ФГОС КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

ГЕОМЕТРИЯ

- АТТЕСТАЦИЯ ПО ВСЕМ ТЕМАМ
- К ЕГЭ ШАГ ЗА ШАГОМ
- СИСТЕМА ОЦЕНКИ ЗНАНИЙ
- СООТВЕТСТВИЕ ПРОГРАММЕ

11 КЛАСС

СООТВЕТСТВУЕТ ФГОС КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

ГЕОМЕТРИЯ

к учебникам

- Л.С. Атанасяна и др. (*М.: Просвещение*)
- А.В. Погорелова и др. (*М.: Просвещение*)

Издание второе, переработанное

11 класс

МОСКВА • «ВАКО»

УДК 372.851
ББК 74.262.21
К64

Издание допущено к использованию
в образовательном процессе на основании
приказа Министерства образования и науки РФ
от 14.12.2009 № 729 (в ред. от 13.01.2011).

Рецензент – Соросовский учитель,
учитель высшей категории ГБОУ СОШ № 192 г. Москвы
М.Я. Гаиашвили.

К64 **Контрольно-измерительные материалы.** Геометрия. 11 класс / Сост. А.Н. Рурукин. – 2-е изд., перераб. – М.: ВАКО, 2012. – 96 с. – (Контрольно-измерительные материалы).

ISBN 978-5-408-01212-1

В пособии представлены контрольно-измерительные материалы (КИМы) по геометрии для 11 класса – тесты в формате заданий ЕГЭ, а также самостоятельные и контрольные работы по всем изучаемым темам. Ко всем заданиям приведены ответы. Предлагаемый материал позволяет проводить проверку знаний, используя различные формы контроля.

Издание ориентировано на учителей, школьников и их родителей.

УДК 372.851
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-408-01212-1

© ООО «ВАКО», 2012

От составителя

Пособие «Контрольно-измерительные материалы по геометрии для 11 класса» предназначено, прежде всего, для УМК Л.С. Атанасяна и др. При некотором изменении порядка следования КИМы могут быть использованы и для УМК А.В. Погорелова и др.

В пособии представлены 19 тематических тестов, 3 теста на обобщение пройденного материала, итоговый тест по программе 11 класса, итоговый тест по курсу геометрии за 7–11 классы, 15 самостоятельных работ, 7 контрольных работ. Знаком * помечены задания, необязательные для базового уровня.

Предлагаемые КИМы могут быть использованы на любом этапе обучения – повторения и закрепления изученного, актуализации опорных знаний и т. д. Приведенные материалы избыточны и могут быть использованы при работе как в классе, так и дома. Рекомендуем задействовать различные формы контроля знаний, так как каждая из них имеет свои преимущества и недостатки. Все работы даны в двух равноценных вариантах. В конце пособия представлены ответы ко всем тестам и проверочным работам.

Преподавательская практика показывает, что предлагаемый подбор КИМов позволяет эффективно освоить материал 11 класса и подготовить учащихся к сдаче ЕГЭ по изученным темам.

Надеемся, что пособие поможет учителям при подготовке и проведении уроков, а также школьникам при изучении материала, закреплении и систематизации знаний.

Требования к уровню подготовки учащихся

В результате изучения курса учащиеся должны ***знать:***

- уравнения плоскости и сферы;
- понятие тела вращения: цилиндр, конус и шар;
- понятие объема тела;

уметь:

- решать простейшие задачи в координатах;
- использовать уравнения плоскости и сферы при решении задач;
- вычислять площади поверхности цилиндра, конуса и шара;
- решать задачи, связанные с комбинацией тел;
- вычислять объемы многогранников: прямой и наклонной призмы и пирамиды;
- находить объемы тел вращения: цилиндра и конуса;
- вычислять объемы шара и его элементов: шарового сегмента, шарового слоя и шарового сектора;
- находить площадь сферы.

Основные темы курса геометрии в 11 классе

«Метод координат в пространстве», «Движения», «Цилиндр, конус, шар», «Объемы тел».

Рекомендации по оцениванию работ

Тесты

Задания тестов разделены на три уровня сложности: А, В и С.

Уровень А (простейший) предполагает выбор ответа из четырех предложенных. Уровень В (базовый) подразумевает краткий ответ. Для уровня С (повышенной сложности) необходимо привести обоснованное решение.

Тематический тест содержит три задания уровня А (каждое оценивается в 1 балл), два задания уровня В (каждое оценивается в 2 балла) и одно задание уровня С (оценивается в 3 балла). На выполнение теста отводится 15–20 мин. Рекомендуем следующее соответствие количества баллов и оценки: 3 балла – «3», 5 баллов – «4», 7 баллов – «5».

Итоговый тест содержит вдвое больше заданий, чем тематический. Соответственно, вдвое увеличивается время на выполнение (40–45 мин) и количество баллов (6 баллов – «3», 10 баллов – «4», 14 баллов – «5»).

Самостоятельные работы

Формулировка задания теста (А) предполагает простой вопрос, который далеко не всегда позволяет понять степень усвоения изучаемого материала. Поэтому целесообразно некоторые тесты заменить самостоятельными работами, которые включают три задания уровня В (каждое задание оценивается в 2 балла). На выполнение работы отводится 15–20 мин. Критерии оценки: 2 балла – «3», 3 балла – «4», 5 баллов – «5».

Контрольные работы

По изучении крупной темы (главы УМК) для контроля знаний рекомендуется использовать контрольные работы, которые содержат четыре задания уровня В (каждое задание оценивается в 2 балла) и одно задание уровня С (оценивается в 3 балла). На работу отводится 40–45 мин. Рекомендуемые критерии оценки: 2–3 балла – «3», 4–5 баллов – «4», 6–10 баллов – «5».

Проведение самостоятельных и контрольных работ допускает более гибкие формулировки заданий и форму ответов (по сравнению с тестами). Это позволяет более объективно контролировать знания учащихся, выявить недочеты при изучении материала и т. д. Поэтому рекомендуем использовать разнообразные формы аттестации учащихся.

Тест 1. Координаты точки и координаты вектора

Вариант 1

А1. Найдите координаты точки A, если $B(3; -5; -7)$ и $\overrightarrow{AB}\{1; -2; 4\}$.

☐ 1) $(-2; 3; 11)$
☐ 2) $(2; -3; -11)$
☐ 3) $(4; -7; -3)$
☐ 4) $(-4; 7; 3)$

А2. Дана точка $M(1; -3; -2)$. Определите координаты точки M_1 – проекции точки M на плоскость xOz и координаты точки M_2 – проекции точки M на ось Oz.

☐ 1) $M_1(1; 0; -2)$; $M_2(0; 0; -2)$
☐ 2) $M_1(-1; 0; 2)$; $M_2(0; 0; 2)$
☐ 3) $M_1(1; 0; -2)$; $M_2(0; 0; 2)$
☐ 4) $M_1(-1; 0; 2)$; $M_2(0; 0; -2)$

А3. Будут ли коллинеарны векторы $\vec{m} = \vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{p}$, если $\vec{a}\{2; -1; 3\}$; $\vec{b}\{-3; 2; 1\}$; $\vec{p}\{-10; 6; -4\}$? Установите связь между векторами $\vec{m}$ и $\vec{p}$.

☐ 1) $\vec{p} = 2\vec{m}$
☐ 2) $\vec{m} = -2\vec{p}$
☐ 3) неколлинеарны
☐ 4) $\vec{p} = -2\vec{m}$

В1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным 1; $\overrightarrow{AD} = \vec{i}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{j}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{k}$. Укажите координаты вектора $\overrightarrow{CA_1}$.

Ответ: ____

В2. Координаты вершин треугольника $A(-2; -3; 8)$, $B(2; 1; 7)$, $C(1; 4; 5)$. Найдите координаты точки пересечения медиан этого треугольника.

Ответ: ____

С1. Лежат ли точки $A(3; -2; -4)$, $B(-1; -2; 7)$, $C(0; -1; 0)$, $D(5; -4; -1)$ в одной плоскости? (Ответ необходимо обосновать.)

Ответ: ____

Тест 1. Координаты точки и координаты вектора

Вариант 2

А1. Найдите координаты точки B, если $A(-3; 2; -1)$ и $\overrightarrow{AB}\{2; -3; 5\}$.

□ 1) (5; –5; 6)	□ 3) (–1; –1; 4)
□ 2) (1; 1; –4)	□ 4) (–5; 5; –6)

А2. Дана точка $N(2; -1; 3)$. Определите координаты точки N_1 – проекции точки N на плоскость Oyz и координаты точки N_2 – проекции точки N на ось Oy.

□ 1) $N_1(0; 1; -3)$; $N_2(0; -1; 0)$

□ 2) $N_1(0; -1; 3)$; $N_2(0; 1; 0)$

□ 3) $N_1(0; 1; -3)$; $N_2(0; 1; 0)$

□ 4) $N_1(0; -1; 3)$; $N_2(0; -1; 0)$

А3. Будут ли коллинеарны векторы $\vec{m} = \vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{p}$, если $\vec{a}\{-1; 3; -2\}$; $\vec{b}\{2; -1; 3\}$; $\vec{p}\{-3; -1; -4\}$? Установите связь между векторами $\vec{m}$ и $\vec{p}$.

□ 1) $\vec{p} = -\vec{m}$

□ 2) неколлинеарны

□ 3) $\vec{p} = 2\vec{m}$

□ 4) $\vec{p} = -2\vec{m}$

В1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным 1; $\overrightarrow{AD} = \vec{i}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{j}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{k}$. Укажите координаты вектора $\overrightarrow{B_1D}$.

Ответ: ____

В2. Координаты вершин треугольника $A(1; -3; 4)$, $B(5; 3; 5)$, $C(1; 3; 2)$. Найдите координаты точки пересечения медиан этого треугольника.

Ответ: ____

С1. Лежат ли точки $A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$, $D(2; 1; 3)$ в одной плоскости? (Ответ необходимо обосновать.)

Ответ: ____

Тест 2. Простейшие задачи в координатах

Вариант 1

A1. Найдите длину вектора $\vec{n} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, если $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$.

☐ 1) $4\sqrt{6}$ ☐ 3) $2\sqrt{6}$

☐ 2) $4\sqrt{3}$ ☐ 4) $8\sqrt{3}$

A2. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вершины $B(-4; 2; 3)$ и $D_1(2; -8; 1)$. Определите координаты точки пересечения его диагоналей.

☐ 1) $(1; 3; -2)$ ☐ 3) $(-1; -3; 2)$

☐ 2) $(3; -5; -1)$ ☐ 4) $(-3; 5; 1)$

A3. Дан вектор $\vec{n}\{2; 3; -6\}$. Определите координаты единичного вектора $\vec{e}$, противоположно направленного вектору $\vec{n}$.

☐ 1) $\left\{-\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}; 1\right\}$ ☐ 3) $\left\{\frac{2}{7}; \frac{3}{7}; -\frac{6}{7}\right\}$

☐ 2) $\left\{-\frac{2}{7}; -\frac{3}{7}; \frac{6}{7}\right\}$ ☐ 4) $\left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; -1\right\}$

B1. На оси Ox найдите точку, равноудаленную от точек $A(3; -2; 4)$ и $B(0; 5; -1)$.

Ответ: ______________________

B2. Определите значение n, при котором вектор $\vec{a}\{12; 3; -7\}$ можно разложить по векторам $\vec{b}\{3; n; -2\}$ и $\vec{c}\{-2; 3; 1\}$. Найдите это разложение.

Ответ: ______________________

C1. При каких действительных значениях m и n векторы $\vec{a}\{2n - 2m^2; 2n; -2m^2\}$ и $\vec{b}\left\{1 + 2n; -\frac{1}{2}n^2; \frac{1}{2}n\right\}$ коллинеарны?

Ответ: ______________________

Тест 2. Простейшие задачи в координатах

Вариант 2

А1. Найдите длину вектора $\vec{n} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, если $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$.

☐ 1) $8\sqrt{3}$ ☐ 3) $6\sqrt{3}$

☐ 2) $2\sqrt{6}$ ☐ 4) $4\sqrt{6}$

А2. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вершины $A(1; -4; 2)$ и $C_1(3; -2; 8)$. Определите координаты точки пересечения его диагоналей.

☐ 1) (2; –3; 5) ☐ 3) (–1; –1; –3)

☐ 2) (1; 1; 3) ☐ 4) (–2; 3; –5)

А3. Дан вектор $\vec{n}\{-1; 2; 2\}$. Определите координаты единичного вектора $\vec{e}$, противоположно направленного вектору $\vec{n}$.

☐ 1) $\left\{-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\}$ ☐ 3) $\left\{\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right\}$

☐ 2) $\left\{-\frac{1}{2}; 1; 1\right\}$ ☐ 4) $\left\{\frac{1}{2}; -1; -1\right\}$

В1. На оси Oy найдите точку, равноудаленную от точек $A(4; 2; -1)$ и $B(-1; 3; 2)$.

Ответ: ______________________________

В2. Определите значение m, при котором вектор $\vec{c}\{m; 0; -2\}$ можно разложить по векторам $\vec{a}\{1; 3; 4\}$ и $\vec{b}\{-2; 5; 6\}$. Найдите это разложение.

Ответ: ______________________________

С1. При каких действительных значениях m и n векторы $\vec{a}\{2n; 2n - 2m^2; -2m^2\}$ и $\vec{b}\{-n^2; 4n + 2; n\}$ коллинеарны?

Ответ: ______________________________

Тест 3. Скалярное произведение векторов

Вариант 1

A1. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}\{3; -4; 2\}$ и $\vec{b}\{2; 3; 5\}$.

☐ 1) 8 ☐ 3) 6

☐ 2) 2 ☐ 4) 4

A2. Даны вершины треугольника $A(7; -8; 2)$, $B(10; -8; -1)$ и $C(11; -4; 2)$. Найдите величину угла BAC этого треугольника.

☐ 1) 45°

☐ 2) 90°

☐ 3) 60°

☐ 4) 30°

A3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ определите угол между скрещивающимися прямыми A_1B и B_1D.

☐ 1) 45°

☐ 2) 30°

☐ 3) 60°

☐ 4) 90°

B1. Найдите вектор $\vec{m}$, образующий тупой угол с осью Oz и перпендикулярный векторам $\vec{a}\{6; -2; 0\}$, $\vec{b}\{2; 3; 11\}$, если длина вектора $\vec{m}$ равна $\sqrt{11}$.

Ответ: ____________________

B2. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ удовлетворяют условиям: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$, $|\vec{a}| = 10, |\vec{b}| = 12, |\vec{c}| = 14$. Вычислите сумму $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{c}$.

Ответ: ____________________

C1. В основании правильной пирамиды $DABC$ лежит треугольник ABC со стороной, равной a. Точка K – середина BC. Боковое ребро пирамиды равно b. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{AK}$.

Ответ: ____________________

Тест 3. Скалярное произведение векторов

Вариант 2

А1. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}\{2; -5; 3\}$ и $\vec{b}\{4; 3; 1\}$.

☐ 1) −6 ☐ 3) −4

☐ 2) −8 ☐ 4) −2

А2. Даны вершины треугольника $A(-6; 3; 7)$, $B(-4; 3; 5)$ и $C(-1; 8; 7)$. Найдите величину угла BAC этого треугольника.

☐ 1) 60°

☐ 2) 90°

☐ 3) 45°

☐ 4) 30°

А3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ определите угол между скрещивающимися прямыми AC_1 и A_1B.

☐ 1) 30°

☐ 2) 90°

☐ 3) 45°

☐ 4) 60°

В1. Найдите вектор $\vec{m}$, образующий тупой угол с осью Oy и перпендикулярный векторам $\vec{a}\{15; 9; -12\}$, $\vec{b}\{4; 0; -2\}$, если длина вектора $\vec{m}$ равна $2\sqrt{6}$.

Ответ: ____________________

В2. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ удовлетворяют условиям: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$, $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 14$, $|\vec{c}| = 15$. Вычислите сумму $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{c}$.

Ответ: ____________________

С1. В основании правильной пирамиды $MABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной, равной a. Боковое ребро пирамиды равно b. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Ответ: ____________________

Тест 4. Уравнения прямой и плоскости (факультативный)

Вариант 1

А1. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(2; -3)$ и $B(4; 2)$.

☐ 1) $5x + 2y - 16 = 0$
☐ 2) $2x - 5y - 16 = 0$
☐ 3) $2x + 5y - 16 = 0$
☐ 4) $5x - 2y - 16 = 0$

А2. Составьте уравнение плоскости α, проходящей через точку $A(2; -1; 3)$ и параллельной плоскости β, заданной уравнением $2x - 3y + z = 0$.

☐ 1) $2x - 3y + z - 8 = 0$
☐ 2) $2x - 3y + z - 10 = 0$
☐ 3) $2x - 3y + z - 12 = 0$
☐ 4) $2x - 3y + z - 6 = 0$

А3. Найдите расстояние от точки $A(1; -2; 3)$ до плоскости α, заданной уравнением $2x + y - 2z + 5 = 0$.

☐ 1) $\frac{1}{3}$
☐ 2) 5
☐ 3) $\frac{1}{5}$
☐ 4) 3

В1. Определите двугранный угол, образованный плоскостями $2x + 3y + 6z - 5 = 0$ и $4x + 4y + 2z - 7 = 0$.

Ответ: ______________________________

В2. Вычислите координаты точки пересечения прямой l: $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{1}$ – и плоскости α: $x + 2y - 3z - 2 = 0$.

Ответ: ______________________________

С1. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2; -6; 4)$, $B(1; -5; 3)$ и $C(-2; 8; 5)$.

Ответ: ______________________________

Тест 4. Уравнения прямой и плоскости (факультативный)

Вариант 2

A1. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1; 3)$ и $B(2; 8)$.

☐ 1) $5x - 3y + 14 = 0$
☐ 2) $3x - 5y + 14 = 0$
☐ 3) $5x + 3y - 14 = 0$
☐ 4) $3x - 5y - 14 = 0$

A2. Составьте уравнение плоскости α, проходящей через точку $A(-1; 3; -2)$ и параллельной плоскости β, заданной уравнением $3x + y - 2z = 0$.

☐ 1) $3x + y - 2z + 2 = 0$
☐ 2) $3x + y - 2z - 8 = 0$
☐ 3) $3x + y - 2z - 4 = 0$
☐ 4) $3x + y - 2z - 6 = 0$

A3. Найдите расстояние от точки $A(3; 1; -2)$ до плоскости α, заданной уравнением $2x - 2y - z + 7 = 0$.

☐ 1) 7
☐ 2) $\frac{13}{3}$
☐ 3) $\frac{7}{3}$
☐ 4) 13

B1. Определите двугранный угол, образованный плоскостями $2x + y - 2z + 4 = 0$ и $x + 2y - 2z - 3 = 0$.

