ION ȘCERBAȚCHI

# CURS DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

3

$f'(z)$

$f(t) \div F(p)$

Rez

CHIȘINĂU 2004

CURS DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

ION ȘCERBAȚCHI

3

Ion C. Șcerbațchi activează pe tărâmul pedagogic în instituțiile superioare de învățământ ale republicii 37 de ani, dintre care 33 de ani la Universitatea Tehnică a Moldovei.

Este absolvent al Institutului Pedagogic de Stat din Tiraspol (1963), doctor în științe fizico-matematice (1971), conferențiar al catedrei «Matematică» a Universității Tehnice a Moldovei (1978).

Autor a circa 40 de articole științifice, științifico-didactice și a 11 cursuri universitare. Remarcăm unele din ele: «Analyse numérique», OPU, Alger, 1988; «Éléments de la géométrie analytique et d'algèbre supérieure», U.T.M., Chișinău, 1992; «Culegere de probleme de analiză matematică», EUS, Chișinău, 1996; «Introduction a l'analyse mathématique», U.T.M., Chișinău, 1997; «Analiză matematică (probleme)» v. 1 și 2, «Tehnica», Chișinău, 1998; «Curs de analiză matematică» v. 1, U.T.M., Chișinău, 2000; «Curs de analiză matematică» v. 2, U.T.M., Chișinău, 2002.

A activat mai mulți ani în străinătate: a ținut prelegeri la Institutul Național de Industrie Ușoară din Bumerdes (1974-1978) și la Universitatea din Sidi Bel Abbes (1985-1988) ale Republicii Algeria.

$f'(z)$

$f(t) \div F(p)$

R

CZU 517(075.8)
Ş 32

*Ion Şcerbaţchi* „Curs de analiză matematică", vol. 3; manual pentru studenţii instituţiilor de învăţământ superior cu profil tehnic, economic şi agrar. Editura „Amprenta – foil", Chişinău, 2004, p. 440.

**Recenzenţi:** *Ion Pancenco*, doctor, conferenţiar la catedra „Analiză matematică şi algebră superioară" a Universităţii de Stat din Tiraspol (cu sediul la Chişinău);
*Ion Goriuc*, doctor, conferenţiar la catedra „Matematică" a Universităţii Tehnice a Moldovei.

**Referent ştiinţific:** *Ion Valuţă*, prof. univ. la catedra „Matematică" a Universităţii Tehnice a Moldovei.

Aprobată la consiliul facultăţii de radioelectronică şi telecomunicaţii a U.T.M., proces-verbal nr. 1 din 28 septembrie 2004.

Paginare computerizată: *Svetlana Cersac*
Copertă: *Veaceslav Popovschi*

ISBN 9975-9822-2-0





*Tineretului studios*
*al Moldovei*

# PREFAŢĂ

Acest volum împreună cu cele două volume „Curs de analiză matematică", v. 1, şi 2 ([17], [18]) ale autorului finisează seria de lucrări ce reflectă conţinutul modulelor „Analiză matematică" 1, 2 şi 3 din cursul disciplinei „Matematică superioară" pentru studenţii instituţiilor de învăţământ superior cu profil tehnic, economic şi agrar.

Lucrarea conţine 2 capitole. În capitolul 9 sunt expuse elemente din teoria funcţiei complexe de o variabilă complexă: limita şi continuitatea funcţiei complexe; derivarea şi integrarea funcţiilor complexe; serii numerice complexe, serii de funcţii complexe, serii de puteri, serii Taylor şi Laurent; clasificarea punctelor singulare ale funcţiilor complexe; reziduul funcţiei, calcularea şi aplicarea lui.

În capitolul 10 sunt expuse elemente din calculul operaţional: funcţia original şi proprietăţile ei; funcţia imagine şi proprietăţile ei; teoremele de bază ale calculului operaţional şi aplicaţiile lui.

Lucrarea de asemenea conţine o gamă variată de exerciţii, care facilitează pătrunderea în esenţă a noţiunilor de bază expuse în aceste capitole. La sfârşitul fiecărui paragraf sunt propuse spre rezolvare un şir de exerciţii cu răspunsurile şi indicaţiile respective. Lucrarea conţine două anexe. În anexa 1 sunt incluse formulele de bază ale calculului operaţional, demonstrate în capitolul respectiv. În anexa 2 sunt incluse un şir de lucrări de control, care conţin câte 30 variante şi rezumează compartimentele de bază ale modulelor „Analiză matematică" 2 şi 3. Aceste lucrări pot servi ca lucrări de verificare atât pentru studenţii secţiei de zi, cât şi pentru studenţii secţiei fără frecvenţă.

Pentru o asimilare mai bună a matertialului din capitolele expuse aici, este indispensabil de a utiliza în paralel lucrarea autorului „Analiză matematică (probleme)", v. 2 [20]).

În încheiere ţin să aduc sincere mulţumiri recenzenţilor: conf., dr. Ion Pancenco şi conf., dr. Ion Goriuc cât şi referentului ştiinţific prof. Ion Valuţă pentru un şir de observaţii şi sugestii preţioase, care au contribuit la îmbunătăţirea acestei lucrări.

Sunt profund recunoscător colegilor mei de la categra „Matematică" a U.T.M., în cadrul căreia activez 33 de ani în special conf., dr. Vladimir Drăgan (şef catedră) şi conf., dr. Gh. Nojac, Ion Goriuc, D. Proca cât şi neobositului meu profesor Ion Valuţă pentru susţinerea frecventă întru apariţia lucrărilor mele.

Mulţumesc mult: Rectoratului U.T.M.; decanilor celor 10 facultăţi ale U.T.M.; foştilor mei studenţi: conf., dr. Sergiu Andronic (decanul FRT) şi directorul editurii „Amprenta – foil" Vasile Mileţchi, pentru ajutorul acordat în vederea publicării lucrărilor mele; studenţilor mei, pentru idei preţioase şi rezolvări originale, cât şi Doamnei Svetlana Cersac, care cu sârguinţă a imprimat filă cu filă această lucrare.

*Autorul*



# *Capitolul 9*
# *Teoria funcţiei complexe de o variabilă complexă*

## 9.1. Numere complexe.
### 9.1.1. Noţiune de număr complex. Forma algebrică a numărului complex.

Dacă ne-am mărgini la numerele reale, atunci, după cum se ştie, operaţia de extragere a rădăcinii nu s-ar putea efectua întotdeauna: în cadrul numerelor reale, rădăcina de ordin par a unui număr negativ nu are sens. De aceea, chiar ecuaţia de gradul doi cu coeficienţi reali nu are întotdeauna rădăcini reale. Această împrejurare conduce în mod firesc la extinderea noţiunii de număr, la introducerea unor numere noi de o natură mai generală şi care cuprind numerele reale ca un caz particular. În legătură cu aceasta, este important să definim aceste numere şi operaţiile cu ele în aşa fel încât pentru noile numere să rămână în vigoare legile de bază ale operaţiilor cunoscute pentru numerele reale.

Ştim că fiecare număr real este identificat cu un segment pe axa numerică sau cu un punct de pe această axă, dacă se convine să se aşeze originea segmentului în originea axei numerice, iar direcţia segmentului coincide cu direcţia axei, dacă numărul real este pozitiv şi direcţia segmentului este opusă celeia a axei, dacă numărul real este negativ.

Dacă acum, în loc de a considera o axă numerică, vom considera întregul plan, raportat la axele de coordonate $OX$, $OY$, generalizând în mod convenabil noţiunea de număr, vom obţine posibilitatea de a identifica mulţimea vectorilor, originea cărora coincide cu originea sistemului de coordonate format de axele $OX$ şi $OY$, sau mulţimea punctelor acestui plan cu mulţimea numerelor noi, pe care le vom numi *numere complexe*.

**Definiţie**. Vom numi *numere complexe* perechile ordonate de numere reale *x, y*, pe care le vom nota provizoriu *(x,y)*, perechi supuse următoarelor relaţii:

$A_1$ (egalitatea a două numere complexe)

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ şi } y_1 = y_2;$$

$A_2$ (unitatea reală obişnuită şi unitatea imaginară)

$$(1,0) = 1, (0,1) = i;$$

$A_3$(înmulţirea numărului complex cu un scalar (număr real))

$$k(x, y) = (x, y)k = (kx, ky), k \in R;$$

$A_4$ (adunarea numerelor complexe)

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2);$$

$A_5$ (înmulţirea numerelor complexe)

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Din $A_2$ şi $A_3$ rezultă $(k,0) = k(1,0) = k \cdot 1 = k$ şi $(0,k) = k(0,1) = k \cdot i$. Deci $(0,0) = 0$ şi, ţinând cont de $A_1$ urmează că $(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.

Din $A_2$,$A_3$ şi $A_4$ rezultă că orice număr complex $z= (x,y)$ se scrie sub forma $z = (x, y) = (x,0) + (0, y) = x \cdot 1 + y \cdot i = x + iy$, care se numeşte *formă algebrică a numărului complex*. În cazul acesta numărul real *x* se numeşte *partea reală* a numărului complex *z* şi se notează astfel: *Rez=x* (de la cuvântul latin r e a l i s, ce înseamnă *real*), iar numărul real *y* se numeşte *partea imaginară* a numărului complex *z* şi se notează *Imz=y* (de la cuvântul latin *imaginarius* ce înseamnă *imaginar*).

Dacă *y=0*, atunci numărul complex are forma *z=x+i*0. Îl vom scrie pe scurt *z=x* şi-l vom numi n u m ă r  r e a l. Dacă *y=0* şi *x=1*, obţinem numărul real $z = 1 + i \cdot 0 = 1$, care se numeşte *unitate reală*. Dacă *x=0* şi *y=0*, numărul complex *z=0+i0* se scrie pe scurt sub forma *z=0* şi se numeşte *zero*. Dacă *x=0* şi *y≠0*, atunci numărul complex *z=0+iy* sau, pe scurt, *z=iy* se numeşte *pur imaginar*. În particular, dacă *x*=0 şi *y*=1, obţinem numărul complex $0 + i \cdot 1 = i$, care se numeşte *unitate imaginară*. Orice număr *z=x+iy*, unde *y≠0* se numeşte *număr imaginar* sau *complex*.



Numerele complexe *x+iy* şi *x-iy* se numesc *numere complexe conjugate*. Dacă *z=x+iy*, atunci numărul conjugat *x-iy* se notează cu $\bar{z}$.

*Uşor se constată că:*

a) dintre toate numerele complexe, numerele reale (şi numai ele) sunt egale cu numerele complexe conjugate lor;

b) suma şi produsul a două numere complexe conjugate sunt numere reale: $z + \bar{z} = 2x$ şi $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$.

Numărul $\sqrt{x^2 + y^2}$ se numeşte *modulul* numărului complex *z=x+iy* şi se notează $|z|$.

Adunarea a două numere complexe este comutativă şi asociativă, deoarece proprietăţile respective pentru numerele reale sunt valabile. Evident că numărul zero *(z=0)* este un element neutru pentru operaţia de adunare, deoarece pentru orice număr complex $a + ib$, avem

$$(a + ib) + (0 + i0) = (a + 0) + i(b + 0) = a + ib.$$

De asemenea orice număr complex *a+ib* are opusul lui egal cu *(-a)+i(-b)*. Într-adevăr, din relaţia $(a + ib) + (x + iy) = 0 + i \cdot 0$ rezultă că

$$(a + x) + i(b + y) = 0 + i \cdot 0, \text{ adică } a + x = 0 \text{ şi } b + y = 0.$$

Deci *x=-a, y=-b* şi numărul complex *opus* numărului *(a+ib)* are forma *(-a)+i(-b)*.

O consecinţă a acestui fapt este că ecuaţia de forma *(a+ib)+(x+iy)=c+id* are o singură soluţie şi anume *x=c-a, y=d-b*. Numărul complex obţinut *(x+iy)= (c-a)+i(d-b)* se numeşte *diferenţa* dintre numerele complexe *(c+id) şi (a+ib)* şi se notează astfel *(c+id)-(a+ib)=(c-a)+i(d-b)*.

Aşadar, *a aduna (a scădea) două numere complexe în formă algebrică înseamnă a aduna ( a scădea) părţile lor reale şi părţile lor imaginare.*

Din $A_1$,$A_2$, $A_3$ şi $A_5$ rezultă:

$(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=(-1)\cdot(1,0)=-1$, adică $i^2=-1$.

Din $A_5$ rezultă că produsul $z_1\cdot z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)$ poate fi efectuat conform regulilor obişnuite ale algebrei şi, având în vedere că $i^2=-1$, obţinem:

$$(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).$$

Se observă că mulţimea numerelor complexe este închisă în raport cu operaţiile de adunare şi de înmulţire. Înmulţirea numerelor complexe este comutativă, asociativă şi distributivă în raport cu adunarea, deoarece proprietăţile respective pentru numerele reale sunt valabile.

Numărul complex $(1+i\cdot 0)=(1,0)=1$, adică unitatea reală şi în mulţimea numerelor complexe serveşte ca element neutru pentru operaţia înmulţiri, deoarece

$$(x+iy)\cdot 1=1\cdot(x+iy)=(x\cdot 1+iy\cdot 1)=x+iy.$$

Arătăm că orice număr complex $z=a+ib\neq 0+i\cdot 0$, adică $a^2+b^2\neq 0$ are un singur număr invers lui. Aceasta înseamnă că există numărul $(x+iy)$, care verifică ecuaţia $(x+iy)\cdot(a+ib)=1+i\cdot 0$.

Într-adevăr, în baza relaţiilor $A_1$ şi $A_5$, această ecuaţie conduce la sistemul $xa-yb=1$ şi $xb+ya=0$, care are soluţia unică

$$x=\frac{a}{a^2+b^2} \text{ şi } y=\frac{-b}{a^2+b^2}.$$

Prin urmare, numărul complex $z^{-1}$, invers numărului complex $z=a+ib\neq 0+i\cdot 0$, are forma

$$z^{-1}=\frac{1}{a^2+b^2}(a-ib)=\frac{(a-ib)(a+bi)}{(a^2+b^2)(a+bi)}=\frac{1}{z}.$$



Împărţirea numerelor complexe este operaţia inversă a înmulţirii:

*a împărţi numărul complex $z_1=x_1+iy_1$ la numărul complex $z_2=x_2+iy_2\neq 0$ înseamnă a afla numărul complex $z_3=x_3+iy_3$ astfel încât $z_1=z_2\cdot z_3$.*

Se notează $z_3=\frac{z_1}{z_2}$ şi $z_3$ se numeşte *câtul de la împărţirea numărului $z_1$ la numărul $z_2\neq 0$.*

Aşadar, *a împărţi numărul $z_1$ la numărul $z_2\neq 0$ înseamnă a înmulţi numărul $z_1$ cu numărul invers numărului $z_2$*, deoarece

$$z_3=\frac{z_1}{z_2}=z_1\cdot\frac{1}{z_2}=z_1\cdot z_2^{-1}.$$

Împărţirea la zero nu este definită, se spune că nu are sens.

Constatăm că din echivalenţele

$$z_3=\frac{z_1}{z_2}\Leftrightarrow z_1=z_2\cdot z_3\Leftrightarrow z_1\cdot z=(z_2\cdot z)\cdot z_3, z\neq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_3=\frac{z_1\cdot z}{z_2\cdot z}, z\neq 0$$

rezultă că $\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot z}{z_2\cdot z}$ pentru orice $z\neq 0$.

Observăm că:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{x_2^2+y_2^2}=$$

$$=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}=$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2},$$

dacă $x_2^2 + y_2^2 \neq 0$, adică $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$.

Prin urmare, împărțirea a două numere complexe poate fi efectuată înmulțind numărătorul și numitorul fracției $\frac{z_1}{z_2}$, $z_2 \neq 0$ cu numărul complex conjugat numitorului, adică

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2},$$

deoarece

$$z_2 \cdot \left( \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2} \right) = z_2 \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = z_1 .$$

Remarcăm următoarele proprietăți cu numere complexe conjugate:

1. $|\overline{z}| = |z|$;
2. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;
3. $\overline{\overline{z}} = z$;
4. $\overline{(z_1 \pm z_2)} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$;
5. $\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;
6. $\overline{\left( \frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, z_2 \neq 0$.

Proprietățile 1, 2, și 3 sunt evidente. Propunem cititorului demonstrația celorlalte proprietăți.

Ridicarea numărului complex $z = x + iy$ la o putere naturală $n$ se definește ca un caz particular al înmulțirii numerelor complexe: $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{de\ n\ ori}$.



Astfel, în baza egalității $i^2 = -1$, obținem

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i, \; i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

și, în general,

$$i^{4n} = i^{2 \cdot 2n} = \left(i^2\right)^{2n} = (-1)^{2n} = 1, \; i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i^1 = i^1 = i,$$

$$i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = i^2 = -1, \; i^{4n+3} = i^{4n} \cdot i^3 = i^3 = -i,$$

pentru orice $n \in N$.

**Notă**. Dacă cu câteva numere complexe se efectuează un șir de operații aritmetice (adunarea, scăderea, înmulțirea, împărțirea și ridicarea la o putere naturală) și se obține ca rezultat un număr oarecare $A+iB$, atunci, efectuând aceleași operații cu numere complexe conjugate celor date, se va obține numărul $A\text{-}iB$, conjugat cu numărul complex $A+iB$.

**Exemplul 1.** Să se efectueze operațiile

$$\text{a) } \frac{1+i}{1-i} + 2 \cdot i^{29}; \qquad \text{b) } \frac{a+bi}{b-ai} - i\frac{b-ai}{a+bi}.$$

**Rezolvare.**

$$\text{a) } \frac{1+i}{1-i} + 2 \cdot i^{29} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} + 2 \cdot i^{4 \cdot 7} \cdot i = \frac{1+2i+i^2}{1+1} +$$

$$+ 2 \cdot 1 \cdot i = \frac{2i}{2} + 2i = 3i;$$

$$\text{b) } \frac{a+bi}{b-ai} - i\frac{b-ai}{a+bi} = \frac{(a+bi)(b+ai)}{(b-ai)(b+ai)} - \frac{a+bi}{a+bi} =$$

$$= \frac{ab + a^2 i + b^2 i - ab}{a^2 + b^2} - 1 = i - 1.$$

## 9.1.2. Forma trigonometrică şi forma exponenţială a numărului complex.

Numărul complex $z = x + iy$ se reprezintă geometric printr-un punct *M* cu coordonatele *x, y* în planul *XOY* sau prin raza vector $\overrightarrow{OM}$ (vezi fig. 1.). Planul care serveşte pentru reprezentarea geometrică a numerelor complexe se numeşte *plan complex* şi se notează cu *C*. Întrucât fiecare număr complex $z = x + iy$ este determinat de partea sa reală *x* şi partea sa imaginară *y* în mod unic, între numerele complexe şi punctele planului complex există o corespondenţă biunivocă sau o bijecţie.

Dacă $z_1 = x_1 + iy_1$ este un număr real, adică $y_1 = 0$ şi $z_1 = x_1$, atunci punctul care îi corespunde este situat pe axa absciselor *OX*. De aceea, axa absciselor se numeşte *axă reală*. Dacă numărul complex $z_2 = x_2 + iy_2$, este un număr pur imaginar, adică $x_2 = 0$ şi $z_2 = iy_2$, atunci punctul care-i corespunde este situat pe axa ordonatelor OY. De aceea, axa ordonatelor este numită *axă imaginară*. Punctul *M(x,y)* se numeşte imaginea numărului complex *z = x + y*, iar numărul complex *z = x + y* se numeşte afixul punctului *M(x,y)*.

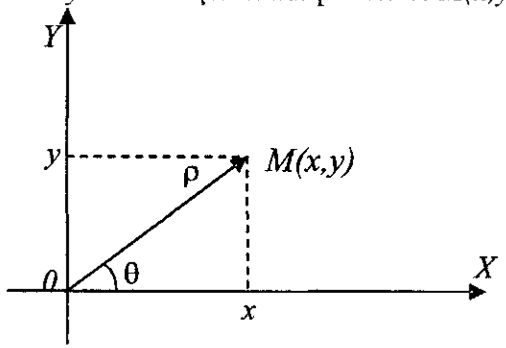



**Fig. 1.**



Alegem pe planul complex *XOY* un sistem de coordonate polare în aşa fel ca polul să coincidă cu originea sistemului cartezian rectangular de coordonate *XOY*, iar axa polară să fie orientată după sensul pozitiv al axei reale. Notăm raza polară a punctului $z = x + iy \neq 0$ prin $\rho$, iar unghiul polar prin $\theta$. Distanţa polară a punctului *z* se numeşte *modulul* acestui număr şi se notează cu $|z|$, iar unghiul polar $\theta$ se numeşte *argumentul* numărului complex *z* şi se notează cu *argz*, dacă se ia valoarea principală a unghiului $(-\pi < \arg z \leq \pi)$ şi cu *Arg z*, dacă se ia valoarea generală a unghiului. Aşadar, $\rho = |z|, Argz = \arg z + 2\pi k, k \in Z$ şi $-\pi < \arg z \leq \pi$. În acest caz *arg z* se numeşte *valoarea principală* a argumentului numărului *z*.

Deoarece legătura dintre sistemul cartezian rectangular de coordonate *XOY* şi sistemul polar de coordonate $\rho 0 \theta$ se exprimă cu ajutorul formulelor $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta$, avem $z = x + iy = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Expresia $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ se numeşte *formă trigonometrică* a numărului complex *z*.

Un rol deosebit în efectuarea operaţiilor cu numere complexe joacă formula lui Euler (a se consulta 9.3.3.), care stabileşte legătura dintre funcţia exponenţială $e^{ix}$, $x \in R$ şi funcţiile trigonometrice reale sin*x*, cos*x*:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x.$$

Evident că

$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x.$$

Despre alte proprietăţi ale funcţiei $e^{ix}$ a se consulta 9.3.3.

Deci cu ajutorul formulei Euler orice număr complex *z* poate fi reprezentat sub o nouă formă:

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho \cdot e^{i\theta},$$

care se numeşte *formă exponenţială* a numărului complex *z*.

Modulul numărului complex $z$ şi argumentul lui $\theta$ se exprimă prin partea lui reală $\operatorname{Re} z = x$ şi prin partea lui imaginară $\operatorname{Im} z = y$ în modul următor:

$$|z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ şi } \arg z = \theta = arctg\frac{y}{x} + m\pi, \qquad (1)$$

unde: $m = 0$, dacă $\theta$ aparţine cadranelor unu şi patru;
$m = 1$, dacă $\theta$ aparţine cadranului doi;
$m = -1$, dacă $\theta$ aparţine cadranului trei.

Constatăm că dacă

$$z \in D = C \setminus \{z \in C;\ \operatorname{Re} z \le 0,\ \operatorname{Im} z = 0\},$$

atunci, având în vedere că

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{\rho\sin\theta}{\rho + \rho\cos\theta} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x},$$

obţinem următoarea formulă

$$\arg z = \theta = 2\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}. \qquad (2)$$

Dacă $x = 0$, atunci pentru $y \ne 0$, $\arg z = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} y$, adică $\arg z = +\frac{\pi}{2}$, dacă $y > 0$ şi $\arg z = -\frac{\pi}{2}$ dacă $y < 0$. Dacă însă $y = 0$, atunci $\arg z = 0$ pentru $x > 0$ şi $\arg z = \pi$ pentru $x < 0$.

Evident că $|z|$ şi $\arg z$ sunt determinaţi unic de numărul complex $z \ne 0$, iar $Argz$ este determinat de numărul complex $z \ne 0$ cu exactitate de $2\pi k$, $k \in Z$, deoarece fiecare vector $\overrightarrow{OM}$ (vezi fig. 1) va coincide cu sine însuşi dacă-l rotim cu orice număr de rotaţii complete într-o direcţie sau alta în jurul originii sistemului de coordonate.

Modulul numărului $z = 0$ este egal cu zero: $|0| = 0$. Argumentul acestui număr este nedeterminat. Drept argument al



numărului $z = 0$ poate fi acceptat orice unghi $\theta$, deoarece are loc egalitatea $0 = 0(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\theta \in \left]-\pi, \pi\right]$.

Dacă $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ şi $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, atunci

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| \text{ şi } \arg\ z_1 = \arg z_2 + 2\pi k,\quad k \in Z.$$

Evident că $\arg z = -\arg\bar{z}$, unde $z = x + iy$, iar $\bar{z} = x - iy$. Deci, dacă $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, atunci

$$\bar{z} = |\bar{z}|(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = |z|(\cos\theta - i\sin\theta).$$

De asemenea

$$z_1^{-1} = \frac{1}{z_1} = \frac{\bar{z}_1}{z_1\bar{z}_1} = \frac{\bar{z}_1}{|z_1|^2} = \frac{|z_1|(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1)}{|z_1|^2} =$$

$$= \frac{1}{|z_1|}(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1).$$

Fie $z_1 = x_1 + iy_1$ şi $z_2 = x_2 + iy_2$ două numere complexe în planul complex $XOY$. Ducând razele vectoare $\overrightarrow{OM_1}$ şi $\overrightarrow{OM_2}$ ale punctelor $M_1(x_1, y_1)$ (vezi fig. 2.) şi $M_2(x_2, y_2)$, obţinem doi vectori $\overrightarrow{OM_1}$ şi $\overrightarrow{OM_2}$, care corespund numerelor complexe $z_1$ şi $z_2$. La adunarea numerelor complexe în forma algebrică se adună aparte părţile lor reale şi părţile lor imaginare, iar la compunerea vectorilor se adună coordonatele lor respective. Acest rezultat ne permite să reprezentăm adunarea numerelor complexe prin compunerea unor vectori.

Astfel, diagonala $OM_3$ a paralelogramului construit pe vectorii $\overrightarrow{OM_1}$ şi $\overrightarrow{OM_2}$ orientată din 0 în $M_3$, adică vectorul $\overrightarrow{OM_3}$, reprezintă numărul complex $z_3 = z_1 + z_2$, iar cealaltă diagonală $M_2M_1$ a acestui paralelogram orientată din $M_2$ în

$M_1$, adică vectorul $\overrightarrow{M_2M_1}$, reprezintă numărul complex $z_4 = z_1 - z_2$.

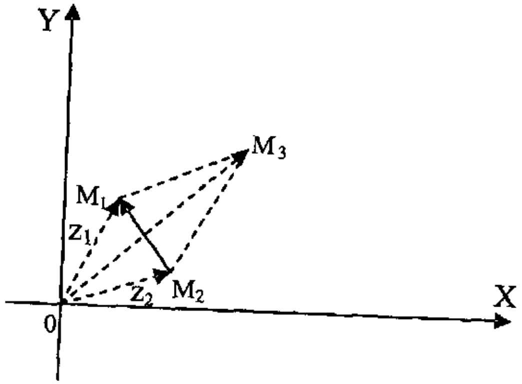



**Fig. 2.**

Considerăm următoarele operaţii cu numere complexe în formă trigonometrică.

### 1. Înmulţirea numerelor complexe.

Fie $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = |z_1|\cdot e^{i\theta_1}$ şi

$$z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = |z_2|\cdot e^{i\theta_2},$$

atunci

$$z_1\cdot z_2 = |z_1|\cdot|z_2|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) =$$
$$= |z_1|\cdot|z_2|[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) +$$
$$+ i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)] =$$
$$= |z_1|\cdot|z_2|[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)] =$$
$$= |z_1|\cdot|z_2|\cdot e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

Aşadar, *produsul a două numere complexe în formă trigonometrică este un număr complex modulul căruia este egal cu produsul modulelor factorilor, iar argumentul lui este egal cu suma argumentelor acestor factori.*



*Caz particular:*

a) $z_1\cdot\overline{z_1} = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot|\overline{z_1}|[\cos(-\theta_1) + i\sin(-\theta_1)] =$

$$= |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot|\overline{z_1}|(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1) =$$
$$= |z_1|^2(\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1) = |z_1|^2 = |\overline{z_1}|^2;$$

b) $z_1^2 = z_1\cdot z_1 = |z_1|^2(\cos 2\theta_1 + i\sin 2\theta_1)$.

### 2. Împărţirea numerelor complexe.

Fie $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = |z_1|\cdot e^{i\theta_1}$ şi

$$z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = |z_2|\cdot e^{i\theta_2},\quad z_2 \neq 0,$$

atunci

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{z_2\cdot\overline{z_2}} = \frac{|z_1|\cdot|\overline{z_2}|[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]}{|z_2|^2} =$$
$$= \left|\frac{z_1}{z_2}\right|[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)] = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|\cdot e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

Aşadar, *la împărţirea a două numere complexe modulele se împart, iar argumentele se scad.*

### 3. Ridicarea la o putere naturală.

Deoarece ridicarea la o putere naturală $n(n\in N)$ a unui număr complex $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ se defineşte ca înmulţirea de $n$ ori a lui $z$ cu el însuşi, obţinem $z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta), n\in N$ adică, *pentru a ridica un* *număr complex la o putere naturală, modulul său trebuie ridicat la această putere, iar argumentul lui trebuie de înmulțit cu exponentul.*

Dacă $|z| = 1$, rezultă formula

$$z^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, n \in N,$$

care se numeşte *formula Moivre* ((1667-1754) - matematician englez).

Dacă $n = 3$, atunci formula Moivre are forma

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

sau

$$\cos^3\theta + i\cdot 3\cos^2\theta\cdot\sin\theta - 3\cos\theta\cdot\sin^2\theta - i\sin^3\theta$$
$$= \cos 3\theta + i\sin 3\theta.$$

De unde, folosind condiția de egalitate a două numere complexe în formă algebrică, obținem

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta,$$

$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta,$$

formule bine cunoscute în trigonometrie.

În mod similar, utilizând binomul lui Newton, se obțin formule şi pentru sin($nx$), cos($nx$).

**Exemplul 2.** Să se calculeze $z^{158} + z^{152} + \frac{2}{z^{122}}$, dacă $z + \frac{1}{z} = 1$.

**Rezolvare.**

Din condiția $z + \frac{1}{z} = 1$, obținem $z^2 - z + 1 = 0$, adică $z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$.



Prin urmare

$$z^{158} + z^{152} + 2\cdot z^{-122} = \left[\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\cdot 158\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\cdot 158\right)\right] +$$

$$+\left[\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\cdot 152\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\cdot 152\right)\right] +$$

$$+2\left[\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}(-122)\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\cdot(-122)\right)\right] =$$

$$= \cos\left[\pm\left(52\pi + \frac{2}{3}\pi\right)\right] +$$

$$+ i\sin\left[\pm\left(52\pi + \frac{2}{3}\pi\right)\right] + \cos\left[\pm\left(50\pi + \frac{2}{3}\pi\right)\right] +$$

$$+ i\sin\left[\pm\left(50\pi + \frac{2}{3}\pi\right)\right] +$$

$$+ 2\cos\left[\mp\left(40\pi + \frac{2}{3}\pi\right)\right] + 2i\sin\left[\mp\left(40\pi + \frac{2}{3}\pi\right)\right] =$$

$$= \cos\left(\pm\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\pm\frac{2}{3}\pi\right) + \cos\left(\pm\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right) +$$

$$+ 2\cos\left(\mp\frac{2\pi}{3}\right) + 2i\sin\left(\mp\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= 2\cos\frac{2\pi}{3} + 2\cos\frac{2\pi}{3} \pm 2i\sin\frac{2}{3}\pi \mp 2i\sin\frac{2\pi}{3} =$$

$$= 4\cos\frac{2\pi}{3} = 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -2.$$

### 4. Extragerea rădăcinii.

Se numeşte *rădăcină de ordinul n* $(n = 2,3,4....)$a unui număr complex $w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta)$ astfel de numere complexe $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ , care fiind ridicate la puterea $n$ , coincid cu numărul dat $w$ şi se notează $z = \sqrt[n]{w}$ .

Aşadar, din această definiţie şi formula lui Moivre, rezultă că egalitatea

$$\sqrt[n]{|w|(\cos\theta + i\sin\theta)} = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

este echivalentă cu egalitatea

$$|z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = |w|(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Dar, dacă două numere complexe sunt egale, modulele lor sunt egale, iar argumentele lor diferă printr-un multiplu de $2\pi$. Prin urmare, $|z|^n = |w|$ şi $n\varphi = \theta + 2\pi k, k \in Z$ . Deci $|z| = \sqrt[n]{|w|}$ şi $\varphi = \dfrac{\theta + 2\pi k}{n}$ , unde $\sqrt[n]{|w|}$ este valoarea aritmetică a rădăcinii, iar $k \in Z$.

Astfel, am demonstrat formula

$$\sqrt[n]{|w|(\cos\theta + i\sin\theta)} = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi\kappa}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi\kappa}{n}\right), \quad (3)$$

adică *pentru extragerea rădăcinii dintr-un număr complex w trebuie de extras rădăcina din modulul acestui număr, iar argumentul lui Arg w trebuie de împărţit la indicele rădăcinii.*

În formula de mai sus, numărul $k$ poate lua orice valori întregi, însă vom demonstra că nu există decât $n$ valori distincte ale rădăcinii şi că ele corespund valorilor

$$k = 0,1,2,...,n-1. \quad (4)$$



Într-adevăr, să observăm mai întâi că rezultatele din formula (3) vor fi diferite pentru două valori $\kappa_1$ şi $\kappa_2$ atunci când diferenţa argumentelor $\dfrac{\theta + 2\pi\kappa_1}{n}$ şi $\dfrac{\theta + 2\pi\kappa_2}{n}$ nu este multiplu cu $2\pi$ şi că aceste rezultate vor fi identice, dacă aceste argumente diferă printr-un multiplu de $2\pi$. Însă diferenţa $\kappa_1 - \kappa_2$ a două numere din şirul (4) este în valoare absolută mai mică decât $n$ şi deci diferenţa $\dfrac{\theta + 2\pi\kappa_1}{n} - \dfrac{\theta + 2\pi\kappa_2}{n} = \dfrac{\kappa_1 - \kappa_2}{n} \cdot 2\pi$ nu poate fi multiplă cu $2\pi$. Prin urmare, celor $n$ valori ale lui $k$ din şirul (4) le corespund $n$ valori distincte ale rădăcinii.

Fie acum $\kappa_2$ un număr întreg, care nu face parte din şirul (4). Împărţindu-l cu $n$, putem să-l scriem sub forma $\kappa_2 = qn + k_1$ , unde $q$ este un număr întreg, iar $k_1$ - un număr din şirul (4). Deci $\dfrac{\theta + 2\pi k_2}{n} = \dfrac{\theta + 2\pi qn + 2\pi k_1}{n} = = \dfrac{\theta + 2\pi k_1}{n} + 2\pi q$, adică valorii $k_2$ îi corespunde aceeaşi valoare a rădăcinii ca şi pentru valoarea $k_1$ cuprinsă în şirul (4). Aşadar, r ă d ă c i n a d e o r d i n u l $n$ a u n u i n u m ă r c o m p l e x a r e $n$ v a l o r i d i s t i n c t e. Singura excepţie a acestei reguli este numărul zero, adică când $w = 0$. În acest caz toate valorile rădăcinii sunt nule.

*Cazuri particulare.*

1) Dacă $w = A$ este un număr real pozitiv, adică $w = A(\cos 0 + i\sin 0)$, atunci formula (3) are forma

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{A}\left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right), k = 0,1,2,...,n-1 .$$

Expresia $\left(\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}\right)$, $k=0,1,2,\ldots,n-1$ exprimă toate valorile rădăcinii de ordinul $n$ din 1.

De exemplu:

a) $\sqrt[3]{1}=\cos\frac{2\pi k}{3}+i\sin\frac{2\pi k}{3}$, $k=0,1,2$,

are trei valori distincte:

$$z_0=\cos 0+i\sin 0=1;$$

$$z_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$z_2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Uşor se verifică că $z_0^{\ 3}=z_1^{\ 3}=z_2^{\ 3}=1$.

b) $\sqrt[4]{1}=\cos\frac{2\pi k}{4}+i\cdot\sin\frac{2\pi k}{4}=\cos\frac{\pi k}{2}+i\cdot\sin\frac{\pi k}{2}$,

$k=0,1,2,3$

are patru valori distincte:

$$z_0=\cos 0+i\sin 0=1;$$

$$z_1=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i;$$

$$z_2=\cos\pi+i\sin\pi=-1;$$

$$z_3=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i.$$

Evident că $z_0^{\ 4}=z_1^{\ 4}=z_2^{\ 4}=z_3^{\ 4}=1$.

2) Dacă $w=A$ este un număr real negativ, adică $w=A(\cos\pi+i\sin\pi)$, atunci formula (3) are forma

$$\sqrt[n]{w}=\sqrt[n]{|A|}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{n}\right),\ k=0,1,2,\ldots,n-1.$$



Expresia din paranteze exprimă toate valorile rădăcinii de ordinul $n$ din $(-1)$.

**Exemplul 3.** Să se rezolve ecuaţia

$$(x+i)^n+(x-i)^n=0,\ \text{unde } x\in R \text{ şi } n\in N.$$

**Rezolvare.**

Avem $\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^n+1=0$ sau $\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^n=-1$, adică

$$\frac{x+i}{x-i}=\sqrt[n]{-1}=\sqrt[n]{1(\cos\pi+i\sin\pi)}=\cos\frac{\pi+2\pi k}{n}+$$

$$+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{n},\ k=0,1,2,\ldots,n-1.$$

Transformăm ultima relaţie astfel:

$$\frac{x+i}{x-i}-1+1=\cos\frac{2k+1}{n}\pi+i\sin\frac{2k+1}{n}\cdot\pi \ \text{ sau}$$

$$\frac{x+i-x+i}{x-i}=-1+\cos\frac{2k+1}{n}\cdot\pi+i\sin\left(2\cdot\frac{2k+1}{2n}\pi\right).$$

Deci

$$\frac{2i}{x-i}=-2\sin^2\frac{2k+1}{2n}\cdot\pi+2i\sin\frac{2k+1}{2n}\pi\cdot\cos\frac{2k+1}{2n}\pi$$

sau

$$\frac{2i}{x-i}=2i\sin\frac{2k+1}{2n}\pi\left(\cos\frac{2k+1}{2n}\pi+i\sin\frac{2k+1}{2n}\pi\right).$$

Prin urmare,

$$\frac{1}{x-i}=\left[\sin\frac{2k+1}{2n}\pi\right]\left(\cos\frac{2k+1}{2n}\pi+i\sin\frac{2k+1}{2n}\pi\right)=$$

$$=\left[\sin\frac{2k+1}{2n}\pi\right]\frac{1}{\cos\frac{2k+1}{2n}\pi-i\sin\frac{2k+1}{2n}\pi}.$$

De unde

$$x-i=\frac{\cos\frac{2k+1}{2n}\pi-i\sin\frac{2k+1}{2n}\pi}{\sin\frac{2k+1}{2n}\pi}=ctg\frac{2k+1}{2n}\pi-i\text{, adică}$$

$$x=ctg\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right).$$

Remarcăm că operațiile înmulțirii și împărțirii pot fi de asemenea interpretate geometric (despre interpretarea geometrică a adunării și a scăderii am vorbit deja la începutul acestui paragraf) (vezi Fig.2.).

Într-adevăr, numărul complex $z_1=|z_1|(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$ este reprezentat de raza vector $\overrightarrow{OM_1}$, iar numărul complex $z_2=|z_2|(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ este reprezentat de raza vector $\overrightarrow{OM_2}$ (vezi fig.3.).

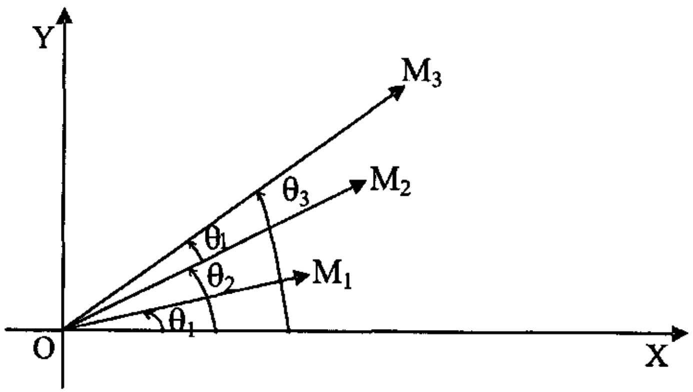



**Fig. 3.**



Pentru a construi vectorul $\overrightarrow{OM_3}$, care reprezintă numărul complex $z_3=z_1\cdot z_2=|z_1z_2|[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]=$ $=|z_3|(\cos\theta_3+i\sin\theta_3)$, trebuie să rotim vectorul $\overrightarrow{OM_1}$ cu un unghi $\theta_2$ în sens opus mișcării acelor de ceasornic, dacă $\theta_2>0$ și în sensul mișcării acelor de ceasornic, dacă $\theta_2<0$ și să "mărim" lungimea vectorului $\overrightarrow{OM_1}$ de $|z_2|$ ori.

Întrucât $i=1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, înmulțimea oricărui număr $z$ cu $i$ poate fi privită ca operația rotirii vectorului, care reprezintă numărul $z$ cu un unghi $\frac{\pi}{2}$ în sensul opus acelor de ceasornic.

Pentru a construi vectorul, care reprezintă numărul complex $z_4=\frac{z_1}{z_2}$, trebuie să rotim vectorul $\overrightarrow{OM_1}$ cu un unghi $\theta_2$ în sensul mișcării acelor de ceasornic, dacă $\theta_2>0$ și în sens opus, dacă $\theta_2<0$ și să „micșorăm" lungimea lui de $|z_2|$ ori.

Împărțirea numărului complex $z$ la $i$ poate fi privită ca operația rotirii vectorului, care reprezintă numărul $z$, cu un unghi $\frac{\pi}{2}$ în sensul mișcării acelor de ceasornic.

## 9.1.3. Planul complex şi reprezentarea lui sferică.

În diverse probleme de analiză matematică este necesară extinderea mulţimii C a numerelor complexe prin adăugarea unui număr impropriu notat cu $\infty$. Prin definiţie $C_\infty = C \cup \{\infty\}$ şi $\infty \notin C$. Mulţimea $C_\infty$ se numeşte p l a n c o m p l e x e x t i n s sau p l a n G a u s s.

Legătura numerelor din $C$ cu elementul $\infty$ se stabileşte prin extinderea la acest element a operaţiilor cu numere complexe punând $a + \infty = \infty + a = \infty$ pentru $a \in C_\infty$ şi $a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$ pentru $a \in C_\infty \setminus \{0\}$ . Prin convenţie specială (referitoare la operaţia de împărţire) vom scrie: $\frac{a}{0} = \infty$ pentru $a \in C_\infty \setminus \{0\}$ şi $\frac{a}{\infty} = 0$ pentru $a \in C$. Este imposibil de a defini $\infty - \infty, 0 \cdot \infty, \frac{0}{0}$ şi $\frac{\infty}{\infty}$. Deci în ce priveşte structura algebrică a lui $C_\infty$ se pot extinde operaţiile algebrice din $C$ fără a fi peste tot definite. Convenţia $|\infty| = +\infty$ extinde modulul de la $C$ la $C_\infty$ (a se compara cu extinderea mulţimii numerelor reale $R$, adăugând simbolurile $(-\infty)$ şi $(+\infty)$ – vezi de exemplu [17], 1.2.).

Cu scopul de a lămuri comportarea punctului impropriu ($z_0=\infty$) faţă de figurile geometrice elementare, convenim să considerăm pe $z_0=\infty$ ca element al oricărei drepte din $C_\infty$. În schimb $\infty$ nu aparţine nici unui cerc şi nici unui semiplan.

Pentru a satisface dezideratul de mai sus şi a elucida convenţiile anterioare este de dorit să introducem un model geometric în care toate punctele planului extins $C_\infty$ să aibă reprezentanţi concreţi. Pentru aceasta considerăm sfera unitară de ecuaţia $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$, care este tangentă la planul



complex $XOY$ în originea acestui sistem şi punctul $N(0,0,2)$ de pe această suprafaţă sferică (vezi fig.4.).

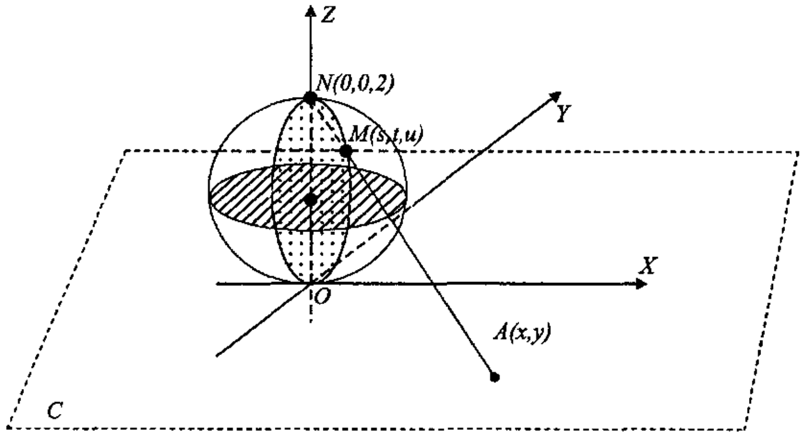



**Fig. 4.**

Fie $A$ un punct arbitrar din planul complex $C$ raportat la sistemul cartezian rectangular de coordonate $XOY$. Acestui punct îi asociem punctul $M$ de intersecţie al dreptei $NA$ cu suprafaţa sferică. Astfel între punctele din planul complex $C$ şi punctele de pe suprafaţa sferică (în afară de punctul $N$!!) se stabileşte o bijecţie, care se numeşte *proiecţie stereografică*. Observăm că dacă punctul $A\ (x,y) \in C$ se îndepărtează nelimitat de la originea sistemului $XOY$, adică $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \to +\infty$ , punctul respectiv de pe suprafaţa sferică se apropie de $N$.

Convenim ca numărului impropriu $z_0 = \infty$ să-i corespundă punctul $N$ de pe această suprafaţa sferică.

Astfel, între punctele planului complex extins $C_\infty$ şi punctele de pe suprafaţa sferică dată (numită *sfera lui Reiemann*) se stabileşte o corespondenţă biunivocă. Punctele de pe suprafaţa sferică sunt numite *reprezentarea sferică* a numerelor complexe din planul complex extins $C_\infty$.

Remarcăm, în încheiere, că mulţimea numerelor complexe $C$ nu este ordonată: noţiunea de număr "*mai mare*" sau număr "*mai mic*" pentru numerele complexe nu are sens.

### 9.1.4. Exerciţii şi răspunsuri la paragraful 9.1.

**1.** Sa se calculeze: a) $\dfrac{a\sqrt{b}+ib\sqrt{a}}{b\sqrt{a}-ia\sqrt{b}}$; b) $\dfrac{\sqrt{1+a}+i\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-i\sqrt{1-a}}-\dfrac{\sqrt{1-a}+i\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}-i\sqrt{1+a}}$; c) $\dfrac{3i^{30}-i^{19}}{2i-1}$; d) $\left[\sqrt{2}\left(\cos 10^0+i\sin 10^0\right)\right]^{12}$;

e) $(1+i)^{137}$; f) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$; g) $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4\cdot\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^6$;

h) $i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}(n\in N)$; i) $i^{4k}\cdot i^{4k+1}\cdot i^{4k+2}\cdot i^{4k+3}$; $k\in N$; j) $i\cdot i^2\cdot\ldots\cdot i^{99}\cdot i^{100}$.

**2.** Să se arate că soluţiile ecuaţiei $z^n=1$ formează o progresie geometrică, adică $1,\ \alpha,\alpha^2,\ldots\ldots,\alpha^{n-1}$.

**3.** Să se resolve ecuaţiile:

a) $z^{n-1}+z^{n-2}+\ldots+z^2+z+1=0$; b) $\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^2=2i$.

**4.** Fie *A(1,1)* si *B(0,1)* punctele din planul complex *C*. Care sunt punctele respective din sfera lui Riemann?

**5.** Fie $A'(0,1,1)$, $B'(1,0,1)$, si $C'(1,1,0)$ puncte de pe sfera lui Riemann. Să se afle punctele respective din planul complex *C*.

**6.** Să se determine locul geometric al punctelor din planul complex *C* ce satisface relaţia : a) $|z+1+i|<2$; b) $|z+2i|\geq 4$;



c) $1<|z|<3$; d) $|z-i|=|z-1|$; e) $0<\arg z<\dfrac{\pi}{2}$; f) $\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z\geq 1$.

Să se interpreteze geometric mulţimile respective.

**7.** Să se interpreteze geometric multimile punctelor din planul complex *C*, ecuatiile carora au forma : a) $z=(1+i)t$; b) $z=t^2+it+4$; c) $z=2\cos t+3i\sin t$; d) $z=t+\dfrac{1}{t}\cdot i$; e) $z=t\left(it^2+1\right)$. În toate cazurile $t$ este un parametru real.

### Răspunsuri.

**1.** a) $i$; b) $2a$; c) $1+i$; d) $32\left(\sqrt{3}i-1\right)$; e) $2^{68}(i+1)$; f) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (să se utilizeze forma exponenţială a numărului complex); g) $\left(\dfrac{-1}{2}\right)\left(\sqrt{3}+i\right)$ (să se consulte exemplul precedent); h) $0\left(i^n\left(1+i+i^2+i^3\right)=0\right)$; i) $-1\left(i^{4kn}\left(1\cdot i\cdot i^2\cdot i^3\right)=-1\right)$; j) -1 (a se consulta ex. precedent).

**2.** $z_k=\cos\dfrac{2\pi k}{n}+i\sin\dfrac{2\pi k}{n}$, $k=0.1,\ldots,(n-1)$;

$$\left(\begin{array}{l} k=0\Rightarrow z_1=1;\quad k=1\Rightarrow z_1=\alpha;\\ k=2\Rightarrow z_2=\cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\cdot 2\right)+i\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\cdot 2\right)=\\ =\left(\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}\right)^2=\alpha^2,\ \ldots\ ,k=n-1\Rightarrow z_{n-1}=\alpha^{n-1}. \end{array}\right)$$

**3.** a) $z_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$, $k = 0,1,\dots,n-1$ (Înmulţim ambele părţi ale ecuaţiei cu $(z-1)$ şi a se consulta exerciţiul precedent); b) $z_1 = -1+2i; z_2 = \left(\frac{-1}{5}\right)(1+2i)$.

**4.** $A'\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$, $B'\left(0,\frac{4}{5},\frac{2}{5}\right)$ (se rezolvă sistemul de ecuaţii : $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ şi ecuaţia dreptei *AN* (sau *NB* ) cu *N(0,0,2)* şi *A(1,1,0)* sau respectiv *N* şi *B(0,1,0))*.

**5.** *A(0,2), B(2,0)* (se rezolvă sistemul de ecuatii : *z=0* si ecuaţia dreptei *NA'* ( sau *NB')* cu *N(0,0,2)*).

**6.** a) interiorul cercului $(x-1)^2+(y-1)^2=4$; b) exteriorul cercului de raza *4* cu centrul in *(0,-2)* si punctele de pe acest cerc; c) coroana circulară $1 < x^2+y^2 < 9$; d) punctele de pe bisectoarea *y=x*; e) cadranul *I*, exceptând punctele de pe axele de coordonate ; f) semiplanul $x+y \geq 1$ incluzând si punctele de pe dreapta $x+y=1$.

**7.** a) bisectoarea *y=x;* b) parabola $x = y^2+4$ ; c) elipsa $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$; d) hiperbola *xy=1*; e) parabola cubica $y = x^3$.



## 9.2. Funcţia complexă de o variabilă complexă.

### 9.2.1. Noţiune de funcţie complexă de o variabilă complexă. Vecinătăţi şi domenii.

Fie $E$ si $F$ două submulţimi ale planului complex extins $C_\infty$. *Dacă printr-un procedeu oarecare f facem să corespundă fiecărui element z din E unul sau mai multe elemente w din F, atunci spunem că f este o funcţie complexă de o variabilă complexă.* Se notează astfel $f : E \to F$ sau $w = f(z)$, $z \in E$.

In primul caz funcţia $f$ se numeşte *univocă (uniformă)*, iar în al doilea caz – *multivocă (multiformă)*. Elementul $z$ din $E$ se numeşte *argumentul* funcţiei $f$, iar elementul respectiv $w$ din $F$ se numeşte valoarea *funcţiei*. Mulţimea $E$ se numeşte *mulţimea valorilor argumentului*, iar mulţimea $F$ – *mulţimea valorilor funcţiei.*

Dacă $z$ este un element din $E$, atunci valoarea lui $f$ în $z$ se notează cu $f(z)$.

Deoarece $z = x+iy$ , $x \in \boldsymbol{R}, y \in \boldsymbol{R}$, atunci putem scrie $w = f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\cdot v(x,y)$,

unde $u$ si $v$ sunt funcţii reale de două variabile reale $x$ şi $y$. Numim $u$ partea r e a l ă a funcţiei $f$ şi $v$ partea *imaginară* a ei şi notăm $u = \operatorname{Re} f = \operatorname{Re} w$, $v = \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} w$.

Funcţia $f$ se interpretează geometric ca o transformare punctuală a unei mulţimi $E$ din planul complex ($z = x+iy$), într-o mulţime $F$ din planul complex ($w = u+iv$).

Prin urmare, a defini o funcţie complexă de o variabilă complexă înseamnă a defini două funcţii reale de două variabile reale. Dacă, de exemplu, considerăm $w = z^2$, atunci $w = u+iv = (x+iy)^2 = (x^2-y^2)+i\cdot 2xy$ şi $u = x^2-y^2$, $v = 2xy$.

Fie $f:E\to F$. Dacă fiecărui element $w\in F$, după o lege anumită i se ataşează unul sau mai multe elemente $z\in E$, astfel încât $f(z)=w$, atunci funcţia obţinută se numeşte *funcţie inversă* în raport cu funcţia dată. Se notează: $z=f^{-1}(w)$. Evident că transformarea $w=f(z)$ va fi bijectivă atunci şi numai atunci când funcţiile $f$ şi $f^{-1}$ vor fi univoce.

Dacă $f:E\to F$ şi $g:F\to S$, atunci funcţia $w=(g\circ f):E\to S$ se numeşte *funcţie compusă* sau *superpoziţia* funcţiilor $f$ şi $g$, se notează astfel: $w=g[f((z)]$, $z\in E$.

Pe parcurs, un rol important în teoria funcţiilor de o variabilă complexă va fi cazul când mulţimile $E$ şi $F$ sunt domenii (în sensul definiţiei 11 din [18], 5.1.3.).

Reamintim această definiţie importantă. Mulţimea $\{z\in C, |z-z_0|<r\}$ se numeşte *r – vecinătate* a punctului $z_0$ de rază $r>0$, şi se notează cu $U(z_0,r)$. Ea reprezintă un disc centrat în $z_0$ de rază $r$, adică interiorul cercului $|z-z_0|=r$. Convenim să notăm cu $\overline{U}(z_0,r)$ mulţimea $U(z_0,r)\setminus\{z_0\}$, adică mulţimea $0<|z-z_0|<r$. Vom numi această mulţime *disc punctat* (sau p e r f o r a t) centrat în $z_0$ de rază $r$.

Mulţimea $\{z\in C, r_1<|z-z_0|<r_2\}$ se numeşte *coroană circulară* centrată în $z_0$ de razele $r_1$ şi $r_2$. Se notează cu $U(z_0,r_1,r_2)$. Evident că $\overline{U}(z_0,r)=U(z_0,0,r)$. Numim *r – vecinătate a punctului* $z_0=\infty$ coroana circulară $U(0,r,+\infty)$, $r>0$, adică mulţimea $|z|>r$.

Fie $E$ o submulţime a lui $\mathbf{C}_\infty$. Punctul $z_0\in E$ se numeşte *punct interior* al mulţimii $E$, dacă există o $r$ – vecinătate $U(z_0,r)$ conţinută în $E$. Deci $z_0\in U(z_0,r)\subseteq E$.



**Definiţia 1.** Mulţimea $E$ formată numai din puncte interioare se numeşte *mulţime deschisă*.

Punctul $z_0$, care aparţine mulţimii $E$ sau nu aparţine mulţimii $E$, se numeşte *punct frontieră* al mulţimii $E$, dacă orice $r$ – vecinătate $U(z_0,r)$ conţine atât puncte ce aparţin lui $E$, cât şi puncte ce nu aparţin lui $E$. Mulţimea punctelor frontieră ale mulţimii $E$ se numeşte *frontiera* mulţimii $E$.

**Definiţia 2.** Mulţimea deschisă $E$ împreună cu frontiera sa se numeşte *mulţime închisă*. Vom nota-o cu $\overline{E}$.

**Definiţia 3.** Mulţimea $E$ se numeşte *mărginită,* dacă există o $r$ – vecinătate $U(O,r)$ a punctului $O$, astfel încât $E\subseteq U(O,r)$.

**Definiţia 4.** Mulţimea $E$ se numeşte *compactă* dacă ea este mărginită şi închisă.

**Definiţia 5.** Mulţimea $E$ se numeşte *conexă* dacă oricare două puncte ale ei pot fi unite cu o curbă continuă, punctele căreia aparţin în întregime mulţimii $E$.

**Definiţia 6.** Mulţimea $D\subseteq C\infty$ se numeşte d o m e n i u dacă ea este deschisă şi conexă.

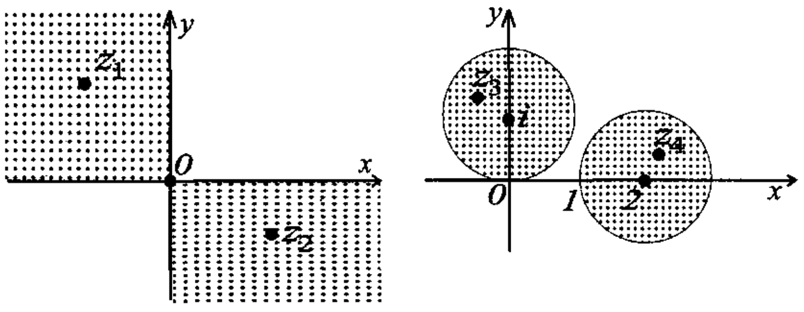
Mulţimea formată din domeniul $D$ şi frontiera lui se numeşte d o m e n i u  î n c h i s şi îl vom nota cu $\overline{D}$.

**Exemple.**

1. Mulţimea $\{z\in C_\infty, |z|>1\}$ este un domeniu, frontiera căruia este cercul $|z|=1$, iar mulţimea $\{z\in C, |z|>1\}$ este de asemenea un domeniu, frontiera căruia se compune din cercul $|z|=1$ şi punctul $z_0=\infty$.

2. Mulţimea $\{z\in C, 1<|z-i|\le 2\}$ nu este domeniu, deoarece punctele de pe cercul $|z-i|=2$ nu sunt puncte interioare ale acestei mulţimi.

3. Fie mulţimile: a) $\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z < 0$, $z \in C$; b) $|z-1| < 1$ şi $|z-2| < 1$, $z \in C$ (vezi fig. 1).




*a)* *b)*

**Fig. 1.**

Observăm că:

a) Mulţimea $\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z < 0, z \in C$ (Fig.1a.) este compusă din toate punctele ce aparţin cadranelor 2 şi 4 în afară de punctele de pe axele de coordonate *OX* şi *OY*. Această mulţime este deschisă însă nu este domeniu, deoarece ea nu este conexă: de exemplu, punctele $z_1$ şi $z_2$ nu pot fi unite printr-o linie continuă, punctele căreia să aparţină acestei mulţimi, deoarece punctul *O* nu aparţine acestei mulţimi;

b) Mulţimea $|z-i| < 1$ şi $|z-2| < 1$, $z \in C$ (Fig.1b.) este compusă din două discuri. De asemenea această mulţime este deschisă, însă nu este conexă: punctele $z_3$ şi $z_4$ nu pot fi unite printr-o linie continuă care să aparţină în întregime acestei mulţimi.

4. Mulţimea numerelor complexe *C* este un domeniu, frontiera căruia conţine un singur punct: $z_0 = \infty$. Planul



complex extins $C_\infty$ este unicul exemplu de domeniu, care nu are frontieră.

5. Orice $r$ – vecinătate a punctului $z_0 \in C_\infty$ şi orice coroană circulară centrată în $z_0 \in C$ sunt exemple de domenii.

Fie $x = \varphi(t)$ şi $y = \psi(t)$ două funcţii continue de o variabilă reală $t \in [\alpha, \beta]$. Ecuaţia $z = x + iy = \varphi(t) + i\psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ reprezintă ecuaţia parametrică a liniei continue $\gamma$ pe planul complex *C*.

Linia γ din planul complex *C* se numeşte *netedă,* dacă funcţiile $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ împreună cu derivatele lor sunt continue pe $[\alpha, \beta]$ şi $(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 \neq 0$ pentru orice $t \in [\alpha, \beta]$. Linia continuă compusă dintr-un număr finit de linii netede se numeşte *netedă pe porţiuni*. Linia închisă γ, care nu are puncte de intersecţie cu ea însăşi se numeşte *contur închis* sau simplu *contur*. Observăm că partea planului complex mărginită de un contur γ este un domeniu, frontiera căruia coincide cu acest contur. Vom nota acest domeniu cu $D_\gamma$ (fig.2a.). Pe parcurs în calitate de contururi vom considera puncte izolate (cercuri de raza *r=0,* centrate în aceste puncte) şi linii duble (numite *tăieturi*).

**Definiţia 7**. Domeniul $D \subseteq C$ se numeşte simplu conex, dacă pentru orie contur $\gamma_1$ ce aparţine în întregime acestui domeniu, avem că $D_{\gamma_1} \subseteq D$.

Din această definiţie reiese că domeniile simplu conexe nu au "găuri".

Dacă domeniul $D \subset C$ nu este simplu conex, atunci el se numeşte m u l t i c o n e x. Aceasta înseamnă că într-un domeniu multi conex $D \subset C$ există contururile $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ (numite i n t e r i o a r e) şi conturul γ (numit e x t e r i o r) astfel încât $D\gamma_i \subset D\gamma = D$; $D\gamma_i \cap D\gamma_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, ..., n$ şi punctele din domeniile $D\gamma_i (i=1,2,...,n)$ nu aparţin domeniului $D$. Numărul $m=n+1$ care reprezintă numărul contururilor $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ şi γ se numeşte *ordinul de conexitate* al domeniului multi conex $D$.

În acest caz se mai spune că acest domeniu are $n$ „găuri".

E x e m p l e. Considerăm următoarele domenii:

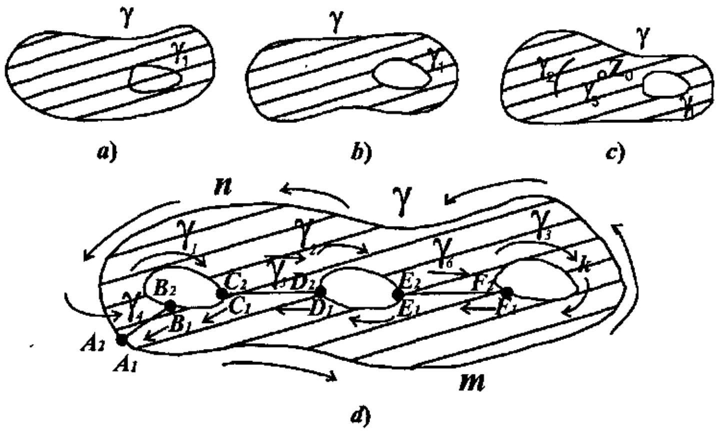



**Fig. 2.**

Observăm că: domeniul 2a) este simplu conex; domeniul 2b) este dublu conex (cu o "gaură"– $D\gamma_1$), domeniul 2c) este 4-conex (are 3 "găuri": domeniul $D\gamma_1$, tăietura $\gamma_2$ şi punctul $z_0$, adică cercul $\gamma_3$ de raza 0 cu centrul în $z_0$) şi domeniul 2d) este deasemenea 4-conex (are 3 „găuri": $D\gamma_1$, $D\gamma_2$, $D\gamma_3$).

Constatăm că orice domeniu multi conex, cu ajutorul unui număr finit de tăieturi (contururi alcătuite din linii duble), poate fi transformat într-un domeniu simplu conex. De exemplu, domeniul 4-conex 2d) de mai sus cu ajutorul a trei tăieturi



$\gamma_4, \gamma_5, \gamma_6$ se transformă într-un domeniu simplu conex mărginit de conturul $A_1mnA_2B_2C_2D_2E_2F_2kF_1E_1D_1C_1B_1A_1$.

## 9.2.2. Şiruri numerice convergente şi divergente.

Se numeşte *şir de numere complexe* funcţia $w=f(n)$, $n\in N$, $w\in \mathbf{C}$. Valorile funcţiei $f(n)$ se notează respectiv $\{z_n\}$, $\{w_n\}$etc. Numerele

$$z_1, z_2, ..., z_n, ... \qquad (1)$$

ale şirului $\{z_n\}$, similar cazului real, se numesc *termenii* şirului, iar numărul complex $z_n$ - t e r m e n u l  g e n e r a l al şirului.

Intrucât $z_n = x_n + iy_n$, unde $x_n$ şi $y_n$ sunt numere reale, avem că şirul (1) de numere complexe $z_n \in C$ generează două şiruri de numere reale:

$$\{x_n\} = x_1, x_2, ..., x_n, ..., \qquad (2)$$

$$\{y_n\} = y_1, y_2, ..., y_n, ... . \qquad (3)$$

Prin urmare, orice şir de numere complexe (1) se caracterizează cu ajutorul a două şiruri de numere reale (2) şi (3) şi invers.

**Definiţie**. Numărul $z_0 = x_0 + iy_0 \in C$ se numeşte *limita şirului* $\{z_n\}=\{x_n+iy_n\}$, dacă şirurile reale $\{x_n\}$ şi $\{y_n\}$ sunt convergente către $x_0$ şi respectiv $y_0$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$. Se notează: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$.

Numărul $z_0 = \infty$ se numeşte *limita şirului* $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$, dacă şirul numerelor reale $\{|z_n|\} = \{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}\}$ este un şir infinit mare, adică $\lim_{n\to\infty}|z_n| = +\infty$. Se notează: $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$.

In primul caz şirul $\{z_n\}$ se numeşte *şir convergent* (către $z_0$), iar în al doilea caz şirul $\{z_n\}$ se numeşte ş i r  i n f i n i t  m a r e. Dacă şirul $\{z_n\}$ nu este convergent, atunci el se numeşte *şir divergent*. Cu alte cuvinte şirul $\{z_n\}$ se numeşte divergent, dacă $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$ sau $\lim_{n\to\infty} z_n$ nu există.

Şirul $\{z_n\}$ se numeşte şir *infinit mic*, dacă $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

Din această definiţie şi din definiţia şirurilor reale convergente ([17], 1.4.) reiese că, dacă $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$, atunci orice $\varepsilon$ - vecinătate $U(z_0, \varepsilon)$ a punctului $z_0$ conţine toţi termenii şirului $\{z_n\}$ începând cu un rang $N(\varepsilon)$ (ce depinde de $\varepsilon > 0$).

În simbolurile logicii matematice se scrie astfel:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \in C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in N : \forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |z_n - z_0| < \varepsilon;$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in N : \forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |z_n| > \varepsilon.$$

Aşadar, între teoria şirurilor reale convergente şi teoria şirurilor convergente de numere complexe este o mare asemănare. Rezultatele de bază din teoria şirurilor reale convergente (a se consulta de exemplu ([17], 1.4) sunt valabile şi pentru şirurile convergente de numere complexe. Remarcăm unele din ele:

a) dacă şirul $\{z_n\}$ este convergent, atunci limita lui este unică şi acest şir este mărginit (adică şirurile reale (2) şi (3) sunt mărginite);



b) operaţiile aritmetice cu şiruri convergente de numere complexe sunt valabile: dacă $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \in C$ şi

$$\lim_{n\to\infty} w_n = w_0 \in C \text{ atunci } \lim_{n\to\infty}(z_n \pm w_n) = z_0 \pm w_0,$$

$$\lim_{n\to\infty}(z_n \cdot w_n) = z_0 \cdot w_0 \text{ şi } \lim_{n\to\infty}\frac{z_n}{w_n} = \frac{z_0}{w_0} \text{ cu } w_n \neq 0,\ w_0 \neq 0;$$

c) criteriul Cauchy:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \in C \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in N : \forall n > N(\varepsilon),$$

$$\forall m \in N \Rightarrow |z_n - z_{n+m}| < \varepsilon;$$

d) dacă $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$, atunci $\lim_{n\to\infty}|z_n| = |z_0|$ şi $\lim_{n\to\infty}\bar{z}_n = \bar{z}_0$.

### 9.2.3. Limita şi continuitatea funcţiei complexe.

Definiţiile limitei şi a continuităţii funcţiei complexe de o variabilă complexă într-un punct, sunt similare definiţiilor respective ale funcţiilor reale ([17], 1.5).

Fie funcţia $f: D \to C$ este univocă şi $z_0 \in D$ sau $z_0 \notin D$.

**Definiţia 1.** Se spune că funcţia $w = f(z)$ are limita $A$ în punctul $z_0$, şi se scrie $\lim_{z\to z_0} f(z) = A$, dacă şi numai dacă,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall z \in D, 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon.$$

**Definiţia 2.** Numărul $A$ se numeşte *limita funcţiei* $f(z)$ în punctul $z_0$, dacă pentru orice şir $\{z_n\}$ a valorilor argumentului $z$, diferite de $z_0$, care converge către $z_0$, şirul respectiv $\{f(z_n)\}$ al valorilor funcţiei $f(z)$ converge către $A$.

Definiţia 1 se numeşte definiţia *limitei funcţiei în limbajul* "$\varepsilon - \delta$" sau *după Cauchy*, iar definiţia 2 – definiţia *limitei funcţiei în limbajul " şirurilor "* sau *după Heine*. Demonstraţia echivalenței acestor două definiții este similară cazului real ([6], cap.2,§2; [17], 1.5).

Dacă cel puțin unul din numerele $A$ sau $z_0$ este egal cu $\infty$ atunci definițiile 1 și 2 trebuie să fie modificate în modul cuvenit.

De exemplu, dacă $A=\infty$ și $z_0 \in C$, atunci definiția 1 se modifică astfel:

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0: \forall z\in D, 0<|z-z_0|<\delta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(z)|>\varepsilon.$$

Propunem cititorului să modifice aceste două definiții pentru cazurile: $\lim_{z\to\infty} f(z)=A\neq\infty$ și $\lim_{z\to\infty} f(z)=\infty$ (a se consulta [6], 2.2).

Constatăm, că toate proprietățile privind limita unei sume, a unui produs sau a unui cât, când numitorul este diferit de zero, din cazul funcțiilor reale sunt valabile și pentru funcții complexe.

Deoarece $z=x+iy$ și $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ avem:

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}[u(x,y)+iv(x,y)]=A=a+ib\in C$$

este echivalentă cu

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=a \text{ și } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=b.$$

**Definiția 3.** O funcție univocă $f:D\to C$ se numește *continuă* în $z_0\in D\subseteq C$, dacă $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$.

Dacă $f$ este continuă în toate punctele lui $D$, atunci spunem că $f$ este *continuă pe D*.

Similar cazului real, constatăm că suma și produsul a două funcții continue în $z_0\in D$ sunt continue în $z_0\in D$, câtul a două funcții continue în $z_0\in D$ este de asemenea o funcție continue în $z_0\in D$, dacă numitorul este diferit de zero în $z_0$.



Continuitatea lui $f$ în $z_0\in D$ este echivalentă cu:

a) $\lim_{\Delta z\to 0}\Delta w=0$, unde $\Delta z=z-z_0=\Delta x+i\Delta y$ și $\Delta w=f(z)-f(z_0)=\Delta u+i\Delta v$;

b) continuitatea funcțiilor reale $u(x,y)$ și $v(x,y)$ în punctul $(x_0,y_0)$.

Menționăm de asemenea că continuitatea funcției $f$ în $z_0\in D$ implică continuitatea funcției reale $|f(z)|$ în $(x_0, y_0)$.

Dacă $f(z)$ este continuă pe o mulțime compactă $E$, atunci teoremele lui Weierstrass din teoria funcțiilor reale sunt valabile pentru modulul funcției:

1) $f(z)$ este mărginită pe $E$, adică există numărul real $M>0$, astfel încât $|f(z)|\le M$, $\forall z\in E$;

2) Modulul funcției $f$ atinge pe $E$ valoarea cea mai mare și valoarea cea mai mică.

**Exemplul.** Să se cerceteze continuitatea funcției $w$=arg$z$, $z\in C$.

**Rezolvare.** Dacă $z\in D=C\setminus\{z\in C; \operatorname{Re} z\le 0, \operatorname{Im} z=0\}$, atunci (vezi formula (2) din 9.1.2)

$$w=\arg z=2\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}.$$

Prin urmare,

$$u(x,y)=\operatorname{Re} w=2\operatorname{artg}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x},$$

$$v(x,y)=\operatorname{Im} w=0.$$

Observăm că aceste două funcții reale de variabilele reale $x$ și $y$ sunt funcții continue pe $D$. Aceasta înseamnă că funcția arg$z$ este continuă pe $D$.

Constatăm că dacă $z \in \{z \in C,\ \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z = 0\}$, adică $x \leq 0$ şi $y=0$, atunci

$$w = \arg z = 2\operatorname{arctg} \frac{0}{0}$$

şi, prin urmare, funcţia arg$z$ nu este continuă în astfel de puncte.

### 9.2.4. Exerciţii si răspunsuri la paragraful 9.2.

**1.** Fie $w = z^2$. Sa se determine imaginea din planul $UO'V$ a punctelor $z = x + iy$ din planul $XOY$, care satisfac ecuaţia :

a) $\operatorname{Re} z = 0$; b) $\operatorname{Im} z = 0$; c) $z = (1+i)t, \quad t \in R$; d) $xy = 1$; e) $x^2 + y^2 = 4$.

Sa se interpreteze geometric aceste transformari .

**2.** Acelasi lucru pentru functia $w = \frac{1}{z}$, daca : a) $y = x$; b) $x^2 + y^2 = 1$; c) $y = 4$.

**3.** Fie $w = z^2$. Să se descrie mulţimea punctelor din planul $XOY$ imaginile cărora în planul $UO'V$ reprezintă: a) dreapta $u = 1$; b) dreapta $v = 2$. Să se interpreteze geometric aceste transformări.

**4.** Acelasi lucru pentru funcţia $w = \frac{1}{z}$, dacă: a) $u = 1$; b) $v = \frac{1}{2}$.

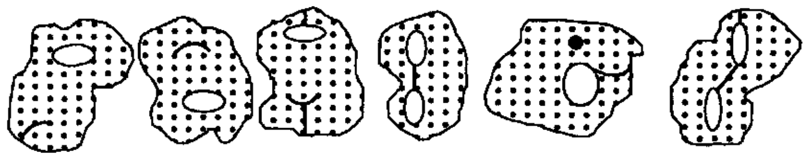
**5.** Să se arate dacă urmatoarele mulţimi sunt domenii sau nu:

a) $|z - i| \leq 2$; b) $0 \leq \arg z < \frac{\pi}{2}$; c) $2 < |z - 1| \leq 3$;

d) $\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{3}$ şi $|z| < 1$; e) $0 < \operatorname{Im} z \leq 1$; f) $|z-1| < |z+1|$.



**6.** Sa se determine ordinul de conexitate al domeniilor de mai jos:



a) b) c) d) e) f)

**Fig. 3.**

**7.** Să se demonstreze că şirul $\{z_n\}$, $z_n \neq 0$ este infinit mic, atunci si numai atunci, când şirul $\left\{\frac{1}{z_n}\right\}$ este infinit mare.

**8.** Să se demonsreze că şirul $\{z_n\}$ este convergent către numărul $a \in C$ atunci şi numai atunci, când şirul $\{z_n - a\}$ este infinit mic.

**9.** Fie $f(z) = z^3 + 2z$, $z \in C$ ;

$$F(z) = \begin{cases} z^3 + 2z, \text{ daca}, z \neq i, z \in C, \\ 1 + 2i, \text{ daca}, z = i. \end{cases}$$

a) Să se demonstreze că $\lim\limits_{z \to i} f(z) = \lim\limits_{z \to i} F(z)$ ;

b) Să se cerceteze continuitatea acestor două funcţii pe planul complex $C$.

**10.** Fie $f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2 + 4}{z - 2i}, \text{ daca } z \neq 2i, z \in C, \\ 3 + 4i, \text{ daca } z = 2i; \end{cases}$

$$F(z)=\begin{cases}\dfrac{z^2+4}{z-2i}, \ daca\ z\neq 2i,\ z\in C,\\ 4i,\ daca\ z=2i.\end{cases}$$

a) Să se demonstreze că $\lim\limits_{z\to 2i} f(z)=\lim\limits_{z\to 2i} F(z)$

b) Să se cerceteze continuitatea acestor două funcţii pe planul complex *C*.

**11**.Să se afle partea reală *u(x,y)* şi partea imaginară *v(x,y)* a funcţiei: a) $f(z)=\dfrac{z-i}{i-\bar{z}}$; b) $f(z)=\dfrac{\bar{z}}{i}+\dfrac{i}{z}$; c) $f(z)=i\bar{z}+2z^2$; d) $f(z)=sh(z+2i)$.

**12**. După partea reală *u(x,y)* şi partea imaginară *v(x,y)* să se exprime $f(z)=u+iv$ în dependenţă de *z* si $\bar{z}$, dacă a) $u=\dfrac{1}{x}$, $w=\dfrac{1}{y}$; b) $u=x^2-y^2-2y-1$, $v=2x(1+y)$; c) $u=\dfrac{x^3+xy^2+x}{x^2+y^2}$, $v=\dfrac{x^2y+y^3-y}{x^2+y^2}$; d) $u=x-e^{2x}\cdot\cos 2y$, $v=y-e^{2x}\cdot\sin 2y$.

**13**. Să se cerceteze continuitatea funcţiilor:

a) $w=z\cdot\operatorname{Re}z+6z^2$, b) $w=\dfrac{3+5z}{2-|z|}$;

c) $w=\dfrac{z^2-\operatorname{Im}(3z)}{|z-1|-1}$; d) $w=\dfrac{z\cdot\operatorname{Im}(z^2)}{|z|^2}$;



## Răspunsuri.

**1**. a) dreapta $x=0$ (axa $OY$) se transformă în semiaxa $u\le 0$, $v=0$;

b) dreapta $y=0$ ( axa $OX$ ) se transformă în semiaxa $u\ge 0$, $v=0$.

c) bisectoarea $y=x$ , $x\in R$ se transformă în semiaxa $u=0$, $v\ge 0$;

d) hiperbola $xy=1$ se transformă în dreapta : $v=2$

e) cercul $x^2+y^2=4$ se transformă in cercul

$u^2+v^2=16$ $(z=2e^{i\theta}\Rightarrow z^2=4e^{2i\theta}\Rightarrow w=4e^{2i\theta}\Rightarrow |w|=$
$=4\Rightarrow u^2+v^2=16)$.

**2**. a) bisectoarea $x=y$ se transformă în dreaptă $u+v=0$ ;
b) cercul $x^2+y^2=1$ se transformă în cercul $u^2+v^2=1$
$(z=1\cdot e^{i\theta}\Rightarrow w=e^{-i\theta}\Rightarrow |w|=1\Rightarrow u^2+v^2=1)$; c) dreapta
$y=4$, $x\in R$ se transformă în cercul $u^2+\left(v+\dfrac{1}{8}\right)^2=\dfrac{1}{64}$

$$(u=\frac{x}{x^2+16},\ v=\frac{-4}{x^2+16}\Rightarrow u^2=\frac{x^2+16-16}{(x^2+16)^2}=\frac{1}{x^2+16}-$$
$$-\frac{16}{(x^2+16)^2}\Rightarrow u^2=-\frac{v}{4}-v^2=-\left(v+\frac{1}{8}\right)^2+\frac{1}{64}).$$

**3**. a) hiperbola $x^2-y^2=1$ se transformă în dreapta $u=1$;
b) hiperbola $xy=1$ se transformă în dreapta $v=2$;

**4**. a) cercul $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$ se transformă în dreapta $u=1$; b) cercul $x^2+(y+1)^2=1$ se transformă in dreapta $v=\dfrac{1}{2}$.

**5.** a) domeniu închis; b) nu; c) nu; d) da; e) nu; f) da *($x>0, y\in R$ ).*

**6.** a) dublu conex (2 contururi); b) triplu conex (3 contururi); c) simplu conex (1 contur); d) dublu conex; e) dublu conex; f) simplu conex.

**9.** a) $\lim\limits_{z\to i} f(z)=\lim\limits_{z\to i} F(z)=i$ (limita funcţiei în punctul dat nu depinde de aceea că punctul dat aparţine sau nu aparţine mulţimii valorilor argumentului acestei funcţii) ; b) $f(z)$ este continuă pe $C$ , iar $F(z)$ este continuă pe $C\setminus\{i\}$.

**10.** a) $\lim\limits_{z\to 2i} f(z)=\lim\limits_{z\to 2i} F(z)=4i$ (vezi explicaţia din 9); b) $f(z)$ este continuă pe $C\setminus\{2i\}$, iar $F(z)$ este continuă pe $C$.

**11.** a) $u=\dfrac{(1+y)^2-x^2}{(1+y)^2+x^2}$ ; $v=\dfrac{(-2x)(y+1)}{x^2+(1+y^2)}$ ;

b) $u=-y-\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $v=\dfrac{x}{x^2+y^2}-x$; c) $u=2x^2-2y^2+y$, $v=x(1+4y)$; d) $u=shx\cdot\cos(y+2)$, $v=chx\cdot\sin(y+2)$.

**12.** a) $f(z)=\dfrac{4\bar{z}}{(\bar{z})^2-z^2}$; b) $f(z)=z^2+2iz-1$; c) $f(z)=z+\dfrac{1}{z}$;

d) $f(z)=z-e^{2z}$.

**13.** a) Continuă pe $C$; b) Continuă pe $C$ cu excepţia punctelor de pe cercul de raza $r=2$ cu centrul în origine ; c) Continuă pe $C$ cu excepţia punctelor de pe cercul de raza $r=1$ cu centrul în punctul $(1,0)$; d) continuă pe $C\setminus\{0\}$ .



## 9.3. Funcţii elementare de bază.

### 9.3.1. Funcţia polinomială.

Funcţia polinomială este o funcţie $p: C\to C$ definită astfel:

$$P_n(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n,$$

unde $a_j\in C$ pentru $j=0,1,2,\ldots,n$. Dacă $a_n\neq 0$, atunci polinomul $P_n(z)$ este de gradul $n$. O constantă diferită de zero este polinom de gradul zero. Constanta 0, considerată ca funcţie polinomială, ca şi în cazul numerelor reale, este privită ca polinom de gradul $(-\infty)$. Funcţia $P_n(z)$ este definită, univocă şi continuă pe $C$.

Cazuri particulare:

a) $P_1(z)=w=a_0+a_1z$ se numeşte *funcţie liniară*. Oricărei drepte din planul $XOY$ îi corespunde o dreaptă în planul $UOV$;

b) $w=z^n, n\in N$ se numeşte *funcţie de putere* cu exponent natural. Această funcţie este definită, univocă şi continuă pe $C$. Dacă lui $z_0=\infty$ îi ataşăm numărul $w_0=\infty$, atunci această funcţie este definită, univocă şi continuă pe planul complex extins $C_\infty$.

### 9.3.2. Funcţia raţională.

Funcţia raţională se defineşte (similar cazului real) ca raportul a două funcţii polinomiale. Deci, funcţia raţională are forma

$$f(z)=\frac{Q_m(z)}{P_n(z)}=\frac{b_0+b_1z+b_2z^2+\ldots+b_mz^m}{a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n},$$

unde $b_k\in C, a_j\in C, b_m\neq 0, a_n\neq 0, k=0,1,\ldots,m, j=0,1\ldots,n$. Această funcţie este definită, univocă şi continuă pe $C$, exceptând punctele în care numitorul este egal cu zero, adică soluţiile ecuaţiei

$$a_0+a_1z+a_2z^2+...+a_nz^n=0.$$

Cazuri particulare:

a) F u n c ţ i a o m o g r a f i c ă: $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$, unde $a$, $b$, $c$, $d$ sunt numere complexe, $c\neq 0$ (dacă $c$=0, funcţia omografică coincide cu funcţia liniară) şi $ad-bc\neq 0$ (dacă $ad-bc=0$, atunci funcţia omografică coincide cu funcţia constantă, care de asemenea este un caz particular al funcţiei polinomiale). Această funcţie este definită, univocă şi continuă pe $C\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.

Remarcăm următoare proprietate caracteristică pentru funcţia omografică: orice cerc din planul $XOY$ al mulţimii numerelor complexe $C\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ se transformă în planul $UO'V$ de asemenea într-un cerc.

b) *F u n c ţ i a* $f(z)=\dfrac{1}{2}(z+\dfrac{1}{z})$. Această funcţie este definită, univocă şi continuă pe mulţimea $C\setminus\{0\}$.

Remarcăm următoarea proprietate caracteristică a funcţiei $f(z)=\dfrac{1}{2}(z+\dfrac{1}{z})$: dacă $z=|z|\cdot e^{i\varphi}$ şi $f(z)=u+iv$, avem $u=\dfrac{1}{2}\left(|z|+\dfrac{1}{|z|}\right)\cos\varphi$, $v=\dfrac{1}{2}\left(|z|-\dfrac{1}{|z|}\right)\sin\varphi$. Prin urmare, cercurile $|z|=r$, $r\neq 0$, $r\neq 1$ din planul $XOY$ se transformă în planul $UO'V$ în elipse cu semiaxele: $a_r=\dfrac{1}{2}\left(r+\dfrac{1}{r}\right)$,



$b_r=\dfrac{1}{2}\left(r-\dfrac{1}{r}\right)$, care au aceleaşi focare $(\pm 1,0)$, deoarece

$$c_r=\sqrt{a_r^2-b_r^2}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(r^2+2+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{4}\left(r^2-2+\frac{1}{r^2}\right)}=\sqrt{\frac{1}{4}\cdot 4}=1,$$

nu depinde de razele cercurilor $|z|=r$.

Această funcţie se mai numeşte *funcţia lui Jucovschi* (1847-1921 – matematician rus), care a utilizat-o cu succes în hidrodinamică şi aerodinamică (aşa numitul *„profilul lui Jucovschi"* stă la baza construcţiei aripilor de avion).

Funcţia raţională $f(z)=\dfrac{Q_m(z)}{P_n(z)}$ se numeşte *regulată*, dacă $m<n$ şi *neregulată*, dacă $m\geq n$. Orice funcţie raţională neregulată, cu ajutorul algoritmului lui Euclide pentru funcţii polinomiale, poate fi reprezentată sub formă de sumă a unei funcţii polinomiale şi o funcţie raţională regulată. La rândul său, funcţiile raţionale regulate pot fi descompuse în mod unic în funcţii raţionale simple de forma $\dfrac{A}{(z-z_0)^k}$ unde $A\in C\setminus\{0\}$, $z_0\in C$, şi $k\in N$.

### 9.3.3. Funcţia exponenţială $e^z$.

Definim funcţia exponenţială $w=e^z$ astfel:

$$w=e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y).$$

Deoarece $u=e^x\cos y$, $v=e^x\sin y$ sunt univoce şi continue pe planul $XOY$, rezultă că $w=e^z$ este definită, univocă şi continuă pe $C$. Observăm că $|e^z|=e^x$ şi arg $e^z$=$y$.

Dacă $x=0$, obţinem că $e^z=e^{iy}=\cos y+i\sin y$, adică formula lui Euler.

Dacă $y=0$, avem $e^z=e^x$, adică $e^z$ coincide cu funcţia exponenţială reală. Proprietăţile de bază din domeniul real rămân valabile şi în domeniul complex $\boldsymbol{C}$ :

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}=e^{z_1-z_2},\ e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2},\ \left(e^z\right)^n=e^{zn},\ n\in \boldsymbol{N}.$$

Demonstrăm, de exemple, una din ele.

$$\frac{e^{z_1}}{e_{z_2}}=\frac{e^{x_1}(\cos y_1+i\sin y_1)}{e^{x_2}(\cos y_2+i\sin y_2)}=$$

$$=\frac{e^{x_1}}{e^{x_2}}\cdot\frac{(\cos y_1+i\sin y_1)(\cos y_2-i\sin y_2)}{(\cos^2 y_2+\sin^2 y_2)}=\frac{e^{x_1}}{e^{x_2}}\times$$

$$\times\left[(\cos y_1\cos y_2+\sin y_1\sin y_2)+i(\sin y_1\cos y_2-\sin y_2\cos y_1)\right]=$$

$$=\frac{e^{x_1}}{e^{x_2}}\left[(\cos(y_1-y_2)+i\sin(y_1-y_2)\right]=$$

$$=e^{x_1-x_2}\left[(\cos(y_1-y_2)+i\sin(y_1-y_2)\right]=$$

$$=e^{(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)}=e^{z_1-z_2}.$$

Funcţia $w=e^z$ posedă şi proprietăţi specifice ei:

a) Funcţia $e^z$ este periodică cu perioadele $T_k=2\pi ki,\ k\in Z\setminus\{0\}$.

Într-adevăr

$$e^{z+T_k}=e^{z+2\pi ki}=e^z\cdot e^{2\pi ki}=e^z\left(\cos 2\pi k+i\sin 2\pi k\right)=$$

$$=e^z\left(1+i\cdot 0\right)=e^z$$

Alte perioade, în afară de perioadele de forma $T_k=2\pi ki,\ k\in Z$, $k\neq 0$ funcţia $e^z$ nu are.

b) Funcţia $e^z$ primeşte orice valori din $\boldsymbol{C}$ în afară de 0, deoarece $\left|e^z\right|=e^x>0$. De exemplu $e^{\pi i}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$.



Funcţia $w=e^z$ joacă un rol important în teoria funcţiilor de o variabilă complexă: toate funcţiile transcendente de bază se definesc în domeniul complex cu ajutorul acestei funcţii.

### 9.3.4. Funcţii trigonometrice.

Definim funcţiile trigonometrice (circulare) $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$ şi $\operatorname{ctg} z$ cu ajutorul funcţiei exponenţiale $e^z$ în felul următor:

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},$$

$$\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{1}{i}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}=-i\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}=i\frac{1-e^{2iz}}{1+e^{2iz}},$$

$$\operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z}=i\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}=i\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1}.$$

Observăm că aceste funcţii sunt definite, univoce şi continue pe planul complex $\boldsymbol{C}$, exceptând punctele $z=\frac{2k+1}{2}\pi,\ k\in \boldsymbol{Z}$, adică soluţiile ecuaţiei $e^{2iz}+1=0$ pentru funcţia $\operatorname{tg} z$ şi punctele $z=\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$, adică soluţiile ecuaţiei $e^{2iz}-1=0$, pentru funcţia $\operatorname{ctg} z$.

Constatăm că, dacă $z=x\in \boldsymbol{R}$, aceste funcţii coincid cu funcţiile trigonometrice obişnuite din mulţimea numerelor reale. Într-adevăr, dacă $z=x$, adică $y=0$, atunci, de exemplu, pentru prima funcţie obţinem:

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\frac{(\cos x+i\sin x)-(\cos(-x)+i\sin(-x))}{2i}=$$

$$=\frac{\cos x+i\sin x-\cos x+i\sin x}{2i}=\sin x.$$

Majoritatea proprietăţilor de bază ale funcţiilor reale *sinx, cosx, tgx, ctgx*, $x \in R$ sunt valabile şi pentru funcţiile respective din planul complex $\boldsymbol{C}$. De exemplu:

1) din periodicitatea funcţiei $e^z$ cu perioadele $T_k = 2\pi k i$, $k \in Z$, $k \neq 0$ rezultă: funcţiile $\sin z$ şi $\cos z$ sunt periodice cu perioadele $2\pi k$, iar funcţiile $\operatorname{tg} z$ şi $\operatorname{ctg} z$ – cu perioadele $\pi k$. Într-adevăr, de exemplu,

$$\operatorname{tg}(z+\pi) = i\frac{1-e^{2i(z+\pi)}}{1+e^{2i(z+\pi)}} = i\frac{1-e^{2iz+2i\pi}}{1+e^{2iz+2i\pi}} = i\frac{1-e^{2iz}}{1+e^{2iz}} = \operatorname{tg} z.;$$

2) identităţile de bază din domeniul real sunt valabile şi pentru aceste funcţii:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, 1 + tg^2 z = \frac{1}{\cos^2 z} = \sec^2 z,$$

$$1 + ctg^2 z = \frac{1}{\sin^2 z} = \operatorname{cosec}^2 z,$$

$$\sin(-z) = -\sin z, \cos(-z) = \cos z, \quad tg(-z) = -tg\, z,$$

$$ctg(-z) = -ctg\, z,$$

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2,$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2,$$

$$tg(z_1 \pm z_2) = \frac{tg\, z_1 \pm tg\, z_2}{1 \mp tg\, z_1 \cdot tg\, z_2}, ctg(z_1 \pm z_2) = \frac{ctg\, z_1 \cdot ctg\, z_2 \mp 1}{ctg\, z_1 \pm ctg\, z_2},$$

$$\sin(z \pm \frac{\pi}{2}) = \pm \cos z,$$

$$\cos(z \pm \frac{\pi}{2}) = \mp \sin z, \ \sin(z \pm \pi) = -\sin z, \ \cos(z \pm \pi) = -\cos z.$$

Într-adevăr, de exemplu,



$$\sin^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{-4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = 1.$$

Dacă în câmpul numerelor reale modulele funcţiilor $\sin x, \cos x$, $x \in R$ nu depăşesc 1, apoi în planul complex $\boldsymbol{C}$ modulele funcţiilor $\sin z$ şi $\cos z$ pot fi oricât de mari (a se consulta ex.1 de mai jos, ex.2 şi ex.3 din 9.3.11).

### 9.3.5. Funcţii hiperbolice.

Funcţiile hiperbolice $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$ şi $\operatorname{cth} z$ în planul complex $\boldsymbol{C}$ se definesc astfel:

$$\operatorname{sh}z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \ \operatorname{ch}z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \ \operatorname{th}z = \frac{\operatorname{sh}z}{\operatorname{ch}z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} =$$

$$= \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}, \ \operatorname{cth}z = \frac{\operatorname{ch}z}{\operatorname{sh}z} = \frac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1}.$$

Dacă $z = x \in \boldsymbol{R}$, aceste funcţii coincid cu funcţiile hiperbolice respective din câmpul real.

Funcţiile hiperbolice sunt definite, univoce şi continue pe planul complex $\boldsymbol{C}$, exceptând punctele $z = \frac{2k+1}{2}\pi i$, $k \in \boldsymbol{Z}$, adică soluţiile ecuaţiei $e^{2z} + 1 = 0$ pentru funcţia $\operatorname{th} z$ şi punctele $z = k\pi i$, $k \in \boldsymbol{Z}$, adică soluţiile ecuaţiei $e^{2z} - 1 = 0$, pentru funcţia $\operatorname{cth} z$.

Identităţile de bază din câmpul real sunt valabile pentru funcţiile respective din planul complex $\boldsymbol{C}$ şi anume:

$$\mathrm{ch}^2 z - \mathrm{sh}^2 z = 1,\ 1 - \mathrm{th}^2 z = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 z} = \mathrm{sech}^2 z,$$

$$\mathrm{cth}^2 z - 1 = \frac{1}{\mathrm{sh}^2 z} = \mathrm{cosech}^2 z,\ \mathrm{sh}(-z) = -\mathrm{sh}z,\ \mathrm{ch}(-z) = \mathrm{ch}z,$$

$$\mathrm{th}(-z) = -\mathrm{th}z,\ \mathrm{cth}(-z) = -\mathrm{cth}z,$$

$$\mathrm{sh}(z_1 \pm z_2) = \mathrm{sh}z_1\mathrm{ch}z_2 \pm \mathrm{ch}z_1\mathrm{sh}z_2,$$

$$\mathrm{ch}(z_1 \pm z_2) = \mathrm{ch}z\mathrm{ch}_1 z_2 \pm \mathrm{sh}z\mathrm{sh}_1 z_2,$$

$$\mathrm{th}(z_1 \pm z_2) = \frac{\mathrm{th}z_1 \pm \mathrm{th}z_2}{1 \pm \mathrm{th}z_1 \cdot \mathrm{th}z_2},\ \mathrm{cth}(z_1 \pm z_2) = \frac{\mathrm{cth}z_1 \cdot \mathrm{cth}z_2 \pm 1}{\mathrm{cth}z_2 \pm \mathrm{cth}z_1}.$$

Propunem cititorului să demonstreze aceste relații, reieşind din definițiile funcțiilor respective.

Despre alte demonstrații vezi exemplul 2 de mai jos.

Din definiție rezultă: funcțiile sh $z$ şi ch $z$ sunt periodice cu perioadele $T_k = 2\pi ki,\ k \in \boldsymbol{Z},\ k \neq 0$ iar funcțiile th $z$ şi cth $z$ sunt periodice cu perioadele $T_k = \pi ki,\ k \in \boldsymbol{Z},\ k \neq 0$.

