неравенство методом интервалов, находим: $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = -1$.

$-1 < t \le 0;\ t > 1$.



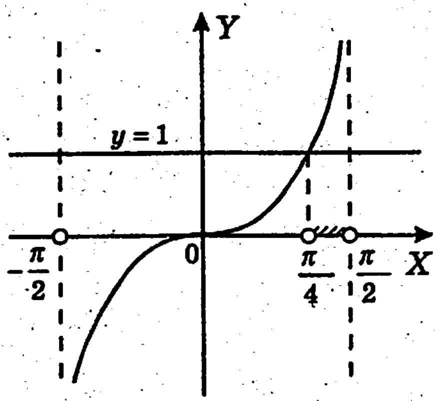
Следовательно, $-1 < \operatorname{tg} x \leq 0$; $\operatorname{tg} x > 1$.

1) $-1 < \operatorname{tg} x \leq 0$



$$\pi n - \frac{\pi}{4} < x \leq 0 + \pi n, \text{ или } \pi n - \frac{\pi}{4} < x \leq \pi n,\ n \in Z.$$

2) $\operatorname{tg} x > 1$.



$$\pi n + \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$$

Объединяя оба решения, получим ответ.

Ответ: $\left(\pi n-\frac{\pi}{4};\ \pi n\right]\cup\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n\in Z.$

Пример 19. Решить неравенство

$2\sin 6x\cos 3x+\cos 6x<-1.$

Решение.

Запишем неравенство в виде

$2\sin 6x\cos 3x+1+\cos 6x<0.$

Но $1+\cos 6x=2\cos^2 3x$ и $\sin 6x=2\sin 3x\cos 3x$, тогда получим

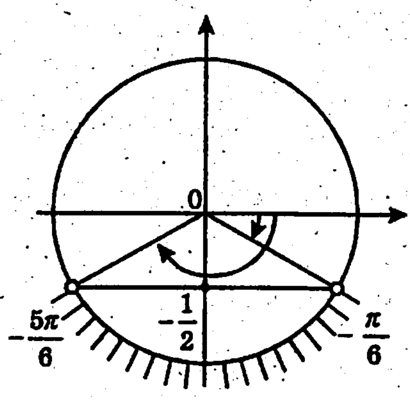
$4\sin 3x\cos^2 3x+2\cos^2 3x<0,$

$2\cos^2 3x(2\sin 3x+1)<0.$

Так как $\cos^2 3x>0$, то получим равносильное неравенство $2\sin 3x+1<0$, откуда $\sin 3x<-\frac{1}{2}$.

Пусть $3x=t$, тогда

$\sin t<-\frac{1}{2};\ \pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$, значит $-\frac{5\pi}{6}<t<-\frac{\pi}{6}$ — одно из решений неравенства $\sin 3x<-\frac{1}{2}$.



Учитывая периодичность синуса, находим все решения исходного неравенства

$$-\frac{5\pi}{6}+2\pi n<3x<-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z,\text{ откуда}$$

$$-\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}<x<-\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in Z.$$

Ответ: $\left(-\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3};-\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}\right),\ n\in Z.$

Пример 20. Решить неравенство

$\cos^2 x\cos 3x-\sin^3 x\sin 3x\le -\frac{1}{8}.$

Решение.

Известно, что $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$ и

$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$, откуда

$4\sin^3 x=3\sin x-\sin 3x$ и $4\cos^3 x=\cos 3x+3\cos x$, тогда исходное неравенство примет вид

$$4\cos^3 x\cos 3x-4\sin^3 x\sin 3x\le -\frac{1}{2},\text{ или}$$

$$(\cos 3x+3\cos x)\cos 3x-(3\sin x-\sin 3x)\sin 3x\le -\frac{1}{2},$$

$$\cos^2 3x+3\cos x\cos 3x-3\sin x\sin 3x+\sin^2 3x\le -\frac{1}{2}.$$

Но $\cos^2 3x+\sin^2 3x=1$, тогда

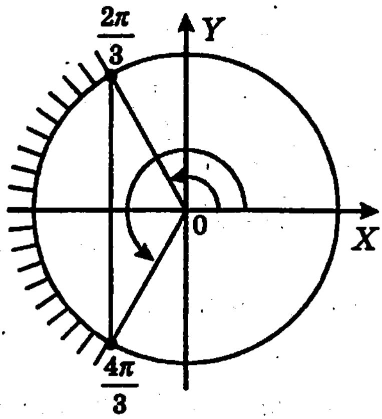
$$3(\cos x\cos 3x-\sin x\sin 3x)\le -\frac{3}{2},\text{ или}$$

$$\cos x\cos 3x-\sin x\sin 3x\le -\frac{1}{2},\text{ или}$$

$$\cos(x+3x)\le -\frac{1}{2},\ \cos 4x\le -\frac{1}{2}.$$

Пусть $4x = t$, тогда $\cos t \le -\frac{1}{2}$; $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$;

$2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$, значит $\frac{2\pi}{3} \le t \le \frac{4\pi}{3}$ — одно из решений неравенства $\cos t \le -\frac{1}{2}$, следовательно



$2\pi n + \frac{2\pi}{3} \le 4x \le \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$, откуда

$\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

Ответ: $\left[\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}\right]$, $n \in Z$.

§ 3. Системы уравнений (№1—13)

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 0, \\ \cos(x-y) = -1. \end{cases}$$

Решение.