Ответ: ____________________

B2. Вычислите координаты точки пересечения прямой l: $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{4}$ и плоскости $x + 2y - z + 1 = 0$.

Ответ: ____________________

C1. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2; -1; 2)$, $B(1; -2; 3)$ и $C(-1; 2; 0)$.

Ответ: ____________________

Тест 5. Уравнения окружности и сферы (факультативный)

Вариант 1

А1. Определите координаты центра C и радиус R окружности $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$, лежащей в плоскости Oxy.

☐ 1) $C(2; 3)$, $R = 5$

☐ 2) $C(-2; 3)$, $R = 5$

☐ 3) $C(2; 3)$, $R = 2\sqrt{3}$

☐ 4) $C(-2; 3)$, $R = \sqrt{5}$

А2. Напишите уравнение окружности с центром $C(-2; 3)$, которая касается оси абсцисс и лежит в плоскости Oxy.

☐ 1) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$

☐ 2) $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$

☐ 3) $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$

☐ 4) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$

А3. Составьте уравнение сферы с центром $C(3; -1; 2)$, проходящей через точку $A(1; 0; 3)$.

☐ 1) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 9$

☐ 2) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 16$

☐ 3) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 6$

☐ 4) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 6$

В1. Даны две точки $A(-2; 0)$ и $B(2; 0)$. Найдите множество всех точек $M(x; y)$, для которых выполнено равенство $MA^2 + MB^2 = 10$.

Ответ: ____________________

В2. Через точку $A(6; 7; 12)$ проведена плоскость, перпендикулярная оси Oz и пересекающая сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 169$. Найдите радиус сечения.

Ответ: ____________________

С1. Напишите уравнение линии, по которой пересекаются сферы $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 9$ и $x^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 25$.

Ответ: ____________________

Тест 5. Уравнения окружности и сферы (факультативный)

Вариант 2

А1. Определите координаты центра C и радиус R окружности $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 11 = 0$, лежащей в плоскости Oxy.

☐ 1) $C(2; -4)$, $R = 3$

☐ 2) $C(-2; 4)$, $R = \sqrt{3}$

☐ 3) $C(2; -4)$, $R = \sqrt{11}$

☐ 4) $C(-2; 4)$, $R = 3$

А2. Напишите уравнение окружности с центром $C(-3; -2)$, которая касается оси ординат и лежит в плоскости Oxy.

☐ 1) $x^2 + y^2 - 6x - 4y = 0$

☐ 2) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$

☐ 3) $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$

☐ 4) $x^2 + y^2 + 6x + 4y = 0$

А3. Составьте уравнение сферы с центром $C(2; 1; -3)$, проходящей через точку $A(2; -1; 0)$.

☐ 1) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = 5$

☐ 2) $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 14$

☐ 3) $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 13$

☐ 4) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = 13$

В1. Даны две точки $A(0; -3)$ и $B(0; 3)$. Найдите множество всех точек $M(x; y)$, для которых выполнено равенство $MA^2 + MB^2 = 26$.

Ответ: ________________________________

В2. Через точку $A(8; 9; 13)$ проведена плоскость, перпендикулярная оси Ox и пересекающая сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 289$. Найдите радиус сечения.

Ответ: ________________________________

С1. Напишите уравнение линии, по которой пересекаются сферы $x^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 25$ и $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 16$.

Ответ: ________________________________

Тест 6. Движения

Вариант 1

А1. Найдите координаты точки B, в которую отображается точка $A(3; -4; 1)$ при симметрии с центром $O(-1; 2; -5)$.

☐ 1) (2; –2; –4)
☐ 2) (4; –6; 6)
☐ 3) (–5; 8; –11)
☐ 4) (1; –1; –2)

А2. При параллельном переносе на вектор $\vec{p}$ точка $A(2; 7; -3)$ переходит в точку $B(3; -4; 1)$. Определите координаты вектора $\vec{p}$.

☐ 1) {1; –11; 4}
☐ 2) {5; 3; –2}
☐ 3) {–5; –3; 2}
☐ 4) {–1; 11; –4}

А3*. Даны точки $A(3; -2; 5)$ и $B(1; 6; -3)$, симметричные относительно плоскости α. Напишите уравнение плоскости α.

☐ 1) $3x - y + z - 1 = 0$
☐ 2) $x - 4y + 4z + 2 = 0$
☐ 3) $2x + 3y - z + 4 = 0$
☐ 4) $x + y - 2z - 3 = 0$

В1. Определите координаты точки B, симметричной точке $A(3; 6)$ относительно прямой с уравнением $2x + 5y - 7 = 0$.

Ответ: ____________________

В2. Дана точка $A(-3; 2; -4)$. Найдите образ этой точки при симметрии относительно плоскости Oxy и последующем переносе на вектор $\vec{p}\{2; -1; -6\}$.

Ответ: ____________________

С1*. Найдите координаты точки B, в которую отображается точка $A(3; 1; -2)$ при симметрии относительно плоскости $3x - y + 2z + 3 = 0$.

Ответ: ____________________

Тест 6. Движения

Вариант 2

A1. Найдите координаты точки B, в которую отображается точка $A(-2; 3; -1)$ при симметрии с центром $O(3; -4; 5)$.

☐ 1) $(1; -1; 4)$
☐ 2) $(5; -7; 6)$
☐ 3) $(3; -2; 2)$
☐ 4) $(8; -11; 11)$

A2. При параллельном переносе на вектор $\vec{p}$ точка $A(5; -4; 7)$ переходит в точку $B(3; 1; -2)$. Определите координаты вектора $\vec{p}$.

☐ 1) $\{8; -3; 5\}$
☐ 2) $\{-2; 5; -9\}$
☐ 3) $\{-8; 3; -5\}$
☐ 4) $\{2; -5; 9\}$

A3*. Даны точки $A(7; -3; 4)$ и $B(-1; 1; 2)$, симметричные относительно плоскости α. Напишите уравнение плоскости α.

☐ 1) $x + y - 2z + 5 = 0$
☐ 2) $2x - y + 3z - 7 = 0$
☐ 3) $4x - 2y + z - 17 = 0$
☐ 4) $x - y + 2z + 4 = 0$

B1. Определите координаты точки B, симметричной точке $A(5; -11)$ относительно прямой с уравнением $x - 4y + 2 = 0$.

Ответ: ____

B2. Дана точка $A(1; -3; 2)$. Найдите образ этой точки при симметрии относительно плоскости Oxz и последующем переносе на вектор $\vec{p}\{-3; 2; 4\}$.

Ответ: ____

C1*. Найдите координаты точки B, в которую отображается точка $A(2; -1; 3)$ при симметрии относительно плоскости $2x - 3y + z + 4 = 0$.

Ответ: ____

Тест 7. Обобщение темы «Метод координат в пространстве. Движения»

Вариант 1

А1. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$. Найдите координаты вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

☐ 1) $\{12; 8; -7\}$

☐ 2) $\{0; -16; 11\}$

☐ 3) $\{12; -16; 11\}$

☐ 4) $\{0; 8; -7\}$

А2. При каких значениях m и n вектор $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + m\vec{k}$ коллинеарен вектору $\vec{b} = n\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$?

☐ 1) $m = -4;\ n = 1{,}5$

☐ 2) $m = 4;\ n = -1{,}5$

☐ 3) $m = 4;\ n = 3$

☐ 4) $m = -4;\ n = \dfrac{2}{3}$

А3. Компланарны ли векторы $\vec{a}\{1; -2; -1\}$, $\vec{b}\{3; 1; 2\}$, $\vec{c}\{5; -3; 0\}$? В случае положительного ответа найдите связь между векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

☐ 1) да, $\vec{b} = 3\vec{a} - \vec{c}$

☐ 2) да, $\vec{a} = 2\vec{b} + \vec{c}$

☐ 3) нет

☐ 4) да, $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$

А4. Вычислите косинус угла между векторами $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{k}$.

☐ 1) $\dfrac{1}{15}$

☐ 2) $-\dfrac{3}{5}$

☐ 3) $-\dfrac{2}{15}$

☐ 4) $\dfrac{2}{5}$

А5. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2; -1; -3)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n}\{3; -2; -1\}$.

☐ 1) $2x - y - 3z - 6 = 0$

☐ 2) $3x - 2y - z - 11 = 0$

☐ 3) $3x - 2y - z + 4 = 0$

☐ 4) $2x - y - 3z + 5 = 0$

A6. Точки $A(3; -4; 7)$ и $B(-5; 6; -3)$ симметричны относительно точки O. Найдите ее координаты.

☐ 1) $(1; -1; -2)$
☐ 2) $(-4; 5; -5)$
☐ 3) $(4; -5; 5)$
☐ 4) $(-1; 1; 2)$

B1. Определите вид четырехугольника $ABCD$ с вершинами $A(2; 3; 4)$, $B(4; -2; 2)$, $C(0; -1; -2)$, $D(-2; 4; 0)$.

Ответ: ________________________________

B2. В треугольнике ABC вершины $A(0; 0; 0)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-1; 1; 1)$. Найдите координаты центра описанной около треугольника окружности и ее диаметр.

Ответ: ________________________________

B3. Найдите на оси Oz точку C, равноудаленную от точек $A(-1; 3; 5)$ и $B(3; -7; 1)$.

Ответ: ________________________________

B4. Одно из оснований призмы лежит в плоскости $3x - 6y - 2z + 5 = 0$. Определите высоту призмы, если одна из ее вершин имеет координаты $(2; 1; -1)$.

Ответ: ________________________________

C1. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Прямые BC_1 и CB_1 пересекаются в точке K. Найдите угол между прямой AK и плоскостью A_1AD и длину отрезка AK.

Ответ: ________________________________

C2. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3; 0; 0)$, $B(0; -4; 0)$, $C(0; 0; 5)$.

Ответ: ________________________________

Тест 7. Обобщение темы «Метод координат в пространстве. Движения»

Вариант 2

А1. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$. Найдите координаты вектора $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$.

☐ 1) $\{14; 7; 1\}$ ☐ 3) $\{14; 11; -7\}$

☐ 2) $\{-2; 11; -7\}$ ☐ 4) $\{-2; 7; 1\}$

А2. При каких значениях m и n вектор $\vec{a} = 6\vec{i} - m\vec{j} + 2\vec{k}$ коллинеарен вектору $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - n\vec{k}$?

☐ 1) $m = 3; n = 1,5$

☐ 2) $m = 3; n = \frac{2}{3}$

☐ 3) $m = -3; n = -\frac{2}{3}$

☐ 4) $m = -3; n = -1,5$

А3. Компланарны ли векторы $\vec{a}\{1; -1; 2\}$, $\vec{b}\{5; -1; 0\}$, $\vec{c}\{-2; 0; 1\}$? В случае положительного ответа найдите связь между векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

☐ 1) да, $\vec{b} = 2\vec{a} - \vec{c}$

☐ 2) нет

☐ 3) да, $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$

☐ 4) да, $\vec{a} = \vec{b} + 2\vec{c}$

А4. Вычислите косинус угла между векторами $\vec{a} = 4\vec{j} + 3\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

☐ 1) $\frac{3}{5}$ ☐ 3) $\frac{1}{15}$

☐ 2) $\frac{2}{15}$ ☐ 4) $\frac{2}{5}$

А5. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-3; 2; 1)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n}\{2; -3; 1\}$.

☐ 1) $2x - 3y + z + 11 = 0$ ☐ 3) $3x - 2y - z - 4 = 0$

☐ 2) $3x - 2y - z + 6 = 0$ ☐ 4) $2x - 3y + z - 5 = 0$

A6. Точки $A(-5; 2; -1)$ и $B(1; 4; 3)$ симметричны относительно точки O. Найдите ее координаты.

☐ 1) (3; 1; 2)
☐ 2) (2; –3; –1)
☐ 3) (–2; 3; 1)
☐ 4) (–3; –1; –2)

B1. Определите вид четырехугольника $ABCD$ с вершинами $A(-1; 2; -3)$, $B(-5; 2; 1)$, $C(-9; 6; 1)$, $D(-9; 10; -3)$.

Ответ: ______________________________

B2. В треугольнике ABC вершины $A(0; 0; 0)$, $B(1; 2; 1)$, $C(1; -1; 1)$. Найдите координаты центра описанной около треугольника окружности и ее диаметр.

Ответ: ______________________________

B3. Найдите на оси Ox точку C, равноудаленную от точек $A(2; -2; 3)$ и $B(4; 5; 2)$.

Ответ: ______________________________

B4. Одно из оснований призмы лежит в плоскости $x - 2y - 2z + 3 = 0$. Определите высоту призмы, если одна из ее вершин имеет координаты $(3; -1; 1)$.

Ответ: ______________________________

C1. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 2. Прямые A_1C_1 и B_1D_1 пересекаются в точке K. Найдите угол между прямой AK и плоскостью A_1AD и длину отрезка AK.

Ответ: ______________________________

C2. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-5; 0; 0)$, $B(0; -3; 0)$, $C(0; 0; 4)$.

Ответ: ______________________________

Тест 8. Цилиндр. Площадь поверхности цилиндра

Вариант 1

А1. Площадь боковой поверхности прямого кругового цилиндра (далее в тесте – цилиндр) равна 12π, высота цилиндра равна 3. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

☐ 1) 24π ☐ 2) 16π ☐ 3) 22π ☐ 4) 20π

А2. Площадь осевого сечения цилиндра равна 10 см^2, площадь основания равна 5 см^2. Вычислите высоту и площадь боковой поверхности цилиндра.

☐ 1) $\sqrt{5\pi}$ см; 10π см^2 ☐ 3) $\sqrt{5\pi}$ см; 5π см^2

☐ 2) $\pi\sqrt{5}$ см; 10π см^2 ☐ 4) $\pi\sqrt{5}$ см; 5π см^2

А3. Через образующую цилиндра проведено два сечения, из которых одно осевое с площадью, равной S. Угол между плоскостями сечений равен 30°. Найдите площадь второго сечения.

☐ 1) $\frac{S}{2}$ ☐ 2) $\sqrt{2}S$ ☐ 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}S$ ☐ 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}S$

В1. Концы отрезка AB лежат на окружностях оснований цилиндра. Радиус основания равен 10 см, расстояние между прямой AB и осью цилиндра равно 8 см, $AB = 13$ см. Определите высоту цилиндра.

Ответ: ____________________

В2. Высота цилиндра равна h, радиус основания – r. В этот цилиндр наклонно к оси вписан квадрат так, что все вершины его находятся на окружностях оснований. Найдите сторону квадрата.

Ответ: ____________________

С1. Диагональ развертки боковой поверхности цилиндра составляет со стороной основания развертки угол φ. Вычислите угол между диагональю осевого сечения цилиндра и плоскостью основания.

Ответ: ____________________

Тест 8. Цилиндр. Площадь поверхности цилиндра

Вариант 2

А1. Площадь боковой поверхности прямого кругового цилиндра (далее в тесте – цилиндр) равна 20π, высота цилиндра равна 5. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

☐ 1) 24π ☐ 2) 32π ☐ 3) 28π ☐ 4) 36π

А2. Площадь осевого сечения цилиндра равна 16 см^2, площадь основания равна 8 см^2. Вычислите высоту и площадь боковой поверхности цилиндра.

☐ 1) $2\sqrt{2\pi}$ см; 8π см^2 ☐ 3) $2\sqrt{\pi}$ см; 16π см^2

☐ 2) $2\sqrt{\pi}$ см; 8π см^2 ☐ 4) $2\sqrt{2\pi}$ см; 16π см^2

А3. Через образующую цилиндра проведено два сечения, из которых одно осевое с площадью, равной S. Угол между плоскостями сечений равен 45°. Найдите площадь второго сечения.

☐ 1) $\frac{S}{2}$ ☐ 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}S$ ☐ 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}S$ ☐ 4) $\sqrt{2}S$

В1. Концы отрезка AB лежат на окружностях оснований цилиндра. Радиус основания равен 5 см, высота цилиндра равна 6 см, $AB = 10$ см. Определите расстояние между прямой AB и осью цилиндра

Ответ: ____________________

В2. Радиус основания цилиндра равен r. В этот цилиндр наклонно к оси вписан квадрат со стороной a так, что все вершины его находятся на окружностях оснований. Найдите высоту цилиндра.

Ответ: ____________________

С1. Угол между диагональю осевого сечения цилиндра и плоскостью его основания равен φ. Вычислите угол между диагональю развертки его боковой поверхности и стороной основания развертки.

Ответ: ____________________

Тест 9. Прямой круговой конус

Вариант 1

А1. Найдите высоту прямого кругового конуса (далее в тесте – конус), если площадь его осевого сечения равна 6 см^2, а площадь основания равна 8 см^2.

☐ 1) 3 ☐ 3) 6

☐ 2) $3\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ☐ 4) $4\sqrt{\frac{\pi}{3}}$

А2. Определите угол при вершине осевого сечения конуса, если разверткой его боковой поверхности является сектор с дугой, равной 90°.

☐ 1) 60° ☐ 3) $2\arcsin\frac{1}{4}$

☐ 2) $2\arcsin\frac{1}{6}$ ☐ 4) 30°

А3. Длины окружностей оснований усеченного конуса равны 4π и 10π. Высота конуса равна 4. Найдите площадь поверхности усеченного конуса.

☐ 1) 64π ☐ 3) 52π

☐ 2) 68π ☐ 4) 74π

В1. Высота конуса равна радиусу R его основания. Через вершину конуса проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу в 60°. Определите площадь сечения.

Ответ: ______________________________

В2. Образующая конуса равна 13 см, высота – 12 см. Этот конус пересечен прямой, параллельной основанию. Расстояние ее от основания равно 6 см, а от высоты – 2 см. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного внутри конуса.

Ответ: ______________________________

С1. Образующая усеченного конуса равна l и составляет с плоскостью основания угол α. Диагональ его осевого сечения перпендикулярна образующей. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

Ответ: ______________________________

Тест 9. Прямой круговой конус

Вариант 2

A1. Найдите высоту прямого кругового конуса (далее в тесте – конус), если площадь его осевого сечения равна 8 см^2, а площадь основания равна 12 см^2.

☐ 1) $4\sqrt{\frac{\pi}{3}}$ ☐ 3) $6\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

☐ 2) 4 ☐ 4) 6

A2. Определите угол при вершине осевого сечения конуса, если разверткой его боковой поверхности является сектор с дугой, равной 120°.

☐ 1) 90° ☐ 3) $2\arcsin\frac{1}{6}$

☐ 2) $2\arcsin\frac{1}{3}$ ☐ 4) 60°

A3. Длины окружностей оснований усеченного конуса равны 4π и 28π. Высота конуса равна 5. Найдите площадь поверхности усеченного конуса.