Reieşind din definițiile funcțiilor trigonometrice (circulare) şi hiperbolice, uşor se obțin următoarele formule:

$$\sin iz = i\mathrm{sh}z,\ \mathrm{sh}iz = i\sin z,\ \cos iz = \mathrm{ch}z,\ \mathrm{ch}iz = \cos z,$$

$$\mathrm{tg}iz = i\mathrm{th}z,\ \mathrm{th}iz = i\mathrm{tg}z,\ \mathrm{ctg}iz = -i\mathrm{cth}z,\ \mathrm{cth}iz = -i\mathrm{ctg}z.$$

**Exemplul 1.** Să se afle modulul funcției $w = \sin z$ în punctul $z = \pi + i\ln(a + \sqrt{a^2+1}),\ a \in R$.

**Rezolvare**. Fie $z = x + iy$, atunci

$$w = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \sin x\mathrm{ch}y + i\mathrm{sh}y \cos x.$$

Prin urmare,

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x\mathrm{ch}^2 y + \mathrm{sh}^2 y\cos^2 x} =$$

$$= \sqrt{\sin^2 x\mathrm{ch}^2 y + \mathrm{sh}^2 y(1 - \sin^2 x)} =$$

$$= \sqrt{\sin^2 x + \mathrm{sh}^2 y}.$$



Dacă $z = \pi + i\ln(a + \sqrt{a^2+1})$, atunci

$$\left|\sin(\pi + i\ln(a+\sqrt{a^2+1}))\right| = \sqrt{\sin^2\pi + sh^2[\ln(a+\sqrt{a^2+1})]} =$$

$$= \left|sh(\ln(a+\sqrt{a^2+1}))\right| =$$

$$= \left|\frac{e^{\ln(a+\sqrt{a^2+1})} - e^{-\ln(a+\sqrt{a^2+1})}}{2}\right| = \frac{1}{2}\left|a+\sqrt{a^2+1} - \frac{1}{a+\sqrt{a^2+1})}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|a+\sqrt{a^2+1} - \frac{a-\sqrt{a^2+1}}{a^2-a^2-1}\right| = |a|.$$

Deci: dacă $a$=2, atunci $\left|\sin(\pi + i\ln(2+\sqrt{5}))\right| = 2$, dacă $a = \pm 10$, atunci $\left|\sin\left(\pi + i\ln\left(\pm 10 + \sqrt{101}\right)\right)\right| = 10$ etc.

**Exemplul 2.** Să se demonstreze formulele

a) $\mathrm{ch}^2 z - \mathrm{sh}^2 z = 1$, b) $\mathrm{ch}(z_1 - z_2) = \mathrm{ch}z_1\mathrm{ch}z_2 - \mathrm{sh}z_1\mathrm{sh}z_2$.

**Rezolvare.**

a) Se ştie că formula $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ este valabilă pentru orice $z \in \boldsymbol{C}$. Deci $\sin^2(iz) + \cos^2(iz) = 1$.

Deoarece $\sin iz = i\mathrm{sh}z$ şi $\cos iz = \mathrm{ch}z$, obținem $i^2\mathrm{sh}^2 z + \mathrm{ch}^2 z = 1$ sau $\mathrm{ch}^2 z - \mathrm{sh}^2 z = 1$.

b) Similar punctului a) avem:

$$ch(z_1 - z_2) = \cos i(z_1 - z_2) =$$

$$= \cos(iz_1 - iz_2) = \cos iz_1 \cos iz_2 + \sin iz_1 \sin iz_2 = \mathrm{ch}iz_1\mathrm{ch}iz_2 +$$

$$+ i^2\mathrm{sh}iz_1\mathrm{sh}iz_2 = \mathrm{ch}z_1\mathrm{ch}z_2 - \mathrm{sh}z_1\mathrm{sh}z_2.$$

### 9.3.6. Funcţia logaritmică.

Funcţia logaritmică în planul complex $C$ se defineşte ca funcţia inversă funcţiei exponenţiale $e^z$: numărul $w \in C$ se numeşte *logaritmul* numărului $z \in C$, $z \neq 0$ şi se notează $w = \text{Ln}\, z$, dacă $e^w = z$.

Fie $z = |z|e^{i\varphi}$, unde $\varphi = \arg z$ şi $w = u + iv$, atunci $e^u e^{iv} = |z|e^{i\varphi}$. De unde $e^u = |z|$ şi $v = \varphi + 2\pi k = \arg z + 2\pi k, k \in \boldsymbol{Z}$, sau $u = \ln|z|$, $v = \arg z + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, unde $\ln|z|$ este logaritmul natural obişnuit de la numere reale pozitive. Prin urmare,

$$Lnz = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k) = \ln|z| + iArgz, \quad k \in Z, z \neq 0. \quad (1)$$

Aşadar funcţia $\text{Ln}\, z$ este o funcţie multivocă: are o infinitate de valori. Dacă $k$=0, obţinem că $\text{Ln}\, z = \ln|z| + i\arg z$, care se numeşte *valoarea principală* a funcţiei date şi se notează cu $\ln z$. Deci

$$Lnz = \ln z + 2\pi ki, k \in Z, \quad z \neq 0. \quad (2)$$

Dacă $z = x \in \boldsymbol{R}$ (deci $y$=0) şi $x > 0$, atunci valoarea principală a funcţiei $\text{Ln}\, z$ coincide cu funcţia logaritmică obişnuită $\ln x$ din mulţimea numerelor reale: $\ln z = \ln|x| + i\arg x = \ln x + 0 = \ln x$.

Remarcăm că, dacă funcţia reală $\ln x$ de variabila reală $x > 0$ are o singură valoare, de exemplu, $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$, atunci funcţia $\text{Ln}\, z$ este o funcţie multivocă şi, de exemplu, $Ln1$ şi $Lne$ pe lângă valorile 0 şi 1 mai au încă o infinitate de valori: $Ln1 = 2\pi ki$, $Lne = 1 + 2\pi ki$, $k \in Z$. Aşadar funcţia $\text{Ln}\, z$ este definită şi multivocă pe $\boldsymbol{C} \setminus \{0\}$.



Din formula (1) reiese următoarele proprietăţi, similare proprietăţilor logaritmului obişnuit din câmpul real:

a) $Ln(z_1 z_2) = Ln\, z_1 + Ln\, z_2$;

b) $Ln\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = Ln\, z_1 - Ln\, z_2$;

c) $Ln(z^n) = nLn\, z, \quad n = 2,3,...$;

d) $Ln\left(\sqrt[n]{z}\right) = \dfrac{1}{n} Ln\, z, \quad n = 2,3,...$;

e) $e^{Ln\, z} = z$.

Aceste egalităţi trebuie de înţeles în sensul egalităţii a două mulţimi. Într-adevăr, de exemplu,

$$\text{Ln}(z_1 z_2) = \ln|z_1 z_2| + i\arg(z_1 z_2) = \ln|z_1| + \ln|z_2| +$$
$$+ i(\arg z_1 + \arg z_2) = \text{Ln}z_1 + \text{Ln}z_2$$

În mod analog se demonstrează şi celelalte proprietăţi.

Ca proprietăţi specifice pentru funcţia $\text{Ln}\, z$, menţionăm următoarele:

1) $\text{Ln}\, z$ are o infinitate de valori;

2) $\text{Ln}\, e^z = z + 2\pi ki$, pentru orice $z \in \boldsymbol{C}$;

3) $\text{Ln}\, z$ există pentru orice $z \neq 0$, $z \in \boldsymbol{C}$, în special şi de la numere reale negative:

a) dacă $z$=-1, avem $|z| = 1$ şi $\arg z = \pi$. Conform formulei (1), obţinem că $\text{Ln}\,(-1) = (2k+1)\pi i$, $k \in \boldsymbol{Z}$ şi $\ln(-1) = \pi i.$;

b) dacă $z$=$i$, avem $|z| = 1$ şi $\arg z = \dfrac{\pi}{2}$. Deci $\text{Ln}\, i = \left(2k + \dfrac{1}{2}\right)\pi i$, $k \in \boldsymbol{Z}$ şi $\ln i = \dfrac{\pi}{2} i$.

### 9.3.7. Funcţii trigonometrice inverse.

Funcţiile trigonometrice inverse Arcsin$z$, Arccos$z$, Arctg$z$, Arcctg$z$, se definesc ca funcţii inverse ale funcţiilor trigonometrice respective $\sin z$, $\cos z$, $\mathrm{tg}\, z$, $\mathrm{ctg}\, z$.

a) Numărul $w$ se numeşte a r c s i n u s u l numărului $z \in C$, se notează $w = \mathrm{Arcsin}\, z$, dacă $z = \sin w$, adică $z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = \frac{e^{2iw} - 1}{2ie^{iw}}$ sau $e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$. Rezolvând această ecuaţie pătrată în raport cu $e^{iw}$, obţinem $e^{iw} = iz + \sqrt{1-z^2}$ *). De unde $iw = \mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$ şi $w = \mathrm{Arcsin}\, z = -i\mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$. Observăm că $\mathrm{Arcsin}\, z$ este definită şi multivocă pe $C$.

Dacă considerăm valoarea principală a logaritmului, obţinem valoarea principală a acestei funcţii, care se notează astfel: $\arcsin z$. Deci $\arcsin z = -i\ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$ şi

$$\mathrm{Arcsin}\, z = \arcsin z + 2\pi k,\ k \in Z.$$

b) Numărul $w$ se numeşte a r c c o s i n u s u l numărului $z \in C$ şi se notează $w = \mathrm{Arccos}\, z$, dacă $z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = \frac{e^{2iw} + 1}{2e^{iw}}$ sau $e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$. De unde obţinem că $e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$, Deci $w = \mathrm{Arccos} z = -i\mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$.

---

*) Nu scriem ($\pm$) înainte de rădăcină, deoarece simbolul $\sqrt[n]{z}$, $z \in C$ înseamnă toate valorile acestei rădăcini.



Această funcţie este definită şi multiformă pe $C$. Valoarea ei principală $\arccos z = -i\ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$ şi

$$\mathrm{Arccos} z = \arccos z + 2\pi k,\ k \in Z.$$

c) Numărul $w$ se numeşte a r c t a n g e n t a numărului $z \in C$ şi se notează $w = \mathrm{Arctg}\, z$, dacă $z = \mathrm{tg}\, w = i\frac{1 - e^{2iw}}{1 + e^{2iw}} = \frac{1}{i}\frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1}$. De unde $iz\left(e^{2iw} + 1\right) = e^{2iw} - 1$ sau $e^{2iw}(1 - iz) = 1 + iz$. Observăm că $1 - iz \neq 0$, adică $z \neq \frac{1}{i} = -i$, deoarece egalitatea de mai sus pentru $z=-i$ se transformă în relaţia $0=2$!!

Prin urmare, $e^{2iw} = \frac{1+iz}{1-iz} = \frac{(-i)(i-z)}{(-i)(i+z)} = \frac{i-z}{i+z}$. Deci $2iw = \mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz} = \mathrm{Ln}\frac{i-z}{i+z}$ şi $w = \mathrm{Arctg} z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz} = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{i-z}{i+z} = \frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1-iz}{1+iz} = \frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{i+z}{i-z}$, $z \neq \pm i$.

Această funcţie este definită şi multivocă pe mulţimea $C \setminus \{\pm i\}$. Valoarea principală a funcţiei $\mathrm{Arctg}\, z$, se notează astfel: $\mathrm{arctg}\, z$ şi $\mathrm{arctg}\, z = \frac{i}{2}\ln\frac{i+z}{i-z}$. Deci

$$\mathrm{Arctg}\, z = \mathrm{arctg}\, z + \pi k,\ k \in Z.$$

d) Numărul $w$ se numeşte a r c c o t a n g e n t a numărului $z \in C$ şi se notează $w = \mathrm{Arcctg}\, z$, dacă $z = \mathrm{ctg}\, w = i\frac{e^{2iw} + 1}{e^{2iw} - 1} = \frac{1}{i}\frac{1 + e^{2iw}}{1 - e^{2iw}}$. De unde $iz\left(1 - e^{2iw}\right) = 1 + e^{2iw}$, adică $e^{2iw}(1+iz) = iz - 1$. Observăm că $z \neq -\frac{1}{i} = i$, deoarece egalitatea anterioară pentru $z=i$ se transformă în relaţia $0=-2$!!

Prin urmare, $e^{2iw}=\dfrac{iz-1}{iz+1}$ şi

$$2iw=\mathrm{Ln}\frac{iz-1}{iz+1}=\mathrm{Ln}\frac{i(z+i)}{i(z-i)}=\mathrm{Ln}\frac{z+i}{z-i}.$$

Deci

$$w=\mathrm{Arcctg}z=\frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\frac{iz-1}{iz+1}=\frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\frac{z+i}{z-i}=-\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{iz-1}{iz+1}=$$

$$=-\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{z+i}{z-i}=\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{iz+1}{iz-1}=\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{z-i}{z+i},\ z\neq\pm i.$$

Funcţia $\mathrm{Arcctg}\,z$ este definită şi multivocă pe $C\setminus\{\pm i\}$.

Valoarea ei principală $\mathrm{arcctg}\,z=\dfrac{i}{2}\ln\dfrac{z-i}{z+i}$ şi

$$\mathrm{Arcctg}\,z=\mathrm{arcctg}\,z+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}.$$

### 9.3.8. Funcţii hiperbolice inverse.

Funcţiile hiperbolice inverse se definesc ca funcţii inverse funcţiilor hiperbolice $\mathrm{sh}\,z$, $\mathrm{ch}\,z$, $\mathrm{th}\,z$, $\mathrm{cth}\,z$. Se notează respectiv cu $\mathrm{Arsh}\,z$ (se citeşte a r e a s i n u s h i p e r b o l i c de $z$), $\mathrm{Arch}\,z$ (se citeşte a r e a c o s i n u s h i p e r b o l i c de $z$), $\mathrm{Arth}\,z$ (se citeşte a r e a t a n g e n t ă h i p e r b o l i c ă de $z$), $\mathrm{Arcth}\,z$ (se citeşte a r e a c o t a n g e n t ă h i p e r b o l i c ă de $z$). Prin urmare,

$w=\mathrm{Arsh}\,z$, dacă $z=\mathrm{sh}\,w$,

$w=\mathrm{Arch}\,z$, dacă $z=\mathrm{ch}\,w$,

$w=\mathrm{Arth}\,z$, dacă $z=\mathrm{th}\,w$,

$w=\mathrm{Arcth}\,z$, dacă $z=\mathrm{cth}\,w$.

Utilizând aceiaşi metodă ca în paragraful 9.3.7., obţinem următoarele formule:

$$\mathrm{Arsh}z=\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2+1},\ z\in C;\quad \mathrm{Arch}z=\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2-1},z\in C;$$



$$\mathrm{Arth}z=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+z}{1-z},\ z\neq\pm1;\ \mathrm{Arcth}z=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{z+1}{z-l},\ z\neq\pm1.$$

Funcţiile hiperbolice inverse sunt definite şi multivoce pe mulţimea valorilor admisibile. Valorile lor principale se definesc similar paragrafului precedent:

$$arshz=\ln(z+\sqrt{z^2+1}),z\in C;\ archz=\ln(z+\sqrt{z^2-1}),z\in C;$$

$$arthz=\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z},z\neq\pm1;\ arcthz=\frac{1}{2}\ln\frac{z+1}{z-1},z\neq\pm1$$

Prin urmare

$$Arshz=arshz+2\pi ki,\ k\in Z,\ z\in C;$$

$$Archz=archz+2\pi ki,\ k\in Z,\ z\in C;$$

$$Arthz=arthz+\pi ki,\ k\in Z,\ z\neq\pm1;$$

$$Arcthz=arcthz+\pi ki,\ k\in Z,\ z\neq\pm1.$$

### 9.3.9. Funcţia de putere cu exponent complex.

Funcţia $w=z^{\gamma}$, unde $\gamma\in C$ se numeşte *funcţie de putere cu exponent complex*. Această funcţie se defineşte astfel: $w=z^{\gamma}=e^{\gamma\cdot Lnz}$, $z\neq 0$.

Fie $z=|z|e^{i\varphi}=re^{i\varphi}$, $\gamma=a+bi$ unde $\varphi=\arg z\in\, ]-\pi,\pi]$ şi $a,b\in \boldsymbol{R}$, $r$>0. Deci

$$w=e^{(a+bi)[\ln r+i(\varphi+2\pi k)]}=e^{a\ln r-b(\varphi+2\pi k)}\cdot e^{i[b\ln r+a(\varphi+2\pi k)]},\ k\in \boldsymbol{Z}.\quad (1)$$

Considerăm următoarele cazuri:

a) Fie $\gamma\in Z$, adică $b$=0 şi $a=0,\pm1,\pm2,\ldots$. Deci

$$w=e^{a\ln r}\cdot e^{ia(\varphi+2\pi k)}=e^{a\ln r}\cdot e^{ia\varphi}\cdot e^{2\pi kai}=e^{a\ln r}\cdot e^{ia\varphi}\cdot 1=$$

$$=e^{a(\ln r+\varphi i)}=e^{a\ln z},$$

deoarece $e^z$ este periodică cu perioadele $T_k = 2\pi ki$ şi $(ka) \in \boldsymbol{Z}$. Prin urmare, această funcţie este definită, univocă şi continuă pe $\boldsymbol{C}$, exceptând punctul $z_0=0$.

b) Fie $\gamma = \frac{m}{n} \in Q$ şi fracţia $\frac{m}{n}$ este ireductibilă. Deci $w = z^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{z^m}$ şi această funcţie este definită şi multivocă pe $C$, exceptând punctul $z_0=0$. Funcţia $w = \sqrt[n]{z^m}$ primeşte n valori diferite, care coincid cu vârfurile unui poligon regulat cu $n$ laturi înscris într-un cerc cu centrul în punctul $O$ de raza $e^{a\ln r}$.

c) Dacă $\gamma$ este iraţional sau complex $(b \neq 0)$, atunci funcţia $w = z^\gamma$ are o infinitate de valori, adică $w = z^\gamma$ este definită şi multivocă pe C, exceptând punctul $z_0=0$.

**Exemplul 3.** Să se calculeze: $i^{\frac{3}{4}}$, $i^i$ şi $5^{\sqrt{2}}$.

**Rezolvare.**

a) Avem: $w = z^\gamma$ cu $z=i$ şi $\gamma = \frac{3}{4} \in Q$. Prin urmare, $i^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{i^3} = \sqrt[4]{-i}$ are 4 valori în $\boldsymbol{C}$ (cazul b) de mai sus):

$$\sqrt[4]{(-i)} = \sqrt[4]{1\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]} = \cos\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{4} +$$

$$+ i\sin\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{4} = \cos\frac{\pi}{8}(4k-1)+i\sin\frac{\pi}{8}(4k-1),$$

unde $k = 0,1,2,3$.

b) Avem: $w = z^\gamma$ cu $z=i$ şi $\gamma = i$ Prin urmare, funcţia are o infinitate de valori în $\boldsymbol{C}$ (cazul c) de mai sus):



$$i^i = e^{i\mathrm{Ln}\, i} = e^{i\left(\ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)},$$ unde $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Valoarea principală se obţine considerând $k=0$ şi este egală cu $e^{-\frac{\pi}{2}}$.

c) Avem: $w = z^\gamma$ cu $z=5$ şi $\gamma = \sqrt{2}$ este iraţional. Prin urmare, utilizând de asemenea cazul c) de mai sus obţinem, că numărul $5^{\sqrt{2}}$ are o infinitate de valori în $\boldsymbol{C}$: $5^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\mathrm{Ln}\,5} = e^{\sqrt{2}(\ln 5 + i(0+2\pi k))} = e^{\sqrt{2}(\ln 5 + 2\pi k i)}$, unde $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ . Valoarea principală se obţine considerând $k=0$ şi este egală cu $e^{\sqrt{2}(\ln 5+0)} = e^{\sqrt{2}\ln 5} = e^{\ln 5^{\sqrt{2}}} = 5^{\sqrt{2}}$, care coincide cu valoarea obişnuită a acestui număr în câmpul numerelor reale R.

### 9.3.10. Funcţia exponenţială generalizată.

Funcţia exponenţială generalizată are forma $w = a^z$, unde $a \neq 0$, $a \in \boldsymbol{C}$, $z \in C$ şi se defineşte în felul următor $a^z = e^{z\mathrm{Ln}\, a}$. Această funcţie este definită şi multivocă pe $\boldsymbol{C}$. Valoarea ei principală este egală cu $e^{z\ln a}$.

### 9.3.11. Exerciţii la paragraful 9.3.

1. Să se demonstreze că soluţiile următoarelor ecuaţii sunt numere reale : a) *sin z=0, z∈C;* b) *cos z =0; z∈C.*
2. Fie *sin z =2*. Sa se calculeze *cos 2z* şi *sin 3z*.
3. Fie *cos z =-7*. Sa se calculeze *cos 2z* şi *cos 3z*.
4. Să se arate că : a) $\overline{\sin z} = \sin\bar{z}$; b) $\overline{\cos z} = \cos\bar{z}$; c) $\overline{tgz} = tg\,\bar{z}$; d) $\overline{ctgz} = ctg\,\bar{z}$.
5. Să se arate că: a) $1+\cos 2z = 2\cos^2 z$, $1-\cos 2z = 2\sin^2 z$; b) $ch\,(2z)+1 = 2\,ch^2 z$, $ch\,(2z)-1 = 2\,sh^2 z$.

6. Să se determine partea reală $u(x,y)$ şi partea imaginară $v(x,y)$ a funcţiilor : a) $\sin 2z$; b) $z \cos z$; c) $sh\ 2z$; d) $z \cdot ch\ z$.

7. Să se calculeze: a) $Ln\left(\sqrt{3}-i\right)$, b) $Ln\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$;

c) $(-1)^{\sqrt{2}}$; d) $(1+i)^{i}$; e) $Arcsin\ 3$; f) $Arctg\ \left(\sqrt{2}-i\right)$;

g) $Arsh\ (-1)$; h) $Arth\ i$; i) $1^{\sqrt{2}}$; j) $Arccos\ i$; k) $sh\frac{\pi i}{2}$;

l) $th\ (\pi i)$; m) $Arctg\ \frac{i}{3}$.

8. Sa se resolve ecuaţiile: a) $e^{2z}+2e^{z}-3=0$; b) $ch\ z=i$; c) $sh(\ iz)=-i$; d) $\sin z=\pi i$; e) $\ln(z+i)=0$; f) $e^{ix}=\cos(\pi x)$, unde $x\in R$.

## Răspunsuri.

**1.** a) $z=\pi k,\ k\in Z$

$$\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=0 \Rightarrow e^{iz}=e^{-iz} \Rightarrow e^{2iz}=1 \Rightarrow e^{2iz}=e^{2ki\pi}, k\in Z\right).$$

b) $z=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\ , k\in Z.$

**2.** $\cos 2z=-7\left(\cos 2z=\cos^2 z-\sin^2 z=1-2\sin^2 z\right)$;

$\sin 3z=-26(\sin 3z=\sin 2z\cdot\cos z+\cos 2z\cdot\sin z=$

$=2\sin z\cdot\cos^2 z+\cos 2z\cdot\sin z)$.

**3.** $\cos 2z=97$; $\cos 3z=-1351$.

**6.** a) $u=\sin 2x\cdot ch2y,\ v=\cos 2x\cdot sh2y$;

b) $u=x\cos x\cdot chy+y\sin x\cdot shy,$

$v=y\cos x\cdot chy-x\sin xshy$;

c) $u=sh2x\cos 2y,\quad v=ch2x\cdot\sin 2y$;

d) $u=x\cos y\cdot chx-y\cdot\sin y\cdot shx,$



$v=y\cos y\cdot chx+x\cdot shx\cdot\sin y$.

**7.** a) $\ln 2+i\left(2\pi k-\frac{\pi}{6}\right), k\in Z$; b) $\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)i, k\in Z$;

c) $\cos(2k+1)\pi\sqrt{2}+i\sin(2k+1)\pi\sqrt{2}, k\in Z$;

d) $e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}\left[\cos(\ln 2)+i\sin(\ln 2)\right], k\in Z$;

e) $2k\pi+\frac{\pi}{2}-i\ln\left(3\pm 2\sqrt{2}\right), k\in Z$;

f) $\frac{1}{2}\left[(2k+1)\pi-arctg\sqrt{2}\right]-\frac{i}{4}\ln 3, k\in Z$;

g) $\pi ki+\ln\left[\sqrt{2}+(-1)^{k+1}\right], k\in Z$; h) $\left(k+\frac{1}{4}\right)\pi i, k\in Z$;

i) $\cos\left(2\sqrt{2}k\pi\right)+i\sin\left(2\sqrt{2}k\pi\right), k\in Z$;

j) $k\pi+\frac{i}{2}\ln 2; k\in Z$; k) i; l) 0;

m) $\left(2k\pm\frac{1}{2}\right)\pi-i\ln\left(\sqrt{2}+1\right), k\in Z$;

**8.** a) $z_1=2\pi ki,\quad z_2=(2k+1)\pi i+\ln 3, k\in Z$;

b) $z_1=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi i, z_2=\ln\left(\sqrt{2}-1\right)+$

$+\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi i, k\in Z$; c) $z=\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi$, $k\in Z$;

d) $z_1=2\pi k-i\ln\left(\sqrt{\pi^2+1}-\pi\right)$,

$z_2=(2k+1)\pi-i\ln(\sqrt{\pi^2+1}+\pi), k\in Z$;

e) $z=1-i$; f) $x=2\pi k-i\ln(\mathrm{ch}\pi), k\in Z$.

## 9.4. Derivarea funcţiei complexe de o variabilă complexă.

### 9.4.1. Derivata şi diferenţiala funcţiei.

Fie funcţia $f:G \to C,$ unde $G$ este deschisă în $C$. Notăm $\operatorname{Re} f$ şi $\operatorname{Im} f$ cu $u$ şi $v$, deci $f=u+iv.$ Dacă $z=x+iy \in C$, vom scrie $f(z)=u+iv=u(x,y)+iv(x,y)$.

Astfel funcţia $f$ poate fi privită ca o funcţie complexă de două variabile reale sau ca o funcţie complexă de o variabilă complexă. Notăm

$$z-z_0=(x-x_0)+(y-y_0)i=\Delta x+i\Delta y$$

cu $\Delta z$ (creşterea argumentului), iar

$$f(z)-f(z_0)=(u-u_0)+i(v-v_0)=\Delta u+i\Delta v$$

cu $\Delta f$ (creşterea funcţiei).

**Definiţia 1.** O funcţie complexă $f:G\to C$ se numeşte **derivabilă** în punctul $z_0 \in G$ dacă funcţia $\frac{[f(z)-f(z_0)]}{z-z_0}=\frac{\Delta f}{\Delta z}$ definită pe $G\setminus\{z_0\}$ are limită finită în punctul $z_0$. Această limită se numeşte *derivata lui $f$ în punctul $z_0$* şi se notează cu $f'(z_0)$ sau $\frac{df(z_0)}{dz}$.

Prin urmare, $f'(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}$ şi această limită nu depinde de modul cum $\Delta z$ tinde către zero, adică nu depinde de modul cum punctul $z_0+\Delta z$ se apropie de punctul $z_0$.

**Definiţia 2.** O funcţie complexă $f:G\to C$ se numeşte *diferenţiabilă* (sau $C$- diferenţiabilă, adică diferenţiabilă în sensul teoriei funcţiilor complexe de o variabilă complexă) în



punctul $z_0\in G$ dacă există un număr $\alpha \in C$ şi o funcţie complexă $f_1$ definită pe $G\setminus\{z_0\}$ astfel încât $\lim\limits_{z\to z_0} f_1(z)=0$ şi pentru orice $z=x+iy\in G\setminus\{z_0\}$ avem:

$$f(z)=f(z_0)+\alpha(z-z_0)+f_1(z)(z-z_0)$$

sau

$$\Delta f=\alpha\Delta z+f_1(z)\cdot\Delta z. \quad (1)$$

**Teoremă** (de caracterizare pentru funcţiile derivabile). Funcţia $f:G\to C$ cu $G$ deschisă în $C$ este derivabilă în $z_0\in G$, dacă şi numai dacă, $f$ este diferenţiabilă în $z_0$.

**Necesitatea.** Fie $f$ este derivabilă în $z_0 \in G$ şi $\alpha$ derivata lui $f$ în $z_0$. Notăm cu $f_1$ funcţia definită în $G$ în felul următor:

$$f_1(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-\alpha, \; pentru\ z\neq z_0\\ 0, \; pentru\ z=z_0.\end{cases}$$

Evident că $f_1$ este continuă în $z_0$, deoarece

$$\lim_{z\to z_0} f_1(z)=\lim_{z\to z_0}\left[\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-\alpha\right]=\alpha-\alpha=0=f_1(0).$$

Prin urmare, pentru orice $z_0\in G,\ z\neq z_0$ avem că

$$f_1(z)=\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-\alpha=\frac{\Delta f}{\Delta z}-\alpha.$$

De unde $\Delta f=\alpha\cdot\Delta z+f_1(z)\cdot\Delta z$, adică relaţia (1) este verificată.

***Suficienţa.*** Dacă $f$ este diferenţiabilă în $z_0\in G$, atunci pentru orice $z\in G\setminus\{z_0\}$ avem că relaţia **(1)** este satisfăcută. De unde

$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \alpha + f_1(z)$, adică $f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{z \to z_0} [\alpha + f_1(z)] =$ $= \alpha + 0 = \alpha$. Teorema este demonstrată.

***Consecință.*** Dacă funcția $f : G \to C$ este diferențiabilă în $z_0 \in G$, atunci ea este continuă în acest punct.

Demonstrația reiese imediat din (1).

Remarcăm că, similar cazului funcțiilor reale de o variabilă reală, afirmația reciprocă nu are loc. Într-adevăr considerăm următorul exemplu: fie $f(z) = \bar{z} = x - iy$. Vom arăta că această funcție, deși este continuă pe $C$ ($u = x, v = -y$ sunt continue pe $C$), nu este diferențiabilă în nici un punct $z \in C$.

Pentru funcția $f(z) = \bar{z}$ și orice $z \in C$ avem: $\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$.

Dacă $\Delta y = 0$, adică $\Delta z = \Delta x \neq 0$, avem: $\frac{\Delta f}{\Delta z} = 1$ și dacă $\Delta x = 0$, adică $\Delta z = i\Delta y \neq 0$, avem: $\frac{\Delta f}{\Delta z} = -1$. Prin urmare, funcția $\frac{\Delta f}{\Delta z}$ nu are limită când $\Delta z \to 0$.

Așadar funcția $f(z) = \bar{z}$, continuă pe $C$, nu are derivată nici într-un punct din planul complex $C$.

**Definiția 3.** Expresia $\alpha \cdot \Delta z = f'(z_0) \cdot \Delta z$ din relația (1), liniară în raport cu $\Delta z$, se numește *diferențiala funcției* în punctul $z_0 \in G$.

Prin urmare,

$$df(z_0) = f'(z_0) \cdot \Delta z. \tag{2}$$

Dacă $f(z) = z$, din (2) obținem că $\Delta z = dz$, ceea ce înseamnă că diferențiala de la o variabilă independentă $z$ coincide cu creșterea ei.



Astfel, formula (2) are forma

$$df(z_0) = f'(z_0) \cdot dz, \tag{3}$$

ceea ce înseamnă că *diferențiala funcției $f$ în punctul $z_0$ este egală cu produsul dintre derivata funcției date în punctul $z_0$ și diferențiala argumentului $z$.*

Din definiția derivatei și proprietățile limitei unei funcții complexe de o variabilă complexă rezultă că regulile de bază de derivare a funcțiilor reale de o variabilă reală sunt valabile și în acest caz. Enumerăm o parte din ele:

1) dacă $f(z) = const = A \in C$, atunci $f'(z) = 0$;

2) $[A \cdot f_1(z)]' = A \cdot f_1'(z), A \in C$;

3) **derivarea sumei algebrice:**

$$[f_1(z) \pm f_2(z)]' = f_1'(z) \pm f_2'(z);$$

4) **derivarea produsului:**

$$[f_1(z) \cdot f_2(z)]' = f_1'(z) \cdot f_2(z) + f_1(z) \cdot f_2'(z);$$

5) **derivarea câtului:**

$$\left[\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right]' = \frac{f_1'(z) \cdot f_2(z) - f_1(z) \cdot f_2'(z)}{[f_2(z)]^2}, f_2(z) \neq 0;$$

În aceste cazuri se presupune că funcțiile $f_1(z)$ și $f_2(z)$ sunt derivabile în punctul $z \in G$.

**6) derivarea funcției compuse:** fie funcția $z = \varphi(s)$ este derivabilă în $s_0 \in G_1$, iar funcția $w = f(z)$ este derivabilă în $z_0 = \varphi(s_0) \in G_2$, unde $G_1$ și $G_2$ sunt mulțimi deschise în $C$. Atunci funcția compusă $w = f(\varphi(s))$ este derivabilă în $s_0 \in G_1$ și derivata ei $w'(z_0) = w'(z_0) \cdot \varphi'(s_0)$.

7) **derivarea funcțiilor inverse:** fie funcția $w = f(z)$ ce stabilește o corespondență biunivocă între mulțimile $E_1$ și $E_2$,

care sunt deschise în $C$. Presupunem că funcţia inversă $z=\varphi(w)$ este continuă pe $E_2$. Dacă $f(z)$ este derivabilă în $z_0 \in E_1$ şi $f'(z_0)\neq 0$, atunci funcţia inversă $\varphi(w)$ este derivabilă în $w_0 = f(z_0) \in E_2$ şi $\varphi'(w_0)=\dfrac{1}{f'(z_0)}$.

### 9.4.2. Condiţiile Cauchy-Reimann.

Reamintim, că funcţia reală $\varphi(x, y)$ de 2 variabile reale $x$ şi $y$, definită într-o vecinătate a punctului $(x_0, y_0)$, se numeşte **diferenţiabilă în** $(x_0, y_0)$ dacă creşterea ei totală $\Delta\varphi = \varphi(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-\varphi(x_0, y_0)$ poate fi reprezentată sub forma $\Delta\varphi = A_1\Delta x + A_2\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y$, unde $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y) = \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y) = 0$, coeficienţii $A_1$ şi $A_2$ nu depind de $\Delta x$ şi $\Delta y$, ci depind numai de punctul $(x_0, y_0)$ şi $A_1 = \varphi'_x(x_0,y_0)$, $A_2=\varphi'_y(x_0,y_0)$ (a se consulta [18], 5.4.2 ).

Fie $f: G\to C$, unde $G$ este deschisă în $C$. Dacă $z=x+iy\in G$, atunci $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$, unde $u(x, y)$ şi $v(x, y)$ sunt funcţii reale de două variabile reale definite pe mulţimea $G$. În paragraful precedent am constatat că funcţia $f(z)=\bar{z}=x-iy$ cu $u(x, y)=x$ şi $v(x,y)=-y$, definite pe planul $XOY$, nu este derivabilă în nici un punct $z$ din planul complex $C$. Aceasta înseamnă că, pentru ca funcţia $f(z)$ să fie derivabilă într-un punct $z_0\in G$, funcţiile reale $u(x,y), v(x,y)$ trebuie să satisfacă unor anumite condiţii.

Are loc următoarea teoremă, ce caracterizează funcţiile derivabile:



**Teorema 1.** O funcţie $f=u+iv: G\to C$, unde $G$ este deschisă în $C$ este derivabilă în $z_0\in G$, dacă şi numai dacă, funcţiile reale $u, v$ de două variabile reale $x, y$ sunt diferenţiabile în punctul $(x_0, y_0)$ şi

$$u'_x(x_0,y_0)=v'_y(x_0,y_0),\ u'_y(x_0,y_0)=-v'_x(x_0,y_0). \quad (1)$$

**Demonstraţie.** *Necesitatea.* Fie $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ este derivabilă în $z_0=x_0+iy_0\in G$. Aceasta înseamnă, în virtutea relaţiei (1) din 9.4.1., că

$$\Delta w = f'(z_0)\Delta z + f_1(z)\Delta z, \quad (2)$$

unde $\Delta z = z - z_0 = \Delta x + i\Delta y$;

$$\Delta w = f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=[u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)]+$$
$$+i[v(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)]=\Delta u + i\Delta v;$$
$$f'(z_0)=a+ib, a, b\in R;\ \lim_{z\to z_0} f_1(z)=0,$$

adică $f_1(z)=f_1(z_0+\Delta z)=\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)+i\varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)$ cu $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)=0.$

Efectuând operaţiile algebrice în relaţia (2), avem

$$\Delta u + i\Delta v = (a+ib)(\Delta x + i\Delta y)+$$
$$+[\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)+i\varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)](\Delta x+i\Delta y)=$$
$$=[a\Delta x - b\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x - \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y]+$$
$$+i[a\Delta y + b\Delta x + \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\Delta y + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\Delta x]$$

Egalând părţile reale şi părţile imaginare obţinem următoarele relaţii:

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x - \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y, \quad (3)$$
$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\Delta y. \quad (4)$$

Aceasta înseamnă că:

1) funcțiile $u(x,y), v(x,y)$ sunt diferențiabile în $(x_0, y_0)$.

2) derivatele lor parțiale în $(x_0, y_0)$ sunt egale cu

$$u'_x(x_0,y_0)=a, u'_y(x_0,y_0)=-b$$

$$v'_x(x_0,y_0)=b, v'_y(x_0,y_0)=a$$

Prin urmare,

$$u'_x(x_0,y_0)=v'_y(x_0,y_0)=a \text{ și}$$

$$v'_x(x_0,y_0)=-u'_y(x_0,y_0)=b \qquad (5)$$

Astfel egalitățile (1) sunt verificate.

***Suficiența.*** Dacă $u$ și $v$ sunt diferențiabile în $z_0=(x_0+iy_0)\in G$, atunci

$$\Delta u=u'_x(x_0,y_0)\Delta x+u'_y(x_0,y_0)\Delta y+\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x+$$
$$+\varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y,$$

$$\Delta v=v'_x(x_0,y_0)\Delta x+v'_y(x_0,y_0)\Delta y+\beta_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x+$$
$$+\beta_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y,$$

unde

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\beta_1(\Delta x,\Delta y)=$$
$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\beta_2(\Delta x,\Delta y)=0$$

Presupunem că relațiile (1) au loc. Deci considerând notațiile din (5) obținem:

$$\Delta w=\Delta u+i\Delta v=[a\Delta x-b\Delta y+\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x+\varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y]+$$
$$+i[b\Delta x+a\Delta y+\beta_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x+\beta_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y]=$$



$$=a(\Delta x+i\Delta y)+ib(\Delta x+i\Delta y)+$$
$$+[\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)+i\beta_1(\Delta x,\Delta y)]\Delta x+[\varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)+i\beta_2(\Delta x,\Delta y)]\Delta y=$$
$$=(a+ib)\Delta z+\left[(\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)+i\beta_1(\Delta x,\Delta y))\frac{\Delta x}{\Delta z}+\right.$$
$$\left.+(\varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)+i\beta_2(\Delta x,\Delta y))\frac{\Delta y}{\Delta z}\right]\Delta z=A\Delta z+f_1(z)\cdot\Delta z,$$

unde $A=a+ib\in C$ și

$$|f_1(z)|\le|\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)+i\beta_1(\Delta x,\Delta y)|\cdot\left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right|+|\varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)+$$
$$+i\beta_2(\Delta x,\Delta y|\cdot\left|\frac{\Delta y}{\Delta z}\right|\le|\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)+i\beta_1(\Delta x,\Delta y)|\cdot 1+$$
$$+|\varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)+i\beta_2(\Delta x,\Delta y)|\cdot 1\le|\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)|+$$
$$+|\beta_1(\Delta x,\Delta y)|+|\varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)|+|\beta_2(\Delta x,\Delta y)|.$$

Deoarece funcțiile $\varepsilon_1,\beta_1,\varepsilon_2,\beta_2$ sunt funcții reale infinit mici, când $\Delta x\to 0, \Delta y\to 0$, avem că $|f_1(z)|\to 0$, când $\Delta x\to 0, \Delta y\to 0$ și deci $\lim_{z\to z_0}f_1(z)=0$. Am obținut relația (1) din 9.4.1. , ceea ce înseamnă că funcția $f(z)$ este derivabilă în $(x_0, y_0)$ și în virtutea teoremei din 9.4.1. avem că $f'(z)=A=a+ib.$ Teorema este complet demonstrată.

Condițiile (1) din această teoremă se numesc *condițiile Cauchy-Reimann.*

**Nota 1.** Din relațiile Cauchy-Reimann (1) și (5) obținem pentru funcția $f$, derivabilă în $z_0\in G$, următoarele expresii pentru $f'(z_0)$, formal diferite:

$$f'(z_0)=u'_x(x_0,y_0)+iv'_x(x_0,y_0)=u'_x(x_0,y_0)-iu'_y(x_0,y_0)=$$
$$=v'_y(x_0,y_0)+iv'_x(x_0,y_0)=v'_y(x_0,y_0)-iu'_y(x_0,y_0). \qquad (6)$$

Pentru modulul derivatei avem următoarele patru expresii:

$$|f'(z_0)|^2 = \left[u_x'(x_0,y_0)\right]^2 + \left[v_x'(x_0,y_0)\right]^2 =$$
$$= \left[u_x'(x_0,y_0)\right]^2 + \left[u_y'(x_0,y_0)\right]^2 =$$
$$= \left[v_y'(x_0,y_0)\right]^2 + \left[v_x'(x_0,y_0)\right]^2 = \left[v_y'(x_0,y_0)\right]^2 +$$
$$+ \left[u_y'(x_0,y_0)\right]^2.$$

A cincea expresie pentru $|f'(z_0)|$ se obține astfel: din relația $|f'(z_0)|^2 = [u_x'(x_0,y_0)]^2 + [v_x'(x_0,y_0)]^2$, utilizând condițiile (1) avem:

$$|f'(z_0)|^2 = u_x'(x_0,y_0)\cdot v_y'(x_0,y_0) - u_y'(x_0,y_0)\cdot v_x'(x_0,y_0). \quad (7)$$

Ultima expresie arată că $|f'(z_0)|^2$ este jacobianul funcțiilor $u$ și $v$ în raport cu $x, y$ în punctul $z_0 = x_0 + iy_0$ ([18], 6.3.6.).

În general este dificil de a verifica condițiile de diferențiabilitate într-un punct ale funcțiilor $u$ și $v$ din teorema 1. Luând în locul lor condiții mai restrictive care să asigure diferențiabilitatea, putem enunța următoarea teoremă.

**Teorema 2.** Dacă funcțiile $u = \operatorname{Re} f$ și $v = \operatorname{Im} f$ sunt continue împreună cu derivatele lor parțiale de ordinul întâi într-o $\varepsilon$-vecinătate $U(z_0,\varepsilon)$ oricât de mică a punctului $z_0$ și derivatele lor parțiale de ordinul întâi în $z_0$ satisfac condițiile Cauchy-Reimann, atunci funcția $f = u + iv$ este derivabilă în punctul $z_0$.

Într-adevăr, continuitatea derivatelor parțiale ale funcțiilor $u$ și $v$ implică diferențiabilitatea lor în $z_0$ (a se consulta de



exemplu [18], teorema 3 din 5.4.2) și aplicând teorema 1, urmează că f este derivabilă în $z_0$.

**Exemplul 1.** Să se cerceteze derivabilitatea funcției $f(z) = z^3$ și să se calculeze derivata ei.

**Rezolvare.** Fie $z = x + iy$. Avem

$$f(z) = (x+iy)^3 = x^3 + 3x^2\cdot iy - 3xy^2 + i^3y^3 =$$
$$= (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3),$$

adică

$$u = x^3 - 3xy^2, v = 3x^2y - y^3 \text{ și}$$
$$u_x' = 3x^2 - 3y^2, u_y' = -6xy, v_x' = 6xy, v_y' = 3x^2 - 3y^2.$$

Observăm că funcțiile $u$ și $v$ și toate derivatele lor parțiale de ordinul întâi sunt continue pe planul $R^2$ și condițiile Cauchy-Riemann sunt verificate în orice punct din $R^2$:

$$u_x'(x,y) = v_y'(x,y) = 3(x^2 - y^2),$$
$$u_y'(x,y) = -v_x'(x,y) = -6xy.$$

Deci funcția $f(z)$ este derivabilă (diferențiabilă) în orice punct din planul $R^2$ și

$$f'(z) = (z^3)' = u_x'(x,y) + iv_x'(x,y) = 3x^2 - 3y^2 + i\cdot 6xy =$$
$$= 3(x^2 + 2ixy + i^2y^2) = 3(x+iy)^2 = 3z^2.$$

**Nota 2.** Fie $z = x + iy = |z|\cdot(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|\cdot e^{i\theta} = \rho\cdot e^{i\theta}$, $z \neq 0$, unde $(\rho,\theta)$ sunt coordonatele polare ale punctului $(x,y)$. Avem (vezi Fig. 1. și formula (1) din 9.1.2.):

$$x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta, \rho = \sqrt{x^2+y^2} \text{ și } \quad \theta = arctg\frac{y}{x} + m\pi,$$

$m = 0,1,-1$. În acest caz obținem că $w = f(z) = f(\rho\cdot e^{i\theta}) =$

$=u(\rho,\theta)+iv(\rho,\theta)$, unde funcţiile reale $u$ şi $v$ depind de argumentele reale $\rho$, $\theta$ şi $\rho\geq 0, \theta\in\,]-\pi,\pi]$.

Condiţiile Cauchy-Reimann în coordonatele polare au forma

$$u_\rho' = \frac{1}{\rho}\cdot v_\theta', \tag{8}$$

$$v_\rho' = -\frac{1}{\rho}\cdot u_\theta'. \tag{9}$$

Într-adevăr, folosind regula de derivare a funcţiilor compuse de mai multe variabile reale ([18], 5.4.4.), avem:

$$u_x'(x,y) = u_x'(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = u_\rho'\cdot\rho_x' + u_\theta'\cdot\theta_x' =$$

$$= u_\rho'\cdot\frac{x}{\rho} + u_\theta'\cdot\theta_x' = u_\rho'\cdot\cos\theta + u_\theta'\cdot\theta_x';$$

$$v_y'(x,y) = v_y'(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = v_\rho'\cdot\rho_y' + v_\theta'\cdot\theta_y' =$$

$$= v_y'\cdot\frac{y}{\rho} + v_\theta'\cdot\theta_y' = v_\rho'\cdot\sin\theta + v_\theta'\cdot\theta_y'.$$

Din relaţia $\theta = arctg\,\frac{y}{x} + m\pi,\ m = 0,-1,1,$ , obţinem:

$$\theta_x' = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= -\frac{1}{\rho}\cdot\sin\theta,$$

$$\theta_y' = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\rho}\cdot\cos\theta.$$



Deci $u_x'(x,y) = u_\rho'\cos\theta - u_\theta'\cdot\frac{1}{\rho}\sin\theta,\quad v_y'(x,y) =$

$= v_\rho'\sin\theta + v_\theta'\cdot\frac{1}{\rho}\cos\theta$ şi egalitatea $u_x'(x,y) = v_y'(x,y)$

implică relaţia

$$u_\rho'\cos\theta - u_\theta'\cdot\frac{1}{\rho}\sin\theta = v_\rho'\sin\theta + v_\theta'\cdot\frac{1}{\rho}\cos\theta. \tag{10}$$

Similar, din egalitatea $u_y'(x,y) = -v_x'(x,y)$ şi

$$u_y'(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = u_\rho'\cdot\rho_y' + u_\theta'\cdot\theta_y' =$$

$$= u_\rho'\cdot\sin\theta + u_\theta'\cdot\frac{\cos\theta}{\rho},$$

$$v_x'(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = v_\rho'\cdot\rho_x' + v_\theta'\cdot\theta_x' =$$

$$= v_\rho'\cdot\cos\theta - v_\theta'\cdot\frac{\sin\theta}{\rho},$$

obţinem:

$$u_\rho'\sin\theta + u_\theta'\cdot\frac{\cos\theta}{\rho} = -v_\rho'\cos\theta + v_\theta'\cdot\frac{\sin\theta}{\rho}. \tag{11}$$

Înmulţind relaţia (10) cu $\cos\theta$, iar relaţia (11) cu $\sin\theta$ şi adunându-le parte cu parte, rezultă egalitatea (8).

Înmulţind relaţia (10) cu $(-\sin\theta)$, iar relaţia (11) cu $\cos\theta$ şi adunându-le parte cu parte, obţinem egalitatea (9).

Utilizând condiţiile Cauchy-Riemann în coordonate polare (formulele (8) şi (9)), teorema 2 se formulează astfel:

**Teorema 3.** Pentru ca funcţia $f(z) = u(\rho,\theta) + iv(\rho,\theta)$ să fie derivabilă în punctul $z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$, $z_0 \neq 0$ este necesar şi suficient ca funcţiile reale u şi v să fie continue împreună cu derivatele lor parţiale de ordinul întâi într-o $\varepsilon$-vecinătate

$U(z_0,\varepsilon)$ a punctului $z_0$ şi derivatele lor parţiale de ordinul întâi în punctul $z_0$ să verifice relaţiile (8) şi (9).

Pentru a calcula derivata funcţiei $f(z)=u(\rho,\theta)+iv(\rho,\theta)$ în punctul $z_0=\rho_0 e^{i\theta_0}$, $z_0\neq 0$ obţinem următoarele formule:

a) $$f'(z)=u_x'(x,y)+iv_x'(x,y)=u_\rho'\cdot\cos\theta-$$

$$-u_\theta'\cdot\frac{\sin\theta}{\rho}+i(v_\rho'\cdot\cos\theta-v_\theta'\cdot\frac{\sin\theta}{\rho})=$$

$$=u_\rho'\cdot\cos\theta+v_\rho'\cdot\sin\theta+i(v_\rho'\cos\theta-u_\rho'\sin\theta)=$$

$$=u_\rho'(\cos\theta-i\sin\theta)+v_\rho'\cdot i(\frac{1}{i}\cdot\sin\theta+\cos\theta)=$$

$$=u_\rho'(\cos\theta-i\sin\theta)+i\cdot v_\rho'(\cos\theta-i\sin\theta)=$$

$$=(u_\rho'+iv_\rho')(\cos\theta-i\sin\theta)=$$

$$=\frac{\rho(\cos\theta-i\sin\theta)}{\rho}(u_\rho'+iv_\rho')=$$

$$=\frac{\rho}{\rho(\cos\theta+i\sin\theta)}(u_\rho'+iv_\rho')=$$

$$=\frac{\rho}{z}(u_\rho'+iv_\rho'). \qquad (12)$$

b) $$f'(z)=u_x'(x,y)+iv_x'(x,y)=u_\rho'\cdot\cos\theta-u_\theta'\cdot\frac{\sin\theta}{\rho}+$$

$$+i(v_\rho'\cdot\cos\theta-v_\theta'\cdot\frac{\sin\theta}{\rho})=$$

$$=\frac{1}{\rho}\cdot\cos\theta\cdot v_\theta'-u_\theta'\cdot\frac{\sin\theta}{\rho}+i(-\frac{\cos\theta}{\rho}\cdot u_\theta'-v_\theta'\cdot\frac{\sin\theta}{\rho})=$$



$$=v_\theta'(\frac{\cos\theta}{\rho}-i\frac{\sin\theta}{\rho})-i\cdot u_\theta'(\frac{1}{i}\cdot\frac{\sin\theta}{\rho}+\frac{\cos\theta}{\rho})=$$

$$=(v_\theta'-i\cdot u_\theta')(\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{\rho})=\frac{v_\theta'-iu_\theta'}{\rho(\cos\theta+i\sin\theta)}=$$

$$=\frac{1}{z}(v_\theta'-iu_\theta'). \qquad (13)$$

**Exemplul 2.** Să se cerceteze derivabilitatea funcţiilor

a) $f(z)=z^n; z\in C, n\in N;$

b) $f(z)=\ln z, z\neq 0, z\in C.$

**Rezolvare.**

a) Fie $z\neq 0$, atunci

$$f(z)=(\rho\cdot e^{i\theta})^n=\rho^n\cdot e^{in\theta}=\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta).$$

Deci $u(\rho,\theta)=\rho^n\cdot\cos n\theta$, $v(\rho,\theta)=\rho^n\cdot\sin n\theta$ şi

$$u_\rho'=n\rho^{n-1}\cdot\cos n\theta,\ u_\theta'=-n\rho^n\sin n\theta,$$

$$v_\rho'=n\rho^{n-1}\cdot\sin n\theta,\ v_\theta'=n\rho^n\cdot\cos n\theta.$$

Evident că condiţiile Cauchy-Reimann în coordonate polare, adică formulele (8) şi (9), sunt verificate pentru orice $z\neq 0, z\in C$. De asemenea observăm că derivatele parţiale $u_\rho', u_\theta', v_\rho', v_\theta'$ sunt funcţii continue în orice $\varepsilon$- vecinătate $U(z,\varepsilon)$ a punctului $z\neq 0, z\in C$. Deci funcţia $f(z)=z^n$, $z\neq 0$ este derivabilă pe $C\setminus\{0\}$ şi utilizând, de exemplu, formula (12) avem:

$$f'(z)=\frac{\rho}{z}(u_\rho'+iv_\rho')=\frac{\rho}{z}(n\cdot\rho^{n-1}\cos n\theta+in\cdot\rho^{n-1}\cdot\sin n\theta)=$$

$$=\frac{n\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)}{z}=\frac{n\cdot z^n}{z}=n\cdot z^{n-1}.$$

Dacă însă $z_0 = 0$, atunci

$$f'(0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(0+\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z^n - 0}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (\Delta z)^{n-1} = 0.$$

Prin urmare, funcţia $f(z) = z^n$, are derivată în orice punct din planul complex $C$ şi $(z^n)' = n \cdot z^{n-1}$.

b) Valoarea principală (sau ramura principală) $\ln z, z \neq 0$ a funcţiei multivoce $Lnz = \ln z + 2\pi k i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ este o funcţie univocă (numai pentru astfel de funcţii am definit noţiunea de derivată). Avem:

$\ln z = \ln|z| + i \arg z = \ln \rho + i\theta$, unde $\rho \neq 0, \theta \in \left]-\pi, \pi\right]$.

Deci $u(\rho, \theta) = \ln \rho$ şi $v(\rho, \theta) = \theta$.

Evident că condiţiile (8) şi (9) sunt verificate:

$$u_\rho' = \frac{1}{\rho}, u_\theta' = 0, v_\rho' = 0, v_\theta' = 1 \text{ şi } u_\rho' = \frac{1}{\rho} v_\theta', v_\rho' = -\frac{1}{\rho} u_\theta'.$$

Deoarece funcţiile $u, v, u_\rho', u_\theta', v_\rho', v_\theta'$ în baza exemplului 1 din 9.2.3 sunt continue pe $D = C \setminus \{z \in C;\ \mathrm{Re}z \leq 0,\ \mathrm{Im}z = 0\}$ din teorema 3 rezultă că funcţia $\ln z$ este derivabilă în orice punct din mulţimea $D$.

Derivata ei conform formulei (12), este egală cu

$$f'(z) = \frac{\rho}{z}\left(u_\rho' + i v_\rho'\right) = \frac{\rho}{z}\left(\frac{1}{\rho} + 0\right) = \frac{1}{z}, \quad z \in D.$$

**Nota 3.** În ceea ce priveşte funcţiile multivoce (multiforme), apoi ele, în anumite moduri, pot fi privite ca funcţii univoce (uniforme) şi apoi se pune problema derivării lor. Despre unele procedee de "transformarea" funcţiilor multivoce în funcţii univoce (uniforme), numite procedee de "uniformizare" se va vorbi mai departe în 9.4.4.



Din exemplul 2 constatăm că derivata de la o funcţie de o putere naturală $(f(z) = z^n, n \in N, z \in C)$ se calculează după aceeaşi formulă ca şi în cazul derivării funcţiei reale $f(x) = x^n, n \in N, x \in R$..

Deoarece regulile de derivare ale unei funcţii de o variabilă complexă sunt aceleaşi ca şi în cazul funcţiilor de o variabilă reală (vezi regulile 1) -7) din 9.4.1.), în baza ex. 1 şi a notei 3 de mai sus, alcătuim următorul tabel al derivatelor funcţiilor elementare de bază pe domeniul lor de existenţă din 9.4.4. (a se compara cu tabelul respectiv din cazul real [17], 2.1.8.):

$$(z^n)' = n \cdot z^{n-1}, \quad n \in N; (e^z)' = e^z; (Lnz)' = \frac{1}{z};$$

$$(z^a)' = a \cdot z^{a-1}, \ (\sin z)' = \cos z,$$

$$(\cos z)' = -\sin z; (tgz)' = \frac{1}{\cos^2 z}; (ctgz)' = -\frac{1}{\sin^2 z};$$

$$(shz)' = chz; (chz)' = shz; (thz)' = \frac{1}{ch^2 z};$$

$$(cthz)' = -\frac{1}{sh^2 z}; (Arc\sin z)' = (Arc\cos z)' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}; (Arctgz)' = \frac{1}{1+z^2};$$

$$(Arcctgz)' = -\frac{1}{1+z^2}; (Arshz)' = \frac{1}{\sqrt{z^2+1}};$$

$$(Archz)' = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}; (Arthz)' = (Arcthz)' = \frac{1}{1-z^2}.$$

Să verificăm, de exemplu, formula $(Arshz)' = \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}$:

$$(Arshz)' = \left[Ln(z+\sqrt{z^2+1})\right]' = \frac{1}{z+\sqrt{z^2+1}}\cdot\left(z+\sqrt{z^2+1}\right)' =$$

$$= \frac{1}{z+\sqrt{z^2+1}}\left(1+\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}.$$

### 9.4.3. Funcţii analitice.

**Definiţii.** O funcţie univocă $f : G \to C$ se numeşte *analitică* (sau olomorfă, sau regulară) pe mulţimea deschisă G, dacă $f$ este derivabilă în fiecare punct $z$ din $G \subseteq C$.

O funcţie complexă $f$ se numeşte *analitică* pe o mulţime oarecare $F \subset C$, dacă există o mulţime deschisă $G$ care include $F$ astfel încât $f$ să fie analitică pe $G$.

O funcţie analitică pe $C$ se numeşte *funcţie întreagă*.

În baza acestor definiţii urmează că o funcţie complexă este analitică în punctul $z_0 \in G \subseteq C$, dacă există o $\varepsilon$ - vecinătate $U(z_0, \varepsilon)$ astfel încât $f$ să fie analitică pe $U(z_0, \varepsilon)$, deci $f$ să fie derivabilă în fiecare punct $z$ din $U(z_0, \varepsilon)$.

Constatăm că noţiunile de "analiticitate" şi de „$C$ – diferenţiabilitate" pe mulţimea deschisă $G$ coincid, pe când noţiunea de „analiticitate într-un punct" este mai restrictivă decât noţiunea de „$C$ – diferenţiabilă într-un punct".

**Nota 1.** Unii autori ([1], [3], [9]) definesc termenii „analitică", „olomorfă" şi „regulară" în mod diferit ca pe urmă să demonstreze teoremele respective despre echivalenţa lor. Alţi autori ([8]) consideră că noţiunea de "funcţie olomorfă" este mai îngustă decât noţiunea de „funcţie analitică", care se referă şi la funcţiile multivoce.

În virtutea teoremei din 9.4.2. reiese următorul rezultat :

**Teorema 1.** Pentru ca funcţia $f : G \to C$, unde G este o mulţime deschisă în C, să fie analitică pe G este necesar şi suficient ca funcţiile reale $u = Re\ f$, $v = Im\ f$, împreună cu



derivatele lor parţiale de ordinul 1 să fie continue pe G şi să se verifice condiţiile Cauchy – Riemann

$$u'_x(x,y) = v'_y(x,y),\quad u'_y(x,y) = -v'_x(x,y),$$

pentru orice punct $z = x + iy \in G$.

Aplicând regulile de derivare 1) – 7) din 9.4.1, obţinem următoarele proprietăţi ale funcţiilor analitice:

***Proprietatea 1.*** Dacă $f_1(z)$ şi $f_2(z)$ sunt analitice pe un domeniu D (în sensul definiţiei 6 din 9.2.1.) din $C$, atunci suma algebrică $f_1(z) \pm f_2(z)$, produsul $f_1(z)\cdot f_2(z)$ şi câtul $\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$ cu $f_2(z) \neq 0$ pe $D$ sunt funcţii analitice pe $D$.

***Proprietatea 2.*** Dacă funcţia $f : D_1 \to D_2$ este analitică pe domeniul $D_1$, din $C$ şi funcţia $\varphi : D_2 \to C$ este analitică pe domeniul $D_2$ din $C$, atunci funcţia compusă $(\varphi \circ f) : D_1 \to C$ este analitică pe $D_1$.

***Proprietatea 3.*** Dacă funcţia $w = f(z)$ este analitică pe domeniul $D$ din $C$ şi $f'(z) \neq 0$ pentru orice punct $z$ din $D$, atunci pe mulţimea $G$ a valorilor acestei funcţii, care de asemenea este un domeniu în $C$ (acest rezultat se numeşte *principiul conservării* domeniului pentru funcţiile inverse şi este demonstrat în [5], teorema 2 din §2, [8], cap.2, §51) există funcţia inversă $\varphi = f^{-1} : G \to D$. Această funcţie este analitică pe G şi pentru orice $z_0 \in D$ avem

$$\varphi'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)},\ unde\ w_0 = f(z_0).$$

***Proprietatea 4.*** Dacă funcţia $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ este analitică pe domeniul D din C, atunci funcţiile $u(x,y)$, $v(x,y)$ verifică ecuaţia Laplace în $D$.

Într-adevăr, după teorema 1, avem :

$$u'_x(x,y) = v'_y(x,y),$$

$$u'_y(x,y) = -v'_x(x,y)$$

pentru orice punct $z = x + iy \in D$. Derivând prima relaţie de mai sus în raport cu x, iar a doua în raport cu y şi adunându-le parte cu parte obţinem:

$$u''_{xx}(x,y) + u''_{yy}(x,y) = 0, \text{ pentru orice } (x,y) \in D^{*)}.$$

Similar, derivând prima relaţie în raport cu y, iar a doua în raport cu x şi scăzându-le parte cu parte obţinem :

$$v''_{xx}(x,y) + v''_{yy}(x,y) = 0, \text{ pentru orice } (x,y) \in D.$$

Aşadar funcţiile $u$ şi $v$ verifică ecuaţia Laplace.

Funcţiile care satisfac ecuaţia Laplace se numesc funcţii *armonice*. Prin urmare, funcţiile reale $u(x,y)$, $v(x,y)$ sunt armonice şi verifică condiţiile Cauchy – Riemann pe D.

Două funcţii armonice care verifică condiţiile Cauchy – Riemann se numesc *funcţii armonice conjugate.*

Din proprietatea 4 reiese că partea reală $u(x,y)$ şi partea imaginară $v(x,y)$ ale unei funcţii $w = f(z)$ analitice pe domeniul $D$ sunt funcţii armonice conjugate pe $D$.

***Proprietatea* 5**. Dacă se cunoaşte una din funcţiile armonice conjugate $u(x,y)$ sau $v(x,y)$ definită pe domeniul simplu conex $D$ din $C$, atunci se poate de aflat şi cealaltă funcţie armonică (cu exactitate de o constantă aditivă) astfel încât funcţia $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, să fie analitică pe domeniul simplu conex $D$.

Într-adevăr, fie $u(x,y)$ partea reală a unei funcţii $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ analitice pe $D$. Atunci, aplicând condiţiile Cauchy – Riemann, obţinem :

$$dv(x,y) = v'_x(x,y)dx + v'_y(x,y)dy = -u'_y(x,y)dx + u'_x(x,y)dy.$$

*) Existenţa şi continuitatea derivatelor parţiale de ordinul doi reiese din formula lui Cauchy (vezi consecinţa 1 a teoremei 4 din 9.5.2.).



De unde (a se consulta [18], teorema 1 din 6.2.4)

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \left[-u'_y(x,y)dx + u'_x(x,y)dy\right] + A =$$

$$= \int_{(x_0,y_0)}^{(x_0+\Delta x,\, y_0+\Delta y)} \left[-u'_y(x,y)dx + u'_x(x,y)dy\right] + A =$$

$$= \int_{(x_0,y_0)}^{(x_0+\Delta x,\, y_0)} \left[-u'_y(x,y)dx + u'_x(x,y)dy\right] +$$

$$+ \int_{(x_0+\Delta x,\, y_0)}^{(x_0+\Delta x,\, y_0+\Delta y)} \left[-u'_y(x,y)dx + u'_x(x,y)dy\right] + A =$$

$$= \int_{x_0}^{(x_0+\Delta y)} \left[-u'_y(t,y_0) + u'_x(t,y_0)\cdot 0\right]dt +$$

$$+ \int_{y_0}^{(y_0+\Delta y)} \left[-u'_y(x,y)\cdot 0 + u'_x(x,t)dy\right]dt + A =$$

$$= -\int_{x_0}^{x} u'_y(t,y_0)dt + \int_{y_y}^{y} u'_x(x,t)dt + A, \qquad (1)$$

unde $(x_0,y_0)$ este un punct arbitrar din D şi A o constantă arbitrară.

Similar, dacă se cunoaşte funcţia $v(x,y)$ şi, aplicând condiţiile Cauchy – Riemann, avem:

$$du(x,y) = u'_x(x,y)dx + u'_y(x,y)dy = v'_y(x,y)dx - v'_x(x,y)dy.$$

De unde

$$u(x,y)= \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} v'_y(x,y)dx - v'_x(x,y)dy + B =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} v'_y(t,y_0)dt - \int\limits_{y_0}^{y} v'_x(x,t)dt + B, \qquad (2)$$

unde $(x_0, y_0)$ este un punct arbitrar din $D$ şi $B$ o constantă arbitrară reală.

*Notă. Proprietatea 5 este valabilă şi pentru domenii multi conexe, însă în acest caz f(z) este multivocă ([10], cap. 2, §9).*

În practică într-o vecinătate destul de mică a punctului $z_0 = x_0 + iy_0$ în loc de formulele (1) şi (2) se utilizează formulele:

$$f(z) = 2u(x,y) + A = 2u\left(\frac{z+\overline{z_0}}{2}, \frac{z-\overline{z_0}}{2i}\right) + A, \qquad (3)$$

dacă se cunoaşte funcţia *u(x,y)* şi

$$f(z) = 2iv(x,y) + B = 2iv\left(\frac{z+\overline{z_0}}{2}, \frac{z-\overline{z_0}}{2i}\right) + B, \qquad (4)$$

dacă se cunoaşte funcţia *v(x,y)*. În aceste formule $\overline{z_0}$ este numărul complex conjugat lui $z_0 = x_0 + iy_0$ iar $A$ şi $B$ sunt constante arbitrare (a se consulta [33], cap. 1, §3).

**Exemplul 3.** Să se determine funcţia analitică $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ dacă se ştie că partea ei reală $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2x$.

**Rezolvare.**

Uşor se verifică că funcţia *u(x,y)* este armonică pe *C*, adică satisface ecuaţia $u''_{xx}(x,y) + u''_{yy}(x,y) = 0$ pentru orice punct $z = x + iy \in C$.



**Metoda 1.** Aflăm *v(x,y)* după formula (1), considerând de exemplu, $x_0 = y_0 = 0$. Punctul *(0,0)* aparţine domeniului de existenţă a funcţiei *u(x,y)*. Deci

$$v(x,y) = -\int\limits_0^x u'_y(t,0)dt + \int\limits_0^y u'_x(x,t)dt + A.$$

Deoarece $u'_x(x,y) = 2x + 2$ şi $u'_y(x,y) = -2y$, rezultă că

$u'_x(x,y) = u'_x(x,t) = 2x + 2$, $\quad u'_y(x,y) = u'_y(t,0) = 0$ şi

$$v(x,y) = 0 + \int\limits_0^y (2x+2)dt + A = (2x+2)t\Big|_0^y + A = 2xy + 2y + A,$$

unde $A$ este o constantă reală arbitrară.

Prin urmare,

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = x^2 - y^2 + 2x + i(2xy + 2y + A) = (x^2 + 2xyi - y^2) + (2x + 2iy) + Ai = (x + iy)^2 + 2(x + iy) + Ai = z^2 + 2z + Ai$, unde $Ai$ este o constantă arbitrară.

**Metoda 2.** Aplicând formula (3) cu

$$x_0 = y_0 = 0,\ x = \frac{z}{2},\ y = \frac{z}{2i},\ z_0 = \overline{z_0} = 0,$$

obţinem:

$$f(z) = 2u(x,y) + A = 2u\left(\frac{z+\overline{z_0}}{2}, \frac{z-\overline{z_0}}{2i}\right) + A =$$

$$= 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) + A =$$

$$=\left[\left(\frac{z}{2}\right)^2-\left(\frac{z}{2i}\right)^2+2\cdot\frac{z}{2}\right]+A=2\left(\frac{z^2}{4}+\frac{z^2}{4}+z\right)+A=$$

$$=2\left(\frac{z^2}{2}+z\right)+A=z^2+2z+A,$$

unde $A$ este o constantă complexă arbitrară.

**Metoda 3.** În virtutea condiţiilor Cauchy – Reimann avem :

$$v'_x(x,y)=-u'_y(x,y)=2y$$

$$v'_y(x,y)=u'_x(x,y)=2x+2.$$

Integrând prima relaţie în raport cu $x$ obţinem :

$$v(x,y)=\int 2y dx=2y\cdot x+\varphi(y)=2xy+\varphi(y).$$

Pentru a afla funcţia $\varphi(y)$ derivăm ultima egalitate în raport cu y:

$$v'_y(x,y)=2x+\varphi'(y), \text{ adică } 2x+2=2x+\varphi'(y).$$

De unde $\varphi'(y)=2$ *şi* $\varphi(y)=\int 2dy=2y+A,\ A\in R.$

Prin urmare,

$$v(x,y)=2xy+\varphi(y)=2xy+2y+A \text{ şi}$$

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=x^2-y^2+2x+i(2xy+2y+A)=$$

$$=(x+iy)^2+2(x+iy)+Ai=z^2+2z+Ai,\ A\in R.$$

Remarcăm că în aceste trei rezultate funcţia analitică este determinată cu exactitate de o constantă arbitrară. Dacă, de exemplu, am pune condiţia $f(i)=-1+i$ am obţine un singur rezultat:

**Metoda 1.** Avem $f(z)=z^2+2z+Ai$ *şi* $f(i)=i-1$, deci $-1+i=i^2+2i+Ai$. De unde $A+2=1$, adică $A=-1$ şi $f(z)=$ $=z^2+2z-i$.

**Metoda 2.** Avem $f(z)=z^2+2z+A$ şi $f(i)=i-1$. Deci $-1+i=i^2+2i+A$ sau $-1+i=-1+2i+A$. De unde $A=-i$ *şi* $f(z)=z^2+2z-i$.



**Metoda 3.** Avem $f(z)=z^2+2z+Ai$ şi $f(i)=i-1$

De unde $A=-1$ şi $f(z)=z^2+2z-i$.

**Teorema 2.** O funcţie $f$ analitică pe un domeniu $D$ din $C$ este constantă pe $D$ atunci şi numai atunci, când $f'(z)=0$ pentru orice $z\in D$.

***Necesitatea.*** Dacă $f$ este constantă pe $D$, atunci, utilizând regula 1 de derivare din 9.4.1., obţinem $f'(z)=0$ pentru orice $z\in D$.

***Suficienţa.*** Fie $f'(z)=0$ pe D. Deoarece $f$ este analitică pe $D$ urmează că $f'(z)=u'_x(x,y)+iv'_x(x,y)=0$ şi $f'(z)=$ $=v'_y(x,y)-iu'_y(x,y)=0$, pentru orice $z=x+iy\in D$.

Deci $u'_x(x,y)=u'_y(x,y)=v'_x(x,y)=v'_y(x,y)=0$, pentru orice $z=x+iy\in D$.

Din teoria funcţiilor reale de două variabile reale se ştie că dacă o funcţie reală $\varphi(x,y)$ are derivatele parţiale nule pe un domeniu $D$ din $R^2$, atunci această funcţie este constantă pe $D$ ([1], t.1, 2.3.2.).

Prin urmare, funcţiile $u(x,y)$ şi $v(x,y)$ sunt constante pe $D$ şi deci $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ este de asemenea o funcţie constantă pe $D$. Teorema este complet demonstrată.

**Teorema 3.** O funcţie $f$ analitică pe un domeniu $D$ din $C$ este constantă pe $D$, dacă şi numai dacă, cel puţin una din funcţiile $u=Ref$, $v=Imf$, $|f|$, $argf$ este constantă pe $D$.

***Necesitatea.*** Dacă $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=const=c_1+ic_2$, unde $c_1$ şi $c_2$ sunt constante reale, avem că $u(x,y)=c_1$, $v(x,y)=c_2$ sunt constante reale pe $D$.

Prin urmare $|f|=\sqrt{C_1^2+C_2^2}$ şi $argf=tg\dfrac{C_2}{C_1}+m\pi$, $m=0,1,-1$ sunt de asemenea constante reale pe $D$.

**Suficienţa.** Dacă $u = Ref = const$ pe $D$, atunci $u'_x(x,y) = u'_y(x,y) = 0$ şi $f'(z) = u'_x(x,y) - iu'_y(x,y) = 0 - i \cdot 0 = 0$ pentru orice $z \in D$ (am utilizat formula (6) din 9.4.2.). În virtutea teoremei 2 de mai sus, funcţia $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ este constantă pe $D$. Similar, dacă $v(x,y) = c$ pe $D$, atunci $v'_x(x,y) = v'_y(x,y) = 0$ pe $D$ şi $f'(z) = v'_y(x,y) + iv'_x(x,y) = 0$ pe $D$. Conform teoremei 2 avem că $f(z)$ este constantă pe $D$.

Dacă $|f|^2 = u^2(x,y) + v^2(x,y)$ este o fruncţie constantă pe $D$, atunci derivând în raport cu x şi y această relaţie obţinem :

$$\begin{cases} 2u(x,y) \cdot u'_x(x,y) + 2v(x,y) \cdot v'_x(x,y) = 0, \\ 2u(x,y) \cdot u'_y(x,y) + 2v(x,y) \cdot v'_y(x,y) = 0, \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} u(x,y) \cdot u'_x(x,y) + v(x,y) \cdot v'_x(x,y) = 0, \\ u(x,y) \cdot u'_y(x,y) + v(x,y) \cdot v'_y(x,y) = 0, \end{cases}$$

Utilizând condiţiile Cauchy-Riemann în ecuaţia a doua a acestui sistem, rezultă că

$$\begin{cases} u(x,y) \cdot u'_x(x,y) + v(x,y) \cdot v'_x(x,y) = 0, \\ -u(x,y) \cdot v'_x(x,y) + v(x,y) \cdot u'_x(x,y) = 0, \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} u(x,y) \cdot u'_x(x,y) + v(x,y) \cdot v'_x(x,y) = 0, \\ -v(x,y) \cdot u'_x(x,y) + u(x,y) \cdot v'_x(x,y) = 0, \end{cases}$$

Acest sistem este un sistem liniar şi omogen în raport cu necunoscutele $u'_x(x,y), v'_x(x,y)$. Determinantul sistemului este egal cu $u^2(x,y) + v^2(x,y) = |f|^2$.

Dacă $u^2(x,y) + v^2(x,y) = 0$, adică $u(x,y) = v(x,y) = 0$, atunci $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = 0$ este constantă pe $D$. Dacă $|f|^2 \neq 0$, atunci acest sistem omogen admite ca soluţie, soluţia trivială:



$u'_x(x,y) = v'_x(x,y) = 0$ pentru orice $z = x+iy \in D$ şi deci $f'(z) = u'_x(x,y) + iv'_x(x,y) = 0$ pe $D$. După teorema 2 conchidem că $f$ este constantă pe $D$. În sfârşit, dacă $\arg f = arctg \frac{v}{u} + m\pi = k_0, m = 0,1,-1$, este o funcţie constantă pe $D$, atunci raportul $\frac{v}{u} = tgk_0 = k$ este o funcţie constantă pe $D$. Fie $u(x,y) = 0$ pe $D$, atunci după prima parte a acestei teoreme, funcţia $f(z)$ este constantă pe $D$. Dacă însă $u(x,y) \neq 0$, avem : $v(x,y) = k \cdot u(x,y)$ pe $D$ şi

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = u(x,y)(1+ik).$$

Considerăm funcţia complexă

$$f_1(z) = -(k+i) \cdot f(z) = (-k-i)(1+ik) \cdot u(x,y) = \\ = (-i)(1+k^2) \cdot u(x,y),$$

care are partea reală egală cu zero pe $D$. După prima parte a acestei teoreme, funcţia $f_1(z)$ este constantă pe $D$ şi prin urmare, $f$ este de asemenea constantă pe $D$. Teorema este complet demonstrată.

Din teorema 3 reiese următorul rezultat: orice funcţie analitică pe un domeniu $D$ din $C$ nu poate avea partea reală constantă şi partea imaginară neconstantă. Ca un caz particular al acestui rezultat constatăm următoarele: orice funcţie analitică pe un domeniu $D$ din $C$ nu poate fi pur reală sau pur imaginară decât în cazul când funcţia degenerează într-o constantă.

## 9.4.4. Exemple de funcţii analitice.

Studiem analiticitatea unor funcţii elementare de bază din 9.3.

**1. Funcţia polinomială**

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n \cdot z^n,$$

unde $a_0, a_1, ..., a_n \neq 0$ sunt numere complexe din $C$ şi $n \in N$, este analitică pe $C$, adică este o funcţie întreagă ca suma şi produsul a unui număr finit de funcţii analitice pe $C$.

Constatăm că derivata ei

$$P_n'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + ... + n \cdot a_n \cdot z^{n-1},$$

(a se consulta proprietatea 1 din 9.4.3. şi regulile de derivare 1) – 4) din 9.4.1.) este de asemenea o funcţie analitică pe $C$.

**2. Funcţia exponenţială**

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Observăm că

$$u(x,y) = e^x \cos y \text{ şi } v(x,y) = e^x \sin y.$$

Aceste funcţii satisfac condiţiile Cauchy – Riemann:

$$u_x'(x,y) = e^x \cos y = v_y'(x,y) \quad \text{şi} \quad u_y(x,y) = -e^x \sin y = -v_x'(x,y)$$

pentru orice $(x,y)$ din planul $XOY$ şi

$$f_x'(z) = u_x'(x,y) + i \cdot u_x'(x,y) = e^z.$$

În virtutea teoremei 1 din 9.4.3, funcţia $e^z$ este analitică pe $C$.

3. **Funcţiile** $\sin z, \cos z, shz, chz$ **şi** $z^n, n \in N$ sunt funcţii analitice pe $C$, deoarece ele sunt derivabile pe $C$ (a se consulta 9.3.4, 9.3.5 şi regulile de derivare din 9.4.1).

Toate funcţiile de mai sus sunt exemple de funcţii analitice pe $C$ sau funcţii întregi.

4. Funcţia raţională

$$f(z) = \frac{Q_m(z)}{P_n(z)}, \quad P_n(z) \neq 0$$



este analitică pe $C$, exceptând punctele în care funcţia polinomială de la numitor se transformă în zero(ca raportul a două funcţii analitice – proprietatea 1 din 9.4.3.).

5. **Funcţiile** $tgz$ **şi** $ctgz$ sunt analitice pe $C$ (în baza proprietăţii 1 din 9.4.3), exceptând în primul caz punctele $z_k = \frac{2k+1}{2}\pi$, iar în al doilea caz – punctele $z_k = \pi \cdot k$, unde $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$.

6. **Funcţiile** $thz$ **şi** $cthz$ sunt analitice pe planul complex $C$ (în baza proprietăţii 1 din 9.4.3), exceptând în primul caz punctele $z_k = \frac{2k+1}{2}\pi \cdot i$, iar în al doilea caz – punctele $z_k = \pi \cdot k \cdot i$, unde $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$.

Deoarece noţiunea de derivată a fost introdusă pentru funcţii univoce (se mai numesc uniforme), trecem acum la studiul funcţiilor multivoce (sau multiforme).

Fie $F(z)$ o funcţie multivocă definită pe domeniul $D$ din $C$.

**Definiţia 1.** Funcţia univocă şi continuă $f(z)$ pe domeniul $D$ din $C$ se numeşte *ramură univocă şi continuă a funcţiei multivoce* $F(z)$ pe $D$, dacă valorile funcţiei $f$ în orice punct din $D$ coincid cu una din valorile funcţiei $F$ în acest punct.

Procesul de separare a ramurilor univoce şi continue ale unei funcţii multivoce se numeşte *procesul de uniformizare a ei.*

**Definiţia 2.** Punctul $z_0 \in D$ care prin ocolire face ca valorile funcţiei $F(z)$ să treacă de pe o ramură pe alta, se numeşte *punct critic* sau *punct de ramificare al acestei funcţii.*

De obicei pentru a uniformiza o funcţie multivocă se utilizează frecvent procedeul geometric. Fie funcţia multivocă $F(z)$ are $n$ ramuri (fiecărui $z$ i se asociază $n$ valori ale funcţiei $F$). Considerăm $n$ plane complexe $XOY$ indentice între ele. Pe fiecare plan se efectuează un număr de tăieturi (specifice funcţiei date) care trec prin punctele critice ale funcţiei $F(z)$.O parte a tăieturii din primul plan se lipeşte cu partea opusă a tăieturii identice din planul al doilea etc. În sfârşit partea rămasă a tăieturii din ultimul plan se lipeşte cu partea rămasă a tăieturii din primul plan. Suprafaţa, astfel obţinută din cele $n$ plane, se numeşte *suprafaţa Riemann* pentru funcţia $F(z)$. Prin urmare, orice drum ce ocoleşte punctele critice ale funcţiei $F(z)$ automat va trece, la tăietură, de pe un plan complex pe celalalt, deci de pe o ramură a funcţiei date pe cealaltă ramură a ei. Planele complexe ce formează suprafaţa lui Riemann pentru $F(z)$ se numesc *foile* acestei funcţii. Pe aceste foi ramura respectivă a funcţiei $F(z)$ devine deja o funcţie univocă şi continuă.

Despre alte procedee de uniformizare a se consulta [3], 3.22.

Vom aplica acest procedeu la cercetarea analiticităţii unor funcţii multivoce elementare.

7. **Funcţia logaritmică** (9.3.6)

$$\mathrm{Ln}z=\ln|z|+i(\arg z+2\pi k)=\ln z+2\pi ki,\ z\neq 0,\ k\in Z$$

este o funcţie multivocă care are o infinitate de ramuri.

Funcţia $\ln z$ reprezintă ramura principală ($k$=0) a funcţiei $\mathrm{Ln}z$. Conform schemei de mai sus se consideră o infinitate de plane complexe $XOY$ indentice între ele aşezate unul pe altul în ordinea ..., $n=-2$, $n=-1$, $n=0$, $n=1$, $n=2$, ... .

Deoarece funcţia reală $\ln x$ are ca domeniu de definiţie intervalul $]0,+\infty[$ pe fiecare din aceste plane se face o tăietură identică pe semiaxa negativă a axei reale $OX$, adică tăietura conţine punctele de forma $\{z\in C,\ \mathrm{Im}z=0,\ \mathrm{Re}z\leq 0\}$.

Punctul critic al funcţiei $\mathrm{Ln}z$ este $z_0=0$. Suprafaţa Riemann pentru $\mathrm{Ln}z$ se obţine astfel: o parte a tăieturii din planul dat se lipeşte cu partea opusă a tăieturii din planul următor etc. Astfel suprafaţa Riemann pentru $\mathrm{Ln}z$ are o infinitate de foi şi orice traseu ce înconjoară punctul critic $z_0=0$ mută valoarea funcţiei date de pe o ramură pe cealaltă. Aşadar pentru orice

$$z\in D=C\setminus\{z\in C,\ \mathrm{Re}z\leq 0,\ \mathrm{Im}z=0\}$$

şi orice $k\in Z$ funcţiile



$$f(k)=\mathrm{Ln}z=\ln|z|+i(\arg z+2\pi k),$$

unde $\arg z\in\,]\pi,\pi]$ reprezintă ramurile univoce şi continue ale funcţiei $\mathrm{Ln}z$.

Utilizând exemplul 2b din 9.4.2, obţinem că

$$f_k'(z)=(Lnz)'=(\ln z+2\pi ki)'=\frac{1}{z}+0=\frac{1}{z}$$

pentru orice $k\in Z$ şi $z\in D$.

Prin urmare, ramurile univoce şi continue ale funcţiei $\mathrm{Ln}z$ sunt funcţii analitice pe $D$.

8. **Funcţiile multivoce** (9.3.7)

$$\mathrm{Arcsin}z=-i\mathrm{Ln}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)=\arcsin z+2\pi k\quad k\in Z;$$

$$\mathrm{Arccos}z=-i\mathrm{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)=\arccos z+2\pi k,\quad k\in Z$$

au o infinitate de ramuri, ele fiind definite cu ajutorul funcţiei Ln. Ramurile principale sunt respectiv funcţiile

$$\arcsin z=-i\ln\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)$$

$$\arccos z=-i\ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$$

Punctele critice ale acestor funcţii sunt $z_1=-1$, $z_2=1$. Deoarece funcţiile reale $\arcsin x$, $\arccos x$, au ca domeniu de existenţă segmentul $[-1,\ 1]$, pentru a uniformiza aceste două funcţii pe planele complexe identice $XOY$ se fac două tăieturi identice de-a lungul axei reale $OX$: de la 1 pentru $x\geq 1$ şi de la $(-1)$ pentru $x\leq -1$. Suprafaţa Riemann se formează astfel: o parte oarecare ale ambelor tăieturi din planul dat se lipeşte cu partea opusă ale tăieturilor respective din planul complex următor etc. Astfel suprafaţa Reimann pentru funcţiile date are o infinitate de foi şi orice traseu ce ocoleşte punctele critice $z_1=-1$ şi $z_2=1$ mută valorile funcţiilor $\mathrm{Arcsin}z$, $\mathrm{Arccos}z$ de pe o ramură pe cealaltă.

Aşadar pentru orice $z\in D=C\setminus\{z\in C,\ |\mathrm{Re}z|\geq 1,\ \mathrm{Im}z=0\}$ şi orice $k\in Z$ funcţiile

$$f_k(z)=\arcsin z+2k\pi,\quad \varphi_k(z)=\arccos z+2k\pi$$

reprezintă ramurile univoce şi continue ale funcţiilor $\mathrm{Arcsin}z$, şi $\mathrm{Arccos}z$.

Aceste funcții sunt analitice pe $D$ și

$$f_k'(z)=(Arc\sin z)'=\left[-i\cdot\ln(iz+\sqrt{1-z^2})+2\pi k\right]'=$$

$$=(-i)\cdot\frac{1}{iz+\sqrt{1-z^2}}\cdot\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)'=$$

$$=\frac{-i}{iz+\sqrt{1-z^2}}\cdot\frac{i\sqrt{1-z^2}-z}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}};$$

$$\varphi_k'(z)=(Arc\cos z)'=\left[-i\cdot\ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)+2\pi k\right]'=$$

$$=\frac{-i}{z+\sqrt{z^2-1}}\cdot\frac{\sqrt{z^2-1}+z}{\sqrt{z^2-1}}=\frac{-i^2}{i\sqrt{z^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}.$$

9. **Funcțiile multivoce**

$$Arctgz=\frac{i}{2}Ln\frac{i+z}{i-z}=arctgz+k\pi\ ,$$

$$Arcctgz=\frac{i}{2}Ln\frac{z-i}{z+i}=arcctgz+k\pi\ ,\ k\in Z$$

au o infinitate de ramuri. Ramurile principale sunt respectiv funcțiile $arctgz$ și $arcctgz$. Punctele critice sunt $z_1=i$ și $z_2=-i$. Uniformizarea acestor funcții se face cu ajutorul a două tăieturi de-a lungul axei $Oy$: de la 1 pentru $y=\operatorname{Im}z\geq 1$ și alta de la $(-1)$ pentru $y=\operatorname{Im}z\leq -1$. Funcțiile sunt analitice pe domeniul $D=C\setminus\{z\in C,|\operatorname{Im}z|\geq 1,\operatorname{Re}z=0\}$ și derivata funcțiilor ce caracterizează ramurile funcțiilor date se calculează după aceeași formulă:

$$(Arctgz)'=\left(\frac{i}{2}\ln\frac{i+z}{i-z}+\pi k\right)'=\frac{i}{2}[\ln(i+z)-\ln(i-z)]'=$$

$$=\frac{i}{2}\cdot\left(\frac{1}{i+z}+\frac{1}{i-z}\right)=\frac{1}{z^2+1};$$



$$(Arcctgz)'=\left(\frac{i}{2}\ln\frac{z-i}{z+i}+\pi k\right)'=\frac{i}{2}[\ln(z-i)-\ln(z+i)]'=$$

$$=\frac{i}{2}\cdot\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right)=-\frac{1}{z^2+1}.$$

10. **Funcția de putere cu exponent complex**

$$f(z)=z^\alpha,\ \ \alpha\in C,z\neq 0,z\in C.$$

Dacă $\alpha$ este un număr natural, funcția $z^\alpha$ este univocă și analitică pe $C$, deoarece $f'(z)=\alpha\cdot z^{\alpha-1}$ pentru orice $z\in C$ (vezi ex. 2a) din 9.4.2.).

Dacă $\alpha$ este rațional, adică $\alpha=\frac{m}{n}, m\in Z, n\in N$, atunci funcția

$$f(z)=z^\alpha=z^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{\rho^m}\left(\cos\frac{m\theta+2\pi k}{n}+i\sin\frac{m\theta+2\pi k}{n}\right),$$

unde $\rho=|z|,\theta=\arg z, k=0,1,2,...,(n-1)$ este o funcție multivocă cu $n$ ramuri. Punctul $z_0=0$ este un punct critic. Uniformizarea acestei funcții se face cu ajutorul unei tăieturi de-a lungul semiaxei pozitive a axei reale $OX$, pe fiecare din cele $n$ plane identice $XOY$.

Astfel funcțiile $f^k(z)=z^\alpha, k=0,1,2,...,(n-1)$ sunt analitice pe domeniul

$$D=C\setminus\{z\in C,\operatorname{Re}z\geq 0,\operatorname{Im}z=0\},$$

deoarece funcțiile

$$u(\rho,\theta)=\operatorname{Re}f_k(z)=\sqrt[n]{\rho^m}\cdot\cos\left(\frac{m\theta+2\pi k}{n}\right),$$

$$v(\rho,\theta)=\operatorname{Im}f_k(z)=\sqrt[n]{\rho^m}\cdot\sin\left(\frac{m\theta+2\pi k}{n}\right)$$

satisfac condițiile teoremei 3 din 9.4.2. pentru orice punct $z$ din domeniul $D$. Și, în acest caz,

$$f'(z)=(z^\alpha)'=\alpha\cdot z^{\alpha-1}, z\in D.$$

În fine, dacă $\alpha$ este irațional sau complex, funcția $z^\alpha$ este multiformă şi are o infinitate de ramuri.

Deoarece în acest caz $f(x)=z^\alpha=e^{\alpha Lnz}$ se exprimă cu ajutorul funcției Lnz, pe fiecare din planele complexe identice $XOY$ se face o tăietură pe semiaxa negativă a axei reale $OX$. Astfel pentru orice $k\in Z$ şi orice $z\in D=C\backslash\{z\in C,\ \mathrm{Re}z\le 0,\ \mathrm{Im}z=0\}$ funcțiile

$$f_k(z)=z^\alpha=e^{\alpha Lnz}=e^{\alpha(\ln z+2\pi k)}$$

reprezintă ramurile univoce şi continue ale funcției $z^\alpha$. Aceste ramuri sunt funcții analitice pe $D$ şi

$$f_k'(z)=\left(z^\alpha\right)'=\left(e^{\alpha Lnz}\right)'=e^{\alpha Lnz}\cdot(\alpha Lnz)'=e^{\alpha Lnz}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{z}=$$

$$=z^\alpha\cdot\alpha\cdot\frac{1}{z}=\alpha\cdot z^{\alpha-1}.$$

### 9.4.5. Sensul geometric al derivatei.

Fie funcția $w=f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ este analitică pe domeniul D din C. Aceasta înseamnă că în fiecare punct $z_0=x_0+i\cdot y_0$ există derivata $f'(z_0)\in C$. Presupunem că $f'(z_0)\neq 0$. Notăm $\Delta z=\Delta\rho\cdot e^{i\cdot\varphi},\Delta w=\Delta r\cdot e^{i\cdot\theta}$ şi $f'(z_0)=A\cdot e^{i\cdot\alpha},A\neq 0$. Avem:

$$A\cdot e^{i\cdot\alpha}=f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta\rho}\cdot e^{i(\theta-\varphi)}.$$

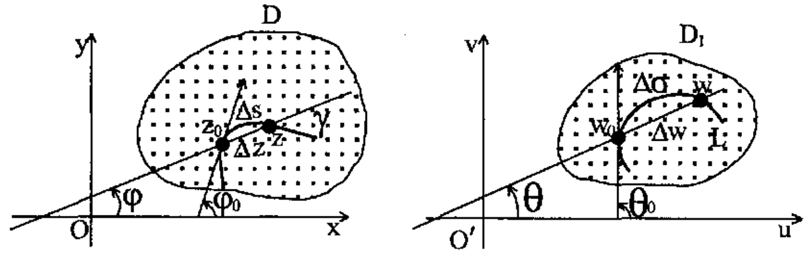
Deci

$$|f'(z_0)|=A=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta\rho},\tag{1}$$

$$\arg f'(z_0)=\alpha=\lim_{\Delta z\to 0}(\theta-\varphi)\tag{2}$$

Prin punctul $z_0$ ducem linia $\gamma$ şi considerăm punctul $z=z_0+\Delta z\in\gamma$ (vezi fig. 1.).






a) b)

**Fig. 1.**

Aplicația $w=f(z)$ va transforma punctele $z_0,z$ din $xOy$ în punctele $w_0$ şi $w$ din $uO'v$, linia $\gamma\subset D$ în linia $L$ din $D_1$ (domeniul valorilor funcției $f$).

Notăm prin $\Delta s$ lungimea arcului liniei $\gamma$ cuprins între punctele $z_0$ şi $z$, iar prin $\Delta\sigma$ lungimea arcului liniei $L$ ce uneşte punctele respective $w_0$ şi $w$ ale aplicației $w=f(z)$. Se ştie că $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta s}{|\Delta z|}=\lim\limits_{\Delta\rho\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta\rho}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta\sigma}{|\Delta w|}=\lim\limits_{\Delta r\to 0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta r}=1$ .

Deci formula (1) se transformă în formula

$$|f'(z_0)|=A=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta\rho}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}.\tag{3}$$

Din formula (3) observăm că $|f'(z_0)|$ este egal cu limita raportului mărimii infinit mici $\Delta r$ a modulului vectorului $\overrightarrow{\Delta w}$ către mărimea infinit mică $\Delta\rho$ a modulului vectorului $\overrightarrow{\Delta z}$. Deoarece funcția $f$ este analitică în $z_0$, $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=f'(z_0)$ nu depinde de modul în care punctul $z$ se apropie de punctul $z_0$. Prin urmare, limita (1) este aceeaşi, indiferent de forma liniei $\gamma$

ce trece prin $z_0$. Aşadar *modulul* $|f'(z_0)|$ *geometric înseamnă coeficientul de deformare liniară în punctul* $z_0$ *al aplicaţiei* $w=f(z)$. Dacă $|f'(z_0)|>1$, atunci într-o vecinătate mică a punctului $z_0$, distanţa dintre punctele respective ($w_0$ şi $w$) ale aplicaţiei $w=f(z)$ se va mări, adica avem o dilatare a planului $uO'v$ ; dacă însă $|f'(z_0)|<1$, obţinem o contractare a planului respectiv.

Vom cerceta încă o interpretaţie geometrică a modulului unei funcţii analitice $w=f(z)=u+i\cdot v$ în punctul $z_0$, când $|f'(z_0)|\neq 0$.

În aplicaţia $w=f(z)$ domeniul $D$ din planul $xOy$ se transformă în domeniul $D_1$ din planul $uO'v$. Aria domeniului $D_1$ poate fi calculată cu ajutorul integralei duble :

$$S_{D_1}=\iint_{D_1} dudv .$$

Făcând schimbul de variabile $u=u(x,y)$ şi $v=v(x,y)$, $(x,y)\in D$ şi folosind formula schimbării de varabile într-o integrală dublă (a se consulta, de exemplu [18],6.3.6.), obţinem că $\iint_{D_1} dudv=\iint_D |I|\,dxdy$,

unde $I$ se numeşte *determinantul lui Iacobi* :

$$I=\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}=u'_x v'_y-u'_y v'_x .$$

Deci $|I|$ exprimă coeficientul de deformare al elementului de arie în aplicaţia $w=f(z)$.

Utilizând formula (7) din 9.4.1. avem că

$$u'_x(x_0,y_0)\cdot v'_y(x_0,y_0)-u'_y(x_0,y_0)\cdot v'_x(x_0,y_0)=|f'(z_0)|^2 .$$



Aşadar într-o aplicaţie cu ajutorul unei funcţii $f(z)$ analitice pe $D$ coeficientul de deformare al elementului de arie coincide cu $|f'(z_0)|^2$, dacă $f'(z_0)\neq 0$.

Trecem acum la sensul geometric al argumentului derivatei funcţiei $f(z)$ în punctul $z_0\in D$, dacă $f$ este analitică pe $D$.

În formula (2) mărimea $\varphi$ este unghiul de înclinaţie al dreptei ce trece prin punctele $z_0$ şi $z$ în raport cu axa $Ox$, iar $\theta$ este unghiul de înclinaţie al dreptei ce uneşte punctele respective $w_0$ şi $w$ în raport cu axa $O'u$ (vezi Fig. 1).

Notăm prin $\varphi_0$ şi $\theta_0$ unghiurile de înclinaţie ale tangentelor la liniile $\gamma$ şi $L$ în punctele $z_0$ şi $w_0$ în raport cu axele $Ox$ şi $O'u$.

Deoarece $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\varphi=\varphi_0$ şi $\lim\limits_{\substack{\Delta z\to 0\\(\Delta u\to 0)}}\theta=\theta_0$, în virtutea formulei (2), obţinem $\arg f'(z)=\alpha=\theta_0-\varphi_0$.

Prin urmare diferenţa dintre unghiul de înclinaţie al tangentei la curba L în punctul $w_0=f(z_0)$ şi unghiul de înclinaţie la tangentei la curba $\gamma$ în punctul $z_0$ coincide cu $\arg f'(z)$ în punctul $z=z_0$.