Имеем

$$\begin{cases} x+y=\pi n, \\ x-y=\pi+2\pi k; \end{cases} \begin{cases} 2x=\pi+\pi n+2\pi k, \\ 2y=-\pi+\pi n-2\pi k; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}(n+2k), \\ y=-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}(n-2k). \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}(n+2k);\ -\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}(n-2k)\right)$, n, $k\in Z$.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x\cos y=-0{,}5, \\ \cos x\sin y=0{,}5. \end{cases}$$

Решение.

Складывая и вычитая уравнения системы, получим:

$$\begin{cases} \sin x\cos y+\cos x\sin y=0, \\ \cos x\sin y-\sin x\cos y=1; \end{cases} \begin{cases} \sin(x+y)=0, \\ \sin(x-y)=-1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=\pi n, \\ x-y=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k; \end{cases} \begin{cases} 2x=\pi n-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, \\ 2y=\pi n+\dfrac{\pi}{2}-2\pi k; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}(n+2k), \\ y=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}(n-2k). \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}(n+2k);\ \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}(n-2k)\right)$, n, $k\in Z$.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = \sqrt{3}, \\ x + y = \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Решение.

Упростим I уравнение системы, применяя формулу суммы косинусов:

$$2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = \sqrt{3},$$

или, учитывая II уравнение системы, получим:

$$2\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{x-y}{2} = \sqrt{3}, \text{ или}$$

$$\sqrt{3}\cos\frac{x-y}{2} = \sqrt{3}, \text{ откуда}$$

$$\cos\frac{x-y}{2} = 1, \; x - y = 4\pi n, \; n \in Z.$$

Имеем равносильную систему:

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{3}, \\ x - y = 4\pi n; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{3} + 4\pi n, \\ 2y = \dfrac{\pi}{3} - 4\pi n; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ y = \dfrac{\pi}{6} - 2\pi n; \end{cases} \; n \in Z.$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n; \; \dfrac{\pi}{6} - 2\pi n\right), \; n \in Z.$

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sin y} = \dfrac{3}{2}, \\ x + y = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Решение.

I способ.

$$\begin{cases}\dfrac{\sin x}{\sin y}=\dfrac{3}{2},\\ y=\dfrac{\pi}{2}-x;\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{\sin x}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}=\dfrac{3}{2},\\ y=\dfrac{\pi}{2}-x;\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{3}{2},\\ y=\dfrac{\pi}{2}-x;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\operatorname{tg} x=1,5,\\ y=\dfrac{\pi}{2}-x;\end{cases}\quad \begin{cases}x=\operatorname{arctg}1,5+\pi n,\\ y=\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}1,5-\pi n;\end{cases}\quad n\in Z.$$

Ответ: $\left(\operatorname{arctg}1,5+\pi n;\ \dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}1,5-\pi n\right)$, $n\in Z$.

II способ.

Известно, что если $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, то $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}$, тогда I уравнение системы можно записать так:

$$\frac{\sin x+\sin y}{\sin x-\sin y}=\frac{5}{1},\text{ или}$$

$$\frac{2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}}{2\sin\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}}=5,\text{ или}$$

$$\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}\operatorname{ctg}\frac{x-y}{2}=5.$$

Учитывая II уравнение системы, получим

$\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}\operatorname{ctg}\dfrac{x-y}{2}=5$, или $\operatorname{ctg}\dfrac{x-y}{2}=5$, откуда

$x-y=2\operatorname{arcctg}5+2\pi n$, $n\in Z$.

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{2}, \\ x-y=2\operatorname{arcctg}5+2\pi n; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x=\dfrac{\pi}{2}+2\operatorname{arcctg}5+2\pi n, \\ 2y=\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arcctg}5-2\pi n; \end{cases}$$

откуда $x=\dfrac{\pi}{4}+\operatorname{arcctg}5+\pi n$; $y=\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arcctg}5-\pi n$.

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{4}+\operatorname{arcctg}5+\pi n; \dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arcctg}5-\pi n\right)$, $n \in Z$.

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \sin y=\dfrac{3}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y=3. \end{cases}$$

Решение.

Упростим II уравнение системы:

$$\frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}=3,$$

или, учитывая I уравнение, получим

$\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{\cos x \cos y}=3$, откуда $\cos x \cos y=\dfrac{1}{4}$, тогда

$$\begin{cases} \cos x \cos y=\dfrac{1}{4}, \\ \sin x \sin y=\dfrac{3}{4}; \end{cases}$$

где $x \neq \dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $y \neq \dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $n, k \in Z$.

Складывая и вычитая уравнения полученной системы, находим:

$$\begin{cases}\cos(x-y)=1,\\ \cos(x+y)=-\dfrac{1}{2};\end{cases}\quad \begin{cases}x-y=2\pi k,\\ x+y=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n;\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n+2\pi k,\\ 2y=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n-2\pi k;\end{cases}\quad \begin{cases}x=\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi n+\pi k,\\ y=\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi n-\pi k;\end{cases}\quad n,\ k\in Z.$$

Ответ: $\left(\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi n+\pi k;\ \pm\dfrac{\pi}{3}+\pi n-\pi k\right)$, $n,\ k\in Z$.

Пример 6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{2}\cos x=1+\cos y,\\ \sqrt{2}\sin x=\sin y.\end{cases}$$

Решение.