☐ 1) 420π ☐ 3) 416π

☐ 2) 412π ☐ 4) 408π

B1. Высота конуса равна радиусу R его основания. Через вершину конуса проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу в 90°. Определите площадь сечения.

Ответ: ______________________________

B2. Образующая конуса равна 17 см, высота – 8 см. Этот конус пересечен прямой, параллельной основанию. Расстояние ее от основания равно 4 см, а от высоты – 6 см. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного внутри конуса.

Ответ: ______________________________

C1. Образующая усеченного конуса составляет с плоскостью нижнего основания угол φ. Диагональ его осевого сечения перпендикулярна образующей конуса. Сумма длин окружностей равна $2\pi m$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

Ответ: ______________________________

Тест 10. Сфера и шар. Уравнение сферы

Вариант 1

А1. Точки A и B лежат на сфере радиуса R. Найдите расстояние от центра сферы до прямой AB, если $AB = m$.

☐ 1) $\sqrt{R^2 - m^2}$ ☐ 3) $\sqrt{4R^2 - m^2}$

☐ 2) $\sqrt{R^2 - 4m^2}$ ☐ 4) $\dfrac{\sqrt{4R^2 - m^2}}{2}$

А2. Найдите координаты центра C и радиус R сферы, заданной уравнением $(x+3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 5$.

☐ 1) $C(-3; 2; 0)$, $R = \sqrt{5}$
☐ 2) $C(3; -2; 0)$, $R = 5$
☐ 3) $C(-3; 2; 0)$, $R = 5$
☐ 4) $C(3; -2; 0)$, $R = \sqrt{5}$

А3. Напишите уравнение сферы с центром в точке $C(4; -1; 3)$, проходящей через точку $A(-2; 3; 1)$.

☐ 1) $(x+4)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 52$

☐ 2) $(x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 56$

☐ 3) $(x+4)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 48$

☐ 4) $(x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 46$

В1. Вершины прямоугольного треугольника с катетами 25 и $5\sqrt{11}$ лежат на сфере. Найдите радиус сферы, если расстояние от центра до плоскости треугольника равно 8.

Ответ: ____________________

В2. Определите, при каких значениях параметра a уравнение $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z + a = 0$ задает сферу.

Ответ: ____________________

С1. Два взаимно перпендикулярных сечения шара имеют общую хорду длиной 12. Известно, что площади этих сечений 100π и 64π. Найдите радиус шара.

Ответ: ____________________

Тест 10. Сфера и шар. Уравнение сферы

Вариант 2

А1. Точки A и B лежат на сфере радиуса R. Расстояние от центра сферы до прямой AB равно a. Найдите длину отрезка AB.

☐ 1) $\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$ ☐ 3) $2\sqrt{R^2 - a^2}$

☐ 2) $\sqrt{R^2 - 4a^2}$ ☐ 4) $\sqrt{4R^2 - a^2}$

А2. Найдите координаты центра C и радиус R сферы, заданной уравнением $(x-4)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 7$.

☐ 1) $C(-4;\ 0;\ 3)$, $R = \sqrt{7}$ ☐ 3) $C(-4;\ 0;\ 3)$, $R = 7$

☐ 2) $C(4;\ 0;\ -3)$, $R = 7$ ☐ 4) $C(4;\ 0;\ -3)$, $R = \sqrt{7}$

А3. Напишите уравнение сферы с центром в точке $C(-3;\ 1;\ -2)$, проходящей через точку $A(3;\ 4;\ -1)$.

☐ 1) $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 48$

☐ 2) $(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 52$

☐ 3) $(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 46$

☐ 4) $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 56$

В1. Вершины прямоугольного треугольника с катетами 15 и $\sqrt{351}$ лежат на сфере. Найдите радиус сферы, если расстояние от центра до плоскости треугольника равно 5.

Ответ: ______________________

В2. Определите, при каких значениях параметра a уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z - a = 0$ задает сферу.

Ответ: ______________________

С1. Два взаимно перпендикулярных сечения шара имеют общую хорду длиной 12. Известно, что площади этих сечений 256π и 100π. Найдите радиус шара.

Ответ: ______________________

Тест 11. Взаимное расположение сферы и плоскости, сферы и прямой

Вариант 1

А1. Линия пересечения сферы и плоскости, удаленной от центра сферы на 8, имеет длину 12π. Найдите площадь поверхности сферы.

☐ 1) 396π ☐ 3) 408π

☐ 2) 400π ☐ 4) 392π

А2. Сфера радиуса R касается граней двугранного угла, величина которого равна α. Определите расстояние от центра сферы до ребра двугранного угла.

☐ 1) $\dfrac{R}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ ☐ 3) $\dfrac{R}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

☐ 2) $R\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ ☐ 4) $R\,\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$

А3. Найдите длину хорды сферы $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = 16$, принадлежащей оси абсцисс.

☐ 1) $2\sqrt{10}$ ☐ 3) 8

☐ 2) 4 ☐ 4) $2\sqrt{6}$

В1. Сечения шара двумя параллельными плоскостями, между которыми лежит центр шара, имеют площади 144π и 25π. Вычислите площадь поверхности шара, если расстояние между параллельными плоскостями равно 17.

Ответ: ____________________

В2*. Напишите уравнение плоскости, в которой лежат общие точки сфер, заданных уравнениями $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$ и $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 16$.

Ответ: ____________________

С1*. Найдите координаты точек пересечения прямой, заданной уравнением $\dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-4}{-1}$, и сферы, заданной уравнением $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 21$.

Ответ: ____________________

Тест 11. Взаимное расположение сферы и плоскости, сферы и прямой

Вариант 2

А1. Сечение шара плоскостью, удаленной от его центра на 15, имеет площадь 64π. Найдите площадь поверхности шара.

☐ 1) 1156π ☐ 3) 1172π

☐ 2) 1024π ☐ 4) 1096π

А2. Сфера касается граней двугранного угла, величина которого равна α. Расстояние от центра сферы до ребра двугранного угла равно l. Определите радиус сферы.

☐ 1) $l\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}$ ☐ 3) $l\cos\dfrac{\alpha}{2}$

☐ 2) $l\sin\dfrac{\alpha}{2}$ ☐ 4) $l\,\mathrm{ctg}\,\dfrac{\alpha}{2}$

А3. Найдите длину хорды сферы $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 25$, принадлежащей оси ординат.

☐ 1) $2\sqrt{15}$ ☐ 3) 4

☐ 2) 10 ☐ 4) $2\sqrt{10}$

В1. Сечения шара двумя параллельными плоскостями, которые лежат по одну сторону от центра шара, имеют площади 576π и 100π. Вычислите площадь поверхности шара, если расстояние между параллельными плоскостями равно 14.

Ответ: ______________________________

В2*. Напишите уравнение плоскости, в которой лежат общие точки сфер, заданных уравнениями $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+5)^2 = 9$ и $(x-4)^2 + (y+6)^2 + (z-3)^2 = 16$.

Ответ: ______________________________

С1*. Найдите координаты точек пересечения прямой, заданной уравнением $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-3}{2}$, и сферы, заданной уравнением $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 17$.

Ответ: ______________________________

Тест 12. Комбинации фигур вращения

Вариант 1

А1. Прямоугольный треугольник с катетами, равными 5 см и 12 см, вращается вокруг гипотенузы. Вычислите площадь поверхности полученного тела вращения.

☐ 1) $\frac{960}{13}\pi$ см^2 ☐ 3) $\frac{1020}{13}\pi$ см^2

☐ 2) 82π см^2 ☐ 4) 78π см^2

А2. В цилиндр вписан шар. Найдите отношение площади полной поверхности цилиндра к площади поверхности шара.

☐ 1) 3 : 2 ☐ 3) 4 : 3

☐ 2) 2 : 1 ☐ 4) 5 : 2

А3. В шар вписан конус, радиус основания которого равен r, высота – H. Определите площадь поверхности шара.

☐ 1) $\frac{\pi H^4}{H^2 + r^2}$

☐ 2) $\frac{\pi r^4}{H^2 + r^2}$

☐ 3) $\pi\left(H^2 + r^2\right)$

☐ 4) $\frac{\pi\left(H^2 + r^2\right)^2}{H^2}$

В1. В конус вписан цилиндр, высота которого равна радиусу основания конуса. Найдите величину угла между осью конуса и его образующей, если площадь полной поверхности цилиндра относится к площади основания конуса как 3 : 2, а ось цилиндра совпадает с осью конуса.

Ответ: ______________________________

С1. На плоскости лежат три одинаковых шара радиуса R, касающихся друг друга. Сверху в ямку, образованную шарами, положен четвертый шар того же радиуса. Найдите расстояние от верхней точки четвертого шара до плоскости.

Ответ: ______________________________

Тест 12. Комбинации фигур вращения

Вариант 2

А1. Прямоугольный треугольник с катетами, равными 8 см и 15 см, вращается вокруг гипотенузы. Вычислите площадь поверхности полученного тела вращения.

☐ 1) 162π см^2 ☐ 3) 164π см^2

☐ 2) $\frac{2760}{17}\pi$ см^2 ☐ 4) $\frac{2820}{17}\pi$ см^2

А2. В цилиндр вписан шар. Найдите отношение площади боковой поверхности цилиндра к площади поверхности шара.

☐ 1) 2 : 1 ☐ 3) 1 : 1

☐ 2) 3 : 2 ☐ 4) 2 : 3

А3. В шар вписан конус, радиус основания которого равен r, высота – l. Определите площадь поверхности шара.

☐ 1) $\pi\left(l^2 - r^2\right)$

☐ 2) $\frac{\pi l^4}{l^2 - r^2}$

☐ 3) $\pi r\sqrt{l^2 - r^2}$

☐ 4) $\pi l\sqrt{l^2 - r^2}$

В1. В конус вписан цилиндр, высота которого равна радиусу основания конуса. Найдите величину угла между осью конуса и его образующей, если площадь полной поверхности цилиндра относится к площади основания конуса как 8 : 9, а ось цилиндра совпадает с осью конуса.

Ответ: ____

С1. На плоскости лежат четыре одинаковых шара радиуса R так, что каждый из шаров касается двух соседних. Сверху в ямку, образованную шарами, положен пятый шар того же радиуса. Найдите расстояние от верхней точки пятого шара до плоскости.

Ответ: ____

Тест 13. Комбинации многогранников и тел вращения

Вариант 1

А1. В правильную треугольную призму вписан цилиндр. Найдите площадь его поверхности, если сторона основания призмы равна $2\sqrt{3}$, а высота – 3.

☐ 1) 6π ☐ 3) 10π

☐ 2) 8π ☐ 4) 5π

А2. Вокруг правильной треугольной пирамиды описан конус. Вычислите площадь боковой поверхности конуса, если сторона основания пирамиды равна a, боковые ребра наклонены к основанию под углом 30°.

☐ 1) $\frac{4\pi a^2\sqrt{3}}{9}$ ☐ 3) $\frac{2\pi a^2\sqrt{3}}{9}$

☐ 2) $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$ ☐ 4) $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{4}$

А3. В правильную четырехугольную призму вписана сфера. Найдите отношение площади полной поверхности призмы к площади сферы.

☐ 1) $\frac{6}{\pi}$ ☐ 2) $\frac{4}{\pi}$ ☐ 3) $\frac{5}{\pi}$ ☐ 4) $\frac{7}{\pi}$

В1. Около шара описана правильная треугольная усеченная пирамида, стороны оснований которой равны a и b. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Ответ: ____________________

В2. В куб с ребром, равным a, вписан шар. Вычислите радиус шара, касающегося данного шара и трех граней куба, имеющих общую вершину.

Ответ: ____________________

С1. Осевым сечением конуса является равносторонний треугольник. В этот конус вписана правильная треугольная пирамида. Найдите отношение площадей боковых поверхностей пирамиды и конуса.

Ответ: ____________________

Тест 13. Комбинации многогранников и тел вращения

Вариант 2

А1. Вокруг правильной треугольной призмы описан цилиндр. Найдите площадь его поверхности, если высота призмы равна 4, а высота основания призмы – 6.

□ 1) 64π □ 3) 68π

□ 2) 56π □ 4) 60π

А2. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 45°. Вычислите площадь боковой поверхности вписанного в пирамиду конуса.

□ 1) $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{6}$ □ 3) $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{8}$

□ 2) $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{9}$ □ 4) $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{12}$

А3. Вокруг куба описана сфера. Найдите отношение площади сферы к площади полной поверхности куба.

□ 1) $\frac{\pi}{3}$ □ 2) $\frac{\pi}{2}$ □ 3) $\frac{2\pi}{3}$ □ 4) $\frac{3\pi}{4}$

В1. Около шара описана правильная треугольная усеченная пирамида, стороны оснований которой равны a и b. Найдите площадь поверхности шара.

Ответ: ______________________________

В2. В куб вписан шар. Радиус шара, касающегося данного шара и трех граней куба, имеющих общую вершину, равен R. Вычислите длину ребра куба.

Ответ: ______________________________

С1. Осевым сечением конуса является равносторонний треугольник. В этот конус вписана правильная четырехугольная пирамида. Найдите отношение площадей боковых поверхностей пирамиды и конуса.

Ответ: ______________________________

Тест 14. Обобщение темы «Цилиндр, конус, шар»

Вариант 1

А1. Прямоугольник со сторонами, равными 10 см и 12 см, вращается вокруг большей стороны. Найдите полную площадь поверхности полученного тела вращения.

☐ 1) 460π см^2 ☐ 3) 440π см^2
☐ 2) 420π см^2 ☐ 4) 400π см^2

А2. Осевым сечением конуса является прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной a. Вычислите площадь сечения, проходящего через две образующие конуса, угол между которыми равен 60°.

☐ 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ ☐ 3) $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$
☐ 2) $\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$ ☐ 4) $\frac{\sqrt{3}}{6}a^2$

А3. Определите площадь полной поверхности усеченного конуса, если радиусы его оснований равны 6 см и 10 см, высота равна 3 см.

☐ 1) 212π см^2 ☐ 3) 220π см^2
☐ 2) 224π см^2 ☐ 4) 216π см^2

А4. Найдите площадь поверхности сферы, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 8y + 2z - 7 = 0$.

☐ 1) 132π ☐ 3) 140π
☐ 2) 136π ☐ 4) 128π

А5. Стороны треугольника касаются сферы радиуса 5 см. Определите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если его стороны равны 15 см, 15 см и 24 см.

☐ 1) 1 см ☐ 2) 2 см ☐ 3) 3 см ☐ 4) 4 см

А6. В конус с углом γ при вершине осевого сечения и радиусом основания r вписана сфера радиуса R. Найдите величину r, если известны R и γ.

☐ 1) $R\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{4}\right)$ ☐ 3) $R\,\mathrm{tg}\frac{\gamma}{4}$
☐ 2) $R\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{4}\right)$ ☐ 4) $R\,\mathrm{ctg}\frac{\gamma}{4}$

B1. Через образующую цилиндра проведены две взаимно перпендикулярные плоскости. Площади полученных сечений равны $\sqrt{69}$ см^2 и $5\sqrt{3}$ см^2. Вычислите площадь осевого сечения цилиндра.

Ответ: ______________________________

B2. Равнобедренный треугольник вращается вокруг своей оси симметрии. Найдите стороны этого треугольника, если его периметр равен 30 см, а площадь полной поверхности тела вращения равна 60π см^2.

Ответ: ______________________________

B3. Сфера радиуса R касается всех ребер правильной треугольной призмы. Найдите длину бокового ребра призмы и расстояние от центра сферы до плоскостей боковых граней.

Ответ: ______________________________

C1. Две параллельные плоскости пересекают диаметр сферы AB в точках C и D, делящих его в отношении $AC : CD : DB = 1 : 2 : 3$. Определите отношение радиусов сечений (меньшего к большему), если прямая, содержащая данный диаметр, образует с плоскостями угол α.

Ответ: ______________________________

C2. Сфера касается всех ребер правильной четырехугольной пирамиды. Найдите радиус такой сферы, если все ребра пирамиды равны 18 см.

Ответ: ______________________________

Тест 14. Обобщение темы «Цилиндр, конус, шар»

Вариант 2

А1. Прямоугольник со сторонами, равными 8 см и 10 см, вращается вокруг меньшей стороны. Найдите полную площадь поверхности полученного тела вращения.

☐ 1) 360π см^2 ☐ 3) 368π см^2
☐ 2) 354π см^2 ☐ 4) 376π см^2

А2. Осевым сечением конуса является прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной a. Вычислите площадь сечения, проходящего через две образующие конуса, угол между которыми равен 45°.

☐ 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$ ☐ 3) $\frac{\sqrt{2}}{8}a^2$

☐ 2) $\frac{\sqrt{2}}{4}a^2$ ☐ 4) $\frac{\sqrt{2}}{6}a^2$

А3. Определите площадь полной поверхности усеченного конуса, если радиусы его оснований равны 5 см и 8 см, высота равна 4 см.

☐ 1) 150π см^2 ☐ 3) 158π см^2
☐ 2) 154π см^2 ☐ 4) 146π см^2

А4. Найдите площадь поверхности сферы, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 6z - 4 = 0$.

☐ 1) 68π ☐ 3) 76π
☐ 2) 80π ☐ 4) 72π

А5. Стороны треугольника касаются сферы радиуса 5 см. Определите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если его стороны равны 10 см, 10 см и 12 см.

☐ 1) 1 см ☐ 2) 2 см ☐ 3) 3 см ☐ 4) 4 см

А6. В конус с углом γ при вершине осевого сечения и радиусом основания r вписана сфера радиуса R. Найдите величину R, если известны r и γ.

☐ 1) $r\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{4}\right)$ ☐ 3) $r\,\mathrm{tg}\frac{\gamma}{4}$

☐ 2) $r\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{4}\right)$ ☐ 4) $r\,\mathrm{ctg}\frac{\gamma}{4}$

B1. Через образующую цилиндра проведены две взаимно перпендикулярные плоскости. Площади полученных сечений равны $\sqrt{71}$ см^2 и $5\sqrt{5}$ см^2. Вычислите площадь осевого сечения цилиндра.

Ответ: ____________________________________

B2. Равнобедренный треугольник вращается вокруг своей оси симметрии. Найдите стороны этого треугольника, если его периметр равен 30 см, а площадь полной поверхности тела вращения равна 90π см^2.

Ответ: ____________________________________

B3. Сфера радиуса R касается всех ребер правильной треугольной призмы. Найдите длину ребра основания призмы и расстояние от центра сферы до плоскостей оснований призмы.

Ответ: ____________________________________

C1. Две параллельные плоскости пересекают диаметр сферы AB в точках C и D, делящих его в отношении $AC : CD : DB = 1 : 3 : 4$. Определите отношение радиусов сечений (меньшего к большему), если прямая, содержащая данный диаметр, образует с плоскостями угол α.