Deoarece $f'(z_0)$ nu depinde de linia $\gamma$, rezultă că unghiul dintre două linii netede $\gamma_1$ şi $\gamma_2$ ce pleacă din $z_0$ se păstrează ca mărime (şi sens) prin transformarea $f$. Într-adevăr dacă $\gamma_1$ şi $\gamma_2$ sunt două linii netede ce pleacă din $z_0$ şi $L_1$, $L_2$ sunt liniile respective în planul $uO'v$ ce pleacă din $w_0=f(z_0)$, avem (vezi fig.2.) :

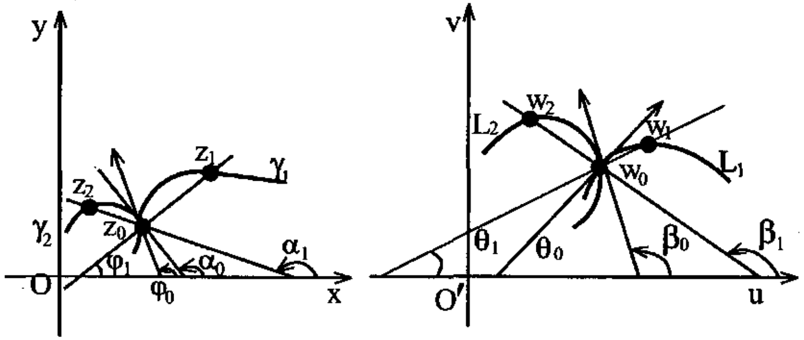
$$\arg f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}(\theta_1-\varphi_1)=\theta_0-\varphi_0 ,$$

$$\arg f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0}(\beta_1 - \alpha_1) = \beta_0 - \alpha_0 .$$

Deci $\theta_0 - \varphi_0 = \beta_0 - \alpha_0$. De unde $\theta_0 - \beta_0 = \varphi_0 - \alpha_0$.

În acest caz vom spune că unghiul dintre liniile $\gamma_1$ şi $\gamma_2$ se păstrează pentru liniile corespunzătoare $L_1$ şi $L_2$.

Aşadar, dacă $f : G \to C$ este derivabilă în punctul $z_0 \in G$ şi $f'(z_0) \neq 0$, atunci $\arg f'(z_0)$ reprezintă unghiul de rotaţie al tangentei la o linie netedă ce pleacă din $z_0$ prin transformarea $f$, iar $|f'(z_0)|$ reprezintă coeficientul de deformare liniară în acest punct.




a) b)

**Fig. 2.**

Fie funcţia $f : D \to C$ astfel încât $\operatorname{Re} f = u$, $\operatorname{Im} f = v$ sunt funcţii reale continue împreună cu derivatele lor parţiale de ordinul 1 pe $D$.

***Definiţie.*** Aplicaţia $f : D \to C$ se numeşte *transformare conformă* în punctul $z_0 \in D$, dacă unghiul dintre două linii $\gamma_1$ şi $\gamma_2$ ce pleacă din $z_0$ (fig.2.) se păstrează pentru liniile corespunzătoare $L_1$ şi $L_2$ ce pleacă din $w_0 = f(z_0)$ ([4], [7], [9], [10], [12]).



Transformarea se numeşte *direct conformă* sau *conformă de speţa 1* dacă se păstrează şi sensul unghiurilor. În caz contrar, transformarea se numeşte *transformare indirect conformă* sau *conformă de speţa 2.*

Aplicaţia $w = f(z)$ se numeşte *transformare conformă* pe domeniul $D$, dacă ea este conformă în orice punct $z_0 \in D$.

Reieşind din cele expuse mai sus am obţinut următoarele rezultate importante:

**Teorema 1.** Dacă funcţia $w = f(z)$ este analitică pe domeniul $D$ şi $f'(z) \neq 0$ pentru orice $z \in D$, atunci aplicaţia $w = f(z)$ este direct conformă pe $D$.

Are loc şi teorema inversă :

**Teorema 2.** Dacă funcţia $w = f(z)$ este direct conformă pe domeniul $D$, atunci funcţia $w = f(z)$ este analitică pe domeniul $D$.

Demostraţia o veţi găsi în [3],cap.2, §11,[6],cap.3,§3.

Teoremele de mai sus ne permit să definim funcţiile analitice cu ajutorul transformărilor conforme.

### 9.4.6. Exerciţii şi răspunsuri la paragraful 9.4.

1. Să se cerceteze derivabilitatea şi analiticitatea funcţiei $w = f(z)$ şi să se calculeze $f'(z)$, dacă ea există, pentru funcţiile :

a) $w = z \cdot \bar{z} - z \cdot \operatorname{Im} z$ ; b) $w = x^2 - 2iy$ ;

c) $w = 2z^2 - 3iz$ ; d) $w = z \cdot e^z$ ;

e) $w = |z| \cdot \operatorname{Re} \bar{z}$ ; f) $w = x^2 - y^2 + 2xyi$ ;

g) $w = y + ix$ ; h) $w = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$.

2. Să se restabilească (dacă e posibil) funcţia analitică $f(z) = u + iv$ după partea ei reală $u(x, y)$ sau după partea ei imaginară $v(x, y)$ dacă :

a) $u = x^2 - y^2 - x$ ;

b) $v = \sin x \cdot shy$ ;

c) $u = 2e^x \cos y, f(0) = 2$ ;

d) $v = 3x + 2xy, f(-i) = 2$ ;

e) $u = 3(x^2 + y^2) + x + y + 1$ ;

f) $v = xy, f(0) = 1$ ;

g) $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}, f(\pi) = \dfrac{1}{\pi}$ ;

h) $v = 2(chx \cdot \sin y - xy), f(0) = 0$ ;

i) $v = x^3 + 6x^2 y - 3xy^2 - 2y^3, f(0) = 0$ ; j) $u = -y(4x + 1)$ .

3. Pentru care valori ale constantelor a,b,c după funcția $u = ax^2 + 2bxy + cy^2$ poate fi restabilită funcția analitică $f(z) = u + iv$? Să se afle $v = \operatorname{Im} f(z)$, cu condiția că $f(0) = 0$.

4. Să se demonstreze că funcția $w = x^3 + iy^3$ nu este analitică nici într-un punct $z \in C$. Este oare derivabilă în punctele $z_1 = 0$, $z_2 = 1 + i$, $z_3 = -1 - i$ ?

5. Să se determine mulțimea punctelor $z_0 \in C$, pentru care coeficientul de deformare liniară este egal cu 1, dacă

a) $f(z) = z^2$; b) $f(z) = z^2 - 2z$;

c) $f(z) = \dfrac{1}{z}$; d) $f(z) = \dfrac{1 + iz}{1 - iz}$ .

6. Să se determine mulțimea punctelor $z_0 \in C$, pentru care $\arg f'(z_0) = 0$, dacă

a) $f(z) = iz^2$ ; b) $f(z) = z^2 - 2z$ ; c) $f(z) = \dfrac{i}{z}$ .

7. Să se verifice condițiile Cauchy-Riemann pentru funcțiile

$$\sin z, \cos z, shz, chz, \frac{1}{z}, z^4, \ln^2 z.$$



8. Să se verifice care din perechile următoare de funcții armonice sunt conjugate sau nu :

a) $u = 3(x^2 - y^2), v = 3x^2 y - y^2$;

b) $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}, v = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$ ;

c) $u = x, v = -y$ ;

d) $u = e^x \cos y + 1, v = e^x \sin y + 1$ ;

e) $(uu_1 - vv_1)$ și $(uv_1 + u_1 v)$, dacă funcțiile $u, v$ și $u_1, v_1$ sunt armonice conjugate.

9. Fie funcția $u = u(x, y)$ este armonică pe $D$. Va fi oare funcția $f(x, y) = (u(x, y))^2$ armonică pe $D$ ?

## Răspunsuri.

1. a) Derivabilă în punctul $z_0 = 0$ cu $f'(z_0) = 0$. Nu este analitică;

b) Derivabilă în punctele $z_0 = -1 + iy, y \in R$ cu $f'(z_0) = -2$. Nu este analitică;

c) Derivabilă și analitică pe $C$ cu $f'(z) = 4z - 3i$;

d) Derivabilă și analitică pe $C$ cu $f'(z) = e^z(z + 1)$;

e) Nu este nici derivabilă, nici analitică;

f) Derivabilă și analitică pe $C$ cu $f'(z) = 2z$;

g) Nu este nici derivabilă, nici analitică;

h) Derivabilă și analitică pe $C$ cu $f'(z) = 3z^2$.

2. a) $f(z) = z^2 - z + A$, $A \in C$;

b) $f(z) = -\cos z + A$, $A \in C$;

c) $f(z) = 2e^z, A = 0$;

d) $f(z) = 3iz + z^2, A = 2$; e) nu există;

f) $f(z)=\frac{1}{2}z^2+1, A=1$; g) $f(z)=\frac{1}{z}$;

h) $f(z)=2shz-z^3$; i) $f(z)=(2+i)z^3$;

j) $iz(2z+1)+A, A\in C$.

3. $a+c=0, b\in R$; $v=b(y^2-x^2)+2axy$.
4. $u'_x \neq u'_y$; $f'(0)=0, f'(1+i)=f'(-1-i)=3$.
5. a) $|z_0|=\frac{1}{2}$; b) $|z_0-1|=\frac{1}{2}$; c) $|z_0|=1$; d) $|z_0-i|=\sqrt{2}$.
6. a) $\arg z_0=-\frac{\pi}{2}$;

   b) $1<z_0<+\infty(\arg(z-1)=0 \Rightarrow 0<z-1<+\infty)$;

c) $\mathrm{Im}(1+i)z_0=0(\arg(-i)-2\arg z_0=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \arg z_0=-\frac{\pi}{4} \Rightarrow y=-x \Rightarrow x+y=0)$.

7. Pentru funcţiile:

$\sin z=\sin(x+iy)=\sin x chy+ishy\cos x, \cos z, shz$ şi $chz$

se utilizează condiţiile Cauchy-Riemann în coordonate carteziene, iar pentru funcţiile

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{\rho}(\cos\theta-i\sin\theta),\ z^4=\rho^4(\cos 4\theta-i\sin 4\theta),$$

$$\ln^2 z=(\ln\rho+i\theta)^2=(\ln^2\rho-\theta^2)+2i\theta\ln\rho$$

se utilizează condiţiile Cauchy-Riemann în coordonate polare.

8. a) nu; b) da; c) nu; d) da; e) da.
9. nu, dacă $u\neq const$.



## 9.5. Integrarea funcţiilor comlexe de o variabilă complexă.

Dupa studiul derivatei, trecem acum la introducerea integralei unei funcţii complexe de o variabilă comlexă de-a lungul unui arc de curbă. Proprietăţile simple ale integralei complexe sunt similare cu cele ale integralei curbilinii din domeniul real. Vom obtine un rezultat de tipul formulei lui Newton-Leibniz din cazul real *(teorema 2 din 9.5.3)*. În continuare apar însa deosebiri esenţiale. Teorema lui Cauchy şi formula lui Cauchy *( teoremele 1,2,3 din 9.5.2 )* nu au echivalent în domeniul real şi atrag dupa sine un lanţ întreg de rezultate specifice funcţiilor complexe, care constitue o legătura mult mai profundă decât în cazul real între calculul diferenţial şi cel integral. În primul rând teorema de derivabilitate a unei funcţii complexe pe un domeniul simplu conex, se dovedeşte a fi echivalentă cu cea a existenţei unei primitive *(în cazul real, a doua condiţie este mult mai slabă* (a se consulta teoremele 1 şi 3 din 9.5.3)). În al doilea rând vom demonstra, utilizând rezultatele privind integralele complexe, teoreme pur diferenţiale, cum ar fi teorema 4 din 9.5.2, care afirmă că orice funcţie analitică (şi deci derivabilă) , pe o mulţime deschisă $G$ este infinit derivabilă pe $G$ sau teorema lui Liouville din 9.5.3, care afirmă că orice funcţie analitică şi mărginită pe $C$ este o funcţie constantă pe $C$.

### 9.5.1. Integrala curbilinie complexă.

Fie $f$ o functie complexă univocă, definită şi continuă pe o mulţime deschisă $G$ din planul complex $C$ si $\gamma\subset G$ un arc de o curbă netedă, caracterizată de ecuaţiile parametrice $x=\varphi_1(t)$, $y=\varphi_2(t)$, unde funcţiile $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_1'(t)$, $\varphi_2'(t)$ sunt definite şi continue pe [a, b]. Notând

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ unde funcţiile reale u şi $v$ sunt definite şi continue pe $G$, avem $dx=x'(t)\cdot dt=\varphi_1'(t)dt$, $dy=y'(t)dt=$ $=\varphi_2'(t)dt$, $dz=dx+idy$ şi deci $f(z)dz=[u(x,y)+$ $+iv(x,y)](dx+idy)=[u(x,y)dx-v(x,y)dy]+i[v(x,y)dx+u(x,y)dy]$.

**Definiţie.** Se numeşte *integrală curbilinie* complexă a funcţiei $f:G\to C$ pe o curbă netedă $\gamma\subset G$ şi se notează $\int_\gamma f(z)dz$ numărul complex

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_\gamma u(x,y)dx-v(x,y)dy+$$
$$+i\int_\gamma v(x,y)dx+u(x,y)dy. \qquad (1)$$

Remarcăm că în condiţiile de mai sus integralele (reale) curbilinii de speţa 2 din (1) există (a se consulta [18], teorema 1 din 6.2.3). Curba $\gamma\subset G$ din integralele respective este orientată în sens pozitiv (direct), adică din punctul A$(x(a),\ y(a))$ în punctul B$(x(b),\ y(b))$.

Reducând calcularea integralelor (reale) curbilinii de speţa 2 din (1) la calcularea unor integrale reale definite pe $[a,\ b]$, obţinem următoarea formulă pentru calcularea integralei curbilinii complexe:

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_a^b[u(x(t))y(t)x'(t))-v(x(t),y(t))y'(t)]dt+$$
$$+i\int_a^b[v(x(t),y(t))x'(t)+u(x(t),y(t))y'(t)]\,dt. \qquad (2)$$

Dacă ecuaţiile parametrice $x=\varphi_1(t),y=\varphi_2(t),t\in[a,b]$ ale curbei netede $\gamma\subset G$ se inlocuesc prin ecuatia $z=z(t)=x(t)+iy(t)$, $t\in[a,b]$, atunci formula (2) se transformă în formula:



$$\int_\gamma f(z)dz=\int_a^b f(z(t))z'(t)dt. \qquad (3)$$

Dacă f(z)≡1 pe G , din (3) obţinem următorul rezultat:

$$\int_\gamma dz=\int_a^b z'(t)dt=z(t)\Big|_a^b=z(b)-z(a), \qquad (4)$$

unde $z(a)$ este începutul curbei $\gamma$, iar $z(b)$ este sfârşitul acestei curbe.

Din (4) rezultă, că dacă curba netedă $\gamma\subset G$ este închisă, atunci $\int_\gamma dz=0$.

**Exemplul 1.** Să se calculeze $\int_\gamma |z|dz$, unde $\gamma$ este segmentul de dreaptă , orientat din punctul $z_0=0$ in punctul $z_1=2+i$.

**Rezolvare.** Ecuaţiile parametrice ale segmentului de dreaptă ce uneşte punctul A(0,0) si B(2,1) sunt $x=2t,\ y=t,\ t\in[0,1]$. Deci $z(t)=x+iy=2t+i\cdot t=(2+i)t$ şi utilizând formula (3), avem:

$$\int_\gamma |z|dz=\int_0^1\sqrt{4t^2+t^2}\cdot(2+i)dt=\sqrt{5}(2+i)\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_0^1=$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{5}(2+i).$$

**Nota 1.** Am definit integralele curbilinii complexe cu ajutorul integralelor curbilinii de speţa 2 din domeniul real (formula (1)). Astfel de integrale le vom numi i n t e g r a l e  c u r b i l i n i i  c o m p l e x e  d e  s p e ţ a  2.

Pentru a găsi o corespondenţă complexă şi intregralelor curbilinii de speta 1, putem considera integralele de forma $\int_\gamma f(z)|dz|$, care se definesc în felul următor :

$$\int_\gamma f(z)|dz| = \int_\gamma u(x,y)ds + i\int_\gamma v(x,y)ds,$$

unde *f(z)* este continuă pe curba neteda $\gamma$ , caracterizată de ecuațiile $x=\varphi_1(t)$, $y=\varphi_2(t), t\in[a,b]$ și $ds=\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}\,dt$ este diferențiala lungimii arcului curbei $\gamma$ sau elementul de arc al curbei $\gamma$. Observăm că această integrala se exprimă cu ajutorul integralelor curbilinii de speta 1 din domeniul real ([18],6.2.1) si, prin urmare, nu depinde de orientarea curbei date. Daca *f(z)=1* pe $\gamma$, atunci

$$\int_\gamma |dz| = \int_\gamma ds = L, \qquad (5)$$

unde $L$ este lungimea curbei netede $\gamma$ (a se compara cu 6.2.2 şi 6.2.3. din [18]).

În baza definiției de mai sus si a proprietăților integralelor curbilinii de speta 2 din domeniul real, obtinem următoarele proprietăți pentu integralele curbilinii complexe (de speța 2):

**P1.** Dacă $f_1(z)$ și $f_2(z)$ sunt continue pe curba netedă $\gamma$, si $A_1, A_2$ sunt constante complexe arbitrare , atunci

$$\int_\gamma [A_1 f_1(z) + A_2 f_2(z)]dz = A_1\int_\gamma f_1(z)dz + A_2\int_\gamma f_2(z)dz,$$

$$A_1\in C,\quad A_2\in C.$$

**P2.** Dacă *f(z)* este continuă pe curba netedă $\gamma$, atunci

$$\int_\gamma f(z)dz = -\int_{\gamma^{(-)}} f(z)dz,$$

unde $\gamma^{(-)}$ este curba $\gamma$, parcursa in sens invers (negativ).

**P3.** Fie curba netedă $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2$, unde arcele $\gamma_1$ şi $\gamma_2$ nu au puncte interioare comune , adică sunt puse cap la cap.Daca f(z)este continua pe $\gamma$, atunci



$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

**P4.** Dacă *f(z)* este continuă pe curba $\gamma$, atunci

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le \int_\gamma |f(z)|ds,$$

unde ds este diferentiala lungimii arcului curbei $\gamma$.

**Demostrație.** Din (3) rezultă că

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_a^b f(z(t))z'(t)dt\right| \le \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|dt =$$

$$= \int_a^b |f(z(t))|\cdot\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt = \int_a^b |f(z(t))|\cdot ds.$$

**P5.** Dacă *f(z)* este continuă pe curba netedă $\gamma$, si $|f(z)|\le M$ pentru orice z∈γ, atunci $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le M\cdot L,$ unde L este lungimea curbei γ.

Într-adevăr din proprietatea precedentă şi formula (5) rezultă:

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le \int_\gamma |f(z)|ds \le \int_\lambda M ds = M\cdot\int_\gamma ds = M\cdot L.$$

Curba netedă γ se numeşte c o n t u r, dacă ea este simplă (nu conține puncte de intersecție cu ea insăşi) şi este închisă (vezi 9.2.1.). Dacă *f(z)* este continuă pe un contur γ, atunci integrala curbilinie a funcției *f* o vom nota cu semnul $\oint_\gamma f(z)dz$. În acest caz în calitate de *sens direct* (pozitiv) al conturului γ vom considera acea direcție, când suprafața mărginită de acest contur, rămâne în stânga direcției de mişcare. Direcția inversă o vom numi-o *sens invers* sau negativ şi îl vom nota cu $\gamma^{(-)}$.

**Exemplul 2 :** Sa se calculeze $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$, unde γ este un cerc de raza $r$ cu centrul în punctul $z_0$ parcurs în sens pozitiv .

**Rezolvare.** Avem $\gamma: |z - z_0| = r$. Orice punct de pe cercul γ are forma $z - z_0 = r \cdot e^{it}$, adica $z = z_0 + re^{it}, t \in [0, 2\pi]$. Utilizând formula (3), obținem

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{\left(z_0 + re^{it}\right)'}{re^{it}} dt = \int_0^{2\pi} \frac{ri \cdot e^{it}}{r \cdot e^{it}} dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i .$$

**Exemplul 3.** Sa se calculeze $\oint_{\gamma} (z - z_0)^n dz$, unde γ este un cerc de raza $r$ cu centrul in punctul $z_0$ parcurs in sens pozitiv si n∈Z, n≠-1.

**Rezolvare.** Avem: $\gamma: |z - z_0| = r$. Orice punct de pe cercul γ are forma $z = z_0 + re^{it}$, unde t∈[0,2π].Aplicând formula (3), obținem că

$$\oint_{\gamma} (z - z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} r^n \cdot e^{itn} \cdot \left(z_0 + re^{it}\right)' \cdot dt = \int_0^{2\pi} r^n \cdot e^{itn} \cdot rie^{it} dt =$$

$$= r^{n+1} \cdot i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = r^{1+n} \cdot \frac{e^{i(n+1)t}}{(n+1)} = \Big|_0^{2\pi} = 0$$

Prin urmare, combinând rezultatele exemplelor *2* și *3* de mai sus obținem urmatorul rezultat:

$$\oint_{\gamma} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0, daca,\ n \in Z, n \neq -1, \\ 2\pi i, daca,\ n = -1, \end{cases} \qquad (6)$$

unde γ este un cerc de raza $r > 0$ cu centrul în $z_0$ și parcurs în sens pozitiv.



**Nota 2.** În baza proprietații 3, generalizată pentru un număr finit de arce componente $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 ..... \cup \gamma_n$ asezate cap la cap, toate rezultatele din acest paragraf sunt valabile și pentru așa numitele *curbe netede pe portiuni* : curba γ , caracterizată de ecuatiile parametrice $x = \varphi_1(t),\ \ y = \varphi_2(t), t \in [a,b]$, se numeste *netedă pe porțiuni*, dacă functiile $\varphi_1(t), \varphi_1'(t), \varphi_2(t), \varphi_2'(t)$, sunt continue pe *[a,b]* exceptând un număr finit de puncte ale segmentului *[a,b]*, care sunt puncte de descontinuitate de speta 1 pentru funcțiile $\varphi_1(t)$ și $\varphi_2(t)$.

### 9.5.2. Teoremele Cauchy și consecințele lor.

Fie $\overline{D} \subset C$ un domeniu închis în sensul definiției 6 din 9.2.1 și γ frontiera sa exterioară și fie γ este o curbă închisă simplă și netedă pe porțiuni, adică γ este un contur neted pe porțiuni. Pentru a indica frontiera exterioară a domeniului închis $\overline{D}$ pe parcurs vom folosi notația $\overline{D}_{\gamma}$. Reamintim (vezi definițiile din 9.4.3) că funcția univocă f: $\overline{D} \to C$ este analitică pe $\overline{D}$, dacă ea este analitică pe o mulțime deschisă *G* din *C* care conține $\overline{D}$.

**Teorema 1(Cauchy).** Dacă funcția univocă f: $\overline{D} \to C$ este analitică pe un domeniu închis și simplu conex $\overline{D}$ atunci

$$\oint_{\ell} f(z)dz = 0, \qquad (1)$$

pentru orice contur $\ell$ neted pe porțiuni care se conține în $\overline{D}$. În particular conturul închis $\ell$ poate să coincidă și cu frontiera lui $\overline{D}$. Orientarea conturului $\ell$ se consideră în sens pozitiv (direct).

**Demonstrație.** Fie $\ell \subset \overline{D}$. Domeniul închis $\overline{D}_{\ell}$ mărginit de conturul $\ell$ este simplu conex. Aplicăm formula (1) din 9.5.1:

$$\oint_l f(z)dz = \oint_l u(x,y)dx - v(x,y)dy +$$
$$+ i\oint_l v(x,y)dx + u(x,y)dy. \qquad (2)$$

Deoarece $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ este analitică pe $\overline{D}_\ell$ cu frontiera $\ell$ avem

$$u_x'(x,y) = v_y'(x,y) \text{ şi } u_y'(x,y) = -v_x(x,y)$$

pentru orice $(x,y) \in \overline{D}_\ell$, adică pe $\overline{D}_\ell$ sunt verificate condiţiile Cauchy-Riemann.

Demonstraţia relaţiei (1), în virtutea formulei (2), se reduce la demonstraţia egalităţilor

$$\oint_l u(x,y)dx - v(x,y)dy = 0 \text{ şi}$$
$$\oint_l v(x,y)dx + u(x,y)dy = 0. \qquad (3)$$

Din proprietatea integralelor curbilinii de speţa 2 de la funcţii reale de două variabile reale ( [18], teorema 1 din 6.2.4), rezultă următorul criteriu:

$$\oint_\ell P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \iff P_y'(x,y) = Q_x'(x,y)$$

pentru orice $(x,y) \in \overline{D}_\ell$ şi funcţiile $P, Q, P_y', Q_x'$ sunt continue pe $\overline{D}_\ell$.

Pentru integralele (3) acest criteriu se reduce la condiţiile Cauchy-Riemann

$$u_y'(x,y) = -v_x'(x,y) \text{ şi } u_x'(x,y) = v_y'(x,y),\ (x,y) \in \overline{D}_\ell \subseteq \overline{D},$$

care se îndeplinesc, deorece $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ este analitică pe $\overline{D}$.

Prin urmare,



$$\oint_l f(z)dz = \oint_l u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\oint_l v(x,y)dx + u(x,y)dy =$$
$$= 0 + i0 = 0.$$

Teorema este demonstrată.

**Consecinţă.** Dacă f este analitică pe un domeniu simplu conex D, iar $\gamma_1$ şi $\gamma_2$ sunt două drumuri (arce de curbă) netede pe porţiuni cuprinse în întregime în D, ce unesc două puncte arbitrare din D, atunci

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz,$$

unde arcele $\gamma_1$ şi $\gamma_2$ sunt orientate în acelaşi sens.

Pentru demonstraţie este suficient să aplicăm teorema 1 la conturul $\gamma = \gamma_1^{(+)} \cup \gamma_2^{(-)} \subset D$.

Această consecinţă ne arată că în condiţiile teoremei 1 integrala $\int_\gamma f(z)dz$, unde $\gamma$ este un arc de curbă ce uneşte două două puncte arbitrare $z_1$ şi $z_2$ din $D$ nu depinde de forma curbei $\gamma$, adică de forma drumului de integrare.

**Teorema 2 (teorema Cauchy pentru domenii multi conexe).** Fie funcţia univocă f(z) este analitică pe un domeniu multi conex închis $\overline{D}$ mărginit de conturul exterior (frontiera exterioară) $\gamma$ care este neted pe porţiuni şi contururile interioare $\gamma_j$ ($j=1,2,3,\ldots,n$) netede pe porţiuni, domeniile cărora $D_{\gamma_j}$ nu aparţin domeniului $\overline{D}$ şi $D\gamma_j \cap D\gamma_s = \varnothing$ pentru orice $j,s = 1,2,\ldots n$. Atunci

$$\oint_\gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \oint_{\gamma_i} f(z)dz. \qquad (4)$$

Orientarea contururilor $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ este aceiaşi: toate contururile sunt orientate sau pozitiv, sau negativ.

**Demonstrație**. Fie domeniul închis $\overline{D}$ satisface condițiile teoremei, adică are forma din fig. 1.

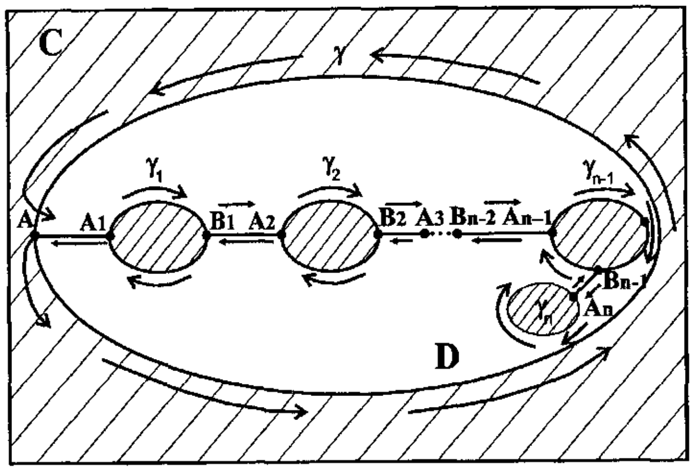



**Fig. 1.**

Prin tăieturi formate din arce de curbe netede care unesc $\gamma$ cu $\gamma_1$, $\gamma_1$ cu $\gamma_2$ și așa mai departe $\gamma_{n-1}$ cu $\gamma_n$, se formează un contur $\gamma^*$ neted pe porțiuni, care închide în interior un domeniu simplu conex $\overline{D}_{\gamma^*} = \overline{D}$ (se pornește, de exemplu, din punctul $A \in \gamma$ până în punctul $A \in \gamma$ în sens pozitiv pe curba $\gamma$, apoi se parcurge tăietura $AA_1$ și o parte din conturul $\gamma_1$ (în sens negativ), tăietura $B_1A_2$ și o parte din conturul $\gamma_2$ (în sens negativ) și așa mai departe până la tăietura $B_{n-1}A_n$ și pe urmă conturul $\gamma_n$ (în sens negativ) până la punctul $A_n$, se întoarce înapoi pe tăietura $A_nB_{n-1}$ și partea rămasă a conturului $\gamma_{n-1}$ și așa mai departe tăietura $A_2B_1$ și partea rămasă a conturului $\gamma_1$ și în sfârșit tăietura $A_1A$ (a se consulta ultimul alineat din 9.2.1). Pe fig.1. conturul $\gamma^*$ este



indicat cu săgeți. Se observă că $\int_{\gamma^*} f(z)dz$ parcurge tăieturile $AA_1$, $B_1A_2$, $B_2A_3$, ... $B_{n-2}A_{n-1}$, $B_{n-1}A_n$ de două ori, a 2-a oară în sens contrar cu sensul de parcurgere avut prima dată. Deci suma acestor integrale pe tăieturile respective este egală cu zero (P2 din 9.5.1). Contururile $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ sunt parcurse în sens contrar sensului conturului $\gamma$. Deci, aplicând formula (1) și proprietatea P3 (generalizată pentru un număr finit de termeni) din 9.5.1, obținem că

$$\oint_{\gamma^*} f(z)dz = 0 = \oint_{\gamma} f(z)dz - \oint_{\gamma_1} f(z)dz - \oint_{\gamma_2} f(z)dz - ... - \oint_{\gamma_n} f(z)dz,$$

unde contururile $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ sunt parcurse în sens pozitiv.
Prin urmare,

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \oint_{\gamma_i} f(z)dz$$

și formula (4) este demonstrată.

**Consecință.** Dacă funcția $f(z)$ este univocă și analitică pe un domeniu închis dublu conex $\overline{D}$, mărginit exterior de conturul neted pe porțiuni $\gamma$ și interior de conturul neted pe porțiuni $\gamma_1$, atunci

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = \oint_{\gamma_1} f(z)dz,$$

unde $\gamma$ și $\gamma_1$ sunt orientate în același sens.

Din această consecință reiese următorul rezultat important: *Dacă $f(z)$ este analitică într-un domeniu închis dublu conex D, atunci integrala curbilinie complexă $\oint_{\ell} f(z)dz$ are aceeași valoare pentru orice contur neted pe porțiuni $\ell$, care aparține în întregime domeniului D și înconjoară frontiera interioară $\gamma_1$ a domeniului D.*

**Teorema 3 (formula Cauchy).** Fie funcţia univocă $f(z)$ este analitică pe un domeniu închis $\overline{D}$ (simplu conex sau multi conex) şi $z_0 \in D$. Valoarea lui f în punctul $z_0$ este dată de formula integrală a lui Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \qquad (5)$$

unde $\gamma$ este un contur neted pe porţiuni cuprins în întregime în $D$ împreună cu domeniul $D_\gamma$ mărginit de acest contur şi $z_0 \in D_\gamma \subseteq D$. Orientarea conturului $\gamma$ este în sens pozitiv.

**Demonstraţie.** Înconjurăm punctul $z_0$ din domeniul $D_\gamma$ cu un cerc de rază mică $\varepsilon$ cu centrul în $z_0$, astfel încât discul respectiv să aparţină în întregime domeniului simplu conex $D_\gamma \subseteq D$. În domeniul dublu conex cuprins între conturul $\gamma$ şi cercul $|z-z_0|=\varepsilon$ funcţia $\varphi(z) = \dfrac{f(z)}{z - z_0}$ este analitică (ca raportul a două funcţii analitice) şi aplicând consecinţa teoremei 2, avem că

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_\ell \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

unde $\ell$ este cercul $|z - z_0| = \varepsilon$.

Notăm pe $\ell$: $z - z_0 = \varepsilon \cdot e^{it}$, adică $z = z_0 + \varepsilon \cdot e^{it}$, şi deci $dz = \varepsilon \cdot i \cdot e^{it} dt$ cu $t \in [0,2\pi]$. În virtutea formulei (3) din 9.5.1, obţinem

$$\oint_\ell \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \varepsilon \cdot e^{it})}{\varepsilon \cdot e^{it}} \cdot \varepsilon \cdot i \cdot e^{it} dt =$$

$$= i \cdot \int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon \cdot e^{it}) dt$$

Observăm că dacă $\varepsilon \to 0$, atunci $f(z_0+\varepsilon \cdot e^{it}) \to f(z_0)$, deoarece $f(z)$ este continuă pe $\overline{D}$. Deci



$$\oint_\ell \frac{f(z)}{z - z_0} \to i \cdot f(z_0) \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \cdot i \cdot f(z_0),$$

când $\varepsilon \to 0$.

Prin urmare,

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi \cdot i \cdot f(z_0)$$

şi formula (5) este demonstrată.

Aşadar formula integrală a lui Cauchy permite de a calcula valoarea funcţiei într-un punct din domeniul D cu ajutorul integralei curbilinii pe frontiera unui domeniu $D_\gamma \subseteq D$ cu condiţia ca funcţia dată să fie analitică pe $\overline{D}$. Constatăm că punctul $z_0$ din formula (5) nu aparţine conturului $\gamma$. De asemenea, observăm că, dacă $z_0$ se află în exteriorul conturului $\gamma$, adică $z_0 \notin D_\gamma$, atunci funcţia $\dfrac{f(z)}{z - z_0}$ este analitică pe $\overline{D}_\gamma$ şi deci, după formula (1), avem că $\oint_\gamma \dfrac{f(z)}{z - z_0} dz = 0$.

Dacă domeniul închis $\overline{D}$ din teorema 3 este simplu conex, conturul $\gamma$ din formula (4) poate să coincidă cu frontiera lui $D$.

Pe baza formulei lui Cauchy obţinem următorul rezultat important:

**Teorema 4.** Dacă funcţia univocă $f(z)$ este analitică pe un domeniu închis $\overline{D}$ (simplu conex sau multi conex), atunci ea este indefinit derivabilă pe $D$ şi

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \cdot \int_\ell \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n \in N \qquad (6)$$

unde $\ell$ este un contur neted pe porţiuni cuprins în întregime în $\overline{D}$ şi $z_0 \subseteq D_\ell \subseteq \overline{D}$. Orientarea conturului $\ell$ se consideră în sens pozitiv.

**Demonstrație.** Fie $z_0 \in D$ și $\ell$ un contur neted pe porțiuni cuprins în întregime în $\overline{D}$ împreună cu domeniul $D_\ell$ mărginit de $\ell$ și $z_0 \in D_\ell$ (vezi fig. 2.)

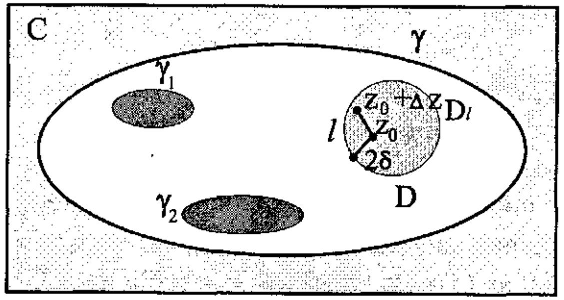



**Fig. 2.**

Demonstrăm formula (6) pentru n=1.

Avem: $f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$, unde $z_0 \in D_\ell$ și $z_0 + \Delta z \in D_\ell \subseteq D$.

Aplicând formula (5) pentru f(z) analitică pe $\overline{D}_\ell$, obținem că

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z}\left[\frac{1}{2\pi \cdot i}\cdot \oint_\ell \frac{f(z)}{z-(z_0+\Delta z)}dz - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2\pi\cdot i}\cdot\oint_l \frac{f(z)}{z-z_0}dz\right] =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0}\left[\frac{1}{\Delta z}\cdot\frac{1}{2\pi\cdot i}\cdot\oint_l f(z)\left(\frac{1}{z-(z_0+\Delta z)} - \frac{1}{z-z_0}\right)dz\right] =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0}\left[\frac{1}{2\pi\cdot i}\cdot\frac{1}{\Delta z}\cdot\oint_l f(z)\cdot dz \cdot \frac{z-z_0-z+z_0+\Delta z}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)}\right] =$$



$$= \lim_{\Delta z \to 0}\left[\frac{1}{2\pi\cdot i}\cdot\oint_\ell \frac{f(z)\cdot dz}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0}\left[\frac{1}{2\pi\cdot i}\cdot\oint_\ell \frac{\left[(z-z_0-\Delta z)+\Delta z\right]f(z)dz}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)^2}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0}\cdot\left[\frac{1}{2\pi\cdot i}\cdot\oint_l \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2} + \frac{\Delta z}{2\pi\cdot i}\cdot\oint_\ell \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2(z-z_0-\Delta z)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi\cdot i}\oint_l \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2} + \lim_{\Delta z \to 0}\left[\frac{1}{2\pi\cdot i}\cdot\oint_l \frac{f(z)dz}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)^2}\right]\cdot\Delta z,\ z_0 \in D.$$

Arătăm mai întâi că funcția

$$f_1(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_l \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2(z-z_0-\Delta z)}$$

este mărginită pe $\overline{D}_\ell$. Într-adevăr, din analiticitatea funcției *f(z)* pe $\overline{D}_\ell$, reiese că *f(z)* este continuă pe domeniul închis $\overline{D}_\ell$. Prin urmare, *f(z)* este măginită pe $\overline{D}_\ell$ (vezi 9.2.3), deci există numărul real M, astfel încât $|f(z)| \le M$, pentru orice punct *(x,y)*$\in \ell$. Notând cea mai mică distanță de la punctul $z_0$ până la conturul $\ell$ cu $2\delta$ (fig.2.) și considerând $|\Delta z| < \delta$, avem $|z - z_0| \ge 2\delta$. Deci

$$|z - z_0 - \Delta z| \ge |z - z_0| - |\Delta z| > 2\delta - \delta = \delta \text{ și}$$

$$\left|\frac{f(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-\Delta z)}\right| < \frac{M}{4\delta^2\cdot\delta} = \frac{M}{4\delta^3}$$

pentru orice punct z ce aparține conturului $\ell$.

Aplicând proprietatea P4 din 9.5.1, rezultă că

$$|f_1(z_0)| = \left|\oint_l \frac{f(z)dz}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)^2}\right| \le$$

$$\le \oint_l \left|\frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)^2}\right| ds < \frac{M}{4\delta^3} \cdot \oint_\ell ds = \frac{ML}{4\delta^3},$$

unde L este lungimea conturului $\ell$.

Deci

$$\lim_{\Delta z \to 0} |f_1(z_0) \cdot \Delta z| = \lim_{|\Delta z| \to 0} |f_1(z_0)| \cdot |\Delta z| = 0,$$

ca produsul dintre o funcţie reală mărginită şi o funcţie reală infinit mică. Prin urmare, $\lim\limits_{\Delta z \to 0} f_1(z_0) \cdot \Delta z = 0$ şi

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi \cdot i} \oint_l \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2} + \lim_{\Delta z \to 0} f_1(z_0) \cdot \Delta z =$$

$$= \frac{1}{2\pi \cdot i} \oint_l \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2}.$$

În mod similar formula (6) se demonstrează pentru n=2,3,... .

O demonstraţie mai detaliată o puteţi găsi în [6], cap. 5, teorema 5.12 (consecinţa 1).

**Consecinţa 1.** Dacă funcţia univocă *f(z)* este analitică pe domeniul închis $\overline{D}$, atunci derivatele ei de orice ordin sunt analitice pe *D*.

**Consecinţa 2.** Dacă funcţia *f(z)* este analitică pe un disc închis $|z-z_0| \le r$, $r>0$, atunci au loc inegalităţile lui Cauchy:

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n! M}{r^n} \quad n \in N, \tag{7}$$

unde $M = \sup\limits_{z \in \gamma} |f(z)|$, iar $\gamma$ este cercul $|z-z_0| = r$.



**Demonstraţie.** Considerând în formula (6) în calitate de conturul $\ell$ cercul $|z-z_0| = r$, $r>0$ cu lungimea $2\pi r$ şi, utilizând proprietatea P5 din 9.5.1, obţinem: $z-z_0 = r \cdot e^{it}, t \in [0,2\pi]$ şi

$$|f^n(z_0)| \le \left|\frac{n!}{2\pi i}\right| \cdot \left|\frac{f(z)}{r^{n+1} \cdot e^{i(n+1)t}}\right| \cdot 2\pi r \le \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{n! M}{r^n},$$

unde $M = \sup\limits_{z \in \gamma} |f(z)|$ şi $L_\gamma = 2\pi r$.

Remarcăm că dacă domeniul închis $\overline{D}$ din teorema 4 este simplu conex, atunci în calitate de conturul *l* din formula (6) poate fi considerată şi frontiera lui *D*.

**Notă.** Teoremele 1, 2, 3 şi 4 rămân valabile şi în cazul când condiţia „*f(z)* este analitică pe $\overline{D}$" este înlocuită cu condiţia „*f(z)* este continuă pe $\overline{D}$ şi analitică pe *D*". Cu această ocazie a se consulta [27], cap. 1, § 4.12, § 4.13 şi § 4.14.

**Exemplul 4.** Să se calculeze $\oint_\gamma \frac{zdz}{(z-1)(z-2)}$, unde $\gamma$ este un contur arbitrar ce nu trece prin punctele $z_1=1$, $z_2=2$. Conturul $\gamma$ se consideră orientat în sens pozitiv.

**Rezolvare.** Avem $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$. Descompunem *f(z)* în fracţii elementare:

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}, \text{ unde A=-1, şi B=2.}$$

Deci $f(z) = \frac{2}{z-2} - \frac{1}{z-1}$ şi, prin urmare,

$$I = \oint_\gamma f(z)dz = \oint_\gamma \frac{zdz}{(z-1)(z-2)} = 2 \cdot \oint_\gamma \frac{dz}{z-2} - \oint_\gamma \frac{dz}{z-1} =$$

$$= 2 \cdot I_1 - I_2.$$

Remarcăm că funcţia $f(z)$ este analitică pe $C$, exceptând punctele $z_1=1$ şi $z_2=2$.

Considerăm următoarele cazuri (vezi fig.3):

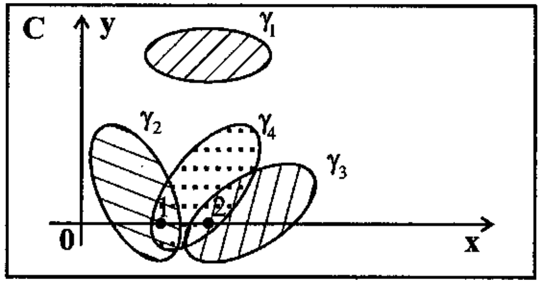



**Fig. 3**

1) Conturul $\gamma=\gamma_1$ este astfel încât domeniul $D\gamma_1$, mărginit de acest contur, nu conţine punctele $z_1$ şi $z_2$. În acest caz, aplicând teorema 1 pentru funcţia $f(z)$ analitică pe domeniul închis simplu conex $\overline{D}_{\gamma_1}$, obţinem că I=0.

2) Dacă $\gamma=\gamma_2$, adică conturul $\gamma_2$ este astfel încât $z_1\in D_{\gamma_2}$ iar $z_2\notin D_{\gamma_2}$, atunci $I_1=0$, deoarece $f_1(z)=\dfrac{1}{z-2}$ este analitică pe domeniul închis şi simplu conex $\overline{D}_{\gamma_2}$.

Pentru a calcula $I_2$ aplicăm formula (5) cu $f(z)=1$:

$$I_2=\oint_{\gamma_2}\frac{1\cdot dz}{z-1}=2\pi\cdot i\cdot f(z_1)=2\pi\cdot i\cdot 1=2\pi\cdot i.$$

Deci $I=2\cdot I_1-I_2=0-2\pi\cdot i=-2\pi\cdot i$.

3) Dacă $\gamma=\gamma_3$, adică conturul $\gamma_3$ este astfel încât $z_1\notin D_{\gamma_3}$, iar $z_2\in D_{\gamma_3}$, atunci în virtutea formulei (1), avem $I_2=0$, deoarece



funcţia $f_2(z)=\dfrac{1}{z-1}$ este analitică pe domeniul închis simplu conex $\overline{D}_{\gamma_3}$.

Aplicând formula (5) cu $f(z)=1$, avem că

$$I_1=\oint_{\gamma_3}\frac{1\cdot dz}{z-2}=2\pi\cdot i\cdot f(z_2)=2\pi\cdot i\cdot 1=2\pi\cdot i.$$

Deci $I=2\cdot I_1-I_2=2\cdot 2\pi\cdot i=4\pi\cdot i$.

4) Conturul $\gamma=\gamma_4$ este astfel încât $z_1\in D_{\gamma_4}$ şi $z_2\in D_{\gamma_4}$, adică conturul $\gamma_4$ conţine în interiorul lui ambele puncte. Aşadar aplicând teorema 2 pentru domeniul triplu conex $D_{\gamma_4}$, rezultă că

$$I=\oint_{\gamma_4}\frac{zdz}{(z-1)(z-2)}=\oint_{\ell_1}\frac{zdz}{(z-1)(z-2)}+\oint_{\ell_2}\frac{zdz}{(z-1)(z-2)},$$

unde conturul $\ell_1$ este de tipul conturului $\gamma_2$ (care înconjoară numai punctul $z_1=1$), iar conturul $\ell_2$ este de tipul conturului $\gamma_3$ (care înconjoară numai punctul $z_2=2$). Aplicând cazurile 2) şi 3) de mai sus, avem că

$$I=\oint_{\gamma_4}\frac{zdz}{(z-1)(z-2)}=-2\pi\cdot i+4\pi\cdot i=2\pi\cdot i.$$

**Exemplul 5.** Folosind formula integrală Cauchy, să se calculeze $\oint_{\gamma}\dfrac{dz}{z^2+1}$, unde $\gamma$ este cercul cu centrul în punctul $i$ de raza $r=1$, adică $\gamma$ are ecuaţia $|z-i|=1$. Orientarea conturului $\gamma$ se consideră în sens pozitiv.

**Rezolvare.** Avem

$$\oint_{\gamma}\frac{dz}{z^2+1}=\oint_{\gamma}\frac{dz}{(z-i)(z+i)}=\oint_{\gamma}\frac{\left(\frac{1}{z+i}\right)}{z-i}dz.$$

Observăm că funcţia $f(z)=\dfrac{1}{z+i}$ este analitică pe discul închis $|z-i|\le 1$ mărginit de γ. Aplicând formula (5), rezultă că

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z^2+1}=2\pi i\cdot f(i)=2\pi i\cdot\frac{1}{2i}=\pi .$$

**Exemplul 6.** Să se calculeze $\oint_\gamma \dfrac{\cos z}{z^3}dz$, unde γ este cercul $|z|=1$, orientat în sens pozitiv.

**Rezolvare.** Funcţia $f(z)=\cos z$ este analitică pe discul închis $|z|\le 1$, mărginit de γ. Aplicând formula (6) cu $f(z)=\cos z$ şi $n=2$, obţinem că

$$\oint_\gamma \frac{\cos z}{z^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}\cdot f''(0).$$

Avem: $f'(z)=-\sin z$, $f''(z)=-\cos z$ şi $f''(0)=-\cos 0=-1$. Deci

$$\oint_\gamma \frac{\cos z}{z^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}\cdot(-1)=-\pi i.$$



### 9.5.3. Integrala nedefinită complexă.

Fie funcţia univocă $f(z)$ definită pe domeniul $D$ (simplu conex sau multi conex).

**Definiţia 1.** Funcţia $F(z)$ se numeşte *primitiva* funcţiei $f(z)$ pe domeniul $D$ dacă

$$F'(z)=f(x),\ z\in D.$$

Observăm că dacă $F(z)$ este primitivă pentru $f(z)$ pe $D$, atunci orice funcţie $F(z)+A$, unde A – o constantă arbitrară complexă, este de asemenea primitiva lui $f(z)$ pe $D$. Are loc şi afirmaţia reciprocă: dacă $F_1(z)$ şi $F_2(z)$ sunt două primitive ale funcţiei $f(z)$ pe $D$, atunci ele se deosebesc printr-o constantă.

Într-adevăr, fie

$$F(z)=F_1(z)-F_2(z)=u(x,y)+iv(x,y).$$

Avem $F'(z)=F_1'(z)-F_2'(z)=f(z)-f(z)=0$, adică $u_x'(x,y)+iv_x'(x,y)=$ $=v_y'(x,y)-iu_y'(x,y)=0$. Deci $u_x'(x,y)=u_y'(x,y)=v_x'(x,y)=v_y'(x,y)=0$, pentru orice punct $(x,y)\in D$. Aceasta înseamnă că funcţiile reale $u(x,y)$, $v(x,y)$ sunt constante reale pe $D$. Prin urmare, $u(x,y)=A_1$, $v(x,y)=A_2$ pentru orice punct din $D$ şi $F(z)=F_1(z)-F_2(z)=$ $=A_1+iA_2=A$, unde $A$ este o constantă complexă.

Aşadar, dacă $F(z)$ este o primitivă a funcţiei $f(z)$ pe $D$, atunci mulţimea tuturor primitivelor funcţiei $F(z)$ pe $D$ are forma $F(z)+A$, unde $A$ este o constantă arbitrară complexă.

**Definiţia 2.** Mulţimea tuturor primitivelor funcţiei $f(z)$ pe D se numeşte integrală nedefinită complexă (sau simplu *integrală nedefinită*) a funcţiei date şi se notează cu simbolul $\int f(z)dz$.

Astfel, dacă $F(z)$ este o primitivă pentru funcţia $f(z)$ pe $D$, atunci

$$\int f(z)dz=F(z)+A,\ A\in C,\ F'(z)=f(z),\ z\in D.$$

**Teorema 1** (existenţa primitivei). Fie funcţia $f(z)$ continuă pe domeniul $D$ (simplu conex sau multi conex) şi

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0,$$

pentru orice contur $\gamma$ neted pe porțiuni cuprins în întregime în $D$. Atunci pentru orice punct fix $z_0 \in D$ și orice punct arbitrar $z \in D$ funcția

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi \qquad (1)$$

este analitică pe $D$ și $F'(z)=f(z)$, pentru orice $z\in D$.

**Demonstrație.** Arătăm, mai întâi, că integrala $\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$ nu depinde de forma curbei, ce unește punctul fix $z_0\in D$ cu punctul arbitrar $z\in D$.

Într-adevăr, fie $\gamma_1$ și $\gamma_2$ două curbe netede pe porțiuni ce unesc $z_0$, $z$ și $\gamma_1\subset D$, $\gamma_2\subset D$.

Evident că conturul $\gamma$ format din aceste două curbe aparține în întregime domeniului $D$ și $\gamma^{(+)}=\gamma_1^{(+)}\cup\gamma_2^{(-)}=M_0mMnM_0$(vezi fig. 1).

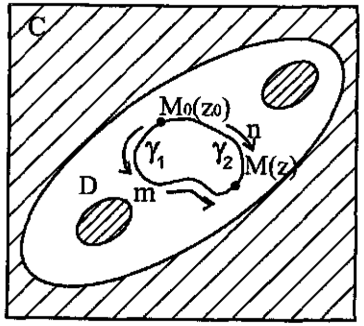



**Fig 1.**

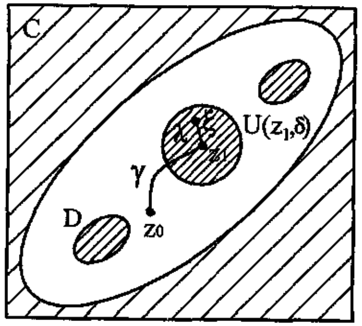



**Fig 2.**

În baza condițiilor teoremei avem:



$$\oint_{\gamma(M_0mMnM_0)} f(\xi)d\xi = 0,$$

adică $\displaystyle\int_{(M_0nM)} f(\xi)d\xi + \int_{(MnM_0)} f(\xi)d\xi = 0.$

De unde

$$\int_{(M_0nM)} f(\xi)d\xi = -\int_{(MnM_0)} f(\xi)d\xi = \int_{(M_0nM)} f(\xi)d\xi,$$

ceea ce înseamnă că

$$\int_{\gamma_1} f(\xi)d\xi = \int_{\gamma_2} f(\xi)d\xi.$$

Așadar, integrala $\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$ pe curba $\gamma$ ce unește punctele $z_0$ și $z$ nu depinde de forma acestei curbe și dacă $z_0$ este un punct fix din $D$, atunci $\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$ depinde univoc de punctul arbitrar $z\in D$. Deci funcția

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$$

este o funcție univocă pe $D$.

Demonstrăm acum că $F'(z_1)$ există și coincide cu $f(z_1)$ pentru orice punct arbitrar $z_1\in D$.

Deoarece $f(\xi)$ este continuă pe $D$, ea este continuă în $z_1\in D$. Aceasta înseamnă că

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0,\ \forall\xi\in D: |\xi-z_1|=|\Delta z|<\delta\Rightarrow$$
$$\Rightarrow |f(\xi)-f(z_1)|<\varepsilon. \qquad (2)$$

Fie $U(z_1,\delta)$ această vecinătate a punctului $z_1$ (fig.2). Dacă $\lambda$ este segmentul de dreaptă ce uneşte punctele $z_1$ şi $\xi=z_1+\Delta z$, care evident aparţine în întregime mulţimii $U(z_1,\delta)$ şi are lungimea $L_\lambda=|\Delta z|$, atunci curba $(\gamma+\lambda)\subset D$ este netedă pe porţiuni şi are începutul în punctul $z_0$ şi sfârşitul în $(z_1+\Delta z)$. Deci

$$F(z_1+\Delta z)=\int_{z_0}^{z_1+\Delta z} f(\xi)d\xi=\int_{\gamma+\lambda} f(\xi)d\xi=$$

$$=\int_\gamma f(\xi)d\xi+\int_\lambda f(\xi)d\xi=F(z_1)+\int_\lambda f(\xi)d\xi.$$

Prin urmare,

$$\frac{F(z_1+\Delta z)-F(z_1)}{\Delta z}-f(z_1)=\frac{1}{\Delta z}\int_\lambda f(\xi)d\xi-f(z_1)=$$

$$=\frac{\int_\lambda f(\xi)d\xi-f(z_1)\Delta z}{\Delta z}=\frac{\int_\lambda f(\xi)d\xi-f(z_1)\int_\lambda d\xi}{\Delta z}=$$

$$=\frac{1}{\Delta z}\int_\lambda\left[f(\xi)-f(z_1)\right]d\xi,$$

doarece în virtutea formulei **(4)** din 9.5.1, avem că

$$\int_\lambda d\xi=(z_1+\Delta z)-z_1=\Delta z.$$

Aplicând relaţia **(2)** de mai sus şi proprietatea P5 din 9.5.1, obţinem că

$$\left|\frac{F(z_1+\Delta z)-F(z_1)}{\Delta z}-f(z_1)\right|=\left|\frac{\int_\lambda[f(\xi)-f(z_1)]d\xi}{\Delta z}\right|\le$$

$$\le\frac{1}{|\Delta z|}|f(\xi)-f(z_1)|\cdot L_\lambda<\frac{1}{|\Delta z|}\cdot\varepsilon\cdot|\Delta z|=\varepsilon.$$



Aceasta înseamnă că $F'(z_1)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{F(z_1+\Delta z)-F(z_1)}{\Delta z}=$ $=f(z_1)$. Deoarece $z_1$ este un punct arbitrar din $D$, am obţinut că $F'(z)=f(z)$ pentru orice $z\in D$. Deci funcţia $F(z)$ este analitică pe $D$ şi teorema este demonstrată.

**Consecinţă.** Dacă $f(z)$ este analitică pe domeniul simplu conex $D$ şi $z_0$ este un punct fix ce aparţine lui $D$, iar $z$ este un punct arbitrar al acestui domeniu, atunci funcţia

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$$

este
a) analitică pe $D$;
b) primitiva lui $f$ pe $D$;
c) indefinit derivabilă pe $D$.

Demonstraţia reiese aplicând teorema 1 şi consecinţa 1 a teoremei 4 din 9.5.2.

**Teorema 2.** Dacă funcţia $f(z)$ este analitică pe un domeniu simplu conex $D$, atunci

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\xi)d\xi=\phi(z_1)-\phi(z_0), \tag{3}$$

unde $z_1$ şi $z_0$ sunt puncte arbitrare din $D$, iar $\phi(z)$ este o primitivă a funcţiei $f(z)$ pe $D$.

**Demonstraţie.** Fie $\phi(z)$ o primitivă a funcţiei $f(z)$ pe $D$. În virtutea consecinţei din teorema 1, avem că funcţia $F(z)=$ $=\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$ este de asemenea o primitivă a funcţiei $f(z)$ pe $D$.

Deoarece primitivele se deosebesc printr-o constantă complexă, rezultă că

$$\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi = \phi(z)+A,\ A\in C.$$

Dacă $z=z_0$, atunci curba ce uneşte punctele $z_0$ şi $z$ este închisă. Aplicând formula 4 din 9.5.1, avem: $\int_{z_0}^{z_0} f(\xi)d\xi=0$ şi relaţia de mai sus se transformă în egalitatea

$$0=\phi(z_0)+A.$$

De unde $A=-\phi(z_0)$ şi $\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi=\phi(z)-\phi(z_0)$. Dacă considerăm $z=z_1$, obţinem formula **(3)** şi teorema este demonstrată.

Formula **(3)** se numeşte *formula Newton – Leibniz*. Mai compact, această formulă se scrie în felul următor

$$\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi = \phi(z)\Big|_{z_0}^{z_1}.$$

Tehnica de calcul a integralelor nedefinite complexe este aceeaşi ca şi în cazul integralelor nedefinite reale. Metodele tradiţionale: metoda substituţiei şi integrarea prin părţi sunt valabile şi pentru integralele nedefinite complexe. De asemenea tabela de integrare în cazul real rămâne valabilă şi pentru integralele nedefinite complexe (cu anumite comentarii):

1) $\int e^z dz = e^z + A$,

2) $\int z^n dz = \dfrac{z^{n+1}}{n+1} (n\neq -1,\ n\in Z)$,

3) $\int \dfrac{dz}{z} = Lnz + A$,

4) $\int \sin z dz = -\cos z + A$,



5) $\int \cos z dz = \sin z + A$,

6) $\int sh z\, dz = ch\, z + A$,

7) $\int ch z\, dz = sh\, z + A$ etc.

Aceste formule reies din relaţiile

$$(e^z)'=e^z,\ \left(\frac{z^{n+1}}{n+1}\right)' = z^n,\ (Lnz)' = \frac{1}{z},\ (-\cos z)' = \sin z,$$

$$(\sin z)' = \cos z,\ (ch\ z)' = sh\ z,\ (sh\ z)' = ch\ z \text{ etc.}$$

Trebuie de atras atenţie că primitivele sunt funcţii analitice, şi de aceea ele impun anumite restricţii asupra domeniilor, în care sunt valabile formulele (1) - (7). Aşa, de exemplu, pentru formulele (1), (4), (5), (6), (7) în calitate de domeniu de existenţă al formulelor respective poate fi considerat orice domeniu din $C$. În ceea ce priveşte domeniul de existenţă al formulei (2) se poate considera orice domeniu din $C$ dacă $n\geq 0$, iar pentru $n<0$, domeniul nu poate conţine punctul $z=0$. Pentru formula (3) în calitate de domeniu se ia mulţimea

$$D = C \setminus \{z\in C,\ \text{Re}\, z\leq 0,\ \text{Im}\ z=0\},$$

în care ramurile funcţiei multivoce $Lnz$ sunt caracterizate de funcţii univoce (a se consulta 9.4.4).

Unele formule din cazul real sunt esenţial diferite, pe când în cazul complex ele se deduc una din alta. De exemplu, în următoarele perechi de formule

$$\int \frac{dz}{z^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{z}{a} + A \text{ şi } \int \frac{dz}{a^2-z^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+z}{a-z} + A$$

sau

$$\int \frac{dz}{\sqrt{a^2+z^2}} = \ln\left(z+\sqrt{a^2+z^2}\right) + A \text{ şi}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{a^2-z^2}} = \arcsin\frac{z}{a} + A$$

o formulă reiese din cealaltă înlocuind $z$ prin $(iz)$ şi utilizând formulele respective din 9.3.3 – 9.3.10.

Într-adevăr

$$\int\frac{d(iz)}{(iz)^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{(iz)}{a}+A \text{ sau}$$

$$\int\frac{(i)dz}{(a^2-z^2)}=\frac{1}{a}\cdot\frac{i}{2}\cdot\ln\frac{i+\frac{iz}{a}}{i-\frac{iz}{a}}+A\ .$$

Deci $i\int\frac{dz}{a^2-z^2}=\frac{1}{2a}\cdot i\cdot\ln\frac{a+z}{a-z}+A$, adică

$$\int\frac{dz}{z^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\frac{a+z}{a-z}+A\ .$$

În acest caz am utilizat formula $arctg\, z=\frac{i}{2}\ln\frac{i+z}{i-z}$ din 9.3.7).

Propunem cititorului să efectueze transformările respective în a doua pereche de formule.

**Teorema 3.** (Morera – matematician italian). Fie funcţia $f(z)$ continuă pe domeniul $D$ (simplu conex sau multi conex) şi

$$\int_\gamma f(z)dz=0$$

pentru orice contur $\gamma$ neted pe porţiuni şi $\gamma\subset D$. Atunci funcţia $f(z)$ este analitică pe $D$.

**Demonstraţie.** În virtutea teoremei 1 funcţia $f$ admite o primitivă pe $D$:

$$F(z)=\int_{z_0}^{z}f(\xi)d\xi\ ,\ F'(z)=f(z),\ z_0\in D,\ z\in D.$$

şi $F(z)$ este analitică pe $D$. În virtutea teoremei 4 (consecinţa 1) din 9.5.2 avem că $F(z)$ este indifinit derivabilă pe $D$. Deci $F'(z)=$ $=f(z)$ şi $F''(z)=f'(z)$ pentru orice $z\in D$, ceea ce înseamnă că funcţia $f(z)$ este analitică pe $D$.



Teorema 3 este teorema inversă teoremei lui Cauchy pentru domenii simplu conexe.

Aşadar, în domeniul simplu conex $D$ afirmaţia „ $f(z)$ analitică pe $D$'' este echivalentă cu afirmaţia „$f(z)$ este continuă pe $D$ şi $\int_\gamma f(z)dz=0$, pentru orice contur $\gamma$, neted pe porţiuni şi cuprins în întregime în $D$'' sau cu afirmaţia „ $f$ admite o primitivă pe $D$''.

**Teorema 4.** (Liouville (1809-1882 – matematician francez). Dacă funcţia $f(z)$ este analitică şi mărginită pe $C$, atunci $f(z)$ este constantă pe $C$.

**Demonstraţie.** Fie $f(z)$ marginită pe $C$, adică $|f(z)|\leq M$. Construim un cerc $\gamma$ cu centrul în $z\in C$ de raza $r>0$. Aplicând inegalităţile Cauchy cu $n$=1 (consecinţa 2 a teoremei 4 din 9.5.2.), rezultă că $|f'(z)|\leq\frac{S}{r}\leq\frac{M}{r}$, deoarece $\underset{z\in\gamma}{Sup}\ |f(z)|=S\leq M.$

Întrucât numărul $M$ nu depinde de $r$ şi funcţia $f(z)$ este analitică pe $C$, adică $f(z)$ este o funcţie întreagă, trecând la limita în inegalitatea de mai sus când $r\longrightarrow+\infty$, obţinem $|f'(z)|=0$. Prin urmare, în baza teoremei 2 din 9.4.3 funcţia $f$ este constantă pe $C$ şi teorema este demonstrată.

Constatăm că teorema lui Liouville este caracteristică funcţiilor complexe de o variabilă complexă. Există funcţii reale, nelimitat derivabile şi mărginite pe $R$, care nu sunt constante pe $R$, ca de exemplu funcţiile $\sin x$ şi $\cos x$.

**Notă.** Rezultatele obţinute în studiul funcţiilor complexe pot fi aplicate şi în alte compartimente ale matematicii. În calitate de o astfel de aplicaţie vom da aici o foarte simplă demonstraţie a teoremei fundamentale a algebrei, numită *teorema lui Gauss*. În algebră, se demonstrează, că orice polinom cu coeficienţi complecşi de gradul $n\geq1$ are cel mult $n$ rădăcini. Teorema fundamentală afirmă că există cel puţin o rădăcină. De aici, cu ajutorul teoremei lui Bezout (1730-1783-matematician francez) se deduce uşor că polinomul are exact $n$ rădăcini. Teorema lui Gauss, deşi se utilizează foarte des în algebră, nu admite o demonstraţie simplă, care să fie bazată pe metodele algebrice.

**Teorema 5** (teorema fundamentală a algebrei). Orice funcţie polinominală de gradul $n \geq 1$ se anulează cel puţin într-un punct din planul complex $C$.

Demonstraţia se face prin reducerea la absurd. Presupunem că polinomul $f(z)=P_n(z)$, $n\in N$ nu se anulează nici într-un punct din planul complex, atunci funcţia $\varphi(z)=\dfrac{1}{P_n(z)}$ este o funcţie analitică pe C, adică este o funcţie întreagă. Observăm că pentru $z \to \infty$, avem: $\varphi(z)=\dfrac{1}{P_n(z)}\to 0$, adică $\lim\limits_{z\to\infty} \varphi(z)=0$.

Aceasta înseamnă că pentru orice $\varepsilon>0$, în particular pentru $\varepsilon_0=1$, există un număr real $r>0$, astfel încât pentru $|z|>r$ avem că $|\varphi(z)|<1$. Întrucât mulţimea

$$D=\{z\in C, |z|\leq r\}$$

este compactă şi $\varphi(z)$ este continuă pe $D$, conform teoremei lui Weierstrass, această funcţie este mărginită pe $D$. Deci există un număr real $M>0$, că $|\varphi(z)|\leq M$ pentru orice $z\in D$. Aşadar, funcţia $\varphi(z)$ este mărginită pe $C$, deoarece $|\varphi(z)|<M+1$ pentru orice $z\in C$.

Deci pentru orice $z\in C$, funcţia $\dfrac{1}{P_n(z)}$ este mărginită.

Aplicând teorema 4 (a lui Liouville) obţinem că funcţia $\dfrac{1}{P_n(z)}$ este constantă pe $C$. Prin urmare, şi funcţia $P_n(z)$ este constantă



pe $C$, adică $P_n(z)$ este de gradul 0, ceea ce contrazice ipoteza că $n\in N$. Deci polinomul $P_n(z)$, $n\in N$ are cel puţin un zero în planul complex $C$. Teorema este demonstrată.

### 9.5.4. Exerciţii şi răspunsuri la paragraful 9.5.

**1.** Să se calculeze integrala $\int\limits_\gamma f(z)dz$, unde $\gamma$ este arcul semicercului $|z|=2, \operatorname{Im} z\leq 0$ din punctul $z_1=-2$ în punctul $z_2=2$, dacă a) $f(z)=\bar{z}$; b) $f(z)=\dfrac{1}{z}$; c) $f(z)=|z|$; d) $f(z)=z\cdot|z|$; e) $f(z)=2x-3iy$.

**2.** Acelaşi lucru, dacă $\gamma$ este segmentul de dreaptă ce uneşte punctul $z_1=1$ cu punctul $z_2=i$ şi a) $f(z)=\bar{z}$; b) $f(z)=\operatorname{Im} z$; c) $f(z)=\dfrac{1}{|z|}$.

**3.** Să se calculeze integrala $\int\limits_\gamma |z|dz$, dacă $\gamma$ este cercul $|z-i|=1$ orientat în sens pozitiv.

**4.** Să se calculeze integralele $\int\limits_\gamma e^z dz$ şi $\int\limits_\gamma |e^z|dz$, dacă

a) $\gamma$ este segmentul de dreaptă ce uneşte punctele $z_1=0$ şi $z_2=1+i$;

b) $\gamma$ este arcul parabolei $y=x^2$ ce uneşte aceste două puncte. Să se comenteze rezultatele.

**5.** Să se calculeze integrala $\int\limits_\gamma |z|dz$, dacă $\gamma$ este:

a) segmentul de dreaptă ce uneşte punctele $z_1=-i$ şi $z_2=i$;

b) arcul cercului $|z|=1$, $\operatorname{Re} z \geq 0$ ce trece prin aceste două puncte;

c) semicercului $|z|=1$, $\operatorname{Re} z \leq 0$ ce uneşte aceste două puncte. Să se comenteze rezultatele obţinute.

**6.** Să se calculeze integrala $\oint_\gamma z \cdot |z| dz$, unde $\gamma$ este o curbă închisă compusă din semicercul $|z|=1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ şi segmentul $[-1,1]$ de pe axa $OX$.

**7.** Să se calculeze primitivele funcţiilor:

a) $f(z)=e^{az}$; b) $f(z)=\sin(az)$; c) $f(z)=\operatorname{sh}(az)$; d) $f(z)=z \cdot e^{az}$;
e) $f(z)=z\cos(az)$; f) $(z)=z\operatorname{ch}(az)$, unde $a \in C$.

**8.** Să se calculeze integralele:

a) $\oint\limits_{|z|=1} z \cdot \bar{z} dz$; b) $\oint\limits_{|z|=2} z \cdot \operatorname{Im} z^2 dz$; c) $\oint\limits_{|z-1|=1} \operatorname{Re} z \cdot dz$.

Cercurile sunt parcurse în sens pozitiv.

**9.** Să se calculeze integralele:

a) $\int\limits_{1-i}^{2+i} (3z^2+2z)dz$; b) $\int\limits_0^1 z \cdot \cos z dz$;

c) $\int\limits_0^{1+i} \sin z \cdot \cos z dz$; d) $\int\limits_{-i}^{i} (iz^2 - 2ze^{z^2})dz$;

e) $\int\limits_0^{-1} z \cdot \cos z^2 dz$; f) $\int\limits_\gamma \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz$,

unde $\gamma$ este arcul cercului $|z|=1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$, $\operatorname{Re} z \geq 0$ ce uneşte punctele $z_1=1$ şi $z_2=i$;

g) $\int\limits_\gamma \frac{1+tg\, z}{\cos^2 z} dz$, unde $\gamma$ este segmentul de dreaptă ce uneşte punctele $z_1=1$ şi $z_2=i$;

h) $\int\limits_\gamma tg\, z dz$, unde $\gamma$ este arcul parabolei $y=x^2$ ce uneşte punctele $z_1=0$ şi $z_2=1+i$;



i) $\int\limits_\gamma \operatorname{Im} z^2 \cdot \operatorname{Re} z^3 dz$, unde $\gamma$ este arcul parabolei $y=3x^3$ din punctul $z_1=0$ în punctul $z_2=1+3i$.

**10.** Utilizând teoremele şi formula lui Cauchy să se calculeze următoarele integrale (contururile $\gamma$ sunt orientate în sens pozitiv):

a) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{dz}{z^3+4z}$; b) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\cos z}{(z-1)(z+3)} dz$;

c) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\sin z}{(z-2i)^3} dz$; d) $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-1)^3} dz$;

e) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^2-1}$; f) $\oint\limits_{|z-2i|=2} \frac{dz}{z^2+9}$;

g) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2} dz$; h) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{sh^2 z}{z^3} dz$;

i) $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2} dz$; j) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2 dz}{z+i}$;

k) $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\cos z}{z-\pi} dz$; l) $\oint\limits_{|z+2|=2} \frac{zdz}{z^2-1}$;

m) $\oint\limits_{|z-2|=2} \frac{zdz}{z^4-1}$; n) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^4 dz}{(z+1)^3}$;

o) $\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-i|=3} \frac{z \cdot e^z}{(z-i)^3} dz$.

**11.** Să se calculeze $\oint_{\gamma}\frac{dz}{1+z^2}$, dacă

a) $\gamma:|z|=\frac{1}{2}$;

b) $\gamma:|z-i|=1$; c) $\gamma:|z+i|=1$.

Contururile sunt orientate în sens pozitiv.

**12.** Să se calculeze $\oint_{\gamma}\frac{dz}{(z^3-1)^2}$, dacă

a) $\gamma:|z-1|=1$; b) $\gamma:|z+1|=1$; c) $\gamma:|z|=2$. În toate cazurile conturul $\gamma$ este parcurs în sens pozitiv.

**13.** Să se demonstreze că

$$\int_{\gamma}dz=0,\ \int_{\gamma}zdz=0 \text{ şi } \int_{\gamma}(z-z_0)^n dz=0,\ n\in N$$

pentru orice contur $\gamma$ şi orice $z_0 \in C$.

**14.** Calculând integrala $\int_{|z|=1}e^z dz$, să se arate că

$$\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\cos(\theta+\sin\theta)d\theta=\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\sin(\theta+\sin\theta)d\theta=0.$$

**15.** Să se calculeze integralele

a) $\oint_{\gamma}\frac{\sin(\pi z^3)+\cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}dz$, b) $\oint_{\gamma}\frac{e^{2z}}{(z+1)^3}dz$,

unde $\gamma$ este cercul $|z|=3$ orientat în sens pozitiv.



## Răspunsuri.

**1.** Indicaţie generală: $\gamma$: $z=2e^{it}$, $t\in[\pi,2\pi]$, $\bar{z}=2e^{-it}$.

a) $4\pi i$; b) $i\pi$; c) 8; d) 0; e) $10i\pi$ $\left(x=\frac{z+\bar{z}}{2}, y=\frac{z-\bar{z}}{2}\right)$.

**2.** Indicaţie generală $\gamma$: $z=x+(1-x)i$, $x\in[1,0]$.

a) $i$; b) $\frac{i-1}{2}$; c) $\frac{1-i}{\sqrt{2}}\ln(3-2\sqrt{2})$.

**3.** $-\frac{8}{3}$ ($\gamma$: $\rho=2\sin t$, $t\in[0,\pi]$, $z=p\cdot e^{it}=2\sin t\cdot e^{it}$).

**4.** a) $(e\cos 1-1)+ie\sin 1$ şi $(e-1)(1+i)$; b) a) $(e\cos 1-1)+ie\sin 1$ şi $(e-1)+2i$. $f_1(z)=e^{\bar{z}}$ este analitică pe $C$, iar $f_2(z)=|e^z|$ nu este analitică pe $C$.

**5.** a) 1; b) $2i$; c) $2i$.

**6.** $\pi i$.

**7.** a) $\frac{1}{a}\cdot e^{az}+A,\ A\in C$; b) $\frac{-1}{a}\cos(az)+A,\ A\in C$;

c) $\frac{1}{a}ch(az)+A,\ A\in C$; d) $\frac{1}{a}\left(z-\frac{1}{a}\right)+A,\ A\in C$;

e) $\frac{1}{a}z\sin(az)+\frac{1}{a^2}\cos az+A,\ A\in C$;

f) $\frac{1}{a}zsh(az)+\frac{1}{a^2}chaz.+A,\ A\in C$.

**8.** a) 0; b) $-16\pi$; c) $\pi i$.

**9.** a) $7+19\pi$; b) $\frac{1-e}{e}$; c) $\frac{1}{4}[(1-\cos 2ch2)+i\sin 2ch2]$;

d) $\frac{2}{3}$; e) $\frac{1}{2}\sin 1$; f) $\frac{\pi}{32}(4i\ln 2-\pi)$;

g) $i\cdot th1-\left(tg1+\frac{1}{2}tg^3 1+\frac{1}{2}tg^2 1\right)$;

h) $i \cdot arctg(tg1 \cdot th1) - \frac{1}{2}\ln(sh^2 1 + \cos^2 1)$;

i) $-\frac{51}{4} - \frac{3456}{35}i$.

**10.** a) 0; b) $\frac{\pi i}{2}\cos 1$; c) $\pi ch2$; d) $-\pi i \cdot ch1$;

e) $2\pi i \cdot sh1$; f) $\frac{\pi}{3}$; g) 0; h) $\pi i$; i) $-\frac{\pi^2}{2}i$; j) $-\pi i$;

k) 0; l) $\pi i$; m) $\frac{1}{2}\pi i$; n) $12\pi i$;

o) $2\pi[(\cos 1 - \sin 1)i - (\cos 1 + \sin 1)]$.

**11.** a) 0; b) $\pi$; c) $-\pi$.

**12.** a) $\frac{3\pi i}{8}$; b) $-\frac{3\pi i}{8}$; c) 0.

**13.** Funcţiile $f_1(z)=1$, $f_2(z)=z$, $f_3(z)=(z-z_0)^n$, $n \in N$ sunt analitice pe $C$. Se aplică teorema Cauchy pentru domenii simplu conexe.

**14.** $\oint_\gamma e^z dz = 0$; $z = e^{i\theta}$, $dz = e^{i\theta} \cdot i \cdot d\theta$, $t \in [0, 2\pi]$.

Deci $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta + \sin\theta} \cdot e^{i\theta} \cdot d\theta = 0$.

**15.** a) $4\pi i$; b) $8\pi i \cdot e^{-\frac{2}{3}}$.



## 9.6. Serii complexe.

Rezultatele de bază obţinute în 9.5 vor fi aplicate la studiul comportării seriilor de funcţii analitice cu scopul dezvăluirii proprietăţilor esenţiale ale noţiunii de funcţie analitică (sau olomorfă, sau regulară). Rezultatele fundamentale ale seriilor funcţionale uniform convergente pe un domeniu se vor aplica la studiul seriilor de puteri, care vor permite să obţinem încă o definiţie a funcţiei analitice echivalentă cu cea din 9.4.3.

Un rezultat central va fi stabilirea echivalenţei între noţiunile de ***"funcţie analitică (derivabilă, C - diferenţiabilă)"*** şi ***"funcţie dezvoltabilă în serie Taylor"***, ceea ce permite de a construi teoria funcţiilor analitice pornind de la definirea lor ca funcţii dezvoltabile în serii de puteri (vezi [1], [7]).

Tot aici se vor introduce seriile Laurent, care vor permite studiul comportării funcţiei analitice în jurul unui punct singular izolat. Pe baza acestor serii se vor introduce alte noţiuni, ca reziduul funcţiei, care vor fi dezvoltate şi aplicate în 9.7.

### 9.6.1. Serii numerice complexe.

Expresia de forma

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots,$$

unde $z_n \in C$, $n \in N$ se numeşte *serie numerică complexă*. Se notează cu

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + iy_n), \tag{1}$$

unde $x_n = \operatorname{Re} z_n$, $y_n \in \operatorname{Im} z_n$ şi $n \in N$.

Numărul

$$S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + i(y_1 + y_2 + \ldots + y_n), \quad n \in N$$

se numeşte *sumă parţială* a seriei (1), iar seria

$$z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots + z_{n+k} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} z_{n+k}, \qquad (2)$$

se numeşte *restul de rangul (ordinul) n*, $n \in N$ al seriei (1) şi se notează cu $r_n$.

**Definiţia 1**. Seria (1) se numeşte *convergentă*, dacă există limita finită $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.

În caz contrar seria (1) se numeşte *divergentă*. Numărul $S$ se numeşte *suma* seriei (1) şi se notează astfel $S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

Similar proprietăţilor seriilor numerice cu termeni reali (vezi ([18], 8.1.1.) pot fi enunţate următoarele rezultate:

1. Omiterea unui număr finit de termeni sau adăugarea câtorva termeni noi nu schimbă natura seriilor, adică ambele serii sunt simultan sau convergente, sau divergente.

2. Dacă termenii seriei convergente (1) se înmulţesc cu un număr $a$, atunci seria obţinută este de asemenea convergentă şi suma ei se înmulţeşte cu numărul $a$. De aici rezultă, că dacă seria (1) este divergentă, atunci şi seria $\sum a \cdot z_n$, $a \neq 0$, $a \in C$ este divergentă.

3. Două serii convergente $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$, $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} w_n$ se pot aduna sau scădea termen cu termen şi seriile $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm w_n)$ vor fi de asemenea convergente, suma lor fiind egală respectiv cu $S_1+S_2$ şi $S_1-S_2$.

4. Restul $r_n$ (de rangul n) al seriei convergente (1) tinde către 0, când $n \to \infty$, adică $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$, deoarece în acest caz $\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}(S - S_n) = S - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$, unde $S$ este suma seriei (1).



Au loc următoarele teoreme.

**Teorema 1**. Pentru ca seria (1) să fie convergentă este necesar şi suficient ca seriile cu termeni reali

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad \text{şi} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

să fie convergente.

***Demonstraţie***. Avem

$$S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) +$$
$$+ i(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) = \sigma_n + i\tau_n$$

Dacă seria (1) este convergentă, atunci $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sigma_n + i \cdot \lim_{n\to\infty} \tau_n = S' + i \cdot S''$ şi deci seriile reale $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ sunt convergente. Invers, dacă seriile reale $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ sunt convergente şi sumele lor sunt respectiv numerele $S'$ şi $S''$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = S', \quad \lim_{n\to\infty} \tau_n =$$
$$= \lim_{n\to\infty}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) = S'',$$

ceea ce înseamnă că există limita $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(\sigma_n + i\tau_n) = S' + iS'$, adică seria (1) este convergentă.

*Teorema este demonstrată.*

***Consecinţa 1.*** Dacă seria complexă (1) este convergentă, atunci $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

Într-adevăr, dacă (1) este convergentă, atunci seriile reale $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ sunt convergente. Deci

$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ şi $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ ([18], teorema 2 din 8.1.1.). Prin urmare,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}(x_n + iy_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + i\lim_{n\to\infty} y_n = 0.$$

***Consecinţa 2.*** Dacă $\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0$, atunci seria (1) este divergentă.

Demonstraţia se face prin metoda reducerii la absurd şi utilizând consecinţa 1.

**Teorema 2.** Fie seria complexă (1) şi seria reală

$$|z_1| + |z_2| + ... + |z_n| + ... = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|. \qquad (3)$$

Dacă seria reală (3 ) este convergentă, atunci şi seria complexă (1) este convergentă.

***Demonstraţie.*** Fie $z_n = x_n + iy_n$, $x_n \in R$, $y_n \in R$ şi $n \in N$. Avem

$$|x_n| \leq \sqrt{(x_n)^2 + (y_n)^2} = |z_n| \text{ şi } |y_n| \leq \sqrt{(x_n)^2 + (y_n)^2} = |z_n|.$$

Aplicând criteriul (1) de comparaţie a seriilor reale cu termenii nenegativi (vezi ([18], teorema 2 din 8.1.2.), conchidem că din convergenţa seriei (3) reiese convergenţa seriilor reale cu termenii nenegativi $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ şi $\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|$, ceea ce înseamnă că seriile reale $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ sunt absolut convergente (a se consulta ([18], teorema 1 din 8.1.3).

Prin urmare, în baza teoremei 1 de mai sus, seria (1) este convergentă şi *teorema este demonstrată.*

***Definiţia 2.*** Dacă serile (1) şi (3) sunt convergente, atunci seria (1) se numeşte *absolut convergentă*. Dacă însă seria (1) este convergentă, iar seria (3) este divergentă, atunci seria (1) se numeşte *neabsolut convergentă* (vezi ex. 1 b) de mai jos).



În aceşti termeni teorema 2 se formulează astfel: *orice serie complexă absolut convergentă este de asemenea şi convergentă.*

Teoremele 1 şi 2 arată că convergenţa sau divergenţa seriilor complexe se reduce la cercetarea convergenţei sau a divergenţei seriilor numerice cu termeni reali. De aceea criteriile de bază din cazul real (([18], 8.1.1. – 8.1.3.) se aplică la cercetarea naturii unei serii numerice complexe.

Reamintim formularea unora din ele:

**Teorema 3** (criteriul 1 de comparaţie).

Fie seriile numerice complexe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ astfel încât $|z_n| \leq |w_n|$ pentru orice $n \in N$.

Din convergenţa seriei cu termeni nenegativi $\sum_{n=1}^{\infty}|w_n|$, reiese convergenţa absolută a seriei complexe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$. Din divergenţa seriei cu termeni nenegativi $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$, rezultă divergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty}|w_n|$.

**Teorema 4.** (Criteriul D'Alembert). Fie $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = l$, dacă $l < 1$, atunci seria complexă (1) este absolut convergentă, iar dacă $l > 1$ , atunci seria (1) este divergentă.

**Teorema 5** (Criteriul radical Cauchy).

Fie $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|} = l$. Dacă $l < 1$, atunci seria complexă (1) este absolut convergentă, iar dacă $l > 1$, atunci seria (1) este divergentă.

**Exemplul 1.** Să se cerceteze natura seriilor complexe:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2n}+i\cdot\frac{1}{2n-1}\right)$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(2+i)^n}{3^n}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} i^n(3+2i)^{2n}$.

**Rezolvare.**

a) Avem: $S_n = 1+z+z^2+...+z^{n-1}=\frac{1-z^n}{1-z}$, dacă $|z|\neq 1$.

Deci $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-z}-\lim_{n\to\infty}\frac{z^n}{1-z}=\frac{1}{1-z}+\frac{1}{z-1}\cdot\lim_{n\to\infty} z^n$.

Observăm că dacă $|z|<1$, atunci $\lim_{n\to\infty}|z|^n=0$, adică $\lim_{n\to\infty} z^n=0$. Prin urmare, dacă $|z|<1$, avem $\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{1-z}+\frac{1}{z-1}\cdot 0=\frac{1}{1-z}$, ceea ce înseamnă că seria $\sum_{z=0}^{\infty} z^n$ este convergentă.

Fie acum $|z|>1$, atunci $\lim_{n\to\infty}|z|^n=+\infty$, adică $\lim_{n\to\infty} z^n\neq 0$. Aceasta înseamnă că seria $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ este divergentă.

În fine, dacă $|z|=1$, adică $z=\pm 1$, atunci seriile numerice (reale) respective sunt de asemenea divergente ([18], ex. 1 din 8.1.1.).



Aşadar, dacă $|z|<1$, seria $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ este convergentă şi are suma egală cu $\frac{1}{1-z}$, iar dacă $|z|\geq 1$, seria $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ este divergentă.

b) Considerăm seriile numerice reale

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Re} z_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2n} \text{ şi } \sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Im} z_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2n-1}.$$

Aceste două serii reale sunt serii reale alternate şi verifică condiţiile criteriului lui Leibnitz ([18], teorema 4 din 8.1.3). Deci ele sunt convergente şi în baza teoremei 1 seria complexă $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2n}+i\cdot\frac{1}{2n-1}\right)$ este convergentă.

Propunem cititorului să demonstreze că această serie este *neabsolut convergentă*.

c) Aplicăm criteriul D'Alembert (teorema 4 de mai sus):

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(2+i)^{n+1}}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n\cdot(2+i)^n}\right|=$$

$$=\frac{|2+i|}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{\sqrt{4+1}}{3}=\frac{\sqrt{5}}{3}<1,$$

ce implică că, seria complexă este absolut convergentă.

d) Aplicăm criteriul radical Cauchy (teorema 5 de mai sus):

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|i^n(3+2i)^{2n}\right|}=|i|\cdot\left|(3+2i)^2\right|=$$

$$=1\cdot|(3+2i)|^2=\left(\sqrt{9+4}\right)^2=13>1.$$

Prin urmare, seria complexă este divergentă.

**Teorema 6.** Orice grupare a termenilor unei serii complexe convergente (1), care nu schimbă ordinea lor, păstrează convergenţa seriei şi mărimea sumei ei.

*Demonstrație.*

Fie seria complexă (1) este convergentă și S este suma ei, adică $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, unde $S_n = z_1 + z_2 + ... + z_n$.

Formăm diferite grupări de termeni ai seriei (1), fără a schimba ordinea lor:

$w_1 = z_1 + z_2 + ... + z_{n_1}$,

$w_2 = z_{n_1+1} + z_{n_1+2} + ... + z_{n_2}$,

.... ...

$w_k = z_{n_{k-1}+1} + z_{n_{k-1}+2} + ... + z_{n_k}$ și așa mai departe.

Demonstrăm că seria $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ este convergentă și suma ei coincide cu suma seriei (1). Avem $\sigma_k = w_1 + w_2 + ... + w_k$. Alegem $S_n$ astfel încât $S_n = \sigma_k$.

Prin urmare, $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{k\to\infty} \sigma_k$, ceea ce înseamnă că seria $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ este convergentă și suma ei este de asemenea numărul complex $S$.

*Teorema este demonstrată.*

Similar cazului real pentru seriile complexe absolut convergente are lor următoarea afirmație: *dacă o serie complexă este absolut convergentă, atunci seria obținută din ea prin orice permutare a termenilor ei este de asemenea absolut convergentă și are aceeași sumă (teorema lui Dirichlet).*

Ca și în cazul real această afirmație pentru seriile complexe neabsolut convergente nu are loc.



**9.6.2. Serii funcționale.**

Seria

$$f_1(z) + f_2(z) + ... + f_n(z) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z), \qquad (1)$$

unde $f_n(z)$, $n \in N$ sunt funcții complexe de o variabilă complexă $z$, definite pe mulțimea $E \subseteq C$, se numește *serie funcțională* sau *serie de funcții.*

Pentru orice $z_0 \in E$ obținem seria numerică complexă $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$, serie care poate fi convergentă sau divergentă.

Mulțimea $D \subseteq E$ a punctelor $z_0 \in E$ pentru care seria numerică respectivă $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$ este convergentă se numește *mulțime de convergență* a seriei (1).

Considerăm șirul sumelor parțiale ale seriei (1):

$$S_1(z) = f_1(z),\quad S_2(z) = f_1(z) + f_2(z), ...,$$

$$S_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + ... + f_n(z), .... \qquad (2)$$

Se spune că seria (1) este c o n v e r g e n t ă  î n  p u n c t u l $z_0 \in D$, atunci și numai atunci, când șirul sumelor parțiale (2) este convergent în $z_0$.

Mulțimea de convergență a șirului (2) coincide cu mulțimea de convergență a seriei (1), iar funcția $f(z) = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$ se numește s u m a seriei (1). În acest caz se spune de asemenea că *funcția* $f(z)$ *se dezvoltă în seria (1) pe mulțimea D.*

Fie seria (1) este convergentă pe mulţimea $D$ şi $f(z)$ este suma ei. Aceasta înseamnă că şirul $\{r_n(z)\}$ a resturilor de ordinul $n$ al seriilor numerice respective tinde către zero, când $n \to \infty$. Deci

$$\lim_{n\to\infty} r_n(z)=0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \forall z\in D, \exists N(\varepsilon,z)\in N:$$

$$\forall n>N(\varepsilon,z) \Rightarrow |r_n(z)|<\varepsilon.$$

Evident că numărul natural $N(\varepsilon,z)$ depinde atât de numărul real $\varepsilon>0$ cât şi de numărul complex $z\in D$.

Vom cerceta o clasă de serii funcţionale, unde $N(\varepsilon,z)$ depinde numai de $\varepsilon$.

***Definiţie.*** Seria (1) convergentă pe mulţimea $D$ către suma ei $f(z)$, se numeşte *uniform convergentă pe această mulţime* dacă pentru orice număr real $\varepsilon>0$ există un număr natural $N=N(\varepsilon)$, care depinde numai de $\varepsilon$, astfel încât pentru orice $n>N(\varepsilon)$ şi orice $z\in D$ avem $|r_n(z)|<\varepsilon$ adică $|f(z)-S_n(z)|<\varepsilon$.

Demonstrăm un criteriu practic de cercetarea convergenţei uniforme a unei serii funcţionale (1).

**Teorema 1** (Weierstrass) Fie seria funcţională (1) definită pe mulţimea $D$. Dacă $|f_n(z)|\le \alpha_n$, $\forall z\in D$ şi dacă seria cu termenii nenegativi $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ este convergentă, atunci seria (1) este uniform şi absolut convergentă pe $D$.

***Demonstraţie.*** Aplicând criteriul 1 de comparaţie a seriilor reale ([18], teorema 2 din 8.1.2), avem că seria reală $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|$ este convergentă pe $D$. Aceasta înseamnă că seria funcţională $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ este absolut convergentă pentru orice $z\in D$ (teorema 2 din 9.6.1). Arătăm că seria (1) este uniform convergentă pe $D$. Avem

$$|r_n(z)|=|f_{n+1}(z)+f_{n+2}(z)+\ldots|\le|f_{n+1}(z)|+$$
$$+|f_{n+2}(z)+\ldots\le \alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}+\ldots=\rho_n, \tag{3}$$

unde $\rho_n$ este restul de ordinul n al seriei reale $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$, care este convergentă şi termenii acestei serii nu depind de $z$. Deci $\lim_{n\to\infty}\rho_n=0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon,\ \exists N=N(\varepsilon):\forall n>N(\varepsilon)\Rightarrow \rho_n<\varepsilon$ pentru orice $z\in D$.

În virtutea relaţiei (3) obţinem

$$\forall\varepsilon>0,\quad \forall z\in D,\quad \exists N=N(\varepsilon):\forall n>N(\varepsilon)\Rightarrow |r_n(z)|<\varepsilon.$$

Prin urmare, seria (1) este uniform convergentă pe $D$ şi teorema este demonstrată.

**Teorema 2.** Dacă termenii seriei (1) sunt funcţii continue pe un domeniu $D$ (simplu conex sau multi conex) şi seria (1) este uniform convergentă pe $D$, atunci suma seriei (1) este continuă pe $D$.

**Teorema 3.** Dacă termenii seriei (1) sunt funcţii continue pe un domeniu $D$ şi seria (1) este uniform convergentă pe $D$ către suma ei $S(z)$, atunci

$$\int_\gamma S(z)dz=\int_\gamma\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)\right)dz=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_\gamma f_n(z)dz\right)$$

unde $\gamma$ este orice curbă netedă pe porţiuni (închisă sau nu) cuprinsă în întregime în $D$ şi orientată în sens pozitiv.

**Teorema 4** (Weierstrass) Fie termenii seriei (1) sunt funcţii analitice pe un domeniu D, iar seria (1) este uniform convergentă pe orice compacte din $D$ către funcţia $f(z)$. Atunci

a) suma seriei (1), adică funcţia $f(z)$, este analitică pe $D$;

b) $f^{(k)}(z)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$, $k=1,2,3,\ldots$, $z\in D$;

c) seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ $(k\in N)$ este uniform convergentă pe orice compacte din $D$ şi suma ei este egală cu funcţia $f^{(k)}(z)$pentru orice $k\in N$.

Teoremele 2 - 4 sunt asemănătoare proprietăţilor respec-tive ale seriilor funcţionale de funcţii reale, serii uniform convergente pe un segment real. Demonstraţiile sunt similare cazului real şi le puteţi găsi de exemplu, în [3], cap. IV; [6], cap. 6, §1; [9], cap VI, §6.

### 9.6.3. Serii de puteri.

Teoria expusă în 9.6.2. are o aplicaţie importantă în studiul proprietăţilor seriilor de puteri.

**Definiţie.** Seria de funcţii $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$, în care $f_n(z)=a_n\cdot z^n$ sau $f_n(z)=a_n(z-z_0)^n$, $a_n\in C$, $z_0\in C$, $n=0,1,2,3,\ldots$ se numeşte *serie de puteri.*

Aşadar, o serie de puteri are forma

$$a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n \tag{1}$$

sau

$$a_0+a_1(z-z_0)+\ldots+a_n(z-z_0)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n, \tag{2}$$

unde $z_0,a_0,a_1,\ldots,a_n,\ldots$ sunt numere complexe din $C$, iar $n=0,1,2,3,\ldots$. Deoarece prin înlocuirea lui $(z-z_0)$ cu $w$, seria (2) are aceeaşi formă cu seria (1) vom demonstra rezultatele fundamentale numai pentru seriile de puteri de forma (1).



Observăm că dacă $z_0=0$, seria (2) se transformă în seria (1). Mulţimea de convergenţă a unei serii de puteri (1) sau (2) nu este vidă: în punctul $z_0=0$, sau respectiv în $z=z_0$, seria de puteri (1) sau (2) este convergentă, deoarece ea are forma $a_0+0+0+\ldots$ , şi suma ei este egală cu $a_0$.

In legătură cu structura mulţimii de convergenţă a seriei de puteri (1) avem următoarele teoreme fundamentale, demonstrate de Abel.

**Teorema 1 (Abel).** Dacă seria (1) este convergentă în punctul $z_0\neq 0$, atunci ea este absolut convergentă în orice punct $z$ ce satisface inegalitatea $|z|<|z_0|$ , adică discul cu centrul în $O$ şi de raza $r=|z_0|$.

***Demonstraţie.*** Din convergenţa seriei numerice complexe $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz_0^n$, rezultă că $\lim_{n\to\infty}a_nz_0^n=0$, adică funcţia $a_nz^n$ este mărginită (9.6.1 şi 9.2.3). Fie $|a_0z_0^n|\le M$ , deci pentru $|z|<|z_0|$ avem:

$$|a_nz^n|=\left|a_n\cdot z_0^n\cdot\left(\frac{z}{z_0}\right)^n\right|=|a_nz_0^n|\cdot\left|\frac{z}{z_0}\right|^n\le Mq^n,$$

unde $q=\left|\frac{z}{z_0}\right|<1$.

Seria reală $\sum_{n=0}^{\infty}M\cdot q^n$, termenii căreia formează o progresie geometrică cu $0<q<1$ este convergentă. Prin urmare, seria (1) este absolut convergentă pentru orice $|z| < |z_0|$ (am aplicat teoremele 2 şi 3 din 9.6.1.). Teorema este demonstrată.

***Consecinţă.*** Dacă seria (1) este divergentă în punctul $z_1$, atunci ea este divergentă în exteriorul cercului cu centrul în $O$ şi de raza $r = |z_1|$, adică pentru orice $|z| > |z_1|$.

Intr-adevăr, presupunem contrariul : fie că seria (1) este convergentă într-un punct $z_2$ ce satisface inegalitatea $|z_1| < |z_2|$. Pe baza teoremei, aceasta ar însemna că seria (1) este convergentă în punctul $z_1$, ceea ce contrazice condiţia din consecinţă. Deci seria (1) este divergentă pentru orice $|z| > |z_1|$, ceea ce trebuie de demonstrat.