Возведем обе части уравнения системы в квадрат и сложим:

$2\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)=\left(1+\cos y\right)^2+\sin^2 y$, или

$2=1+2\cos y+\cos^2 y+\sin^2 y$, или

$2=1+2\cos y+1$, $\cos y=0$, откуда $y=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$.

Для этих значений y, будет $\sin y=\left(-1\right)^k$.

Имеем 2 случая:

1) $k=2n$ — четное, тогда $\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

т.е. $x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi m$;

2) $k=2n+1$ — нечетное, тогда $\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m,\ m \in Z.$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi m;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right);\ \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi m;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right),$

$m,\ n \in Z.$

Пример 7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 2. \end{cases}$$

Решение.

Из I уравнения $y = \frac{\pi}{4} - x$, тогда II уравнение примет вид

$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2.$

Но $\operatorname{tg} x\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} x} = \dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$,

тогда получим $\operatorname{tg} x - \dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = 2$, или

$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - 1 + \operatorname{tg} x = 2 + 2\operatorname{tg} x,\ \operatorname{tg}^2 x = 3, \operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3},$

откуда $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ \ n \in Z.$

Если $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, то $y = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} - \pi n = -\frac{\pi}{12} - \pi n;$

если $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n$, то $y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} - \pi n = \frac{7\pi}{12} - \pi n,\ n \in Z.$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{3} + \pi n;\ -\frac{\pi}{12} - \pi n\right);\ \left(-\frac{\pi}{3} + \pi n;\ \frac{7\pi}{12} - \pi n\right),\ n \in Z.$

Пример 8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sin^2 x+\cos^2 y=\dfrac{3}{4},\\ \cos 2x+2\cos y=3.\end{cases}$$

Решение.

Заметим, что в силу ограниченности косинуса, II уравнение системы выполняется, если

$$\begin{cases}\cos 2x=1,\\ \cos y=1.\end{cases}$$

Если $\cos y=1$, то I уравнение исходной системы примет вид

$$\sin^2 x+1=\frac{3}{4}, \text{ или } \sin^2 x=-\frac{1}{4} \text{ — нет решений.}$$

Следовательно, исходная системы не имеет решений.

Ответ: нет решений.

Пример 9. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}x+y=\dfrac{2\pi}{3},\\ \cos(x+y)+\cos(x-y)=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Решение.

Подставив значение $x=\dfrac{\pi}{3}+\pi n$ во II уравнение системы, получим:

$$\cos\frac{2\pi}{3}+\cos(x-y)=\frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Но $\cos\dfrac{2\pi}{3}=\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$, тогда (1) примет вид

$$-\frac{1}{2}+\cos(x-y)=\frac{1}{2},\quad \cos(x-y)=1, \text{ откуда}$$

$$x-y=2\pi n,\ n\in Z.$$

Решая полученное уравнение с I уравнением исходной системы, получим:

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{2\pi}{3}, \\ x-y=2\pi n; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n, \\ 2y=\dfrac{2\pi}{3}-2\pi n; \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{3}+\pi n, \\ y=\dfrac{\pi}{3}-\pi n. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{3}+\pi n;\ \dfrac{\pi}{3}-\pi n\right),\ n\in Z.$

Пример 10. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 6\cos x+4\cos y=5, \\ 3\sin x+2\sin y=0. \end{cases}$$

Решение.

Из I уравнения $6\cos x=5-4\cos y$, а из II уравнения $3\sin x=-2\sin y$, или $6\sin x=-4\sin y$.

Возведем каждое из полученных равенств в квадрат и сложим:

$$36\cos^2 x+36\sin^2 x=(5-4\cos y)^2+(-4\sin y)^2, \text{ или}$$

$$36=(5-4\cos y)^2+16(1-\cos^2 y),$$

$$36=25-40\cos y+16\cos^2 y+16-16\cos^2 y,$$

$$40\cos y=5,\ \cos y=\frac{1}{8}, \text{ откуда}$$

$$y=\pm\arccos\frac{1}{8}+2\pi n,\ n\in Z.$$

Если $\cos y = \frac{1}{8}$, то I уравнение исходной системы примет вид

$$6\cos x + \frac{1}{2} = 5,\ \cos x = \frac{3}{4},$$ откуда

$$x = \pm\arccos\frac{3}{4} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Заметим, что при возведении уравнений в квадрат могли появиться посторонние корни. Подстановкой найденных корней, например, во II уравнение, убеждаемся, что исходной системе удовлетворяют из четырех комбинаций знаков лишь две.

Ответ: $\left(\arccos\frac{3}{4} + 2\pi k;\ -\arccos\frac{1}{8} + 2\pi n\right)$,

$\left(-\arccos\frac{3}{4} + 2\pi k;\ \arccos\frac{1}{8} + 2\pi n\right)$, $k,\ n \in Z$.

Пример 11. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \cos^2 y + 3\sin x \sin y = 0, \\ \cos 2y - 21\cos 2x = -10. \end{cases}$$

Решение.

Запишем систему в виде

$$\begin{cases} 1 - \sin^2 y + 3\sin x \sin y = 0, \\ \left(1 - 2\sin^2 y\right) - 21\left(1 - 2\sin^2 x\right) = -10. \end{cases}$$

Пусть $\sin x = a$, $\sin y = b$, где $|a| \le 1$, $|b| \le 1$.