Ответ: ____________________________________

C2. Сфера касается всех ребер правильной четырехугольной пирамиды. Найдите радиус такой сферы, если все ребра пирамиды равны 22 см.

Ответ: ____________________________________

Тест 15. Понятие объема тела. Объем прямоугольного параллелепипеда

Вариант 1

А1. Площадь полной поверхности куба составляет 150 см^2. Найдите объем куба.

- [ ] 1) 130 см^3
- [ ] 2) 160 см^3
- [ ] 3) 165 см^3
- [ ] 4) 125 см^3

А2. Измерения прямоугольного параллелепипеда относятся как 1 : 2 : 3. Диагональ параллелепипеда равна $4\sqrt{14}$. Вычислите его объем.

- [ ] 1) 384
- [ ] 2) 390
- [ ] 3) 368
- [ ] 4) 374

А3. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами, равными 4 см и 5 см. Диагональ большей боковой грани равна $5\sqrt{2}$ см. Найдите объем призмы.

- [ ] 1) 60 см^3
- [ ] 2) 20 см^3
- [ ] 3) 30 см^3
- [ ] 4) 34 см^3

В1. Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, если периметр его основания равен 16 см, площадь полной поверхности – 142 см^2 и объем – 105 см^3.

Ответ: ______________________________

В2. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетом a и противолежащим ему углом α. Диагональ большей боковой грани составляет с плоскостью основания угол β. Найдите объем призмы.

Ответ: ______________________________

С1. В конус вписан куб так, что четыре его вершины принадлежат основанию куба, а другие четыре вершины – конической поверхности. Вычислите объем куба, если образующая конуса равна l и наклонена к плоскости его основания под углом α.

Ответ: ______________________________

Тест 15. Понятие объема тела. Объем прямоугольного параллелепипеда

Вариант 2

А1. Площадь полной поверхности куба составляет 96 $см^2$. Найдите объем куба.

☐ 1) 56 $см^3$ ☐ 3) 64 $см^3$

☐ 2) 60 $см^3$ ☐ 4) 68 $см^3$

А2. Измерения прямоугольного параллелепипеда относятся как 2 : 3 : 4. Диагональ параллелепипеда равна $3\sqrt{29}$. Вычислите его объем.

☐ 1) 618 ☐ 3) 642

☐ 2) 676 ☐ 4) 648

А3. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетом, равным 3 см, и гипотенузой, равной $3\sqrt{5}$ см. Диагональ меньшей боковой грани равна 5 см. Найдите объем призмы.

☐ 1) 36 $см^3$ ☐ 3) 42 $см^3$

☐ 2) 30 $см^3$ ☐ 4) 72 $см^3$

В1. Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, если периметр его основания равен 18 см, площадь полной поверхности – 112 $см^2$ и объем – 80 $см^3$.

Ответ: ______________________________

В2. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α. Диагональ большей боковой грани составляет с плоскостью основания угол β. Найдите объем призмы.

Ответ: ______________________________

С1. В конус вписан куб так, что четыре его вершины принадлежат основанию куба, а другие четыре вершины – конической поверхности. Вычислите объем куба, если образующая конуса равна l и угол между ней и высотой конуса равен α.

Ответ: ______________________________

Тест 16. Объемы прямой призмы и цилиндра

Вариант 1

А1. Сторона основания правильной треугольной призмы равна a, площадь ее боковой поверхности вдвое больше площади основания. Найдите объем призмы.

☐ 1) $\frac{a^3}{12}\sqrt{3}$ ☐ 2) $\frac{a^3}{8}$ ☐ 3) $\frac{a^3}{8}\sqrt{3}$ ☐ 4) $\frac{a^3}{6}$

А2. Основанием прямой призмы является треугольник со сторонами 10, 10 и 12. Через большую сторону нижнего основания и середину противоположного бокового ребра проведена плоскость под углом 30° к плоскости основания. Найдите объем призмы.

☐ 1) 192 ☐ 2) $256\sqrt{3}$ ☐ 3) $384\sqrt{3}$ ☐ 4) 288

А3. Диагональ осевого сечения цилиндра равна l и составляет угол α с плоскостью основания. Вычислите объем.

☐ 1) $\frac{\pi l^3}{8}\sin\alpha\cos\alpha$ ☐ 3) $\frac{\pi l^3}{8}\sin^2\alpha\cos\alpha$

☐ 2) $\frac{\pi l^3}{4}\operatorname{tg}^2\alpha$ ☐ 4) $\frac{\pi l^3}{4}\sin\alpha\cos^2\alpha$

В1. В основании прямого параллелепипеда лежит ромб, диагонали которого равны 16 и 12. Плоскость сечения, проходящего через два противоположных ребра верхнего и нижнего оснований, составляет с основанием угол 45°. Найдите объем параллелепипеда.

Ответ: ______________________________

В2. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 8, а ее высота – 16. В эту пирамиду вписан цилиндр. Осевое сечение цилиндра – квадрат. Вычислите объем цилиндра.

Ответ: ______________________________

С1. Сечение, параллельное оси цилиндра, отсекает от окружности основания дугу в 120°. Найдите отношение объемов частей, на которые эта плоскость разделила цилиндр.

Ответ: ______________________________

Тест 16. Объемы прямой призмы и цилиндра

Вариант 2

А1. Высота основания правильной треугольной призмы равна h, площадь ее боковой поверхности втрое больше площади основания. Найдите объем призмы.

☐ 1) $\frac{h^3}{8}$ ☐ 2) $\frac{h^3\sqrt{3}}{4}$ ☐ 3) $\frac{h^3\sqrt{3}}{6}$ ☐ 4) $\frac{3}{8}h^3$

А2. Основанием прямой призмы является треугольник со сторонами 10, 10 и 16. Через большую сторону верхнего основания и середину противоположного бокового ребра проведена плоскость под углом 45° к плоскости основания. Найдите объем призмы.

☐ 1) $288\sqrt{2}$ ☐ 2) 392 ☐ 3) $432\sqrt{2}$ ☐ 4) 576

А3. Высота цилиндра равна h и составляет с диагональю осевого сечения угол α. Вычислите объем цилиндра.

☐ 1) $\frac{\pi h^3}{2}\sin\alpha$ ☐ 3) $\frac{\pi h^3}{4}\operatorname{tg}\alpha$

☐ 2) $\frac{\pi h^3}{4}\operatorname{tg}^2\alpha$ ☐ 4) $\frac{\pi h^3}{2}\sin^2\alpha$

В1. В основании прямого параллелепипеда лежит ромб, диагонали которого равны 6 и 8. Плоскость сечения, проходящего через два противоположных ребра верхнего и нижнего оснований, составляет с основанием угол 60°. Найдите объем параллелепипеда.

Ответ: ______________________________

В2. Радиус основания конуса равен 4, а его высота – 10. В этот конус вписан цилиндр. Осевое сечение цилиндра – квадрат. Вычислите объем цилиндра.

Ответ: ______________________________

С1. Сечение, параллельное оси цилиндра, отсекает от окружности основания дугу в 60°. Найдите отношение объемов частей, на которые эта плоскость разделила цилиндр.

Ответ: ______________________________

Тест 17. Объем наклонной призмы

Вариант 1

A1. Основанием наклонной призмы служит правильный треугольник. Одна из боковых граней является ромбом с диагоналями 6 и 8. Боковые ребра наклонены к основанию под углом 60°. Найдите объем призмы.

☐ 1) $35\sqrt{3}$ ☐ 2) $40\sqrt{3}$ ☐ 3) 375/8 ☐ 4) 50

A2. В наклонном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ боковое ребро равно 10. Расстояния между ребром AA_1 и ребрами BB_1, DD_1 и CC_1 равны 5, 12 и 13. Вычислите объем.

☐ 1) 700 ☐ 2) 600 ☐ 3) 500 ☐ 4) 800

A3. Основанием призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равносторонний треугольник со стороной a. Вершина A_1 проектируется в центр этого основания, ребро AA_1 составляет с плоскостью основания угол φ. Найдите объем призмы.

☐ 1) $\frac{1}{4}a^3\operatorname{tg}\varphi$ ☐ 3) $\frac{1}{4}a^3\operatorname{tg}^2\varphi$

☐ 2) $\frac{1}{6}a^3\operatorname{tg}\varphi$ ☐ 4) $\frac{1}{5}a^3\operatorname{tg}^2\varphi$

B1. В наклонном параллелепипеде основанием является прямоугольник со сторонами a и b. Боковое ребро длины c составляет со смежными сторонами основания углы, равные 75°. Вычислите объем параллелепипеда.

Ответ: ____________________

B2. В наклонной треугольной призме высота равна $10\sqrt{2}$, боковые ребра составляют с плоскостью основания угол в 45°. Площади двух боковых граней равны 100 и 200, угол между ними 120°. Найдите объем призмы.

Ответ: ____________________

C1. Основанием наклонной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является четырехугольник $ABCD$, в котором $AC = 6$, $BD = 4$ и $AC \perp BD$. Диагональное сечение BB_1D_1D – прямоугольник, площадь сечения AA_1C_1C равна 60. Вычислите объем призмы.

Ответ: ____________________

Тест 17. Объем наклонной призмы

Вариант 2

A1. Основанием наклонной призмы служит правильный треугольник. Одна из боковых граней является ромбом с диагоналями 12 и 16. Боковые ребра наклонены к основанию под углом 45°. Найдите объем призмы.

☐ 1) $125\sqrt{6}$ ☐ 2) $130\sqrt{2}$ ☐ 3) $120\sqrt{3}$ ☐ 4) 160

A2. В наклонном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ боковое ребро равно 16. Расстояния между ребром AA_1 и ребрами BB_1, DD_1 и CC_1 равны 8, 15 и 17. Вычислите объем.

☐ 1) 1840 ☐ 2) 1900 ☐ 3) 1860 ☐ 4) 1920

A3. Основанием призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равносторонний треугольник. Вершина A_1 проектируется в центр этого основания, ребро AA_1 составляет с плоскостью основания угол φ. Найдите объем призмы, если ее высота равна h.

☐ 1) $\sqrt{3}h^3\operatorname{ctg}^2\varphi$ ☐ 3) $\frac{3\sqrt{3}}{4}h^3\operatorname{ctg}^2\varphi$

☐ 2) $\sqrt{3}h^3\operatorname{ctg}\varphi$ ☐ 4) $2\sqrt{3}h^3\operatorname{ctg}^2\varphi$

B1. В наклонном параллелепипеде основанием является прямоугольник со сторонами a и b. Боковое ребро длины c составляет со смежными сторонами основания углы, равные 60°. Вычислите объем параллелепипеда.

Ответ: ______________________________

B2. В наклонной треугольной призме высота равна $5\sqrt{3}$, боковые ребра составляют с плоскостью основания угол в 60°. Площади двух боковых граней равны 40 и 60, угол между ними 45°. Найдите объем призмы.

Ответ: ______________________________

C1. Основанием наклонной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является четырехугольник $ABCD$, в котором $AC = 5$, $BD = 4$ и $AC \perp BD$. Диагональное сечение BB_1D_1D – прямоугольник, площадь сечения AA_1C_1C равна 120. Вычислите объем призмы.

Ответ: ______________________________

Тест 18. Объем пирамиды и конуса

Вариант 1

A1. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 6, боковые ребра наклонены к основанию под углом 45°. Найдите объем пирамиды.

☐ 1) 12 ☐ 2) 18 ☐ 3) 16 ☐ 4) 32

A2. В конус вписана правильная треугольная пирамида. Определите отношение объемов конуса и пирамиды.

☐ 1) $\frac{8\pi}{3\sqrt{3}}$ ☐ 2) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ ☐ 3) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ ☐ 4) $\frac{4\pi}{3}$

A3. Основанием пирамиды $DABC$ служит равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC = a$, $\angle ABC = \alpha$. Ребро BD перпендикулярно плоскости основания, грань ADC составляет с ним угол β. Вычислите объем пирамиды.

☐ 1) $\frac{a^3}{3}\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}\beta$ ☐ 3) $\frac{a^3}{3}\sin\alpha\,\mathrm{tg}\beta$

☐ 2) $\frac{a^3}{6}\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\beta$ ☐ 4) $\frac{a^3}{6}\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\beta$

B1. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, угол между смежными боковыми гранями – α. Найдите объем пирамиды.

Ответ: ____________________

B2. Основанием пирамиды является равнобедренная трапеция, основания которой равны 10 и 20, боковая сторона равна 10. Объем описанного около пирамиды конуса равен $\frac{1000\pi\sqrt{3}}{3}$. Вычислите угол наклона боковых ребер к плоскости основания.

Ответ: ____________________

C1. Два конуса расположены так, что основания их параллельны и вершины каждого из них расположены в центре основания другого. Определите объем общей части этих конусов, если радиусы их оснований равны 4 и 6, общая высота равна 15.

Ответ: ____________________

Тест 18. Объем пирамиды и конуса

Вариант 2

А1. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 4 и наклонено к основанию под углом 60°. Найдите объем пирамиды.

☐ 1) 18 ☐ 2) 32 ☐ 3) 6 ☐ 4) 12

А2. В правильную треугольную пирамиду вписан конус. Определите отношение объемов пирамиды и конуса.

☐ 1) $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$ ☐ 2) $\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$ ☐ 3) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$ ☐ 4) $\frac{4\sqrt{3}}{\pi}$

А3. Основанием пирамиды $MABCD$ служит ромб со стороной a и острым углом A, равным α. Боковое ребро MB перпендикулярно плоскости основания, грани MAD и MDC наклонены к нему под углом β. Вычислите объем пирамиды.

☐ 1) $\frac{a^3}{6}\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}\beta$ ☐ 3) $\frac{a^3}{3}\sin^2\alpha\,\mathrm{ctg}\beta$

☐ 2) $\frac{a^3}{3}\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}\beta$ ☐ 4) $\frac{a^3}{6}\cos^2\alpha\,\mathrm{ctg}\beta$

В1. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a, угол между смежными боковыми гранями – α. Найдите объем пирамиды.

Ответ: ______________________________

В2. Конус вписан в пирамиду, основанием которой является прямоугольная трапеция с основаниями, равными 2 и 4. Объем конуса равен $\frac{64\pi}{81}$. Вычислите угол наклона боковых граней к плоскости основания.

Ответ: ______________________________

С1. Два конуса расположены так, что основания их параллельны и вершины каждого из них расположены в центре основания другого. Определите объем общей части этих конусов, если радиусы их оснований равны 3 и 5, общая высота равна 16.

Ответ: ______________________________

Тест 19. Объем усеченной пирамиды и усеченного конуса

Вариант 1

А1. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны $6\sqrt{2}$ и $4\sqrt{2}$. Площадь диагонального сечения равна 90. Найдите объем пирамиды.

☐ 1) $320\sqrt{2}$ ☐ 2) $280\sqrt{3}$ ☐ 3) 460 ☐ 4) 456

А2. Радиусы оснований усеченного конуса относятся как 1 : 3. Образующая конуса равна 4 и составляет с плоскостью угол в 60°. Вычислите объем конуса.

☐ 1) 14π ☐ 2) $\frac{26\sqrt{3}}{3}\pi$ ☐ 3) $\frac{32\sqrt{3}}{3}\pi$ ☐ 4) 16π

А3. Высота конуса разделена на три равные части и через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию. Объем меньшего из получившихся усеченных конусов равен 21 см^3. Определите объем данного конуса.

☐ 1) 81 см^3 ☐ 3) 78 см^3
☐ 2) 84 см^3 ☐ 4) 87 см^3

В1. В правильной треугольной усеченной пирамиде стороны нижнего и верхнего оснований равны a и b ($a > b$), двугранный угол при ребре нижнего основания равен α. Найдите объем пирамиды.

Ответ: ______________________________

В2. В равнобедренном треугольнике ABC: $AB = BC = 10$, $AC = 12$. Треугольник вращается вокруг оси, проходящей через вершину C и перпендикулярной AC. Вычислите объем тела вращения.

Ответ: ______________________________

С1. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде сторона нижнего основания равна a, верхнего – b ($a > b$). Через середину высоты пирамиды проведена плоскость, параллельная основаниям. Найдите отношение объема верхней получившейся усеченной пирамиды к объему данной пирамиды.

Ответ: ______________________________

Тест 19. Объем усеченной пирамиды и усеченного конуса

Вариант 2

А1. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны $8\sqrt{3}$ и $4\sqrt{3}$. Площадь сечения, проходящего через боковое ребро пирамиды и середину противоположной стороны основания, равна 54. Найдите объем пирамиды.

☐ 1) $168\sqrt{3}$ ☐ 2) 286 ☐ 3) 144 ☐ 4) $84\sqrt{3}$

А2. Высота усеченного конуса равна 5, диагональ осевого сечения – 13. Радиусы оснований относятся как 1 : 2. Вычислите объем конуса.

☐ 1) 190π ☐ 2) $\frac{566}{3}\pi$ ☐ 3) $\frac{560}{3}\pi$ ☐ 4) 180π

А3. Высота конуса разделена на четыре равные части и через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию. Объем меньшего из получившихся усеченных конусов равен 28 см^3. Определите объем данного конуса.

☐ 1) 252 см^3 ☐ 3) 260 см^3

☐ 2) 264 см^3 ☐ 4) 256 см^3

В1. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны нижнего и верхнего оснований равны a и b ($a > b$), двугранный угол при ребре нижнего основания равен α. Найдите объем пирамиды.

Ответ: ______________________________

В2. В равнобедренном треугольнике ABC: $AC = CB = 25$, $AB = 48$. Треугольник вращается вокруг оси, проходящей через вершину B и перпендикулярной AB. Вычислите объем тела вращения.

Ответ: ______________________________

С1. В правильной треугольной усеченной пирамиде сторона нижнего основания равна a, верхнего – b ($a > b$). Через середину высоты пирамиды проведена плоскость, параллельная основаниям. Найдите отношение объема верхней получившейся усеченной пирамиды к объему нижней пирамиды.

Ответ: ______________________________

Тест 20. Объем шара и площадь сферы

Вариант 1

А1. В цилиндр вписан шар. Найдите отношение площадей поверхностей и объемов цилиндра и шара.

☐ 1) $\frac{5}{2}$ и $\frac{3}{2}$ ☐ 3) $\frac{3}{2}$ и $\frac{3}{2}$

☐ 2) $\frac{3}{2}$ и $\frac{5}{2}$ ☐ 4) 2 и $\frac{3}{2}$

А2. Расстояние между центрами двух внешне касающихся шаров равно 24 см, а разность площадей их поверхностей составляет 192π см^2. Определите радиусы шаров.