Fie seria (1) este convergentă în $z = z_0 \neq 0$ şi divergentă în punctul $z = z_1 \neq z_0$.

Pe baza teoremei 1, seria (1) este absolut convergentă în interiorul cercului $|z| = |z_0|$ cu centrul în 0 de raza $|z_0|$ adică $|z| < |z_0|$ şi este divergentă în exteriorul cercului $|z| = |z_1|$ cu centrul în 0 de raza $|z_1|$, adică $|z| > |z_1|$. Prin urmare, $|z_0| < |z_1|$ (vezi fig.1).

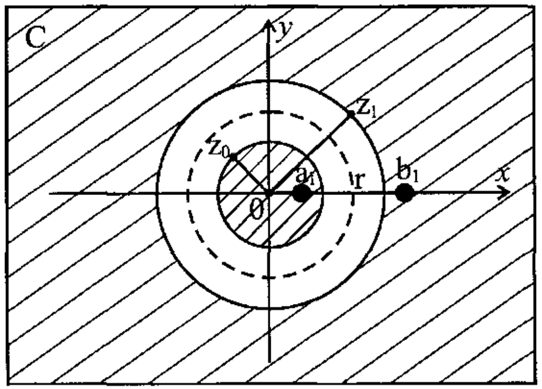



**Fig. 1.**



Considerăm pe axa $OX$ punctul $a_1>0$ în care seria (1) este absolut convergentă (deci şi convergentă) şi punctul $b_1>0$ în care seria (1) este divergentă. Evident că $a_1<|z_0|$, $b_1>|z_1|$ şi $a_1<b_1$. Dacă $\frac{a_1+b_1}{2}$ este un punct de convergenţă pentru seria (1), atunci notăm $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ şi $b_2=b_1$. Dacă însă $\frac{a_1+b_1}{2}$ este un punct de divergenţă pentru seria (1), atunci notăm $a_2=a_1$ şi $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$. În mod similar introducem numerele $a_3$, $b_3$ etc.

Obţinem două şiruri reale monotone:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots,$$

în punctele căruia seria (1) este convergentă şi

$$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \ldots \geq b_n \geq \ldots,$$

în punctele căruia seria (1) este divergentă. Întrucât aceste şiruri pozitive sunt monotone şi mărginite, ele sunt convergente, având o limită comună, deoarece

$$b_n - a_n = \frac{b_1 + a_1}{2^{n-1}} \to 0, \text{ când } n \to \infty.$$

Fie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = r > 0$ şi considerăm cercul $|z| = r$. Vom demonstra că în interiorul acestui cerc seria (1) este absolut convergenră, iar în exteriorul lui seria (1) este divergentă.

Într-adevăr, fie $z_1$ aparţine interiorului cercului $|z| = r$, adică $|z_1|<r$. Pentru un $n$ suficient de mare se va îndeplini condiţia $|z_1|<a_n$. Deoarece în punctul $a_n$ seria (1) este convergentă, pe baza teoremeie 1, seria (1) este absolut convergentă în $z_1$. Fie $z_2$ aparţine exteriorului cercului $|z| = r$, adică $|z|>r$. Atunci pentru $n$ suficient de mare avem că $|z_2|>b_n$. Deoarece în punctul $b_n$

seria (1) este divergentă, în baza consecinţei din teorema 1, conchidem că seria (1) este divergentă.

Aşadar în interiorul cercului $|z| = r$ seria (1) este absolut convergentă, iar în exteriorul lui seria (1) este divergentă.

În ceea ce priveşte punctele de pe cercul $|z| = r$, apoi ele cer un studiu aparte.

In acest caz discul $|z| < r$ se numeşte *disc de convergenţă* al seriei (1), iar numărul $r$ – *rază de convergenţă* a seriei date. Dacă seria (1) este convergentă numai în punctul $z_0 = 0$, vom considera *r=0,* iar dacă seria (1) este convergentă pe mulţimea *C*, vom considera $r = +\infty$ .

Aşadar, în baza celor expuse mai sus, am demonstrat următoarea teoremă generală :

**Teorema 2 (Abel).** Pentru orice serie de puteri (1), există un număr real $r \geq 0$ finit sau infinit astfel încât :

a) seria (1) este absolut convergentă în interiorul cercului $|z| < r$ ;

b) seria (1) este divergentă în exteriorul acestui cerc.

Astfel, problema despre structura domeniului de convergenţă al seriei (1) s-a dovedit a fi rezolvată : *domeniul de convergenţă al seriei de puteri (1) este interiorul cercului* $|z| = r$. După cum vom vedea din exemplul 1 de mai jos, în punctele de pe cercul $|z| = r$, seria (1) poate fi atât convergentă (absolut sau nu), cât şi divergentă.

Similar cazului real ([18], 8.2.2., teoremele 1,2), raza de convergenţă a seriei (1), utilizând criteriul D'Alembert, se calculează după formula :

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| , \tag{3}$$



iar utilizând criteriul radical Cauchy, se poate calcula astfel :

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} . \tag{4}$$

**Exemplul 2.** Să se afle domeniul de convergenţă al seriilor :

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ ; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+i)^{2n}\cdot z^n$ ; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$.

**Rezolvare.**

a) **Metoda 1.** Aplicăm criteriul lui D'Alembert: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{z^n}\right| = |z|\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = |z|$. Deci, dacă $|z| < 1$, seria este absolut convergentă, iar dacă $|z| > 1$, seria este divergentă. Prin urmare, discul de convergenţă este $|z| < 1$.

**Metoda 2.** Utilizând formula (3) avem : $r = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot(n+1)^2 = 1$, adică discul de convergenţă este $|z| < 1$.

Cercetăm convergenţa seriei pe cercul $|z| = 1$. Avem : seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ este convergentă ca serie reală Riemann cu $\alpha = 2 > 1$ (a se consulta [18], exemplul 11 din 8.1.2.). Aplicând teorema 2 din 9.6.1., conchidem că seria $\sum\limits_{n=1}^{n}\frac{z^n}{n^2}$ cu $|z| = 1$ este absolut convergentă. Prin urmare, domeniul de convergenţă al seriei date este discul închis $|z| \leq 1$.

b) **Metoda 1**. Aplicăm criteriul radical Cauchy :

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(1+i)^{2n}\cdot z^n\right|}=|1+i|^2\cdot|z|=2|z|<1$, de unde $|z|<\frac{1}{2}$. Deci, discul de convergență al seriei date este $|z|<\frac{1}{2}$.

**Metoda 2.** Utilizând formula (4) avem: $r=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|1+i|^{2n}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}|1+i|^2}=\frac{1}{2}$,

ceea ce înseamnă că discul de convergență al seriei respective este $|z|<\frac{1}{2}$.

Cercetăm convergența seriei date pe cercul $|z|=\frac{1}{2}$.

Avem $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(1+i)^{2n}\cdot z^n\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2}\right)^{2n}\cdot\frac{1}{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\lim\limits_{n\to\infty}1=1\neq 0$, obținem că și $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+i)^{2n}\cdot z^n\neq 0$, pentru orice $z$ de pe discul $|z|=\frac{1}{2}$. Aceasta înseamnă că (vezi 9.6.1.) seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+i)^{2n}\cdot z^n$ este divergentă pe cercul $|z|=\frac{1}{2}$. Prin urmare, domeniul de convergență al seriei date este discul $|z|<\frac{1}{2}$.

c) Aplicăm criteriul D'Alembert:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{z^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z\cdot n}{n+1}\right|=|z|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=|z|<1.$$

Deci, discul de convergență al acestei serii este $|z|<1$. Dacă



$z=1$, avem $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Această serie, ca o serie armonică, este divergentă.

Dacă $z=-1$, avem $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. Am obținut astfel, seria lui Leibniz, care este convergentă. Aplicând alte criterii mai fine (de exemplu, criteriul lui Dirichlet), se poate de demonstrat că punctul $z=1$ este unicul punct de pe cercul $|z|=1$, în care seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ este divergentă (a se consulta [10], cap.6, §4.1, [9], cap. 4, § 2).

**Teorema 3 (Abel).** Seria de puteri (1) este uniform convergentă pe orice disc închis $|z|\leq r_1$, unde $r_1<r$, și $r$ este raza de convergență a seriei (1).

***Demonstrație*.** Intr-adevăr, pentru punctul $z=r_1<r$ în virtutea teoremei 2 seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n r_1^n$ este absolut convergentă, adică seria $|a_0|+|a_1|\cdot r_1+|a_2|\cdot r_1^2+\ldots+|a_n|\cdot r_1^n+\ldots$ este convergentă. Deoarece $\left|a_n\cdot z^n\right|\leq\left|a_n\cdot r_1^n\right|$ pentru orice $|z|\leq r_1$, avem, în baza teoremei 1 din 9.6.2., că seria dată este uniform convergentă pe discul închis $|z|\leq r_1$. Teorema este demonstrată.

**Nota 1.** Discul de convergență al seriei (2) are forma $|z-z_0|<r$, unde raza de convergență $r$ se calculează după aceleași formule (3) sau (4), deoarece coeficienții $a_0,a_1,a_2,\ldots a_n,\ldots$ din seriile (1) și (2) coincid.

In baza teoremei 3 (Abel), seria (2) este uniform convergentă pe orice disc închis $|z-z_0|\leq r_1<r$.

**Nota 2.** Observăm că toţi termenii seriei de puteri (1) sau (2) sunt funcţii analitice pe discul de convergenţă $|z| < r$, sau respectiv $|z - z_0| < r$, unde raza de convergenţă $r$ se calculează cu ajutorul formulelor (3) sau (4). De asemenea seriile (1) şi (2) sunt uniform convergente pe orice disc închis $|z| \le r_1 < r \ne 0$ sau respectiv $|z - z_0| \le r_1 < r \ne 0$. Aplicând teoremele 3,4 din 9.6.2., obţinem următoarele rezultate fundamentale:

1) sumele $f_1(z)$ şi $f_2(z)$ ale seriilor (1) şi (2) sunt funcţii analitice pe discul de convergenţă respectiv;

2) seria formată din derivatele de ordinul $k$ ($k\in N$)ale termenilor seriilor (1) şi (2), are acelaşi disc de convergenţă ca şi seria iniţială respectivă ;

3) sumele $f_1(z)$ şi $f_2(z)$ ale seriilor (1) şi (2) sunt indefinit derivabile, şi

$$f_1^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n z^n\right)^{(k)},\ f_2^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n (z - z_0)^n\right]^{(k)}, \quad k \in N;$$

$$\int_{\gamma_1} f_1(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_{\gamma_1} a_n z^n dz \right),$$ unde $\gamma_1$ este orice curbă netedă pe porţiuni (închisă sau nu), care este cuprinsă în întregime pe discul de convergenţă $|z| < r$, şi

$$\int_{\gamma_2} f_2(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_{\gamma_2} a_n (z - z_0)^n dz \right),$$ unde $\gamma_2$ este orice curbă netedă pe porţiuni, care este cuprinsă în întregime pe discul de convergenţă $|z - z_0| < r$.

Aşadar, seriile de puteri pe discul lor de convergenţă pot fi derivate termen cu termen şi pot fi integrate termen cu termen de



la punctul $z_1$ la punctul $z_2$, unde $z_1, z_2$ aparţin discului de convergenţă.

**Exemplul 3.** Să se calculeze suma seriei

$$z - \frac{z^2}{2} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{z^{n+1}}{n+1} + \ldots.$$

**Rezolvare.** Considerăm seria $1 - z + z^2 - z^3 + \ldots = \sum_{n=0} (-1)^n \cdot z^n$, care reprezintă suma unei progresii geometrice cu raţia $q = -z$. Dacă $|q| < 1$, adică $|z| < 1$, seria respectivă este convergentă şi suma ei $S(z) = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1+z}$. Integrând termen cu termen seria $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$ de la punctul $z_1 = 0$, la punctul $z_2 = z, |z| < 1$, obţinem seria

$$\int_0^z \frac{dz}{1+z} = z - \frac{z^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{z^n}{n} + (-1)^n \cdot \frac{z^{n+1}}{n+1} + \ldots.$$

În baza notei 2 de mai sus, această serie are ca disc de convergenţă mulţimea $|z| < 1$.

Deci $\ln(1+z) - \ln 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}$,

sau

$$\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots,$$

unde $\ln(1+z)$ este ramura principală a funcţiei multivoce $\mathrm{Ln}(1+z)$.

**Exemplul 4.** Să se calculeze suma seriei $z - \frac{z^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{2n-1} + \ldots.$

**Rezolvare**. Seria dată se obţine integrând termen cu termen seria

$$1-z^2+z^4-\ldots+(-1)^n z^{2n}+\ldots .$$

Termenii acestei serii formează o progresie geometrică cu raţia $q=-z^2$ . Deci, ea este convergentă pe discul $|z|<1$, şi are suma $S(z)=\dfrac{1}{1-q}=\dfrac{1}{1-(-z^2)}=\dfrac{1}{1+z^2}$ .

Prin urmare, pentru orice $|z|<1$, avem:

$$\int_0^z \frac{dz}{1+z^2}=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\ldots .$$

De unde

$$arctgz=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^7}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{z^{2n-1}}{2n-1}+\ldots=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{z^{2n-1}}{2n-1},$$

care este convergentă pe discul $|z|<1$. Funcţia $arctgz$ este ramura principală a funcţiei multivoce $Arctgz$.

**Definiţie.** Două serii de puteri $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-z_0)^n$, coincid între ele, dacă $a_n=b_n$ pentru orice $n=0,1,2,\ldots$ .

Fie $S(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ . Presupunem că suma acestei serii este o funcţie pară, adică $S(-z)=S(z)$.

Avem:

$$S(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots ,$$

$$S(-z)=a_0-a_1z+a_2z^2-\ldots+(-1)^n a_nz^n+\ldots .$$

Deoarece $S(-z)=S(z)$, seriile respective coincid între ele. Deci, $a_n=(-1)^n a_n$ pentru orice $n=0,1,2,\ldots$ .

Dacă $n$ este impar $(n=1,3,5,\ldots)$, obţinem $a_n=-a_n$, de unde $a_n=0$ $(n=1,3,5,\ldots)$.

Prin urmare, seria de puteri când suma ei este o funcţie pară, are forma

$$a_0+a_2z^2+a_4z^4+\ldots+a_{2n}z^{2n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}z^{2n} . \tag{5}$$

Similar se constată că, dacă suma unei serii de puteri este funcţie impară, adică $S(-z)=-S(z)$, atunci această serie are forma

$$a_1z+a_3z^3+\ldots+a_{2n+1}z^{2n+1}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}\cdot z^{2n+1} . \tag{6}$$

### 9.6.4. Serii Taylor.

Fie seria de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n , \tag{1}$$

unde $r>0$ este raza ei de convergenţă. Aceasta înseamnă că seria (1) este absolut convergentă pe discul ei de convergenţă, adică pentru orice $|z-z_0|<r$ şi uniform convergentă pe orice disc închis $|z-z_0|\le r_1<r$. Deoarece termenii seriei (1) sunt funcţii polinomiale, adică sunt funcţii analitice pe **C**, rezultă că ele sunt analitice pe discul $|z-z_0|<r$ şi deci, indefinit derivabile pe acest disc.

Aplicând rezultatele notei 2, din 9.6.3., rezultă că suma $f(z)$ a seriei (1) este de asemenea o funcţie analitică pe discul $|z-z_0|<r$ şi indefinit derivabilă pe acest disc. Prin urmare

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n, \qquad (2)$$

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n(z-z_0)^n\right]^{(k)},\ k\in N, \qquad (3)$$

care sunt valabile pentru orice $z$ din discul $|z-z_0|<r$.

Dacă în relaţiile (2) şi (3) considerăm $z=z_0$, avem $f(z_0)=a_0$, $f^{(k)}(z_0)=k(k-1)\cdot\ldots\cdot1\cdot a_k=k!a_k$, pentru orice $k\in N$. De unde

$$a_0=f(z_0),\ a_k=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!},\quad k=1,2,3,\ldots . \qquad (4)$$

Prin urmare, substituind coficienţii $a_0,a_1,a_2,\ldots$ din relaţiile (4) în formula (2), obţinem că

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\ldots=f(z_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n. \qquad (5)$$

Aşadar, seria (1) cu ajutorul relaţiilor (4) se transformă în seria

$$f(z_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n, \qquad (6)$$

considerând $f^{(0)}(z_0)=f(z_0)$ şi $0!=1$.

Seria (6) se numeşte *serie Taylor* pentru funcţia $f(z)$. Evident că suma seriei (6) pe discul ei de convergenţă $|z-z_0|<r$ coincide cu funcţia $f(z)$. In acest caz, vom spune că *funcţia* $f(z)$ *este dezvoltabilă în serie Taylor pe discul de convergenţă* $|z-z_0|<r$.



Pe baza celor constatate enunţăm următorul rezultat.

**Teorema 1**. Orice funcţie dezvoltabilă în serie Taylor este analitică pe discul de convergenţă al seriei respective şi coincide cu suma acesteia.

Are loc şi teorema reciprocă:

**Teorema 2.** Dacă funcţia $f(z)$ este analitică pe discul $|z-z_0|<r$, $r>0$, atunci $f(z)$ este dezvoltabilă în serie Taylor pe acest disc, şi această dezvoltare este unică.

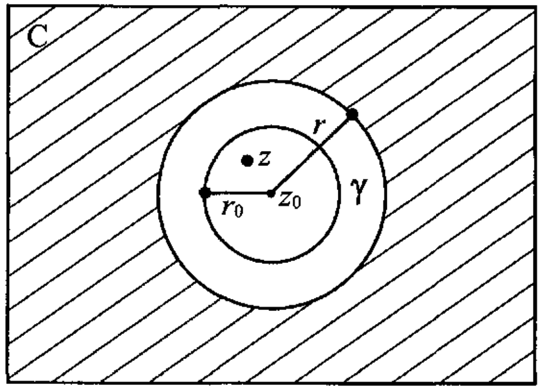



**Fig. 1.**

**Demonstraţie.**

Fie $z$ un punct arbitrar ce aparţine discului $|z-z_0|<r$, $r>0$ (vezi fig. 1).

Considerăm cercul $\gamma:|\xi-z_0|=r_0<r$, astfel încât punctul $z$ să aparţină discului $|\xi-z_0|<r_0$.

Aplicând formula integrală a lui Cauchy (formula 5 din 9.5.2), avem:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi\ .$$

Deoarece $\dfrac{1}{\xi-z}=\dfrac{1}{(\xi-z_0)-(z-z_0)}=\dfrac{1}{(\xi-z_0)\left(1-\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)}$

şi $|\xi-z_0|=r_0$, $|z-z_0|<r_0$, rezultă că $\left|\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}\right|=|q|<1$.

Astfel, funcţia $\dfrac{1}{\xi-z}$ poate fi considerată ca suma unei serii de puteri termenii căreia formează o progresie geometrică cu termenul întâi $a=\dfrac{1}{\xi-z_0}$ şi raţia $q=\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}$, unde $|q|<1$. Deci

$$\frac{1}{\xi-z}=\sum_{n=0}^{\infty}aq^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\xi-z_0}\cdot\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}\,.$$

Prin urmare,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}f(\xi)\cdot\frac{1}{\xi-z}d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}f(\xi)\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}\right]d\xi=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\left[\sum_{n=0}^{\infty}f(\xi)\cdot\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}\right]d\xi\ .(7)$$

Arătăm că seria

$$\sum_{n=0}^{\infty}f(\xi)\cdot\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}\qquad(8)$$

este uniform convergentă pe cercul $\gamma$.



Intr-adevăr, pentru orice $\xi\in\gamma$ avem: $\left|\dfrac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}\right|=\dfrac{|z-z_0|^n}{|\xi-z_0|^{n+1}}=\dfrac{|z-z_0|^n}{r_0^{n+1}}$. Funcţia $f(\xi)$ este analitică pe discul închis $|\xi-z_0|\le r_0$, deci ea este continuă şi mărginită pe acest domeniu compact (vezi 9.4.3 şi 9.2.3). Aceasta înseamnă că există numărul real $M>0$, astfel încât $|f(\xi)|\le M$ pentru orice $\xi$ din discul închis $|\xi-z_0|\le r_0$, adică, în particular şi pentru orice $\xi\in\gamma$.

Prin urmare,

$$\left|f(\xi)\cdot\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}\right|\le M\cdot\frac{|z-z_0|^n}{r_0^{n+1}}=$$

$$=\frac{M}{r_0}\cdot\left(\frac{|z-z_0|}{r_0}\right)^n,\ \xi\in\gamma\qquad(9)$$

Observăm că termenii seriei numerice $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{M}{r_0}\cdot\left(\frac{|z-z_0|}{r_0}\right)^n$, formează o progresie geometrică cu raţia $q_1=\dfrac{|z-z_0|}{r_0}<1$, adică această serie numerică reală este convergentă.

Aplicând criteriul lui Weierstrass din 9.6.2 şi având în vedere relaţia (9), rezultă că seria funcţională (8) este uniform convergentă pe cercul $\gamma$.

Integrând termen cu termen seria (8), în virtutea relaţiei (7) şi a formulei (6) din 9.5.2, obţinem

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\oint_{\gamma}f(\xi)\cdot\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi\right]=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\times$$

$$\times\oint_\gamma \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{n!} \cdot \left[ \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n.$$

considerând $f^{(0)}(z_0)=f(z_0)$ şi $0!=1$.

Întrucât $z$ este un punct arbitrar din discul $|z-z_0|<r$, am obţinut că funcţia $f(z)$ este dezvoltabilă în serie Taylor pe acest disc. Reeşind din relaţiile (4), dezvoltarea funcţiei $f(z)$ în serie Taylor este unică. Teorema este demonstrată.

Remarcăm că, din teoremele 1 şi 2 rezultă că noţiunea „o funcţie analitică pe un disc" şi noţiunea "o funcţie dezvoltabilă în serie Taylor pe acest disc" sunt echivalente.

Seria Taylor (6) cu $z_0 = 0$, se numeşte s e r i e M a c L a u r i n. Dezvoltarea funcţiei $f(z)$ analitice pe discul $|z|<r$, $r>0$ în serie MacLaurin are forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, \quad z \in U(0,r), \tag{10}$$

considerând $f^{(0)}(0) = f(0)$ şi $0!=1$.

Reamintim (9.4.3) că funcţia $f(z)$ este analitică în punctul $z_0$, dacă ea este analitică pe discul $|z-z_0|<\varepsilon$, unde $\varepsilon>0$, adică, pe o $\varepsilon-$vecinătate $U(z_0,\varepsilon)$ a acestui punct. Dacă funcţia $f(z)$ nu este analitică în punctul $z_0$, atunci $z_0$ se numeşte *punct singular*. Dacă există o $\varepsilon-$vecinătate a punctului singular $z_0$ în care funcţia $f(z)$ nu are alte puncte singulare decât punctul $z_0$, atunci $z_0$ se numeşte *punct singular izolat*.



Fie funcţia $f(z)$ este analitică pe domeniul $D$. Presupunem că într-o $\varepsilon$ - vecinătate a punctului $z_0 \in D$ funcţia $f(z)$ este dezvoltabilă în serie de puteri, adică

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

şi $r_0$ este raza de convergentă a acestei serii. Are loc următoarea teoremă.

**Teorema 3.** Pe cercul $|z-z_0|=r_0$ există cel puţin un punct singular al funcţiei $f(z)$ analitice în $z_0 \in D$, în care seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ este convergentă.

Demontraţia acestei teoreme o puteţi găsi în [6], cap. 6, §3, teorema 6.10.

Utilizând teorema 3 obţinem următoarele: fie $z_1, z_2, ..., z_n$ sunt punctele singulare ale funcţiei $f(z)$analitice pe domeniul $D$. Dacă se cere de dezvoltat funcţia $f(z)$ în serie Taylor după puterile $(z-z_0)$, unde în punctul $z_0 \in D$ funcţia $f(z)$ este analitică, atunci, reieşind din teorema 3, conchidem, că *discul de convergenţă al seriei respective va avea raza egală cu distanţa dintre punctul $z_0$ şi cel mai apropiat punct singular al acestei funcţii.*

În încheiere considerăm câteva exemple de dezvoltări ale funcţiilor elementare în serie MacLaurin.

**Exemplul 5.** Să se dezvolte în serie MacLaurin funcţiile:

a) $e^z$; b) $\sin z$; c) $\cos z$.

**Rezolvare.**

a) Avem: $f(z) = e^z, f^{(n)}(z) = e^z$ pentru orice $n \in N$. Deci $f(0) = f'(0) = ... = f^{(n)}(0) = ... = e^0 = 1$, $n \in N$.

Prin urmare, formula (10) pentru $e^z$ are forma

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \qquad (11)$$

Această formulă este valabilă pentru orice $z \in \mathbf{C}$, deoarece funcţia $e^z$ este analitică pe $\mathbf{C}$ (este o funcţie întreagă).

b) Avem:

$$f(z) = \sin z, f'(z) = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} =$$

$$= \frac{e^{i\frac{\pi}{2}} e^{iz} + e^{i\frac{\pi}{2}} e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(z+\frac{\pi}{2})} - e^{-i(z+\frac{\pi}{2})}}{2i} = \sin(z + \frac{\pi}{2}),$$

$$f''(z) = \cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(z + 2\frac{\pi}{2}\right), \ldots, f^{(n)}(z) = \sin\left(z + n\frac{\pi}{2}\right),$$

pentru orice $n \in N$.

Deci $f^{(n)}(0) = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ şi formula (10) are forma

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (12)$$

Funcţia $\sin z$ şi derivatele ei sunt funcţii analitice pe $C$. Deci formula (12) este valabilă pentru orice $z \in \mathbf{C}$.

d) Similar punctului precedent, avem: $f^{(n)}(z) =$
$= \cos\left(z + \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \mathbf{N}$ şi $f(0) = \cos 0 = 1$, $f^{(n)}(0) = \cos\frac{\pi n}{2}$.

Deci

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots =$$



$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad (13)$$

valabilă pentru orice $z \in \mathbf{C}$.

**Exemplul 6.** Să se dezvolte în serie MacLaurin funcţia binomială $f(z) = (1+z)^\alpha, \alpha \in \mathbf{R}$, $z \neq -1$.

a) Fie $\alpha \in N$. Deci (vezi 9.4.4.) funcţia $f(z)$ este analitică pe C.

Dacă $\alpha = m \in \mathbf{N}$, atunci $f'(z) = [(1+z)^m]' = m(1+z)^{m-1}$, $f''(z) = m(m-1)(1+z)^{m-2}, \ldots, f^{(m)}(z) = m!$ şi $f^{(n)}_{(z)} = 0$ pentru orice $n>m$, $n \in N$. Prin urmare, $f(0) = 1, f'(0) = m, f''(0) = m(m-1), \ldots, f^{(m)}(0) = m!$ şi $f^{(n)}(0) = 0$ pentru orice $n>m$, $n \in N$. Formula (10) are forma

$$(1+z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{2!} z^2 + \ldots + \frac{m!}{m!} z^m + 0 + \ldots =$$

$$= 1 + mz + \frac{m(m-1)}{2!} z^2 + \ldots + z^m.$$

Am obţinut formula obişnuită a binomului Newton ([17], 2.6.2.). Deoarece $f(z) = (1+z)^m$, $m \in \mathbf{N}$ şi derivatele ei sunt funcţii întregi, binomul lui Newton are loc pentru orice $z \in \mathbf{C}$.

Fie acum $\alpha = m \in \mathbf{Z}$. Atunci $f(z)$ este multivocă cu un număr finit de ramuri şi ramurile ei sunt funcţii analitice pe

$$D = C \setminus \{z \in C, \operatorname{Re} z \geq -1, \operatorname{Im} z = 0\}$$

(vezi 9.4.4, punctul 10).

Prin urmare,

$$f'(z) = m(1+z)^{m-1}, f''(z) = m(m-1)(1+z)^{m-2}, \ldots,$$

$$f^{(n)}(z) = m(m-1)(m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)(1+z)^{m-n},$$

pentru orice $n \in N$. Deci

$$f(0) = 1, f'(0) = m, f''(0) = m(m-1), \ldots,$$

$$f^{(n)}(0) = m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1),$$

pentru orice $n \in N$ şi formula (10) are forma

$$(1+z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{2!}z^2 + \ldots + \\ + \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}z^n + \ldots . \qquad (14)$$

Deoarece punctul $z=-1$ este un punct singular pentru $f(z)=(1+z)^m, z \neq -1, m \in \mathbf{Z}$, avem că formula (14) este valabilă pentru orice $z$ din cercul $|z|<1$ (distanţa de la punctul $z_0=0$ până la punctul singular $z_1=-1$ este egală cu 1, adică $r=1$).

În sfârşit, dacă $\alpha$ este iraţional, atunci funcţia $f(z)=(1+z)^\alpha$, $z\in C\setminus\{-1\}$ este multivocă cu un număr infinit de ramuri (vezi 9.4.4, punctul 10) şi fiecare ramură este analitică pe domeniul

$$D=C\setminus\{z\in C, \text{Re}z\leq -1, \text{Im}z=0\}.$$

Deoarece derivatele $f^{(k)}(z), k\in N$ au aceeaşi formă ca în cazul precedent, dezvoltarea în serie MacLaurin a funcţiei $(1+z)^\alpha, \alpha$ este iraţional are forma (14) considerând $\alpha = m$.

Prin urmare, funcţia binomială $(1+z)^\alpha$ pentru orice $\alpha\in \mathbf{R}, \alpha \notin \mathbf{N}$ este dezvoltabilă în serie MacLaurin de forma (14) pe discul $|z|<1$. Dacă în (14) înlocuim $z$ cu $-z$ obţinem formula:

$$(1-z)^m = 1 - mz + \frac{m(m-1)}{2!}z^2 - \ldots + \\ + (-1)^n\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}z^n + \cdots, m\in R, |z|<1. \qquad (15)$$

**Exemplul 7.** Să se dezvolte în serie MacLaurin funcţiile $\arcsin z$ şi $\text{arctg}\, z$.

**Rezolvare.**

a) Funcţia $f(z)=\arcsin z$ este ramura principală (univocă) a funcţiei multivoce $\text{Arcsin}\, z$ (vezi 9.4.4, punctul 8)



adică acea ramură pentru care $\text{Arcsin}\, 0 = 0$ şi $(\text{Arcsin}\, z)'_{z=0} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\right)_{z=0} = 1$. Deci

$$(\arcsin z)' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = (1-z^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Aplicând formula (15) cu $m=-\frac{1}{2}$ şi , având în vedere că inegalitatea $|z|<1$ implică $|t|=|z^2|<1$, obţinem

$$\frac{1}{\sqrt{1-t}} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = 1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2^2}\frac{3}{2!}z^4 + \ldots + \\ + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}z^{2n} + \ldots .$$

Această serie este uniform convergentă pe orice disc închis $|z|\leq r<1$ deci, integrând-o termen cu termen de la punctul 0 la punctul $z$, unde $z$ aparţine discului $|z|<1$, rezultă că

$$\arcsin z = z + \frac{1}{2\cdot 1!}\cdot\frac{z^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\frac{z^5}{5} + \ldots + \\ + \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = \\ = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{z^{2n+1}}{2n+1}. \qquad (16)$$

(reamintind că $(2n-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-1)$ şi $(2n)!!=2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)$). Formula (16) este valabilă pentru orice $z$ ce aparţine discului $|z|<1$.

b) Funcţia $f(z)=\text{arctg}\, z$ este ramura principală (univocă) a funcţiei multivoce $\text{Arctg}\, z$ (a se consulta 9.4.4, punctul 8) adică acea ramură pentru care $\text{Arctg}\, 0 = 0$ şi

$(\text{Arctg } z)'_{z=0} = \left(\dfrac{1}{1+z^2}\right)_{z=0} = 1$. Avem (a se consulta punctul 9 din 9.4.4.):

$$(\text{arctg } z)' = \frac{1}{1+z^2} = (1+z^2)^{-1}.$$

Aplicând formula (14) cu $m=-1$ şi, având în vedere că $|z|<1$ implică $|t|=|z^2|<1$, rezultă că

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + \frac{1\cdot 2}{2!} z^4 - \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3!} z^6 + \ldots +$$

$$+(-1)^n \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}{n!} z^{2n} + \ldots$$

$$\ldots = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \ldots + (-1)^n z^{2n} + \ldots .$$

Această serie este uniform convergentă pe discul închis $|z| \le r < 1$ şi integrând-o termen cu termen de la 0 la $z$, unde $z$ aparţine discului $|z|<1$, obţinem:

$$\text{arctg } z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \qquad (17)$$

care este valabilă pentru orice $z$ ce aparţine discului $|z|<1$ (a se vedea ex.3 din 9.6.3).

**Exemplul 8.** Să se dezvolte în serie MacLaurin funcţiile:

a) sh $z$; b) ch $z$; c) $tgz$.

**Rezolvare.**

a) Avem

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots ;$$

$$e^{-z} = 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

care sunt valabile pentru orice $z \in \mathbf{C}$ (ex. 1a) de mai sus).



Deci

$$\text{sh } z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{1}{2}\left[\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots\right) - \right.$$

$$\left. - \left(1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^n}{n!} + \ldots\right)\right] =$$

$$= z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad (18)$$

care este valabilă pentru orice $z \in \mathbf{C}$.

b) Similar cazului precedent, obţinem că

$$\text{ch } z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad (19)$$

care este valabilă pentru orice $z \in \mathbf{C}$.

c) Punctele $z_k = \dfrac{2k+1}{2} \cdot \pi, k \in \mathbf{Z}$ sunt punctele singulare ale funcţiei $f(z) = \text{tg } z$. Distanţa cea mai mică de la punctul $z_0 = 0$ până la punctele singulare $z_k$ este egală cu $\dfrac{\pi}{2}$. Deci seria MacLaurin pentru $f(z) = \text{tg } z$ este valabilă pe discul $|z| < \dfrac{\pi}{2}$.

Deoarece tg $z$ este o funcţie impară şi $\text{tg } 0 = 0$, seria MacLaurin are forma (a se vedea formula (6) din 9.6.3.)

$$\text{tg } z = a_1 z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + \ldots .$$

Folosind identitatea $\sin z = \cos z \cdot \text{tg } z$ şi formulele (12) şi (13) pentru $\sin z$ şi respectiv $\cos z$, rezultă că

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots\right) \times$$

$$\times (a_1 z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + \ldots).$$

Reamintim că două serii se înmulţesc după regula înmulţirii a două polinoame. Din egalitatea a două serii obţinem egalitatea coeficienţilor respectivi. Prin urmare, egalând coeficienţii de pe lângă $z, z^3, z^5, z^7, \dots$ din ambele părţi obţinem:

$$1 = a_1, \quad -\frac{1}{3!} = a_3 - \frac{1}{2!}a_1 = a_3 - \frac{1}{2!},$$

$$\frac{1}{5!} = a_5 - \frac{1}{2!}a_3 + \frac{1}{4!}a_1 = a_5 - \frac{1}{2!}a_3 + \frac{1}{4!},$$

$$-\frac{1}{7!} = a_7 - \frac{1}{2!}a_5 + \frac{1}{4!}a_3 - \frac{1}{6!}a_1 = a_7 - \frac{1}{2!}a_5 + \frac{1}{4!}a_3 - \frac{1}{6!}, \dots .$$

Formula generală are forma

$$(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} = a_{2n+1} - \frac{1}{2!}a_{2n-1} + \frac{1}{4!}a_{2n-3} - \frac{1}{6!}a_{2n-5} + \dots +$$

$$+ (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n)!},$$

$n = 0,1,2,\dots .$

Din relaţiile de mai sus avem $a_1 = 1$,

$$a_3 = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} = \frac{3! - 2!}{2! \cdot 3!} = \frac{2!(3-1)}{2! \cdot 3!} = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3},$$

$$a_5 = \frac{1}{2!}\frac{1}{3} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{20}\right) = \frac{2}{15}.$$

$$a_7 = \frac{1}{2!}\frac{2}{15} - \frac{1}{4!}\frac{1}{3} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} = \frac{17}{315},$$

$$a_9 = \frac{1}{2!}\frac{17}{315} - \frac{1}{4!}\frac{2}{15} + \frac{1}{6!}\frac{1}{3} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} = \frac{62}{2835}, \dots .$$

Astfel seria MacLaurin pentru $\operatorname{tg} z$ are forma

$$\operatorname{tg} z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \frac{62}{2835}z^9 + \dots, \tag{20}$$

valabilă pentru orice $z$ din discul $|z| < \frac{\pi}{2}$.



**Notă.** Formula $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ este valabilă pentru orice $z$ din discul $|z| < 1$, deoarece distanţa de la punctul $z_0 = 0$ până la punctul singular $z = 1$ al acestei funcţii este egală cu 1. Evident că $|z| < 1$ implică $|-z| < 1$ şi $|z^2| = |-z^2| < 1$. Deci

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \dots + (-1)^n z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n,$$

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - \dots + (-1)^n z^{2n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n},$$

care sunt valabile pentru orice $z$ din discul $|z|<1$.

Integrând termen cu termen aceste trei serii de la punctul 0 la punctul $z$, unde $z$ aparţine discului $|z| < 1$, rezultă respectiv următoarele formule

$$\ln(1-z) = -\left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots + \frac{z^{n+1}}{n+1} + \dots\right) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1}; \tag{21}$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \dots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}; \tag{22}$$

$$\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \dots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \tag{23}$$

care sunt valabile pentru orice $z$ ce aparţine discului $|z| < 1$.

Propunem cititorului să demonstreze formulele (21) şi (22), utilizând seria binomială din exemplul 2 (a se compara cu deducerea formulelor (17) şi (23)).

### 9.6.5. Serii Laurent.

În 9.6.4. am dat o caracteristică funcţiilor analitice pe un disc şi anume, dacă funcţia $f(z)$ este analitică pe discul $|z-z_0|<r$, atunci ea se dezvoltă în mod unic în seria Taylor

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,$$

unde $z_0\in C$, $a_0=f(z_0)$, $a_n=\dfrac{f^{(n)}(z)}{n!}$, $n\in N$.

În acest paragraf vom studia funcţiile analitice într-un disc punctat $\overline{U}(z_0,r)$, adică funcţiile analitice pe o coroană circulară

$$U(z_0,0,r)=\{z_0\in C,\ 0<|z-z_0|<r,\ r>0\}.$$

**Definiţie.** Vom numi *serie Laurent* (1813 – 1854 – matematician francez) într-o $r$ - vecinătate punctată a punctului $z_0\in C$, $r>0$ (sau în jurul punctului $z_0$) seria de funcţii de forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n=$$

$$=\left[\ldots+\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}+\ldots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}\right]+\left[a_0+a_1(z-z_0)+\ldots+\right.$$

$$\left.+a_n(z-z_0)^n+\ldots\right],\ z_0\in C,\ n\in N.$$

Numerele complexe $a_{-n}$ şi $a_n, n\in N$ se numesc *coeficienţii* seriei Laurent.

Pentru seria Laurent vom utiliza frecvent o notaţie mai concisă

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n,\ n\in Z. \tag{1}$$



Dacă $a_n=0$ pentru orice n întreg negativ, atunci seria Laurent se reduce la o serie de puteri. Mai observăm că pentru orice $n\in N$ funcţiile $a_n(z-z_0)^n$ sunt analitice pe C, iar pentru orice $n$ întreg negativ funcţiile $a_n(z-z_0)^n$ sunt analitice pe mulţimea $C\setminus\{z_0\}$.

Seria

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}(z-z_0)^{-n},\ n\in N \tag{2}$$

se numeşte *partea principală* a seriei Laurent, iar seria de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\ n=0,1,2,\ldots \tag{3}$$

se numeşte *partea secundară* a seriei Laurent.

Vom spune că seria Laurent (1) converge (simplu sau uniform) pe o mulţime

$$E=C\setminus\{z_0\},$$

dacă atât partea principală cât şi partea secundară ale ei sunt convergente (simplu sau uniform) pe E. În acest caz, dacă pentru $z\in E$, $R(z)$ este suma părţii principale, iar $T(z)$ este suma părţii secundare, atunci suma S(z) a seriei Laurent va fi definită astfel:

$$S(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n=R(z)+T(z),\ z\in E,\ n\in Z.$$

Fie seria Laurent (1). Partea secundară (3) a seriei Laurent este o serie de puteri. În virtutea teoremelor Abel din 9.6.3. , avem :

a)seria (3) este absolut convergentă pe discul de convergenţă $|z-z_0|<r_2$, unde raza de convergenţă $r_2$ poate fi calculată cu ajutorul formulelor (3) şi (4) din 9.6.3;

b) seria (3) este uniform convergentă pe orice disc închis

$$|z - z_0| \leq r < r_2;$$

c) suma T(z) a seriei (3) este o funcţie analitică pe discul $|z - z_0| < r_2$.

Partea principală a seriei Laurent (1), adică seria (2), poate fi scrisă sub forma unei serii de puteri astfel: $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \cdot w^n$, unde $w = \dfrac{1}{z - z_0}$, $z \neq z_0$. Aplicând şi aici teoremele lui Abel din 9.6.3., obţinem că:

a) seria (2) este absolut convergentă pe discul $|w| < \dfrac{1}{r_1}$, adică pe exteriorul cercului $|z - z_0| = r_1$, ceea ce înseamnă pe mulţimea $|z - z_0| > r_1$, unde, conform formulelor (3) şi (4) din 9.6.3., raza de convergenţă $r_1$ se calculează astfel:

$$r_1 = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{-(n+1)}}{a_{-n}} \right| \text{ sau } r_1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|},$$

dacă $a_{-n} \neq 0$;

b) seria (2) este uniform convergentă pe mulţimea $|w| \leq \dfrac{1}{r_3} < \dfrac{1}{r_1}$, unde $w = \dfrac{1}{z - z_0}$, adică pe mulţimea

$$|z - z_0| \geq r_3 > r_1;$$

c) suma $R(z)$ a seriei (2) este o funcţie analitică pe domeniul $|z - z_0| > r_1$.

Dacă $r_2 > r_1$, atunci intersecţia domeniilor de convergenţă ale seriilor (2) şi (3) coincide cu coroana circulară $r_1 < |z - z_0| < r_2$ (vezi fig. 1).



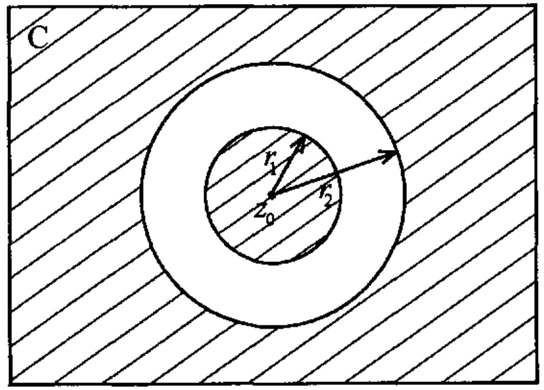



**Fig. 1.**

Dacă $r_1 > r_2$, atunci intersecţia domeniilor de convergenţă ale seriilor (2) şi (3) este o mulţime vidă şi seria Laurent (1) este divergentă pe întreg planul complex C. Dacă $r_1 = r_2$, putem avea puncte de convergenţă ale seriei Laurent (1) numai pe cercul $|z - z_0| = r_1$.

Aşadar am demonstrat următoarea teoremă, numită *teorema coroanei de convergenţă a unei serii Laurent*:

**Teorema 1.** Fie seria Laurent (1). Să notăm (utilizând de exemplu, formula (4) din 9.6.3.)

$$r_2 = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \text{ şi } r_1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|},\ a_n \neq 0,\ a_{-n} \neq 0.$$

Dacă $r_2 > r_1$, atunci

a) în coroana circulară $r_1 < |z - z_0| < r_2$, notată $U(z_0, r_1, r_2)$, care se numeşte *coroană de convergenţă*, seria Laurent converge absolut şi converge uniform pe orice compact (domeniu închis) ce aparţine coroanei de convergenţă;

b) seria (1) diverge pe C, exceptând punctele ce aparţin coroanei de convergenţă;

c) suma $S(z)$ a seriei (1) este o funcţie analitică pe $U(z_0,r_1,r_2)$.

Pe parcurs vom utiliza următoarele cazuri particulare ale coroanei de convergenţă a unei serii Laurent:

1) dacă $r_1 = 0$, atunci $U(z_0,0,r_2)$ înseamnă interiorul cercului $|z-z_0| = r_2$, exceptând punctul $z_0$, adică mulţimea $0<|z-z_0|<r_2$;

2) dacă $r_2=+\infty$, atunci $U(z_0,r_1,+\infty)$ înseamnă mulţimea C, exceptând punctele de pe discul închis $|z-z_0|\le r_1$, adică mulţimea $r_1<|z-z_0|<+\infty$;

3) dacă $r_1= 0$ şi $r_2 = +\infty$, atunci $U(z_0,0,+\infty)$ înseamnă mulţimea C, exceptând punctul $z_0$, adică mulţimea $C \setminus \{z_0\}$.

**Teorema 2 (unicitatea).** Dacă două serii Laurent

$$f_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ şi } f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(z-z_0)^n,\ n\in Z \qquad (4)$$

au sumele egale $f_1(z) = f_2(z)$ pe coroana $U(z_0,r_1,r_2)$, unde $r_1$, poate fi 0, iar $r_2$ poate fi $(+\infty)$cu $0\le r<r_2$, atunci ele coincid, adică $a_n=b_n$ pentru orice $n\in Z$.

**Demonstraţie.** Notând $c_n=a_n-b_n$, seria Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n,\ n\in Z \qquad (5)$$

are suma $f(z) = f_1(z) - f_2(z) = 0$ pentru orice $z\in U(z_0,r_1,r_2)$.

Înmulţim ambele părţi ale relaţiei (5) cu $(z-z_0)^{-k-1}$, $k\in Z$.

Obţinem egalitatea

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\cdot(z-z_0)^{n-k-1}=0,$$

pentru orice $z\in U(z_0,r_1,r_2)$ şi $k\in Z$.

Considerăm cercul $\gamma$ cu centrul în $z_0$, care aparţine în întregime coroanei $U(z_0,r_1,r_2)$. Deoarece pe $\gamma$ seria Laurent este uniform convergentă, integrând-o termen cu termen pe conturul cercului $\gamma$, obţinem:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\oint_\gamma (z-z_0)^{n-k-1}dz = \oint_\gamma 0\cdot dz,$$

adică

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\oint_\gamma (z-z_0)^{n-k-1}dz =0$$

Integralele

$$\oint_\gamma (z-z_0)^{n-k-1}dz = \begin{cases} 0, \text{dacă } n-k-1\ne -1, \\ \quad \text{adică } n\ne k, \\ 2\pi i, \text{dacă } n=k. \end{cases}$$

(a se consulta formula (6) din 9.5.1).

Prin urmare,

$$2\pi i\cdot c_k=0,$$

adică $c_k = 0$ pentru orice $k\in Z$.

Aceasta înseamnă că $a_k=b_k, k\in Z$, adică seriile (4) coincid. Teorema este demonstrată.

**Teorema 3 (Laurent).** Orice funcţie $f(z)$ analitică pe coroana circulară $r_1<|z-z_0|<r_2$, unde $r_1$ poate fi 0, iar $r_2$ poate fi $(+\infty)$ este dezvoltabilă în mod unic în serie Laurent.

**Demonstraţie.** Fie $f(z)$ analitică pe coroana circulară $U(z_0,r_1,r_2)$:

$$r_1<|z-z_0|<r_2,$$

unde $r_1$ poate fi zero, iar $r_2$ poate fi egal cu $(+\infty)$. Pentru orice $z\in U(z_0,r_1,r_2)$ construim o coroană circulară concentrică $U_1(z_0,\rho_1,\rho_2)$ astfel încât

$z \in U_1(z_0, \rho_1, \rho_2)$ şi $U_1(z_0, \rho_1, \rho_2) \subset U(z_0, r_1, r_2)$ (vezi Fig. 2.).

Deoarece $f(z)$ este analitică pe coroana închisă

$$r_1 < \rho_1 \le |z - z_0| \le \rho_2 < r_2$$

şi, aplicând formula integrală Cauchy (9.5.2) pe conturul

$$\gamma = Am_1m_2ABn_1n_2BA$$

orientat în sens pozitiv (coroana se află în stânga direcţiei mişcării), obţinem că

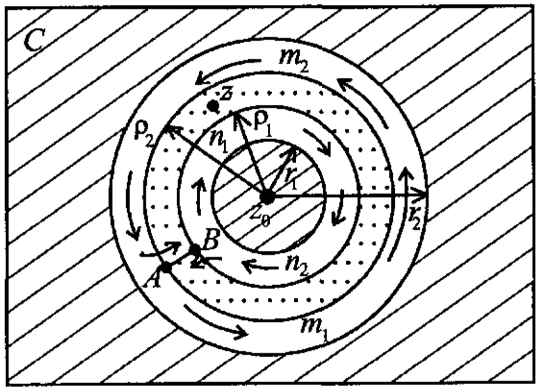



**Fig. 2.**

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i}\Big[\oint_{\gamma_2}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} +$$

$$+ \int_{AB}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} + \int_{BA}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} - \oint_{\gamma_1}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(z)dz}{\xi - z}, \qquad (6)$$

unde cercurile $\gamma_1 : |z - z_0| = \rho_1$ şi $\gamma_2 : |z - z_0| = \rho_2$ sunt ambele parcurse în acelaşi sens (în cazul dat împotriva acelor ceasornicului).



Pentru integrala de-a lungul cercului $\gamma_2$, urmând raţionamentul de la dezvoltarea în serie Taylor (teorema 2 din 9.6.4.), avem că

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(z - z_0)^n\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z - z_0)^n, \qquad (7)$$

unde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (8)$$

Să considerăm acum integrala a doua (de-a lungul cercului $\gamma_1$).

Avem:

$$f_1(z) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(\xi)d\xi}{(z - z_0) - (\xi - z_0)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{z - z_0}\cdot\oint_{\gamma_1}f(\xi)\cdot\frac{1}{1 - \dfrac{\xi - z_0}{z - z_0}}\cdot d\xi. \qquad (9)$$

Deoarece $\xi \in \gamma_1$, rezultă că $|\xi - z_0| = \rho_1$ şi

$$\left|\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right| = \frac{|\xi - z_0|}{|z - z_0|} = \frac{\rho_1}{|z - z_0|} < 1.$$

Deci pe cercul $\gamma_1$ seria

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)^n,$$

termenii căreia formează o progresie geometrică cu raţia

$$|q| = \left|\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right| < 1$$

este uniform convergentă către funcția

$$\frac{1}{1-q} = \frac{1}{1 - \dfrac{\xi - z_0}{z - z_0}}.$$

Înlocuind această serie în (9) și integrând termen cu termen seria obținută, urmează că

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{z - z_0} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)^n\right] \cdot d\xi =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[\oint_{\gamma_1} \frac{f(\xi)(\xi - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} d\xi\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} f(\xi)(\xi - z_0)^n d\xi\right] \cdot (z - z_0)^{-(n+1)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1} d\xi\right] \cdot (z - z_0)^{-n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}, \qquad (10)$$

unde

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{\gamma_1} f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{(-n)+1}}, \quad n \in N. \quad (11)$$

Înlocuind seriile (7) și (10) în relația (6) obținem :



$$f(z) = f_2(z) + f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Observăm că, datorită faptului că $f(z)$ este analitică pe coroana circulară $r_1 < |z - z_0| < r_2$ și în virtutea consecinței din teorema 2 a paragrafului 9.5.2, integralele din formulele (8) și (11) pot fi considerate pe orice cerc $\gamma$ cu centrul în $z_0$ și raza $r \in \left]r_1, r_2\right[$.

Prin urmare,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \ n \in Z, \qquad (12)$$

iar formulele (8) și (11) se unesc în formula

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{\gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}, \ n \in Z. \qquad (13)$$

unde $\gamma$ este cercul $|z - z_0| = r$ cu $r \in \left]r_1, r_2\right[$.

Arătăm, în fine, că dezvoltarea (12) în serie Laurent a funcției $f(z)$ este unică. Fie

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n, \ n \in Z$$

o altă dezvoltare în serie Laurent a funcției $f(z)$ pe coroana $r_1 < |z - z_0| < r_2$.

Deoarece aceste două serii Laurent au aceeași sumă pe coroana circulară $r_1 < |z - z_0| < r_2$, obținem, în virtutea teoremei 2, că aceste două serii coincid. Teorema este complet demonstrată.

Așadar din teoremele 1 și 3 rezultă că *noțiunile „o funcție analitică pe o coroană circulară" și „o funcție dezvoltabilă în serie Laurent pe această coroană" sunt echivalente.*

Fie coroana de convergență

$$r_1<|z-z_0|<r_2,$$

a seriei Laurent (1) este maximală şi funcţia $f(z)$ este suma acestei serii.

Ca şi în cazul seriei de puteri (vezi teorema 3 din 9.6.4) se poate de arătat că pe cercurile $|z-z_0|=r_1$ şi $|z-z_0|=r_2$ ale coroanei de convergenţă $r_1<|z-z_0|<r_2$ a seriei Laurent (12) există cel puţin un punct singular pentru suma $f(z)$ a acesteia.

**Nota 1**. Fie funcţia $f(z)$ este analitică pe discul $|z-z_0|<r_2$, adică ea este analitică pe coroana

$$0\le|z-z_0|<r_2 \quad \text{cu } r_1=0.$$

Observăm că funcţiile $f(z)\cdot(z-z_0)^{n-1}$ din integralele (11), $n\in N$ sunt analitice pe domeniul închis şi simplu conex $D_\gamma$ mărginit de cercul $\gamma$ : $|z-z_0|=\rho<r_2$, adică pe discul închis $|z-z_0|\le\rho<r_2$.

Aplicând teorema Cauchy pentru domenii simplu conexe (9.5.2), conchidem că integralele din (11) sunt egale cu zero pentru orice $n\in N$. Deci coeficienţii $a_{-n}, n\in N$ din seria Laurent (1) sunt egali cu zero. Aceasta înseamnă că partea principală a seriei Laurent lipseşte. Pe de altă parte, aplicând formulele (5) şi (6) din 9.5.2, formula (8) se reduce la formula

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \text{ considerând } a_0=\frac{f^{(0)}(z_0)}{0!}=f(z_0).$$

Astfel, seria Laurent (1) se transformă în serie Taylor.

Deci seria Taylor coincide cu seria Laurent pentru o funcţie $f(z)$ analitică pe coroana circulară $0\le|z-z_0|<r_0$.

**Nota 2**. Având în vedere teorema 2 de mai sus (unicitatea dezvoltării), pentru a dezvolta în serie Laurent o funcţie $f(z)$ analitică pe coroana $r_1<|z-z_0|<r_2$, în practică se utilizează



alte metode mai raţionale decât aceea de a calcula coeficienţii seriei Laurent după formula (13). De exemplu, dacă $f(z)$ este o funcţie raţională, ea, mai întâi, se descompune în funcţii raţionale simple: în cazul planului complex C funcţiile raţionale simple sunt numai de tipul 1 şi 2, adică de tipul $\frac{A}{(z-z_0)}$ şi $\frac{A}{(z-z_0)^k}$, $k = 2, 3,....$ (a se consulta [17], 3.2.2.). Pe urmă funcţiile raţionale simple, cu ajutorul transformărilor elementare se consideră ca suma unei serii, termenii căreia formează o progresie geometrică cu raţia $|q|<1$ sau se utilizează seria binomială din 9.6.4. (vezi ex. 1, 2, şi 3 de mai departe).

**Exemplul 1.** Să se dezvolte în serie Laurent funcţia

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}$$

pe coroanele a) $0<|z|<1$; b) $1<|z|<+\infty$; c) $0<|z-1|<1$;

**Rezolvare.** Funcţia $f(z)$ este analitică pe $C$, exceptând punctele $z_1=0$ şi $z_2=1$. Deci $f(z)$ este analitică pe coroanele circulare date, adică dezvoltarea în serii Laurent există.

Calcularea coeficienţilor $a_n, n\in Z$, ai seriei Laurent (12) cu ajutorul formulei (13), în general, este destul de complicată.

În baza notei 2 de mai sus, descompunem funcţia f(z) în funcţii raţionale simple.

Avem :

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{1-z}=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}.$$

a) În coroana $0<|z|<1$, funcţia $\frac{1}{1-z}$ poate fi considerată ca suma unei progresii geometrice infinit descrescătoare cu $|q|=|z|<1$.

Deci

$$f(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}+(1+z+z^2+\dots+z^n+\dots)=$$

$$=\frac{1}{z}+1+z+z^2+\dots+z^n+\dots=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n,\ n=0,1,\dots .$$

Partea principală a seriei Laurent conţine un singur termen.

b) În coroana $1<|z|<+\infty$ avem că $|z|>1$, adică $\left|\frac{1}{z}\right|<1$.

Deci

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=$$

$$=\frac{1}{z}-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\dots+\frac{1}{z^n}+\dots\right)=-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\dots-\frac{1}{z^n}-\dots,$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}},\ n\in N,$$

deoarece $|q|=\left|\frac{1}{z}\right|<1$, adică $|z|>1$.

În această serie Laurent partea secundară lipseşte.

c) În coroana $0<|z-1|<1$, funcţia

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{z+1-1}=\frac{1}{1+(z-1)}$$

poate fi considerată ca suma unei progresii geometrice infinit descrescătoare cu raţia q = -(z-1) şi $|q|=|-(z-1)|=|z-1|<1$.

Deci

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{1-z}+\frac{1}{z}=\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1+(z-1)}=\frac{(-1)}{z-1}+$$

$$+\frac{1}{1+(z-1)}=-\frac{1}{z-1}+1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\dots+$$

$$+(-1)^n(z-1)^n+\dots=-\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n,\ n=0,1,\dots .$$



Partea principală a seriei Laurent conţine un singur termen.

**Exemplul 2.** Să se cerceteze diverse dezvoltări ale funcţiei

$f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z+2}$ în serie Laurent, considerând $z_0=0$.

**Rezolvare.** Funcţia $f(z)$ este analitică pe $C$, exceptând punctele $z_1=1$, $z_2=2$, care sunt soluţiile ecuaţiei

$$z^2-3z+2=0.$$

Descompunem funcţia $f(z)$ în funcţii raţionale simple. Avem:

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2}=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}.$$

Există trei coroane circulare cu centrul în $z_0=0$ în planul complex C în care $f(z)$ este analitică: $D_1: 0\le|z|<1$; $D_2: 1<|z|<2$ şi $D_3: 2<|z|<+\infty$ (vezi fig.3.).

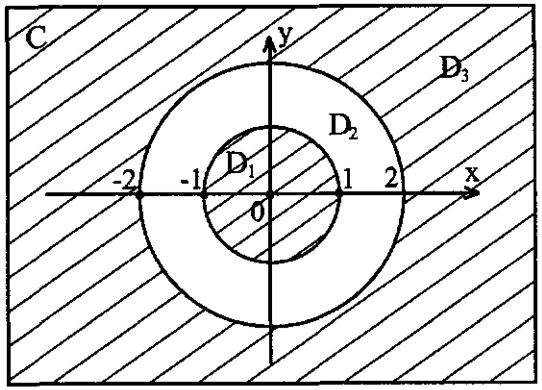



**Fig. 3.**

Avem :

1) $-\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{1}{1-z}=1+z+z^2+\dots+z^n+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$, dacă $|q|=|z|<1$ şi $n=0,1,\dots$;

2) $$-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots+\frac{1}{z^n}+\ldots)=$$
$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n},$$

dacă $|q|=\left|\frac{1}{z}\right|<1$, adică $|z|>1$ şi $n\in N$;

3) $$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\ldots+\frac{z^n}{2^n}+\ldots)=$$
$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n,$$

dacă

$$|q|=\left|\frac{z}{2}\right|<1,\ \text{adică } |z|<2 \text{ şi } n=0,1,2,\ldots;$$

4) $$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\frac{1}{z}(1+\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}+\ldots+\frac{2^n}{z^n}+\ldots)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}},$$

dacă

$$|q|=\left|\frac{2}{z}\right|<1,\ \text{adică } |z|>2 \text{ şi } n=0,1,2,\ldots.$$

a) Considerăm coroana $D_1$, adică domeniul $0\le|z|<1$, ceea ce înseamnă discul $|z|<1$.

În baza notei 1 de mai sus, seria Laurent pentru funcţia *f(z)* în $D_1$ se transformă în seria Taylor :

$$f(z)=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n+1}})z^n,$$

pentru $|z|<1$ şi $n=0,1,2,\ldots$.



b) În $D_2$ : $1<|z|<2$ avem că

$$f(z)=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n,\quad n=0,1,\ldots.$$

c) În $D_3$: $2<|z|<+\infty$ funcţia f(z) are următoarea dezvoltare în serie Laurent:

$$f(z)=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(2^n-1)\cdot\frac{1}{z^{n+1}},\ n\in N.$$

**Exemplul 3.** Să se dezvolte în serie Laurent funcţia

$$f(z)=\frac{1}{(z+3)(z-1)^2}$$

în coroana $0<|z+3|<4$.

**Rezolvare**. Descompunem $f$(z) în funcţii raţionale simple:

$$\frac{1}{(z+3)(z-1)^2}=\frac{A}{z+3}+\frac{B}{z-1}+\frac{C}{(z-1)^2}=$$
$$=\frac{A(z-1)^2+B(z+3)(z-1)+C(z+3)}{(z+3)(z-1)^2}.$$

De unde $1 = A(z-1)^2 + B(z+3)(z-1) + C(z+3)$.

În această identitate (formală), dând valorile $z_1 = 1$, $z_2 = -3$ şi $z_3 = 0$ obţinem succesiv că

$$C=\frac{1}{4},\quad A=\frac{1}{16}\ \text{ şi } B=-\frac{1}{16}.$$

Deci

$$\frac{1}{(z+3)(z-1)^2}=\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{z+3}-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{z-1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(z-1)^2}.$$

a) Avem :

$$-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{z-1+3-3}=\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4-(z+3)}=$$

$$=\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+3}{4}}=\frac{1}{64}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}q^n$$

$$=\frac{1}{64}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+3}{4}\right)^n,$$

dacă $|q|=\left|\frac{z+3}{4}\right|<1$, adică $|z+3|<4$ şi $n=0,1,2,\ldots$.

b) $$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(z-1)^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{[4-(z+3)]^2}=\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{z+3}{4}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{64}\left(1-\frac{z+3}{4}\right)^{-2}.$$

Aplicând formula (14) din 9.6.4 şi înlocuind în ea $m$ cu $(-2)$, $z$ cu $\frac{z+3}{4}$, rezultă că

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(z-1)^2}=\frac{1}{64}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2\cdot3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)}{n!}\left(\frac{z+3}{4}\right)^n=$$

$$=\frac{1}{64}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(n+1)\cdot\left(\frac{z+3}{4}\right)^n.$$

dacă $\left|\frac{z+3}{4}\right|<1$, adică $|z+3|<4$ şi $n=0,1,2,\ldots,n$.

Prin urmare,

$$f(z)=\frac{1}{(z+3)(z-1)^2}=\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{z+3}+\frac{1}{64}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+3}{4}\right)^n+$$



$$+\frac{1}{64}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\cdot\left(\frac{z+3}{4}\right)^n=$$

$$=\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{z+3}+\frac{1}{64}\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+(-1)^n(n+1)\right]\cdot\left(\frac{z+3}{4}\right)^n,$$

care este valabilă pe coroana $0<|z+3|<4$ şi $n=0,1,2,\ldots$ .

Deseori pentru a dezvolta în serie Laurent funcţii iraţionale şi transcendente se utilizează dezvoltările în serie Taylor (MacLaurin) ale funcţiilor $e^z$, *sinz, cosz, shz, chz, ln(1+z)*, $(1+z)^m$, $m\in R$ demonstrate în exemplele 5–8 din 9.6.4.

**Exemplul 4.** Să se dezvolte în serie Laurent funcţiile :

a) $e^{\frac{1}{z}}$ pe coroana $0<|z|<+\infty$;

b) $\cos\frac{z}{z+2}$ pe coroana $0<|z+2|<+\infty$;

**Rezolvare.**

a) Avem (vezi ex. 5 din 9.6.4.):

$$e^w=1+w+\frac{w^2}{2!}+\ldots+\frac{w^n}{n!}+\ldots,$$

valabilă pentru orice $w\in C$. Dacă înlocuim w cu $\frac{1}{z}(z\neq 0)$, obţinem seria :

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2\cdot 2!}+\ldots+\frac{1}{z^n\cdot n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n\cdot n!},$$

care este valabilă pe coroana $0<|z|<+\infty$ şi $n=0,1,2,\ldots$ .

b) Avem:

$$\cos\frac{z}{z+2}=\cos\left(\frac{z+2-2}{z+2}\right)=\cos\left(1-\frac{2}{z+2}\right)=$$

$$=\cos 1\cdot\cos\frac{2}{z+2}+\sin 1\cdot\sin\frac{2}{z+2}.$$

Deoarece seriile

$$\cos w = 1-\frac{w^2}{2!}+\frac{w^4}{4!}-\frac{w^6}{6!}+...(-1)^n\cdot\frac{w^{2n}}{(2n)!}+\dots ,$$

$$\sin w = w-\frac{w^3}{3!}+\frac{w^5}{5!}-\frac{w^7}{7!}+...+(-1)^n\cdot\frac{w^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots ,$$

sunt valabile pentru orice $w\in C$ (vezi ex. 5 din 9.6.4.) înlocuind $w$ cu $\frac{2}{z+2}$, $z\neq-2$, obținem că

$$\cos\frac{z}{z+2}=\cos 1\cdot\left[1-\left(\frac{2}{z+2}\right)^2\cdot\frac{1}{2!}+\left(\frac{2}{z+2}\right)^4\cdot\frac{1}{4!}-\dots\right]+$$

$$+\sin 1\cdot\left[\frac{2}{z+2}-\frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{2}{z+2}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{2}{z+2}\right)^5-\dots\right]=$$

$$=\cos 1+\sin 1\cdot\frac{2}{z+2}-\frac{\cos 1}{2!}\left(\frac{2}{z+2}\right)^2-$$

$$-\frac{\sin 1}{3!}\cdot\left(\frac{2}{z+2}\right)^3+\frac{\cos 1}{4!}\left(\frac{2}{z+2}\right)^4+\frac{\sin 1}{5!}\left(\frac{2}{z+2}\right)^5-\dots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{\cos 1}{(2n)!}\cdot\left(\frac{2}{z+2}\right)^{2n}+\frac{\sin 1}{(2n+1)!}\cdot\left(\frac{2}{z+2}\right)^{2n+1}\right],$$

care este valabilă pe coroana $0<|z+2|<+\infty$ şi $n=0,1,2,\dots$ .



### 9.6.6. Puncte singulare şi clasificarea lor.

O problemă importantă în teoria funcțiilor analitice este studiul comportării unei funcții analitice pe un domeniu într-o vecinătate a unui punct aparținând frontierei acestuia. Cazul cel mai simplu este acela când punctul respectiv este izolat.

Reamintim că punctul $z_0\in C$ se numeşte *punct singular* al funcției $f(z)$, dacă ea nu este analitică în acest punct.

Dacă există o $\varepsilon$- vecinătate perforată (sau punctată) $\overline{U}(z_0,\varepsilon)$, $\varepsilon>0$ a punctului singular $z_0$, astfel încât funcția $f$ este analitică pe $\overline{U}(z_0,\varepsilon)$, atunci $z_0$ se numeşte *punct singular izolat.*

Evident că dacă $z_0$ este un punct singular izolat al funcției $f$ analitice pe domeniul $D$, atunci $z_0$ aparține frontierei domeniului $D$ şi mulțimea $D\cup\{z_0\}$ este de asemenea un domeniu.

Instrumentul principal pentru studiul comportării unei funcții $f(z)$ într-o vecinătate a unui punct singular izolat îl constitue seria Laurent.

Fie $z_0\in C$ un punct singular izolat al funcției $f$, adică $f$ este analitică pe o coroană $0<|z-z_0|<\varepsilon$, $\varepsilon>0$. Prin urmare, în această coroană funcția $f(z)$ se dezvoltă în serie Laurent (teorema 3 din 9.5.6.), adică

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n, \tag{1}$$

unde

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}}, \tag{2}$$

$n\in Z$ şi $\gamma$ este orice cerc $|z-z_0|=r$ cu $0<r<\varepsilon$, orientat în sens pozitiv.

Sunt posibile trei cazuri referitoare la dezvoltarea (1):

a) seria Laurent (1) nu conține partea principală;

b) partea principală a seriei (1) conţine un număr finit de termeni;

c) partea principală a seriei (1) conţine o infinitate de termeni.

Clasificarea punctelor singulare izolate se efectuează în dependenţă de aceste trei cazuri.

**Definiţii.**

**1.** Dacă în seria Laurent (1) partea principală lipseşte, adică coeficienţii $a_n=0$ pentru orice $n$ întreg negativ, atunci punctul singular izolat $z_0$ se numeşte *punct eliminabil* (sau a p a r e n t) al funcţiei $f(z)$.

**2.** Dacă partea principală a seriei Laurent (1) conţine un număr finit de termeni, atunci punctul $z_0$ se numeşte *pol* al funcţiei $f(z)$.

**3.** Dacă partea principală a seriei Laurent (1) conţine o infinitate de termeni, punctul $z_0$ se numeşte *punct esenţial al funcţiei* $f(z)$.

Vom cerceta comportarea funcţiei $f(z)$ într-o $\varepsilon$ -vecinătate a punctului: eliminabil, pol şi esenţial.

1. *Puncte eliminabile.*

Fie $z_0$ un punct singular eliminabil al funcţiei $f(z)$ analitice pe coroana $0<|z-z_0|<r,\ r>0$. În acest caz seria Laurent are forma

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n\ ,\ n=0,1,2,\ldots, \qquad (3)$$

care este valabilă pentru orice $z$ din coroana $0<|z-z_0|<r,\ r>0$. Deoarece seria (3)este o serie de puteri, care este convergentă pe discul $|z-z_0|<r,\ r>0$ , rezultă că suma ei $f(z)$ este o funcţie analitică pe acest disc (nota 2 din



9.6.3) şi deci $f(z)$ este continuă în $z_0$ (teorema 1 din 9.4.3 şi 9.2.3.).

Aşadar, dacă $z\to z_0$, suma seriei (3) are limită finită, egală cu $a_0$. Prin urmare, trecând la limită în relaţia (3) când $z\to z_0$, avem $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=a_0$.

Dacă $f(z)$ nu este definită în punctul $z_0$, atunci consideram

$$f(z_0)=\lim_{z\to z_0}f(z)=a_0\,.$$

Dacă, însă, $f(z)$ este definită în $z_0$, dar $f(z_0)\neq a_0$, atunci schimbăm valoarea funcţiei în punctul $z_0$, considerând-o $f(z_0)=a_0$. Deci, funcţia

$$\varphi(z)=\begin{cases}f(z), \text{dacă } z\in\overline{U}(z_0,z)\\ a_0, \text{dacă } z=z_0,\end{cases}$$

astfel definită, devine deja analitică pe discul $|z-z_0|<r$, adică singularitatea punctului $z_0$ este deja eliminată. Din aceste considerente punctul singular izolat $z_0$ al funcţiei $f(z)$ în cazul dat a fost numit punct eliminabil.

Din relaţia $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=a_0$, rezultă că pentru orice $\varepsilon>0$ există un $\delta>0,\ \delta\le r$ astfel încât inegalitatea $|z-z_0|<\delta$ implică inegalitatea $|f(z)-a_0|<\varepsilon$. Prin urmare, funcţia analitică $f(z)$ este mărginită pe discul $|z-z_0|<\delta$ centrat în punctul eliminabil $z_0$, de raza $0<\delta\le r$.

Fie acum în seria (3), coeficienţii $a_0=a_1=\cdots=a_{m-1}=0$, iar $a_m\neq 0$, adică seria (3) are forma

$$f(z)=\sum_{n=m}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n=a_m(z-z_o)^m+a_{m+1}(z-z_o)^{m+1}+\cdots+$$

$$+a_{m+k}(z-z_o)^{m+k}+\cdots=(z-z_o)^m\left[a_m+a_{m+1}(z-z_o)+\right.$$

$$+a_{m+2}(z-z_0)^2+\cdots+a_{m+k}(z-z_0)^k+\cdots]=$$
$$=(z-z_0)^m\cdot g(z),$$
unde $g(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_{m+k}(z-z_0)^k$, şi $\varphi(z_0)=a_m\neq 0$.

Observăm că funcţia $g(z)$ că suma unei serii de puteri este analitică pe discul $|z-z_0|<r$, centrat în punctul eliminabil $z_0$ al funcţiei $f(z)$ de raza $r$.

Aşadar din cele spuse mai sus am demonstrat următorul rezultat:

**Teorema 1.** Dacă $z_0$ este un punct eliminabil pentru funcţia $f(z)$ analitică pe coroana $0<|z-z_0|<r$, atunci există o $\delta$ - vecinătate a punctului $z_0$ cu $\delta<r$ în care $f(z)$ este mărginită şi
$$f(z)=(z-z_0)^m\cdot g(z),$$
unde $m\in N$, iar funcţia $g(z)$ este analitică pe această $\delta$ – vecinătate a punctului $z_0$ şi $g(z_0)=a_m\neq 0$. Are loc şi teorema inversă.

**Teorema 2.** Dacă funcţia $f(z)$ este analitică şi mărginită pe coroana $0<|z-z_0|<r$, $r>0$, atunci punctul $z_0$ este un punct eliminabil al funcţiei $f$.

**Demonstraţie.** Fie $f(z)$ analitică şi mărginită pe coroana $0<|z-z_0|<r$, $r>0$. În virtutea teoremei 3 din 9.6.5, $f(z)$ este dezvoltabilă în seria Laurent (1) cu coeficienţii calculaţi după formula (2)
$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}},\ n\in Z,$$
unde $\gamma$ este orice cerc $|z-z_0|=\rho$, care aparţine în întregime coroanei $0<|z-z_0|<r$, adică $0<\rho<r$ şi $\gamma$ este orientat în sens pozitiv. Deoarece $f(z)$ este mărginită pe coroana



$0<|z-z_0|<r$, rezultă că există numărul real $M>0$, astfel încât $|f(z)|\leq M$ pentru orice $z$ din această coroana. Deci
$$|a_n|=\frac{1}{2\pi}\left|\oint_\gamma\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}}\right|\leq\frac{1}{2\pi}\oint_\gamma\frac{M|d\xi|}{\rho^{n+1}}=$$
$$=\left|\begin{array}{l}\xi-z_0=\rho\cdot e^{it},\\ d\xi=\rho\cdot e^{it}\cdot i\cdot dt,\\ |d\xi|=\rho\cdot dt,\ t\in[0,2\pi]\end{array}\right|=\frac{M}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\frac{\rho dt}{\rho^{n+1}},\ \text{adică}\ |a_n|\leq\frac{M}{\rho^n}.$$

Observăm că coeficienţii seriei Laurent nu depind de cercul $\gamma:|z-z_0|=\rho$, adică de numărul $0<\rho<r$. Trecând la limita în relaţia $|a_n|\leq\frac{M}{\rho^n}$, când $\rho\to 0$, obţinem că $a_n=0$ pentru orice $n$ întreg şi negativ.

Prin urmare, seria Laurent (1) conţine numai partea ei secundară. Aceasta înseamnă că punctul $z_0$ este un punct eliminabil pentru funcţia $f(z)$.

**Exemplul 1.** Să se cerceteze punctele singulare ale funcţiei $f(z)=\frac{\sin z}{z}$.

**Rezolvare.** Funcţia $f(z)$ nu este definită pentru $z_0=0$. Dacă $z\neq 0$, atunci funcţia $f(z)$ este analitică ca raportul a două funcţii analitice. Aceasta înseamnă că $f(z)$ este analitică pe coroana $0<|z|<+\infty$ şi în baza teoremei 3 din 9.6.5, pentru funcţia $f(z)$ există o dezvoltare unică în serie Laurent. Avem (vezi ex. 5 din 9.6.4):

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\sin z=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots\right)=$$
$$=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Deci partea principală a seriei Laurent lipseşte. Prin urmare, punctul $z_0=0$ al funcţiei $f(z)$ este eliminabil. Observăm că $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$. Dacă, însă, vom modifica funcţia $\frac{\sin z}{z}$ numai în punctul $z=0$, considerând $f(0)=1$, atunci funcţia

$$\varphi(z)=\begin{cases}\frac{\sin z}{z}, \text{dacă } z\neq 0,\\ 1, \text{dacă } z=0,\end{cases}$$

astfel definită devine deja analitică şi în acest punct, adică funcţia $\varphi(z)$ este analitică pe $C$.

## 2. Polii funcţiei.

Fie $z_0$ este polul funcţiei $f(z)$, care este analitică pe coroana $0<|z-z_0|<r$, $r>0$. În acest caz dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei $f(z)$ are forma

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{a_{-1}}{(z-z_0)}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n, \quad (4)$$

unde $a_{-m}\neq 0$, $m\in N$ şi $n=0,1,2,\dots$ .

Dacă $m=1$, punctul singular izolat $z_0$ se numeşte pol simplu. În caz contrar, $z_0$ se numeşte *pol multiplu*, iar numărul natural $m$ se numeşte *ordinul* lui.

Înmulţim ambele părţi ale egalităţii (4) cu $(z-z_0)^m$. Avem:



$$(z-z_0)^m\cdot f(z)=a_{-m}+a_{-m+1}(z-z_0)+\cdots+$$
$$+a_{-1}(z-z_0)^{m-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^{n+m}$$

şi $a_{-m}\neq 0$.

Aceasta înseamnă că pentru funcţia $[(z-z_0)^m\cdot f(z)]$ punctul $z_0$ este eliminabil. Funcţia $[(z-z_0)^m\cdot f(z)]$ este analitică, deci şi continuă pe discul $|z-z_0|<r$ ca suma unei serii de puteri. Prin urmare, $\lim\limits_{z\to z_0}\left[(z-z_0)^m\cdot f(z)\right]=a_{-m}\neq 0$ şi

$$\lim_{z\to z_0}\left(|z-z_0|^m\cdot|f(z)|\right)=|a_{-m}|\neq 0.$$

Fie $0<q<|a_{-m}|$. Din ultima egalitate, rezultă că există un disc cu centrul în $z_0$ de rază destul de mică astfel încât pe acest disc are loc inegalitatea $|z-z_0|^m\cdot|f(z)|>q$ (în virtutea continuităţii funcţiei reale de două variabile reale). Prin urmare,

$$|f(z)|>\frac{q}{|z-z_0|^m} \quad \text{şi} \quad \lim_{z\to z_0}|f(z)|=+\infty.$$

În felul acesta am demonstrat următorul rezultat:

**Teorema 3.** Dacă punctul $z_0$ este un pol al funcţiei f(z) analitice pe coroana $0<|z-z_0|<r$, $r>0$, atunci $\lim\limits_{z\to z_0}|f(z)|=+\infty$.

Are loc şi teorema reciprocă.

**Teorema 4.** Dacă funcţia $f(z)$ este analitică pe coroana $0<|z-z_0|<r$, $r>0$, unde $z_0$ este un punct singular izolat al ei şi $\lim\limits_{z\to z_0}|f(z)|=+\infty$, atunci punctul $z_0$ este un pol al funcţiei $f(z)$.

**Demonstraţie.** Fie $M$ un număr real pozitiv arbitrar. Relaţia $\lim\limits_{z\to z_0}|f(z)|=+\infty$ implică existenţa unei $\delta$- vecinătăţi perforate a punctului $z_0$ $(0<\delta\le r)$, în care se satisface inegalitatea $|f(z)|>M$. Considerăm funcţia $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ pentru orice $z$ din coroana $0<|z-z_0|<\delta$, care este analitică şi mărginită pe această coroană. În baza teoremei 2 punctul $z_0$ este un punct eliminabil al funcţiei $\varphi(z)$, deci

$$\varphi(z)=(z-z_0)^m\cdot\psi(z),$$

unde $m\in N$, iar funcţia $\psi(z)$ este analitică pe discul $|z-z_0|<\delta$ şi $\psi(z_0)\neq 0$. Aşadar

$$f(z)=\frac{1}{\varphi(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^m\cdot\psi(z)}=\frac{\varphi_1(z)}{(z-z_0)^m},$$

unde $\varphi_1(z)=\dfrac{1}{\psi(z)}$ este o funcţie analitică pe discul $|z-z_0|<\delta$, deoarece $\psi(z_0)\neq 0$. Prin urmare, $\varphi_1(z)$ este dezvoltabilă în serie de puteri (Taylor) pe discul $|z-z_0|<\delta$:

$$\varphi_1(z)=a_0+a_1(z-z_0)+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots,$$

unde $a_0\neq 0$ şi

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\cdot\varphi_1(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\big[a_0+a_1(z-z_0)+\cdots+$$

$$+a_n(z-z_0)^n+\cdots\big]=$$

$$=\frac{a_0}{(z-z_0)^m}+\frac{a_1}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+\frac{a_{m-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+m}(z-z_0)^n,$$

unde $a_0\neq 0$. Aceasta înseamnă că punctul singular izolat $z_0$ este un pol de ordinul $m$ pentru funcţia $f(z)$. Teorema este demonstrată.

**Definiţie.** Fie funcţia $f(z)$ este analitică pe un domeniu $D$. Punctul $z_0\in D$ se numeşte *zero* (sau rădăcină) al funcţiei $f$, dacă



$f(z_0)=0$. Dacă există un număr natural $m$ astfel încât $f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0$, iar $f^{(m)}(z_0)\neq 0$, atunci punctul $z_0\in D$ se numeşte *zero multiplu de ordinul m* al funcţiei $f$.

**Teorema 5.** Fie $f(z)$ este analitică pe domeniul $D$. Pentru ca punctul $z_0\in D$ să fie zero multiplu de ordinul $m$ al funcţiei $f(z)$ este necesar şi suficient ca $f(z)=(z-z_0)^m\cdot\varphi(z)$, unde $\varphi(z)$ este analitică în punctul $z_0$, $\varphi(z_0)\neq 0$ şi $m\in N$.

**Demonstraţie.** *Necesitatea.* Fie $z_0$ un zero multiplu de ordinul $m$ al funcţiei $f(z)$ şi considerăm o $\delta$- vecinătate a lui $z_0$, adică discul $|z-z_0|<\delta$, $\delta>0$ astfel încât acest disc să aparţină în întregime domeniului $D$. Deci $f(z)$ este analitică pe discul $|z-z_0|<\delta$ şi în virtutea teoremei 2 din 9.6.4. se dezvolta în serie Taylor :

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n,$$

unde $f^{(0)}(z_0)=f(z_0)$, $0!=1$ şi $n=0,1,2,\ldots$ .

Deoarece $f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0$, şi $f^{(m)}(z_0)\neq 0$ urmează că

$$f(z)=\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}(z-z_0)^m+\frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0)^{m+1}+\cdots=$$

$$=(z-z_0)^m\left[\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}+\frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0)+\cdots\right]=$$

$$=(z-z_0)^m\cdot\varphi(z),$$

unde $\varphi(z_0)=\dfrac{f^{(m)}(z_0)}{m!}\neq 0$ şi $\varphi(z)$ este o funcţie analitică pe discul $|z-z_0|<\delta$ ca suma unei serii de puteri. Deci $\varphi(z)$ este analitică în $z_0$.

**Suficienţa.** Fie $f(z)=(z-z_0)^m\cdot\varphi(z)$, unde $m\in N$, $\varphi(z)$ este o funcţie analitică în punctul $z_0$ şi $\varphi(z_0)\neq 0$. Dezvoltăm funcţia $\varphi(z)$ în serie de puteri (Taylor) într-o $\delta$ - vecinătate a punctului $z_0$, adică pe discul $|z-z_0|<\delta$, $\delta>0$.

Avem $\varphi(z)=a_0+a_1(z-z_0)+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots$, unde $\varphi(z_0)=a_0\neq 0$. Prin urmare,

$$f(z)=(z-z_0)^m\left[a_0+a_1(z-z_0)+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots\right]=$$
$$=a_0(z-z_0)^m+a_1(z-z_0)^{m+1}+\cdots+a_n(z-z_0)^{n+m}+\cdots. \quad (5)$$

Seria din partea dreaptă poate fi derivată termen cu termen pe orice disc închis $|z-z_0|\leq r<\delta$.

Aşadar din (5) rezultă:

$$f(z_0)=0;$$
$$f'(z)=a_0\cdot m(z-z_0)^{(m-1)}+a_1(m+1)(z-z_0)^m+\cdots,$$

de unde

$$f'(z_0)=0;$$
$$f''(z)=a_0\cdot m(m-1)(z-z_0)^{(m-2)}+a_1(m+1)m\times(z-z_0)^{(m-1)}+\cdots,$$

de unde $f''(z_0)=0$; etc.

$$f^{(m-1)}(z)=a_0\cdot m(m-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot(z-z_0)+a_1(m+1)m\cdot\ldots\cdot 3\cdot(z-z_0)^2+\ldots,$$

de unde $f^{(m-1)}(z_0)=0$ şi

$$f^{(m)}(z)=a_0\cdot m!+a_1(m+1)\cdot m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot(z-z_0)+\ldots,$$

de unde $f^{(m)}(z_0)=a_0\cdot m!\neq 0$.

Teorema este demonstrată.

Legătura dintre polii multipli de ordinul $m$ şi zerourile multiple de ordinul $m$ este stabilită de următoarea teoremă:

**Teorema 6.** Pentru ca punctul $z_0$ să fie un zero multiplu de ordinul $m$ al funcţiei $f(z)$ analitice în $z_0$ este necesar şi suficient ca punctul $z_0$ să fie un pol multiplu de ordinul $m$ al funcţiei

$$F(z)=\frac{1}{f(z)}.$$



**Demonstraţie**. *Necesitatea.* Fie $z_0$ un zero multiplu de ordinul m al funcţiei f(z).

Pe baza teoremei 5, avem $f(z)=(z-z_0)^m\cdot\varphi(z)$, unde $m\in N$, funcţia $\varphi(z)$ este analitică în $z_0$, adică pe discul $|z-z_0|<\delta$, $\delta>0$ şi $\varphi(z_0)\neq 0$. Deci

$$F(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\cdot\varphi_1(z),$$

unde $\varphi_1(z)=\dfrac{1}{\varphi(z)}$ este analitică pe discul $|z-z_0|<\delta$. Prin urmare, $\varphi_1(z)$ este dezvoltabilă în serie de puteri (Taylor):

$$\varphi(z)=a_0+a_1(z-z_0)+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots \quad \text{si}$$
$$F(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\left[a_0+a_1(z-z_0)+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots\right]=$$
$$=\frac{a_0}{(z-z_0)^m}+\frac{a_1}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+\frac{a_{m-1}}{z-z_0}+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+m}(z-z_0)^n, \quad (6)$$

care este valabilă pe coroana $0<|z-z_0|<\delta$ şi $a_0=\varphi_1(z_0)=\dfrac{1}{\varphi(z_0)}\neq 0$. Deci punctul $z_0$ este un pol multiplu de ordinul $m$ al funcţiei $F(z)$.

**Suficienţa.** Fie $z_0$ este un pol multiplu de ordinul $m$ al funcţiei $F(z)$, adică dezvoltarea lui $F$ în serie Laurent pe coroana $0<|z-z_0|<\delta$ are forma

$$F(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\ldots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n=$$

$$=\frac{1}{(z-z_0)^m}\Big[a_{-m}+a_{-(m-1)}(z-z_0)+\ldots+a_{-1}(z-z_0)^{m-1}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^{n+m}\Big]=\frac{1}{(z-z_0)^m}\cdot\varphi(z),$$

unde $\varphi(z)$ este o funcție analitică pe discul $|z-z_0|<\delta$, fiind suma unei serii de puteri și $\varphi(z_0)=a_{-m}\neq 0$. Deci $f(z)=\frac{1}{F(z)}=(z-z_0)^m\cdot\frac{1}{\varphi(z)}=(z-z_0)^m\cdot\varphi_1(z)$, unde $\varphi_1(z)$ este analitică pe discul $|z-z_0|<\delta$ ca raportul a două funcții analitice. Aceasta înseamnă că $\varphi_1(z)$ este analitică și în $z_0$. Aplicând teorema (5), obținem că punctul $z_0$ este un zero multiplu de ordinul $m$ pentru funcția $f(z)$. Teorema este complet demonstrată.

**Exemplu 2.** Să se cerceteze punctele singulare ale funcției

$$f(z)=\frac{z+1}{(z^2+4)(z+2)^3}.$$

**Rezolvare.** Observăm că pentru funcția

$$\varphi(z)=(z^2+4)(z+2)^3$$

punctele $z_1=2i$, $z_2=-2i$ sunt zerouri simple, iar $z_3=-2$ este un zero multiplu de ordinul 3. Prin urmare, pentru funcția $f(z)$ punctele $z_{1,2}=\pm 2i$ sunt poli simpli, iar punctul $z_3=-2$ este un pol multiplu de ordinul 3.



## 3. Puncte esențiale.

Fie $z_0$ un punct singular esențial al funcției $f(z)$ care este analitică pe coroana $0<|z-z_0|<r,\ r>0$. Comportarea lui $f$ în vecinătatea punctului esențial $z_0$ este descrisă de următoarea teoremă, demonstrată în mod independent de iluștrii matematicieni Weierstrass, Casorati și Sohoțchi:

**Teorema 7.** Pentru ca punctul singular izolat $z_0$ al funcției $f(z)$ analitice pe coroana $0<|z-z_0|<r,\ r>0$ să fie esențial este necesar și suficient ca pentru orice număr complex w (finit sau $\infty$) să existe un șir de numere complexe $\{z_n\}$, $z_n\in U(z_0,0,r)$ convergent către $z_0$ astfel încât $\lim_{n\to\infty}f(z_n)=w$.

**Demonstrație.** *Necesitatea.* Fie $z_0$ un punct esențial al funcției $f(z)$ analitice pe coroana $0<|z-z_0|<r,\ r>0$ și $w\in C$. În limbajul „$\varepsilon-\delta$" trebuie că demonstrăm următoarele: pentru orice numere $w\in C, \varepsilon>0$ și $\delta>0, \delta<r$ există cel puțin un punct $z_1$ ce aparține discului $|z-z_0|<\delta$ astfel încât $|f(z_1)-w|<\varepsilon$. Vom demonstra teorema prin metoda reducerii la absurd. Presupunem contrariul. Aceasta înseamnă că există numerele $w_0\in C$, $\varepsilon_0>0$ și $\delta_0>0(\delta_0<r)$ astfel încât pentru orice punct $z$ ce aparține discului $|z-z_0|<\delta_0$ se satisface inegalitatea $|f(z)-w_0|\geq\varepsilon_0$.

Considerăm funcția auxiliară

$$\varphi(z)=\frac{1}{f(z)-w_0}. \quad (7)$$

Funcția $\varphi(z)$ este analitică pe coroana $0<|z-z_0|<\delta_0$ (ca raportul a două funcții analitice) și mărginită pe ea, deoarece

$|\varphi(z)| = \dfrac{1}{|f(z)-w|} \le \dfrac{1}{\varepsilon_0}$. După teorema 2, punctul $z_0$ este un punct singular eliminabil pentru funcţia $\varphi(z)$, ceea ce înseamnă că există limita finită $\lim\limits_{z\to z_0} \varphi(z) = a, a \in C$. Din relaţia (7) obţinem că $f(z) = w_0 + \dfrac{1}{\varphi(z)}$. Dacă $\lim\limits_{z\to z_0} \varphi(z) = a = 0$, atunci $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0 + \dfrac{1}{\lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z)} = \infty$ şi aplicând teorema 4, rezultă că $z_0$ este un pol pentru funcţia $f(z)$. Dacă $\lim\limits_{z\to z_0} \varphi(z) = a \ne 0, a \in C$, atunci $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0 + \dfrac{1}{a}$ este finită şi deci $f(z)$ este mărginită pe $0<|z-z_0|<\delta_0$. Aplicând teorema 2, conchidem că $z_0$ este un punct singular eliminabil.

În ambele cazuri am primit contrazicere cu conditia teoremei că $z_0$ este un punct esenţial. Deci teorema este justă pentru $w \ne \infty$.

Fie acum $w=\infty$. În acest caz funcţia $f(z)$ nu poate să fie mărginită nici într-o $\delta$ - vecinătate a punctului $z_0$, $0<\delta\le r$ deoarece în caz contrar, din teorema 2 ar rezulta că $z_0$ este un punct eliminabil pentru funcţia $f(z)$. Prin urmare, pentru orice $n\in N$ în coroana $0<|z-z_0|<\dfrac{1}{n}$, cu $\dfrac{1}{n}\le r$ se pot găsi puncte $z_n$ pentru care $|f(z_n)|>\dfrac{1}{n}$. Acesta înseamnă că în coroana $0<|z-z_0|<r$ există un şir numeric $\{z_n\}$ care converge către $z_0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}|f(z_n)| = +\infty$. adică $\lim\limits_{n\to\infty} f(z) = w = \infty$. Astfel condiţia necesară este demonstrată.

**Suficienţa.** Deoarece pentru diferite şiruri numerice $\{z_n\}$ din coroana $0<|z-z_0|<r$, $r<0$, care sunt convengente către $z_0$, şirurile



respective $\{f(z_n)\}$ ale valorilor funcţiei $f$ au diferite limite, rezultă că, în baza definiţiei limitei funcţiei în sens Heine, funcţia $f$ când $z\to z_0$ nu are limită (nici finită, nici infinită). Aceasta înseamnă că punctul $z_0$ nu poate fi nici punct eliminabil, nici pol pentru $f(z)$. Prin urmare, punctul $z_0$ este un punct esenţial pentru $f(z)$.

Teorema este complet demonstrată.

De fapt teorema 7 este un caz particular al unei teoreme celebre, numită *teorema lui Picard* (1856 – 1941 – matematiciam francez), care afirmă că: *în orice vecinătate a punctului singular esenţial izolat al unei funcţii analitice, această funcţie ia orice valoare finită, exceptînd cel mult o singură valoare, numită valoare excepţională* (vezi de exemplu [3], cap. 4, § 7).

**Exemplul 3.** Să se cerceteze puncul singular al funcţiei $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$.

**Rezolvare.** Punctul $z_0=0$ este un punct singular izolat al funcţiei date. Avem (vezi formula (11) din 9.6.4.):

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots + \frac{u^n}{n!} + \cdots,$$

variabilă pentru orice număr $u\in C$. Înlocuind $u=\dfrac{1}{z}$, $z\ne 0$, obţinem dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei $f(z)$ pe coroana $0<|z|<+\infty$:

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{z^n}\cdot\frac{1}{n!} + \cdots,$$

care conţine o infinitate de termeni în partea principală a ei. După definiţie, punctul $z_0 = 0$ este un punct singular esenţial. Aplicăm acum teorema 7. Dacă $w_0=\infty$, considerăm şirul

$$\left\{z_n = \frac{1}{n}\right\}, n\in N.$$

Deci

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{z_n\to\infty} e^{\frac{1}{z_n}} = \lim_{n\to\infty} e^n = w_0 = \infty.$$

Dacă $w_0$=0, considerăm şirul

$$\left\{z_n = -\frac{1}{n}\right\}, n\in N$$

şi obţinem că

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0.$$

Dacă $w_0$=$C\setminus\{0\}$ , ecuaţia $e^{\frac{1}{z}} = w_0$ are rădăcinile

$$z_n = \frac{1}{Lnw_0} = \frac{1}{\ln|w_0| + i(\arg w_0 + 2\pi n)}, \quad n\in N.$$

Aceste rădăcini reprezintă un şir numeric de poli simpli pentru funcţia $e^{\frac{1}{z}}$ , care se acumulează în origine.

Aşadar din cele menţionate mai sus rezultă că oricare ar fi $w_0$ (finit sau $\infty$) funcţia $e^{\frac{1}{z}}$ ia valoarea $w_0$ în orice vecinătate a punctului $z_0$=0. Aceasta confirmă, în baza teoremei 7, că $z_0$=0 este un punct esenţial al funcţiei $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ .

În încheiere vom studia **comportarea funcţiei analitice $f(z)$ în punctul $z_0$=∞.**

Remarcăm că în planul complex extins $C_\infty$ există un singur punct impropriu $z_0$=∞, care în sfera unitară Riemann corespunde punctului $N$(0,0,2) (vezi fig.1. din 9.1.3.) , adică $C_\infty= C\cup\{\infty\}$.

Reamintim că exteriorul cercului $|z| = r$ , $r$>0, adică mulţimea punctelor $z\in C$ care satisfac inegalitatea $|z| > r$ se numeşte $r$ – *vecinătate* a punctului $z_0$ =∞. Dacă $z_0$=0, atunci



interiorul cercului $|z| = r$ se numeşte $r$ – *vecinătate* a punctului finit $z_0$ =0.

Aplicaţia $z = \frac{1}{\xi}$ sau $\xi = \frac{1}{z}$ arată că $r$ - vecinătatea punctului $z_0$ =∞, $r$>0 se trasformă în $\frac{1}{r}$ - vecinătate a punctului $\xi_0$ =0. Aşadar studiul comportării funcţiei $f$ în $z_0$ =∞ se reduce la studiul comportării funcţiei $g(\xi) = f\left(\frac{1}{\xi}\right)$ în punctul finit $\xi_0$ =0.

Fie $f(z)$ este analitică într-o $r$ – vecinătate a punctului $z_0$=∞, $r$>0. Atunci funcţia $g(\xi) = f\left(\frac{1}{\xi}\right)$ în $\frac{1}{r}$ – vecinătatea perforată a punctului $\xi_0$ =0 poate fi dezvoltată în serie Laurent :

$$\varphi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\xi^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{-n}}{\xi^n},$$

unde seria $\sum_{n=0}^{\infty} b_n\xi^n$ se numeşte *partea secundară*, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{-n}}{\xi^n}$ - *partea principală* a seriei Laurent. Revenind la variabila $z$ cu ajutorul substituţiei $\xi = \frac{1}{z}$ şi, considerând $b_0 = a_0, b_n = a_{-n}, n\in N$ , obţinem următoarea dezvoltare:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n z^n,\ n\in Z \qquad (8)$$

care se numeşte d e z v o l t a r e  î n  s e r i e  L a u r e n t  a funcţiei $f(z)$ într-o $r$ – vecinătate a punctului $z_0=\infty$, $r>0$.

Seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{z^n}$ se numeşte *partea secundară*, iar seria $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ – *partea principală* a seriei Laurent (8) pe coroana $r<|z|<+\infty$, $r>0$

**Definiţie.** Vom spune că punctul $z_0=\infty$ este eliminabil, pol de ordinul $m$, respectiv punct esenţial al funcţiei $f(z)$ după cum punctul $\xi_0=0$ este eliminabil, pol de ordinul $m$ şi respectiv punct esenţial al funcţiei $g(\xi)=f\left(\frac{1}{\xi}\right)$.

Deoarece $\lim_{z\to\infty}f(z)=\lim_{\xi\to 0}g(\xi)$ şi având în vedere teoremele 1-7 de mai sus, obţinem următorul rezultat :

pentru ca punctul $z_0=\infty$ să fie punct eliminabil, pol de ordinul $m$ sau punct esenţial pentru funcţia $f(z)$ este necesar şi suficient ca $\lim_{z\to\infty}f(z)$ să fie respectiv finită, infinită sau să nu existe, sau ceea ce este echivalent respectiv cu aceea că: partea principală a seriei (8) lipseşte, adică seria $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ este nulă; partea principală a seriei (8) conţine un număr finit de termeni sau în fine, partea principală a seriei (8) conţine o infinitate de termeni. Aşadar, teoremele 1-7 rămân valabile şi pentru $z_0=\infty$.

**Exemplul 4.** Să se cerceteze punctele singulare ale funcţiilor următoare în planul complex extins $C_\infty$:



a) $f(z)=\dfrac{1}{z+i}$;

b) $f(z)=P_n(z)=a_0+a_1 z+a_2 z^2+\cdots+a_n z^n$, $n\in N$, $a_n\neq 0$;

c) $f(z)=\dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}=\dfrac{a_0+a_1 z+\cdots+a_n z^n}{b_0+b_1 z+\cdots+b_m z^m}$,

$n\in N$, $m\in N$, $a_n\neq 0, b_m\neq 0$;

d) $f(z)=\sin z$.

**Rezolvare.**

a) Funcţia $f(z)=\dfrac{1}{z+i}$ este analitică pe $C\setminus\{-i\}$. Punctul $z=-i$ este un punct singular izolat pentru $f(z)$ şi întrucât $z=-i$ este un zero simplu al funcţiei $g(z)=z+i$, rezultă că $z=-i$ este un pol simplu pentru $f(z)$. Dacă $z\to\infty$, avem că $f(z)\to 0$. Aceasta înseamnă că $\lim_{z\to\infty}f(z)=0$ este finită şi deci punctul $z_0=\infty$ este un punct singular eliminabil.

Acelaşi rezultat obţinem dacă dezvoltăm funcţia $f(z)$ în serie Laurent pe coroana $1<|z|<+\infty$.

Într-adevăr, dacă $\left|\frac{i}{z}\right|=\frac{1}{|z|}<1$, atunci

$$\frac{1}{z+i}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{i}{z}}=\frac{1}{z}\left(1-\frac{i}{z}+\frac{i^2}{z^2}-\frac{i^3}{z^3}+\cdots\right)=$$

$$=\frac{1}{z}-\frac{i}{z^2}+\frac{i^2}{z^3}-\frac{i^3}{z^4}+\cdots+(-1)^n\frac{i^n}{z^{n+1}}+\cdots,$$

care este valabilă pe coroana $1<|z|<+\infty$.

Deci

$$g(\xi)=f\left(\frac{1}{z}\right)=\xi-i\xi^2+i^2\xi^3-i^3\xi^4+\cdots,$$

care este valabilă pe discul $|\xi|<1$. Prin urmare, $\xi_0=0$ este un punct eliminabil cu $g(0)=0$ pentru $g(\xi)$. Aceasta înseamnă că $z_0=\infty$ este un punct eliminabil pentru $f(z)$.

b) Funcţia polinomială

$$f(z)=P_n(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n,\ n\in N,$$

$a_n\neq 0$ este o funcţie analitică pe $C$ (funcţie întreagă), conform studiului din 9.4.4. Observăm că

$$f(z)=z^n\left(\frac{a_0}{z^n}+\frac{a_1}{z^{n-1}}+\cdots+a_n\right) \quad \text{şi}$$

$$g(\xi)=f\left(\frac{1}{\xi}\right)=\frac{1}{\xi^n}(a_0\xi^n+a_1\xi^{n-1}+\cdots+a_n)=$$

$$=a_0+\frac{a_1}{\xi}+\frac{a_2}{\xi^2}+\cdots+\frac{a_n}{\xi^n},$$

adică seria Laurent pentru $g(\xi)$ pe coroana $0<|\xi|<r$, $r>0$ conţine un număr finit de termeni ai părţii sale principale. Deci $\xi_0=0$ este un pol de ordinul $n$ pentru $g(\xi)$, ceea ce înesamnă că punctul $z_0=\infty$ este un pol de ordinul $n$ pentru funcţia $f(z)$.

c) Funcţia raţională

$$f(z)=\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}=\frac{a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n}{b_0+b_1z+\cdots+b_mz^m}=$$

$$=z^{n-m}\cdot\left[\frac{a_n+\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_0}{z^n}}{b_m+\frac{b_{m-1}}{z}+\cdots+\frac{b_0}{z^m}}\right]=$$

$$=z^{n-m}\cdot\varphi(z),\ n\in N,\ m\in N,\ a_n\neq 0,\ b_m\neq 0. \qquad (9)$$



Funcţia raţională (9), conform studiului din 9.4.4., este analitică pe $C$, exceptând soluţiile ecuaţiei $Q_m(z)=0$, adică zerourile polinomului $Q_m(z)$. Zerourile polinomului $Q_m(z)$ sunt poli pentru $f(z)$, ordinul cărora coincide cu multiplicitatea soluţiilor ecuaţiei $Q_m(z)=0$.

Din relaţia (9), obţinem că $\lim\limits_{z\to\infty}\varphi(z)=\dfrac{a_n}{b_m}$. Deci, dacă $n>m$, avem că

$$\lim_{z\to\infty}f(z)=\lim_{z\to\infty}z^{n-m}\varphi(z)=\infty$$

şi punctul $z_0=\infty$ este pol de ordinul $(n-m)$ pentru funcţia $f(z)$.

Dacă $n=m$, avem că

$$\lim_{z\to\infty}f(z)=\lim_{z\to\infty}z^{n-m}\cdot\varphi(z)=\lim_{z\to\infty}\varphi(z)=\frac{a_n}{b_m}.$$

Acesta înseamnă că $z_0=\infty$ este un punct eliminabil.

În fine, dacă $n<m$, avem:

$$\lim_{z\to\infty}f(z)=\lim_{z\to\infty}z^{n-m}\cdot\varphi(z)=0\cdot\frac{a_n}{b_m}=0$$

şi punctul $z_0=\infty$ (care este un zero de ordinul $(n-m)$ pentru $f(z)$) este de asemenea un punct eliminabil pentru $f(z)$.

d) Conform studiului din 9.4.4 şi a formulei (12) din 9.6.4 avem că $f(z)=\sin z$ este analitică pe $C$ şi

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\cdots+(-1)^n\cdot\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots.$$

Considerăm funcţia

$$g(\xi)=f\left(\frac{1}{\xi}\right)=\sin\frac{1}{\xi}=\frac{1}{\xi}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{\xi^3}+\cdots+$$

$$+(-1)^n\cdot\frac{1}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{\xi^{2n+1}}+\cdots,$$

care este analitică pe coroana $0<|\xi|<+\infty$. Aceasta înseamnă că punctul $\xi_0=0$ este un punct esențial pentru funcția $g(\xi)$, adică punctual $z_0=\infty$ este un punct esențial pentru $f(z)=\sin z$.

### 9.6.7. Exerciții și răspunsuri la paragraful 9.6.

1. Să se cerceteze convergența seriei numerice $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, dacă

a) $a_n = \frac{n}{3^n}(1+i)^n$; b) $a_n = \frac{(2-i)^n}{3^n}$; c) $a_n = \frac{(2in)^n}{n!}$;

d) $a_n = \frac{i^n}{n\cdot 2^n}$; e) $a_n = \frac{(4i)^n\cdot(n+2^n)}{3^n}$; f) $a_n = \frac{e^{in}}{n^2}$;

g) $a_n = \frac{1+in}{n+2i}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; h) $a_n = \left(\frac{2i}{n}\right)^n$; i) $a_n = \frac{(1+i)^n}{(n+i)^2}$;

j) $a_n = \frac{i^n}{n}$; l) $a_n = \frac{e^{2ni}}{n\sqrt{n}}$.

2. Să se afle raza de convergență a seriilor de puteri:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$; b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n\cdot z^n$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}z^n$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$; f) $\sum_{n=0}^{\infty}\left[3+(-1)^n\right]^n z^n$; g) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2^n)z^n$.

3. Să se determine discul de convergență al seriilor de puteri:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{1+in}$; b) $\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot\frac{(z-1-i)^n}{3^n}$; c) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}$;

d) $\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)^n z^{n!}$; e) $\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^{n!}$; f) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1+i)^n}{\left[3+(-1)^n\cdot 4\right]^n}$.



4. Să se dezvolte în serie MacLaurin funcția f(z), dezvoltând-o mai întâi în funcții raționale simple, dacă

a) $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z-2)}$; b) $f(z)=\frac{2z-5}{z^2-5z+6}$;

c) $f(z)=\frac{z}{(z^2+1)(z^2-2)}$; d) $f(z)=\frac{z^3}{(z^2+1)(z-1)}$.

5. Utilizând seriile MacLaurin pentru funcțiile *sinz, cosz, chz* și $e^z$ să se dezvolte în serie MacLaurin funcțiile:

a) $f(z)=\sin^2 z$; b) $f(z)=\cos^3 z$;

c) $f(z)=\cos^4 z+\sin^4 z$; d) $f(z)=\cos^2 z+ch^2 z$;

e) $f(z)=e^z\cdot\sin z$; f) $f(z)=\cos z\cdot chz$.

6. Să se dezvolte în serie Taylor funcțiile *f(z)* într-o *r*-vecinătate a punctului $z_0$, $r>0$, dacă

a) $f(z)=\sin(2z+1)$ și $z_0=-1$;

b) $f(z)=\frac{1}{3z+1}$ și $z_0=-2$;

c) $f(z)=\cos z$ și $z_0=-\frac{\pi}{4}$;

d) $f(z)=(z+1)\sin 2z$ și $z_0=-1$;

e) $f(z)=\frac{1}{4z+3}$ și $z_0=-1$;

f) $f(z)=e^{2z-1}$ și $z_0=-2$;

g) $f(z)=\ln z$ și $z_0=2$;

h) $f(z)=\frac{1}{3-2z}$ și $z_0=3$.

Să se calculeze razele de convergență ale seriilor respective.

7. Să se determine domeniul de convergență a seriilor Laurent:

care este analitică pe coroana $0<|\xi|<+\infty$. Aceasta înseamnă că punctul $\xi_0=0$ este un punct esenţial pentru funcţia $g(\xi)$, adică punctual $z_0=\infty$ este un punct esenţial pentru $f(z)=\sin z$.

### 9.6.7. Exerciţii şi răspunsuri la paragraful 9.6.

1. Să se cerceteze convergenţa seriei numerice $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, dacă

a) $a_n=\frac{n}{3^n}(1+i)^n$; b) $a_n=\frac{(2-i)^n}{3^n}$; c) $a_n=\frac{(2in)^n}{n!}$;

d) $a_n=\frac{i^n}{n\cdot 2^n}$; e) $a_n=\frac{(4i)^n\cdot(n+2^n)}{3^n}$; f) $a_n=\frac{e^{in}}{n^2}$;

g) $a_n=\frac{1+in}{n+2i}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; h) $a_n=\left(\frac{2i}{n}\right)^n$; i) $a_n=\frac{(1+i)^n}{(n+i)^2}$;

j) $a_n=\frac{i^n}{n}$; l) $a_n=\frac{e^{2ni}}{n\sqrt{n}}$.

2. Să se afle raza de convergenţă a seriilor de puteri:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$; b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}n^n\cdot z^n$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}z^n$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$; f) $\sum_{n=0}^{\infty}\left[3+(-1)^n\right]^n z^n$; g) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2^n)z^n$.

3. Să se determine discul de convergenţă al seriilor de puteri:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{1+in}$; b) $\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot\frac{(z-1-i)^n}{3^n}$; c) $\sum_{n=0}^{\infty}z^{2n}$;

d) $\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)^n z^{n!}$; e) $\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^{n!}$; f) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1+i)^n}{\left[3+(-1)^n\cdot 4\right]^n}$.



4. Să se dezvolte în serie MacLaurin funcţia f(z), dezvoltând-o mai întâi în funcţii raţionale simple, dacă

a) $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z-2)}$; b) $f(z)=\frac{2z-5}{z^2-5z+6}$;

c) $f(z)=\frac{z}{(z^2+1)(z^2-2)}$; d) $f(z)=\frac{z^3}{(z^2+1)(z-1)}$.

5. Utilizând seriile MacLaurin pentru funcţiile *sinz, cosz, chz* şi $e^z$ să se dezvolte în serie MacLaurin funcţiile:

a) $f(z)=\sin^2 z$; b) $f(z)=\cos^3 z$;

c) $f(z)=\cos^4 z+\sin^4 z$; d) $f(z)=\cos^2 z+ch^2 z$;

e) $f(z)=e^z\cdot\sin z$; f) $f(z)=\cos z\cdot chz$.

6. Să se dezvolte în serie Taylor funcţiile *f(z)* într-o *r*-vecinătate a punctului $z_0$, $r>0$, dacă

a) $f(z)=\sin(2z+1)$ şi $z_0=-1$;

b) $f(z)=\frac{1}{3z+1}$ şi $z_0=-2$;

c) $f(z)=\cos z$ şi $z_0=-\frac{\pi}{4}$;

d) $f(z)=(z+1)\sin 2z$ şi $z_0=-1$;

e) $f(z)=\frac{1}{4z+3}$ şi $z_0=-1$;

f) $f(z)=e^{2z-1}$ şi $z_0=-2$;

g) $f(z)=\ln z$ şi $z_0=2$;

h) $f(z)=\frac{1}{3-2z}$ şi $z_0=3$.

Să se calculeze razele de convergenţă ale seriilor respective.

7. Să se determine domeniul de convergenţă a seriilor Laurent:

a) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^{-n}\cdot z^n$; b) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{z^n}{3^n+1}$; c) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2+1}$;

d) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^{-n^2}(z+1)^n$.

8. Să se dezvolte în serie Laurent funcţia $f(z)$ într-o $r$-vecinătate a punctului $z_0$, dacă

a) $f(z)=\frac{1}{z-2}$, $z_0=0$; $z_0=\infty$;

b) $f(z)=\frac{1}{z(1-z)}$, $z_0=0$; $z_0=1$, $z_0=\infty$;

c) $f(z)=z^2\cdot e^{\frac{1}{z}}$, $z_0=0$; $z_0=\infty$;

d) $f(z)=\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$, $z_0=2$;

e) $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^2}$, $z_0=i$; $z_0=\infty$;

f) $f(z)=e^{\frac{1}{1-z}}$, $z_0=1$.

9. Să se dezvolte în serie Laurent funcţia $f(z)$ pe coroana respectivă, dacă

a) $f(z)=\frac{z^2}{(z+1)(z-2)}$, $0<|z+1|<3$;

b) $f(z)=\frac{1}{z(z-3)^2}$, $1<|z-1|<2$;

c) $f(z)=\frac{1}{z^2(z^2-9)}$, $1<|z-1|<2$;



d) $f(z)=\frac{1}{(z^2-1)(z^2+4)}$, $2<|z|<+\infty$;

e) $f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-3)}$, $2<|z|<3$ şi $3<|z|<+\infty$;

f) $f(z)=\frac{2}{z^2-1}$, $1<|z+2|<3$;

g) $f(z)=\frac{z+2}{z^2-4z+3}$, $2<|z-1|<+\infty$;

h) $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$, $1<|z-i|<2$.

10. Să se clasifice punctele singulare finite ale funcţiilor:

a) $f(z)=\frac{1}{1-\sin z}$, b) $f(z)=\frac{1-\cos z}{z^2}$; c) $f(z)=e^{\frac{1}{z+2}}$;

d) $f(z)=\cos\frac{1}{z}$; e) $f(z)=e^{\frac{1}{z^2}}$; f) $f(z)=z\cdot sh\frac{1}{z}$;

g) $f(z)=\frac{e^z-1}{z}$; h) $f(z)=\frac{\sin z}{z^3+z^2-z-1}$;

i) $f(z)=\frac{z\cos\frac{1}{z}}{\cos z-1}$; j) $f(z)=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{e^{-z}+1}$.

11. Să se clasifice punctele singulare indicate ale funcţiilor:

a) $f(z)=\frac{1+\cos z}{z-\pi}$, $z_0=\pi$; b) $f(z)=\frac{z^2-3z+2}{z^2-2x+1}$, $z_0=1$;

c) $f(z)=\frac{\sin z}{z^2}$, $z_0=0$; d) $f(z)=\cos\frac{1}{z+\pi}$, $z_0=-\pi$;

e) $f(z)=\frac{\ln(1+z^3)}{z^2}$, $z_0=0$; f) $f(z)=\frac{e^{z+e}}{z-e}$, $z_0=-e$;

g) $f(z)=\cos\frac{1}{z}+\sin\frac{2-\pi z}{2z}$, $z_0=0$; h) $f(z)=\frac{1-\cos z}{z^4}$, $z_0=0$;

i) $f(z)=\frac{z+3z^2}{\ln(1-2z)}$, $z_0=0$; j) $f(z)=\frac{3z^8+1}{z+2}$, $z_0=\infty$;

k) $f(z)=z^5\sin\frac{1}{z}$, $z_0=\infty$; l) $f(z)=\frac{z^4}{1+z^4}$ $z_0=\infty$.

## Răspunsuri

1. a) absolut convergentă; b) absolut convergentă; c) divergentă; d) absolut convergentă; e) divergentă; f) absolut convergentă, g) absolut convergentă; h) absolut convergentă; i) divergentă; j) semiconvergentă ($\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}\,a_n=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k}$ și $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{Im}\,a_n=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2n+1}$); l) absolut convergentă (vezi exemplul precedent).

2. a) $r=1$; b) $r=\infty$; c) $r=0$; d) $r=3$; e) $r=e$; f) $r=\frac{1}{4}$; g) $r=\frac{1}{2}$.

3. a) $|z+i|<1$; b) $|z-1-i|<3$; c) $|z|<1$; d) $|z|<1$;

$$\left(r=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n!]{|1+i|^n}}=\lim_{n\to\infty}|1+i|^{\frac{1}{(n-1)!}}=|1+i|^0=1\right);$$

e) $|z|<\frac{1}{2}$ (vezi ex. precedent); f) $|z+1+i|<1$.

4. a) $\frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}-2^{-n-1}\right]z^n$; b) $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(2^{-n-1}+3^{-n-1}\right)z^n$;
c) $\frac{1}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}-4^{-n-1}\right]z^{2n+1}$; d) $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(z^{4n}+z^{4n-1}\right)$.



5. a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}\cdot z^{2n}\left[f(z)=\frac{1}{2}(1-\cos 2z)\right]$;

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{3^{2n-3}}{4\cdot(2n)!}\cdot z^{2n}\left[\cos^3 z=\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^3=\right.$
$\left.=\frac{1}{4}\cos 3z+\frac{3}{4}\cos z\right]$;

c) $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2^{4n-2}}{(2n)!}\cdot z^{2n}\left[(\cos^2 z+\sin^2 z)^2=\right.$
$\left.=1\Rightarrow\cos^4 z+\sin^4 z=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4z\right]$;

d) $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{4n+1}}{(4n)!}\cdot z^{4n}\left[f(z)=\frac{1+\cos 2z}{2}+\frac{1+ch2z}{2}=\right.$
$\left.=1+\frac{1}{2}(\cos 2z+ch2z)\right]$;

e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{\frac{n}{2}}\cdot\sin\cdot\frac{\pi n}{4}\cdot\frac{z^n}{n!}\left[f(z)=\frac{1}{2i}\left(e^{z(1+i)}-e^{z(1-i)}\right)\right]$;

f) $\sum\limits_{m=0}^{\infty}(-1)^m\cdot\frac{4^m}{(4m)!}\cdot z^{4m}\left[f(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\cdot\frac{e^z+e^{-z}}{2}=\right.$
$\left.=\frac{1}{2}(chz(1+i)+chz(1-i))\right]$.

6. a) $-\sin 1+2(z+1)\cos 1+\frac{2^2}{2!}(z+1)^2\sin 1-$
$-\frac{2^3}{3!}(z+1)^3\cdot\cos 1+\ldots$, $r=+\infty$, $\sin(2z+1)=\sin[2(z+1)-1]$;

b) $-\frac{1}{5}\left[1+\frac{3}{5}(z+2)+\left(\frac{3}{5}\right)^2(z+2)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^3+\ldots\right]$, $r=\frac{5}{3}$

$f(z)=-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{5}(z+2)}$;

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1+\left(z+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(z+\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(z+\frac{\pi}{4}\right)^3+\dots\right]$, $r=+\infty$;

$f(z)=\cos\left[\left(z+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(z+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(z+\frac{\pi}{4}\right)\right)$;

d) $(-\sin 2)(z+1)+(\cos 2)\cdot 2(z+1)^2+\sin 2\cdot\frac{2^2}{2!}(z+1)^3-\frac{2^3}{3!}(z+1)^4-\dots$, $r=+\infty$;

$f(z)=(z+1)[\cos 2\cdot\sin 2(z+1)-\sin 2\cdot\cos 2(z+1)]$;

e) $-[1+4(z+1)+4^2(z+1)^2+4^3(z+1)^3+\dots]$, $r=\frac{1}{4}$;

f) $e^{-5}\left[1+2(z+2)+\frac{2^2(z+2)^2}{2!}+\frac{2^3(z+2)^3}{3!}+\dots\right]$, $r=+\infty$, $\left(f(z)=e^{-5}\cdot e^{2(z+2)}\right)$.

g) $\ln 2+\frac{z-2}{2\cdot 1}-\frac{(z-2)^2}{2^2\cdot 2}+\dots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{(z-2)^n}{2^n\cdot n}+\dots$, $r=2$;

$\left(\ln z=\ln[2+(z-2)]=\ln\left[2\left(1+\frac{z-2}{2}\right)\right]=\ln 2+\ln\left(1+\frac{z-2}{2}\right)\right)$.

h) $-1/3+\frac{2}{3^2}(z-3)+\frac{2^2}{3^3}(z-3)^2+\frac{2^3}{3^4}(z-3)^3+\dots$, $r=3/2$.

7. a) $|z|=2$ ; b) $1<|z|<3$; c) $|z|=1$; d) $0<|z+1|<+\infty$.

8. a) $-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$ în discul $|z|<2$ şi $-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$ în coroana $2<|z|<+\infty$;



b) $\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ în coroana $0<|z|<1$, $-\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$ în coroana $0<|z-1|<1$

$-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{z^n}$ în coroana $1<|z|<+\infty$;

c) $\frac{1}{2}+z+z^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}\cdot\frac{1}{z^n}$ în coroana $0<|z|<+\infty$;

d) $\frac{1}{z-2}+i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2+i)^{n+1}-(2-i)^{n+1}}{5^{n+1}}(z-2)^n$ în coroana $0<|z-2|<\sqrt{5}$;

e) $-\frac{1}{4(z-i)}-\frac{1}{4(z-i)^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+3)i^n\cdot(z-i)^n}{2^{n+1}}$ în coroana $0<|z-i|<2$,

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{z^{2n+2}}$ în coroana $1<|z|<+\infty$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n!(z-1)^n}$ în coroana $0<|z-1|<+\infty$.

9. a) $\frac{1}{3}(z+1)^{-1}-\frac{8}{9}+\frac{19}{17}(z+1)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{3^{n+1}}(z+1)^n$;

b) $\sum_{n=-\infty}^{(-1)}\frac{(-1)^{1-n}}{9}(z-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3n+5}{9\cdot 2^{n+2}}(z-1)^n$;

c) $\sum_{n=-\infty}^{-2}\frac{(-1)^n(n+1)}{9}(z-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}-2^{n+1}}{27\cdot 2^{2n+3}}(z-1)^n$;

d) $\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1+(-1)^n\cdot 4^{-n-1}}{5}\cdot z^{2n}$;

e) $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}-2^{n-1}}{z^n}$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+2)^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{3^{n+1}}$;

g) $\frac{1}{z-1}+5\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(z-1)^n}$;

h) $-\frac{i}{2(z-i)}+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2i)^n}(z-i)^n$.

10. a) $z_k=(4k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$, $k\in z$ poli de ordinul 2.

b) $z=0$ - punct eliminabil;

c) $z=0$ - punct esenţial;

d) $z=0$ - punct esenţial;

e) $z=0$ - punct esenţial;

f) $z=0$ - punct esenţial;

g) $z=0$ - punct eliminabil;

h) $z=-1$ - pol dublu; $z=1$ - pol simplu.

i) $z=0$ - punct esenţial; $z_n=2\pi n$, $n\in Z$ - poli dubli;

j) $z=0$ - pol dublu, $z_n=2\pi ni$, $n\in Z$ - poli simpli.

11. a) eliminabil; b) pol simplu; c) pol simplu; d) esenţial; e) eliminabil; f) pol simplu; g) esenţial; h) pol dublu; i) eliminabil; j) pol de ordinul 7; k) pol de ordinul 4; l) eliminabil.



## 9.7. Reziduul funcţiei.

După prezentarea în paragrafele precedente ale celor mai importante rezultate teoretice privind funcţiile analitice şi caracteristicele lor, vom introduce in acest paragraf noţiunea de reziduu si vom demonstra teorema centrală – teorema riziduurilor – din care in continuare vom deduce aplicaţii in calcularea integralelor curbilinii complexe (ex 3-7 din 9.7.1.) şi a unor integrale reale (proprii şi improprii) în 9.7.2..

### 9.7.1. Reziduul funcţiei şi calcularea lui.

Fie funcţia *f(z)* este analitică intr-o *r*-vecinătate punctată a punctului singular izolat $z_0\in C$ al funcţiei f, adică $f$ este analitică pe coroana $0<|z-z_0|<r$, $r>0$.

Dezvoltăm funcţia $f$ în serie Laurent pe această coroană (teorema 3 din 9.6.5.):

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\ (z-z_0)^n,\ n\in Z. \qquad (1)$$

Deoarece funcţiile $a_n(z-z_0)^n, n\in Z$ sunt analitice pe această coroană si seria (1) este uniform convergenta pe orice domeniu inchis $D$:

$$0<\rho_1\le|z-z_0|\le\rho_2<r,$$

rezultă că seria (1) poate fi integrată termen cu termen pe orice cerc $\gamma:|z-z_0|=\rho$ cu $\rho_1\le\rho\le\rho_2$. În virtutea formulei (6) din 9.5.1 avem:

$$\oint_\gamma(z-z_0)^n dz=0,\text{dacă } n\in Z,\ n\neq -1 \text{ şi } \oint_\gamma\frac{dz}{z-z_0}=2\pi i.$$

Integrând ambele părţi ale relaţiei (1) de-a lungul cercului $\gamma:|z-z_0|=\rho$, parcurs împotriva acelor ceasornicului, obţinem :

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \cdot a_{-1} \text{ , de unde}$$

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)dz. \qquad (2)$$

Integrala din formula (2) nu depinde de alegerea conturului $\gamma$ . Intr-adevăr , fie $\gamma_1$ şi $\gamma_2$ două contururi ce înconjoară punctul $z_0$ şi aparţin în întregime coroanei $0<|z-z_0|<r$. Alegem numărul real pozitiv $\rho$ astfel încât cercul $\gamma_\rho:|z-z_0|=\rho$ să aparţină în intregime domeniului $D_{\gamma_1}$ marginit de conturul $\gamma_1$ şi domeniului $D_{\gamma_2}$ marginit de $\gamma_2$ (vezi fig. 1).

Deci *f(z)* este analitică pe domeniul închis mărginit de contururile $\gamma_1$ şi $\gamma_\rho$ (pe fig. 1. acest domeniu este haşurat ). Conform teoremei lui Cauchy pentru acest domeniu dublu conex ( teorema 2 din 9.5.2.), obţinem :

$$\oint_{\gamma_\rho} f(z)dz = \oint_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Similar, aplicând aceeaşi teoremă pe domeniul închis marginit de contururile $\gamma_2$ şi $\gamma_\rho$ (pe fig. 1 acest domeniu este punctat), urmează că

$$\oint_{\gamma_\rho} f(z)dz = \oint_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Prin urmare,

$$\oint_{\gamma_1} f(z)dz = \oint_{\gamma_2} f(z)dz.$$



Remarcăm că formula (2) este un caz particular (n=-1) al formulei (13) din 9.6.5.

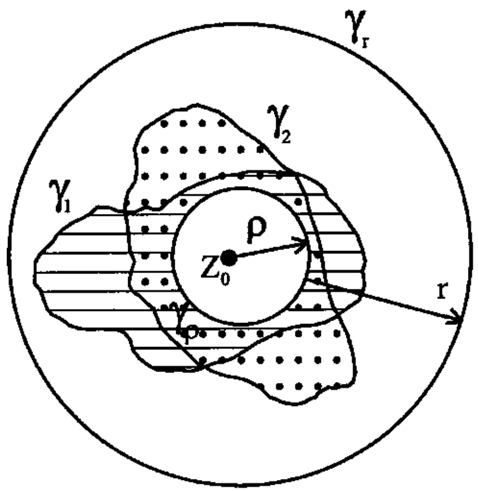



**Fig. 1.**

**Definiţia 1.** Coeficientul $a_{-1}$ , calculat după formula (2), din dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei *f(z)* analitice pe coroana $0<|z-z_0|<r$, $r>0$, $z_0\in C$ se numeşte *reziduul* funcţiei *f* în punctul singular izolat $z_0$ si se noteaza

$$a_{-1}=Rez(f,\ z_0) \text{ sau } a_{-1} = \operatorname*{Rez}_{z=z_0} f(z).$$

Aşadar

$$Rez(f,\ z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)dz, \qquad (3)$$

unde $\gamma$ este orice contur neted pe porţuni ce înconjoară punctul $z_0$ şi aparţine în întregime coroanei $0<|z-z_0|<r$, $\gamma$ este orientat în sens pozitiv (împotriva acelor ceasornicului).

**Teorema 1.** Fie functia $f(z)$ este analitică pe un domeniu $D \subseteq C$, exceptând un numar finit de puncte singulare izolate $z_k(k = 1,2,...,n)$. Presupunem că $\gamma$ este un contur neted pe porţiuni astfel încât $z_k \in D_\gamma$ pentru $k = 1,2,...,n$ şi $D_\gamma \subseteq D$, unde $D_\gamma$ este domeniul mărginit de $\gamma$. Atunci

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} z(f, z_k), \qquad (4)$$

unde conturul $\gamma$ este orientat în sens pozitiv.

**Demonstratie.** Fie $\gamma$ un contur neted pe porţiuni ce aparţine în întregime domeniului $D$ astfel încât punctele $z_k \in D_\gamma$, $k$=1,2,... , $n$, unde domeniul $D_\gamma$ este mărginit de conturul $\gamma$. Înconjurăm punctele $z_k(k=1,2,..., n)$ cu cercuri centrate in $z_k$ de raze foarte mici $\rho_k$, astfel incât discurile respective să aparţină lui $D_\gamma$ şi două câte două să nu aibă puncte interioare comune. Astfel am obţinut următoatele: $f(z)$ este analitică într-un domeniu închis multi conex $\overline{D}_\gamma$ mărginit exterior de conturul $\gamma$ şi interior de cercurile $\gamma_k : |z - z_0| = \rho_k$, $k=1,2,...n$. Aplicând teorema Cauchy pentru domenii multi conexe (teorema 2 din 9.5.2), obţinem:

$$\oint_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k} f(z)dz, \text{ sau } \oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_k} f(z)dz \right],$$

unde contururile $\gamma$ si $\gamma_k$ sunt orientate în sens pozitiv.

Aceasta inseamnă, utilizând (3), că am obţinut formula (4). Teorema este demonstrată.



Teorema 1 se numeşte *teorema fundamentală a riziduurilor.*

Trecem acum la calcularea riziduului funcţiei în diverse puncte singulare izolate ale acestei funcţii.

Reieşind din definiţia 1 si formula (3), observăm că reziduul funcţiei $f(z)$ în punctul singular izolat $z_0 \in C$ poate fi calculat dezvoltând funcţia $f(z)$ în serie Laurent pe coroana $0<|z-z_0|<r$, $r>0$ sau utilizând formula (3).

1. **Calcularea reziduului intr-un punct eliminabil**.

În cazul acesta dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei $f(z)$ analitice pe coroana $0<|z-z_0|<r$, $r>0$ conţine numai partea ei secundară (vezi formula (3) din 9.6.6) . Prin urmare, *în orice punct eliminabil al funcţiei date reziduul ei în acest punct este egal cu 0.*

**2. Calcularea reziduului într-un pol.**

Fie $z_0$ este un pol de ordinul $m$ al funcţiei $f(z)$ analitice pe coroana $0<|z-z_0|<r$, $r>0$. Atunci dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei $f(z)$ pe această coroană are forma (vezi formula (4) din 9.6.6):

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + ... + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \; a_{-m} \neq 0.$$

De unde

$$f(z)(z - z_0)^m = a_{-m} + a_{-m+1}(z - z_0) + ... + a_{-1}(z - z_0)^{m-1} +$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+m}.$$

În partea dreaptă avem o serie de puteri, care este convergentă pe discul $|z-z_0|<r$ şi uniform convergentă pe orice disc închis $|z-z_0|\leq\rho<r$ . Deci această serie poate fi derivată termen cu termen pe discul ei de convergenţă. Aşadar, derivând de $(m-1)$ ori ambele părţi ale acestei relaţii, obţinem că

$$\left[f(z)(z-z_0)^m\right]^{(m-1)}=(m-1)!\cdot a_{-1}+m!\cdot a_0(z-z_0)+...$$

şi

$$\lim_{z\to z_0}\left[f(z)\cdot(z-z_0)^m\right]^{(m-1)}=(m-1)!\cdot a_{-1}.$$

Prin urmare,

$$\operatorname{Re}_{z=z_0} z\, f(z)=a_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\cdot\lim_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)^m\right]^{(m-1)}. \quad (5)$$

Dacă $z_0$ este un pol simplu, adica $m=1$, formula (5) se transforma în formula :

$$\operatorname{Re}_{z=z_0} z\, f(z)=\lim_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)\right]. \quad (6)$$

Considerăm un caz particular al formulei (6).

Fie $f(z)=\dfrac{g(z)}{h(z)}$, unde $g(z)$, $h(z)$ sunt analitice pe coroana $0<|z-z_0|<r$, $r>0$ şi $h(z_0)=0$, $h'(z_0)\neq 0$. Atunci

$$\lim_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)\right]=\lim_{z\to z_0}\left[\frac{g(z)}{h(z)}\cdot(z-z_0)\right]=$$

$$=\lim_{z\to z_0}\left[\frac{g(z)}{\dfrac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}}\right]=\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Prin urmare ,

$$\operatorname{Re} z(f,z_0)=\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}. \quad (7)$$

**Exemplul 1.** Să se calculeze reziduul funcţiei

$$f(z)=\frac{1}{z^2(z-1)}$$

în punctele ei singulare finite.



**Rezolvare.** Punctele singulare finite ale funcţiei $f(z)$ sunt rădăcinile ecuaţiei $z^2(z-1)=0$, adică $z_1=0$ şi $z_2=1$. Punctul singular izolat $z_1=0$ este un pol dublu, iar $z_2=1$ este un pol simplu (teorema 6 din 9.6.6). Avem:

$$\operatorname{Re} z(f,0)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{z^2(z-1)}\cdot z^2\right)'=\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{z-1}\right)'=$$

$$=-\lim_{z\to 0}\frac{1}{(z-1)^2}=-1;$$

$$\operatorname{Re} z(f,1)=\lim_{z\to 1}\left[\frac{1}{z^2(z-1)}\cdot(z-1)\right]=\lim_{z\to 1}\frac{1}{z^2}=1.$$

În primul caz am utilizat formula (5) cu $m=2$, iar în cazul al doilea - formula (6).

3. **Calcularea reziduului într-un punct singular izolat esenţial** .

În cazul acesta reziduul se poate afla numai prin dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei date într-o $r$ – vecinătate punctată a punctului singular esenţial sau utilizând formula (2).

**Exemplul 2.** Să se calculeze reziduurile funcţiilor $f_1(z)=e^{\frac{1}{z}}$ şi $f_2=e^{\frac{1}{z^2}}$ în punctul singular $z_0=0$.

**Rezolvare.** Avem

$$e^u=1+u+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+...+\frac{u^n}{n!}+...,$$

care este valabilă pentru orice $u\in C$.

Deci

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^3}+...+\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{z^n}+...,$$

$$e^{\frac{1}{z^2}}=1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^4}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^6}+\ldots+\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{z^{2n}}+\ldots,$$

care sunt valabile pe coroana $0<|z|<+\infty$. Punctul $z_0=0$ este un punct esențial atât pentru funcția $f_1(z)=e^{\frac{1}{z}}$, cât şi pentru funcția $f_2(z)=e^{\frac{1}{z^2}}$, în baza definiției 3 din 9.6.6. Prin urmare, $\operatorname{Re}z(f_1,0)=a_{-1}=1$ şi $\operatorname{Re}z(f_2,0)=a_{-1}=0$

4. **Calcularea reziduului în punctul impropriu** $z_0=\infty$.

Fie $z_0=\infty$ este un punct singular izolat al funcției f, ceea ce înseamnă că $f$ este analitică într-o $r$-vecinătate punctată a lui $z_0$, adică $f$ este analitică pe coroana $r<|z|<+\infty$, unde $r$ este orice număr real pozitiv. Deci dezvoltarea în serie Laurent a funcției *f(z)* pe această coroană are forma

$$f(z)=\ldots+\frac{a_{-n}}{z^n}+\ldots+\frac{a_{-1}}{z}+a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n+\ldots=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n. \quad (8)$$

Deoarece seria (8) este uniform convergentă pe orice cerc $\gamma:|z|=\rho>r$, urmează că seria (8) poate fi integrată termen cu termen pe acest contur. Deci

$$\oint_{\gamma^{(-)}}f(z)dz=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\gamma^{(-)}}\frac{a_{-n}}{z^n}dz+\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\gamma^{(-)}}a_nz^ndz,$$

unde cercul $\gamma$ este orientat după acele ceasornicului, adică în sens negativ.

Utilizând formula (6) din 9.5.1, avem:

$$\oint_{\gamma^{(-)}}a_nz^n=\begin{cases}0,\text{ dacă } & n\in Z, n\neq-1,\\ -2\pi i\cdot a_{-1},\text{ dacă } & n=-1,\end{cases}$$

unde cercul $\gamma$ este orientat după acele ceasornicului.



Prin urmare,

$$\oint_{\gamma^{(-)}}f(z)dz=-2\pi i\cdot a_{-1}.$$

Deci

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1^{(-)}}f(z)dz=-a_{-1}. \quad (9)$$

**Definiția 2.** Se numeşte *reziduul funcției f(z) în punctul impropriu izolat* $z_0=\infty$ şi se notează $\operatorname{Re}z(f,\infty)$ sau $\operatorname{Re}z_{z=\infty}f(z)$ numărul complex :

$$\operatorname{Re}z(f,\infty)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma^{(-)}}f(z)dz, \quad (10)$$

unde $\gamma^{(-)}$ este orice contur neted pe porțiuni ce înconjoară punctul $z_1=0$ şi este orientat în sens negativ (după acele ceasornicului).

Din formula (9) reiese că

$$\operatorname{Re}z(f,\infty)=-a_{-1}, \quad (11)$$

unde $a_{-1}$ este coeficientul de pe lîngă $\frac{1}{z}$ din seria Laurent $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{a_n}{z^n}$, $n\in Z$ a funcției *f(z)* analitice pe coroana $r<|z|<+\infty$ cu $r>0$.

**Notă.** Reamintim ([18],6.5.2) că, se numeşte *direcție pozitivă* (sau *sens pozitiv*) de parcurgere a conturului $\gamma$ (o curbă simplă, închisă şi netedă pe porțiuni) o astfel de direcție, la care mişcându-ne pe domeniul mărginit de acest contur în direcția dată, domeniul rămâne în stânga. Astfel pentru punctele interioare ale cercului $|z-z_0|=r$, $r>0$ sensul pozitiv al acestui cerc coincide cu mişcarea pe cercul $|z-z_0|=r$ împotriva acelor de ceasornic (fig 2.a)), iar pentru punctele exterioare ale cercului dat, adică pentru punctele ce satisfac inegalitatea $|z-z_0|>r$ sensul pozitiv al cercului $\gamma:|z-z_0|=r$, coincide cu mişcarea pe acest cerc după acele ceasornicului (fig.2.b)).

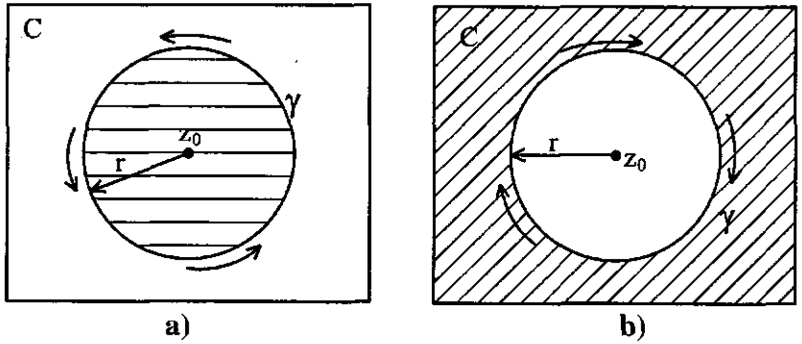



**Fig. 2.**

Aşadar definiţiile 1 şi 2 pot fi unificate : *se numeşte **reziduul** funcţiei* $f(z)$ care este analitică pe o $r$ – vecinătate punctată $\overline{U}(z_0, r)$ a punctului singular izolat $z_0$( finit sau $\infty$) şi se notează $\operatorname{Re} z(f,z_0)$, numărul complex :

$$\operatorname{Re} z(f,z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)dz,$$

unde $\gamma$ este orice contur neted pe porţiuni ce inconjoară punctul $z_0$ şi aparţine în întregime domeniului $\overline{U}(z_0,r), r>0$; $\gamma$ este orientat în sens pozitiv în raport cu domeniu $D_\gamma$ mărginit de acest contur.



În legătură cu unificarea definiţiei reziduului funcţiei *f(z)* în punctele singulare izolate finite sau infinit are loc următoarea teoremă importantă:

**Teorema 2.** Dacă funcţia *f(z)* este analitică pe *C*, exceptând un număr finit de puncte singulare izolate finite, atunci suma riziduurilor funcţiei *f(z)* în aceste puncte singulare izolate finite şi în punctul impropriu izolat $z_0=\infty$ este egală cu *0* .

**Demonstraţie.**

Fie $z_1, z_2, ..., z_n$ punctele singulare izolate finite şi punctul singular izolat $z_0=\infty$ ale funcţiei *f*(*z*) care este analitică pe domeniul $D=C\setminus\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$. Notăm cu $\gamma$ cercul $|z|=r>\max(|z_1|,|z_2|,\ldots,|z_n|)$, care este parcurs în sens pozitiv. Evident că $\gamma\subset D$ Aplicând formula (4) din teorema 1, urmează că

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re} z(f,z_k). \tag{13}$$

În virtutea formulei (10) de mai sus şi a proprietăţii P2 din 9.5.1, rezultă că

$$-\operatorname{Re} z(f,\infty)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re} z(f,z_k)$$

Prin urmare,

$$\sum_{k=0}^{n}\operatorname{Re} z(f,z_k)=0,$$

adică teorema este demonstrată .

Importanţa practică a $\operatorname{Re} z(f,\infty)$ şi a teoremei 2 constă în posibilitatea de a simplifica calculul unor integrale curbilinii complexe. Într-adevăr, dacă $f$ este o funcţie analitică pe $C\setminus\{z_1, z_2, ..., z_n\}$, unde $z_k, k=1,2,...,n$ sunt punctele singulatre izolate finite ale funcţiei *f(z)* şi se cere de calculat $\oint_\gamma f(z)dz$, unde $\gamma$ este un contur neted pe porțiuni astfel încât domeniul $D_\gamma$, marginit de $\gamma$, conține punctele $z_k, k=1,2,...,n$ , atunci, utilizând formulele (13) şi (10) de mai sus, obținem:

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} z(f, z_k) = -2\pi i \cdot \operatorname{Re} z(f,\infty). \quad (14)$$

Dacă însă se cere de calculat $\int_\gamma f(z)dz$, unde $\gamma$ este un contur neted pe porțiuni , astfel încât domeniul $D_\gamma$ mărginit de $\gamma$ conține punctele singulare izolate finite $z_1, z_2, ....., z_k$ ale funcției *f(z)* , iar punctele singulare izolate finite $z_{k+1}, z_{k+2}, ..., z_n$ si $z_{n+1}=\infty$, nu aparțin domeniului $\overline{D}_\gamma = D_\gamma \cup \gamma$ atunci aplicând teoremele 1 si 2 de mai sus, avem că

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{s=1}^{k} \operatorname{Re} z(f, z_s) = -2\pi i \cdot \sum_{t=k+1}^{n+1} \operatorname{Re} z(f, z_t). \quad (15)$$

Remarcăm că *Rez(f, ∞)*, utilizând formula (11) de mai sus, se calculează cu ajutorul coeficientului $a_{-1}$ din partea secundară a seriei Laurent pe coroana $r<|z|<+\infty$, $r>0$, iar Rez(f, $z_0$), $z_0 \in C$ se calculează cu ajutorul coeficientului $a_{-1}$ din partea principală a seriei Laurent $0<|z-z_0|<r$, $r>0$ (a se consulta sfârşitul punctului 9.6.6) Prin urmare, în timp ce $\operatorname{Re} z(f, z_0)=0$ pentru orice punct eliminabil $z_0 \in C$ , în cazul punctului impropriu eliminabil $z_0=\infty$ se poate întâmplă ca reziduul în astfel de puncte să fie diferit de 0. De exemplu , pentru funcția $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ punctul impropriu $z_0=\infty$ este un punct eliminabil, deoarece partea principală a seriei Laurent pe coroana $r<|z|<+\infty$, $r>0$ lipseşte:



$$f(z)=\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z-1}=\left(-\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+.....\right)=$$

$$=-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+...\right),$$

care este valabilă pentru $|q|=\left|\frac{1}{z}\right|<1$, adică $|z|>1$. Observăm, că

$$\operatorname{Re} z(f,\infty)=-a_{-1}=1\neq 0.$$

Calcularea reziduului în $z_0=\infty$ al funcției *f(z)* se simlifică în cazul când $z_0=\infty$ este un pol de ordinul *m* sau un punct eliminabil. Dacă $z_0=\infty$ este un pol de ordinul *m* al funcției *f(z)* analitice pe coroana $r<|z|<+\infty$, $r>0$, atunci :

$$\operatorname*{Re}_{z=\infty} z\, f(z) = \frac{(-1)^m}{(m+1)!}\lim_{z\to\infty}\left[z^{m+2}\cdot f^{(m+1)}(z)\right] , \quad (16)$$

(a se compara cu formula (5) în cazul unui pol finit de ordinul *m*).

Într-adevăr, seria Laurent a funcției *f* pe această coroană are forma:

$$f(z)=a_m z^m + a_{m-1}z^{m-1}+...+a_1 z + a_0 +$$
$$+\frac{a_{-1}}{z}+\frac{a_{-2}}{z^2}+..., \; a_m \neq 0.$$

Deci

$$f^{(m)}(z)=a_m(m!)+a_{-1}\cdot(-1)^m(m!)\cdot z^{-(m+1)}+$$
$$+a_{-2}\cdot(-1)^m\cdot(m+1)!\,z^{-(m+1)}+...$$

şi

$$f^{(m+1)}(z)=a_{-1}\cdot(-1)^{m+1}\cdot(m+1)!\,z^{-(m+2)}+$$
$$+a_{-2}\cdot(-1)^{m+1}\cdot(m+2)!\,z^{-(m+2)}+... .$$

De unde $\lim\limits_{z\to\infty}\left[z^{m+2}\cdot f^{(m+1)}(z)\right]=a_{-1}\cdot(-1)^{m+1}\cdot(m+1)!$. Prin urmare, aplicând formula (9), obținem că formula (16) este valabilă.

Dacă însă punctul $z_0=\infty$ este un punct eliminabil și $\xi_0=\frac{1}{z_0}=0$ este o rădăcină simplă a ecuației $f\left(\frac{1}{z}\right)=0$, adica un zerou simplu pentru funcția $f\left(\frac{1}{z}\right)$, atunci seria Laurent a funcției *f(z)* pe coroana $r<|z|<+\infty,\ r>0$, are forma :

$$f(z)=a_0+\frac{a_{-1}}{z}+\frac{a_{-2}}{z^2}+\ldots+\frac{a_{-m}}{z^m}+\ldots.$$

De unde rezultă că

$$z\left[f(z)-a_0\right]=a_{-1}+\frac{a_{-2}}{z}+\ldots+\frac{a_{-m}}{z^{m-1}}+\ldots.$$

Deci $\lim\limits_{z\to\infty}z\left[f(z)-a_0\right]=a_{-1}$ și

$$\operatorname{Re}z(f,\infty)=-a_{-1}=-\lim_{z\to\infty}z\left[f(z)-a_0\right], \tag{17}$$

unde $a_0=f(\infty)=\lim\limits_{z\to\infty}f(z)$.

Dacă $z_0=\infty$ este un punct eliminabil și punctul $\xi_0=\frac{1}{z_0}$ este o rădăcină multiplă de ordinul *m>1* a ecuației $f\left(\frac{1}{z}\right)=0$, adică un zerou multiplu de ordinul *m>1* pentru funcția $f\left(\frac{1}{z}\right)$, atunci seria Laurent pe coroana $r<|z|<+\infty$, $r>0$ are forma :

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{z^m}+\frac{a_{-m-1}}{z^{1+m}}+\ldots,\ \text{cu } a_{-m}\neq 0 \text{ și}$$



$$a_0=a_{-1}=a_{-2}=\ldots=a_{1-m}=0.$$

Prin urmare,

$$\operatorname{Re}_{z\to\infty}z\,f(z)=-a_{-1}=0. \tag{18}$$

**Exemplul 3.** Să se calculeze $I=\int\limits_{\gamma}\frac{z+2}{z(z^2+4)^2}dz$, unde $\gamma$ este cercul $|z|=3$, orientat în sens pozitiv .

**Rezolvare.** Punctele singulare finite ale funcției $f(z)=\frac{z+2}{z(z^2+4)^2}$ sunt :

$z_1=0$ este pol simplu, iar $z_{2,3}=\pm 2i$ sunt poli dubli.

Aplicând teorema 1, avem :

$$\oint\limits_{\gamma}f(z)dz=I=2\pi i\left[\operatorname{Re}z(f,0)+\operatorname{Re}z(f,2i)+\operatorname{Re}z(f,-2i)\right].$$

Utilizând formulele (6) și (5) , urmează că:

a) $\operatorname{Re}z(f,0)=\lim\limits_{z\to 0}\left[\frac{z+2}{z\cdot\left(z^2+4\right)^2}\cdot z\right]=\lim\limits_{z\to 0}\frac{z+2}{\left(z^2+4\right)^2}=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$;

b) $\operatorname{Re}z(f,2i)=\lim\limits_{z\to 2i}\left[\frac{z+2}{z(z-2i)^2(z+2i)^2}\cdot(z-2i)^2\right]'=$

$$=\lim_{z\to 2i}\left[\frac{2+z}{z(z+2i)^2}\right]'=$$

$$= \lim_{z\to 2i} \frac{z(z+2i)^2-(z+2)\left[(z+2i)^2+2z(z+2i)\right]}{z^2(z+2i)^4} =$$

$$= \lim_{z\to 2i} \frac{z(z+2i)-(z+2)(3z+2i)}{z^2(z+2i)^3} =$$

$$= \frac{2i\cdot 4i-(2i+2)\cdot 8i}{(2i)^2\cdot(4i)^3} = -\frac{2+i}{32};$$

c) $\operatorname{Re} z(f,-2i) = \lim_{z\to -2i}\left[\frac{z+2}{z(z-2i)^2}\right]' = \frac{i-2}{32}.$

Deci $I = 2\pi i(\frac{1}{8}-\frac{2+i}{32}+\frac{i-2}{32}) = 0.$

Acest rezultat se obţine mai uşor, aplicând teorema 2. Într-adevăr, dezvoltând funcţia $f(z)$ în serie Laurent pe coroana $r<|z|<+\infty$, unde $r = \max(0,|2i|,|-2i|) = 2$, avem că

$$f(z) = \frac{z+2}{z}\cdot\frac{1}{(z^2+4)^2} = \frac{2+z}{z}\cdot\frac{1}{z^4\left(1+\frac{4}{z^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{z+2}{z^5}\cdot\left(1+\frac{4}{z^2}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{z^4}+\frac{2}{z^5}\right)\left(1+\frac{4}{z^2}\right)^{-2}.$$

Aplicând formula (14) din 9.6.4 la funcţia $\left(1+\frac{4}{z^2}\right)^{-2}$ înlocuind $m$ cu (–2) şi $z$ cu $\frac{4}{z^2}$, unde $\left|\frac{4}{z^2}\right|<1$, implică $z^2>4$, adică $|z|>2$, obţinem că



$$f(z) = \left(\frac{1}{z^4}+\frac{2}{z^5}\right)\left[1-2\cdot\frac{4}{z^2}+3\cdot\left(\frac{4}{z^2}\right)^2-4\cdot\left(\frac{4}{z^2}\right)^3+\ldots\right] =$$

$$= \frac{1}{z^4}+\frac{2}{z^5}-\frac{8}{z^6}-\frac{16}{z^7}+\ldots.$$

Deoarece partea principală lipseşte, urmează că $z_0=\infty$ este eliminabil pentru $f(z)$.

Prin urmare, utilizând formula (18), avem că $Rez(f,\infty)=0$. În baza formulei (14), rezultă că $I = -2\pi i\cdot \operatorname{Re} z(f,\infty) = 0$.

**Exemplul. 4.** Să se calculeze $\oint_\gamma z^3\cos\frac{1}{z}dz$, unde $\gamma$ este cercul $|z| = r$, $r>0$ parcurs în sens pozitiv.

**Rezolvare.** Funcţia $f(z) = z^3\cos\frac{1}{z}$ are un singur punct singular finit şi anume $z_0 = 0$. Dezvoltăm în serie Laurent funcţia $f(z)$ pe coroana $0<|z|<r$, unde $r>0$.

Avem:

$$\cos u = 1-\frac{u^2}{2!}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{u^{2n}}{(2n)!}+\ldots,$$

care este valabilă pentru orice $u\in C$.

Deci

$$f(z) = z^3\cos\frac{1}{z} = z^3(1-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^2}+\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{z^4}-\frac{1}{6!}\cdot\frac{1}{z^6}+\ldots) =$$

$$= z^3-\frac{1}{2!}\cdot z+\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{z}-\frac{1}{6!}\cdot\frac{1}{z^3}+\ldots,$$

care este valabilă pe coroana $0<|z|<r$, unde $r$ orice număr real pozitiv.

Prin urmare,

$$\operatorname{Re} z(f,0) = a_{-1} = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24} \text{ şi}$$

$$\oint_\gamma z^3 \cos\frac{1}{z} dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Re} z(f,0) = \frac{\pi}{12} i.$$

**Exemplul 5.** Să se calculeze integrala $\oint_\gamma \frac{dz}{(z^4-1)(z+2)}$, unde $\gamma$ este cercul $|z+1| = 1{,}5$ parcurs în sens pozitiv.

**Rezolvare.** Funcţia $f(z) = \frac{1}{(z^4-1)(z+2)}$ conţine în interiorul cercului $|z+1| = 1{,}5$ punctele singulare izolate finite $z_1 = -2, z_2 = -1, z_3 = i, z_4 = -i$, iar în exteriorul acestui cerc, adică pe coroana $1{,}5 < |z+1| < +\infty$ se conţin punctele singulare izolate $z_5 = 1, z_6 = \infty$. Alte puncte singulare funcţia *f(z)* nu are.

Aplicând formula (15) , avem:

$$\oint_\gamma \frac{dz}{(z^4-1)(z+2)} = -2\pi i[\operatorname{Re} z(f,\infty) + \operatorname{Re} z(f,1)].$$

Punctul singular $z_5 = 1$, este un pol simplu pentru *f(z)* , deoarece $z_5 = 1$, este un zerou simplu pentru polinomul $P_5(z) = (z^4-1)(z+2)$.

Deci

$$\operatorname{Re} z(f,1) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{(z^4-1)(z+2)} = \lim_{z\to 1} \frac{1}{(z+1)(z^2+1)(z+2)} =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 2\cdot 3} = \frac{1}{12}.$$



Punctul impropriu $z_0 = \infty$ este un punct eliminabil pentru *f(z)*, deoarece seria Laurent a funcţiei *f(z)*, de exemplu, pe coroana $2 < |z| < +\infty$ are forma :

$$f(z) = \frac{1}{(z^4-1)} \cdot \frac{1}{z+2} = \frac{1}{z^4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z^4}} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{z}} =$$

$$= \frac{1}{z^5} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z^4}} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \frac{1}{z^5}(1+\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^8}+\ldots)\times$$

$$\times(1-\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}-\frac{8}{z^3}+\ldots) = \frac{1}{z^5} - \frac{2}{z^6} + \frac{4}{z^7} + \ldots,$$

care este valabilă cu condiţiile $|q_1| = \frac{1}{|z|^4} < 1$ şi $|q_2| = \frac{2}{|z|} < 1$, adică pe coroana $2 < |z| < +\infty$. Prin urmare, aplicând formula (18), avem că *Rez(f,∞)=0* şi

$$\oint_\gamma \frac{dz}{(z^4-1)(z+2)} = -2\pi i \cdot (0 + \frac{1}{12}) = -\frac{\pi i}{6}.$$

**Exemplul 6.** Să se calculeze integrala

$$\oint_\gamma \frac{z^{21}}{(2z^2+1)^3(3z^4+1)^4} dz,$$

unde $\gamma$ este cercul $|z| = 1$ parcurs în sens pozitiv.

**Rezolvare.** Punctele singulare izolate finite ale funcţiei

$$f(z) = \frac{z^{21}}{(2z^2+1)^3(3z^4+1)^4}$$

sunt soluţiile ecuaţiei $(2z^2+1)^3(3z^4+1)^4 = 0$. Avem doi poli de ordinul 3 , care coicid cu zerourile triple ale polinomului

$P_6(z) = (2z^2+1)^3$ şi patru poli de ordinul 4 , care coincid cu zerourile de ordinul 4 ale polinomului $Q_{16}(z) = (3z^4+1)^4$. Toţi polii funcţiei aparţin cercului $|z|<1$. Punctul $z_0 = \infty$ este de asemenea un punct singular izolat pentru *f(z)*. Calculăm *Rez(f,∞)*, dezvoltând funcţia *f(z)* în serie Laurent pe coroana $1<|z|<+\infty$.

Avem:

$$f(z) = \frac{z^{21}}{(2z^2+1)^3(3z^4+1)^4} =$$

$$= \frac{z^{21}}{(2z^2)^3\left(1+\frac{1}{2z^2}\right)^3 \cdot (3z^4)^4\left(1+\frac{1}{3z^4}\right)^4} =$$

$$= \frac{1}{2^3\cdot 3^4}\cdot\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2z^2}\right)^3}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{3z^4}\right)^4} =$$

$$= \frac{1}{648}\cdot\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{2z^2}\right)^{-3}\cdot\left(1+\frac{1}{3z^4}\right)^{-4}$$

Aplicând formula (14) din 9.6.4. pentru funcţia $(1+\frac{1}{2z^2})^{-3}$, înlocuind $m$ cu (–3), iar $z$ cu $\frac{1}{2z^2}$ şi pentru funcţia $(1+\frac{1}{2z^2})^{-4}$, înlocuind $m$ cu (–4), iar $z$ cu $\frac{1}{3z^4}$, obţinem că



$$f(z) = \frac{1}{648}\cdot\frac{1}{z}\cdot\left(1-\frac{3}{2z^2}+\dots\right)\cdot\left(1-\frac{4}{3z^4}+\dots\right) =$$

$$= \frac{1}{648}\cdot\frac{1}{z}\left(1-\frac{3}{2z^2}+\dots\right) = \frac{1}{648}\cdot\frac{1}{z} - \frac{1}{432}\cdot\frac{1}{z^3}+\dots,$$

care este valabilă pe coroana $1<|z|<+\infty$, deoarece:

$$\begin{cases} |q_1| = \frac{1}{2z^2} < 1 \\ |q_2| = \frac{1}{3z^4} < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z| > \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{4}} \\ |z| > \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \end{cases} \Rightarrow |z| > \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U(0,\frac{1}{\sqrt[4]{3}},+\infty) \subset U(0,1,+\infty).$$

Deci $\operatorname{Re} z(f,\infty) = -a_{-1} = -\frac{1}{648}$. Utilizând formula (14), urmează că

$$\oint_\gamma \frac{z^{21}}{(2z^2+1)^3(3z^4+1)^4}dz = -2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{648}\right) = \frac{\pi i}{324}.$$

**Exemplul 7.** Să se calculeze $\oint_\gamma \frac{dz}{z^{15}+1}$, unde $\gamma$ este cercul $|z|=2$ parcurs în sens pozitiv .

**Rezolvare.** Punctele singulare izolate finite ale funcţiei $f(z) = \frac{1}{z^{15}+1}$ sunt zerourile polinomului $P_{15}(z) = z^{15}+1$. Acest polinom are 15 rădăcini simple. Deci funcţia *f(z)* are 15 poli simpli, care sunt situaţi pe cercul $|z|=1$. Pentru a calcula

$\oint\limits_{\gamma}\frac{dz}{z^{15}+1}$, în baza formulei (14), este suficient de calculat *Rez(f,∞)*.

Observăm că

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z^{15}+1}=0.$$

Deci punctul impropriu $z_0=\infty$ pentru funcţia *f(z)* este un punct singular izolat eliminabil.

Dezvoltăm funcţia $f(z)=\frac{1}{z^{15}+1}$ în serie Laurent pe coroana $r<|z|<+\infty$ cu $r>1$.

Avem:

$$\frac{1}{z^{15}+1}=\frac{1}{z^{15}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z^{15}}}=\frac{1}{z^{15}}\left(1-\frac{1}{z^{15}}+\frac{1}{z^{30}}-...\right)=$$

$$=\frac{1}{z^{15}}-\frac{1}{z^{30}}+\frac{1}{z^{45}}-...,$$

care este valabilă pe coroana $1<|z|<+\infty$, deoarece $\left|\frac{1}{z^{15}}\right|=\frac{1}{|z|^{15}}<1$, adică $|z|>1$.

Deci această dezvoltare este valabilă şi pe coroana $r<|z|<+\infty$ cu $r>1$.

Aplicând formula (18), rezultă că $\underset{z=\infty}{\operatorname{Re}z}\, f(z)=0$

Prin urmare,

$$\oint\limits_{\gamma}\frac{dz}{z^{15}+1}=-2\pi i\cdot\underset{z=\infty}{\operatorname{Re}z}\, f(z)=0.$$



### 9.7.2. Aplicaţii.

Teorema fundamentală a reziduurilor îşi găseşte o aplicaţie nu numai în calculul unor integrale de la funcţii complexe de o variabilă complexă (exemplele 3-7 din 9.7.1), dar şi o serie de integrale definite (proprii şi improprii) ale unor funcţii reale de o variabilă reală pot fi calculate aplicând aceeaşi teoremă unor funcţii analitice alese convenabil. Precizăm că nu există o metodă generală pentru calculul integralelor definite reale cu metoda reziduurilor. Vom considera câteva tipuri clasice şi vom indica pentru fiecare din ele procedeul practic de a reduce calculul integralelor definite (proprii şi improprii) reale la calculul unor reziduuri.

1. Integrale reale de forma $\int_0^{2\pi}R(\sin x,\cos x)dx$.

Fie integrala $I=\int_0^{2\pi}R(\sin x,\cos x)dx$, unde simbolul R înseamnă o funcţie raţională în raport cu sinx şi cosx . Această integrală cu ajutorul substituţiei $z=e^{ix}=\cos x+i\sin x$, $x\in[0,2\pi]$ se reduce la calcularea unei integrale de la o funcţie complexă de o variabilă complexă de-a lungul cercului $|z|=1$ :

$$\int_0^{2\pi}R(\sin x,\cos x)dx=\left|\begin{array}{l} z=e^{ix}, dz=i\cdot e^{ix}dx=i\cdot z dx \\ \sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\dfrac{z-\frac{1}{z}}{2i}=\dfrac{z^2-1}{2iz} \\ \cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\dfrac{z+\frac{1}{z}}{2}=\dfrac{z^2+1}{2z}\end{array}\right|=$$

$$= \oint_\gamma R\left(\frac{z^2-1}{2iz}, \frac{z^2+1}{2z}\right)\cdot\frac{dz}{iz} = \frac{1}{i}\cdot\oint_\gamma f(z)dz =$$

$$= \frac{1}{i}\cdot 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{s}\operatorname{Re} z(f, z_k) = 2\pi\cdot\sum_{k=1}^{s}\operatorname{Re} z(f, z_k),$$

unde $z_1, z_2, \ldots, z_s\,(s \le n)$ sunt punctele singulare izolate (polii) funcției raționale

$f(z) = \frac{1}{z}R\left(\frac{z^2-1}{2iz}, \frac{z^2+1}{2z}\right) = \frac{Q_m(z)}{P_n(z)}$, ce aparțin discului unitar $|z| < 1$, iar $\gamma$ este cercul unitar $|z| = 1$ parcurs în sens pozitiv. Se presupune că funcția $f(z)$ nu are puncte singulare, care aparțin acestui cerc.

**Exemplul 8.** Să se calculeze integralele

a) $I_1 = \int_0^{2\pi}\frac{dx}{1-2a\cos x + a^2}$, unde $0 < a < 1$;

b) $I_2 = \int_0^{2\pi}\frac{dx}{(a+b\cos x)^2}$, unde $a > b > 0$.

**Rezolvare.**

a) Fie $z = e^{ix}$, atunci $\cos x = \frac{z^2+1}{2z}$ și $dz = i\cdot z dx$. Dacă $x \in [0, 2\pi]$, punctul $z = e^{ix}$ aparține cercului $\gamma: |z| = 1$. Deci

$$I_1 = \oint_\gamma \frac{dz}{iz[1 - \frac{z^2+1}{z}\cdot a + a^2]} = \frac{1}{i}\cdot\oint_\gamma\frac{dz}{[-az^2 + z(1+a^2) - a]} =$$

$$= \frac{1}{i}\cdot\oint_\gamma\frac{dz}{(z-a)(1-az)}.$$



Funcția rațională $f(z) = \frac{dz}{(z-a)(1-az)}$ în interiorul cercului $|z| = 1$ are un singur pol simplu $z_1 = a$. Aplicând formula (6) din 9.7.1, avem că

$$\operatorname{Re} z(f, a) = \lim_{z\to a}\frac{1}{1-az} = \frac{1}{1-a^2}$$

și deci

$$I_1 = \frac{1}{i}\cdot 2\pi i\cdot\frac{1}{1-a^2} = \frac{2\pi}{1-a^2}.$$

b) Dacă $z = e^{ix}$, $x \in [0, 2\pi]$, atunci $dx = \frac{dz}{iz}$ și

$$I_2 = \oint_\gamma\frac{dz}{iz\left(a + b\cdot\frac{z^2+1}{2z}\right)^2} = \frac{1}{i}\cdot\oint_\gamma\frac{4z dz}{[2za + b(z^2+1)]^2}.$$

Punctele singulare ale funcției $f(z) = \frac{4z}{[2za + b(z^2+1)]^2}$ sunt polii de ordinul 2, care satisfac ecuația

$$2za + b(z^2+1) = 0 \quad \text{sau}$$

$$bz^2 + 2za + b = 0.$$

De unde $z_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2-b^2}}{b}$ și $z_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2-b^2}}{b}$.

Observăm că

$$|z_1| = \left|\frac{\sqrt{a^2-b^2} - a}{b}\right| = \left|\frac{a^2-b^2-a^2}{b\left(\sqrt{a^2-b^2}+a\right)}\right| = \frac{b}{a+\sqrt{a^2-b^2}} < 1,$$

adică $z_1$ aparține discului $|z| < 1$ și $|z_2| = \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b} > 1$, adică $z_2$ nu aparține discului $|z| < 1$.

Aplicând formula (5) din 9.7.1 , urmează că

$$\operatorname{Re} z(f,z_1)=\lim_{z\to z_1}\left(\frac{4z}{[b(z-z_1)(z-z_2)]^2}\cdot(z-z_1)^2\right)'=$$

$$=\lim_{z\to z_1}\left[\frac{4z}{b^2(z-z_2)^2}\right]'=\lim_{z\to z_1}\frac{4}{b^2}\cdot\frac{(z-z_2)^2-2z(z-z_2)}{(z-z_2)^4}=$$

$$=\frac{4}{b^2}\cdot\lim_{z\to z_1}\frac{-(z+z_2)}{(z-z_2)^3}=-\frac{4}{b^2}\cdot\frac{-\frac{2a}{b}}{\frac{8\sqrt{(a^2-b^2)^3}}{b^3}}=\frac{a}{\sqrt{(a^2-b^2)^3}}$$

Prin urmare, $I_2=\dfrac{1}{i}\cdot 2\pi i\cdot\dfrac{a}{\sqrt{(a^2-b^2)^3}}=\dfrac{2\pi a}{\sqrt{(a^2-b^2)^3}}$ .

2. Integrale reale de forma $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Calcularea acestor integrale se bazează pe următorul rezultat:

**Teorema 1.** Fie funcţia *f(x)* este definită pe axa reală, iar prelungirea ei analitică, adică funcţia *f(z)* este analitică pe semiplanul complex de sus $D_1=\{z|\ z\in C,\operatorname{Im}z\ge 0\}$ sau pe semiplanul complex de jos $D_2=\{z|\ z\in C,\operatorname{Im}z\le 0\}$, exceptând un număr finit de puncte singulare izolate $z_k$, pentru care $\operatorname{Im}z_k>0$ sau respectiv $\operatorname{Im}z_k<0$, k=1,2,...,n. Dacă există numerele reale pozitive M, $r_0$ şi δ astfel încât, pentru orice $z\in D_1$ sau $z\in D_2$ ce satisfac relaţia $|z|=r>r_0$, avem că

$$|f(z)|\le\frac{M}{r^{1+\delta}}, \tag{19}$$



atunci integrala improprie $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ există şi se calculează după formula

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re} z(f,z_k). \tag{20}$$

**Demonstraţie.** Fie *f(z)* satisface condiţiile teoremei, de exemplu, pe domeniul $D_1$ şi $z_1,z_2,...,z_n$ punctele ei singulare izolate ce aparţin lui $D_1$, dar nu aparţin axei reale. Deci există un disc $|z|<r_0$ de raza $r_0>\max(|z_1|,...,|z_n|)$ astfel încât $|z_k|<r_0$, *k=1,2,...,n.*

Considerăm conturul γ, format din segmentul de dreaptă *l=AB* cu $r>r_0$ şi semicercul $\gamma_1$: $|z|=r$ ce aparţine lui $D_1$, adică $\gamma=l\cup\gamma_1$ (fig. 3).

Aplicând teorema 1 din 9.7.1, obţinem că

$$\oint\limits_{\gamma=l\cup\gamma_1} f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re} z(f,z_k)\ \text{sau}$$

$$\int\limits_{-r}^{r} f(x)dx+\int\limits_{\gamma_1} f(z)dz=2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re} z(f,z_k). \tag{21}$$

În baza proprietăţii 5 din 9.5.1 şi a relaţiei (19), urmează că

$$\left|\int\limits_{\gamma_1} f(z)dz\right|\le\int\limits_{\gamma_1}\frac{M}{r^{1+\delta}}\cdot|dz|\le\frac{M}{r^{1+\delta}}\left(\frac{2\pi r}{2}\right)=\frac{\pi M}{r^{\delta}},\delta>0.$$

Deci $\lim\limits_{r\to+\infty}\int\limits_{\gamma_1} f(z)dz=0$ şi formula (21) se transformă în egalitatea

$$\lim_{r\to+\infty}\int\limits_{-r}^{+r} f(x)dx+0=\lim_{r\to+\infty}2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re} z(f,z_k)\ \text{sau}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} z(f, z_k),$$

deoarece funcţia $2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} z(f, z_k)$ nu depinde de $r$, dacă $r > r_0$.

Teorema este demonstrată.

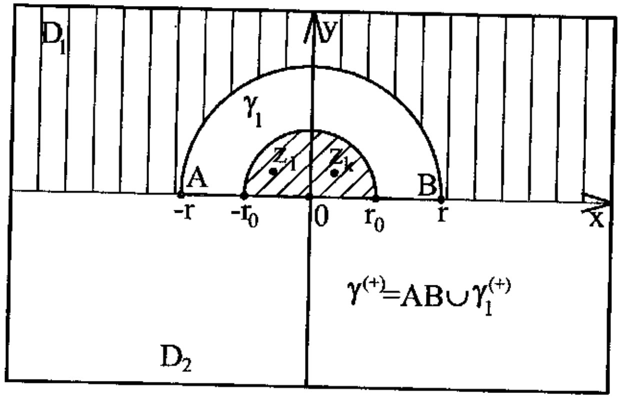



**Fig. 3.**

**Consecinţă.** Dacă $f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$, $m > n+1$ şi $Q_m(z)$ nu are rădăcini reale, atunci

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{s} \operatorname{Re} z(f, z_k), \tag{22}$$

unde $z_1, z_2, ..., z_s (s \le m)$ sunt polii funcţiei $f(z)$, care aparţin semiplanului $D_1$, adică $\operatorname{Im} z_k > 0, \quad k = 1,2,...,s$.

Într-adevăr, fie



$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + ... + b_m z^m} = \frac{z^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + ... + \frac{a_0}{z^n}\right)}{z^m\left(b_m + \frac{b_{m-1}}{z} + ... + \frac{b_0}{z^m}\right)} =$$

$$= \frac{1}{z^{m-n}} \cdot \varphi(z), m > n+1$$

şi fie $z_1, z_2, ..., z_s (s \le m)$ rădăcinile polinomului $Q_m(z)$, care aparţin semiplanului $D_1$, adică $\operatorname{Im} z_k > 0, \quad k = 1,2,...,s$.

Deci funcţia $f(z)$ este analitică pe coroana $\max(|z_1|,|z_2|,...,|z_s|) = r_0 < r \le |z| < +\infty$. Observăm că $\varphi(z)$ este analitică pe coroana închisă $r_1 \le |z| \le r_2$ *cu* $r_0 < r_1 < r_2 < +\infty$. Prin urmare, funcţia $\varphi(z)$ este mărginită pe semicercul $|z| = r_1$, $Im z > 0$ şi

$$|f(z)| = \left|\frac{\varphi(z)}{z^{m-n}}\right| \le \frac{M}{|z|^{m-n}} = \frac{M}{|z|^{1+\delta}} = \frac{M}{r_1^{1+\delta}}, \delta > 0,$$

deoarece $m > n+1 \Rightarrow m-n > 1 \Rightarrow 1+\delta > 1 \Rightarrow \delta > 0$. Aşadar am demonstrat că funcţia $f(z)$ satisface condiţiile teoremei, ceea ce şi confirmă valabilitatea formulei (22).

**Exemplul 9.** Să se calculeze $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

**Rezolvare.** Funcţia $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^3}$ este definită pe axa reală. Considerăm funcţia complexă $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$, care este analitică, de exemplu, pe semiplanul complex de sus $D_1$ ($Im z > 0$), exceptând punctul $z_1 = i$, care este un pol de ordinul trei pentru $f(z)$. Puncte singulare ce aparţin axei reale $OX$ funcţia $f(z)$ nu are. Pentru orice $z$ ce satisface relaţia $|z| = r > r_0 = 1$, avem că

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{(z^2+1)^3}\right| \le \frac{1}{|z|^6} = \frac{1}{|z|^{1+5}} = \frac{1}{r^{1+5}}.$$

Prin urmare, relaţia (19) este satisfăcută, considerând $M=1$, $r_0=1$ şi $\delta=5$. Deci formula (22) este aplicabilă.

Deoarece $z_1=i$ este un pol de ordinul 3, în baza formulei (5) din 9.7.1., rezultă că

$$\operatorname{Re} z(f,i) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\left[\frac{1}{(z-i)^3(z+i)^3}\cdot(z-i)^3\right]'' =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to i}\left[\frac{1}{(z+i)^3}\right]'' = \frac{1}{2}\left[-\frac{3}{(z+i)^4}\right]' =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to i}\frac{12}{(z+i)^5} = \frac{6}{32i} = -\frac{3i}{16}.$$

Prin urmare, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3} = 2\pi i\left(-\frac{3i}{16}\right) = \frac{3}{8}\pi.$

3. Integrale de forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot e^{i\beta x}dx, \beta>0, x\in R. \qquad (16)$$

Are loc următoarea teoremă:

**Teorema 2.** Fie funcţia $f(x)$ şi prelungirea ei analitică $f(z)$ satisfac condiţiile teoremei 1. Atunci pentru orice număr real pozitiv β avem:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot e^{i\beta x}dx = 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re}_{z=z_k} z(f(z)\cdot e^{i\beta z}), \qquad (23)$$

unde $z_k$, $k=1,2,\dots,n$ sunt punctele singulare izolate ale funcţiei f(z) ce aparţin semiplanului complex de sus $D_1$, adică $\operatorname{Im} z_k > 0$, $k=1,2,\dots,n$.



**Demonstraţie.** Considerăm acelaşi contur $\gamma = l\cup\gamma_1$ cu $\gamma_1 : |z| = r > r_0 > \max(|z_1|,\dots,|z_n|)$ din teorema 1 (vezi fig.3). Avem:

$$\oint_\gamma f(z)\cdot e^{i\beta z}dz = \int_{-r}^{+r} f(z)\cdot e^{i\beta z}dz + \int_{\gamma_1} f(z)\cdot e^{i\beta z}dz =$$

$$= 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re}_{z=z_k} z(f(z)\cdot e^{i\beta z}). \qquad (24)$$

Demonstrăm că $\displaystyle\lim_{r\to+\infty}\int_{\gamma_1} f(z)\cdot e^{i\beta z}dz = 0$. Într-adevăr, deoarece $|z| = r > r_0$, rezultă că

$z = |z|\cdot e^{it} = r(\cos t + i\sin t), dz = r\cdot i\cdot e^{it}dt, t\in[0,\pi]$ şi aplicând relaţia (19) din teorema1, obţinem:

$$\left|\int_{\gamma_1} f(z)\cdot e^{i\beta z}dz\right| = \left|\int_0^\pi f(re^{it})e^{\beta r(i\cos t - \sin t)}r\cdot i\cdot e^{it}dt\right| =$$

$$= \left|\int_0^\pi f(re^{it})e^{-\beta r\sin t}\cdot e^{i\beta r\cos t}r\cdot i\cdot e^{it}dt\right| \le$$

$$\le r\int_0^\pi e^{-\beta r\sin t}\cdot\left|f(r\cdot e^{it})\right|dt \le r\frac{M}{r^{1+\delta}}\int_0^\pi e^{-\beta r\sin t}dt =$$

$$= \frac{M}{r^\delta}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\beta r\sin t}dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-\beta r\sin t}dt\right) = \frac{2M}{r^\delta}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\beta r\sin t}dt,$$

deoarece am utilizat substituţia $t = \pi - u, u\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ în integrala a doua.

Din matematica elementară se ştie că: $\sin t \geq \frac{2t}{\pi}$ pentru orice $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Deci

$$\left|\int_{\gamma_1} f(z) \cdot e^{i\beta z} dz\right| \leq \frac{2M}{r^\delta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\beta r \sin t} dt < \frac{2M}{r^\delta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2\beta r t}{\pi}} \cdot dt =$$

$$= \frac{2M}{r^\delta} \cdot \frac{(-\pi)}{2\beta r}\left(e^{-\beta r} - 1\right) =$$

$$= \frac{M\pi}{\beta r^{1+\delta}}\left(1 - e^{-\beta r}\right) < \frac{M\pi}{\beta r^{1+\delta}} \to 0, \qquad (25)$$

când $r \to +\infty$ şi $\beta > 0$.

Prin urmare, $\lim\limits_{r \to +\infty} \int_{\gamma_1} f(z) \cdot e^{-\beta z} dz = 0$. Trecând la limită în relaţia (24), când $r \to +\infty$ şi având în vedere că partea dreaptă a relaţiei (24) nu depinde de r, $r > r_0$ obţinem formula (23). Teorema este demonstrată.

**Consecinţă.** Dacă $f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$, $m > n+1$ şi $Q_m(x)$ nu are rădăcini reale, atunci pentru orice număr real pozitiv β avem:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{i\beta x} dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{s} \operatorname*{Re}_{z=z_k} z(f(z) \cdot e^{i\beta z}),$$

unde $z_k$ sunt rădăcinile polinomului $Q_m(z)$ cu $Im z_k > 0$ şi $k = 1,2,...s \leq m$.



Într-adevăr, conform consecinţei din teorema 1 funcţia $f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ cu condiţiile indicate mai sus satisface teorema 1. Prin urmare, formula (23) este valabilă.

**Nota 1**. Întrucât

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{i\beta x} dx = \int_{-\infty}^{0} f(x) \cdot e^{i\beta x} dx + \int_{0}^{+\infty} f(x) \cdot e^{i\beta x} dx =$$

$$= \int_{0}^{+\infty} f(-x) \cdot e^{-i\beta x} dx + \int_{0}^{+\infty} f(x) \cdot e^{i\beta x} dx =$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \left[f(x) \cdot e^{i\beta x} + f(-x) \cdot e^{-i\beta x}\right] dx \text{ şi}$$

$$\cos \beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}, \sin \beta x = \frac{1}{2i}\left(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}\right),$$

obţinem următoarele formule din relaţia (23):

a) Dacă $f(x)$ este pară şi funcţiile $f(x)$, $f(z)$ satisfac condiţiile teoremei 2, atunci

$$\int_{0}^{+\infty} f(x) \cdot \cos \beta x dx = \pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Re}_{z=z_k} z\left(f(z) \cdot e^{i\beta z}\right), \qquad (26)$$

b) Dacă $f(x)$ este impară şi funcţiile $f(x)$, $f(z)$ satisfac condiţiile teoremei 2, atunci

$$\int_{0}^{+\infty} f(x) \cdot \sin \beta x dx = \pi \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Re}_{z=z_k} z(f(z) \cdot e^{i\beta z}). \qquad (27)$$

**Nota 2.** Formula (23) poate fi scrisă şi sub forma:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{i\beta x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot (\cos \beta x + i \sin \beta x) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \cos \beta x dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \sin \beta x dx =$$

$$= 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}_{z=z_k} z(f(z) \cdot e^{i\beta z}).$$

Prin urmare,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \cos \beta x dx = \operatorname{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{i\beta x} dx\right] =$$

$$= \operatorname{Re}\left[2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}_{z=z_k} z\left(f(z) \cdot e^{i\beta z}\right)\right], \qquad (28)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \sin \beta x dx = \operatorname{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{i\beta x} dx\right] =$$

$$= \operatorname{Im}\left[2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}_{z=z_k} z\left(f(z) \cdot e^{i\beta z}\right)\right]. \qquad (29)$$

**Exemplul 10.** Să se calculeze integralele:

a) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{a^2 + x^2} dx, \beta > 0, a \neq 0$ ; b) $\int_0^{+\infty} x \cdot \frac{\sin \beta x}{a^2 + x^2} dx, \beta > 0, a \neq 0$.

**Rezolvare.** Avem că funcţia $f(z) = \frac{1}{a^2 + z^2}$ este pară şi $z_1 = ai$, $z_2 = -ai$ sunt punctele singulare finite (poli simpli) ale funcţiei *f(z)*). Presupunem că $\operatorname{Im} z_1 = a > 0$ atunci evident că $z_2 = -ai$ nu aparţine semiplanului complex de sus, deci pentru *a≠0*, există un singur punct singular izolat al funcţiei *f(z)*, care aparţine semiplanului complex de sus.

Utilizând formulele (7) din 9.7.1 şi (26) urmează că

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{a^2 + x^2} dx = \pi i \operatorname{Re}_{z=ai} z\left(f(z) \cdot e^{i\beta z}\right) = \pi i \cdot \left[\frac{e^{i\beta z}}{\left(a^2 + z^2\right)'}\right]_{z=ai} =$$

$$= \pi i \cdot \frac{e^{-\beta a}}{2ai} = \frac{\pi}{2a} \cdot e^{-\beta a}.$$



b) Similar cazului precedent se constată că pentru orice *a≠0* funcţia $f(z) = \frac{z}{a^2 + z^2}$ este impară şi are un singur punct singular izolat, care aparţine semiplanului complex de sus: fie de exemplu, $z_1 = ai, a > 0$.

Deoarece $f(z) = \frac{z}{a^2 + z^2}$ este impară, utilizând formula (27) de mai sus şi formula (7) din 9.7.1) rezultă că:

$$\int_0^{+\infty} x \cdot \frac{\sin \beta x}{a^2 + x^2} dx = \pi \cdot \operatorname{Re}_{z=ai} z\left(f(z) \cdot e^{i\beta z}\right) = \pi \cdot \left[\frac{z \cdot e^{i\beta z}}{\left(a^2 + z^2\right)'}\right]_{z=ai} =$$

$$= \pi \cdot \frac{ai \cdot e^{-\beta a}}{2 \cdot ai} = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-\beta a}.$$

### 9.7.3 Exerciţii şi răspunsuri la paragraful 9.7

1. Să se calculeze:

a) $\operatorname{Re}_{z=0} z\left[\frac{1}{z(z+3)}\right]$; b) $\operatorname{Re}_{z=0} z\left[\frac{1}{z^2(z-1)}\right]$;

c) $\operatorname{Re}_{z=0} z\left(\frac{1}{\sin z}\right)$; d) $\operatorname{Re}_{z=0} z\left(\frac{1-z}{1-\cos z}\right)$;

e) $\operatorname{Re}_{z=0} z\left(\frac{\sin z}{z^2}\right)$; f) $\operatorname{Re}_{z=0} z\left(z^2 \sin \frac{\pi}{2}\right)$;

g) $\operatorname{Re}_{z=0} z\left(\frac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{4} z^2}\right)$; h) $\operatorname{Re}_{z=0} z\left(z^3 \cdot \sin^2 \frac{1}{z}\right)$.

2. Să se calculeze reziduurile în toate punctele singulare finite ale funcţiilor:

a) $f(z)=\dfrac{1}{z+z^3}$; b) $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z^2)}$; c) $f(z)=\dfrac{z^2}{(1+z)^3}$;

d) $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)^3}$; e) $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$; f) $f(z)=thz$;

g) $f(z)=\dfrac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$; h) $f(z)=z^3+\cos\dfrac{1}{z}$.

3. Să se calculeze $\operatorname{Re} z(f,\infty)$, dacă:

a) $f(z)=\dfrac{z^4+1}{z^6-1}$; b) $f(z)=\cos\dfrac{(z+2)\pi}{2z}$; c) $f(z)=\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{z-1}$;

d) $f(z)=z\cdot\cos^2\dfrac{\pi}{z}$; e) $f(z)=z^2\cdot\sin\dfrac{\pi}{z}$; f) $f(z)=\dfrac{z^5}{z^2-1}$;

g) $f(z)=\dfrac{z^6}{(z-1)^4}$; h) $f(z)=\dfrac{1}{(z^4-1)(z+2)}$;

i) $f(z)=\dfrac{z^{20}}{(2z^3-1)^2(z^4-1)^3}$; j) $f(z)=\dfrac{4z^5-3z^4+2z-1}{z^3+4}$.

4.Să se calculeze următoarele integrale (cercurile respective se consideră parcurse în sens pozitiv):

a) $\oint\limits_{|z-1|=2}\dfrac{\cos z}{z^3}dz$; b) $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{\sin z}{z^2}dz$; c) $\oint\limits_{|z+1|=2}z^3e^{\frac{1}{z}}dz$;

d) $\oint\limits_{|z|=3}\left(\dfrac{2}{z-1}+\dfrac{3}{z-2}-7e^z\right)dz$; e) $\oint\limits_{|z+2|=1}z^2\sin\dfrac{1}{z}dz$;

f) $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{e^z}{z^2-1}dz$; g) $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{ctgz}{4z-\pi}dz$; h) $\oint\limits_{|z-1-i|=1}\dfrac{dz}{z^3+1}$;



i) $\oint\limits_{|z+i|=1}\dfrac{zdz}{(z-1)(z^2+1)}dz$; j) $\oint\limits_{|z|=1}z^2\sin^2\dfrac{1}{z}dz$;

k) $\oint\limits_{|z|=3}\dfrac{1}{z(z^2+1)}dz$; l) $\oint\limits_{|z|=1}z\cos\dfrac{1}{z}dz$; m) $\oint\limits_{|z|=3}\dfrac{1}{z(z^2+4)}dz$;

n) $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{1}{(z-1)(z^2+1)}dz$; o) $\oint\limits_{|z+i|=1}\dfrac{1}{(z+1)(z^2+1)}dz$;

p) $\oint\limits_{|z|=1}e^{\frac{3}{z}}dz$; r) $\oint\limits_{|z-i|=2}\dfrac{(2z-1)dz}{(z-1)^2(z^2+3z+2)}$.

5. Utilizând reziduul în $\infty$, să se calculeze integralele:

a) $\oint\limits_{|z|=3}\dfrac{z^{20}dz}{(2z^3+1)(z^4-1)^3}$; b) $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{z^3-z}{z^4+1}dz$;

c) $\oint\limits_{|z|=3}\dfrac{\sin\frac{1}{z}\cdot dz}{z(z+1)^2(z+2)(z+4)}$; d) $\oint\limits_{|z|=3}\dfrac{z^3e^{\frac{1}{z}}}{(z^2+4)^2}dz$;

e) $\oint\limits_{|z|=9}\dfrac{dz}{z^4(z^2+9)^2(z^2-4)^2}$; f) $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{dz}{z^{10}+1}$.

Cercurile de mai sus sunt parcurse în sens pozitiv.

6. Să se calculeze integralele definite:

a) $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{dx}{\cos x-2}$; b) $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{dx}{\sin x+2}$; c) $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{dx}{(2+\cos x)^2}$;

d) $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{dx}{(a+b\cos^2 x)}, a>0, b>0$; e) $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{\sin 3x}{5-3\cos x}dx$;

f) $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{\cos^2 2x}{5-4\cos 2x}$; g) $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{\sin^2 xdx}{a+b\cos x}, a>b>0$.

7. Să se calculeze integralele improprii:

a) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2}$; b) $\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}$, $a>0$;

c) $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n}$, $n\in N$; d) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-1)dx}{(x^2+1)^2}$;

e) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+25)(9x^2+1)}$; f) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)(x^2+9)}$;

g) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+x^2+1}$; h) $\int_{0}^{+\infty}\frac{(x^2+1)dx}{x^4+1}$; i) $\int_{0}^{+\infty}\frac{x^4dx}{(4+9x^2)^4}$;

j) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$; k) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+6x+13)^3}$;

8. Să se calculeze integralele improprii:

a) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin xdx}{x^2-x+2}$; b) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos xdx}{x^2-2x+10}$; c) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin xdx}{x^2+4x+20}$;

d) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin xdx}{x^2-2x+2}$; e) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 3xdx}{(x^2-2x+10)^2}$; f) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x+1)\sin 2xdx}{x^2+2x+2}$;

g) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin \pi xdx}{x^2+2x+5}$; h) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos \pi xdx}{x^2+2x+5}$;

i) $\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos mx}{(x^2+1)^2}dx$, $m>0$; j) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2+1}dx$;

k) $\int_{0}^{+\infty}\frac{(x^3+5x)\sin x}{x^4+10x^2+9}dx$.



**Răspunsuri.**

1. a) $\frac{1}{3}$; b) -1; c) 1; d) -2; e) 1; f) $-\frac{\pi^3}{6}$; g) 0; h) $-\frac{1}{3}$.

2. a) $\operatorname{Re}_{z=0} z\, f(z)=1$; $\operatorname{Re} z(f,\pm i)=-\frac{1}{2}$;

b) $\operatorname{Re} z(f,0)=1$; $\operatorname{Re} z(f,\pm 1)=-\frac{1}{2}$;

c) $\operatorname{Re} z(f,-1)=-1$; d) $\operatorname{Re} z(f,\pm i)=-\frac{3}{32}$;

e) $\operatorname{Re} z(f,\pi k)=(-1)^k, k\in Z$;

f) $\operatorname{Re} z\left(f,\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i\right)=1, k\in Z$;

g) $\operatorname{Re} z(f(z),-1)=-\frac{17}{54e}$;

h) $\operatorname{Re} z(f(z),-1)=0$.

3. a) 0; b) π; c) 0; d) $\pi^2$; e) $\frac{\pi^3}{6}$; f) -1; g) -20; h) 0; i) $\frac{1}{4}$;

j) 16 (Laurent în $\sqrt[3]{4}<|z|<+\infty$).

4. a) -πi; b) 2πi; c) $\frac{\pi i}{3}$; d) 10πi; e) $-\frac{\pi i}{3}$; f) 2πish1;

g) $2\pi i\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\pi}\right)$; h) $\frac{\pi}{3}(\sqrt{3}-i)$; i) $-\frac{\pi}{2}(1+i)$; j) 2πi; k)0;

l) -2πi; m) 0; n) 0; o) $\frac{\pi i}{2}(1+i)$; p) 6πi; r) $-\frac{10}{9}\pi i$.

5. a) $-\frac{\pi i}{2}$; b)-1; c) $\frac{\pi i}{36}\sin\frac{1}{4}$; d) -2πi; e) 0;

f) $0\left(f(z)=\frac{1}{z^{10}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z^{10}}}=\frac{1}{z^{10}}-\frac{1}{z^{20}}+\frac{1}{z^{30}}-\ldots\right)$.

6. a) $-\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$; b) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$; c) $\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$;

d) $\pi(2a+b)[a(a+b)]^{-\frac{3}{2}}$;

e) 0 ( $z=e^{ix},\sin 3x=\frac{z^3-z^{-3}}{2i}$);

f) $\frac{3\pi}{8}\left(z=e^{ix},\cos 2x=\frac{z^2-z^{-2}}{2};\cos 3x=\frac{z^3-z^{-3}}{2}\right)$;



g) $\frac{2\pi}{b^2}\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)\left(z=e^{ix},\cos x=\frac{z+z^{-1}}{2};\ \sin x=\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)$.

7. a) $-\frac{\pi}{27}$; b) $\frac{\pi}{4a}$; c) $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n-2)}$;

d) $-\frac{\pi}{2}$; e) $\frac{37}{8960}$; f) $\frac{\pi}{60}$; g) 0; h) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$; i) $\frac{\pi}{2^7\cdot3^5}$; j) $\frac{\pi}{2}$;

k) $\frac{3\pi}{256}$;

8. a) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}\cdot e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\sin\frac{1}{2}$; b) $\frac{\pi}{3e^3}(\cos 1-3\sin 1)$;

c) $\frac{\pi}{2e^4}(2\cos 2+\sin 2)$; d) $\frac{\pi}{e}\sin 1$; e) $\frac{5}{27}\pi\cdot e^{-9}\cdot\cos 3$;

f) $\pi e^{-2}\cos 2\left(z=e^{ix},\sin x=\frac{z^2-1}{2iz},\sin 2x=\frac{z^4-1}{2iz^2}\right)$;

g) $-\pi e^{-2\pi}$; h) $\frac{\pi}{2}e^{-2\pi}$; i) $\frac{\pi e^{-m}(1+m)}{4}$ *(f(z) este pară)*; j) 0;

k) $\frac{\pi}{4}\cdot\frac{e^2+1}{e^3}$ *(f(z) este pară).*

## *Capitolul 10*

### Elemente de calcul operațional.

Încă pe la sfârşitul secolului XIX mulți matematicieni se ocupau cu aşa numitul *calcul simbolic*, la bazal căruia era simbolul $p = \frac{d}{dt}$. De exemplu, exponentul natural $n$ al simbolului $p$ înseamnă derivata de ordinul $n$ de la funcția $x(t)$, adică $p^n \cdot x(t) = \frac{d^n x(t)}{(dt)^n}$, iar exponentul negativ $m = -1$ a lui $p$ este considerat ca o integrală:

$$\frac{1}{p} \cdot x(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau.$$

Aplicarea acestui simbol la funcția $x(t)\equiv 1$ se reduce la următoarele egalități:

$$\frac{1}{p} \cdot 1 = \int_0^t 1 \cdot d\tau = t,$$

$$\frac{1}{p^2} \cdot 1 = \frac{1}{p} \cdot \left(\frac{1}{p} \cdot 1\right) = \int_0^t \tau \cdot d\tau = \frac{t^2}{2}, \ \cdots, \frac{1}{p^n} \cdot 1 = \frac{t^n}{n!}$$

A se compara această formulă cu formula din ex.2c) a punctului 10.1.2. în transformata Heaviside.