Имеем систему

$$\begin{cases} 1 - b^2 + 3ab = 0, \\ \left(1 - 2b^2\right) - 21\left(1 - 2a^2\right) = -10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2 - 3ab = 1, \\ -2b^2 + 42a^2 = 10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2 - 3ab = 1, \\ -b^2 + 21a^2 = 5. \end{cases}$$

Пусть $b = at$, тогда получим:

$$\begin{cases} a^2t^2 - 3a^2t = 1, \\ 21a^2 - a^2t^2 = 5; \end{cases} \begin{cases} a^2\left(t^2 - 3t\right) = 1, \\ a^2\left(21 - t^2\right) = 5. \end{cases}$$

Разделим II уравнение полученной системы на I:

$21 - t^2 = 5\left(t^2 - 3t\right)$, или $6t^2 - 15t - 21 = 0$,

$2t^2 - 5t - 7 = 0$, откуда находим $t_1 = \dfrac{7}{2}$, $t_2 = -1$.

Если $t = \dfrac{7}{2}$, то из I уравнения последней системы получим

$$a^2\left(\frac{49}{4} - \frac{21}{2}\right) = 1,\ a^2 = \frac{4}{7};\ a = \pm\frac{2}{\sqrt{7}}.$$

Значит, $b = \pm\dfrac{2}{\sqrt{7}} \cdot \dfrac{7}{2} = \pm\sqrt{7}$, что невозможно, так как $|b| \le 1$.

Если $t = -1$, то $a^2\left(1 + 3\right) = 1, a^2 = \dfrac{1}{4}$, откуда

$a = \pm\dfrac{1}{2}$, $b = \pm\dfrac{1}{2} \cdot (-1) = \mp\dfrac{1}{2}$.

Следовательно, имеем совокупность двух систем уравнений:

1) $\begin{cases} a = \dfrac{1}{2}, \\ b = -\dfrac{1}{2}; \end{cases} \begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{2}, \\ \sin y = -\dfrac{1}{2}; \end{cases} \begin{cases} x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n, \\ y = (-1)^{k+1} \dfrac{\pi}{6} + \pi k. \end{cases}$

2) $\begin{cases} a=-\dfrac{1}{2}, \\ b=\dfrac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} \sin x=-\dfrac{1}{2}, \\ \sin y=\dfrac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi n, \\ y=(-1)^{k}\dfrac{\pi}{6}+\pi k. \end{cases}$

Ответ: $\left((-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n;\ (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi k\right)$;

$\left((-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi n;\ (-1)^{k}\dfrac{\pi}{6}+\pi k\right)$, $n, k\in Z$.

Пример 12. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \cos x+\cos y=\sin^2 x, \\ \sqrt{\sin x-\cos y}=\cos x. \end{cases}$$

Решение.

Из II уравнения системы следует, что $\cos x\ge 0$, тогда получим:

$$\begin{cases} \cos x+\cos y=\sin^2 x, \\ \sin x-\cos y=\cos^2 x. \end{cases} \qquad (1)$$

Складывая уравнения системы (1), имеем

$$\sin x+\cos x=1. \qquad (2)$$

Но $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)=$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin x+\sin\frac{\pi}{4}\cos x\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Тогда, учитывая (2), получим уравнение

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}},\ x+\frac{\pi}{4}=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z.$$

Если $n = 2k$, то $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, откуда

$x_1 = 2\pi k$, $k \in Z$.

Если $n = 2k+1$, то $x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi$, откуда

$x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Подставляя найденные значения x в I уравнение исходной системы, находим:

$\cos y = -1$, $y_1 = 2\pi m + \pi$; $\cos y = 1$, $y_2 = 2\pi p$.

Следовательно, исходная система имеет два решения.

Ответ: $(2\pi k;\ 2\pi m + \pi)$, $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ 2\pi p\right)$, $k, m, p \in Z$.

Пример 13. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (\operatorname{arctg} x)^2 + (\arccos y)^2 = \pi^2 k, \\ \operatorname{arctg} x + \arccos y = \frac{\pi}{2}, \ k \in Z. \end{cases}$$

Решение.

Пусть $\operatorname{arctg} x = u$, $\arccos y = v$, тогда получим систему уравнений:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = \pi^2 k, \\ u + v = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

где $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$; $0 \le v \le \pi$.

Из II уравнения $v = \frac{\pi}{2} - u$, тогда I уравнение примет вид:

$$u^2+\left(\frac{\pi}{2}-u\right)^2=\pi^2k, \text{ или } 2u^2-\pi u+\left(\frac{\pi^2}{4}-\pi^2k\right)=0,$$

$$D=\pi^2-8\left(\frac{\pi^2}{4}-\pi^2k\right)=8\pi^2k-\pi^2=\pi^2(8k-1),$$

$$u_{1,2}=\frac{1}{4}\left(\pi\pm\pi\sqrt{8k-1}\right)=\frac{\pi}{4}\left(1\pm\sqrt{8k-1}\right), \text{ тогда}$$

$$v_{1,2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\left(1\pm\sqrt{8k-1}\right)=\frac{\pi}{4}\left(1\mp\sqrt{8k-1}\right).$$