☐ 1) 13 см и 11 см ☐ 3) 9 см и 15 см

☐ 2) 14 см и 10 см ☐ 4) 6 см и 18 см

А3. В шаре проведена плоскость, перпендикулярная диаметру и делящая его на части, равные 6 см и 12 см. Вычислите объемы двух полученных частей шара.

☐ 1) 243π см^3 и 729π см^3

☐ 2) 252π см^3 и 720π см^3

☐ 3) 261π см^3 и 729π см^3

☐ 4) 252π см^3 и 729π см^3

В1. Радиус основания конуса равен R, угол между его образующей и плоскостью основания равен α. В конус вписан шар. Найдите объем шара.

Ответ: ________________________________

В2. Диаметр шара разделен на три части, которые относятся как 2 : 1 : 3. Через точки деления проведены плоскости, перпендикулярные диаметру. Вычислите объем получившегося шарового слоя, если радиус шара равен R.

Ответ: ________________________________

С1. Найдите объем двояковыпуклой линзы, у которой радиусы поверхностей равны 13 и 20, а расстояние между центрами – 21.

Ответ: ________________________________

Тест 20. Объем шара и площадь сферы

Вариант 2

A1. В куб вписан шар. Найдите отношение площадей поверхностей и объемов куба и шара.

☐ 1) $\frac{4}{\pi}$ и $\frac{5}{\pi}$	☐ 3) $\frac{7}{\pi}$ и $\frac{6}{\pi}$
☐ 2) $\frac{6}{\pi}$ и $\frac{6}{\pi}$	☐ 4) $\frac{5}{\pi}$ и $\frac{6}{\pi}$

A2. Расстояние между центрами двух внешне касающихся шаров равно 20 см, а разность площадей их поверхностей составляет 160π см^2. Определите радиусы шаров.

☐ 1) 12 см и 8 см	☐ 3) 6 см и 14 см
☐ 2) 13 см и 7 см	☐ 4) 11 см и 9 см

A3. В шаре проведена плоскость, перпендикулярная диаметру и делящая его на части, равные 3 см и 9 см. Вычислите объемы двух полученных частей шара.

☐ 1) 36π см^3 и 243π см^3
☐ 2) 45π см^3 и 252π см^3
☐ 3) 45π см^3 и 243π см^3
☐ 4) 54π см^3 и 252π см^3

B1. Радиус основания конуса равен R, угол между его образующей и высотой равен α. В конус вписан шар. Найдите объем шара.

Ответ: ____

B2. Диаметр шара разделен на три части, которые относятся как 1 : 2 : 3. Через точки деления проведены плоскости, перпендикулярные диаметру. Вычислите объем получившегося шарового слоя, если радиус шара равен R.

Ответ: ____

C1. Найдите объем выпукло-вогнутой линзы, у которой радиусы поверхностей равны 25 и 29, а расстояние между центрами – 6.

Ответ: ____

Тест 21. Задачи на наименьшее и наибольшее значения в геометрии (факультативный)

Вариант 1

A1. Периметр прямоугольника равен 24 см. Найдите наибольшую возможную площадь этого прямоугольника.

☐ 1) 36 см^2 ☐ 3) 46 см^2
☐ 2) 42 см^2 ☐ 4) 52 см^2

A2. В конусе угол при вершине осевого сечения равен 150°, образующая равна 16 см. Через вершину конуса проведено сечение. Определите наибольшую возможную площадь такого сечения.

☐ 1) $64\sqrt{2}$ см^2 ☐ 3) 64 см^2
☐ 2) $64\sqrt{3}$ см^2 ☐ 4) 128 см^2

A3. Из всех правильных треугольных призм, имеющих объем $16\sqrt{3}$ см^3, найдите призму с наименьшей суммой длин всех ее ребер. Чему равна длина стороны основания этой призмы?

☐ 1) $4\sqrt{3}$ см
☐ 2) 6 см
☐ 3) $8\sqrt{3}$ см
☐ 4) 4 см

B1. Боковые стороны и меньшее основание трапеции равны 8 см. Вычислите наибольшее значение площади трапеции.

Ответ: ______________________

B2. Найдите высоту и радиус основания прямого кругового конуса наибольшего объема, вписанного в шар радиуса R.

Ответ: ______________________

C1. Периметр равнобедренного треугольника равен p. Какой длины должно быть его основание, чтобы объем тела, полученного вращением этого треугольника вокруг боковой стороны, был наибольшим?

Ответ: ______________________

Тест 21. Задачи на наименьшее и наибольшее значения в геометрии (факультативный)

Вариант 2

А1. Периметр прямоугольника равен 28 см. Найдите наибольшую возможную площадь этого прямоугольника.

☐ 1) 72 $см^2$ ☐ 3) 49 $см^2$
☐ 2) 56 $см^2$ ☐ 4) 38 $см^2$

А2. В конусе угол при вершине осевого сечения равен 120°, образующая равна 8 см. Через вершину конуса проведено сечение. Определите наибольшую возможную площадь такого сечения.

☐ 1) $16\sqrt{3}$ $см^2$ ☐ 3) 64 $см^2$
☐ 2) 32 $см^2$ ☐ 4) $32\sqrt{3}$ $см^2$

А3. Из всех правильных треугольных призм, имеющих объем $54\sqrt{3}$ $см^3$, найдите призму с наименьшей суммой длин всех ее ребер. Чему равна длина стороны основания этой призмы?

☐ 1) $6\sqrt{3}$ см
☐ 2) 8 см
☐ 3) $4\sqrt{3}$ см
☐ 4) 6 см

В1. Боковые стороны и меньшее основание трапеции равны 12 см. Вычислите наибольшее значение площади трапеции.

Ответ: ____________________

В2. Найдите высоту и радиус основания прямого кругового цилиндра наибольшего объема, вписанного в шар радиуса R.

Ответ: ____________________

С1. Периметр равнобедренного треугольника равен p. Какой длины должна быть его боковая сторона, чтобы объем тела, полученного вращением этого треугольника вокруг боковой стороны, был наибольшим?

Ответ: ____________________

Тест 22. Обобщение темы «Объемы тел»

Вариант 1

А1. Площади трех попарно смежных граней прямоугольного параллелепипеда равны 6 см^2, 12 см^2 и 18 см^2. Найдите объем параллелепипеда.

☐ 1) 42 см^3 ☐ 3) 36 см^3
☐ 2) 24 см^3 ☐ 4) 48 см^3

А2. В правильной треугольной призме диагональ боковой грани равна m и составляет со смежной боковой гранью угол φ. Вычислите объем призмы.

☐ 1) $\frac{m^3}{3}\sin^2\varphi\sqrt{3-4\sin^2\varphi}$ ☐ 3) $\frac{m^3}{3}\sin^2\varphi\sqrt{2-3\cos^2\varphi}$

☐ 2) $\frac{m^3}{2}\cos\varphi\sqrt{3-4\sin^2\varphi}$ ☐ 4) $\frac{m^3}{4}\cos\varphi\sqrt{2-3\cos^2\varphi}$

А3. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, если высота пирамиды равна h и боковая грань составляет с плоскостью основания угол φ.

☐ 1) $\frac{2}{3}h^3\mathrm{tg}^2\varphi$ ☐ 3) $\frac{2}{3}h^3\mathrm{tg}\,\varphi$

☐ 2) $\frac{1}{3}h^3\mathrm{ctg}^2\varphi$ ☐ 4) $\frac{4}{3}h^3\mathrm{ctg}^2\varphi$

А4. В прямоугольнике диагонали равны m, острый угол между ними равен φ. Прямоугольник вращается вокруг меньшей стороны. Определите объем тела вращения.

☐ 1) $\frac{1}{3}\pi m^3\cos\varphi\sin\frac{\varphi}{2}$ ☐ 3) $\frac{1}{3}\pi m^3\cos\varphi\cos\frac{\varphi}{2}$

☐ 2) $\frac{1}{2}\pi m^3\sin\varphi\sin\frac{\varphi}{2}$ ☐ 4) $\frac{1}{2}\pi m^3\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}$

А5. Образующая конуса в два раза больше радиуса R его основания. Вычислите объем конуса.

☐ 1) $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi R^3$ ☐ 3) $\frac{1}{3}\pi R^3$

☐ 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi R^3$ ☐ 4) $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi R^3$

А6. Круговой сектор с углом 30° и радиусом R вращается вокруг одного из ограничивающих его радиусов. Найдите объем получившегося шарового сектора.

☐ 1) $\frac{2-\sqrt{3}}{3}\pi R^3$ ☐ 3) $\frac{2-\sqrt{3}}{4}\pi R^3$

☐ 2) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}\pi R^3$ ☐ 4) $\frac{2-\sqrt{2}}{3}\pi R^3$

В1. В прямоугольном параллелепипеде периметры двух боковых граней равны 16 см и 24 см. Вычислите объем параллелепипеда, имеющего наибольшую боковую поверхность.

Ответ: ________________________________

В2. Площади двух граней тетраэдра равны 12 см^2 и 30 см^2, длина их общего ребра 5 см, двугранный угол между ними равен 60°. Найдите объем тетраэдра.

Ответ: ________________________________

В3. Диагонали осевого сечения усеченного конуса точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1. Длина диагонали равна l. Угол между диагоналями, обращенный к основаниям, равен φ. Вычислите объем усеченного конуса.

Ответ: ________________________________

В4. В шар радиуса R вписана треугольная пирамида, все ребра которой равны. Найдите объем пирамиды.

Ответ: ________________________________

С1. В правильную четырехугольную пирамиду вписан цилиндр с радиусом основания R. Высота цилиндра в два раза меньше высоты пирамиды. Плоский угол при вершине пирамиды равен α. Вычислите объем пирамиды.

Ответ: ________________________________

С2. В сферу радиуса R вписана правильная треугольная пирамида, имеющая наибольший объем. Найдите величину двугранного угла при ребре основания этой пирамиды.

Ответ: ________________________________

Тест 22. Обобщение темы «Объемы тел»

Вариант 2

А1. Площади трех попарно смежных граней прямоугольного параллелепипеда равны 4 см^2, 8 см^2 и 32 см^2. Найдите объем параллелепипеда.

☐ 1) 28 см^3 ☐ 3) 36 см^3

☐ 2) 32 см^3 ☐ 4) 24 см^3

А2. В правильной треугольной призме диагональ боковой грани составляет со смежной боковой гранью угол φ. Высота основания равна h. Вычислите объем призмы.

☐ 1) $\frac{h^3}{3}\operatorname{tg}^2\varphi\sqrt{2-3\cos^2\varphi}$ ☐ 3) $\frac{h^3}{3}\operatorname{ctg}\varphi\sqrt{3-2\cos^2\varphi}$

☐ 2) $\frac{h^3}{3}\cos\varphi\sqrt{3-4\sin^2\varphi}$ ☐ 4) $\frac{h^3}{3\sin\varphi}\sqrt{3-4\sin^2\varphi}$

А3. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, если сторона пирамиды равна a и боковое ребро составляет с плоскостью основания угол φ.

☐ 1) $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}\operatorname{tg}\varphi$ ☐ 3) $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}\operatorname{ctg}\varphi$

☐ 2) $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\varphi$ ☐ 4) $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg}\varphi$

А4. В прямоугольнике диагонали равны m, острый угол между ними равен φ. Прямоугольник вращается вокруг большей стороны. Определите объем тела вращения.

☐ 1) $\frac{1}{3}\pi m^3\cos\varphi\cos\frac{\varphi}{2}$ ☐ 3) $\frac{1}{2}\pi m^3\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}$

☐ 2) $\frac{1}{2}\pi m^3\sin\varphi\sin\frac{\varphi}{2}$ ☐ 4) $\frac{1}{3}\pi m^3\sin\varphi\sin\frac{\varphi}{2}$

А5. Образующая конуса в два раза больше его высоты H. Вычислите объем конуса.

☐ 1) $\frac{1}{2}\pi H^3$ ☐ 3) $\frac{1}{3}\pi H^3$

☐ 2) πH^3 ☐ 4) $\frac{3}{2}\pi H^3$

A6. Круговой сектор с углом 45° и радиусом R вращается вокруг одного из ограничивающих его радиусов. Найдите объем получившегося шарового сектора.

☐ 1) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}\pi R^3$ ☐ 3) $\frac{2-\sqrt{3}}{3}\pi R^3$

☐ 2) $\frac{2-\sqrt{2}}{4}\pi R^3$ ☐ 4) $\frac{2-\sqrt{2}}{3}\pi R^3$

B1. В прямоугольном параллелепипеде периметры двух боковых граней равны 24 см и 32 см. Вычислите объем параллелепипеда, имеющего наибольшую боковую поверхность.

Ответ: ______________________________

B2. Площади двух граней тетраэдра равны 16 см^2 и 24 см^2, длина их общего ребра 4 см, двугранный угол между ними равен 45°. Найдите объем тетраэдра.

Ответ: ______________________________

B3. Диагонали осевого сечения усеченного конуса точкой пересечения делятся в отношении 3 : 1. Длина диагонали равна l. Угол между диагоналями, обращенный к боковым сторонам, равен α. Вычислите объем усеченного конуса.

Ответ: ______________________________

B4. Вокруг треугольной пирамиды, все ребра которой равны a, описан шар. Найдите объем шара.

Ответ: ______________________________

C1. В правильную четырехугольную пирамиду вписан цилиндр с радиусом основания R. Высота цилиндра в три раза меньше высоты пирамиды. Плоский угол при вершине пирамиды равен α. Вычислите объем пирамиды.

Ответ: ______________________________

C2. В сферу радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида, имеющая наибольший объем. Найдите величину двугранного угла при ребре основания этой пирамиды.

Ответ: ______________________________

Тест 23. Итоговый по программе 11 класса

Вариант 1

А1. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вершины $A(3; -4; 1)$ и $C_1(5; 2; -7)$. Найдите координаты точки пересечения его диагоналей.

☐ 1) (8; –2; –6) ☐ 3) (1; 3; –4)
☐ 2) (2; 6; –8) ☐ 4) (4; –1; –3)

А2*. Напишите уравнение плоскости, равноудаленной от точек $A(-1; -2; 3)$ и $B(2; 1; 5)$.

☐ 1) $3x - y + 2z - 5 = 0$ ☐ 3) $3x + 3y + 2z - 8 = 0$
☐ 2) $x + 2y - z + 4 = 0$ ☐ 4) $x - y + 8z - 3 = 0$

А3. Площадь основания цилиндра относится к площади осевого сечения как $\pi : 4$. Определите угол между диагоналями осевого сечения.

☐ 1) 30° ☐ 3) 60°
☐ 2) 90° ☐ 4) 45°

А4. Площади оснований усеченного конуса равны 4 см^2 и 16 см^2. Через середину высоты проведена плоскость параллельно основаниям. Найдите площадь сечения конуса.

☐ 1) 9 см^2 ☐ 3) 12 см^2
☐ 2) 10 см^2 ☐ 4) 8 см^2

А5. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро равно a и наклонено к плоскости основания под углом φ. Вычислите объем пирамиды.

☐ 1) $\frac{1}{6}a^3\cos^2\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi$ ☐ 3) $\frac{1}{3}a^3\sin^2\varphi\cos\varphi$
☐ 2) $\frac{1}{3}a^3\sin\varphi\cos\varphi$ ☐ 4) $\frac{2}{3}a^3\sin\varphi\cos^2\varphi$

А6. Прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α вращается вокруг гипотенузы. Найдите объем тела вращения.

☐ 1) $\frac{\pi c^3}{3}\sin\alpha\cos\alpha$ ☐ 3) $\frac{\pi c^3}{6}\sin\alpha\cos^2\alpha$
☐ 2) $\frac{\pi c^3}{12}\sin^2 2\alpha$ ☐ 4) $\frac{\pi c^3}{3}\sin^2\alpha\cos\alpha$

B1*. Определите расстояние между плоскостями, которые заданы уравнениями $2x - y + 2z - 1 = 0$ и $2x - y + 2z + 14 = 0$. .

Ответ: ______________________________

B2. При вращении прямоугольника вокруг неравных сторон получаются цилиндры, площади полных поверхностей которых равны S_1 и S_2. Найдите отношение объемов этих цилиндров.

Ответ: ______________________________

B3. Вычислите наибольшее значение площади поверхности сферы, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z = -a^2 + 6a - 5$.

Ответ: ______________________________

B4. В конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α, вписана пирамида. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с катетами a и b. Найдите объем пирамиды.

Ответ: ______________________________

C1. Шар радиуса R проходит через все вершины грани куба и касается противоположной грани. Вычислите площадь полной поверхности куба.

Ответ: ______________________________

C2. В правильной четырехугольной пирамиде расположен полушар радиуса R, плоскость основания которого принадлежит плоскости основания пирамиды, а его сферическая поверхность касается боковых граней пирамиды. Найдите длину ребра основания той пирамиды, которая имеет наименьший возможный объем, и этот объем.

Ответ: ______________________________

Тест 23. Итоговый по программе 11 класса

Вариант 2

А1. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вершины $B_1(-1; 5; 4)$ и $D(-3; 1; -2)$. Найдите координаты точки пересечения его диагоналей.

☐ 1) (4; 4; 6) ☐ 3) (–2; 3; 1)
☐ 2) (–4; 6; 2) ☐ 4) (2; 2; 3)

А2*. Напишите уравнение плоскости, равноудаленной от точек $A(3; -1; 2)$ и $B(-1; -3; 4)$.

☐ 1) $2x + y - z + 3 = 0$ ☐ 3) $x - 2y + 3z - 4 = 0$
☐ 2) $4x + 2y - 2z + 5 = 0$ ☐ 4) $x + y - 2z - 7 = 0$

А3. Площадь основания цилиндра относится к площади осевого сечения как $\sqrt{3}\pi : 4$. Определите угол между диагоналями осевого сечения.

☐ 1) 90° ☐ 3) 45°
☐ 2) 30° ☐ 4) 60°

А4. Площади оснований усеченного конуса равны 1 см^2 и 49 см^2. Через середину высоты проведена плоскость параллельно основаниям. Найдите площадь сечения конуса.

☐ 1) 16 см^2 ☐ 3) 24 см^2
☐ 2) 25 см^2 ☐ 4) 7 см^2

А5. В правильной четырехугольной пирамиде апофема равна h и составляет с высотой пирамиды угол α. Вычислите объем пирамиды.

☐ 1) $\frac{2}{3}h^3\sin\alpha\cos\alpha$ ☐ 3) $\frac{1}{6}h^3\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha$
☐ 2) $\frac{4}{3}h^3\sin^2\alpha\cos\alpha$ ☐ 4) $\frac{2}{3}h^3\sin\alpha\cos^2\alpha$

А6. Прямоугольный треугольник с катетом a и противолежащим углом α вращается вокруг гипотенузы. Найдите объем тела вращения.