Cu popularizarea calculului simbolic s-a ocupat fizicianul englez Heaviside (1850-1925), aplicând acest calcul la rezolvarea unor probleme din electrotehnică, care fiind modelate matematic, se reduceau la integrarea unor ecuații diferențiale. De exemplu, ecuația diferențială $x'(t) - x(t) = 1$ cu condiția inițială $x(0)=0$, este înlocuită cu ecuația simbolică

$$p \cdot x(t) - x(t) = 1.$$



De unde în mod formal obținem că

$$x(t) = \frac{1}{p-1} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^n} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{p} \cdot 1 + \frac{1}{p^2} \cdot 1 + \cdots + \frac{1}{p^n} \cdot 1 + \ldots =$$

$$= \int_0^t \left(1 + \tau + \frac{\tau^2}{2!} + \cdots + \frac{\tau^n}{n!} + \cdots\right) d\tau = \int_0^t e^\tau d\tau = e^t - 1, |p| > 1.$$

Argumentarea acestui calcul se datorează lucrărilor matematicienilor Bromwich T.J. şi Carson J.R. din anii 20 ai secolului XX. Din perioada aceasta calculul simbolic poartă denumirea de *calcul operațional*. În prezent calculul operațional este unul din compartimentele de bază ale analizei matematice. În fizică, mecanică, electrotehnică şi în alte ştiințe se utilizează metodele calculului operațional pentru rezolvarea diversilor probleme. O aplicație deosebit de largă găseşte calculul operațional în automatica şi telemecanica modernă, în teoria informației, în teoria semnalelor şi a circuitelor electrice etc.

În acest capitol vor fi expuse noțiunile fundamentale şi proprietățile de bază ale calculului operațional. De asemenea ne vom opri asupra metodelor operaționale de rezolvarea ecuațiilor diferențiale ordinare liniare, a sistemelor de astfel de ecuații diferențiale, la rezolvarea ecuațiilor integrale Volterra şi la calcularea unor integrale reale improprii.

## 10.1. Transformata Laplace.

### 10.1.1. Funcţia original şi proprietăţile ei.

Fie funcţia $f : R \to C$.

**Definiţia 1.** Funcţia complexă $f(t)$ de o variabilă reală $t$ se numeşte *funcţie original* sau simplu *original*, dacă:

a) $f(t)=0$ pentru orice număr real $t<0$;

b) $f(t)$ este continuă pe porţiuni pe intervalul $R^* = [0,+\infty[$, adică pe orice interval finit din $R^*$ funcţia $f(t)$ este continuă, exceptând nu număr finit de puncte, în care $f(t)$ posedă discontinuităţi de speţa 1 ;

c) funcţia $f(t)$ are creştere exponenţială când $t \to +\infty$, adică există numărul real pozitiv $M$ şi numărul real nenegativ $s$ astfel încât

$$|f(t)| \le M \cdot e^{st}, t \ge 0. \qquad \textbf{(1)}$$

Se verifică uşor că dacă inegalitatea **(1)** este valabilă pentru perechea de numere $(M,s)$ cu $M>0$, $s \ge 0$, ea va fi valabilă şi pentru perechea $(M,a)$ cu $a > s \ge 0$, deoarece $e^{st} < e^{at}$, pentru orice $t \ge 0$. De aceea vom întroduce noţiunea de indice de creştere a funcţiei $f(t)$ : numărul $s_0$ se numeşte *indice de creştere* a funcţiei $f(t)$ dacă inegalitatea **(1)** se verifică pentru orice $s>s_0$ şi nu se verifică pentru orice $s<s_0$. Cu alte cuvinte $s_0$ coincide cu valoarea cea mai mică dintre toate valorile reale $s \ge 0$, , care satisfac relaţia **(1)**, adică

$$s_0 = Inf\{s\}, s \in R^*.$$

**Definiţia 2.** Funcţia $\sigma_0(t) = \begin{cases} 1, \; dac\breve{a} \; t \ge 0, \\ 0, \; dac\breve{a} \; t < 0 \end{cases}$

se numeşte f u n c ţ i e u n i t a t e a lui Heaviside.



Evident că funcţia $\sigma_0(t)$ este original cu indicele de creştere $s_0=0$, deoarece $\sigma_0(t)$este continuă pe $[0,+\infty[$ şi relaţia (1) se satisface considerând $M=1$ şi $s_0=0$.

Fie $f(t)$ definită pe intervalul $]-\infty,+\infty[$ şi $f(t) \ne 0$ pentru $t<0$. Obesrvăm că funcţia $\sigma_0(t) \cdot f(t)$ deja satisface condiţia a) din definiţia originalului, deoarece

$$\sigma_0(t) \cdot f(t) = \begin{cases} f(t), \; dac\breve{a} \; t \ge 0, \\ 0, \; dac\breve{a} \; t < 0. \end{cases}$$

Pe parcursul acestui capitol în calitate de funcţia $f(t)$, $t \in R$ vom considera funcţia $\sigma_0(t) \cdot f(t)$ şi vom scrie simplu $f(t), t \ge 0$.

*Reeşind din acestă convenţie constatăm că relaţia (1) este satisfăcută de*

a) toate funcţiile $f(t)$ mărginite după modul; pentru ele se consideră $s_0=0$, deoarece $|f(t)| \le M$. Ca exemplu servesc funcţiile: $\sin t, \cos t$, sh$t$, ch$t$ cu $t \ge 0$;

b) toate funcţiile exponenţiale $f(t)=t^z$, $Rez=\alpha \ge 0$. Pentru ele $s_0=0$, iar $\frac{|t^z|}{e^{st}} \to 0$, când $t \to +\infty$ (a se consulta ex.1 e) de mai jos).

Remarcăm că majoritatea funcţiilor care descriu procesele fizice satisfac condiţiile a), b), c) din definiţia originalului. Condiţia a) se explică prin faptul că în calculul operaţional se întâlnesc frecvent probleme, rezolvarea cărora se reduce la integrarea ecuaţiilor diferenţiale cu condiţii iniţiale (problema Cauchy). De aceea la rezolvarea unor astfel de probleme este indiferent cum se comporta funcţia dată până la momentul iniţial, care, evident, se consideră momentul când $t=0$. Vom demonstra următoarele proprietăţi importante ale originalului.

**Proprietatea 1.** Dacă funcţia $f\ (t)$ este original, atunci funcţia $|\ f\ (t)\ |$ este de asemenea original cu acelaşi indice de creştere.

**Proprietatea 2.** Dacă $f_1(t)$, $f_2(t)$, ... , $f_n(t)$ sunt funcţii original cu indicele de creştere respectiv $s_0^{(1)}$, $s_0^{(2)}$, ... , $s_0^{(n)}$, atunci funcţia $f(t)=\sum_{j=1}^{n} a_j f_j(t)$, unde $a_1, a_2, \cdots a_n$ sunt constante (reale sau complexe) este de asemenea original şi indicele de creştere

$$s_0=max\{s_0^{(1)}, s_0^{(2)}, \ldots , s_0^{(n)}\}.$$

Demonstraţiile sunt evidente şi le propunem cititorului.

**Proprietatea 3.** Dacă funcţia $f\,(t)$ este original cu indicele de creştere $s_0$, atunci şi funcţiile următoare sunt funcţii original:

a) $f_1(t)=f\,(at)$, $(a>0)$ cu indicele de creştere $(as_0)$;

b) $f_2(t)=e^{\lambda t}\cdot f\ (t)$, ($\lambda$ este real sau complex) cu indicele de creştere egal cu $(s_0+\mathrm{Re}\ \lambda)$, dacă $s_0+\mathrm{Re}\ \lambda>0$ şi cu 0, dacă $s_0+\mathrm{Re}\ \lambda<0$;

c)

$$f_3(t)=\begin{cases} 0,\ dac\breve{a}\ \ t<\delta,\ \delta>0, \\ f\,(t-\delta),\ dac\breve{a}\ \ t\geq\ \delta, \end{cases}$$

cu indicele de creştere $s_0$;

d) $f_4(t)=t^z\cdot f\ (t)$, ($z$ este un număr real sau complex) cu indicele de creştere $s_0$:

e) $f_5(t)=\varphi_1(t)\cdot\varphi_2(t)$ este original cu indicele de creştere $s_0=s_1+s_2$ cu condiţia că $\varphi_1(t)$ şi $\varphi_2(t)$ sunt funcţii original cu indicele de creştere $s_1$ şi respectiv $s_2$.

Vom demonstra, de exemplu, cazul d). Demonstraţia celorlalte cazuri le propunem cititorului.

Observăm, că pentru orice număr real $s_1>s_0\geq 0$ este valabilă relaţia



$$\left|\frac{f_4(t)}{e^{s_1 t}}\right|=\left|\frac{t^z\cdot f(t)}{e^{s_1 t}}\right|\leq\left|\frac{t^z\cdot M\cdot e^{s_0 t}}{e^{s_1 t}}\right|=\left|\frac{t^{\mathrm{Re}\,z}\cdot t^{i\,\mathrm{Im}\,z}\cdot M}{e^{(s_1-s_0)t}}\right|=$$

$$=M\cdot\frac{t^{\mathrm{Re}\,z}}{e^{(s_1-s_0)t}}\ .$$

Întrucât pentru orice $s_1>s_0\geq 0$ avem că $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^{\mathrm{Re}\,z}}{e^{(s_1-s_0)t}}=0$ (a se consulta [17], exemplu 2 din 2.5.2), rezultă :

$$\lim_{t\to+\infty}\left|\frac{f_4(t)}{e^{s_1 t}}\right|=0.$$

Aceasta înseamnă că funcţia $\left|\frac{f_4(t)}{e^{s_1 t}}\right|$ este mărginită pe intervalul $[0,+\infty[$ pentru orice $s_1>s_0\geq 0$. Deci există un număr real pozitiv $M_1$ astfel încât $\left|\frac{f_4(t)}{e^{s_1 t}}\right|\leq M_1$ pentru orice $t\geq\ 0$. De unde $|f_4(t)|\leq M_1\cdot e^{s_1 t}, t\geq\ 0$ .

Prin urmare, inegalitatea (1) este valabilă pentru funcţia $f_4(t)$ pentru orice $s_1>s_0$. Condiţiile a) şi b) din definiţia originalului pentru $f_4(t)$ sunt evidente.

Aşadar funcţia $f_4(t)$ este original cu indicele de creştere $s_0$.

**Proprietatea 4.** Dacă funcţia $f\,(t)$ este original cu indicele de creştere $s_0$, atunci funcţia

$$\varphi(t)=\int_0^t f(u)du,\ t\geq\ 0$$

este continuă pe intervalul $[0,+\infty[$ şi este original cu indicele de creştere $s_0$.

**Demonstraţie.** Condiţia a) din definiţia originalului este evidentă pentru funcţia $\varphi(t)=\varphi(t)\cdot\sigma_0(t)$. Demonstrăm condiţia b). Deoarece $f(t)$ este original, urmează că $f$ este continuă pe porţiuni pe intervalul $R^*=[0,+\infty[$. Aceasta înseamnă că pe orice interval finit din $R^*$ funcţia $f(t)$ are un număr finit de puncte de discontinuitate de speţa 1. Deci $\varphi(t)=\int_0^t f(u)du$ există pentru $t \geq 0$. Aplicând proprietatea 1 de mai sus, conchidem că $|f(t)|$ este de asemenea original. Deci $\int_0^t |f(t)|dt$ există pentru orice $t \geq 0$. Aceasta înseamnă că funcţia $f(t)$ este absolut integrabilă pe orice segment $[0,T]$, cu $T>0$. Prin urmare, funcţia $\int_0^t |f(u)|du$ este continuă pe $[0,+\infty[$ (a se consulta [17], teorema 1 din 4.2.4), adică pentru orice $\varepsilon>0$, există $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ astfel încât inegalitatea $|\Delta t|<\delta$ implică inegalitatea (a se consulta şi proprietatea 3 din 4.2.3 [17])

$$\left|\int_0^{t+\Delta t}|f(u)|du-\int_0^t|f(u)|du\right|=\left|\int_t^{t+\Delta t}|f(u)|du\right|<\varepsilon .$$

Aşadar, dacă $|\Delta t|<\delta$, avem că

$$\left|\int_0^{t+\Delta t}f(u)du-\int_0^t f(u)du\right|=\left|\int_t^{t+\Delta t}f(u)du\right|\leq\left|\int_t^{t+\Delta t}|f(u)|du\right|<\varepsilon.$$

Deci funcţia $\varphi(t)=\int_0^t f(u)du$ este continuă pentru orice $t \geq 0$ şi condiţia b) din definiţia originalului este demonstrată.

Trecem acum la demonstraţia condiţiei c) din definiţia 1 pentru funcţia $\varphi(t)$. Presupunem, mai întâi, că originalul $f(t)$ este o funcţie reală şi $f(t)\geq 0$ pentru orice $t \geq 0$. Observăm că în acest caz funcţia $\varphi(t)\geq 0$ pentru orice $t\geq 0$.



Funcţia $f(t)$, fiind original cu indicele de creştere $s_0$, inegalitatea (1) este satisfăcută, adică există un număr real pozitiv $M$ astfel încât

$$f(t)\leq M\cdot e^{s_1 t}$$

pentru orice $s_1>s_0\geq 0$.

Prin urmare

$$\varphi(t)=\int_0^t f(u)du\leq\int_0^t M\cdot e^{s_1 u}\cdot du=\frac{M}{s_1}(e^{s_1 t}-1)<$$

$$<\frac{M}{s_1}\cdot e^{s_1 t}=M_1\cdot e^{s_1 t},$$

Aşadar

$$\varphi(t)<M_1\cdot e^{s_1 t}, M_1>0 \qquad (2)$$

pentru orice $t\geq 0$ şi orice $s_1>s_0\geq 0$. Deci $\varphi(t)$ este original cu indicele de creştere $s_0$ în cazul când funcţia $f(t)$ este reală şi $f(t)\geq 0$ pentru orice $t\geq 0$.

Fie acum originalul $f(t)$ este o funcţie complexă. Atunci

$$|\varphi(t)|=\left|\int_0^t f(u)du\right|\leq\int_0^t|f(u)|du.$$

Deoarece $|f(t)|$ este de asemenea funcţie original (în baza proprităţii 1 de mai sus) şi $|f(t)|\geq 0$, rezultă că relaţia (3) are loc pentru funcţia $|\varphi(t)|$. Deci pentru orice $t\geq 0$ şi orice $s_1>s_0\geq 0$ avem:

$$|\varphi(t)|\leq M_1\cdot e^{s_1 t}, M_1>0,$$

şi condiţia c) din definiţia originalului este satisfăcută. Prin urmare, funcţia $\varphi(t)=\int_0^t f(t)dt$ este continuă pe $[0,+\infty[$ şi este original cu indicele de creştere $s_0$. Proprietatea 4 este complet demonstrată.

**Exemplul 1.** Să se stabilească dacă următoarele funcţii sunt funcţii original sau nu:

a) $e^{at}$, $a \in R$ sau $a \in C$ şi $t \geq 0$;

b) $\sin at$, $a \in R$ sau $a \in C$ şi $t \geq 0$;

c) $\cos at$, $a \in R$ sau $a \in C$ şi $t \geq 0$;

d) $f_1(t) = e^{t^2}$ şi $f_2(t) = \mathrm{ctg}\, t$, $t \geq 0$;

e) $f(t) = t^z, z \in C$, $\mathrm{Re}\, z \geq 0$ şi $t \geq 0$;

f) $f(t) = P_n(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$,

unde $a_0, a_1, \ldots, a_n \neq 0$ sunt numere reale sau complexe, $n \in N$ şi $t \geq 0$.

**Rezolvare.**

a) Funcţia $e^{at} = \sigma_0(t) \cdot e^{at}$, $a \in R$ sau $a \in C$ cu $t \geq 0$ este original, în virtutea proprietăţii 3b) cu $\lambda = a$, deoarece funcţia Heavside $\sigma_0(t)$ este original cu indicele de creştere $s_0=0$. Indicele de creştere este egal cu Re $a$, dacă Re $a > 0$ şi cu 0 dacă $\mathrm{Re}\, a \leq 0$.

b) Avem:

$$\sigma_0(t) \cdot \sin at = \sigma_0(t) \cdot \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i} =$$

$$= \frac{1}{2i}\left[e^{iat} \cdot \sigma_0(t)\right] + \frac{(-1)}{2i}\left[e^{-iat} \cdot \sigma_0(t)\right]$$

şi utilizând proprietăţile 2 şi 3b) cu $a_1 = \frac{1}{2i}$, $a_2 = -\frac{1}{2i}$ şi $\lambda_1 = ia$, $\lambda_2 = -ia$, obţinem că funcţia $\sin at, t \geq 0$, este original cu indicele de creştere

$$s_0 = \max\{\mathrm{Re}(ai), \mathrm{Re}(-ai)\} = |\mathrm{Re}(ai)|. = |\mathrm{Im}\, a|.$$

c) Similar punctului precedent avem că



$$\sigma_0(t) \cdot \cos at = \frac{1}{2}\left[e^{iat} \cdot \sigma_0(t)\right] + \frac{1}{2}\left[e^{-iat} \cdot \sigma_0(t)\right],\ t \geq 0$$

şi utilizând proprietăţile 2 şi 3b) cu $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ şi $\lambda_1 = ia$, $\lambda_2 = -ia$, urmează că funcţia $\cos at, t \geq 0$ este original cu indicele de creştere $s_0 = |\mathrm{Re}(ai)| = |\mathrm{Im}\, a|$.

d) Fie $f_1(t) = e^{t^2}$, $t \geq 0$. Condiţiile a) şi b) pentru funcţia $f(t) = e^{t^2} \cdot \sigma_0(t)$ sunt satisfăcute, deoarece astfel de funcţie este continuă pe $[0,+\infty[$ şi $f(t)=0$ pentru $t<0$. Din relaţia (1) obţinem că $\left|\frac{f(t)}{e^{st}}\right| \leq M$, pentru orice $t \geq 0$ şi orice $s > s_0 \geq 0$. Deci dacă $f_1(t)$ ar satisface condiţia c) din definiţia originalului, atunci funcţia reală $\left|\frac{f_1(t)}{e^{st}}\right|$ ar fi mărginită pe $[0,+\infty[$ pentru orice $s > s_0 \geq 0$. Observăm că funcţia $\left|\frac{e^{t^2}}{e^{st}}\right| = e^{t(t-s)} \to +\infty$ pentru orice $s > s_0 \geq 0$., când $t \to +\infty$. Prin urmare, funcţia $f_1(t)$ nu este mărginită şi deci nu este original.

În ceea ce priveşte a doua funcţie $f_2(t) = ctg\ t$, $t \geq 0$ observăm că punctele ei de descontinuitate sunt $t_k = \pi k, k \in Z$ şi aceste puncte sunt puncte de descontinuitate de speţa 2. Deci funcţia $f_2(t)$ nu satisface condiţia b) din difiniţia 1. Prin urmare, funcţia $ctgt$, $t \geq 0$ nu este original.

e) Fie $f(z) = t^z$, $z \in C, \mathrm{Re}\, z \geq 0$ şi $t \geq 0$. Evident că condiţiile a) şi b) din definiţia originalului pentru $f(z)$ sunt satisfăcute, deoarece $f(z)$ este continuă pe $[0,+\infty[$ şi $f(z)=0$ pentru $t<0$, adică $f(z) = t^z \cdot \sigma_0(t)$. Aplicând proprietatea 3d) la funcția $f(z)=t^z\cdot\sigma_0(t)$, conchidem că funcția $t^z$, Re $z\geq 0$, $t\geq 0$ este original cu indicele de creștere $s_0=0$.

f) Fie $f(t)=P_n(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+...+a_nt^n$, unde $t\geq 0$, $n\in N$ și $a_0,a_1,\dots,a_n\neq 0$, sunt numere reale sau complexe. Aplicând cazul precedent obținem că funcțiile reale $t$, $t^2$, … , $t^n$ sunt funcții original cu același indice de creștere $s_0$=0. Prin urmare, utilizând proprietaea 2 cu

$$c_1=a_0,\ c_2=a_1,\dots,\ c_{n+1}=a_n \text{ și}$$

$$f_1(t)=\sigma_0(t),\ f_2(t)=t,\ f_3(t)=t^2,\dots,\ f_{n+1}(t)=t^n,$$

conchidem că funcția $f(t)=P_n(t)$ este original cu indicele de creștere $s_0$=0.

### 10.1.2. Funcția imagine și proprietățile ei.

Fie $f(t)$ o funcție complexă de o variabilă reală $t$ definită pe intervalul $[0,+\infty[$ și p = s + $\sigma$i o variabilă complexă ce aparține mulțimii $D\subseteq C$.

**Definiție.** Aplicația :

$$f(t)\to F(p)=\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-pt}dt$$

se numește *transformata Laplace* a funcției $f(t)$.

Se notează astfel :

$$f(t)\div F(p) \text{ sau } L(f(t))=F(p).$$

Funcția complexă

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt, \qquad (1)$$



care depinde de variabila complexă $p\in D\subseteq C$ se numește *integrala Laplace* pentru funcția $f(t)$ sau *funcție imagine* (ori simplu *imagine*) a funcției inițiale $f(t)$ (numită *original*).

În aplicațiile practice frecvent se utilizează și aplicația :

$$f(t)\to F_h(p)=p\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-pt}dt, \qquad (2)$$

care se numește *transformata Heaviside* sau *transformata Carson.*

Remarcăm că transformata Heaviside se deosebește de transformata Laplace prin factorul p, adică

$$F_h(p)=pF(p).$$

Pe parcurs vom utiliza numai transformata Laplace.

Observăm că integrala Laplace (1), ca integrală improprie nu pentru orice funcție $f(t)$ este convergentă. De exemplu, dacă $f(t)$ = const = $a_1\neq 0$ și Rep = s < 0, atunci integrala (1) este divergentă. De aceea firește apar următoarele întrebări :

a) care sunt restricțiile asupra funcției $f(t)$ ca imaginea ei F(p) să existe, adică integrala (1) să fie convergentă ;

b) în cazul când imaginea F(p) există, este ea oare unică pentru funcția $f(t)$.

Răspunsurile la aceste întrebări le vom găsi în următoarele teoreme.

**Teorema 1** (despre existența imaginii). Dacă funcția $f(t)$ este original cu indicele de creștere $s_0$ (în sensul definiției 1 din 10.1.1.), atunci integrala Laplace (1) de la funcția $f(t)$ este absolut convergentă pe semiplanul complex Rep = $s > s_0$, iar în semiplanul complex Rep = $s\geq s_1>s_0$ integrala (1) este absolut și uniform convergentă.

**Demonstrație.** Fie $p = s + i\sigma$, Rep = s > $s_0$ şi funcţia $f(t)$ satisface condiţiile definiţiei 1 din 10.1.1. Atunci, reieşind din relaţia (1) de mai sus şi inegalitatea (1) din 10.1.1, avem :

$$\left|\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt\right| \le \int_0^\infty |f(t)|\,\left|e^{-(s+i\sigma)t}\right|dt \le$$

$$\le M\int_0^\infty e^{-(s-s_0)t}dt = \frac{M}{s-s_0}, \qquad (3)$$

adică funcţia $|F(p)|$ este majorată de numărul $\dfrac{M}{s-s_0}$.

Aceasta înseamnă că integrala Laplace (1) este absolut convergentă pe semiplanul Re $p = s > s_0$.

Dacă Re $p = s \ge s_1 > s_0$, atunci pentru orice t $\ge$ 0 avem că

$$|F(p)| \le \mathrm{M}\int_0^\infty e^{-(s_1-s_0)t}dt = \frac{M}{s_1-s_0}.$$

Aceasta înseamnă, în virtutea criteriului Weierstrass pentru cazul real, că F(p) este uniform convergentă pe semiplanul complex Rep = s $\ge$ $s_1$ > $s_0$ (mai detaliat a se consulta [7], teorema 8.1 din cap.8 sau [6], teorema 9.1 din cap.9).

Teorema este demonstrată.

**Consecință.** Dacă Re $p = s \to +\infty$, atunci

$$\lim_{\mathrm{Re}\,p\to+\infty} F(p) = 0. \qquad (4)$$

Demonstraţia reiese imediat din relaţia (3) de mai sus.

**Teorema 2.** Dacă f(t) este original cu indicele de creştere $s_0$, atunci funcţia F(p) este analitică pe semiplanul complex Rep = s > $s_0$.

**Demonstrație.** Observăm că funcţia $F(p)$ există şi este univocă pe semiplanul complex Re $p = s > s_0$. Vom demonstra că funcţia $F(p)$ este derivabilă în orice punct din semiplanul



complex Rep = s > $s_0$. Fie p = s + i$\sigma$ un punct arbitrar din acest semiplan. Atunci

$$\frac{\Delta F(p)}{\Delta p} = \frac{1}{\Delta p}[F(p+\Delta p) - F(p)] =$$

$$= \int_0^\infty f(t)\cdot\frac{1}{\Delta p}[e^{-(p+\Delta p)t} - e^{-pt}]dt =$$

$$= \int_0^\infty f(t)\cdot\frac{e^{-pt}}{\Delta p}[e^{-t\Delta p} - 1]dt = \int_0^\infty f(t)\cdot\frac{e^{-pt}}{\Delta p}[1 - (t\Delta p) +$$

$$+\frac{(t\Delta p)^2}{2!} - \frac{(t\Delta p)^3}{3!} + \ldots - 1]dt =$$

$$= \int_0^\infty f(t)\cdot t\cdot e^{-pt}[-1 + \frac{t\Delta p}{2!} - \frac{(t\Delta p)^2}{3!} + \ldots]dt =$$

$$= -\int_0^\infty t\cdot f(t)\cdot e^{-pt}dt + \eta(\Delta p), \qquad (5)$$

unde

$$\eta(\Delta p) = \Delta p\cdot\int_0^\infty t^2\cdot f(t)\cdot e^{-pt}\cdot\left(\frac{1}{2!} - \frac{t\Delta p}{3!} + \ldots\right)dt.$$

Întrucât primul termen din relaţia (5) nu depinde de $(\Delta p)$, rezultă că pentru a demonstra existenţa derivatei

$$F'(p) = \lim_{\Delta p\to 0}\frac{\Delta F(p)}{\Delta p}$$

este suficient de arătat că $\lim_{\Delta p\to 0}\eta(\Delta p) = 0$.

Avem:

$$|\eta(\Delta p)| = |\Delta p| \cdot \left| \int_0^\infty t^2 \cdot f(t) \cdot e^{-pt} \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{t\Delta p}{3!} + \ldots \right) dt \right| \leq$$

$$\leq |\Delta p| \cdot \int_0^\infty t^2 \cdot |f(t)| \cdot \left| e^{-pt} \right| \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{t|\Delta p|}{3!} + \ldots \right) dt \leq$$

$$\leq |\Delta p| \cdot \int_0^\infty t^2 \cdot M \cdot e^{-(s-s_0)t} \left( \frac{1}{2} + \frac{t|\Delta p|}{3!} + \ldots \right) dt <$$

$$< |\Delta p| \cdot \int_0^\infty t^2 \cdot M \cdot e^{-(s-s_0)t} \left( 1 + \frac{t|\Delta p|}{1!} + \frac{t^2|\Delta p|^2}{2!} + \frac{t^3|\Delta p|^3}{3!} + \ldots \right) dt =$$

$$= M \cdot |\Delta p| \cdot \int_0^\infty t^2 e^{-(s-s_0)t} \cdot e^{t|\Delta p|} \cdot dt = M \cdot |\Delta p| \cdot \int_0^\infty t^2 e^{-(s-s_0-|\Delta p|)t} dt .$$

Dacă considerăm integrala improprie reală $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-at} dt, a > 0$, atunci integrând-o prin părți de două ori obținem formula $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-at} dt = \frac{2}{a^3}$, $a > 0$. În particular, avem că

$$\int_0^\infty t^2 e^{-(s-s_0-|\Delta p|)t} dt = \frac{2}{(s - s_0 - |\Delta p|)^3},$$

unde $s - s_0 - |\Delta p| > 0$, adică $Rep = s > s_0 + |\Delta p|$.

Prin urmare,

$$|\eta(\Delta p)| < \frac{2M \cdot |\Delta p|}{(s - s_0 - |\Delta p|)^3}.$$

Așadar $\lim_{\Delta p \to 0} |\eta(\Delta p)| = 0$, adică $\lim_{\Delta p \to 0} \eta(\Delta p) = 0$.



Din relația (5) rezultă că

$$F'(p) = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta F(p)}{\Delta p} = -\int_0^\infty t \cdot f(t) \cdot e^{-pt} dt . \qquad (6)$$

Funcția $F'(p)$ există deoarece, utilizând proprietatea 3d) din 10.1.1, urmează că funcția $[t \cdot f(t)]$ este original cu indicele de creștere $s_0$ și deci, în virtutea teoremei 1, integrala

$$\int_0^\infty t \cdot f(t) \cdot e^{-pt} dt$$

există și este absolut convergentă pe semiplanul complex $Rep = s > s_0$.

Așadar teorema 2 este demonstrată.

**Nota 1**. Dacă funcția $f(t)$ este original cu indicele de creștere $s_0$ și funcția ei imagine F(p) este analitică în punctul $p_0 = \infty$, atunci

$$\lim_{p \to \infty} F(p) = 0. \qquad (7)$$

Într-adevăr, dacă F(p) este analitică în punctul impropriu $p_0 = \infty$, atunci dezvoltarea ei în serie Laurent într-o vecinătate a lui $p_0 = \infty$ are forma

$$F(p) = a_0 + \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \ldots + \frac{a_n}{p^n} + \ldots .$$

Deci $\lim_{p \to \infty} F(p) = a_0$, unde $p \to \infty$ pe orice direcție. În particular și în cazul, când $Rep = s \to +\infty$.

Așadar, utilizând formula (4), avem că

$$\lim_{Re\, p \to +\infty} F(p) = 0 \text{ și deci } a_0 = 0 .$$

Astfel formula (7) este demonstrată și obținem următorul rezultat important: dacă F(p) este *analitică în punctul* $p_0 = \infty$, *atunci* $p_0 = \infty$ *este un zerou pentru această funcție*.

Din teoremele 1 şi 2 rezultă că nu orice funcţie complexă $F(p)$ de o variabiă complexă $p$ poate fi considerată imaginea unui original $f(t)$. Din analiticitatea funcţiei $F(p)$ pe semiplanul complex $\mathrm{Re}p = s > s_0$ rezultă că toate punctele singulare ale funcţiei $F(p)$ sunt situate la stânga în raport cu dreapta $s = s_0$ sau pe această dreaptă, adică punctele singulare ale funcţiei $F(p)$ aparţin semiplanului complex $Rep \le s_0$. Astfel funcţia $F_1(p) = tgp$ nu poate fi considerată ca o funcţie imagine, deoarece punctele ei singulare care sunt poli simpli au forma $p_k = \frac{2k-1}{2}\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ şi sunt repartizaţi pe toată axa reală.

De asemenea şi funcţia $F_2(p) = p^2$ nu poate fi considerată ca imagine, deoarece în acest caz relaţia (4) nu este verificată.

Pe de altă parte constatăm şi următorul rezultat : *funcţia $F(p)$ poate să existe nu numai în cazul când funcţia $f(t)$ este original.* De exemplu, se poate de arătat că pentru funcţia $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ (şi, în general, pentru $f(t) = t^a$, unde, $-1 < a < 0$), integrala Laplace (1) este convergentă şi deci F(p) există, însă funcţia $f(t)$ $= \frac{1}{\sqrt{t}}$ nu este original (punctul $t = 0$ este un punct de discontinuitate de speţa 2, adică condiţia b) din definiţia originalului nu este satisfăcută).

Aşadar *condiţiile a), b), c) din definiţia originalului sunt suficiente însă nu sunt şi condiţii necesare de existenţa imaginii $F(p)$ pentru funcţia $f(t)$.*

**Nota 2.** Teorema 1 garantează existenţa imaginii F(p) pentru originalul $f(t)$ cu indicele de creştere $s_0$ în semiplanul complex $\mathrm{Re}p = s > s_0$. După cum vom vedea din exemplul 2 de mai departe, pentru unele funcţii original domeniul de existenţă a imaginii respective va fi cu mult mai larg decât semiplanul



complex $\mathrm{Re}p = s > s_0$. De aceea vom considera că F(p) este imaginea originalului $f(t)$ în orice punct în care F(p) este analitică.

**Teorema 3** (condiţii necesare pentru existenţa imaginii).

Fie funcţia complexă F(p) de variabila complexă $p = s + i\sigma$ satisface condiţiile :

a) F(p) este analitică pe semiplanul complex $\mathrm{Re}p = s > s_0$ ;

b) În domeniul $\mathrm{Re}\, p = s > s_0$ funcţia $F(p)$ tinde către $0$ când $|p| \to +\infty$ în mod uniform în raport cu $\arg(p - s_0)$;

c) F(p) este absolut integrabilă de-a lungul dreptei $\mathrm{Re}p = s_1$ adică $s = s_1$, pentru orice $s_1 > s_0$. Aceasta înseamnă că integrala improprie

$$\int_{s-i(\infty)}^{s+i(\infty)} |F(p)|\cdot|dp| = \lim_{b\to\infty} \int_{s-ib}^{s+ib} |F(p)|\cdot|dp| < M$$

este convergentă, unde M este un număr real pozitiv.

Atunci funcţia $F(p)$, $Rep > s_0$ este imagine pentru funcţia $f(t)$ care este original şi se calculează după formula :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\cdot \lim_{b\to\infty} \int_{s-ib}^{s+ib} F(p)\cdot e^{pt}\cdot dp. \tag{8}$$

Demonstraţia acestei teoreme este complicată şi o puteţi găsi, de exemplu, în [6], teorema 9.5., pag. 357-363.

În practică formula (8) se utilizează sub forma :

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \underset{p=p_k}{\mathrm{Rez}}[F(p)\cdot e^{pt}], \tag{9}$$

unde $t \ge 0$, $p = p_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) sunt punctele singulare izolate (poli şi puncte esenţiale) ale funcţiei F(p), considerată ca o prelungire analitică a funcţiei $F(p)$ pe tot planul complex $(p)$ (a se consulta teorema 9.6 din [6]).

**Teorema 4.** (unicitatea originalului). Dacă două funcţii original $f_1(t)$ şi $f_2(t)$ posedă una şi aceeaşi $L$ – imagine $F(p)$, atunci aceste funcţii coincid în punctele lor de continuitate.

Demonstrația reiese din formula (8) (mai detaliat a se consulta teorema 9.7 din [6]).

**Consecință.** Orice imagine F(p) care este o funcție neidentic nulă, nu poate fi funcție periodică.

Într-adevăr, fie $f(t) \div F(p)$. Presupunem contrariul: fie *F(p)* neidentic nulă și este periodică cu perioada $p_0 \neq 0$, adică $F(p + p_0) = F(p)$. Deci $F(p) - F(p + p_0) = 0$, adică

$$\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-pt}dt - \int_0^\infty f(t)\cdot e^{-(p+p_0)t}dt = 0.$$

Prin urmare, pentru orice $p$ avem că:

$$\int_0^\infty f(t)(1-e^{-p_0 t})\cdot e^{-pt}dt = 0.$$

Aceasta înseamnă că funcția $f(t)\left(1-e^{-p_0 t}\right)$ care, în virtutea proprietăților 2 și 3b) din 10.1.1., este original, are imaginea sa identic nulă. O altă funcție, care are imaginea identic nulă, este funcția $f_2(t) \equiv 0$ pentru $t \geq 0$.

Aplicând teorema 4, obținem că $f(t)\left(1-e^{-p_0 t}\right) = 0$ pentru orice $t \geq 0$

Egalitatea $e^{-p_0 t} = 1$ este valabilă pentru punctele $p_0 = \dfrac{2\pi k i}{t}$, unde k = 0, 1, 2, ... . Am primit o contradicție cu faptul că $p_0$, fiind perioada funcției F(p), este un număr constant și $p_0 \neq 0$.

Deci identitatea $f(t)\left(1-e^{-p_0 t}\right) = 0, t \geq 0$, implică identitatea $f(t) \equiv 0,\ t \geq 0$. Însă, dacă $f(t) \equiv 0$, avem că $F(p) \equiv 0$ pentru orice p, ceea ce contrazice condiția din consecință. Prin urmare, funcția $F(p) \neq 0,\ t \geq 0$ nu este periodică, ceea ce trebuiea de demonstrat.



Din această consecință reiese, de exemplu, că funcțiile periodice: $a_0,\ a_0 \in C\setminus\{0\}$; $e^{\lambda p}$, $\lambda \in C$; *sin p; cos p; sh p; ch p; tg p; th p; ctg p* și *cthp* nu pot fi considerate ca imagini în transformata Laplace.

În încheiere constatăm că din formula (1) reiese următoarele :

a) dacă $a \in C$ și $f(t) \div F(p)$, atunci $a\cdot f(t) \div a\cdot F(p)$;

b) dacă $f_1(t) \div F_1(p)$ și $f_2(t) \div F_2(p)$, atunci
$$f_1(t) \pm f_2(t) \div F_1(p) \pm F_2(p).$$

Aceste proprietăți ale transformatei Laplace constituie așa numita *proprietatea de linearitate.*

În caz general avem :

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \cdots + a_n f_n(t) \div a_1 F_1(p) + \\ + a_2 F_2(p) + \cdots + a_n F_n(p), \qquad (10)$$

unde $a_1$, $a_2$, ... , $a_n$ sunt constante arbitrare complexe, iar $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ – funcții original.

**Exemplul 2.** *Să se calculeze imaginea F(p) a originalului f(t),* dacă

a) $f(t) = \sigma_0(t)$ - funcția unitate a lui Heaviside ;

b) $f(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda \in C$, $t \geq 0$;

c) $f_1(t) = t^n$, $n \in N$ și $f_2(t) = t^\alpha$, $\alpha \in R$, $\alpha > -1$, $t \geq 0$.

**Rezolvare.**

a) Avem că funcția

$$\sigma_0(t) = \begin{cases} 1, dacă\ t \geq 0, \\ 0, dacă\ t < 0 \end{cases}$$

este original cu indicele de creștere $s_0 = 0$ (vezi 10.1.1.).

Deci

$$F(p) = \int_0^\infty \sigma_0(t)e^{-pt}dt = \int_0^\infty 1\cdot e^{-pt}dt = -\frac{1}{p\cdot e^{pt}}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{p},\ \mathrm{Re}p > 0.$$

Așadar am demonstrat formula

$$\sigma_0(t) \div \frac{1}{p}, \text{ Rep} > 0.$$

În virtutea proprietății de linearitate, urmează că

$$a_0 \cdot \sigma_0(t) \div \frac{a_0}{p}, \text{ Rep} > 0$$

pentru orice $a_0 \in C$.

Dacă calculăm imaginea acestei funcții după formula (2) obținem formula $\sigma_0(t) \div 1$, valabilă în transformata Heaviside.

b) Avem $f(t) = e^{\lambda t}$ cu indicele de creștere $s_0 = \text{Re}\,\lambda$, dacă $\text{Re}\,\lambda > 0$ și $s_0 = 0$, dacă $\text{Re}\,\lambda < 0$ ( vezi proprietatea 3b) cu $f_2(t) = e^{\lambda t} \cdot \sigma_0(t)$ ). Deci

$$F(p) = \int_0^\infty e^{\lambda t} \cdot e^{-pt} dt = \int_0^\infty e^{-(p-\lambda)t} dt = \frac{1}{\lambda - p} \cdot \frac{1}{e^{(p-\lambda)t}} \Bigg|_0^\infty = \frac{1}{p - \lambda},$$

dacă $\text{Re}(p - \lambda) > 0$, adică $\text{Rep} > \text{Re}\,\lambda$.

Observăm că dacă $\text{Re}\,\lambda < 0$, atunci domeniul de existență al funcției F(p) este mai larg decât semiplanul Rep > 0, deoarece în acest caz indicele de creștere al originalului $e^{\lambda t}$, conform teoremei 1, este egal cu $s_0 = 0$ (a se vedea nota 2 de mai sus).

Prin urmare, avem formula

$$e^{\lambda t} \div \frac{1}{p - \lambda}, \text{ Rep} > \text{Re}\,\lambda.$$

În particular obținem formulele

$$e^{iwt} \div \frac{1}{p - iw}, \; Rep > Re(iw) = -Imw$$

și

$$e^{-iwt} \div \frac{1}{p + iw}, \; Rep > Re(-iw) = Imw$$

pentru orice număr $w \in C$.



Se știe că

$$\sin wt = \frac{1}{2i} \cdot e^{iwt} - \frac{1}{2i} e^{-iwt}$$

și

$$\cos wt = \frac{1}{2} \cdot e^{iwt} + \frac{1}{2} e^{-iwt}.$$

Aplicând proprietatea 2 din 10.1.1. și proprietatea de linearitate a transformatei Laplace, obținem formulele :

$$\sin wt \div \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{p - iw} - \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{p + iw} = \frac{w}{p^2 + w^2},$$

$$\cos wt \div \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p - iw} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p + iw} = \frac{p}{p^2 + w^2},$$

valabile pentru Rep > $|\text{Im}\,w|$.

Dacă $w = a \in R$, avem

$$\sin at \div \frac{a}{p^2 + a^2}, \text{ Re}\,p > 0.$$

Similar cazului precedent obținem următoarele formule :

$$shwt = \frac{1}{2} e^{wt} - \frac{1}{2} e^{-wt} \div \frac{1}{2} \frac{1}{p - w} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p + w} =$$

$$= \frac{w}{p^2 - w^2},$$

$$chwt = \frac{1}{2} e^{wt} + \frac{1}{2} e^{-wt} \div \frac{p}{p^2 - w^2},$$

valabile pentru Rep > $|\text{Re}\,w|$ și orice $w \in C$.

Dacă $w = a \in R$, avem

$$shat \div \frac{a}{p^2 - a^2}, \qquad chat \div \frac{p}{p^2 - a^2},$$

valabile pentru Rep > 0.

c) Funcţia $f_1(t)=t^n$, $n\in N$ este original cu indicele de creştere $s_0 = 0$ (a se consulta proprietatea 3d) cu $f_4(t)=t^n\cdot\sigma_0(t)$).

Imaginea F(p) = $\int_0^{\infty} t^n\cdot e^{-pt}dt$ a funcţiei $f_1(t)$ se calculează integrând de n ori prin părţi:

$$t^n \div \int_0^{\infty} t^n\cdot e^{-pt}dt = \left| \begin{array}{l} t^n = u, du = nt^{n-1}dt \\ e^{-pt}dt = dv \\ v = -\dfrac{1}{p}e^{-pt} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{t^n\cdot e^{-pt}}{p}\Bigg|_0^{\infty} + \frac{n}{p}\int_0^{\infty} t^{n-1}\cdot e^{-pt}dt = \ldots = \frac{n!}{p^{n+1}},$$

dacă $\mathrm{Re}\,p > 0$. Prin urmare, am obţinut formula:

$$t^n \div \frac{n!}{p^{n+1}},\ \mathrm{Re}\,p>0.$$

În transformata Haviside avem:

$$F_h(p) = p\cdot F(p) = p\cdot\frac{n!}{p^{n+1}} = \frac{n!}{p^n},$$

adică am obţinut formula

$$\frac{t^n}{n!} \div \frac{1}{p^n}.$$

Funcţia $f_2(t)=t^{\alpha}$, $t\geq 0$ $\alpha>-1$ este original cu indicele de creştere $s_0 = 0$ (aplicăm proprietatea 3d) cu $f_4(t)=t^{\alpha}\cdot\sigma_0(t)$).



Avem formula :

$$t^{\alpha} \div \int_0^{\infty} t^{\alpha}\cdot e^{-pt}dt = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}\mathrm{Re}\,p>0, \qquad (10)$$

unde funcţia

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} u^{\alpha-1}\cdot e^{-u}du$$

se numeşte *funcţia „gama”*, care este convergentă dacă $\alpha>0$ ([18], 6.1.3.).

Într-adevăr :

$$t^{\alpha} \div \int_0^{\infty} t^{\alpha}\cdot e^{-pt}dt = \left| \begin{array}{l} pt = u \\ du = pdt \\ t = \dfrac{u}{p} \end{array} \right| = \int_0^{\infty} \frac{u^{\alpha}}{p^{\alpha}}\cdot e^{-u}\cdot\frac{du}{p} =$$

$$= \frac{1}{p^{\alpha+1}}\int_0^{\infty} u^{\alpha}\cdot e^{-u}du = \frac{1}{p^{\alpha+1}}\cdot\Gamma(\alpha+1),$$

dacă $\alpha+1>0$, adică $\alpha>-1$ şi $\mathrm{Re}\,p>0$.

Constatăm că în integrala $\int_0^{\infty} u^{\alpha}\cdot e^{-u}du$ variabila u = pt este o variabilă complexă însă, deoarece funcţia $e^{-u}\cdot u^{\alpha}$ este analitică în planul complex (u) cu tăietura pe semiaxa reală negativă, integrala aceasta nu depinde de drumul de integrare şi de aceea (vezi 9.5.3) metoda substituţiei, utilizată aici, este justificată. Deci formula (10) este demonstrată.

Din exemplele de mai sus remarcăm următoarele formule :

$$\sigma_0(t) \div \frac{1}{p}; \qquad a \div \frac{a}{p}, a\in C;$$

$$\sin at \div \frac{a}{p^2+a^2}, \quad a\in R;$$

$$\cos at \div \frac{p}{p^2+a^2}, \quad a \in R;$$

$$t^n \div \frac{n!}{p^{n+1}},$$

care sunt valabile pentru Rep > 0 şi formulele :

$$e^{\lambda t} \div \frac{1}{p-\lambda},$$

valabilă pentru $Rep > Re\lambda$, $\lambda \in C$;

$$shwt \div \frac{w}{p^2-w^2}, \quad shwt \div \frac{p}{p^2-w^2},$$

valabile pentru Rep > $|\mathrm{Re}\, w|$ şi $w \in C$.

Observăm însă că părţile drepte ale acestor formule sunt funcţii analitice pe planul complex (p), exceptând următoarele puncte care sunt poli: pentru funcţiile $\frac{1}{p}$ şi $\frac{a}{p}$ punctul $p_1 = 0$ este un pol simplu (de ordinul întâi) ; pentru funcţiile $\frac{a}{p^2+a^2}$ şi $\frac{p}{p^2+a^2}$ punctele $p_{1,2} = \pm ai$ sunt poli simpli ; pentru funcţia $\frac{n!}{p^{n+1}}$ punctul $p_1 = 0$ este pol de ordinul (n + 1); pentru funcţia $\frac{1}{p-\lambda}$, punctul $p_1 = \lambda$ este pol simplu, iar pentru funcţiile $\frac{w}{p^2-w^2}$ şi $\frac{p}{p^2-w^2}$, punctele $p_{1,2} = \pm w$ sunt poli simpli. Toate imaginile acestea au punctul $p_0 = \infty$ un punct singular eliminabil şi serveşte ca zerou pentru ele.



### 10.1.3. Exerciţii şi răspunsuri la paragraful 10.1.

1. Să se verifice dacă următoarele funcţii sunt funcţii original sau nu (se consideră că $t \geq 0$);

a) $e^{(5+2i)t}$; b) $e^{t^3}$ ; c) sin(3 + i)t ; d) $a^t$, $a > 0$, $a \neq 1$;

e) $\frac{1}{t-3}$; f) $f(t) = e^{-t^3}$ ; g) $e^{\frac{1}{t}}$; h) cos2it ; i) $e^{-t}\cos t$.

2. Utilizând integrala lui Laplace, să se calculeze imaginile următoarelor funcţii original :

a) $f(t) = e^{5t}$; b) $f(t) = t$; c) $f(t) = t^2$;

d) $f(t) = \sin t$; e) $f(t) = \cos t$; f) $f(t) = t \cdot e^t$.

#### Răspunsuri

1. a) da, $s_0 = 5$ ; b) nu ; c) da, $s_0 = 1$ ($|\sin(3+i)t| = |\sin 3t \cdot cht + isht \cdot \cos 3t| \leq 1 \cdot cht + 1 \cdot sht = e^t$); d) da, $s_0 = \ln a$, dacă $a > 1$ şi $s_0 = 0$, dacă $0 < a < 1$; e) nu, t=3 este punct de discontinuitate de speţa 2 ; f) da, $s_0 = 0$; g) nu, vezi ex. e); h) da, $s_0 = 2$ ($|\cos 2it| = |ch2t| = \frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2} < e^{2t}$) ; i) da, $s_0 = 0 \left(|f(t)| \leq e^{-t} < e^{0t}\right)$.

2. a) $\frac{1}{p-5}$; b) $\frac{1}{p^2}$; c) $\frac{2}{p^3}$; d) $\frac{1}{p^2+1}$; e) $\frac{p}{p^2+1}$;

f) $\frac{1}{(p-1)^2}$.

## 10.2. Teoremele de bază ale calculului operaţional.

### 10.2.1. Teorema omotetiei.

Vom studia comportarea imaginii unui original cu scară modificată.

**Teoremă.** Dacă $f(t) \div F(p), \operatorname{Re} p > s_0$ şi $a > 0$, atunci

$$L(f(at)) = \frac{1}{a} F(\frac{p}{a}), \operatorname{Re} p > as_0;$$

$$F(ap) = \frac{1}{a} L(f(\frac{t}{a})), \operatorname{Re} p > \frac{s_0}{a}. \qquad (1)$$

**Demonstraţie.** Utilizând proprietatea 3a) din 10.1.1., constatăm că $f(at)$ este de asemenea original cu indicele de creştere $(as_0)$ şi deci

$$L(f(at)) = \int_0^\infty f(at) \cdot e^{-pt} dt = \left| \begin{array}{l} at = u \\ du = adt \\ u \in [o, \infty[ \end{array} \right| = \frac{1}{a} \int_o^\infty f(u) \cdot e^{-\frac{p}{a}u} du =$$

$$= \frac{1}{a} F(\frac{p}{a}), \operatorname{Re} p > as_0;$$

$$F(ap) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-(ap)t} dt = \int_0^\infty f(u) \cdot e^{-(au)p} du = \left| \begin{array}{l} au = t \\ dt = adu \\ t \in [0, \infty[ \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^\infty f(\frac{t}{a}) \cdot e^{-pt} dt = \frac{1}{a} L(f(\frac{t}{a})),$$

valabilă, în virtutea proprietăţii 3a), pentru $\operatorname{Re} p > \frac{s_0}{a}$.

Această teoremă se numeşte *teorema omotetiei sau teorema asemănării.*



Aşadar înmulţirea argumentului funcţiei original cu un număr pozitiv implică împărţirea la acest număr atât a funcţiei imagine cât şi a argumentului ei şi înmulţirea argumentului imaginii cu un număr pozitiv implică împărţirea la acest număr atât a originalului cât şi a argumentului lui.

Dacă calculăm imaginile funcţiilor $\sin t$ şi $\cos t$ nemijlocit cu ajutprul formulei (1) din 10.1.2, integrând de fiecare dată de două ori prin părţi(a se consulta [17], ex. 11 şi nota 2 din 4.1.2.) obţinem formulele

$$\sin t \div \frac{1}{p^2+1}, \quad \cos t \div \frac{p}{p^2+1},$$

valabile pentru $\operatorname{Re} p > 0$.

Utilizând teorema omotetiei, urmează următoarele formule:

$$\sin at \div \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{p}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 1} = \frac{a}{p^2+a^2},$$

$$\cos at \div \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{p}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{\frac{p}{a}}{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 1} = \frac{p}{p^2+a^2},$$

valabile pentru $\operatorname{Re} p > 0$ şi $a > 0$ (a se vedea ex.2b din 10.1.2.).

**Notă.** Din teorema omotetiei rezultă că, dacă

$$f(t) \div F(p), \operatorname{Re} p > 0,$$

atunci

$$\int_t^\infty \frac{f(u)}{u} du \div \frac{1}{p} \int_0^p F(w) dw, \operatorname{Re} p > 0. \qquad (2)$$

Într-adevăr

$$f\left(\frac{t}{a}\right) \div a \cdot F(ap), a > 0, \operatorname{Re} p > 0.$$

De unde

$$\frac{1}{a} \cdot f\left(\frac{t}{a}\right) \div F(ap)$$

Deci $F(ap) = L\left(\frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right)\right) = \int_0^\infty \frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right) \cdot e^{-pt} dt.$

Integrând ambele părţi ale acestei egalităţi în raport cu variabila $a \in ]0,1]$ şi schimbând ordinea de integrare în integrala dublă din dreapta, obţinem că

$$\int_0^1 F(ap)da = \int_0^\infty \left( \int_0^1 f\left(\frac{t}{a}\right) \cdot \frac{da}{a} \right) \cdot e^{-pt} dt.$$

Aceasta înseamnă că

$$\int_0^1 f\left(\frac{t}{a}\right) \cdot \frac{da}{a} \div \int_0^1 F(ap)da, \operatorname{Re} p > 0.$$

Însă

$$\int_0^1 f\left(\frac{t}{a}\right) \cdot \frac{da}{a} = \left| \begin{array}{l} \frac{t}{a} = u, u \in ]\infty, t] \\ a = \frac{t}{u} \\ da = -\frac{tdu}{u^2} \end{array} \right| = \int_\infty^t f(u) \cdot \left( -\frac{tdu}{u^2} \right) \cdot \frac{u}{t} =$$

$$= \int_t^\infty \frac{f(u)}{u} \cdot du;$$

$$\int_0^1 F(ap)da = \left| \begin{array}{l} ap = w \\ pda = dw \\ w \in [0, p] \end{array} \right| = \int_0^p F(w) \cdot \frac{1}{p} dw = \frac{1}{p} \int_0^p F(w)dw.$$



Aşadar

$$\int_t^\infty \frac{f(u)}{u} du \div \frac{1}{p} \int_0^p F(w)dw$$

şi formula (2) este demonstrată.

**Exemplul 3.** Să se calculeze imaginile funcţiilor

$$f_1(t) = -\int_t^\infty \frac{\sin u}{u} du, \quad f_2(t) = -\int_t^\infty \frac{\cos u}{u} du \text{ şi}$$

$$f_3(t) = -\int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u} du$$

**Rezolvare.** Avem:

$$\sin t \div \frac{1}{p^2+1}, \cos t \div \frac{p}{p^2+1} \text{ şi } e^{-t} \div \frac{1}{p+1}.$$

valabile pentru $\operatorname{Re} p > 0$.

Aplicând formula (2), urmează că

$$f_1(t) \div -\frac{1}{p} \cdot \int_0^p \frac{dw}{w^2+1} = -\frac{1}{p} arctgw \Big|_0^p = -\frac{1}{p} arctgp, \operatorname{Re} p > 0;$$

$$f_2(t) \div -\frac{1}{p} \int_0^p \frac{wdw}{w^2+1} = -\frac{\ln(p^2+1)}{2p}, \operatorname{Re} p > 0;$$

$$f_3(t) \div -\frac{1}{p} \int_0^p \frac{dw}{1+w} = -\frac{1}{p} \ln(1+p), \operatorname{Re} p > 0.$$

Funcţiile $f_1(t) = Si(t)$, $f_2(t) = Ci(t)$ şi $f_3(t) = Ei(-t)$, se numesc respectiv *sinus integral*, *cosinus integral*, şi *exponenţială integrală* ([6], cap. 9, § 5).

### 10.2.2. Teorema întârzierii.

Are loc următoarea

**Teoremă.** Dacă $f(t) \div F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$. şi $\sigma > 0$, atunci

$$f(t-\sigma) \div e^{-p\sigma} \cdot F(p), \operatorname{Re} p > s_0. \qquad (1)$$

**Demonstraţie.** Utilizând proprietatea 3c) din 10.1.1., conchidem că funcţia $f(t-\sigma)$ este original cu indicele de creştere $s_0$, adică $f(t-\sigma)$ cu $\sigma > 0$ are forma

$$f_3(t) = \begin{cases} 0, t < \sigma, \sigma > 0, \\ f(t-\sigma), t \geq \sigma. \end{cases}$$

Deci

$$f(t-\sigma) \div \int_0^\infty f(t-\sigma) \cdot e^{-pt} dt = \int_0^\sigma f(t-\sigma) \cdot e^{-pt} dt +$$

$$+ \int_\sigma^\infty f(t-\sigma) \cdot e^{-pt} dt = \int_\sigma^\infty f(t-\sigma) \cdot e^{-pt} dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t-\sigma = u \\ t = u+\sigma \\ u \in [0,\infty[ \\ dt = du \end{array} \right| = \int_0^\infty f(u) \cdot e^{-(u+\sigma)p} du = e^{-\sigma p} \cdot \int_0^\infty f(u) \cdot e^{-up} du = e^{-p\sigma} F(p),$$

valabilă pentru $\operatorname{Re} p > s_0$, ceea ce trebuia de demonstrat.

Acest rezultat poartă numele de *teorema întârzierii*: de obicei funcţia $f(t)$ reprezintă modelul matematic al unui proces în dependenţă de timp. Deci $f(t-\sigma)$ exprimă modelul matematic al aceluiaşi proces cu întârziere de $\sigma$ unităţi de timp.

Similar, obţinem următorul rezultat: dacă $f(t) \div F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$ şi $\sigma > 0$, atunci



$$f(t+\sigma) \div e^{p\sigma} \left[ F(p) - \int_0^\sigma f(t) \cdot e^{-pt} dt \right], \operatorname{Re} p > s_0. \qquad (2)$$

Într-adevăr

$$f(t+\sigma) \div \int_0^\infty f(t+\sigma) \cdot e^{-pt} dt = \left| \begin{array}{l} t+\sigma = u \\ t = u-\sigma \\ u \in [\sigma,\infty[ \\ dt = du \end{array} \right| =$$

$$= \int_\sigma^\infty f(u) \cdot e^{-p(u-\sigma)} \cdot du = -\int_0^\sigma f(u) \cdot e^{-pu} \cdot e^{p\sigma} \cdot du +$$

$$+ \int_0^\sigma f(u) \cdot e^{-pu} \cdot e^{p\sigma} \cdot du + \int_\sigma^\infty f(u) \cdot e^{-pu} \cdot e^{p\sigma} \cdot du =$$

$$= -e^{p\sigma} \int_0^\sigma f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt + e^{p\sigma} \cdot \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt =$$

$$= e^{p\sigma} \left[ F(p) - \int_0^\sigma f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt \right],$$

valabilă pentru $\operatorname{Re} p > s_0$.

Unificând formulele (1) şi (2), urmează aşa numita *teoremă de translaţie*:

dacă $f(t) \div F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$, atunci formula (1) exprimă *prima teoremă de translaţie*, iar formula (2) exprimă *teorema a doua de translaţie*.

**Exemplul 4.** Să se afle imaginea impulsului unitar $\sigma_h(t)$ ce acţionează pe durata de timp $h > 0$:

$$\sigma_h(t)=\begin{cases}0, t<0,\\ \dfrac{1}{h}, 0\le t\le h,\\ 0, t>h.\end{cases}$$

**Rezolvare.** Dacă interpretăm această funcție ca o forță care acționează pe intervalul de timp de la 0 la $h$, iar în restul de timp fiind nulă, atunci este evident că impulsul acestei forțe este egal cu unu.

Observăm că $\sigma_h(t)$ poate fi caracterizată cu ajutorul funcției lui Heaviside astfel:

$$\sigma_h(t)=\frac{1}{h}\left[\sigma_0(t)-\sigma_0(t-h)\right].$$

Utilizând proprietățile 2 și 3c) din 10.1.1., constatăm că funcția $\sigma_h(t)$ este original cu indicele de creștere $s_0=0$. Deci

$$\sigma_h(t)\div\frac{1}{h}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p}\cdot e^{-ph}\right)=\frac{1}{p}\cdot\frac{1-e^{-ph}}{h}, \operatorname{Re} p>0.$$

În mecanică este comod de a considera acele forțe, care acționează pe un interval foarte scurt de timp, adică forțe de o acțiune instantanee, dar cu un impuls finit. De aceea se introduce noțiunea de *funcție delta* sau *funcție Dirac*(1902-1982-fizician englez) în felul următor (a se consulta [14], cap 12, § 2.3):

$$\delta(t)=\lim_{h\to 0}\sigma_h(t) \text{ sau } \delta(t)=\begin{cases}o, t\ne 0\\ \infty, t=0\end{cases} \text{ și } \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1.$$

Prin urmare,

$$L(\delta(t))=\lim_{h\to 0}L(\sigma_h(t))=\lim_{h\to 0}\frac{1-e^{-ph}}{ph}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{-ph}-1}{(-ph)}=1,$$

adică $\delta(t)\div 1$.



Așadar funcția lui Heaviside $\sigma_0(t)=1,\ t\ge 0$ are imaginea $\frac{1}{p}$, iar funcția lui Dirac $\delta(t),\ t\ge 0$ are imaginea egală cu 1.

**Exemplul 5.** Să se afle imaginea semnalului periodic cu perioada $T>0$.

**Rezolvare.** Fie originalul $f(t)$ cu indicele de creștere $s_0$ reprezintă o funcție periodică cu perioada $T>0$.

Avem:

$$F(p)=\int_0^{\infty}f(t)\cdot e^{-pt}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{nT}^{(n+1)T}f(t)\cdot e^{-pt}dt=$$

$$=\left|\begin{array}{l}t=u+nT\\ dt=du\\ u\in[0,\infty[\\ f(t)=f(u+nT)=f(u)\end{array}\right|=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^T f(u)\cdot e^{-pu}\cdot e^{-pnT}du=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^T f(u)\cdot e^{-pu}du\right]\cdot e^{-pnT}=$$

$$=\left[\int_0^T f(u)\cdot e^{-pu}du\right]\cdot\sum_{n=0}^{\infty}e^{-pnT}=$$

$$=\left[\int_0^T f(u)\cdot e^{-pu}du\right]\cdot\left[1+e^{-pT}+(e^{-pT})^2+\cdots\right]=$$

$$=\left[\int_0^T f(u)\cdot e^{-pu}du\right]\cdot\frac{1}{1-e^{-pT}},$$

valabilă pentru $\operatorname{Re} p>s_0$.

**Exemplul 6.** Să se calculeze imaginea funcției $|\sin t|$, care reprezintă curentul alternativ "pulsat".

**Rezolvare.** Deoarece funcţia original $f(t)=|\sin t|$ este periodică cu $T=\pi$ şi indicele de creştere $s_0=0$, utlizând formula din exemplul 5 de mai sus, obţinem că

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T f(t)\cdot e^{-pt}dt=\frac{1}{1-e^{-p\pi}}\int_0^\pi \sin t\cdot e^{-pt}dt=$$

$$=\frac{1}{1-e^{-\pi p}}\cdot\left.\frac{e^{-pt}(p\sin t-\cos t)}{p^2+1}\right|_0^\pi=$$

$$=\frac{1+e^{-p\pi}}{(1-e^{-p\pi})(p^2+1)}=cth\frac{p\pi}{2}\cdot\frac{1}{p^2+1},$$

valabilă pentru $\operatorname{Re} p>0$ (în ultima integrală am efectuat integrarea prin părţi de două ori).

### 10.2.3. Teorema deplasării.

Are loc următoarea

**Teoremă.** Dacă $f(t)\div F(p), \operatorname{Re} p>s_0$, atunci

$$e^{\lambda t}\cdot f(t)\div F(p-\lambda), \operatorname{Re}(p-\lambda)>s_0$$

pentru orice $\lambda\in C$.

**Demonstraţie.** Pentru orice $\lambda\in C$ avem că

$$e^{\lambda t}\cdot f(t)\div\int_0^\infty e^{\lambda t}\cdot f(t)\cdot e^{-pt}dt=\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-(p-\lambda)t}dt=$$

$$=F(p-\lambda),$$

valabilă pentru $\operatorname{Re}(p-\lambda)>s_0$, adică $\operatorname{Re} p>s_0+\operatorname{Re}\lambda$.

Teorema este demonstrată. Această teoremă se numeşte *teoremă de deplasare*.

Prin combinarea teoremei omotetiei (10.2.1.) cu teorema de deplasare, rezultă următoarea relaţie importantă: pentru orice $\lambda\in C$ şi orice $a>0$ avem că



$$e^{\lambda t}\cdot f(at)\div\frac{1}{a}F\left(\frac{p-\lambda}{a}\right),$$

valabilă pentru $\operatorname{Re}(p-\lambda)>a\cdot s_0$.

**Exemplul 7.** Să se calculeze imaginile funcţiilor $e^{\lambda t}\sin(\omega t\pm\varphi), e^{\lambda t}\cos(\omega t\pm\varphi)$, unde $\lambda,\omega,\varphi$ sunt constante reale sau complexe şi $t\geq 0$.

**Rezolvare.** Avem:

$$\sin(\omega t\pm\varphi)=\sin\omega t\cdot\cos\varphi\pm\cos\omega t\cdot\sin\varphi,$$

$$\cos(\omega t\pm\varphi)=\cos\omega t\cdot\cos\varphi\mp\sin\omega t\cdot\sin\varphi.$$

Din exemplul 2b(10.1.2.), reiese următoarele formule:

$$\sin\omega t\div\frac{\omega}{p^2+\omega^2},$$

$$\cos\omega t\div\frac{p}{p^2+\omega^2},$$

care sunt valabile pentru $\operatorname{Re} p>|\operatorname{Im}\omega|$.

Aplicând proprietatea linearităţii transformatei Laplace (10.1.2.), urmează că

$$\sin(\omega t\pm\varphi)\div\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\cdot\cos\varphi\pm\frac{p}{p^2+\omega^2}\cdot\sin\varphi=$$

$$=\frac{\omega\cos\varphi\pm p\sin\varphi}{p^2+\omega^2},$$

$$\cos(\omega t\pm\varphi)\div\frac{p\cos\varphi\mp\omega\sin\varphi}{p^2+\omega^2},$$

care sunt valabile pentru $\operatorname{Re} p>|\operatorname{Im}\omega|$.

În sfârşit, utilizând teorema deplasării, avem:

$$e^{\lambda t}\cdot\sin(\omega t\pm\varphi)\div\frac{\omega\cos\varphi\pm(p-\lambda)\sin\varphi}{(p-\lambda)^2+\omega^2},$$

$$e^{\lambda t}\cdot\cos(\omega t\pm\varphi)\div\frac{(p-\lambda)\cos\varphi\mp\omega\sin\varphi}{(p-\lambda)^2+\omega^2},$$

valabile pentru $\operatorname{Re}p>\operatorname{Re}\lambda+|\operatorname{Im}\omega|$.

**Exemplul 8.** Să se calculeze imaginea originalului $f(t)=e^{-4t}\cos 3t\cdot\cos 2t$.

**Rezolvare.** Deoarece

$$\cos 3t\cdot\cos 2t=\frac{1}{2}(\cos 5t+\cos t),$$

rezultă că această funcţie este original cu indicele de creştere $s_0=0$

Aplicând formulele din ex.2 (10.1.2.):

$$\cos 5t\div\frac{p}{p^2+25},\ \operatorname{Re}p>0,$$

$$\cos t\div\frac{p}{p^2+1},\ \operatorname{Re}p>0,$$

proprietatea linearităţii transformatei Laplace (10.1.2.) şi teorema de deplasare, obţinem că

$$e^{-4t}\cos 3t\cos 2t\div\frac{1}{2}\left[\frac{p+4}{(p+4)^2+25}+\frac{p+4}{(p+4)^2+1}\right],$$

valabilă pentru $\operatorname{Re}p>\operatorname{Re}\lambda+s_0=-4$.



### 10.2.4. Derivarea originalului.

Utilizând proprietatea 4 din 10.1.1., urmează că, dacă $f'(t)$ este original cu indicele de creştere $s_0$, atunci $f(t)=\int_0^t f'(t)dt$ este de asemenea original cu indicele de creştere $s_0$ şi această funcţie este continuă pe $[0,+\infty[$.

**Teoremă.** Dacă $f'(t)$ este original cu indicele de creştere $s_0$ (deci funcţia $f(t)$ este de asemenea original cu indicele de creştere $s_0$ şi $f(t)$ este continuă pe $[0,+\infty[$), atunci din relaţia

$$f(t)\div F(p),\operatorname{Re}p>s_0,$$

rezultă că

$$f'(t)\div pF(p)-f(0),\operatorname{Re}p>s_0.$$

Dacă însă $f(0)=0$, atunci

$$f'(t)\div pF(p),\operatorname{Re}p>s_0.$$

**Demonstraţie.** Avem că

$$L(f'(t))=\int_0^\infty f'(t)\cdot e^{-pt}dt=\begin{vmatrix} f'(t)dt=dv\\ v=f(t)\\ e^{-pt}=u\\ du=(-p)e^{-pt}dt\end{vmatrix}=$$

$$=f(t)\cdot e^{-pt}\Big|_0^\infty+p\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-pt}dt=$$

$$=\lim_{t\to\infty}f(t)\cdot e^{-pt}-f(0)+pF(p).$$

Deoarece $|f(t)|\le M\cdot e^{s_0 t}$, rezultă că $\left|f(t)\cdot e^{-pt}\right|\le M\cdot e^{s_0 t}\cdot e^{-st}=M\cdot e^{-(s-s_0)t},\operatorname{Re}p=s>s_0$.

Deci $\lim_{t\to\infty} f(t)\cdot e^{-pt} = 0$, dacă $\operatorname{Re} p > s_0$.

Prin urmare $f'(t) \div pF(p) - f(0)$, ceea ce trebuia de demonstrat.

Teorema poate fi generalizată astfel: fie $f^{(n)}(t)(n = 1,2,...)$ este original cu indicele de creştere $s_0$. În acest caz se poate de arătat, aplicând proprietatea 4 din 10.1.1., că funcţiile continue $f(t), f'(t),..., f^{(n-1)}(t)$ sunt de asemenea funcţii original cu acelaşi indice de creştere $s_0$. Dacă $f(t) \div F(p), \operatorname{Re} p > s_0$, atunci

$$f^{(n)}(t) \div p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0), \quad (1)$$

valabilă pentru $\operatorname{Re} p > s_0, n \in N$.

În particular, dacă

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = ... = f^{(n-1)}(0) = 0,$$

atunci obţinem formula

$$f^{(n)}(t) \div p^n F(p), \operatorname{Re} p > s_0, n \in N. \quad (2)$$

**Consecinţa 1.** Dacă $f'(t)$ este original, iar $F(p) = L(f(t))$ este analitică în $p_0 = \infty$, atunci

$$\lim_{p\to\infty} pF(p) = f(0). \quad (3)$$

**Demonstraţie.** Într-adevăr, aplicând formula (7) din 10.1.2., avem că $\lim_{p\to\infty} F(p) = 0$.

Deci dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei $F(p)$ analitice pe coroana $r<|p| <+\infty$, $r>0$ are forma

$$F(p) = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + ... + \frac{a_{n+1}}{p^{n+1}} + ... .$$



Utilizând formula $\frac{t^n}{n!} \div \frac{1}{p^{n+1}}, n \in N$ din exemplul 2c) şi proprietatea de linearitate, urmează că

$$f(t) = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot t + a_3 \cdot \frac{t^2}{2!} + \cdots + a_{n+1} \cdot \frac{t^n}{n!} + ..., \ t \geq 0.$$

Aceste două serii sunt uniform convergente pe orice compacte din coroana $r<|p| <+\infty$, $r>0$ şi respectiv pe orice compacte din $r$ – vecinătatea punctului $t_0=0(r>0)$. Termenii lor sunt funcţii analitice pe aceste compacte.

Deci $\lim_{p\to\infty} pF(p) = a_1$ şi respectiv $f(0)=a_1$.

Prin urmare,

$$\lim_{p\to\infty} pF(p) = f(0)$$

şi formula (3) este demonstrată.

**Consecinţa 2.** Fie $f'(t)$ este original cu indicele de creştere $s_0$, deci funcţia $f(t)$ este de asemenea original cu acelaşi indice de creştere $s_0$ şi $f(t)$ este continuă pe $[0,\infty[$. Dacă $f(t) \div F(t)$ şi $\lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty)$ este finită, atunci

$$\lim_{p\to 0} F(p) = \lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty). \quad (4)$$

Într-adevăr, din continuitatea funcţiei $f(t)$ pe $[0,\infty[$ şi existenţa limitei finite $\lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty)$ reiese că $f(t)$ este mărginită şi deci indicele ei de creştere este $s_0 = 0$.

Aceasta înseamnă că $F(p)$ este analitică şi definită pe semiplanul complex $\operatorname{Re} p > 0$.

Deci

$$f'(t) \div \int_0^\infty f'(t)\cdot e^{-pt}dt = pF(p) - f(0), \operatorname{Re} p > 0.$$

Prin urmare, $\lim\limits_{p\to 0}\int\limits_0^\infty f'(t)\cdot e^{-pt}dt=\lim\limits_{p\to 0}[pF(p)-f(0)]$,

adică

$$\lim_{p\to 0}[pF(p)-f(0)]=\int_0^\infty \lim_{p\to 0}[f'(t)\cdot e^{-pt}]dt=\int_0^\infty f'(t)dt=$$

$$=f(t)\Big|_0^\infty=f(\infty)-f(0).$$

Aşadar $\lim\limits_{p\to 0} pF(p)-f(0)=f(\infty)-f(0)$. Din ultima relaţie rezultă formula (4).

Constatăm că formula (1) confirmă explicaţia utilizării transformatei Laplace în teoria ecuaţiilor diferenţiale : operaţia de derivare din spaţiul funcţiilor original se transformă în operaţie de înmulţire cu $p$ în spaţiul funcţiilor imagine (dacă se face abstracţie de un polinom în $p$ ).

**Exemplul 9.** Utilizând teorema derivării originalului, să se calculeze imaginele funcţiilor $f_1(t)=\sin^2 t$ şi $f_2(t)=\cos^2 t, t\geq 0$.

**Rezolvare.** Observăm că funcţia $f_1(t)=\sin^2 t=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t=$ $=\frac{1}{2}\cdot\sigma_0(t)-\frac{1}{2}\cos 2t$ este original cu indicele de creştere $s_0=0$.

Avem $f_1(t)\div F_1(p)$; $f_1'(t)\div pF_1(p)-f_1(0)$, unde $f_1(0)=$ $=\sin^2 0=0$ şi $f_1'(t)=2\sin t\cos t=\sin 2t$.

Deoarece

$$f_1'(t)=\sin 2t\div\frac{2}{p^2+4}=pF_1(p),\ \mathrm{Re}\,p>0$$



urmează că

$$L(\sin^2 t)=F_1(p)=\frac{2}{p(p^2+4)},\ \mathrm{Re}\,p>0.$$

Constatăm că acelaşi rezultat se obţine din relaţia:

$$f_1(t)=\sin^2 t=\frac{1}{2}\sigma_0(t)-\frac{1}{2}\cos 2t\div\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+4}=$$

$$=\frac{2}{p(p^2+4)},\ \mathrm{Re}\,p>0.$$

Propunem cititorului să demonstreze formula

$$f_2'(t)=\cos^2 t\div\frac{p^2+2}{p(p^2+4)},\ \mathrm{Re}\,p>0.$$

### 10.2.5. Derivarea imaginii.

Are loc următoarea

**Teoremă.** Dacă

$$f(t)\div F(p), \mathrm{Re}\,p>s_0,$$

atunci

$$(-1)^n\cdot t^n\cdot f(t)\div F^{(n)}(p), \qquad (1)$$

care este valabilă pentru $\mathrm{Re}\,p>s_0$ şi $n\in N$.

**Demonstraţie.** Utilizând proprietăţile 2 şi 3d), obţinem că funcţiile $(-1)^n\cdot t^n\cdot f(t), n\in N$ sunt funcţii original cu indicele de creştere $s_0$. Prin urmare, ele verifică inegalitatea (1) din 10.1.1., adică

$$\left|(-1)^n\cdot t^n\cdot f(t)\right|\leq M\cdot e^{s_1 t}, s_1>s_0.$$

Deci

$$\left|(-1)^n\cdot t^n\cdot f(t)\cdot e^{-pt}\right|\leq M\cdot e^{s_1 t}\cdot e^{-st}=$$

$$=M\cdot e^{-(s-s_1)t}<M\cdot e^{-(s_2-s_1)t},$$

unde

$$\operatorname{Re} p = s \geq s_2 > s_1 > s_0 \geq 0.$$

Deoarece $\int_0^\infty M \cdot e^{-(s_2-s_1)t}$ este convergentă, reiese că integrala impoprie $\int_0^\infty (-1)^n \cdot t^n \cdot f(t)\cdot e^{-pt}dt, n=0,1,2,...$ este uniform convergentă în raport cu variabila $p$ pe semiplanul complex $\operatorname{Re} p = s \geq s_2 > s_0$. Însă această integrală reprezintă funcția

$$F^{(n)}(p) = \left(\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-pt}dt\right)^{(n)}$$

(a se consulta mai detaliat teorema 5.3.1 din [6].

Teorema este demonstrată.

Constatăm, că și în cazul operației de derivare în spațiul imaginilor (care este o operație de trecere la limită într-o integrală improprie), în spațiul funcțiilor original va corespunde o operație mai simplă: înmulțirea cu variabila $(-t)$.

**Exemplul 10.** Să se calculeze imaginile funcțiilor

a) $f_1(t) = t\sin at$ și $f_2(t) = t\cos at$, unde $a \in R$ sau $a \in C$ și $t \geq 0$;

b) $f_3(t) = t^n \cdot e^{at}, n \in N, a \in C,\ t \geq 0$.

**Rezolvare.** a)Din exemplul 2(10.1.1.) avem că

$$\sin at \div \frac{a}{p^2+a^2},$$

$$\cos at \div \frac{p}{p^2+a^2},$$

care sunt valabile pentru $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} a|$.

Aplicând formula (1) cu $n=1$, obținem că

$$\left(\frac{a}{p^2+a^2}\right)'_p = -\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2} \div -t\sin at.$$

Deci



$$t\sin at \div \frac{2pa}{(p^2+a^2)^2} = \frac{\operatorname{Im}(p+ia)^2}{(p^2+a^2)^2}, \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} a|.$$

Similar

$$\left(\frac{p}{p^2+a^2}\right)'_p = -\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2} \div -t\cos at.$$

Prin urmare,

$$t\cos at \div \frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2} = \frac{\operatorname{Re}(p+ia)^2}{(p^2+a^2)^2}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} a|.$$

Propunem cititorului să generalizeze aceste formule pentru $n = 2,3,...$, adică să demonstreze relațiile

$$t^n \sin at \div n!\frac{\operatorname{Im}(p+ia)^{n+1}}{(p^2+a^2)^{n+1}}, \quad t^n \cos at \div n!\frac{\operatorname{Re}(p+ia)^{n+1}}{(p^2+a^2)^{n+1}},$$

care sunt valabile pentru $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} a|$.

b) Din exemplul 2(10.1.1.) avem că

$$e^{at} \div \frac{1}{p-a}, \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a.$$

Deci

$$\left(\frac{1}{p-a}\right)' = \left[(p-a)^{-1}\right]' = (-1)\cdot(p-a)^{-2};$$

Observăm că

$$\left(\frac{1}{p-a}\right)'' = (-1)(-2)(p-a)^{-3} = (-1)^2 \cdot 2!(p-a)^{-3}.$$

Prin inducție matematică obținem că

$$\left(\frac{1}{p-a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(p-a)^{n+1}}.$$

Aplicând formula (1) de mai sus, rezultă că

$$(-1)^n t^n e^{at} \div \frac{(-1)^n \cdot n!}{(p-a)^{n+1}}.$$

De unde

$$\frac{t^n e^{at}}{n!} \div \frac{1}{(p-a)^{n+1}}, \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a, n \in N.$$

Dacă însă $a = 0$, obţinem formula

$$\frac{t^n}{n!} \div \frac{1}{p^{n+1}},$$

care este valabilă pentru orice $n \in N$ şi $\operatorname{Re} p > 0$.

### 10.2.6. Integrarea originalului.

Are loc următoarea

**Teoremă.** Dacă $f(t) \div F(p), \operatorname{Re} p > s_0$, atunci

$$\varphi(t) = \int_0^t f(u)du \div \frac{1}{p} F(p), \operatorname{Re} p > s_0. \qquad (1)$$

**Demonstraţie.** În virtutea proprietăţii 4 din 10.1.1 funcţia φ(t) este original cu indicele de creştere $s_0$ şi $\varphi(0)=0$. Deoarece $\varphi'(t) = f(t)$, rezultă că $\varphi'(t)$ este de asemenea original cu indicele de creştere $s_0$. Fie $\varphi(t) \div \phi(p)$. Aplicând teorema din 10.2.4, conchidem că

$$\varphi'(t) = f(t) \div p\phi(p) - \varphi(0) = p\phi(p).$$

Prin urmare,

$$f(t) \div F(p) \quad \text{şi} \quad \varphi'(t) = f(t) \div p\phi(p).$$

Deci $p\phi(p) = F(p)$, de unde $\phi(p) = \frac{1}{p} F(p)$, adică

$$\varphi(t) = \int_0^t f(u)du \div \frac{1}{p} F(p), \operatorname{Re} p > s_0.$$



Teorema este demonstrată.

**Consecinţă.** Dacă originalul f(t) este o funcţie continuă pe $[0,+\infty[$, $f(t) \div F(p)$ şi integrala improprie $\int_0^\infty f(t)dt$ este convergentă, atunci

$$\int_0^\infty f(t)dt = \lim_{p\to 0} F(p). \qquad (2)$$

Într-adevăr, deoarece $\int_0^\infty f(t)dt = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t f(u)du$ este convergentă, $f(t)$ este continuă pe $[0,+\infty[$, şi $\lim_{t\to\infty} f(t)$ este finită avem că $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$ (a se consulta cap. 9, §3 din [6]).

Prin urmare, funcţia original $f(t)$ este mărginită pe $[0,+\infty[$ şi deci indicele ei de creştere $s_0 = 0$.

Aplicând formula (1), urmează că

$$\int_0^t f(u)du \div \frac{F(p)}{p}, \operatorname{Re} p > 0,$$

De unde conform formulei (4) din 10.2.4, rezultă că

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t f(u)du = \lim_{p\to 0} F(p),$$

adică am demonstrat formula (2).

În particular, dacă funcţia F(p) este analitică în punctul $p_0 = 0$, atunci formula (2) are forma

$$\int_0^\infty f(t)dt = F(0).$$

Această consecinţă se mai numeşte *prima teoremă de trecere la limită în imagine.*

**Exemplul 11.** Să se determine imaginile funcţiilor

$$f_1(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t\frac{\sin u}{\sqrt{u}}du \text{ şi } f_2(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t\frac{\cos u}{\sqrt{u}}du.$$

**Rezolvare.** În exemplul 2 c) din 10.1.2 am stabilit următoarea formulă:

$$t^\alpha \div \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}},\ \mathrm{Re}p>0,$$

unde $\Gamma(\alpha+1)=\int_0^{+\infty}x^\alpha\cdot e^{-x}dx, \alpha\in R, \alpha>-1$.

Se ştie că $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ ([18], 6.1.3). Dacă în formula de mai sus considerăm $\alpha=-\frac{1}{2}$, obţinem că

$$t^{-\frac{1}{2}}\div\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{p^{1/2}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}=\sqrt{\frac{\pi}{p}}, \mathrm{Re}\,p>0 \text{ şi}$$

$$e^{at}\cdot t^{-\frac{1}{2}}\div\sqrt{\frac{\pi}{p-a}}, \mathrm{Re}\,p>\mathrm{Re}\,a.$$

Prin urmare,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\div\frac{1}{\sqrt{p}} \quad \text{şi} \quad \frac{e^{at}}{\sqrt{t}}\div\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p-a}}, \mathrm{Re}\,a>\mathrm{Re}\,p.$$

Aşadar, aplicând formulele lui Euler şi formula (care uşor se verifică)

$$\sqrt{p+bi}=\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+b^2}+p}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+b^2}-p}{2}}, \text{ dacă } b>0;$$

$$\sqrt{p-bi}=\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+b^2}+p}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+b^2}-p}{2}}, \text{ dacă } b>0,$$

obţinem că

$$\frac{\sin t}{\sqrt{t}}=\frac{1}{2i}\left(\frac{e^{it}}{\sqrt{t}}-\frac{e^{-it}}{\sqrt{t}}\right)\div\frac{1}{2i}\cdot\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{p-i}}-\frac{1}{\sqrt{p+i}}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2i}\cdot\frac{\sqrt{p+i}-\sqrt{p-i}}{\sqrt{p^2+1}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2i}\cdot\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\cdot 2i\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+1}-p}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}-p}}{\sqrt{p^2+1}}, \mathrm{Re}\,p>0;$$

$$\frac{\cos t}{\sqrt{t}}=\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\div\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{p-i}}+\frac{1}{\sqrt{p+i}}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\sqrt{p+i}+\sqrt{p-i}}{\sqrt{p^2+1}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}+p}}{\sqrt{p^2+1}}, \mathrm{Re}\,p>0.$$

Utilizând formula (1) de mai sus, avem că

$$f_1(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t\frac{\sin u}{\sqrt{u}}du\div\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{p}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}-p}}{\sqrt{p^2+1}}=$$

$$=\frac{1}{2p}\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}-p}}{\sqrt{p^2+1}}, \mathrm{Re}\,p>0$$

şi

$$f_2(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t\frac{\cos u}{\sqrt{u}}du \div \frac{1}{2p}\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}+p}}{\sqrt{p^2+1}}, \operatorname{Re} p>0.$$

Funcţiile $f_1(t)$ şi $f_2(t)$ se numesc *sinusul şi respectiv cosinusul lui Fresnel* (1788–1827 – matematician francez).

### 10.2.7. Integrarea imaginii.

Are loc următoarea

**Teoremă.** Dacă $f(t)\div F(p)$, atunci

$$\frac{f(t)}{t}\div\int_p^\infty F(w)dw=\lim_{\operatorname{Re}q\to+\infty}\int_p^q F(w)dw, \operatorname{Re} p>s_0, \qquad (1)$$

unde $s_0$ este indicele de creştere al originalului f(t) şi drumul de integrare de la punctul p la punctul impropriu $p_0=\infty$ aparţine semiplanului $\operatorname{Re} p=s>s_0$.

**Demonstraţie.** Aplicând proprietatea 3d) din 10.1.1, constatăm că funcţia $t^{-1}\cdot f(t)=\frac{f(t)}{t}$ este original cu indicele de creştere $s_0$.

Fie $\frac{f(t)}{t}\div\Phi(p)$, unde $\Phi(p)$ este analitică pe semiplanul complex $\operatorname{Re} p=s>s_0$. Avem:

$$|\Phi(p)|=\left|\int_0^\infty\frac{f(t)}{t}e^{-pt}dt\right|\le\int_0^\infty\left|\frac{f(t)}{t}e^{-pt}\right|dt\le M\int_0^\infty e^{-(s-s_0)t}dt=\frac{M}{s-s_0},$$

unde $M>0, \operatorname{Re} p=s>s_0$. Deci $\lim_{\operatorname{Re} p=s\to\infty}|\Phi(p)|=0$.

Din relaţia $\frac{f(t)}{t}\div\Phi(p)$, aplicând teorema derivării imaginii (formula (1) din 10.2.5), obţinem:

$$(-1)\cdot t\cdot\frac{f(t)}{t}\div\Phi'(p) \text{ sau } \quad f(t)\div-\Phi'(p).$$



De unde $F(p)=-\Phi'(p)$.

Integrând ultima egalitate în limitele de la punctul p la punctul q cu $\operatorname{Re} q>\operatorname{Re} p>s_0$, urmează că

$$\Phi(p)-\Phi(q)=\int_p^q F(w)dw.$$

Trecând la limită în această egalitate când $\operatorname{Re} q\to\infty$ şi luând în consideraţie că $\lim_{\operatorname{Re}q\to\infty}\Phi(q)=0$ avem $\Phi(p)-0=\int_p^\infty F(w)dw$.

Deci

$$\frac{f(t)}{t}\div\Phi(p)=\int_p^\infty F(w)dw,$$

ceea ce trebuia de demonstrat.

**Consecinţă.** Fie funcţia $\frac{f(t)}{t}$ este continuă pe $[0,+\infty[$ (bineînţeles că în acest caz funcţia f(t) de asemenea este continuă pe $[0,+\infty[$). Dacă $f(t)\div F(p)$ şi integrala improprie $\int_0^\infty\frac{f(t)}{t}dt$ este convergentă, atunci

$$\int_0^\infty\frac{f(t)}{t}dt=\int_0^\infty F(p)dp. \qquad (2)$$

Într-adevăr, (a se consulta demonstraţia consecinţei din 10.2.6) din continuitatea funcţiei $\frac{f(t)}{t}$ pe $[0,+\infty[$, existenţa $\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}$ şi convergenţa integralei improprii $\int_0^\infty\frac{f(t)}{t}dt$, reiese că

$\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{t}=0$. Aceasta înseamnă că funcţia $\frac{f(t)}{t}$ este mărginită pe $[0,+\infty[$. Deci indicele de creştere al originalului $\frac{f(t)}{t}$ este $s_0=0$. Prin urmare, indicele de creştere al originalului f(t) este de asemenea $s_0=0$ şi funcţia F(p) este analitică pe semiplanul $\operatorname{Re} p>0$.

Fie

$$\Phi(p)=L\left(\frac{f(t)}{t}\right)=\int_0^\infty\frac{f(t)}{t}\cdot e^{-pt}dt,$$

deci

$$\lim_{p\to 0}\Phi(p)=\lim_{p\to 0}\int_0^\infty\frac{f(t)}{t}\cdot e^{-pt}dt=\int_0^\infty\frac{f(t)}{t}dt.$$

Utilizând formula (1) de mai sus, avem:

$$\Phi(p)=L\left(\frac{f(t)}{t}\right)=\int_p^\infty F(w)dw.$$

Prin urmare,

$$\lim_{p\to 0}\Phi(p)=\lim_{p\to 0}\int_p^\infty F(w)dw=\int_0^\infty F(w)dw.$$

Comparând aceste două rezultate, obţinem formula (2).

Consecinţa din teorema de mai sus se numeşte *a doua teoremă despre trecerea la limită în imagine* (despre prima teoremă de trecerea la limită în imagine am vorbit în 10.2.6).

Constatăm că formula (2) se utilizează pentru calcularea integralei improprii $\int_0^\infty\frac{f(t)}{t}dt$ cu ajutorul integralei improprii



$\int_0^\infty F(p)dp$, care uneori este mai uşor de calculat. De exemplu, să calculăm $\int_0^\infty\frac{\sin t}{t}dt$.

Avem $\sin t\div\frac{1}{p^2+1}$ şi utilizând formula (2) de mai sus obţinem că

$$\int_0^\infty\frac{\sin t}{t}dt=\int_0^\infty\frac{dp}{p^2+1}=arctg p\Big|_0^\infty=\frac{\pi}{2}$$

(a se compara cu rezultatul din [17], 4.3.2, pag. 375).

**Exemplul 12.** Să se determine imaginile funcţiilor următoare:

a) $f(t)=\frac{\sin at}{t}, a\in C$; b) $f(t)=\frac{\sin^2 t}{t}$,

c) $f(t)=\frac{e^{bt}-e^{at}}{t}, a>0, b>0, a\neq b.$

**Rezolvare.**

a) Avem:

$$\sin at\div\frac{a}{p^2+a^2}, \operatorname{Re} p>|\operatorname{Im} a|.$$

Utilizând formula (1) de mai sus obţinem:

$$\frac{\sin at}{t}\div\int_p^\infty\frac{a}{w^2+a^2}dw=arctg\frac{w}{a}\Big|_p^\infty=\frac{\pi}{2}-arctg\frac{p}{a}=$$

$$=arcctg\frac{p}{a}, \operatorname{Re} p>|\operatorname{Im} a|.$$

Cu ajutorul acestei formule şi aplicând formula (1) din 10.2.6 rezultă:

$$\int_0^t \frac{\sin t}{t} dt \div \frac{1}{p} arcctgp, \operatorname{Re} p > 0.$$

Constatăm că $\int_0^t \frac{\sin t}{t} dt$ nu poate fi exprimată cu ajutorul funcţiilor elementare ([17], 4.1.6).

b) Utilizând rezultatul din exemplul 9 al punctului 10.2.4, obţinem formula

$$\sin^2 t \div \frac{2}{p(p^2+4)}, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

Prin urmare, aplicând formula (1) din 10.2.7, avem că

$$\frac{\sin^2 t}{t} \div \int_p^\infty \frac{2dw}{w(w^2+4)} = \left[\frac{1}{2}\ln w - \frac{1}{4}\ln\left(w^2+4\right)\right]\Big|_p^\infty =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{p^2+4}{p^2}, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

c) Avem:

$$\left|\frac{e^{bt}-e^{at}}{t}\right| \le \frac{e^{bt}+e^{at}}{t} \le 2\cdot e^{st}, \text{ dacă } t>0 \text{ şi } s = \max(a,b).$$

Prin urmare, această funcţie este original cu indicele de creştere $s_0 = \max(a,b)$.

Deoarece

$$e^{bt} - e^{at} \div \frac{1}{p-b} - \frac{1}{p-a},$$

şi, utilizând formula (1') de mai sus, obţinem:

$$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t} \div \int_p^\infty \left(\frac{1}{w-b} - \frac{1}{w-a}\right)dw = \ln\frac{p-a}{p-b}, \operatorname{Re} p > \max(a,b).$$



**Exemplul 13.** Utilizând formula (2) de mai sus să se calculeze următoarle integrale improprii reale:

a) $\int_0^\infty \frac{e^{bt}-e^{at}}{t} dt, a>0, b>0$;

b) $\int_0^\infty \frac{e^{bt}-e^{at}}{t} \sin(mt)dt, a>0, b>0, m>0$;

c) $\int_0^\infty \frac{\cos(at)-\cos(bt)}{t} dt, a>0, b>0$;

d) $\int_0^\infty \frac{\sin(at)\cdot\sin(bt)}{t} dt, a>b>0,\ a\ne b$;

e) $\int_0^\infty \frac{e^{-at}\sin(bt)}{t} dt, a>0, b>0$.

**Rezolvare.**

a) Avem:

$$\left(e^{at}-e^{bt}\right) \div \frac{1}{p-a} - \frac{1}{p-b}.$$

Deci

$$\int_0^\infty \frac{e^{bt}-e^{at}}{t} dt = \int_0^\infty \left(\frac{1}{p-b} - \frac{1}{p-a}\right)dp = \ln\frac{p-b}{p-a}\Big|_0^\infty = \ln\frac{a}{b}.$$

b) Avem:

$$e^{at}\sin(mt) \div \frac{m}{(p-a)^2+m^2}, e^{bt}\sin(mt) \div \frac{m}{(p-b)^2+m^2}.$$

Deci

$$\int_0^\infty \frac{e^{bt}-e^{at}}{t}\sin(mt)dt = m\int_0^\infty\left[\frac{1}{(p-b)^2+m^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(p-a)^2+m^2}\right]dp = m\left(\frac{1}{m}arctg\frac{p-b}{m}-\frac{1}{m}arctg\frac{p-a}{m}\right)\Bigg|_0^\infty =$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-arctg\left(-\frac{b}{m}\right)+arctg\left(-\frac{a}{m}\right)=arctg\frac{b}{m}-arctg\frac{a}{m}.$$

c) Avem:

$$\cos(at)\div\frac{p}{p^2+a^2},\ \cos(bt)\div\frac{p}{p^2+b^2}.$$

Deci

$$\int_0^\infty\frac{\cos(at)-\cos(bt)}{t}dt=\int_0^\infty\left(\frac{p}{p^2+a^2}-\frac{p}{p^2+b^2}\right)dp=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{p^2+a^2}{p^2+b^2}\Bigg|_0^\infty=\ln\frac{b}{a};$$

d) Avem:

$$\int_0^\infty\frac{\sin(at)\cdot\sin(bt)}{t}dt=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\cos(a-b)t-\cos(a+b)t}{t}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left[\frac{p}{p^2+(a-b)^2}-\frac{p}{p^2+(a+b)^2}\right]dp=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{p^2+(a-b)^2}{p^2+(a+b)^2}\Bigg|_0^\infty=\frac{1}{2}\ln\frac{a+b}{a-b},\ a>b>0,\ a\neq b;$$



e) Avem:

$$\int_0^\infty\frac{e^{-at}\sin(bt)}{t}dt=\int_0^\infty\frac{b}{(p+a)^2+b^2}dp=arctg\left(\frac{p+a}{b}\right)\Bigg|_0^\infty=$$

$$=\frac{\pi}{2}-arctg\frac{a}{b}=arcctg\frac{a}{b}.$$

Integralele de mai sus se mai numesc *integralele lui Froullant.*

### 10.2.8. Inmulţirea imaginilor.

În diverse aplicaţii, de exemplu: la construirea filtrelor în radioelectronică şi telemecanică; la calcularea funcţiei de repartiţie a variabilelor aleatoare în teoria probabilităţilor; la codarea şi transmiterea semnalelor în teoria informaţiei se utilizează noţiunea de convoluţie a două funcţii.

**Definiţie.** Se numeşte *convoluţie* a funcţiilor $f_1(t)$ şi $f_2(t)$ definite pe intervalul $[0,+\infty[$ şi se notează $(f_1 * f_2)(t)$ integrala definită

$$(f_1 * f_2)(t)=\int_0^t f_1(u)\cdot f_2(t-u)du.$$

Această definiţie nu depinde de ordinea funcţiilor $f_1(t)$ şi $f_2(t)$.

Într-adevăr

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(u)\cdot f_2(t-u)du = \left|\begin{matrix} t-u=v \\ u=t-v \\ du=-dv \\ v\in[t,0]\end{matrix}\right| =$$

$$= \int_t^0 f_1(t-v)\cdot f_2(v)\cdot(-dv) =$$

$$= \int_0^t f_1(t-v)\cdot f_2(v)dv = (f_2 * f_1)(t).$$

Cu alte cuvinte convoluţia a două funcţii este comutativă sau simetrică.

**Teorema 1** (Borel ( 1871-1956 – matematician francez)). Fie $f_1(t)$, $f_2(t)$ sunt funcţii original cu indicele de creştere respectiv $s_1$ şi $s_2$. Dacă $f_1(t) \div F_1(p)$, $f_2(t) \div F_2(p)$, atunci

$$(f_1 * f_2)(t) \div F_1(p)\cdot F_2(p),\ \operatorname{Re} p > s_0 = \max(s_1, s_2).$$

**Demonstraţie.** Arătăm mai întâi că funcţia $(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(u)\cdot f_2(t-u)du$ este original cu indicele de creştere $s_0 = \max(s_1, s_2)$. În virtutea proprietăţii 3 c) din 10.1.2. funcţia $f_2(t-u)$ este original cu indicele de creştere $s_2$.