Учитывая ограничения, накладываемые на u, v, убеждаемся, что подходят только решения второй серии, то есть

$$u_2=\frac{\pi}{4}\left(1-\sqrt{8k-1}\right);\ v_2=\frac{\pi}{4}\left(1+\sqrt{8k-1}\right).$$

При $k = 1$ $u_2=\frac{\pi}{4}\left(1-\sqrt{7}\right),\ v_2=\frac{\pi}{4}\left(1+\sqrt{7}\right).$

Так как $u=\operatorname{arctg}x,\ v=\arccos y$, то

$$x=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\left(1-\sqrt{7}\right),\ y=\cos\frac{\pi}{4}\left(1+\sqrt{7}\right).$$

Ответ: $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\left(1-\sqrt{7}\right);\ \cos\frac{\pi}{4}\left(1+\sqrt{7}\right)\right).$

§ 4. Уравнения (№ 1—85)

1. $\sin 3x=0;$
2. $2\sin^2 x=1;$
3. $\cos 4x=1;$
4. $\sin 2x=-1;$
5. $1+\operatorname{tg}\frac{x}{3}=0;$

6. $\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)=0;$

7. $\sin^2 x=\frac{1}{4};$

8. $\cos^2 x=\frac{1}{2};$

9. $\cos 3x=\cos x;$

10. $2\cos^2 x-\sin x+1=0.$

Найти корни уравнения на заданном промежутке (ответ привести в градусах).

11. $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=1,$ при $0°<x\le 360°;$

12. $3\cos^2 x-5\cos x=0,$ при $0°<x<180°;$

13. $2\sin^2 x-3\cos x=0,$ при $0°\le x\le 90°;$

14. $2\sin^2 x-7\sin x+3=0,$ при $0°\le x\le 90°;$

Решить уравнения

15. $\sin\frac{2\pi}{x}=0;$

16. $\cos^3 x-\cos x=\sin 2x;$

17. $3\operatorname{tg} 2x+\sin 2x=0;$

18. $\cos^3 x-\cos^2 x=0;$

19. $3(\cos x+1)=\sin^2 x;$

20. $\sin^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=1;$

21. $\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{x}+\cos\frac{\pi}{x}=0;$

22. $\sqrt{3}\sin x-\cos x=1;$

23. $\cos 3x=4\sin\frac{x}{2}+\cos x;$

24. $\sin 3x=\sin 2x+\sin x;$

25. $\sin 3x+\sin x=4\cos^3 x;$

26. $\cos 4x+2\cos^2 x=1;$

27. $\sin 5x\cdot\sin x=1;$

28. $\cos 2x\cdot\sin x=\sin 3x;$

29. $2\cos^2 8x+\sin 6x=1;$

30. $\cos^3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos x;$

31. $6\,\mathrm{tg}^2 x-2\cos^2 x=\cos 2x;$

32. $\sin 4x+\sin^2 x=\sin^2 5x;$

33. $3\cos^2 x-4\cos x-\sin^2 x=2;$

34. $2\cos 2x-1=(1-2\sin x)\sin x;$

35. $\sin 2x+\cos 2x=1+\sqrt{6}\sin x;$

36. $\sqrt{3}\sin x+4\cos x\cos 2x=\cos x;$

37. $4\sin x\cos^2 x=\sin x-\cos x;$

38. $\mathrm{tg}\,\pi x=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-3\pi x\right);$

39. $\sin^4 x - \cos^4 x = \cos x;$

40. $\sin^4 x - \cos^4 x = \cos 4x;$

41. $8\sin^4 x + 13\cos 2x = 7;$

42. $(1 + \cos 4x)\sin 2x = \cos^2 2x;$

43. $\sin^2 6x + 2\sin^2 3x = 2;$

44. $\operatorname{tg} 2x = \sin 4x;$

Найти корни уравнения на заданном промежутке (ответ привести в градусах).

45. $2\sin 10x - \sqrt{3} = 0,$ при $10° < x < 36°;$

46. $2\cos^2 x + 21\sin x = 12,$ при $0° \le x \le 90°;$

47. $2\sin^2(\pi - x) + 5\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 4,$ при $-90° < x < 0°;$

48. $\sin 2x + 3\cos x = 0,$ при $0° < x < 180°;$

49. $\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0,5,$ при $90° < x < 180°;$

50. $1 + \sin 2x = (\cos 3x + \sin 3x)^2,$ при $0° < x < 45°;$

Решить уравнения.

51. $\arccos x - \arcsin x = \frac{\pi}{6};$

52. $\frac{3}{\pi}\arcsin x + x - 1 = 0;$

53. $\operatorname{arctg}\left(x^2 - 3x + 3\right) = \frac{\pi}{16};$

54. $\arcsin\frac{x}{2}+\arccos\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$;

55. $\arccos x=\frac{3}{2}\arccos\frac{x}{2}$;

56. $3\arccos x=2\arcsin 2x$;

57. $\sin(\arcsin 2x)=6x^2-\frac{4}{3}$;

58. $\cos(\arccos 3x)=\frac{7}{32}-8x^2$;

59. $\cos x\cos\left(\sqrt{2}x\right)=1$;

60. $\cos^4 3x-\sin^2 2x=1$;

61. $\sin x\sin 2x\sin 3x=0,8$;

62. $\operatorname{tg}5x-2\operatorname{tg}3x=\operatorname{tg}5x\cdot\operatorname{tg}^2 3x$;