☐ 1) $\frac{\pi a^3}{6}\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha$ ☐ 3) $\frac{\pi a^3}{3}\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha$
☐ 2) $\frac{\pi a^3}{3}\sin^2\alpha\cos\alpha$ ☐ 4) $\frac{\pi a^3}{6}\sin\alpha\cos\alpha$

B1*. Определите расстояние между плоскостями, которые заданы уравнениями $x + 2y - 2z - 2 = 0$ и $x + 2y - 2z + 16 = 0$.

Ответ: ______________________________

B2. При вращении прямоугольника вокруг неравных сторон получаются цилиндры, объемы которых равны V_1 и V_2. Найдите отношение площадей полных поверхностей этих цилиндров.

Ответ: ______________________________

B3. Вычислите наибольшее значение площади поверхности сферы, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 6z = -a^2 - 4a - 10$.

Ответ: ______________________________

B4. В конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α, вписана пирамида. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом φ. Найдите объем пирамиды.

Ответ: ______________________________

C1. Шар проходит через все вершины грани куба и касается противоположной грани. Вычислите площадь поверхности шара, если длина ребра куба равна a.

Ответ: ______________________________

C2. Плоскость основания полушара радиуса R является плоскостью основания правильной четырехугольной пирамиды. Сферическая поверхность шара касается всех боковых ребер пирамиды. Найдите длину ребра основания той пирамиды, которая имеет наименьший возможный объем, и этот объем.

Ответ: ______________________________

Тест 24. Итоговый по курсу геометрии (7–11 классы)

Вариант 1

А1. Найдите высоты равнобедренного треугольника, если его боковая сторона равна 30 см, а основание равно 36 см.

☐ 1) 22 см и $\frac{142}{5}$ см

☐ 2) 24 см и $\frac{144}{5}$ см

☐ 3) 24 см и $\frac{146}{5}$ см

☐ 4) 24 см и 28 см

А2. В прямоугольную трапецию вписана окружность. Вычислите площадь трапеции, если ее боковые стороны равны 14 см и 22 см.

☐ 1) 240 см^2 ☐ 3) 246 см^2
☐ 2) 258 см^2 ☐ 4) 252 см^2

А3. Найдите отношение площадей правильных четырехугольника и треугольника, вписанных в одну и ту же окружность.

☐ 1) $8\sqrt{3} : 9$ ☐ 3) $4\sqrt{2} : 3$
☐ 2) $4\sqrt{3} : 3$ ☐ 4) $3\sqrt{2} : 2$

А4. Вычислите площадь полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды, все ребра которой равны a.

☐ 1) $(2+\sqrt{3})a^2$ ☐ 3) $(1+\sqrt{3})a^2$
☐ 2) $(1+\sqrt{2})a^2$ ☐ 4) $(3+\sqrt{2})a^2$

А5. Две грани треугольной пирамиды – равносторонние треугольники, плоскости которых перпендикулярны. Найдите объем пирамиды, если длина ее наибольшего ребра равна 3.

☐ 1) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ☐ 3) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$

☐ 2) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ☐ 4) $\frac{3\sqrt{6}}{4}$

А6. Сфера задана уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z = 11$. Определите координаты центра O сферы и ее радиус R.

☐ 1) $(1; -2; 3)$, $R = 5$

☐ 2) $(-1; 2; -3)$, $R = 5$

☐ 3) $(1; -2; 3)$, $R = \sqrt{11}$

☐ 4) $(-1; 2; -3)$, $R = 11$

В1. Три окружности радиуса 4 см касаются друг друга. Вычислите площадь криволинейного треугольника, ограниченного дугами этих окружностей.

Ответ: ____________________

В2. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны a и b ($a > b$). Боковые грани наклонены к основанию под углом φ. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Ответ: ____________________

В3. Определите координаты такой точки C плоскости Oxy, которая лежит на одной прямой с точками $A(3; -8; 7)$ и $B(-1; 2; -7)$.

Ответ: ____________________

В4. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, высота – h. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

Ответ: ____________________

С1. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC выбраны точки M, K и P так, что $AM : MB = 1 : 2$, $BK : KC = 2 : 3$, $CP : PA = 1 : 3$. Вычислите площадь треугольника MPK, если площадь треугольника ABC равна S.

Ответ: ____________________

С2. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a, высота – h. Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду.

Ответ: ____________________

Тест 24. Итоговый по курсу геометрии (7–11 классы)

Вариант 2

А1. Найдите высоты равнобедренного треугольника, если его боковая сторона равна 17 см, а основание равно 30 см.

☐ 1) 8 см и $\frac{245}{17}$ см

☐ 2) 6 см и $\frac{240}{17}$ см

☐ 3) 8 см и 12 см

☐ 4) 8 см и $\frac{240}{17}$ см

А2. В прямоугольную трапецию вписана окружность. Вычислите площадь трапеции, если ее боковые стороны равны 8 см и 18 см.

☐ 1) 102 см^2 ☐ 3) 106 см^2

☐ 2) 104 см^2 ☐ 4) 112 см^2

А3. Найдите отношение площадей правильных шестиугольника и четырехугольника, вписанных в одну и ту же окружность.

☐ 1) $3\sqrt{2} : 2$ ☐ 3) $3\sqrt{3} : 4$

☐ 2) $4\sqrt{3} : 3$ ☐ 4) $2\sqrt{3} : 3$

А4. Вычислите площадь полной поверхности правильной треугольной пирамиды, все ребра которой равны a.

☐ 1) $a^2\sqrt{3}$ ☐ 3) $\frac{4}{3}\sqrt{3}a^2$

☐ 2) $\frac{3}{4}a^2\sqrt{3}$ ☐ 4) $2\sqrt{3}a^2$

А5. Две грани треугольной пирамиды – равносторонние треугольники, плоскости которых перпендикулярны. Найдите объем пирамиды, если длина ее наибольшего ребра равна 2.

☐ 1) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ☐ 3) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

☐ 2) $\frac{2\sqrt{6}}{9}$ ☐ 4) $2\sqrt{2}$

А6. Сфера задана уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z = 22$. Определите координаты центра O сферы и ее радиус R.

☐ 1) $(2; -3; 1)$, $R = 22$
☐ 2) $(-2; 3; -1)$, $R = \sqrt{6}$
☐ 3) $(2; -3; 1)$, $R = 6$
☐ 4) $(-2; 3; -1)$, $R = \sqrt{22}$

В1. Три окружности радиуса 6 см касаются друг друга. Вычислите площадь криволинейного треугольника, ограниченного дугами этих окружностей.

Ответ: ______________________________

В2. Стороны оснований правильной четырехугольной пирамиды равны a и b ($a > b$). Боковые грани наклонены к основанию под углом φ. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Ответ: ______________________________

В3. Определите координаты такой точки C плоскости Oxz, которая лежит на одной прямой с точками $A(1; -3; -5)$ и $B(4; -2; 5)$.

Ответ: ______________________________

В4. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a, высота – h. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

Ответ: ______________________________

С1. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC выбраны точки M, K и P так, что $AM : MB = 2 : 1$, $BK : KC = 3 : 2$, $CP : PA = 3 : 1$. Вычислите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника MPK равна S.

Ответ: ______________________________

С2. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, высота – h. Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду.

Ответ: ______________________________

ПРИЛОЖЕНИЯ

Самостоятельные работы

Самостоятельная работа № 1. Координаты точки и координаты вектора

Вариант 1

1. Даны векторы $\vec{a} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$. Найдите вектор $\vec{n} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ и его длину.

2. При каких значениях чисел m и n векторы $\vec{a}\{-4; m+2; 3\}$ и $\vec{b}\{6; 2; 5n-1\}$ коллинеарны? Установите связь между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3. Известно, что векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны и $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$. Докажите, что векторы $\vec{l} = 5\vec{a}$, $\vec{m} = -7\vec{b}$ и $\vec{n} = 4\vec{c}$ также компланарны. Разложите вектор $\vec{m}$ по векторам $\vec{l}$ и $\vec{n}$.

Вариант 2

1. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$. Найдите вектор $\vec{n} = -3\vec{a} + \vec{b}$ и его длину.

2. При каких значениях чисел m и n векторы $\vec{a}\{m-1; 5; -2\}$ и $\vec{b}\{2; -3; 4n+3\}$ коллинеарны? Установите связь между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3. Известно, что векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны и $\vec{b} = -2\vec{a} + 3\vec{c}$. Докажите, что векторы $\vec{l} = -3\vec{a}$, $\vec{m} = 2\vec{b}$ и $\vec{n} = -5\vec{c}$ также компланарны. Разложите вектор $\vec{n}$ по векторам $\vec{l}$ и $\vec{m}$.

Самостоятельная работа № 2. Скалярное произведение векторов

Вариант 1

1. Даны точки $A(1; 3; 0)$, $B(2; 3; -1)$ и $C(1; 2; -1)$. Вычислите угол ACB в треугольнике ABC.

2. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{m} = 2\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{n} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$, если $\vec{a} = \{-1; 2; 0\}$ и $\vec{b} = \{2; -3; 5\}$.

3. При каком значении числа n векторы $\vec{a}\{n-1; 2; -3\}$ и $\vec{b}\{5; -4; 2n+1\}$ взаимно перпендикулярны?

Вариант 2

1. Даны точки $A(1; -1; 3)$, $B(3; -1; 1)$ и $C(-1; 1; 3)$. Вычислите угол ACB в треугольнике ABC.

2. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{m} = -2\vec{a} + 5\vec{b}$ и $\vec{n} = 3\vec{a} + \vec{b}$, если $\vec{a} = \{0; 1; -2\}$ и $\vec{b} = \{1; 3; 1\}$.

3. При каком значении числа n векторы $\vec{a}\{3; 2n-1; -1\}$ и $\vec{b}\{n+2; -2; -5\}$ взаимно перпендикулярны?

Самостоятельная работа № 3 (факультативная). Уравнение плоскости

Вариант 1

1. Найдите угол между плоскостями, заданными уравнениями $2x + y - 2z - 17 = 0$ и $3x - 4z + 8 = 0$.

2. Определите геометрическое место точек, равноудаленных от точек $A(3; 2; -1)$ и $B(-7; 4; 5)$.

3. Даны точки $A(-1; 6; 3)$ и $B(5; -4; 1)$. Найдите расстояние от середины отрезка AB до плоскости, заданной уравнением $2x - 3y - z + 5 = 0$.

Вариант 2

1. Найдите угол между плоскостями, заданными уравнениями $4x - 3y + 15 = 0$ и $x + 2y - 2z - 9 = 0$.

2. Определите геометрическое место точек, равноудаленных от точек $A(-5; 6; 1)$ и $B(3; -2; 3)$.

3. Даны точки $A(-3; 2; 5)$ и $B(-1; -4; 1)$. Найдите расстояние от середины отрезка AB до плоскости, заданной уравнением $x + 2y - 5z - 7 = 0$.

Самостоятельная работа № 4. Цилиндр

Вариант 1

1. Прямоугольник со сторонами, равными $3a$ и $2a$, вращается сначала вокруг одной стороны, затем – вокруг другой. Вычислите отношение площадей полных поверхностей и площадей боковых поверхностей полученных тел вращения.

2. Через образующую цилиндра проведены две взаимно перпендикулярные плоскости. Площади полученных сечений равны S_1 и S_2. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

3. Плоскость α пересекает основания цилиндра по хордам, длины которых равны 16 см и 12 см. Вычислите тангенс угла наклона плоскости α к плоскостям оснований цилиндра, если радиус основания цилиндра 10 см и высота 30 см.

Вариант 2

1. Прямоугольник со сторонами, равными $4a$ и $3a$, вращается сначала вокруг одной стороны, затем – вокруг другой. Вычислите отношение площадей полных поверхностей и площадей боковых поверхностей полученных тел вращения.

2. Через образующую цилиндра проведены две взаимно перпендикулярные плоскости. Площадь одного из полученных сечений S_0, площадь осевого сечения цилиндра S. Найдите площадь другого полученного сечения.

3. Плоскость α пересекает основания цилиндра по хордам, длины которых равны 24 см и 32 см. Вычислите тангенс угла наклона плоскости α к плоскостям оснований цилиндра, если радиус основания цилиндра 20 см и высота 50 см.

Самостоятельная работа № 5. Конус

Вариант 1

1. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 2α, радиус основания конуса R. Найдите площадь полной поверхности конуса.

2. Высота конуса равна h, радиус основания R. Через вершину конуса проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу в 60°. Вычислите площадь сечения.

3. Найдите площадь осевого сечения усеченного конуса, если его высота h, образующая l и площадь боковой поверхности S.

Вариант 2

1. Угол между образующей конуса и его основанием равен α, радиус основания конуса R. Найдите площадь полной поверхности конуса.

2. Высота конуса равна h, радиус основания R. Через вершину конуса проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу в 90°. Вычислите площадь сечения.

3. Найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса, если его высота h, образующая l и площадь осевого сечения S.

Самостоятельная работа № 6. Сфера

Вариант 1

1. Сфера радиуса 6 см касается плоскости треугольника ABC в центре описанной около него окружности. Найдите расстояния от центра сферы до вершин треугольника, если $AB = 3$ см, $AC = 4$ см, $BC = 5$ см.

2. Определите расстояние между центрами сфер, которые заданы уравнениями $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z = 5$ и $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y + 6z = 7$.

3. Сфера проходит через три вершины ромба со стороной, равной 6 см, и углом 60°. Найдите расстояние от центра сферы до четвертой вершины ромба, если радиус сферы равен 10 см.

Вариант 2

1. Сфера радиуса 1,5 см касается плоскости треугольника ABC в центре вписанной в него окружности. Найдите расстояния от центра сферы до сторон треугольника, если $AB = 6$ см, $AC = 8$ см, $BC = 10$ см.

2. Определите расстояние между центрами сфер, которые заданы уравнениями $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2y - 4z = 5$ и $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 4z = 11$.

3. Сфера проходит через три вершины ромба со стороной, равной 8 см, и углом 60°. Найдите расстояние от центра сферы до четвертой вершины ромба, если радиус сферы равен 10 см.

Самостоятельная работа № 7. Объемы прямоугольного параллелепипеда, прямой призмы и цилиндра

Вариант 1

1. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, если площади трех его граней равны 6 см^2, 18 см^2 и 12 см^2.

2. В основании прямой призмы лежит ромб с острым углом α. Меньшая диагональ призмы равна d и составляет с плоскостью основания угол β. Вычислите объем призмы.

3. Центры O_1 и O_2 оснований цилиндра имеют координаты (0; 1; 1) и (4; 1; 1). Одна из точек окружности основания с центром O_2 имеет координаты (4; 3; –2). Найдите объем цилиндра.

Вариант 2

1. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, если площади трех его граней равны 15 см^2, 45 см^2 и 75 см^2.

2. В основании прямой призмы лежит ромб с острым углом α. Большая диагональ призмы равна d и составляет с плоскостью основания угол β. Вычислите объем призмы.

3. Центры O_1 и O_2 оснований цилиндра имеют координаты (2; 3; 3) и (–2; 3; 3). Одна из точек окружности основания с центром O_1 имеет координаты (2; 5; –1). Найдите объем цилиндра.

Самостоятельная работа № 8. Объемы наклонной призмы, пирамиды и конуса

Вариант 1

1. В наклонной призме боковое ребро равно l, площадь основания S. Угол между плоскостями основания и перпендикулярного боковому ребру сечения равен α. Найдите объем призмы.

2. Стороны оснований правильной усеченной треугольной пирамиды равны a и b ($b > a$). Боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α. Вычислите объем пирамиды.

3. Найдите объем и площадь поверхности тела, полученного при вращении треугольника со сторонами 6 см, 25 см и 29 см вокруг прямой, проходящей через вершину меньшего угла треугольника параллельно меньшей его стороне.

Вариант 2

1. В наклонной призме боковое ребро равно l, угол между плоскостями основания и перпендикулярного боковому ребру сечения равен α. Объем призмы равен V. Найдите площадь основания.

2. Стороны оснований правильной усеченной треугольной пирамиды равны a и b ($b > a$). Боковая грань наклонена к плоскости основания под углом α. Вычислите объем пирамиды.

3. Найдите объем и площадь поверхности тела, полученного при вращении треугольника со сторонами 13 см, 14 см и 15 см вокруг прямой, проходящей через вершину среднего по величине угла треугольника параллельно средней его стороне.

Самостоятельная работа № 9. Объем шара и площадь сферы

Вариант 1

1. Сфера и два ее взаимно перпендикулярных сечения имеют единственную общую точку. Площади сечений равны 11π см^2 и 14π см^2. Найдите объем шара и площадь сферы.

2. Плоскость, перпендикулярная радиусу шара, делит его на части в отношении 2 : 1, считая от центра шара. Площадь сечения шара этой плоскостью равна 20π см^2. Вычислите объем меньшего шарового сегмента.

3. Круговой сектор с углом α и хордой a вращается вокруг одного из ограничивающих его радиусов. Найдите объем получившегося шарового сектора.

Вариант 2

1. Сфера и два ее взаимно перпендикулярных сечения имеют единственную общую точку. Площади сечений равны 13π см^2 и 23π см^2. Найдите объем шара и площадь сферы.

2. Плоскость, перпендикулярная радиусу шара, делит его на части в отношении 3 : 1, считая от центра шара. Площадь сечения шара этой плоскостью равна 63π см^2. Вычислите объем меньшего шарового сегмента.

3. Круговой сектор с углом α и радиусом R вращается вокруг одного из ограничивающих его радиусов. Найдите объем получившегося шарового сектора.

Самостоятельная работа № 10. Комбинации круглых тел

Вариант 1

1. В цилиндр вписан шар радиуса R. Найдите объем и площадь полной поверхности цилиндра.

2. Вокруг конуса с образующей l и радиусом основания R описана сфера. Определите радиус сферы.

3. В конус вписан цилиндр, у которого диагонали осевого сечения соответственно параллельны двум образующим конуса. Образующая конуса равна l и составляет с плоскостью основания угол α. Найдите объем цилиндра и площадь его боковой поверхности.

Вариант 2

1. В цилиндр высотой h вписан шар. Найдите объем и площадь полной поверхности цилиндра.

2. Вокруг конуса с высотой h и радиусом основания R описана сфера. Определите радиус сферы.

3. В конус вписан цилиндр, у которого диагонали осевого сечения соответственно параллельны двум образующим конуса. Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол α, радиус основания конуса равен R. Найдите объем цилиндра и площадь его боковой поверхности.

Самостоятельная работа № 11. Комбинации многогранников и круглых тел

Вариант 1

1. Образующая конуса равна l и составляет угол α с плоскостью основания. В конус вписана правильная треугольная пирамида. Найдите объем пирамиды.