Condiţiile a) şi b) din definiţia originalului sunt imediate. Demonstrăm condiţia c) din această definiţie, adică inegalitatea (1) din 10.1.1.

Avem:

$$|f_1(t)| \le M_1\cdot e^{s_1 t} \le M\cdot e^{s_0 t},$$

$$|f_2(t)| \le M_2\cdot e^{s_2 t} \le M\cdot e^{s_0 t},$$



unde $s_0 = \max(s_1, s_2)$ şi $M = \max(M_1, M_2)$.

Deci

$$|\varphi(t)| = \left|\int_0^t f_1(u)\cdot f_2(t-u)du\right| \le M^2 \int_0^t e^{s_0 u}\cdot e^{s_0(t-u)}\cdot du =$$

$$= M^2\cdot t\cdot e^{s_0 t}.$$

Deoarece pentru orice $\varepsilon > 0$ oricât de mic avem că $\lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^{\varepsilon t}} = 0$, rezultă că funcţia $\frac{t}{e^{\varepsilon t}}$ este mărginită pe $[0, +\infty[$. Prin urmare, $\frac{t}{e^{\varepsilon t}} \le A$ pentru orice $t \in [0, +\infty[$. De unde $t \le A\cdot e^{\varepsilon t}$.

Aşadar

$$|\varphi(t)| \le M^2\cdot t\cdot e^{s_0 t} \le M^2\cdot A\cdot e^{(s_0+\varepsilon)t},$$

care este valabilă pentru orice $\varepsilon > 0$ oricât de mic.

Acesta înseamnă că condiţia c) din definiţia originalului pentru funcţia $\varphi(t)$ este satisfăcută. Deci $\varphi(t)$ este original cu indicele de creştere $s_0 = \max(s_1, s_2)$

Trecem acum la demonstraţia teoremei.

Avem :

$$L[(f_1 * f_2)t] = \int_0^\infty e^{-pt}\left(\int_0^t f_1(u)\cdot f_2(t-u)du\right)dt =$$

$$= \int_0^\infty dt \int_0^t e^{-pt} f_1(u)\cdot f_2(t-u)du.$$

Integrala din relaţia aceasta este o integrală dublă extinsă la domeniul limitat de dreptele u=0, u=t (vezi fig.1. de mai jos). Schimbând ordinea integrării obţinem:

$$L[(f_1 * f_2)t] = \int_0^{\infty} du \int_u^{\infty} e^{-pt} f_1(u) \cdot f_2(t-u)dt = \begin{vmatrix} t-u=t_1 \\ t=t_1+u \\ dt=dt_1 \\ t_1 \in [0,\infty[ \end{vmatrix} =$$

$$= \int_0^{\infty} f_1(u)du \int_0^{\infty} e^{-pt_1} \cdot e^{-pu} \cdot f_2(t_1) \cdot dt_1 =$$

$$= \left(\int_0^{\infty} e^{-pu} \cdot f_1(u) \cdot du\right)\left(\int_0^{\infty} e^{-pt_1} f_2(t_1) \cdot dt_1\right) = F_1(p) \cdot F_2(p).$$

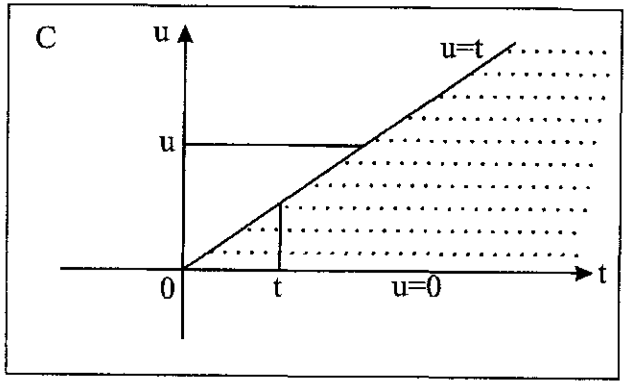



**Fig. 1.**

Teorema este demonstrată.

Aceată teoremă se mai numeşte *teorema convoluţiei.*

**Consecinţă.** Fie $f(t) \div F(p)$ şi funcţia Heaviside $\sigma_0(t) = 1, t \geq 0$. Atunci

$$\int_0^t f(u)du \div \frac{1}{p} F(p), \operatorname{Re} p > s_0,$$

unde $s_0$ este indicele de creştere al originalului f(t).



Într-adevăr, $\sigma_0(t) \div \frac{1}{p}$ şi aplcând teorema lui Borel, avem

$$(f * \sigma_0)t = \int_0^t f(u) \cdot 1 \cdot du = \int_0^t f(u)du \div \frac{1}{p} F(p), \ \operatorname{Re} p > s_0,$$

deoarece indicele de creştere al funcţiei $\sigma_0(t)$ este egal cu zero.

Aşadar teorema despre integrarea originalului (10.2.6) este un caz particular a teoremei lui Borel.

Teorema lui Borel împreună cu alte teoreme (vezi punctul 3 din 10.3.1) se utilizează în practică pentru a restabili originalul după imaginea lui.

**Exemplul 14.** Să se restabilească originalul după imaginea lui, dacă

a) $F(p) = \dfrac{p}{\left(p^2+a^2\right)^2}, a \in C$; b) $F(p) = \dfrac{1}{(p+1)^2(p-2)}$;

c) $F(p) = \dfrac{p+1}{p(p^2+2p+10)}$.

**Rezolvare.**

a) Avem:

$$F(p) = \frac{1}{p^2+a^2} \cdot \frac{p}{p^2+a^2} \text{ şi}$$

$$\frac{1}{a}\sin at \div \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{p^2+a^2}, \ \cos at \div \frac{p}{p^2+a^2},$$

care sunt valabile pentru $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} a|$.

Aplicând teorema lui Borel, obţinem că

$$F(p) = \frac{p}{\left(p^2+a^2\right)^2} \div \frac{1}{a}\int_0^t \sin(a\theta) \cdot \cos a(t-\theta)d\theta =$$

$$= \frac{1}{2a}\int_0^t [\sin(a\theta + at - a\theta) + \sin(a\theta - at + a\theta)]d\theta =$$

$$= \frac{1}{2a}\int_0^t [\sin at + \sin a(2\theta - t)]d\theta =$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\sin(at)\cdot t - \frac{1}{2a}\cos a(2\theta - t)\Big|_0^t\right] = \frac{1}{2a}\cdot t\sin at.$$

b) Deoarece $\frac{1}{(p+1)^2} \div \frac{1}{1!}te^{-t}$ şi $\frac{1}{p-2} \div e^{2t}$, rezultă că

$$F(p) = \frac{1}{(p+1)^2(p-2)} \div \int_0^t \theta\cdot e^{-\theta}\cdot e^{2(t-\theta)}d\theta =$$

$$= e^{2t}\int_0^t \theta\cdot e^{-3\theta}d\theta = e^{2t}\left[\theta\cdot\frac{e^{-3\theta}}{(-3)}\Big|_0^t + \frac{1}{3}\int_0^t e^{-3\theta}d\theta\right] =$$

$$= e^{2t}\left[-\frac{t}{3}e^{-3t} - \frac{1}{9}(e^{-3t} - 1)\right] = -\frac{t}{3}e^{-t} - \frac{1}{9}e^{-t} + \frac{1}{9}e^{2t} =$$

$$= \frac{1}{9}\left[e^{2t} - e^{-t}(3t+1)\right].$$

c) Avem:

$$F(p) = \frac{p+1}{p(p^2+2p+10)} = \frac{1}{p}\cdot\frac{p+1}{(p+1)^2+9} \text{ şi}$$

$$\frac{1}{p} \div 1;\ \frac{p+1}{(p+1)^2+9} \div e^{-t}\cdot\cos 3t,\ \mathrm{Re}\,p > 0.$$

Prin urmare,

$$F(p) \div \int_0^t e^{-\theta}\cos 3\theta\cdot 1\cdot d\theta = \int_0^t e^{-\theta}\cos 3\theta d\theta.$$

Utilizând formula ([17], 4.1.2, pag.298)

$$\int e^{ax}\cos bx\cdot dx = \frac{e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx)}{a^2+b^2} + C,$$

obţinem că



$$F(p) \div \frac{e^{-\theta}(3\sin 3\theta - \cos 3\theta)}{1+9}\Big|_0^t = \frac{e^{-t}(3\sin 3t - \cos 3t) + 1}{10}.$$

**Teorema 2 (Duhamel).** Fie $f_1(t)$ şi $f_2(t)$ sunt funcţii original cu indicele de creştere $s_1$ şi respectiv $s_2$. Dacă $f_1(t) \div F_1(p)$ şi $f_2(t) \div F_2(p)$ şi $f_2'(t)$ este original, atunci $f_2(0)\cdot f_1(t) + (f_1 * f_2') \div pF_1(p)\cdot F_2(p), \mathrm{Re}\,p > \max(s_1, s_2)$.

**Demonstraţie.** Avem:

$$pF_1(p)\cdot F_2(p) = pF_1(p)\cdot F_2(p) - f_2(0)\cdot F_1(p) + f_2(0)\cdot F_1(p) =$$

$$= F_1(p)\cdot[pF_2(p) - f_2(0)] + f_2(0)\cdot F_1(p);$$

$$f_2'(t) \div pF_2(p) - f_2(0).$$

Aplicând teorema lui Borel şi proprietatea de linearitate, urmează că:

$$pF_1(p)\cdot F_2(p) \div (f_1 * f_2')(t) + f_2(0)\cdot f_1(t),$$

ceea ce trebuia de demonstrat.

Teorema lui Duhamel se utilizează la rezolvarea unor ecuaţii diferenţiale ordinare cu condiţii iniţiale nule (vezi 10.4.1).

### 10.2.9. Inmulţirea funcţiilor original.

Are loc următoarea teoremă.

**Teorema 1** (teorema despre înmulţirea funcţiilor original). Dacă

$$f_1(t) \div F_1(p),\ \mathrm{Re}\,p > s_1,\ f_2(t) \div F_2(p),\ \mathrm{Re}\,p > s_2,$$

atunci

$$f_1(t)\cdot f_2(t) \div F(p) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\lim_{b\to\infty}\int_{s-bi}^{s+bi} F_1(u)\cdot F_2(p-u)du =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{s-i(\infty)}^{s+i(\infty)} F_1(u)\cdot F_2(p-u)du, \qquad (1)$$

unde $\mathrm{Re}\,u = s > s_1$, $\mathrm{Re}(p-u) > s_2$. Adică $\mathrm{Re}\,p > s_1 + s_2$.

**Demonstrație.** În virtutea proprietății 3 e) din 10.1.1, obținem că funcția $f_1(t)\cdot f_2(t)$ este original cu indicele de creștere $s_0 = s_1 + s_2$. Aceasta înseamnă (vezi teoreama 1 din 10.1.1) că funcția

$$F(p) = \int_0^\infty f_1(t)\cdot f_2(t)\cdot e^{-pt}dt$$

este absolut convergentă pe semiplanul complex $\operatorname{Re} p > (s_1 + s_2)$ și uniform convergentă pe orice semiplan complex

$$\operatorname{Re} p = s \geq s_3,$$

unde $s_3 > s_0 = s_1 + s_2 \geq 0$.

Utilizând formula (8) din 10.1.2 (numită *formula Mellini*) pentru funcția $f_1(t)$, obținem că:

$$F(p) = \int_0^\infty f_1(t)\cdot f_2(t)\cdot e^{-pt}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_0^\infty\left[\int_{s-i(\infty)}^{s+i(\infty)} F_1(u)\cdot e^{ut}du\right] f_2(t)\cdot e^{-pt}dt,\ \operatorname{Re} u = s > s_1.$$

Schimbând ordinea de integrare, urmează că

$$F(p) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{s-i(\infty)}^{s+i(\infty)}\left[\int_0^\infty f_2(t)\cdot e^{-(p-u)t}dt\right]\cdot F_1(u)du =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{s-i(\infty)}^{s+i(\infty)} F_1(u)\cdot F_2(p-u)du,$$

unde $\operatorname{Re} u = s > s_1$, și $\operatorname{Re}(p-u) > s_2$. Teorema este demonstrată.



Dacă însă funcția $f_2(t)$ este înlocuită prin formula lui Mellini

$$f_2(t) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{s-i(\infty)}^{s+i(\infty)} F_2(u)\cdot e^{ut}du,$$

atunci formula (1) se transformă în formula

$$F(p) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{s-i(\infty)}^{s+i(\infty)} F_1(p-u)\cdot F_2(u)du, \qquad (2)$$

unde $\operatorname{Re} u = s > s_2$, $\operatorname{Re} p > s_0 = s_1 + s_2$.

**Teorema 2.** (Parsevalle (1755-1836-matematician francez)). Dacă

$$f_1(t) \div F_1(p),\ f_2(t) \div F_2(p),\ \operatorname{Re} p > 0$$

și integralele improprii reale

$$\int_0^\infty f_1(x)\cdot F_2(x)dx,\ \int_0^\infty f_2(x)\cdot F_1(x)dx$$

sunt absolut convergente pe $[0,+\infty[$, atunci ele sunt egale:

$$\int_0^\infty f_1(x)\cdot F_2(x)dx = \int_0^\infty f_2(x)\cdot F_1(x)dx \qquad (3)$$

Formula (3) se numește *formula lui Parsevalle*.

**Demonstrație.**

Întrucât

$$F_1(p) = \int_0^\infty f_1(t)\cdot e^{-pt}dt,\ F_2(p) = \int_0^\infty f_2(t)\cdot e^{-pt}dt,\ \operatorname{Re} p > 0$$

și considerând $p = x \in R$, obținem:

$$F_1(x) = \int_0^\infty f_1(t)\cdot e^{-xt}dt, x > 0,$$

$$F_2(x) = \int_0^\infty f_2(t)\cdot e^{-xt}dt, x > 0.$$

Deci

$$f_1(x)\cdot F_2(x)=f_1(x)\cdot\int_0^{\infty}f_2(t)\cdot e^{-xt}dt.$$

Integrând această egalitate în raport cu variabila reală $x$ în limitele de la 0 la $+\infty$, obţinem că

$$\int_0^{\infty}f_1(x)\cdot F_2(x)\cdot dx=\int_0^{\infty}f_1(x)\cdot\left[\int_0^{\infty}f_2(t)\cdot e^{-xt}dt\right]dx.$$

Integrala din partea dreaptă a relaţiei astea este o integrală dublă reală extinsă pe domeniul limitat de dreptele $t=0$, $x=0$, $t=a$, $x=b$, unde $a\to+\infty$ şi $b\to+\infty$. Schimbând ordinea de integrare, egalitatea de mai sus se transformă în relaţia

$$\int_0^{\infty}f_1(x)\cdot F_2(x)\cdot dx=\int_0^{\infty}f_2(t)dt\cdot\int_0^{\infty}f_1(x)\cdot e^{-xt}dx=$$

$$=\int_0^{\infty}f_2(t)\cdot F_1(t)dt=\int_0^{\infty}f_2(x)\cdot F_2(x)dx.$$

Teorema este demonstrată.

Teorema lui Paresvalle se utilizează la calcularea unor integrale improprii reale (vezi 10.4.3).



### 10.2.10. Exerciţii şi răspunsuri la paragraful 10.2.

1. Fiind date imaginile funcţiilor $e^t$, $\sin t$, $\cos t$ şi utilizând teorema asemănării, să se determine imaginile funcţiilor: a) $e^{6t}$; b) $e^{8t}$; c) $\sin 9t$; d) $\cos 4t$; e) $\mathrm{sh}3t$.

2. Utilizând proprietatea de linearitate şi teorema asemănării, să se afle imaginile funcţiilor: a) $\sin^3 t$; b) $\cos^3 t$; c) $\sin^4 t$; d) $\sin a\cdot\cos bt$; e) $\sin at\cdot\sin bt$; f) $\cos at\cdot\cos bt$.

3. Utilizând teorema întârzierii, să se calculeze imaginile funcţiilor: a) $\cos(t-5)$, $t\geq5$; b) $\sin 3(t-4)$, $t\geq4$; c) $e^{(t-6)}$, $t\geq6$; d) $(t-1)^2$, $t\geq1$.

4. Utilizând teorema deplasării şi proprietatea de linearitate să se determine imaginile funcţiilor: a) $e^{2t}\sin t$; b) $e^t\cos nt$; c) $e^{-t}\cdot t^3$; d) $e^t\mathrm{sh}\ t$; e) $e^{3t}\sin^2 t$; f) $e^{-at}\cos^2 bt$; g) $e^{-5t}\sin 2t\cdot\cos t$; h) $e^{2t}\cos 5t\cdot\cos 3t$; i) $e^{3t}\cos 3t\cdot\sin 2t$; j) $e^{-4t}\cos 2t\cdot\cos 5t$.

5. Utilizând proprietatea de linearitate şi teoremele 10.2.1, 10.2.2, 10.2.3., să se afle imaginile funcţiilor: a) $e^{2(t-6)}\cdot\sin(t-6)$, $t\geq6$; b) $e^{4(t-5)}\cdot\cos(t-5)$, $t\geq5$; c) $\cos(3t-4)$, $t\geq\frac{4}{3}$; d) $\sin(5t-3)$, $t\geq\frac{3}{5}$.

6. Utilizând derivarea originalului, să se determine imaginile funcţiilor: a) $\cos 2t$; b) $\sin^3 t$; c) $t\sin at$; d) $t\cos at$; e) $te^{4t}$; f) $\cos^4 t$.

7. Utilizând derivarea imaginii, să se afle imaginea funcţiei: a) $t^2\cos 3t$; b) $t^2\sin 4t$; c) $t(e^t+cht)$; d) $(t+1)\sin 2t$; e) $t\ sh3t$.

8. Utilizând integrarea originalului, să se determine imaginea funcției: a) $\int_0^t \sin u \cdot du$; b) $\int_0^t \cos(au)du$; c) $\int_0^t sh u \cdot du$;

d) $\int_0^t (u+1)\cos(at)dt$; e) $\int_0^t u \cdot sh(2u)\cdot du$; f) $\int_0^t \cos^2(au)\cdot du$;

g) $\int_0^t ch(au)du$; h) $\int_0^t u^2 \cdot e^{-u}\cdot du$.

9. Utilizând integrarea imaginii, să se afle imaginea funcțiilor: a) $\frac{sh^2 t}{t}$; b) $\frac{\sin 7t \cdot \sin 3t}{t}$; c) $\frac{e^t-1}{t}$; d) $\frac{1-e^{-t}}{t}$;

e) $\frac{1-\cos t}{t}$; f) $\frac{\cos t - \cos 2t}{t}$; g) $\frac{e^t-1-t}{t}$; h) $\frac{e^t-e^{-t}}{t}$.

10. Să se determine imaginile funcțiilor: a) $\frac{e^{-2t}\sin^2 3t}{t}$;

b) $\frac{\cos 6t - \cos 2t}{t}$; c) $\frac{1-e^{-4t}}{t\cdot e^t}$; d) $e^{3(t-5)}\cdot\sin(t-5)$, $t\geq 5$;

e) $\int_0^t e^{t-u}\cdot \sin u \cdot du$; f) $\int_0^t \cos(t-u)e^{2u}\cdot du$;

g) $\int_0^t (t-u)^2 chu \cdot du$; h) $\int_0^t e^{-2(t-u)}\cdot u^2\cdot du$; i) $\int_0^t (t-u)e^{4u}\cdot du$.



## Răspunsuri

1. a) $\frac{1}{p-6}$; b) $\frac{1}{p-8}$; c) $\frac{9}{p^2+81}$; d) $\frac{p}{p^2+16}$;

e) $\frac{3}{p^2-9}$.

2. a) $\frac{6}{(p^2+1)(p^2+9)}\left[\sin^3 t = \frac{1}{2}(1-\cos 2t)\cdot\sin t = \frac{1}{4}(3\sin t - \sin 3t)\right]$;

b) $\frac{p(p^2+7)}{(p^2+1)(p^2+9)}\Big(\cos^3 t = \cos^2 t\cdot\cos t = \frac{1}{2}(\cos t +$

$+\cos 2t\cdot\cos t) = = \frac{1}{4}(3\cos t + \cos 3t)$

c) $\frac{1}{8}\left(\frac{3}{p}+\frac{p}{p^2+16}-\frac{4p}{p^2+1}\right)\Big(\sin^4 t = \frac{1}{4}(1-\cos 2t)^2 =$

$=\frac{1}{4}\left[1-2\cos 2t+\frac{1}{2}(1+\cos 4t)\right]\Big)$;

d) $\frac{a(p^2+a^2-b^2)}{(p^2+a^2+b^2)^2-(4ab)^2}$;

e) $\frac{2abp}{(p^2+a^2+b^2)-(4ab)^2}$;

f) $\frac{p(p^2+a^2+b^2)}{(p^2+a^2+b^2)-(4ab)^2}$.

3. a) $\frac{p}{p^2+1}e^{-5p}$; b) $\frac{3}{p^2+9}\cdot e^{-4p}$; c) $\frac{1}{p+1}e^{-6p}$;

d) $\frac{2}{p^3}e^{-p}$.

4. a) $\frac{1}{(p-2)^2+1}$; b) $\frac{p-1}{(p-1)^2+n^2}$; c) $\frac{6}{(p+1)^4}$;

d) $\frac{1}{(p-1)^2-1}$; e) $\frac{1}{2(p-3)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p-3}{(p-3)^2+4}$;

f) $\frac{1}{2(p+a)}+\frac{p+a}{2\left[(p+a)^2+4b^2\right]}$;

g) $\frac{1}{2}\left[\frac{3}{(p+5)^2+9}+\frac{1}{(p+5)^2+1}\right]$;

h) $\frac{1}{2}\left[\frac{p-2}{(p-2)^2+64}+\frac{p-2}{(p-2)^2+4}\right]$;

i) $\frac{1}{2}\left[\frac{5}{(p-3)^2+25}-\frac{1}{(p-3)^2+1}\right]$;

j) $\frac{1}{2}\left[\frac{p+4}{(p+4)^2+49}+\frac{p+4}{(p+4)^2+9}\right]$.

5. a) $\frac{e^{-6p}}{(p-2)^2+1}$; b) $\frac{p-4}{(p-4)^2+1}\cdot e^{-5p}$;

c) $\frac{p}{p^2+9}\cdot e^{-\frac{4}{3}p}$; d) $\frac{5}{p^2+25}\cdot e^{-\frac{3}{5}p}$.

6. a) $\frac{p^2+2}{p(p^2+4)}$; b) $\frac{6}{(p^2+1)(p^2+9)}$;

c) $\frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$; d) $\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$;

e) $\frac{1}{(p-4)^2}$; f) $\frac{p^4+16p^2+24}{p(p^2+4)(p^2+16)}$.



7. a) $\frac{2p(p^2-27)}{(p^2+9)^2}$; b) $\frac{8(3p^2-16)}{(p^2+16)^3}$;

c) $\frac{2(p^2+p+1)}{(p^2-1)^2}$; d) $\frac{2(p^2+2p+4)}{(p^2+4)^2}$;

e) $\frac{6p}{(p^2-1)^2}$.

8. a) $\frac{1}{p(p^2+1)}$; b) $\frac{1}{p^2+a^2}$; c) $\frac{1}{p(p^2-1)}$;

d) $\frac{p^3+p^2+pa^2-a^2}{p(p^2+a^2)^2}$; e) $\frac{4}{(p^2-4)^2}$; f) $\frac{p^2+2a^2}{p(p^2+4a^2)}$;

g) $\frac{1}{p^2-a^2}$; h) $\frac{2}{p(p+1)^3}$.

9. a) $\frac{1}{4}\ln\frac{p^2}{p^2-4}$; b) $\frac{1}{4}\ln\frac{p^2+100}{p^2+16}$; c) $\ln\frac{p}{p-1}$;

d) $\ln\frac{p+1}{p}$; e) $\ln\frac{\sqrt{p^2+1}}{p}$; f) $\frac{1}{2}\ln\frac{p^2+4}{p^2+1}$;

g) $\ln\frac{p}{p-1}$; h) $\ln\frac{p+1}{p-1}$;

10. a) $\frac{1}{4}\ln\frac{(p+2)^2+36}{(p+2)^2}$; b) $\frac{1}{2}\ln\frac{p^2+4}{p^2+36}$;

c) $\ln\frac{p-3}{p+1}$; d) $\frac{1}{(p-3)^2+1}\cdot e^{-5p}$; e) $\frac{1}{(p-1)(p^2+1)}$;

f) $\frac{p}{(p-2)(p^2+1)}$; g) $\frac{2}{p^2(p^2-1)}$; h) $\frac{2}{(p+2)p^3}$;

i) $\frac{2}{p^2(p-4)}$.

## 10.3. Calcularea originalului.

### 10.3.1. Restabilirea originalului după imaginea lui.

În 10.1. am introdus noţiunea de funcţie original şi funcţie imagine în transformata Laplace. Dacă se ştie funcţia original $f(t)$ cu indicele de creştere $s_0$, atunci funcţia imagine $F(p), \operatorname{Re} p > s_0$ se calculează după formula

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt} dt. \qquad (1)$$

În general calcularea integralei lui Laplace este un proces destul de complicat (a se consulta exemplul 2 din 10.1.2.). De aceea în practică în loc de formula (1) se utilizează diverse formule, ce reies din proprietăţile (teoremele) fundamentale ale calculului operaţional. Cu această ocazie a se consulta exemplele 3-12 din 10.2.

În acest paragraf ne vom ocupa cu problema inversă: fiind dată imaginea $F(p)$ în transformata (directă) Laplace, să se determine originalul ei. Constatăm cu această ocazie umătoarele:

1. Există diverse tabele de imagini ale funcţiilor elementare de bază publicate în anumite îndrumare (a se consulta anexa 1 şi [21]- [24]) cu ajutorul cărora după $F(p)$ se determină imediat funcţia $f(t)$.

2. În teorema 3 din 10.1.2. am arătat că dacă $F(p)$ este

a) analitică pe semiplanul complex $\operatorname{Re} p > s_0$;

b) absolut integrabilă de-a lungul oricărei drepte $\operatorname{Re} p = s_1, s_1 < s_0$;

c) în domeniul $\operatorname{Re} p = s > s_0$ funcţia $F(p)$ tinde către zero când $|p| \to +\infty$ în mod uniform în raport cu $\arg(p - s_0)$, atunci originalul $f(t)$ se calculează după aşa numita *formulă a lui Mellini*



$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{b \to \infty} \int_{s-ib}^{s+ib} F(p) \cdot e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i(\infty)}^{s+i(\infty)} F(p) \cdot e^{pt} dp, \qquad (2)$$

pentru $\operatorname{Re} p > s_0$ şi $t \geq 0$.

Dacă presupunem că $F(p)$ are un număr finit de puncte singulare izolate (poli şi puncte esenţiale): $p_1, p_2, \ldots, p_n$ şi $F(p) \to 0$, când $p \to \infty$ (în teoremă $\operatorname{Re} p > s_0$ şi $|p| \to \infty$), atunci $f(t)$ se calculează după formula

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Rez}_{p=p_k} [F(p) \cdot e^{pt}] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Rez}_{p=p_k} [F(p) \cdot e^{pt}], \ t \geq 0. \qquad (3)$$

3. Teoremele de bază ale calculului operaţional din 10.2. permit de a rezolva această problemă. Vom enumera în primul rând teoremele: deplasării (10.2.3.), derivarea şi integrarea imaginii (10.2.5. şi 10.2.7.) şi înmulţirea imaginilor (10.2.8.) (cu această ocazie a se consulta exemplul 14).

În continuare ne vom opri la două teoreme de bază (se mai numesc *prima teoremă a dezvoltării şi a doua teoremă a dezvoltării*), care permit rezolvarea problemei date , adică restabilirea originalului după imaginea lui.

**Teorema 1.** Dacă funcţia $F(p)$ este analitică în $p_0 = \infty$, adică dezvoltarea ei în seria Laurent are forma

$$F(p) = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \ldots + \frac{a_n}{p^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}, \qquad (4)$$

atunci $F(p)$ este imaginea originalului $f(t)$ calculat cu ajutorul formulei

$$f(t) = a_1 + \frac{a_2}{1!} t + \frac{a_3}{2!} t^2 + \ldots + \frac{a_{n+1}}{n!} t^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!} t^n. \qquad (5)$$

**Demonstrație.** Seria Laurent (4) este convergentă în orice r-vecinătate a punctului impropriu $p_0 = \infty$, adică pentru orice $|p| > r, r > 0$ sau $\frac{1}{|p|} < \frac{1}{r}$. Fie $p$ un astfel de punct.. Deci $\frac{1}{|p|} = \frac{1}{\rho} < \frac{1}{r} = r_1$ și seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\rho^n}$ este absolut convergentă. Prin urmare, $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{\rho^n} = 0$. Aceasta înseamnă că pentru orice $\varepsilon > 0$ și începând cu un oarecare număr natural $n$ se verifică inegalitatea $\left| \frac{a_n}{\rho^n} \right| < \varepsilon$, adică

$$|a_n| < \varepsilon \cdot \rho^n. \tag{6}$$

Considerăm seria (5) pentru $t \geq 0$. Utilizând inegalitatea (6), urmează că

$$\left| \frac{a_{n+1}}{n!} t^n \right| < \frac{\varepsilon \rho^{n+1} t^n}{n!} = (\varepsilon\rho) \frac{(\rho \cdot t)^n}{n!}.$$

Observăm că seria reală cu termeni pozitivi

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon\rho) \frac{(\rho \cdot t)^n}{n!} = (\varepsilon\rho) \left[ 1 + \frac{\rho \cdot t}{1!} + \frac{(\rho \cdot t)^2}{2!} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{(\rho \cdot t)^n}{n!} + \ldots \right] = (\varepsilon\rho) \cdot e^{\rho \cdot t}$$



reprezintă seria MacLaurin pentru funcția $(\varepsilon\rho) \cdot e^{\rho \cdot t}$. Deci această serie este convergentă pentru orice $t \geq 0$. Aplicând criteriul de comparație, constatăm că seria (5) este absolut convergentă pentru orice $t \geq 0$.

Avem:

$$|f(t)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!} t^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{n!} t^n \right| < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon \rho^{n+1}}{n!} t^n =$$

$$= \varepsilon\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho \cdot t)^n}{n!} = \varepsilon \cdot \rho \cdot e^{\rho \cdot t}$$

pentru orice $t \geq 0$.

Funcția $f(t)$ ca suma unei serii de puteri este analitică pe domeniul $\frac{1}{|p|} < \frac{1}{r} = r_1$ și este indefinit derivabilă pe acest domeniu (a se consulta nota 3 din 9.6.3.). Astfel $f(t)$ satisface toate condițiile din definiția originalului (10.1.1.). Prin urmare, funcția $f(t)$ din (5) este original.

Demonstrăm că $F(p) = L(f(t))$.

Înmulțind ambele părți ale relației (5) cu $e^{-p \cdot t}$, obținem de asemenea o serie absolut convergentă. Integrând-o termen cu termen, rezultă următoarele:

$$f(t) \div \int_0^{\infty} f(t) e^{-p \cdot t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \left( \int_0^{\infty} \frac{t^n}{n!} e^{-p \cdot t} dt \right). \tag{7}$$

Utilizând formula 16 din anexa 1 sau vezi ex. 10 b), din 10.2.5., adică

$$\frac{t^n}{n!} \div \frac{1}{\rho^{n+1}} = \int_0^\infty \frac{t^n}{n!} e^{-pt} dt,$$

urmează că relaţia (7) se transformă în formula

$$f(t) \div \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \cdot \frac{1}{\rho^{n+1}} = \frac{a_1}{p} + \ldots + \frac{a_n}{p^n} + \ldots =$$

$$= F(p), \operatorname{Re} p > s_0 \geq 0.$$

Teorema este demonstrată.

Teorema 1 se numeşte p r i m a *teoremă a dezvoltării.*

Constatăm că dacă variabila reală $t$ a funcţiei $f(t)$ este o variabilă complexă, atunci din inegalitatea (6) reiese că

$$|f(t)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+1}}{n!} t^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{n!} t^n\right| < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon \rho^{n+1}}{n!} |t^n| =$$

$$= \varepsilon\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho|t|)^n}{n!} = (\varepsilon\rho) \cdot e^{\rho|t|},$$

adică şi în acest caz $f(t)$, $t \in C$ este dezvoltabilă în serie de puteri pe planul complex $C$.

Aceasta înseamnă că $f(t)$ este analitică pe $C$, adică $f(t)$ este o funcţie întreagă.

Are loc şi teorema reciprocă teoremei 1:

**Teorema 2.** Dacă funcţia întreagă

$$f(z) = a_0 + \frac{a_1}{1!} z + \frac{a_2}{2!} z^2 + \ldots + \frac{a_n}{n!} z^n + \ldots$$

satisface condiţia

$$|f(z)| < M \cdot e^{|z| s_0}, M > 0, s_0 > 0,$$

atunci

$$F(p) = L(f(t)) = L(\sigma_0(t) \cdot f(t)) = \frac{a_0}{p} + \frac{a_1}{p^2} + \ldots + \frac{a_n}{p^{n+1}} + \ldots,$$

unde $\sigma_0(t)$ este funcţia lui Heaviside şi $t \geq 0$.

Demonstraţia teoremei 2 o puteţi găsi, de exemplu în [6], cap. 9, teorema 9.10.



Ca o ilustraţie practică a teoremei 2 considerăm următorul exemplu: seria MacLaurin pentru funcţia $\sin z$ are forma (formula (12) din 9.6.4.)

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots,$$

valabilă pentru orice $z \in C$. Deci funcţia $\sin z$ este întreagă, adică analitică pe $C$ şi pentru orice $t \geq 0$, $|\sin t| \leq M \cdot e^{ts_0}$, unde $M \geq 1$ şi $s_0 = 0$. Aplicând teorema 2, avem că

$$F(p) = L(\sin t) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^6} - \frac{1}{p^8} + \ldots =$$

$$= \frac{\frac{1}{p^2}}{1 + \frac{1}{p^2}} = \frac{1}{p^2 + 1}, |p| > 1,$$

ceea ce corespunde cu formula

$$\sin t \div \frac{1}{p^2 + 1},$$

demonstrată în exemplul 2 b) din 10.1.2.

**Exemplul 15**. Să se restabilească originalul, dacă imaginea lui $F(p) = \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right)$.

**Rezolvare.** Avem:

$$\ln(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{z^n}{n} + \ldots,$$

valabilă pentru $|z| < 1$ (a se vedea formula 22 din 9.6.4.).

Deci

$$F(p) = \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}\frac{1}{p^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{p^3} - \ldots +$$

$$+ (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{p^n} + \ldots,$$

valabilă pentru $\left|\frac{1}{p}\right| < 1$, adică $|p| > 1$.

Aplicând teorema 1, urmează că

$$f(t) = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{t}{1!} + \frac{1}{3}\cdot\frac{t^2}{2!} - \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} - \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{t^{n-1}}{n!} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{t}\left[t - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} - \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{t^n}{n!} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{1}{t}\left[1 - \left(1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \ldots + (-1)^n\cdot\frac{t^n}{n!} + \ldots\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{t}\left(1 - e^{-t}\right), t \geq 0.$$

**Teorema 3.** Pentru ca imaginea $F(p)$ să fie funcţie raţională este necesar şi suficient ca originalul $f(t)$ să fie combinaţie liniară a funcţiilor de forma $t^n e^{at}$, unde $n = 0,1,2,\ldots$, $a \in C$ şi $t \geq 0$.

**Demonstraţie. Suficienţa**. Fie $f(t)$ este o combinaţie liniară a funcţiilor de forma $t^n e^{at}$, $n = 0,1,2,\ldots$, $a \in C$ şi $t \geq 0$.

Întrucât avem formula 18 din anexa 1 sau vezi ex. 10 b) din 10.2.5., adică

$$t^n \cdot e^{at} \div \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}, n = 0,1,2,\ldots \tag{8}$$

şi, aplicând proprietatea de linearitate a transformatei Laplace (10.1.2.), urmează că imaginea $F(p)$ a funcţiei $f(t)$ este o combinaţie liniară a funcţiilor de forma $\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$, $n = 0,1,2,\ldots$, adică $F(p)$ este o funcţie raţională.

**Necesitatea.** Fie



$$F(p) = \frac{Q_m(p)}{R_n(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + \ldots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \ldots + a_n p^n},$$

unde $b_0, b_1, \ldots, b_m \neq 0$ şi $a_0, a_1, \ldots, a_n \neq 0$ sunt numere complexe, iar $m$ şi $n$ sunt numere naturale. Observăm că funcţia raţională $F(p)$ trebuie să fie regulată, adică $m < n$, deoarece în caz contrar $(m \geq n)$ $\lim\limits_{\operatorname{Re} p \to +\infty} F(p) \neq 0$, ceea ce contrazice consecinţa din teorema 1 (vezi 10.1.2.). Aceasta înseamnă că funcţia $\frac{Q_m(p)}{R_n(p)}, m \geq n$ nu poate servi ca original în sensul definiţiei din 10.1.1. Deci fie

$$F(p) = \frac{Q_m(p)}{R_n(p)}, m < n$$

o funcţie raţională regulată ireductibilă şi fie $p_1, p_2, \ldots, p_s$ rădăcinele polinomului $R_n(p)$ cu multiplcitatea $m_1, m_2, \ldots, m_s$, unde $m_1 + m_2 + \ldots + m_s = n$. Dezvoltăm funcţia $F(p)$ în funcţii raţionale simple (în cazul planului complex ele au forma $\frac{A_k}{(p-p_0)^k}$, unde $A_k \in C, k \in N$).

Obţinem că

$$F(p) = \frac{A_{11}}{(p-p_1)} + \frac{A_{12}}{(p-p_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1m_1}}{(p-p_1)^{m_1}} +$$

$$+ \frac{A_{21}}{(p-p_2)} + \frac{A_{22}}{(p-p_2)^2} + \ldots + \frac{A_{2m_2}}{(p-p_2)^{m_2}} +$$

$$+ \ldots + \frac{A_{s1}}{(p-p_s)} + \frac{A_{s2}}{(p-p_s)^2} + \ldots + \frac{A_{sm_s}}{(p-p_s)^{m_s}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{s}\sum_{l=1}^{m_s} \frac{A_{kl}}{(p-p_k)^l}, \tag{9}$$

unde numerele $A_{kl}$ $(k = 1,2,\ldots,s; l = 1,2,\ldots,m_s)$ se obţin cu ajutorul metodei coeficienţilor nedeterminaţi (a se consulta [17], 3.2.2.).

Aplicând formula (8) de mai sus şi proprietatea de linearitate a transformatei Laplace, rezultă că

$$f(t)=\sum_{k=1}^{s}\sum_{l=1}^{m_k}\frac{A_{kl}\cdot t^{l-1}}{(l-1)!}\cdot e^{p_k t},\ t\geq 0, \qquad (10)$$

În virtutea teoremei 4 din 10.1.2., funcţia original (10) ( $f(t)$ este continuă pe $[0,+\infty[$ cu indicele de creştere $s_0=\max\{|p_1|,|p_2|,...,|p_s|\}$.) este unică. Deci $f(t)$ este o combinaţie liniară de funcţii de forma $t^n e^{at}$ cu $n=0,1,2,...$ şi $a\in C$.

Teorema este complet demonstrată.

Teorema 3 permite de a enunţa următorul rezultat important, care se numeşte *teorema a doua de dezvoltare*:

**Teorema 4**. Fie $F(p)=\dfrac{Q_m(p)}{R_n(p)}, m<n$ o funcţie raţională regulată ireductibilă şi $p_1,p_2,...,p_s$ rădăcinile polinomului $R_n(p)$ de multiplicitatea $m_1,m_2,...,m_s$, unde $m_1+m_2+...+$ $+m_s=n$. Dacă dezvoltarea în funcţii raţionale simple are forma (9), atunci funcţia original $f(t)$ are forma (10).

**Notă**. Întrucât funcţia $F(p)$ din teorema 4 satisface condiţiile formulei (3) de mai sus, în practică pentru a calcula funcţia original $f(t)$ în loc de formula (10) se utilizează formula (3), adică

$$f(t)=\sum_{k=1}^{s}\operatorname*{Rez}_{p=p_k}\left[F(p)e^{pt}\right], t\geq 0. \qquad (11)$$

**Exemplul 16**. Să se restabilească originalul după imaginea lui dacă

a) $F(p)=\dfrac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)}$,

b) $F(p)=\dfrac{1}{(p^2-4p+8)^3}$.



**Rezolvare**.

a) Rădăcinile polinomului $R_4(p)=p^2(p-1)(p+2)$ sunt $p_1=0$, $p_2=1$, $p_3=-2$ de multiplicitatea $m_1=2, m_2=1$, $m_3=1$.

Descompunem funcţia raţională regulată $F(p)$ în funcţii raţionale simple:

$$F(p)=\frac{A_1}{p}+\frac{A_2}{p^2}+\frac{B}{p-1}+\frac{C}{p+2}=$$

$$=\frac{A_1 p(p-1)(p+2)+A_2(p-1)(p+2)+Bp^2(p+2)+Cp^2(p-1)}{p^2(p-1)(p+2)}$$

Din egalitatea acestor două fracţii raţionale (cu acelaşi numitor) urmează identitatea

$$p+1=A_1p(p-1)(p+2)+A_2(p-1)(p+2)+$$

$$+Bp^2(p+2)+Cp^2(p-1)$$

Dând valorile $p=0,1,-2$ şi 2 obţinem respectiv $A_2=-\dfrac{1}{2}$, $B=\dfrac{2}{3}, C=\dfrac{1}{12}$ şi $A_1=-\dfrac{3}{4}$.

Prin urmare,

$$F(p)=-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p-1}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{p+2}$$

şi aplicând formula (10), avem că

$$f(t)=-\frac{3}{4}\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot t+\frac{2}{3}\cdot e^t+\frac{1}{12}\cdot e^{-2t}=$$

$$=\frac{1}{12}\left(e^{-2t}+8e^t-6t-9\right), t\geq 0.$$

b) În acest caz e mai raţional de utilizat formula (11) de mai sus şi teorema deplasării din 10.2.3., deoarece dezvoltarea funcţiei raţionale $F(p)$ în funcţii raţionale simple şi calcularea coeficienţilor $A_{kl}$ din formula (10) este destul de complicată.

Aşadar avem:

$$F(p)=\frac{1}{\left(p^2-4p+8\right)^3}=\frac{1}{\left[(p-2)^2+4\right]^3}.$$

Considerăm funcţia raţională

$$\Phi_1(p)=\frac{1}{\left(p^2+4\right)^3}.$$

Rădăcinile numitorului sunt $p_{1,2}=\pm 2i$, ambele rădăcini având multiplicitatea $m=3$. Deci pentru funcţia $\Phi(p)=\Phi_1(p)\cdot e^{pt}=\frac{e^{pt}}{\left(p^2+4\right)^3}$ punctele $p_{1,2}=\pm 2i$ sunt poli de ordinul 3.

Prin urmare (vezi formula (5) din 9.7.1.),

$$\operatorname*{Re z}_{p=2i}\left[\Phi_1(p)\cdot e^{pt}\right]=\frac{1}{2!}\lim_{p\to 2i}\left[\frac{1}{(p-2i)^3(p+2i)^3}e^{pt}(p-2i)^3\right]''=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{p\to 2i}\left[\frac{te^{pt}(p+2i)^3-e^{pt}3(p+2i)^2}{(p+2i)^6}\right]'=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{p\to 2i}\left[\frac{e^{pt}(tp+2it-3)}{(p+2i)^4}\right]'=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{p\to 2i}\frac{\left[te^{pt}(tp+2it-3)+e^{pt}t\right](p+2i)^4-e^{pt}(tp+2it-3)4(p+2i)^3}{(p+2i)^8}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{p\to 2i}\frac{te^{pt}(tp+2it-2)(p+2i)-e^{pt}4(tp+2it-3)}{(p+2i)^5}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{te^{2it}(2it+2it-2)\cdot 4i-e^{2it}4(2it+2it-3)}{(4i)^5}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4e^{2it}\left(-4t^2-2it-4it+3\right)}{4^5 i}=$$

$$=\frac{2}{i}\cdot\frac{e^{2it}\left(-4t^2-6it+3\right)}{4^5}=\frac{e^{2it}}{128}\left(\frac{t^2}{-i}-\frac{3}{2}t+\frac{3}{4i}\right).$$



Similar

$$\operatorname*{Re z}_{p=-2i}\left[\Phi_1(p)\cdot e^{pt}\right]=\frac{1}{2!}\lim_{p\to -2i}\left[\frac{e^{pt}(p+2i)^3}{(p-2i)^3(p+2i)^3}\right]''=$$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{p\to -2i}\left[\frac{e^{pt}}{(p-2i)^3}\right]''=\frac{e^{-2it}}{128}\left(\frac{t^2}{i}-\frac{3}{2}t-\frac{3}{4i}\right).$$

Aplicând formula (11), avem că

$$\varphi(t)=\operatorname*{Re z}_{p=2i}\left[\Phi_1(p)\cdot e^{pt}\right]+\operatorname*{Re z}_{p=-2i}\left[\Phi_1(p)\cdot e^{pt}\right]=$$

$$=\frac{1}{128}\left(\frac{3-4t^2}{2}\cdot\frac{e^{2it}-e^{-2it}}{2i}-3t\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{128}\left(\frac{3-4t^2}{2}\sin 2t-3t\cos 2t\right)=$$

$$=\frac{1}{256}\left[\left(3-4t^2\right)\sin 2t-6t\cos 2t\right].$$

Întrucât $\varphi(t)\div\Phi_1(p)$ şi

$$\Phi_1(p-2)=\frac{1}{\left[(p-2)^2+4\right]^3}=\frac{1}{\left(p^2-4p+8\right)^3}=F(p),$$

în virtutea teoremei de deplasare (10.2.3.), obţinem rezultatul final:

$$f(t)=e^{2t}\cdot\varphi(t)=\frac{e^{2t}}{256}\left[\left(3-4t^2\right)\sin 2t-6t\cos 2t\right],\ t\geq 0.$$

### 10.3.2. Exerciții și răspunsuri la paragraful 10.3.

1. Utilizând teorema întârzierii sau proprietatea de linearitate, să se restabilească originalul $f(t)$, dacă:

a) $F(p)=\frac{2e^{-p}}{p^3}$; b) $F(p)=\frac{e^{-2p}}{p-1}$; c) $F(p)=\frac{e^{-3p}}{p+3}$;

d) $F(p)=\frac{3-2p^3}{p^4}$; e) $F(p)=\frac{1}{p^2(p^2+1)}$;

f) $F(p)=\frac{4-p}{(p-2)^3}$; g) $F(p)=\frac{p+2}{p^2+4}$;

h) $F(p)=\frac{5p^3+5p^2-9p-18}{(p+3)p^3}$;

i) $F(p)=\frac{1}{p^2}(2+5e^{-p}+e^{-3p})$; j) $F(p)=\frac{e^{-3p}}{(p+1)^2}$;

k) $F(p)=\frac{e^{-p}}{p^2-1}+\frac{p\cdot e^{-2p}}{p^2-4}$.

2. Utilizând teorema lui Borel, să se restabilească originalul $f(t)$, dacă:

a) $F(p)=\frac{1}{(p-1)(p+2)}$; b) $F(p)=\frac{p}{(p+1)(p^2+4)}$;

c) $F(p)=\frac{1}{p^2(p+1)}$; d) $F(p)=\frac{p}{(p^2+1)(p^2+9)}$;

e) $F(p)=\frac{1}{p^2+2p-3}$; f) $F(p)=\frac{p}{(p^2+1)^2}$.

3. Utilizând teorema a doua de dezvoltare, să se calculeze originalul $f(t)$, dacă:

a) $F(p)=\frac{p-1}{p^2+3p}$; b) $F(p)=\frac{1}{(p+1)^2(p+2)}$;

c) $F(p)=\frac{p^2+1}{p(p+1)(p+2)}$; d) $F(p)=\frac{1}{p+2p^2+p^3}$;



e) $F(p)=\frac{1}{p^2+4p+3}$; f) $F(p)=\frac{p}{(p^3+1)}$;

g) $F(p)=\frac{1}{(p-1)^2(p+2)}$; h) $F(p)=\frac{4p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}$;

i) $F(p)=\frac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}$; j) $F(p)=\frac{p^2}{(p^2+4)(p^2+9)}$;

k) $F(p)=\frac{p-1}{p^2(p+1)(p-2)}$; l) $F(p)=\frac{1}{(p-1)^2(p-2)^3}$;

m) $F(p)=\frac{2p^3+p^2+2p+2}{p^5+2p^4+2p^3}$;

n) $F(p)=\frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$; o) $F(p)=\frac{1}{p^2(p^2+1)}$;

p) $F(p)=\frac{1}{p^3+4p^2+5p}$; r) $F(p)=\frac{p^2+2p-1}{p^3-2p^2+2p-1}$.

4. Utilizând prima teoremă de dezvoltare, să se afle originalul $f(t)$, dacă:

a) $F(p)=\frac{1}{p}\sin\frac{1}{p}$; b) $F(p)=\frac{1}{p}\cos\frac{1}{p}$; c) $F(p)=\frac{1}{p}e^{\frac{1}{p}}$;

d) $F(p)=\frac{6p^3+4p+1}{p^4+p^2}$; e) $F(p)=\frac{5p^3+3p^2+12p-12}{p^4-16}$.

**Răspunsuri**

1. a) $f(t)=(t-1)^2,\ t\geq 1$; b) $f(t)=e^{t-2},\ t\geq 2$;

c) $f(t)=e^{3(t-3)},\ t\geq 3$; d) $f(t)=\frac{1}{2}t^3-2,\ t\geq 0$;

e) $f(t)=t-\sin t,\ t\geq 0\left(F(p)=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2+1}\right)$;

f) $f(t)=t(t-1)\cdot e^{2t},\ t\geq 0\left(F(p)=\frac{2}{(p-2)^3}-\frac{1}{(p-2)^2}\right)$;

g) $f(t) = \cos 2t + \sin 2t,\ t \geq 0;$

h) $f(t) = 5(t + e^{-3t}) - 3t^2,\ t \geq 0\ \left(F(p) = \frac{5}{p+3} + \frac{5}{p^2} - \frac{6}{p^3}\right);$

i) $f(t) = 8(t-3),\ t \geq 3;$ j) $f(t) = (t-3)e^{-(t-3)},\ t \geq 3;$

k) $f(t) = sh(t-1) + ch(t-2),\ t \geq 2.$

2. a) $f(t) = \frac{1}{3}(e^t - 2^{-2t}),\ t \geq 0;$

b) $f(t) = \frac{1}{5}(2\sin 2t + \cos 2t - e^{-t}),\ t \geq 0;$

c) $f(t) = t - 1 + e^{-t},\ t \geq 0;$

d) $f(t) = \frac{1}{8}(\cos t - \cos 3t),\ t \geq 0;$

e) $f(t) = \frac{1}{4}(e^t - e^{-3t}),\ t \geq 0\ \left(F(p) = \frac{1}{(p+3)(p-1)}\right);$

f) $f(t) = \frac{1}{2}(t\cos t + \sin t),\ t \geq 0.$

3. a) $f(t) = \frac{1}{3}(4e^{-3t} - 1),\ t \geq 0;$

b) $f(t) = (t-1)\cdot e^{-t} + e^{2t},\ t \geq 0;$

c) $f(t) = \frac{1}{2} - 2e^{-t} + \frac{5}{2}e^{-2t},\ t \geq 0;$

d) $f(t) = 1 - (t+1)e^{-t},\ t \geq 0;$

e) $f(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t}),\ t \geq 0;$

f) $f(t) = \frac{1}{3}e^{\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \sqrt{3}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{1}{3}e^{-t},\ t \geq 0;$



g) $f(t) = \frac{1}{9}(e^{-2t} - e^t + 3te^t),\ t \geq 0;$

h) $f(t) = \frac{1}{8}\left[7e^t - e^{-t}(7\cos 2t - 11\sin 2t)\right],\ t \geq 0;$

i) $f(t) = \frac{1}{3}(\cos t - \cos 2t),\ t \geq 0;$

j) $f(t) = \frac{1}{5}(3\sin 3t - 2\sin 2t),\ t \geq 0;$

k) $f(t) = \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} + \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{12}e^{2t},\ t \geq 0;$

l) $f(t) = \frac{1}{2}(t^2e^{2t} - 4te^{2t} + 6e^{2t} - 2te^t - 6e^t),\ t \geq 0;$

m) $f(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2e^{-t}\sin t,\ t \geq 0;$

n) $f(t) = \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{15}\cdot e^{-t} - \frac{1}{10}\cos 2t - \frac{1}{5}\sin 2t),\ t \geq 0;$

o) $f(t) = t - \sin t,\ t \geq 0;$

p) $f(t) = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}e^{-2t}(4\sin t - 3\cos t),\ t \geq 0;$

r) $f(t) = 2e^t + e^{\frac{t}{2}}\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t - \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right),\ t \geq 0;$

4. a) $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot t^{2n+1}}{[(2n+1)!]^2},\ t \geq 0;$

b) $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot t^{2n}}{[(2n)!]^2},\ t \geq 0;$ c) $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{(n!)^2},\ t \geq 0;$

d) $f(t) = 4 + t + 2\cos t - \sin t,\ t \geq 0;$

e) $f(t) = 4ch2t + \cos 2t + \frac{3}{2}\sin 2t,\ t \geq 0.$

## 10.4. Aplicaţiile calculului operaţional.

Ideea aplicării calculului operaţional constă în următoarele: presupunem că trebuie de studiat un proces oarecare din natură, care este caracterizat de careva funcţii $x(t)$, $y(t)$,... , ce depind de timpul $t$. In limbajul matematic, aceasta înseamnă că între aceste funcţii de timp $x(t)$, $y(t)$,... , şi alte funcţii bine cunoscute, există o relaţie oarecare, adică o ecuaţie pe care trebuie s-o rezolvăm. Insă, sunt cazuri când ecuaţia ce leagă funcţiile imagine într-o transformare oarecare a acestei ecuaţii, numită *ecuaţie original*, se poate rezolva cu mult mai uşor. De exemplu, în 10.2.4. am constatat că operaţia de derivare din spaţiul funcţiilor original se transformă în operaţia de înmulţire cu $p$ în spaţiul funcţiilor imagine, dacă se face abstracţie de un polinom în $p$.

Astfel, operaţiile asupra funcţiilor imagine sunt mai simple decât operaţiile asupra funcţiilor iniţiale. Prin urmare, trecerea la rezolvarea ecuaţiei ce constituie funcţiile imagine este justificată. Rezolvând-o, aflăm funcţiile imagine şi apoi ne întoarcem la funcţiile iniţiale.

Pe parcursul acestui paragraf în calitate de astfel de transformări se vor considera transformările lui Laplace. Metoda rezolvării ecuaţiilor imagine se va numi *metodă bazată pe calculul operaţional* sau *metodă operaţională.*

### 10.4.1. Ecuaţii diferenţiale ordinare liniare şi sisteme de ecuaţii diferenţiale ordinare.

Fie o ecuaţie diferenţială liniară ordinară de ordinul $n$ cu coeficienţi constanţi

$$x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+\cdots+a_{n-1}x'(t)+a_nx(t)=f(t), \qquad (1)$$

unde $a_1, a_2, ...a_n$ sunt numere reale şi $f(t)$ este o funcţie de o variabilă reală $t \geq 0$.



Problema de bază (problema Cauchy) constă în aflarea soluţiei ecuaţiei (1), adică a funcţiei $x=x(t)$, $t\geq 0$, ce satisface ecuaţia (1) şi condiţiile iniţiale

$$x(0)=x_0, x'(0)=x_1,..., x^{(n-1)}(0)=x_{n-1}. \qquad (2)$$

Astfel problema pusă a fost deja rezolvată în cazul real după următorii paşi ([18],7.6.2. şi 7.6.5.):mai întâi se află soluţia generală a ecuaţiei (1), care depinde de $n$ constante arbitrare, apoi se determină constantele arbitrare astfel încât să fie verificate condiţiile iniţiale (2).

Aici vom expune o metodă mai simplă de rezolvare a acestei probleme: soluţia $x(t)$ se află în mod direct, fără a trece prin aşa numita soluţie generală a ecuaţiei (1).

Această metodă se bazează pe calculul operaţional şi constă în următoarele: ecuaţia (1) se înlocuieşte printr-o ecuaţie formată din imaginile termenilor ecuaţiei (1) în transformata Laplace.

Presupunem că există imaginea soluţiei ecuaţiei (1) şi a derivatelor ei până la ordinul $n$ inclusiv, cât şi imaginea funcţiei $f(t)$.

Dacă $x(t)\div X(p)$, $f(t)\div F(p)$, prin aplicarea în ambii membri ai ecuaţiei (1) a transformatei Laplace, în baza proprietăţii de linearitate (10.2.1.) şi a teoremei de derivare a originalului (10.2.4.), deoarece $x(0)=x_0, x'(0)=x_1,...,$ $x^{(n-1)}(0)=x_{n-1}$, obţinem următoarea ecuaţie algebrică liniară în raport cu necunoscuta $X(p)$:

$$\begin{gathered}\left[p^nX(p)-p^{n-1}x_0-...-x_{n-1}\right]+\\ +a_1\left[p^{n-1}X(p)-p^{n-2}x_0-...-x_{n-2}\right]+...+\\ +a_{n-1}\left[pX(p)-x_0\right]+a_nX(p)=F(p)\end{gathered}$$

sau

$$\begin{gathered}X(p)\left(p^n+a_1p^{n-1}+...+a_{n-1}p+a_n\right)-\\ -\left[\left(p^{n-1}x_0+...+x_{n-1}\right)+a_1\left(p^{n-2}x_0+...+x_{n-2}\right)+...+a_{n-1}x_0\right]=\end{gathered}$$

$$=F(p). \tag{3}$$

Deci

$$X(p)=\frac{F(p)+\Psi_{n-1}(p)}{\Psi_n(p)}, \tag{4}$$

unde $\psi_{n-1}(p)$ este un polinom de gradul *n-1* în raport cu variabila complexă *p*, iar $\psi_n(p)$ – polinom de gradul *n* în raport cu variabila complexă *p*. Ambele polinoame au coeficienţi reali. Dacă $p=k\in R$, atunci $\psi_n(p)=\psi_n(k)$ coincide cu aşa numitul p o l i n o m c a r a c t e r i s t i c al ecuaţiei (1) (a se consulta [18], 7.6.2. şi 7.6.5.). Ecuaţia (3) se numeşte *ecuaţie operaţională* a ecuaţiei (1) sau *ecuaţie L - imagine* a ecuaţiei (1).

Funcţia $X(p)$ din formula (4) este imaginea soluţiei $x(t)$ a ecuaţiei (1) în transformata Laplace şi care verifică condiţiile iniţiale (2).

Aplicând metodele din 10.3., după imaginea $X(p)$ din formula (4) se determină originalul $x(t)$, $t\geq 0$, care în virtutea unicităţii (teorema 4 din 10.1.2.) este soluţia ecuaţiei (1), ce verifică condiţiile iniţiale (2). Dacă privim valorile $x_0, x_1,\dots, x_{n-1}$ din relaţia (2) ca constante arbitrare $c_1, c_2,\dots, c_n$, atunci soluţia $x(t)$, astfel obţinută, va fi soluţia generală a ecuaţiei (1).

Considerăm un caz particular: fie numerele $x_0, x_1,\dots, x_{n-1}$ din relaţia (2) sunt egale cu zero. Atunci formula (4) ia forma

$$X(p)=\frac{F(p)}{\psi_n(p)}, \tag{5}$$

unde $F(p)$ este imaginea funcţiei $f(t)$, iar $\psi_n(p)$ este polinomul caracteristic al ecuaţiei (1), dacă $p=k\in R$.



Presupunem că se ştie soluţia $y(t)$ a ecuaţiei (1) cu $f(t)=1$, care verifică condiţiile iniţiale nule. Deoarece $t\geq 0$, avem: $\sigma_0(t)=1 \div \frac{1}{p}$.

Prin urmare, formula (4) are forma $Y(p)=\dfrac{1}{p\cdot\psi_n(p)}$ şi

$$X(p)=\frac{F(p)}{\psi_n(p)}=\frac{p\cdot F(p)}{p\cdot\psi_n(p)}=pF(p)\cdot Y(p).$$

Aplicând teorema lui Duhamel (teorema 2 din 10.2.8.), rezultă că

$$pF(p)\cdot Y(p)\div f(t)\cdot y(0)+\int_0^t f(u)\cdot y'(t-u)du=$$

$$=\int_0^t f(u)\cdot y'(t-u)du,$$

deoarece $y(0)=0$.

Aşadar soluţia $x(t)$ a ecuaţiei (1) cu condiţiile iniţiale nule se calculează după următoarea formulă:

$$x(t)=\int_0^t f(u)\cdot y'(t-u)du. \tag{6}$$

Avantajul utilizării formulei (6), adică a metodei Duhamel, se manifestă mai ales în cazul în care se cere de integrat mai multe ecuaţii diferenţiale liniare care diferă numai prin funcţiile $f(t)$.

**Exemplul 17**. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $x''+x=t$, dacă $x(0)=x'(0)=1$;

b) $x''+4x=8\sin 2t$, dacă $x(0)=c_1, x'(0)=c_2$;

c) $x''-3x'+2x=t\cdot e^{3t}$, dacă $x(1)=x'(1)=1$;

d) $x''-2x'=t^2\cdot e^t$, dacă $x(0)=x'(0)=0$.

**Rezolvare.**

a) Avem:

$$x(t) \div X(p);$$

$$x'(t) \div pX(p) - x(0) = pX(p) - 1;$$

$$x''(t) \div p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - p - 1;$$

$$t \div \frac{1}{p^2}.$$

Deci, ecuația L-imagine a ecuației date are forma

$$p^2X(p) - p - 1 + X(p) = \frac{1}{p^2}.$$

De unde

$$X(p) = \frac{1}{p^2+1}\left(\frac{1}{p^2} + p + 1\right) = \frac{1}{p^2+1}\left(\frac{1+p^2}{p^2} + p\right) =$$

$$= \frac{1}{p^2} + \frac{p}{p^2+1}.$$

Deoarece $\frac{1}{p^2} \div t$ și $\frac{p}{p^2+1} \div \cos t$, obținem că

$$x(t) = t + \cos t, t \geq 0.$$

b) Avem:

$$x(t) \div X(p);$$

$$x'(t) \div pX(p) - c_1;$$

$$x''(t) \div p^2X(p) - pc_1 - c_2;$$

$$8\sin 2t \div 8 \cdot \frac{2}{p^2+4} = \frac{16}{p^2+4}.$$

Deci, ecuația L-imagine atașată ecuației date are forma

$$p^2X(p) - pc_1 - c_2 + 4X(p) = \frac{16}{p^2+4}.$$

De unde

$$X(p) = \frac{16}{(p^2+4)^2} + c_1 \cdot \frac{p}{p^2+4} + c_2 \cdot \frac{1}{p^2+4}.$$



Funcțiile original pentru termenii $\frac{p}{p^2+4}$ și $\frac{1}{p^2+4}$ sunt:

$$\frac{p}{p^2+4} \div \cos 2t,$$

$$\frac{1}{p^2+4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{p^2+4} \div \frac{1}{2}\sin 2t \ , \ \operatorname{Re} p > 0.$$

Am utilizat formulele (6) și (7) din Anexa 1.

In ceea ce privește originalul pentru termenul $\frac{16}{(p^2+4)^2}$, vom utiliza formula

$$\frac{4p}{(p^2+4)^2} \div t\sin 2t$$

(vezi formula (20) din Anexa 1) și integrarea originalului (formula (1) din 10.2.6.):

$$\frac{16}{(p^2+4)^2} = 4 \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{4p}{(p^2+4)^2} \div 4\int_0^t u \cdot \sin 2u du =$$

$$= 4\left[-u \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos 2u + \frac{1}{4}\sin 2u\right]_0^t = \sin 2t - 2t\cos 2t.$$

Prin urmare,

$$x(t) = \sin 2t - 2t\cos 2t + c_1\cos 2t + \frac{1}{2}c_2\sin 2t, \ t \geq 0.$$

c) In exemplele precedente (și în partea teoretică), am considerat în condițiile inițiale $t_0 = 0$. In exemplul dat avem că $x(1) = x'(1) = 1$, adică momentul inițial nu este $t_0 = 0$, ci $t_0 = 1$. Pentru a-l reduce la momentul inițial $t_0 = 0$, facem substituția $\tau = t - 1$ sau $t = \tau + 1$. Ecuația inițială cu condițiile ei inițiale are forma

$$y'' - 3y' + 2y = (\tau+1) \cdot e^{3(\tau+1)} = (\tau+1) \cdot e^{3\tau} \cdot e^3,$$

unde

$$x(t)=x(\tau+1)=y(\tau);\ x'(t)=x'(\tau+1)=y'(\tau);$$
$$x''(t)=x''(\tau+1)=y''(\tau);$$
$$x(1)=x(t_0)=x(\tau_0+1)=y(0)=1;$$
$$x'(1)=x'(t_0)=x'(\tau_0+1)=y'(0)=1;\ \text{adică}\ \tau_0=t_0-1=0.$$

Rezolvând această ecuație, în raport cu $\tau$ obținem:

$$y(\tau)\div Y(p);$$
$$y'(\tau)\div pY(p)-1;$$
$$y''(\tau)\div p^2Y(p)-p-1;$$
$$(\tau+1)e^3\cdot e^{3\tau}=e^3(\tau e^{3\tau}+e^{3\tau})\div e^3\left(\frac{1}{(p-3)^2}+\frac{1}{p-3}\right)=$$
$$=e^3\cdot\frac{p-2}{(p-3)^2}.$$

Deci, ecuația L-imagine are forma

$$p^2Y(p)-p-1-3pY(p)+3+2Y(p)=e^3\cdot\frac{p-2}{(p-3)^2}.$$

De unde

$$Y(p)=\frac{1}{p^2-3p+2}\left(e^3\cdot\frac{p-2}{(p-3)^2}+p-2\right)=$$
$$=\frac{1}{(p-2)(p-1)}\left[e^3\cdot\frac{p-2}{(p-3)^2}+(p-2)\right]=$$
$$=e^3\cdot\frac{1}{(p-1)(p-3)^2}+\frac{1}{p-1}.$$

Avem:

$$\frac{1}{p-1}\div e^\tau\ \text{și}$$



$$\frac{1}{(p-1)(p-3)^2}=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{p-3}+\frac{C}{(p-3)^2}=$$
$$=\frac{A(p-3)^2+B(p-1)(p-3)+C(p-1)}{(p-1)(p-3)^2}.$$

Din egalitatea ultimelor fracții cu același numitor, urmează identitatea

$$1=A(p-3)^2+B(p-1)(p-3)+C(p-1).$$

Dând valorile $p=1$, $p=3$ și $p=0$, obținem respectiv

$$A=\frac{1}{4},\quad C=\frac{1}{2}\ \text{și}\ B=-\frac{1}{4}.$$

Astfel

$$\frac{1}{(p-1)(p-3)^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p-3}+2\frac{1}{(p-3)^2}\right)\div$$
$$\div\frac{1}{4}\left(e^\tau-e^{3\tau}+2\tau\cdot e^{3\tau}\right).$$

Prin urmare,

$$y(\tau)=\frac{1}{4}e^3\left(e^\tau-e^{3\tau}+2\tau\cdot e^{3\tau}\right)+e^\tau=\left(\frac{1}{4}e^3+1\right)e^\tau+\frac{2\tau-1}{4}\cdot e^{3(\tau+1)}\ \text{și}$$
$$x(t)=x(\tau+1)=y(\tau)=\left(\frac{1}{4}e^3+1\right)e^{t-1}+\frac{2(t-1)-1}{4}\cdot e^{3t}=$$
$$=\frac{e^3+4}{4e}\cdot e^t+\frac{2t-3}{4}\cdot e^{3t}.$$

d) Rezolvăm mai întâi ecuația diferențială

$$y''-2y'=1,\ \text{dacă}\ \ y(0)=y'(0)=0.$$

Avem:

$$y(t)\div Y(p);$$
$$y'(t)\div pY(p);$$

$$y''(t) \div p^2Y(p);$$

$$\sigma_0(t) = 1 \div \frac{1}{p}.$$

Ecuaţia L-imagine ataşată acestei ecuaţii are forma

$$p^2Y(p) - 2pY(p) = \frac{1}{p}.$$

De unde

$$Y(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p^2 - 2p} = \frac{1}{p^2(p-2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p-2} =$$

$$= \frac{Ap(p-2) + B(p-2) + Cp^2}{p^2(p-2)}.$$

Din egalitatea fracţiilor respective cu acelaşi numitor, rezultă identitatea

$$1 = Ap(p-2) + B(p-2) + Cp^2.$$

Dând valorile $p=0$, $p=2$ şi $p=1$, obţinem respectiv

$$B = -\frac{1}{2}, \ C = \frac{1}{4} \text{ şi } A = -\frac{1}{4}.$$

Aşadar

$$Y(p) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p-2} \div -\frac{1}{4} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot t + \frac{1}{4}e^{2t} \text{ şi}$$

$$y(t) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}e^{2t}.$$

Aplicând formula (6) cu

$$y'(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2t} = \frac{1}{2}(e^{2t} - 1),$$

urmează că

$$x(t) = \int_0^t f(u) \cdot y'(t-u)du = \frac{1}{2}\int_0^t u^2 \cdot e^u (e^{2(t-u)} - 1)du =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t (e^{2t} \cdot u^2 \cdot e^{-u} - u^2 e^u)du = 1 + e^{2t} - 2e^t - t^2 e^t, t \geq 0.$$



Transformata Laplace se poate aplica şi la integrarea unor ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi variabili, în cazul în care coeficienţii ei (adică $a_1, a_2, ..., a_n$ din ecuaţia (1)) sunt polinoame în raport cu variabila $t$. In acest caz se utilizează teorema despre derivarea imaginii (10.2.5.): dacă $x(t) \div X(p)$, atunci

$$t^n \cdot x(t) \div (-1)^n \cdot X^{(n)}(p) \text{ şi}$$

$$t^n \cdot x^{(k)}(t) \div (-1)^n \left[p^k X(p) - p^{k-1}x_0 - ... - x_{k-1}\right]^{(n)},$$

pentru orice $n \in N$ şi orice $k \in N$.

Prin urmare, ecuaţia L-imagine ataşată ecuaţiei (1) cu condiţiile iniţiale (2), se transformă într-o ecuaţie diferenţială în raport cu funcţia $X(p)$, ordinul căreia coincide cu exponentul maximal al variabilei $t$ din coeficienţii $a_1, a_2, ..., a_n$. Aflând funcţia $X(p)$ din această ecuaţie diferenţială, restabilim după ea originalul $x(t)$, care serveşte ca soluţie a ecuaţiei (1) cu condiţiile iniţiale (2).

**Exemplul 18.** Să se integreze ecuaţiile diferenţiale:

a) $tx'' + 2x' + 4tx = 1$, dacă $x(0) = 0, x'(0) = \frac{1}{2}$;

b) $tx'' + x' + tx = 0$, dacă $x(0) = 1, x'(0) = 0$;

**Rezolvare.**

a) Avem:

$$x(t) \div X(p);$$

$$t \cdot x(t) \div -X'(p);$$

$$x'(t) \div pX(p);$$

$$x''(t) \div p^2X(p)-\frac{1}{2};$$

$$t\cdot x''(t) \div -\left[p^2X(p)-\frac{1}{2}\right]'_p = -\left[2pX(p)+p^2X'(p)\right];$$

$$1 \div \frac{1}{p}.$$

Ecuația L-imagine atașată ecuației date are forma

$$-2pX(p)-p^2X'(p)+2pX(p)-4X'(p)=\frac{1}{p}.$$

De unde

$$X'(p)=-\frac{1}{p\left(p^2+4\right)}=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+4}\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{p}{p^2+4}-\frac{1}{p}\right).$$

Această ecuație diferențială este o ecuație cu variabile separabile. Deci,

$$X(p)=\frac{1}{4}\int\left(\frac{p}{p^2+4}-\frac{1}{p}\right)dp=\frac{1}{8}\left[\ln\left(p^2+4\right)-2\ln p\right]+A=$$
$$=\frac{1}{8}\ln\frac{p^2+4}{p^2}+A=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\ln\frac{p^2+4}{p^2}+A\cdot 1$$

unde $A$ este o constantă arbitrară (a se consulta 9.5.3.).

Utilizând formulele (28) și (4) din Anexa 1 și proprietatea de linearitate, urmează că

$$x(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2 t}{t}+A\cdot\delta(t),$$



unde $\delta(t)$ este funcția lui Dirac. Deoarece $\delta(t)=\begin{cases} o, t\neq 0, \\ \infty, t=0 \end{cases}$ și $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$ (vezi, de exemplu,[14], cap.12, §2.3.), obținem că

$$x(t)=\frac{\sin^2 t}{2t}, t>0.$$

b) Avem:

$$x(t)\div X(p);$$
$$t\cdot x(t)\div -X'(p);$$
$$x'(t)\div pX(p)-1;$$
$$x''(t)\div p^2X(p)-p;$$
$$tx''(t)\div -\left[p^2X(p)-p\right]'_p=1-2p\cdot X(p)-p^2\cdot X'(p);$$
$$0\cdot 1\div 0\cdot\frac{1}{p}.$$

Ecuația L-imagine atașată ecuației date are forma

$$-2pX(p)-p^2X'(p)+1+pX(p)-1-X'(p)=0 \text{ sau}$$
$$\left(p^2+1\right)X'(p)+pX(p)=0.$$

Această ecuație diferențială de ordinul 1, în raport cu funcția imagine $X(p)$, este o ecuație cu variabile separabile.

Deci

$$\frac{dX(p)}{X(p)}=-\frac{pdp}{p^2+1}.$$

Integrând, obținem că

$$\ln X(p)=-\frac{1}{2}\ln\left(p^2+1\right)+\ln A,$$

de unde $X(p)=\frac{A}{\sqrt{p^2+1}}$, $A\in C\setminus\{0\}$.

Aplicând prima teoremă de dezvoltare şi formula (14) din 9.6.4. cu $m=-\frac{1}{2}$ şi $z=\frac{1}{p^2}$, rezultă că

$$X(p)=A(p^2+1)^{-\frac{1}{2}}=A\cdot p^{-1}\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{A}{p}\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2}+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\cdot\frac{1}{p^4}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\cdot\frac{1}{p^6}+\ldots\right)=$$

$$=A\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2\cdot 1!}\cdot\frac{1}{p^3}+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\cdot\frac{1}{p^5}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\cdot\frac{1}{p^7}+\ldots\right)\div$$

$$\div A\left(1-\frac{t^2}{2\cdot 1!\cdot 2!}+\frac{1\cdot 3\cdot t^4}{2^2\cdot 2!\cdot 4!}-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot t^6}{2^3\cdot 3!\cdot 6!}+\ldots\right)=x(t).$$

Deoarece $x(0)=1$, avem că $A=1$.

Deci,

$$x(t)=1-\frac{t^2}{2^2\cdot(1!)^2}+\frac{t^4}{2^4\cdot(2!)^2}-\frac{t^6}{2^6\cdot(3!)^2}+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{t^{2n}}{2^{2n}\cdot(n!)^2}.$$

Suma acestei serii numerice se numeşte *funcţie Bessel* de ordinul zero, şi se notează astfel: $B_0(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(t\sin\theta)d\theta$ (a se consulta) [6], cap.9, §5).

Prin urmare, am demonstrat formula

$$B_0(t)\div\frac{1}{\sqrt{p^2+1}},\ \operatorname{Re}p>0.$$



Metoda bazată pe calculul operaţional poate fi utilizată şi la rezolvarea sistemelor de ecuaţii diferenţiale liniare ordinare. In acest caz, fiecărei ecuaţii diferenţiale din sistemul considerat i se ataşează ecuaţia L-imagine respectivă şi apoi se rezolvă sistemul format din aceste ecuaţii imagine.

Constatăm că sistemul format din ecuaţiile L-imagine reprezintă un sistem de ecuaţii liniare algebrice în raport cu imaginea funcţiilor necunoscute. Vom ilustra această metodă printr-un exemplu.

**Exemplul 19.** Să se rezolve sistemul de ecuaţii diferenţiale:

$$\begin{cases} x_t' = y+z,\\ y_t' = z+x,\\ z_t' = x+y,\end{cases}$$

dacă $x(0)=1, y(0)=z(0)=0$.

**Rezolvare.** Avem:

$$x(t)\div X(p), x'(t)\div pX(p)-1;$$

$$y(t)\div Y(p), y'(t)\div pY(p);$$

$$z(t)\div Z(p), z'(t)\div pZ(p).$$

Ecuaţiile L-imagine ataşate acestor trei ecuaţii iniţiale au forma

$$\begin{cases} pX(p)-1=Y(p)+Z(p),\\ pY(p)=X(p)+Z(p),\\ pZ(p)=X(p)+Y(p).\end{cases}$$

Am obţinut următorul sistem de ecuaţii liniare algebrice în raport cu necunoscutele $X(p), Y(p), Z(p)$:

$$\begin{cases} pX(p)-Y(p)-Z(p)=1, \\ X(p)-pY(p)+Z(p)=0, \\ X(p)+Y(p)-pZ(p)=0. \end{cases}$$

Aplicăm metodele algebrice de rezolvare a acestui sistem, de exemplu metoda lui Cramer. Calculăm determinantul principal $\Delta$ şi determinanţii auxiliari $\Delta_1, \Delta_2$ şi $\Delta_3$ ai sistemului dat. Deci

$$\Delta = \begin{vmatrix} p & -1 & -1 \\ 1 & -p & 1 \\ 1 & 1 & -p \end{vmatrix} = p^3-1-1-p-p-p=$$

$$=p^3-3p-2=p^3+1-1-3p-2=(p^3+1)-3(p+1)=$$

$$=(p+1)(p^2-p+1)-3(p+1)=(p+1)(p^2-p-2)=(p+1)^2(p-2);$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -p & 1 \\ 0 & 1 & -p \end{vmatrix} = p^2-1=(p+1)(p-1);$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -p \end{vmatrix} = 1+p;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} p & -1 & 1 \\ 1 & -p & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1+p.$$

Prin urmare,

$$X(p)=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{p-1}{(p+1)(p-2)}=\frac{2(p-2)+(p+1)}{3(p+1)(p-2)}=$$



$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p-2};$$

$$Y(p)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{1}{(p+1)(p-2)}=\frac{(p+1)-(p-2)}{3(p+1)(p-2)}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p+1};$$

$$Z(p)=\frac{\Delta_3}{\Delta}=Y(p)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{p-2}-\frac{1}{p+1}\right)$$

De unde

$$x(t)=\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t},\ y(t)=z(t)=\frac{e^{2t}-e^{-t}}{3}.$$

In încheierea acestui paragraf constatăm că metoda calculului operaţional, bazată pe transformata Laplace, poate fi utilizată şi la rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale ordinare liniare de forma (1), când $f(t)$ are puncte de discontinuitate de speţa 1(aplicarea metodelor clasice prezintă dificultăţi). De asemenea, această metodă poate fi utilizată şi la rezolvarea unor tipuri de ecuaţii diferenţiale în derivate parţiale (a se consulta [6], cap.10, §1.2 şi §1.7 ; [14], cap.13, §1.2.).

### 10.4.2. Rezolvarea ecuaţiilor integrale.

Metoda de trecere de la ecuaţia iniţiala la ecuaţia L-imagine în transformata Laplace se utilizează şi la rezolvarea unor ecuaţii integrale.

Se numeşte *ecuaţie integrală*, ecuaţia în care funcţia necunoscută se află sub semnul integralei. În acest caz se utilizează teorema lui Borel sau teorema convoluţiei (10.2.8).

Dacă ecuaţia integrală are forma

$$y(t)-\lambda\int_0^t k(t,u)\cdot y(u)du=f(t), \qquad (1)$$

unde $f(t), k(t,u)$ sunt funcţii cunoscute, $\lambda$ parametru numeric şi $y(t)$ funcţia necunoscută, atunci această ecuaţie se numeşte *ecuaţie integrală a lui Volterra* (1860-1940 –matematician italian) *de speţa a doua.*

Ecuaţia de forma

$$\int_0^t k(t,u)\cdot y(u)du=f(t), \qquad (2)$$

se numeşte *ecuaţie integrală a lui Volterra de speţa întâi.*

În aceste ecuaţii funcţia $k(t,u)$ se numeşte *nucleul* ecuaţiei date.

Ecuaţiile (1) şi (2) se rezolvă cu ajutorul calculului operaţional numai în cazul când nucleul lor $k(t,u)$ are forma $k(t-u)$. În acest caz ecuaţiile integrale (1) şi (2) se mai numesc *ecuaţii Volterra de tipul convoluţiei*, deoarece ecuaţiile (1),(2) se scriu respectiv sub forma

$$y(t)-\lambda(k*y)(t)=f(t), \qquad (3)$$

$$(k*y)(t)=f(t). \qquad (4)$$

Presupunem că funcţiile $k(t-u)$ şi $f(t)$ din ecuaţiile (3), (4) sunt funcţii original.

Fie $y(t)\div Y(p)$, $f(t)\div F(p)$ şi $k(t)\div K(p)$.

În virtutea teoremei de convoluţie (10.2.8), ecuaţiile L-imagine ataşate ecuaţiilor (3) şi (4) au forma

$$Y(p)-\lambda\cdot K(p)\cdot Y(p)=F(p),$$

$$K(p)\cdot Y(p)=F(p).$$

De unde

$$Y(p)=\frac{F(p)}{1-\lambda K(p)},\ K(p)\neq\frac{1}{\lambda}; \qquad (5)$$



$$Y(p)=\frac{F(p)}{K(p)},\ K(p)\neq 0. \qquad (6)$$

Restabilind originalul după funcţiile imagine (5) şi (6), obţinem soluţia ecuaţiei (3) şi respectiv soluţia ecuaţiei (4).

**Exemplul 20.** Să se rezolve următoarele ecuaţii integrale:

a) $\int_0^t \sin(t-u)y(u)du=\sin^2 t$;

b) $y(t)-\int_0^t (t-u)y(u)du=\sin t$.

**Rezolvare.**

a) Nucleul acestei ecuaţii Volterra de speţa întâi este $k(t)=\sin t$.

Avem: $y(t)\div Y(p)$; $k(t)=\sin t\div\frac{1}{p^2+1}$;

$$f(t)=\sin^2 t=\frac{1}{2}(1-\cos 2t)\div\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+4}\right)=\frac{2}{p(p^2+4)}.$$

Aplicând formula (6), urmează că

$$Y(p)=\frac{F(p)}{K(p)}=\frac{2(p^2+1)}{p(p^2+4)}=\frac{(p^2+4)+3p^2}{2p(p^2+4)}=$$

$$=\frac{1}{2p}+\frac{3p}{2(p^2+4)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p}+\frac{3}{2}\cdot\frac{p}{p^2+4}.$$

Utilizând formulele (1) şi (7) din Anexa 1, obţinem că

$$y(t)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos 2t=\frac{1}{2}(1+3\cos 2t),\ t\geq 0.$$

b) În cazul dat nucleul ecuaţiei este $k(t)=t$ şi $\lambda=1$. Avem:

$$y(t)\div Y(p),$$

$$k(t)\div\frac{1}{p^2},$$

$$f(t)=\sin t \div \frac{1}{p^2+1}.$$

Aplicând formula (5), urmează că

$$Y(p)=\frac{F(p)}{1-\lambda K(p)}=\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p^2}}=\frac{p^2}{(p^2+1)(p^2-1)}.$$

Descompunând funcţia raţională regulată $Y(p)$ în funcţii raţionale simple, obţinem că

$$Y(p)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2+1}.$$

Utilizând formulele (5) şi (6) din Anexa 1, soluţia ecuaţiei date are forma

$$y(t)=\frac{1}{4}e^t-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}\sin t=\frac{1}{4}\left(e^t-e^{-t}+2\sin t\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(sht+\sin t), t\geq 0.$$

Constatăm că metoda calculului operaţional bazată pe transformata Laplace poate fi utilizată şi la rezolvarea unor ecuaţii integrale neliniare de o formă specială:

$$\int_0^t x(u)\cdot x(t-u)du=f(t),$$

unde $x(t)$ este funcţia necunoscută, iar funcţia $f(t)$ este cunoscută şi are imaginea $F(p)$. În acest caz ecuaţia L-imagine ataşată ecuaţiei integrale date are forma $X^2(p)=F(p)$, de unde $X(p)=\sqrt{F(p)}$. De asemenea pot fi rezolvate şi ecuaţii integro-diferenţiale de o formă specială. Să arătăm aceasta prin următorul exemplu.

**Exemplul 21.** Să se rezolve ecuaţia integro-diferenţială

$$x''(t)+x(t)=\sin t+\int_0^t \sin(t-u)x(u)du, \text{ dacă } x(0)=0 \text{ şi } x'(0)=1.$$



**Rezolvare.**

Avem: $x(t)\div X(p)$;

$$x''(t)\div p^2X(p)-1;$$

$$\sin t\div\frac{1}{p^2+1};$$

$$\int_0^t \sin(t-u)x(u)du\div L(\sin t)\cdot L(x(t))=\frac{X(p)}{p^2+1}.$$

Deci ecuaţia L-imagine ataşată ecuaţiei date are forma

$$p^2X(p)-1+X(p)=\frac{1}{p^2+1}+\frac{X(p)}{p^2+1}.$$

De unde

$$X(p)\left[(p^2+1)-\frac{1}{p^2+1}\right]=\frac{1}{p^2+1}+1=\frac{p^2+2}{p^2+1}.$$

Deci

$$X(p)=\frac{p^2+2}{p^2+1}\cdot\frac{p^2+1}{(p^2+1)^2-1}=\frac{p^2+2}{(p^2+1-1)(p^2+1+1)}=$$

$$=\frac{p^2+2}{p^2(p^2+2)}=\frac{1}{p^2}.$$

Prin urmare, $x(t)=t, t\geq 0$.

### 10.4.3. Calcularea integralelor reale improprii.

$1^0$). Calcularea integralelor reale improprii cu ajutorul teoremelor (prima şi a doua) de trecere la limită în imagine (formula (2) din 10.2.6 şi formula (2) din 10.2.7).

Într-adevăr, fie $f(t) \div F(p)$. Dacă $f(t)$ este continuă pe $[0,+\infty[$ şi $\int\limits_0^{\infty} f(t)dt$ este convergentă, atunci

$$\int\limits_0^{\infty} f(t)dt = \lim_{p\to 0} F(p). \qquad (1)$$

Dacă $f(t)$ este continuă pe $[0,+\infty[$ şi dacă $\int\limits_0^{\infty} \frac{f(t)}{t}dt$ este convergentă, atunci

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{f(t)}{t}dt = \int\limits_0^{\infty} F(p)dp. \qquad (2)$$

A se consulta cu această ocazie exemplul 13 din 10.2.7, unde sunt calculate o serie de integrale improprii, numite *integralele lui Froullant.*

$2^0$). Calcularea integralelor improprii cu ajutorul teoremei lui Parsevalle (formula (3) din 10.2.9.):

dacă $f(t) \div F(p)$, $\varphi(t) \div \Phi(t)$ şi integralele improprii $\int\limits_0^{\infty} f(t)\Phi(t)dt$ şi $\int\limits_0^{\infty} \varphi(t)F(t)dt$ sunt absolut convergente, atunci

$$\int\limits_0^{\infty} f(t)\Phi(t)dt = \int\limits_0^{\infty} \varphi(t)F(t)dt. \qquad (3)$$

**Exemplul 22.** Să se calculeze integralele improprii:

a) $\int\limits_0^{\infty} \frac{t^5 dt}{(t+2)^7}$, b) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^3 t}{t}dt$.

**Rezolvare.**

a) Fie $f(t) = t^5$ şi $\Phi(t) = \frac{1}{(t+2)^7}$. Atunci, utilizând formula 16 din anexa 1, avem că



$$f(t) = t^5 \div F(p) = \frac{5!}{p^6}$$

şi, aplicând formula 18 din anexa 1, obţinem că

$$\Phi(p) = \frac{1}{(p+2)^7} \div \varphi(t) = \frac{t^6}{6!}e^{-2t}.$$

Prin urmare, în baza formulei (3)de mai sus, rezultă că

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{t^5 dt}{(t+2)^7} = \int\limits_0^{\infty} \varphi(t)F(t)dt = \int\limits_0^{\infty} \frac{t^6}{6!}e^{-2t} \cdot \frac{5!}{t^6}dt = \frac{1}{6}\int\limits_0^{\infty} e^{-2t}dt =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(-2)}e^{-2t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{12}.$$

b) Deoarece

$$\sin^3 t = \sin^2 t \cdot \sin t = \frac{1}{2}(1-\cos 2t)\sin t =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin t - \frac{1}{2}\sin 3t + \frac{1}{2}\sin t\right) = \frac{1}{4}(3\sin t - \sin 3t),$$

rezultă că

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^3 t}{t}dt = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\infty} \frac{3\sin t - \sin 3t}{t}dt.$$

Fie $f(t) = 3\sin t - \sin 3t$, $\Phi(t) = \frac{1}{t}$, atunci

$$F(p) = \frac{3}{p^2+1} - \frac{3}{p^2+9}, \ \varphi(t) = 1 \div \Phi(p) = \frac{1}{p}.$$

Aplicând formula (3), urmează că

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^3 t}{t}dt = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{3}{t^2+1} - \frac{3}{t^2+9}\right)dt = \frac{1}{4}\left(3\,\mathrm{arctg}\,t - \mathrm{arctg}\frac{t}{3}\right)\Big|_0^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{4}.$$

$3^0$). Calcularea integralelor improprii cu ajutorul integralei lui Laplace

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-pt}\cdot dt.$$

Vom ilustra această metodă prin exemple.

**Exemplul 23.** Să se calculeze integralele improprii reale $\int_0^\infty e^{-at}\sin bt\,dt$ şi $\int_0^\infty e^{-at}\cos bt\,dt$, unde $a>0, b>0$.

**Rezolvare.**

Avem: $f(t)\div F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}\cdot f(t)dt$. Dacă în integrala lui Laplace considerăm $f(t)=\sin bt$ şi $p=a$, obţinem că

$$\int_0^\infty e^{-at}\sin bt\,dt=L(f(t))\Big|_{p=a}=L(\sin bt)\Big|_{p=a}=\left(\frac{b}{p^2+b^2}\right)\Bigg|_{p=a}=$$

$$=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Similar

$$\int_0^\infty e^{-at}\cos bt\,dt=L(\cos bt)\Big|_{p=a}=\left(\frac{p}{p^2+b^2}\right)\Bigg|_{p=a}=\frac{a}{a^2+b^2}.$$

**Exemplul 24.** Să se calculeze integrala improprie reală $\int_0^\infty \frac{\cos xt}{a^2+t^2}dt,\ x>0,\ a\neq 0.$

**Rezolvare.**

Fie $\varphi(x)=\int_0^\infty \frac{\cos xt}{a^2+t^2}dt$. Atunci

$$L(\varphi(x))=\int_0^\infty e^{-px}\left(\int_0^\infty \frac{\cos xt}{a^2+t^2}dt\right)dx.$$

Schimbând ordinea de integrare, obţinem că



$$L(\varphi(x))=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty \cos(xt)e^{-px}dx\right)\frac{dt}{a^2+t^2}.$$

Întrucât

$$\int_0^\infty \cos(xt)e^{-px}dx=L(\cos xt)=\frac{p}{p^2+t^2},$$

rezultă următoarele:

$$L(\varphi(x))=\int_0^\infty \frac{p}{p^2+t^2}\cdot\frac{dt}{a^2+t^2}=p\int_0^\infty\frac{dt}{(p^2+t^2)(a^2+t^2)}=$$

$$=p\int_0^\infty \frac{p^2-a^2}{p^2-a^2}\cdot\frac{1}{(t^2+p^2)(t^2+a^2)}dt=$$

$$=p\int_0^\infty \frac{p^2+t^2-t^2-a^2}{(p^2-a^2)(t^2+p^2)(t^2+a^2)}dt=$$

$$=p\int_0^\infty \frac{(p^2+t^2)-(t^2+a^2)}{(p^2-a^2)(t^2+p^2)(t^2+a^2)}dt=$$

$$=p\int_0^\infty\left(\frac{1}{p^2-a^2}\cdot\frac{1}{t^2+a^2}-\frac{1}{p^2-a^2}\cdot\frac{1}{t^2+p^2}\right)dt=$$

$$=\frac{p}{p^2-a^2}\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}-\frac{1}{p}\operatorname{arctg}\frac{t}{p}\right)\Bigg|_0^\infty=$$

$$=\frac{p}{p^2-a^2}\left(\frac{1}{a}\frac{\pi}{2}-\frac{1}{p}\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2a}\cdot\frac{1}{p+a}.$$

Deci $L(\varphi(x))=\frac{\pi}{2a}\cdot\frac{1}{p+a}$. Deoarece $\frac{1}{p+a}\div e^{-ax}$, urmează că $\varphi(x)=\frac{\pi}{2a}e^{-ax}$, adică $\int_0^\infty\frac{\cos(xt)}{a^2+t^2}dt=\frac{\pi}{2a}e^{-ax},\ x>0,\ a\neq 0.$

### 10.4.4. Exerciții și răspunsuri la paragraful 10.4.

1. Să se integreze ecuațiile diferențiale:

a) $y''(t)-4y(t)=4, \quad y(0)=-1,\ y'(0)=0;$

b) $y''(t)-5y'(t)+6y(t)=2e^{t}, \quad y(0)=1,\ y'(0)=1;$

c) $y''(t)+y(t)=t^{2}+2t, \quad y(0)=4,\ y'(0)=-2;$

d) $y''(t)+y(t)=2\cos t, \quad y(0)=0,\ y'(0)=-1;$

e) $y''(t)-y'(t)=1, \quad y(0)=y'(0)=0;$

f) $y''(t)+y(t)=2\sin t, \quad y(0)=1,\ y'(0)=-1;$

g) $y''(t)-2y'(t)+y(t)=e^{t}, \quad y(0)=0,\ y'(0)=1;$

h) $y''(t)+4y(t)=t, \quad y(0)=1,\ y'(0)=0;$

i) $y''(t)-y(t)=\sin t, \quad y(0)=-1,\ y'(0)=0;$

j) $y''(t)-y'(t)=t^{2}, \quad y(0)=0,\ y'(0)=1.$

2. Utilizând teorema lui Duhamel, să se integreze ecuațiile diferențiale:

a) $y''(t)+y(t)=\cos t, \quad y(0)=y'(0)=0;$

b) $y''(t)-3y'(t)+2y(t)=e^{-t}, \quad y(0)=y'(0)=0;$

c) $y''(t)+y(t)=5t^{2}, \quad y(0)=y'(0)=0;$

d) $y''(t)-2y(t)=e^{2t}, \quad y(0)=y'(0)=0;$

e) $y''(t)-2y'(t)+5y(t)=1-t, \quad y(0)=y'(0)=0;$

f) $y''(t)+y'(t)=\cos t, \quad y(0)=y'(0)=0.$

3. Să se integreze sistemele de ecuații diferențiale:

a) $\begin{cases} y'(t)-2y(t)-4z(t)=\cos t, \\ z'(t)+y(t)+2z(t)=\sin t, \quad y(0)=z(0)=0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} y'(t)+5y(t)-2z(t)=e^{t}, \\ z'(t)-y(t)+6z(t)=e^{-2t}, \quad y(0)=z(0)=0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} y'(t)=z'(t)+u(t), \\ z'(t)=3y(t)+u(t), \\ u'(t)=3y(t)+z(y), \quad y(0)=0,\ z(0)=1,\ u(0)=1; \end{cases}$

d) $\begin{cases} y'(t)+3y(t)+z(t)=0, \\ z'(t)-y(t)+z(t)=0, \quad y(0)=z(0)=1; \end{cases}$

e) $\begin{cases} y'(t)=-z(t)-u(t), \\ z'(t)=-y(t)-u(t), \\ u'(t)=-y(t)-z(t), \quad y(0)=-1,\ z(0)=0,\ u(0)=1. \end{cases}$

4. Să se rezolve următoarele ecuații integrale Volterra:

a) $y(t)-\int_0^t e^{t-u}y(u)du=\cos 2t;$

b) $y(t)-\int_0^t \sin(t-u)y(u)du=t^{3};$

c) $y(t)-\int_0^t (t-u)y(u)du=\cos t;$

d) $y(t)-2\int_0^t \cos(t-u)y(u)du=\sin t;$

e) $y(t)-\frac{1}{6}\int_0^t (t-u)^{3}y(u)du=1;$

f) $y(t)+\int_0^t \mathrm{sh}\,(t-u)y(u)du=t;$

g) $y(t)+\int_0^t \mathrm{ch}\,(t-u)y(u)du=\mathrm{ch}\,t;$

h) $y(t)+2\int_0^t [\sin(t-u)-(t-u)]y(u)du=t;$

i) $\int_0^t \cos(t-u)y(u)du=t+t^{2};$ j) $\int_0^t e^{t-u}y(u)du=t;$

k) $\int_0^t \cos(t-u)y(u)du = \sin t$; l) $\int_0^t e^{2(t-u)}y(u)du = t^2e^t$;

m) $\int_0^t \operatorname{ch}(t-u)y(u)du = \operatorname{sh} t$; n) $\int_0^t e^{t-u}y(u)du = \sin t$;

o) $\int_0^t \operatorname{ch}(t-u)y(u)du = t$; p) $\int_0^t \operatorname{ch}(t-u)y(u)du = t+t^2$.

5. Utilizând teoremele de trecere la limită în imagine, să se calculeze integralele:

a) $\int_0^\infty e^{-5t}\cos 4t\,dt$; b) $\int_0^\infty \frac{e^{-4t}\sin t}{t}dt$; c) $\int_0^\infty te^{-4t}\cos 2t\,dt$;

d) $\int_0^\infty \frac{1-e^{-6t}}{te^t}dt$; e) $\int_0^\infty \frac{Ae^{-\alpha t}+Be^{-\beta t}+Ce^{-\gamma t}+De^{-\delta t}}{t}dt$, unde $\alpha>0,\beta>0,\gamma>0,\delta>0$ şi $A+B+C+D=0$.