63. $1-\cos(\pi\ln x)=2\sin(0,5\pi\ln x)$;

64. $\operatorname{ctg}^2 x-\operatorname{tg}^2 x=16\cos^3 2x$;

65. $\sqrt{\sin 3x}+\sqrt{\cos 3x}=1$;

66. $3\cos^2 x+5\cos^2 7x=8$;

67. $\sqrt{7-4\operatorname{tg}x}=\sqrt{3}(2\operatorname{tg}x-1)$;

68. $\operatorname{tg}(\pi\sin x)=\operatorname{ctg}(\pi\cos x)$;

69. $3\sin\pi x+2\cos\pi x=5$; $1\le x\le 2$;

70. $\cos 3\pi x\cdot\operatorname{tg}5\pi x=\sin 7\pi x$, $0,9\le x\le 1,1$;

71. $\sin^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos x;$

72. $\sin(2-x)=\sin 2-\sin x;$

73. $\frac{\sqrt{1,5}}{\cos 3x}+1=\operatorname{tg} 3x;$

74. $\sqrt{1+\cos x}=\cos x+\sin x;$

75. $\sqrt{\frac{\pi}{6}-\sin x}=\sqrt{\frac{\pi}{6}+\cos x};$

76. $\cos x=\sqrt{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)};$

77. $\sqrt{\cos^2 x-\sin\frac{x}{2}}=\sin x;$

78. $\sqrt{2}\cos 2x+\left|\sqrt{3}\sin 3x\right|=0;$

79. $4x\left|\cos 3x\right|=\left(x^2+3\right)\cos x;$

80. $x^2-4x\sin(xy)+5=0;$

81. $4\cos^2 x+\sin^2 y+4\cos x-\sqrt{2}\sin y+1,5=0;$

82. $\arccos\frac{1}{x^2}=\frac{\pi}{2}\left(1-x^4\right);$

83. $\arccos x+2\operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2};$

84. $\cos 2\arcsin x=x^2+6x\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}+2;$

85. $\arcsin\left(1+\left|\sin x\right|\right)=\arccos\left(1+\cos\frac{x}{10}\right).$

1. $\sin 2x \le \frac{1}{2}$;

2. $\cos 3x > \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3. $2\,\mathrm{tg}\,2x \le 3\,\mathrm{tg}\,x$;

4. $\cos 2x + 5\sin x + 2 \ge 0$;

5. $\sqrt{\sin 2x} \ge \cos x - \sin x$;

6. $\sin x \sin 2x - \cos x \cos 2x > \sin 6x$;

7. $\cos(\sin x) > 0$;

8. $\sin(\cos x) < 0$;

9. $\sin x > \cos^2 x$;

10. $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 > 0$;

11. $\cos^3 x \cos 3x - \sin^3 x \sin 3x > \frac{5}{8}$;

12. $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > 1$;

13. $3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x < \frac{1}{2}$;

14. $3\sin 2x \le 1 + 4\sin^2 x$;

15. $\frac{2}{\sin x \cos x} > 0$;

16. $1 - 2\sin^2 x > \sin 2x$;

17. $\sin 2x \geq \cos 2x$;

18. $\sqrt{2}\sin^2 x < \cos x$;

19. $\sin\left(4x+\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(4x-\dfrac{\pi}{3}\right) \geq 0$;

20. $6\sin^2 3x - 5\cos 6x + 1 \geq 0$;

21. $\arccos x > \dfrac{\pi}{6}$;

22. $\operatorname{arctg} x \geq \dfrac{\pi}{3}$;

23. $\arcsin x < \arccos x$;

24. $\operatorname{tg}^2(\arcsin x) > 1$.

§ 6. Системы уравнений (1—15)

1. $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1, \\ x + y = \dfrac{\pi}{3}; \end{cases}$

2. $\begin{cases} \sin^2 x + \sin y = 1, \\ \cos^2 x + \cos y = 1; \end{cases}$

3. $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2, \\ \cos x \cos y = 0,5; \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4\sin x \cos y = 1, \\ 3\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y; \end{cases}$

5. $\begin{cases}\sin x \sin y = 0,75,\\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3;\end{cases}$

6. $\begin{cases}\sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{1}{2},\\ x + y = \dfrac{\pi}{4};\end{cases}$

7. $\begin{cases}\sin x + y = 5,\\ 2\sin x + 4y = 19;\end{cases}$

8. $\begin{cases}\sin^2 x - \cos y = 1,\\ \cos^2 x - \sin y = 1;\end{cases}$

9. $\begin{cases}\cos x \sin 2y = \dfrac{3}{4},\\ \sin x \cos 2y = \dfrac{1}{4};\end{cases}$

10. $\begin{cases}4\sin x \sin y = 3,\\ \cos x + \cos y = 1;\end{cases}$

11. $\begin{cases}\sqrt{2}\sin x = \sin(2x + 3y),\\ \cos y = \sqrt{2}\cos(x + 2y);\end{cases}$

12. $\begin{cases}\sqrt{1 + \sin x \sin y} = \cos x,\\ 2\sin x \operatorname{ctg} y + 1 = 0;\end{cases}$

13. $\begin{cases} \sin x - \sin y = \dfrac{1}{\sin x}, \\ \cos x - \cos y = \dfrac{1}{\cos x}; \end{cases}$

14. $\begin{cases} \sin^2 x = \sin y, \\ \cos^4 x = \cos y; \end{cases}$

15. $\begin{cases} \sqrt{2}\sin x = \sin y, \\ \sqrt{2}\cos x = \sqrt{3}\cos y. \end{cases}$

Ответы

§ 1. Уравнения

1. $x = \frac{\pi n}{3}$.