2. Длина стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, боковая грань составляет с плоскостью основания угол α. Определите радиус описанной сферы.

3. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 2 см и 4 см. Диагональ большей боковой грани образует с основанием угол в 30°. В призму вписан цилиндр. Найдите объем цилиндра.

Вариант 2

1. Высота конуса равна h. Образующая конуса составляет угол α с плоскостью основания. В конус вписана правильная треугольная пирамида. Найдите объем пирамиды.

2. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно b, боковая грань составляет с плоскостью основания угол α. Определите радиус описанной сферы.

3. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 4 см и 6 см. Диагональ большей боковой грани образует с основанием угол в 60°. В призму вписан цилиндр. Найдите объем цилиндра.

Самостоятельная работа № 12. Задачи на наибольшие и наименьшие значения в геометрии

Вариант 1

1. Найдите наименьшее возможное значение периметра параллелограмма с острым углом 45° и площадью 4 см^2.

2. Основанием четырехугольной пирамиды служит прямоугольник, одна из сторон которого равна a, боковые ребра пирамиды равны b. Найдите наибольшее значение объема такой пирамиды.

3. Вокруг сферы радиуса R описана правильная треугольная пирамида. Вычислите наименьшее значение объема такой пирамиды.

Вариант 2

1. Найдите наименьшее возможное значение периметра параллелограмма с острым углом 30° и площадью 9 см^2.

2. Основанием четырехугольной пирамиды служит прямоугольник с диагональю d, боковые ребра пирамиды равны b. Найдите наибольшее значение объема такой пирамиды.

3. В сферу радиуса R вписана правильная треугольная пирамида. Вычислите наибольшее значение объема такой пирамиды.

Самостоятельная работа № 13. Многоугольники (повторение)

Вариант 1

1. Найдите биссектрисы острых углов прямоугольного треугольника с катетами, равными 18 см и 24 см.

2. Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает ее боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Определите длину отрезка EF, если $AD = a$, $BC = b$ $(a > b)$, $CF : DF = 4 : 3$.

3. Точка M лежит на стороне AB параллелограмма $ABCD$ и делит эту сторону в отношении $AM : MB = 5 : 2$. Отрезки DM и AC пересекаются в точке F. Найдите площадь параллелограмма, если площадь треугольника AFD равна S.

Вариант 2

1. Найдите биссектрисы острых углов прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 15 см, а один из катетов равен 9 см.

2. Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает ее боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Определите длину отрезка EF, если $AD = a$, $BC = b$ $(a > b)$, $CF : DF = 2 : 5$.

3. Точка M лежит на стороне AB параллелограмма $ABCD$ и делит эту сторону в отношении $AM : MB = 3 : 4$. Отрезки DM и AC пересекаются в точке F. Найдите площадь параллелограмма, если площадь треугольника AFD равна S.

Самостоятельная работа № 14. Окружности (повторение)

Вариант 1

1. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках M, K и P. Найдите углы треугольника ABC, если углы треугольника MKP равны 56°, 58° и 66°.

2. Радиусы вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника соответственно равны 2 см и 5 см. Вычислите катеты треугольника.

3. Каждая из трех равных окружностей радиуса r касается двух других. Найдите сторону треугольника, образованного общими внешними касательными к этим окружностям.

Вариант 2

1. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках M, K и P. Найдите углы треугольника ABC, если углы треугольника MKP равны 45°, 56° и 79°.

2. Радиусы вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника соответственно равны 2 см и 6,5 см. Вычислите катеты треугольника.

3. Каждая из трех равных окружностей касается двух других. Сторона треугольника, образованного общими внешними касательными к этим окружностям, равна a. Найдите радиус окружностей.

Самостоятельная работа № 15. Многогранники (повторение)

Вариант 1

1. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб со стороной a и углом 60°. Меньшая диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол в 45°. Найдите объем параллелепипеда.

2. В наклонной треугольной призме площадь боковой грани равна S, а расстояние от нее до противоположного бокового ребра равно d. Вычислите высоту призмы, если площадь ее основания равна Q.

3. Объем наклонной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен V. На ребрах AA_1, AB и AC выбраны точки K, M, N так, что $AK : KA_1 = 1 : 2$, $AM : MB = 2 : 3$, $AN : NC = 3 : 1$. Найдите объем пирамиды $KAMN$.

Вариант 2

1. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб со стороной a и углом 60°. Площадь меньшего диагонального сечения равна S. Найдите объем параллелепипеда.

2. В наклонной треугольной призме площадь основания равна Q, а высота равна H. Вычислите расстояние от бокового ребра до противоположной боковой грани, если ее площадь равна S.

3. Объем наклонной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен V. На ребрах AA_1, AB и AC выбраны точки K, M, N так, что $AK : KA_1 = 1 : 3$, $AM : MB = 2 : 3$, $AN : NC = 4 : 1$. Найдите объем пирамиды $KAMN$.

Контрольные работы

Контрольная работа № 1. Метод координат в пространстве. Движения

Вариант 1

1. Даны точки $A(-3; 1; 4)$, $B(1; -5; 2)$, $C(-4; 6; 2)$, $D(2; -4; 8)$. Вычислите расстояние между серединами отрезков AB и CD.

2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M – центр грани BB_1C_1C. Найдите угол между векторами $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{DB_1}$.

3. Известны координаты трех точек $A(-1; 2; -5)$, $B(3; -1; 6)$ и $C(4; 5; -7)$. Определите координаты точки пересечения медиан треугольника ABC.

4*. Точки $A(5; -1; 2)$ и $B(1; 3; -4)$ симметричны относительно плоскости α. Напишите уравнение этой плоскости.

5. Вершины треугольника ABC имеют координаты $A(-8; 7; -4)$, $B(-6; 5; -3)$ и $C(-5; 3; -4)$. Найдите площадь треугольника ABC.

Вариант 2

1. Даны точки $A(5; -1; 3)$, $B(3; -5; 1)$, $C(2; -6; 4)$, $D(-4; 2; 6)$. Вычислите расстояние между серединами отрезков AB и CD.

2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M – центр грани AA_1B_1B. Найдите угол между векторами $\overrightarrow{DM}$ и $\overrightarrow{C_1B}$.

3. Известны координаты трех точек $A(2; -1; 7)$, $B(-4; 3; -1)$ и $C(-1; 4; 3)$. Определите координаты точки пересечения медиан треугольника ABC.

4*. Точки $A(-3; 4; 7)$ и $B(1; -2; 3)$ симметричны относительно плоскости α. Напишите уравнение этой плоскости.

5. Вершины треугольника ABC имеют координаты $A(-5; 2; -3)$, $B(-3; 1; -5)$ и $C(-8; 6; -3)$. Найдите площадь треугольника ABC.

Контрольная работа № 2. Цилиндр, конус, шар

Вариант 1

1. Диаметр основания цилиндра равен 10 см. На расстоянии 3 см от оси цилиндра проведено сечение, параллельное оси и имеющее форму квадрата. Вычислите площадь данного сечения и площадь осевого сечения цилиндра.

2. Площадь основания конуса равна 15 см^2, а площадь боковой поверхности 17 см^2. Найдите площадь осевого сечения конуса.

3. В усеченном конусе радиус меньшего основания равен R, высота h, угол между образующей и большим основанием равен α. Вычислите площадь боковой поверхности конуса.

4. Сфера касается одной из параллельных плоскостей и пересекает другую плоскость по окружности радиуса r. Найдите радиус сферы, если расстояние между плоскостями равно a.

5. Сфера, заданная уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z = 11$, пересечена плоскостью с уравнением $x = 4$. Вычислите площадь сечения и площадь поверхности сферы.

Вариант 2

1. Радиус основания цилиндра, осевое сечение которого квадрат, равен 10 см. На расстоянии 8 см от оси цилиндра проведено сечение, параллельное оси. Вычислите площадь данного сечения и площадь осевого сечения цилиндра.

2. Площадь основания конуса равна 12 см^2, а площадь боковой поверхности 13 см^2. Найдите площадь осевого сечения конуса.

3. В усеченном конусе радиус большего основания равен R, образующая l, угол между высотой конуса и его образующей равен α. Вычислите площадь боковой поверхности конуса.

4. Сфера радиуса R касается одной из параллельных плоскостей и пересекает другую плоскость по окружности радиуса r. Найдите радиус окружности r, если расстояние между плоскостями равно a.

5. Сфера, заданная уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 6z = 7$, пересечена плоскостью с уравнением $y = -3$. Вычислите площадь сечения и площадь поверхности сферы.

Контрольная работа № 3. Объемы прямоугольного параллелепипеда, прямой призмы и цилиндра

Вариант 1

1. В прямоугольном параллелепипеде диагонали трех граней, выходящих из одной вершины, равны 7 см, 8 см и 9 см. Вычислите объем параллелепипеда.

2. Площадь большего диагонального сечения правильной шестиугольной призмы равна площади ее основания. Найдите объем призмы, если сторона ее основания равна a.

3. В основании прямой призмы лежит трапеция. Площади параллельных боковых граней призмы равны S_1 и S_2, а расстояние между ними равно a. Вычислите объем призмы.

4. Периметры боковых граней прямоугольного параллелепипеда равны 16 см и 24 см. Найдите объем параллелепипеда, имеющего наибольшую боковую поверхность.

5. Прямоугольник с диагональю, равной $2\sqrt{3}$ см, вращается вокруг одной из сторон. Вычислите объем тела вращения, если этот объем имеет наибольшее возможное значение.

Вариант 2

1. В прямоугольном параллелепипеде диагонали трех граней, выходящих из одной вершины, равны 5 см, 7 см и 8 см. Вычислите объем параллелепипеда.

2. Площадь меньшего диагонального сечения правильной шестиугольной призмы равна площади ее основания. Найдите объем призмы, если ее высота равна h.

3. В основании прямой призмы лежит трапеция. Объем призмы равен V. Площади параллельных боковых граней призмы равны S_1 и S_2. Вычислите расстояние между ними.

4. Периметры боковых граней прямоугольного параллелепипеда равны 20 см и 28 см. Найдите объем параллелепипеда, имеющего наибольшую боковую поверхность.

5. Прямоугольник с диагональю, равной $3\sqrt{3}$ см, вращается вокруг одной из сторон. Вычислите объем тела вращения, если этот объем имеет наибольшее возможное значение.

Контрольная работа № 4. Объемы наклонной призмы, пирамиды и конуса, шара

Вариант 1

1. В основании призмы лежит треугольник, у которого одна сторона равна 2 см, а две другие по 3 см. Боковое ребро равно 6 см и составляет с плоскостью основания угол в 60°. Найдите объем призмы.

2. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, боковое ребро – b. Вычислите объем пирамиды.

3. Радиусы оснований усеченного конуса равны 5 см и 20 см, образующая равна 17 см. Найдите объем усеченного конуса.

4. Сечение, перпендикулярное диаметру шара, делит этот диаметр в отношении 1 : 2. Вычислите объем меньшего шарового сегмента, отсекаемого от шара, если площадь поверхности шара равна 144π см^2.

5. В основании пирамиды лежит ромб со стороной a и углом 60°. Одна из боковых граней перпендикулярна основанию, а две соседние с ней грани образуют с основанием двугранные углы по 30°. Найдите объем пирамиды.

Вариант 2

1. В основании призмы лежит треугольник, у которого одна сторона равна 6 см, а две другие по 5 см. Боковое ребро равно 4 см и составляет с плоскостью основания угол в 45°. Найдите объем призмы.

2. Высота основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, боковое ребро – b. Вычислите объем пирамиды.

3. Радиусы оснований усеченного конуса равны 5 см и 13 см, образующая равна 17 см. Найдите объем усеченного конуса.

4. Сечение, перпендикулярное диаметру шара, делит этот диаметр в отношении 1 : 3. Площадь поверхности шара равна 144π см^2. Вычислите объем большего шарового сегмента, отсекаемого от шара.

5. В основании пирамиды лежит ромб со стороной a и углом 30°. Одна из боковых граней перпендикулярна основанию, а две соседние с ней грани образуют с основанием двугранные углы по 45°. Найдите объем пирамиды.

Контрольная работа № 5. Комбинации тел

Вариант 1

1. В цилиндр вписана правильная треугольная призма. Найдите отношение площади боковой поверхности призмы к площади боковой поверхности цилиндра.

2. Дан конус, у которого радиус основания равен 12 см и высота равна 16 см. В этот конус вписана сфера и вокруг него описана сфера. Определите радиусы этих сфер.

3. В сферу радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида. Найдите объем пирамиды, если угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости основания равен α.

4. В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб с ребром 5 так, что одно основание лежит на основании пирамиды, а вершины противоположного ему основания – на боковых ребрах. В пирамиде с наименьшим объемом вычислите угол наклона боковой грани к плоскости основания.

5. Два шара расположены так, что центр меньшего лежит на поверхности большего. Найдите объем общей части шаров, если радиусы шаров равны R и $\frac{R}{2}$.

Вариант 2

1. В цилиндр вписана правильная четырехугольная призма. Найдите отношение площади боковой поверхности призмы к площади боковой поверхности цилиндра.

2. Дан конус, у которого радиус основания равен 15 см и высота равна 8 см. В этот конус вписана сфера и вокруг него описана сфера. Определите радиусы этих сфер.

3. В сферу радиуса R вписана правильная треугольная пирамида. Найдите объем пирамиды, если угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости основания равен α.

4. В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб с ребром 8 так, что одно основание лежит на основании пирамиды, а вершины противоположного ему основания – на боковых ребрах. В пирамиде с наименьшим объемом вычислите угол наклона бокового ребра к плоскости основания.

5. Два шара расположены так, что центр меньшего лежит на поверхности большего. Найдите объем общей части шаров, если радиусы шаров равны R и $\frac{R}{3}$.

Контрольная работа № 6. Итоговая по программе 11 класса

Вариант 1

1. Даны векторы $\overrightarrow{AB}\{4; -2; 2\}$ и $\overrightarrow{BC}\{2; 0; -2\}$. На них, как на сторонах построен параллелограмм $ABCD$. Найдите угол между его диагоналями.

2. Площадь основания конуса равна S, угол наклона образующей к плоскости основания равен 30°. Определите площадь сечения, проведенного через две образующие, угол между которыми равен 45°.

3. Основанием пирамиды является ромб с острым углом α. Боковые грани наклонены к плоскости основания под углом β. Найдите объем пирамиды, если радиус вписанного в ромб круга равен r.

4. В правильную четырехугольную усеченную пирамиду вписан шар радиуса R. Угол наклона боковой грани к плоскости нижнего основания равен φ. Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды.

5. Радиус основания конуса равен R, высота – $2R$. В конус вписан цилиндр наибольшего объема. Найдите объем и площадь полной поверхности цилиндра.

Вариант 2

1. Даны векторы $\overrightarrow{AB}\{3; -6; 3\}$ и $\overrightarrow{BC}\{9; 0; -3\}$. На них, как на сторонах построен параллелограмм $ABCD$. Найдите угол между его диагоналями.

2. Площадь основания конуса равна S, угол наклона образующей к плоскости основания равен 45°. Определите площадь сечения, проведенного через две образующие, угол между которыми равен 60°.

3. Основанием пирамиды является ромб со стороной a и острым углом α. Боковые грани наклонены к плоскости основания под углом β. Найдите объем пирамиды.

4. В правильную треугольную усеченную пирамиду вписан шар радиуса R. Угол наклона боковой грани к плоскости нижнего основания равен φ. Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды.

5. Радиус основания конуса равен R, высота – $3R$. В конус вписан цилиндр наибольшего объема. Найдите объем и площадь полной поверхности цилиндра.

Контрольная работа № 7. Итоговая по курсу геометрии (7–11 классы)

Вариант 1

1. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Площади треугольников ABP, BCP и CDP равны соответственно 15 см^2, 10 см^2 и 20 см^2. Найдите площадь треугольника ADP.

2. В равнобедренную трапецию, основания которой равны a и b, вписана окружность. Вычислите длину этой окружности.

3. В правильной треугольной пирамиде с высотой h через сторону основания длины a проведена плоскость, пересекающая противоположное боковое ребро под прямым углом. Найдите площадь сечения пирамиды.

4. Секущая плоскость делит боковые ребра треугольной пирамиды в отношениях (считая от вершины) $1:2$, $2:3$, $2:1$. В каком отношении эта плоскость разделит объем пирамиды (считая от вершины)?

5. Найдите угол между образующей и основанием усеченного конуса, площадь полной поверхности которого вдвое больше площади поверхности вписанного в него шара.

Вариант 2

1. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Площади треугольников ABP, BCP и CDP равны соответственно 15 см^2, 30 см^2 и 40 см^2. Найдите площадь треугольника ADP.

2. В равнобедренную трапецию, основания которой равны a и b, вписана окружность. Вычислите площадь круга.

3. В правильной треугольной пирамиде с боковым ребром b через сторону основания длины a проведена плоскость, пересекающая противоположное боковое ребро под прямым углом. Найдите площадь сечения пирамиды.

4. Секущая плоскость делит боковые ребра треугольной пирамиды в отношениях (считая от вершины) 3 : 2, 2 : 1, 1 : 2. В каком отношении эта плоскость разделит объем пирамиды (считая от вершины)?

5. Найдите угол между образующей и основанием усеченного конуса, площадь полной поверхности которого втрое больше площади поверхности вписанного в него шара.