6. Utilizând teorema lui Parsevalle, să se calculeze integralele:

a) $\int_0^\infty \frac{\sin at-\sin bt}{t}dt$, $a>0, b>0$; b) $\int_0^\infty \frac{t-\sin t}{t^3}dt$;

c) $\int_0^\infty \frac{\sin^3 t}{t^3}dt$; d) $\int_0^\infty \frac{t^3dt}{(t+4)^5}$;

e) $\int_0^\infty \frac{\cos at-\cos bt}{t}dt$, $a>0, b>0$.

7. Utilizând integrala Laplace, să se calculeze integralele (considerăm $x\in [0,+\infty[$):

a) $\int_0^\infty \frac{t\sin xt}{a^2+t^2}dt$; b) $\int_0^\infty \frac{\cos xt}{a^2-t^2}dt$; c) $\int_0^\infty \frac{\cos xt}{t^2+9}dt$;

d) $\int_0^\infty \frac{\sin xt}{t(a^2-t^2)}dt$; e) $\int_0^\infty \frac{\sin xt}{t^2+t+1}dt$; f) $\int_0^\infty \frac{\cos xt}{t^2+t+1}dt$;



## Răspunsuri.

1. a) $y(t)=-1$; b) $y(t)=e^t$; c) $y(t)=\frac{1}{3}(t^2+6+6e^{-t})$;

d) $y(t)=(t-1)\sin t$; e) $y(t)=e^t-t-1$;

f) $y(t)=\cos t-t\cos t$; g) $y(t)=\frac{1}{2}te^t(t+2)$;

h) $y(t)=\frac{1}{4}t+\cos 2t-\frac{1}{8}\sin 2t$;

i) $y(t)=-\frac{1}{4}e^t-\frac{3}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\sin t$;

j) $y(t)=3e^t-3-2t-t^2-\frac{1}{3}t^3$.

2. a) $y(t)=\frac{1}{2}t\sin t$; b) $y(t)=\frac{1}{6}(e^{-t}-3e^t+2e^{2t})$;

c) $y(t)=5(t^2-2+2\cos t)$; d) $y(t)=\frac{1}{4}(1-e^{2t}+2te^{2t})$;

e) $y(t)=\frac{3}{25}-\frac{1}{5}t-\frac{3}{25}e^t\cos 2t+\frac{4}{25}e^t\sin 2t$;

f) $y(t)=\frac{1}{2}(e^{-t}+\sin t-\cos t)$.

3. a) $y(t)=4t+2-2\cos t-3\sin t$, $z(t)=2\sin t-2t$;

b) $y(t)=\frac{7}{40}e^t+\frac{1}{5}e^{-2t}-\frac{7}{15}e^{-4t}+\frac{11}{120}e^{-7t}$,

$z(t)=\frac{3}{40}e^t+\frac{3}{10}e^{-2t}-\frac{7}{30}e^{-4t}-\frac{11}{120}e^{-7t}$;

c) $y(t)=\frac{2}{5}(e^{3t}-e^{-2t})$, $z(t)=\frac{1}{5}(3e^{3t}+2e^{-2t})=u(t)$;

d) $y(t)=e^{-2t}(1-2t)$, $z(t)=e^{-2t}(1+2t)$;

e) $y(t)=-e^t$, $z(t)=0$, $u(t)=e^t$.

4. a) $y(t)=\frac{2}{5}e^{2t}+\frac{3}{5}\cos t+\frac{1}{5}\sin t$; b) $y(t)=t^3+\frac{t^5}{20}$;

c) $y(t)=\frac{1}{2}(\cos t+\operatorname{ch} t)$; d) $y(t)=t e^{t}$;

e) $y(t)=\frac{1}{2}(\cos t+\operatorname{ch} t)$; f) $y(t)=t-\frac{1}{6}t^{3}$;

g) $y(t)=\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{5}}{2}t$; h) $y(t)=\frac{1}{3}\left(2\operatorname{sh} t+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\sqrt{2}t\right)$;

i) $y(t)=1+2t+\frac{1}{2}t^{2}+\frac{1}{3}t^{3}$; j) $y(t)=1-t$; k) $y(t)=1$;

l) $y(t)=t e^{t}(t+2)$; m) $y(t)=1$; n) $y(t)=e^{-t}$;

o) $y(t)=1-\frac{t^{2}}{2}$; p) $y(t)=1+2t+\frac{1}{2}t^{2}+\frac{1}{3}t^{3}$.

5. a) $\frac{5}{41}$; b) $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}$; c) $\frac{3}{100}$; d) $\ln 7$;

e) $A\ln\frac{\delta}{\alpha}+B\ln\frac{\delta}{\beta}+C\ln\frac{\delta}{\gamma}$.

6. a) $0,\left(f(t)=\sin at-\sin bt,\ \Phi(p)=\frac{1}{p}\right)$;

b) $\frac{\pi}{4},\left(f(t)=t-\sin t,\ \Phi(p)=\frac{1}{p^{3}}\right)$;

c) $\frac{3\pi}{8},\left(f(t)=\sin^{3}t=\frac{1}{4}(3\sin t-\sin^{3}t),\ \Phi(p)=\frac{1}{p^{3}}\right)$;

d) $\frac{1}{16},\left(f(t)=t^{3},\ \Phi(p)=\frac{1}{(p+4)^{5}}\right)$; e) $\ln\frac{b}{a}$.

7. a) $\frac{\pi}{2}e^{-ax}$; b) $\frac{\pi}{2a}\sin ax$; c) $\frac{\pi}{6}e^{-3x}$;

d) $\frac{\pi}{2a^{2}}(1-\cos ax)$; e) $-\frac{2\pi}{3}e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x}\sin\frac{x}{2}$; f) $\frac{2\pi}{3}e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x}\cos\frac{x}{2}$.



**ANEXA 1.**

**Tabelul formulelor de bază ale calculului operațional**
(formulele din această anexă sunt demonstrate în capitolul 10.)

| Nr. | Originalul $f(t), t\geq 0$ | Imaginea $F(p)$ |
|---|---|---|
| 1 | $\sigma_{\theta}(t)=1$ (funcția Heaviside) | $\frac{1}{p}$ , $\operatorname{Re} p>0$ |
| 2 | $\sigma_{\theta}(t-\theta)$, θ>0. | $\frac{1}{p}e^{-\theta p}$ , $\operatorname{Re} p>0$ |
| 3 | $c=const$ | $\frac{c}{p}$ , $\operatorname{Re} p>0$ |
| 4 | $\delta(t)$ (funcția Dirac) | 1 , $\operatorname{Re} p>0$ |
| 5 | $e^{at}$ | $\frac{1}{p-a}$ , $\operatorname{Re} p>\operatorname{Re} a$ |
| 6 | $\sin at$ | $\frac{a}{p^{2}+a^{2}}$ , $\operatorname{Re} p>\lvert\operatorname{Im} a\rvert$ |
| 7 | $\cos at$ | $\frac{p}{p^{2}+a^{2}}$ , $\operatorname{Re} p>\lvert\operatorname{Im} a\rvert$ |
| 8 | $shat$ | $\frac{a}{p^{2}-a^{2}}$ , $\operatorname{Re} p>\lvert\operatorname{Re} a\rvert$ |
| 9 | $chat$ | $\frac{p}{p^{2}-a^{2}}$ , $\operatorname{Re} p>\lvert\operatorname{Re} a\rvert$ |
| 10 | $\sin(at\pm\varphi)$ | $\frac{a\cos\varphi\pm p\sin\varphi}{p^{2}+a^{2}}$ , $\operatorname{Re} p>\lvert\operatorname{Im} a\rvert$ |
| 11 | $\cos(at\pm\varphi)$ | $\frac{p\cos\varphi\mp a\sin\varphi}{p^{2}+a^{2}}$ , $\operatorname{Re} p>\lvert\operatorname{Im} a\rvert$ |

| Nr. | Originalul $f(t), t \geq 0$ | Imaginea $F(p)$ |
|---|---|---|
| 12 | $e^{bt}\sin at$ | $\dfrac{a}{(p-b)^2+a^2}$ , $\operatorname{Re} p > (\operatorname{Re} b + \lvert \operatorname{Im} a \rvert)$ |
| 13 | $e^{bt}\cos at$ | $\dfrac{p}{(p-b)^2+a^2}$ , $\operatorname{Re} p > (\operatorname{Re} b + \lvert \operatorname{Im} a \rvert)$ |
| 14 | $e^{bt}\sin(at \pm \varphi)$ | $\dfrac{a\cos\varphi \pm (p-b)\sin\varphi}{(p-b)^2+a^2}$ , $\operatorname{Re} p > (\operatorname{Re} b + \lvert \operatorname{Im} a \rvert)$ |
| 15 | $e^{bt}\cos(at \pm \varphi)$ | $\dfrac{(p-b)\cos\varphi \mp a\sin\varphi}{(p-b)^2+a^2}$ , $\operatorname{Re} p > (\operatorname{Re} b + \lvert \operatorname{Im} a \rvert)$ |
| 16 | $t^n, n \in N$ | $\dfrac{n!}{p^{n+1}}$ , $\operatorname{Re} p > 0$ |
| 17 | $t^z, \operatorname{Re} z > -1$ | $\dfrac{\Gamma(z+1)}{p^{z+1}}$ , $\operatorname{Re} p > 0$, $\Gamma$- este funcția „gamma” |
| 18 | $t^n e^{at}, n \in N$ | $\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$ , $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$ |
| 19 | $t^z e^{at}$, $\operatorname{Re} z > -1$ | $\dfrac{\Gamma(z+1)}{(p-a)^{z+1}}$ , $\operatorname{Re} p > 0$, $\Gamma$- este funcția „gamma” |
| 20 | $t\sin at$ | $\dfrac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$ , $\operatorname{Re} p > \lvert \operatorname{Im} a \rvert$ |
| 21 | $t\cos at$ | $\dfrac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$ , $\operatorname{Re} p > \lvert \operatorname{Im} a \rvert$ |



| Nr. | Originalul $f(t), t \geq 0$ | Imaginea $F(p)$ |
|---|---|---|
| 22 | $t^n \sin at$, $n \in N$ | $(n!)\cdot\dfrac{\operatorname{Im}(p+ia)^{n+1}}{(p^2+a^2)^{n+1}}$ , $\operatorname{Re} p > \lvert \operatorname{Im} a \rvert$ |
| 23 | $t^n \cos at$, $n \in N$ | $(n!)\cdot\dfrac{\operatorname{Re}(p+ia)^{n+1}}{(p^2+a^2)^{n+1}}$ , $\operatorname{Re} p > \lvert \operatorname{Im} a \rvert$ |
| 24 | $\sin^2 t$ | $\dfrac{2}{p(p^2+4)}$ , $\operatorname{Re} p > 0$ |
| 25 | $\cos^2 t$ | $\dfrac{p^2+2}{p(p^2+4)}$ , $\operatorname{Re} p > 0$ |
| 26 | $\dfrac{\sin t}{t}$ | $\dfrac{\pi}{2} - arctgp = arcctgp$ , $\operatorname{Re} p > 0$ |
| 27 | $\dfrac{\sin at}{t}$ | $arcctg\,\dfrac{p}{a}$ , $\operatorname{Re} p > \lvert \operatorname{Im} a \rvert$ |
| 28 | $\dfrac{\sin^2 t}{t}$ | $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{p^2+4}{p^2}$ , $\operatorname{Re} p > 0$ |
| 29 | $\displaystyle\int_0^t \frac{\sin\theta}{\theta}d\theta$, θ>0 | $\dfrac{1}{p}arcctgp$, $\operatorname{Re} p > 0$ |
| 30 | $\dfrac{e^{bt}-e^{at}}{b-a}$, $a \neq b$, a, $b \in R$ | $\dfrac{1}{(p-a)(p-b)}$ , $\operatorname{Re} p > \max(\lvert a \rvert, \lvert b \rvert)$ |
| 31 | $\dfrac{e^{bt}-e^{at}}{t}$, $a>0, b>0$, $a \neq b$ | $\ln\dfrac{p-a}{p-b}$ , $\operatorname{Re} p > \max(a,b)$ |

| Nr. | Originalul $f(t), t \geq 0$ | Imaginea $F(p)$ |
|---|---|---|
| 32 | $\frac{1}{t}\left(1-e^{-t}\right)$ | $\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$, $\lvert p\rvert > 1$ |
| 33 | $f(t \pm T) =$ $= f(t), T > 0$ | $\left[\int_0^T f(u)e^{-pu}du\right] \cdot \frac{1}{1-e^{-pT}}$ , $\operatorname{Re} p > 0$ |
| 34 | $\lvert\sin t\rvert$ | $\frac{1}{p^2+1} \cdot cth\frac{\pi p}{2}$ , $\operatorname{Re} p > 0$ |
| 35 | $\sin at \cdot \sin bt$ | $\frac{2pab}{\left[p^2+(a-b)^2\right] \cdot \left[p^2+(a+b)^2\right]}$ , $\operatorname{Re} p > \lvert\operatorname{Im} a\rvert$ |
| 36 | $\frac{1}{\sqrt{\pi \cdot t}}$ | $\frac{1}{\sqrt{p}}$ , $\operatorname{Re} p > 0$ |
| 37 | $\frac{\sin t}{\sqrt{t}}$ | $\sqrt{\frac{\pi\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)}{2\left(p^2+1\right)}}$, $\operatorname{Re} p > 0$ |
| 38 | $\frac{\cos t}{\sqrt{t}}$ | $\sqrt{\frac{\pi\left(\sqrt{p^2+1}+p\right)}{2\left(p^2+1\right)}}$, $\operatorname{Re} p > 0$ |
| 39 | $Si(t) =$ $= -\int_t^\infty \frac{\sin u}{u}du$ (sinus integral) | $-\frac{1}{p}arctgp$ , $\operatorname{Re} p > 0$ |



| Nr. | Originalul $f(t), t \geq 0$ | Imaginea $F(p)$ |
|---|---|---|
| 40 | $Ci(t) =$ $= -\int_t^\infty \frac{\cos u}{u}du$ (cosinus integral) | $-\frac{\ln\left(p^2+1\right)}{2p}$ , $\operatorname{Re} p > 0$ |
| 41 | $Ei(-t) =$ $= -\int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u}du$ (exponențială integrală) | $-\frac{1}{p}\ln(p+1)$ , $\operatorname{Re} p > 0$ |
| 42 | $SF(t) =$ $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t \frac{\sin u}{\sqrt{u}}du$ (sinus Fresnel) | $\frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}-p}}{2p\sqrt{p^2+1}}$ , $\operatorname{Re} p > 0$ |
| 43 | $CF(t) =$ $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t \frac{\cos u}{\sqrt{u}}du$ (cosinus Fresnel) | $\frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}+p}}{2p\sqrt{p^2+1}}$ , $\operatorname{Re} p > 0$ |
| 44 | $B_0(t)$ (funcția Bessel de ordinul zero) | $\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$ , $\operatorname{Re} p > 0$ |

# ANEXA 2*)

## Lucrarea de control nr.1.

### „Funcții de mai multe variabile reale”

**Problema 1.**

1. Să se arate că $x^2 z''_{xx} = y^2 z''_{yy}$, dacă $z = e^{xy}$.
2. Să se demonstreze că $4z''_{yy} = z''_{xx}$, dacă $z = e^{-\cos(2x+y)}$.
3. Fie $z = \ln(x^2 + y^2 + 2y + 1)$. Să se arate că $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$.
4. Să se arate că funcția $z = x\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) + \psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ satisface ecuația $x^2 z''_{xx} + 2xyz''_{xy} + y^2 z''_{yy} = 0$.
5. Să se demonstreze că $4z''_{yy} = z''_{xx}$, dacă $z = \sin^2(y - 2x)$.
6. Fie $z = \dfrac{y}{x}$. Să se arate că $x^3 z''_{xx} + 2x^2 yz''_{xy} + y^2 z''_{yy} = 0$.
7. Fie $z = y\sqrt{\dfrac{y}{x}}$. Să se demonstreze că $x^2 z''_{xx} = y^2 z''_{yy}$.
8. Să se arate că funcția $z = \varphi(xy) + x\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ satisface ecuația $x^2 z''_{xx} = y^2 z''_{yy}$.
9. Fie $z = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$. Să se demonstreze că $x^2 z''_{xx} - \left(y^2 z'_y\right)'_y = 0$.
10. Fie $z = \dfrac{\sin(x-y)}{x}$. Să se arate că $\left(x^2 \cdot z'_x\right)'_x = x^2 \cdot z''_{yy}$.

---

*) Lucrările de control nr. 1-4 sunt incluse pentru a acoperi în întregime modulele „Analiză matematică, 2, 3”.



11. Să se demonstreze că $\left(x^2 \cdot z'_x\right)'_x = y^2 \cdot z''_{yy}$, dacă $z = e^{\frac{y}{x}}$.
12. Să se arate că $z''_{xx} = 4z''_{yy}$, dacă $z = \dfrac{y}{y^2 - 4x^2}$.
13. Să se demonstreze că $xz''_{xy} + yz''_{yy} + z'_y = 1$, dacă $z = x + y + \left(\dfrac{x}{y}\right)^2$.
14. Fie $z = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + x - y)$. Să se arate că $x^2 z''_{xx} + 2xyz''_{xy} + y^2 z''_{yy} = x^2 + y^2$.
15. Să se arate că $z = \left(x^3 + \sqrt[5]{x}\right)\ln(y^2 + 1)$ verifică ecuația $z \cdot z''_{xy} = z'_x \cdot z'_y$.
16. Fie $z = \sin^2(2x+1) + 2y\sin 2(2x+1)$. Să se demonstreze că $z'_x = z'_y + y \cdot z''_{xy}$.
17. Să se verifice că $z''_{yy} = a^2 z''_{xx}$. Dacă $z = \dfrac{1}{\sqrt{x - ay}} + \sqrt[3]{(x+ay)^2}$.
18. Fie $z = \ln(ax + dy)$. Să se arate că $xz''_{xx} + yz''_{xy} + z'_x = 0$.
19. Fie $z = 2\cos^2\left(x - \dfrac{y}{2}\right)$. Să se demonstreze că $2z''_{yy} + z''_{xy} = 0$.
20. Să se arate că funcția $z = e^{\frac{x}{y}}$ verifică ecuația $yz''_{xy} = z'_y - z'_x$.
21. Fie $z = \dfrac{xy}{x-y}$. Să se arate că $z''_{xx} + 2z''_{xy} + z''_{yy} = \dfrac{2}{x-y}$.

22. Să se demonstreze că funcția $u=\frac{x}{y}f(x)+\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ verifică ecuația $xyu''_{xy}+y^2u''_{yy}+xu'_x+2yu'_y=0$.

23. Fie $z=arctg\frac{y}{x}$. Să se demonstreze că $z''_{xx}+z''_{yy}=0$.

24. Să se arăte că $xz''_{xy}+yz''_{yy}=0$ dacă $z=x\cdot f\left(\frac{y}{x}\right)$.

25. Să se arate că $x^2z'_x+\frac{1}{y}z'_y=\frac{1}{z}$ dacă funcția $z=f(x,y)$ este definită implicit de ecuația $z^2+\frac{2}{x}=\sqrt{y^2-z^2}$.

26. Să se arate că funcția $z=y\ln(x^2-y^2)$ satisface ecuația $xz''_{xx}+yz''_{xy}=0$.

27. Fie $z=y\cdot\sin\left(\frac{y}{x}\right)$. Să se arate că $x^2z''_{xx}=y^2z''_{yy}$.

28. Să se arate că $x^3z''_{xx}+y^3z''_{yy}+x^2yz''_{xy}=x^2$, dacă $z=\frac{x^2}{2y}+\frac{x}{2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$.

29. Fie $z=e^{x^2+y^2}$. Să se arate că $2xyz''_{xx}-(1+2x^2)z''_{xy}=0$.

30. Să se demonstreze că funcția $z=arctg\frac{y}{1+x^2}$ satisface ecuația $\frac{1}{2xy}z'_x+\frac{1}{1+x^2}z'_y=0$.

**Problema 2.** Să se calculeze derivata funcției $u=f(x,y,z)$ în punctul $A(x_1,y_1,z_1)$ în direcția vectorului $\vec{a}$, dacă



1. $u=x^2y^3z^4$, $A(1,1,-1)$, $\vec{a}=\{2,2,1\}$.
2. $u=\mathrm{tg}\,x-\sin^3 y+\mathrm{ctg}\,z$, $A\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right)$, $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{grad}\,u}(A)$.
3. $u=\ln(e^x+e^y+e^z)$, $A(1,1,1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ *cu* $B(2,0,-1)$.
4. $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $A(1,-1,0)$, $\vec{a}=\{2,3,4\}$.
5. $u=\ln\frac{xy}{z}$, $A(2,1,1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ *cu* $B(3,-1,4)$.
6. $u=\mathrm{arctg}(xy)+\arcsin(xz)$, $A(1,1,0)$, $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{grad}\,u}(A)$.
7. $u=x+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{2}{z}$, $A(1,-1,-1)$, $\vec{a}=\{3,4,5\}$.
8. $u=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}$, $A(1,1,-1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ *cu* $B(2,-2,2)$.
9. $u=\frac{1}{x}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{16}$, $A(1,1,-1)$, $\vec{a}=\{1,-1,2\}$.
10. $u=2x^2+xy+xz+yz$, $A(1,0,3)$, $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{grad}\,u}(A)$.
11. $u=x^3+y^3+z^2+12xy+2z$, $A(3,1,-2)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ *cu* $B(3,4,2)$.
12. $u=(x+y^2)\cdot e^{x(y^2+z^2-1)}$, $A(1,1,0)$, $\vec{a}=\{1,3,5\}$.
13. $u=x^2+y^2+z^2+xz+2y$, $A(3,4,5)$, $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{grad}\,u}(A)$.
14. $u=\frac{1}{x}+\frac{y^2}{z^2}-6y+5xz$, $A(1,-1,-2)$, $\vec{a}=\{1,2,3\}$.
15. $u=x+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+2xyz$, $A(1,3,-1)$, $\vec{a}=\{-1,1,2\}$.
16. $u=x^3+z^3+4x^2y+3xz^2$, $A(0,2,-1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{grad}\,u}(A)$.
17. $u=\sin(x+y)+\cos(x+z)$, $A\left(0,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$, $\vec{a}=\{1,\sqrt{2},\sqrt{6}\}$.

18. $u=\ln(3x^2+2y^3+7z)$, $A(-1,2,1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ *cu* $B(2,3,-1)$.

19. $u=z^2+\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{y}}$, $A(1,4,1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{\operatorname{grad} u}(A)$.

20. $u=\operatorname{arctg}\dfrac{x^3z}{y}$, $A(-2,4,1)$, $\vec{a}=\{4,3,1\}$.

21. $u=\dfrac{x-y+z}{x+y-z}$, $A(4,3,1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ *cu* $B(5,2,1)$.

22. $u=\dfrac{4}{x^2+y^2+z^2}$, $A(-2,2,2)$, $\vec{a}=\{1,-1,-1\}$.

23. $u=\ln(3x-2y+z^2)$, $A(2,1,1)$, $\vec{a}=\{2,\sqrt{2},\sqrt{3}\}$.

24. $u=x^3y+xy^3+yz^3$, $A(1,3,1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{\operatorname{grad} u}(A)$.

25. $u=5x^2y+3xy^2+yz^2$, $A(1,1,-1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ *cu* $B(-1,1,2)$

26. $u=2x^2+xy+yz+z+1$, $A(-1,2,1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{\operatorname{grad} u}(A)$.

27. $u=\dfrac{xy}{z^3}$, $A(3,4,2)$, $\vec{a}=\{1,2,3\}$.

28. $u=\operatorname{arctg}(xyz^2)$, $A(2,3,1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ *cu* $B(1,2,-1)$.

29. $u=\dfrac{x+y}{x^2+y^2+x^2}$, $A(1,1,\sqrt{2})$, $\vec{a}=\{1,2,-1\}$.

30. $u=\ln(2x+3y+4xz)$, $A(1,-1,1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{\operatorname{grad} u}(A)$.

**Problema 3.** Fie $z=f(x,y)$ şi $A(x_0,y_0,z_0)$.

a) Să se cerceteze la maxim şi minim funcţia $z=f(x,y)$;

b) Să se alcătuiască ecuaţiile planului tangent şi a normalei la suprafaţa $z=f(x,y)$ în punctul $A$, dacă

1. $z=x^3+y^3-15xy$, $A(1,-1,15)$.
2. $z=x^3+xy+y^2-x$, $A(0,1,1)$.



3. $z=xy+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$, $A(1,-1,-1)$.
4. $z=(y-x)^2+(y+2)^3$, $A(2,2,64)$.
5. $z=x^3+y^3-9xy-27$, $A(1,-1,-18)$.
6. $z=x^4+y^4+2x^2y^2-8x+8y$, $A(0,1,9)$.
7. $z=2x^2+6xy+5y^2-x+4y-5$, $A(1,0,-4)$.
8. $z=x^3+y^3-3axy$, $A(1,0,1)$.
9. $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$, $A(1,1,2)$.
10. $z=x^2+xy+y^2-mx-ny$, $A(1,0,1-m)$.
11. $z=x^3+xy^2+3axy$, $A(1,1,2+3a)$.
12. $z=x^2+xy+y^2-4\ln x-4\ln y$, $A(1,1,3)$.
13. $z=x^2-2xy+2y^3+2y^4$, $A(1,0,1)$.
14. $z=2+(x-y)^2+(y-1)^3$, $A(1,0,2)$.
15. $z=y^3+x^2y-3xy$, $A(1,-1,1)$.
16. $z=y^2-2xy-2x^3+2x^4$, $A(0,1,1)$.
17. $z=3+(x-y)^4+(x-2)^6$, $A(1,1,4)$.
18. $z=x\cdot e^{x+y^2}$, $A(1,0,e)$.
19. $z=2x^3+xy^2+5x^2+y^2$, $A(1,-1,9)$.
20. $z=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$, $A(1,0,\sqrt{2})$.
21. $z=x^3+y^2-6xy-39x+18y+20$, $A(1,1,-5)$.
22. $z=x^3+y^3-3xy+1$, $A(1,-1,4)$.
23. $z=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}$, $A(1,-1,29)$.
24. $z=x^2+y^2-2\ln x-18\ln y$, $A(1,1,2)$.

25. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 11y,\ A(1,-1,0)$.

26. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2,\ A(-1,1,5)$.

27. $z = 2 - \sqrt[3]{x^2 + y^2},\ A(1,0,1)$.

28. $z = -\frac{2}{3}x^3 + 2xy - y^2 - 1,\ A(3,0,-19)$.

29. $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2),\ A(0,1,1)$.

30. $z = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430,\ A(1,0,432)$.

**Problema 4.** Să se calculeze valoarea cea mai mare si valoarea cea mai mică a funcției $z = f(x, y)$ pe domeniul închis şi mărginit, dacă

1. $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ în triunghiul mărginit de dreptele $x = 0,\ y = 0{,}2x + 3y - 12 = 0$.
2. $z = x^2 - 3xy + y^2 - 2x$ în pătratul $0 \le x \le 4, 0 \le y \le 4$.
3. $z = x^3 + y^3 - 3xy$ în dreptunghiul $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 3$.
4. $z = \frac{1}{2}x^2 - xy$ în domeniul mărginit de parabola $y = \frac{1}{3}x^2$ şi dreapta $y = 3$.
5. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ în triunghiul mărginit de dreptele $y = x + 1,\ y = 0,\ x = 3$.
6. $z = 2x + y - xy$ în pătratul $1 \le x \le 3, 0 \le y \le 2$.
7. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ în dreptunghiul mărginit de dreptele $x = 0,\ y = 0,\ x = 1,\ y = 2$.
8. $z = x^2 - 2y^2 + 4$ în domeniul mărginit de semicircumferință $y = \sqrt{4 - x^2}$ şi axa $OX$.
9. $z = 5x^2 + 3xy + y^2 + 4$ în triunghiul mărginit de dreptele $x + y = 1,\ x = -1,\ y = -1$.



10. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$ în dreptunghiul mărginit de dreptele $y = 1,\ y = -1,\ x = 0,\ x = 3$.
11. $z = 5x^2 - 3xy + y^2$ în pătratul mărginit de dreptele $x = 1, x = 3, y = 2, y = 4$.
12. $z = x^2 - xy - 2$ în domeniul mărginit de parabola $y = 4x^2 - 4$ şi axa $OX$.
13. $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ în triunghiul mărginit de dreptele $x = 1,\ y = 1,\ x + y = 1$.
14. $z = 2x + y - xy + 1$ în pătratul $0 \le x \le 4, 0 \le y \le 4$.
15. $z = 5x^2 - 3xy + y + x + 4$ în dreptunghiul $0 \le x \le 1, 1 \le y \le 3$.
16. $z = x^2 + y^2 + x + 1$ în domeniul mărginit de circumferința $x^2 + y^2 = 4x$.
17. $z = x^2 + 2xy - y^2 + 5x + 3$ în triunghiul mărginit de dreptele $x + y + 1 = 0,\ y = 0,\ x = -3$.
18. $z = 5x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x$ în pătratul $1 \le x \le 4, 0 \le y \le 3$.
19. $z = x^2 + xy - 3y^2 + y + 1$ în dreptunghiul $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 3$.
20. $z = x^2 + 3xy + x + 2y - 1$ în domeniul mărginit de curbele $y = 2x^2,\ y = 8$.
21. $z = 3x + 2y - xy$ în triunghiul mărginit de dreptele $y = x,\ x = 3,\ y = 0$.
22. $z = xy - 2x - y - 2$ în dreptunghiul $0 \le x \le 3, 0 \le y \le 4$.
23. $z = 2x + 3y - xy + x^2$ în pătratul $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$.
24. $z = 4 - 2x - y^2$ în cercul $x^2 + y^2 \le 4x$.
25. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y$ în triunghiul mărginit de dreptele $y = x + 2,\ x = 2,\ y = 0$.

26. $z=6xy-9x^2+x+y+2$ în dreptunghiul $1\le x\le 2, 2\le y\le 5$.
27. $z=x^2+y^2-xy-x-y+2$ în pătratul $1\le x\le 3, 2\le y\le 4$.
28. $z=x^2+2xy-10y$ în domeniul mărginit de circumferința $x^2+y^2=2y$.
29. $z=3x-xy+y^2-2$ în triunghiul mărginit de dreptele $y=x,\ y=4,\ x=0$.
30. $z=x^2+6y^2+5xy+4$ în domeniul mărginit de parabola $y=2-x^2$ și axa $OX$.

## Lucrarea de control nr. 2

## „Calculul integral al funcției de mai multe variabile reale. Câmpuri scalare și vectoriale".

**Problema 1.**

1. Să se calculeze $\iint\limits_D x^2 y\,dxdy$, unde D este mărginit de curbele $y = 2x^2$, $y = 0$, $x = 1$.
2. Să se calculeze aria figurii mărginită de curbele $x^2+y^2 = 72$ și $6y = -x^2$.
3. Să se calculeze aria figurii mărginită de curba polară $\rho = 2\sin^2 2\theta$.
4. Să se calculeze $\iint\limits_D e^y\,dxdy$, unde $D$ este mărginit de curbele $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 2$.
5. Să se calculeze aria figurii mărginită de curbele $y = \sqrt{2-x^2}$ și $y = x^2$.
6. Să se calculeze aria figurii mărginită de curba polară $\rho = 2\sqrt{\cos 2\theta}$.



7. Să se calculeze $\iint\limits_D y\sin xy\,dxdy$, unde $D$ este mărginit de curbele $y=\dfrac{\pi}{2}$, $y = \pi$, $x = 1$, $x = 2$.
8. Să se determine masa figurii ( plăcii ) materiale mărginită de coroana circulară $x^2+y^2 \ge 4$, $x^2+y^2 \le 25$, situată în cadranul 2, dacă densitatea de suprafață $\gamma(x,y)=\dfrac{2x-3y}{x^2+y^2}$.
9. Să se calculeze $\iint\limits_D y^2\cos\dfrac{xy}{2}\,dxdy$, unde $D$ este mărginit de liniile $x = 0$, $y = \sqrt{2\pi}$, $y = 2x$.
10. Să se calculeze aria figurii mărginită de curbele $x = y^2+1$, $x + y = 3$.
11. Să se calculeze aria curbei mărginită de curba polară $\rho = 3\sin 3\theta$.
12. Să se afle masa figurii materiale mărginită de curbele $x= 2$, $y^2 = 2x$, dacă densitatea de suprafață $\gamma(x,y)=\dfrac{7x^2}{8+2y}$.
13. Să se calculeze $\iint\limits_D 4ye^{2xy}\,dxdy$, unde $D$ este mărginit de dreptele $y = \ln 3$, $y = \ln 4$, $x = \dfrac{1}{2}$, $x = 1$.
14. Să se afle aria figurii mărginită de curbele $y^2 = 4-x$, $y = x+2$, $y = 2$, $y = -2$.
15. Să se afle aria figurii mărginită de circumferințele $y^2-2x+x^2 = 0$, $y^2-4y+x^2 = 0$.
16. Să se calculeze aria figurii mărginită de curba polară $\rho = 4\cos 3\theta$.

17. Să se determine masa figurii materiale mărginită de elipsa $x^2+\frac{y^2}{4}=1$, dacă densitatea de suprafață $\gamma(x,y)=x^2y$.

18. Să se calculeze $\iint\limits_D x(2x+y)dxdy$, unde $D$ este mărginit de curbele $y=1-x^2$, $y=0$.

19. Să se calculeze aria figurii mărginită de curbele $y^2-4y+x^2=0$, $y^2-6y+x^2=0$, $y=\sqrt{3}x$, $x=0$.

20. Să se afle aria figurii mărginită de curbele $y=3\sqrt{x}$, $y=\frac{3}{x}$, $x=9$.

21. Să se afle masa figurii materiale mărginită de curbele $x=2$, $y^2=8x$, dacă densitatea de suprafață $\gamma(x,y)=7x+3y^2$.

22. Să se afle masa figurii materiale mărginită de elipsa $\frac{x^2}{9}+y^2=1$, dacă densitatea de suprafață $\gamma(x,y)=11xy^3$.

23. Să se calculeze $\iint\limits_D(24xy-48x^3y^3)dxdy$, dacă $D$ este mărginit de curbele $x=1$, $y=x^2$, $y=-\sqrt{x}$.

24. Să se calculeze $\iint\limits_D 4y^2\sin(2xy)dxdy$, dacă $D$ este mărginit de curbele $x=0$, $y=\sqrt{2\pi}$, $y=2x$.

25. Să se calculeze aria figurii mărginită de curbele $x^2-2x+y^2=0$, $x^2-8x+y^2=0$, $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$, $y=\sqrt{3}x$.



26. Să se calculuze aria figurii mărginită de curba polară $\rho=3\cos5\theta$.

27. Să se determine masa figurii materiale mărginită de curbele $y^2=2x$, $x=\frac{1}{2}$, dacă densitatea de suprafață $\gamma(x,y)=4x+9y^2$.

28. Să se calculeze $\iint\limits_D y^2e^{\frac{-xy}{4}}dxdy$, dacă $D$ este mărginit de dreptele $y=x$, $y=2$, $x=0$.

29. Să se calculeze aria figurii mărginită de curbele $x=y^2$, $y^2=4-x$.

30. Să se calculeze aria figurii mărginită de curba polară $\rho=2\cos^2\theta$.

**Problema 2.**

1. Să se calculeze $\iiint\limits_V(2x^2+3y+z)dxdydz$, dacă $V$ este paralelipipedul $2\le x\le 3$, $-1\le y\le 2$, $0\le z\le 4$.
2. Să se calculeze volumul corpului mărginit de suprafețele $y=16\sqrt{2x}$, $y=\sqrt{2x}$, $z=0$, $x+z=2$.
3. Să se calculeze masa corpului omogen (densitatea de volum $\gamma(x,y,z)=const=1$) mărginit de suprafetele $x^2+y^2=3$, $2y-z=0$, $z=0$.
4. Să se calculeze volumul corpului mărginit de suprafețele $x^2+y^2=2y$, $z=\frac{5}{4}-x^2$, $z=0$.
5. Să se calculeze $\iiint\limits_V\frac{zdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, dacă $V$ este corpul mărginit de suprafețele sferice $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2=9$ și semiplanele $y\ge0$, $z\ge0$, $y\le\frac{1}{\sqrt{3}}x$.

6. Să se afle volumul corpului mărginit de suprafețele $z^2 = 4 - x$, $x^2 + y^2 = 4x$.
7. Să se afle masa corpului omogen (densitatea de volum $\gamma(x,y,z) = const. = 1$) mărginit de suprafețele $x^2 + y^2 = 4$, $z = 4 - x - y$, $z = 0$.
8. Să se calculeze $\iiint_V (3x^2 + y^2)dxdydz$, dacă V este mărginit de suprafețele $z = 10y$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
9. Să se calculeze volumul corpului mărginit de suprafețele $x^2 + y^2 = 4y$, $z = 4 - x^2$, $z = 0$.
10. Să se calculeze masa corpului omogen ( densitatea de volum $\gamma(x,y,z) = const. = 1$) mărginit de suprafețele $x^2+y - 1 = 0$, $y - 2z = 0$, $z = 0$.
11. Să se afle volumul corpului mărginit de suprafețele $y = 2x$, $z = 0$, $y = 0$, $z = y^2$, $x = 3$.
12. Să se afle masa corpului mărginit de suprafețele $x = \sqrt{2(y^2 + z^2)}$, $x = 4$, dacă densitatea de volum $\gamma(x,y,z) = x$.
13. Să se calculeze $\iiint_V 8y^2 z e^{2xyz} dxdydz$, dacă $V$ este mărginit de suprafețele $x = -1$, $x = 0$, $y = 2$, $y = 0$, $z = 1$, $z = 0$.
14. Să se afle volumul corpului mărginit de suprafețele $z = 0$,

$$z = 2 - x,\ y = 2\sqrt{x},\ y = \frac{1}{4}x^2.$$

15. Să se afle masa corpului omogen (densitatea de volum $\gamma(x,y,z) = const. = 1$) mărginit de suprafețele $x^2+y - 2=0$, $3y - 2z = 0$, $z = 0$.
16. Să se calculeze volumul corpului mărginit de suprafețele $x^2 + y^2 = 9x$, $x^2 + y^2 = 12x$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$, $y = 0$.



17. Să se afle masa corpului mărginit de suprafețele $x^2 + y^2 = 2y$, $x^2 + y^2 = 4y$, $z = 0$, $z = 6$, $x = 0$, dacă densitatea de volum $\gamma(x,y,z) = = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
18. Să se calculeze $\iiint_V y^2 z\cos(xyz)dxdydz$, dacă $V$ este mărginit de suprafețele $x = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 2x$, $z = 0$, $z = 36$.
19. Să se afle volumul corpului mărginit de suprafețele $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = y^2+1$, $x+y = 1$.
20. Să se afle masa corpului omogen (densitatea de volum $\gamma(x,y,z) = const. = 1$) mărginit de suprafețele $z^2 = 4 - y$, $x^2 + y^2 = 4y$.
21. Să se calculeze volumul corpului mărginit de suprafețele $x+z = 6$, $y = \sqrt{3x}$, $z = 4y$, $z = 0$.
22. Să se calculeze $\iiint_V x^2 z\sin(xyz)dxdydz$, dacă $V$ este mărginit de suprafețele $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 2$, $y = \pi$, $z = 1$.
23. Să se calculeze volumul corpului mărginit de suprafețele $z = 0$, $z = 16 - x^2$, $x^2 + y^2 = 16$.
24. Să se afle masa corpului mărginit de suprafețele $x^2 + y^2 = 2x$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 3$, dacă densitatea de volum $\gamma(x,y,z) = z\sqrt{x^2 + y^2}$.
25. Să se calculeze $\iiint_V x^2 \sin(\pi xy)dxdydz$, dacă $V$ este mărginit de suprafețele $x = 1$, $y = 2x$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 4\pi$.
26. Să se afle volumul corpului mărginit de suprafețele $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x+y = 2$, $z = 2x^2+3y^2$.
27. Să se calculeze volumul corpului mărginit de suprafețele $x^2 + y^2 = 2z$, $x^2 + y^2 = 5y$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$.

28. Să se calculeze $\iiint\limits_{V} y^2 z ch(xyz) dxdydz$, dacă $V$ este cubul $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1$.

29. Să se afle masa corpului omogen (densitatea de volum $\gamma$ $(x, y, z) = const. = 1$) mărginit de suprafețele $z = 9\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 22 - x^2 - y^2$.

30. Să se calculeze volumul corpului mărginit de suprafețele $y = 1 - 2x^2$, $y = -1$, $z = x^2 + 2y + y^2 - 2$, $z = x^2 + 2y + y^2 + 1$.

**Problema 3.** Să se calculeze integralele curbilinii:

1. $\oint\limits_{L} (x + y)dx + (x - y)dy$, unde $L$ este circumferința $x^2 + y^2 = 16$, orientată în sens pozitiv.

2. $\int\limits_{L} \frac{ds}{\sqrt{8 - x^2 - y^2}}$, unde $L$ este segmentul $OB$ cu $O$ $(0,0)$ şi $B$ $(2,2)$.

3. $\oint\limits_{L} (x^2 - y)dx + (y^2 + x)dy$, unde $L$ este elipsa $x = 2\cos t$, $y = 3 \sin t$, orientată în sens pozitiv.

4. $\int\limits_{L} \left(4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}\right)ds$, unde $L$ este segmentul de dreaptă $AB$ cu $A(-1,0), B(1,0)$.

5. $\int\limits_{L} \left(x^2 + y^2\right)dx + \left(x^2 + y^2\right)dy$, unde $L$ este segmentul de dreaptă $AB$ cu $A(-1,1), B(3,2)$.

6. $\int\limits_{L} \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} ds$, unde $L$ este arcul cardioidei $\rho = 2(1 + \cos\theta)$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

7. $\int\limits_{L} \left(x^2 + y^2\right)dx + \left(x^2 - y^2\right)dy$, unde $L$ este linia poligonală $ABC$ cu $A(2,0)$, $B(5,3)$, $C(5,0)$.



8. $\int\limits_{L} \sqrt{2y}\, ds$, unde $L$ este primul arc al ciocloidei $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$.

9. $\int\limits_{L} 2xydx - x^2dy$, unde $L$ este arcul parabolei $y = \frac{1}{4}x^2$ din punctul $O$ $(0,0)$ în punctul $A(2,1)$.

10. $\int\limits_{L} \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, unde $L$ este segmentul de dreaptă $AB$ cu $A(1,2), B(5,7)$.

11. $\oint\limits_{L} xdx - ydy$, unde $L$ este conturul triunghiului cu vârfurile în punctele $A(-1,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$, orientat în sensul pozitiv.

12. $\int\limits_{L} \frac{(y^2 - x^2)xy}{(x^2 + y^2)^2} ds$, unde $L$ este arcul curbei polare $\rho = 9\sin 2\theta$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

13. $\int\limits_{L} 2xydx - x^2dy + 7dz$, unde $L$ este segmentul de dreaptă $OA$ cu $O$ $(0,0,0)$, $A$ $(2,1,-1)$.

14. $\int\limits_{L} \left(x^2 + y^2 + z^2\right)ds$, unde $L$ este arcul curbei $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \sqrt{3}\,t$, $t \in [0, 2\pi]$.

15. $\int\limits_{L} \frac{y}{x} dx + xdy$, unde $L$ este arcul curbei $y = \ln x$ din punctul $A(1,0)$ în punctul $B(e,1)$.

16. $\int\limits_{L} yds$, unde $L$ este arcul astroidei $y = \sin^3 t$, $x = \cos^3 t$, cuprins între punctele $A(1,0)$, $B(0,1)$.

17. $\int\limits_L 2xy^2dx + x^2dy$, unde $L$ este arcul parabolei $y = \frac{1}{8}x^3$ din punctul $O$ (0,0) în punctul $A(2,1)$.

18. $\int\limits_L \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}ds$, unde $L$ este arcul cardioidei $\rho = 1 + \cos\Theta$, $\Theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

19. $\int\limits_L xydx + (y-x)dy$, unde $L$ este arcul curbei $y = x^3$ din punctual $O$ (0,0) în punctul $B(1,1)$.

20. $\int\limits_L (x+y)ds$, unde $L$ este conturul triunghiului cu vârfurile în punctele $O(0,0)$, $A(-1,0)$, $B(0,1)$.

21. $\int\limits_L xy^2dx - yz^2dy - x^2zdz$, unde $L$ este segmentul de dreaptă $OA$ cu $O$ (0,0,0), $A$ (−2,4,5).

22. $\int\limits_L \frac{z^2ds}{x^2+y^2}$, unde $L$ este arcul curbei $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=2t$, $t\in[0,\pi]$.

23. $\int\limits_L \cos ydx - \sin xdy$, unde $L$ este segmentul de dreaptă $AB$ cu $A(2\pi, -2\pi)$, $B(-2\pi, 2\pi)$.

24. $\int\limits_L yds$, unde $L$ este arcul parabolei $y^2 = 2x$, tăiat de parabola $x^2=2y$.

25. $\int\limits_L ydx + xdy$, unde $L$ este arcul de circumferinţă $x=R\cos t$, $y=R\sin t$ din punctul $A(R,0)$ în punctul $B(0,R)$.



26. $\int\limits_L (x^2+y^2)ds$, unde $L$ este circumferinţă $x^2+y^2=4x$.

27. $\int\limits_L 2xydx + y^2dy+z^2dz$, unde $L$ este arcul curbei $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=4t$ din punctul $A(2,0,0)$ în punctul $B(2,0,8\pi)$.

28. $\int\limits_L (x+z)ds$, unde $L$ este arcul curbei $x = t$, $y = \sqrt{\frac{3}{2}}t^2$, $z=t^3$, $t\in[0,1]$.

29. $\int\limits_L xdx+ydy-(x-y+1)dz$, unde $L$ este segmentul de dreaptă $AB$ cu $A(1,1,1)$, $B(2,3,4)$.

30. $\int\limits_L \sqrt{2+z^2}\left(2z-\sqrt{x^2+y^2}\right)$ds, unde $L$ este arcul curbei $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $t\in[0,2\pi]$.

**Problema 4.**

1) Să se calculeze fluxul câmpului vectorial $\vec{b}$(M)= $\overline{rot a(M)}$ pe faţa exterioară a suprafeţei $S=S_1+S_2$.

2) Să se calculeze circulaţia câmpului vectorial $\vec{a}$(M) de-a lungul conturului $L$ format de la intersecţia suprafeţelor $S_1$ şi $S_2$. *Direcţia conturului se consideră în sens pozitiv.*

3) Să se verifice răspunsurile din punctele precedente cu ajutorul *formulelor Gauss – Ostrogadschi* şi *Stoches*.

1. $\vec{a}(M)=\{2(x-z), 2y-xz, 4-2x\}$,
   $S_1$: $x^2+y^2+2z+3=0$, $S_2$: $z=-2$.
2. $\vec{a}(M)=\{-x, 2y, z\}$, $S_1$: $2x^2+2y^2+3z-2=0$, $S_2$: $z=-2$.
3. $\vec{a}(M)=\{x^3, y^3, z^3\}$, $S_1$: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $S_2$: $z=0$.
4. $\vec{a}(M)=\{x+2, y-xz, 3-z\}$, $S_1$: $x^2+y^2+2z+1=0$, $S_2$: $z=-1$.
5. $\vec{a}(M)=\{3x-1, y-x+z, 4z\}$, $S_1$: $2x^2-y+2z^2=2$, $S_2$: $y=0$.
6. $\vec{a}(M)=\{2y+z, x-y, 2z\}$ $S_1$: $z=\sqrt{x^2+y^2}=2$, $S_2$: $z=4$.

7. $\vec{a}(M)=\{xy,yz,zx\}$, $S_1$: $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$,

$S_2$: $z=\sqrt{x^2+y^2}$ (înăuntrul conului).

8. $\vec{a}(M)=\{2x+z,2y-xz,3+x\}$, $S_1$: $x^2+y^2+2z-3=0$, $S_2$: $z=1$.

9. $\vec{a}(M)=\{y+2z,x+2z,x-2y\}$, $S_1$: $2x^2+y+2z^2=8$, $S_2$: $y=0$.

10. $\vec{a}(M)=\{x^2,xy,3z\}$, $S_1$: $x^2+y^2=z^2$, $S_2$: $z=4$.

11. $\vec{a}(M)=\{xz,z,y\}$, $S_1$: $x^2+y^2=1-z$, $S_2$: $z=0$.

12. $\vec{a}(M)=\{3x-y,2y+z,2z-x\}$, $S_1$: $2x^2+2y^2+z=6$, $S_2$: $z=-2$.

13. $\vec{a}(M)=\{x-6,y-xz,1+z^2\}$, $S_1$: $x^2+y^2+2z-5=0$, $S_2$: $z=2$.

14. $\vec{a}(M)=\{x^2,x,xz\}$, $S_1$: $z=x^2+y^2$, $S_2$: $z=1$.

15. $\vec{a}(M)=\{3x+1,y-x+z,4z\}$, $S_1$: $2x^2+2z^2=2+y$, $S_2$: $y=0$.

16. $\vec{a}(M)=\{3z,4-xz,x^2+3x\}$, $S_1$: $x^2+y^2+2z-7=0$, $S_2$: $z=3$.

17. $\vec{a}(M)=\{z,yz,-xy\}$, $S_1$: $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, $S_2$: $z=0$.

18. $\vec{a}(M)=\{3x^2,-2x^2y,2x-1\}$, $S_1$: $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $S_2$: $z=4$.

19. $\vec{a}(M)=\{x,x+z,y+z\}$, $S_1$: $3x^2+3y^2+z=3$, $S_2$: $z=0$.

20. $\vec{a}(M)=\{x+z,y-xz,2x-z\}$, $S_1$: $x^2+y^2-2z-5=0$, $S_2$: $z=-2$.

21. $\vec{a}(M)=\{x^2+xy,y^2+yz,z^2+xz\}$, $S_1$: $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$,

$S_2$: $z=\sqrt{x^2+y^2}$ (înăuntrul conului).

22. $\vec{a}(M)=\{2x,2y-xz,4+z^2\}$, $S_1$: $x^2+y^2-2z-3=0$, $S_2$: $z=-1$.

23. $\vec{a}(M)=\{2xy,2xz,z^2\}$, $S_1$: $z=-\sqrt{x^2+y^2}$, $S_2$: $z=-2$.

24. $\vec{a}(M)=\{-x,2y,yz\}$, $S_1$: $z=-\sqrt{9-x^2-y^2}$, $S_2$: $z=0$.

25. $\vec{a}(M)=\{z,x+y,y\}$, $S_1$: $x^2+y^2+2z-3=0$, $S_2$: $z=1$.

26. $\vec{a}(M)=\{x+z,z,2x-y\}$, $S_1$: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $S_2$: $z=0$.

27. $\vec{a}(M)=\{x+1,y-2-xz,z\}$, $S_1$: $x^2+y^2-2z+5=0$, $S_2$: $z=3$.

28. $\vec{a}(M)=\{3x+z,3y-xz,1+x\}$, $S_1$: $z=\sqrt{2x^2+2y^2}$, $S_2$: $z=2$.



29. $\vec{a}(M)=\{2x-z,2y-xz,z-x\}$, $S_1$: $x^2+y^2-2z+1=0$, $S_2$: $z=1$.

30. $\vec{a}(M)=\{x+z,z+3y,y\}$, $S_1$: $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$,

$S_2$: $z=\sqrt{x^2+y^2}$ (înăuntrul conului).

**Problema 5.** Să se stabilească dacă cîmpul vectorial al vectorului $\vec{a}(M)$ este sau nu

a) solenoidal:

1. $\vec{a}(M)=\{x+z,-2(y+z),z-x\}$.
2. $\vec{a}(M)=\{3x^2y,-2xy^2,-2xz^2\}$.
3. $\vec{a}(M)=\{yz,x-y,z^2\}$.
4. $\vec{a}(M)=\{x^2-y^2,y^2-z^2,z^2-x^2\}$.
5. $\vec{a}(M)=\{zy-2x,xz+2y,xy\}$
6. $\vec{a}(M)=\{(\alpha-\beta)x,(\gamma-\alpha)y,(\beta-\gamma)z\}$.
7. $\vec{a}(M)=\{2xyz,-y(yz+1),z\}$.
8. $\vec{a}(M)=\{x^2y,-2xy^2,2xyz\}$.
9. $\vec{a}(M)=\{x^2-z^2,-3xy,(3y-2x)z\}$.
10. $\vec{a}(M)=\{3x,4(x-y),(z-x-y)\}$.

b) potențial:

11. $\vec{a}(M)=\{3x^2,4(x-y),(x-z)\}$.
12. $\vec{a}(M)=\{3(x-z),(x^2-z^2),3z\}$.
13. $\vec{a}(M)=\{6x^2,3\cos(3x+2z),\cos(3y+2z)\}$.
14. $\vec{a}(M)=\{(zy-2x),(xz+zy),xy\}$.
15. $\vec{a}(M)=\{xy(3x-4y),x^2(x-4y),3z^2\}$.
16. $\vec{a}(M)=\{z^2,xz+y,x^2y\}$.
17. $\vec{a}(M)=\{(2x-yz),(2x-xy),yz\}$.
18. $\vec{a}(M)=\{(z-y),(x+z),x^2-y^2\}$.
19. $\vec{a}(M)=\{6xy,(3x^2-2y),z\}$.
20. $\vec{a}(M)=\{z^2,(xz+y),x^2y\}$

c) armonic:

21. $\vec{a}(M)=\{(y-z),(z-x),(x-y)\}$.
22. $\vec{a}(M)=\{yz,xz,xy\}$.

23. $\vec{a}\,(M) = \{(2+yz),(2+xz),(2+xy)\}$.

24. $\vec{a}\,(M) = \{6xyz^2, 3x^2z^2, 6x^2yz\}$.

25. $\vec{a}\,(M) = \{(x+y),(y+z),(x-z)\}$.

26. $\vec{a}\,(M) = \{x^2z, xz, y - x z^2)\}$.

27. $\vec{a}\,(M) = \{y+z, xy, -xz\}$.

28. $\vec{a}\,(M) = \{yz+3x, xz-3y, 6z+xy\}$.

29. $\vec{a}\,(M) = \left\{\frac{x}{yz}, \frac{y}{xz}, -\frac{(x+y)\ln z}{xy}\right\}$.

30. $\vec{a}\,(M) = \{2+yz, xz, xy\}$.

## Lucrarea de control nr. 3

### "Ecuații diferențiale ordinare"

**Problema 1.** Să se testeze și să se afle soluția generală a ecuației diferențiale de ordinul întâi:

1. $y'\sin x - y\cos x = 1$.
2. $xydx + \sqrt{1+x^2}\,(1+y^2)dy = 0$.
3. $xyy' = y^2 + 2x^2$.
4. $(x^2\ln y - x)y' = y$.
5. $(x+y-1)dx + (e^y + x)dy = 0$.
6. $y' - y\sin x = e^{-\cos x}\sin 2x$.
7. $(2x-y)dx + (x+y)dy = 0$.
8. $y - xy' = 2(1+x^2y')$.
9. $(x^2-4)y' - 4y = -(x+2)y^2$.
10. $ye^x + (y+e^x)y' = 0$.
11. $y'x\ln x + y = 3x^2\ln^2 x$
12. $xy' = y + \sqrt{x^2+y^2}$.
13. $dy - \sqrt{xy}\,dx = 0$.
14. $xy' - y(2y\ln x - 1) = 0$.
15. $(e^x\sin y + x)dx = (y - e^x\cos y)dy$.
16. $y' + 2xy - xe^{-x^2} = 0$.
17. $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}\,dy = 0$.
18. $y'\cos^2 x\ln y + y = 0$.
19. $x^2y^2y' - xy^3 = 1$.
20. $(x^2 + \sin y)dx + (2 + x\cos y)dy = 0$.



21. $(1-x^2)y' + xy = 1$.
22. $xy' = y\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right)$.
23. $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$.
24. $y' - y = e^x\sqrt{y}$.
25. $(2x+y)dx + xdy = 0$.
26. $(x^2+y^2)dx + xydy = 0$.
27. $xy' - 2y + x^2 = 0$.
28. $(1+e^x)yy' = e^x$.
29. $y' - \frac{1}{x}y - 2xy^2 = 0$.
30. $(y + \sin y)dx + (x + x\cos y)dy = 0$.

**Problema 2.** Să se afle soluția particulară a ecuației diferențiale cu condițiile inițiale indicate:

1. $y'' - 5y' + 6y = x^2 - x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{1}{9}$.
2. $y'' - 2y' + 5y = x^2 - 1$, $y(0) = -3$, $y'(0) = \frac{1}{5}$.
3. $y'' - 4y' + 4y = -x^2 - 3x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = \frac{4}{3}$.
4. $y'' + 2y' + 10y = -\sin 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{3}{4}$.
5. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
6. $y'' - 3y' - 4y = 17\sin x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$.
7. $y'' + y' = e^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
8. $y'' + 5y' = 6y = 2\cos x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = \frac{1}{2}$.
9. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 - 4x + 2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
10. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(3-4x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
11. $y'' + 2y' - 10y = -\cos 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{3}{4}$.
12. $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.
13. $y'' + 9y = \frac{9}{\cos 3x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.

14. $y''+2y'-8y=3\sin x,\ y(0)=-1,\ y'(0)=1.$
15. $y''-y'=e^{x},\ y(0)=1,\ y'(0)=1.$
16. $y''+6y'=9x^2-12x+2,\ y(0)=1,\ y'(0)=3.$
17. $y''-y'=x+1,\ y(0)=0,\ y'(0)=2.$
18. $y''-3y'=x+\sin x,\ y(0)=0,\ y'(0)=0.$
19. $y''-y'=2(1-x),\ y(0)=0,\ y'(0)=0.$
20. $y''-3y'-4y=5\sin x,\ y(0)=4,\ y'(0)=0.$
21. $y''-2y'+y=9e^{x},\ y(0)=0,\ y'(0)=2.$
22. $y''-3y'+2y=\dfrac{e^{x}}{1+e^{-x}},\ y(0)=0,\ y'(0)=0.$
23. $y''-3y'=\cos x,\ y(0)=0,\ y'(0)=2.$
24. $y''-10y'+25y=(1+5x)e^{5x},\ y(0)=1,\ y'(0)=2.$
25. $y''+9y'=5\cos 3x,\ y(0)=0,\ y'(0)=1.$
26. $y''-2y'+5y=16e^{3x},\ y(0)=3,\ y'(0)=1.$
27. $y''-y=\sin x,\ y(0)=0,\ y'(0)=2.$
28. $y''+y=\dfrac{1}{\sin x},\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1,\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}.$
29. $y''-4y=6e^{2x},\ y(0)=0,\ y'(0)=0.$
30. $y''+6y=2\sin 2x,\ y(0)=2,\ y'(0)=4.$

**Problema 3.** Să se integreze sistemul de ecuaţii diferenţiale, reducîndu – l la o ecuaţie diferenţială de ordinul doi:

1. $\begin{cases} y'_t=12x+5y \\ x'_t=5x+12y. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} y'_t=x+3y \\ x'_t=x-y. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} y'_t=x+4y \\ x'_t=x+y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} y'_t=3x+y \\ x'_t=-4x-2y. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} y'_t=x-y \\ x'_t=y-x. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} y'_t=2x-4y \\ x'_t=x-3y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} y'_t=x+y \\ x'_t=x-2y. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} y'_t=4x+5y \\ x'_t=y. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} y'_t=x-5y \\ x'_t=-2x-2y. \end{cases}$



10. $\begin{cases} y'_t=2x+6y \\ x'_t=3x-y \end{cases}$ 11. $\begin{cases} y'_t=2x+3y \\ x'_t=x+4y. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} y'_t=-2x+11y \\ x'_t=5x+4y. \end{cases}$

13. $\begin{cases} y'_t=-2x+y \\ x'_t=-3x+2y. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} y'_t=2x+y \\ x'_t=x+4y \end{cases}$ 15. $\begin{cases} y'_t=x+3y \\ x'_t=3x+y. \end{cases}$

16. $\begin{cases} y'_t=4x-y \\ x'_t=3x-y \end{cases}$ 17. $\begin{cases} y'_t=3x+y \\ x'_t=x-3y. \end{cases}$ 18. $\begin{cases} y'_t=3x+6y \\ x'_t=x-2y. \end{cases}$

19. $\begin{cases} y'_t=-3x+9 \\ x'_t=5x+4y. \end{cases}$ 20. $\begin{cases} y'_t=-2x+9y \\ x'_t=x+6y. \end{cases}$ 21. $\begin{cases} y'_t=6x-4y \\ x'_t=7x+3y. \end{cases}$

22. $\begin{cases} y'_t=4x+3y \\ x'_t=3x+4y. \end{cases}$ 23. $\begin{cases} y'_t=2x+7y \\ x'_t=-3x+y. \end{cases}$ 24. $\begin{cases} y'_t=x-y \\ x'_t=2x+y. \end{cases}$

25. $\begin{cases} y'_t=11x-y \\ x'_t=x-11y. \end{cases}$ 26. $\begin{cases} y'_t=7x+5y \\ x'_t=5x+7y. \end{cases}$ 27. $\begin{cases} y'_t=9x+y \\ x'_t=3x+2y. \end{cases}$

28. $\begin{cases} y'_t=y-3x \\ x'_t=3x-y. \end{cases}$ 29. $\begin{cases} y'_t=10x+5 \\ x'_t=5x+10y. \end{cases}$ 30. $\begin{cases} y'_t=5y+x \\ x'_t=x-y. \end{cases}$

## Lucrarea de control nr. 4

## „Serii”

**Problema 1.** Să se calculeze suma seriei numerice:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+6)(n+7)}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{4n^2+8n+3}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+5^n}{15^n}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+9)(n+10)}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{9}{9n^2+21n-8}$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n-3^n}{15^n}$;

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+5)(2n+7)}$; 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{9n^2+3n-2}$; 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n+5^n}{10^n}$;

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+7)(n+8)}$; 11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2+7n-12}$;

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$; 13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+2^n}{10^n}$;

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)}$; 15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n+2^n}{14^n}$;

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{49n^2-70n-24}$; 17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$;

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n-4^n}{20^n}$; 19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{36n^2-12n-35}$;

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$; 21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n-2}$;

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n+3^n}{21^n}$; 23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)(n+4)}$;

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{4n^2-9}$; 25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+8^n}{24^n}$;

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$; 27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4n^2+4n-3}$;

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n+2^n}{18^n}$; 29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}$;

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{25n^2+5n-6}$;

**Problema 2.** Să se cerceteze natura seriei numerice:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{5n^3-1}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n+2)!}{n^5}$;



3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-3}{7^n}$; 4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2-1}$;

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot5\cdot6\cdot\ldots\cdot(n+3)}{5\cdot7\cdot9\cdot\ldots\cdot(2n+3)}$; 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3n!}$;

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{5n}\right)^{n^2}$; 8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-1)(6n+3)}$;

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$; 10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{(n-1)!}$;

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{5^n}$; 12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+4}{2n^3+3}$;

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{n^n}$; 14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot6\cdot11\cdot\ldots\cdot(5n-4)}{5\cdot7\cdot9\cdot\ldots\cdot(2n+3)}$;

15. $\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{2\pi}{3^n}$; 16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{\sqrt{n7^n}}$;

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{1}{5^n}\right)^n$; 18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{(4n+3)^3}}$;

19. $\sum_{n=1}^{\infty}tg\frac{\pi}{3^n}$; 20. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+7}\right)^n$;

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(2n)!}$; 22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{5^n}$;

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+3}{6n^3+5}$; 24. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^n\frac{1}{n^7}$;

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n!}$; 26. $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)tg\frac{\pi}{3^n}$;

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n2^n}}$; 28. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{n^2}$;

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{n+3}{2n+5}\right)^n$; 30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)3^n}$.

**Problema 3.** Să se afle domeniul de convergență al seriei de puteri:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{\frac{n}{3}}}{n!}x^n$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{3^n}(x+3)^n$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{\sqrt{(2n-1)3^n}}$; 4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+6}{6^n}(x-6)^n$;

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n^2+1)}x^n$; 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5}{5^n}(x+5)^n$;

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^n$; 8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4}{4^n}(x+4)^n$;

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{(n+1)^n}x^n$; 10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3}{3^n}(x-3)^n$;

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n$; 12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n}(x-2)^n$;

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{\sqrt{n}}$; 14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n!}$;

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$; 16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+8)^n}{n^2}$;

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)x^n$; 18. $\sum_{n=1}^{\infty}2n^2(x+2)^n$;



19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)}$; 20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt{n^2+1}}$;

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\sqrt{2n+1}}$; 22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2^n\ln(n+1)}$;

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$; 24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{n^2}}{(n+1)^n}$;

25. $\sum_{n=1}^{\infty}(2n^2-2n+1)x^n$; 26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n5^n}$;

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{n^2}x^n$; 28. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{n^2}\right)(x+1)^n$;

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(3n)!}x^n$; 30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+6}{6^n}(x+6)^n$.

**Problema 4.** Să se dezvolte în seria Fourier funcția $f(x)$ pe intervalul dat cu perioada T:

1. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ \frac{x}{2}+1, & 0\le x\le\pi,\quad T=2\pi.\end{cases}$ 2. $\begin{cases}f(x)=x,\ x\in[-1,1],\\ T=2.\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}7-3x, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi,\quad T=2\pi.\end{cases}$ 4. $\begin{cases}f(x)=x,\ x\in[1,3]\\ T=2.\end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ 3-8x, & 0\le x\le\pi,\quad T=2\pi.\end{cases}$ 6. $\begin{cases}f(x)=x, 0\le x\le 1,\\ T=2.\end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases}2x-11, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x<\pi, \quad T=2\pi.\end{cases}$ 8. $\begin{cases}f(x)=e^{x},\ x\in[-2,2],\\ T=4.\end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ 1+8x, & 0\le x\le\pi, \quad T=2\pi.\end{cases}$ 10. $\begin{cases}f(x)=10-x,\ x\in[5,15],\\ T=10.\end{cases}$

11. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ 6x-5, & 0<x\le\pi, \quad T=2\pi.\end{cases}$ 12. $\begin{cases}f(x)=x-1,\ x\in[-5,5],\\ T=10.\end{cases}$

13. $f(x)=\begin{cases}2x-1, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le-\pi, \quad T=2\pi.\end{cases}$ 14. $\begin{cases}f(x)=1+x,\ x\in[-1,1],\\ T=2.\end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases}5-x, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi, \quad T=2\pi.\end{cases}$ 16. $\begin{cases}f(x)=2x+3,\ x\in[-1,3],\\ T=2.\end{cases}$

17. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ 4x-3, & 0\le x\le\pi, \quad T=2\pi.\end{cases}$ 18. $\begin{cases}f(x)=1-|x|,\ x\in[-3,3],\\ T=6.\end{cases}$

19. $f(x)=\begin{cases}2x+3, & -\pi\le x<0,\\ 0, & 0\le x<\pi, \quad T=2\pi.\end{cases}$ 20. $\begin{cases}f(x)=|x|-3,\ x\in[-4,4],\\ T=8.\end{cases}$

21. $f(x)=\begin{cases}x-2, & -\pi\le x<0,\\ 0, & 0<x\le\pi, \quad T=2\pi.\end{cases}$ 22. $\begin{cases}f(x)=x-1,\ x\in[-2,2]\\ T=4.\end{cases}$



23. $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi\le x<0,\\ \frac{x}{2}+1, & 0\le x\le\pi, \quad T=2\pi.\end{cases}$ 24. $\begin{cases}f(x)=4x-3,\ x\in[-5,5],\\ T=10\end{cases}$

25. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ 3-x, & 0<x\le\pi, \quad T=2\pi.\end{cases}$ 26. $\begin{cases}f(x)=x,\ 1\le x<3\\ T=2\end{cases}$

27. $f(x)=\begin{cases}0, & -2\le x\le 0,\\ 2, & 0<x\le 2, \quad T=4.\end{cases}$ 28. $\begin{cases}f(x)=\dfrac{\pi-x}{2},\ x\in[-\pi,\pi],\\ T=2\pi.\end{cases}$

29. $f(x)=\begin{cases}1, & -1\le x<0,\\ 1-x, & x\in[0,1], \quad T=2.\end{cases}$ 30. $\begin{cases}f(x)=3x+1,\ 0<x\le\pi,\\ T=2\pi\end{cases}$

## Lucrarea de control nr. 5

### „Funcția complexă de o variabilă complexă"

**Problema 1.**

1. $\ln\left(\sqrt{3}-i\right)$; 2. $1^{i}$; 3. $(1+i)^{\sqrt{2}}$; 4. $\ln\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$;

5. $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{1+i}$; 6. $\sin(1+i)$; 7. $e^{1+\frac{\pi}{2}i}$; 8. $\cos(2+i)$;

9. $(1-i)^{3-3i}$; 10. $\operatorname{Arc\,sin} i$; 11. $\operatorname{Ln}(-1-i)$; 12. $(-1)^{\sqrt{5}}$

13. $\operatorname{Arccos}\left(\dfrac{\pi^{3}}{3}\right)$; 14. $\ln(1-i)$; 15. $\operatorname{Arcth}\ \pi i$;

16. $\ln(-\sqrt{3}-i)$; 17. $\operatorname{Arctg}(1-i)$; 18. $\operatorname{Arcsh}(1-i)$;

19. Arc sin $3$;  20. $\operatorname{sh}\left(1+\frac{\pi}{2}i\right)$;  21. $\ln 1^i$;

22. $\operatorname{Arcch}\frac{\pi i}{2}$;  23. Arccos $i$;  24. $\operatorname{Arctg}\frac{i}{3}$;

25. $\ln(1+i)$;  26. $(1+i)^i$;27. $\ln i^{\frac{1}{i}}$;

28. $\operatorname{Ln}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)$;  29. Atcctg $(\sqrt{3+i})$; 30. Arccos$(1 + i)$.

**Problema 2.** Să se cerceteze analiticitatea funcției $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, unde $z = x+iy$, şi să se calculeze $f'(z_0)$, dacă

1. $u=3x^2y-y^3$, $v=3xy^2-x^3$, $z_0=-1+i$;
2. $f(z)=\frac{e^z}{z}$, $z_0=1+i$;
3. $u=e^x(x\cos x-y\sin y)$, $v=e^x(x\sin x+y\sin y)$, $z_0=-1+\pi i$;
4. $f(z)=(1+z)\cdot \operatorname{Im}z^2$, $z_0=-1$;
5. $u=x^3-3xy^2+x^2-y^2$, $v=3x^2y-y^3+2xy$, $z_0=\frac{2}{3}i$;
6. $f(z)=5e^{2z}$, $z_0=1-i$;
7) $u=e^{1+y}\cos x$, $v=-e^{1+y}\sin x$, $z_0=\frac{\pi}{2}+i$;
8. $f(z)=|z-1|^2$, $z_0=1$;
9. $u=2xy-2x$, $v=y^2-2y-x^2+2$, $z_0=1$;
10. $f(z)=\operatorname{sh}3z$, $z_0=2+i$;
11. $u=x^3-3xy^2+3x$, $v=3x^2y-y^3+3y+1$, $z_0=-1-i$;
12. $f(z)=i\operatorname{ch}3z$, $z_0=i$;
13. $u=e^{1+3y}\cos 3x$, $v=-e^{1+3y}\sin 3x$, $z_0=\frac{\pi}{3}+i$;
14. $f(z)=2\sin 2z$, $z_0=\frac{\pi}{8}i$;
15. $u=x^2+2x-y^2$ $v=2xy+2y$, $z_0=i$;
16. $f(z)=(z+1)\cdot \operatorname{Re}z$, $z_0=-1$;



17. $u=e^{-1-y}\cos x$, $v=e^{-1-y}\sin x$, $z_0=\pi-i$;
18. $f(z)=z\cos z$, $z_0=\frac{\pi}{4}i$;
19. $u=e^{1-2x}\cos 2y$, $v=-e^{1-2x}\sin 2y$, $z_0=\frac{\pi}{4}i$;
20. $f(z)=2\operatorname{ch}2z$, $z_0=1+i$;
21. $u=e^{1+2y}\cos 2x$, $v=-e^{1+2y}\sin 2x$, $z_0=\frac{\pi}{6}$;
22. $f(z)=z\cdot e^z$, $z_0=1-i$;
23. $u=e^x\cos y+1$, $v=e^x\sin y+1$, $z_0=1+\frac{\pi}{4}i$;
24. $f(z)=z^3+2z+1$, $z_0=2+3i$;
25. $u=x$, $v=y$, $z_0=5+3i$;
26. $f(z)=z\bar{z}$, $z_0=0$;
27. $u=2e^x\cos y$, $v=2e^x\sin y$, $z_0=2-3i$;
28. $f(z)=z^2+4iz$, $z_0=2+i$;
29. $u=\frac{x}{x^2+y^2}$, $v=-\frac{y}{x^2+y^2}$, $z_0=2-i$;
30. $f(z)=2\sin z-z$, $z_0=\frac{\pi}{3}i$.

**Problema 3.** Să se calculeze integrala

1. $\int_{AB}(1+i+4z)dz$, unde AB este segmentul de parabolă $y=x^2+1$, $x\in[0,2]$;
2. $\int_L(z^3+z\bar{z})dz$, unde $\bar{z}=x-iy$, L este semicircumferința $|z|=2$, $0\leq \arg z\leq \pi$;
3. $\int_L \bar{z}e^z dz$, unde $\bar{z}=x-iy$ şi L este segmentul de dreaptă, ce uneşte punctele $z_1=0$, $z_2=\pi-i\pi$;

4. $\int\limits_{1+i}^{3+i}(3z^2+z+5)dz$;   5. $\int\limits_{0}^{2i} z\cos 2z dz$;   6. $\int\limits_{i+1}^{i}(z+1)e^{iz}dz$;

7. $\int\limits_L z\operatorname{Re} z dz$, unde L este semicircumferința $|z-1|=1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$;

8. $\int\limits_L \cos^2 z dz$, unde L este segmentul de dreaptă, ce unește punctele $z_1=\dfrac{\pi}{2}$, $z_2=\pi+i$;

9. $\int\limits_{1}^{i}(3z^5+2z^4)dz$;   10. $\int\limits_{0}^{1+i}(z+i)e^z dz$;  11. $\int\limits_{0}^{2+i}\sin z\cos z dz$;

12. $\int\limits_L (z+i)\operatorname{sh} z\, dz$, unde L este circumferința $|z-i|=1$,

13. $\int\limits_L |z|\cdot z\, dz$, unde L este semicircumferința $|z|=2$, $\operatorname{Re} z\geq 0$.

14. $\int\limits_L |z|\cdot \operatorname{Im} z^2 dz$, unde L este semicircumferința $|z-2|=2$, $\operatorname{Im} z\geq 0$;

15. $\int\limits_L (z+\operatorname{sh} z)dz$, unde L este circumferință $|z+i|=1$.

16. $\int\limits_L (\cos iz+\operatorname{ch} z)dz$, unde L este linia poligonală ce unește punctele $z_1=0$, $z_2=2$, $z_3=2+i$;

17. $\int\limits_L z^{-2}dz$, unde L este segmentul de dreaptă ce unește punctele $z_1=1$, $z_2=2+2i$;

18. $\int\limits_L (5z^3+4z+3)dz$, unde L este segmentul de parabolă $y=2x^2$, ce unește punctele $z_1=0$, $z_2=1+2i$;



19. $\int\limits_L z\cdot \bar{z} dz$, unde $\bar{z}=x-iy$, iar L este circumferință $|z+1|=2$.

20. $\int\limits_{0}^{1-i}(z+i)e^{-z}dz$; 21. $\int\limits_{-1}^{\frac{\pi}{i}i}\sin^2 z dz$;  22. $\int\limits_{-1}^{\frac{\pi}{4}i} z\sin z\, dz$;

23. $\int\limits_L (\cos iz+ze^{-z})dz$, unde L este arcul de circumferință $|z|=2$, $\operatorname{Im} z\geq 0$, $\operatorname{Re} z\geq 0$;

24. $\int\limits_L (\sin iz+z^2)dz$, unde L este linia poligonală, ce unește punctele $z_1=0$, $z_2=2$, $z_3=3+i$;

25. $\int\limits_L (\cos z)^2\sin z dz$, unde L este segmentul de dreaptă, ce unește punctele $z_1=\dfrac{\pi}{4}+i$, $z_2=\dfrac{\pi}{4}-i$;

26. $\int\limits_L \sin\bar{z}\cdot dz$, unde $\bar{z}=x-iy$ și L este arcul de parabolă $y=x^2$, ce unește punctele $z_1=1+i$, $z_2=-1+i$;

27. $\int\limits_{1-i}^{1+i} ze^z dz$; 28. $\int\limits_L \sin iz\cdot dz$; 29. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}+i}\cos iz\cdot dz$;

30. $\int\limits_L z\operatorname{Im} z^2 dz$, unde conturul L este mulțimea punctelor $\operatorname{Re} z=1$, $|\operatorname{Im} z|\leq 1$

**Problema 4.** Să se dezvolte funcția $f(z)$ în seria Laurent în vecinătatea punctului $z_0$ și să se afle domeniul de convergență al acestei serii.

1. $f(z) = (z+i)^2 \cdot e^{\frac{1}{z}}$, $z_0 = 0$;

2. $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z+3)}$, $z_0 = 0$;

3. $f(z) = \dfrac{1}{(z+2)}$, $z_0 = i$;

4. $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)}$, $z_0 = 1$;

5. $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)}$, $z_0 = 0$;

6. $f(z) = \dfrac{1}{z^2+z}$, $z_0 = i$;

7. $f(z) = z^2 \cos\dfrac{1}{z-2}$, $z_0 = 2$;

8. $f(z) = \dfrac{1}{3z-4}$, $z_0 = 2i$;

9. $f(z) = ze^{\frac{1}{z-1}}$, $z_0 = 1$;

10. $f(z) = \dfrac{z^2-1}{z^2+1}$, $z_0 = i$;

11. $f(z) = \sin\dfrac{z}{1+z}$, $z_0 = -1$;

12. $f(z) = \dfrac{1}{z(z-5)}$, $z_0 = 2$;

13. $f(z) = \dfrac{z+i}{z^2}$, $z_0 = -1$;

14. $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)^2(z+2)}$, $z_0 = -i$;

15. $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)(z^2+2)}$, $z_0 = 0$;

16. $f(z) = z\sin\dfrac{z+1}{z}$, $z_0 = 0$;

17. $f(z) = \dfrac{1}{z(z+1)}$, $z_0 = i$;

18. $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z+2)}$, $z_0 = 2$;

19. $f(z) = \dfrac{1}{z^2-4}$, $z_0 = 1$;

20. $f(z) = \dfrac{1}{z^2+4}$, $z_0 = 2i$;

21. $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2}$, $z_0 = 0$;

22. $f(z) = \dfrac{1}{3z+5}$, $z_0 = 1$;

23. $f(z) = \sin\dfrac{z+1}{z-1}$, $z_0 = 1$;

24. $f(z) = \dfrac{z}{1+z^2}$, $z_0 = -i$;



25. $f(z) = ze^{\frac{1}{1+z}}$, $z_0 = -1$;

26. $f(z) = \dfrac{1}{z^2+9}$, $z_0 = 0$;

27. $f(z) = \cos\dfrac{z-1}{z+i}$, $z_0 = -i$;

28. $f(z) = \dfrac{1}{z^2-z}$, $z_0 = 1$;

29. $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)^2(z-1)}$, $z_0 = 2$;

30. $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z-1)^2}$, $z_0 = 1$;

**Problema 5.** Să se aplice teoremele Cauchy la calcularea următoarelor integrale (orientarea conturului L se consideră pozitivă):

1. $\displaystyle\oint_L \frac{\sin \pi(z+1)}{z^2-2z+2}\,dz$, unde L: $|z-1-i| = 2$;

2. $\displaystyle\oint_L \frac{e^z}{z^2(z+1)}\,dz$, unde L: $|z| = 2$;

3. $\displaystyle\oint_L \frac{e^z}{z^4-z^2-2}\,dz$, unde L: $|z+i| = 1$;

4. $\displaystyle\oint_L \frac{\cos z}{z^2-4}\,dz$, unde L: $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4} = 1$;

5. $\displaystyle\oint_L \frac{dz}{z^3+1}$, unde L: $x^2+y^2+2x = 0$;

6. $\displaystyle\oint_L \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2}\,dz$, unde L: $x^2+y^2-2x = 0$;

7. $\displaystyle\oint_L \frac{dz}{(z-1)^n(z-2)}$, unde L: $|z| = \dfrac{3}{2}$, $n \in N$;

8. $\displaystyle\oint_L z^3 \sin\frac{1}{z}\,dz$, unde L: $|z-i| = 2$;

9. $\oint_L \frac{z-1}{z^2+z-2}dz$, unde L: $|z+2|=4$;

10. $\oint_L \frac{zdz}{z^3+8}$, unde L: $|z-1-i\sqrt{3}|=2{,}5$;

11. $\oint_L \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, unde L: $|z-1-i|=2$;

12. $\oint_L \frac{\sin z\cdot\sin(z+1)}{z^2-z}dz$, unde L: $|z|=3$;

13. $\oint_L \frac{dz}{(z^2+4)(z+4)}$, unde L: $|z-i|=4$;

14. $\oint_L \frac{\sin(z+\pi i)}{z(e^z+1)}dz$, unde L: $|z|=4$;

15. $\oint_L \frac{shz}{z^4-1}dz$, unde L: $|z-1|=1{,}5$;

16. $\oint_L \frac{ch(z+1)}{z^2+1}dz$, unde L: $x^2+\frac{y^2}{4}=1$;

17. $\oint_L \frac{e^z\cos\pi z}{z^2-2z}dz$, unde L: $|z|=3$;

18. $\oint_L \frac{chzdz}{(z+1)^2(z-1)}$, unde L: $|z|=2$;

19. $\oint_L \frac{zshz}{(z^2+1)^2}dz$, unde L: $|z+i|=1{,}5$;

20. $\oint_L \frac{e^{iz}}{(z^2-1)^2}dz$, unde L: $|z-1|=1$;

21. $\oint_L \frac{dz}{(z^2+2)^3(z^2-1)}$, unde L: $|z|=1{,}5$;



22. $\oint_L ctg(\pi z)dz$, unde L: $|z+i|=\sqrt{2}$;

23. $\oint_L \sin\frac{1}{z}dz$, unde L: $|z-i|=2$;

24. $\oint_L \left(\sin\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}e^{z^2}\right)dz$, unde L: $|z-1-i|=2$;

25. $\oint_L (z-1)e^{\frac{1}{z}}dz$, unde L: $|z+1|=2$;

26. $\oint_L \frac{e^{iz}}{(z-\pi)^3}dz$, unde L: $|z|=4$;

27. $\oint_L \frac{ctg\pi z}{z^2-\frac{\pi^2}{4}}dz$, unde L: $|z-1|=0{,}8$;

28. $\oint_L \frac{e^z ch\,z\,dz}{(z^2-9)^3(e^z+1)^2}$, unde L: $|z+i\cdot\frac{\pi}{2}|=2$;

29. $\oint_L \frac{e^z}{z(z-1)^2}dz$, unde L: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$;

30. $\oint_L \frac{z\,dz}{\sin^2 z\cos z}$, unde L: $|z-1|=2$.

## Lucrarea de control nr. 6

### „Calculul operațional"

**Problema 1.** Să se restabilească originalul după imaginea lui:

1. $F(p)=\frac{1}{p^3+8}$; 2. $F(p)=\frac{p+2}{p^2-4p+7}$;

3. $F(p) = \dfrac{e^{-3p}}{(p+1)^2}$;

4. $F(p) = \dfrac{1}{(p^2-1)^2(p^2+2p+2)}$;

5. $F(p) = \dfrac{p}{(p^2+1)(p^2+2)}$;  6. $F(p) = \dfrac{1}{(p^2+2)^2}$;

7. $F(p) = \dfrac{p}{(p-1)(p^2+4)}$;  8. $F(p) = \dfrac{p^2}{p^4+4p^2+3}$;

9. $F(p) = \dfrac{1}{p^2(p^2+9)}$;  10. $F(p) = \dfrac{p}{p^3-1}$;

11. $F(p) = \dfrac{2p}{p^2-1}e^{-p}$;  12. $F(p) = \dfrac{p^3}{p^4-1}$;

13. $F(p) = \dfrac{p}{(p+1)(p+2)^2}$;  14. $F(p) = \dfrac{p+1}{(p-3)^3(p-1)^3}$;

15. $F(p) = \dfrac{p^2}{p^4+4p^2+3}$;  16. $F(p) = \dfrac{1}{(p-1)^2(p^2-9)}$;

17. $F(p) = \dfrac{p^2+2}{(p+3)(p^2-1)}$;  18. $F(p) = \dfrac{13p+1}{p(p-1)^2(p+2)}$;

19. $F(p) = \dfrac{p+4}{(p^3-1)}$;  20. $F(p) = \dfrac{1}{p^2}\sin\dfrac{1}{p}$;

21. $F(p) = \dfrac{e^p}{p^2} + \dfrac{5e^{-3p}}{p^2+2}$;  22. $F(p) = \dfrac{1}{p}\cos\dfrac{1}{p}$;

23. $F(p) = \dfrac{p^3+2p^2+3}{p^5+2p^4+p^3}$;  24. $F(p) = \dfrac{p}{(p^2-1)^2}$;



25. $F(p) = \dfrac{p^2+p+1}{p^3-3p^2+3p-1}$;  26. $F(p) = \dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$;

27. $F(p) = \dfrac{p-3}{(p+1)^2(p^2-2p)}$;  28. $F(p) = \dfrac{p^2}{(p^2+1)^2}$;

29. $F(p) = \dfrac{1}{p^4-5p^2+6}$;  30. $F(p) = \dfrac{e^{-\frac{p}{3}}}{p(p^2+2)}$.

**Problema 2.** Să se afle soluția particulară a ecuației diferențiale cu condițiile inițiale indicate:

1. $x'''+x'' = \sin t$,  $x(0) = 1, x'(0) = 1, x''(0) = 0$.
2. $x''+2x' = \cos t$,  $x(0) = x'(0) = 0$.
3. $x'''-x''+x' = 4$,  $x(0) = 1, x'(0) = 2, x''(0) = -2$.
4. $x''+2x' - 3x = e^{-t}$,  $x(0) = 0, x'(0) = 1$.
5. $x'''+x'' = 1$,  $x(0) = x'(0) = 0, x''(0) = 1$.
6. $x''-x' = t\,e^{t}$,  $x(0) = 0, x'(0) = -1$.
7. $x'''-x' = \cos t$,  $x(0) = 1, x'(0) = x''(0) = 0$.
8. $x''-2x'+3x = t - \sin t$,  $x(0) = 1, x'(0) = 0$.
9. $x''+9x = \cos 3t$,  $x(0) = x'(0) = 0$.
10. $x''+3x'+x = 1+t+t^2$,  $x(0) = 0, x'(0) = 2$.
11. $x''+2x'+x = \sin t$,  $x(0) = x'(0) = 1$.
12. $x''-3x'-4x = 10 \sin t$,  $x(0) = 0, x'(0) = 1$.
13. $x''+2x'+x = 9\,e^{2t}$,  $x(0) = x'(0) = 0$.
14. $x''+16x = e^{-t}$,  $x(0) = 0, x'(0) = 1$.
15. $x'''-3x''+3x'-x = 5(1+5t)$,  $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.
16. $x''-3x'+2x = 2(3+2t)$,  $x(0) = -1, x'(0) = 1$.
17. $x'''+x'' = 2t^2$,  $x(0) = -3,\ x'(0) = 1,\ x''(0) = 0$.
18. $x''-2x' = t \sin t$,  $x(0) = 0, x'(0) = -1$.
19. $x'''-x' = 1-t$,  $x(0) = 0,\ x'(0) = 1, x''(0) = -1$.
20. $x'''-x'' = t\,e^{t}$,  $x(0) = 1, x'(0) = -1 = x''(0)$.
21. $x''+4x = \sin\dfrac{3}{2}t\cos\dfrac{t}{2}$,  $x(0) = 1, x'(0) = 0$.

22. $x'''+3x'-4x=0$, $\quad x(0)=x'(0)=0,\ x''(0)=2$.
23. $x''+2\alpha x'+(\alpha^2+\beta^2)=0$, $\quad x(0)=0,\ x'(0)=1$.
24. $x'''+x'=e^{2t}$, $\quad x(0)=x''(0)=0,\ x'(0)=1$.
25. $x''-x'+x=t\,e^{t}$, $\quad x(0)=0,\ x'(0)=2$.
26. $x'''+x=t^2e^{t}$, $\quad x(0)=x'(0)=x''(0)=0$.
27. $x''-x=t\cos 2t$, $\quad x(0)=1,\ x'(0)=0$.
28. $x'''-2x''+x'=4$, $\quad x(0)=x'(0)=1,\ x''(0)=2$.
29. $x''+4x'=2\cos t\cos 3t$, $\quad x(0)=x'(0)=1$.
30. $x'''+x'=t\,e^{t}+\sin t$, $\quad x(0)=x'(0)=0,\ x''(0)=1$.

**Problema 3.** Să se rezolve sistemul de ecuații diferențiale liniare cu condițiile inițiale indicate:

1. $\begin{cases} x_t'=y-z,\\ y_t'=x+y,\\ z_t'=x+y,\end{cases}$ $\quad x(0)=1, y(0)=2,\ z(0)=3$.

2. $\begin{cases} x_t'+y_t'-y=e^{t},\\ 2x_t'+y_t'-2y=2\cos t,\end{cases}$ $\quad x(0)=1,\ y(0)=-1$.

3. $\begin{cases} x_t'=-x+y+z,\\ y_t'=x-y+z,\\ z_t'=x+y-z,\end{cases}$ $\quad x(0)=y(0)=1,\ z(0)=-1$.

4. $\begin{cases} x_t'+y_t'=0,\\ x_t'+2y_t'+x=0,\end{cases}$ $\quad x(0)=1,\ y(0)=-1$.

5. $\begin{cases} x_t'=-2x-2y-4z,\\ y_t'=-2x+y-2z,\\ z_t'=x+y+2z,\end{cases}$ $\quad x(0)=y(0)=1,\ z(0)=-1$.

6. $\begin{cases} x_t'+x+2y=2t,\\ -2x_t'+y_t'-y=e^{t},\end{cases}$ $\quad x(0)=y(0)=1$.



7. $\begin{cases} x_t'+y-z=0,\\ y_t'-z=0,\\ x+z-z_t'=0,\end{cases}$ $\quad x(0)=1,\ y(0)=2,\ z(0)=3$.

8. $\begin{cases} x_t'+y=0,\\ y_t'-2x-2y=0,\end{cases}$ $\quad x(0)=1,\ y(0)=-1$.

9. $\begin{cases} x_t'-x+2y=3,\\ 3x_t'+y_t'-4x+2y=0,\end{cases}$ $\quad x(0)=y(0)=1$.

10. $\begin{cases} x_t'=y+z,\\ y_t'=x+y,\\ z_t'=x-z,\end{cases}$ $\quad x(0)=y(0)=z(0)=1$.

11. $\begin{cases} x_t'+7x-2y=0,\\ y_t'+2x-5y=0,\end{cases}$ $\quad x(0)=0,\ y(0)=0$.

12. $\begin{cases} x_t'=x+z,\\ y_t'-x=0,\\ z_t'=x+y-z,\end{cases}$ $\quad x(0)=1,\ y(0)=-1,\ z(0)=2$.

13. $\begin{cases} x_t'=x-y,\\ y_t'=2x+2y,\end{cases}$ $\quad x(0)=1,\ y(0)=-1$.

14. $\begin{cases} x_t'=2x-2y+4z,\\ y_t'=-2x+y+2z,\\ z_t'=3x+y+2z,\end{cases}$ $\quad x(0)=y(0)=z(0)=0$.

15. $\begin{cases} x_t'-x-2y=t,\\ 2x+2y_t'-3y=t,\end{cases}$ $\quad x(0)=3,\ y(0)=2$.

16. $\begin{cases} x_t' + 2x + y = 1, \\ x_t' + 4y_t' + 3y = 0, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0.$

17. $\begin{cases} x_t' + y = 2x + z, \\ y_t' = x + z, \\ z_t' + 2z = y - 3x, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = z(0) = 0.$

18. $\begin{cases} x_t' + y_t' + y = e^t, \\ 2x + y_t' + 2y = \sin t, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0.$

19. $\begin{cases} x_t' + y + z = 0, \\ y_t' + x + z = 0, \\ z_t' + x - y = 0, \end{cases}$ $x(0) = -1,\ y(0) = 0,\ z(0) = 1.$

20. $\begin{cases} x + x_t' = y + e^t, \\ y + y_t' = x + e^t, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

21. $\begin{cases} x_t' = y + z, \\ y_t' = 3x + z, \\ z_t' = 3y + x, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0,\ z(0) = 1.$

22. $\begin{cases} x_t' - 2x + 2y = 1 + 2t, \\ y_t' + 2x + y = 0, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0.$

23. $\begin{cases} x_t' = 2x + y + z, \\ y_t' = x - z, \\ z_t' = 3x - y + 2z, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1,\ z(0) = 0.$

24. $\begin{cases} x_t' = 3y + x, \\ y_t' = x + y + e^t, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

25. $\begin{cases} x_t' = x - y + z + t, \\ y_t' = x + y - z + t^2, \\ z_t' = x + y + z, \end{cases}$ $x(1) = y(1) = z(1) = 0.$

26. $\begin{cases} x_t' + y_t' + x = e^t, \\ y_t' + 2x + y = 1, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 0.$



27. $\begin{cases} 3x_t' = 2x + y - z, \\ 2y_t' = x + 2y + z, \\ 6z_t' = x - y - z, \end{cases}$ $x(1) = y(1) = z(1) = 1.$

28. $\begin{cases} x_t' = 3y - x + 1, \\ y_t' = x + y + e^t, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = -1.$

29. $\begin{cases} x_t' = y - z + 1, \\ y_t' = 2x + y + 2z, \\ z_t' = x + y + z + 4, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = z(0) = 0.$

30. $\begin{cases} 3x_t' + 2x + y_t' = 1, \\ x_t' + 4y_t' + 5y = 0, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = -1.$

## Bibliografie


1. SrishtiD.Chatterji, Curs d'Analyse, t.1 et 2 (Analize vecrorielle et complexe), Ch-1015 Lausanne, 1997.
2. Valter Olariu, Analiză matematică, Bucureşti, 1981.
3. P.Hamburg, P.Mocanu, N. Negoesu, Analiză matematică (funcţii complexe), Bucureşti, 1982.
4. Mariana Coroi-Nedelcu, Matematici speciale, 1; Bucureşti, 1974.
5. В. Ф. Жевержеев и др., Специальный курс математики для ВТУЗ-ов, Москва, 1970.
6. Б. К. Пчелин, Специалъные разделы высшей математики, Москва,1973.
7. А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов, Теория функций комплексной переменной, Москва, 1967.
8. К. У. Шахно, Элементы теории функций комплексной переменой и операционого исчисления, Минск, 1975.
9. А. И. Маркушевич, Краткий курс теории аналитических функций, Москва, 1978.
10. А. И. Маркушевич, Л А Маркушевич, Введение в теорию аналитических функций, Москва, 1977.
11. И. П. Макаров, Дополнителъные главы математического анализа, Москва, 1968.
12. Б. В. Шабат, Введение в комплексный анализ, частъ 1, Москва, 1976.
13. А. Д. Мышкис, Математика (специальные курсы) для ВТУЗ-об, Москва, 1971.
14. А. В. Ефимов, Математический анализ (специальные разделы), Т. 1, Москва, 1980.
15. П. И. Романовский, Ряды Фуръе. Теория поля. Аналитические функции. Преобразование Лапласа, Москва, 1980.
16. Piscunov N.S, Calcul diferenţial şi integral, v.2 , Chişinău, 1992.
17. Ion Scerbaţchi, Curs de analiză matematică, v.1., Chişinău 2000.





18. Ion Scerbaţchi, Curs de analiză matematică, v.2., Chişinău 2002.
19. Ion Scerbaţchi, Analiză matematică (probleme), v.1., Chişinău, 1998.
20. Ion Scerbaşchi, Analiză matematică (probleme), v.2., Chişinău 1998.
21. В. А. Диткин, П. И. Кузнецов, Справочник по операционному исчислению, Москва, 1951.
22. В. А. Диткин, А. П. Прудников, Интегралъные преобразования и операционное исчисление, Физматгиз, 1961.
23. В. А. Диткин, А. П. Прудников, Справочник по операционному исчислению, Москва, 1965.
24. Г. Беитмен, А. Эрдейи, Таблицы интегралъных преобразований, Т. 1, Москва 1969.
25. И. Г. Араманович, Г. Л. Лунц, Л. Э. Элъсголъц, Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости, Москва, 1968.
26. М. И. Конторович, Операционное исчисление и его приложения в электрических цепях, Москва, 1955.
27. М. А. Лаврентъев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Москва, 1973.
28. А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, Т. 1, Москва, 1968.
29. М. А. Евграфов, Аналитические функции, Москва, 1965.
30. А. В. Бицадзе, Основы теории аналитических функций, Москва, 1969.
31. Boboc N., Funcţii complexe Bucureşti 1969.
32. Călugăreanu Gh., Elemente de teoria funcţiilor de o variabilă complexă, Bucureşti, 1963.
33. М.Л.Краснов, А.И.Киселёв, Г.И.Макаренко, Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости, Москва, 1971.
34. И. И. Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного Москва, 1967.
35. Б. А. Фукс, Б. В. Шабат, Функции комплексного переменного и некоторые их приложения, Москва, 1964.

## Capitolul 9

**Teoria funcţiei complexe de o variabilă complexă.**







## Capitolul 10
**Elemente de calcul operaţional.**

## PENTRU NOTIŢE