2. $x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi n}{2}$.

3. $x = \frac{\pi n}{2}$.

4. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$.

5. $x = -\frac{3\pi}{4} + 3\pi n$.

6. $x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$.

7. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$.

8. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$.

9. $x = \frac{\pi n}{2}$.

10. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

11. $105°; 315°$.

12. $90°$.

13. $60°$.

14. $30°$.

15. $x = \frac{2}{n},\ n \in Z \setminus \{0\}$.

16. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$.

17. $x = \frac{\pi n}{2}$.

18. $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n;\ x_2 = 2\pi n$.

19. $x = -\pi + 2\pi n$.

20. $x = \frac{\pi}{2}(2n+1)$.

21. $x = \frac{6}{6n-1}$.

22. $x = \frac{\pi}{6} + (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$.

23. $x = 2\pi n$.

24. $x = \pi n$.

25. $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n;\ x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n$.

26. $x_1 = \pi n + \frac{\pi}{2};\ x_2 = \frac{\pi n}{3} + \frac{\pi}{6}$.

27. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$.

28. $x = \frac{\pi n}{2}$.

29. $x_1 = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5};\ x_2 = \frac{3\pi}{44} + \frac{\pi n}{11}$.

30. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n.$

31. $x = \pm\frac{\pi n}{6} + \pi n.$

32. $x_1 = \frac{\pi n}{4};\ x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{36} + \frac{\pi n}{6}.$

33. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n.$

34. $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \ x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n.$

35. $x_1 = \pi n;\ x_2 = \pm\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n.$

36. $x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}.$

37. $x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n;\ x_2 = -\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi n}{2}.$

38. $x = \frac{1}{8}(2n+1).$

39. $x_1 = \pi + 2\pi n;\ x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n.$

40. $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}.$

41. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n.$

42. $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2};\ x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}.$

43. $x_1 = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6};\ x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}.$

44. $x_1 = \frac{\pi n}{2}$; $x_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$.
45. 12°.
46. 30°.
47. −60°.
48. 90°.
49. 30°.
50. 22,5°.
51. $x = \frac{1}{2}$.
52. $x = \frac{1}{2}$.

53. $x_1 = 1$; $x_2 = 2$.
54. $x = 0$.
55. $x = -1$.
56. $x = \frac{1}{2}$.
57. $x = -\frac{1}{3}$.
58. $x = \frac{1}{16}$.
59. $x = 0$.
60. $x = \pi n$.
61. нет корней.
62. $x = \pi n$.
63. $x_1 = e^{2k}$, $x_2 = e^{4k+1}$, $k \in Z$.
64. $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$.
65. $x_1 = \frac{2\pi n}{3}$; $x_2 = \frac{2\pi k}{3} + \frac{\pi}{6}$, $n, k \in Z$.
66. $x = \pi n$.
67. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$.

68. $x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin\frac{k+1/2}{\sqrt{2}}+\pi n,\ k\in\{0;-1\},\ n\in Z.$

69. нет корней.

70. $x_1=0,95;\ x_2=1;\ x_3=1,05.$

71. $x=\frac{\pi}{4}+\pi n.$

72. $x_1=2\pi n,\ x_2=2\pi k+2,\ n,\ k\in Z.$

73. $x=(-1)^n\frac{\pi n}{9}+\frac{\pi n}{3}+\frac{\pi}{12}.$

74. $x_1=\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ x_2=\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ k,\ n\in Z.$

75. $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n.$

76. $x=-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi k.$

77. $x_1=\pi+4\pi n;\ x_2=\frac{13\pi}{5}+4\pi n;\ x_3=\frac{\pi}{5}+4\pi n;$

$x_4=\frac{7\pi}{3}+4\pi n.$

78. $x_1=\pm\frac{5\pi}{12}+\pi n;\quad x_2=\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+\pi k;\ k,\ n\in Z.$

79. $x_1=-3;\ x_2=1;\quad x_3=\frac{\pi}{2}+\pi n.$

80. нет корней.

81. $\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ (-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k\right);$

$\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n;(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k\right)$, $n,k\in Z$.

82. $x_{1,2}=\pm 1$.

83. $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

84. $x=\sqrt{3}-\frac{2}{3}\sqrt{6}$.

85. $x=10\pi+20\pi n$.

§ 2. Неравенства

1. $\left[-\frac{7\pi}{12}+\pi n;\frac{\pi}{12}+\pi n\right], n\in Z;$

2. $\left(-\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3};\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}\right), n\in Z;$

3. $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi k;\pi k\right]\cup\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n,k\in Z;$

4. $\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{7\pi}{6}+2\pi n\right], n\in Z;$

5. $\left[\frac{\pi}{12}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right]\cup\left[-\pi+2\pi n;-\frac{7\pi}{12}+2\pi n\right], k,n\in Z;$

6. $\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3};\frac{7\pi}{18}+\frac{2\pi k}{3}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi n}{3};\frac{11\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}\right), k,n\in Z;$

7. $x\in R, k=0$.