Ответы к тестам

№ теста	Вариант	A1	A2	A3	A4	A5	A6	B1	B2	C1
1	1	2	1	4	–	–	–	$\{-1; -1; 1\}$	$\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{20}{3}\right)$	Да, $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$
	2	3	4	1	–	–	–	$\{1; -1; -1\}$	$\left(\frac{7}{3}; 1; \frac{11}{3}\right)$	Да, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$
2	1	1	3	2	–	–	–	$\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$	$n = 6, \vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{c}$	$m = \pm 1, n = -1;$ $m = \pm 1, n = -2;$
	2	4	1	3	–	–	–	$\left(0; -\frac{7}{2}; 0\right)$	$m = -11, \vec{c} = -5\vec{a} + 3\vec{b}$	$m = \pm 1, n = -1$
3	1	4	3	4	–	–	–	$\{1; 3; -1\}$	-220	$-\frac{a^2}{2}$
	2	3	1	2	–	–	–	$\{-2; -2; -4]$	-295	$-a^2$
4	1	4	2	1	–	–	–	$\arccos\frac{16}{21}$	$(13; -16; -7)$	$3x + y - 2z + 8 = 0$
	2	1	3	2	–	–	–	$\arccos\frac{8}{9}$	$(-13; -4; -20)$	$x + 5y + 6z - 9 = 0$

№ теста	Вариант	A1	A2	A3	A4	A5	A6	B1	B2	C1
5	1	2	4	3	–	–	–	$x^2 + y^2 = 1$	5	$x^2 + z^2 = 9$
	2	1	3	4	–	–	–	$x^2 + y^2 = 4$	15	$x^2 + y^2 = 9$
6	1	3	1	2	–	–	–	$(-1; -4)$	$(-1; 1; -2)$	$(0; 2; -4)$
	2	4	2	3	–	–	–	$(-1; 13)$	$(-2; 5; 6)$	$(-2; 5; 1)$

№ теста	Вариант	A1	A2	A3	A4	A5	A6	B1	B2	B3	B4	C1	C2
7	1	2	1	4	3	2	4	Ромб	$\left(\frac{1}{2}; 0; 2\right), \sqrt{17}$	$(0; 0; -3)$	1	$\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{x}{3} - \frac{y}{4} + \frac{z}{5} - 1 = 0$
	2	2	3	4	2	1	3	Равнобедренная трапеция	$\left(1; \frac{1}{2}; 1\right), 3$	$(7; 0; 0)$	2	$\arcsin\frac{\sqrt{6}}{6}; \sqrt{6}$	$\frac{x}{5} + \frac{y}{3} - \frac{z}{4} + 1 = 0$

№ теста	Вариант	A1	A2	A3	A4	A5	A6	B1	B2	C1
8	1	4	1	3	–	–	–	5 см	$\sqrt{\frac{h^2 + 4r^2}{2}}$	$\operatorname{arctg}(\pi \operatorname{tg}\varphi)$
	2	3	4	2	–	–	–	3 см	$\sqrt{2a^2 - 4r^2}$	$\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\pi}\right)$

№ теста	Вариант	A1	A2	A3	A4	A5	A6	B1	B2	C1
9	1	2	3	1	–	–	–	$\frac{R^2\sqrt{7}}{4}$	3 см	$\pi l^2 \sin\alpha \operatorname{tg}\alpha$
	2	1	2	4	–	–	–	$\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$	9 см	$\frac{\pi m^2 \operatorname{ctg}\varphi}{\sin\varphi}$
10	1	4	1	2	–	–	–	17	$a < 29$	$8\sqrt{2}$
	2	3	4	3	–	–	–	13	$a > -14$	$8\sqrt{5}$
11	1	2	3	4	–	–	–	676π	$4x - 6y + 2z + 7 = 0$	$(-4; 5; 2), \left(\frac{17}{7}; \frac{5}{7}; \frac{29}{7}\right)$
	2	1	2	1	–	–	–	2704π	$3x - 4y + 8z - 12 = 0$	$(3; 0; 7), (1; 2; 3)$
12	1	3	1	4	–	–	–	$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$	–	$\frac{2}{3}\left(3 + \sqrt{6}\right)R$
	2	2	3	2	–	–	–	$\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$	–	$\left(2 + \sqrt{2}\right)R$
13	1	2	3	1	–	–	–	$\frac{(a+b)^2\sqrt{3}}{4}$	$\frac{2-\sqrt{3}}{2}a$	$\frac{3\sqrt{39}}{8\pi}$
	2	1	4	2	–	–	–	$\frac{\pi ab}{3}$	$2\left(2 + \sqrt{3}\right)R$	$\frac{\sqrt{7}}{\pi}$

№ теста	Вариант	A1	A2	A3	A4	A5	A6	B1	B2	B3	C1	C2
14	1	3	2	4	1	3	2	12 см²	8 см, 11 см, 11 см	$\sqrt{3}R, \frac{R}{2}$	$\sqrt{9-4\sin^2\alpha} : 3$	9 см
	2	1	3	2	4	4	1	14 см²	12 см, 9 см, 9 см	$\sqrt{3}R, \frac{\sqrt{3}}{2}R$	$\sqrt{16-9\sin^2\alpha} : 4$	11 см

№ теста	Вариант	A1	A2	A3	A4	A5	A6	B1	B2	C1
15	1	3	4	3	–	–	–	$\sqrt{83}$ см	$\frac{a^3\cos\alpha\,\mathrm{tg}\beta}{2\sin^2\alpha}$	$\left(\frac{l\sin 2\alpha}{2\cos\alpha+\sqrt{2}\sin\alpha}\right)^3$
	2	3	4	1	–	–	–	$\sqrt{57}$ см	$\frac{1}{4}c^3\sin 2\alpha\,\mathrm{tg}\beta$	$\left(\frac{l\sin 2\alpha}{\sqrt{2}\cos\alpha+2\sin\alpha}\right)^3$
16	1	2	2	4	–	–	–	960	$\frac{1024}{27}\pi$	$\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{8\pi+3\sqrt{3}}$
	2	3	4	2	–	–	–	$\frac{576}{5}\sqrt{3}$	$\frac{16000}{729}\pi$	$\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{10\pi+3\sqrt{3}}$
17	1	3	2	1	–	–	–	$\sqrt[4]{\frac{3}{4}}abc$	$250\sqrt{3}$	120
	2	1	4	3	–	–	–	$\frac{\sqrt{2}}{2}abc$	$60\sqrt{2}$	240

№ теста	Вариант	A1	A2	A3	A4	A5	A6	B1	B2	C1
18	**1**	2	3	4	–	–	–	$\dfrac{a^3\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}{12\sqrt{3-\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}}}$	60°	$\dfrac{144}{5}\pi$
	2	3	1	2	–	–	–	$\dfrac{a^3\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}{6\sqrt{-\cos\alpha}}$	45°	$\dfrac{75}{4}\pi$
19	**1**	4	2	1	–	–	–	$\dfrac{a^3-b^3}{24}\operatorname{tg}\alpha$	576π	$\dfrac{a^2+4ab+7b^2}{8(a^2+ab+b^2)}$
	2	1	3	4	–	–	–	$\dfrac{a^3-b^3}{6}\operatorname{tg}\alpha$	8064π	$\dfrac{a^2+4ab+7b^2}{7a^2+4ab+b^2}$
20	**1**	3	1	2	–	–	–	$\dfrac{4}{3}\pi R^3\operatorname{tg}^3\dfrac{\alpha}{2}$	$\dfrac{26}{81}\pi R^3$	960π
	2	2	4	3	–	–	–	$\dfrac{4}{3}\pi R^3\operatorname{tg}^3\left(45°-\dfrac{\alpha}{2}\right)$	$\dfrac{46}{81}\pi R^3$	$\dfrac{1444}{3}\pi$
21	**1**	1	3	2	–	–	–	$48\sqrt{3}$ см^2	$\dfrac{4}{3}R;\ \dfrac{2\sqrt{2}}{3}R$	$\dfrac{7-\sqrt{17}}{8}p$
	2	3	1	4	–	–	–	$108\sqrt{3}$ см^2	$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}R;\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}R$	$\dfrac{1+\sqrt{17}}{16}p$

№ теста	Вариант	A1	A2	A3	A4	A5	A6	B1	B2	B3	B4	C1	C2
22	**1**	3	1	4	4	4	1	105 см³	$24\sqrt{3}$ см³	$\frac{7\pi}{54}l^3\sin\varphi\sin\frac{\varphi}{2}$	$\frac{8\sqrt{3}}{27}R^3$	$\frac{32}{3}R^3\frac{\sqrt{\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$	$\mathrm{arctg}\,2\sqrt{2}$
	2	2	4	1	2	2	4	315 см³	$32\sqrt{2}$ см³	$\frac{13\pi}{96}l^3\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}$	$\frac{\sqrt{6}\pi}{8}a^3$	$\frac{9}{2}R^3\frac{\sqrt{\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$	$\mathrm{arctg}\,2$
23	**1**	4	3	2	1	4	2	5	S_1/S_2	36π	$\frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{12}\mathrm{tg}\,\alpha$	$\frac{32}{3}R^2$	$\sqrt{6}R,\ 2\sqrt{3}R^3$
	2	3	1	4	1	2	3	6	V_1/V_2	16π	$\frac{c^3}{24}\sin 2\varphi\,\mathrm{tg}\,\alpha$	$\frac{9}{4}\pi a^2$	$\sqrt{3}R,\ \sqrt{3}R^3$
24	**1**	2	4	1	3	4	1	$16\sqrt{3}-8\pi$ см²	$\frac{(a^2-b^2)\sqrt{3}}{4\cos\varphi}$	(1; –3; 0)	$\frac{3h^2+a^2}{6h}$	$\frac{S}{3}$	$\frac{a}{4h}\left(\sqrt{4h^2+a^2}-a\right)$
	2	4	2	3	1	2	3	$36\sqrt{3}-18\pi$ см²	$\frac{a^2-b^2}{\cos\varphi}$	(10; 0; 25)	$\frac{2h^2+a^2}{4h}$	$3S$	$\frac{a}{12h}\times\left(\sqrt{12h^2+a^2}-a\right)$

Ответы к самостоятельным работам

№ п/п	Вари-ант	Задание 1	Задание 2	Задание 3
1	1	$\vec{n} = 13\vec{i} - 13\vec{j} + 8\vec{k}, \lvert\vec{n}\rvert = \sqrt{402}$	$m = -\frac{10}{3}, n = -\frac{7}{10}, 3\vec{a} = -2\vec{b}$	$\vec{m} = -\frac{21}{10}\vec{l} + \frac{7}{8}\vec{n}$
	2	$\vec{n} = -8\vec{i} - 5\vec{j} + 11\vec{k}, \lvert\vec{n}\rvert = \sqrt{210}$	$m = -\frac{7}{3}, n = -\frac{9}{20}, 3\vec{a} = -5\vec{b}$	$\vec{n} = \frac{10}{9}\vec{l} - \frac{5}{6}\vec{m}$
2	1	60°	−38	$n = -16$
	2	30°	38	$n = 13$
3	1	$\arccos\frac{14}{15}$	$5x - y - 3z + 19 = 0$	$\frac{2\sqrt{14}}{7}$
	2	$\arccos\frac{2}{15}$	$4x - 4y + z + 10 = 0$	$\frac{13\sqrt{30}}{15}$
4	1	3 : 2 и 1 : 1	$\sqrt{S_1^2 + S_2^2}$	15 или $\frac{15}{7}$
	2	4 : 3 и 1 : 1	$\sqrt{S^2 - S_0^2}$	12,5 или $\frac{25}{14}$
5	1	$\frac{\pi R^2(\sin\alpha + 1)}{\sin\alpha}$	$\frac{R\sqrt{4h^2 + 3R^2}}{4}$	$\frac{Sh}{\pi l}$

№ п/п	Вари-ант	Задание 1	Задание 2	Задание 3
	2	$\frac{\pi R^2(\cos\alpha+1)}{\cos\alpha}$	$\frac{R\sqrt{2h^2+R^2}}{2}$	$\frac{\pi lS}{h}$
6	1	6,5 см	$\sqrt{38}$	8 см или $2\sqrt{34}$ см
	2	2,5 см	6	6 см или $2\sqrt{41}$ см
7	1	36 см^3	$\frac{d^3}{4}\sin 2\beta\cos\beta\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$	52π
	2	225 см^3	$\frac{d^3}{4}\sin 2\beta\cos\beta\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$	80π
8	1	$Sl\cos\alpha$	$\frac{1}{12}(b^3-a^3)\mathrm{tg}\alpha$	1600π см^3 и 1320π см^2
	2	$\frac{V}{l\cos\alpha}$	$\frac{1}{24}(b^3-a^3)\mathrm{tg}\alpha$	1344π см^3 и 672π см^2
9	1	$\frac{500}{3}\pi$ см^3 и 100π см^2	$\frac{64}{3}\pi$ см^3	$\frac{1}{6}\pi a^3\sin\frac{\alpha}{2}$
	2	288π см^3 и 144π см^2	99π см^3	$\frac{4}{3}\pi R^3\sin^2\frac{\alpha}{2}$

№ п/п	Вариант	Задание 1	Задание 2	Задание 3
10	1	$2\pi R^3$ и $6\pi R^2$	$\dfrac{l^2}{2\sqrt{l^2 - R^2}}$	$\dfrac{\pi l^3}{27}\sin 2\alpha\cos\alpha$ и $\dfrac{2\pi l^2}{9}\sin 2\alpha$
	2	$\dfrac{1}{4}\pi h^3$ и $\dfrac{3}{2}\pi h^2$	$\dfrac{h^2 + R^2}{2h}$	$\dfrac{2\pi R^3}{27}\operatorname{tg}\alpha$ и $\dfrac{4\pi R^2}{9}\operatorname{tg}\alpha$
11	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{8}l^3\sin 2\alpha\cos\alpha$	$\dfrac{a\left(1+\cos^2\alpha\right)}{2\sin 2\alpha}$	$\dfrac{4\pi}{3}\left(7\sqrt{15} - 15\sqrt{3}\right)$ см^3
	2	$\dfrac{\sqrt{3}}{4}h^3\operatorname{ctg}^2\alpha$	$b\operatorname{ctg}\alpha\sqrt{1+\cos^2\alpha}$	$4\pi\left(19\sqrt{39} - 65\sqrt{3}\right)$ см^3
12	1	$8\sqrt[4]{2}$ см	$\dfrac{a\left(4b^2 - a^2\right)}{12}$	$8\sqrt{3}R^3$
	2	$12\sqrt{2}$ см	$\dfrac{d^2\sqrt{4b^2 - d^2}}{12}$	$\dfrac{8\sqrt{3}}{27}R^3$
13	1	$9\sqrt{5}$ см и $8\sqrt{10}$ см	$\dfrac{4a+3b}{7}$	$\dfrac{24}{5}S$
	2	$\dfrac{9}{2}\sqrt{5}$ см и $4\sqrt{10}$ см	$\dfrac{2a+5b}{7}$	$\dfrac{20}{3}S$

№ п/п	Вари-ант	Задание 1	Задание 2	Задание 3
14	1	$48°, 68°, 64°$	6 см и 8 см	$2\left(1+\sqrt{3}\right)r$
	2	$22°, 90°, 68°$	5 см и 12 см	$\frac{\sqrt{3}-1}{4}a$
15	1	$\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$	$\frac{dS}{2Q}$	$\frac{V}{30}$
	2	$\frac{aS\sqrt{3}}{2}$	$\frac{2HQ}{S}$	$\frac{2V}{75}$

Ответы к контрольным работам

№ п/п	Вари-ант	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Задание 5
1	1	$\sqrt{13}$	$\arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$	$(2; 2; -2)$	$2x-2y+3z-1=0$	$\frac{\sqrt{29}}{2}$
	2	$\sqrt{35}$	$\arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$	$(-1; 2; 3)$	$2x-3y-2z+15=0$	$\frac{5\sqrt{5}}{2}$

№ п/п	Вари-ант	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Задание 5
2	1	64 см^2 и 80 см^2	$\frac{8}{\pi}$ см^2	$\frac{\pi(2R\sin\alpha + h\cos\alpha)h}{\sin^2\alpha}$	$\frac{a^2 + r^2}{2a}$	16π и 100π
	2	240 см^2 и 400 см^2	$\frac{5}{\pi}$ см^2	$\pi(2R - l\sin\alpha)l$	$\sqrt{2aR - a^2}$	17π и 84π
3	1	$48\sqrt{11}$ см^3	$\frac{27}{8}a^3$	$\frac{(S_1 + S_2)a}{2}$	105 см^3	16π см^3
	2	$20\sqrt{11}$ см^3	$\frac{2\sqrt{3}}{3}h^3$	$\frac{2V}{S_1 + S_2}$	192 см^3	54π см^3
4	1	$6\sqrt{6}$ см^3	$\frac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{12}$	1400π см^3	$\frac{224}{3}\pi$ см^3	$\frac{\sqrt{3}}{24}a^3$
	2	$24\sqrt{2}$ см^3	$\frac{a^2\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{6}$	1295π см^3	243π см^3	$\frac{1}{24}a^3$
5	1	$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$	6 см и 12,5 см	$\frac{4}{3}R^3\sin^2\alpha\sin^2 2\alpha$	arctg4	$\frac{13}{192}\pi R^3$
	2	$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$	$\frac{15}{4}$ см и $\frac{289}{16}$ см	$\frac{\sqrt{3}}{2}R^3\sin^2\alpha\sin^2 2\alpha$	$\mathrm{arctg}\,2\sqrt{2}$	$\frac{7}{324}\pi R^3$

№ п/п	Вари-ант	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Задание 5
6	1	$\arccos\frac{2}{\sqrt{15}}$	$\frac{\sqrt{2}}{3\pi}S$	$\frac{4r^3\operatorname{tg}\beta}{3\sin\alpha}$	$\frac{16R^2}{\sin^2\varphi}$	$\frac{8}{27}\pi R^3$ и $\frac{16}{9}\pi R^2$
	2	$\arccos\frac{1}{\sqrt{15}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2\pi}S$	$\frac{a^3}{6}\sin^2\alpha\operatorname{tg}\beta$	$\frac{12\sqrt{3}R^2}{\sin^2\varphi}$	$\frac{4}{9}\pi R^3$ и $\frac{20}{9}\pi R^2$
7	1	30 см^2	$\pi\sqrt{ab}$	$\frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2+3h^2}}$	4 : 41	$\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$
	2	20 см^2	$\frac{\pi ab}{4}$	$\frac{a^2\sqrt{3b^2-a^2}}{4b}$	2 : 13	$\arccos\sqrt{\frac{3}{7}}$

Содержание

Учебно-методическое пособие

Составитель
Рурукин Александр Николаевич

КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ
ГЕОМЕТРИЯ
11 класс

Выпускающий редактор *Юлия Антонова*
Дизайн обложки *Анастасии Хомяк*

По вопросам приобретения книг издательства «ВАКО» обращаться в ООО «Образовательный проект» по телефонам: 8 (495) 778-58-27, 746-15-04.
Сайт: www.obrazpro.ru

Приглашаем к сотрудничеству авторов.
Телефон: 8 (495) 507-33-42. Сайт: www.vaco.ru

Налоговая льгота –
Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93-953000.
Издательство «ВАКО»

Подписано к печати 23.04.2013. Формат 84×108/32.
Бумага офсетная. Гарнитура Newton. Печать офсетная.
Усл. печ. листов 5,04. Тираж 10 000 экз. Заказ № 1148

Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография»,
филиал «Чеховский Печатный Двор».
142300 Московская область, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1.
Сайт: www.chpd.ru, e-mail: sales@chpk.ru, 8(495)988-63-87.

КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Содержащиеся в пособии контрольно-измерительные материалы (КИМы), аналогичные материалам ЕГЭ, составлены в соответствии с программой общеобразовательных учреждений по геометрии и учитывают возрастные особенности учащихся. В конце издания приведены тексты самостоятельных и контрольных работ, а также ответы ко всем заданиям.

ISBN 978-5-408-01212-1

11
КЛАСС