8. $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right), n\in Z;$

9. $(2\pi k+\varphi;\pi-\varphi+2\pi k)$, где

$\varphi = \arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} (k=0,\ \ \pm 1, \pm 2, \ldots).$

10. $\left(-\dfrac{7\pi}{6}+2\pi n; \dfrac{\pi}{6}+2\pi n\right), n \in Z;$

11. $\left(-\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi n}{2}; \dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi n}{2}\right), n \in Z;$

12. $\left(2\pi n; \dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right), n \in Z;$

13. $\left(\dfrac{\pi}{18}(12n-7);\ \dfrac{\pi}{18}(12n+1)\right), n \in Z;$

14. $\left[-\dfrac{\pi}{2}+\pi k; \operatorname{arctg}\dfrac{1}{5}+\pi k\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{4}+\pi n; \dfrac{\pi}{2}+\pi n\right);\ k, n \in Z.$

15. $\left(\pi n; \dfrac{\pi}{2}+\pi n\right), n \in Z;$

16. $\left(-\dfrac{3\pi}{8}+\pi n; \dfrac{\pi}{8}+\pi n\right), n \in Z;$

17. $\left[\dfrac{\pi}{8}+\pi n;\ \dfrac{5\pi}{8}+\pi n\right], n \in Z;$

18. $\left(-\dfrac{\pi}{4}+2\pi n; \dfrac{\pi}{4}+2\pi n\right), n \in Z;$

19. $\left[-\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{\pi n}{4}; \dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{4}\right], n \in Z;$

20. $\left[\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{\pi n}{3}; \dfrac{5\pi}{18}+\dfrac{\pi n}{3}\right], n \in Z;$

21. $\left[-1;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$;

22. $\left(-\infty;\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

23. $\left[-1;\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

24. $\left(-1;-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\cup\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};1\right)$.

§ 3. Системы уравнений

1. $\left(\dfrac{\pi}{6}+2\pi n;\dfrac{\pi}{6}-2\pi n\right), n\in Z;$

2. $\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n;\ 2\pi k\right),\left(\pi n;\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right), n,k\in Z;$

3. $\left(\dfrac{\pi}{4}+\pi m;\pi(2n-m)+\dfrac{\pi}{4}\right), n,m\in Z;$

4. $\left(2\pi n+\dfrac{\pi}{6};2\pi k+\dfrac{\pi}{3}\right),\left(2\pi n+\dfrac{7\pi}{6};2\pi k+\dfrac{4\pi}{3}\right),$

$\left(2\pi n-\dfrac{\pi}{6};2\pi k+\dfrac{2\pi}{3}\right),\left(2\pi n+\dfrac{5\pi}{6};2\pi k+\dfrac{5\pi}{3}\right),\ n,k\in Z;$

5. $\left(\dfrac{\pi}{3}+\pi(n+k);\dfrac{\pi}{3}+\pi(n-k)\right),\left(-\dfrac{\pi}{3}+\pi(n+k);-\dfrac{\pi}{3}+\right.$

$\left.+\pi(n-k)\right), n,k\in Z;$

6. $\left(\pi n; \frac{\pi}{4} - \pi n\right), \left(\frac{3\pi}{4} + \pi n; -\frac{\pi}{2} - \pi n\right), n \in Z;$

7. $\left((-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n;\ 4,5\right), n \in Z;$

8. $(\pi n; (2k+1)\pi), \left(\frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), n, k \in Z;$

9. $\left(\frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \pi k - \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{8} + (-1)^n \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{2} + \frac{\pi n}{4}\right),$

$n, k \in Z;$

10. $\left(\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m\right), \quad m, n \in Z;$

11. $\left(\pm\frac{\pi}{4} + \pi k + 2\pi n; \pi k\right), \left(\pm\left(\frac{3\pi}{4} + \operatorname{arctg} 2\right) + 2\pi n + \pi k;\right.$

$\left.\mp \operatorname{arctg} 2 + \pi k\right), k, n \in Z;$

12. $\left(\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \mp\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right), k, n \in Z;$

13. $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(k+n); -\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(n-3k)\right), k, n \in Z;$

14. $(\pi n; 2\pi k), \left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k, n \in Z;$

15. $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right), \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right),$

$\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right), \left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right), n, k \in Z.$

Содержание

Серия «Библиотека школьника»

Балаян Эдуард Николаевич

Практикум по решению задач. Тригонометрические уравнения, неравенства и системы

Ответственные редакторы	*Оксана Морозова,* *Наталья Калиничева*
Технический редактор	*Галина Логвинова*
Корректор	*Елена Саркисова*
Макет обложки:	*Александр Вартанов*
Компьютерная верстка:	*Анна Алейникова*

Сдано в набор 20.09.05.
Подписано в печать 10.10.05.
Формат 84x108[1]/[32]. Бумага типографская №2.
Печать офсетная. Гарнитура School.
Тираж 5 000 экз. Заказ № 3881.

Издательство «Феникс»
344082, г. Ростов-на-Дону, пер. Халтуринский, 80.
Тел.: (863) 261-89-76, тел./факс: 261-89-50.
E-mail: morozovatext@aaanet.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в ОАО «ИПП «Курск»
305007, г. Курск, ул. Энгельса, 109.

E-mail:kursk-2005@yandex.ru
www.petit.ru

Качество печати соответствует качеству представленных диапозитивов